



Universidad de la República

Facultad de Psicología

“Estudio sobre el impacto del uso de la Plataforma Adaptativa de Matemática (PAM) y de un juego en el desempeño en fracciones”

Estudiante: Florencia Silva Zerpa

C.I.: 4.029.033-2

Tutor: Alejandro Maiche Marini

Fecha: 30/10/2017

Ciudad: Montevideo

Resumen

En Uruguay el Plan Ceibal ha promovido el uso de plataformas educativas como recursos para la enseñanza, como es el caso de la PAM¹. En este trabajo evaluamos la efectividad del uso de la PAM y de un juego, en 5° grado, para el desempeño en fracciones, dado que es uno de los temas que mayor dificultad presenta en los escolares (Siegler, Fazio, Bailey & Zhou, 2013).

El estudio plantea un diseño experimental en el que se compara el desempeño en fracciones de dos grupos: uno que se interviene utilizando la PAM y otro usando el juego. La intervención para los dos grupos se basó en 14 sesiones de 20 minutos de utilización del juego o la PAM en el contexto de aula. Al mismo tiempo, se exploran los posibles efectos del uso de la PAM y del juego sobre la actitud hacia las matemáticas (Bazán, Luis & Sotero, 1998).

Los resultados muestran que los niños que usaron la PAM obtienen mejores desempeños en comparación con los niños que utilizaron el juego. En cuanto a la actitud hacia las matemáticas no se observan ganancias a partir de la intervención. Sin embargo, la actitud hacia las matemáticas es capaz de predecir el desempeño en el pre-test de fracciones.

Estos resultados sugieren que el uso de la PAM podría tener efectos positivos para el aprendizaje de fracciones a través del entrenamiento intensivo mediante sus actividades.

Palabras clave: Fracciones, Actitud hacia las matemáticas, Software educativo.

¹ La Plataforma Adaptativa de Matemática (PAM) es desarrollada por una empresa Alemana denominada Bettermarks (<http://uy.bettermarks.com>) y es distribuida y promovida por el Plan Ceibal en Uruguay desde el año 2013.

Introducción

Las matemáticas ocupan un lugar importante en el currículo escolar ya que resultan fundamentales para la mayor parte de las actividades cotidianas de la vida moderna (como por ejemplo entender los precios en un supermercado, usar un cajero automático, comunicarse por teléfono móvil, realizar un trámite bancario o comprender un artículo periodístico, entre otras). No obstante esto, nuestro país muestra desempeños muy bajos en dicha área como se evidencia en los resultados de las pruebas PISA 2015 - Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA por su sigla en inglés). En dicha evaluación, se muestra que el 52% de los estudiantes uruguayos de 15 años de edad no logra llegar al umbral mínimo de desempeño en matemática definido por PISA. Es decir, que “no son capaces de interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren hacer inferencias directas, extraer información relevante a partir de una sola fuente, emplear algoritmos básicos, fórmulas, procedimientos o convenciones para resolver problemas con números enteros” (INEEd, 2017, p.74). Estos valores preocupan especialmente ya que unidos a los desempeños en ciencias y lengua constituyen las competencias que forman parte del umbral mínimo para seguir aprendiendo y participar adecuadamente en la sociedad. En este sentido, un estudio reciente del INEEEd sobre trayectorias educativas muestra que los resultados en las pruebas PISA constituyen un predictor importante de la trayectoria posterior de los estudiantes en el sistema educativo.

Uno de los contenidos curriculares, dentro del área de matemática, que mayores problemas presenta para su aprendizaje es el de fracciones. Si bien el concepto de fracción está presente durante toda la etapa escolar (en nuestro país desde los 3 años hasta 6° grado), al egresar del ciclo escolar, los alumnos tienen gran conocimiento sobre números naturales pero no sobre los números fraccionarios (Brusa & Corujo, 2014). Las dificultades en el aprendizaje de las fracciones son un problema educativo

serio, extendiéndose dicha dificultad a adolescentes y adultos. El aprendizaje de las fracciones requiere de una reorganización del conocimiento numérico, ya que los niños que no han aprendido las fracciones suelen atribuir a los números racionales las propiedades de los números enteros (como por ejemplo que tienen sucesores únicos, que pueden ser representados por un solo símbolo, que son contables, que nunca disminuyen con la multiplicación, ni aumentan con la división) (Siegler et al., 2013). En el medio local también se verifica esta dificultad, las cuales pueden tener múltiples factores, entre ellos el propio objeto matemático, su aprendizaje o problemas de su enseñanza; siendo el concepto de fracción difícil y requiriendo de una construcción personal que lleva tiempo. Los alumnos deben además romper con esas certezas que han construido en función de los número naturales, dichas ideas pueden actuar como obstáculos en el aprendizaje de las fracciones (Brusa & Corujo, 2014). Así, los contenidos trabajados en la escuela primaria referidos a fracciones deben ser luego retomados en secundaria ya que la mayoría de los alumnos no llegan a dominarlos (Orton, 1996).

Si bien son diversas las variables que influyen en el aprendizaje de la matemática, la actitud hacia las matemáticas ha sido clave al estudiar dicho proceso ya que, al parecer, condiciona procesos psicológicos que se relacionan directamente con el rendimiento escolar (Sánchez Ruiz, & Ursini, 2010). Por esta razón, el presente estudio incorpora la medición de la actitud hacia las matemáticas, en el supuesto que esta puede ser un factor importante para comprender el rendimiento académico de los estudiantes en dicha área. Toda actitud está constituida por los siguientes componentes: cognitivos (creencias, pensamientos, ideas, prejuicios del sujeto sobre el objeto de la actitud), afectivo (emociones y afectos, positivos o negativos, del sujeto hacia el objeto) y comportamental (cómo se comporta el sujeto respecto al objeto). Siendo así la actitud hacia las matemáticas un fenómeno que está compuesto por

sentimientos (componente afectivo), creencias (cognitivo) y tendencias de los estudiantes a actuar de una forma u otra sobre el objeto matemático (comportamental) (Bazán et al., 1998). Un estudio español, en el que participaron 1220 estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria, muestra en el análisis de sus resultados que las actitudes y el desempeño correlacionan y se influyen mutuamente, mostrando que el aprendizaje de las matemáticas puede verse afectado de forma positiva o negativa según cómo forme el estudiante sus actitudes frente a las matemáticas (Mato & de la Torre, 2009). Asimismo, Hidalgo, Maroto & Palacios (2005) muestran en un estudio realizado a 3187 estudiantes de entre 8 y 19 años que los mejores rendimientos en matemática son de aquellos que manifestaron gustarles las matemáticas, pero mencionan no tener certezas de cuál es la causa y cuál es la consecuencia (¿la actitud es consecuencia del bajo rendimiento o viceversa?).

Si bien la actitud hacia las matemáticas parece ser un buen predictor de los desempeños, estudios clásicos muestran que las características familiares (nivel educativo, cultural y económico de los padres, posición social, entre otras) son las variables que mayor incidencia tienen en los resultados de los estudiantes. Se destaca entre ellas el efecto positivo de la educación de los padres sobre el desempeño académico de los hijos (Calero & Escardíbul, 2007; Cordero, Crespo, & Pedraja, 2013) o incluso de la variable inteligencia de los niños (Cerdeira, Ortega, Pérez, Flores & Melipillán, 2011).

El peso de las variables familiares podría ser contrarrestado por la actitud hacia las matemáticas y, al mismo tiempo, algunos autores plantean que la motivación de los niños hacia la matemática puede estar mediada por el uso de tecnología. En una investigación realizada en México encontraron que la actitud positiva hacia las matemáticas se eleva cuando los estudiantes aprenden dicha disciplina con el apoyo de la tecnología computacional (Ursini, Sánchez & Orendain, 2004). En nuestro país (y

en el mundo) existe un fuerte debate respecto a la efectividad en los aprendizajes gracias al uso de ordenadores y software educativos. Respecto al uso de la tecnología en la educación son diversos los estudios que se han desarrollado, algunos de estos hallazgos sugieren que no deberíamos esperar impactos ampliamente positivos o resultados negativos, de las inversiones en TIC en las escuelas o por el uso de computadoras en el hogar (Bulman & Fairlie, 2016). En un estudio realizado en Santiago de Chile, se reporta que la herramienta tecnológica utilizada tiene importantes efectos educativos, favoreciendo habilidades de lenguaje y matemática. Dicho estudio consistió en la utilización de videojuegos autorregulados para favorecer el desarrollo de habilidades en dichas áreas, en seis colegios de Santiago en 1° y 2° año de Educación General Básica. Los niños muestran una mejoría considerable en las pruebas post realizadas para cada área (Rosas et al., 2011).

En Uruguay, mucho se ha debatido sobre los efectos del Plan Ceibal en la enseñanza de la matemática. Un estudio realizado hace algunos años (De Melo, Machado, Miranda & Viera, 2013) afirmaba que el programa “un computador por niño” (OLPC por sus siglas en inglés), no había tenido, hasta ese momento, impacto en matemática y lengua, confirmando que la tecnología por sí sola no impacta en los aprendizajes. En dicha investigación se tomaron los datos de cuatro evaluaciones de aprendizajes (SERCE 2006, IECON 2009, ANEP 2009 e IECON 2012) de un panel de estudiantes. En la primera evaluación, el panel de estudiantes se encontraba en tercer año de educación primaria mientras que, en la última, estaban cursando educación secundaria o técnica. Por otro lado, hace pocos meses el Banco Mundial en su informe sobre el desarrollo de 2018 plantea que a partir de evidencia de diferentes países, los aprendizajes no mejoran por el solo hecho de la incorporación de la tecnología en el aula, al menos sin mediar estrategias pedagógicas. Se menciona el caso específico del programa Ceibal en Uruguay que ha evolucionado desde sus inicios añadiendo la

formación en TIC para los docentes, así como la realización de nuevas evaluaciones, esperando que se publiquen resultados a finales de 2017 que puedan dar cuenta de nuevas repercusiones en la educación (Banco Mundial, 2017). Los promotores de la introducción de tecnología en los procesos de enseñanza-aprendizaje, argumentan que los programas como Ceibal no nacieron con la vocación de solucionar los problemas en el aprendizaje de matemática o lengua, sino para garantizar la igualdad en el acceso a la información (digital). Esto es lo que se conoce como objetivo de la equidad social en el acceso a la información.

Sin embargo, no se puede perder de vista que la tecnología permite el uso de herramientas específicas (como la PAM) cuyo uso continuado y extendido en las aulas se espera que contribuya a la obtención de mayores logros en el desempeño de competencias específicas. El presente estudio pretende poner a prueba esta hipótesis a través de un diseño de intervención experimental en el aula utilizando la plataforma PAM y un juego de computadora para fortalecer el aprendizaje específico de fracciones en niños de 5º año escolar.

Recientemente se ha dado a conocer en nuestro país una investigación, encargada por el Plan Ceibal al Centro de Investigaciones Económicas, en la que se evalúa el impacto de la PAM en los resultados de los aprendizajes en matemática; en el informe se constata una ganancia en los aprendizajes de matemática, a partir de información de una muestra de 2143 estudiantes distribuidos en 237 escuelas públicas y privadas de todo el país (estudio longitudinal - 2013/2016). Los resultados evidencian un efecto positivo en la ganancia de los aprendizajes (Perera & Aboal, 2017). Por otro lado, la empresa que comercializa la PAM (bettermarks) realizó un estudio donde analiza la efectividad de este software educativo para la enseñanza de las matemáticas en las escuelas, en el que dan cuenta de la eficacia de dicho software, determinando que las ganancias de los estudiantes fueron dependientes de la dosis del tratamiento y

mayores en los estudiantes de alta capacidad y baja ansiedad matemática (Scharnagl, Evanschitzky, Streb, Spitzer, & Hille, 2014).

Siguiendo esta línea, en la presente investigación, esperamos que el grupo que utiliza la plataforma PAM muestre mejores resultados en el desempeño de la prueba post-test de fracciones que el grupo que utilizó el juego. Creemos además que a mayor uso de la tecnología habrá un incremento positivo de la actitud hacia las matemáticas por parte de los niños; y que el puntaje obtenido en el cuestionario de actitud hacia las matemáticas predice el desempeño de los niños en fracciones.

Metodología

Sujetos

El estudio parte de una muestra compuesta por 64 niños (28 niñas, 35 varones) de tres grupos de 5° año de primaria (cuyas edades oscilan entre 9 y 13 años) pertenecientes a dos escuelas de la ciudad de Montevideo. Fueron asignados al grupo que utilizó la plataforma PAM 32 niños (14 niñas y 18 varones) y formaron parte del grupo que utilizó el juego también 32 niños (igual distribución por sexo). Para la distribución de los grupos, PAM o juego, se utilizaron los criterios descritos más adelante en el desarrollo del diseño.

Para los análisis se descartaron los datos de cinco estudiantes: cuatro pertenecientes al grupo de la PAM que no usaron el software asignado y un estudiante del grupo del juego que no respondió ninguna pregunta en el pre-test de fracciones. De esta manera, se analizaron los datos de 59 niños de ambas instituciones: 28 pertenecientes al grupo de la PAM y 31 al grupo del juego.

Materiales

Prueba Pre-test y Post-test de fracciones

Con el fin de evaluar los conocimientos de los niños sobre fracciones se elaboró una prueba específica, la cual consta de 20 ítems de múltiple opción (formato papel). Para la creación de la misma se partió de una primer versión de 30 ítems que se obtuvieron (en su gran mayoría) de las evaluaciones SEA² y otras creadas a partir del conocimiento y la experiencia del autor de este trabajo. A fin de determinar los 20 ítems que conforman la prueba final, se aplicó la versión extendida de 30 ítems en dos grupos de 5° grado de una escuela del departamento de Colonia. Se realizó un estudio psicométrico de la calidad de cada uno de los 30 ítems seleccionando aquellos ítems que, cubriendo el mayor rango de dificultad, tuvieran mayor índice de discriminación. De esta manera, se obtiene una versión final de la prueba de evaluación compuesta por 20 ítems de cuatro opciones. La misma prueba fue utilizada en el pre-test y en el post-test, aunque para la aplicación como post-test se procedió a cambiar el orden de presentación de los ítems y de las opciones a fin de minimizar los efectos posibles de memoria. El puntaje se obtuvo asignando 1 a las respuestas correctas y 0 a las incorrectas o sin responder; así el puntaje máximo posible de la prueba es de 20 puntos (ver Anexo 1).

Cuestionario de Actitud hacia las matemáticas

A fin de medir el constructo sobre actitud hacia las matemáticas, utilizamos un cuestionario desarrollado por investigadores españoles que consta de 32 ítems a responder en una escala likert de 5 opciones y baremado para un muestra española

² El Sistema de Evaluación de Aprendizajes (SEA) propone la aplicación de pruebas en línea en los centro educativos uruguayos, permitiendo una cobertura nacional. Las actividades que la componen son diseñadas colaborativamente por docentes y técnicos en evaluación de la DIEE, maestros, profesores e inspectores. Ver más en: <http://www.anep.edu.uy/sea/>.

(Palacios, Arias & Arias, 2014), para su construcción y validación, dicho cuestionario fue aplicado a una muestra de 4807 estudiantes de 14 colegios de España entre 2009 y 2012 y, para dicha población, mostró indicadores psicométricos aceptables.

Se realizaron adaptaciones referidas a vocabulario para aplicárselo a niños uruguayos (ver Anexo 2). Dicho cuestionario se aplicó a ambos grupos en dos tomas (pre y post).

Test de Matrices Progresivas de Raven

A fin de evaluar las posibles modulaciones sobre el desempeño de la variable inteligencia, se aplicó el Test de Raven de manera grupal en una única instancia (Raven, 2005). Se realizó la puntuación directa, correspondiente a las series del test y posteriormente se calculó el percentil equivalente para cada niño, se descartaron los datos de cuatro niños ya que los puntajes no se encontraban dentro del rango de confianza.

Software de matemática

La intervención se basa en la utilización de dos software educativos diferentes en dos grupos. Por un lado, se utilizó la Plataforma Adaptativa de Matemática (PAM), en la cual se presentan series de actividades de 3° de primaria hasta 4° de Educación Media que abarcan todos los contenidos de matemática del programa escolar. Las series que se utilizaron fueron específicamente programadas por el autor de este trabajo. A partir de las actividades presentes en la plataforma se fueron armando las nuevas series, seleccionando las mismas según los contenidos a trabajar sobre fracciones durante la intervención; así se realizaron 30 series de actividades con una duración aproximada de resolución de 10 minutos cada una. Posteriormente durante el desarrollo de la intervención se fueron asignando, día a día, las series correspondientes a los niños de este grupo, fijando dos series por día. En la Figura 1 se muestran algunos de los ejercicios elegidos para cada una de las series a fin de

que el lector comprenda el tipo de entrenamiento que se planteaba a los niños durante las 14 sesiones previstas para el grupo.

Por otro lado, el otro grupo utilizó un juego que se compone de diferentes mini juegos: Battleship Numberline, Candy Blast, Bubble Pop y Magcom. Cada uno de ellos se enfoca en distintos aspectos de las fracciones (en concordancia con las actividades de las series de la PAM). En la Figura 2 se muestran diferentes pantallas de cada uno de los mini juegos a fin de comprobar la dinámica que se planteó a los niños durante los 14 días que duró la intervención. Con respecto a la asignación de cada mini juego, para cada día de la semana, se creó un blog en el que se les daba a los niños el enlace correspondiente a cada uno de ellos para el día. Ver diseño para mayor detalle referido a la asignación de series y juegos.

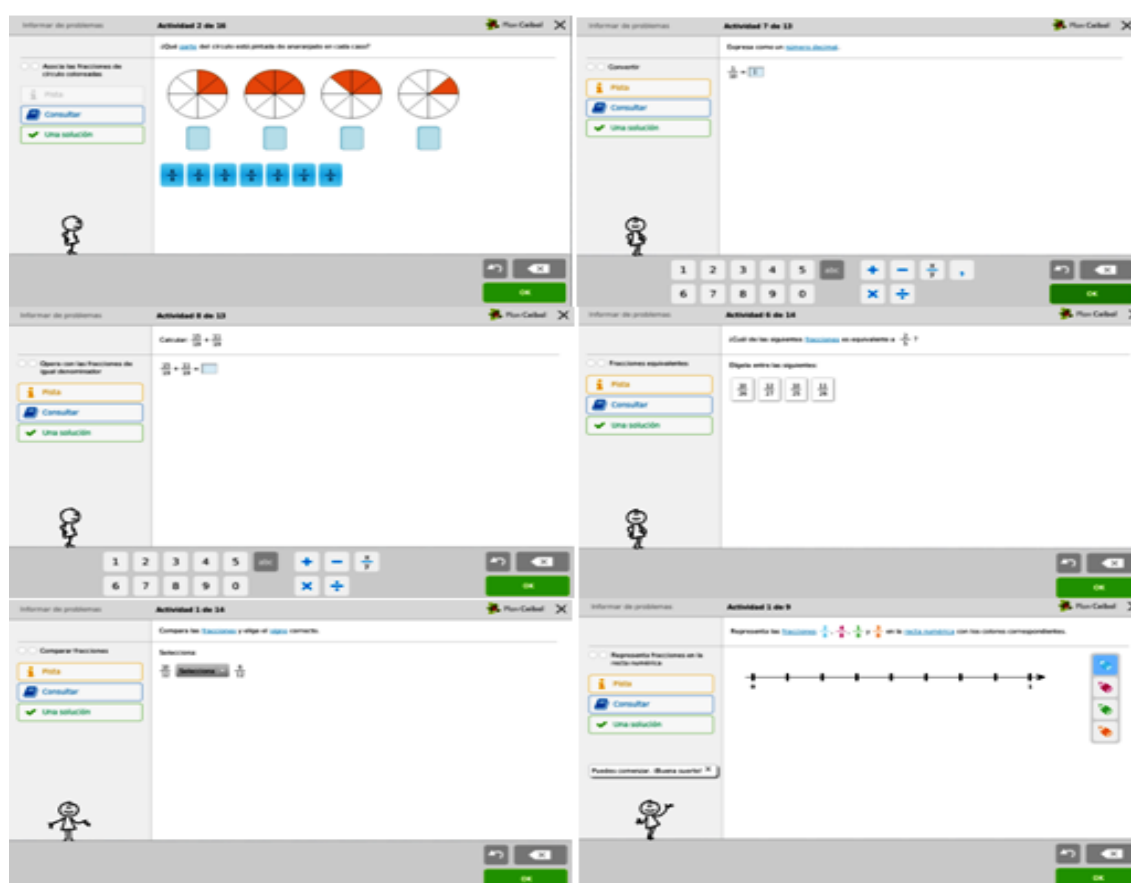


Figura 1: Pantallas que muestran la dinámica de las actividades de la PAM. De izquierda a derecha y luego hacia abajo se muestran ejemplos de actividades de identificación de una fracción, expresar una fracción en número decimal, suma de fracciones, fracciones equivalentes, identificar la fracción mayor y ubicar en la recta numérica.



Figura 2: Pantallas que muestran la dinámica de los mini juegos utilizados. En la fila de arriba: Battleship Numberline (ubicación en la recta numérica de fracciones y números decimales). En la segunda línea: Bubble Pop (fracciones equivalentes, orden de fracciones y correspondencia entre fracciones y números decimales). En la tercer línea: Candy Blast (suma de fracciones y ordenar fracciones) y Magcom (comparar fracciones).

Pregunta sobre nivel educativo de los padres

Con el fin de medir el nivel educativo de los padres de los participantes de la investigación, se solicita a cada familia que responda una pregunta en la que se les cuestiona sobre el máximo nivel educativo alcanzado por ambos padres (ver Anexo 3). El mismo se puntúa entre 0 (para quienes no tengan ningún estudio) a 9 (para quienes tengan posgrado). A partir de estos datos se computó la variable formación de los padres realizando la suma de los puntajes correspondientes al nivel educativo de cada uno de ellos.

Diseño

El diseño es un diseño experimental con evaluación pre y post intervención. A fin de mantener algunas variables controladas se procedió a conformar los grupos haciendo corresponder el desempeño en matemática a partir de los resultados del pre-test de fracciones. Para dicha distribución se agruparon los niños, por clase y sexo, en tres niveles según las puntuaciones obtenidas (puntuaciones altas, medias y bajas), posteriormente se seleccionó de forma aleatoria, dentro de cada nivel, un niño para el grupo que trabajaría con la PAM y otro para el grupo que usaría el juego, de esta manera nos aseguramos que, en la composición de cada grupo, los niños quedaran igualados en maestra de referencia, nivelados por sexo y que la puntuación del pre-test de fracciones fuera similar.

Así, mientras un grupo trabaja en la Plataforma PAM en series preestablecidas de fracciones (creadas por el investigador); el otro grupo utiliza los mini juegos: Battleship Numberline, Candy Blast, Bubble Pop y Magcom abordando el mismo contenido.

Es importante destacar que previamente se hizo corresponder el tipo de actividades sobre fracciones a trabajar durante la intervención entre la PAM y los mini juegos, para que los niños abordaran el mismo día actividades similares. Así se seleccionaron series o mini juegos que plantean actividades de representación e identificación de una fracción, uso de la recta numérica, equivalencias, suma y resta de fracciones de igual denominador y correspondencia entre fracción y número decimal. El primer día de la intervención ambos grupos trabajaron con la representación de fracciones; para el grupo de la PAM se asignaron las series 1 y 2 (creadas específicamente sobre este tema) y para el grupo del juego se asignó el mini juego Magcom (ver Anexo 4 para mayor detalle).

Procedimiento

Se realiza, antes de comenzar la intervención una evaluación pre-test a todos los niños a través de la prueba creada para evaluar el desempeño en fracciones, a partir de los resultados de dicha prueba se crean los grupos para la PAM y para el juego siguiendo el procedimiento descrito en el apartado anterior. Luego se aplica el cuestionario de actitud hacia las matemáticas como pre-test (descartando para los análisis el cuestionario de un niño que lo entregó sin responder).

Posteriormente y durante 14 días se lleva a cabo la fase de intervención en la que los niños en su contexto habitual de clase, 5 veces por semana durante 20 minutos diarios utilizan el software correspondiente a cada grupo.

Al finalizar esta fase se realiza una evaluación post-test, tanto de la prueba de fracciones como del cuestionario de actitud hacia las matemáticas. También se aplica el Test de Matrices Progresivas de Raven y se envía a las familias el relevamiento sobre máximo nivel educativo alcanzado por parte de los padres de los niños.

Resultados

Impacto de la PAM y del juego en el desempeño de los niños en fracciones.

Los resultados muestran que los niños que usaron la plataforma PAM se vieron beneficiados respecto a los niños que usaron el juego en cuanto al desempeño obtenido en fracciones entre el pre-test y el post-test. El grupo que usó la PAM obtuvo mejores puntuaciones, la puntuación media de dicho grupo aumenta entre el pre y el post-test (6.86 vs. 8.39) y esa diferencia es estadísticamente significativa ($p = .005$); en cambio en el grupo que utilizó el juego, si bien el valor medio también aumentó (7.55 vs. 8.06), dicha diferencia no es estadísticamente significativa ($p = .236$). Estos

resultados nos sugieren que el uso de la plataforma PAM en el aula favorece el aprendizaje del contenido abordado en la investigación de manera más evidente que la utilización del juego.

En la Figura 3 se puede observar el desempeño en fracciones de ambos grupos antes de comenzar la intervención y luego de finalizada. Al comienzo de la misma el grupo del juego se encontraba 0.69 puntos por encima del grupo de la PAM.

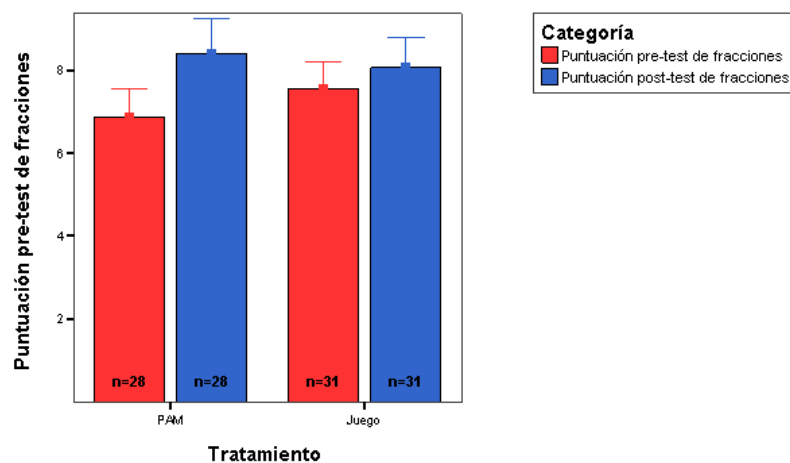


Figura 3: Resultados obtenidos por el grupo que utilizó la PAM y el grupo que utilizó el juego en la evaluación pre y post-test de fracciones. Las ordenadas muestran medias de puntuaciones directas de la prueba de fracciones (máx. 20 puntos).

Se podría pensar que en la distribución de la muestra los niños con mayor percentil en el Test Raven o mejores puntuaciones en actitud hacia las matemáticas, se encontraban en el grupo de la PAM y que eso benefició el desempeño superior de este grupo, pero en los análisis posteriores de los datos constatamos que el grupo de juego es quien superaba, respecto a sus medias, en ambas variables, al grupo de la PAM (ver tabla 1).

Tabla 1: Puntuaciones de actitud hacia las matemáticas (previo a la intervención) y de los percentiles del Test Raven, detallando medias de las puntuaciones, cantidad de niños y desviación típica, para ambos grupos.

Tratamiento	Test Act_ Matemática			Percentil Raven		
	Media	N	Desv. Típ.	Media	N	Desv. Típ.
PAM	79,22	27	20.135	33,08	26	22,763
Juego	87,35	31	20.681	42,59	29	28,680

Puntuaciones de la actitud hacia las matemáticas respecto al uso de la tecnología.

Interesa en esta investigación indagar, de acuerdo a lo esperado, si existe incremento positivo de la actitud hacia las matemáticas en relación al uso de la tecnología. Al comparar las puntuaciones obtenidas entre el pre-test y el post-test del cuestionario de actitud hacia las matemáticas no se observan diferencias significativas en ninguno de los dos grupos, si bien hay un incremento para el grupo que usó la PAM (79.22 vs. 83.96) este no es estadísticamente significativo ($p = .177$), lo mismo sucede con el grupo que usó el juego, las medias entre el pre-test y el post-test aumentaron (87.35 vs. 88.06) pero esto no es significativo ($p = .833$). Estos resultados nos muestra que el uso de la tecnología, para este estudio, no sugiere un avance positivo en las puntuaciones de actitud hacia las matemáticas (Tabla 2).

Tabla 2: Detalle en las puntuaciones del pre-test y el post-test del cuestionario de actitud hacia las matemáticas para cada grupo (PAM y juego), con el correspondiente desglose del avance para cada caso.

	Puntuación Pre-test de Act. Mat.				Puntuación Post-test de Act. Mat.				Avance en %			
	Mínimo	Máximo	Media	Desv. Típ.	Mínimo	Máximo	Media	Desv. Típ.	Mínimo	Máximo	Media	Desv. Típ.
PAM	43	124	79,22	20.135	27	128	83.96	22,111	-37.21	120.83	8.7296	30.79526
Juego	19	122	87,35	21,681	53	123	88,06	19,659	-38.37	378.95	10.9113	70.05221

Actitud hacia las matemáticas como predictor del desempeño en fracciones.

Respecto a nuestro planteo referido a que la actitud hacia las matemáticas predice el desempeño de los niños en fracciones, se encuentra evidencia que lo confirma. Las puntuaciones del cuestionario aplicado para indagar la actitud hacia las matemáticas predice el rendimiento matemático (evaluado en el pre-test de fracciones), con un R-cuadrado de 0.24 (Figura 4).

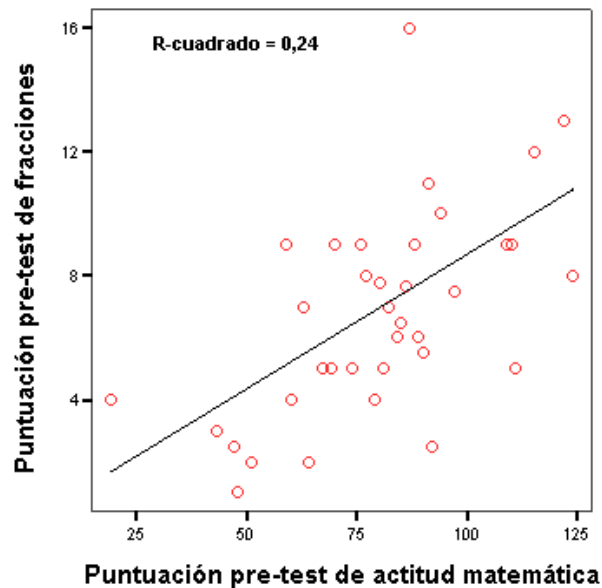


Figura 4: Regresión lineal del desempeño de los niños obtenido en el pre-test de fracciones (máx. 20 puntos) en función de la puntuación obtenida en el cuestionario de actitud hacia las Matemáticas (máx. 128 puntos).

A fin de valorar el peso de la actitud hacia las matemáticas, comparamos su capacidad predictiva del desempeño con la capacidad predictiva de variables tradicionales como lo son la inteligencia de los niños o la formación educativa de los padres. Las puntuaciones obtenidas en el Test Raven evidencian una incidencia en los resultados cuyo R-cuadrado es de 0.30.

Respecto al nivel educativo de los padres se recogieron datos de 46 niños de los 59 que participaron del estudio, observándose una correlación entre nivel educativo de los padres y la performance de sus hijos en la prueba de fracciones, cuyo R-cuadrado es de 0.32 (ver Figura 5).

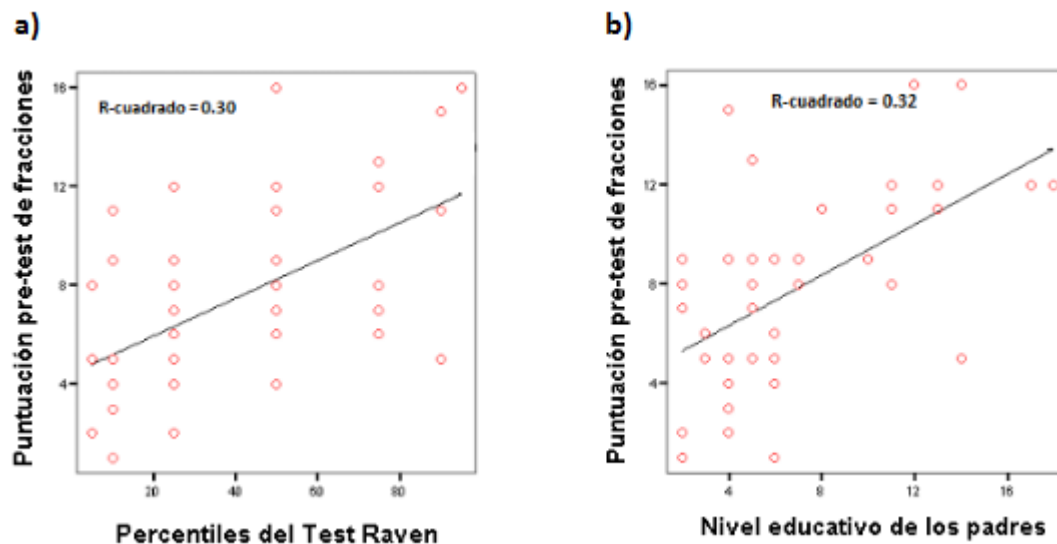


Figura 5: Correlaciones entre puntuación en el pre-test de fracciones y predictores clásicos del desempeño matemático. a- Regresión lineal del desempeño de los niños en el pre-test de fracciones (máx. 20 puntos), en función del percentil del Test Raven (entre 5 y 95). b- Regresión lineal del desempeño matemático en fracciones (máx. 20 puntos) en función de la formación educativa de los padres (máx. 18 puntos).

Si bien se constató que la puntuación obtenida en el cuestionario de actitud hacia las matemáticas predice el desempeño de los niños en fracciones, dicha predicción es baja si la comparamos con los predictores clásicos descritos anteriormente.

Discusión

La presente investigación tiene como objetivo principal estudiar el impacto de la PAM y del juego en el desempeño de los niños en fracciones, partiendo de la hipótesis de que el grupo de niños que usara la plataforma PAM mostraría mayores avances en el desempeño de los contenidos abordados. A la luz de los resultados se evidencia que dicha hipótesis fue comprobada, mostrando mayores avances aquellos niños que efectivamente utilizaron la plataforma PAM, lo que nos permite afirmar que el uso de la PAM presenta potencialidades para mejorar el desempeño de los niños en fracciones.

De todas maneras, el efecto favorable encontrado ante el uso de la PAM es moderado. Esto puede deberse a que el tiempo de intervención estuvo restringido a 14 días, que

según la experiencia que se tiene en el aula sabemos que es un tiempo breve, más aún teniendo en cuenta que el tema de fracciones es uno de los que mayor dificultad presenta en los escolares (Siegler et al., 2013), sumado al amplio abordaje que se le dio al mismo durante la intervención (recordemos que se plantearon actividades de representación e identificación de una fracción, uso de la recta numérica, equivalencias, suma y resta de fracciones de igual denominador y correspondencia entre fracción y número decimal). Se considera importante como proyección futura poder realizar una intervención en un período de tiempo más prolongado, pudiendo además poder abarcar más conceptos matemáticos, no quedando restringido solamente a fracciones, a fin de poder evaluar el impacto de la PAM a mayor escala y comprobar si los beneficios aquí constatados se mantienen para el resto de las nociones matemáticas como lo muestran las evidencias en los estudios de Perera & Aboal, 2017.

Contrario a lo que se esperaba, no hay incremento significativo en las puntuaciones de la actitud hacia las matemáticas luego de la intervención. Si bien, sí se registró un aumento en dichas puntuaciones en ambos grupos, ese avance no fue estadísticamente significativo. Una posible explicación a esto es que es probable que el tiempo entre la medida pre y post fue de muy pocos días para que se pueda observar una real variación entre las puntuaciones mencionadas. No obstante esto, mediante las observaciones realizadas mientras duró el estudio, se puede afirmar que se observó a los niños muy motivados durante la intervención, especialmente a los estudiantes que usaron la PAM, estos no manifestaron aburrirse en el transcurso de la misma, y además se los escuchó decir frases como “pensé que no me gustaba la matemática y sí me gusta” o “no es tan aburrido hacer actividades de matemática”. Se consideran muy positivas las observaciones realizadas sobre los aspectos

actitudinales de los niños durante la intervención, lo que motiva a continuar investigando en la temática en la búsqueda de nuevos resultados.

Con respecto al supuesto de que la puntuación obtenida en el cuestionario de actitud hacia las matemáticas predice el desempeño en fracciones, se puede afirmar que sí hay una correspondencia que evidencia dicha correlación, este resultado coincide con hallazgos de otros estudios internacionales (Hidalgo et al., 2005; Mato & de la Torre, 2009). Es importante investigar, en el futuro, estrategias que permitan incrementar una actitud positiva hacia las matemáticas, porque quizás esto podría favorecer el desempeño matemático de los niños.

Al comparar la correlación entre la actitud hacia las matemáticas y el desempeño en fracciones con predictores de la literatura clásica, como lo son el nivel de inteligencia (evaluado con el Test Raven) y nivel educativo de los padres, su correlación es menor. A su vez, los resultados muestran que nivel educativo de los padres es la variable que mejor predice el desempeño de los niños en fracciones, apoyando la línea de la literatura sobre el tema (Calero & Escardíbul, 2007; Cordero et al., 2013).

Reflexiones finales

Como limitantes de esta investigación podemos mencionar la ausencia de un grupo control ciego que nos hubiese permitido observar el desempeño de los niños en fracciones y la actitud hacia las matemáticas sin intervención externa.

El uso de la plataforma PAM explica el avance que los niños obtuvieron en su desempeño en fracciones, se considera un hallazgo que aporta a los actores de la educación, ya que es un recurso al alcance de todos que podría mejorar los logros de los niños en fracciones, y quizás en otros conceptos matemáticos, lo que debe continuar siendo motivo de estudio. Teniendo en cuenta el momento actual de la educación en nuestro país (INEEd, 2017) y principalmente los resultados en el área de

matemática, evaluados en las últimas pruebas PISA 2015, pensamos que dicho estudio podría contribuir con la comunidad educativa.

En resumen, comprobamos nuestra hipótesis de que el uso de la PAM favorece el desempeño de los niños en fracciones y consideramos que dicho hallazgo podría enriquecer las prácticas educativas; se requieren futuras investigaciones para continuar profundizando en el estudio del impacto de la plataforma PAM y el aprendizaje de fracciones.

Referencias bibliográficas

- Area, M. (2005). Las tecnologías de la información y comunicación en el sistema escolar. Una revisión de las líneas de investigación. *Revista ELelectrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, v. 11, n. 1.
- Bazán, G., Luis, J., & Sotero, H. (1998). Una aplicación al estudio de actitudes hacia la matemática en la UNALM.
- Brusa, L. & Corujo, M. (2014). La fracción, ¿qué dificultades encierra? *Revista QUEHACER EDUCATIVO*, 16-22
- Bulman, G., & Fairlie, R. W. (2016). Technology and education: Computers, software, and the internet (No. w22237). *National Bureau of Economic Research*.
- Calero, J., & Escardíbul, J. O. (2007). Evaluación de servicios educativos: el rendimiento en los centros públicos y privados medido en PISA-2003. *Hacienda pública española*, 183(4), 33-66.
- Cerda, G., Ortega, R., Pérez, C., Flores, C., & Melipillán, R. (2011). Inteligencia lógica y rendimiento académico en matemáticas: un estudio con estudiantes de Educación Básica y Secundaria de Chile. *Anales de psicología*, 27(2).
- Coleman, J. S. (1966). Equality of educational opportunity.
- Cordero Ferrera, J. M., Crespo Cebada, E., & Pedraja Chaparro, F. (2013). Rendimiento educativo y determinantes según PISA: Una revisión de la literatura en España.
- De Melo, G. Machado, A. Miranda, A. Viera, M. (2013) Profundizando en los efectos del Plan Ceibal. *Serie Documentos de Trabajo, DT 12/2013. Instituto de*

Economía, Facultad de Ciencias Económicas y Administración, Universidad de la República, Uruguay.

Gómez-Chacón, I. M. (2003). La tarea intelectual en matemáticas afecto, meta-afecto y los sistemas de creencias. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 225-247.

Hidalgo Alonso, S., Maroto Sáez, A., Palacios Picos, A., (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Educación Matemática*, agosto, 89-116.

INEEd (2017), Informe sobre el estado de la educación en Uruguay 2015-2016, INEEEd, Montevideo.

Marqués, P. (1996). El software educativo. J. Ferrés y P. Marqués, *Comunicación educativa y Nuevas Tecnologías*, 119-144.

Mato, M. D., & de la Torre, E. (2009). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico.

Mundial, B. (2017). World development report 2018. Learning to realize education's promise. *The World Bank*.

Orton, A. (1996). *Didáctica de las matemáticas: cuestiones, teoría y práctica en el aula* (Vol. 14). Ediciones Morata.

Palacios, A., Arias, V., & Arias, B. (2014). Las actitudes hacia las matemáticas: construcción y validación de un instrumento para su medida. *Revista de Psicodidáctica*, 19(1), 67-91.

- Perera, M. & Aboal, D. (2017). CINVE. Evaluación del Impacto de la Plataforma Adaptativa de Matemática en los resultados de los aprendizajes.
- Raven, J. C. (2005). *Test de Matrices Progresivas: Escala Coloreada; cuaderno*. Paidós.
- Raven, J. C., Court, J. H. & Raven J. (1993). *Test de matrices progresivas. Escalas coloreada, general y avanzada. Manual*. Buenos Aires: Paidós.
- Rosas, R., Grau, V., Salinas, M., Correa, M., Nussbaum, M., López, X., Flores, P., & Lagos, F. (2011). Más Allá de Mortal Kombat: Diseño y Evaluación de Videojuegos Educativos para Lenguaje y Matemáticas del Nivel Básico 1. *Psykhé*, 9(2).
- Sánchez Ruiz, J. G., & Ursini, S. (2010). Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: estudios de género con estudiantes de secundaria. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(4).
- Scharnagl, S., Evanschitzky, P., Streb, J., Spitzer, M., & Hille, K. (2014). Sixth graders benefit from educational software when learning about fractions: A controlled classroom study. *Numeracy*, 7(1).
- Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in cognitive sciences*, 17(1), 13-19.
- Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and Individual Differences in Understanding of Fractions. *Developmental Psychology*, 49(10), 1994–2004.
- Stelzer, F., Andrés, M. L., Canet-Juric, L., Introzzi, I., & Urquijo, S. (2016). Relationships between conceptual and procedural knowledge in fractions

learning. *Cuadernos de Investigación Educativa*, 7(1), 13-27. Retrieved October 16, 2017.

Ursini, S., Sánchez, G., & Orendain, M. (2004). Validación y confiabilidad de una escala de actitudes hacia las matemáticas y hacia las matemáticas enseñadas con computadora. *Educación Matemática*, 16(3).

Anexo 1: Actividades que formaron parte del pre-test y del post-test de fracciones.

Nombre: _____ Clase: _____ Escuela: _____

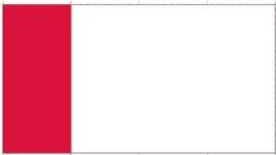
A continuación encontrarás una serie de actividades que debes leer con mucha atención.

Cada una de ellas tendrá cuatro opciones, tú debes encerrar la opción correcta en cada actividad.

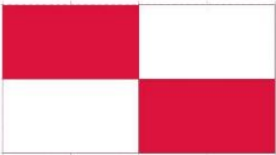
Actividad N° 1 -

¿En cuál de las opciones está pintado de rojo $\frac{1}{4}$ de la figura?

A)



B)



C)



D)



Actividad N° 2 -



Diego tiene todas estas figuritas.

¿Cuál de las siguientes fracciones representa las figuritas brillantes que tiene?

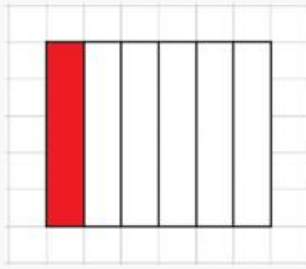
- A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{4}{8}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{12}{4}$

Actividad N° 3 -



En esta figura, ¿cuántas partes falta pintar de rojo para que queden pintados los $\frac{2}{3}$ de la figura?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 5

Actividad N° 4 -

¿Qué fracción de la pizza comieron?



- A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{3}{8}$

Actividad N° 5 -



¿Qué fracción representa la parte decorada del rectángulo de borde rojo ?

- A) $\frac{4}{6}$ B) $\frac{6}{10}$ C) $\frac{10}{4}$ D) $\frac{4}{10}$

Actividad N° 6 -



- A) 10,4 B) 4,10 C) 2,5 D) 0,4

Actividad N° 7 -

Carlos necesita completar esta tabla con una fracción mayor que 1.

Menor que 1	Igual a 1	Mayor que 1
$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{4}$	

¿Cuál de las siguientes fracciones debe usar?

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{5}$ C) $\frac{6}{7}$ D) $\frac{2}{8}$

Actividad N° 8 -



- A) $\frac{7}{16}$ B) $\frac{7}{8}$ C) $\frac{16}{7}$ D) $\frac{8}{7}$

Actividad N° 9 -



- A) $\frac{13}{9}$ B) $\frac{9}{3}$ C) $\frac{3}{0}$ D) $\frac{3}{9}$

Actividad N° 10 -



Llegaron a la escuela 200 libros para entregar a los alumnos. La directora ya entregó la cuarta parte. ¿Cuántos libros quedan todavía por entregar?

- A) 196 B) 150 C) 100 D) 50

Actividad N° 11 -



El queso entero pesaba aproximadamente 2 kilogramos. Se cortó una porción, como se ve en la imagen.

Aproximadamente, ¿cuántos kilogramos de queso quedan?

- ☐ A) uno y medio.
☐ B) tres cuartos.
☐ C) un medio.
☐ D) un cuarto.

Actividad N° 12 -

¿Cuánto es el doble de...?

$$\frac{1}{2}$$

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6

Actividad N° 13 -

Marca cuál es la fracción equivalente de:

$$\frac{6}{12}$$

- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{4}$

Actividad N° 14 -

Convierte el número decimal 0,3 en una fracción

- A) $\frac{3}{9}$ B) $\frac{30}{10}$ C) $\frac{10}{3}$ D) $\frac{3}{10}$

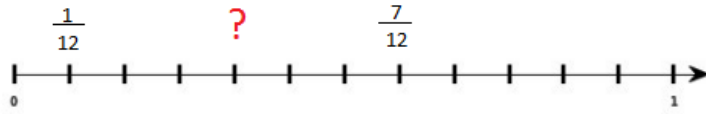
Actividad N° 15 -

Marca cuál es la fracción mayor:

- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{5}{5}$ D) $\frac{3}{5}$

Actividad N° 16 -

Marca qué fracción se ubica donde se encuentra el signo de interrogación:



- A) $\frac{12}{4}$ B) $\frac{4}{12}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{3}{12}$

Actividad N° 17 -

Marca cuál es el resultado correcto de la siguiente operación:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} =$$

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{3}{8}$

Actividad N° 18 -

Resuelve la siguiente resta de fracciones:

$$\frac{10}{5} - \frac{3}{5} =$$

- A) $\frac{7}{5}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{13}{5}$ D) $\frac{13}{10}$

Actividad N° 19 -

Fernando y Luciana están organizando el cumpleaños de su hijo Germán. Calcularon $\frac{1}{2}$ litro de bebida por niño. Si están invitados 15 niños, ¿cuántos litros de bebida deben comprar?

- A) $7 \frac{1}{2}$ B) 30 C) 15 D) $5 \frac{1}{2}$

Actividad N° 20 -

Ana ha recorrido 600 metros, que son los $\frac{3}{4}$ del camino de su casa a la escuela. ¿Qué distancia hay de su casa a la escuela?

- A) 800 B) 200 C) 1600 D) 2400

Has llegado al final de la prueba.

¡¡Gracias por realizar todas las actividades!!

Anexo 2: Cuestionario de actitud hacia las matemáticas

Nombre: _____ Clase: _____ Escuela: _____

Lee cuidadosamente cada enunciado y marca la opción a la derecha que más se acerca a lo que tú sientes habitualmente, únicamente puedes elegir una sola opción por enunciado.

1.- Me gustan las matemáticas.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
2.- Me siento cómodo resolviendo problemas de matemática.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
3.- Las matemáticas no sirven para nada.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
4.- Las matemáticas deberían estar presentes únicamente en la universidad.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
5.- Me resulta divertido estudiar matemáticas.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
6.- Las matemáticas son fáciles.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
7.- En matemáticas me quedo con la mente en blanco con frecuencia sin saber qué hacer.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
8.- Toca hacer actividades de matemática ¡Qué horror!	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
9.- Me será siempre difícil aprender matemáticas.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
10.- Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las matemáticas.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
11.- Salvo en unos pocos casos, por mucho que me esfuerce no consigo entender las matemáticas.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
12.- Las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total

13.- Los temas que se enseñan de matemáticas son muy interesantes.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
14.-No soporto estudiar matemáticas, incluso las partes más fáciles.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
15.- Las matemáticas son una de las materias más aburridas.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
16.- Si tuviera lo oportunidad elegiría más actividades de clase relacionadas con las matemáticas.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
17.- Aprender matemáticas es cosa de unos pocos.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
18.- Siempre he tenido problemas con las matemáticas.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
19.- Haga lo que haga, siempre saco notas bajas en matemáticas.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
20.- Para mi maestra soy un buen alumno en matemáticas.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
21.- No sé estudiar las matemáticas.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
22.- Me suelo sentir incapaz de resolver problemas matemáticos.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
23.- Cuando me ponen un problema de matemáticas, me cuesta mucho trabajo decidir qué tengo que hacer para resolverlo bien.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
24.- Puedo llegar a ser un buen alumno de matemáticas.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
25.- Las matemáticas son un "lío".	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
26.- Soy una de esas personas que no nació para aprender matemáticas.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
27.- Me siento más torpe en matemáticas que la mayoría de mis compañeros de clase.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
28.- Las matemáticas me confunden.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total

29.- Suelo tener dificultades con las matemáticas.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
30.- Me va bien calculando mentalmente.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
31.- Puedo pasarme horas estudiando matemáticas y haciendo problemas; el tiempo se me pasa rapidísimo.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total
32.- Cuando tengo que estudiar matemáticas hago la tarea con cierta alegría.	Desacuerdo total	En desacuerdo	De acuerdo	Bastante de acuerdo	Acuerdo total

Anexo 3: Pregunta sobre nivel educativo de los padres (se repite la pregunta dos veces, una para la madre y otra para el padre).

Nombre: _____ Clase: _____ Escuela: _____

¿Cuál es el máximo nivel educativo alcanzado por la madre del niño/a?

	Marque con un X el máximo nivel alcanzado	Especifique hasta qué año continuó sus estudios
No tiene estudios		
Primaria incompleta		
Primaria completa		
Secundaria incompleta		
Secundaria completa		
Enseñanza técnica (UTU o similar) incompleta		
Enseñanza técnica (UTU o similar) completa		
Estudios terciarios incompletos (incluye magisterio, profesorado, carreras terciarias no universitarias, sin tener el título habilitante de ninguna de ellas).		
Estudios terciarios de grado completos (incluye magisterio, profesorado, carreras terciarias no universitarias y tener el título habilitante en al menos alguna de ellas).		
Estudios universitarios incompletos (incluye carreras universitarias de grado sin tener el título habilitante).		
Estudios universitarios completos (incluye carreras universitarias de grado con título habilitante).		
Posgrado (requiere tener estudios terciarios completos)		

Anexo 4: Tipos de actividades abordados cada día tanto para el grupo que utilizó la PAM como para el grupo que utilizó el juego.

Día 1	Representación de fracciones.
Día 2	Identificación de una fracción. Recta numérica.
Día 3	Recta numérica números y decimales. Convertir decimales a fracción.
Día 4	Suma y resta de fracciones.
Día 5	Fracciones equivalentes.
Día 6	Ordenar fracciones.
Día 7	Fracciones equivalentes (simplificación de fracciones).
Día 8	Representación de fracciones.
Día 9	Identificación de una fracción. Recta numérica.
Día 10	Pasar de fracción a número decimal y viceversa.
Día 11	Suma de fracciones.
Día 12	Resta de fracciones.
Día 13	Fracciones equivalentes
Día 14	Fracciones equivalentes (simplificación de fracciones).