Universidad de la República
Facultad de Ingeniería

Tesis para optar por el título de
Magister en Ingeniería (Mecánica de los fluidos aplicada)

Simulación de grandes vórtices de una capa límite turbulenta sobre una superficie rugosa

Autor: Ing. Gabriel Narancio

Tutor de tesis: Dr. José Cataldo

Co-tutor de tesis: Dr. Gabriel Usera

Montevideo, Uruguay
15 de diciembre de 2016

Resumen

En esta tesis se revisa la teoría clásica de capa límite tanto en una superficie aerodinámicamente lisa como rugosa. Se analizan los principales métodos para modelar flujos turbulentos, poniendo énfasis en la simulación de grandes vórtices, que es el método utilizado para hacer las simulaciones. Se simulan dos capas límites con diferente valor del parámetro de blending. Estas simulaciones se hacen con el programa de código abierto para resolución de flujos de fluidos viscosos caffa3d.MBRi. Las simulaciones se hacen en un dominio prismático de $3{,}84m x 3{,}84m$ de base por $2m$ de altura. Se imponen condiciones de periodicidad en las caras laterales, adherencia en la inferior y simetría en la superior. En la superficie inferior, mediante el método de condiciones de borde inmersas, se fija un arreglo de cubos que forman una rugosidad aerodinámica. Se utiliza una malla uniforme en la dirección del flujo y transversal con un paso de $0{,}01m$ y variable en la vertical. En total la simulación utiliza 16515072 celdas. El paso temporal es de $0{,}01s$. Los resultados se analizan en base a las tensiones rasantes, el campo de velocidad, la turbulencia, el balance de energía cinética turbulenta y las escalas. Se obtienen concordancias razonables con el flujo esperado. Por otro lado se encuentran algunos problemas que se relacionan con la disipación numérica que agrega el código.

Índice general

1. Introducción **1**

2. La capa límite turbulenta **5**

2.1. Las Ecuaciones de Reynolds 5
2.2. Descripción del flujo 9
2.3. Las ecuaciones de la capa límite 13
2.4. La capa límite sobre una superficie aerodinámicamente lisa . . 15
2.4.1. La naturaleza dual de la capa límite turbulenta 15
2.4.2. Velocidad media 17
2.4.3. Tensiones de Reynolds 27
2.5. La capa límite sobre una superficie aerodinámicamente rugosa 32
2.6. Flujo en un canal 36

3. Modelación numérica de flujos turbulentos **40**

3.1. Simulación numérica directa (DNS) 40
3.2. Modelos RANS 43
3.2.1. Modelos de cero ecuación 44
3.2.2. Modelos de una ecuación 47
3.2.3. Modelos de dos ecuaciones 49
3.3. Simulación de grandes vórtices (LES) 55
3.3.1. Filtrado 56
3.3.2. Modelos de tensiones residuales 59
3.3.3. Ecuación de balance de la energía cinética de la componente fluctuante de la velocidad filtrada 62

4. Simulación de grandes vórtices de una capa límite turbulenta rugosa **68**

4.1. Esquema del flujo a simular 68

4.2. caffa3d.MBRi 70
4.3. Ecuaciones del flujo en un canal rugoso 72
4.4. Detalles de la simulación 75

5. Resultados **81**
5.1. Tensiones rasantes 82
5.2. Perfil de velocidad media 88
5.3. Turbulencia 91
5.4. La subcapa rugosa. 93
5.5. Producción y disipación energía cinética turbulenta. 99
5.6. Correlaciones, escalas y espectros 106

6. Conclusiones **118**

Índice de figuras

2.1. Esquema del flujo tipo capa límite sobre una placa plana . . . 10
2.2. Perfil de velocidad media en una capa límite turbulenta sobre una superficie aerodinámicamente lisa 22
2.3. Perfil de defecto velocidad media en variables externas. 24
2.4. Componentes del tensor de Reynolds en la región de pared. . 28
2.5. Componentes del tensor de Reynolds expresadas en variables internas. 29
2.6. Balance de energía cinética turbulenta en una capa límite . . . 31
2.7. Esquema de un canal 37

4.1. Esquema del flujo 69
4.2. Esquema de las iteraciones 71
4.3. Esquema de la rugosidad utilizada 77
4.4. Escalas de longitud esperadas en el flujo. 79

5.1. Perfil de la media de la fuerza horizontal por unidad de superficie y altura sobre los obstáculos. 83
5.2. Componentes de T_{13}^{s**} en función de la altura z 85
5.3. Tensión rasante en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM46 86
5.4. Tensión rasante en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM49 87
5.5. Velocidad media en altura. 89
5.6. Velocidad media en altura (escala semilogarítmica). 90
5.7. Perfiles de σ_u/u^*, σ_v/u^* y σ_w/u^* en altura. 92
5.8. Velocidad media en el plano meridional a una fila de cubos. . 93
5.9. Lineas de flujo en la subcapa rugosa. 94
5.10. Coeficientes de presión sobre los obstáculos. 95

5.11. Velocidad media en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM46 97
5.12. Velocidad media en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM49 98
5.13. Producción y disipación de energía cinética turbulenta en altura. 101
5.14. Producción de energía cinética turbulenta en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM46 102
5.15. Producción de energía cinética turbulenta en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM49 103
5.16. Disipación de energía cinética turbulenta en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM46 104
5.17. Disipación de energía cinética turbulenta en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM49 105
5.18. Valores de C y m en función de Z_o 108
5.19. Correlación de u'. 110
5.20. Correlación de v'. 111
5.21. Escala integral longitudinal L_{11} en altura. 112
5.22. Escala integral longitudinal L_{11} en altura en la subcapa rugosa. 113
5.23. Espectros de u' a diferentes alturas. CLIM46 114
5.24. Espectros de v' a diferentes alturas. CLIM46 115
5.25. Espectros de u' a diferentes alturas. CLIM49 116
5.26. Espectros de v' a diferentes alturas. CLIM49 117

Capítulo 1

Introducción

El movimiento de los fluidos habituales como el agua o el aire están gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes y esto es conocido desde que Navier le incorporó el efecto de la viscosidad a las ecuaciones de Euler en 1822 [Anderson, 2005]. Esto fue un hito importante, pero no permitió avances significativos inmediatos en problemas prácticos debido a la dificultad que representa encontrar soluciones analíticas a estas ecuaciones. Si bien permitió resolver algunos problemas en flujos de Stokes donde se desprecia el término no lineal de las ecuaciones, no fue hasta que en 1904, Ludwig Prandtl definió el concepto de capa límite, que se lograron avances significativos [Tani, 1977]. El artículo de Prandtl, *On the motion of a fluid with very small viscosity*, inauguró más de 100 años de estudio en este campo y dio comienzo a la aerodinámica moderna.

Prandtl, postuló que el efecto de la viscosidad estaba confinado a una fina capa sobre las superficies sólidas pudiendo admitirse, que fuera de ésta el flujo es irrotacional. Esta idea, aparentemente inocente, le permitió derivar las ecuaciones de capa límite y realizar cálculos aproximados en problemas complejos, como ser la evaluación de la fuerza de sustentación y arrastre sobre un perfil aerodinámico.

Una capa límite es básicamente una zona muy próxima a una superficie sólida por sobre la cual escurre un fluido, donde la velocidad cae sensiblemente hasta hacerse cero sobre la superficie y donde el efecto de la viscosidad es importante. O sea, es la zona donde se producen altos gradientes de

velocidad. Existen otros tipos de capa límite, como la capa límite térmica, pero la idea es la misma, es la zona próxima a la superficie sólida donde se tiene altos gradientes de la propiedad que se considere.

En todos los problemas donde el flujo escurre alrededor de un objeto sólido, se forman capas límite. Ejemplos importantes son, el flujo sobre el ala de un avión, un automóvil y una pelota, entre otros, o el flujo sobre la superficie terrestre llamada capa limite atmosférica. Es por ello que el estudio de este tipo de flujos adquiere gran importancia. Es junto al flujo en un canal (que tiene aspectos muy similares), el tipo de flujo de pared más estudiado y contra los cuales se pone a prueba la capacidad de los modelos utilizados para predecir el comportamiento de los flujos turbulentos.

Las ecuaciones de Navier Stokes son un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, con un término no lineal, que dificulta en extremo su tratamiento analítico. A tal punto es complejo el problema que no se ha podido probar la existencia y unicidad de las soluciones generales, por lo cual, este, figura entre los seis problemas matemáticos no resueltos propuestos por el Clay Mathematics Institute como los problemas del milenio. Vista la imposibilidad de encontrar soluciones generales a las ecuaciones de Navier-Stokes, las alternativas que ha encontrado el hombre para resolver problemas complejos en fluidos han sido, históricamente, la experimentación y más recientemente la simulación numérica. La simulación numérica consiste en discretizar el espacio y el tiempo de forma de encontrar soluciones aproximadas al problema de condiciones iniciales y de contorno de un sistema de ecuaciones diferenciales como las ecuaciones de Navier-Stokes. Este método no está exento de dificultades. En los flujos turbulentos hay presentes fluctuaciones de las diferentes magnitudes en un rango de escalas espaciales y temporales extremadamente amplio, lo que hace necesaria una discretización muy fina del espacio y del tiempo que es inaccesible en casi todos los problemas a escala práctica.

La Real Academia define modelo como: “esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, como la evolución económica de un país, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento”. Las ecuaciones de Navier-Stokes

son un modelo que describe la dinámica de los fluidos newtonianos. Las características de la turbulencia hacen que este modelo, aunque capaz de describir el fenómeno de interés, no sea adecuado dada la extrema dificultad que representa su resolución numérica. Esto plantea la necesidad de cambiar el modelo. El desarrollo de un modelo debe estar motivado por los objetivos que se persiguen. Así, un modelo puede ser adecuado para resolver un problema e inadecuado para resolver otro. Existe infinidad de alternativas para modelar un flujo turbulento que se diferencian por el nivel de descripción y la capacidad de reproducir con precision el flujo de estudio. Los dos grandes grupos de modelos más utilizados son, los modelos basados en las ecuaciones de Reynolds (RANS) y los modelos de grandes vórtices (LES). Los modelos RANS son apropiados cuando el objetivo es obtener valores medios de velocidad, presiones, fuerzas, etc, en flujos estadísticamente estacionarios. Algunos modelos RANS, permiten estimar aspectos de la turbulencia, como la energía cinética turbulenta, o las tensiones de Reynolds. Por otra parte, los modelos LES, son adecuados cuando se requiere conocer la evolución temporal de aspectos del flujo o el flujo no es estadísticamente estacionario, como en el caso de flujos con desprendimientos periódicos de vórtices. En el capítulo 3 se revisan los principales modelos disponibles, con énfasis en LES, ya que es el modelo utilizado en las simulaciones que se realizan en esta tesis.

La construcción de edificios altos o con formas inusuales requiere que se realicen ensayos en túnel de viento para evaluar diferentes aspectos: presiones sobre las fachadas, el comportamiento aeroelástico de la estructura, el nivel de confort y riesgo asociado al viento a nivel peatonal, ruido inducido por la interacción entre el viento y la estructura, entre otros aspectos. Para estos ensayos se utilizan túneles de viento tipo capa límite atmosférica, que cuentan con una zona aguas arriba de la ubicación del modelo a escala del complejo edilicio en la que se genera el perfil del viento que incide sobre el modelo. El flujo incidente tiene que reproducir las características de la capa límite atmosférica desarrollada sobre el terreno circundante en la situación prototipo. Las características del viento dependen de la rugosidad de la superficie en la que este se desarrolla, cambiando no solo la forma del perfil de velocidad media, sino también aspectos de la turbulencia. La modelación numérica tiene el potencial de sustituir o complementar los estudios

que se hacen en el túnel de viento, bajando costos y tiempos de realización. Para ello el método que tiene las características más adecuadas es la simulación de grandes vórtices, ya que en la mayoría de los casos es necesario obtener la evolución temporal de las magnitudes relevantes. Además, en la interacción del viento y edificios, se presentan fenómenos no estacionarios como desprendimientos de vórtices que convierten a LES en el método apropiado para el estudio de estos problemas. De la misma forma que en una simulación física se debe generar el perfil de velocidad incidente, también en una simulación numérica esto debe hacerse. Tener un método para simular capas límites desarrolladas sobre una superficie rugosa permite generar condiciones de entrada al dominio principal de la simulación con las características correctas. Ese es el objetivo de esta tesis.

En el capítulo 2 se detallan las características de la capa límite sobre una placa plana. Primero se presentan las ecuaciones de Reynolds y las ecuaciones de balance de energía cinética turbulenta, luego se describen las características de una capa límite desarrollada sobre una superficie aerodinámicamente lisa y después se hace lo mismo para la capa límite desarrollada sobre una superficie aerodinámicamente rugosa.

El capítulo 4 esta dedicado a los métodos utilizados en la simulación en si. Se trata aspectos relacionados con el paso de la malla utilizada, se describe el modelo caffa3D.MBRi base de las simulaciones realizadas, se esboza el método de condiciones de borde inmersas, utilizado para fijar la geometría de los elementos de rugosidad. En el capitulo 5 se presentan los resultados de las simulaciones realizadas y finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

La capa límite turbulenta

2.1. Las Ecuaciones de Reynolds

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los fluidos newtonianos incompresibles son la ecuación de conservación de la masa

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2.1}$$

y la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot T \tag{2.2}$$

donde ρ es la densidad, $\mathbf{u}$ es el vector velocidad, $\mathbf{f}$ es una densidad de fuerza de masa externa y

$$T = -pI + 2\mu D \tag{2.3}$$

es el tensor de tensiones; p es la presión, μ es la viscosidad dinámica, I es la matriz identidad y

$$D = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \right) \tag{2.4}$$

es el tensor de deformaciones.

Los flujos turbulentos son procesos estocásticos. Esto quiere decir que

cualquier propiedad del flujo que uno tome en un instante y posición dados es una variable aleatoria. Que sea una variable aleatoria significa que no tiene un valor único si se repite el experimento bajo las mismas condiciones [Pope, 2000]. Para caracterizar una variable aleatoria se debe conocer su distribución de probabilidad. Ahora, si se quiere caracterizar completamente un flujo turbulento se debe conocer la densidad de probabilidad conjunta de todas las propiedades para todo instante y posición, lo cual es imposible en general.
Si se asume que en cada instante y posición cada una de las propiedades tiene una distribución de probabilidad y un valor medio, se podría intentar encontrar ecuaciones que gobiernen la evolución de estos valores medios. Esto es lo que Osbourne Reynolds propuso en 1895 para la velocidad media (ver [Pope, 2000]).
Si se descompone la velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ y la presión $p(\mathbf{x},t)$ en su valor medio y la fluctuación respecto a esta media

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \overline{\mathbf{u}(\mathbf{x},t)} + \mathbf{u}'(\mathbf{x},t) \tag{2.5}$$

$$p(\mathbf{x},t) = \overline{p(\mathbf{x},t)} + p'(\mathbf{x},t) \tag{2.6}$$

donde la barra indica media de conjunto (en infinitas realizaciones del experimento) y la prima la componente fluctuante.

Sustituyendo en la ecuación de Navier-Stokes y aplicando la media de conjunto a toda la ecuación se obtiene las llamadas ecuaciones de Reynolds.

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}\right) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} \tag{2.7}$$

donde $\mathbf{U} = \overline{\mathbf{u}}$, $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{f}}$ y

$$\mathbf{T} = -PI + 2\mu \mathbf{D} + \mathbf{T_T} \tag{2.8}$$

siendo P la media de la presión,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T\right) \tag{2.9}$$

el tensor de deformación medio y

$$\mathbf{T_T} = -\rho\left(\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}\right) \tag{2.10}$$

el tensor turbulento. En la definición anterior se usa el producto exterior de dos vectores $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T$
Además, de la ecuación de balance de masa se obtiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \tag{2.11}$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \tag{2.12}$$

Es claro que no es posible determinar el tensor turbulento en base a $\mathbf{U}$ y P, lo que agrega seis variables al problema. Esto es llamado el problema de cierre de las ecuaciones de Reynolds.

Ahora se considera la ecuación de balance de energía mecánica en un fluido newtoniano incompresible, derivada a partir de la ecuación de Navier-Stokes,

$$\frac{de}{dt} + \nabla \cdot \left(\frac{p}{\rho}\mathbf{u} - 2\nu D\mathbf{u}\right) = -2\nu tr\left(D^2\right) \tag{2.13}$$

donde $e = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})$ es la energía cinética por unidad de masa y $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es la viscosidad cinemática. El primer término del miembro izquierdo de la ecuación (2.13) es la variación temporal de la energía cinética siguiendo una partícula de fluido, el segundo es la difusión de esta energía y el miembro derecho representa la disipación de energía mecánica por mecanismos viscosos.

Promediando la ecuación (2.13) se obtiene

$$\frac{\overline{d}\overline{e}}{dt} + \nabla \cdot \left(\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}\mathbf{U} + \overline{e'\mathbf{u}'} + \frac{P}{\rho}\mathbf{U} + \frac{\overline{p'}}{\rho}\mathbf{u}' - 2\nu\left(\mathbf{D}\mathbf{U} + \overline{d'\mathbf{u}'}\right)\right) = -2\nu tr\left(\mathbf{D}^2\right) - 2\nu tr\left(\overline{d'^2}\right) \tag{2.14}$$

En la ecuación anterior

$$\frac{\overline{d}\overline{e}}{dt} = \frac{\partial \overline{e}}{\partial t} + (\nabla \overline{e})\,\mathbf{U} \tag{2.15}$$

es la derivada total siguiendo el flujo medio,

$$d' = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u}'^{T}\right) \tag{2.16}$$

es el tensor de deformación de las fluctuaciones y $e' = \frac{1}{2}\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'$.
El primer término del miembro derecho en la ecuación (2.14), es la disipación atribuible al flujo medio ($-\bar{\varepsilon}$) y el segundo la disipación debida a las fluctuaciones de velocidad ($-\varepsilon$). En un flujo turbulento $\bar{\varepsilon}$ es en general de menor orden que los otros términos y, por lo tanto, despreciable; no es el caso de (ε), que ocupa un lugar central en la teoría de la turbulencia.

También se puede derivar una ecuación de balance de la energía del flujo medio $E = \frac{1}{2}\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}$:

$$\frac{\overline{d}E}{dt} + \nabla \cdot \left(\frac{P}{\rho}\mathbf{U} - 2\nu \mathbf{D}\mathbf{U} - \frac{\mathbf{T_T}\mathbf{U}}{\rho}\right) = -2\nu tr\left(\mathbf{D}^2\right) - \frac{1}{\rho} tr\left(\mathbf{T_T}\mathbf{D}\right) \tag{2.17}$$

y para la energía cinética por unidad de masa media de las fluctuaciones o energía cinética turbulenta $k = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'}$, o sea:

$$\frac{\overline{d}k}{dt} + \nabla \cdot \left(\overline{\mathbf{u}'e'} + \overline{\frac{p'}{\rho}\mathbf{u}'} - 2\nu\overline{d'\mathbf{u}'}\right) = \frac{1}{\rho} tr\left(\mathbf{T_T}\mathbf{D}\right) - 2\nu tr\left(\overline{d'^2}\right) \tag{2.18}$$

El segundo término del miembro derecho de la ecuación (2.17) es la producción de energía turbulenta ($\mathcal{P}$), en general es positivo, por lo cual actúa como un sumidero de energía en la ecuación (2.17) y como una fuente en la ecuación (2.18).

Muchos de los flujos analizados en ingeniería, como las capas límite o los flujos en canales son estadísticamente estacionarios. Esto quiere decir que la densidad de probabilidad conjunta de cualquier propiedad del flujo es in-

dependiente del tiempo; pudiendo depender de la diferencia temporal. Un resultado importante es que en estos flujos la derivada temporal de la media de cualquier variable o producto de variables del flujo es nula. Si además se considera que el proceso es ergódico, se puede calcular el valor medio de conjunto de cualquier propiedad del flujo q a partir de un promedio temporal

$$Q(\mathbf{x}) = \overline{q(\mathbf{x},t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T q(\mathbf{x},t)\, dt \tag{2.19}$$

2.2. Descripción del flujo

El caso más simple de capa límite que se puede imaginar consiste en un flujo uniforme no turbulento con velocidad U_0 que incide de forma paralela sobre una placa plana, como muestra la figura 2.1. Se fija un sistema ortonormal de coordenadas con base $(O,\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k})$, donde $\hat{\imath}$ es colineal a la velocidad y a la superficie de la placa, $\hat{k}$ es perpendicular a la superficie de la placa, $\hat{\jmath} = \hat{k} \wedge \hat{\imath}$ y el origen O está ubicado sobre el borde de la placa. Las coordenadas del vector posición en esta base son (x,y,z) y la velocidad es $\mathbf{u} = (u,v,w)$ en dicha base. La velocidad es predominantemente en la dirección $\hat{\imath}$ y fuera de la capa límite la velocidad es $U_e(x)$. La placa aplica un esfuerzo cortante sobre el flujo de forma de garantizar la condición de adherencia sobre la superficie de la placa ($\mathbf{u}(0) = 0$). Finalmente, se asume que el problema es estadísticamente plano, o sea: $\overline{w} = W = 0$ y las derivadas parciales respecto a y de cualquier media son nulas.

Fuera de la capa límite el flujo es irrotacional, entonces a partir de alguna altura la velocidad y la presión están vinculadas por el teorema de Bernoulli: $p_e(x) + \frac{1}{2}\rho U_e^2(x) = constante$; o sea:

$$\frac{dp_e}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx} \tag{2.20}$$

Si el flujo exterior se acelera ($\frac{dU_e}{dx} > 0$), entonces $\frac{dp}{dx} < 0$; en cambio si $\frac{dU_e}{dx} < 0$ y el flujo desacelera, se tiene $\frac{dp}{dx} > 0$. En el primer caso se dice que se tiene un gradiente de presión favorable que puede darse por ejemplo en una contracción recta y en el segundo el gradiente es desfavorable como el

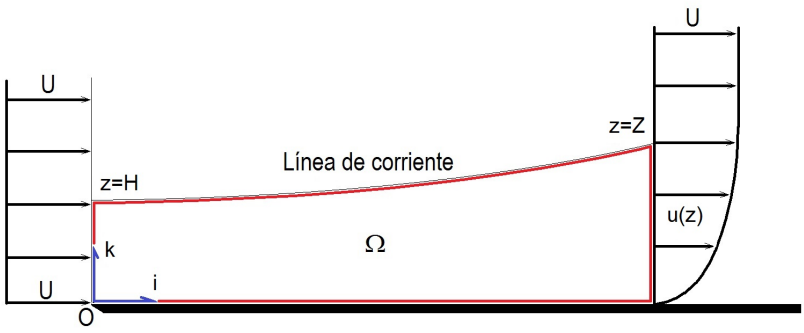


Figura 2.1: Esquema del flujo tipo capa límite sobre una placa plana

encontrado en difusores. En los análisis integrales que se hacen a continuación se considera el caso en que $\frac{dU_e}{dx} = 0$, el gradiente de presión en el flujo no perturbado es nulo y $U_e(x) = U_0$.

La altura de la capa límite $\delta(x)$, se define como la altura a la cual se alcanza el 99 % del valor $U_0(x)$. No es sencillo calcular este parámetro de forma precisa, ya que implica evaluar una diferencia muy pequeña.

Aplicando el balance de masa al volumen de control (Ω) delimitado por la linea roja punteada en la figura 2.1, se obtiene:

$$\int_\Omega \rho \mathbf{u} \mathbf{n} dS = -\rho U H + \rho \int_0^Z u(z)\, dz = 0$$

$$-UH + \int_0^Z u(z)\, dz = 0 \Rightarrow U(Z-H) = \int_0^Z (U - u(z))\, dz$$

$$\int_0^Z \left(1 - \frac{u(z)}{U}\right) dz = Z - H \tag{2.21}$$

la integral del lado izquierdo de la ecuación 2.21 es la distancia vertical que una línea de corriente que parte de una altura H en $x = 0$ es desviada; su valor depende de Z dentro de la capa límite y tiende a un valor δ^* llamado

longitud de desplazamiento en la medida que $Z \to \infty$:

$$\delta^* = \lim_{Z\to\infty} \int_0^Z \left(1 - \frac{u(z)}{U}\right) dz \tag{2.22}$$

La misma lógica se puede aplicar utilizando el balance de momento al volumen de control Ω

$$\int_\Omega \rho \mathbf{u}\,(\mathbf{un})\, dS = -D \Rightarrow -\rho U^2 H + \rho \int_0^Z u^2 dz = -D$$

siendo D la fuerza de arrastre por unidad de ancho que le aplica el flujo a la placa.

Sustituyendo

$$H = \int_0^Z \frac{u}{U} dz$$

en la última expresión y manipulando, resulta:

$$\frac{D}{\rho U^2} = \int_0^Z \frac{u(z)}{U} \left(1 - \frac{u(z)}{U}\right) dz$$

La igualdad anterior solo es válida para $Z \to \infty$, condicion para la cual $H \to \infty$, entonces se define la longitud de momento de la siguiente forma:

$$\theta = \lim_{Y\to\infty} \int_0^Y \frac{u(y)}{U} \left(1 - \frac{u(y)}{U}\right) dy \tag{2.23}$$

Finalmente, se puede escribir

$$\frac{D}{\rho U^2} = \theta \tag{2.24}$$

El coeficiente de arrastre se define como

$$C_f(x) = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

donde τ_w es la tension rasante por unidad de superficie, de forma que

$$D = \int_0^x \tau_w(x')dx' \tag{2.25}$$

Si se deriva la ecuación 2.24 se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{D}{\rho U^2}\right) = \frac{d\theta}{dx} \Rightarrow \frac{1}{\rho U^2}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \tau_w(x')dx'\right) = \frac{d\theta}{dx}$$

O sea

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho U^2} = \frac{d\theta}{dx}$$

entonces

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} \tag{2.26}$$

Esta es un caso especial de la expresión integral de Von Karman, que permite estimar valores del coeficiente de arrastre sabiendo como es el perfil de velocidades. Es más, usando 2.24 se puede calcular D conociendo la forma del perfil de velocidades en una sola posición de la placa.

En base a x, δ, δ^* y θ se pueden definir algunos números de Reynolds útiles en el análisis de la capa límite:

$$Re_x = \frac{U_0 x}{\nu} \tag{2.27}$$

$$Re_\delta = \frac{U_0 \delta}{\nu} \tag{2.28}$$

$$Re_{\delta^*} = \frac{U_0 \delta^*}{\nu} \tag{2.29}$$

$$Re_\theta = \frac{U_0 \theta}{\nu} \tag{2.30}$$

Una vez que el flujo incide sobre la placa en $x = 0$, se forma una capa límite laminar hasta que se alcanza un $Re_x \approx 10^6$, luego se tiene una zona de transición donde el flujo empieza a ser turbulento y finalmente comienza la zona donde la turbulencia está completamente desarrollada.

2.3. Las ecuaciones de la capa límite

Se considera el mismo flujo presentado en la sección anterior. Como ya se mencionó, la velocidad es predominantemente en la dirección $\hat{i}$, siendo la componente w de la velocidad de menor orden que u. Además, la experiencia empírica permite asegurar que la variación del valor medio de las propiedades del flujo es mucho mayor en la dirección $\hat{k}$ que en $\hat{i}$ [White, 1974]. Por lo tanto, haciendo un análisis de órdenes de magnitud de los términos que intervienen en las ecuaciones de Reynolds, similar al presentado en Schlichting et al. [2000] para una capa límite laminar, se obtienen las ecuaciones de capa límite turbulenta. Para ello se desprecian los términos de menor orden, resultando:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{2.31}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + W\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \tag{2.32}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P}{\rho} + \overline{w'^2}\right) \tag{2.33}$$

En el borde de la capa límite el flujo es laminar, de forma que $\overline{w'^2}$ es cero y la presión es $P_e(x)$, entonces en el interior de la capa límite la ecuación 2.33 puede integrarse de manera de obtener

$$\frac{P}{\rho} + \overline{w'^2} = \frac{P_e(x)}{\rho} \tag{2.34}$$

La ecuación

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} = \frac{d\overline{w'^2}}{dx} - \frac{1}{\rho}\frac{dP_e}{dx} \tag{2.35}$$

surge de derivar respecto a x la ecuación 2.34.
Sustituyendo 2.35 en 2.32, se obtiene

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + W\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_e}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'^2} - \overline{w'^2}\right) \tag{2.36}$$

El último término de la igualdad anterior es de menor orden que los otros, por lo cual en general se desprecia, aunque, en algunos flujos de corte libre, donde también se aplican las mismas aproximaciones y se usan las ecuaciones de capa límite, este término puede llegar a ser del orden del 10 % de los términos dominantes [Pope, 2000]. Despreciando dicho término:

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + W\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_e}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \tag{2.37}$$

En un flujo con $\frac{dP_e}{dx} = 0$ la ecuación 2.37 se transforma en

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + W\frac{\partial U}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \tag{2.38}$$

En White [1974] se describe el análisis integral realizado por Theodore Von Karman en 1921 , para derivar la relación

$$\frac{d\theta}{dx} + (2 + H_{12}) \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{C_f}{2} \tag{2.39}$$

que es válida tanto para flujo laminar como turbulento, con o sin gradiente de presión en el flujo exterior. $H_{12} = \frac{\delta^*}{\theta}$ es el llamado factor de forma de la capa límite. Puede verse que en el caso que el gradiente de presión en el flujo exterior sea nulo y U_e es constante, se recupera la igualdad 2.26.

2.4. La capa límite sobre una superficie aerodinámicamente lisa

2.4.1. La naturaleza dual de la capa límite turbulenta

Los parámetros que determinan la velocidad en un punto dentro de una capa límite laminar son: las coordenadas de la posición del punto x y z, la velocidad U_e y la viscosidad ν, como claramente puede inferirse de un examen de las ecuaciones de capa límite laminar. O sea:

$$u = f(x, z, U_e, \nu) \tag{2.40}$$

Se tiene 5 variables y 2 magnitudes básicas, entonces se puede reducir el problema aplicando la teoría de similitud a una dependencia entre tres parámetros adimensionales. Se puede elegir U_e y la altura de la capa límite δ para adimensionalizar la ecuación 2.40 de forma de tener

$$\frac{u}{U_e} = f^* \left(\frac{x}{\delta}, \frac{z}{\delta} \right) \tag{2.41}$$

De un análisis de órdenes de magnitud de los términos de las ecuaciones de capa límite, se obtiene

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \tag{2.42}$$

por lo tanto, sustituyendo la expresión anterior en 2.41 como si fuera una igualdad, resulta

$$\frac{u}{U_e} = f^* \left(x\sqrt{\frac{U}{\nu x}}, z\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \right) = f^{**} \left(Re_x, z\sqrt{\frac{U}{2\nu x}} \right) \tag{2.43}$$

la última expresión se pude separar sin perder generalidad,

$$\frac{u}{U_e} = f_1 \left(Re_x \right) g_1 \left(z\sqrt{\frac{U}{2\nu x}} \right) \tag{2.44}$$

Cuando $z \to \infty$ entonces $u \to U_e$, entonces

$$\lim_{z\to\infty} \frac{u}{U_e} = f_1 \left(Re_x \right) \lim_{\chi\to\infty} g_1 \left(\chi \right) = 1 \Rightarrow f_1 \left(Re_x \right) = constante \tag{2.45}$$

finalmente

$$\frac{u}{U_e} = g \left(z\sqrt{\frac{U}{2\nu x}} \right) = g \left(\eta \right) \tag{2.46}$$

Blasius en 1908, (ver White [1974]) sustituyó esta expresión en las ecuaciones de capa límite laminar y con ayuda de la ecuación de balance de masa derivó una ecuación diferencial ordinaria para g:

$$g''' + gg'' = 0 \tag{2.47}$$

sujeta a $g(0) = g'(0) = 0$ y $g'(\infty) = 1$ que le permitió encontrar numéricamente soluciones similares al problema de determinar el campo de velocidad en una capa límite laminar sobre una placa plana.

La solución de Blasius ha sido verificada por la experiencia (Liepmann

[1943]), de forma que las suposiciones hechas son válidas, en particular la hipótesis de que δ es una escala de la coordenada z en todo el espesor de la capa límite. Esto no es así en la capa limite turbulenta.

Intentos por hacer el mismo razonamiento en la capa límite turbulenta no prosperan porque en esta se identifican dos regiones con procesos físicos diferentes y controlados por distintos conjuntos de parámetros. Por un lado, la capa interna (inner layer) y, por otro, la capa externa (outer layer).

2.4.2. Velocidad media

La capa interna

La capa interna, se encuentra en la zona adyacente a la superficie y tiene una altura que oscila entre $0{,}1\delta$ y $0{,}2\delta$ [Cebeci, 2012]. En ella es generalmente aceptado que las propiedades de la velocidad media U dependen de la tensión rasante sobre la superficie τ_w, la densidad ρ, la viscosidad dinámica μ y la altura z.

$$U = \Phi(\tau_w, \rho, \mu, z) \tag{2.48}$$

Entonces se tienen 5 variables y 3 magnitudes básicas, por lo cual se puede reducir la relación 2.48 a una igualdad que involucra solamente dos números adimensionales.

Si se eligen ρ, μ y τ_w como variables básicas, se puede construir con ellas una velocidad

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \tag{2.49}$$

llamada velocidad de fricción y una longitud

$$\delta_v = \frac{\nu}{u^*} \tag{2.50}$$

comúnmente denominada longitud viscosa (viscous length).

Las variables U y z adimensionadas con la velocidad de fricción y con

la longitud viscosa respectivamente, se llaman variables internas las cuales en la bibliografía especializada se identifican con un superíndice $+$ [Pope, 2000], o sea:

$$U^+ = \frac{U}{u^*} \tag{2.51}$$

$$z^+ = \frac{z}{\delta_v} \tag{2.52}$$

Es de destacar que z^+ es un número de Reynolds local y, por lo tanto, es esperable que esta cantidad defina las regiones donde los procesos viscosos o turbulentos dominan.

De esta manera se puede reescribir la igualdad 2.48 de forma adimensionada como sigue:

$$U^+ = \Phi_1\left(z^+\right) \tag{2.53}$$

A esta expresión se le llama ley de pared (law of the wall).
La ecuación de capa límite para una capa límite sobre una placa plana es

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + W\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP_e}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z} \tag{2.54}$$

con

$$\tau = \mu\frac{\partial U}{\partial z} - \rho\overline{u'w'} \tag{2.55}$$

Sobre la pared, la velocidad es nula, por lo tanto el primer miembro de la ecuación 2.54 es nulo, lo cual implica que

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial z}\right|_w = \frac{dP_e}{dx} \tag{2.56}$$

Además, derivando la ecuación 2.54 respecto a z, se tiene,

$$\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial x}+U\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}+\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}+W\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 P_e}{\partial z\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \tag{2.57}$$

Usando la ecuación de balance de masa, que la velocidad es nula sobre la pared y que la presión P_e es función solo de x:

$$\left.\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}\right|_w = 0 \tag{2.58}$$

Del examen anterior resulta que en una capa cercana a la pared, la tensión rasante es lineal con la altura:

$$\tau \approx \tau_w + \frac{dP_e}{dx}z + O\left(z^3\right) \tag{2.59}$$

En el caso en que el gradiente de presión es nulo, se tiene una región en que

$$\tau \approx \tau_w. \tag{2.60}$$

Evidencia experimental revela que el espesor de esta capa es entre $0{,}1\delta$ y $0{,}2\delta$ [Cebeci, 2012], o sea que en la capa interna a tensión τ es constante.

Sobre la pared las tensiones de Reynolds son nulas, entonces la tensión rasante sobre la pared es solo debido a la acción viscosa:

$$\tau_w = \rho\nu\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_w$$

En la medida que se consideran posiciones más alejadas de la pared, las tensiones de Reynolds aumentan manteniendo la tensión total en el valor dado por la ecuación 2.59, de manera que las tensiones viscosas disminuyen. La zona adyacente a la pared donde las tensiones de Reynolds son despreciables frente a las viscosas se denomina subcapa viscosa (viscous sublayer), y tiene un espesor nominal de $5\delta_v$. Si se desprecia las tensiones de Reynolds, se tiene:

$$\mu\frac{\partial U}{\partial z} = \tau_w \Rightarrow \nu\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\tau_w}{\rho} = u^{*2} \Rightarrow \frac{\nu u^*}{\delta_v}\frac{\partial U^+}{\partial z^+} = u^{*2} \Rightarrow \frac{\partial U^+}{\partial z^+} = \frac{u^*\delta_v}{\nu} = 1$$

Por lo tanto en la subcapa viscosa ($z^+ < 5$) se tiene

$$u^+ = z^+ \tag{2.61}$$

Cuando $z^+ \approx 50$ la contribución de las tensiones viscosas al total, es menor al 10 %. Basado en esto se define la región viscosa, donde $z^+ < 50$.

A partir de $30 < z^+$ es posible despreciar las tensiones viscosas, de manera que la dependencia del perfil de velocidad de las viscosidad ν desaparece.

Esta dependencia también desaparece de la derivada de la velocidad respecto a z. Si se deriva U respecto a z:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial U^+}\frac{\partial U^+}{\partial z^+}\frac{\partial z^+}{\partial z} = \frac{u^*}{\delta_v}\frac{\partial U^+}{\partial z^+} = \frac{u^{*2}}{\nu}\frac{\partial U^+}{\partial z^+}$$

finalmente usando la igualdad 2.53:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{u^{*2}}{\nu}\frac{\partial \Phi_1}{\partial z^+} \tag{2.62}$$

El miembro derecho de la ecuación anterior no puede depender de la viscosidad, por lo tanto, la derivada de Φ_1 respecto a z solo puede adoptar la forma

$$\frac{d\Phi_1}{dz^+} = \frac{1}{\kappa z^+} \tag{2.63}$$

Integrando se obtiene la ley logarítmica

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} ln\left(z^+\right) + B \tag{2.64}$$

donde $\kappa \approx 0{,}41$ es la constante de Von Karman y B es una constante que vale entre 4,9 y 5,5

Se tiene entonces el perfil de velocidad en la subcapa viscosa ($z^+ < 5$) y en la zona donde vale la ley logarítmica ($30 < z^+ < 0{,}1\delta$). Entre estas zonas

está la subcapa de transición ($5 < z^+ < 30$); llamada así porque el flujo en ella está en transición entre un flujo laminar cuando $z^+ \to 0$ y un flujo totalmente turbulento cuando $z^+ \approx 30$.

Para describir el perfil de velocidad en toda la capa interna Spalding (ver [White, 1974]) propuso una expresión compuesta dada por:

$$z^+ = U^+ + e^{\kappa B}\left[e^{\kappa U^+} - 1 - \kappa U^+ - \frac{(\kappa U^+)^2}{2} - \frac{(\kappa U^+)^3}{6}\right] \tag{2.65}$$

Es fácil ver que si $U^+ \to 0$ se recupera la expresión 2.61 y si $U^+ \to \infty$ se obtiene la ley logarítmica 2.64. Además, representa de muy buena forma el perfil de velocidad en la capa de transición [White, 1974].

En la figura 2.2 se presenta los perfiles de velocidad media representados en variables internas obtenidos de forma experimental por Österlund [1999] ($Re_\theta = 26612$) y los obtenidos por simulación numérica directa (ver capítulo 3.1) con $Re_\theta = 2300$ por Schlatter et al. [2009]. Se ve claramente la concordancia de 2.61 cuando $z^+ < 5$ y de la ley logarítmica en la zona $30\delta_v < z^+ < 0{,}1\delta$.

La capa externa

En la capa externa la influencia directa de la viscosidad ν es despreciable; esto se cumple para $50 < z^+$. En esta región las propiedades de la diferencia de la velocidad media y la velocidad exterior U_e, dependen de la densidad ρ, de la tensión rasante en la pared τ_w, del espesor de la capa limite δ, de la altura z y del gradiente de presiones $\frac{dP_e}{d_x}$, como se postula en White [1974]. O sea que podemos escribir

$$U_e - U = \Psi\left(\tau_w, \rho, \delta, z, \frac{dP_e}{dx}\right) \tag{2.66}$$

Si se toma como variables básicas ρ, τ_w y δ, se forman la velocidad de fricción igual que en la capa interna (ec. 2.49) y las variables

$$\eta = \frac{z}{\delta}, \tag{2.67}$$

y

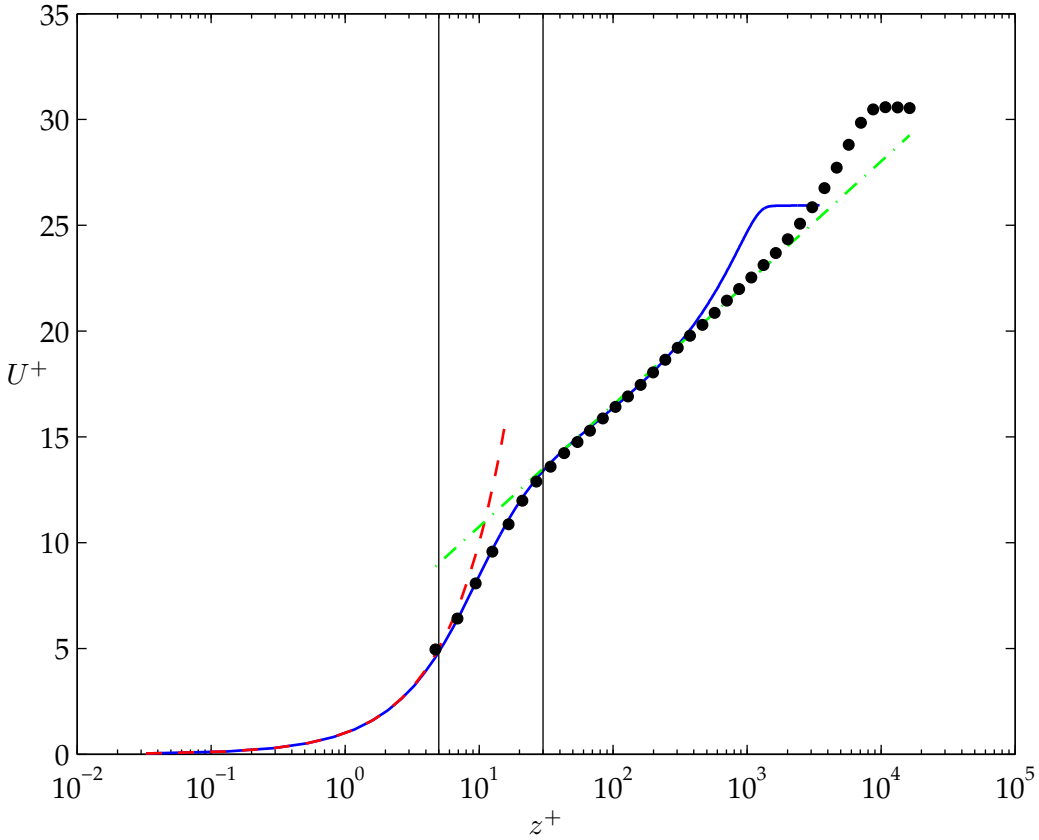


Figura 2.2: Perfil de velocidad media en una capa límite turbulenta. •, Datos experimentales de Österlund [1999], $Re_\theta = 26612$; –, DNS de Schlatter et al. [2009],$Re_\theta = 2300$; - -, $y^+ = U^+$; - · -, ley logarítmica.

$$\beta = \frac{\delta}{\tau_w}\frac{dP_e}{dx}$$

El comportamiento de la capa externa depende no solo del valor de este último parámetro β sino también de su variación en la dirección x. Para eliminar la dificultad de medir δ, Clauser modificó el parámetro utilizando en lugar de δ, la longitud de desplazamiento δ^* [White, 1974]. Por lo tanto el llamado parámetro de equilibrio de Clauser es:

$$\beta = \frac{\delta^*}{\tau_w}\frac{dP_e}{dx} \tag{2.68}$$

En base a él se define el concepto de capa límite en equilibrio. El equilibrio se establece si el parámetro β no varía en la dirección x de manera que sus derivadas son nulas. En estas condiciones la relación 2.66 se puede escribir de forma adimensionada como sigue:

$$\frac{U_e - U}{u^*} = \Psi(\eta, \beta) \tag{2.69}$$

A esta expresión se le conoce como ley de defecto de velocidad (velocity-defect law).

En la figura 2.3 se puede apreciar el colapso en una única curva de los perfiles de defecto de velocidad media adimensionados con variables externas, para diferentes números de Reynolds. Esto muestra la validez de la ley de defecto de velocidad. En la figura, ambos conjuntos de datos tienen gradiente de velocidad nulo y por tanto $\beta = 0$, pero la validez de la ley de defecto de velocidad para distintos valores de β puede verse por ejemplo en White [1974].

La capa de superposición

La capa interna tiene un espesor de aproximadamente $0{,}1\delta$. En la medida que el número de Reynolds aumenta el espesor de esta capa también aumenta en términos reales. Por otro lado, el límite inferior de la capa externa ($50\delta_v$) disminuye en la medida que aumenta el numero de Reynolds. Por lo tanto a partir de algún valor del numero de Reynolds, estas dos regiones se superponen. La capa de superposición, si existe, va de $50\delta_v$ a $0{,}1\delta$. En esta zona deben ser válidas, tanto la ley de la pared como la ley de defecto de velocidad [Pope, 2000].

La derivada de la velocidad respecto a z en la capa externa

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{u^*}{\delta} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \tag{2.70}$$

y la derivada respecto a z de la velocidad en la capa interna (ec. 2.62) deben ser iguales en esta zona:

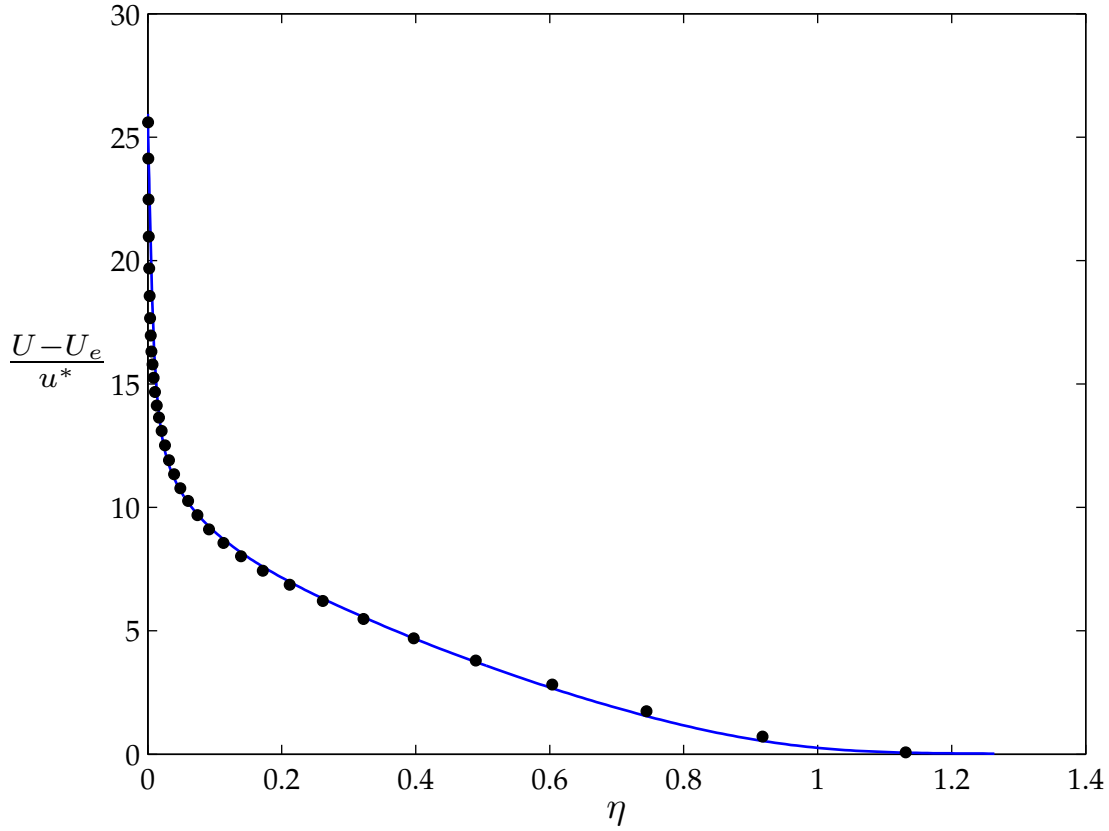


Figura 2.3: Perfil de defecto de velocidad media expresado en variables externas. •, Datos experimentales de Österlund [1999], $Re_\theta = 26612$; –, DNS de Schlatter et al. [2009],$Re_\theta = 2300$

$$\frac{u^{*2}}{\nu}\frac{\partial \Phi_1}{\partial z^+} = \frac{u^*}{\delta}\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \Rightarrow \frac{z u^*}{\nu}\frac{\partial \Phi_1}{\partial z^+} = \frac{z}{\delta}\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \Rightarrow z^+\frac{\partial \Phi_1}{\partial z^+} = \eta\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \frac{1}{\kappa}$$

La última igualdad es necesaria ya que para que dos funciones de diferentes variables sean iguales, ambas deben ser iguales a una constante.

Integrando el primer miembro de la última igualdad, se obtiene de otra manera la ley logarítmica:

$$z^+\frac{\partial \Phi_1}{\partial z^+} = \frac{1}{\kappa} \Rightarrow \int \frac{\partial \Phi_1}{\partial z^+} = \int \frac{1}{\kappa z^+} = \frac{1}{\kappa} ln\left(z^+\right) + B$$

o sea

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} ln\left(z^+\right) + B$$

Este argumento fue el que utilizó Millikan en 1938 para derivar la ley logarítmica [Pope, 2000]. La ley logarítmica, que en la sección anterior se derivó de otra manera, es válida hasta aproximadamente $0{,}3\delta$, más allá de la capa interna.

Por otra parte, integrando el segundo miembro de la igualdad, se obtiene

$$\frac{Ue - U}{u^*} = -\frac{1}{\kappa} ln\left(\eta\right) + B_1\left(\beta\right) \tag{2.71}$$

Esta última expresión es válida en la parte baja de la capa externa, o sea entre $50\delta_v$ y $0{,}3\delta$.

La ley de la estela

En la parte baja de la capa externa la velocidad media obedece la ley logarítmica 2.71, pero la velocidad media se desvía de esta curva en la medida que $\delta \to 1$. Coles [1956] propuso, para describir el perfil de velocidad media en toda la capa externa, una fórmula compuesta dada por la suma de la ley de pared y una función llamada ley de la estela (law of the wake):

$$\frac{U}{u^*} = \frac{1}{\kappa} ln\left(z^+\right) + B + \frac{\Pi\left(\beta\right)}{\kappa} w\left(\eta\right) \tag{2.72}$$

En esta expresión, Π es el llamado parámetro de la estela de Coles. El nombre deriva de que la parte alta de la capa límite se asemeja a una estela plana.

Es importante notar que la ecuación 2.72 es compatible con la ley de defecto de velocidad (ec. 2.69). Para probar esto se evalúa la expresión 2.72 en $z = \delta$:

$$\frac{U_e}{u^*} = \frac{1}{\kappa} ln\left(\delta^+\right) + B + \frac{\Pi\left(\beta\right)}{\kappa} w\left(1\right) \tag{2.73}$$

y se le resta la ec. 2.72, de lo que resulta

$$\frac{U_e - U}{u^*} = \frac{1}{\kappa} ln\left(\delta^+\right) + B - \frac{1}{\kappa} ln\left(z^+\right) - B + \frac{\Pi(\beta)}{\kappa}\left[w(1) - w(\eta)\right]$$

O sea

$$\frac{U_e - U}{u^*} = -\frac{1}{\kappa} ln(\eta) + \frac{\Pi(\beta)}{\kappa}\left[w(1) - w(\eta)\right] \tag{2.74}$$

la cual es una función únicamente de η y de β a través de Π .

En la medida que $\eta \to 0$ (con $50 < z^+$), la velocidad debe poder aproximarse usando la ley de pared, entonces $w \to 0$ si $\eta \to 0$. De la misma manera, si $\eta \to 0$, la velocidad se puede describir con la ecuación 2.71, entonces sustituyendo 2.71 en 2.74, resulta:

$$\Pi(\beta) = \frac{\kappa B_1(\beta)}{w(1)} \tag{2.75}$$

Si se sustituye 2.75, en 2.72 se tiene

$$\frac{U}{u^*} = \frac{1}{\kappa} ln\left(z^+\right) + B + B_1(\beta)\frac{w(\eta)}{w(1)}$$

lo cual muestra que el valor relevante es el del cociente de $w(\eta)$ y $w(1)$ y no el de $w(\eta)$, pudiendo este ser arbitrario. Coles eligió $w(1) = 2$ porque los datos experimentales eran consistentes con un ajuste de la forma:

$$w(\eta) = 2sen^2\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) \tag{2.76}$$

Sustituyendo $C_f = 2\left(\frac{u^*}{U_e}\right)^2$ en 2.73 y manipulando, se logra obtener una ecuación implícita para C_f:

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = \frac{1}{\kappa} ln\left(Re_\delta \sqrt{\frac{C_f}{2}}\right) + B + \frac{2\Pi}{\kappa} \tag{2.77}$$

2.4.3. Tensiones de Reynolds

En la subcapa viscosa es posible predecir el comportamiento de las tensiones de Reynolds. A continuación se reproduce en parte un análisis desarrollado en Pope [2000], que permite hallar la dependencia de las tensiones de Reynolds con z en la subcapa viscosa.

Expandiendo en series de Taylor las componentes fluctuantes de la velocidad desde la pared, se tiene:

$$\begin{aligned} u' &= a_1 + b_1 z + c_1 z^2 + \dots \\ v' &= a_2 + b_2 z + c_2 z^2 + \dots \\ w' &= a_3 + b_3 z + c_3 z^2 + \dots \end{aligned}$$

Los coeficientes son variables aleatorias con media cero. Como sobre la pared, la velocidad es nula, entonces a_1,a_2 y a_3 valen cero. Las derivadas de la velocidad sobre la pared en las direcciones x e y son nulas, por lo tanto, la ecuación de balance de masa establece que $\frac{\partial w'}{\partial z} = 0$ y entonces $b_3 = 0$. O sea que

$$\begin{aligned} u' &= b_1 z + c_1 z^2 + \dots \\ v' &= b_2 z + c_2 z^2 + \dots \\ w' &= c_3 z^2 + \dots \end{aligned}$$

Ahora se pueden evaluar $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$ y $\overline{u'w'}$:

$$\begin{aligned} \overline{u'^2} &= \overline{b_1{}^2} z^2 + \dots \\ \overline{v'^2} &= \overline{b_2{}^2} z^2 + \dots \\ \overline{w'^2} &= \overline{c_3{}^2} z^4 + \dots \\ \overline{u'w'} &= \overline{b_1 c_3} z^3 + \dots \end{aligned}$$

Los términos de mayor orden empiezan a tener influencia para $5\delta_v < z$, o sea fuera de la subcapa viscosa.

En la región de pared, las componentes del tensor de Reynolds tienen un comportamiento como el que se muestra en la figura 2.4, donde se destaca

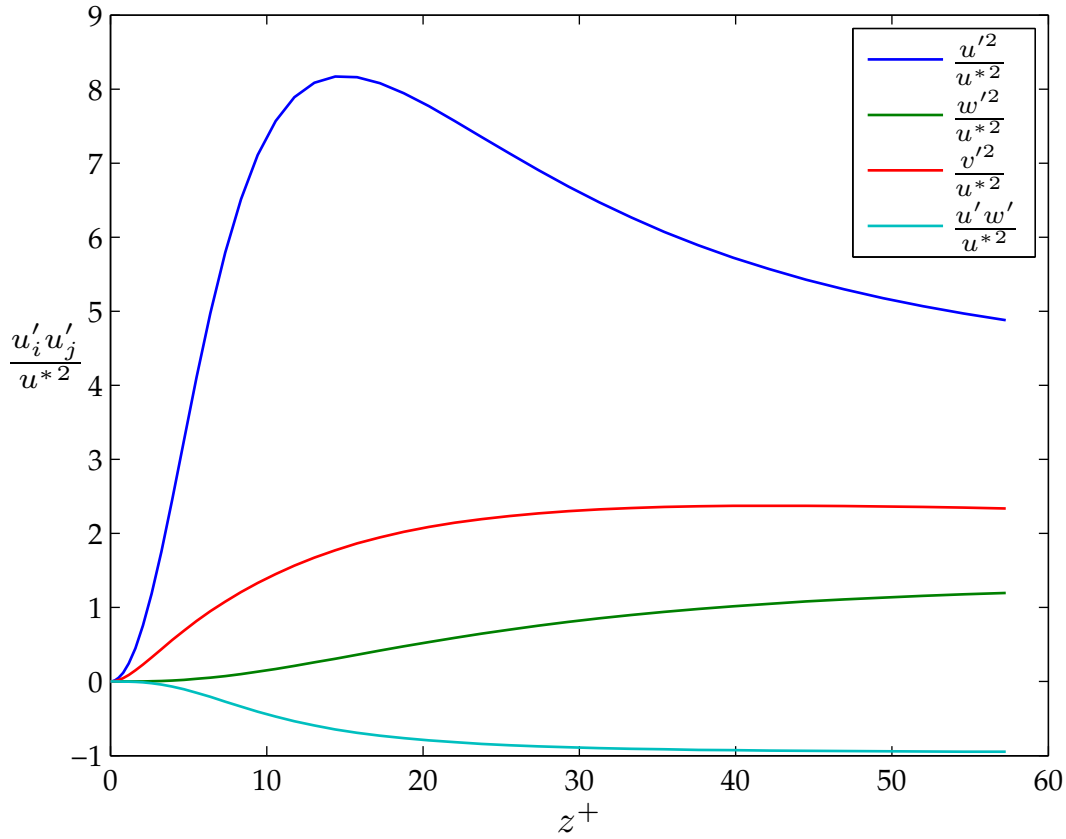


Figura 2.4: Componentes del tensor de Reynolds en la región de pared. Datos de la DNS de Schlatter et al. [2009],$Re_\theta = 4061$

la presencia de un máximo de $\frac{u'^2}{u^{*2}}$ en $y^+ \approx 15$.

La teoría utilizada hasta ahora asume que las únicas variables relevantes en la capa interna son τ_w, μ, ρ y z. De manera que adimensionando:

$$\frac{\overline{u_i'u_j'}}{u^*} = f_i\left(z^+\right) \tag{2.78}$$

O sea que si se escalaran las tensiones de Reynolds con variables internas para distintos valores del número de Reynolds, estas curvas deberían colapsar en una única curva universal, esto sucede en forma parcial, y ha dado origen a argumentos en contra de la teoría clásica, los cuales de analizaran brevemente en la sección siguiente.

En la figura 2.5 se muestra los perfiles de las componentes del tensor de Reynolds expresadas en variables internas.

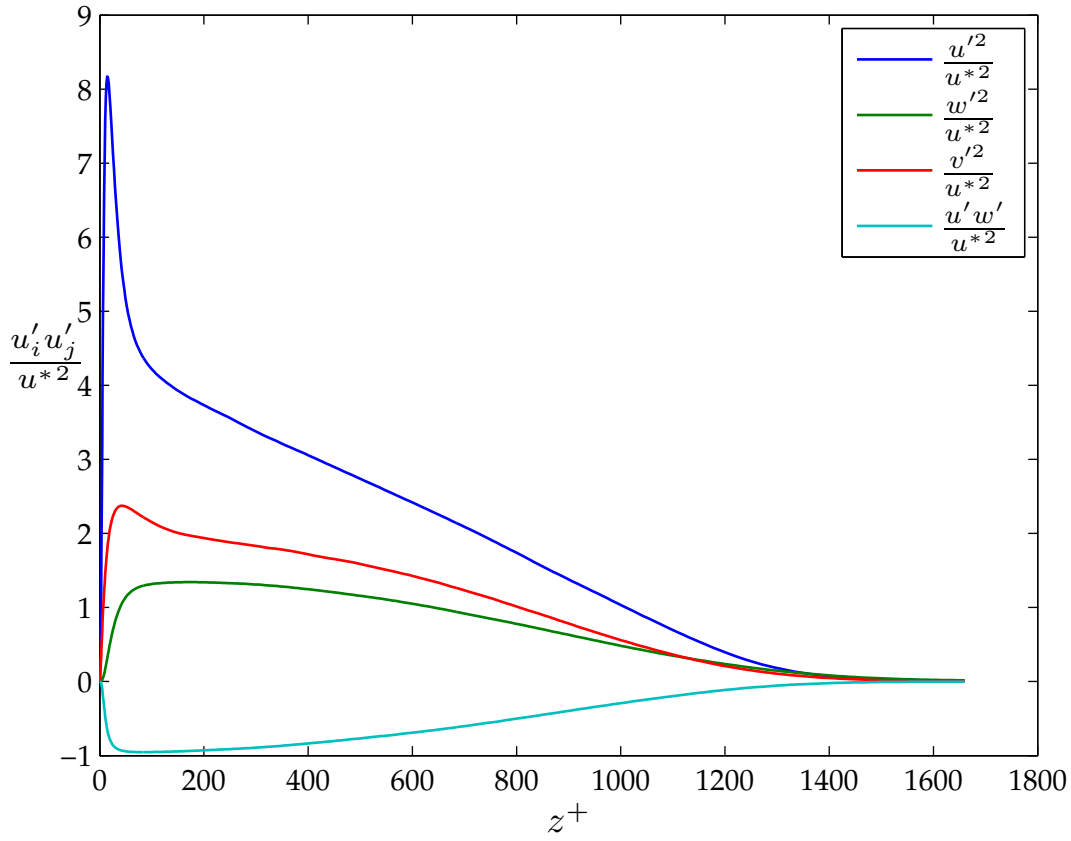


Figura 2.5: Componentes del tensor de Reynolds expresadas en variables internas. Datos de la DNS de Schlatter et al. [2009],$Re_\theta = 4061$

Argumentos en contra de la teoria clasica de la capa limite.

La teoría clásica de la capa límite ha sido considerada un éxito por la comunidad científica durante décadas por su aparente acuerdo con los datos experimentales. Solo recientemente se han alzado voces que ponen en duda su validez ([Long and Chen, 1981], [George and Castillo, 1997]). Los argumentos que sustentan este embate se basan principalmente en lo siguiente: la constante de von Karman y otras características como las tensiones de Reynolds, presentan una débil dependencia con el número de Reynolds. La teoría clásica no contempla esta posibilidad. Otra objeción planteada es que solo las escalas internas son consistentes con las ecuaciones de capa límite, mientras que las escalas externas son inconsistentes con las ecuaciones del movimiento [George and Castillo, 1997].

Mediante un análisis asintótico de las ecuaciones de capa límite, George

and Castillo [1997] llegó a determinar el esquema de escalas que es consistente con las ecuaciones del movimiento. En la capa interna las variables adecuadas son las mismas que en la teoría clásica, pero en la capa externa se encontró que la escala de velocidad consistente debe ser U_e. Además, en la capa externa, las tensiones de Reynolds si se escalan con u^* como en la teoría clásica.

El acople asintótico de la capa interna y externa, que en la teoría clásica resulta en la ley logarítmica, con estos nuevos argumentos, genera una ley potencial de la forma

$$u^+ = C\left(z^+\right)^{\alpha}$$

donde C y α son funciones del numero de Reynolds.

La ley potencial y la logarítmica logran una predictibilidad comparable. Para verificar esta nueva teoría se deberían lograr en laboratorio números de Reynolds mucho mayores a los alcanzados actualmente. Recientemente se propuso la construcción del Túnel de Viento Nórdico; un túnel de viento capaz de alcanzar dicho Reynolds con muy baja turbulencia de base [Karlsson et al., 2001]. Este túnel permitiría con la ayuda de instrumentación adecuada probar la validez de estos argumentos.

Como lo explica Pope [2000]: el éxito experimental de una teoría no implica que su derivación sea correcta. De cualquier manera, esta dependencia con el número de Reynolds no elimina la capacidad predictiva de la teoría clásica y, por lo tanto, su utilidad.

Balance de energía cinética turbulenta

La ecuación de balance de energía cinética turbulenta (ecuación 2.18, utilizando las aproximaciones usadas en la derivación de las ecuaciones de capa límite, queda (ver [Pope, 2000]):

$$0 = -\left(U\frac{\partial k}{\partial x} + W\frac{\partial k}{\partial z}\right) + \mathcal{P} - \varepsilon + \nu\frac{\partial^2 k}{\partial z} - \frac{\partial \overline{w'e}}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} \tag{2.79}$$

donde el primer término del miembro derecho de la ecuación 2.79 es el transporte debido al flujo medio (convicción), el siguiente es la producción,

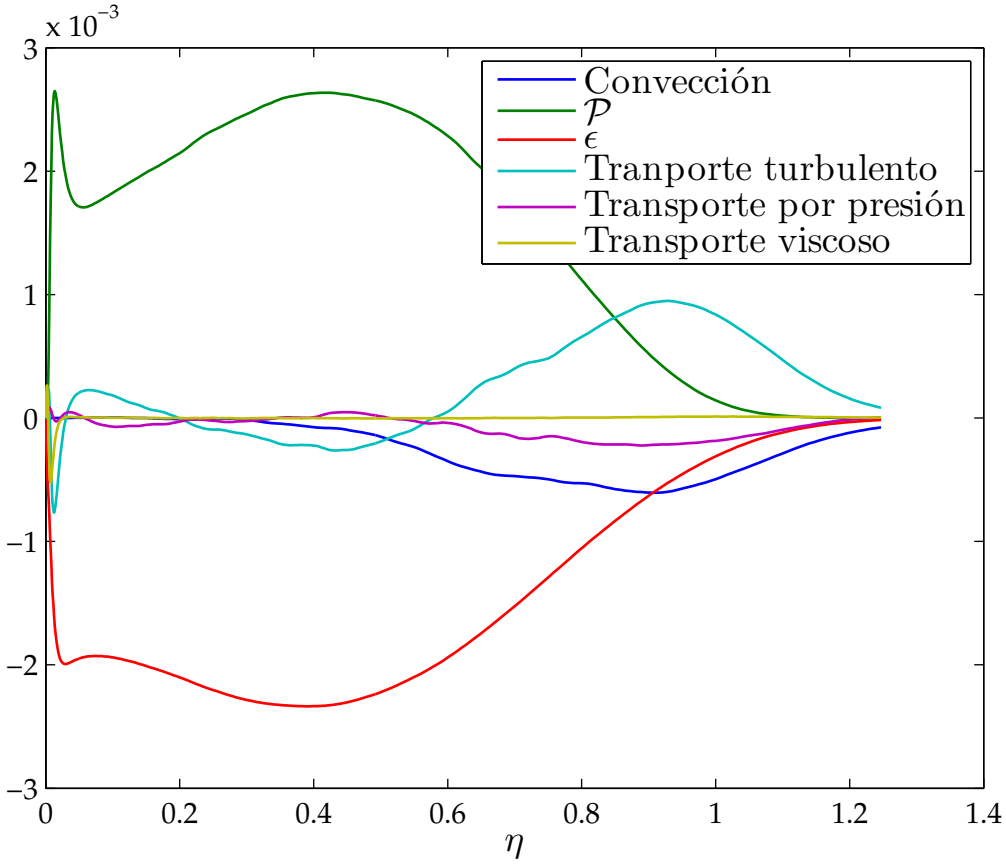


Figura 2.6: Balance de energía cinética turbulenta en una capa límite, los términos son adimensionados con variables externas. Datos de la DNS de Schlatter et al. [2009],$Re_\theta = 4061$

el tercero es la disipación, el cuarto es el transporte por medios viscosos, el quinto es el trasporte turbulento y el último es el transporte originado por la interacción de las componente fluctuantes de la presión y la velocidad.

En la figura 2.6 se presenta el balance de energía cinética turbulenta en altura. Los términos han sido adimensionados usando variables externas y multiplicados por η. Por ejemplo: se grafica $\eta\mathcal{P}^+$ en función de η, etc.

Es evidente que en la zona logarítmica el balance es principalmente entre la producción y la disipación, siendo los términos de transporte despreciables. No sucede esto en la subcapa viscosa, ni en el límite superior de la capa límite.

2.5. La capa límite sobre una superficie aerodinámicamente rugosa

Las superficies reales son rugosas. Por más esmero que el fabricante ponga en hacerlas lisas si un observador se acerca lo suficiente podrá encontrar las imperfecciones. La manera usual de caracterizar estas imperfecciones es mediante al valor medio de la altura de las protuberancias h. Del punto de vista de la capa límite, la variable que define si una superficie actúa como una superficie lisa o rugosa es la relación de h respecto a la longitud viscosa δ_v. Si $h < 5\delta_v$ la superficie se considera aerodinámicamente lisa [Raupach et al., 1991] y toda la teoría desarrollada en la sección 2.4 es válida. Si $5\delta_v < h$, la magnitud h y todas las otras longitudes que definen la geometría (L_i) de la superficie comienzan a ser relevantes.

En una superficie rugosa no es trivial la definición del origen de la coordenada z. La presencia de los elementos de rugosidad desplazan el flujo alejandolo de la superficie, de manera que se puede considerar que el plano de origen está desplazado una distancia d llamada altura de desplazamiento nulo. Thom [1971] propuso calcular d de la manera siguiente:

$$d = \frac{\int_0^h z D_z(z)\, dz}{\int_0^h D_z(z)\, dz} \tag{2.80}$$

donde D_z es la media de la fuerza de arrastre en la dirección del flujo por unidad de altura z. O sea que d es la altura donde se aplica la fuerza de arrastre media. Se cumple que $0 \leq d \leq h$ y $d = 0$ si la superficie es lisa. Aunque existen otras maneras de calcular d, esta es la más usada y tiene el respaldo de haber sido verificada experimentalmente [Raupach et al., 1991]. En vista de lo anterior se define la coordenada $Z = z - d$.

Los elementos de rugosidad alteran el flujo de forma que en una región cercana a la pared y los elementos de rugosidad, se tiene un flujo altamente dependiente de la geometría de estos elementos. A esta región se la conoce como Subcapa rugosa. Esta subcapa tiene una altura que va desde $2h$ hasta $5h$.

Es importante destacar que se tiene la misma estructura teórica que en una capa límite sobre una superficie lisa, es decir, se tienen dos zonas: una

capa exterior y una interior. Lo que se modifica es la dependencia en la capa interior, donde aparecen nuevas variables. O sea que la velocidad media es una función de la forma

$$U = f\left(\rho, \mu, \tau_w, L_i, h, Z\right) \tag{2.81}$$

Eligiendo las mismas variables básicas (ρ, μ y τ_w) se obtiene la relación adimensional

$$\frac{U}{u^*} = \Phi_2\left(L_i^+, h^+, Z^+\right) \tag{2.82}$$

Donde

$$L_i^+ = \frac{L_i}{\delta_v}$$

y

$$h^+ = \frac{h}{\delta_v}.$$

En la capa externa la dependencia es la misma que la dada por la relación 2.69. Si se tiene una separación de escalas externas e internas lo suficientemente grande, o sea que simultáneamente se cumpla $\delta/\delta_v >> 1$, $\delta/h >> 1$ y $\delta/L_i >> 1$, se tendrá una zona en donde ambas expresiones (2.69 y 2.82) serán válidas, dando origen a una capa de superposición análoga a la encontrada en una capa límite lisa. Derivando respecto a z las expresiones 2.69 y 2.82 e igualando:

$$\frac{u^{*2}}{\nu}\frac{\partial \Phi_2}{\partial Z^+} = -\frac{u^*}{\delta}\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \Rightarrow \frac{Z u^*}{\nu}\frac{\partial \Phi_2}{\partial Z^+} = -\frac{Z}{\delta}\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \Rightarrow Z^+\frac{\partial \Phi_2}{\partial Z^+} = -\eta\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \frac{1}{\kappa}$$

Integrando se obtiene

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} ln\left(Z^+\right) + C\left(h^+, L_i^+\right) \tag{2.83}$$

donde C es una función de la geometría de la superficie rugosa, siendo

habitual expresarla de la siguiente manera:

$$C = B - \left[\frac{\Delta U}{u^*}\right]\left(h^+, L_i^+\right).$$

A $\Delta U/u^*$ se le conoce como función de rugosidad y B es la constante universal de la ley logarítmica para una superficie lisa. En la revisión acerca de capa límite sobre superficies rugosas de Raupach et al. [1991] se compilan valores de la función de rugosidad para diferentes h^+ obtenidos experimentalmente en situaciones que abarcan desde ductos hasta capa límite atmosférica sobre vegetación.

La expresión de la velocidad media en la capa de superposición en variables externas es la ecuación 2.71.

Cuando el número de Reynolds es suficientemente alto se alcanza la situación de similitud de Reynolds, en la cual la viscosidad deja de ser una variable relevante. Esto se da en muchos casos, entre los que se cuentan flujos atmosféricos sobre vegetación o edificios. Teniendo este efecto en cuenta es que es mejor utilizar h como variable básica en lugar de μ para adimensionar la relación funcional 2.81, de lo cual resulta:

$$\frac{U}{u^*} = \Phi_3\left(\xi, h^+, \sigma_i\right) \tag{2.84}$$

donde $\xi = Z/h$ y $\sigma_i = L_i/h$.

El mismo argumento de acople entre la capa externa e interna, formando una capa de superposición, conduce a

$$\frac{U}{u^*} = \frac{1}{\kappa} ln\left(\xi\right) + c\left(h^+, \sigma_i\right) \tag{2.85}$$

En el ambiente meteorológico es usual expresar la relación 2.85 de la forma siguiente:

$$\frac{U}{u^*} = \frac{1}{\kappa} ln\left(\frac{Z}{z_0}\right) \tag{2.86}$$

donde la longitud de rugosidad z_0 es

$$z_0 = he^{-\kappa c\left(h^+,\sigma_i\right)} \tag{2.87}$$

Se puede obtener relaciones que vinculan las tres maneras de expresar la ecuación 2.83:

$$\begin{aligned} ln\frac{z_0}{h} &= -\kappa c\left(h^+,\sigma_i\right) \\ &= -\kappa C\left(h^+,L_i^+\right) - ln\left(h^+\right) \\ &= -\kappa\left[B - \left[\frac{\Delta U}{u^*}\right]\left(h^+,\sigma_i\right)\right] - ln\left(h^+\right) \end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, cuando el numero de Reynolds es alto y se alcanza la similitud de Reynolds, se pierde la dependencia de h^+, de manera que la constante $c\left(h^+,\sigma_i\right) \to c_\infty\left(\sigma_i\right)$, o sea que solo depende del tipo de rugosidad que se tenga. Por ejemplo, se tiene un valor de $c_\infty = 8{,}5$ para rugosidad tipo arena, un valor de $c_\infty = 5{,}1$ en campos y cultivos, $c_\infty = 6{,}9$ en zonas boscosas, tal como se presenta en Raupach et al. [1991]. Estos valores redundan en $z_0/h \approx 0{,}03$, $z_0/h \approx 0{,}12$ y $z_0/h \approx 0{,}06$, respectivamente.

Para este caso la función de rugosidad queda

$$\frac{\Delta U}{u^*} = -c\left(\sigma_i\right) + B + \kappa^{-1} ln\left(h^+\right) \tag{2.88}$$

Cuando la rugosidad es artificial, ya sea cubos montados sobre una superficie lisa o barras horizontales, es común definir la densidad de rugosidad λ como el cociente del área frontal de cada elemento y el área horizontal asignada a cada elemento. Se ha encontrado que z_0/h es una función de este parámetro λ. z_0/h crece en la medida que λ aumenta hasta llegar a un máximo en $\lambda \approx 0{,}1$ y luego decrecer. Este efecto está relacionado con la protección mutua que se obtiene al tener los elementos de rugosidad muy cerca unos de otros. En la zona con $\lambda < 0{,}1$, $z_0/h \approx \lambda$.

La hipótesis de similitud de pared (wall similarity, ver [Raupach et al., 1991]) establece que "fuera de la subcapa rugosa o la viscosa, los movimientos turbulentos en una capa límite a números de Reynolds suficientemente altos son independientes de la rugosidad de la pared y de la viscosidad, excepto por el rol de la pared en fijar la escala de velocidad u^*, la altura

$Z = z - d$ y la altura de la capa límite δ''. Evidencia que sustenta el uso de esta hipótesis se encuentra principalmente en el hecho de que la constante de Von Karman tiene sensiblemente el mismo valor para distintos tipos de rugosidad, desde superficies lisas hasta rugosidad de terrenos a nivel meteorológico.

Tomando en cuenta esta hipótesis se puede establecer que las tensiones de Reynolds fuera de la subcapa rugosa tienen una dependencia de la forma:

$$\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} = \mathbf{R}\left(Z, \rho, \tau_w, \delta\right) \tag{2.89}$$

Adimensionando,

$$\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} = u^{*2}\mathbf{R}^*\left(\eta\right) \tag{2.90}$$

donde ahora $\eta = {}^{Z}/_{\delta}$.

De manera que si se adimensionan las tensiones de Reynolds con δ y u^*, el perfil en altura debería colapsar en curvas universales.

2.6. Flujo en un canal

Se considera el flujo en un ducto de sección rectangular donde la altura H del ducto es mucho menor que el ancho b (ver figura 2.7). Se define la dirección x en la dirección del ducto, la dirección z transversal, la restante y. El flujo escurre desde la entrada, en donde se forman dos capas límite, una en cada superficie. En la medida que el flujo se adentra en el canal, el crecimiento de las capas límites llega a ser tal que la altura de las capas limites es igual a la mitad de la distancia entre las paredes. Cuando esto sucede se forma lo que se llama un flujo en un canal, donde las características estadísticas del flujo no evolucionan más en el sentido del flujo y la única variable relevante es la distancia a la pared z.

El movimiento del fluido en el canal es forzado por un gradiente de presión según la dirección x. Las ecuaciones que gobiernan del flujo en un canal son: la ecuación de balance de masa (ec. 2.11) que en este caso queda

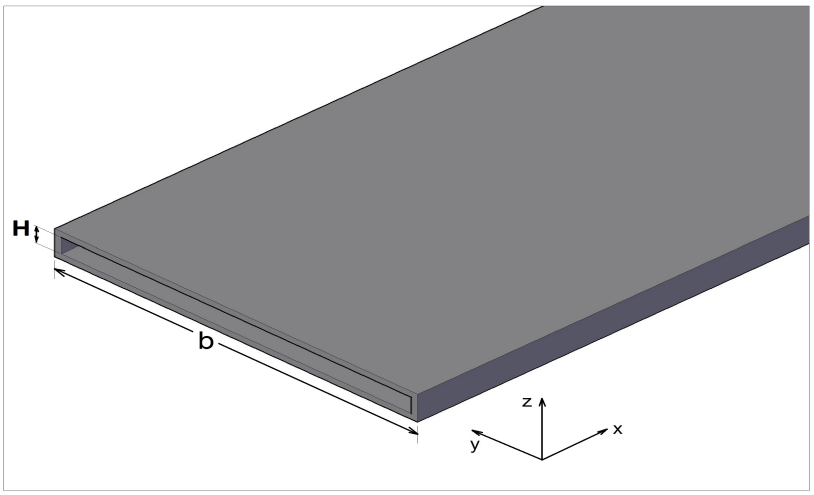


Figura 2.7: Esquema de un canal

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{2.91}$$

y las ecuaciones de Reynolds.

Como sobre la pared $W = 0$ entonces $W = 0$ en todo el flujo.

La ecuación de Reynolds en el sentido del transversal al flujo en un canal se reduce a:

$$\frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \tag{2.92}$$

O sea que

$$\rho \overline{w'^2} + P = P_w(x) \tag{2.93}$$

Derivando con respecto a x se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P_w}{\partial x} \tag{2.94}$$

La componente axial de las ecuaciones de Reynolds es:

$$\nu \frac{d^2U}{dz^2} - \frac{d}{z}\overline{u'w'} - \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} \tag{2.95}$$

o escrita de otra manera

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{dP_w}{dx} \tag{2.96}$$

donde

$$\tau = \rho\nu\frac{dU}{dz} - \rho\overline{u'w'}.$$

Como τ es función solo de z y P es función solo de x, ambos miembros de la ecuación 2.96 deben ser constantes; entonces

$$\tau(z) = \frac{dP_w}{dx}z + \tau_w$$

Como por simetría τ debe ser nulo en $\delta = {}^{h}/_{2}$, resulta

$$-\frac{dP_w}{dx}\delta = \tau_w$$

Finalmente

$$\tau(z) = \frac{dP_w}{dx}(z - \delta)$$

Esto muestra que las tensiones rasantes totales están prescritas por el gradiente de presión en el ducto y tienen una forma preestablecida. Esta es una de las diferencias más importantes que tiene este tipo de flujo frente a una capa límite.

En la zona superior de una capa límite, el flujo es intermitente, es decir, si se ubica un sensor por debajo del límite superior de la capa límite, se registra momentos en los cuales el flujo es turbulento y momentos en los

que el flujo no lo es. Esta característica diferencia una capa límite del flujo en un canal, donde el flujo es turbulento en todo instante y posición.

Otra característica, que ya fue mencionada, y diferencia estos dos flujos es que una capa límite evoluciona espacialmente en el sentido del flujo mientras que en un canal esto no sucede.

Por lo demás, el flujo en un canal tiene características muy similares a las presentes en una capa límite; a saber: se tiene la presencia de las mismas zonas, capa interna, externa, con las mismas subcapas, etc.

Capítulo 3

Modelación numérica de flujos turbulentos

3.1. Simulación numérica directa (DNS)

Conceptualmente, el método más simple para simular un flujo turbulento es el que resulta de resolver numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes con sus condiciones de borde e iniciales de forma completa sin modelos adicionales. Las ecuaciones de Navier Stokes en conjunto con la ecuación de conservación de masa determinan un sistema de ecuaciones en derivadas parciales determinado. Las ecuaciones de Navier-Stokes proporcionan tres ecuaciones escalares (una para cada componente de la velocidad en una base cartesiana ortonormal) y una dada por la ecuación de conservación de masa, teniéndose cuatro incógnitas: las tres componentes de la velocidad y la presión. Como se mencionó anteriormente, la posibilidad de resolver analíticamente este sistema está reservado exclusivamente para situaciones simples de flujos laminares. La alternativa de resolver numéricamente el sistema también presenta problemas importantes aunque en menor grado que el enfoque analítico. La dificultad radica en la amplitud de escalas espaciales y temporales presentes en un flujo turbulento, que hace que la potencia de cálculo necesaria para resolver un flujo sea en extremo elevada y dependiente de potencias del numero de Re.

Las escalas mayores son del orden del tamaño del "recipiente" que contiene el flujo y las más pequeñas dependen del número de Reynolds tur-

bulento $Re_T = \frac{\mathcal{U}_0 \ell_0}{\nu}$ donde $\mathcal{U}_0$ y ℓ_0 son respectivamente, una velocidad y una longitud representativa de los vórtices de mayor tamaño. De hecho se puede estimar la separación entre las escalas mayores y menores usando la primera hipótesis de Kolmogorov, (1941) por la cual en un flujo turbulento a altos Re_T los parámetros estadísticos de las escalas más pequeñas encontradas dependen únicamente de la disipación ε y de la viscosidad cinemática ν y tienen carácter universal.

Basados en estas dos magnitudes se puede construir una escala de longitud, una de tiempo y una de velocidad:

$$\eta \equiv \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$$

$$\tau_\eta \equiv (\nu\varepsilon)^{1/4}$$

$$\mathcal{U}_\eta \equiv \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}$$

llamadas escalas de Kolmogorov. Es inmediato probar que el Reynolds formado con estas escalas $Re_\eta = \frac{\mathcal{U}_\eta \eta}{\nu} = 1$, lo que indica que a estas escalas los efectos viscosos e inerciales son comparables, y que la disipación es importante. Por lo tanto, es razonable inferir que estas escalas caracterizan los movimientos más pequeños y disipativos presentes en un flujo turbulento.

Por otro lado, se puede suponer que los vórtices de mayor tamaño tienen un contenido de energía cinética del orden de $\mathcal{U}_0^2$, siendo la escala de tiempo de estos del orden de $\mathcal{U}_0/\ell_0$. Esta energía cinética es transferida desde los vórtices de mayor tamaño a los de menor tamaño mediante mecanismos inerciales hasta que se llega a la escala disipativa. A este mecanismo se le conoce como cascada de energía y fue propuesto por Richardson en 1922 [Lesieur, 2008]. De esta manera la tasa de transferencia de energía puede estimarse en $\mathcal{U}_0^3/\ell_0$ de forma que $\varepsilon \sim \mathcal{U}_0^3/\ell_0$. Sustituyendo esta aproximación

en las escalas de Kolmogorov se obtienen las siguientes estimaciones:

$$\frac{\eta}{\ell_0} \sim Re_T^{-3/4}$$

$$\frac{\tau_\eta}{\tau_0} \sim Re_T^{-1/2}$$

$$\frac{\mathcal{U}_\eta}{\mathcal{U}_0} \sim Re_T^{-1/4}$$

Cualquier simulación directa requiere un análisis a priori que permita determinar cuan finamente debe ser descrito el flujo en el espacio y tiempo y por consiguiente en cuantos nodos sería necesario conocer el valor de las variables que caracterizan el flujo, lo cual depende del flujo mismo. Si se quiere simular directamente un flujo turbulento homogéneo, es lógico simular un dominio con dimensiones interiores de algunas veces ℓ_0. La cantidad de nodos necesarios en cualquier dirección es $M \sim \ell_0 / \eta$ y la cantidad de pasos temporales en los cuales es necesario conocer dichas variables es $N \sim \tau_0 / \tau_\eta$. Entonces el total de nodos necesarios es:

$$M^3 N \sim \left(\frac{\ell_0}{\eta}\right)^3 \frac{\tau_0}{\tau_\eta} \sim \left(Re_T^{3/4}\right)^3 Re_T^{1/2} = Re_T^{11/4} \approx Re_T^{2,75}$$

Este ejemplo muestra la manera en que la potencia computacional necesaria aumenta con el Reynolds. Para otros flujos el exponente es levemente diferente pero cercano a 2,75. Por ejemplo, en un flujo que se desarrolla en un canal se tiene $M^3 N \sim Re^{2,7}$ [Pope, 2000].

Los altos requerimientos de potencia computacional hacen que la simulación directa sea realizable a bajos números de Reynolds y en situaciones donde se justifique. Las aplicaciones de ingeniería usuales están fuera de su alcance. La principal función que tiene hoy en día es la de proveer "experimentos virtuales" en los que se extrae información muy difícil de obtener mediante simulación física por dificultades en la medición, etc. Por ejemplo, se ha utilizado para estudiar estructuras coherentes en la capa límite y estudiar el comportamiento de algunos términos presentes en la ecuación de las

tensiones de Reynolds de forma de poder modelarlos [Moin and Mahesh, 1998] entre otros.

La mayor parte del esfuerzo computacional (superior al 99 %) se aplica a resolver el flujo en las escalas disipativas, que tienen un carácter universal, relación que aumenta con el Reynolds. Esto ha motivado el desarrollo de la modelación de grandes vórtices, en la que se modela el efecto de las escalas menores sobre las escalas más energéticas y se evita el cálculo explícito de los vórtices más pequeños.

En simulación numérica directa es usual la utilización de métodos espectrales o pseudo-espectrales donde se hace uso de condiciones de borde periódicas.

En el artículo de revisión sobre el tema de Moin and Mahesh [1998] se presenta una breve historia de la DNS. Las primeras simulaciones directas las realizaron Orszag y Patterson en 1972 en turbulencia isotrópica, el siguiente paso fue la realización de simulaciones directas en turbulencia homogénea con un gradiente uniforme de velocidad media hechas por Rogallo en 1981. Ya en esa época se hicieron simulaciones en flujos de corte libre a bajos Reynolds. La primera simulación exitosa de un flujo de pared fue realizada por Kim en 1987 al simular un canal. Spalart en 1988 simuló una capa límite en una placa plana con y sin gradientes de presión. Los datos proporcionados por las simulaciones de Spalart son usados aun hoy. A partir de los 90's las aplicaciones de la DNS se han multiplicado de tal manera que resulta difícil seguir su historia y evolución, por lo cual se recomienda ver la revisión de Moin and Mahesh [1998].

3.2. Modelos RANS

Los modelos RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) utilizan las ecuaciones de Reynolds en conjunto con algún modelo de cierre para calcular los campos de velocidad y presiones medios de un flujo turbulento. Los modelos usados varían en complejidad, desde modelos algebraicos muy simples como el de longitud de mezcla hasta modelos de cierre de segundo orden con modelos de relajación elíptica [Pope, 2000].

3.2.1. Modelos de cero ecuación

El primer modelo de cero ecuación exitoso fue el propuesto por Prandtl en 1925 denominado de longitud de mezcla [Speziale, 1991]. En él se hace uso de la hipótesis de viscosidad turbulenta, introducida por primera vez en 1887 por Joseph Boussinesq. Mediante esta hipótesis se vinculan el tensor de Reynolds y el tensor de deformación de la manera siguiente:

$$T_T = -\frac{2}{3}\rho k I + 2\rho \nu_T D \tag{3.1}$$

que en un flujo de corte simple en el que $\mathbf{U} = U\hat{i}$ se reduce a:

$$-\overline{u'v'} = \nu_T \frac{dU}{dy} \tag{3.2}$$

Es importante destacar que la hipótesis de viscosidad turbulenta asume una dependencia lineal entre el tensor de tensiones turbulento y el tensor de deformaciones de la componente media del flujo. Esto implica que el tensor anisotrópico $A = \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} - {}^2/_3 kI$ está alineado con D, lo cual no siempre se cumple.

Se reducen de esta manera las seis incógnitas que aporta el tensor de Reynolds a sólo dos: ν_T y k. Esta hipótesis es fuerte y no es válida en muchos flujos de interés; por ejemplo: si se somete turbulencia isotrópica a una deformación que luego cesa, experimentalmente se mide que la anisotropía generada durante el proceso de deformación se mantiene luego de que se termina la acción del campo de deformación, cuando la teoría de la viscosidad turbulenta predice que la anisotropía debe desaparecer de forma instantánea cuando la deformación se suprime. Esto sugiere que las tensiones aparentes no sólo dependen de las condiciones locales y actuales de la deformación sino que dependen de la historia de deformaciones que ha sufrido el flujo turbulento. Esto último no es considerado por la hipótesis de viscosidad turbulenta [Pope, 2000].

El modelo de longitud de mezcla fue creado usando un razonamiento análogo al utilizado para derivar la expresión de la viscosidad molecular en un gas. En la teoría cinética de los gases se considera que las partículas viajan en promedio una distancia ℓ_{mfp} antes de colisionar y perder cantidad de movimiento, que es proporcional a la velocidad media de estas partículas

v_{ter}. Se asume que la longitud media libre (ℓ_{mfp}) y la velocidad térmica (v_{ter}) son propiedades del fluido (solo función de la presión y temperatura) y no se ven afectadas por las deformaciones que pueda sufrir el flujo. Además, se asume que la escala de tiempo de las colisiones moleculares es muchísimo menor a la escala de tiempo del flujo o sea que los tiempos en que el gradiente de velocidad cambia. Estas dos hipótesis permiten, asumiendo que estas dos magnitudes son las únicas relevantes, calcular la viscosidad cinemática de la siguiente manera:

$$\nu = C\ell_{mfp}v_{ter}$$

donde C es una constante.
El modelo de longitud de mezcla postula que existe una longitud, análoga a la longitud media libre en un gas, que es representativa de la longitud que una parcela de fluido recorre antes de perder su cantidad de movimiento. Esta simplificación tiene claras discrepancias con la realidad:

- En un flujo turbulento hay presentes un rango extremadamente amplio y continuo de escalas, que hace que la prescripción de una sola longitud para caracterizar todo el efecto de la turbulencia sobre el tensor de Reynolds sea inadecuado.

- En la teoría cinética de los gases se asume que la deformación no afecta ni a ℓ_{mfp} ni a v_{ter}, por lo cual son propiedades del fluido y no del flujo; pero en un flujo turbulento esto no es así. El gradiente del flujo medio afecta las propiedades de la turbulencia de forma tal que la longitud de mezcla ℓ_{mix} se modifica.

De todas maneras en algunos flujos estas hipótesis son razonables como se verá mas adelante.

Ahora se debe seleccionar una velocidad característica (υ') de las fluctuaciones (análoga a v_{ter}) para poder determinar la viscosidad turbulenta ν_T. En este modelo se vincula ésta velocidad con la longitud de mezcla y con el flujo medio, de forma de no agregar incógnitas, quedando:

$$\upsilon' \approx \ell_{mix}\left|\frac{dU}{dz}\right| \tag{3.3}$$

O sea que

$$\nu_T = \ell_{mix}^2 \left| \frac{dU}{dz} \right| \tag{3.4}$$

En Schlichting et al. [2000] se detalla el argumento que lleva a la ecuación 3.3. Es claro que la ecuación 3.4 es válida sólo en un flujo de corte simple; Samgorinsky propuso extender la expresión de la viscosidad turbulenta dada por Prandtl a tres dimensiones mediante

$$\nu_T = \ell_{mix}{}^2 \left(2tr\left(D^2\right)\right)^{1/2} \tag{3.5}$$

mientras que Baldwin y Lomax propusieron la siguiente expresión:

$$\nu_T = \ell_{mix}{}^2 \left(2tr\left(W^2\right)\right)^{1/2} \tag{3.6}$$

Donde W es la componente antisimétrica de $\nabla \mathbf{U}$ [Pope, 2000].

El modelo de longitud de mezcla es incompleto, es decir, para que pueda ser utilizado se debe suministrar externamente el valor de la longitud de mezcla en toda posición e instante. Esta situación hace muy dificultosa su aplicación a problemas nuevos ya que se precisa "adivinar" el valor de $\ell_{mix}(\mathbf{x},t)$. Mucho esfuerzo se ha dedicado a estudiar el flujo en canales, en tuberías y capa límite, de manera que la especificación de ℓ_{mix} en estos flujos es un problema resuelto y permite resultados satisfactorios.

En una capa límite sobre una placa plana, la prescripción de ℓ_{mix} se da por capas:

- Subcapa interna: $\ell_{mix} \approx z^2$
- Subcapa logaritmica: $\ell_{mix} \approx \kappa z$
- Subcapa externa: $\ell_{mix} \approx$ constante

Van Driest unió las expresiones de ℓ_{mix} para las subcapas interna y logarítmica formando una relación compuesta que es valida en las dos zonas:

$$\ell_{mix} = \kappa z \left[1 - e^{-\frac{z^+}{A^+}}\right] \tag{3.7}$$

donde $A^+ \approx 26$ en la placa plana. A la expresión anterior se la denomina función de amortiguación de Van Driest [White, 1974].

Existen otros modelos de cero ecuación o algebraicos, más o menos complejos y adecuados para distintos flujos. En flujos de corte libre la idea de similitud consigo mismo (self-similarity) y la viscosidad turbulenta constante permiten cálculos sencillos. Hay otros modelos basados en la idea de la longitud de mezcla como el de Cebeci-Smith o el de Baldwin-Lomax, adecuados a flujos tipo capa límite sobre perfiles aerodinámicos sin desprendimiento de capa límite[Wilcox, 1994].

3.2.2. Modelos de una ecuación

Kolmogorov y Prandtl, independientemente, propusieron que la escala de velocidad adecuada debía ser $k^{1/2}$, de esta forma

$$\nu_T = c k^{1/2} \ell^* \tag{3.8}$$

donde ℓ^* es una escala de longitud apropiada y c una constante.

El problema es que k no es una magnitud conocida, de manera que habría que especificarla externamente. En lugar de hacer esto, Kolmogorov y Prandtl recomendaron el uso de una ecuación de transporte modelada para k, dando origen a los llamados modelos de una ecuación; en particular este se denomina modelo de energía cinética turbulenta.

En la sección 2.1 se dedujo una ecuación de transporte exacta para k, que no está en forma cerrada (ec. 2.18). Que una ecuación esté en forma cerrada quiere decir que no aporta nuevas incógnitas. Los términos de 2.18 que no están en forma cerrada son:

$$\nabla \cdot \left(\overline{\mathbf{u}' e'} + \overline{\frac{p'}{\rho} \mathbf{u}'} - 2\nu \overline{d' \mathbf{u}'} \right) \tag{3.9}$$

$$\varepsilon = 2\nu tr\left(\overline{d'^2}\right) \tag{3.10}$$

Es importante destacar que en este modelo también se utiliza la hipótesis de viscosidad turbulenta, de forma que $\mathcal{P}$ está en forma cerrada y no aporta

nuevas incógnitas:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\rho} tr\left(T_T \mathbf{D}\right) = \frac{1}{\rho} tr\left(-\frac{2}{3}\rho k I \mathbf{D} + 2\rho\nu_T \mathbf{D}^2\right)$$
$$= -\frac{2}{3} k \nabla \cdot \mathbf{U} + 2\nu_T tr\left(\mathbf{D}^2\right) = 2\nu_T tr\left(\mathbf{D}^2\right) \tag{3.11}$$

Entonces $\mathcal{P}$ es función de ν_T y $\mathbf{D}$ que son incógnitas que ya se tenían. Los términos 3.9 y 3.10 deben ser modelados con las incógnitas originales: $\mathbf{U}$, P, ν_T, k y ℓ^*. El primero se modela usando una hipótesis de difusión por gradiente de k, es decir:

$$\nabla \cdot \left(\overline{\mathbf{u}' e'} + \overline{\frac{p'}{\rho}\mathbf{u}'} - 2\nu\overline{d'\mathbf{u}'}\right) \approx \nabla \cdot \left(-\frac{\nu_T}{\sigma_k}\nabla k\right) \tag{3.12}$$

donde σ_k es un número de Prandtl turbulento para k que se asume vale $\underline{1{,}0}$. Este modelo significa que se asume que el efecto de los términos $\overline{\mathbf{u}' e'}$, $\overline{\frac{p'}{\rho}\mathbf{u}'}$ y $2\nu\overline{d'\mathbf{u}'}$ es el de difundir energía cinética turbulenta en el sentido opuesto al gradiente de esta. Claramente es una simplificación que no es válida en todos los flujos.

La disipación se modela recordando que $\varepsilon \sim {\mathcal{U}_0^3}/{\ell_0}$ (ver sección 3.1). La velocidad $\mathcal{U}_0$ se asume es del orden de $k^{1/2}$ y $\ell_0 \sim \ell^*$, entonces

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{\ell^*} \tag{3.13}$$

De esta manera, la ecuación de transporte modelada de k queda:

$$\frac{\overline{d}k}{dt} - \nabla \cdot \left(\frac{\nu_T}{\sigma_k}\nabla k\right) = \mathcal{P} - \varepsilon \tag{3.14}$$

donde $\nu_T = ck^{1/2}\ell^*$, $\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{\ell^*}$ y $\mathcal{P}$ esta dada por la expresión 3.11.

En algunos flujos de corte simple la producción de energía cinética turbulenta y la disipación están equilibradas, o sea $\mathcal{P} \approx \varepsilon$; en ellos se puede relacionar a ℓ^* con ℓ_{mix}. Considerando las ecuaciones 3.2 y 3.4 puede verse que

$$-\overline{u'w'} = \ell_{mix}^2 \left|\frac{dU}{dz}\right| \frac{dU}{dz} \Rightarrow \frac{dU}{dz} = \frac{-\overline{u'w'}^{1/2}}{\ell_{mix}}$$

Entonces la producción

$$\mathcal{P} = -\overline{u'w'}\frac{dU}{dz} = \frac{-\overline{u'w'}^{3/2}}{\ell_{mix}} \approx \varepsilon = C_D\frac{k^{3/2}}{\ell^*} \Rightarrow \frac{\ell_{mix}}{\ell^*} \approx \frac{1}{C_D}\left(\frac{-\overline{u'w'}}{k}\right)^{3/2}$$

Por lo tanto $\ell^* \propto \ell_{mix}$ solo si $^{-\overline{u'w'}}/_{k}$ es constante, lo cual es razonable en condiciones de equilibrio. En estas condiciones $^{-\overline{u'w'}}/_{k} \approx 0{,}3$ [Wilcox, 1994]. Se puede elegir C_D de forma que la longitud $\ell^* = \ell_{mix}$, entonces $C_D = 0{,}164$. Finalmente, es sencillo probar que la constante c en la ecuación 3.8 es tal que $c = C_D^{1/3}$ cuando $\mathcal{P} \approx \varepsilon$. Es importante notar que C_D es una constante sólo si la producción y la disipación están balanceadas. De lo contrario C_D debería variar, por ejemplo, en la subcapa de transición en la capa límite donde $\mathcal{P}$ es mayor que ε. En resumen, donde $\mathcal{P} \approx \varepsilon$ se puede usar la misma prescripción de ℓ^* que para la longitud de mezcla, pero en zonas donde $\mathcal{P} \neq \varepsilon$ esto no debe hacerse.

Al igual que el modelo de longitud de mezcla, la mayor limitante en este modelo radica en que es incompleto: se debe prescribir la longitud de mezcla de forma externa lo cual en flujos complejos resulta un problema insalvable. Este modelo tiene una modesta ventaja en precisión sobre el de longitud de mezcla [Pope, 2000].

Spalart y Allmaras (1994) desarrollaron un modelo de una ecuación, completo, usando una ecuación de transporte modelada para ν_T. La ecuación utilizada es:

$$\frac{\overline{d}\nu_T}{dt} = \nabla\cdot\left(\frac{\nu_T}{\sigma_\nu}\nabla\nu_T\right) + S_\nu \tag{3.15}$$

donde S_ν es un término fuente que depende de ν, ν_T, de la vorticidad media, de $|\nabla\nu_T|$ y de la distancia a la pared más cercana [Pope, 2000].

El objetivo de este modelo es resolver flujos aerodinámicos de forma computacionalmente económica, lo cual es alcanzado. No se recomienda su uso en otro tipo de aplicaciones.

3.2.3. Modelos de dos ecuaciones

En este tipo de modelo se resuelven dos ecuaciones de transporte modeladas para dos magnitudes turbulentas independientes, de manera de cons-

truir con ellas escalas de longitud y tiempo. En general se utiliza k junto con ε, $\omega \equiv {}^{\varepsilon}/_{k}$, o alguna otra magnitud. El uso de k y ω da origen a los modelos de dos ecuaciones más comunes, es decir: $k-\varepsilon$ y $k-\omega$. Es evidente que la principal ventaja de este tipo de modelos es su completitud: no es necesario especificar ninguna magnitud externamente.

Modelo $k-\varepsilon$

El modelo $k-\varepsilon$ es probablemente el modelo más usado ya que es incorporado por la mayoría de los códigos CFD comerciales disponibles [Pope, 2000]. El modelo consiste en las ecuaciones de Reynolds, la ecuación de balance de masa, una ecuación de transporte modelada para k (que es exactamente la misma que la utilizada en el modelo de energía cinética turbulenta (ecuación 3.14)), y una ecuación de transporte modelada para ε que es de la forma:

$$\frac{\overline{d}\varepsilon}{dt} = \nabla \cdot \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\mathcal{P}\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}, \tag{3.16}$$

la hipótesis de viscosidad turbulenta y la especificación de esta como sigue:

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \tag{3.17}$$

Esta última igualdad es consecuencia directa de asumir que las únicas magnitudes relevantes para determinar la viscosidad turbulenta son k y ε, lo cual es una simplificación.
La ecuación de transporte para ε es mejor interpretarla como puramente empírica. Aunque es posible derivar una ecuación de transporte exacta y modelar cada uno de los términos que aparecen en esta, ese no es el mejor camino para derivar la ecuación para ε. Una razón es que la ecuación exacta es tan compleja que no se tiene suficiente información como para generar modelos precisos de los términos que intervienen. Por otro lado, ε se usa para determinar la viscosidad turbulenta, que depende de movimientos en el rango energético, o sea que es mejor ver a ε como el flujo de energía desde la escalas energéticas a las disipativas y dependiente de los movimientos de gran escala, mientras que en la ecuación exacta los términos involucran can-

tidades que dependen de los movimientos en el rango disipativo [Wilcox, 1994]. Con este enfoque, se busca que esta ecuación tenga un comportamiento adecuado en flujos simples, como por ejemplo: decaimiento de turbulencia, flujo de corte homogéneo, capa limite, etc. Con los valores numéricos de algunas magnitudes obtenidas de experimentos en esos flujos se calibran las constantes.

El denominado Modelo Estándar resulta de tomar los valores de las constantes

$$C_\mu = 0{,}09 \quad C_{\varepsilon 1} = 1{,}44 \quad C_{\varepsilon 2} = 1{,}92 \quad \sigma_k = 1{,}0 \quad \sigma_\varepsilon = 1{,}3.$$

Este conjunto de constantes fue propuesto por Launder y Sharma en 1974 ver Wilcox [1994]. Otros conjuntos levemente diferentes pueden tener mejor comportamiento en determinados flujos, pero este tipo de ajustes requiere conocimientos adicionales que permitan hacerlos correctamente.

El modelo $k-\varepsilon$ no es capaz de reproducir de forma precisa la región viscosa cercana a las paredes [Launder and Sandham, 2002]. Además, el último término del lado derecho de la ecuación 3.16, que representa la destrucción de disipación, tiende a infinito en la medida que se acerca a una pared ya que la disipación es finita y k tiende a cero. Por esta razón es que este modelo requiere de algún tratamiento especial cuando se está cerca de paredes. Se han propuesto diferentes estrategias para solucionar este problema, desde funciones de amortiguación hasta modelos compuestos que en la cercanía de paredes utilizan el modelo $k-\omega$, que tiene un mejor comportamiento en estas zonas. El caso más notorio es el del modelo SST (Shear Sterss Transport) propuesto por Manter en 1994 [Launder and Sandham, 2002].

Mediante el método de Renormalization Group (RNG), Yakhot and Orszag [1986] derivaron las mismas ecuaciones del modelo $k-\varepsilon$ y las constantes involucradas sin ayuda de experimentos. El método permite calcular explícitamente las constantes, que son:

$$C_\mu = 0{,}0837 \quad C_{\varepsilon 1} = 1{,}063 \quad C_{\varepsilon 2} = 1{,}7215 \quad \sigma_k = 0{,}7179 \quad \sigma_\varepsilon = 0{,}7179.$$

Una ventaja importante del modelo RNG $k-\varepsilon$ es que en la medida que uno se acerca a una pared, la viscosidad turbulenta tiende a la viscosidad

molecular, de forma que no es necesario utilizar funciones de pared como la función de amortiguación de Van Driest. Por contrapartida, el valor de $C_{\varepsilon 1}$ es muy cercano a 1.0, valor que constituye un punto singular de la ecuación de transporte de ε. Esto genera entre otros problemas que se sobrestima la tasa de crecimiento de la energía cinética turbulenta k en un flujo de corte homogéneo [Speziale, 1991].

Modelos de viscosidad turbulenta no lineales

Aunque puede ser razonablemente preciso en flujos simples, el modelo $k-\varepsilon$ puede ser muy impreciso en algunos flujos complejos [Pope, 2000]. Una de las razones es el uso de la hipótesis de viscosidad turbulenta, ya que debido a ella se presentan dos inconvenientes:

- estos modelos son puramente disipativos, es decir, no consideran la posibilidad de relajación de las tensiones de Reynolds.
- no diferencian entre flujos de corte libre simples y flujos de corte simple con curvatura de las lineas de corriente, que tienen comportamientos distintos [Speziale, 1991].

Se ha observado en tuberías rectas de sección no circular la presencia de flujos secundarios que no son captados por el modelo $k-\varepsilon$ debido a los problemas mencionados en el párrafo anterior. Este comportamiento también es observado en flujos laminares no newtonianos por lo cual se deduce que los flujos turbulentos serían mejor representados con un modelo de viscosidad turbulenta no lineal. Lumley fue el primero en desarrollar modelos de este tipo de forma sistemática[Speziale, 1991].

Si se define el tensor de Reynolds anisotrópico adimensionado como

$$\mathbf{b} = -\frac{T_T}{2k\rho} - \frac{1}{3}I$$

y se asume una dependencia de la forma siguiente

$$\mathbf{b} = b\left(k, \varepsilon, \nu, \mathbf{D}, \mathbf{W}\right)$$

adimensionando se tiene:

$$\mathbf{b} = b^* \left(\frac{k^2}{\nu\varepsilon}, \frac{k}{\varepsilon}\mathbf{D}, \frac{k}{\varepsilon}\mathbf{W} \right).$$

La expresión anterior se puede escribir usando una base de tensores $\mathbf{T}^{(n)}$ (integrity tensor basis) como

$$\mathbf{b} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbf{T}^{(n)}$$

(ver Launder and Sandham [2002] y Deville and Gatski [2012]).

Estas bases, en el caso analizado, en que un tensor simétrico de traza cero ($\mathbf{b}$) es función de otros tensores, uno simétrico $\left({}^{k}/_{\varepsilon}\mathbf{D}\right)$ y otro antisimétrico $\left({}^{k}/_{\varepsilon}\mathbf{W}\right)$, son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{(1)} &= \frac{k}{\varepsilon}\mathbf{D} \\
\mathbf{T}^{(2)} &= \frac{k^2}{\varepsilon^2}\left[\mathbf{DW} - \mathbf{WD}\right] \\
\mathbf{T}^{(3)} &= \frac{k^2}{\varepsilon^2}\left[\mathbf{D}^2 - \frac{1}{3}tr\left(\mathbf{D}^2\right)I\right] \\
\mathbf{T}^{(4)} &= \frac{k^2}{\varepsilon^2}\left[\mathbf{W}^2 - \frac{1}{3}tr\left(\mathbf{W}^2\right)I\right] \\
\mathbf{T}^{(5)} &= \frac{k^3}{\varepsilon^3}\left[\mathbf{WD}^2 - \mathbf{D}^2\mathbf{W}\right] \\
\mathbf{T}^{(6)} &= \frac{k^3}{\varepsilon^3}\left[\mathbf{W}^2\mathbf{D} + \mathbf{DW}^2 - \frac{2}{3}tr\left(\mathbf{DW}^2\right)I\right] \\
\mathbf{T}^{(7)} &= \frac{k^4}{\varepsilon^4}\left[\mathbf{WDW}^2 - \mathbf{W}^2\mathbf{DW}\right] \\
\mathbf{T}^{(8)} &= \frac{k^4}{\varepsilon^4}\left[\mathbf{DWD}^2 - \mathbf{D}^2\mathbf{WD}\right] \\
\mathbf{T}^{(9)} &= \frac{k^4}{\varepsilon^4}\left[\mathbf{W}^2\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{W}^2 - \frac{2}{3}tr\left(\mathbf{D}^2\mathbf{W}^2\right)I\right] \\
\mathbf{T}^{(10)} &= \frac{k^5}{\varepsilon^5}\left[\mathbf{WD}^2\mathbf{W}^2 - \mathbf{W}^2\mathbf{D}^2\mathbf{W}\right]
\end{aligned}$$

Los coeficientes adimensionados α_n pueden, en principio, tener la dependencia funcional siguiente:

$$\alpha_n = \alpha_n \left(\frac{k^2}{\varepsilon\nu}, \frac{k^2}{\varepsilon^2} tr\left(\mathbf{D}^2\right), \frac{k^2}{\varepsilon^2} tr\left(\mathbf{W}^2\right) \right).$$

Existe infinidad de modelos de este tipo. A modo de ejemplo se presenta a continuación la expresión del modelo de Shih [Launder and Sandham, 2002] en el que solo se consideran $\mathbf{T}^{(1)}$ y $\mathbf{T}^{(2)}$

$$\mathbf{b} = \alpha_1 \frac{k}{\varepsilon}\mathbf{D} + \alpha_2 \frac{k^2}{\varepsilon^2}\left[\mathbf{DW} - \mathbf{WD}\right]$$

Es inmediato probar que el modelo $k-\varepsilon$ resulta de considerar solo $\mathbf{T}^{(1)}$ y $\alpha_n = -C_\mu$.

Modelo $k-\omega$

El modelo $k-\omega$ fue el primer modelo de dos ecuaciones propuesto [Wilcox, 1994]. Kolmogorov usó una ecuación modelada para la energía cinética turbulenta y generó una ecuación modelada para la disipación por unidad de energía turbulenta ($\omega \equiv {}^{\varepsilon}/_{k}$). El modelo original de Kolmogorov ha sufrido modificaciones desde su creación en 1942 que han mejorado su desempeño. Por ejemplo, la ecuación propuesta por Kolmogorov para ω no tenia un término de producción de ω, ya que él consideraba que ω estaba relacionada con los movimientos en escalas disipativas y no tenia conexión directa con el flujo medio, lo cual es incorrecto [Wilcox, 1994].

Generalmente cuando se hace referencia al modelo $k-\omega$ se considera la expresión dada por Wilcox en 1988, cuya ecuación para ω es la siguiente [Pope, 2000]

$$\frac{\overline{d}\omega}{dt} = \nabla \cdot \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\omega} \nabla\omega \right) + C_{\omega 1} \frac{\mathcal{P}\omega}{k} - C_{\omega 2}\omega^2$$

donde $C_{\omega 1} = 5/9$, $C_{\omega 2} = 3/40$ y $\sigma_\omega = 2$.

Además se utilizan las ecuaciones de Reynolds, la ecuación 3.14, la hipóte-

sis de viscosidad turbulenta (ec. 3.1) y la expresión

$$\nu_T = C_\mu \frac{k}{\omega}$$

que es completamente análoga a la igualdad 3.17.

Es razonable preguntarse, ¿cual es la diferencia entre el modelo $k-\omega$ y el $k-\varepsilon$?. Para responder esta pregunta, en Pope [2000] se deriva la ecuación para ω implicada por la ecuación de ε del modelo $k-\varepsilon$, la cual resulta

$$\frac{\bar{d}\omega}{dt} = \nabla\cdot\left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\nabla\omega\right) + (C_{\varepsilon 1}-1)\frac{\mathcal{P}\omega}{k} - (C_{\omega 2}-1)\omega^2 + C_\mu\left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon}+\frac{1}{\sigma_k}\right)\frac{1}{\omega}\nabla\omega\cdot\nabla k + C_\mu\left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon}-\frac{1}{\sigma_k}\right)\left(\nabla^2 k + \frac{1}{k}\nabla k\cdot\nabla k\right)$$

En flujos homogéneos $\nabla k \equiv 0$, entonces si se toman $C_{\omega 1} = C_{\varepsilon 1} - 1$, $C_{\omega 2} = C_{\varepsilon 2} - 1$ y $\sigma_\omega = \sigma_\varepsilon$ la ecuación es idéntica a la dada por el modelo de Wilcox. En flujos no homogéneos, los últimos dos términos del lado derecho de la expresión anterior hacen que los modelos sean diferentes. Estos términos son los responsables del mejor desempeño del modelo $k-\omega$ respecto al $k-\varepsilon$ en la región viscosa cercana a las paredes y frente a gradientes adversos de presiones. Por contrapartida, se debe establecer una condición de borde para ω en el flujo libre distinta de cero, que no tiene justificación física y de la cual dependen los resultados de la simulación [Pope, 2000].

3.3. Simulación de grandes vórtices (LES)

Como ya se mencionó en la sección 3.1, para lograr simular directamente un flujo turbulento se requiere una cantidad de celdas o nodos del orden de $Re^{2,75}$, lo cual hace que la tarea sea imposible en la medida que el Reynolds es lo suficientemente alto. Si uno no puede alcanzar la resolución requerida por la simulación directa, ¿que pasa si la simulación se realiza con una resolución menor?. En principio se obtendría un flujo turbulento en el que los vórtices de mayor escala estarían resueltos, pero el resultado no sería correcto ya que las diferentes escalas del flujo turbulento interactúan entre si y en este caso no se estaría tomando en cuenta el efecto de las escalas de tamaño menor al paso de la grilla sobre las mayores. Se debe modelar ese efecto. La simulación de grandes vórtices (LES) consiste precisamente en simular las escalas mayores y modelar el efecto de las menores sobre las mayores de forma de requerir una resolución menor. Es importante no-

tar que una simulación de este tipo permite obtener la evolución temporal de los movimientos de mayor escala, lo cual constituye una ventaja sobre los modelos RANS. Esta característica es especialmente útil en flujos con desprendimientos de vórtices, efectos de flotación, etc, donde los modelos RANS tienen problemas. Además la capacidad de obtener los movimientos no estacionarios hace que este este enfoque sea adecuado para estudiar la interacción entre fluidos y estructuras, problemas aero-acusticos, etc [Launder and Sandham, 2002].

3.3.1. Filtrado

En un principio, el marco teórico de las simulaciones LES era escaso y se mezclaban los aspectos numéricos con los de modelación. El llamado "enfoque de balance de volumen" de Schumann (ver Launder and Sandham [2002]) comienza con el establecimiento de una grilla de volúmenes finitos, en la cual se integran las ecuaciones de Navier-Stokes en cada una de las celdas de forma de obtener balances en cada una de ellas. Si la grilla es lo suficientemente "gruesa" se debe modelar el efecto de las escalas menores a la grilla sobre las mayores, a lo cual se denomina modelo de "subgrilla". Como puede apreciarse en este enfoque la discretización y la modelación no son conceptualmente independientes, como ya se mencionó. Aunque aun hoy hay autores que prefieren este enfoque, la mayoría utiliza la idea introducida por Leonard en 1974 (ver Sagaut [2006]), la cual consiste en filtrar espacialmente los campos relevantes usando una operación de convolución, o sea:

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \int \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\, G(\mathbf{x}-\mathbf{r},\mathbf{x},t)\, d\mathbf{r} \tag{3.18}$$

donde la integral es en todo el dominio del flujo. G es una función filtro que tiene la propiedad de decaer rápidamente con $\mathbf{r}$ y además cumple la siguiente condición de normalización:

$$\int G(\mathbf{r},\mathbf{x})\, d\mathbf{r} = 1.$$

En el ejemplo anterior se filtra el campo **u** pero la operación se puede aplicar a cualquier campo. El campo de velocidad residual se define:

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle$$

Se define el ancho del filtro como sigue:

$$\Delta = \sqrt{12 \int \mathbf{r}^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{x})\, d\mathbf{r}}$$

Es útil pasar a una representación espectral de la ecuación 3.18. Para ello se aplica la transformada de Fourier a dicha igualdad, obteniéndose

$$\widehat{\langle \mathbf{u} \rangle} = \widehat{G}(\kappa)\, \widehat{\mathbf{u}}(\kappa)$$

donde el sombrero indica que se aplica la transformada de Fourier

$$\widehat{\mathbf{u}} = \int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\, e^{i\kappa\mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

y κ es el número de onda.

Los filtros más comunes utilizados son, el gaussiano dado por la expresión

$$G_G = \sqrt{\frac{6}{\pi\Delta^2}} e^{-\frac{6r^2}{\Delta^2}},$$

el "box"

$$G_B = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & \text{si } |r| \leq \Delta \\ 0, & \text{si } |r| > \Delta \end{cases}$$

y el espectral brusco,

$$G_S = \begin{cases} 1, & \text{si } |\kappa| \leq \frac{\pi}{\Delta} \\ 0, & \text{si } |\kappa| > \frac{\pi}{\Delta} \end{cases}$$

Los filtros gaussiano y box, que están expresados en espacio físico, tienen un equivalente en el espacio espectral y el espectral brusco tiene un correspondiente en espacio físico. Estos filtros correspondientes se pueden calcular

usando la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier respectivamente. Es sencillo ver que el filtro espectral es similar al box pero en el espacio espectral. Este elimina del campo todas las contribuciones de movimientos cuyo numero de onda $\kappa > {}^{\pi}/_{\Delta}$. El correspondiente a este en espacio físico no es local, en el sentido que el campo filtrado tiene contribuciones de movimientos que están alejados del punto de aplicación [Sagaut, 2006]. El único de los tres filtros listados anteriormente que es razonablemente local tanto en espacio físico como espectral es el gaussiano [Pope, 2000].

El campo filtrado es una función del tiempo a la cual se le puede aplicar nuevamente la operación de filtrado. En general $\langle\langle \mathbf{u} \rangle\rangle \neq \langle \mathbf{u} \rangle$. Solo se da la igualdad en el caso en que el filtro utilizado es el espectral brusco [Launder and Sandham, 2002]. En general también se da que $\langle\langle u \rangle v\rangle \neq \langle u \rangle \langle v \rangle$, lo cual marca una diferencia importante con la promediación de Reynolds. La derivación y el filtrado son operaciones conmutables, lo que constituye una propiedad útil en lo que sigue.

Si se aplica la operación de filtrado a la ecuación de balance de masa y las ecuaciones de Navier-Stokes se obtiene lo siguiente:

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \tag{3.19}$$

y

$$\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \nabla \langle \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle = -\frac{1}{\rho} \nabla \langle p \rangle + \nu \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle - \nabla \cdot \tau^R \tag{3.20}$$

donde τ^R es un tensor comúnmente llamado tensor de tensiones residual y que es el término que se debe modelar. El tensor de tensiones residual es

$$\tau^R = \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u} \rangle \otimes \langle \mathbf{u} \rangle.$$

Finalmente, antes de entrar en los modelos más comunes, es importante precisar un aspecto relevante. El filtro que se usó para obtener las igualdades 3.19 y 3.20 es homogéneo e isotrópico, lo cual permite conmutar el filtrado y la derivación. Cuando el flujo analizado tiene fronteras sólidas no se puede utilizar un filtro homogéneo e isotrópico porque los valores de la velocidad filtrada de esta manera sobre la superficie no van a ser nulos,

lo cual contradice la condición de adherencia. Para salvar esta dificultad se debe usar filtros no homogéneos o anisotrópicos, lo cual agrega términos adicionales en las ecuaciones 3.19 y 3.20. Sólo recientemente se ha cuantificado y comenzado a agregar en las simulaciones LES la contribución de estos términos adicionales [Launder and Sandham, 2002].

3.3.2. Modelos de tensiones residuales

Existe infinidad de modelos de tensiones residuales. Para tener un amplio panorama de los modelos existentes se recomienda ver Sagaut [2006]. A continuación se presentan dos de los mas simples y de uso extendido como son el modelo de Smagorinsky y el modelo dinámico.

El modelo de Smagorinsky

El modelo de Smagorinsky fue desarrollado en 1963 para aplicaciones meteorológicas y basa su éxito en su simplicidad.

Consta de dos partes, por un lado un modelo de viscosidad turbulenta de la forma

$$\tau^r = \tau^R - \frac{1}{3} tr\left(\tau^R\right) I = -2\nu_r \langle D \rangle \tag{3.21}$$

y por otro un modelo análogo al de longitud de mezcla de Prandtl para el calculo de la viscosidad turbulenta

$$\nu_r = {\ell_S}^2 \langle \mathcal{D} \rangle \tag{3.22}$$

donde ℓ_s es la escala de Smagorinsky y

$$\langle \mathcal{D} \rangle = \sqrt{2tr\left(\langle D \rangle^2\right)} \tag{3.23}$$

es la tasa de deformación filtrada característica, representa una medida de la deformación del campo de velocidad filtrada.

Es usual definir

$$\ell_S = C_s \Delta \tag{3.24}$$

donde C_s se le denomina coeficiente de Smagorinsky.

Es sencillo probar usando solo el modelo de viscosidad turbulenta (ecuación 3.21) que, en este modelo, el flujo instantáneo de energía desde las escalas resueltas a las residuales es siempre positivo. Esto es un comportamiento no realista. La teoría de Kolmogorov explica que el flujo de energía cinética turbulenta se da siempre en el sentido hacia las escalas menores, pero esto es en valores medios, no instantáneos. En la realidad se encuentra flujos instantáneos de energía en el sentido contrario; lo que este modelo no es capaz de interpretar.

Si se supone un flujo turbulento con un número de Reynolds alto y el filtro en el rango inercial es posible determinar el valor del coeficiente $C_s \approx 0{,}17$ (ver Pope [2000]).

La capacidad predictiva de este modelo depende fuertemente de la ubicación del filtro en el rango inercial, lo cual puede resultar una tarea muy compleja en flujos con fronteras solidas.

El modelo dinámico

Para el modelo dinámico se utilizan dos filtros. Primero el llamado filtro de grilla de un ancho Δ_g del orden del paso de la grilla y segundo el llamado filtro test, con un ancho Δ_t que es típicamente el doble que el filtro de grilla.

Las operaciones de filtrado quedan respectivamente

$$\langle \mathbf{u} \rangle_g = \int \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t)\, G(\|\mathbf{r}\|; \Delta_g)\, d\mathbf{r}$$

$$\langle \mathbf{u} \rangle_t = \int \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t)\, G(\|\mathbf{r}\|; \Delta_t)\, d\mathbf{r}$$

Las tensiones residuales basadas en el filtrado de grilla y en el filtrado doble (primero el de grilla y después el test), quedan respectivamente:

$$\tau_g^R = \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle_g - \langle \mathbf{u} \rangle_g \otimes \langle \mathbf{u} \rangle_g \tag{3.25}$$

$$\tau_{gt}^R = \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle_{gt} - \langle \mathbf{u} \rangle_{gt} \otimes \langle \mathbf{u} \rangle_{gt} \tag{3.26}$$

donde se uso $\langle \langle \mathbf{u} \rangle_g \rangle_t = \langle \mathbf{u} \rangle_{gt}$

Si se le aplica el filtro test a la ecuación 3.25 y se resta de la ecuación 3.26 se obtiene la identidad de Germano:

$$\mathcal{L} = \tau_{gt}^R - \langle \tau_g^R \rangle_t = \langle \langle \mathbf{u} \rangle_g \otimes \langle \mathbf{u} \rangle_g \rangle_t - \langle \mathbf{u} \rangle_{gt} \otimes \langle \mathbf{u} \rangle_{gt} \tag{3.27}$$

El tensor $\mathcal{L}$ se puede interpretar como el tensor de tensiones residual, relativo al filtro test, basado en la velocidad filtrada con el filtro de grilla. Es decir que representa la contribución de los movimientos de escala entre Δ_t y Δ_g al tensor de tensiones residual (con filtro test).

Ahora usando el modelo de Smagorinsky, se tiene

$$\tau_g^r = \tau_g^R - \frac{1}{3} tr\left(\tau_g^R\right) I = -2 c_s {\Delta_g}^2 \langle \mathcal{D} \rangle_g \langle D \rangle_g \tag{3.28}$$

y

$$\tau_{gt}^r = \tau_{gt}^R - \frac{1}{3} tr\left(\tau_{gt}^R\right) I = -2 c_s {\Delta_{gt}}^2 \langle \mathcal{D} \rangle_{gt} \langle D \rangle_{gt} \tag{3.29}$$

donde se utiliza la constante c_s en lugar de ${C_s}^2$, de forma de permitir flujo inverso de energía.

Definiendo

$$M = 2{\Delta_g}^2 \langle \langle \mathcal{D} \rangle_g \langle D \rangle_g \rangle_t - 2{\Delta_{gt}}^2 \langle \mathcal{D} \rangle_{gt} \langle D \rangle_{gt} \tag{3.30}$$

Se tiene

$$\mathcal{L}_s = \tau_{gt}^R - \langle \tau_g^R \rangle_t = c_s M \tag{3.31}$$

donde $\mathcal{L}_s$ es el modelo de Smagorinsky de la parte sin traza de $\mathcal{L}$.

Como tanto M como $\mathcal{L}$ son conocidos en funcion de $\langle \mathbf{u} \rangle_g$, de manera que se puede ajustar el valor de c_s para lograr la mejor aproximación posible. Esto se logra cuando

$$c_s = \frac{tr(M\mathcal{L})}{tr(M^2)} \tag{3.32}$$

[Pope, 2000].

3.3.3. Ecuación de balance de la energía cinética de la componente fluctuante de la velocidad filtrada

A continuación se deriva la ecuación de balance de energía de la componente fluctuante filtrada por la simulación de grandes vórtices.

Con un filtro G homogéneo. Este filtrado tiene las siguientes propiedades:

$$\left\langle \frac{\partial q}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial \langle q \rangle}{\partial x} \tag{3.33}$$

$$\left\langle \frac{\partial q}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle q \rangle}{\partial t} \tag{3.34}$$

$$\langle \overline{q} \rangle = \overline{\langle q \rangle} \tag{3.35}$$

Si se le aplica la operación de filtrado a la ecuación de Cauchy se tiene:

$$\left\langle \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right\rangle = \langle \nabla \cdot T \rangle + \langle \mathbf{F} \rangle$$

o

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\rangle + \langle (\nabla \mathbf{u})\, \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{\rho} \langle \nabla \cdot T \rangle + \langle \mathbf{F} \rangle$$

Aplicando las propiedades de la operación de filtrado 3.33, 3.34 y la propie-

dad $(\nabla \mathbf{u})\,\mathbf{u} = \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle$ resulta:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \langle T \rangle + \langle \mathbf{F} \rangle \tag{3.36}$$

Ahora se definen

$$T^R = \rho \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle - \rho \langle \mathbf{u} \rangle \otimes \langle \mathbf{u} \rangle \tag{3.37}$$

y

$$T^r = \rho \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle - \rho \langle \mathbf{u} \rangle \otimes \langle \mathbf{u} \rangle - \frac{2}{3} \rho k_r I \tag{3.38}$$

donde $k_r = \frac{1}{2} tr\left(T^R\right)$.

Sustituyendo 3.37 en 3.36, queda

$$\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \otimes \langle \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(\langle T \rangle - T^R \right) + \langle \mathbf{F} \rangle \tag{3.39}$$

Finalmente si se define

$$T^S = \langle T \rangle - T^R \tag{3.40}$$

de forma que la ecuación de Cauchy filtrada queda:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \otimes \langle \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(T^S \right) \tag{3.41}$$

En el caso de que el fluido sea newtoniano

$$T^S = -\langle p \rangle I + 2\mu \langle D \rangle - T^R \tag{3.42}$$

Haciendo el producto de la ecuación anterior con $\langle \mathbf{u} \rangle$ se obtiene:

$$\frac{\partial E_f}{\partial t} + \left(\nabla E_f \right) \langle \mathbf{u} \rangle - \nabla \cdot \left(\frac{T^S}{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle \right) = -\frac{1}{\rho} tr\left(T^S \langle D \rangle \right) + \langle \mathbf{F} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle . \tag{3.43}$$

Usando la expresión 3.42 para un fluido newtoniano la ecuación anterior de

transforma en

$$\frac{\partial E_f}{\partial t} + (\nabla E_f)\langle \mathbf{u} \rangle - \nabla \cdot \left(-\frac{\langle p \rangle}{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle + 2\nu \langle D \rangle \langle \mathbf{u} \rangle - T^R \langle \mathbf{u} \rangle \right) = -2\nu tr\left(\langle D \rangle^2 \right) + \frac{1}{\rho} tr\left(T^R \langle D \rangle \right) + \langle \mathbf{F} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle . \tag{3.44}$$

Ahora si se aplica la media de conjunto a la expresión 3.44 resulta la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{fM}}{\partial t} + \frac{\partial k_f}{\partial t} + (\nabla E_{fM})\overline{\langle \mathbf{u} \rangle} + \nabla \cdot \left[\overline{\left(\langle \mathbf{u} \rangle' \overline{\langle \mathbf{u} \rangle} \right) \langle \mathbf{u} \rangle'} \right] + (\nabla k_f)\overline{\langle \mathbf{u} \rangle} + \nabla \cdot \left[\overline{\frac{1}{2} \left(\langle \mathbf{u} \rangle' \langle \mathbf{u} \rangle' \right) \langle \mathbf{u} \rangle'} \right] - \\ \nabla \cdot \left[-\frac{\overline{\langle p \rangle}}{\rho} \overline{\langle \mathbf{u} \rangle} - \overline{\frac{\langle p \rangle'}{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle'} \right] - \nabla \cdot \left[2\nu \overline{\langle D \rangle \langle \mathbf{u} \rangle} + 2\nu \overline{\langle D \rangle' \langle \mathbf{u} \rangle'} \right] - \nabla \cdot \left[-\overline{T^R \langle \mathbf{u} \rangle} - \overline{T^{R'} \langle \mathbf{u} \rangle'} \right] = \\ -2\nu tr\left[\overline{\langle D \rangle}^2 + \overline{\langle D \rangle'^2} \right] + \frac{1}{\rho} tr\left[\overline{T^R \langle D \rangle} + \overline{T^{R'} \langle D \rangle'} \right] + \overline{\langle \mathbf{F} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle} + \overline{\langle \mathbf{F} \rangle' \langle \mathbf{u} \rangle'}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

En la expresión anterior se utilizaron las definiciones siguientes:

$$\langle \mathbf{u} \rangle' = \langle \mathbf{u} \rangle - \overline{\langle \mathbf{u} \rangle}$$

$$\langle p \rangle' = \langle p \rangle - \overline{\langle p \rangle}$$

$$\langle D \rangle' = \langle D \rangle - \overline{\langle D \rangle}$$

$$E_{fM} = \frac{1}{2} \overline{\langle \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle}$$

$$k_f = \frac{1}{2} \overline{\langle \mathbf{u} \rangle' \langle \mathbf{u} \rangle'}$$

$$T^{R'} = T^R - \overline{T^R}$$

$$\langle \mathbf{F} \rangle' = \langle \mathbf{F} \rangle - \overline{\langle \mathbf{F} \rangle}$$

Por otra parte, se puede aplicar la media de conjunto a la ecuación 3.41,

de lo cual resulta:

$$\frac{\partial\overline{\langle\mathbf{u}\rangle}}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\overline{\langle\mathbf{u}\rangle}\otimes\overline{\langle\mathbf{u}\rangle}\right)=\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\left(T^{S*}\right)+\overline{\langle\mathbf{F}\rangle} \tag{3.46}$$

en la cual

$$T^{S*}=-\overline{\langle p\rangle}I+2\mu\overline{\langle D\rangle}-\overline{T^R}-\rho\overline{\langle\mathbf{u}\rangle'\otimes\langle\mathbf{u}\rangle'} \tag{3.47}$$

Haciendo el producto de la ecuación 3.46 y $\overline{\langle\mathbf{u}\rangle}$ y manipulando se tiene:

$$\frac{\partial E_{fM}}{\partial t}+(\nabla E_{fM})\overline{\langle\mathbf{u}\rangle}-\nabla\cdot\left[-\frac{\overline{\langle p\rangle}}{\rho}\overline{\langle\mathbf{u}\rangle}\right]-\nabla\cdot\left[2\nu\overline{\langle D\rangle\langle\mathbf{u}\rangle}\right]-\nabla\cdot\left[-\overline{T^R\langle\mathbf{u}\rangle}\right]-\nabla\cdot\left[-\overline{\langle\mathbf{u}\rangle'\otimes\langle\mathbf{u}\rangle'\langle\mathbf{u}\rangle}\right]=$$
$$-2\nu tr\left[\overline{\langle D\rangle}^2\right]-\frac{1}{\rho}tr\left[-\overline{T^R\langle D\rangle}\right]-tr\left[-\overline{\langle\mathbf{u}\rangle'\otimes\langle\mathbf{u}\rangle'\langle D\rangle}\right]+\overline{\langle\mathbf{F}\rangle\langle\mathbf{u}\rangle} \tag{3.48}$$

La ecuación de balance de k_f resulta de restar las ecuaciones 3.45 y 3.48:

$$\frac{\partial k_f}{\partial t}+\left(\nabla k_f\right)\overline{\langle\mathbf{u}\rangle}-\nabla\cdot\left[-\overline{\langle p\rangle'\langle\mathbf{u}\rangle'}-\overline{\left(\frac{1}{2}\langle\mathbf{u}\rangle'\langle\mathbf{u}\rangle'\right)\langle\mathbf{u}\rangle'}+2\nu\overline{\langle D\rangle'\langle\mathbf{u}\rangle'}-\overline{T^{R'}\langle\mathbf{u}\rangle'}\right]=$$
$$-2\nu tr\left[\overline{\langle D\rangle'^2}\right]+\frac{1}{\rho}tr\left[\overline{T^{R'}\langle D\rangle'}\right]-tr\left[\overline{\langle\mathbf{u}\rangle'\otimes\langle\mathbf{u}\rangle'\langle D\rangle}\right]+\overline{\langle\mathbf{F}\rangle'\langle\mathbf{u}\rangle'} \tag{3.49}$$

El primer término del miembro izquierdo de la ecuación 3.49 es la variación temporal local de la media de la energía cinética de la componente fluctuante de la velocidad filtrada (k_f), la cual, si se supone que el proceso es estadísticamente estacionario, vale cero. El segundo término es el transporte convectivo de k_f debido al campo medio de la velocidad filtrada. El tercer término representa el transporte, por mecanismos turbulentos, de k_f. El término al que se aplica la divergencia es un vector (R^*) que representa el flujo de k_f originado por estos medios. En el miembro derecho de 3.49, se tiene, primero, la disipación de energía k_f por medios viscosos (ε_f). El segundo término del miembro derecho representa el transporte de k_f por medios inerciales desde las escalas que son representadas hacia las escalas residuales ($\mathcal{P}_r$). El penúltimo término representa la producción de k_f, al que se llamará ($\mathcal{P}_f$). Finalmente se tiene un término adicional, que aparece sólo si la fuerza de masa $\mathbf{F}$ es variable en el tiempo y donde la velocidad fluctuante

es no nula. En lo que sigue se supone que este término vale cero.

$$\frac{\partial k_f}{\partial t} + \left(\nabla k_f\right) \overline{\langle \mathbf{u} \rangle} - \nabla \cdot R^* = -\varepsilon_f + \mathcal{P}_r - \mathcal{P}_f \tag{3.50}$$

Si el filtro se ubica en el rango inercial del espectro de la componente fluctuante de la velocidad, es razonable suponer que $k_f \approx k$ ya que se estaría captando la mayor parte de la energía k. Además, se puede suponer que $\overline{\mathbf{u}} \approx \overline{\langle \mathbf{u} \rangle}$ y $\overline{p} \approx \overline{\langle p \rangle}$. De esta manera, los primeros dos términos aproximan de buena forma la derivada total siguiendo el flujo medio de la energía cinética turbulenta k. En esta situación el término ε_f es despreciable si además el filtro esta ubicado lejos del rango disipativo. También se tiene que $\mathcal{P}_r$ es del orden de la disipación (ε) y $\mathcal{P}_f$ es del orden de $\mathcal{P}$. O sea:

$$\mathcal{P} \approx \mathcal{P}_f = -tr\left[\overline{\langle \mathbf{u} \rangle' \otimes \langle \mathbf{u} \rangle'} \overline{\langle D \rangle}\right] \tag{3.51}$$

$$\varepsilon \approx \varepsilon_f + \mathcal{P}_r = 2\nu tr\left[\overline{\langle D \rangle'^2}\right] - \frac{1}{\rho} tr\left[\overline{T^{R'} \langle D \rangle'}\right] \tag{3.52}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (\nabla k)\,\overline{\mathbf{u}} \approx \frac{\partial k_f}{\partial t} + \left(\nabla k_f\right) \overline{\langle \mathbf{u} \rangle}$$

$$R \approx R^* = -\overline{\frac{\langle p \rangle'}{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle'} - \overline{\left(\frac{1}{2} \langle \mathbf{u} \rangle' \langle \mathbf{u} \rangle'\right) \langle \mathbf{u} \rangle'} + 2\nu \overline{\langle D \rangle' \langle \mathbf{u} \rangle'} - \overline{T^{R'} \langle \mathbf{u} \rangle'} \tag{3.53}$$

Para calcular los términos anteriores en una simulación conviene expresarlos en función de medias de campos y eliminar las componentes fluctuantes, expresando estos términos como la resta del campo y la media de este.

Si se utiliza un modelo lineal de viscosidad turbulenta, como el modelo de Smagorinsky, por ejemplo, se tiene

$$T^R = -2\rho\nu_r \langle D \rangle + \frac{2}{3}\rho k_r I$$

entonces

$$\overline{T^R} = -2\rho\overline{\nu_r \langle D\rangle} + \frac{2}{3}\rho\overline{k_r}I$$

o sea que

$$\begin{aligned} T^{R'} = T^R - \overline{T^R} &= -2\rho\nu_r \langle D\rangle + \frac{2}{3}\rho k_r I + 2\rho\overline{\nu_r \langle D\rangle} - \frac{2}{3}\rho\overline{k_r}I \\ &= -2\rho\nu_r \langle D\rangle + 2\rho\overline{\nu_r \langle D\rangle} + \frac{2}{3}\rho\left(k_r - \overline{k_r}\right) I \end{aligned} \tag{3.54}$$

La disipación se puede calcular (usando 3.54) como

$$\begin{aligned} \varepsilon &\approx \frac{1}{\rho} tr\left[\overline{T^{R'}\langle D\rangle'}\right] = tr\left[\overline{\left(-2\nu_r \langle D\rangle + 2\overline{\nu_r \langle D\rangle} + \frac{2}{3}\left(k_r - \overline{k_r}\right) I\right)\left(\langle D\rangle - \overline{\langle D\rangle}\right)}\right] \\ &\approx tr\left[-2\overline{\nu_r \langle D\rangle^2} + 2\overline{\nu_r \langle D\rangle}\,\overline{\langle D\rangle} + 2\overline{\nu_r \langle D\rangle}\,\overline{\langle D\rangle} - 2\overline{\nu_r \langle D\rangle}\,\overline{\langle D\rangle}\right] + \frac{2}{3}\overline{\left(k_r - \overline{k_r}\right) tr\left(\langle D\rangle\right)} - \\ &\frac{2}{3}\left(\overline{k_r} - \overline{k_r}\right) tr\left(\overline{\langle D\rangle}\right) \end{aligned}$$

Como la traza de $\langle D\rangle$ es nula la disipación queda

$$\varepsilon \approx tr\left[-2\overline{\nu_r \langle D\rangle^2} + 2\overline{\nu_r \langle D\rangle\langle D\rangle}\right] \tag{3.55}$$

Razonando análogamente se pueden calcular $\mathcal{P}$ y R, que quedan:

$$\mathcal{P} \approx tr\left[-\overline{\langle \mathbf{u}\rangle \otimes \langle \mathbf{u}\rangle}\,\overline{\langle D\rangle} + \overline{\langle \mathbf{u}\rangle} \otimes \overline{\langle \mathbf{u}\rangle}\,\overline{\langle D\rangle}\right] \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned} R \approx -\overline{\frac{\langle p\rangle}{\rho}\langle \mathbf{u}\rangle} + \overline{\frac{\langle p\rangle}{\rho}}\,\overline{\langle \mathbf{u}\rangle} - \frac{1}{2}\left[\overline{\langle \mathbf{u}\rangle^2 \langle \mathbf{u}\rangle} - 2\overline{\langle \mathbf{u}\rangle \otimes \langle \mathbf{u}\rangle}\,\overline{\langle \mathbf{u}\rangle} + \overline{\langle \mathbf{u}\rangle}^2\overline{\langle \mathbf{u}\rangle}\right] + \\ 2\overline{(\nu + \nu_r)\langle D\rangle \langle \mathbf{u}\rangle} - 2\overline{(\nu + \nu_r)\langle D\rangle}\,\overline{\langle \mathbf{u}\rangle} \end{aligned} \tag{3.57}$$

Capítulo 4

Simulación de grandes vórtices de una capa límite turbulenta rugosa

4.1. Esquema del flujo a simular

El flujo que se va a simular tiene algunas particularidades que surgen de las posibilidades y limitaciones de la modelación numérica. Se propone simular un flujo en un dominio que es un prisma rectangular. Dentro de este prisma se aplica una densidad de fuerza de masa $\mathbf{F_e}$ constante paralela a una de sus aristas. En las caras perpendiculares a la fuerza de masa, se impone una condición de borde periódica, es decir, que todos los valores sobre una de estas caras son copiados en la otra. Se elige una de las caras laterales para oficiar de superficie sobre la que se desarrolla la capa límite; en esta se impone la condición de borde de adherencia, de aquí en más cuando se hable de "la superficie" se estará haciendo referencia a esta superficie. En la cara opuesta la condición de borde es de simetría, o sea que no hay flujo a través de ella y la proyección de los gradientes de todas las propiedades del flujo en la dirección perpendicular a esta son nulos. En las caras laterales se impone periodicidad. Sobre la superficie donde se desarrollará la capa límite se ubica un arreglo de cubos impuestos mediante condiciones de borde inmersas. El flujo comienza su evolución desde el reposo, hasta alcanzar una condición estadísticamente estacionaria. En [Coceal et al., 2006] se utiliza el mismo conjunto de condiciones de borde.

Solidario al prisma se define una base ortonormal dada por el versor $\hat{i}$ colineal a $\mathbf{F_e}$, el versor $\hat{j}$ perpendicular a la superficie y el versor $\hat{k} = \hat{i} \wedge \hat{k}$.

Ver figura 4.1.

Este esquema no es realizable físicamente, por lo tanto la simulación no corresponde a ningún flujo real en un sentido estricto. Por un lado, se puede decir que no es una capa límite desarrollada espacialmente, que es el flujo que se analizó en profundidad en el capitulo 2. Por otro lado, si las paredes laterales y las entradas están lo suficientemente lejos una de otra, el flujo tiene similitudes con el flujo en un canal. En el flujo en un canal, se tienen dos superficies opuestas iguales en las que se desarrollan capas límite hasta que estas se unen en un flujo turbulento completamente desarrollado. El plano central es un plano de simetría en las propiedades estadísticas, pero a través de este circula fluido, por lo cual no es un plano de simetría del flujo tridimensional. El esquema utilizado considera que el plano superior es un plano de simetría del flujo tridimensional, lo cual es una diferencia importante.

Aunque el esquema de condiciones de borde presenta las dificultades mencionadas, se elige porque permite generar un flujo que presenta variaciones espaciales principalmente en la dirección perpendicular a la superficie, ademas de que otros grupos lo han usado con éxito [Coceal et al., 2006].

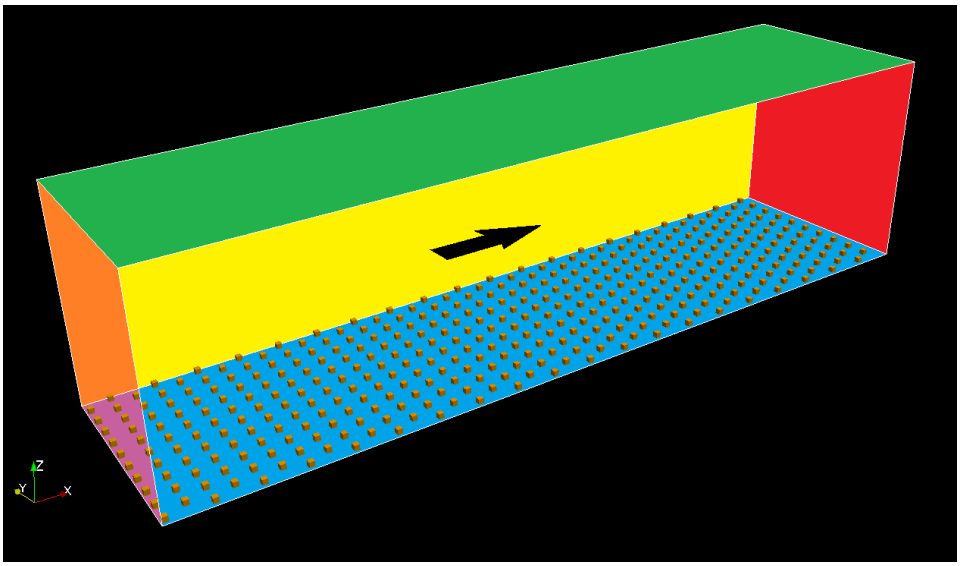


Figura 4.1: Esquema del flujo

4.2. caffa3d.MBRi

El programa caffa3d.MBRi desarrollado por el Grupo de Mecánica de Fluidos Computacional del IMFIA, es un solver para flujos incompresibles. Es un programa de código abierto basado en el enfoque de volúmenes finitos escrito en Fortran 90, lo cual permite a estudiantes no expertos en escritura de programas hacer modificaciones en el código fuente de manera de adaptar el código a los requerimientos del caso de estudio.

El modelo matemático consta de la ecuación de balance de masa, la de balance de cantidad de movimiento y una ecuación de balance de un escalar pasivo genérico. Esta última ecuación puede utilizarse, por ejemplo, para resolver el transporte de un contaminante o para codificar un modelo RANS tipo $k-\varepsilon$.

En este se utiliza mallas estructuradas por bloques tanto para alcanzar flexibilidad geométrica como para explotar la capacidad de computadores paralelos (clusters) haciendo uso de la librería MPI. Cada celda de la malla es un hexaedro, con exactamente seis celdas adyacentes, no se superponen, y no existen espacios vacíos entre ellas. La malla se divide en regiones y cada región puede estar dividida en bloques. La paralelización de las actividades se hace utilizando esta estructura, es decir, cada región es resuelta por un núcleo diferente. Finalmente es importante destacar que aun cuando el bloque de malla tenga una forma curva, siempre las coordenadas usadas son cartesianas.

Cada ecuación del modelo matemático es discretizada en cada celda de manera de obtener una ecuación lineal de la forma

$$A_P^u u_P + A_E^u u_E + A_W^u u_W + A_N^u u_N + A_S^u u_S + A_T^u u_T + A_B^u u_B = Q_P^u$$

donde el supraindice u refiere a que es la ecuación de balance de cantidad de movimiento en la dirección de u, y los subindices P, E, W, N, S, T y B identifican las celdas adyacentes en: actual, este, oeste, norte, sur, arriba y abajo. Para ver en detalle la discretización utilizada en cada termino se recomienda ver Usera et al. [2008].

Para calcular los flujos convectivos en cada celda se utiliza un blending de un esquema upwind de primer orden implícito y un esquema de inter-

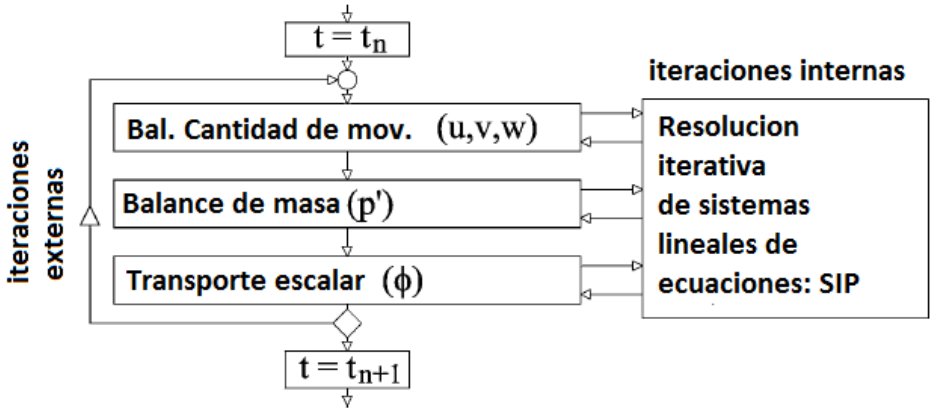


Figura 4.2: Esquema de las iteraciones

polación lineal de segundo orden explicito. El acople entre la velocidad y la presión se hace usando el método SIMPLE [Usera et al., 2008].

Como es sencillo ver, cada bloque forma un sistema de ecuaciones lineales que es heptadiagonal. O sea que globalmente es heptadiagonal por bloques. Estos sistemas son resueltos de forma eficiente por una variante estructurada por bloques del método Stone-SIP, este es el método utilizado [Usera et al., 2008].

Para cada paso temporal se registran iteraciones a dos niveles, para lograr el acople de la velocidad, presión y escalares pasivos. El esquema de estas iteraciones se presenta en la figura 4.2.

Finalmente es importante destacar una funcionalidad del caffa3d.MBRi que es utilizada en las simulaciones realizadas, esto es: condiciones de borde inmersas. Las condiciones de borde inmersas permiten representar sólidos inmersos en un flujo sin necesidad de adaptar la malla a la frontera solida. Esto se logra imponiendo en las celdas que están dentro del sólido una fuerza de masa tal que logre que la velocidad sea la de este. Si el sólido está en reposo esta velocidad es nula. En caso de celdas que están parcialmente dentro y parcialmente fuera del solido se pondera la fuerza en relación con el volumen. Para una explicación de los fundamentos matemáticos del método se recomienda ver [Peskin, 2002].

4.3. Ecuaciones del flujo en un canal rugoso

Se define el filtro homogéneo siguiente:

$$G(z) = \frac{1}{A_f}\delta(z) \tag{4.1}$$

o sea que la operación de filtrado queda:

$$\langle q \rangle_H (z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x^*,y^*,z^*,t)\,\frac{1}{A_f}\delta(z^*-z)\,dz^*dy^*dx^* \tag{4.2}$$

donde δ es la función Delta de Dirac y A_f es el área de la intersección de un plano horizontal a una altura z con el dominio del flujo. Este filtro tiene la propiedad de promediar los valores de cualquier campo en el plano $z = z^*$. Esta operación se puede aplicar a cualquier campo, en particular se puede aplicar a campos que fueron filtrados con el filtro de la simulación de grandes vórtices y luego promediados, en este caso se definen las siguientes cantidades:

$$\widetilde{\overline{\langle p \rangle}} = \overline{\langle p \rangle} - \left\langle \overline{\langle p \rangle} \right\rangle_H$$

$$\widetilde{\overline{\langle \mathbf{u} \rangle}} = \overline{\langle \mathbf{u} \rangle} - \left\langle \overline{\langle \mathbf{u} \rangle} \right\rangle_H$$

El tilde indica que este término es el desvío respecto al promedio de los valores a una altura z. La misma lógica se puede aplicar a cualquier campo.

Se puede filtrar de esta manera la ecuación de balance de masa filtrada y promediada:

$$\left\langle \nabla \cdot \overline{\langle \mathbf{u} \rangle} \right\rangle_H = 0$$

de lo cual resulta:

$$\nabla \cdot \left\langle \overline{\langle \mathbf{u} \rangle} \right\rangle_H = 0$$

o sea

$$\frac{\partial \left\langle \overline{\langle u \rangle} \right\rangle_H}{\partial x} + \frac{\partial \left\langle \overline{\langle v \rangle} \right\rangle_H}{\partial y} + \frac{\partial \left\langle \overline{\langle w \rangle} \right\rangle_H}{\partial z} = 0$$

Como luego del filtrado horizontal la función deja de depender de x y y

$$\frac{\partial \left\langle \overline{\langle w \rangle} \right\rangle_H}{\partial z} = 0 \Rightarrow \left\langle \overline{\langle w \rangle} \right\rangle_H = \text{ constante} = 0 \tag{4.3}$$

La última igualdad surge de que la velocidad sobre la superficie $z = 0$ debe ser nula.

Ahora, si se aplica esta operación de filtrado a la ecuación 3.46:

$$\left\langle \frac{\partial \overline{\langle \mathbf{u} \rangle}}{\partial t} \right\rangle_H + \left\langle \nabla \cdot \left(\overline{\langle \mathbf{u} \rangle} \otimes \overline{\langle \mathbf{u} \rangle} \right) \right\rangle_H = \left\langle \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(T^{S*} \right) \right\rangle_H + \left\langle \overline{\langle \mathbf{F} \rangle} \right\rangle_H$$

Manipulando la expresión anterior es sencillo llegar a:

$$\frac{\partial \left\langle \overline{\langle \mathbf{u} \rangle} \right\rangle_H}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\left\langle \overline{\langle \mathbf{u} \rangle} \right\rangle_H \otimes \left\langle \overline{\langle \mathbf{u} \rangle} \right\rangle_H \right) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot T^{S**} + \left\langle \overline{\langle \mathbf{F} \rangle} \right\rangle_H \tag{4.4}$$

donde

$$T^{S**} = -\left\langle \overline{\langle p \rangle} \right\rangle_H I + 2\mu \left\langle \overline{\langle D \rangle} \right\rangle_H - \left\langle \overline{T^R} \right\rangle_H - \rho \left\langle \overline{\langle \mathbf{u} \rangle' \otimes \langle \mathbf{u} \rangle'} \right\rangle_H - \rho \left\langle \widetilde{\overline{\langle \mathbf{u} \rangle}} \otimes \widetilde{\overline{\langle \mathbf{u} \rangle}} \right\rangle_H \tag{4.5}$$

El último término de la ecuación surge de la heterogeneidad de la superficie rugosa ya que genera que los valores de la media temporal varíe, a una misma altura z, al menos en la subcapa rugosa. A estas tensiones se les llama "dispersivas" [Coceal et al., 2006]

En presencia de obstáculos sólidos, el filtrado horizontal y la derivación no son conmutables ya que la región en la que se se integra no es simplemente conexa, por lo cual surgen términos adicionales [Raupach et al., 1991]. La derivación espacial queda,

$$\left\langle \frac{\partial q}{\partial x_i} \right\rangle_H = \frac{\partial \langle q \rangle_H}{\partial x_i} + \frac{1}{A_f} \oint_{\mathscr{C}_i} q \mathbf{n} ds$$

y la temporal

$$\left\langle \frac{\partial q}{\partial t} \right\rangle_H = \frac{\partial \langle q \rangle_H}{\partial t} - \frac{1}{A_f} \oint_{\mathscr{C}_i + \mathscr{C}_0} q \mathbf{v}_i \mathbf{n} ds$$

donde $\mathscr{C}_i$ es la curva que surge de intersectar el plano horizontal con la superficie de los elementos de rugosidad y $\mathscr{C}_0$ es la curva que surge de intersectar este plano con el dominio del flujo. Ademas $\mathbf{n}$ es la normal saliente a la región plana delimitada por estas curvas y $\mathbf{v}_i$ la velocidad de la curva $\mathscr{C}_i + \mathscr{C}_0$.

Para evitar considerar estos términos, se recuerda que los elementos de rugosidad se ingresan mediante el método de condiciones de borde inmersas, entonces estos se pueden considerar como parte del flujo si se tiene en cuenta el campo de fuerzas de masa que mantiene el fluido dentro de los elementos de rugosidad en reposo. Entonces las ecuaciones 4.4 y 4.5 son válidas aun en presencia de los obstáculos.

La proyección de la ecuación 4.4 según $\hat{i}$ es

$$\left\langle \overline{\langle u \rangle} \right\rangle_H \frac{\partial \left\langle \overline{\langle u \rangle} \right\rangle_H}{\partial x} + \left\langle \overline{\langle v \rangle} \right\rangle_H \frac{\partial \left\langle \overline{\langle u \rangle} \right\rangle_H}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_{11}^{S**}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}^{S**}}{\partial y} + \frac{\partial T_{13}^{S**}}{\partial z} \right) + \left\langle \overline{\langle F \rangle} \right\rangle_H \tag{4.6}$$

Donde se utilizó el resultado 4.3. Como las magnitudes filtradas horizontalmente dependen solo de z, la ecuación 4.6 queda:

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{13}^{S**}}{\partial z} + \left\langle \overline{\langle F \rangle} \right\rangle_H \tag{4.7}$$

El campo de fuerzas de masa tiene dos contribuciones: la fuerza externa F_e, que es constante en todo punto del dominio, y la fuerza que proporciona el método de condiciones de borde inmersas F_{imb} que es variable espacial y

temporalmente. Entonces

$$\left\langle \overline{\langle F \rangle} \right\rangle_H = \left\langle \overline{\langle F_{imb} \rangle} \right\rangle_H + F_e \tag{4.8}$$

La ecuación 4.7 se puede integrar, de lo cual resulta

$$T_{13}^{S**} - T_{13}^{S**}(0) = -\rho \int_0^z \left\langle \overline{\langle F \rangle} \right\rangle_H dz \tag{4.9}$$

Los elementos de rugosidad están apoyados sobre la superficie y tienen una altura h, de forma que la integral anterior se puede calcular en dos partes para $z > h$ usando

$$T_{13}^{S**} = T_{13}^{S**}(0) - \rho \int_0^h \left(\left\langle \overline{\langle F_{imb} \rangle} \right\rangle_H + F_e \right) dz - \rho \int_h^z F_e dz \tag{4.10}$$

Se define

$$\tau_w = T_{13}^{S**}(0) - \rho \int_0^h \left(\left\langle \overline{\langle F_{imb} \rangle} \right\rangle_H + F_e \right) dz \tag{4.11}$$

Entonces

$$T_{13}^{S**} = \tau_w - \rho F_e (z - h) \tag{4.12}$$

Como $T_{13}^{S**}(z = H) = 0$ donde H es la altura de la cara opuesta a la superficie, se tiene

$$\tau_w = \rho F_e (H - h) \tag{4.13}$$

De manera que τ_w es un parámetro controlado externamente, y puede usarse para controlar el correcto funcionamiento del modelo.

4.4. Detalles de la simulación

Se fija de forma arbitraria la altura del canal en $H = 2m$. Para asegurar que se establezca una zona logarítmica, en Jiménez [2004] se propone que se debe obedecer el criterio $40h \leq H$, de manera que se debe cumplir $h \leq 0{,}05m$.

Por otro lado, el paso de la grilla en la zona próxima a los obstáculos deberá ser proporcional a h, o sea que si se elige un valor de h muy pequeño se estará aumentando la cantidad de celdas necesarias para realizar la simulación. Es por ello que se elige $h = 0{,}048m$.

El número de Reynolds de la simulación se elige de manera que el flujo sea completamente rugoso dinámicamente (o sea que se verifique la similitud de Reynolds), de forma que el valor de este no tenga influencia. El flujo es completamente rugoso dinámicamente si $70 < h^+$ [Raupach et al., 1991] para rugosidad tipo arena (sand roughness). Coceal et al. [2006] utilizó un valor de $h^+ \approx 500$ en su simulación numérica directa de un canal rugoso para asegurar un flujo completamente rugoso dinámicamente. Si se impone $h^+ \approx 500$, entonces usando aire como fluido $500\nu/h = 0{,}14 {}^m/_s < u^*$. Finalmente, se elige el valor de $u^* \approx 1 {}^m/_s$. La tensión rasante sobre la superficie será $\tau_w \approx \rho u^{*2} \approx 1{,}2 {}^{kg}/_{s^2 m}$. Usando la ecuación 4.13 se tiene

$$F_e = \frac{\tau_w}{\rho\,(H_1 - H)} \approx 0{,}51 {}^m/_{s^2}$$

La fuerza por unidad de masa F_e es el parámetro que se fija en el modelo para lograr la velocidad deseada, de acuerdo a lo anterior se elige en $F_e = 0{,}5 {}^m/_{s^2}$. O sea que $u^* \approx 0{,}99 {}^m/_s$.

Es posible determinar el perfil de velocidad media que se espera obtener. Para ello se debe determinar el valor de c_∞. Como se mencionó anteriormente, el valor de $c_\infty(\sigma_i)$ depende del tipo de rugosidad que se está considerando. La rugosidad que se utilizará en las simulaciones serán cubos montados sobre la superficie. Se fija el valor de $\lambda = 0{,}0625$ de manera de estar cerca del valor máximo de ${}^{z_0}/_h$. Con cubos de $h = 0{,}048m$ resulta en un área plana por cubo de $A = 0{,}0369$, como se muestra en la figura 4.3. Con esta rugosidad el valor esperado de ${}^{z_0}/_h \approx 0{,}06$. O sea que $z_0 \approx 0{,}003m$ y

$$c_\infty(\sigma_i) = -\frac{1}{\kappa} ln\left(\frac{z_0}{h}\right) \approx 6{,}9 \tag{4.14}$$

La altura de desplazamiento nulo, se estima de acuerdo con [Raupach et al., 1991] en ${}^d/_h \approx 0{,}75$, de modo que $d \approx 0{,}036m$.

En canales y tuberías, el parámetro de Coles $\Pi \approx 0$, entonces el perfil de

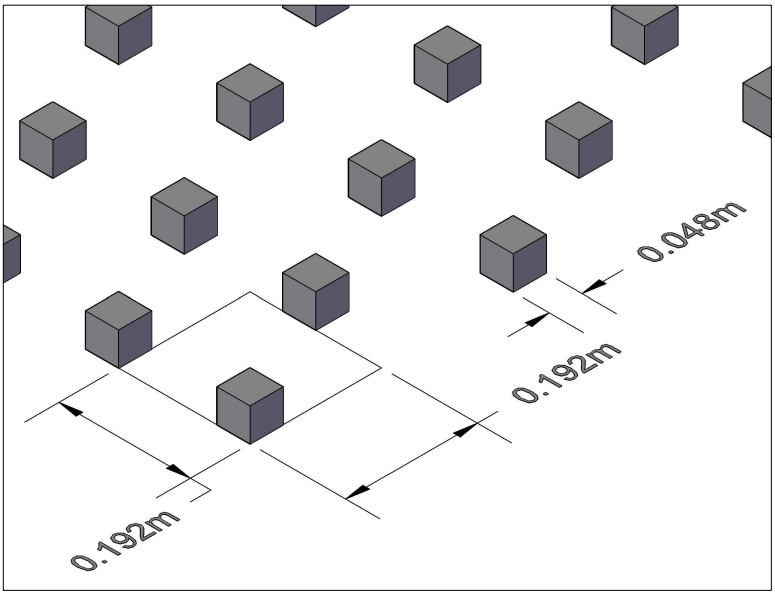


Figura 4.3: Esquema de la rugosidad utilizada

velocidad esperado se puede aproximar por encima de la subcapa rugosa con la expresión logarítmica siguiente:

$$U = \frac{u^*}{\kappa} ln\left(\frac{z-d}{z_0}\right)$$

con $u^* = 0,99^m/_s$, $d = 0,036m$ y $z_0 = 0,003m$.

Las tensiones rasantes deben seguir el andamiaje descrito en la sección 4.3, o sea:

$$T_{13}^{S**} = 1,2 - 0,6z \tag{4.15}$$

La componentes de la diagonal del tensor de Reynolds adimensionadas con u^*, $\frac{\overline{u'^2}}{u^{*2}}$, $\frac{\overline{v'^2}}{u^{*2}}$ y $\frac{\overline{w'^2}}{u^{*2}}$ tienen un pico sobre la superficie del orden de 4, 2 y 1,2 respectivamente. O sea que $k \approx 3,6u^{*2}$

Finalmente, se debe elegir el paso de la malla a utilizar. En el entorno de los cubos se espera tener vórtices del orden del tamaño de los cubos

$\ell_0 \approx 0{,}05m$. Se estima que las escalas mayores en el rango inercial es $\ell_{EI} \approx \frac{1}{6}\ell_0 \approx 8 \cdot 10^{-3}m$ (ver Pope [2000]), de manera que el paso de la malla debería ser menor a este valor en el entorno de los cubos. La escala de velocidad de los vórtices es $\mathcal{U}_0 \approx \left(\frac{2}{3}k\right)^{1/2} = 1{,}55u^* \approx 1{,}55\,{}^m/_s$. Manteniendo el valor de la escala de velocidad, es decir, $\mathcal{U}_0 \approx \mathcal{U}_{EI} = 1{,}5\,{}^m/_s$, la escala de tiempo de los vórtices en el comienzo del rango inercial es $\mathcal{T}_{EI} \approx 0{,}005s$. Por encima de la subcapa rugosa, en la zona logarítmica, la escala $L = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$ se puede aproximar por $L \approx C_L z$ con $C_L = 2{,}5$ [Pope, 2000]. La escala $\ell_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} L$. O sea que hasta un valor de $z \approx 0{,}25m$ (la altura de la capa de superposición) la escala de longitud $\ell_0 \approx 1{,}35z$ y $\ell_{EI} \approx 0{,}23z$. Si se asume que el valor de $\mathcal{U}_{EI}$ en esta zona es $1{,}5\,{}^m/_s$ constante, la escala de tiempo de los vórtices en el comienzo del rango inercial es $\mathcal{T}_{EI} \approx 0{,}15z$. Resumiendo:

- En la subcapa rugosa $\ell_{EI} \approx 8 \cdot 10^{-3}m$ y $\mathcal{T}_{EI} \approx 0{,}005s$
- En la zona logarítmica ($z < 0{,}25m$), $8 \cdot 10^{-3}m < \ell_{EI} < 5{,}6 \cdot 10^{-2}m$ y $0{,}005s < \mathcal{T}_{EI} < 0{,}037s$.
- Por encima de la capa de superposición $\ell_{EI} \approx 5{,}6 \cdot 10^{-2}m$ y $\mathcal{T}_{EI} \approx 0{,}037s$

Por razones de tiempo de las simulaciones el paso temporal utilizado fue $0{,}01s$ que es del orden del mínimo de $\mathcal{T}$ aunque mayor. La malla es regular en las direcciones $\hat{i}$ y $\hat{j}$ con un paso de $0{,}01m$. En la vertical se usó un paso variable que aumenta con la altura de forma lineal, de la siguiente manera:

$$\Delta z\,(m) = 0{,}004 + 2{,}22 \cdot 10^{-2} z$$

Como la malla no es uniforme se puede calcular un diámetro efectivo de las celdas como sigue:

$$\Delta_m\,(m) = \left[\left(0{,}004 + 2{,}22 \cdot 10^{-2} z\right) \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}01\right]^{1/3}$$

A modo de referencia se pueden calcular las escalas de Kolmogorov y de Taylor. En la subcapa rugosa, la producción $\mathcal{P} \approx \frac{\mathcal{U}_0^3}{\ell_0} \approx 70\,{}^{m^2}/_{s^3}$, asumiendo $\mathcal{P} \approx \varepsilon$, las escalas de Kolmogorov quedan: $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \approx 8 \cdot 10^{-5}m$,

$\tau_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4} \approx 5 \cdot 10^{-4} s$ y $\mathcal{U}_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \approx 0{,}18 {}^{m}/_{s}$; la escala de Taylor es: $\lambda \approx \sqrt{15\frac{\nu}{\varepsilon}}\mathcal{U}_0 \approx 3 \cdot 10^{-3} m$.

De la misma manera se pueden calcular estas escalas en el tope de la capa de superposición: $\eta \approx 1 \cdot 10^{-4} m$, $\tau_\eta = 0{,}1 s$, $\mathcal{U}_\eta = 1 \cdot 10^{-3} {}^{m}/_{s}$ y la escala de Taylor $\lambda \approx 7 \cdot 10^{-3} m$.

Un resumen de las escalas puede verse en la figura 4.4. Puede verse que salvo en alguna parte mínima de la subcapa rugosa el paso de malla utilizado resolvería el flujo hasta el comienzo del rango inercial.

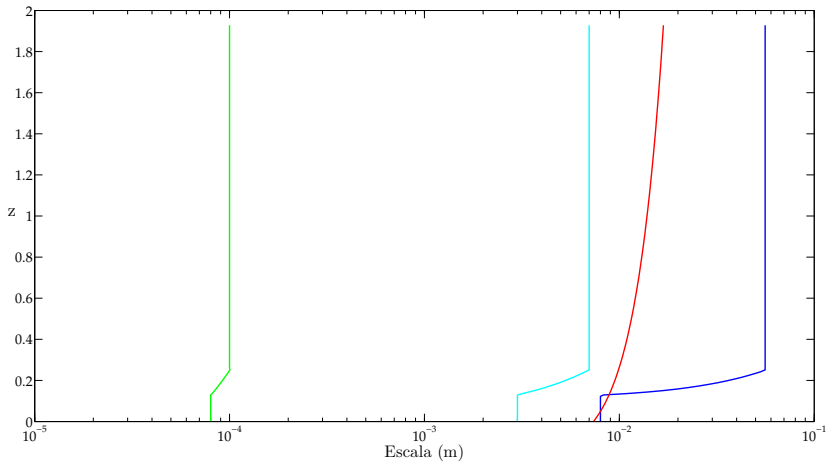


Figura 4.4: Escalas de longitud esperadas en el flujo. En azul (–) la escala del comienzo del rango inercial ℓ_{EI}, en rojo (–)el paso de la grilla λ_m, en cian (–) la microescala de Taylor λ y en verde (–) la escala de Kolmogorov η.

Se hicieron simulaciones preliminares para determinar las dimensiones ideales del dominio de la simulación. El criterio utilizado fue que la correlación de la velocidad se haga nula de manera que la condición de periodicidad no impusiera condiciones sobre el flujo. En simulaciones con un ancho de aproximadamente $2m$ se registraba la presencia de un par de vórtices horizontales con un diámetro del orden de la altura del dominio; estos vórtices eran bidimensionales y no interactuaban con el resto del flujo. Para evitar este problema se aumentó el ancho a $3{,}84m$. Por otro lado, se limitó a 16 la cantidad de regiones totales para poder trabajar en la cola SmallJobs del cluster. Con estas restricciones el domino se conforma por 16 regiones de $96x96x112$ celdas o sea 1032192 celdas por región y 16515072 celdas totales.

Las 16 regiones tienen una sección horizontal cuadrada de $0{,}96m$ de lado y $2m$ de altura. Estas regiones se acomodan de manera de formar un prisma de $3{,}84m \quad x \quad 3{,}84m \quad x \quad 2m$.

Capítulo 5

Resultados

Las simulaciones realizadas comienzan desde el reposo. La velocidad aumenta en la medida que el flujo se acelera, hasta que la capa límite alcanza la superficie superior. Una vez que esto sucede se debe dejar un tiempo para que se estabilice y la simulación sea estacionaria en valores medios. Esto requiere alrededor de 40 segundos de simulación que en tiempo de máquina, a 11 hs/seg, redunda en una simulación de alrededor de 20 días. Recién después de este tiempo se comienza la simulación real, que puede llevar entre 20 y 30 días de trabajo en máquina.

En este capítulo se presentan los resultados de dos simulaciones para las que se modificó el coeficiente de blending.

Simulación	Coef. Blending	No. de iteraciones internas	Tiempo simulación
CLIM46	0.7	10	44 seg
CLIM49	0.95	10	38 seg

Los tiempos presentados en la tabla anterior no incluyen el periodo de estabilización.

Para poder calcular el valor medio de la velocidad $\mathbf{U}$, de la presión P, de la viscosidad dinámica turbulenta $\overline{\mu_T}$, las tensiones de Reynolds $-\rho\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$, la disipación de energía cinética turbulenta ε y la producción $\mathcal{P}$, en cada celda, se deben ir sumando y acumulando determinados campos que servirán de insumos para el cálculo de los anteriores. De esta manera se va generando campos con la suma de la magnitud instantánea que se requiera. Entonces se guarda la suma de la velocidad $\mathbf{u}$, de la presión p, la viscosidad dinámica turbulenta $\mu_T = \mu + \mu_r$, el tensor $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$, los campos escalares $tr\left(D^2\right)$ y $\nu_r tr\left(D^2\right)$

y el tensor $\nu_r D$. A modo de ejemplo se muestra el calculo de $-\rho\overline{\mathbf{u}'\otimes\mathbf{u}'}$:

$$-\rho\overline{\mathbf{u}'\otimes\mathbf{u}'} = -\rho\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{u}\right)\otimes\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{u}\right)\right]$$

Donde N es el número de pasos temporales y los términos en las sumas se obtienen de los acumulados antes mencionados.

Cada 200 pasos temporales, se guarda en un archivo los campos instantáneos de velocidad $\mathbf{u}$, presión p, viscosidad dinámica turbulenta $\mu+\mu_r$ y los campos detallados en el párrafo anterior.

5.1. Tensiones rasantes

Se sumó en todo instante y lugar la fuerza de masa que impone el método de condiciones de borde inmersas, y se calculó el valor medio de la fuerza sobre todos los obstáculos por unidad de altura, la cual se presenta en el gráfico de la figura 5.1.

Con esta información se calcula τ_w (la tension rasante sobre la superficie), u^* (la velocidad de fricción) y d (la altura de desplazamiento nulo.

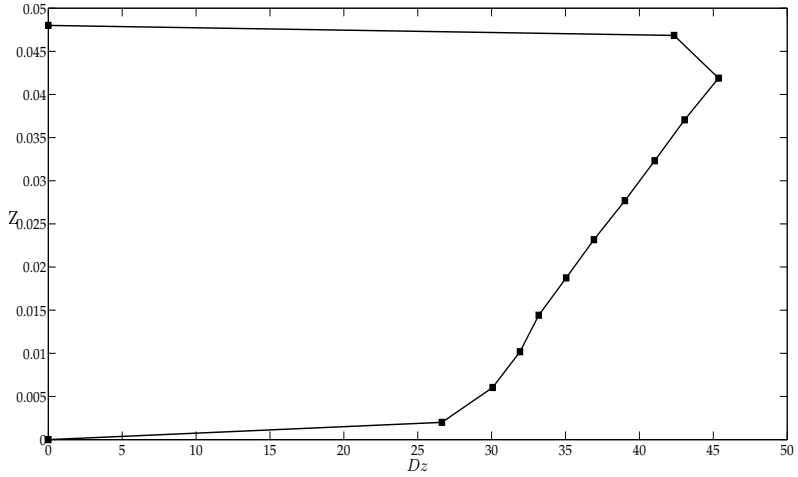
	$\tau_w \left({}^{N}/_{m^2}\right)$	$u^* \left({}^{m}/_{s}\right)$	$d\,(m)$
CLIM46	1.855	1.243	0.0268
CLIM49	2.281	1.379	0.0260

En la figura 5.2b se muestra las diferentes contribuciones a

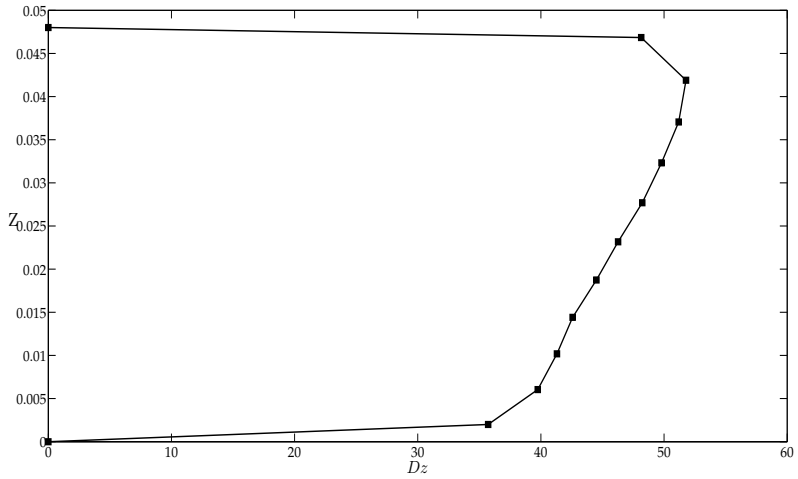
$$T_{13}^{s**} = \mu\left\langle\frac{\partial\overline{\langle u\rangle}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{\langle w\rangle}}{\partial z}\right\rangle_H + \rho\left\langle\overline{\nu_r\left(\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial z}+\frac{\partial\langle w\rangle}{\partial z}\right)}\right\rangle_H - \rho\left\langle\overline{\langle u\rangle'\langle w\rangle'}\right\rangle_H - \rho\left\langle\overline{\widetilde{\langle u\rangle}\,\widetilde{\langle w\rangle}}\right\rangle_H.$$

El primer término está representado en color verde, y es casi nulo en todo el intervalo de alturas. Tiene un pico justo encima de los obstáculos debido principalmente a la derivada de U respecto a z .

El segundo término, representado en color cian, tiene el mismo andamiaje que el primero aunque algo mayores valores, eso es debido a que la viscosidad turbulenta es algunas veces mayor que la molecular. El pico



(a) CLIM46



(b) CLIM49

Figura 5.1: Perfil de la media de la fuerza horizontal por unidad de superficie y altura sobre los obstáculos. a) CLIM46 y b) CLIM49

máximo se da, de la misma forma que en el primero, justo por encima de los obstáculos.

En azul está representado el tercer término, el cual es claramente el más significativo. Este término representa el intercambio de cantidad de movimiento por medios turbulentos del flujo representado. La forma del perfil está bien representada aunque se advierte que hay una cierta concavidad que no es natural.

Finalmente, en rojo se muestran las tensiones dispersivas, estas son mayores en términos absolutos que el primer y segundo término. Se puede apreciar un cambio de signo a la altura de los obstáculos, donde pasa a ser negativo y luego cambia otra vez a positivo. La altura de influencia de estas tensiones alcanza aproximadamente $2h$, lo cual indica que la subcapa rugosa tiene una extension de por lo menos $2h$.

En ambas simulaciones se obtienen resultados cualitativamente similares, cambiando levemente los valores.

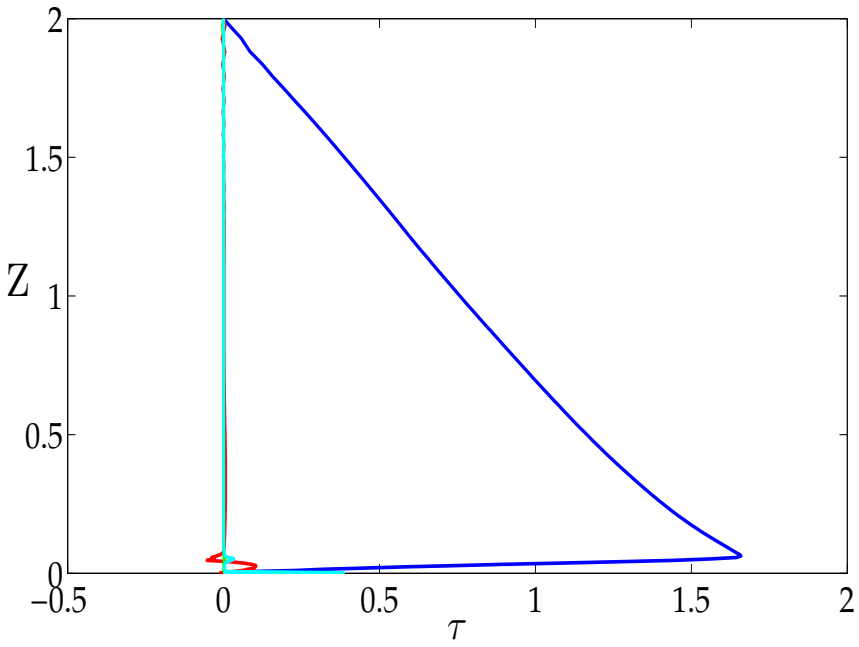
Las figuras 5.3 y 5.4 representan las tensiones rasantes horizontales adimensionadas con τ_w en un plano horizontal a diferentes alturas en la subcapa rugosa. Las tensiones son aproximadas sólo por el término $-\rho\overline{\langle u\rangle'\langle w\rangle'}$ ya que, como se puede apreciar en la figura 5.2, es mucho más importante que los otros términos.

En la figura 5.3a se aprecia que por debajo de la altura de los elementos de rugosidad, los valores máximos de τ se dan a ambos lados de cada cubo a una distancia h aguas abajo de estos. En la estela de cada cubo se encuentran valores bajos cercanos a 0.3 y en las aristas posteriores se registran valores negativos de las tensiones rasantes del orden de -0.2.

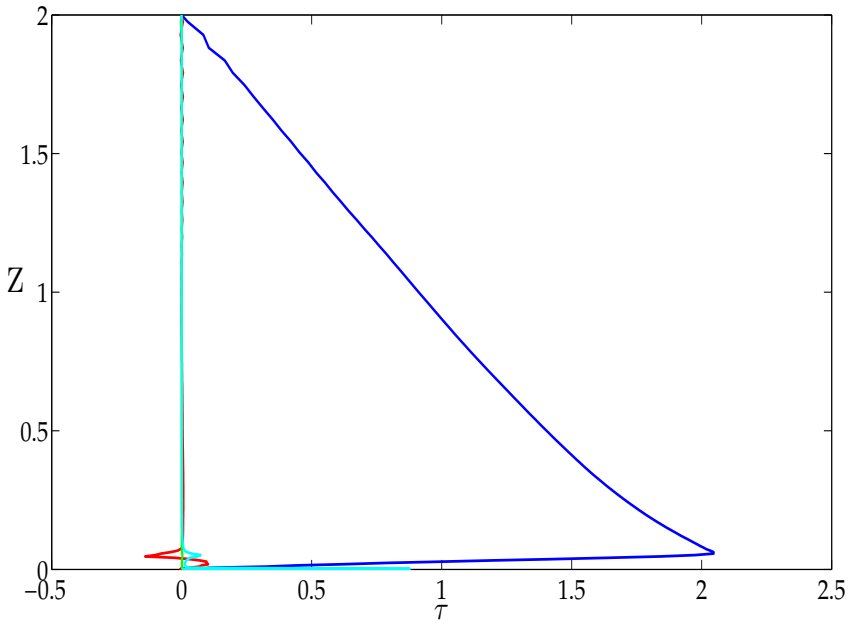
A $1{,}2$ cm por encima de la superficie superior de los cubos (condición representada en la figura 5.3b) se encuentra un valor máximo de aproximadamente $1{,}55$ y un mínimo de $-0{,}3$. Estos se encuentran respectivamente $1{,}5h$ aguas abajo de los cubos y encima de las cubos.

En las siguientes dos figuras (5.3c y 5.3d) se muestra las tensiones a $z = 0{,}09$ cm y $z = 0{,}12$ cm. En la primera se puede ver el mismo comportamiento que a $z = 0{,}06$ cm aunque la variación espacial registra una amplitud menor. En la última ya los patrones que se apreciaba a alturas menores se pierden.

En la simulación CLIM49 (figura 5.4) se registra el mismo comportamiento que en CLIM46 con muy pocas diferencias en los valores registrados, sin embargo, se encuentra unas oscilaciones en los campos de tensiones que no representan un comportamiento físico, esto se atribuye al valor elevado del coeficiente de blending.

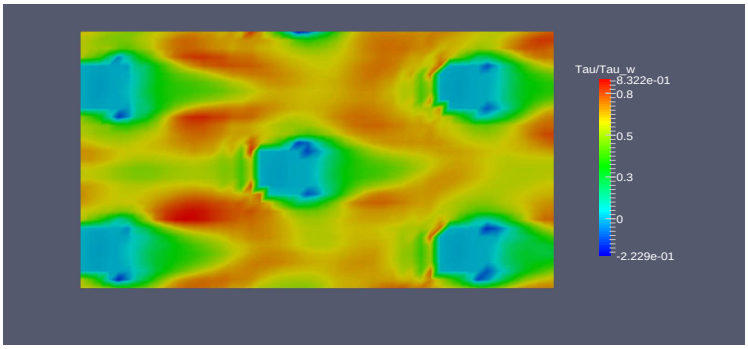


(a) CLIM46

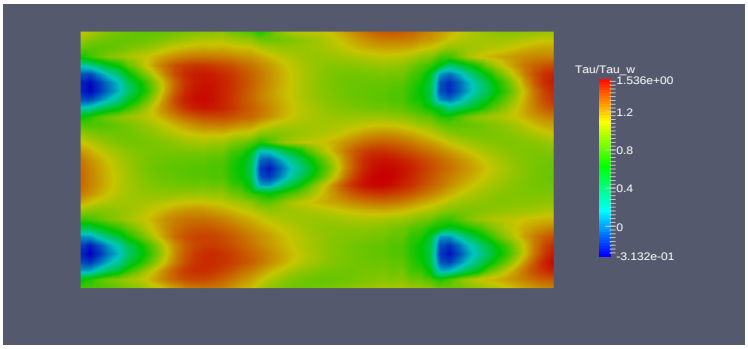


(b) CLIM49

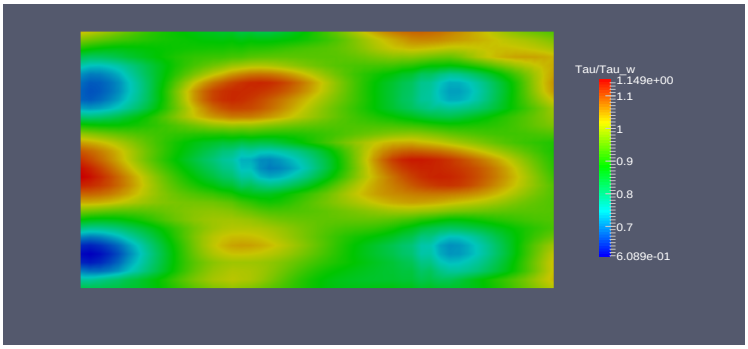
Figura 5.2: Componentes de T_{13}^{s**} en función de la altura z



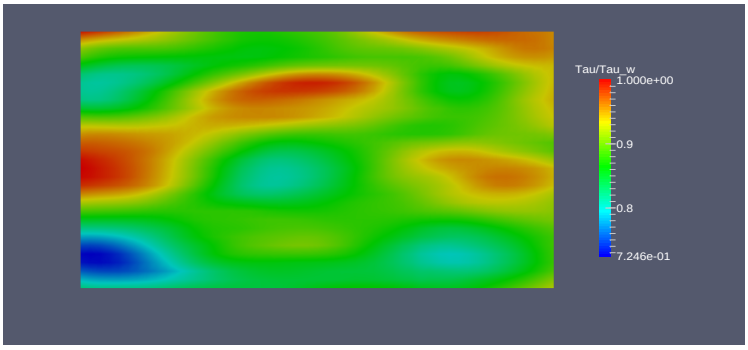
(a) z=0.03m



(b) z=0.06m

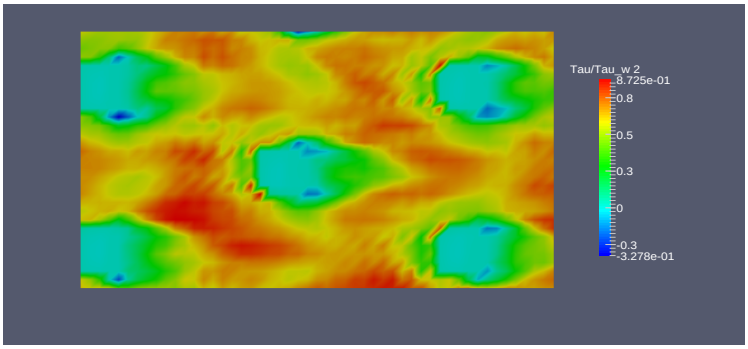


(c) z=0.09m

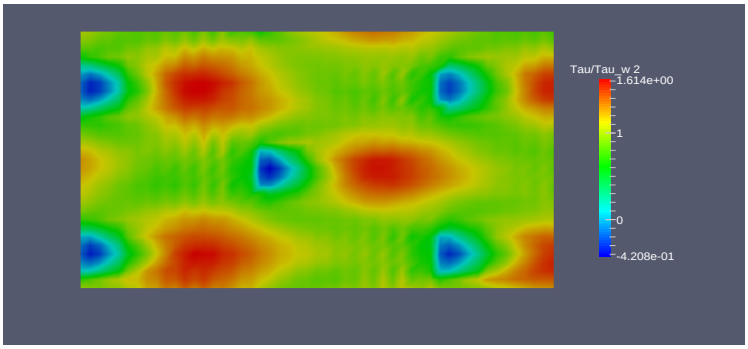


(d) z=0.12m

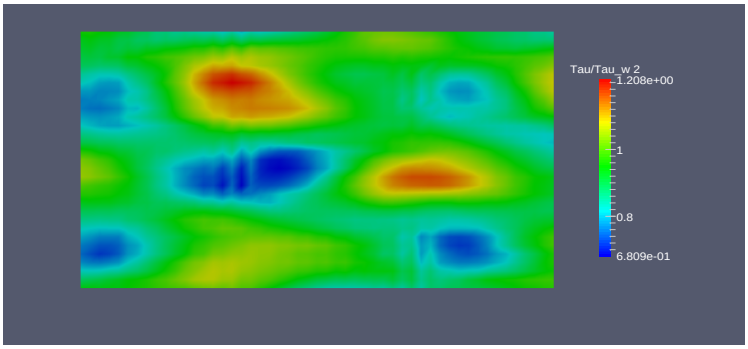
Figura 5.3: Tensión rasante en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM46



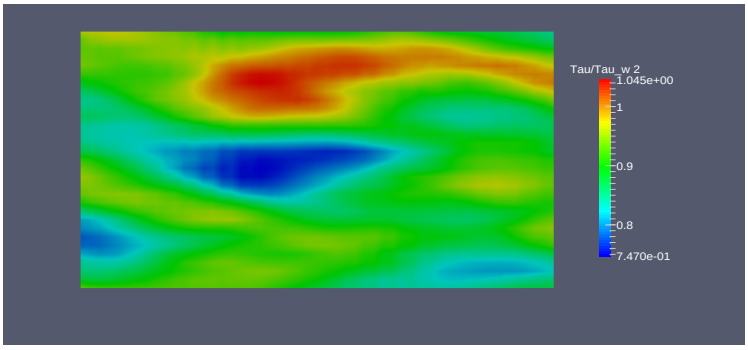
(a) z=0.03m



(b) z=0.06m



(c) z=0.09m



(d) z=0.12m

Figura 5.4: Tensión rasante en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM49

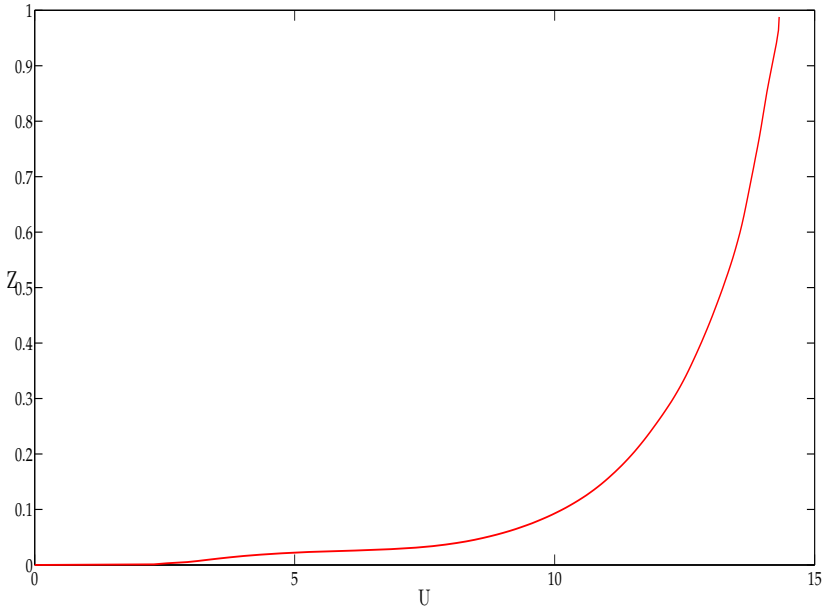
5.2. Perfil de velocidad media

En al figura 5.5 se presenta los perfiles de velocidad media en la dirección del flujo y en la figura 5.6 lo mismo pero en lugar de z se gráfica $z - d$ en escala semilogarítmica. Es evidente que en ambos casos se tiene una región logarítmica que va desde una altura cercana a la de los obstáculos hasta casi la altura del canal, pudiendo apreciarse una mínima estela. En base al ajuste logarítmico, y usando los valores hallados de forma independiente de u^* y d, se puede encontrar el valor que tiene la constante de von Karman (κ) y la longitud de rugosidad (z_o) en cada simulación.

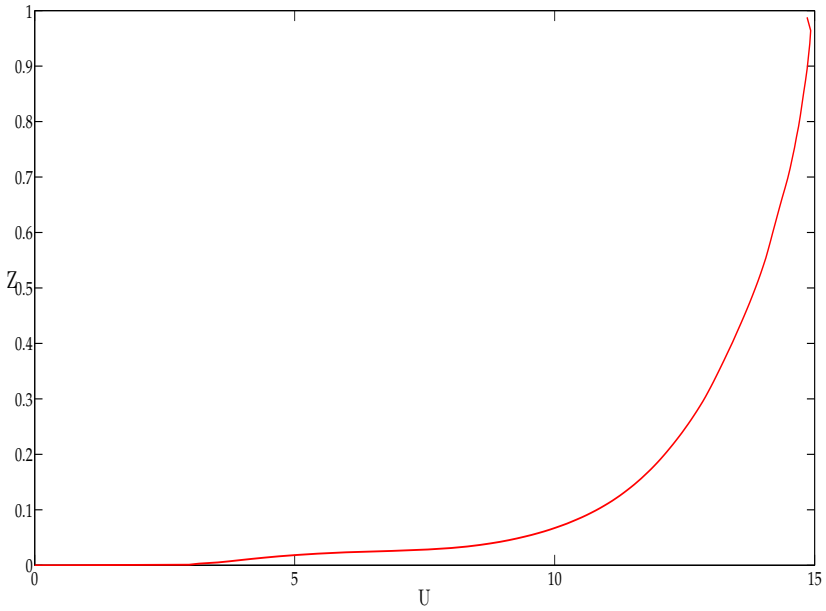
	κ	$Z_o\,(m)$
CLIM46	0.71	5.1e-4
CLIM49	0.80	3.3e-4

Ambos valores obtenidos de κ son altos, si se toma en cuenta que la constante de von Karman varía entre 0,33 y 0,43 [Bailey et al., 2014]. De todas formas se considera razonable la discrepancia obtenida.

Por otra parte, los valores de Z_o son casi un orden de magnitud menores que los esperados, siendo el de la simulación CLIM46 más cercano al valor predicho; seis veces menor.

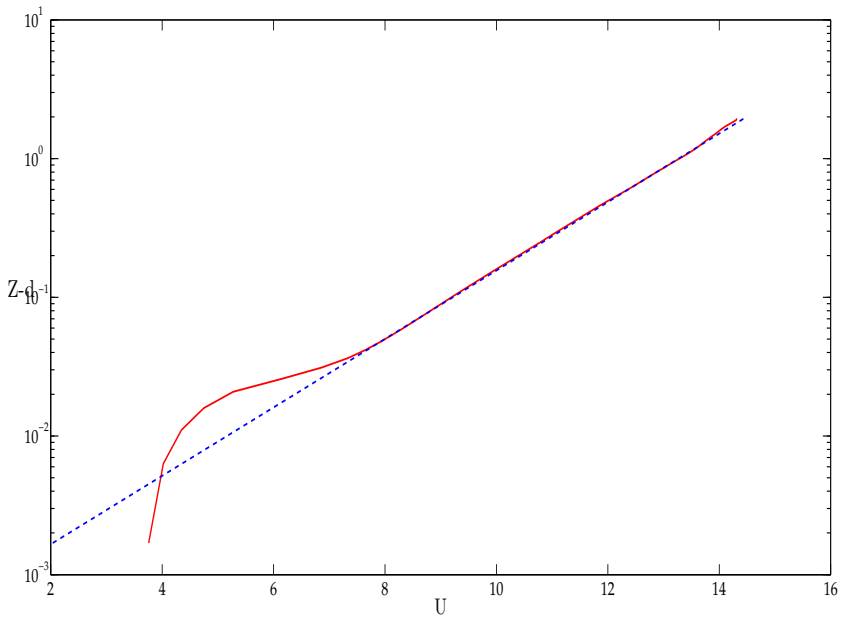


(a) CLIM46

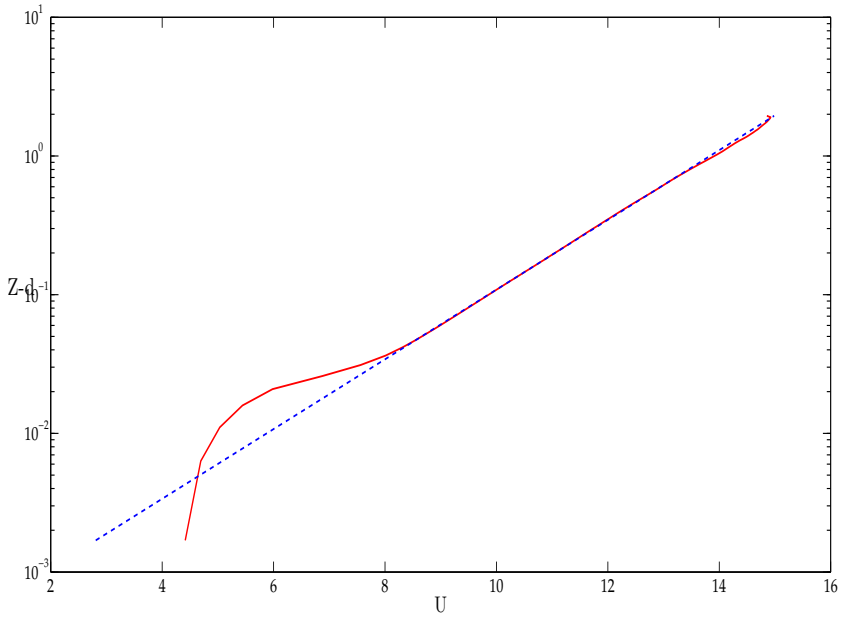


(b) CLIM49

Figura 5.5: Velocidad media en altura.



(a) CLIM46



(b) CLIM49

Figura 5.6: Velocidad media en altura (escala semilogarítmica).

5.3. Turbulencia

Los valores de σ_u/u^* (azul), σ_v/u^* (rojo) y σ_w/u^* (verde) en altura se presentan en la figura 5.7

La principal observación que se puede realizar es que los valores inmediatamente encima de los obstáculos de estas magnitudes en las tres componentes tienen valores correctos. En Raupach et al. [1991] se presentan resultados para muchas capas límite y se encuentran valores sobre el suelo de:

$$\left.\frac{\sigma_u}{u^*}\right|_w = 2$$
$$\left.\frac{\sigma_v}{u^*}\right|_w = 1{,}4$$
$$\left.\frac{\sigma_w}{u^*}\right|_w = 1{,}1$$

En la simulación CLIM46 estos valores resultaron:

$$\left.\frac{\sigma_u}{u^*}\right|_w = 2$$
$$\left.\frac{\sigma_v}{u^*}\right|_w = 1{,}3$$
$$\left.\frac{\sigma_w}{u^*}\right|_w = 1{,}05$$

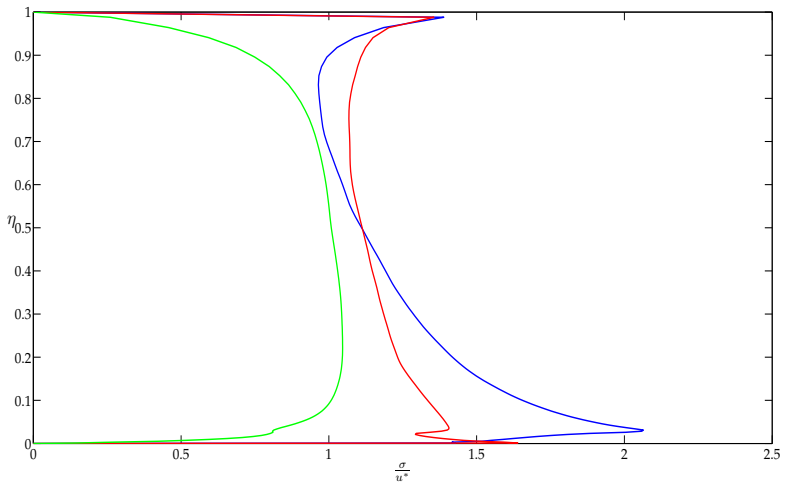
Mientras que en la simulación CLIM49:

$$\left.\frac{\sigma_u}{u^*}\right|_w = 2$$
$$\left.\frac{\sigma_v}{u^*}\right|_w = 1{,}5$$
$$\left.\frac{\sigma_w}{u^*}\right|_w = 1{,}2$$

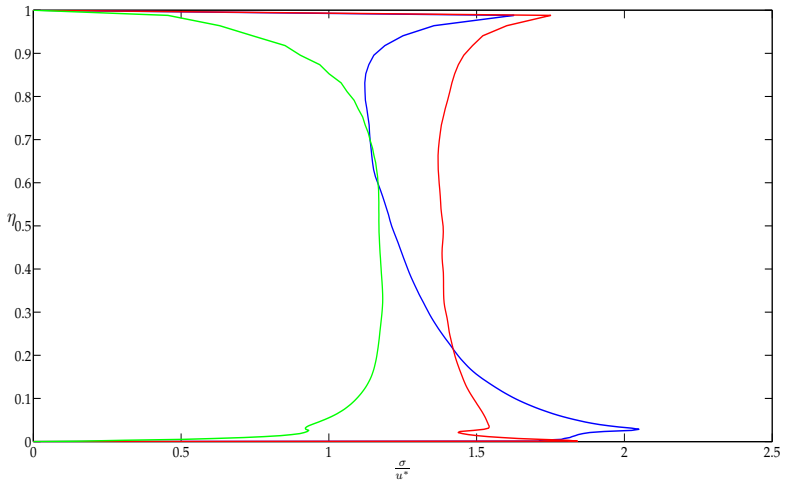
Los valores en la simulación CLIM46 se corresponden de mejor manera

con la bibliografía.

Por otra parte, la forma de los perfiles es cualitativamente correcta. En la medida que z aumenta, las tres componentes fluctuantes tienden a un mismo valor cercano a 1,0, o sea que se pierde la anisotropía que se tiene sobre la superficie. Este comportamiento también es mejor representado en la simulación CLIM46. Al acercarse al limite superior de la simulación, el comportamiento difiere del esperable para un canal o una capa límite, debido a la condición de simetría impuesta en la superficie superior.



(a) Intensidad de turbulencia en altura (CLIM46):

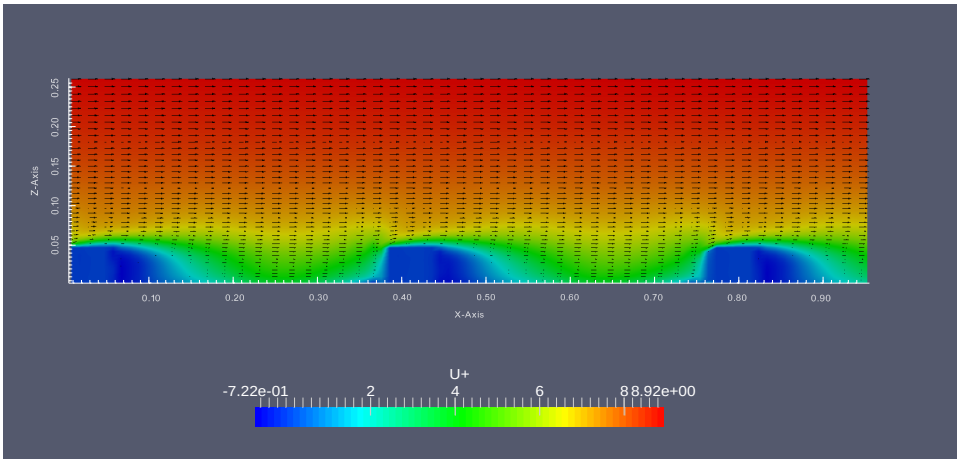


(b) Intensidad de turbulencia en altura (CLIM46):

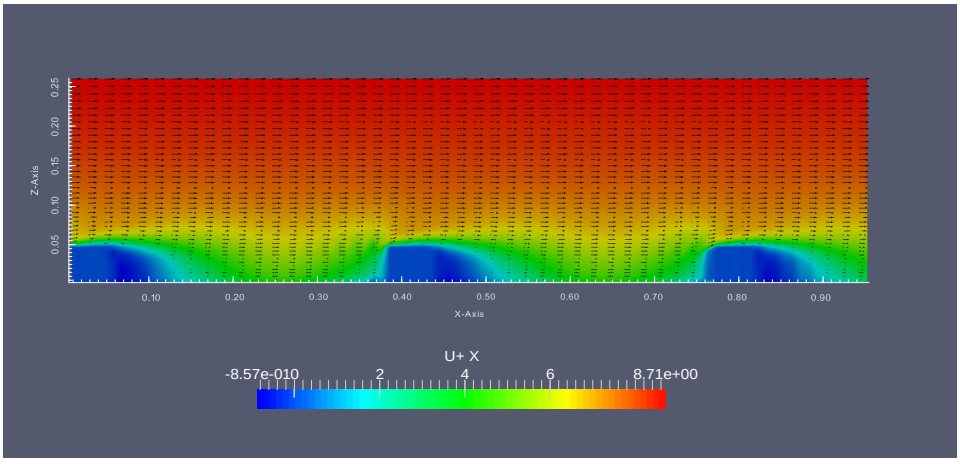
Figura 5.7: Perfiles de σ_u/u^*, σ_v/u^* y σ_w/u^* en altura.

5.4. La subcapa rugosa.

En esta sección se analiza el campo de velocidades en la subcapa rugosa. La figura 5.8a muestra el campo de velocidad media en un plano vertical paralelo al sentido del flujo que pasa por el centro de una fila de cubos. En ambas figuras (CLIM46 y CLIM49) se advierte una burbuja de recirculación del tamaño de un cubo inmediatamente aguas abajo de cada cubo, donde la velocidad registra valores negativos aunque muy bajos (menos de 2 $^{m}/_{s}$). De igual manera es evidente una capa a aproximadamente 0,06 cm donde se produce un gradiente pronunciado de velocidad media, por debajo de esta la velocidad registra valores inferiores a 4 $^{m}/_{s}$.



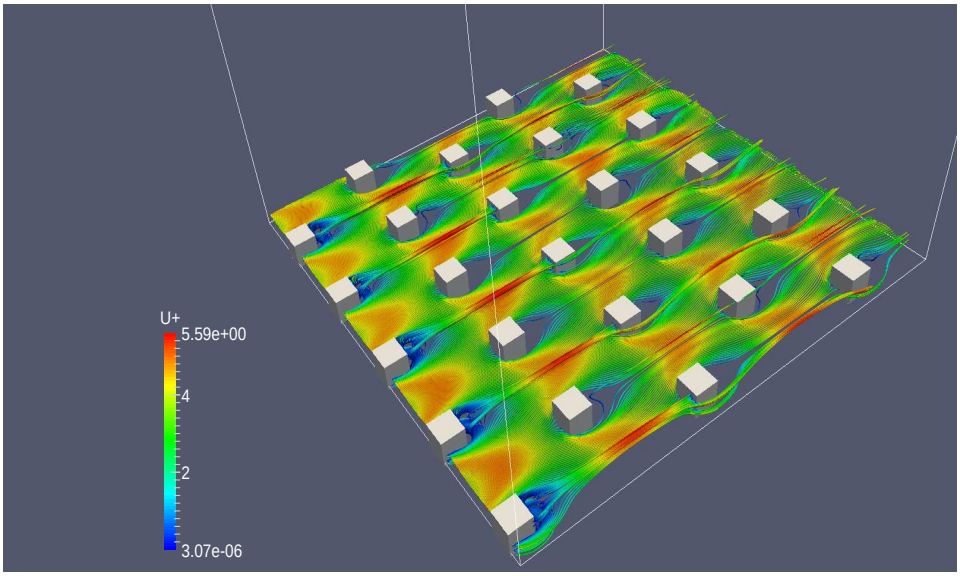
(a) CLIM46



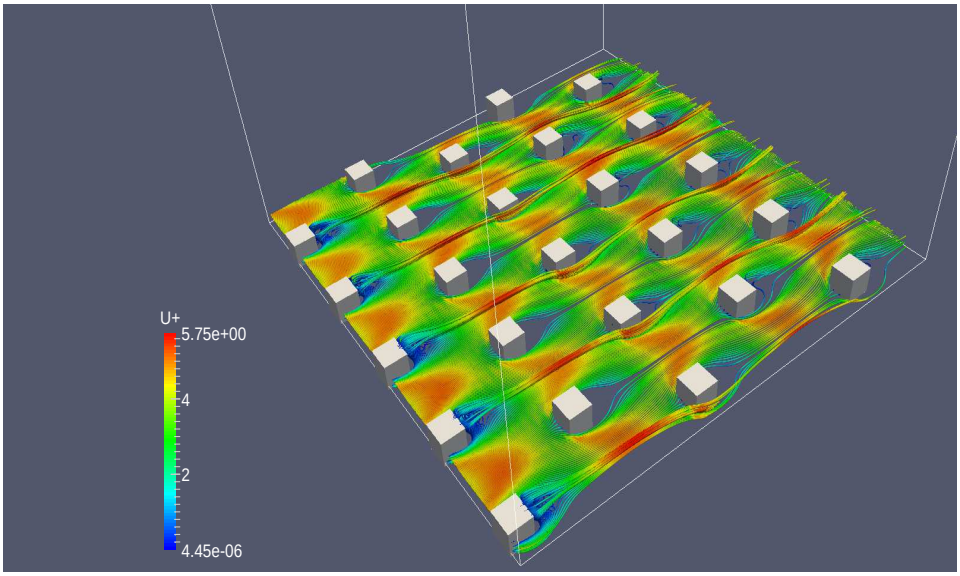
(b) CLIM49

Figura 5.8: Velocidad media en el plano meridional a una fila de cubos.

Las figuras 5.9 muestran lineas de flujo que nacen a una altura $z = 0{,}03$ cm, entre los cubos. Estas figuras permiten ver el correcto desempeño del código en resolver el campo de velocidad medio en torno a los cubos, al menos de forma cualitativa. Se puede ver la formación de vórtices gemelos verticales en la burbuja inmediatamente posterior a los cubos, ademas de la contracción que se produce entre estos.



(a) CLIM46

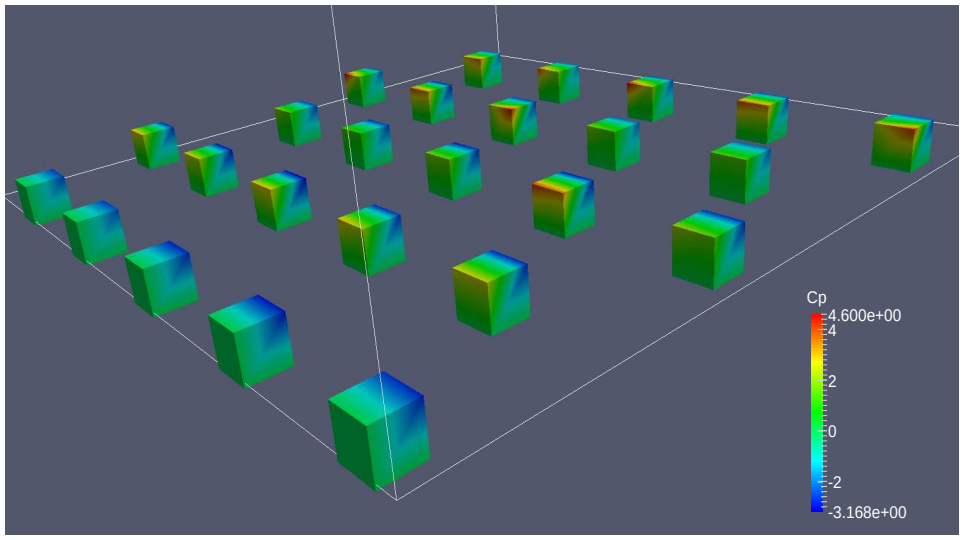


(b) CLIM49

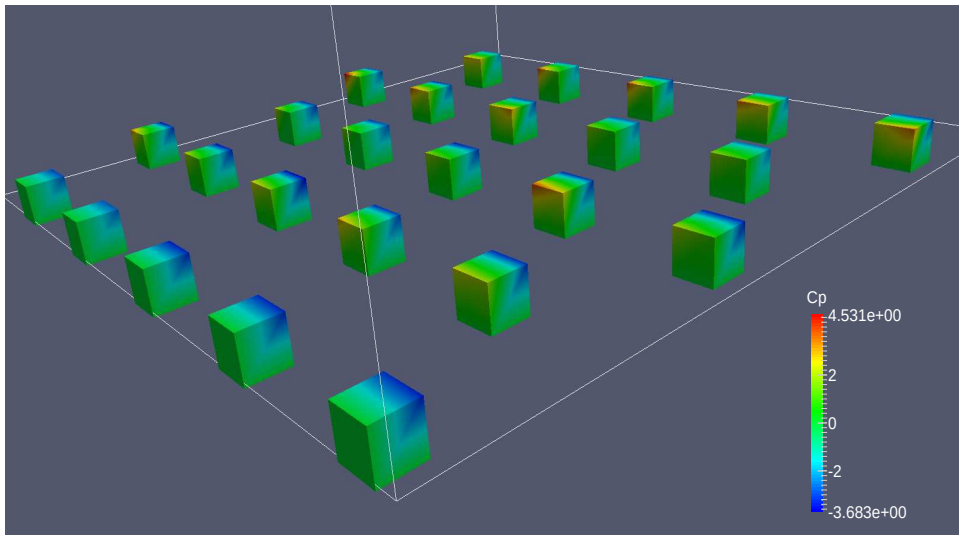
Figura 5.9: Lineas de flujo en la subcapa rugosa.

El campo de presión que se establece sobre los cubos se puede ver en la

figura 5.10. Se aprecia que los valores mas altos se dan en la parte superior de la cara frontal de los cubos, tal como se esperaba. Los valores menores se dan en la cara posterior en la zona superior. Los valores mínimos de presiones se deberían dar en las caras laterales sobre las aristas que limitan con la cara frontal. Este efecto no se capta porque la grilla es muy gruesa y no se resuelve el desprendimiento de capa límite que se registra en esa zona. Los coeficientes de presión ($c_p = \frac{P}{\rho u^{*2}}$) alcanzan valores que van desde 4.6 a -3.2 en CLIM46 registrándose valores similares en CLIM49.



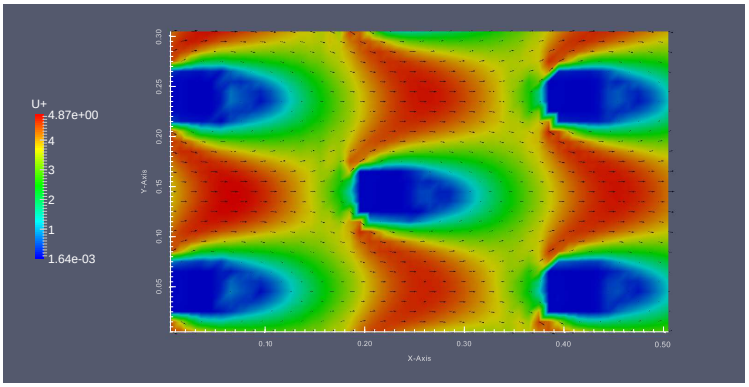
(a) CLIM46



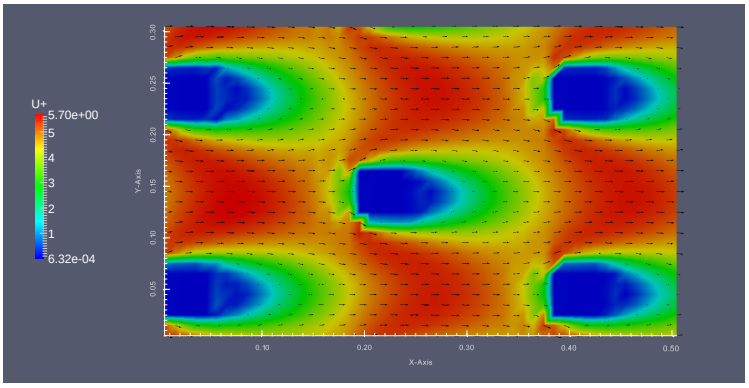
(b) CLIM49

Figura 5.10: Coeficientes de presión sobre los obstáculos.

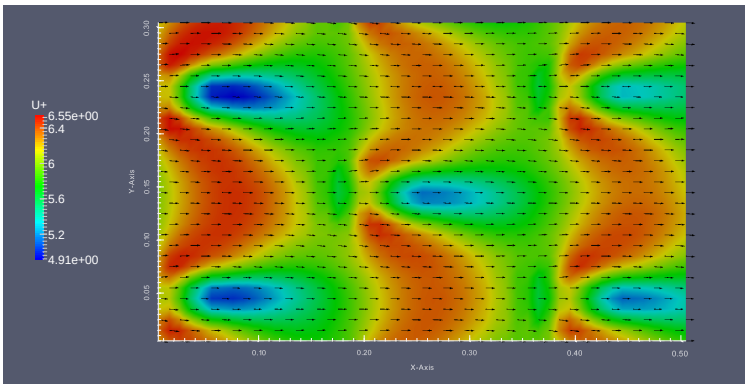
Las figuras 5.11 y 5.12 muestran el campo de velocidad media en planos horizontales a alturas $z = 0{,}02$, 0,04, 0,06 y 0,08 m. Donde se ve un comportamientos parecido al registrado en las figuras 5.9a y 5.9b.



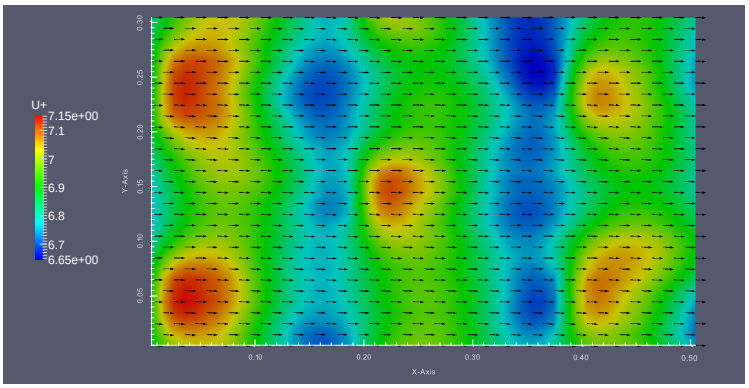
(a) z=0.02m



(b) z=0.04m

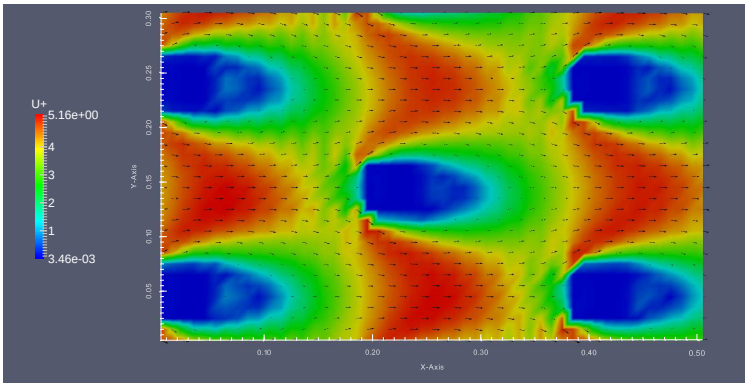


(c) z=0.06m

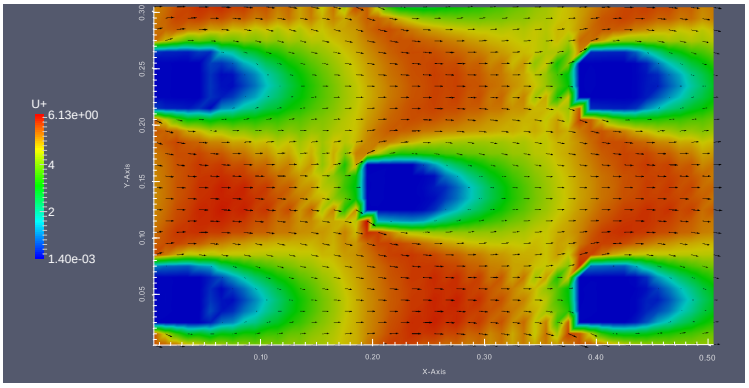


(d) z=0.08m

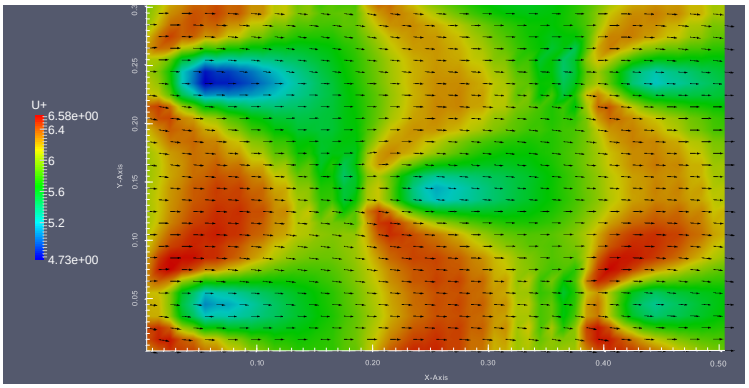
Figura 5.11: Velocidad media en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM46



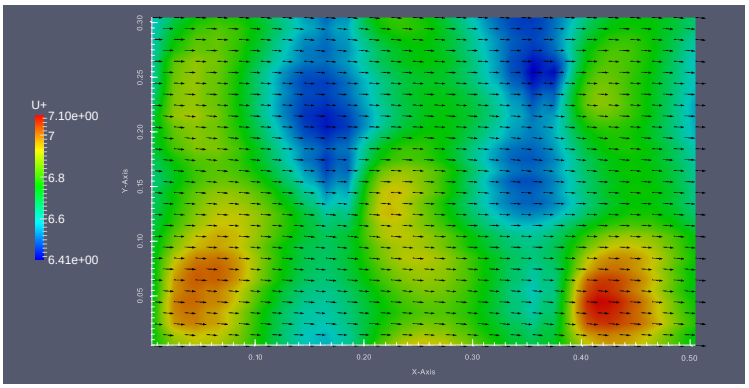
(a) z=0.02m



(b) z=0.04m



(c) z=0.06m



(d) z=0.08m

Figura 5.12: Velocidad media en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM49

5.5. Producción y disipación energía cinética turbulenta.

La figura 5.13 muestra el perfil de producción de energía cinética turbulenta promediada en cada plano horizontal en azul y la disipación en rojo, ambos adimensionados con u^* y h. O sea $\varepsilon^* = \frac{h\varepsilon}{u^{*3}}$ y $\mathcal{P}^* = -\frac{h\mathcal{P}}{u^{*3}}$.

A primera vista es evidente que el valor máximo de la producción se da justo encima de los obstáculos, lo cual es coherente con lo que se espera ver. Por debajo de la altura de los obstáculos el tensor de deformación medio tiene componentes debido a las derivadas de la velocidad media en todas las direcciones que son del mismo orden. Por encima de la altura de los obstáculos la derivada que domina es $\frac{dU}{dz}$ y el tensor de tensiones turbulento es dominado por las tensiones horizontales que son lineales en altura. Entonces la producción en una zona superior a, digamos, $2h$ se puede aproximar por $\mathcal{P} \approx \tau \frac{dU}{dz}$, y como

$$\left.\begin{array}{c} \frac{dU}{dz} = \frac{u^*}{\kappa Z} \\ \tau = \tau_w \left(1 - \frac{Z}{\delta}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{P} \approx -\frac{\tau_w u^*}{\kappa Z}\left(1 - \frac{Z}{\delta}\right) \Rightarrow \mathcal{P}^* \approx \frac{h/\delta}{\kappa}\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$$

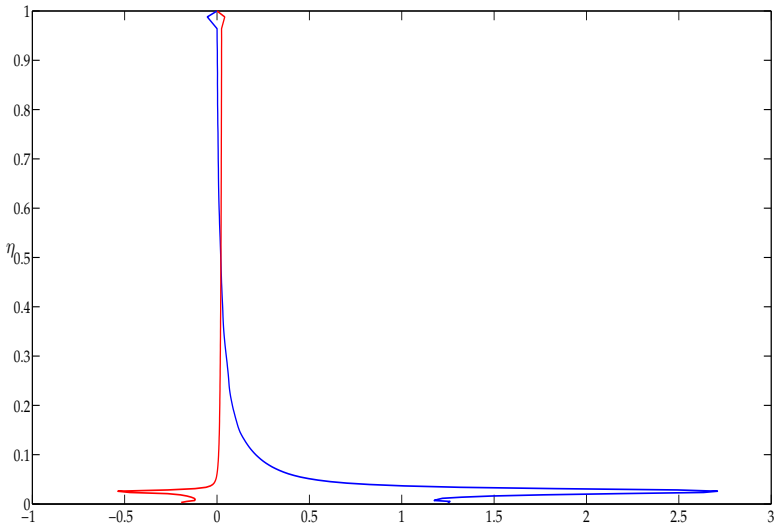
lo cual se verifica.

La disipación es mucho más difícil de estimar, y en general se estima a partir de la producción en las zonas donde se puede asumir equilibrio. En la zona logarítmica la experiencia muestra que la producción y la disipación deben estar en equilibrio, o sea, ser iguales. Es evidente, por lo observado en las figuras 5.13, que esto no se cumple en ninguna de las simulaciones efectuadas. Aunque para que el balance de energía cinética turbulenta sea completo, falta mostrar los términos de transporte turbulento y convectivo, es conocido que estos solo son significativos en la subcapa rugosa, lo cual hace pensar que el balance de energía cinética turbulenta no se cumple. Esto es difícil de entender, ya que la energía que se produce debe ir a algún lado ya que si esto no sucede, se estaría acumulando, lo cual no sucede. O sea que en las simulaciones la energía producida se disipa de alguna manera. Una alternativa que explicaría este problema, es que el término de disipación calculado a partir de la viscosidad turbulenta no toma en cuenta toda la disipación que introduce el modelo. Esto puede deberse a que este

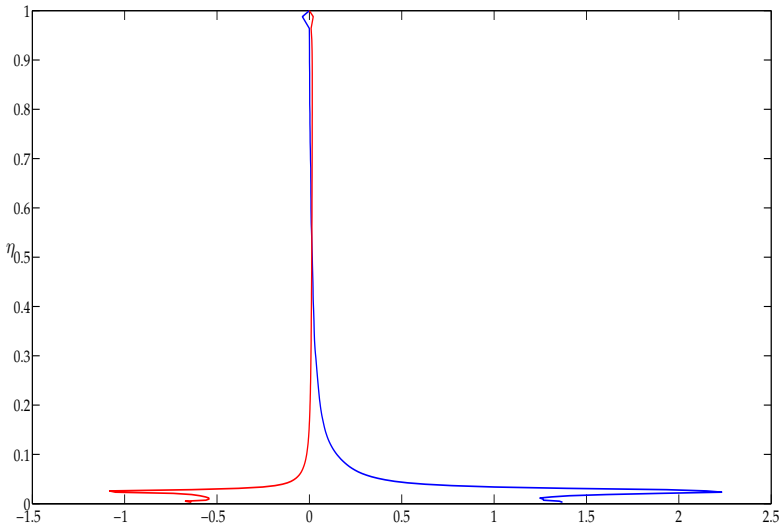
introduce una viscosidad numérica debido a los esquemas de discretización utilizados que actúa disipando energía que no se tiene en cuenta en los cálculos. Por otro lado, puede apreciarse que en la simulación CLIM49 (ver figura 5.13b) la disipación calculada es notoriamente mayor a la calculada en la simulación CLIM46 (ver figura 5.13a). La simulación CLIM46 se hizo con un coeficiente de blending de 0,7 y la CLIM49 con 0,95. Cuando el valor del coeficiente de blending es mayor, el esquema es menos disipativo, y, por lo tanto, la viscosidad que introduce el modelo de tensiones residuales actúa en mayor medida y como resultado la disipación calculada aumenta. En resumen, en base a lo discutido previamente, se sospecha que el modelo introduce una viscosidad numérica elevada. Esto traería como consecuencia que el modelo de subgrilla no estaría actuando como tal y no se tendría control sobre el "modelo"de subgrilla que realmente se está utilizando.

La distribución horizontal de la producción en distintos planos horizontales en la subcapa rugosa se muestran en las figuras 5.14 y 5.15. Los máximos en la producción se dan más o menos en la misma posición que los máximos de las tensiones rasantes horizontales. Un aspecto interesante que se encuentra es la existencia de valores negativos de la producción. A este efecto se le conoce en inglés como "backscatter", y ocurre cuando la energía cinética turbulenta fluye desde escalas menores a escalas mayores. En este caso, el flujo turbulento alimenta localmente al flujo medio. Este efecto no se puede reproducir en los modelos RANS de viscosidad turbulenta ya que al modelar el tensor turbulento como una viscosidad turbulenta (positiva) por el tensor de deformación medio, la producción siempre resulta positiva en todo momento y lugar.

Las figuras 5.16 y 5.17 muestran la disipación en planos horizontales a diferentes alturas en la subcapa rugosa. Aunque por lo planteado anteriormente los valores pueden estar sujetos a errores importantes, se cree que representa razonablemente el comportamiento cualitativo de la disipación.

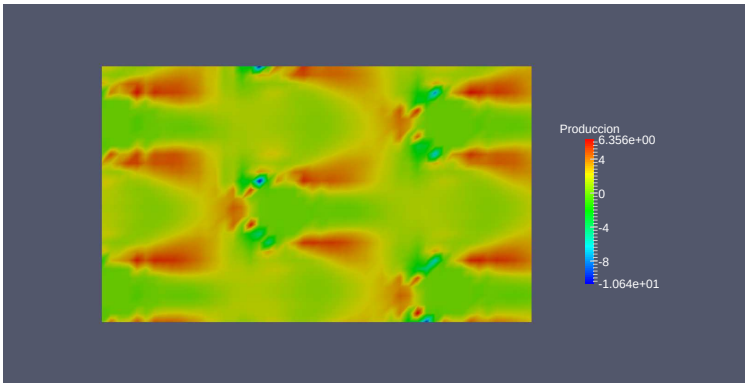


(a) CLIM46

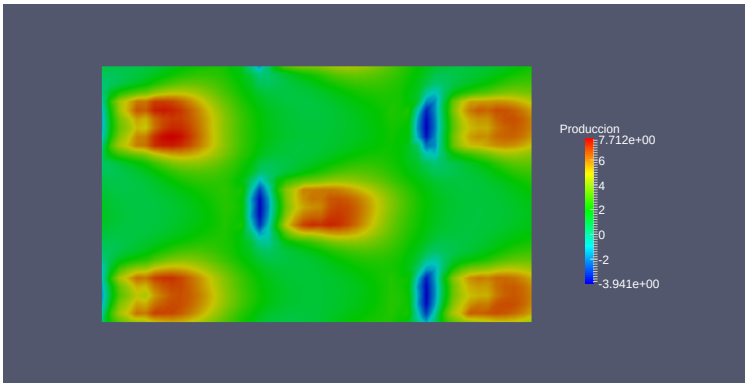


(b) CLIM49

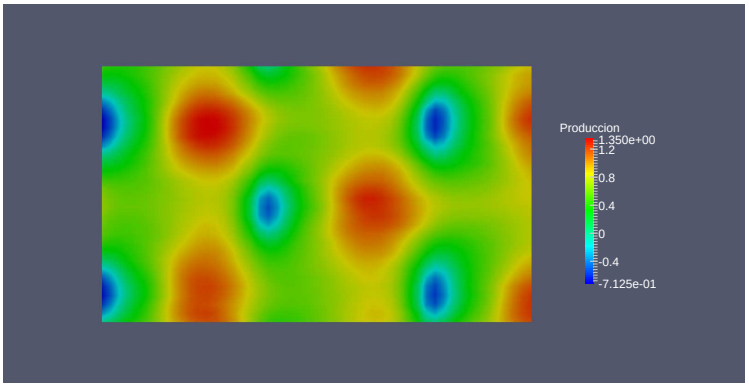
Figura 5.13: Producción y disipación de energía cinética turbulenta en altura.



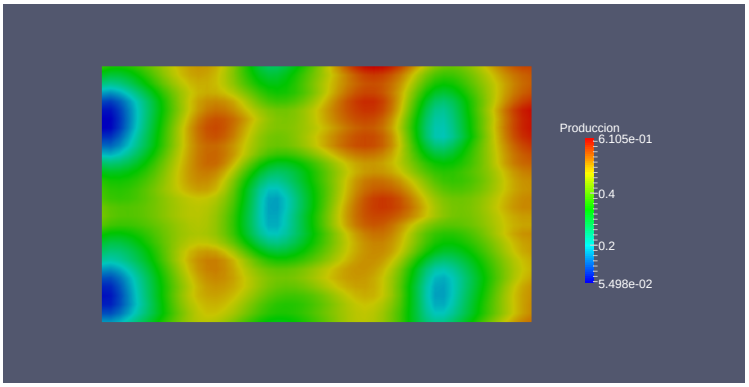
(a) z=0.03m



(b) z=0.06m

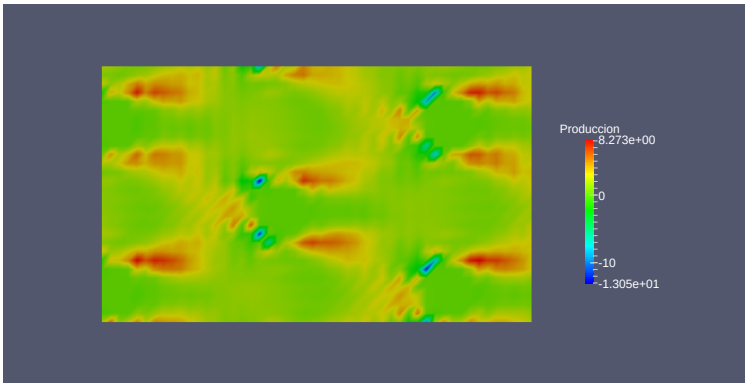


(c) z=0.09m

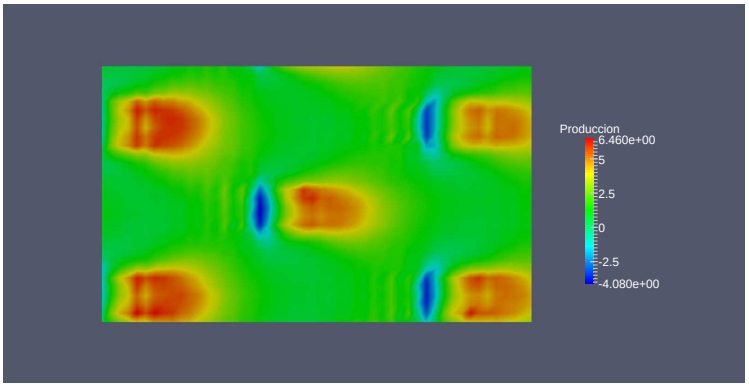


(d) z=0.12m

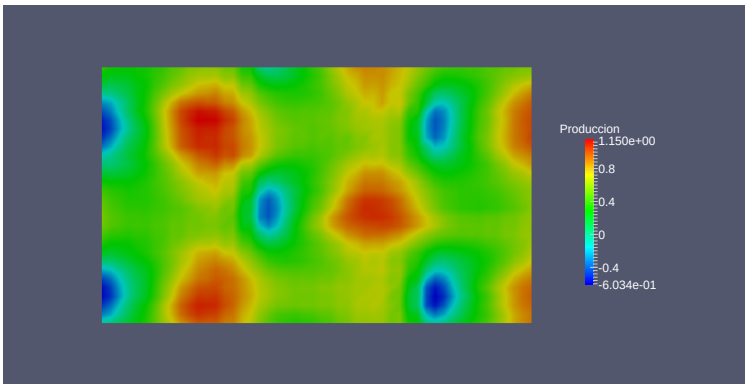
Figura 5.14: Producción de energía cinética turbulenta en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM46



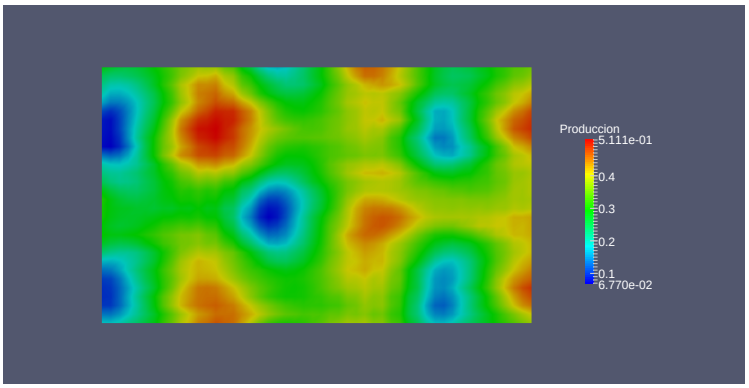
(a) z=0.03m



(b) z=0.06m

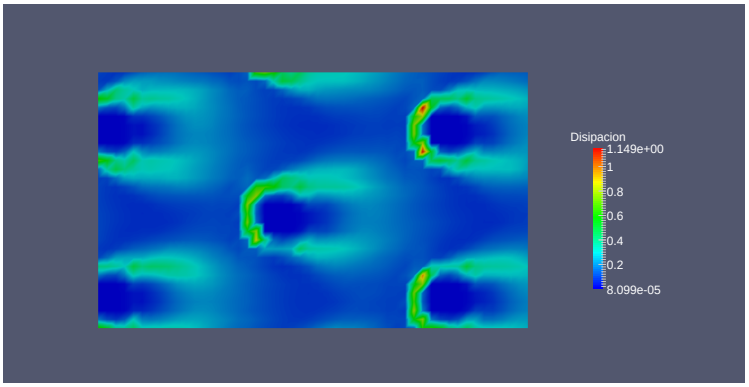


(c) z=0.09m

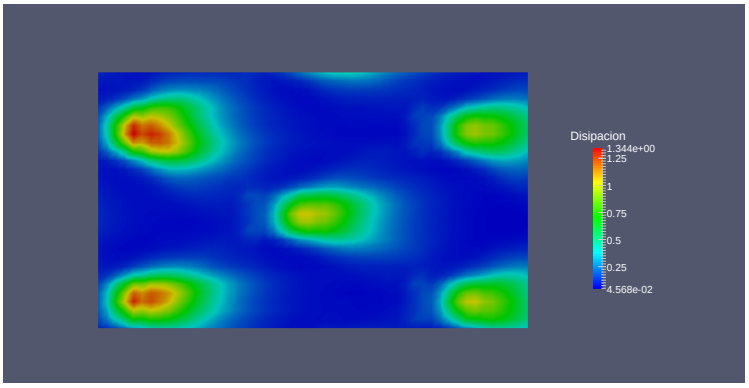


(d) z=0.12m

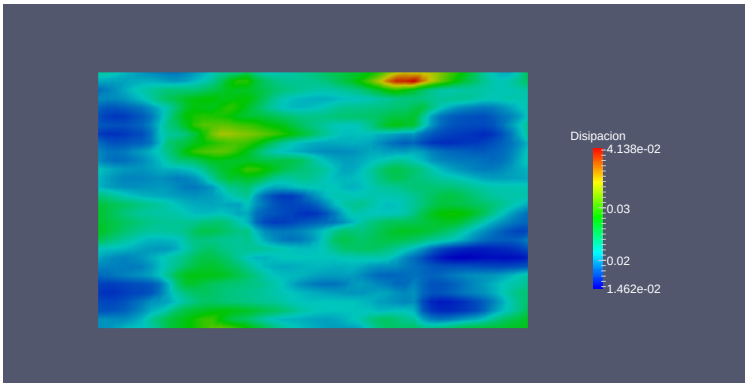
Figura 5.15: Producción de energía cinética turbulenta en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM49



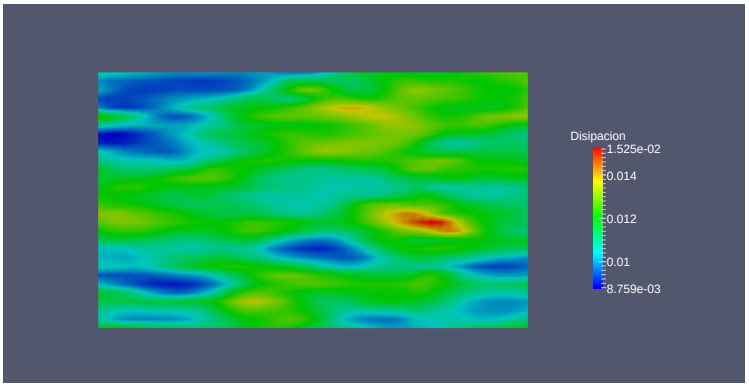
(a) z=0.03m



(b) z=0.06m

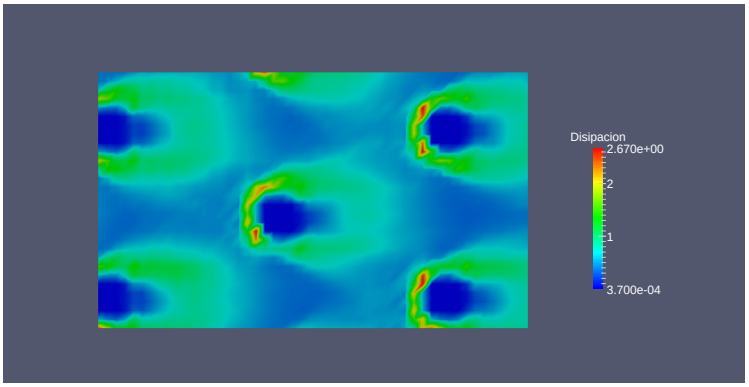


(c) z=0.09m

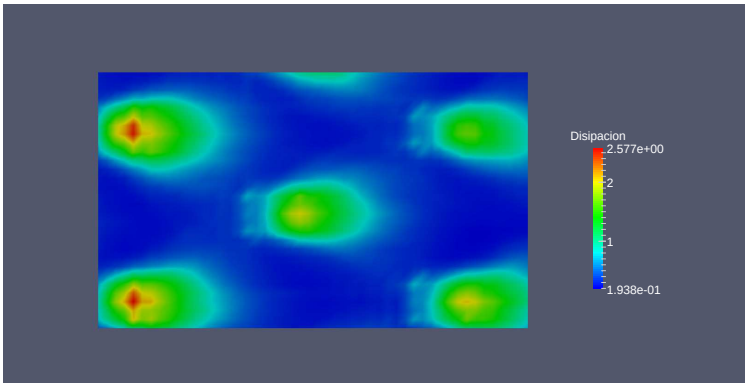


(d) z=0.12m

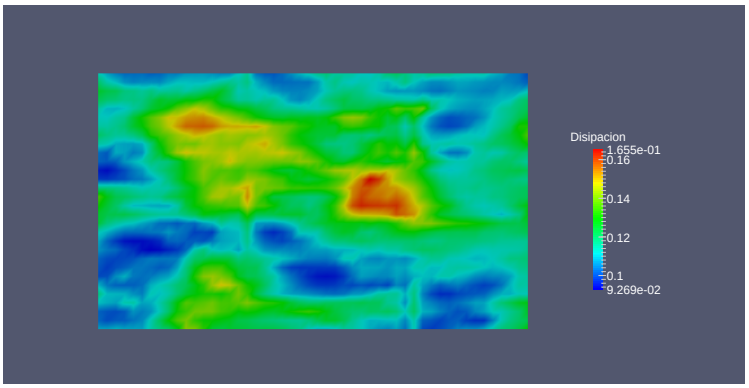
Figura 5.16: Disipación de energía cinética turbulenta en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM46



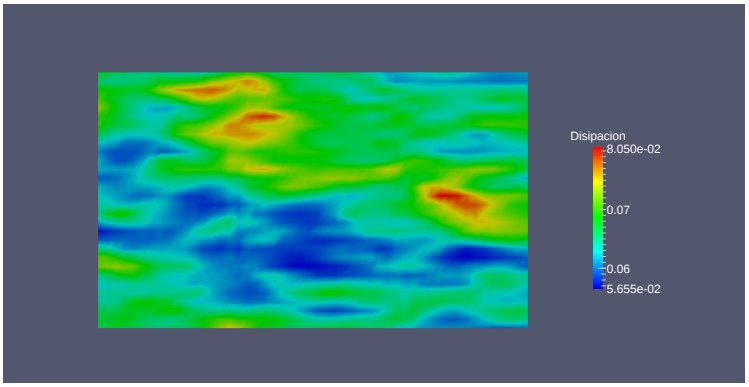
(a) z=0.03m



(b) z=0.06m



(c) z=0.09m



(d) z=0.12m

Figura 5.17: Disipación de energía cinética turbulenta en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM49

5.6. Correlaciones, escalas y espectros

En las figuras 5.19 y 5.20 se presenta, a diferentes alturas, las funciones de correlación, calculadas de la siguiente manera:

$$\rho_{11}(\Delta L, z) = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L u'(x,y,z,t_i)\,u'(x+\Delta L,y,z,t_i)\,dxdy}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L u'(x,y,z,t_i)^2\,dxdy}$$

$$\rho_{22}(\Delta L, z) = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L v'(x,y,z,t_i)\,v'(x,y+\Delta L,z,t_i)\,dxdy}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L v'(x,y,z,t_i)^2\,dxdy}$$

donde las sumas se hacen en los pasos temporales en los que se guarda los campos, es decir cada 2 segundos y L es la dimensión del dominio en la dirección x e y (son iguales).

Es evidente el efecto de la periodicidad impuesta en las paredes. La correlación se pierde en la medida que ΔL aumenta hasta un mínimo que se da en $\Delta L = {}^{L}/_{2}$ para luego crecer. En valores de z bajos (dentro de la subcapa rugosa) se aprecia el efecto de la presencia de los cubos, generando una correlación que crece y decrece de forma periódica con un período de $0{,}384m$ que es la distancia entre los cubos en la dirección del flujo. En las correlaciones ρ_{11} se registran valores mínimos más bajos en la simulación CLIM49 que en la CLIM46 aunque es una diferencia mínima. Que el valor absoluto mínimo de la correlación en $\Delta L = {}^{L}/_{2}$ sea lo más bajo posible es una condición deseable ya que indica que se tiene un tamaño de dominio que permite que las estructuras del flujo se desarrollen libremente sin restricciones impuestas por la condición de periodicidad. En ρ_{22} se ven resultados similares. Es claro que en CLIM49 la correlación en $\Delta L = {}^{L}/_{2}$ es claramente menor en valor absoluto que en la simulación CLIM46. Además, se puede ver el efecto de periodicidad en la correlación generado por la presencia de los obstáculos, en este caso el periodo es de $0{,}192m$ que coincide con la distancia transversal entre los cubos.

Las escalas integrales L_{11} y L_{22} calculadas en base a las correlaciones ρ_{11} y ρ_{22} mediante las expresiones

$$L_{11} = \int_0^{L/2} \rho_{11}(\Delta L, z)\, d\Delta L$$

y

$$L_{22} = \int_0^{L/2} \rho_{22}(\Delta L, z)\, d\Delta L$$

son presentadas en las figuras 5.21 y 5.22.

La escala integral crece con la altura en una manera aproximadamente potencial hasta cierta altura en la que comienza a decrecer [Counihan, 1975]. Las fórmulas que se tienen para calcular la escala integral son derivadas de datos meteorológicos y están expresadas en forma dimensional. Se usará la relación dada en Simiu and Scanlan [1996]

$$L_{11} = Cz^m \tag{5.1}$$

donde las constantes C y m dependen de z_o y se estiman usando el ábaco de la figura 5.18.

El ábaco de la figura 5.18 es válido en un rango de $0{,}01 < z_o < 10$, de manera que los valores hallados de z_o para ambas simulaciones no están contemplados. Para salvar esta dificultad se hallará la escala de longitud a la que estas simulaciones representan un flujo atmosférico y se comparará el z_o que surge de este análisis con el que surge de ajustar la velocidad.

Si se tiene dos capas límite que se llamaran prototipo y modelo y se denota con los subindices p y m, para que se de una similitud entre ellas se debe tener la misma escala de longitud en L_{11} que en z. Entonces

$$\left.\begin{array}{l} L_{p11} = C_p z_p^{m_p} \\ L_{m11} = C_m z_m^{m_m} \\ e_L = \frac{z_p}{z_m} = \frac{L_{p11}}{L_{m11}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{L_{p11}}{L_{m11}} = e_L = \frac{C_p (e_L z_m)^{m_p}}{C_m z_m^{m_m}} \Rightarrow 1 = \frac{C_p e_L^{m_p - 1}}{C_m} z_m^{(m_p - m_m)}$$

O sea que para que se dé la similitud se debe cumplir

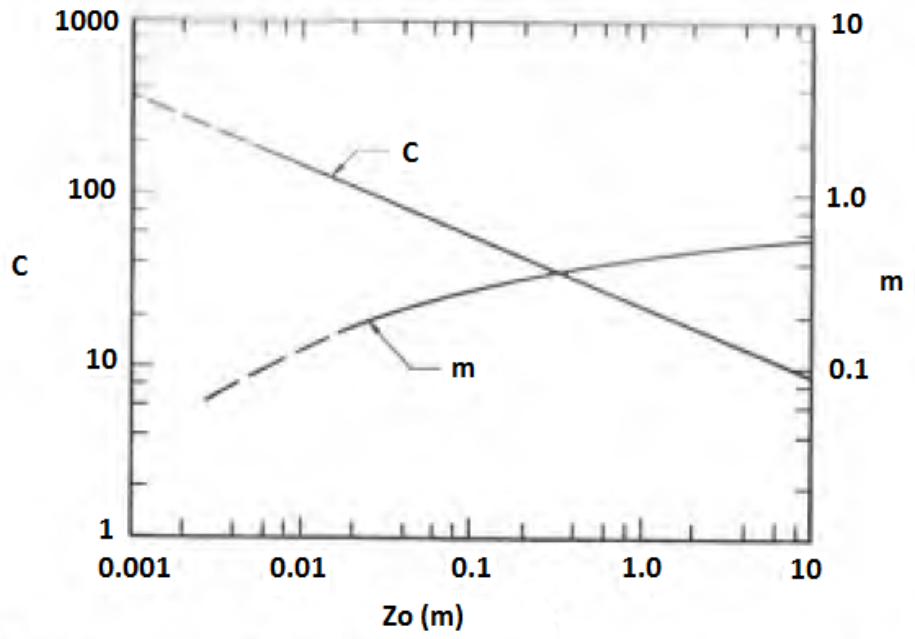


Figura 5.18: Valores de C y m en función de Z_o. Sacado de [Simiu and Scanlan, 1996]

$$m_p = m_m$$

y

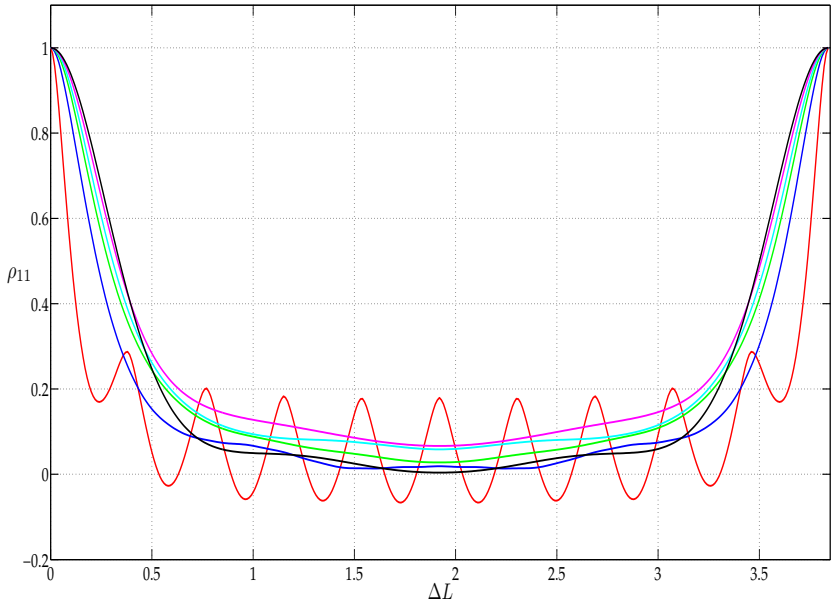
$$C_p = C_m e_L^{1-m_p}$$

De un ajuste de la ecuación 5.1 en los valores de L_{11} en la simulación CLIM46 en $\eta < 0{,}25$, se obtienen $C_m = 0{,}68$ y $m_m = 0{,}38$. Como $m_m = m_p$, entonces $m_p = 0{,}38$. Entrando con este valor en el ábaco de la figura 5.18 se encuentra un valor de $z_{op} = 0{,}06m$ y $C_p = 22$. La escala de longitudes es

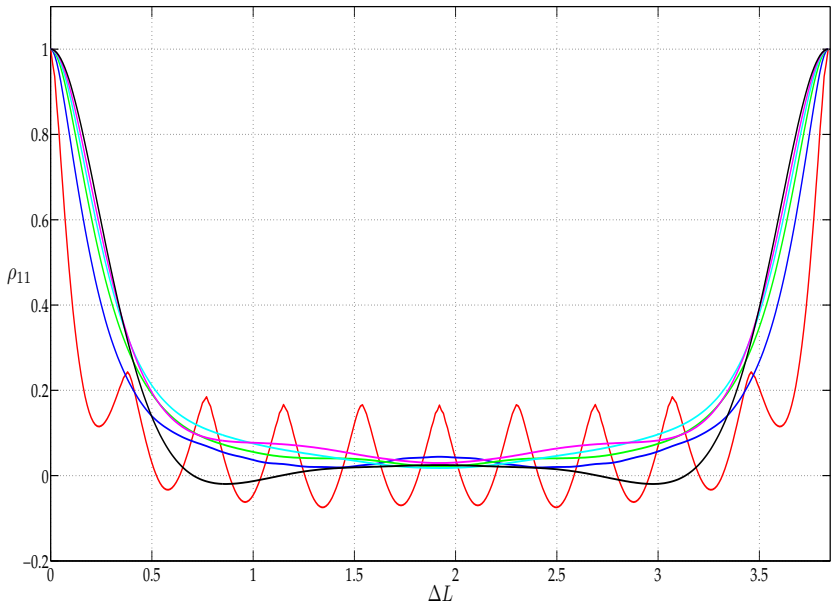
$$e_L = \left(\frac{C_p}{C_m}\right)^{\frac{1}{1-m_p}} = 272$$

por lo tanto $z_{om} = \frac{z_{op}}{e_L} = 2{,}0 \cdot 10^{-4}$ m. Se recuerda que el valor de z_o hallado ajustando la velocidad es $z_o = 5{,}1 \cdot 10^{-4}$ m, lo cual es una buena concordancia. El mismo análisis para los valores obtenidos en la simulación CLIM49 resultan en un valor de $z_{om} = 1{,}9 \cdot 10^{-4}$ m.

En las figuras 5.23, 5.24, 5.25 y 5.26 se presentan espectros de la componente fluctuante de la velocidad u' y v' en las simulaciones CLIM46 y CLIM49. Los espectros a $z = 0{,}052m$ muestran una serie de picos que están claramente relacionados con la presencia de las cubos. El hecho más importante que muestran los espectros es que no se registra la presencia del rango inercial, salvo en el espectro de v' a $z = 0{,}052m$. En todos los otros casos el espectro decae con κ^m siendo $m < -5/3$. Este comportamiento presenta una gran dificultad: el modelo de tensiones residuales usado se basa en que se resuelve el flujo a escalas que permiten apreciar el rango inercial, lo cual no sucede. Si no se llega a resolver el rango inercial, la hipótesis de que las tensiones residuales se pueden modelar con un solo parámetro (ν_r) pierde validez. Esto sugiere que se está haciendo una simulación VLES (Very Large Eddy Simulation). Las causa no parece ser que la malla elegida sea muy gruesa, ya que los espectros decaen mucho antes de llegar al κ_{max}. En cambio este comportamiento refuerza la idea de la presencia de una viscosidad numérica que actúa disipando energía a una escala mucho mayor, tal como se intuyó en la subsección 5.5.

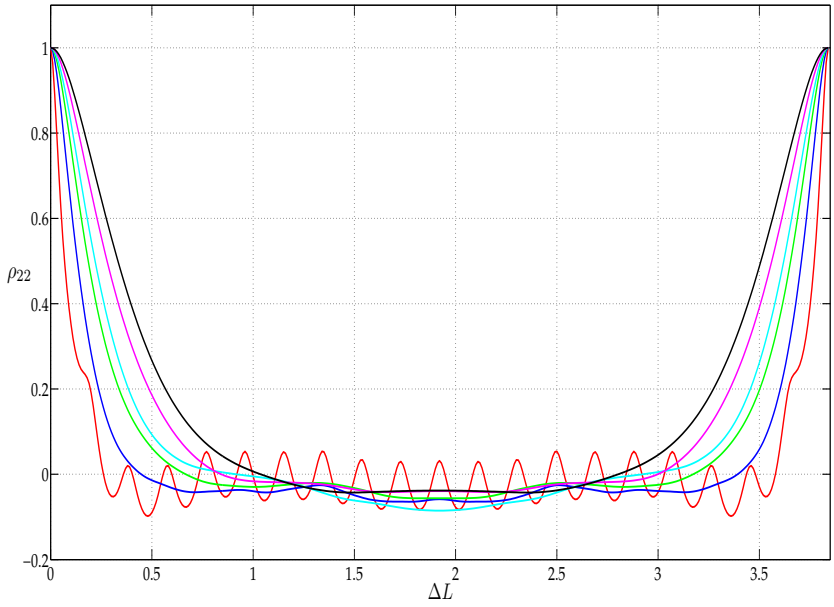


(a) CLIM46

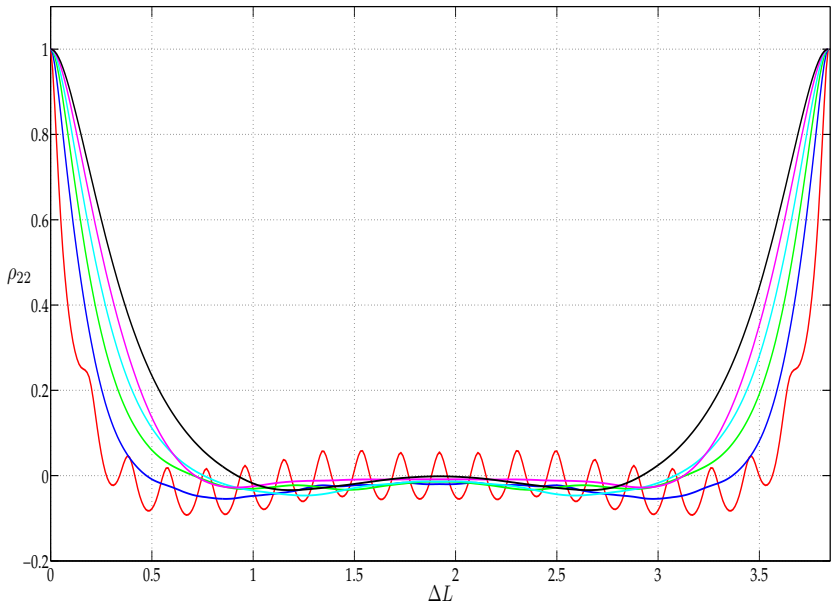


(b) CLIM49

Figura 5.19: Correlación de u'.

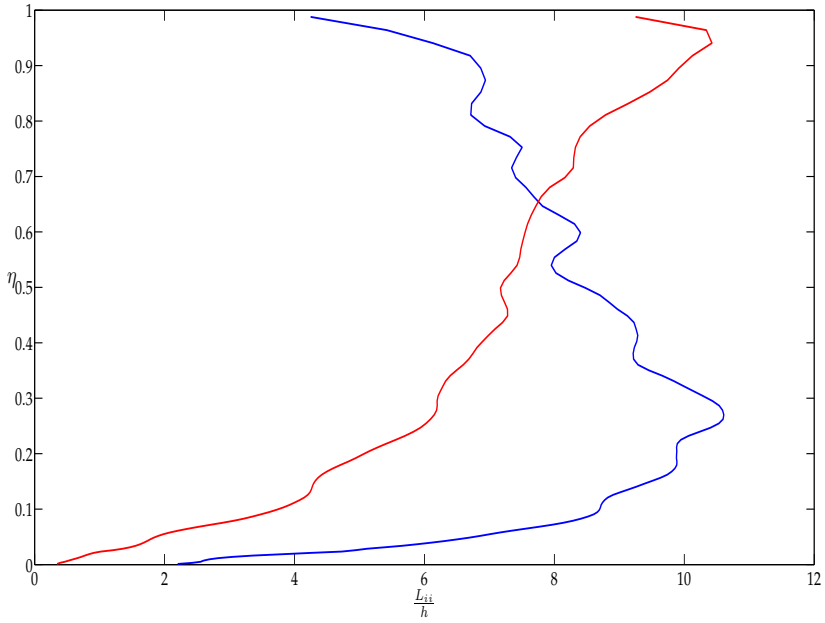


(a) CLIM46

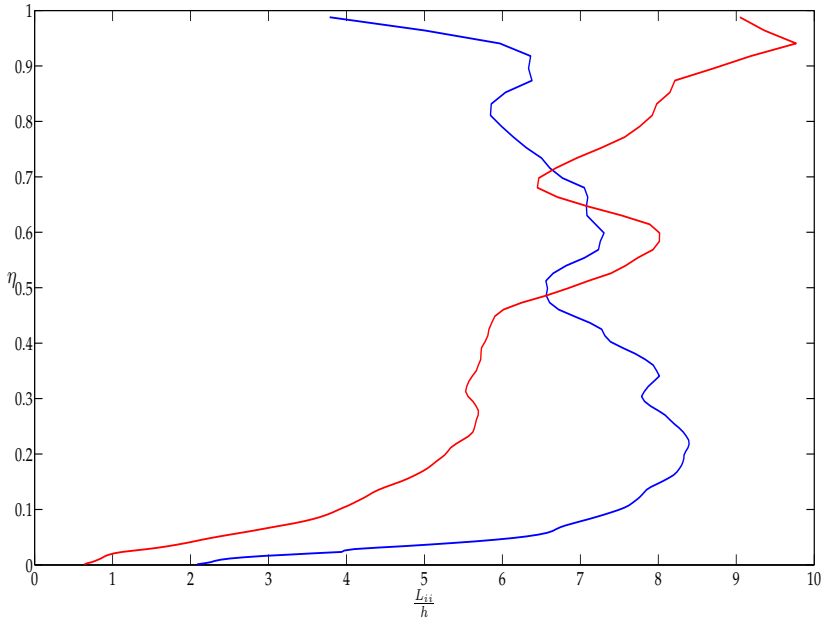


(b) CLIM49

Figura 5.20: Correlación de v'.

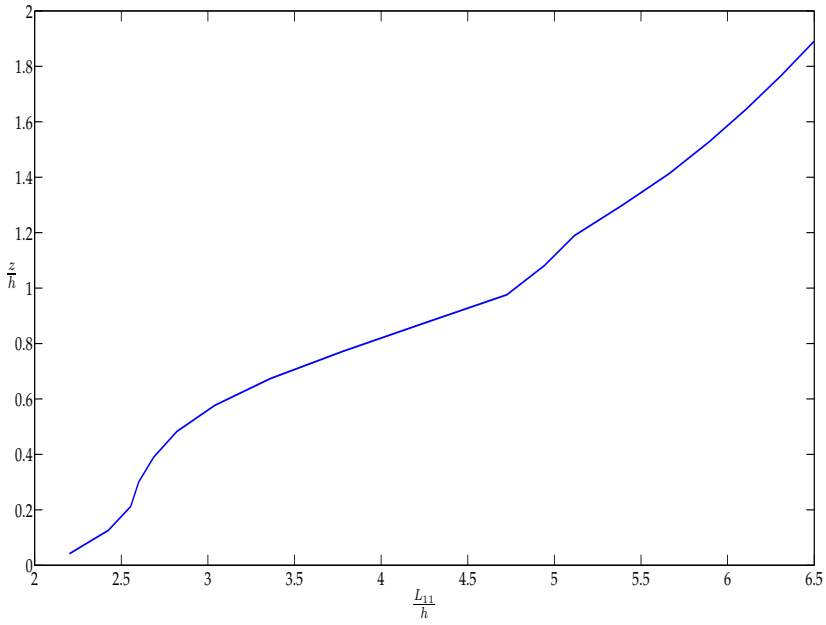


(a) CLIM46

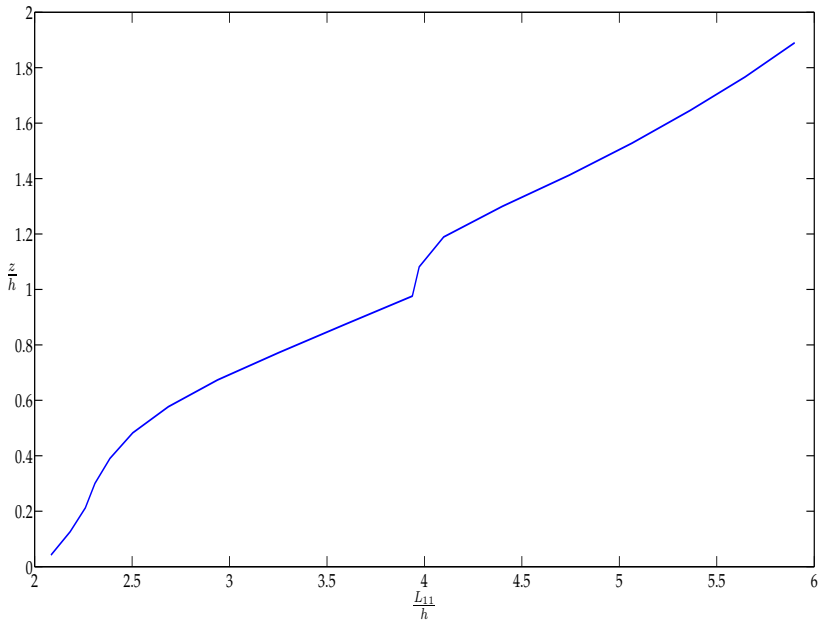


(b) CLIM49

Figura 5.21: Escala integral longitudinal L_{11} en altura.

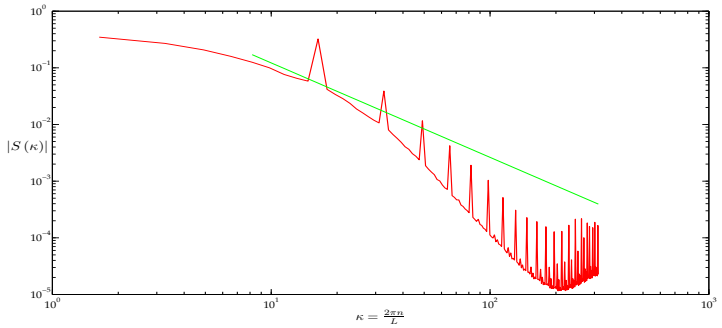


(a) CLIM46

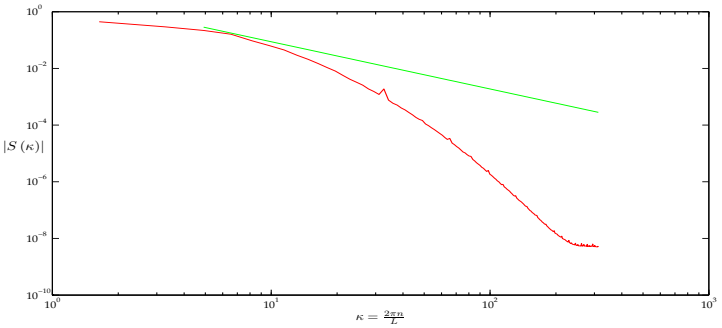


(b) CLIM49

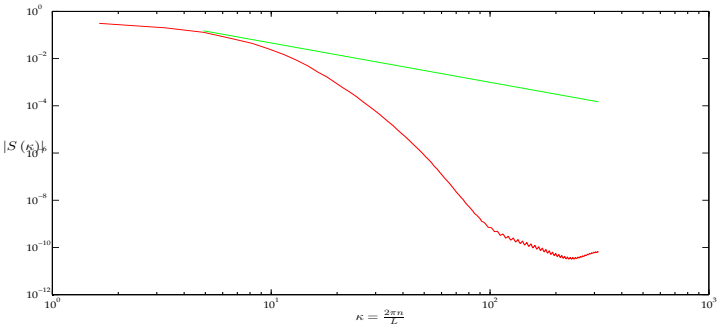
Figura 5.22: Escala integral longitudinal L_{11} en altura en la subcapa rugosa.



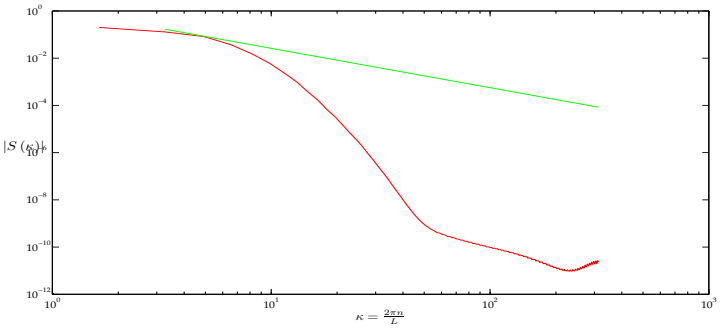
(a) z=0.052m



(b) z=0.103m

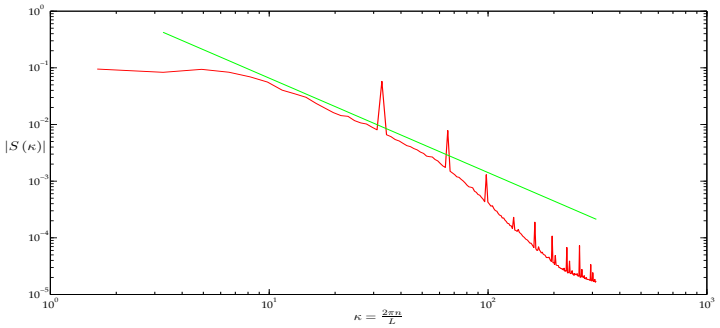


(c) z=0.302m

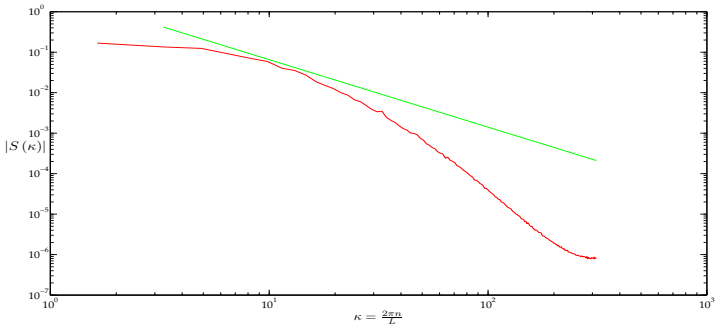


(d) z=0.998m

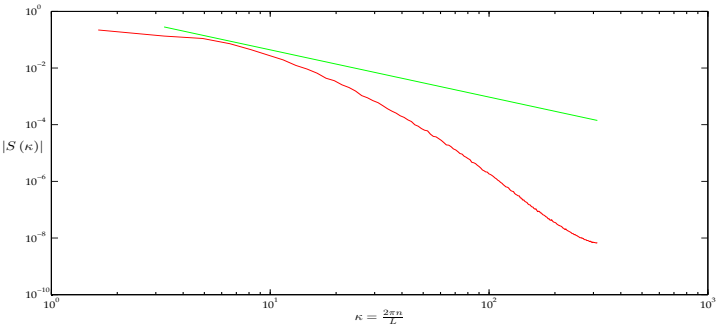
Figura 5.23: Espectros de u' a diferentes alturas. CLIM46



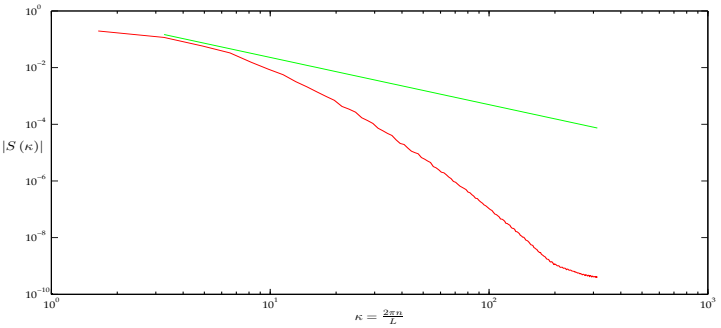
(a) z=0.052m



(b) z=0.103m

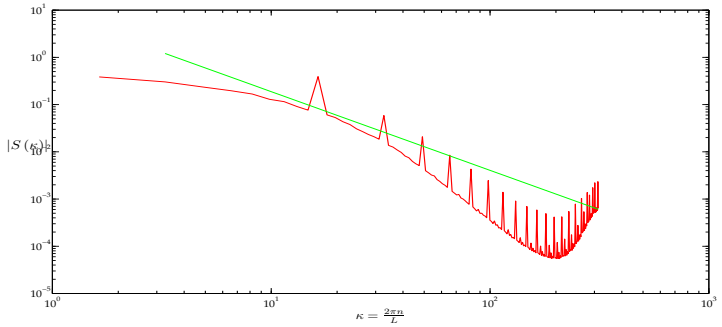


(c) z=0.302m

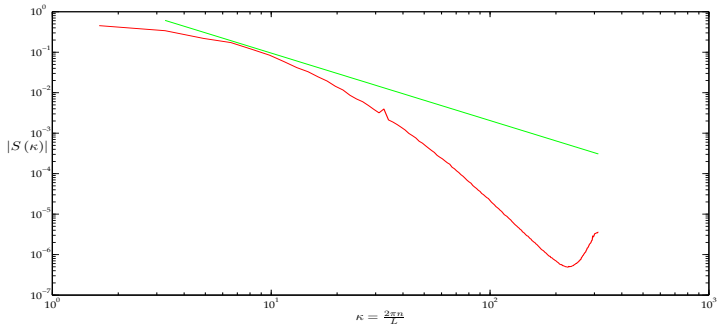


(d) z=0.998m

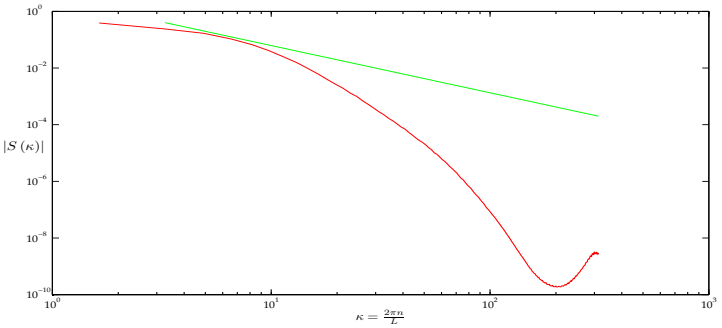
Figura 5.24: Espectros de v' a diferentes alturas. CLIM46



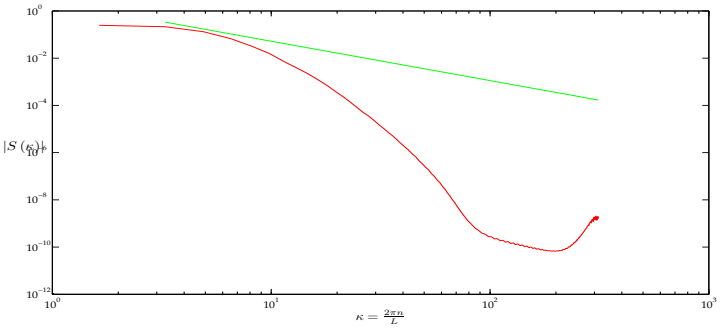
(a) z=0.052m



(b) z=0.103m

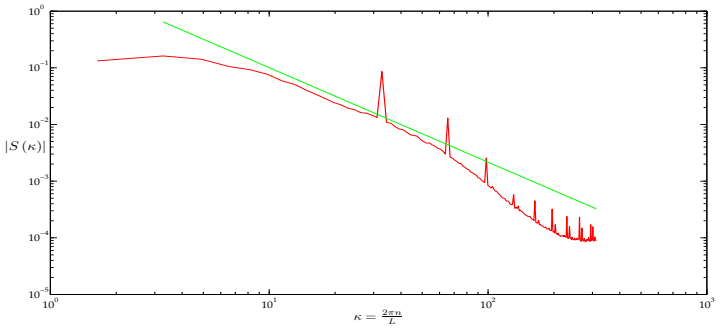


(c) z=0.302m

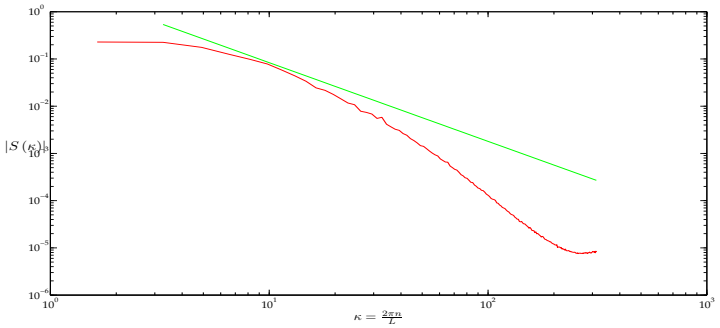


(d) z=0.998m

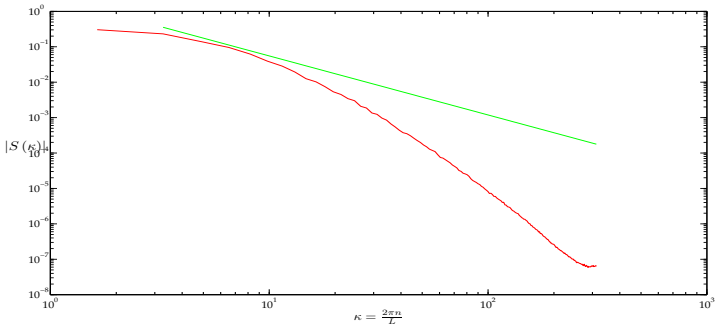
Figura 5.25: Espectros de u' a diferentes alturas. CLIM49



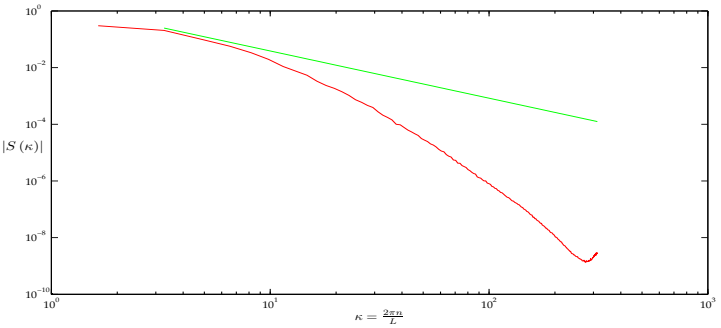
(a) z=0.052m



(b) z=0.103m



(c) z=0.302m



(d) z=0.998m

Figura 5.26: Espectros de v' a diferentes alturas. CLIM49

Capítulo 6

Conclusiones

En el marco de esta tesis, se revisó la teoría clásica de capa límite y flujo en un canal tanto en superficies aerodinámicamente lisas como rugosas. De la misma manera, se realizó un acercamiento a los modelos disponibles para simular flujos turbulentos. Desde los modelos más simples algebraicos de cero ecuación hasta la simulación de grandes vórtices pasando por los modelos de una y dos ecuaciones más utilizados.

El trabajo de tesis consistió en simular numéricamente una capa límite sobre una superficie rugosa mediante el método de grandes vórtices. Se usa un dominio prismático con condiciones de borde periódicas en las fronteras laterales, adherencia en la superficie inferior y simetría en la superior. Se realizaron simulaciones preliminares para determinar las dimensiones adecuadas del dominio. Para esto se tomó en cuenta que el valor de la correlación de la velocidad cayera para alguna distancia a un valor cercano a cero. Se registró la presencia de dos vórtices de eje horizontal persistentes bidimensionales cuando las paredes laterales se encuentran a una distancia menor a $2m$. Al aumentar la distancia se elimina este problema. Finalmente, se eligió un dominio de $3{,}84m \quad x \quad 3{,}84m$ de base con $2m$ de altura. Las dimensiones de la rugosidad se eligieron de manera de que sea posible tener una región logarítmica, que se maximice la relación z_o/h y, además, que la malla en la subcapa rugosa pueda ser lo suficientemente gruesa de modo de minimizar los requerimientos de cómputo. La rugosidad usada son cubos de $0{,}048m$ de lado ubicados en tresbolillo sobre la superficie. La rugosidad se impone mediante el método de condiciones de borde inmersas. Se define la densidad de fuerza de masa que permita alcanzar una velocidad

de fricción $u^* \approx 1{,}0^m/_s$. Para elegir el paso de la malla y el paso temporal se hizo un análisis de las escalas que se esperaba tener en un flujo como el que se pretende simular y se fijó la malla y el paso temporal de manera que se pueda resolver el flujo hasta el comienzo del rango inercial. La malla utilizada es de $0{,}01m$ de paso en la dirección del flujo y transversal y variable en la vertical, siendo mas fina sobre la superficie rugosa.

Se realizaron dos simulaciones con diferente valor del parámetro de blending: CLIM46 con 0,7 y CLIM49 con 0,95.

Se registró la tensión rasante horizontal en altura, discriminando las contribuciones de cada término, hallándose que el término de tensiones de Reynolds es el más significativo, siendo las tensiones viscosas, las debidas a la viscosidad turbulenta que impone el modelo de Smagorinsky y las dispersivas, de menor orden para ambas simulaciones. El cálculo de la altura de desplazamiento nulo resulta en un valor algo menor al esperado. A la altura de los cubos (donde se da el pico de tension media), se detecta una variación espacial de la tension rasante que va desde $-0{,}3\tau_w < \tau < 1{,}55\tau_w$.

El perfil de velocidad media en altura, tiene evidentemente una región logarítmica en ambas simulaciones. Un ajuste de los parámetros permitió calcular la longitud de rugosidad z_o y la constante de Von Karman κ. Los valores de z_o son algo menores a los esperados y los de κ algo mayores. Se considera aceptable la concordancia.

Los niveles de turbulencia son correctamente reproducidos en ambas simulaciones siendo el comportamiento de la simulación CLIM46 algo mejor en la medida que z aumenta.

En la subcapa rugosa el campo de velocidad media tiene cualitativamente un comportamiento correcto, pudiendo observarse la burbuja de recirculación aguas abajo de cada cubo. Los campos de presiones sobre la cara frontal de los cubos tiene un comportamiento coherente con lo esperado; no es así en las caras laterales, donde no se registran los valores mínimos de presiones como debería. Esto sucede porque la malla es muy gruesa para resolver el desprendimiento de capa límite en las aristas de la cara frontal.

La producción de energía cinética turbulenta es reproducida de buena manera, como es de esperar, ya que el campo de velocidad medio y las tensiones rasantes fueron bien reproducidas. Una característica interesante que se registra, es la presencia de zonas donde la producción es negativa. En estos casos se tiene flujo de energía desde la turbulencia hacia el flujo medio.

Esto no puede ser captado por los modelos RANS simples, en los que la viscosidad turbulenta es siempre positiva y muestra la virtud de la simulación de grandes vórtices. La disipación no está en balance con la producción en la región logarítmica en ninguna de las simulaciones, tal como debería ocurrir. En la simulación CLIM46 este desbalance es más pronunciado que en la simulación CLIM49. Uno de los efectos del aumento en el parámetro de blending es reducir la disipación numérica que impone el código. Si la disipación numérica es menor en la simulación CLIM49 que en la CLIM46, los gradientes en las escalas menores serán mayores en la primera, aumentando no sólo la viscosidad impuesta por el modelo de Smagorinsky sino también la disipación calculada. Este efecto es el observado, por lo tanto es razonable suponer que el código impone una viscosidad numérica que es mayor a la que impone el modelo, lo cual constituye un problema, ya que si esto sucede, el modelo de viscosidad turbulenta no estaría actuando como tal y no se tendría control sobre como se disipa la energía. Esto no quiere decir que la energía no se esté disipando, pero sí que se disipa en escalas mayores a las esperadas. Si esto sucede, un efecto esperable es la ausencia de energía en las escalas menores del flujo resuelto, tal como se observa en los espectros.

Las escalas integrales que se calculan a partir de las correlaciones se comportan correctamente, registrándose un perfil potencial en la zona logarítmica y descendiendo en alturas superiores. Los parámetros de este perfil están en concordancia con el valor de la longitud de rugosidad obtenida. Un análisis de los espectros de potencia de las componentes fluctuantes de la velocidad muestra que solo a $z = 0{,}052m$ y en el espectro de v' parece captarse el rango inercial. En los demás espectros registrados, se observa una caída en los niveles de energía a escalas menores muy por debajo de la esperada en el rango inercial. Se considera que este efecto es compatible con lo observado cuando se analizó la disipación.

Los problemas registrados con la disipación podrían solucionarse aumentando el paso de la malla, lo cual permitiría reducir la disipación numérica. La malla utilizada fue dimensionada con los argumentos esgrimidos en la sección 4.4. Por razones de tiempo de cálculo y capacidades necesarias no se juzgo pertinente usar una malla mas fina. Formalmente se debería haber repetido las simulaciones con mallas mas finas para analizar la independencia de la simulación con el paso de la malla. Este aspecto deberá ser

considerado en futuros trabajos.

Bibliografía

John D Anderson. Ludwig prandtl's boundary layer. *Physics Today*, 58(12): 42–48, 2005.

S. C. C. Bailey, M. Vallikivi, M. Hultmark, and A. J. Smits. Estimating the value of von kármán's constant in turbulent pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 749:79–98, 6 2014. ISSN 1469-7645. doi: 10.1017/jfm.2014.208. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112014002080.

T. Cebeci. *Analysis of Turbulent Boundary Layers*. Elsevier Science, 2012. ISBN 9780323151054. URL http://books.google.com.uy/books?id=uD-3g1c2n9YC.

O. Coceal, T.G. Thomas, I.P. Castro, and S.E. Belcher. Mean flow and turbulence statistics over groups of urban-like cubical obstacles. *Boundary-Layer Meteorology*, 121(3):491–519, 2006. ISSN 0006-8314. doi: 10.1007/s10546-006-9076-2. URL http://dx.doi.org/10.1007/s10546-006-9076-2.

Donald Coles. The law of the wake in the turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 1:191–226, 7 1956. ISSN 1469-7645. doi: 10.1017/S0022112056000135. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112056000135.

J. Counihan. Adiabatic atmospheric boundary layers: A review and analysis of data from the period 1880–1972. *Atmospheric Environment (1967)*, 9(10):871 – 905, 1975. ISSN 0004-6981. doi: http://dx.doi.org/10.1016/0004-6981(75)90088-8. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0004698175900888.

Michel O Deville and Thomas B Gatski. *Mathematical modeling for complex fluids and flows*. Springer Science & Business Media, 2012.

William K. George and Luciano Castillo. Zero-pressure-gradient turbulent boundary layer. *Applied Mechanics Reviews*, 50:689–729, 12 1997. ISSN 0003-6900. doi: 10.1115/1.3101858. URL http://dx.doi.org/10.1115/1.3101858.

Javier Jiménez. Turbulent flows over rough walls. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36(1):173–196, 2004. doi: 10.1146/annurev.fluid.36.050802.122103. URL http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fluid.36.050802.122103.

Rolf I. Karlsson, William K. George, Martin Wosnik, and T. Gunnar Johansson. The nordic wind tunnel - a proposal to build a very large turbulence research facility. *ERCOFTAC Bulletin*, 51, 2001.

Th. V. Kármán. Über laminare und turbulente reibung. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1(4):233–252, 1921. ISSN 1521-4001. doi: 10.1002/zamm.19210010401. URL http://dx.doi.org/10.1002/zamm.19210010401. Traducido al inglés como "NACA Technical Memorandum 1092", NACA, Washington, 1946.

B. E. Launder and N. D. Sandham, editors. *Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows*. Cambridge University Press, 2002. ISBN 9780511755385. URL http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511755385. Cambridge Books Online.

M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Fluid Mechanics and Its Applications. Springer, 2008. ISBN 9781402064357. URL https://books.google.com.uy/books?id=xKUDN22Y7OYC.

Hans W. Liepmann. Investigations on laminar boundary layers stability and transition on curved boundaries. naca wartime report w107. Technical report, California Institute of Technology, 1943.

Robert R. Long and Tien-Chay Chen. Experimental evidence for the existence of the 'mesolayer' in turbulent systems. *Journal of Fluid Mechanics*, 105:19–59, 4 1981. ISSN 1469-7645. doi: 10.1017/S0022112081003108. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112081003108.

Parviz Moin and Krishnan Mahesh. Direct numerical simulation: A tool in turbulence research. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30(1):539–578,

1998. doi: 10.1146/annurev.fluid.30.1.539. URL http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fluid.30.1.539.

Jens M Österlund. *Experimental studies of zero pressure-gradient turbulent boundary layer flow*. Royal Institute of Technology, Department of Mechanics, 1999.

Charles S. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, 11:479–517, 01 2002. doi: 10.1017/S0962492902000077. URL https://www.cambridge.org/core/article/immersed-boundary-method/95ECDAC5D1824285563270D6DD70DA9A.

S.B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000. ISBN 9780521598866. URL http://books.google.com.uy/books?id=HZsTw9SMx-0C.

MR Raupach, RA Antonia, and S Rajagopalan. Rough-wall turbulent boundary layers. *Applied Mechanics Reviews*, 44(1):1–25, 1991. doi: 10.1115/1.3119492.

Osborne Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 186:123–164, 1895. ISSN 0264-3820. doi: 10.1098/rsta.1895.0004.

P. Sagaut. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction*. Scientific Computation. Springer, 2006. ISBN 9783540263449. URL https://books.google.com.uy/books?id=ODYiH6RNyoQC.

P. Schlatter, R. Örlü, Q. Li, G. Brethouwer, J. H. M. Fransson, A. V. Johansson, P. H. Alfredsson, and D. S. Henningson. Turbulent boundary layers up to re=2500 studied through simulation and experiment. *Physics of Fluids*, 21(5):051702, 2009. doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.3139294. URL http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/21/5/10.1063/1.3139294.

H. Schlichting, K. Gersten, and K. Gersten. *Boundary-Layer Theory*. Physic and astronomy. Springer, 2000. ISBN 9783540662709. URL http://books.google.com.uy/books?id=8YugVtom1y4C.

E. Simiu and R.H. Scanlan. *Winds Effects on Structures: Fundamentals and Applications to Design*. A Wiley-Interscience publication. Wiley, 1996. ISBN 9780471121572. URL https://books.google.com.uy/books?id=DcSZTIMZObEC.

C G Speziale. Analytical methods for the development of reynolds-stress closures in turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23(1):107–157, 1991. doi: 10.1146/annurev.fl.23.010191.000543. URL http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fl.23.010191.000543.

I Tani. History of boundary layer theory. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 9(1):87–111, 1977. doi: 10.1146/annurev.fl.09.010177.000511. URL http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fl.09.010177.000511.

A. S. Thom. Momentum absorption by vegetation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 97(414):414–428, 1971. ISSN 1477-870X. doi: 10.1002/qj.49709741404. URL http://dx.doi.org/10.1002/qj.49709741404.

G. Usera, A. Vernet, and J. A. Ferré. A parallel block-structured finite volume method for flows in complex geometry with sliding interfaces. *Flow, Turbulence and Combustion*, 81(3):471–495, 2008. ISSN 1573-1987. doi: 10.1007/s10494-008-9153-3. URL http://dx.doi.org/10.1007/s10494-008-9153-3.

F.M. White. *Viscous fluid flow*. McGraw-Hill series in aeronautical and aerospace engineering. McGraw-Hill, 1974. ISBN 9780070697102. URL http://books.google.com.uy/books?id=T4cpAQAAMAAJ.

D.C. Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, Incorporated, 1994. ISBN 9780963605108. URL https://books.google.com.uy/books?id=VwlRAAAAMAAJ.

Victor Yakhot and StevenA. Orszag. Renormalization group analysis of turbulence. i. basic theory. *Journal of Scientific Computing*, 1(1):3–51, 1986. ISSN 0885-7474. doi: 10.1007/BF01061452. URL http://dx.doi.org/10.1007/BF01061452.