



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY



Simulación del comportamiento de materiales viscoelásticos y aplicación a la identificación de las propiedades mecánicas de la pared arterial

Pablo Castrillo Green

Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Junio de 2017



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY



Simulación del comportamiento de materiales viscoelásticos y aplicación a la identificación de las propiedades mecánicas de la pared arterial

Pablo Castrillo Green

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural, Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Ingeniería Estructural.

Director:

D.Sc. Prof. Alfredo Canelas Botta

Codirector:

D.Sc. Prof. Daniel Bia Santana

Montevideo – Uruguay

Junio de 2017

Castrillo Green, Pablo

Simulación del comportamiento de materiales viscoelásticos y aplicación a la identificación de las propiedades mecánicas de la pared arterial / Pablo Castrillo Green. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ingeniería, 2017.

XIX, 118 p.: il.; 29,7cm.

Director:

Alfredo Canelas Botta

Codirector:

Daniel Bia Santana

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa en Ingeniería Estructural, 2017.

Referencias bibliográficas: p. 79 – 85.

1. Mecánica del Continuo, 2. Comportamiento Mecánico, 3. Viscoelasticidad, 4. Método de los Elementos Finitos, 5. Bioemecánica. I. Canelas Botta, Alfredo, *et al.* II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

PhD. Prof. Pedro Luis Curto Risso

Dr. Ing. Prof. Atilio Anibal Morquio Dovat

PhD. Prof. Gabriel Usera Velasco

PhD. Prof. Yanina Alexandra Zócalo Germán

Montevideo – Uruguay

Junio de 2017

A mis abuelos.

Agradecimientos

Quisiera agradecer muy especialmente a mis tutores Alfredo Canelas y Daniel Bia. A Daniel por trasmitirme con mucha paciencia sus conocimientos del área médica de forma simple y clara. A Alfredo por la inmensa dedicación durante toda la maestría, sin la cual esta tesis no sería posible y por colaborar con su conocimiento cuando fue necesario.

Agradecer también a mis colegas del Instituto de Estructuras y Transporte por el soporte incondicional, especialmente a Jorge Pérez Zerpa y Mihdí Caballero. A Jorge por hacerme conocer el área de biomecánica y a Mihdí por el apoyo en el dictado de los cursos de grado.

Asimismo, quiero agradecer a mis amigos y familia que siempre me apoyaron y mostraron interés en mi trabajo. Especialmente quiero agradecer a mis padres y hermanas quienes me alentaron en todo momento.

Finalmente, no puedo olvidar agradecer a Chiara, mi novia, quien, estando siempre a mi lado, compartió penas y alegrías. Por su apoyo y cariño de siempre, fundamentales para poder realizar este trabajo.

*La mayoría de las personas dicen
que el intelecto es lo que hace a
un gran científico. Están
equivocadas: es el carácter.*

Albert Einstein

RESUMEN

La simulación del comportamiento mecánico es una herramienta de gran importancia en las Ingenierías Civil y Mecánica. De igual forma, en la práctica médica es primordial la evaluación de las propiedades elásticas y viscosas de los tejidos biológicos debido a que éstas pueden evidenciar un mal funcionamiento de la pared arterial. Por esta razón, en esta tesis, se desarrollan códigos para la simulación del comportamiento viscoelástico, y se evalúa su aplicabilidad en la identificación de las propiedades mecánicas de la pared arterial a partir de medidas experimentales *in-vitro* de presión y diámetro arterial.

Se conoce que la pared arterial esta conformada por distintos materiales anisótropos, presentando cada uno diferentes respuestas reológicas. Sin embargo, el diagnóstico médico es usualmente realizado a partir de un conjunto de parámetros que caracterizan el comportamiento global de la pared arterial. Por lo anterior, en esta tesis, se desarrolla un código tridimensional viscoelástico e isótropo que permite considerar las grandes deformaciones. Más aún, para la identificación se considera un modelo de pared arterial perfectamente cilíndrica, compuesta por un único material viscoelástico estándar, que permite considerar una pared arterial gruesa. Los códigos son validados utilizando soluciones analíticas y resultados numéricos obtenidos por otros códigos.

Los códigos son utilizados para la identificación de propiedades en siete arterias de ovejas. Para la comparación con la bibliografía se desarrollan otros dos códigos que asumen la hipótesis de pequeñas deformaciones. También se utilizan los códigos que admiten las grandes deformaciones para la identificación, logrando cuantificar el efecto de la hipótesis de pequeñas deformaciones en el valor de los parámetros obtenidos.

Se concluye que los resultados de los códigos de pequeñas deformaciones son comparables a los de la bibliografía, mientras que los del código de grandes deformaciones presentan diferencias significativas.

Palabras claves:

Mecánica del Continuo, Comportamiento Mecánico, Viscoelasticidad, Método de los Elementos Finitos, Bioemecánica.

ABSTRACT

The simulation of the mechanical behavior is a highly important tool for Civil and Mechanical Engineering. Likewise, in medical practice, evaluating parameters such as elastic and viscose properties of biological tissues is fundamental since they can show a malfunction on the arterial wall. Taking these into consideration, in this thesis, codes are developed in order to simulate the viscoelastic behavior, and to evaluate the applicability in the identification of the mechanical properties of the arterial wall considering experimental measures of arterial pressure and diameter.

It is known that the arterial wall is formed by distinct anisotropic materials with different rheological responses. However, the current medical diagnosis is based on a set of parameters which characterize the arterial wall from a global point of view. For that reason, in this work a tridimensional viscoelastic and isotropic code is developed, which allows an analysis under large deformations. Moreover, a simple model is considered for the identification where the artery is perfectly cylindrical and constituted by a unique standard viscoelastic material, which allows considering a thick arterial wall. The codes are validated using analytical solutions and numerical results obtained with other codes.

The codes are used for identifying properties of seven sheep arteries. In order to compare with the bibliography, other two codes for small deformation analysis are developed. The large deformation codes are also used for the identification of the mechanical properties in order to quantify the effect of the small deformation hypothesis on the values obtained for the parameters.

It is concluded that the results of the small deformations codes are comparable with those of the bibliography, while the results of the large deformations codes present notorious differences.

Keywords:

Continuum Mechanics, Mechanical Behavior, Viscoelasticity, Finite Element Method, Biomechanics.

Lista de figuras

2.1	Sistema Circulatorio.	6
2.2	Estructura de la pared arterial.	7
2.3	Ubicación de arterias	22
2.4	Datos experimentales de una muestra de la Carótida Derecha (CD) y el Tronco Braquiocefálico (TB).	25
2.5	Datos experimentales de una muestra de la Aorta Ascendente (AA) y el Aorta Torácica Descendente Proximal (ATDP).	25
2.6	Datos experimentales de una muestra de la Aorta Torácica Descendente Distal (ATDD) y el Aorta Abdominal Descendente (AAD).	26
2.7	Datos experimentales de la Femoral Izquierda (FI) N° 9.	26
2.8	Presión y radio experimental de la muestra N° 1 del Tronco Branquiocefálico (TB).	26
3.1	Esquema de la barra libre.	35
3.2	Ejemplo de barra libre utilizando un material elástico bajo hipótesis de grandes deformaciones. Se utilizó $\kappa = 10$, $\mu = 3$, $\gamma_\infty = 1$ y un cubo de $1 \times 1 \times 1$	36
3.3	Esquema del cilindro bajo EPD.	36
3.4	Ejemplo de cilindro en un material elástico bajo hipótesis de grandes deformaciones. Se utilizó $\kappa = 10$, $\mu = 3$, $\gamma_\infty = 1$ y se modeló un cuarto de cilindro cuya geometría es de radio interior $R_1 = 0.20$, radio exterior $R_2 = 0.22$	37
3.5	Esquema de la barra lisa apoyada.	38
3.6	Ejemplo de barra lisa apoyada compuesta de un material viscoelástico bajo hipótesis de grandes deformaciones. Se utilizó $\kappa = 10$, $\mu = 3$, $t_0 = 5$ y $\alpha_0 = 1.3$	39

3.7	Diferentes mallados utilizados para prisma con fuerza de volumen impuesta.	40
3.8	Convergencia en el mallado al disminuir el tamaño máximo de los elementos.	41
3.9	Presión interna y desplazamiento radial externo.	42
3.10	Diferentes mallados generados en GMSH para validar la convergencia en los elementos.	42
3.11	Convergencia de $u(R_2, t)$ para $t = 0$ s (a) y $t = 5$ s (b).	43
3.12	Convergencia del desplazamiento al disminuir Δt en el código tridimensional.	44
3.13	Desplazamiento $u_r(r, 5$ s) visualizado en ParaView.	45
4.1	Convergencia del desplazamiento al aumentar el número de elementos.	47
4.2	Convergencia del desplazamiento al disminuir Δt en el código axisimétrico.	48
4.3	Convergencia del desplazamiento al disminuir Δt en el código recursivo.	53
4.4	Comparación entre los métodos para resolver problemas de pequeñas deformaciones.	54
4.5	Solución transiente en R_2	55
5.1	Serie de datos aproximados utilizando 16 frecuencias.	59
5.2	Serie de datos aproximados utilizando la mitad de las frecuencias.	59
5.3	Unión de la serie de datos para el caso de utilizar el código recursivo y el axisimétrico con los datos experimentales.	60
5.4	Presión y desplazamiento aproximado trigonométricamente para el código analítico.	60
5.5	Resultados obtenidos con el primer filtrado de las muestras utilizando los códigos simplificados de pequeñas deformaciones. Entre paréntesis se tiene el valor medio de R_0 experimental.	63
5.6	Resultados con el segundo filtrado de las muestras utilizando los códigos simplificados de pequeñas deformaciones. Entre paréntesis se tiene el valor medio de R_0 experimental.	64
5.7	Comparación con (Valdez-Jasso et al., 2009) con el primer filtrado de las muestras utilizando los códigos simplificados de pequeñas deformaciones.	66

5.8	Comparación con (Valdez-Jasso et al., 2009) con el segundo filtrado de las muestras utilizando los códigos simplificados de pequeñas deformaciones.	67
5.9	Comparación cualitativa de los resultados obtenidos en (Valdez-Jasso et al., 2009) y los de utilizar los códigos simplificados de pequeñas deformaciones - Femoral Izquierda/Tronco Braquiocéfálico/Aorta Ascendente.	68
5.10	Comparación cualitativa de los resultados obtenidos en (Valdez-Jasso et al., 2009) y los de utilizar los códigos simplificados de pequeñas deformaciones - Aorta Torácica Descendente Proximal/Aorta Torácica Descendente Distal/Aorta Torácica Abdominal Descendente.	69
5.11	Resultados con el primer filtrado de las muestras utilizando 600 datos. Entre paréntesis se tiene el valor de pequeñas deformaciones y el R_0 experimental.	70
5.12	Resultados con el segundo filtrado de las muestras utilizando 600 datos. Entre paréntesis se tiene el valor de pequeñas deformaciones y el R_0 experimental.	71
5.13	Desfase entre series de datos de presiones.	73
5.14	Parametros R_0 y μ por desincronización de los datos.	74
5.15	Parametros γ y τ por desincronización de los datos.	74
5.16	Desincronización utilizando $\alpha = -3\%$ y $\alpha = 0\%$	75
5.17	Desincronización utilizando $\alpha = 3\%$ y comparación entre los tres bucles.	75
D.1	Ejemplo de derivada compleja para una función escalar.	98

Lista de tablas

2.1	Datos de arterias.	22
2.2	Cantidad de datos por muestra.	23
2.3	Radio R_0 estimado experimentalmente, en mm.	23
2.4	Relación espesor/radio, deformaciones mínimas y máximas de medidas experimentales.	24
3.1	Valores numéricos de convergencia para barra lisa apoyada con fuerza de volumen.	41
3.2	Valores numéricos para diferentes mallados en el código 3D, u en mm.	43
3.3	Valores numéricos para diferentes incrementos de tiempo Δt en el código tridimensional.	44
4.1	Valores numéricos para diferentes mallados en el código axisimétrico, u en mm.	48
4.2	Valores numéricos para diferentes incrementos de tiempo Δt en el código axisimétrico.	49
4.3	Valores numéricos para diferentes incrementos de tiempo Δt en el código recursivo.	53
4.4	Resultados para diferentes métodos del ejemplo en pequeñas deformaciones.	54
5.1	Convergencia al obtener la frecuencia fundamental.	59
5.2	Valores extremos de R_0 para la identificación.	62
5.3	Comparación entre los modelos de pequeñas deformaciones y grandes deformaciones utilizando el primer filtrado.	71
5.4	Comparación entre los modelos de pequeñas deformaciones y grandes deformaciones utilizando el segundo filtrado.	72

5.5	Comparación con radio R_0 obtenido experimentalmente.	72
5.6	Error relativo por causa de la desincronización al identificar los parámetros mecánicos y geométricos.	75
F.1	Identificación utilizando los códigos de pequeñas deformaciones y todas las muestras.	103
F.2	Comparación pequeñas deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) utilizando todas las muestras.	104
F.3	Identificación utilizando los códigos de pequeñas deformaciones para el primer filtrado. N indica la cantidad de muestras por arteria.	105
F.4	Comparación pequeñas deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) utilizando el primer filtrado.	106
F.5	Identificación utilizando los códigos de pequeñas deformaciones y el segundo filtrado. N indica la cantidad de muestras.	107
F.6	Comparación utilizando los códigos de pequeñas deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) y el segundo filtrado.	108
F.7	Identificación pequeñas y grandes deformaciones utilizando todas las muestras.	109
F.7	Identificación pequeñas y grandes deformaciones utilizando todas las muestras.	110
F.8	Comparación pequeñas y grandes deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) utilizando todas las muestras.	110
F.8	Comparación pequeñas y grandes deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) utilizando todas las muestras.	111
F.8	Comparación pequeñas y grandes deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) utilizando todas las muestras.	112
F.9	Identificación pequeñas y grandes deformaciones con el primer filtrado. N indica la cantidad de muestras.	112
F.9	Identificación pequeñas y grandes deformaciones con el primer filtrado. N indica la cantidad de muestras.	113
F.10	Comparación pequeñas y grandes deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) utilizando el primer filtrado.	114
F.10	Comparación pequeñas y grandes deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) utilizando el primer filtrado.	115

F.11	Identificación pequeñas y grandes deformaciones con el segundo filtrado. N indica la cantidad de muestras.	115
F.11	Identificación pequeñas y grandes deformaciones con el segundo filtrado. N indica la cantidad de muestras.	116
F.11	Identificación pequeñas y grandes deformaciones con el segundo filtrado. N indica la cantidad de muestras.	117
F.12	Comparación pequeñas y grandes deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) utilizando el segundo filtrado.	117

Lista de símbolos

Símbolo	Descripción	Pág.
\mathcal{K}_R	Configuración de referencia.	15
\mathcal{K}_t	Configuración en el instante t .	15
\mathcal{K}_0	Configuración inicial.	15
λ	Primer Constante material de Lamé.	17
μ	Segunda Constante material de Lamé.	17
κ	Módulo volumétrico del material.	17
J	Determinante del gradiente de deformación \mathbf{F} .	16
Ψ	Energía de deformación del material.	16
$\bar{\Psi}$	Energía de deformación isocórica del material.	17
$\overline{\overline{\Psi}}$	Energía de deformación volumétrica del material.	17
χ	Función movimiento.	15
\mathbf{F}	Gradiente de deformación.	16
$\bar{\mathbf{F}}$	$\bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3}\mathbf{F}$.	17
∇_0	Gradiente material.	15
γ_∞	Parámetro material viscoelástico.	17
γ_i	Parámetro material viscoelástico.	17
τ_i	Parámetro material viscoelástico.	17
\mathbf{x}	Punto en \mathcal{K}_t .	15
\mathbf{X}	Punto en \mathcal{K}_R .	15
\mathbf{C}	Tensor de deformación de Cauchy-Green derecho.	16
$\bar{\mathbf{C}}$	$\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3}\mathbf{C}$.	17
\mathbf{E}	Tensor de deformación de Green-Lagrange.	16
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensiones de Cauchy.	16
\mathbf{S}	Tensor de tensiones de Cosserat.	16
\mathbf{P}	Tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff.	16

Tabla de contenidos

Lista de figuras	x
Lista de tablas	xiii
Lista de símbolos	xvii
1 Introducción	1
2 Estado del arte	5
2.1 Comportamiento arterial	5
2.1.1 Introducción	5
2.1.2 Estructura y composición de las arterias	7
2.2 Revisión bibliográfica	10
2.2.1 Obtención de datos experimentales	11
2.2.2 Consideraciones materiales y geométricas	12
2.3 Mecánica del sólido	15
2.3.1 Elasticidad Finita	15
2.3.2 Viscoelasticidad en grandes deformaciones	17
2.3.3 Viscoelasticidad en pequeñas deformaciones	20
2.4 Obtención de datos experimentales	21
2.4.1 Datos <i>in-vitro</i> en ovejas	22
2.5 Identificación de propiedades mecánicas	27
2.6 Optimización	28
3 Código 3D viscoelástico en grandes deformaciones	29
3.1 Implementación	29
3.1.1 Pseudocódigo	31
3.2 GMSH y ParaView	33
3.3 Validación	34

3.3.1	Caso elástico	34
3.3.2	Caso viscoelástico	38
3.3.3	Convergencia en tamaño de elemento	41
3.3.4	Convergencia en el paso de tiempo	44
4	Código axisimétrico 1D en grandes deformaciones y códigos de pequeñas deformaciones	46
4.1	Código axisimétrico 1D en grandes deformaciones	46
4.1.1	Validación código axisimétrico	47
4.2	Cilindro viscoelástico en pequeñas deformaciones	49
4.2.1	Primera forma - método recursivo	50
4.2.2	Segunda forma - solución analítica para el régimen permanente	51
4.2.3	Validación	52
5	Estudio de aplicación a problemas de identificación	56
5.1	Aproximación trigonométrica de funciones	56
5.1.1	Utilización de la función fft	57
5.1.2	Ejemplo de aplicación	58
5.2	Caracterización material utilizando pequeñas deformaciones	61
5.2.1	Comparación con bibliografía	64
5.3	Caracterización material utilizando grandes deformaciones	70
5.4	Análisis de sensibilidad en la sincronización de los datos	73
6	Conclusiones y trabajos futuros	76
	Referencias bibliográficas	79
	Apéndices	86
	Apéndice A Expresiones analíticas	87
A.1	Gradiente de deformación	87
A.1.1	Coordenadas cartesianas	87
A.1.2	Coordenadas cilíndricas	87
A.2	Tensor volumétrico y tensor isocórico elástico	88
A.2.1	Tensor volumétrico elástico	88
A.2.2	Tensor isocórico elástico	88
	Apéndice B Elemento finito tetraédrico lineal	90

Apéndice C	Cilindro viscoelástico en pequeñas deformaciones . . .	93
Apéndice D	Derivada con paso complejo	97
Apéndice E	Modelo de pared delgada	99
Apéndice F	Resultados de la caracterización	102
F.1	Utilizando solo códigos de pequeñas deformaciones	102
F.2	Utilizando códigos de pequeñas y de grandes deformaciones . . .	109

Capítulo 1

Introducción

Las enfermedades cardiovasculares (ECV) son la principal causa de muerte en todo el mundo, cada año mueren más personas por ECV que por cualquier otra enfermedad. Al respecto la **Organización Mundial de la Salud**¹ (WHO, 2015) reportó que en 2012 murieron 17.5 millones de personas por esta causa (31 % del total de las defunciones) y que más de tres cuartas partes de la muertes por ECV se producen en países de ingresos bajos y medios, como es Uruguay. El alto número de muertes por ECV explica el interés del mundo científico por mejorar las técnicas de diagnóstico y los tratamientos de estas enfermedades.

En Uruguay, en 2015, las estadísticas indican que el 28 % de las muertes se debieron a enfermedades de este tipo mientras que los tumores alcanzaron un 23 % del total, ver el informe realizado por **MIDES y OPP (2015)** y **MIDES (2013)**. La principal causa de muerte dentro del 28 % de defunciones por ECV son las relacionadas con problemas arteriales. En la Unión Europea, las enfermedades del sistema circulatorio fueron la principal causa de muerte para ambos sexos (41 %), siendo más del 50 % para personas mayores de 85 años (**Niederlaender, 2006; Urhausen y Pace, 2013**). Debe considerarse también que las ECV son invalidantes, es decir que pueden generar grandes secuelas en los individuos sin matarlos (por ejemplo el accidente cerebro vascular), por tanto el número de afectados es aún mayor.

Las ECV dejan, además del coste social y humano, un alto costo económico a los países, dado que a los altos costos médicos debe sumarse la pérdida de productividad laboral, donde el factor económico afecta aún más a los países subdesarrollados (**Mackay y Mensah, 2004**). En (**Mackay y Mensah, 2004**) se

¹Link: <http://www.who.int/es/>.

enumeran los principales factores de riesgo modificables asociados a las ECV: hipertensión arterial, dieta malsana (con altos contenidos de colesterol), inactividad física, obesidad, consumo de tabaco y el consumo nocivo de alcohol. Factores de riesgo que no pueden modificarse son por ejemplo la edad, el género y la raza de los individuos. El tratamiento no invasivo y no farmacológico de las ECV se basa en combatir los factores de riesgo modificables mencionados anteriormente.

La causa más frecuente de las ECV es la formación de depósitos de grasa en las paredes de los vasos sanguíneos que irrigan el corazón o el cerebro, lo cual puede generar aterosclerosis. En un estado avanzado de la aterosclerosis puede producirse la estenosis, fenómeno de estrechamiento del lumen arterial. Al no llegar suficiente sangre al corazón (o cualquier otro órgano) se produce la isquemia tisular o muerte celular. Además puede producirse el desprendimiento de una placa de ateroma¹ (accidente de placa) que obstruya un vaso de menor calibre aguas abajo produciendo isquemia, y un potencial infarto tisular.

Durante décadas la aterosclerosis puede evolucionar de manera “silenciosa”, ya que al no modificar el flujo sanguíneo que llega a los tejidos no provoca síntomas en quien la padece. Más aún, la mayoría de los eventos agudos (por ejemplo infartos agudos de miocardio y accidentes cerebro vasculares) se dan en sujetos que no tenían síntomas previos. Por otra parte, aún en personas con aterosclerosis avanzada, las arterias pueden presentar obstrucciones que alcancen un 60–70 % del lumen, sin que esto genere síntomas en situación de reposo. Es por esta razón que los estudios que evalúan el flujo sanguíneo, poco han podido aportar en la detección precoz de la aterosclerosis. Contrariamente, por ser la aterosclerosis una enfermedad inflamatoria, crónica y sistémica que afecta a la pared arterial, y por haberse demostrado que ya desde la primer infancia provoca modificaciones de sus características estructurales y/o biomecánicas (Curcio et al., 2017; Castro et al., 2016; Zocalo et al., 2015), es que en la actualidad se busca generar herramientas que permitan caracterizar su comportamiento mecánico como herramienta para detección temprana (en etapas asintomáticas) de la enfermedad. De hecho, en la actualidad, un grupo europeo especializado en detección precoz de aterosclerosis ha propuesto el empleo de parámetros que evalúan el espesor carotídeo (Engelen et al., 2013) y/o la rigidez arterial carotídea (Engelen et al., 2015), la rigidez arterial aórti-

¹Deposito anormal de tejido en la pared arterial que invade la luz arterial, propio de la aterosclerosis.

ca ([Reference Values for Arterial Stiffness' Collaboration, 2010](#)) o la rigidez arterial femoral ([Bossuyt et al., 2015](#)) para poder detectar, no invasivamente, el grado de aterosclerosis. Esto demuestra que poder caracterizar de manera adecuada y robusta las variaciones en los niveles de viscoelasticidad y rigidez arterial se encuentra en el camino elegido por los especialistas biomédicos que trabajan en detección precoz de patología arterial.

En resumen, es preciso poder identificar la enfermedad aterosclerótica antes de que se produzca la isquemia cardíaca o un accidente de placa, o incluso más, antes de que los cambios en la pared arterial generen modificaciones del funcionamiento cardiovascular que sean irreversibles. Para esto es necesario identificar los cambios que se van generando en la pared arterial. Como ya se mencionó, se acepta que parámetros relacionados con la viscoelasticidad pueden ser útiles como marcadores de riesgo y/o de enfermedad. Por lo anterior, en este trabajo se considera un modelo capaz de simular adecuadamente el comportamiento viscoelástico de la pared arterial. Dicho modelo es aplicado a la identificación de las propiedades mecánicas y geométricas de la pared arterial.

A continuación se enumeran y detallan los objetivos generales de esta tesis.

1. Desarrollo de códigos computacionales orientados hacia la aplicación en problemas relacionados con la caracterización de parámetros mecánicos de la pared arterial.
2. Concluir sobre la aplicabilidad de los métodos numéricos de caracterización a los datos experimentales obtenidos en nuestro país.

A continuación se enumeran y detallan los objetivos específicos de esta tesis.

1. Definir un modelo en el que los parámetros que lo caracterizan sean las propiedades materiales correspondientes al comportamiento viscoelástico tridimensional. Uno de estos parámetros debe ser una medida de cuán viscoso es el material.
2. Obtener los parámetros del modelo a partir de medidas experimentales.
3. Comparar los resultados obtenidos con los obtenidos en modelos simplificados presentes en la bibliografía.
4. Comparar los resultados de considerar o no las grandes deformaciones que sufre la pared arterial.
5. Cuantificar la influencia de la no sincronización de las medidas experimentales.

El texto tiene 6 capítulos. En el Capítulo 2 se describen los temas y líneas de investigación a abordar en esta tesis. En ese capítulo se describe el estado del arte de los temas tratados y se explicitan las hipótesis consideradas para el desarrollo del trabajo.

En el Capítulo 3 se desarrolla y describe la implementación del código viscoelástico más general abordado en este trabajo. Luego, en el Capítulo 4, se presentan códigos simplificados para la identificación material. Cada código es validado en su respectivo capítulo utilizando soluciones analíticas y soluciones numéricas obtenidas con otros códigos.

En el Capítulo 5 se realiza el estudio de la aplicación a problemas de identificación de parámetros materiales de los códigos desarrollados. La identificación se realiza con datos obtenidos *in-vitro* en siete ovejas. Los resultados obtenidos se comparan con bibliografía que utiliza los mismos datos experimentales.

Finalmente en el Capítulo 6 se enumeran las conclusiones obtenidas luego de realizada la identificación. En ese capítulo también se marcan posibles líneas de investigación a seguir como trabajos a futuros.

Capítulo 2

Estado del arte

La biomecánica es la mecánica aplicada a la biología. La misma busca entender el funcionamiento mecánico de los sistemas vivos (Fung, 1993). La biomecánica nos ayuda a comprender el funcionamiento normal de un organismo, predecir cambios dados por alteraciones y proponer métodos para intervenciones médicas (Claes, 2010).

En este capítulo se describe el estado del arte de las diferentes áreas que se utilizan en esta tesis.

2.1. Comportamiento arterial

2.1.1. Introducción

Como una primer introducción al comportamiento biomecánico arterial puede ser útil comprender en términos generales el sistema circulatorio. El sistema circulatorio permite transportar la sangre a varias partes del cuerpo. Este sistema está compuesto principalmente por el corazón, arterias, venas y capilares¹. De forma resumida se puede decir que: las arterias conducen la sangre desde el corazón hacia los tejidos donde los capilares realizan el intercambio sangre-tejido-sangre y finalmente las venas transportan la sangre al corazón.

Existen dos tipos de circulaciones, una mayor y una menor, ver Figura 2.1. La circulación mayor empieza en el ventrículo izquierdo saliendo por la aorta, transportando sangre oxigenada por arterias y arteriolas hasta los capilares;

¹Debe tenerse en cuenta aquí que el sistema circulatorio también incluye al sistema linfático.

luego la sangre vuelve por vénulas y venas hasta las venas cavas, llegando a la aurícula derecha del corazón (Claes, 2010).

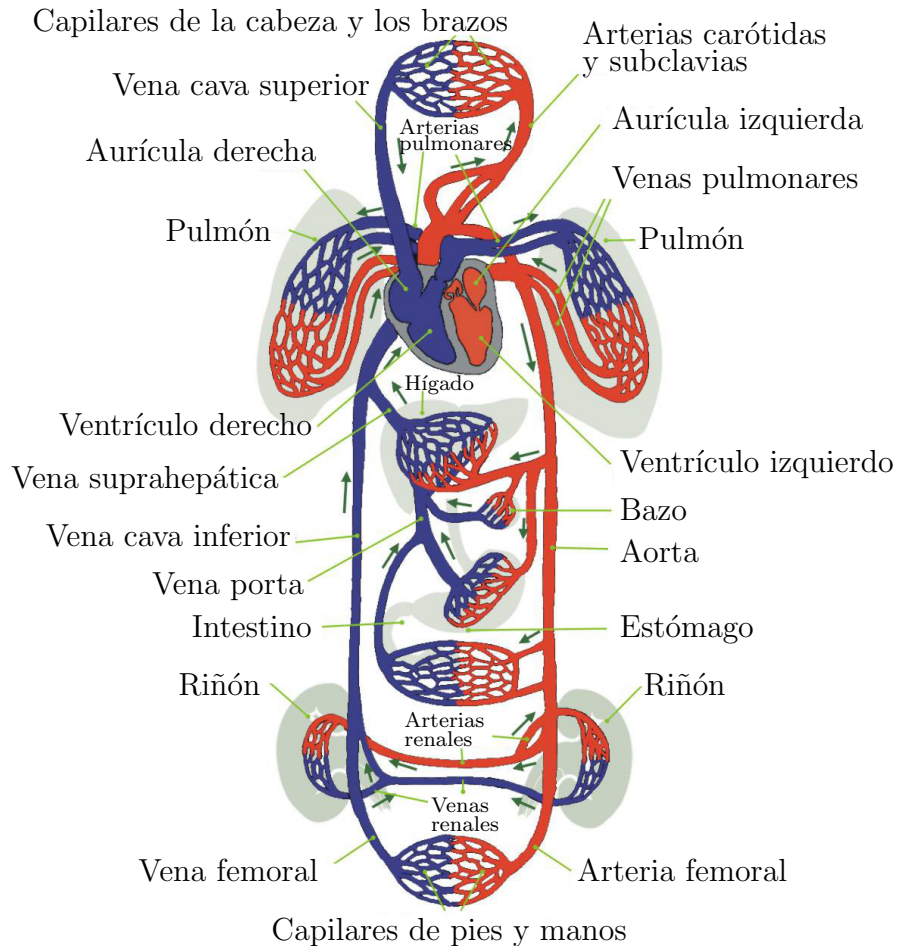


Figura 2.1: Sistema Circulatorio.

La circulación menor realiza el circuito entre corazón y los pulmones. El corazón bombea sangre desoxigenada desde el ventrículo derecho a los pulmones (a través de la arteria pulmonar) para volver oxigenada a la aurícula izquierda del corazón.

De forma general puede decirse que las arterias están expuestas a sollicitaciones mecánicas más altas que las venas. Las arterias del circuito mayor están sometidas a presiones altas (ej. entre 80 y 120 mmHg) mientras que en las venas cercanas al corazón son más bajas (ej. entre 5 y 50 mmHg). Sin embargo, como excepción a lo anterior, las arterias del circuito menor están expuestas a presiones entre 5 y 20 mmHg en tanto que las venas de miembros inferiores están sometidas a presiones entre 10 y 100 mmHg al caminar (o al estar de pie) o entre 0 y 20 mmHg en reposo horizontal.

Las arterias se diferencian entre sí principalmente por su composición, la cual está íntimamente asociada al rol fisiológico del segmento arterial. Esquemáticamente pueden diferenciarse entre arterias elásticas y arterias musculares¹, llamadas también de conducción y de distribución respectivamente. Las arterias elásticas (como la aorta) son más delgadas en relación al diámetro y contienen una mayor cantidad de fibras elásticas. Las arterias musculares (como las radiales) distribuyen la sangre a diferentes partes del cuerpo. En términos relativos estas arterias tienen paredes más gruesas debido en gran medida a la cantidad de músculo liso que poseen. Las arterias elásticas son las más cercanas al corazón, y habitualmente se enfrentan a menores presiones máximas (presiones sistólicas) que las arterias musculares (las más alejadas del corazón). A medida que las arterias se alejan del corazón se tornan más rígidas y de menor diámetro.

2.1.2. Estructura y composición de las arterias

Arterias y venas están compuestas por tres capas: íntima (interna), media y adventicia (externa). En la Figura 2.2² se puede observar la estructura general de una arteria.

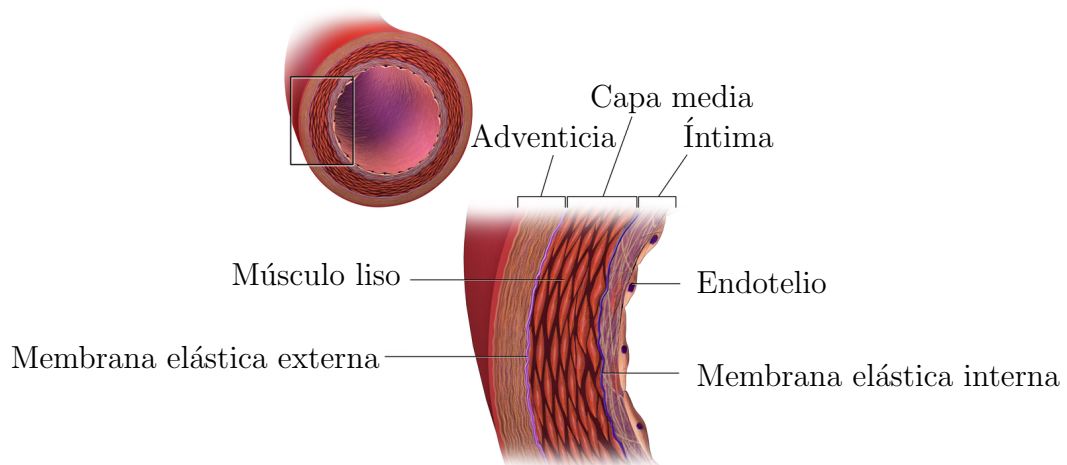


Figura 2.2: Estructura de la pared arterial.

La capa íntima está compuesta principalmente por una capa fina de células

¹También están las arterias de transición.

²Fuente: https://en.wikiversity.org/wiki/WikiJournal_of_Medicine/Medical_gallery_of_Blausen_Medical_2014.

endoteliales que son separadas de la capa media por una lámina basal elástica (en arterias grandes existe además una región de tejido conectivo entre la lamina basal y las células endoteliales).

La capa media contiene músculo liso embebido en una matriz de colágeno, elastina y varias glicoproteínas (Klabunde, 2004). La proporción relativa, cantidad absoluta y ordenamiento del músculo liso, colágeno y elastina (cada una con diferentes propiedades mecánicas) determina el comportamiento mecánico general de los vasos (Holzapfel, 2000b). Por ejemplo la aorta tiene una gran proporción de elastina y en contraste las arterias pequeñas tienen gran cantidad de músculo liso.

La capa adventicia es separada de la media por una lámina elástica. Esta capa contiene colágeno, fibroblastos, vasos sanguíneos y nervios. En (Cabrera-fischer et al., 2015) se realiza una revisión sobre la función de la adventicia concluyendo que la capa adventicia “*funciona como un verdadero centro de reparación, integración, almacenamiento y liberación de reguladores de la función de la pared vascular*”.

En términos de su contribución biomecánica, podría, esquemáticamente, decirse que la capa media es la que determinará el comportamiento mecánico parietal, pero que esta capa es influenciada por las restantes. Al respecto, el nivel de contracción y relajación del músculo liso de la capa media y consecuentemente de cuán estiradas o arrolladas estarán las fibras de elastina y colágeno de la propia capa media, dependerán de la capa íntima y adventicia ya que estas dos capas liberan mediadores químicos que afectan al músculo liso vascular (Bia et al., 2017).

Músculo liso Además del músculo liso, existe el músculo esquelético (ej: bíceps) y el músculo cardíaco. La diferencia del músculo liso con los otros dos es que éste no presenta la disposición estriada de actina y miosina que tienen los otros dos (Claes, 2010; Klabunde, 2004). Parecido a los miocitos cardíacos las células del músculo liso se encuentran unidas por uniones gap. Estas uniones débiles permiten la respuesta electro-bioquímica propagada a lo largo del vaso sanguíneo. El músculo liso es quien más contribuye para la deformación viscosa de la pared arterial (Valdez-Jasso et al., 2011; Armentano et al., 1998; Holzapfel y Ogden, 2003). En (Bia et al., 2014) se realiza una cuantificación de la cantidad de elastina, colágeno y músculo liso para la arterias en ovejas mediante experimentos *in-vitro* y se concluye que el músculo liso esta asociado

con la viscosidad de la pared arterial.

Elastina La elastina es una proteína que tiene una función importante en las arterias, principalmente en las de mayor tamaño (aorta). Estas proteínas son las principales responsables de la respuesta para presiones bajas y moderadas ya que entran en funcionamiento para pequeños valores de deformación. Son capaces de recuperar su dimensión original incluso cuando se aplican deformaciones mayores al 50 % (Lodish et al., 2004), por tanto son esencialmente un material elástico (Holzapfel, 2000b)

Colágeno Hay más de 20 tipos diferentes de colágenos. Las moléculas de colágeno se agrupan de a tres formando una hélice, luego éstas hélices se agrupan para formar las fibras de colágeno. Las fibras de colágeno sólo entran en funcionamiento una vez que han sido alineadas y orientadas durante el proceso de deformación. Por lo anterior el colágeno sólo entra en funcionamiento para presiones elevadas. La rigidez del colágeno es varios órdenes mayor a la de la elastina debido fundamentalmente a la alineación de las fibras (Claes, 2010). El colágeno es el principal responsable de la respuesta no lineal de las arterias (Valdez-Jasso et al., 2011) y puede influir en el comportamiento viscoso, sin embargo en términos relativos es menor que la influencia del músculo liso.

Los vasos periféricos y más pequeños se asocian a un comportamiento más rígido y viscoso, al contrario de lo que sucede con los vasos de mayor tamaño como la aorta (Valdez-Jasso et al., 2009, 2011; Bia et al., 2005). En (Armentano et al., 1995) se hace un estudio sobre perros conscientes, utilizando modelos viscoelásticos lineales, donde se logra aislar las componentes de deformación correspondientes a la elastina, colágeno y músculo liso pudiéndose apreciar cuándo es que se activa y recluta cada componente. En dicho estudio se ve reflejado experimentalmente lo dicho sobre los componentes de las arterias.

2.2. Revisión bibliográfica

En esta sección se describen algunos trabajos ya publicados en el área de estudio de la tesis.

En (Fung, 1993) se realiza un gran repaso por la historia del estudio de la biomecánica, desde sus probables inicios 400-300 años a.C. con Aristóteles (*On the Parts of Animals*) hasta los días más recientes a cuando se escribió el libro de Fung. Fung también hace una gran contribución a la mecánica de los fluidos (Fung, 1997), permitiendo comprender la circulación del sistema circulatorio. Como reseña histórica se tiene el trabajo fundamentado matemáticamente por Otto Frank¹ que desarrolla el llamado “efecto Windkessel” (efecto de la cámara de aire) (Frank, 1990; Sagawa, 1990; Radhakrishnan, 2012). Este efecto tiene en cuenta la forma de la onda de presión en función del volumen sistólico y de la complacencia de arterias elásticas grandes (por ejemplo la aorta). En (Westerhof et al., 2009) se desarrollan modelos de Windkessel más elaborados.

En (Holzapfel, 2000b) se pretende encontrar una ecuación constitutiva general que sirva para muchos tipos de tejidos y que contemplen las grandes deformaciones que éstos sufren. Se plantea también que es útil que dicha ecuación tenga pocos parámetros mecánicos (para que sea simple), que sea tridimensional y consistente con los requerimientos mecánicos y matemáticos. Además, se plantea que sea aplicable a diferentes geometrías y que se pueda utilizar el Método de los Elementos Finitos (MEF) para resolver problemas complejos con condiciones iniciales y de contorno. El modelo que en esa referencia se plantea también tiene en cuenta información histológica, la no linealidad del material y la anisotropía típica de los tejidos biológicos. El comportamiento anisótropo se debe a la presencia de fibras alineadas según una cierta dirección. Se afirma que los tejidos blandos son no lineales, sufren grandes deformaciones y algunos son viscoelásticos (dependiendo del reclutamiento del colágeno y la activación del músculo liso). Las propiedades mecánicas de los tejidos blandos dependen de los factores de riesgo (Núñez et al., 2010), la edad, la especie, factores ambientales físicos y químicos como la temperatura, la presión, el pH y la velocidad de las deformaciones. La medición precisa de las propiedades mecánicas depende de la calidad y de lo completo que sean los datos experimentales, sean *in-vivo* o *in-vitro* (Hoeks et al., 2000; Meinders y Hoeks, 2004).

¹La idea conceptual no se le atribuye a él.

2.2.1. Obtención de datos experimentales

En algunos trabajos se hace énfasis en la dificultad y criterios necesarios para obtener datos experimentales adecuados (Hoeks et al., 2000; Meinders y Hoeks, 2004; Van Bortel et al., 2012; Laurent et al., 2006).

En (Van Bortel et al., 2012) y (Laurent et al., 2006) se establece el consenso de que la velocidad de onda de pulso entre arteria carótida y femoral (*Carotid-Femoral Pulse Wave Velocity (PWV)*) es el estándar oro (*the gold standard*) para valorar la rigidez arterial regional mediante herramientas no-invasivas. Este parámetro es un gran predictor del riesgo cardiovascular, sin embargo la estandarización de su medición es necesaria, en particular es muy importante definir cómo se mide la distancia entre los sitios de registro. En ambos trabajos se concluye que debe adoptarse una metodología adecuada para obtener valores válidos, reproducibles y que permitan una adecuada interpretación de los resultados obtenidos.

En (Hoeks et al., 2000) y (Meinders y Hoeks, 2004) se hace especial hincapié en la dificultad y necesidad de medir datos de presión y diámetro en el mismo lugar y en el mismo instante de tiempo. En el primer trabajo se realiza la identificación de parámetros mecánicos cambiando el lugar de medición y cambiando los instantes en los que se miden. Al imponer estos cambios se obtienen diferentes parámetros mecánicos, lo que afectaría entonces la interpretación de éstos, por tanto debe tenerse especial cuidado en medirlos en el mismo lugar y al mismo tiempo. No siempre es posible obtener una buena sincronización de los datos de presión y diámetro, por tanto es importante conocer las limitaciones y alcances de los diferentes estudios y parámetros obtenidos. En (Meinders y Hoeks, 2004) se plantea el uso de funciones de transferencia¹ como un método para eludir esta dificultad, aunque se muestra que no son muy efectivas para cualquier paciente. En ese trabajo se muestra también la dificultad de utilizar tonometría, que si bien es un buen método para medir presión, no se puede usar en obesos. A su vez, se plantea el problema de desfase entre la tonometría y el procesamiento de las señales del ultrasonido para medir el diámetro arterial.

¹Las funciones de transferencia permiten obtener información de determinados sitios del sistema a partir de registros obtenidos en otros lugares.

2.2.2. Consideraciones materiales y geométricas

Se destacan entre las consideraciones simplificadoras de los diferentes modelos físico-matemáticos: (1) el uso o no de las grandes deformaciones que sufren los materiales biológicos, (2) modelos puramente elásticos, viscoelásticos o fraccionales, (3) asumir isotropía o anisotropía material, (4) asumir estado plano de deformaciones o tensiones, (5) considerar la pared arterial delgada o gruesa y (6) conocer o no en la pared arterial la configuración de presión cero (configuración *free-load* o despresurizada).

Modelos viscoelásticos

En (Valdez-Jasso et al., 2011) se utilizan modelos viscoelásticos lineales (Kelvin) y no lineales (Sigmoid y arcotangente). En ese trabajo se utilizan datos *in-vitro* e *in-vivo* en arterias de ovejas y de humanos. Los autores indican que las arterias de ovejas y humanos, allí estudiadas, están constituidas por los mismos materiales y por tanto es razonable utilizar el mismo modelo para la identificación de los parámetros mecánicos en ambas especies. En base a lo anterior, concluyen que la diferencia en los parámetros obtenidos, en la arteria carótida en ovejas y humanos, se debe a diferencias anatómicas y geométricas de las especies. Al analizar los resultados obtenidos en ovejas con medidas, *in-vitro* e *in-vivo*, los autores observan que el parámetro viscoso es mayor con medidas *in-vitro*. Los resultados muestran que el modelo de Kelvin y el Sigmoid permiten identificar el radio cero (presión interna nula, por lo que existen solamente tensiones residuales). Se utilizan dos pasos: primero se resuelve el caso elástico obteniendo datos elásticos que luego se utilizan como punto de partida para el caso viscoelástico (donde se obtienen todos los parámetros, elásticos y viscosos). En (Valdez-Jasso et al., 2009) se utilizan modelos elásticos y viscoelásticos bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones para analizar diferentes arterias de ovejas. En dicho trabajo también se asume que la pared de las arterias es delgada, que el material es isótropo y que se está bajo un estado plano de deformaciones. Se muestra aquí la variabilidad de rigidez entre arterias, aunque no resulta simple relacionar dichos parámetros con los de un modelo tridimensional general.

En (Bia et al., 2005) se caracterizan las diferencias regionales en los módulos elástico y viscoso de arterias sistémicas, centrales y periféricas. En ese trabajo

los autores obtienen que en arterias periféricas (lejanas al corazón) la rigidez y viscosidad de la pared arterial aumenta. Se concluye que la menor rigidez en las arterias centrales podría indicar que estas tienen la función de reservorio arterial sistólico mientras que la disipación viscosa se encuentra principalmente concentrada en las arterias periféricas.

En varios trabajos ([Zhu et al., 2016](#); [Armentano et al., 1998](#); [Núñez et al., 2010](#)) se comprueba que los parámetros mecánicos de los tejidos biológicos cambian al estudiar sujetos con y sin enfermedades. En particular se advierte un aumento en los parámetros de rigidez y viscosidad. En ([Armentano et al., 1998](#)) se afirma que el aumento de la viscosidad en la pared arterial es una consecuencia de la hipertensión vascular. En ([Zhu et al., 2016](#)) se estudia el hígado de ratas con diferentes niveles de enfermedad y ratas sin enfermedad utilizando tres modelos viscoelásticos diferentes: Maxwell, Kelvin-Voigt y Zener. El modelo de Zener es con el que se obtienen mejores resultados, aunque son muy similares con el de Kelvin-Voigt, el cual es más simple y es utilizado en muchos otros trabajos. Se prueba que el modelo de Zener y Kelvin-Voigt son equivalentes, pero dado que los parámetros mecánicos de Zener no son fáciles de interpretar, se concluye que el modelo de Kelvin-Voigt es el más adecuado.

Más aún, diversos trabajos han logrado discriminar la contribución mecánica de los principales componentes arteriales parietales, habiendo evidenciado que mientras la elastina y el colágeno contribuyen elásticamente a la respuesta, el músculo liso sería el principal responsable de la viscosa ([Armentano et al., 2006, 2007, 1995](#)). Adicionalmente, se ha evidenciado que diferentes enfermedades pueden modificar de manera diferente a estos constituyentes parietales, y que consecuentemente la respuesta elástica y la respuesta viscosa (de poder discriminarse) estarían afectadas de manera diferente. Como ejemplo, un proceso de remodelado con un incremento importante de las fibras de colágeno elevarían los niveles de respuesta elástica, mientras que un proceso de hiperactividad muscular lisa elevarían especialmente la respuesta viscosa.

Modelos fraccionales

Los modelos fraccionales viscoelásticos han proveído resultados prometedores en el modelado del comportamiento de materiales poliméricos y tejidos biológicos ([Pérez Zerpa et al., 2015](#); [Spasic et al., 2016](#); [Zhang et al., 2008](#)). Es-

tos modelos están compuestos por resortes, amortiguadores y elementos fraccionales. En (Zhang et al., 2008) se utiliza el modelo de Kelvin-Voigt para estudiar la próstata con y sin cáncer. En (Pérez Zerpa et al., 2015) se plantea un modelo fraccional de mayor orden. En la mayoría de los modelos fraccionales las derivadas son entre cero (resorte) y uno (amortiguador), en (Pérez Zerpa et al., 2015) se admite que la derivada sea entre cero y dos, obteniendo mejores resultados para valores mayores a uno. Tanto en (Pérez Zerpa et al., 2015) como en (Spasic et al., 2016) se utiliza el modelo fraccional de Zener (Standar Linear Solid - SLS). Una desventaja de los modelos fraccionales es la dificultad en la interpretación física de sus parámetros. En esta tesis no se estudian modelos de este tipo.

Anisotropía material

Varios trabajos del área tienen en cuenta los efectos anisótropos (Holzapfel et al., 2002; von Maltzahn et al., 1981; Salvatore y T Christian, 2010; Dorfmann y Ogden, 2015). En (von Maltzahn et al., 1981) y (Holzapfel et al., 2002) se utilizan modelos de doble capa, esto es, una ecuación constitutiva para la capa media y otra para la capa adventicia. Sin embargo en (von Maltzahn et al., 1981) no se considera la viscosidad, aunque si la no linealidad material y anisotropía. Se comprueba que con el modelo allí presentado se tienen resultados más aproximados a los resultados experimentales que con los modelos simple capa (homogéneos). Otra gran cantidad de trabajos sin embargo utilizan modelos isotropos (Robinson et al., 2016; Valdez-Jasso et al., 2009, 2011; Pérez Zerpa et al., 2015). En esta tesis se utiliza un modelo viscoelástico, isotropo no homogéneo.

Tensiones residuales y configuración despresurizada

Otra complejidad del comportamiento arterial proviene de las tensiones residuales, ver (Holzapfel y Ogden, 2003, Capítulo 4) y (Holzapfel, 2000b). En (Schulze-Bauer y Holzapfel, 2003) se comenta la necesidad de conocer los datos de diámetro y largo de la arteria para cada valor de presión interna. También se plantea que es preciso conocer la configuración en la que no hay presión (*free-load*). En (Valdez-Jasso et al., 2011) se obtiene el parámetro R_0 (radio para presión nula) y se lo compara con el estimado experimentalmente. En esta tesis el radio R_0 es uno de los parámetros a identificar.

2.3. Mecánica del sólido

En este trabajo se utiliza la mecánica de sólidos deformables, esto es, cuerpos que admiten movimientos y cambios de forma debido a acciones internas o externas.

Los cuerpos al cambiar de forma generan deformaciones, relación entre la configuración actual y la de referencia (llamada usualmente como *configuración indeformada*). En caso que estas deformaciones sean suficientemente pequeñas se habla del caso de pequeñas deformaciones y se utiliza la teoría clásica. En caso de admitirse un comportamiento para deformaciones grandes se trata del caso más general denominado *elasticidad finita*, el cual se describirá en este trabajo en la Sección 2.3.1.

A su vez existen diferentes tipos de comportamiento material. El material se puede asumir lineal o no lineal, esto es si la relación entre tensiones y deformaciones es o no lineal.

Existen varios tipos de respuestas materiales: elástico, plástico, viscoelástico, etc. En este trabajo se utilizarán materiales viscoelásticos, cuya teoría se describe en la Sección 2.3.2.

2.3.1. Elasticidad Finita

Como base para esta sección se utiliza el libro de Belytschko et al. (2001). Primeramente resulta útil definir la configuración de referencia \mathcal{K}_R de un cuerpo. Usualmente la configuración de referencia coincide con la configuración inicial \mathcal{K}_0 ¹, donde con el subíndice 0 se indica el tiempo inicial, por tanto \mathcal{K}_t será la configuración en el instante t . Consecuencia de lo anterior es definir una función \mathcal{X} que relacione la posición de las partículas que se encuentran en \mathcal{K}_R con las que se encuentran en \mathcal{K}_t : $\mathbf{x} = \mathcal{X}(\mathbf{X}, t)$ donde \mathbf{X} es el punto que ocupa la partícula en \mathcal{K}_R y \mathbf{x} es el punto que ocupa la partícula en \mathcal{K}_t . A partir de lo anterior se define el campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathcal{X}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$. A la función \mathcal{X} se la llamará *función movimiento*.

Asumiremos que $\mathcal{X}(\bullet, t)$ es invertible y diferenciable, por tanto

$$\mathcal{X}(\mathbf{X} + \mathbf{d}, t) = \mathcal{X}(\mathbf{X}, t) + \nabla_0 \mathcal{X}(\mathbf{X}, t) \mathbf{d} + o(\mathbf{d}), \quad \text{con} \quad \lim_{\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{o(\mathbf{d})}{\|\mathbf{d}\|} = 0, \quad (2.1)$$

¹En muchos casos es útil considerar que \mathcal{K}_R coincide con la configuración indeformada, que se puede interpretar como el estado natural del cuerpo, es decir, aquel estado en equilibrio con acciones externas nulas.

donde ∇_0 es el gradiente material y \mathbf{d} es una dirección arbitraria. En este trabajo se utilizará la formulación denominada como *total lagrangian formulation*, que se basa en descripciones materiales (o lagrangeanas) de las magnitudes de interés, esto es que dependen de \mathbf{X} . $\mathcal{X}_t(\bullet) = \mathcal{X}(\bullet, t)$ es una *deformación uniforme* si se cumple que

$$\mathcal{X}_t(\mathbf{Y}) = \mathcal{X}_t(\mathbf{X}) + \mathbf{F}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}), \quad (2.2)$$

de lo anterior se tiene $\mathbf{F} = \nabla_0 \mathcal{X}_t(\mathbf{X})$ en todo punto \mathbf{X} . En el caso general \mathbf{F} no será uniforme, sin embargo dado que \mathcal{X}_t es diferenciable se tiene que pequeños entornos de \mathbf{X} se deformarán como si se tuviera una deformación uniforme. En ese caso el *gradiente de deformación* se expresará como

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \nabla_0 \mathcal{X}_t(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathcal{X}_t}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}). \quad (2.3)$$

Expresiones analíticas de este tensor en diferentes sistemas coordenados se pueden encontrar en el Apéndice A.

Los tensores de deformación usuales en descripciones lagrangeanas son los tensores de *Cauchy-Green derecho* \mathbf{C} y *Green-Lagrange* \mathbf{E} definidos como

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad \text{y} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (2.4)$$

donde \mathbf{I} es el tensor identidad.

Los tensores de tensiones usuales en descripciones lagrangeanas son el *tensor de tensiones de Cauchy* $\boldsymbol{\sigma}$, el *tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff* \mathbf{P} y el *tensor de tensiones de Cosserat* \mathbf{S} ¹. Estos tensores se pueden relacionar mediante las siguientes expresiones

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{S}, \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T, \quad \text{con} \quad J = \det(\mathbf{F}). \quad (2.5)$$

Los tensores de tensiones en cuerpos hiperelásticos se obtienen en función de la *energía de deformación del material* Ψ . En particular, el tensor de Cosserat se obtiene como

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}. \quad (2.6)$$

¹Al tensor de Cosserat se lo puede encontrar en la bibliografía como *segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff*.

Energías de deformación

Algunas de las energías de deformaciones más usuales son:

Saint Venant-Kirchhoff $\Psi = \frac{\lambda}{2} \text{tr}(\mathbf{E})^2 + \mu \text{tr}(\mathbf{E}^2)$ donde λ y μ son las constantes de Lamé del material. Esta función de energía es la más utilizada para materiales hiperelásticos sometidos a deformaciones moderadas y, para el caso de pequeñas deformaciones, todos los materiales pueden considerarse de Saint Venant-Kirchhoff.

Simo-Miehe $\Psi = \bar{\bar{\Psi}}(J) + \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})$ con $\bar{\bar{\Psi}}(J) = \frac{\kappa}{4} (J^2 - 1 - 2 \log(J))$ y $\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}) = \frac{\mu}{2} (\text{tr}(\bar{\mathbf{C}}) - 3)$ donde κ es la constante volumétrica y μ la constante desviadora del material. Esta energía es más adecuada para ciertos materiales que sufren grandes deformaciones. Para este material se distinguen dos energías de deformación $\bar{\bar{\Psi}}(J)$ y $\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})$ como volumétrica e isocórica (desviadora) respectivamente. Para esta energía (Simo y Hughes, 1998; Miehe, 1994; Belytschko et al., 2001; Holzapfel, 2000a; Shen, 2016) es útil definir $\bar{\mathbf{C}}$ y $\bar{\mathbf{F}}$ que se asocian a la preservación del volumen al deformarse y $J^{1/3}\mathbf{I}$ y $J^{2/3}\mathbf{I}$ que se asocian a la deformación volumétrica

$$\bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3}\mathbf{F}, \quad \bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3}\mathbf{C}. \quad (2.7)$$

2.3.2. Viscoelasticidad en grandes deformaciones

En la mayoría de la bibliografía del área se incluye la viscoelasticidad sólo en la parte desviadora del material y es por ésto que se trabaja con materiales en los que se distinguen las energías de deformación desviadora (isocórica) de la esférica (como el material de Simo-Miehe), ver (Simo y Hughes, 1998):

$$\mathbf{S} = J \frac{\partial \bar{\bar{\Psi}}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} + J^{-2/3} \int_{-\infty}^t g(t-s) \left(\frac{\partial}{\partial s} \text{DEV} \left[2 \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}(s))}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right] \right) ds, \quad (2.8)$$

siendo

$$\text{DEV}[(\bullet)] = (\bullet) - \frac{1}{3} [(\bullet) : \mathbf{C}] \mathbf{C}^{-1}, \quad (2.9)$$

donde la viscosidad es incluida como una cadena en paralelo de N brazos de Maxwell, representada por la *función de relajación normalizada*

$$g(t) = \gamma_\infty + \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp(-t/\tau_i), \quad (2.10)$$

cumpléndose que (Simo y Hughes, 1998):

$$\gamma_\infty + \sum_{i=1}^N \gamma_i = 1, \quad \gamma_\infty \geq 0 \quad \text{y} \quad \gamma_i \geq 0 \quad \forall i. \quad (2.11)$$

Es importante identificar en la Ecuación (2.8) los términos correspondientes a los tensores isocóricos y a los tensores volumétricos. En el caso elástico se tiene

$$\mathbf{S}^\circ = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \bar{\Psi}(J)}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \mathbf{C}} = \bar{\bar{\mathbf{S}}}^\circ + \bar{\mathbf{S}}^\circ, \quad (2.12)$$

donde

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}}^\circ = J \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{S}}^\circ = J^{-2/3} \text{DEV} \left[2 \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}(s))}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right]. \quad (2.13)$$

El desarrollo para obtener las expresiones de la Ecuación (2.13) se muestra en el Apéndice A, obteniéndose así que

$$\mathbf{S} = \bar{\bar{\mathbf{S}}}^\circ + J^{-2/3} \int_{-\infty}^t g(t-s) \frac{\partial}{\partial s} \left[J^{2/3} \bar{\mathbf{S}}^\circ \right] ds. \quad (2.14)$$

Utilizando la expresión de la Ecuación (2.10) se tiene

$$\mathbf{S} = \bar{\bar{\mathbf{S}}}^\circ + \gamma_\infty \bar{\mathbf{S}}^\circ + J^{-2/3} \int_{-\infty}^t \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp(-(t-s)/\tau_i) \frac{\partial}{\partial s} \left[J^{2/3} \bar{\mathbf{S}}^\circ \right] ds. \quad (2.15)$$

Notar que en la expresión anterior si $\gamma_\infty = 1$ y por consecuencia $\gamma_i = 0 \quad \forall i$ se tiene $\mathbf{S} = \bar{\bar{\mathbf{S}}}^\circ$, lo cual correspondería a un comportamiento puramente elástico. Por lo anterior, si bien γ_i y τ_i son ambos parámetros viscoelásticos, en este trabajo se considera que γ_i es quien evidencia la alteración en la viscosidad del

material. Utilizando integración por partes se obtiene

$$\mathbf{S} = \bar{\bar{\mathbf{S}}}^\circ + \bar{\mathbf{S}}^\circ - J^{-2/3} \int_{-\infty}^t J^{2/3} \bar{\mathbf{S}}^\circ \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \exp(-(t-s)/\tau_i) ds, \quad (2.16)$$

por tanto

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^\circ - J^{-2/3} \int_{-\infty}^t J^{2/3} \bar{\mathbf{S}}^\circ \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \exp(-(t-s)/\tau_i) ds. \quad (2.17)$$

Material de Simo-Miehe

Para el tensor elástico volumétrico se tiene

$$\frac{\partial \bar{\bar{\Psi}}(J)}{\partial J} = \frac{1}{4} \kappa \left(2J - 2 \frac{1}{J} \right) = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{J^2 - 1}{J} \right), \quad (2.18)$$

se puede ver que $\bar{\bar{\Psi}}(J)$ es estacionario en $J = 1$ (la función se define para J positivo). Si se calcula la derivada segunda se tiene

$$\frac{\partial^2 \Psi_{\text{vol}}(J)}{\partial J^2} = \frac{1}{2} \kappa \left(1 + \frac{1}{J^2} \right) > 0 \quad \forall J > 0, \quad (2.19)$$

por tanto $\Psi_{\text{vol}}(J)$ es una función convexa y tiene un único mínimo en $J = 1$. De lo anterior se tiene

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}}^\circ = \frac{\kappa}{2} (J^2 - 1) \mathbf{C}^{-1}. \quad (2.20)$$

Para el tensor elástico isocórico se tiene

$$\frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial \text{tr}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \frac{\mu}{2} \mathbf{I}, \quad (2.21)$$

luego

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}}^\circ = 2 J^{-2/3} \left[\frac{\mu}{2} \mathbf{I} - \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{2} \mathbf{I} : \mathbf{C} \right) \mathbf{C}^{-1} \right] \Rightarrow \bar{\mathbf{S}}^\circ = J^{-2/3} \mu \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \right] \quad (2.22)$$

y en conclusión el tensor de Cosserat para el caso viscoelástico es

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{\kappa}{2} (J^2 - 1) \mathbf{C}^{-1} + \mu \gamma_\infty J^{-2/3} \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \right] \\ &\dots + J^{-2/3} \int_{-\infty}^t \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp(-(t-s)/\tau_i) \left(\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \mu \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \right] \right\} \right) ds. \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.3.3. Viscoelasticidad en pequeñas deformaciones

Si bien las ecuaciones para un material viscoelástico lineal bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones son bien conocidas (Simo y Hughes, 1998), en esta tesis han sido obtenidas a partir de las expresiones de la elasticidad finita para tener certeza que el modelo obtenido se corresponde con el de grandes deformaciones y las constantes materiales tienen el mismo significado físico. Para obtener las expresiones de pequeñas deformaciones simplemente debe tenerse en cuenta las aproximaciones cuando $\|\nabla_0 \mathbf{u}\| \ll 1$. En ese caso

$$\mathbf{E} \cong \mathbf{D}, \quad J \cong 1 + \text{tr}(\mathbf{D}) \quad \text{y} \quad \mathbf{C} \cong \mathbf{I} + 2\mathbf{D}, \quad (2.24)$$

donde $\mathbf{D} = \frac{\nabla_0 \mathbf{u}^T + \nabla_0 \mathbf{u}}{2}$ es el tensor de deformaciones infinitesimales. Teniendo en cuenta el teorema de Cayley-Hamilton, \mathbf{C} cumple su polinomio característico, se puede obtener:

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{\mathbf{C}^2 - I_1(\mathbf{C}) \mathbf{C} + I_2(\mathbf{C}) \mathbf{I}}{I_3(\mathbf{C})}, \quad (2.25)$$

donde $I_i(\mathbf{C})$ son los invariantes de \mathbf{C} que se demostró que se aproximan por

$$I_1(\mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{C}) \cong 3 + 2 \text{tr}(\mathbf{D}), \quad (2.26a)$$

$$I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)] \cong 3 + 4 \text{tr}(\mathbf{D}), \quad (2.26b)$$

$$I_3(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}) = J^2 \cong 1 + 2 \text{tr}(\mathbf{D}), \quad (2.26c)$$

y además:

$$\frac{1}{1 + 2 \text{tr}(\mathbf{D})} \cong 1 - 2 \text{tr}(\mathbf{D}), \quad (2.27)$$

por tanto

$$\mathbf{C}^{-1} \cong [\mathbf{I} - 2\mathbf{D} + 2\text{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I}] [1 - 2\text{tr}(\mathbf{D})] \Rightarrow \mathbf{C}^{-1} \cong \mathbf{I} - 2\mathbf{D}. \quad (2.28)$$

Para aproximar $J^{-2/3}$ se demostró que

$$J^{-2/3} \cong (1 + \text{tr}(\mathbf{D}))^{-2/3} \cong 1 - \frac{2}{3}\text{tr}(\mathbf{D}). \quad (2.29)$$

De las expresiones anteriores se tiene que para el material de Simo-Miehe

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}}^\circ = \frac{\kappa}{2} (J^2 - 1) \mathbf{C}^{-1} \cong \kappa \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I}, \quad (2.30)$$

y

$$\bar{\mathbf{S}}^\circ = J^{-2/3} \mu \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \right] \cong 2\mu \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} \right), \quad (2.31)$$

obteniendo como era de esperar el clásico tensor elástico de pequeñas deformaciones

$$\mathbf{S}^\circ = \bar{\bar{\mathbf{S}}}^\circ + \bar{\mathbf{S}}^\circ \cong \lambda \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}, \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{3\kappa - 2\mu}{3}. \quad (2.32)$$

Por tanto para viscoelasticidad en pequeñas deformaciones se tiene

$$\mathbf{S} \cong \mathbf{S}^\circ - \int_{-\infty}^t 2\mu \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} \right) \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \exp(-(t-s)/\tau_i) ds. \quad (2.33)$$

Recordar que en pequeñas deformaciones $\mathbf{S} \cong \mathbf{P} \cong \boldsymbol{\sigma}$ (Gurtin, 1982).

2.4. Obtención de datos experimentales

En este trabajo se utilizan datos experimentales obtenidos *in-vitro* en ovejitas. Los datos experimentales que se utilizan en esta tesis son los mismos que los utilizados en (Valdez-Jasso et al., 2009) donde se realiza una clara introducción de cómo fueron obtenidos. Todos los datos experimentales (presión y radio) fueron obtenidos con una frecuencia de 200 datos por segundo.

En términos generales, sólo importa destacar que los segmentos arteriales fueron estudiados en un simulador circulatorio, bajo condiciones de pre-

sión y flujo intra-arterial y de frecuencia de bombeo (pulsaciones) controladas en niveles que simularon condiciones fisiológicas, a la vez que los tejidos se mantuvieron en un medio (solución Tyrode) con características químicas, de oxigenación y temperatura que simulan el estado *in-vivo*.

2.4.1. Datos *in-vitro* en ovejas

En la Figura 2.3 se ilustra la ubicación de las arterias donde las siglas representan: CD (Carótida Derecha), TB (Tronco Braquiocefálico), AA (Aorta Ascendente), ATDP (Aorta Torácica Descendente Proximal), ATDD (Aorta Torácica Descendente Distal), AAD (Aorta Abdominal Descendente) y FI (Femorales Izquierdas).

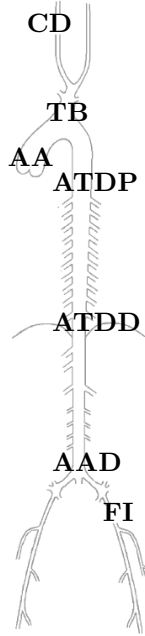


Tabla 2.1: Datos de arterias.

Arteria	# Muestras	$e(\text{mm})$
CD	11	0.38 ± 0.01
TB	11	0.91 ± 0.04
AA	12	1.26 ± 0.16
ATDP	11	1.10 ± 0.04
ATDD	11	1.06 ± 0.04
AAD	11	0.78 ± 0.07
FI	11	0.31 ± 0.02

Cada muestra es una oveja diferente.

Figura 2.3: Ubicación de arterias

En la Tabla 2.1 se detallan las cantidad de muestras, así mismo en dicha tabla se expresa el espesor e promedio y su desviación estándar, ambos valores obtenidos del trabajo presentado por Valdez-Jasso et al. (2009). En la Tabla 2.2 se encuentran la cantidad de datos por muestra de arteria y en la Tabla 2.3 se tiene para cada arteria el radio R_0 obtenido experimentalmente.

Tabla 2.2: Cantidad de datos por muestra.

#	CD	TB	AA	ATDP	ATDD	AAD	FI
1	335	1027	1175	921	1168	443	946
2	501	933	1185	765	906	1187	2280
3	891	1197	1152	1050	677	2026	1001
4	524	757	1116	1089	755	2318	880
5	490	1307	816	862	905	327	698
6	501	472	1322	771	742	1043	999
7	696	1029	1744	919	884	590	582
8	405	459	2275	302	977	1781	1233
9	529	968	1005	811	503	1202	822
10	529	609	2928	917	936	1068	869
11	527	1023	983	826	853	368	1005
12			1666				

Tabla 2.3: Radio R_0 estimado experimentalmente, en mm.

#	CD	TB	AA	ATDP	ATDD	AAD	FI
1	4.325	7.950	9.115	8.995	8.270	8.060	2.565
2	4.055	8.025	10.220	9.120	8.690	8.362	2.885
3	3.960	8.185	10.085	8.569	8.615	8.272	2.740
4	4.300	8.550	9.800	8.885	8.358	8.144	2.838
5	4.150	8.575	9.135	9.155	8.400	8.250	2.920
6	4.225	9.400	9.535	8.580	9.000	8.262	2.720
7	3.905	8.735	10.000	8.780	8.030	8.425	2.500
8	4.175	8.930	9.115	8.651	9.125	8.318	2.811
9	4.005	11.350	8.630	8.760	8.250	8.215	2.985
10	4.000	8.800	8.405	9.275	9.050	8.229	2.845
11	3.595	9.350	8.800	8.645	8.345	8.253	3.130
12			9.450				

En este trabajo se utiliza la teoría de grandes deformaciones y desplazamientos presentada en la Sección 2.3. Para poder corroborar que es adecuado utilizar dicha teoría se puede calcular la deformación tangencial de la arteria

de forma aproximada como $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \cong \frac{R_m - R_0}{R_0} = \frac{R_m}{R_0} - 1$, donde R_m es el radio medido experimentalmente para cada instante t . En la Tabla 2.4 se muestran los resultados de la mínima y máxima deformación tangencial calculadas con esta expresión. Se observa que las deformaciones máximas son elevadas justificando el uso de la teoría de grandes deformaciones y desplazamientos.

En esta tesis se utilizan los datos presentados en (Valdez-Jasso et al., 2009) donde se asume la hipótesis de pared delgada¹ y pequeñas deformaciones, por tanto es útil obtener la relación entre espesor e y radio R_0 . En la Tabla 2.4 se muestran también los resultados de $e/\text{mín}\{R_0\}$ para cada probeta, observándose que la hipótesis de pared delgada es bastante razonable. Igualmente, en esta tesis, no se utiliza la simplificación de pared delgada sino que se considera que la arteria tiene pared gruesa.

Tabla 2.4: Relación espesor/radio, deformaciones mínimas y máximas de medidas experimentales.

Arteria	$\frac{e}{\text{mín}\{R_0\}}$	mín $\{\varepsilon_{\theta\theta}\}$ (%)	máx $\{\varepsilon_{\theta\theta}\}$ (%)
CD	0.106	-5.6	6.05
TB	0.114	6.0	27.37
AA	0.150	6.8	37.80
ATDP	0.128	2.6	20.32
ATDD	0.132	-0.6	23.03
AAD	0.097	1.7	9.67
FI	0.124	-3.0	11.30

Los valores negativos de mín $\{\varepsilon_{\theta\theta}\}$ dan cuenta que para algunas probetas los valores obtenidos experimentalmente para R_0 son mayores que algunos valores de R_m , lo cual evidencia que el error experimental ha sido importante en este caso, lo cual motiva que R_0 sea un parámetro a identificar.

En las Figuras 2.4-2.7 se muestra un gráfico presión-radio para una muestra de cada arteria de forma de ilustrar al lector sobre los datos utilizados.

En la Figura 2.8 se muestran la presión y el radio obtenidos experimentalmente para la muestra N° 1 del Tronco Braquiocefálico. Se observa en las

¹Suele aceptarse esta hipótesis cuando $\frac{e}{R} < 0.1$.

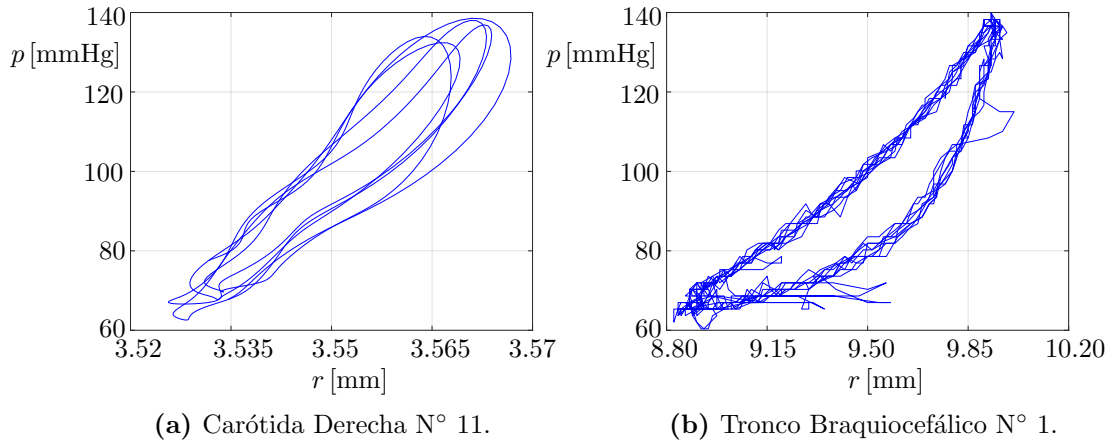


Figura 2.4: Datos experimentales de una muestra de la Carótida Derecha (CD) y el Tronco Braquiocefálico (TB).

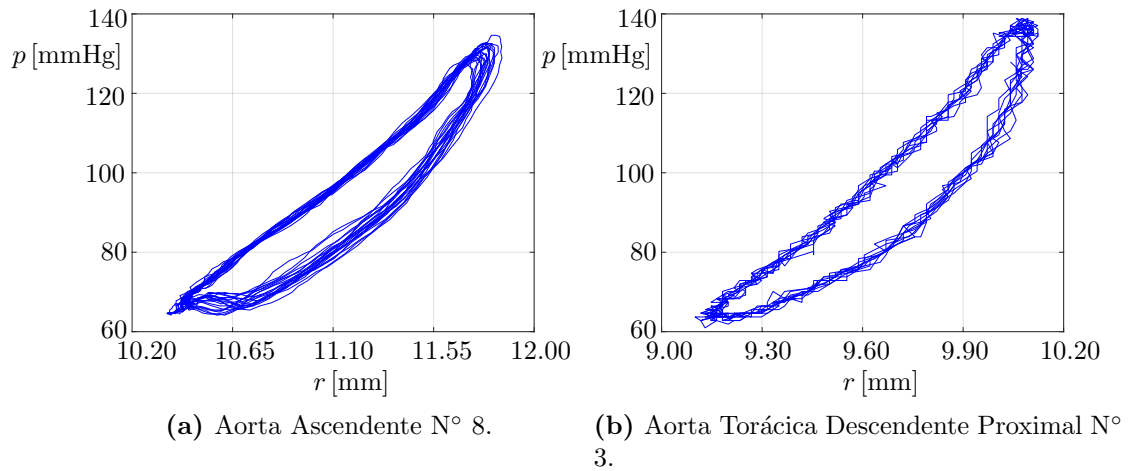
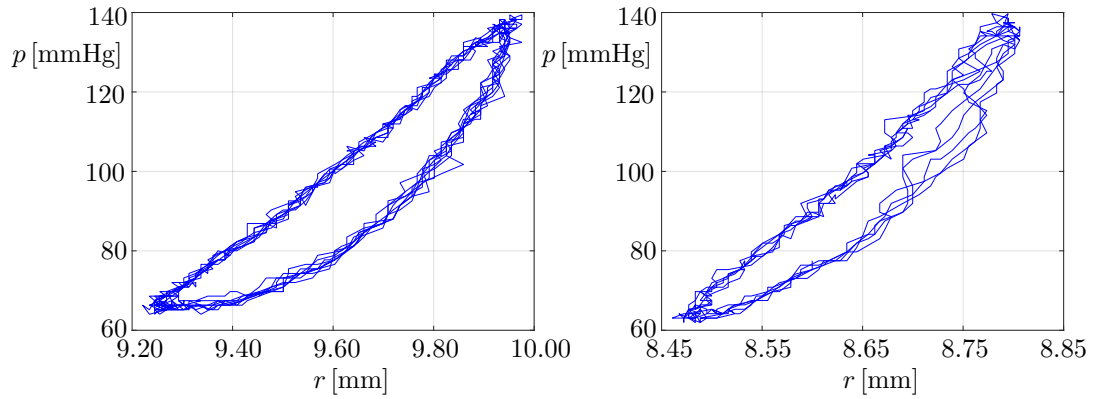


Figura 2.5: Datos experimentales de una muestra de la Aorta Ascendente (AA) y el Aorta Torácica Descendente Proximal (ATDP).

Figuras 2.8a y 2.8b que los datos experimentales son obtenidos cuando ya no existe una componente transitoria apreciable, esto quiere decir que se puede considerar que los datos son obtenidos cuando solo existe el desplazamiento del régimen permanente. Lo anterior es importante tenerlo en cuenta para realizar la identificación material, dado que ésta debe realizarse una vez que la componente transitoria haya desaparecido. Nótese que las arterias fueron sometidas a condiciones pulsátiles de presión (y diámetro) con niveles y frecuencias similares a las fisiológicas (ej. presión entre 60 y 140 mmHg).



(a) Aorta Torácica Descendente Distal N° 10. (b) Aorta Abdominal Descendente N° 9.

Figura 2.6: Datos experimentales de una muestra de la Aorta Torácica Descendente Distal (ATDD) y el Aorta Abdominal Descendente (AAD).

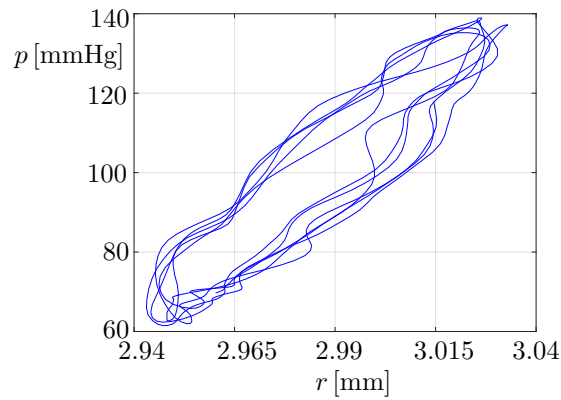
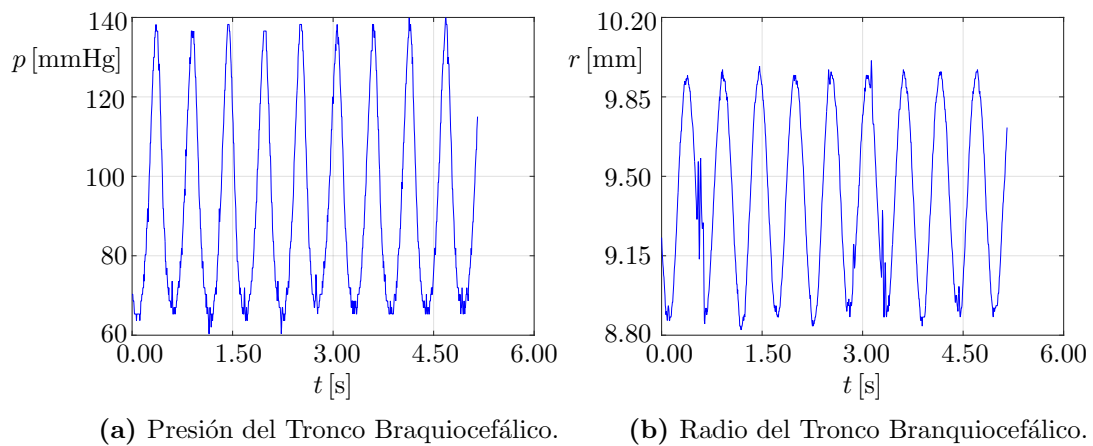


Figura 2.7: Datos experimentales de la Femoral Izquierda (FI) N° 9.



(a) Presión del Tronco Braquiocefálico. (b) Radio del Tronco Branquiocefálico.

Figura 2.8: Presión y radio experimental de la muestra N° 1 del Tronco Branquiocefálico (TB).

2.5. Identificación de propiedades mecánicas

Para encontrar los parámetros mecánicos del modelo (κ , μ , γ_i y τ_i) y geométricos (radio a presión cero R_0) que mejor ajusten los datos experimentales, se formula un problema de optimización. En lo que sigue, los parámetros mecánicos y geométricos se agrupan en un vector \mathbf{p} . En el problema de optimización se busca encontrar los valores \mathbf{p} que minimicen la diferencia entre los desplazamientos del modelo $u(\mathbf{p})$ y los desplazamientos medidos u_m , es decir, que minimicen la norma $\|u(\mathbf{p}) - u_m\|$. Los parámetros constitutivos y geométricos deben cumplir ciertas condiciones, las cuales son incluidas como restricciones del problema de optimización, el cual es entonces formulado como:

$$(U) \begin{cases} \text{mín} & \frac{\|u(\mathbf{p}) - u_m\|^2}{\|u_m\|^2} \\ \mathbf{p} & \\ \text{s.a} & p_{i,\min} \leq p_i \leq p_{i,\max}. \end{cases} \quad (2.34)$$

Se asume que las medidas experimentales corresponden al radio interior (R_1) de las arterias, y debido a que los resultados experimentales son valores de diámetros en función del tiempo, el problema (U) se reformula como

$$(R) \begin{cases} \text{mín} & \frac{\|u(\mathbf{p}, R_1) - (R_m - R_0)\|^2}{\|R_m - R_0\|^2} \\ \mathbf{p} & \\ \text{s.a} & p_{i,\min} \leq p_i \leq p_{i,\max} \end{cases} \quad (2.35)$$

donde R_m es el radio medido, calculado como la mitad del diámetro medido, y R_0 es el radio a presión cero a identificar. Se considera que el material es casi incompresible siendo $\kappa = 100 \mu^1$. En los casos a identificar se utiliza un único brazo de Maxwell por tanto los parámetros materiales a identificar son μ , γ y τ . Definiendo $\mathbf{p} = [\mu, \gamma, \tau, R_0]$ el problema de optimización se formula como:

$$(R) \begin{cases} \text{mín} & \frac{\|u(\mathbf{p}, R_1) - (R_m - p_4)\|^2}{\|R_m - p_4\|^2} \\ \mathbf{p} & \\ \text{s.a} & \mu_{\min} \leq p_1 \leq \mu_{\max}, \\ & \gamma_{\min} \leq p_2 \leq \gamma_{\max}, \\ & \tau_{\min} \leq p_3 \leq \tau_{\max}, \\ & R_{0,\min} \leq p_4 \leq R_{0,\max}. \end{cases} \quad (2.36)$$

¹De esta manera el coeficiente de Poisson es $\nu = 0.495$.

2.6. Optimización

Para resolver el problema de optimización (R) presentado en la Ecuación (2.36) se utiliza la función `fmincon` de MATLAB. A continuación se describe en pocas palabras la sintáxis de esta función¹:

$$\mathbf{x} = \text{fmincon}(\text{fun}(\mathbf{x}), \mathbf{x}_0, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{A}_{eq}, \mathbf{b}_{eq}, \mathbf{l}_b, \mathbf{u}_b, \text{nonlcon}(x), \text{options}) \quad (2.37)$$

donde

- \mathbf{x}_0 es el valor inicial a partir del que MATLAB comienza la búsqueda.
- $\text{fun}(\mathbf{x})$ es la función objetivo, que devuelve un valor real.
- Las restricciones lineales se añaden con las matrices \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{A}_{eq} y \mathbf{b}_{eq} .

$$\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_{eq} \mathbf{x} - \mathbf{b}_{eq} = \mathbf{0}.$$

En esta tesis no es necesario incluir estas restricciones.

- Las restricciones no lineales se escriben dentro de una función `nonlcon(x)`. En esta tesis no es necesario incluir estas restricciones.
- En `options` se especifican opciones como el algoritmo de optimización empleado, la tolerancia en el paso de búsqueda, tolerancia en el funcional y evaluaciones máximas de la función.

Por defecto utiliza el algoritmo `interior-point` que es el que se utiliza en este trabajo. Igualmente tiene la posibilidad de utilizar otros algoritmos.

¹Por más información puede ser de utilidad la página de referencia: <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>.

Capítulo 3

Código 3D viscoelástico en grandes deformaciones

En este capítulo se describe el código 3D viscoelástico en grandes deformaciones implementado a partir del desarrollo de la Sección 2.3.

En la Sección 3.1 se describe la implementación del código y se resume el pseudocódigo realizado. Luego en la Sección 3.2 se describen los softwares auxiliares que se utilizan para facilitar la generación de mallas y la visualización. Finalmente en la Sección 3.3 se realiza la validación del código 3D a partir de soluciones analíticas y se analiza la convergencia de la solución numérica.

3.1. Implementación

Definiendo

$$\mathbf{H}^{(i)} = \int_{-\infty}^t \exp(-(t-s)/\tau_i) \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \text{DEV} \left[2 \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}(s))}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right] \right\} ds, \quad (3.1)$$

y recordando la Ecuación (2.15) se tiene que

$$\mathbf{S} = \bar{\bar{\mathbf{S}}} + \gamma_{\infty} \bar{\mathbf{S}} + J^{-2/3} \sum_{i=1}^N \gamma_i \mathbf{H}^{(i)}. \quad (3.2)$$

Por la propiedad de semi grupo (Simo y Hughes, 1998) puede obtenerse la

siguiente fórmula de recurrencia para $\mathbf{H}^{(i)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{t_{n+1}}^{(i)} &= \exp(-\Delta t_n/\tau_i) \mathbf{H}_{t_n}^{(i)} \\ &\dots + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp(-(t_{n+1} - s)/\tau_i) \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \text{DEV} \left[2 \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}(s))}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right] \right\} ds, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$. Utilizando la regla del punto medio se puede aproximar la integral de la Ecuación (3.3) obteniéndose

$$\mathbf{H}_{t_{n+1}}^{(i)} = \exp(-\Delta t_n/\tau_i) \mathbf{H}_{t_n}^{(i)} + \exp(-\Delta t_n/2\tau_i) \left(\tilde{\mathbf{S}}_{t_{n+1}} - \tilde{\mathbf{S}}_{t_n} \right), \quad (3.4)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{S}}_{t_{n+1}} = \text{DEV}_{t_{n+1}} \left[2 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\mathbf{C}}}(\bar{\mathbf{C}}_{t_{n+1}}) \right], \quad \tilde{\mathbf{S}}_{t_n} = \text{DEV}_{t_n} \left[2 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\mathbf{C}}}(\bar{\mathbf{C}}_{t_n}) \right], \quad (3.5)$$

siendo

$$\text{DEV}_{t_n} [\bullet] = (\bullet) - \frac{1}{3} [(\bullet) : \mathbf{C}_{t_n}] \mathbf{C}_{t_n}^{-1}, \quad (3.6a)$$

$$\text{DEV}_{t_{n+1}} [\bullet] = (\bullet) - \frac{1}{3} [(\bullet) : \mathbf{C}_{t_{n+1}}] \mathbf{C}_{t_{n+1}}^{-1}, \quad (3.6b)$$

concluyendo que

$$\mathbf{S}_{t_{n+1}} = \bar{\bar{\mathbf{S}}}_{t_{n+1}}^\circ + \gamma_\infty \bar{\mathbf{S}}_{t_{n+1}}^\circ + J_{t_{n+1}}^{-2/3} \sum_{i=1}^N \gamma_i \text{DEV}_{t_{n+1}} \left[\mathbf{H}_{t_{n+1}}^{(i)} \right]. \quad (3.7)$$

Redefiniendo $\mathbf{H}_{t_{n+1}}^{(i)}$ como

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{H}}_{t_n}^{(i)} &= \exp(-\Delta t_n/\tau_i) \mathbf{H}_{t_n}^{(i)} - \exp(-\Delta t_n/2\tau_i) \tilde{\mathbf{S}}_{t_n}, \\ \mathbf{H}_{t_{n+1}}^{(i)} &= \tilde{\mathbf{H}}_{t_n}^{(i)} + \exp(-\Delta t_n/2\tau_i) \tilde{\mathbf{S}}_{t_{n+1}}, \end{cases} \quad (3.8)$$

y definiendo

$$g^*(\Delta t_n) = \gamma_\infty + \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp(-\Delta t_n/2\tau_i), \quad (3.9)$$

se tiene

$$\mathbf{S}_{t_{n+1}} = \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{t_{n+1}} + g^*(\Delta t_n) \overline{\mathbf{S}}_{t_{n+1}} + J_{t_{n+1}}^{-2/3} \sum_{i=1}^N \gamma_i \text{DEV}_{t_{n+1}} \left[\widetilde{\mathbf{H}}_{t_n}^{(i)} \right]. \quad (3.10)$$

3.1.1. Pseudocódigo

En (Simo y Hughes, 1998) y (Belytschko et al., 2001) se ejemplifican, respectivamente, pseudocódigos para problemas viscoelásticos y de elasticidad finita. Sin embargo, los pseudocódigos allí presentados son principalmente conceptuales y pueden requerir un gran esfuerzo de interpretación, mientras que en esta sección se pretende establecer una guía más directa hacia la implementación. Por lo anterior, a continuación se describe el pseudocódigo desarrollado en esta tesis para el código 3D viscoelástico. En lo que sigue se utilizará notación similar a la utilizada en (Simo y Hughes, 1998; Belytschko et al., 2001).

En el código se utiliza el Método de Elementos Finitos (MEF) con elementos tetraédricos y algunas de las expresiones que aparecen a continuación se pueden encontrar desarrolladas en el Apéndice B. En $t = t_n$ se tiene el campo de desplazamientos \mathbf{u}_{t_n} y los tensores $\mathbf{H}_{t_n}^{(i)}$ y $\widetilde{\mathbf{S}}_{t_n}$. $\Omega_{R,e}$ es el dominio en la configuración de referencia del elemento e . Se deben definir las tolerancias $\text{tol}_{\mathbf{f},\text{abs}}$, $\text{tol}_{\mathbf{f},\text{rel}}$, $\text{tol}_{\mathbf{U}}$ y tol_k .

- Para $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$

Inicialización:

- $N_{\mathbf{f},\text{abs}} = 1$, $N_{\mathbf{f},\text{rel}} = 1$, $N_{\mathbf{U},\text{rel}} = 1$ y $k = 1$.
- $\mathbf{u}_{1,t_{n+1},e} = \mathbf{u}_{k_{\text{fin}},t_n,e}$: El desplazamiento nodal del elemento e en el instante t_{n+1} es igual al desplazamiento nodal para el equilibrio en t_n que se da en k_{fin} iteraciones, ver Ecuación (B.12).
- $\widetilde{\mathbf{H}}_{t_n,e}^{(i)} = \exp(-\Delta t_n/\tau_i) \mathbf{H}_{t_n,e}^{(i)} - \exp(-\Delta t_n/2\tau_i) \widetilde{\mathbf{S}}_{t_n,e}$, para cada elemento e y cada brazo de Maxwell (i) .

Solución iterativa del sistema no lineal:

- Mientras $N_{\mathbf{f},\text{abs}} < \text{tol}_{\mathbf{f},\text{abs}}$ & $N_{\mathbf{f},\text{rel}} < \text{tol}_{\mathbf{f},\text{rel}}$ & $N_{\mathbf{U},\text{rel}} < \text{tol}_{\mathbf{U}}$ & $k < \text{tol}_k$
 - 1) Parámetros preliminares para cada elemento e : Siendo $\mathbf{B}_{R,e}$ y $\mathcal{B}_{R,e}$ derivadas de las funciones de interpolación (ver Apéndice B), para el elemento e se calcula

- $\mathbf{F}_{k,t_{n+1},e} = \mathbf{I} + \mathbf{u}_{k,t_{n+1},e} \mathbf{B}_{R,e}^T$
- $J_{k,t_{n+1},e} = \det [\mathbf{F}_{k,t_{n+1},e}]$
- $\mathbf{C}_{k,t_{n+1},e} = \mathbf{F}_{k,t_{n+1},e}^T \mathbf{F}_{k,t_{n+1},e}$
- $\bar{\mathbf{F}}_{k,t_{n+1},e} = J_{k,t_{n+1},e}^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}_{k,t_{n+1},e}$
- $\bar{\mathbf{C}}_{k,t_{n+1},e} = J_{k,t_{n+1},e}^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C}_{k,t_{n+1},e}$

2) Cálculo de $\mathbf{S}_{k,t_{n+1},e}$:

- $\tilde{\mathbf{S}}_{k,t_{n+1},e} = \text{DEV}_{k,t_{n+1},e} \left[2 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} (\bar{\mathbf{C}}_{k,t_{n+1},e}) \right]$
- $\bar{\mathbf{S}}_{k,t_{n+1},e}^\circ = J_{k,t_{n+1},e}^{-\frac{2}{3}} \tilde{\mathbf{S}}_{k,t_{n+1},e}$
- $\bar{\mathbf{S}}_{k,t_{n+1},e} = g^*(\Delta t_n) \bar{\mathbf{S}}_{k,t_{n+1},e}^\circ + J_{k,t_{n+1},e}^{-\frac{2}{3}} \sum_{i=1}^N \gamma_i \text{DEV}_{k,t_{n+1},e} \left\{ \tilde{\mathbf{H}}_{t_n,e}^{(i)} \right\}$
- $\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{k,t_{n+1},e}^\circ = J_{k,t_{n+1},e} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial J} (J_{k,t_{n+1},e}) \mathbf{C}_{k,t_{n+1},e}^{-1}$
- $\mathbf{S}_{k,t_{n+1},e} = \bar{\bar{\mathbf{S}}}_{k,t_{n+1},e}^\circ + \bar{\mathbf{S}}_{k,t_{n+1},e}$

3) Ecuación constitutiva:

- $\mathbf{C}_{k,t_{n+1},e} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{k,t_{n+1},e}}{\partial \mathbf{C}_{k,t_{n+1},e}}$: Se obtiene utilizando derivada de paso complejo (Hürkamp et al., 2015), ver Apéndice D.

4) Sistema lineal:

- $\mathbf{K}_{k,t_{n+1},e}^{\text{mat}} = \int_{\Omega_{R,e}} \mathbf{B}_{R,e}^T \mathbf{C}_{k,t_{n+1},e} \mathbf{B}_{R,e} d\Omega_{R,e}$
- $\left\{ \mathbf{K}_{k,t_{n+1},e}^{\text{geo}} \right\}_{IJ} = \mathbf{I} \int_{\Omega_{R,e}} \left\{ \mathbf{B}_{R,e} \right\}_I^T \mathbf{S}_{k,t_{n+1},e} \left\{ \mathbf{B}_{R,e} \right\}_J d\Omega_{R,e}$, donde I, J son los nodos del elemento e .
- $\mathbf{K}_{k,t_{n+1},e} = \mathbf{K}_{k,t_{n+1},e}^{\text{mat}} + \mathbf{K}_{k,t_{n+1},e}^{\text{geo}} \Rightarrow$ ensamblando se obtiene la matriz de rigidez global $\mathbf{K}_{k,t_{n+1}}$
- $\mathbf{r}_{k,t_{n+1}} = \mathbf{f}_{t_{n+1}}^{\text{ext}} - \mathbf{f}_{k,t_{n+1}}^{\text{int}}$. Si $k = 1$ entonces $\mathbf{f}_{k,t_{n+1}}^{\text{int}} = \mathbf{f}_{k_{\text{fin}},t_n}^{\text{int}}$
- $\mathbf{d}_{k,t_{n+1}} = \mathbf{K}_{k,t_{n+1}}^{-1} \mathbf{r}_{k,t_{n+1}}$
- $\mathbf{U}_{k+1,t_{n+1}} = \mathbf{U}_{k,t_{n+1}} + \mathbf{d}_{k,t_{n+1}} \Rightarrow$ se busca para cada elemento $\mathbf{u}_{k+1,t_{n+1},e}$

5) Con $\mathbf{u}_{k+1,t_{n+1},e}$ y repitiendo los pasos 1) y 2) se obtiene:

- $\tilde{\mathbf{S}}_{k+1,t_{n+1},e}$ y $\mathbf{S}_{k+1,t_{n+1},e}$.
- $\mathbf{f}_{k+1,t_{n+1},e}^{\text{int}} = \int_{\Omega_{R,e}} \mathbf{B}_{R,e}^T \mathbf{S}_{k+1,t_{n+1},e} d\Omega_{R,e} \Rightarrow$ ensamblando se obtiene el vector de fuerzas internas global $\mathbf{f}_{k+1,t_{n+1}}^{\text{int}}$.

6) Salida del while:

- $Nf_{\text{abs}} = \|\mathbf{f}_{k+1,t_{n+1}}^{\text{int}} - \mathbf{f}_{t_{n+1}}^{\text{ext}}\|$
- $Nf_{\text{rel}} = \|\mathbf{f}_{k+1,t_{n+1}}^{\text{int}} - \mathbf{f}_{t_{n+1}}^{\text{ext}}\| / \|\mathbf{f}_{t_{n+1}}^{\text{ext}}\|$
- $NU_{\text{rel}} = \|\mathbf{d}_{k,t_{n+1}}\| / \|\mathbf{U}_{k,t_{n+1}}\|$
- $k = k + 1$.

• **Fin Mientras**

Actualización:

- $\tilde{\mathbf{S}}_{t_{n+1},e} = \tilde{\mathbf{S}}_{k_{\text{fin}},t_{n+1},e}$
- $\mathbf{H}_{t_{n+1},e}^{(i)} = \tilde{\mathbf{H}}_{t_n,e}^{(i)} + \exp(-\Delta t_n/2\tau_i) \tilde{\mathbf{S}}_{t_{n+1},e}$

▪ **Fin Para**

En el pseudocódigo anterior $\mathbf{f}_{t_{n+1}}^{\text{ext}}$ es el vector de fuerzas eternas nodales equivalentes. El código desarrollado en esta tesis admite presiones externas de Piola (actuando sobre la configuración de referencia) y de Cauchy (actuando sobre la configuración actual). A su vez, el código tridimensional admite presiones externas que varíen en el espacio y en el tiempo.

3.2. GMSH y ParaView

GMSH¹ es un software que permite generar mallas tridimensionales con muchas facilidades para el pre y posproceso desarrollado por Christophe Geuzaine y Jean-François Remacle. Pueden encontrarse diversos manuales sobre este software, los mas destacados son el desarrollado por los autores ([Geuzaine y Remacle, 2016](#)) y el desarrollado en el Imperial College ([Avdis y Mouradian, 2011](#)). Este software se ha utilizado por diversos autores en diferentes áreas en las que se utiliza el MEF ([Geuzaine y Remacle, 2009](#); [Remacle et al., 2007](#)). En este trabajo GMSH se utiliza para la realización de las mallas e imponer condiciones de contorno cinemáticas y mecánicas (preproceso).

El software **ParaView**² es de código abierto y se utiliza para visualizaciones 3D. ParaView ha sido utilizado en diversos trabajos del área. En este trabajo se utiliza para visualizar los resultados obtenidos por el código viscoelástico desarrollado (posproceso). Existen diversos manuales de uso para Paraview pero ([Ayachit, 2008](#)) y ([Kitware, 2012](#)) fueron los utilizados en este trabajo.

¹Link: <http://gmsh.info/>.

²Link: <http://www.paraview.org/>.

En (Ayachit, 2008) se muestra también como manejar la interfaz, lo que puede resultar útil para un usuario del código desarrollado en esta tesis.

3.3. Validación

En esta sección se valida el código 3D en base a algunos ejemplos sencillos que tengan solución analítica. En los ejemplos de las Secciones 3.3.1 y 3.3.2 no se utilizan valores representativos de un problema real para los parámetros aunque sí se establecen acciones externas que produzcan grandes deformaciones.

En las Secciones 3.3.3 y 3.3.4 se estudia la convergencia en la cantidad de elementos y en el paso de tiempo respectivamente. Estrictamente, solamente se estudia el número de elementos y el número de pasos de tiempos necesario para apreciar la estabilización de los resultados, puesto que el problema considerado no tiene solución analítica y el código computacional utilizado fue validado en las Secciones 3.3.1 y 3.3.2.

3.3.1. Caso elástico

El caso elástico puede obtenerse asumiendo $\gamma_\infty = 1$ y $\gamma_i = 0 \forall i$ en la Ecuación (2.8):

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^\circ = J \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} + J^{-2/3} \text{DEV} \left[2 \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}(s))}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right], \quad (3.11)$$

y para el material de Simo-Miehe, Ecuación (2.23),

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^\circ = \frac{\kappa}{2} (J^2 - 1) \mathbf{C}^{-1} + J^{-2/3} \mu \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \right]. \quad (3.12)$$

Barra libre

En este caso se analiza un prisma como el de la Figura 3.1, donde se impone una deformación dada por

$$\mathbf{x} = \alpha X \mathbf{e}_x + \beta Y \mathbf{e}_y + \delta Z \mathbf{e}_z, \quad (3.13)$$

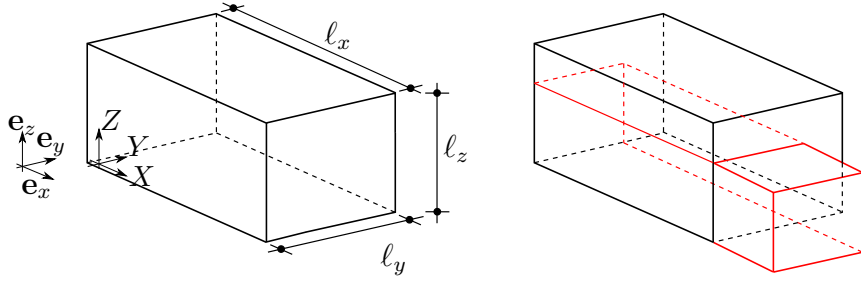


Figura 3.1: Esquema de la barra libre.

en consecuencia se tiene

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \Rightarrow J = \alpha \beta \delta, \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Luego, utilizando la Ecuación (3.12)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^\circ &= \frac{\kappa}{2} [(\alpha \beta \delta)^2 - 1] \begin{pmatrix} \alpha^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{-2} \end{pmatrix} + \frac{\mu}{(\alpha \beta \delta)^{2/3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\dots - \frac{\mu}{3(\alpha \beta \delta)^{2/3}} (\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2) \begin{pmatrix} \alpha^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{-2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Recordando que $\mathbf{P}^\circ = \mathbf{F} \mathbf{S}^\circ$ e imponiendo $P_{yy}^\circ = P_{zz}^\circ = 0$ se tiene

$$\beta P_{yy}^\circ = \frac{\kappa}{2} [(\alpha \beta \delta)^2 - 1] + \frac{\mu}{3(\alpha \beta \delta)^{2/3}} [2\beta^2 - (\alpha^2 + \delta^2)] = 0, \quad (3.16a)$$

$$\delta P_{zz}^\circ = \frac{\kappa}{2} [(\alpha \beta \delta)^2 - 1] + \frac{\mu}{3(\alpha \beta \delta)^{2/3}} [2\delta^2 - (\alpha^2 + \beta^2)] = 0, \quad (3.16b)$$

restando ambas ecuaciones se obtiene que $\beta^2 = \delta^2$, dado α , β y δ deben ser positivos se concluye que $\beta = \delta$. Utilizando el resultado anterior se tiene

$$3\kappa [\alpha^2 \beta^4 - 1] \sqrt[3]{\alpha^2 \beta^4} + 2\mu [\beta^2 - \alpha^2] = 0, \quad (3.17)$$

realizando el cambio de variable $\beta^2 = m^3$ se obtiene $3\kappa \alpha^{8/3} m^8 + 2\mu m^3 - 3\kappa \alpha^{2/3} m^2 - 2\mu \alpha^2 = 0$. Por tanto dados κ , μ y α , puede resolverse numéricamente la ecuación anterior (notar que m debe ser real y positivo). En la Figura 3.2 se muestran los resultados obtenidos resolviendo la Ecuación (3.17)

y mediante la utilización del código.

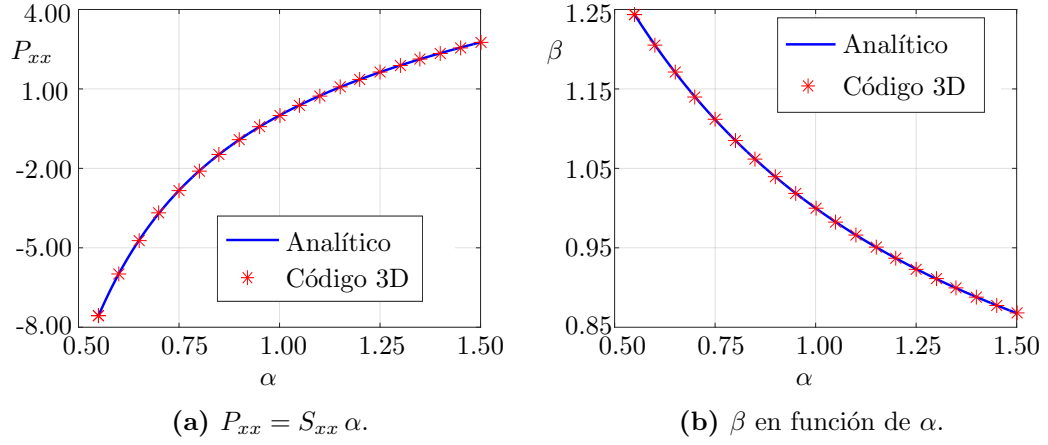


Figura 3.2: Ejemplo de barra libre utilizando un material elástico bajo hipótesis de grandes deformaciones. Se utilizó $\kappa = 10$, $\mu = 3$, $\gamma_\infty = 1$ y un cubo de $1 \times 1 \times 1$.

Cilindro bajo Estado Plano de Deformaciones

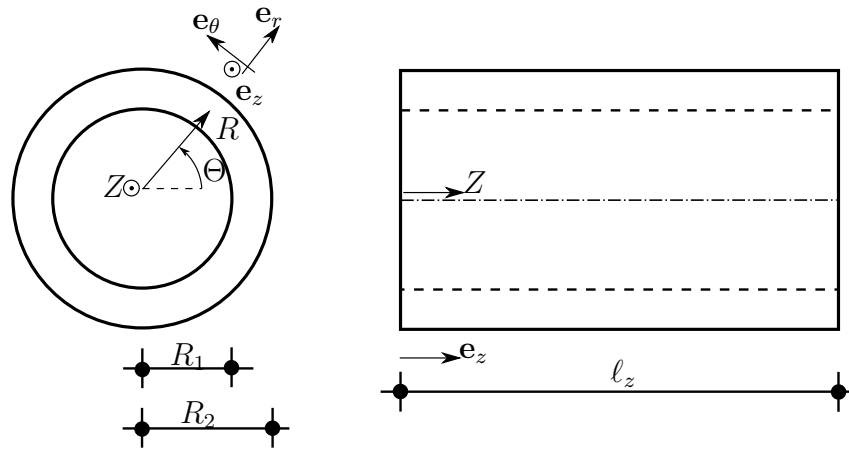


Figura 3.3: Esquema del cilindro bajo EPD.

En este caso se analiza un cilindro como el de la Figura 3.3, donde se impone una deformación dada por

$$\mathbf{x} = f(R) \mathbf{e}_r + Z \mathbf{e}_z, \quad (3.18)$$

y utilizando las ecuaciones del Apéndice A se tiene

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J = \frac{f' f}{R}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f'^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f^2}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Para obtener la solución del problema debe imponerse el equilibrio $\nabla \cdot \mathbf{P}^\circ = \mathbf{0}^1$. Utilizando $\mathbf{P}^\circ = \mathbf{F}\mathbf{S}^\circ$ y la Ecuación (3.12), se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales bastante difícil de resolver analíticamente. Por tanto, se propone analizar el caso en que $f = \delta R$ para el cual las ecuaciones son más sencillas (los tensores son uniformes por lo que es simple verificar el equilibrio). De lo anterior se tiene

$$\mathbf{S}^\circ = \frac{\kappa}{2} [\delta^4 - 1] \begin{pmatrix} \delta^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \delta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\mu}{3} \left[\frac{\delta^2 - 1}{\delta^{10/3}} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\delta^2 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

En la Figura 3.4 se ve la comparación del resultado numérico en contraste con el resultado analítico.

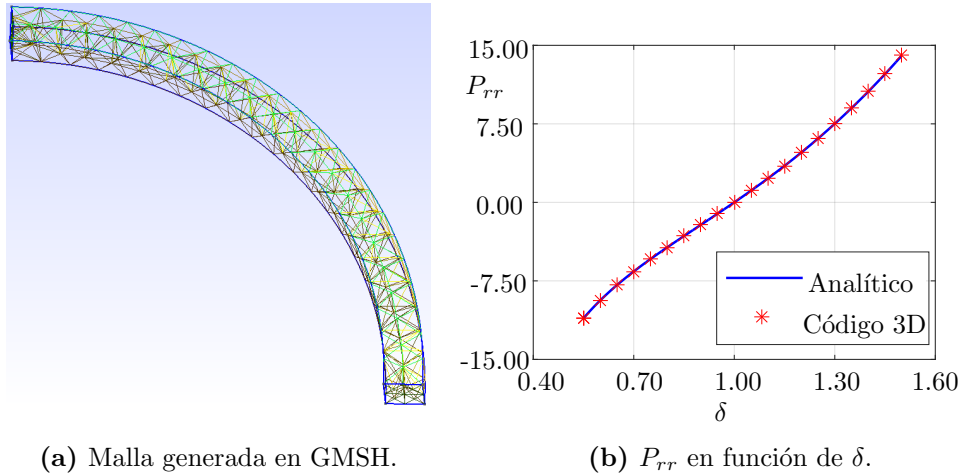


Figura 3.4: Ejemplo de cilindro en un material elástico bajo hipótesis de grandes deformaciones. Se utilizó $\kappa = 10$, $\mu = 3$, $\gamma_\infty = 1$ y se modeló un cuarto de cilindro cuya geometría es de radio interior $R_1 = 0.20$, radio exterior $R_2 = 0.22$.

¹En este ejemplo no se consideran fuerzas de volumen.

3.3.2. Caso viscoelástico

Para el caso viscoelástico se utilizará la Ecuación (2.15)

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^\circ - J^{-2/3} \int_{-\infty}^t J^{2/3} \bar{\mathbf{S}}^\circ \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \exp(-(t-s)/\tau_i) ds. \quad (3.21)$$

Barra lisa apoyada

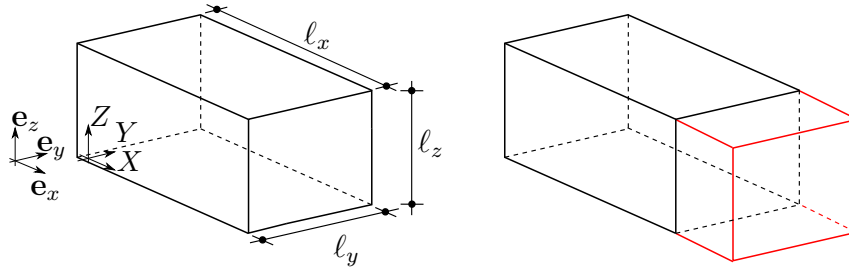


Figura 3.5: Esquema de la barra lisa apoyada.

En este caso se analiza un prisma como el de la Figura 3.5, donde se impone una deformación dada por

$$\mathbf{x} = \alpha X \mathbf{e}_x + Y \mathbf{e}_y + Z \mathbf{e}_z, \quad (3.22)$$

recordando la Ecuación (3.15)

$$\mathbf{S}^\circ = \frac{\kappa}{2} [\alpha^2 - 1] \begin{pmatrix} \alpha^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\mu(\alpha^2 - 1)}{3\alpha^{2/3}} \begin{pmatrix} 2\alpha^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$\bar{\mathbf{S}}^\circ = \frac{\mu(\alpha^2 - 1)}{3\alpha^{2/3}} \begin{pmatrix} 2\alpha^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \alpha. \quad (3.24)$$

Para $\alpha(t) = \alpha_0 H(t - t_0)$, con H la función de Heaviside se tiene:

$$\int_{-\infty}^t J^{2/3} \bar{\mathbf{S}}^\circ \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \exp\left(\frac{s-t}{\tau_i}\right) ds = J^{2/3} \bar{\mathbf{S}}^\circ \sum_{i=1}^N \gamma_i \left[1 - \exp\left(\frac{t_0 - t}{\tau_i}\right) \right] \quad (3.25)$$

y en consecuencia, si $t < t_0$ $\mathbf{S} = \mathbf{O}$ y si $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{\kappa}{2} [\alpha_0^2 - 1] \begin{pmatrix} \alpha_0^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\dots + \frac{\mu (\alpha_0^2 - 1)}{3 \alpha_0^{2/3}} \begin{pmatrix} 2 \alpha_0^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left[\gamma_\infty + \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp\left(\frac{t_0 - t}{\tau_i}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

En la Figura 3.6 se comparan los resultados analíticos y numéricos al variar los parámetros reológicos γ y τ .

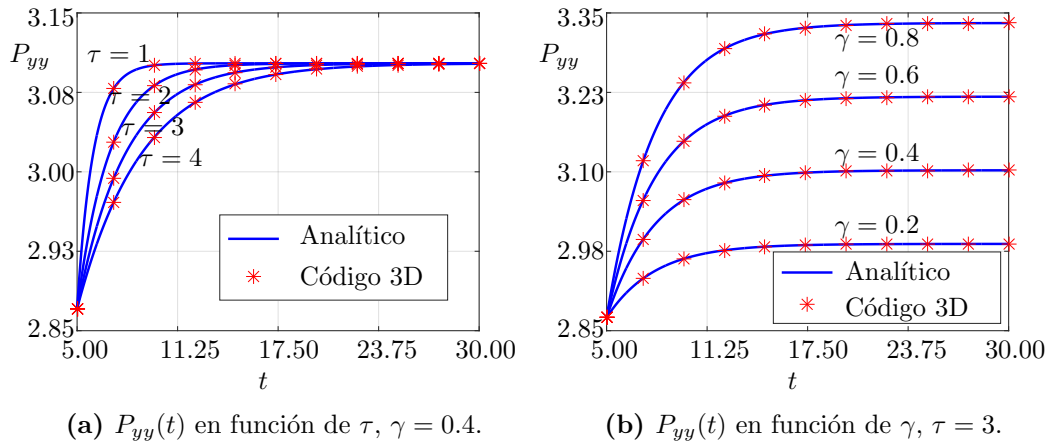


Figura 3.6: Ejemplo de barra lisa apoyada compuesta de un material viscoelástico bajo hipótesis de grandes deformaciones. Se utilizó $\kappa = 10$, $\mu = 3$, $t_0 = 5$ y $\alpha_0 = 1.3$.

Barra lisa apoyada con fuerza de volumen

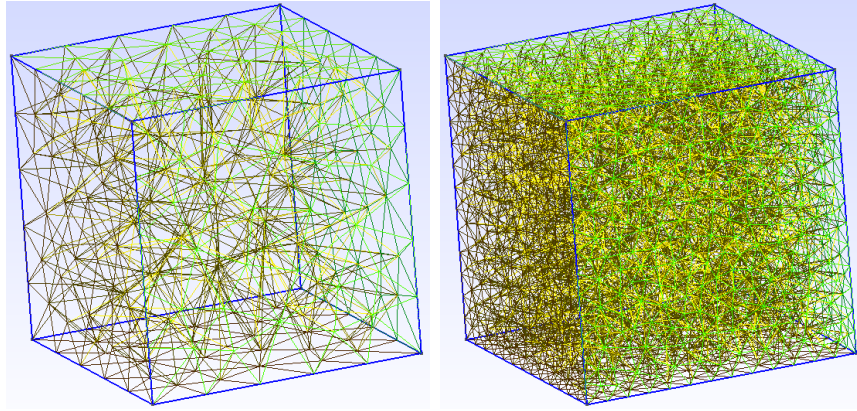
A continuación se resuelve un problema en el que se puede observar la convergencia en el mallado. Debido a que no existen soluciones analíticas sencillas se resuelve por generar una. Para realizar lo anterior, se impone en el prisma de la Figura 3.5 una deformación dada por

$$\mathbf{x} = \left(1 + \frac{\alpha X}{2}\right) X \mathbf{e}_x + Y \mathbf{e}_y + Z \mathbf{e}_z, \quad (3.27)$$

luego, imponiendo equilibrio $\nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ se tiene que $\mathbf{b} = -\frac{\partial P_{xx}}{\partial X} [1 \ 0 \ 0]^T$

$$-\frac{\partial P_{xx}}{\partial X} = -\frac{\kappa}{2}\alpha \left[1 + \frac{1}{(1 + \alpha X)^2} \right] \dots - \frac{2\mu}{3}\alpha \frac{[5 + (1 + \alpha X)^2]}{(1 + \alpha X)^{8/3}} \left[\gamma_\infty + \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp\left(\frac{t_0 - t}{\tau_i}\right) \right]. \quad (3.28)$$

En el código tridimensional se impone la fuerza de volumen \mathbf{b} para $\alpha = 0.5$ y $\alpha = -0.3$, el prisma considerado tiene como geometría $\ell_x = \ell_y = \ell_z = 1$. Se utiliza también que $\kappa = 10$, $\mu = 3$, $\tau = 0.2$ y $\gamma = 0.2$. Para integrar la fuerza de volumen, y obtener las fuerzas nodales equivalentes, se utiliza un único punto de Gauss. Analíticamente se tiene que para $\alpha = 0.5$ el desplazamiento en $X = 1$ es $u = 0.25$ y para $\alpha = -0.3$ es $u = -0.15$. Dos mallados utilizados pueden visualizarse en la Figura 3.7.



(a) Mallado de 733 elementos. (b) Mallado de 9373 elementos.

Figura 3.7: Diferentes mallados utilizados para prisma con fuerza de volumen impuesta.

En la Tabla 3.1 se muestran los resultados numéricos para los desplazamientos y el error relativo al aumentar la cantidad de elementos. En la Figura 3.8 se observa la convergencia al disminuir el tamaño máximo de los elementos para diferentes valores de α .

Tabla 3.1: Valores numéricos de convergencia para barra lisa apoyada con fuerza de volumen.

# Elem	$\alpha = 0.5$		$\alpha = -0.3$	
	u	$\epsilon_{\text{rel}}(\%)$	u	$\epsilon_{\text{rel}}(\%)$
733	0.2550	1.99	-0.15414	2.76
1508	0.2539	1.55	-0.15230	1.54
4335	0.2525	0.98	-0.15147	0.98
7041	0.2520	0.79	-0.15134	0.89
9446	0.2517	0.66	-0.15103	0.68
21821	0.2509	0.37	-0.15062	0.42
30314	0.2507	0.29	-0.15052	0.35

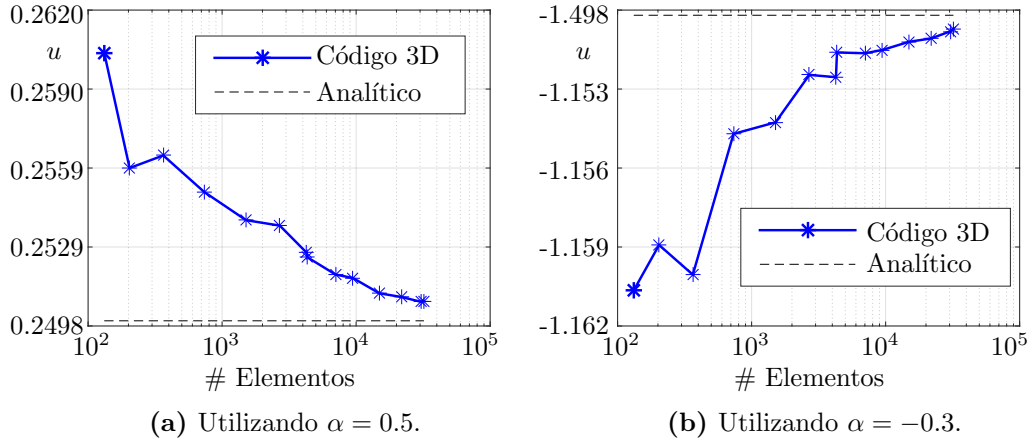


Figura 3.8: Convergencia en el mallado al disminuir el tamaño máximo de los elementos.

3.3.3. Convergencia en tamaño de elemento

Para validar la convergencia a la solución se realiza el ejemplo de un cilindro en el caso de estado plano de deformaciones con presión interna $p(t) = [95 + 15\sqrt{2}\text{sen}(wt - \frac{\pi}{4})]$ mmHg siendo $w = 2\pi\frac{1}{\text{seg}}$ (ver Figura 3.9a) y parámetros $\mu = 6000$ mmHg, $\kappa = 100\mu^1$, $\gamma = 0.5$ y $\tau = 0.1$ s. La geometría del cilindro está definida por un radio interno $R_i = 0.79$ mm y un radio externo $R_e = 0.90$ mm, ver Figura 3.10. Con los parámetros materiales y geométricos

¹De esta forma $\nu = 0.495$ haciendo que el material sea cuasi incompresible.

anteriores se obtiene una presión y un desplazamiento del orden de los obtenidos en datos reales, ver Figura 3.9. Se resolverá para los primeros 5 s utilizando un paso $\Delta t_n = 0.05$ s y por tanto 101 instantes de tiempo, partiendo del reposo con deformación nula.

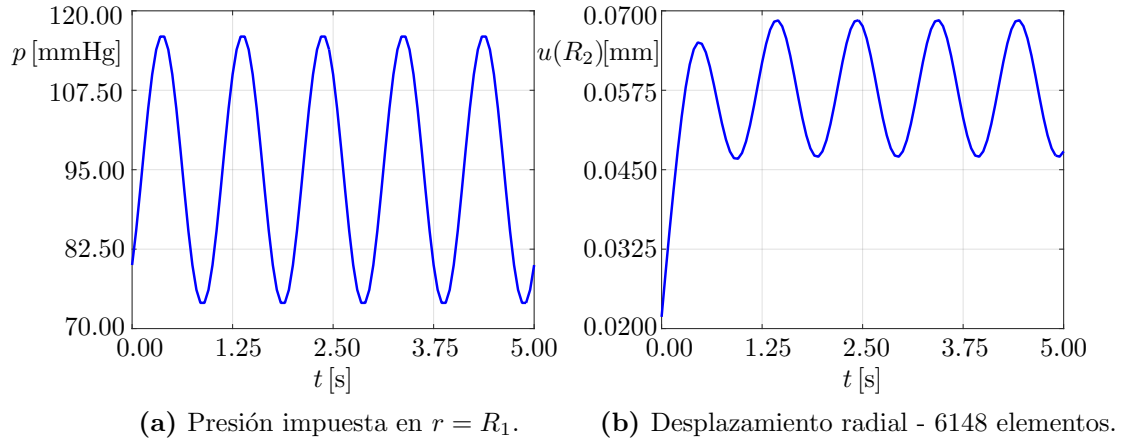
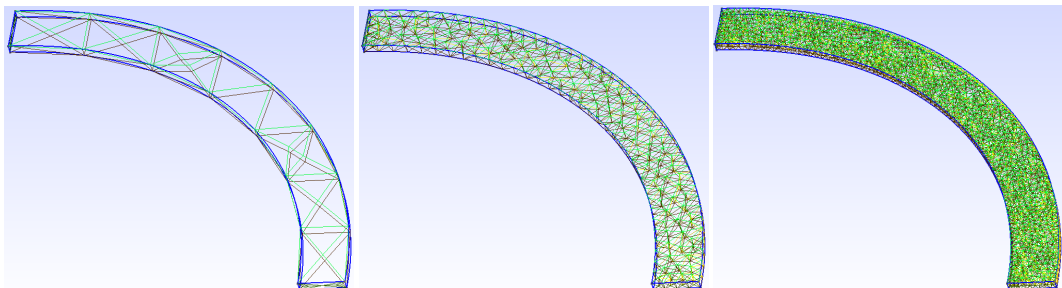


Figura 3.9: Presión interna y desplazamiento radial externo.

En la Figura 3.11 se observa la convergencia del desplazamiento radial de la superficie exterior del anillo para diferentes instantes de tiempo. En las Figuras 3.11a y 3.11b se observa que para pocos elementos no se tienen buenos resultados, pero al aumentar suficientemente la cantidad de elementos se observa la convergencia. Sin embargo, para una gran cantidad de elementos, el código desarrollado demora tiempos elevados: para 128 elementos el código demoró 45 segundos, utilizando 927 elementos se tiene un tiempo de 311 segundos y para el mallado de 6148 elementos el tiempo total fue de 2735 segundos. En la Tabla 3.2 se muestran resultados numéricos para diferentes mallados.



(a) Malla de 128 elementos. (b) Malla de 927 elementos. (c) Malla de 6148 elementos.

Figura 3.10: Diferentes mallados generados en GMSH para validar la convergencia en los elementos.

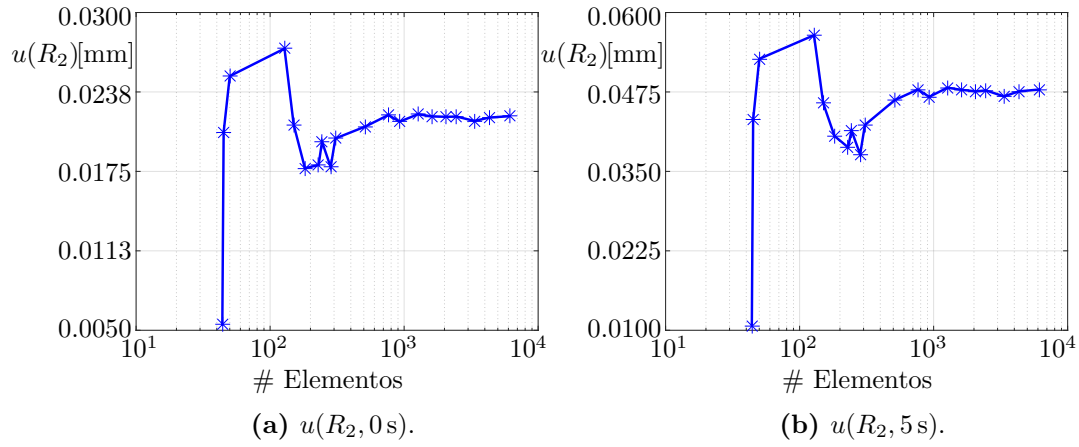


Figura 3.11: Convergencia de $u(R_2, t)$ para $t = 0$ s (a) y $t = 5$ s (b).

Tabla 3.2: Valores numéricos para diferentes mallados en el código 3D, u en mm.

# Elem	$u(R_2, 0\text{ s})$	$u(R_2, 5\text{ s})$	máx $\{u(R_2, t)\}$	Tiempo (s)
44	0.00545	0.01072	0.01483	11
128	0.02716	0.05643	0.07657	45
244	0.01984	0.04142	0.05975	74
514	0.02103	0.04624	0.06644	167
927	0.02141	0.04673	0.06710	311
1604	0.02183	0.04783	0.06842	534
2461	0.02182	0.04774	0.06829	864
3344	0.02147	0.04680	0.06729	1265
4329	0.02174	0.04759	0.06820	1687
6148	0.02184	0.04788	0.06852	2735

Los resultados aquí presentados fueron obtenidos en MATLAB, utilizando una implementación propia, en un computador ASUS modelo X555LN-XX350D con un procesador Intel Core i7-4510U 12GB de memoria RAM.

Si bien el sistema lineal que se resuelve es disperso (*sparse*), se utiliza el solver por defecto de MATLAB para sistemas lineales $\mathbf{x}=\mathbf{A}\backslash\mathbf{b}$.

Los tiempos excesivos de ejecución del solver 3D para poder obtener una convergencia adecuada de la solución motivan a realizar modificaciones en el código y/o buscar otro método sobre todo pensando en el problema inverso. Por lo anterior se decide trabajar en la programación de otro código que se presenta en el Capítulo 4 y se utiliza el código tridimensional para validarlo.

3.3.4. Convergencia en el paso de tiempo

Es de interés también observar la dependencia de los resultados con respecto al incremento de tiempo Δt . Para esto se resuelve el mismo ejemplo de la sección anterior dejando fija una malla de 1600 elementos y variando el incremento temporal, por tanto se tienen más valores de tiempo y presión. En la Figura 3.12 se observa que se estabiliza el valor obtenido, al disminuir el paso de tiempo utilizado, del desplazamiento radial de la superficie interior del anillo (Figura 3.12a) y de la superficie exterior del anillo (Figura 3.12b) en $t = 5$ s. En la Tabla 3.3 se tienen los valores numéricos obtenidos.

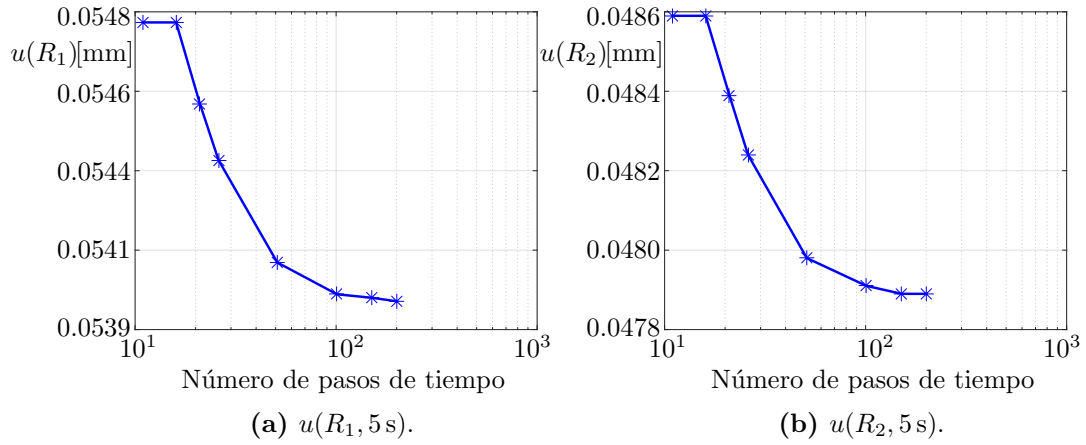


Figura 3.12: Convergencia del desplazamiento al disminuir Δt en el código tridimensional.

Tabla 3.3: Valores numéricos para diferentes incrementos de tiempo Δt en el código tridimensional.

Δt (s)	Pasos	$u(R_1, 5 \text{ s})$	$u(R_2, 5 \text{ s})$	Tiempo (s)
0.500	11	0.05477	0.04859	110
1/3	16	0.05477	0.04859	128
0.250	21	0.05454	0.04839	152
0.200	26	0.05438	0.04824	169
0.100	51	0.05409	0.04798	303
0.050	101	0.05400	0.04791	533
1/30	151	0.05399	0.04789	764
0.025	201	0.05398	0.04789	987

Nota: u en mm.

En la Figura 3.13 se muestra el desplazamiento $u_r(r, 5 \text{ s})$ utilizando el programa ParaView.

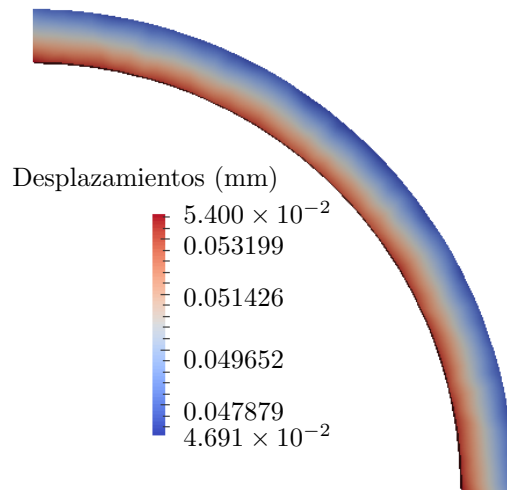


Figura 3.13: Desplazamiento $u_r(r, 5 \text{ s})$ visualizado en ParaView.

Capítulo 4

Código axisimétrico 1D en grandes deformaciones y códigos de pequeñas deformaciones

En este capítulo se describe el código axisimétrico 1D desarrollado para disminuir los tiempos de ejecución del código 3D y se describen otros dos códigos desarrollados para el caso de pequeñas deformaciones en cilindros.

En la Sección 4.1 se desarrolla el código axisimétrico y se realiza su validación con el código 3D. También se comparan los tiempos de ejecución entre los dos códigos en grandes deformaciones mostrando la mayor eficiencia de ejecución del código axisimétrico. En la Sección 4.2 se desarrollan los códigos de pequeñas deformaciones.

4.1. Código axisimétrico 1D en grandes deformaciones

La motivación para la generación de este código se basa en la cantidad de tiempo requerido por el código 3D para resolver problemas relativamente sencillos como el mostrado en la Sección 3.3.3.

El código axisimétrico es obtenido a partir del código tridimensional simplemente imponiendo que el campo de desplazamientos sea de la forma $\mathbf{u} = u_r(r, t) \mathbf{e}_r$, con u_r interpolado con funciones lineales en el espesor del

cilindro. En este caso se tiene que

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

donde $u_r(r, t)$ es lineal en r . También el cálculo de la matriz constitutiva con el método de paso complejo (Apéndice D) se puede modificar, visto que en este caso implica matrices constitutivas de 2×2 . Por tanto, debido a que con este método la cantidad de elementos necesarios es menor y que muchos cálculos se reducen en dimensión, se obtiene un código más veloz y por tanto más conveniente para realizar la identificación material desarrollada en el Capítulo 5.

4.1.1. Validación código axisimétrico

Como ejemplo de validación se resolverá el problema presentado en las Secciones 3.3.3 y 3.3.4. En la Figura 4.1 se ve la convergencia, para dos instantes de tiempo, del desplazamiento del nodo externo al aumentar la cantidad de elementos. Los valores¹ de $u_{\text{máx},0\text{s}}$, $u_{\text{máx},5\text{s}}$, $u_{\text{mín},0\text{s}}$ y $u_{\text{mín},5\text{s}}$ se muestran en la Tabla 4.1 (la precisión allí mostrada es mayor a la de los ejemplos anteriores para observar las diferencias).

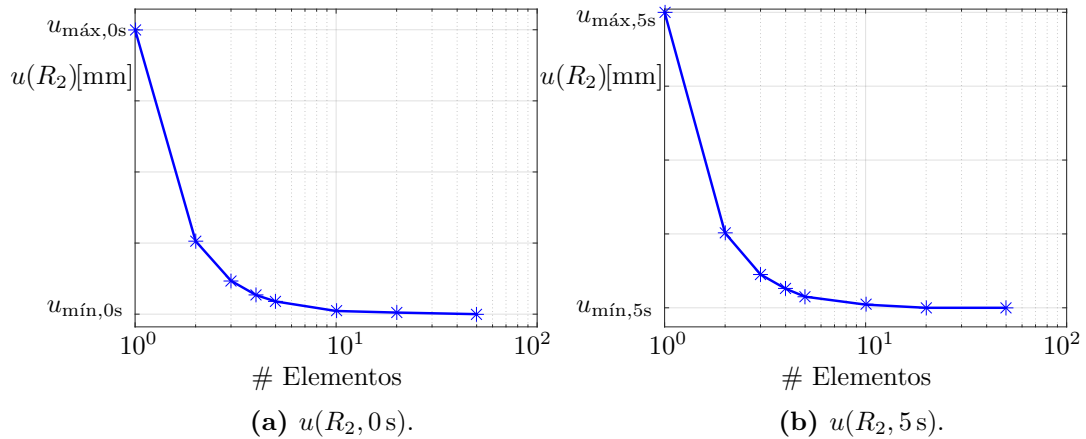


Figura 4.1: Convergencia del desplazamiento al aumentar el número de elementos.

¹ $u_{\text{máx},0\text{s}} = 0.02180763 \text{ mm} - u_{\text{mín},0\text{s}} = 0.02180745 \text{ mm} - u_{\text{máx},5\text{s}} = 0.04782258 \text{ mm} - u_{\text{mín},5\text{s}} = 0.04782072 \text{ mm}.$

Tabla 4.1: Valores numéricos para diferentes mallados en el código axisimétrico, u en mm.

# Elem	$u(R_2, 0 \text{ s})$	$u(R_2, 5 \text{ s})$	$\text{máx} \{u(R_2, t)\}$	Tiempo (s)
1	0.02180763	0.04782258	0.06849315	1
2	0.02180749	0.04782119	0.06848935	2
3	0.02180747	0.04782093	0.06848863	3
4	0.02180746	0.04782084	0.06848837	3
5	0.02180746	0.04782079	0.06848825	4
10	0.02180745	0.04782074	0.06848810	7
20	0.02180745	0.04782072	0.06848806	15
50	0.02180745	0.04782072	0.06848805	33

Se observa entonces claramente la convergencia. Respecto a la solución obtenida con el software 3D se tiene que el error relativo en valor absoluto respecto a lo obtenido en la Tabla 3.2 es $\epsilon_{\text{rel}}(R_2, 5 \text{ s}) = 0.13 \%$ y respecto a la Tabla 3.3 es $\epsilon_{\text{rel}}(R_2, 5 \text{ s}) = 0.15 \%$.

Es de interés también observar la convergencia de este software al aumentar la cantidad de pasos de tiempo como se hizo en la Sección 3.3.4. Para los resultados presentados en la Tabla 4.2 e ilustrados en las Figuras 4.2a y 4.2b se utilizó un solo elemento.

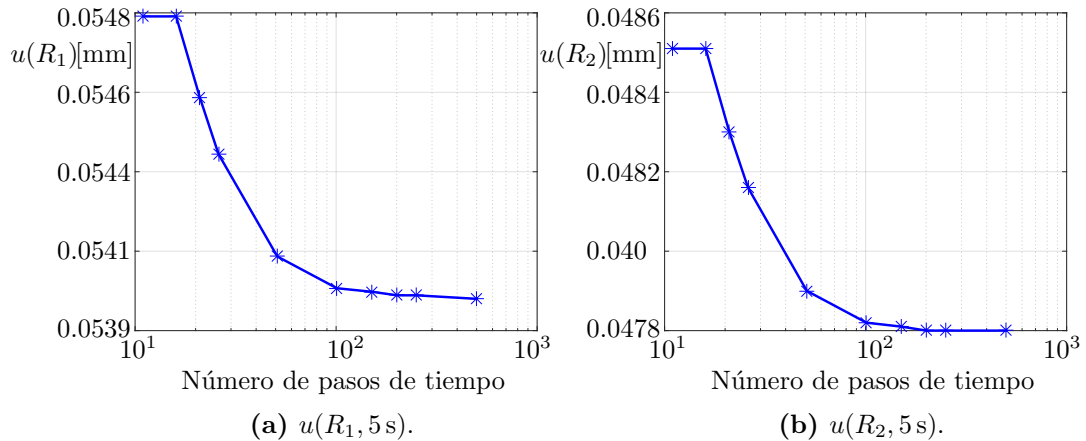


Figura 4.2: Convergencia del desplazamiento al disminuir Δt en el código axisimétrico.

Tabla 4.2: Valores numéricos para diferentes incrementos de tiempo Δt en el código axisimétrico.

$\Delta t(\text{seg})$	Pasos	$u(R_1, 5 \text{ s})$	$u(R_2, 5 \text{ s})$	Tiempo (s)
0.500	11	0.05478981	0.04850547	0.35
1/3	16	0.05479024	0.04850586	0.40
0.250	21	0.05456319	0.04830362	0.44
0.200	26	0.05439812	0.04815660	0.49
0.100	51	0.05410890	0.04789901	0.77
0.050	101	0.05402308	0.04782258	1.29
1/30	151	0.05400656	0.04780787	1.76
0.025	201	0.05400073	0.04780268	2.18
0.020	251	0.05399803	0.04780027	2.79
0.010	501	0.05399441	0.04779705	5.15

Nota: u en mm.

Nuevamente se aprecia la convergencia al aumentar la cantidad de pasos utilizados. Respecto a la solución obtenida con el software 3D se tiene que el error relativo en valor absoluto respecto a lo obtenido en la Tabla 3.2 es $\epsilon_{\text{rel}}(R_2, 5 \text{ s}) = 0.17 \%$, respecto a la Tabla 3.3 es $\epsilon_{\text{rel}}(R_2, 5 \text{ s}) = 0.19 \%$ y respecto a la Tabla 4.1 es $\epsilon_{\text{rel}}(R_2, 5 \text{ s}) = 0.05 \%$. Los errores relativos no solo sirven para mostrar la validez del código axisimétrico 1D sino que también muestran que para pequeños valores de Δt utilizar un solo elemento parece ser suficiente. Lo anterior se justifica también por el pequeño espesor que tiene la pared del ejemplo estudiado: el radio mínimo $R_1 = 0.79 \text{ mm}$ y el espesor es $e = 0.11 \text{ mm}$ con lo cual $e/R_1 \cong 0.13$. La relación anterior es similar a la obtenida en las arterias de ovejas, ver Tabla 2.4. Por lo anterior es que en la Capítulo 5 se utilizará un solo elemento, en el modelo axisimétrico, para la identificación de las propiedades mecánicas de la pared arterial.

4.2. Cilindro viscoelástico en pequeñas deformaciones

En esta sección se obtiene la solución para el caso de pequeñas deformaciones de dos formas diferentes. La primera forma es otro método numérico y la

segunda es la solución analítica para la componente permanente de la solución.

4.2.1. Primera forma - método recursivo

En la Ecuación (2.33) se obtiene el tensor \mathbf{S} para el caso viscoelástico en pequeñas deformaciones según Simo y Hughes (1998). Imponiendo equilibrio $\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ se tiene

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{b} &= (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{b} \\ \dots - \int_{-\infty}^t \mu \left(\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \exp(-(t-s)/\tau_i) ds &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

En los casos de simetría esférica y cilíndrica donde se cumple $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \Delta \mathbf{u}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{b} &= (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{b} \\ \dots - \frac{4}{3} \int_{-\infty}^t \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \exp(-(t-s)/\tau_i) ds &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por tanto si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{4}{3} \int_{-\infty}^t \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \exp(-(t-s)/\tau_i) ds = A''(t), \quad (4.4)$$

donde $A''(t)$ es una función real a determinar. En coordenadas cilíndricas (asumiendo estado plano de deformaciones $u_z = 0$) $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r)$ por tanto, dado que r no depende de t ,

$$(\lambda + 2\mu) u_r - \frac{4}{3} \int_{-\infty}^t \mu u_r \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \exp(-(t-s)/\tau_i) ds = A'(t) r + \frac{B'(t)}{r}, \quad (4.5)$$

simplificando

$$u_r = A(t) r + \frac{B(t)}{r} + \frac{4}{3} \left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \int_{-\infty}^t u_r \exp(-(t-s)/\tau_i) ds. \quad (4.6)$$

De lo anterior puede obtenerse u_r de forma recursiva, ver el desarrollo en el Apéndice C. Esta forma recursiva es dependiente del paso de tiempo que se considere, al disminuir este paso se converge a la solución.

4.2.2. Segunda forma - solución analítica para el régimen permanente

Recordemos que $u_r(r, t) = u_t(r, t) + u_p(r, t)$ donde u_t es la solución de régimen transitorio y u_p es la solución de régimen permanente. La solución de régimen transitorio desaparecerá para tiempos suficientemente grandes (es despreciable para tiempos entre 5 y 10 veces mayores al mayor tiempo de relajación de la cadena de Maxwell). Se puede probar que la solución analítica en régimen permanente para una carga $p(t) = p_1 \cos(\omega t) + p_2 \sin(\omega t)$ es $u_p(r, t) = A(t)r + B(t)\frac{1}{r}$ ¹ donde

$$A(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) \quad \text{y} \quad B(t) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t). \quad (4.7)$$

Recordando la Ecuación (2.33) se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, t) &= 2A(t)[\lambda + \mu] - 2\mu B(t)\frac{1}{r^2} \\ &\dots - \int_{-\infty}^t 2\mu \left(\frac{A(t)}{3} - \frac{B(t)}{r^2} \right) \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \exp(-(t-s)/\tau_i) ds. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Las integrales de la ecuación anterior pueden resolverse analíticamente. Luego deben imponerse las condiciones mecánicas de contorno (se considera p según $-\mathbf{e}_r$ aplicada en $r = R_1$)

$$\sigma_{rr}(R_1, t) = p_1(t) \quad \forall t \quad \text{y} \quad \sigma_{rr}(R_2, t) = 0 \quad \forall t. \quad (4.9)$$

Deben imponerse tiempos de forma que las ecuaciones anteriores sean linealmente independientes, por ejemplo $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{2\omega}$. Para un brazo de

¹Solución análoga al caso elástico pero con constantes que varían en el tiempo.

Maxwell se obtiene

$$A_1 = \frac{3 R_1^2 (-p_2 \gamma \mu \tau w + p_1 [3 (\lambda + \mu) (1 + \tau^2 w^2) - \gamma \mu])}{2 (R_1^2 - R_2^2) [\gamma \mu (\gamma \mu - 6 (\lambda + \mu)) + 9 (\lambda + \mu)^2 (1 + \tau^2 w^2)]}, \quad (4.10)$$

$$A_2 = \frac{3 R_1^2 (p_1 \gamma \mu \tau w + p_2 [3 (\lambda + \mu) (1 + \tau^2 w^2) - \gamma \mu])}{2 (R_1^2 - R_2^2) [\gamma \mu (\gamma \mu - 6 (\lambda + \mu)) + 9 (\lambda + \mu)^2 (1 + \tau^2 w^2)]}, \quad (4.11)$$

$$B_1 = \frac{R_1^2 R_2^2 [-p_2 \gamma \tau w + p_1 (1 - \gamma + \tau^2 w^2)]}{2 \mu (R_1^2 - R_2^2) [(1 - \gamma)^2 + \tau^2 w^2]}, \quad (4.12)$$

$$B_2 = \frac{R_1^2 R_2^2 [p_1 \gamma \tau w + p_2 (1 - \gamma + \tau^2 w^2)]}{2 \mu (R_1^2 - R_2^2) [(1 - \gamma)^2 + \tau^2 w^2]}. \quad (4.13)$$

En caso que la presión sea una función no trigonométrica, bien puede aproximarse ésta por una suma de n funciones trigonométricas $p(t) \cong \sum_{i=1}^n p_i(t) = \sum_{i=1}^n P_i \cos(w_i t) + P_{i+1} \sin(w_i t)$ luego por superposición (por linealidad de la respuesta en el caso de pequeñas deformaciones) la solución es la suma de las soluciones para cada p_i . Esta formulación tiene como ventaja que no discretiza el tiempo, sin embargo tiene como desventaja que no obtiene la solución de régimen transitorio y que si la carga no es una función trigonométrica, entonces la misma debe aproximarse.

4.2.3. Validación

Para validar los códigos de pequeñas deformaciones se realizan dos estudios: (1) se valida la convergencia del código recursivo presentado en la Sección 4.2.1 y (2) se compara los resultados entre ambos métodos y con el software axisimétrico de la Sección 4.1. Para comparar con el código axisimétrico (que es de grandes deformaciones) se impone una carga 100000 veces más pequeña que la mostrada en la Sección 3.3.3 y luego el desplazamiento obtenido se multiplica por 100000.

Convergencia del código recursivo

En esta sección se muestra la convergencia al aumentar la cantidad de pasos para el código recursivo. Aumentar la cantidad de pasos es equivalente a disminuir el incremento temporal Δt utilizado. En las Figuras 4.3a y 4.3b se puede ver la convergencia al aumentar la cantidad de pasos. Es apreciable la gran dependencia de este método en la cantidad de pasos. En la Tabla 4.3 se muestran algunos de los resultados numéricos que se utilizaron para este ejemplo.

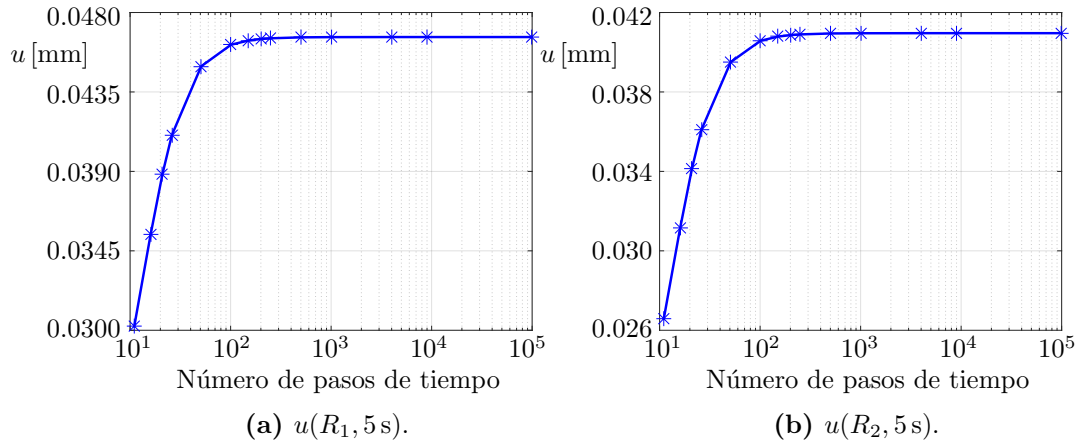


Figura 4.3: Convergencia del desplazamiento al disminuir Δt en el código recursivo.

Tabla 4.3: Valores numéricos para diferentes incrementos de tiempo Δt en el código recursivo.

Δt (s)	Pasos	$u(R_1, 5\text{ s})$	$u(R_2, 5\text{ s})$	Tiempo (seg)
0.50000	11	0.03022038	0.02657289	0.0723
0.20000	26	0.04104760	0.03607681	0.0735
0.10000	51	0.04495335	0.03950520	0.0739
0.05000	101	0.04617515	0.04057767	0.0768
0.02000	251	0.04653957	0.04089755	0.0823
0.01000	501	0.04659248	0.04094400	0.0925
0.00500	1001	0.04660575	0.04095564	0.1134
0.00125	4001	0.04660989	0.04095928	0.2327
≈ 0.00056	9001	0.04661012	0.04095947	0.4386
≈ 0.00005	99001	0.04661017	0.04095952	4.1256

Nota: u en mm.

Se aprecia claramente la dependencia en Δt del método propuesto, sin embargo también es apreciable que los tiempos de ejecución no son demasiado grandes dado que para 4001 pasos ya se obtienen resultados con una aproximación aceptable.

Comparación entre los métodos

En las Figuras 4.4a y 4.4b se aprecia cualitativamente la coincidencia de los 3 métodos. En la Figura 4.4a se observa que para los primeros instantes no se tiene el mismo resultado con el método de la solución analítica ya que aún es importante la componente transitoria.

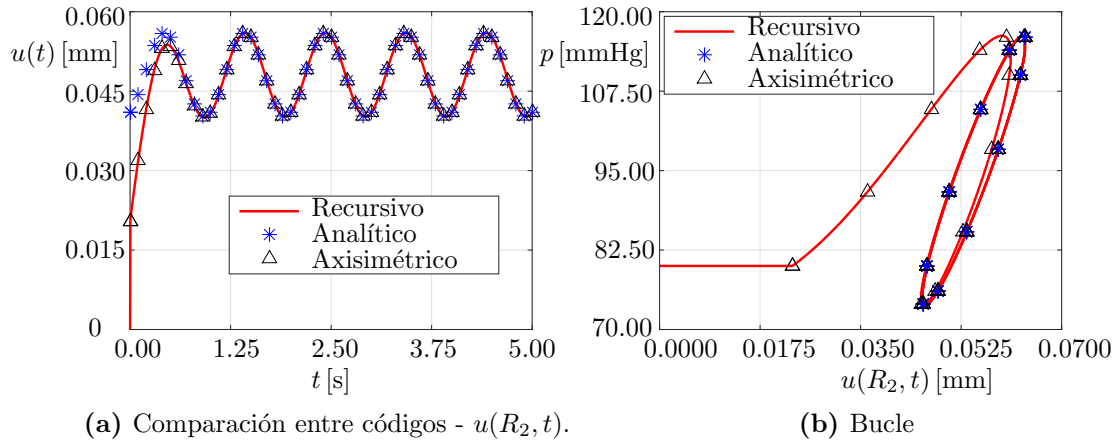


Figura 4.4: Comparación entre los métodos para resolver problemas de pequeñas deformaciones.

Para la solución con el software axisimétrico se utilizaron 501 pasos y 10 elementos de forma de obtener el resultado más aproximado posible luego de lo visto en la Sección 4.1.1. Para el software de pequeñas deformaciones recursivo se utilizaron 50001 pasos. Con estas consideraciones se obtuvieron los resultados que se muestran en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4: Resultados para diferentes métodos del ejemplo en pequeñas deformaciones.

Método	$u(R_1, 5 \text{ seg})$	$u(R_2, 5 \text{ seg})$	Tiempo (seg)
Axisimétrico	0.04661180	0.04096098	37.24
Recursivo	0.04661017	0.04095952	2.18
Analítico	0.04661017	0.04095952	0.01

Nota: u en mm.

Puede ser de interés obtener la solución transitoria para el problema de pequeñas deformaciones, para esto simplemente se restan las soluciones del método recursivo y el método analítico (los más precisos). En la Figura 4.5 se

puede ver la solución transitoria para el desplazamiento del anillo exterior. En particular, se aprecia que la componente transitoria de la solución se extingue en 1 s, es decir, 10 veces el tiempo de relajación del problema.

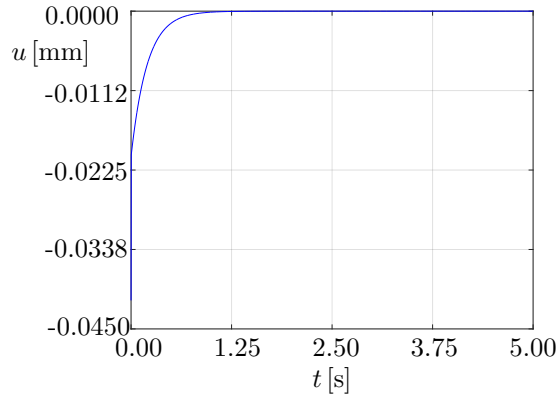


Figura 4.5: Solución transiente en R_2 .

Cuantitativamente se observa que los resultados entre los tres métodos coinciden. Se observan también las diferencias en los tiempos de ejecución entre los métodos, recordando que la solución analítica es independiente de la cantidad de pasos, la única dependencia de este método es en la cantidad de funciones trigonométricas que se utilicen para la aproximación de la presión (en este ejemplo la función original ya era trigonométrica).

Cómo se mencionó en la Sección 2.4 las medidas experimentales son obtenidas cuando la componente transitoria no es apreciable. Por lo anterior y observando la Figura 4.4a se tiene que, tanto para el código recursivo como para el código axisimétrico, es necesario que transcurra un cierto tiempo para que se extinga la solución transitoria lo cual tendrá consecuencias en el procedimiento de identificación. Para el código analítico no es necesario lo anterior ya que la solución analítica ya es en la componente permanente. Sin embargo, sí es necesario obtener funciones trigonométricas que aproximen las curvas de presión. Cómo proceder para poder utilizar los códigos simplificados de pequeñas deformaciones se presenta en la Sección 5.1.

Capítulo 5

Estudio de aplicación a problemas de identificación

En este capítulo se estudia la aplicación a problemas de identificación de los códigos presentados en el Capítulo 4. Los códigos propuestos se utilizan para identificar las propiedades mecánicas de la pared arterial en ovejas a partir de los datos presentados en la Sección 2.4 que fueron obtenidos *in-vitro* .

Los datos obtenidos experimentalmente, como fueran presentados en la Sección 2.4, claramente no son funciones trigonométricas explícitas. Por lo anterior y para poder utilizar el código de la solución analítica presentado en la Sección 4.2.2 es necesario encontrar funciones trigonométricas que los aproximen, esto es presentado en la Sección 5.1. Luego, en la Sección 5.2 se identifican los parámetros mecánicos con los códigos de pequeñas deformaciones presentados en la Sección 4.2. En los Apéndices F.1 y F.2 se muestran los valores numéricos obtenidos al realizar la identificación.

Finalmente en la Sección 5.3 se identifican los parámetros mecánicos utilizando el código axisimétrico 1D presentado en la Sección 4.1, resultados numéricos de esta identificación pueden encontrarse en el Apéndice F.2.

5.1. Aproximación trigonométrica de funciones

Por lo obtenido en la Sección 4.2.2, para utilizar el código analítico se debe aproximar la presión impuesta por funciones trigonométricas. En el código recursivo y el código axisimétrico es necesario comenzar la simulación en un

tiempo anterior, para que la componente transitoria se extinga y la solución numéricamente obtenida corresponda con la componente permanente.

Para ambos casos es necesario utilizar algún tipo de aproximación trigonométrica. Las series de Fourier resultan inmediatamente como una solución a lo anterior. Se utiliza entonces la transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform*) de MATLAB mediante la función `fft`. A continuación se explica y ejemplifica cómo utilizar la función `fft` para realizar la aproximación trigonométrica.

5.1.1. Utilización de la función `fft`

Debido a que todas las muestras tienen 200 datos en un segundo, se tiene que el vector de tiempos de una muestra de N datos es

$$t = [0 : T : (N - 1) T], \text{ donde } T = \frac{1}{F} = \frac{1}{199}. \quad (5.1)$$

Luego debe obtenerse la frecuencia fundamental de la serie de datos experimentales. Para realizar esto se utiliza la función `fft` de MATLAB, en la Ecuación (5.2) se muestra cómo obtener la frecuencia fundamental de la serie de datos p

$$\begin{cases} y = \text{fft}([p \text{ zeros}(1, N_z)]), \\ [a, b] = \text{max}(\text{abs}(y)), \\ f_{\text{fund}} = (b - 1) \frac{F}{N}, \end{cases} \quad (5.2)$$

donde N_z es la cantidad de ceros que se deseen usar. Puede probarse que al aumentar la cantidad de ceros utilizados la frecuencia fundamental f_{fund} converge. Para obtener la frecuencia fundamental por medio de la Ecuación (5.2) es necesario que p tenga media nula.

Obtenida la frecuencia fundamental, es posible obtener un período fundamental T_{fund} . A partir del período fundamental se obtiene una nueva serie de datos p' que contenga la mayor cantidad de períodos fundamentales posibles (es decir, esta serie tendrá menos datos que p). Con la nueva serie, p' , se utilizará nuevamente la función `fft` para obtener la aproximación trigonométrica

$$\begin{cases} y' = \text{fft}(p'), \\ \mathbf{M} = [\text{transpose}(y') \text{ transpose}([1 : N'])], \end{cases} \quad (5.3)$$

donde N' es la cantidad de datos de p' . A partir de la matriz \mathbf{M} es posible obtener las frecuencias y amplitudes de las ecuaciones trigonométricas que aproximarán la presión

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \frac{2}{N'} \text{real}(\mathbf{M}(:, 1)), \\ \mathbf{A}(1) = \mathbf{A}(1)/2, \\ \mathbf{B} = -\frac{2}{N'} \text{imag}(\mathbf{M}(:, 1)), \\ \mathbf{f} = (\mathbf{M}(:, 2) - 1) \frac{F}{N'}, \end{cases} \quad (5.4)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son los vectores de las amplitudes y \mathbf{f} el vector de frecuencias. Luego se buscan en \mathbf{f} las frecuencias que son múltiplo de f_{fund} . Siendo estas frecuencias agrupadas dentro de \mathbf{f}_{mult} se tiene

$$p_{\text{aprox}}(t) = \sum_{k=1}^{N_{\text{mult}}} \mathbf{A}(k) \cos[2\pi \mathbf{f}_{\text{mult}}(k) t] + \mathbf{B}(k) \sin[2\pi \mathbf{f}_{\text{mult}}(k) t], \quad (5.5)$$

donde N_{mult} es el número de frecuencias que se quieren utilizar. En este trabajo se aproximarán las curvas en dos casos: (1) utilizando las primeras 16 frecuencias múltiplos de f_{fund} ¹ y (2) utilizando la mitad de todas las frecuencias que sean múltiplos de f_{fund} .

5.1.2. Ejemplo de aplicación

Como ejemplo se considera la primera muestra del Tronco Braquiocefálico. Los datos reales de esta muestra fueron presentados en la Figura 2.8. Esta muestra, ver Tabla 2.2, tiene $N = 1027$ datos. En la Tabla 5.1 se puede observar la convergencia de la frecuencia fundamental al aumentar N_z .

¹Este número incluye la frecuencia nula.

Tabla 5.1: Convergencia al obtener la frecuencia fundamental.

N_z	f_{fund}	N_z	f_{fund}	N_z	f_{fund}
0	1.9377	1×10^3	1.8653	5×10^5	1.8505
1×10^1	1.9190	5×10^3	1.8490	1×10^6	1.8506
5×10^1	1.8477	1×10^4	1.8588	5×10^6	1.8506
1×10^2	1.7657	5×10^4	1.8525	1×10^7	1.8506
5×10^2	1.8245	1×10^5	1.8516	5×10^7	1.8506

En las Figuras 5.1 y 5.2 se aprecia que las diferencias, tanto al variar N_z como la cantidad de frecuencias, casi no pueden percibirse. De la Ecuación (5.5) se obtiene la expresión trigonométrica que se utilizará para el código analítico. Recordar que en el código analítico es necesario que la presión sea trigonométrica, ver Sección 4.2.2.

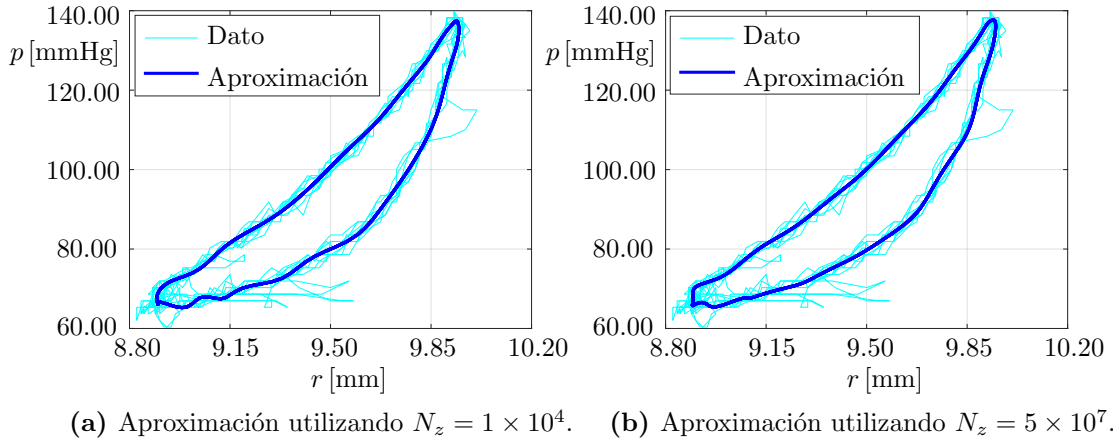


Figura 5.1: Serie de datos aproximados utilizando 16 frecuencias.

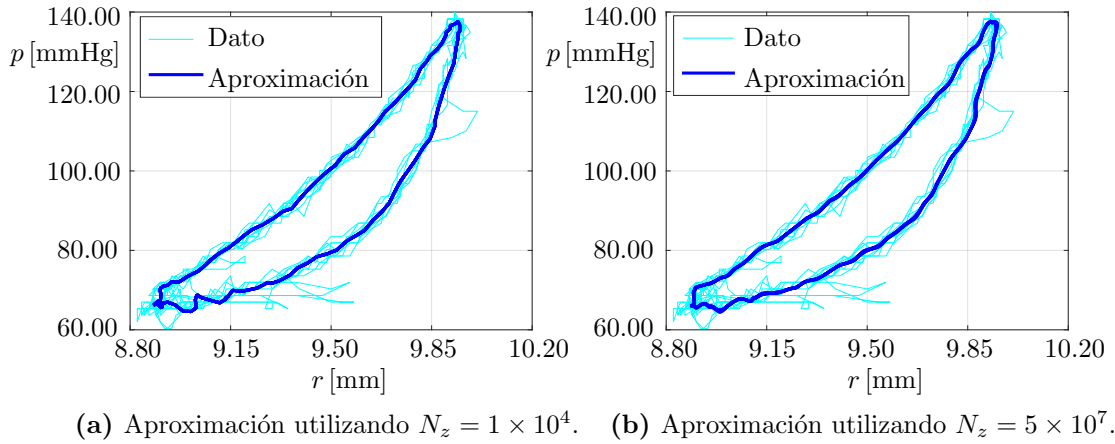
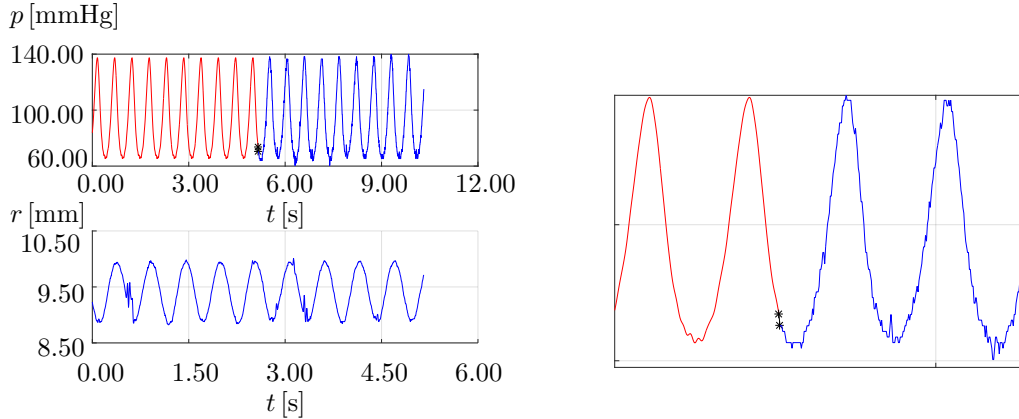


Figura 5.2: Serie de datos aproximados utilizando la mitad de las frecuencias.

Para el caso de los códigos recursivo y axisimétrico es necesario generar datos de presión para tiempos anteriores a los datos experimentales, la Ecuación

ción (5.5) será igualmente útil para ésto. Para estos códigos, es importante controlar que no aparezca un salto brusco en la unión de la serie de dato generada con la serie de datos experimental. En la Figura 5.3 se muestra esta unión para el caso de utilizar $N_z = 10000$ y 15 frecuencias.



(a) (arriba) Unión entre curvas de presión generada y presión experimental - (abajo) dato experimental del radio. (b) Detalle de la unión entre curvas de presión generada y presión experimental.

Figura 5.3: Unión de la serie de datos para el caso de utilizar el código recursivo y el axisimétrico con los datos experimentales.

Para el código axisimétrico y el recursivo se realizan dos estudios. En el primer estudio se aproximan todos los datos (presión y diámetro, ver Figura 5.4) utilizando 15 frecuencias y en el segundo estudio se aproxima la presión antes de los datos experimentales, ver Figura 5.3a. Para el código analítico también se realizan dos estudios, en ambos es necesario aproximar la presión (dado que así es que se debe ingresar), pero en uno de ellos no se aproxima el desplazamiento (ver Figura 5.3a) y en el otro si (ver Figura 5.4).

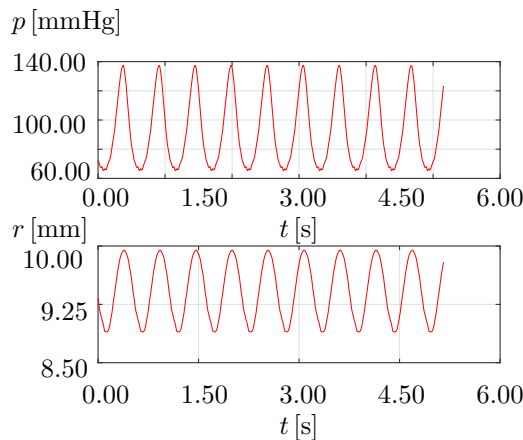


Figura 5.4: Presión y desplazamiento aproximado trigonométricamente para el código analítico.

5.2. Caracterización material utilizando pequeñas deformaciones

En esta sección se utilizan los códigos presentados en la Sección 4.2. Primeramente se comparará entre los códigos y finalmente se comparará con los resultados obtenidos en (Valdez-Jasso et al., 2009).

Con ambos códigos se obtienen los parámetros materiales μ , γ , τ y el parámetro geométrico R_0 . Cabe destacar aquí que en caso de utilizar como dato el R_0 de la Tabla 2.3 para sólo identificar los datos materiales, no siempre se obtienen resultados coherentes, debido a que en algunas muestras R_0 es mayor que alguno de los datos. Lo anterior se apreció en la Tabla 2.4 de la Sección 2.4. Tanto el código recursivo como el código analítico son para pared gruesa, por tanto se debe definir qué radio es R_0 . Observando los datos experimentales se entiende que R_0 es el radio interno cuando la presión es nula, por tanto para la identificación se utiliza que el radio externo de la arteria para presión nula es $R_0 + e$ donde e es el valor promedio del espesor que se obtiene experimentalmente en la Tabla 2.1.

Para el código analítico no es posible utilizar los datos experimentales puros dado que necesita de funciones trigonométricas. Por este motivo, para este código se estudian dos casos:

- Ana (1): datos aproximados por funciones trigonométricas con las primeras 16 frecuencias múltiplos de la f_{fund} , ver Sección 5.1.
- Ana (2): datos aproximadas con la primera mitad de frecuencias múltiplos de f_{fund} , ver Sección 5.1.

Para el código recursivo sí es posible utilizar los datos experimentales medidos dado que no requiere de funciones trigonométricas para su uso, sin embargo igualmente se utilizan las curvas trigonométricas aproximadas con 16 frecuencias. Por lo anterior, para este código se estudian dos casos:

- Rec (1): datos aproximados por funciones trigonométricas con las primeras 16 frecuencias múltiplos de la f_{fund} , ver Sección 5.1.
- Rec (2): datos medidos experimentalmente.

En todos los casos para realizar la identificación se utilizó la función `fmincon` de MATLAB que fue descrita en la Sección 2.6. Para todos los casos

el funcional fue el presentado en la Ecuación (2.36)

$$(R) \left\{ \begin{array}{l} \underset{\mathbf{p}}{\text{mín}} \quad \frac{\|p_4 + u(\mathbf{p}, R_1) - R_m\|^2}{\|R_m - p_4\|^2} \\ \text{s.a} \quad 0 \leq p_1 \leq \infty \\ \quad \quad 0.01 \leq p_2 \leq 0.99 \\ \quad \quad 0 \leq p_3 \leq 10 \text{ s} \\ \quad \quad R_{0,\min} \leq p_4 \leq R_{0,\max}, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

donde $R_{0,\min}$ y $R_{0,\max}$ fueron establecidos de forma específica para cada tipo de arteria a modo de tener en cuenta los datos experimentales, ver Tabla 5.2.

Tabla 5.2: Valores extremos de R_0 para la identificación.

	$R_{0,\min}$ (mm)	$R_{0,\max}$ (mm)
CD	2.00	6.00
TB	6.00	13.00
AA	6.00	12.00
ATDP	6.00	11.00
ATDD	7.00	11.00
AAD	6.00	10.00
FI	1.00	5.00

Tanto para el código recursivo como para el analítico se utilizaron tres opciones de configuración de la función `fmincon`:

- **TolFun:** Tolerancia en el funcional, se utilizó 1×10^{-8} .
- **MaxIter:** Cantidad máxima de iteraciones, se utilizó 5000.
- **MaxFunEvals:** Cantidad máxima de evaluaciones del funcional, se utilizó 5000.

Si bien para todas las muestras se logra identificar los parámetros materiales y el parámetro geométrico, se observa en algunos resultados que no se genera el bucle característico o que el parámetro material γ es muy grande (cercano a 1). Por estos motivos, se decide hacer un “filtrado” de los resultados teniendo en cuenta únicamente aquellas muestras que generen un bucle perceptible¹,

¹Las probetas que no generan bucle generalmente se asocian con aquellas que el τ identificado es “grande”: $\tau > 1 \text{ s}$.

$\gamma \leq 0.93$ y se haya encontrado una solución en menos de 5000 evaluaciones del funcional. En el Apéndice F se pueden encontrar los resultados obtenidos en caso de no realizar el filtrado. Tomando los valores medios presentados en el Apéndice F se genera la Figura 5.5.

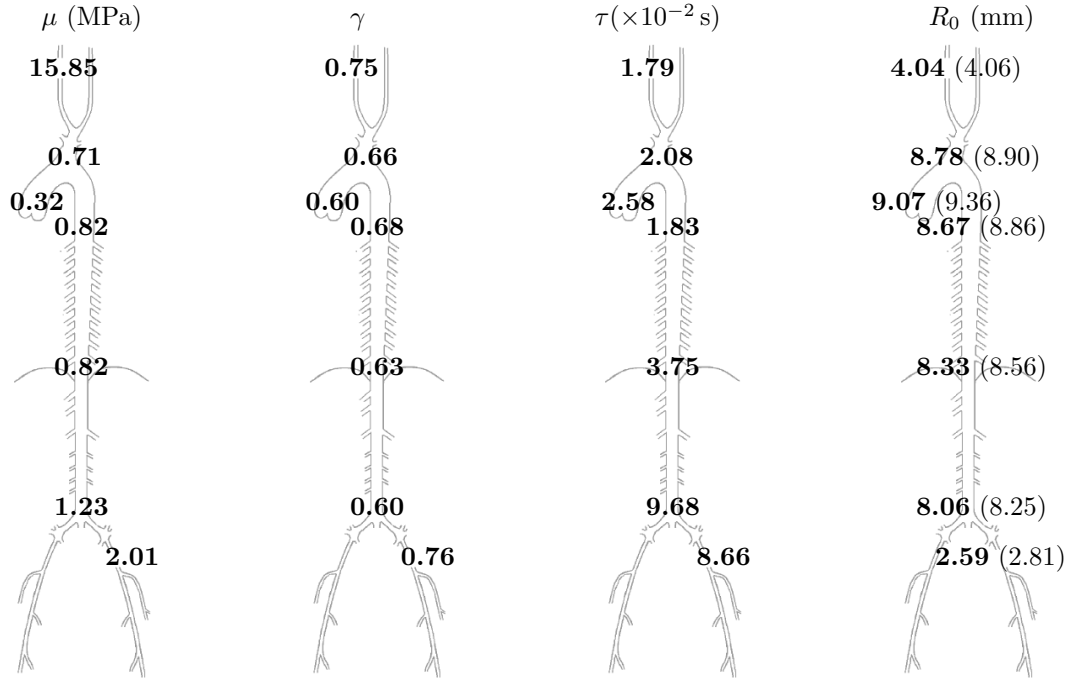


Figura 5.5: Resultados obtenidos con el primer filtrado de las muestras utilizando los códigos simplificados de pequeñas deformaciones. Entre paréntesis se tiene el valor medio de R_0 experimental.

En la Figura 5.5 se aprecia que la aorta ascendente es la que tiene menor viscosidad $\gamma_{AA} = 0.60$ y que las arterias periféricas son las de viscosidades mayores ($\gamma_{CD} = 0.75$ en la carótida y $\gamma_{FI} = 0.76$ en la femoral). En varios trabajos (Bia et al., 2005; Valdez-Jasso et al., 2009) se establece esta misma relación entre la distancia al corazón y la viscosidad de las arterias.

Al realizar el primer filtrado, ver Apéndice F, no se están utilizando las mismas muestras para cada estudio en cada arteria. Por tanto se decide realizar un segundo filtrado, en el que para cada estudio de una arteria se utilicen las mismas muestras. Los resultados de realizar este segundo filtrado pueden encontrarse en la Figura 5.6.

En la Figura 5.6 se aprecia el mismo comportamiento viscoso que el observado en la Figura 5.5. El alto valor de la rigidez en la carótida ($\mu = 16.05$ MPa) puede justificarse entre otras cosas a que la oveja es un cuadrúpedo y hace un

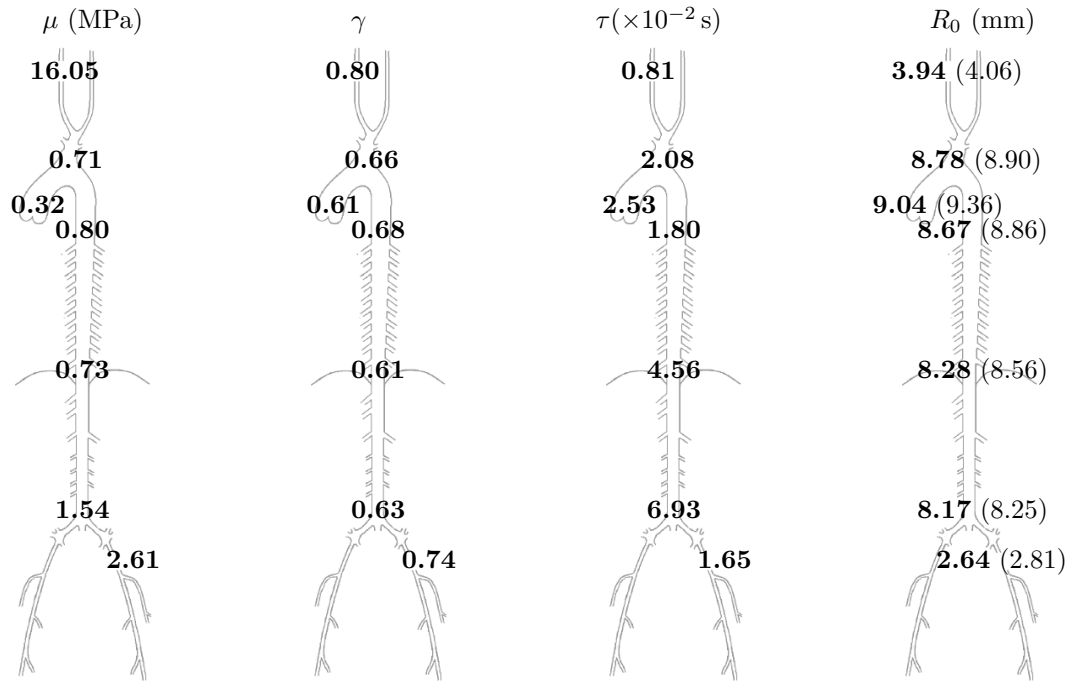


Figura 5.6: Resultados con el segundo filtrado de las muestras utilizando los códigos simplificados de pequeñas deformaciones. Entre paréntesis se tiene el valor medio de R_0 experimental.

uso diferente del cuello respecto a los humanos. Rigideces altas sobre esta arteria en comparación con las demás (diferencias de uno y dos ordenes de magnitud) también se aprecian en otros trabajos (Valdez-Jasso et al., 2009, 2011; Bia et al., 2005).

Un resultado también positivo es que con este método se obtienen valores de R_0 similares a los medidos experimentalmente. Por tanto, se puede concluir que con estos modelos es posible obtener el radio para presión cero. Este parámetro es de interés para la práctica médica ya que permitiría cuantificar las deformaciones y así diagnosticar si la pared arterial esta trabajando de forma normal o patológica.

En la siguiente sección se compararán los resultados hasta aquí obtenidos con los publicados en (Valdez-Jasso et al., 2009) donde se utilizaron los mismos datos experimentales.

5.2.1. Comparación con bibliografía

El trabajo presentado en (Valdez-Jasso et al., 2009) utiliza un modelo viscoelástico en pequeñas deformaciones similar al utilizado en los códigos de pequeñas deformaciones presentados en esta tesis. Sin embargo Valdez-Jasso

et al. (2009) utiliza la hipótesis de pared delgada para obtener un modelo de la siguiente forma

$$\varepsilon_{\theta\theta} + \tau_\epsilon \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{R_0}{E_p e} \left[p(t) + \tau_\sigma \dot{p}(t) \right]. \quad (5.7)$$

Para obtener relaciones de equivalencia, entre los parámetros materiales involucrados, es necesario comparar la evolución de las magnitudes en ensayos idénticos, puesto que los modelos no son perfectamente equivalentes. Por lo anterior, es necesario obtener un modelo para pared delgada a partir de la Ecuación (2.33). El desarrollo del modelo anterior se encuentra en el Apéndice E. A continuación se ilustran los ensayos realizados para obtener la equivalencia entre los parámetros.

Ensayo 1 Un ensayo simple es el de imponer una presión constante $p(t) = p_0$. Para este ensayo, de la Ecuación (5.7) se tiene

$$\varepsilon_{\theta\theta}(t) = \frac{p_0 R_0}{E_p e} (1 - \exp(-t/\tau_\epsilon)), \quad (5.8)$$

donde se asume que $\varepsilon_{\theta\theta}(0) = 0$. Luego utilizando el resultado presentado en el Apéndice E

$$\varepsilon_{\theta\theta}(t \rightarrow \infty) = \frac{p_0 R_0}{E_p e} = \left[\frac{3\lambda + 6\mu - 4\gamma\mu}{4\mu(1-\gamma)(3\lambda + 3\mu - \gamma\mu)} \right] \frac{p_0 R_0}{e} \quad (5.9)$$

y en consecuencia

$$E_p = \frac{4\mu(1-\gamma)(3\lambda + 3\mu - \gamma\mu)}{3\lambda + 6\mu - 4\gamma\mu}. \quad (5.10)$$

A partir de lo obtenido en el Apéndice E se obtiene

$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}(0) = \frac{1}{\tau_\epsilon} \frac{p_0 R_0}{E_p e} = \left[\frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \right] \frac{1}{\tau} \frac{p_0 R_0}{e} \quad (5.11)$$

y en consecuencia

$$\tau_\epsilon = \tau \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{E_p(\lambda + 2\mu)} = \tau \frac{(3\lambda + 6\mu - 4\gamma\mu)(\lambda + \mu)}{(1-\gamma)(3\lambda + 3\mu - \gamma\mu)(\lambda + 2\mu)}. \quad (5.12)$$

Ensayo 2 El segundo ensayo es el de imponer una deformación constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$. Para este ensayo de la Ecuación (5.7) se tiene

$$\sigma_{\theta\theta}(t) = E_p \varepsilon_0 (1 - \exp(-t/\tau_\sigma)), \quad (5.13)$$

donde se asume que $\sigma_{\theta\theta}(0) = 0$. La condición de $\sigma_{\theta\theta}(t \rightarrow \infty)$ arroja un resultado equivalente al impuesto a tiempo infinito para el ensayo 1. La condición a imponer para este ensayo es $\dot{\sigma}_{\theta\theta}(t = 0)$. Utilizando lo obtenido en el Apéndice E

$$\dot{\sigma}_{\theta\theta}(0) = E_p \varepsilon_0 \frac{1}{\tau_\sigma} = \frac{E_p}{\tau} \varepsilon_0 \quad (5.14)$$

y en consecuencia

$$\tau_\sigma = \tau. \quad (5.15)$$

Observando las equivalencias entre los parámetros a partir de las Ecuaciones (5.10),(5.12),(5.15) se tiene que el parámetro E_p no es fácilmente relacionable solamente con la rigidez o con la viscosidad material.

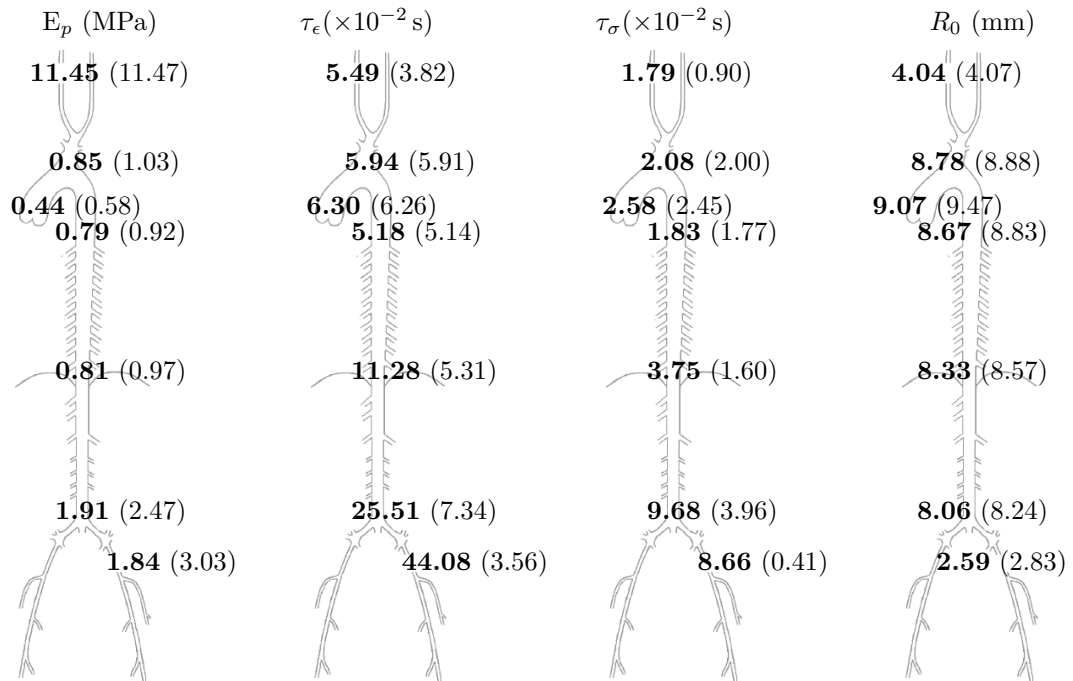


Figura 5.7: Comparación con (Valdez-Jasso et al., 2009) con el primer filtrado de las muestras utilizando los códigos simplificados de pequeñas deformaciones.

En la Figura 5.7 se observa una gran similitud entre los parámetros mecáni-

cos y geométricos obtenidos. Sin embargo la arteria carótida difiere relativamente en τ_ϵ y τ_σ , sumándose a esta diferencia la aorta torácica descendente, la aorta abdominal y la arteria femoral. En el Apéndice F puede observarse que estas cuatro arterias son las que presentan mayores diferencias entre métodos, siendo también las arterias en las que se quitan más cantidad de muestras al realizar el primer filtrado. En la Figura 5.8 se muestran los resultados de utilizar el segundo filtrado donde si bien algunas de las diferencias persisten, otras disminuyen o desaparecen en términos relativos. Notar que tanto con el primer o segundo filtrado los valores de R_0 son muy similares a los obtenidos en (Valdez-Jasso et al., 2009).

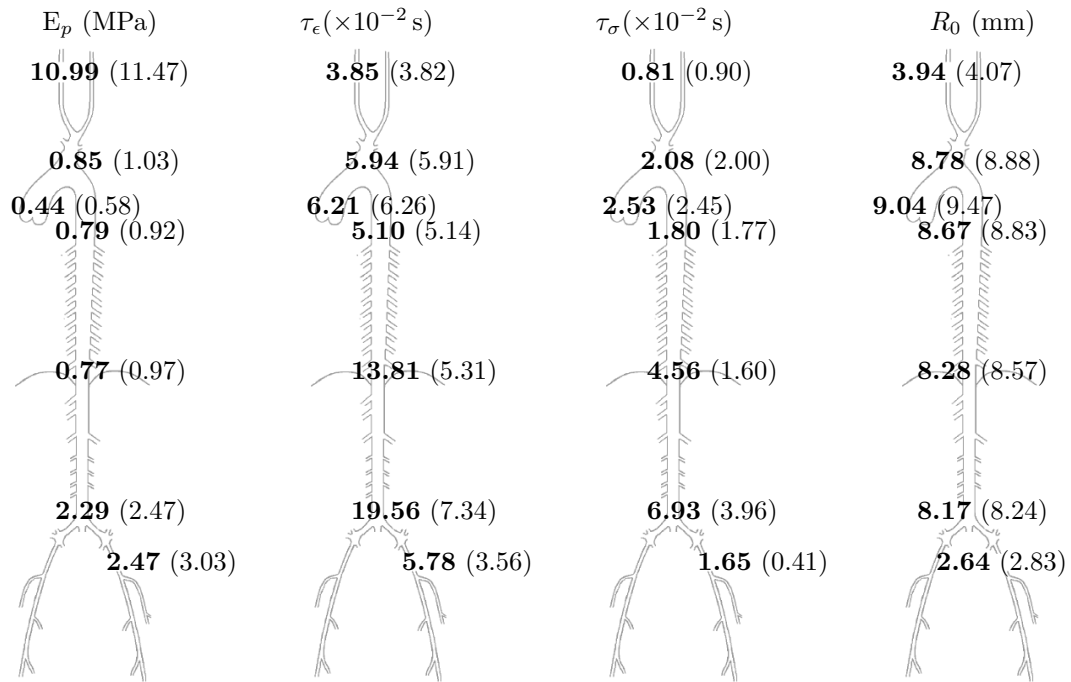
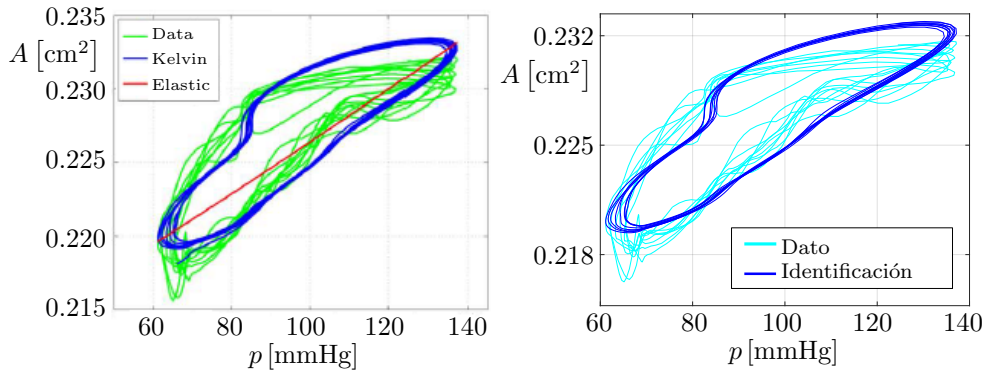
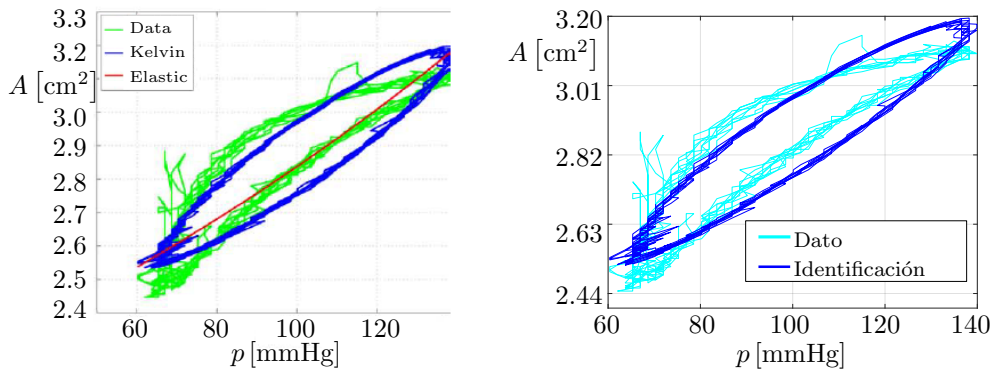


Figura 5.8: Comparación con (Valdez-Jasso et al., 2009) con el segundo filtrado de las muestras utilizando los códigos simplificados de pequeñas deformaciones.

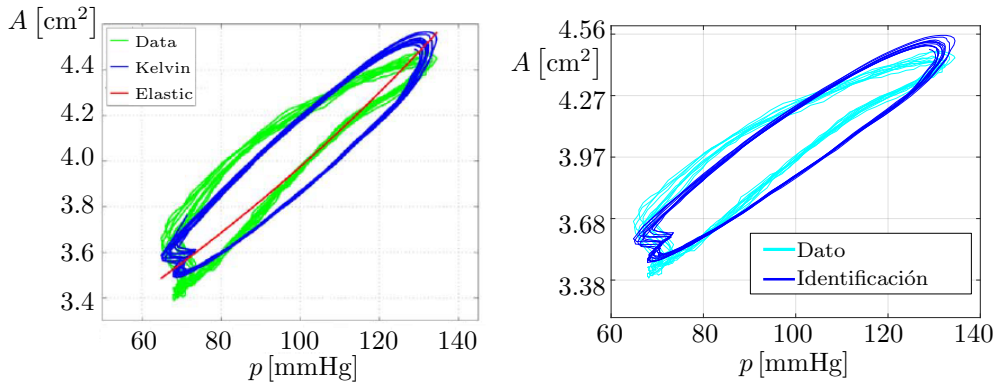
En las Figuras 5.9 y 5.10 se comparan cualitativamente los resultados que se obtienen de utilizar los códigos simplificados con los del trabajo presentado por Valdez-Jasso et al. (2009). En ambas figuras se observa la similitud de los resultados al graficar presión-área, donde el área es $A(t) = \pi R_1(t)^2$. En todas las figuras se utiliza la primer muestra de cada arteria.



(a) Femoral Izquierda: (izquierda) Resultado obtenido en (Valdez-Jasso et al., 2009) - (derecha) Resultado obtenido en este trabajo.

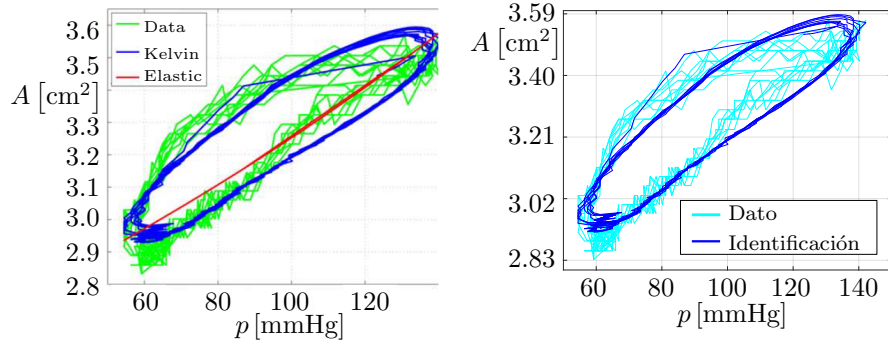


(b) Tronco Braquiocefálico: (izquierda) Resultado obtenido en (Valdez-Jasso et al., 2009) - (derecha) Resultado obtenido en este trabajo.

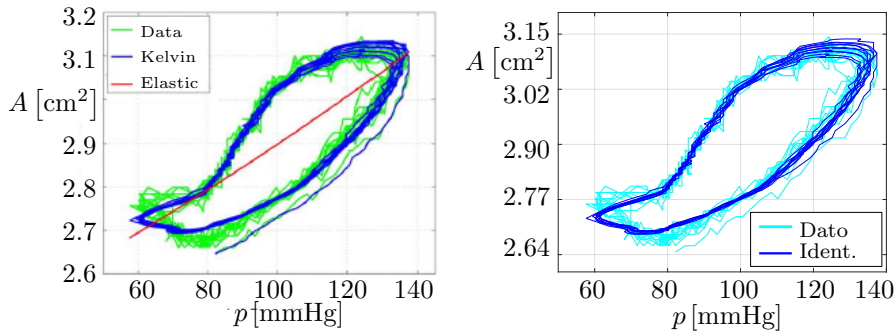


(c) Aorta Ascendente: (izquierda) Resultado obtenido en (Valdez-Jasso et al., 2009) - (derecha) Resultado obtenido en este trabajo.

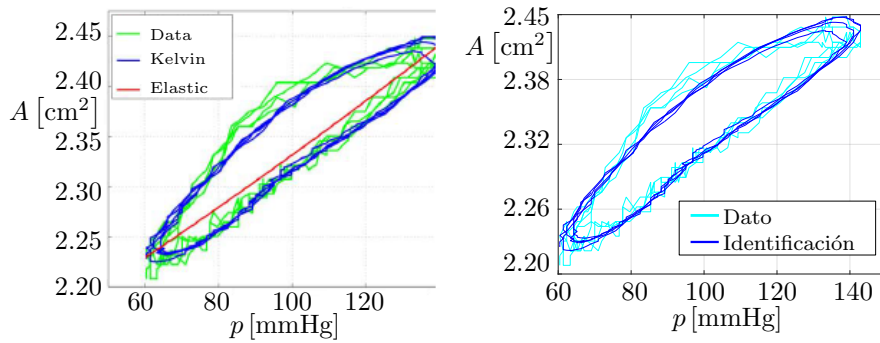
Figura 5.9: Comparación cualitativa de los resultados obtenidos en (Valdez-Jasso et al., 2009) y los de utilizar los códigos simplificados de pequeñas deformaciones - Femoral Izquierda/Tronco Braquiocefálico/Aorta Ascendente.



(a) Aorta Torácica Descendente Proximal: (izquierda) Resultado obtenido en (Valdez-Jasso et al., 2009) - (derecha) Resultado obtenido en este trabajo.



(b) Aorta Torácica Descendente Distal: (izquierda) Resultado obtenido en (Valdez-Jasso et al., 2009) - (derecha) Resultado obtenido en este trabajo.



(c) Aorta Torácica Abdominal Descendente: (izquierda) Resultado obtenido en (Valdez-Jasso et al., 2009) - (derecha) Resultado obtenido en este trabajo.

Figura 5.10: Comparación cualitativa de los resultados obtenidos en (Valdez-Jasso et al., 2009) y los de utilizar los códigos simplificados de pequeñas deformaciones - Aorta Torácica Descendente Proximal/Aorta Torácica Descendente Distal/Aorta Torácica Abdominal Descendente.

5.3. Caracterización material utilizando grandes deformaciones

Debido a que el código axisimétrico emplea una mayor cantidad de tiempo de ejecución se decide no utilizar todos los datos para caracterizar el material. Teniendo en cuenta la Tabla 2.2 se decide utilizar un máximo de 600 datos. Se utilizan entonces todos los datos en las muestras con menos de 600 y 600 datos de las muestras que tienen más (se escoge un intervalo evitando los segundos iniciales y finales). Para comparar con los códigos de pequeñas deformaciones, también se realiza la identificación con éstos utilizando 600 datos. Para el caso de grandes deformaciones también se tuvo en cuenta los filtrados antes mencionados. Sin embargo, debido a la velocidad de ejecución del código axisimétrico en grandes deformaciones, se utiliza un máximo de 2000 evaluaciones del funcional.

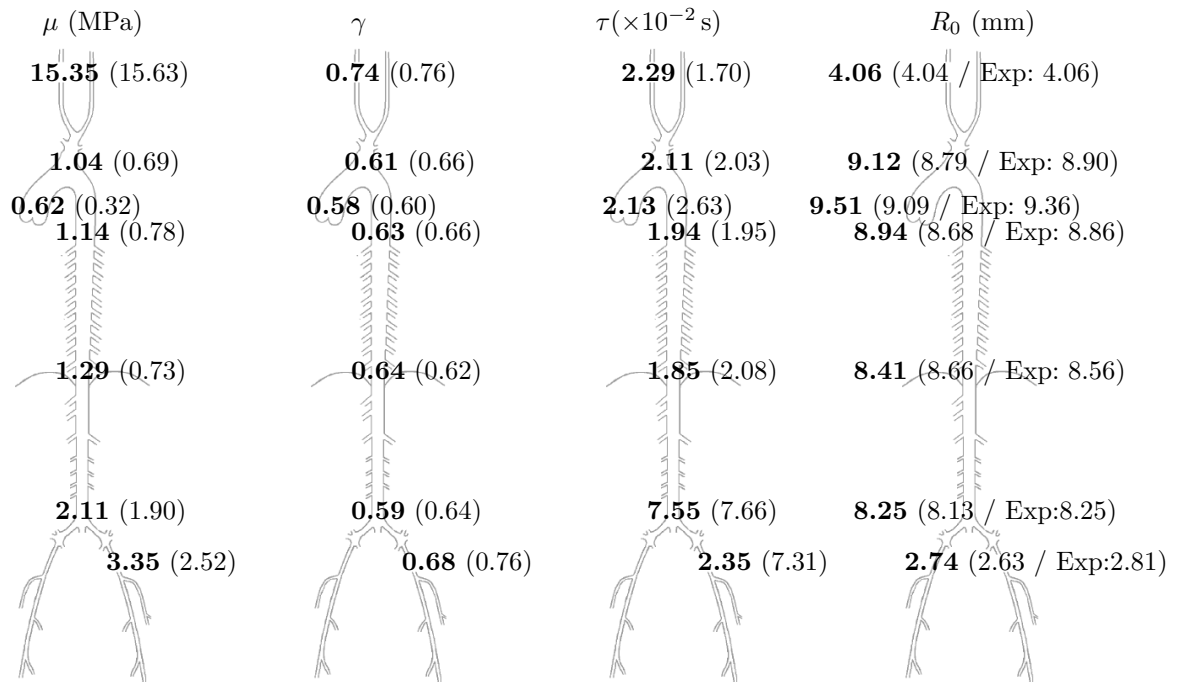


Figura 5.11: Resultados con el primer filtrado de las muestras utilizando 600 datos. Entre paréntesis se tiene el valor de pequeñas deformaciones y el R_0 experimental.

Los valores numéricos presentes en la Figura 5.11 y Figura 5.12 se encuentran en el Apéndice F. En las Figuras 5.11 y 5.12 se observa que la diferencia sustancial entre utilizar pequeñas o grandes deformaciones se da en el parámetro μ mientras que γ y R_0 no varían significativamente, el tiempo de relajación

τ varía significativamente en algunas arterias y en otras no. Por lo anterior, parece útil realizar en primer lugar la optimización con los códigos de pequeñas deformaciones para luego obtener únicamente los parámetros μ o utilizar los resultados de pequeñas deformaciones como condición inicial para el de grandes deformaciones.

Tabla 5.3: Comparación entre los modelos de pequeñas deformaciones y grandes deformaciones utilizando el primer filtrado.

Arteria	máx $\{\varepsilon_{\theta\theta}\}$ (%)	ϵ_{μ} (%)	ϵ_{γ} (%)	ϵ_{τ} (%)	ϵ_{R_0} (%)
CD	6.05	-1.79	-2.63	34.71	0.50
TB	27.37	50.72	-7.58	3.94	3.75
AA	37.80	93.75	-3.33	-19.01	4.62
ATDP	20.32	46.15	-4.55	-0.51	3.00
ATDD	23.03	76.71	3.23	-11.06	-2.89
AAD	9.67	11.05	-7.81	-1.44	1.48
FI	11.30	32.94	-10.53	-67.85	4.18

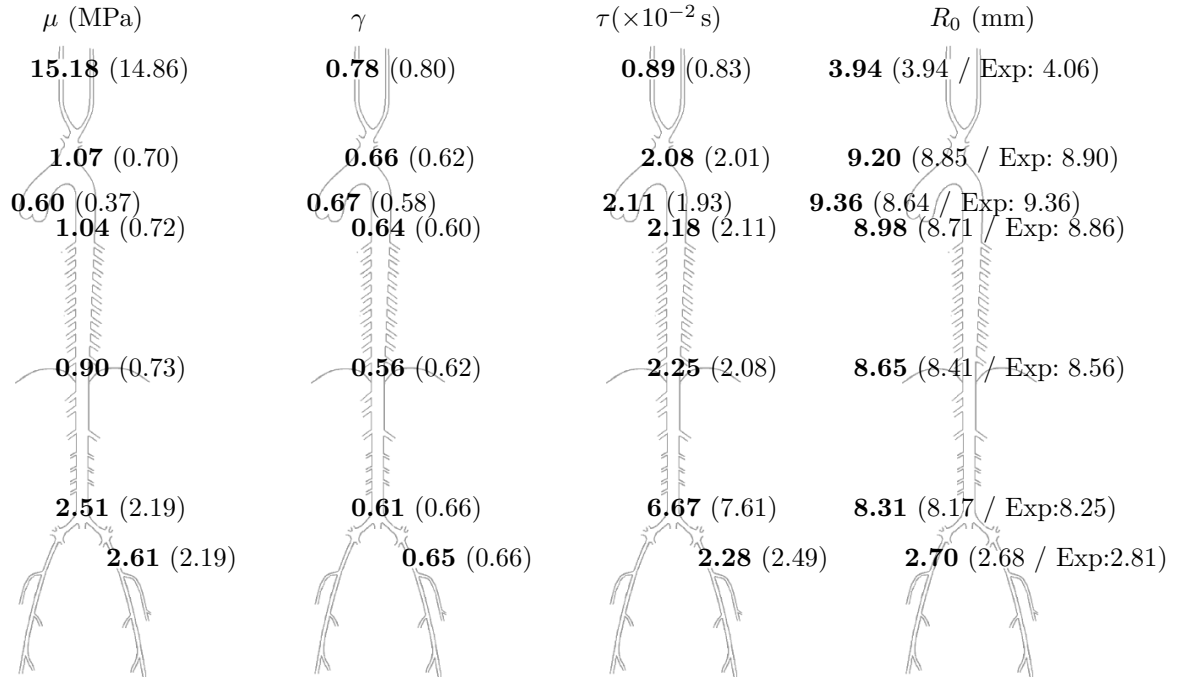


Figura 5.12: Resultados con el segundo filtrado de las muestras utilizando 600 datos. Entre paréntesis se tiene el valor de pequeñas deformaciones y el R_0 experimental.

Tabla 5.4: Comparación entre los modelos de pequeñas deformaciones y grandes deformaciones utilizando el segundo filtrado.

Arteria	máx $\{\varepsilon_{\theta\theta}\}$ (%)	ϵ_{μ} (%)	ϵ_{γ} (%)	ϵ_{τ} (%)	ϵ_{R_0} (%)
CD	6.05	6.45	-2.50	7.23	0.00
TB	27.37	52.86	6.45	3.48	3.95
AA	37.80	62.16	15.52	9.33	8.33
ATDP	20.32	44.44	6.67	3.32	3.10
ATDD	23.03	23.29	-9.68	8.17	2.85
AAD	9.67	14.61	-7.58	-12.35	1.71
FI	11.30	19.18	-1.52	-8.43	0.75

En las Tablas 5.3 y 5.4 se comparan los códigos de grandes deformaciones y pequeñas deformaciones utilizando el primer y segundo filtrado respectivamente. En estas tablas se observa que en las arterias que se tienen mayores deformaciones las diferencias relativas son mayores.

En la Tabla 5.5 se presentan los errores relativos entre los radios R_0 obtenidos por los códigos de pequeñas y grandes deformaciones respecto al valor medido experimentalmente. No se observa, en dicha tabla, tendencia de uno de los modelos a mostrar mejores resultados en cuanto a la comparación con el R_0 medido experimentalmente. Esto último indicaría que el error experimental posiblemente prevalece sobre el error de la predicción de los modelos. Sin embargo, se destaca que en la mayoría de las arterias el resultado de grandes deformaciones tiene un error relativo menor que el de pequeñas deformaciones.

Tabla 5.5: Comparación con radio R_0 obtenido experimentalmente.

Arteria	Primer filtro (%)		Segundo filtro (%)	
	Peq. Def.	Grand. Def.	Peq. Def.	Grand. Def.
CD	-0.49	0.00	-2.96	-2.96
TB	-1.24	2.47	-0.56	3.37
AA	-2.88	1.60	-7.69	0.00
ATDP	-2.03	0.90	-1.69	1.35
ATDD	1.17	-1.75	-1.75	1.05
AAD	-1.33	0.12	-0.85	0.85
FI	-6.41	-2.49	-4.63	-3.91

5.4. Análisis de sensibilidad en la sincronización de los datos

En esta sección se estudia la sensibilidad de los parámetros mecánicos con respecto a la sincronización de la presión y del radio medido experimentalmente. Para lo anterior, se utiliza el código analítico por lo que se modifica la Ecuación (5.5) para simular una obtención no perfectamente sincronizada de los datos experimentales.

$$p_{\text{aprox}}(t) = \sum_{k=1}^{N_{\text{mult}}} \{ \mathbf{A}(k) \cos [2 \pi \mathbf{f}_{\text{mult}}(k) (t + \alpha T_{\text{fund}})] \dots + \mathbf{B}(k) \sin [2 \pi \mathbf{f}_{\text{mult}}(k) (t + \alpha T_{\text{fund}})] \}, \quad (5.16)$$

donde $\alpha \times 100$ es el porcentaje del período fundamental que se desfasa la presión impuesta. Se utiliza la muestra número tres de la arteria ATDP y valores de α entre -3% y 3% . La identificación se realiza contra los datos de radio experimental. En la Figura 5.13 se muestra como cambia la presión por este desfase.

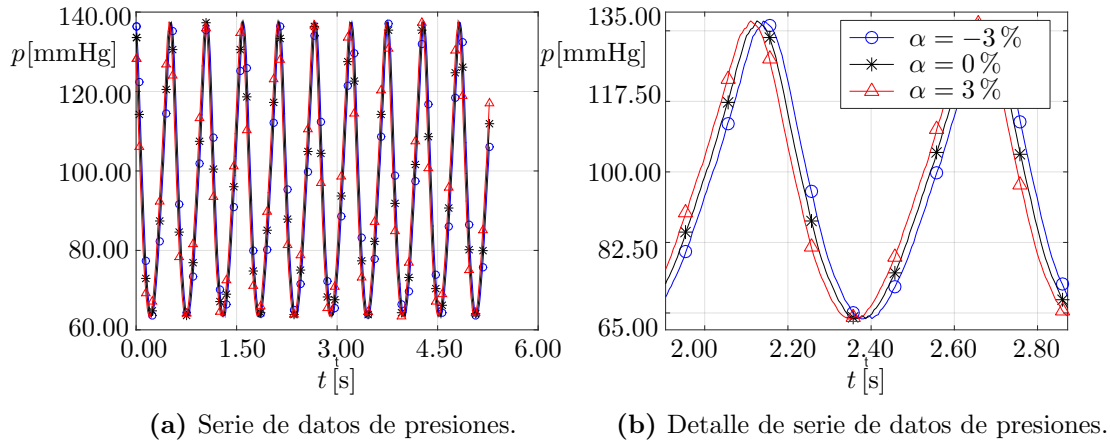


Figura 5.13: Desfase entre series de datos de presiones.

En las Figuras 5.14 y 5.15 se ilustran los valores de los parámetros identificados al variar α . Se observa que el radio R_0 no tiene presenta cambios importantes. Mientras que los tres parámetros materiales sí presentan cambios significativos.

Los resultados aquí obtenidos son consistentes con lo planteado en (Hoeks

et al., 2000), debe tenerse especial cuidado al obtener las medidas experimentales para que no exista desfase. Esto último es un desafío para medidas *in-vivo* en humanos.

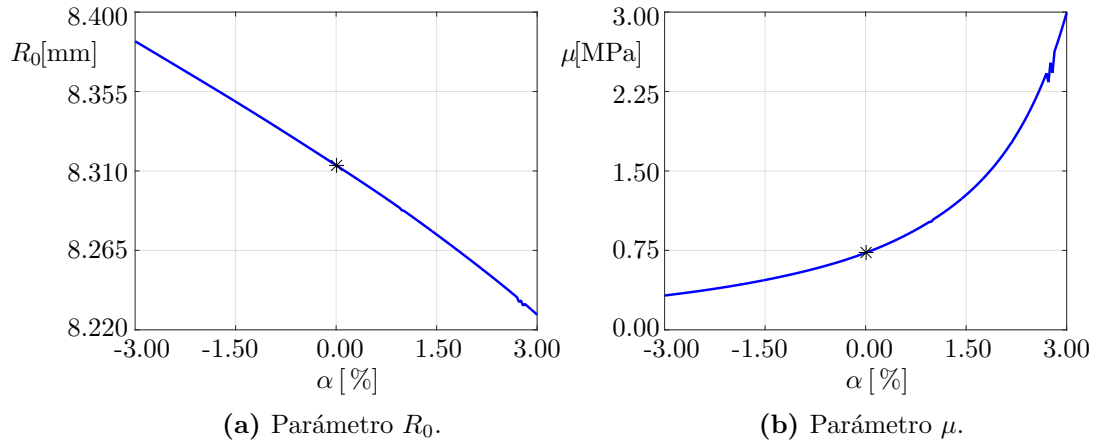


Figura 5.14: Parametros R_0 y μ por desincronización de los datos.

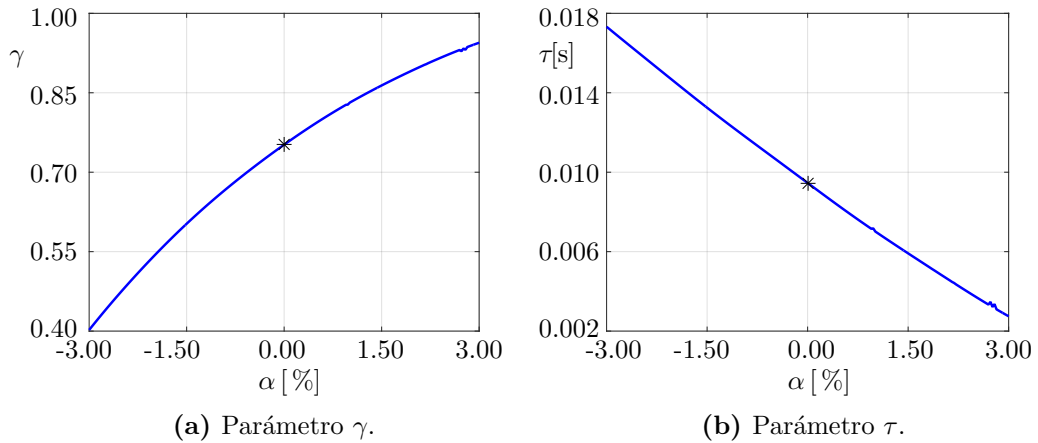


Figura 5.15: Parametros γ y τ por desincronización de los datos.

En la Tabla 5.6 se muestran los errores relativos para $\alpha = -3\%$ y $\alpha = 3\%$ respecto del valor obtenido utilizando $\alpha = 0\%$ para cada uno de los parámetros identificados. Como se mencionó anteriormente, de forma cuantitativa se observa que el parámetro R_0 prácticamente no tiene variación, mientras que los tres parámetros materiales tiene cambios significativos.

Tabla 5.6: Error relativo por causa de la desincronización al identificar los parámetros mecánicos y geométricos.

α	ϵ_μ (%)	ϵ_γ (%)	ϵ_τ (%)	ϵ_{R_0} (%)
-3%	-55.41	-46.53	83.16	0.85
3%	311.75	25.60	-70.98	-1.02

En las Figuras 5.16a, 5.16b y 5.17a se muestran tres de los bucles que se identificaron (datos de entrada), los bucles se generaron utilizando las presiones con $\alpha = -3\%$, $\alpha = 0\%$ y $\alpha = 3\%$ respectivamente y el radio medido experimentalmente. En los bucles se observan cualitativamente las diferencias obtenidas en las Figuras 5.14 y 5.15. En la Figura 5.17b se comparan los bucles, para que la visualización sea posible se utilizaron las aproximaciones trigonométricas con `fft` de cada bucle. Como era de esperar, la probeta con un bucle más marcado es la más viscosa.

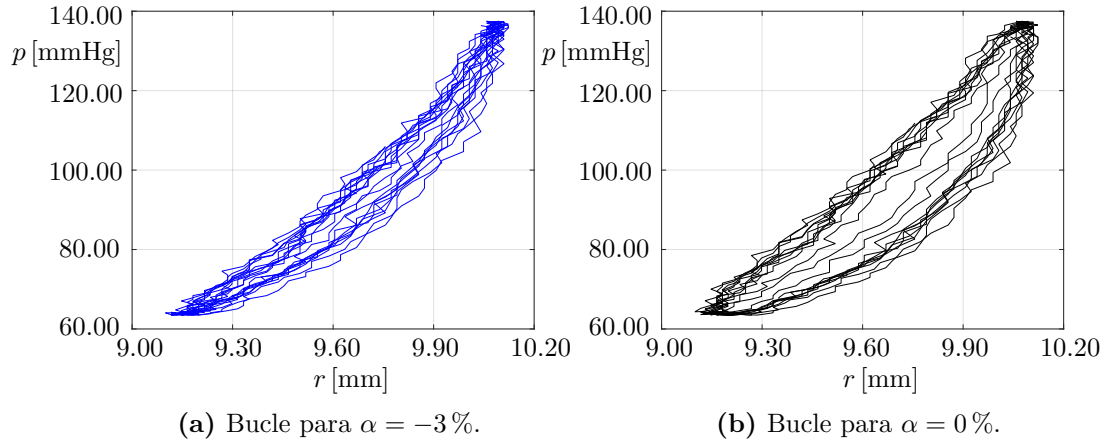


Figura 5.16: Desincronización utilizando $\alpha = -3\%$ y $\alpha = 0\%$.

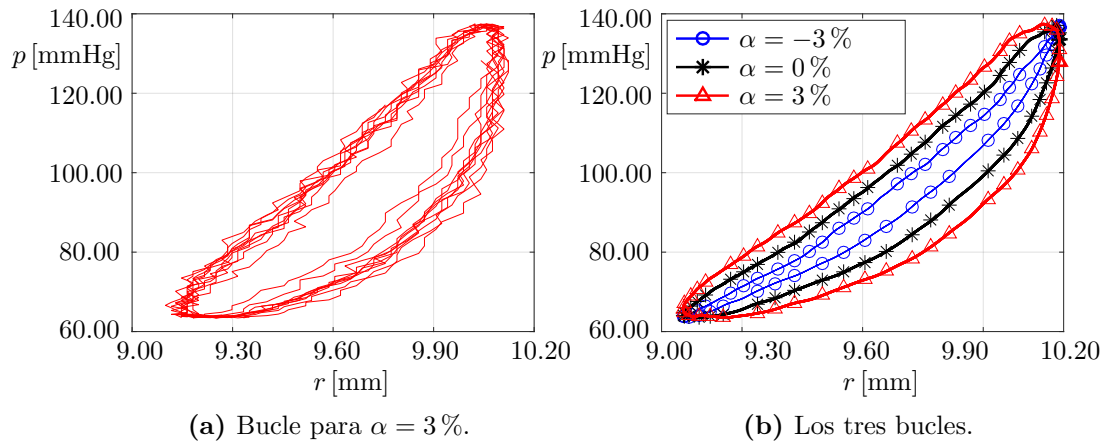


Figura 5.17: Desincronización utilizando $\alpha = 3\%$ y comparación entre los tres bucles.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos futuros

Conclusiones

En el presente trabajo se logró desarrollar un código tridimensional para sólidos viscoelásticos, isotropos admitiendo posibles grandes deformaciones. En el Capítulo 3 se desarrolla, implementa y valida dicho código.

A partir de este código fue posible el desarrollo de otros tres códigos unidimensionales: (1) código axisimétrico viscoelástico bajo la hipótesis de grandes deformaciones, (2) código recursivo viscoelástico bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones y (3) código analítico viscoelástico bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones para la solución permanente. La validación de estos tres códigos fue realizada comparando los resultados obtenidos con los del código tridimensional.

Debido a que el código tridimensional exige tiempos de ejecución altos, los códigos unidimensionales son convenientes especialmente cuando se deben realizar varias simulaciones, por ejemplo en el proceso de identificación de parámetros. Las simplificaciones utilizadas para el desarrollo de los códigos unidimensionales tienen la misma naturaleza que las utilizadas en la bibliografía.

Del presente trabajo se destaca que los parámetros materiales del modelo viscoelástico utilizado son los correspondientes a un modelo tridimensional del comportamiento viscoelástico conocido en la bibliografía. Por lo anterior, la obtención de estos parámetros permitiría realizar la simulación de problemas tridimensionales no axisimétricos. Otra de las ventajas del modelo utilizado es que posee un parámetro material (μ) claramente relacionado a las propiedades

elásticas de la arteria y otro parámetro (γ) claramente relacionado con el comportamiento viscoso. De esta manera, se considera que los mismos podrían ser parámetros muy apropiados en el auxilio del diagnóstico en la práctica médica, en aquellos casos que se ha visto que una alteración puede modificar de manera diferencial el comportamiento elástico del viscoso. Adicionalmente, los mismos podrían ser de gran utilidad en el área de la investigación animal o humana experimental.

Los códigos desarrollados fueron aplicados a la caracterización de los parámetros materiales y geométricos de la pared arterial. Los resultados, en general, son comparables a los de la bibliografía, por lo que se concluye que los códigos desarrollados son aplicables a este tipo de problema de identificación.

Al comparar los resultados obtenidos con los diferentes códigos desarrollados se concluye que solamente el parámetro μ cambia sustancialmente al considerar las grandes deformaciones, mientras que los demás parámetros no cambian significativamente. Sin embargo, el parámetro R_0 aumenta consistentemente al considerar las grandes deformaciones, por lo que mediciones experimentales futuras de mayor precisión de este parámetro podrían establecer que el modelo de grandes deformaciones es más conveniente. No se ha podido establecer que exista alguna ventaja de considerar la pared gruesa, visto que las variaciones de las magnitudes consideradas en el espesor de la pared arterial no han sido significativas y el análisis ha podido ser realizado con un solo elemento finito.

Los modelos empleados permitieron arribar a cuantificaciones de parámetros elásticos y viscosos que fueron cualitativamente y cuantitativamente similares a los previamente descritos para arterias humanas y animales, lo que evidencia la bondad de los mismos.

Finalmente se cuantificó el efecto de la no sincronización de las medidas experimentales. Se reconoció que pequeños desfases de la presión impuesta producen variaciones significativas en los parámetros materiales μ , γ y τ , y variaciones menores de R_0 . De lo anterior se concluye sobre la importancia de una correcta obtención de las medias experimentales, especialmente en la sincronización de las series de datos presión-diámetro, lo cual es un desafío en medidas *in-vivo* humanas.

Trabajos futuros

Existen diversas líneas de trabajo que se pueden continuar.

Los códigos desarrollados, especialmente el tridimensional, pueden mejorar su rendimiento. Para la mejora del rendimiento de los códigos una posible línea de trabajo es cambiar el lenguaje de programación, por ejemplo utilizar Fortran, Python o CUDA, mejorando los tiempos de ejecución.

Cómo se mencionó en el Capítulo 2, la pared arterial es anisótropa por lo que la inclusión de fibras en el modelo permitiría realizar análisis con menos simplificaciones. Las arterias están en constante interacción con la sangre, por tal motivo considerar la interacción entre fluido-estructura resulta evidente como un trabajo futuro.

Dado que, como se mencionó, los modelos aquí presentados pueden utilizarse en datos de humanos, sería interesante la utilización de ellos para realizar la identificación. Teniendo en cuenta lo obtenido en la Sección 5.4 sobre la sensibilidad en la sincronización, resulta también interesante analizar cómo cambian los parámetros materiales con algunos factores, como: la edad o enfermedades (ej. Aterosclerosis). En esta misma línea de investigación, parece lógico evaluar el impacto de exponerse o no a factores de riesgo (ej. tabaquistas y no tabaquistas).

Agradecimientos

El autor agradece a las agencias que han hecho posible esta tesis: Comisión Sectorial de Investigación Científica (CSIC) (I+D 2014 - ID 402) y Agencia Nacional de Investigación e Innovación (ANII) (POS_NAC_2014_1_102824). Así también como a las Facultades de Ingeniería y de Medicina que en todos los niveles han colaborado para que esta tesis pueda realizarse.

Referencias bibliográficas

Armentano, R., Graf, S., Barra, J., Velikovsky, G., Baglivo, H., Sanchez, R., Simon, A., Pichel, R. H., y Levenson, J. (1998). Carotid wall viscosity increase is related to intima-media thickening in hypertensive patients. *Hypertension*, 31:534–9.

Armentano, R. L., Barra, J. G., Levenson, J., Simon, A., y Pichel, R. H. (1995). Arterial wall mechanics in conscious dogs. Assessment of viscous, inertial, and elastic moduli to characterize aortic wall behavior. *Circulation research*, 76(3):468–78.

Armentano, R. L., Barra, J. G., Pessana, F. M., Craiem, D. O., Graf, S., Santana, D. B., y Sanchez, R. A. (2007). Smart smooth muscle spring-dampers. Smooth muscle smart filtering helps to more efficiently protect the arterial wall. *IEEE engineering in medicine and biology magazine : the quarterly magazine of the Engineering in Medicine & Biology Society*, 26(1):62–70.

Armentano, R. L., Barra, J. G., Santana, D. B., Pessana, F. M., Graf, S., Craiem, D., Brandani, L. M., Baglivo, H. P., y Sanchez, R. A. (2006). Smart Damping Modulation of Carotid Wall Energetics in Human Hypertension: Effects of Angiotensin-Converting Enzyme Inhibition. *Hypertension*, 47(3):384–390.

Avdis, A. y Mouradian, S. L. (2011). A Gmsh tutorial.

Ayachit, U. (2008). The ParaView Guide. Kitware.

Belytschko, T., Liu, W. K., y Moran, B. (2001). *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Wiley, 1st edition.

- Bia, D., Aguirre, I., Zócalo, Y., Devera, L., Cabrera Fischer, E., y Armentano, R. (2005). Regional Differences in Viscosity, Elasticity, and Wall Buffering Function in Systemic Arteries: Pulse Wave Analysis of the Arterial Pressure-Diameter Relationship. *Revista Española de Cardiología (English Edition)*, 58(2):167–174.
- Bia, D., Wray, S., y Cabrera-fischer, E. I. (2017). Comparative in vivo analysis of the role of the adventitia and the endothelium on arterial mechanical function: relevance for aortic counterpulsation. *Int J Artif Organs*, 00(00).
- Bia, D., Zócalo, Y., Cabrera-Fischer, E. I., Wray, S., y Armentano, R. L. (2014). Quantitative Analysis of the Relationship between Blood Vessel Wall Constituents and Viscoelastic Properties: Dynamic Biomechanical and Structural In Vitro Studies in Aorta and Carotid Arteries. *Physiology Journal*, 2014(May 2016):1–9.
- Bossuyt, J., Engelen, L., Ferreira, I., Stehouwer, C. D., Boutouyrie, P., Laurent, S., Segers, P., Reesink, K., Van Bortel, L. M., y Reference Values for Arterial Measurements Collaboration (2015). Reference values for local arterial stiffness. Part B. *Journal of Hypertension*, 33(10):1997–2009.
- Cabrera-fischer, D. E. I., Zócalo, Y., y Lascano, E. C. (2015). La adventicia arterial : actor olvidado del sistema cardiovascular. *Revista Uruguaya de Cardiología*, 30(1):58–65.
- Canelas, A. (2016). *Apuntes del curso Elasticidad Finita*. Instituto de Estructuras y Transporte, Montevideo.
- Castro, J. M., García-Espinosa, V., Curcio, S., Arana, M., Chiesa, P., Giachetto, G., Zócalo, Y., y Bia, D. (2016). Childhood Obesity Associates Haemodynamic and Vascular Changes That Result in Increased Central Aortic Pressure with Augmented Incident and Reflected Wave Components, without Changes in Peripheral Amplification. *International Journal of Vascular Medicine*, 2016:1–8.
- Claes, E. (2010). *Estudio mecánico de las arterias coronarias humanas y sus sustitutos vasculares*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid.
- Curcio, S., García-Espinosa, V., Castro, J. M., Peluso, G., Marotta, M., Arana, M., Chiesa, P., Giachetto, G., Bia, D., y Zócalo, Y. (2017). High Blood Pres-

- sure States in Children, Adolescents, and Young Adults Associate Accelerated Vascular Aging, with a Higher Impact in Females' Arterial Properties. *Pediatric Cardiology*, 38(4):840–852.
- Dorfmann, L. y Ogden, R. W., editors (2015). *Nonlinear Mechanics of Soft Fibrous Materials*, volume 559 of *CISM International Centre for Mechanical Sciences*. Springer Vienna, Vienna.
- Engelen, L., Bossuyt, J., Ferreira, I., van Bortel, L. M., Reesink, K. D., Segers, P., Stehouwer, C. D., Laurent, S., Boutouyrie, P., y Reference Values for Arterial Measurements Collaboration (2015). Reference values for local arterial stiffness. Part A. *Journal of Hypertension*, 33(10):1981–1996.
- Engelen, L., Ferreira, I., Stehouwer, C. D., Boutouyrie, P., Laurent, S., y Reference Values for Arterial Measurements Collaboration (2013). Reference intervals for common carotid intima-media thickness measured with echotracking: relation with risk factors. *European Heart Journal*, 34(30):2368–2380.
- Frank, O. (1990). The basic shape of the arterial pulse. First treatise: Mathematical analysis. *Journal of Molecular and Cellular Cardiology*, 22(3):255–277.
- Fung, Y.-C. (1993). *Biomechanics : Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer-Verlag, New York.
- Fung, Y.-c. (1997). *Biomechanics: Circulation*. Springer-Verlag, New York.
- Geuzaine, C. y Remacle, J. F. (2009). Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331.
- Geuzaine, C. y Remacle, J.-F. (2016). Gmsh Reference Manual.
- Gurtin, M. (1982). *An Introduction to Continuum Mechanics*. Mathematics in Science and Engineering, London.
- Hoeks, A. P. G., Willigers, J. M., y Reneman, R. S. (2000). Effects of assessment and processing techniques on the shape of arterial pressure-distension loops. *Journal of Vascular Research*, 37(6):494–500.

- Holzapfel, G. (2000a). *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering*, volume First Edit. Wiley.
- Holzapfel, G. A. (2000b). Biomechanics of soft tissue. *Handbook of Material Behavior*, 1(7):1–15.
- Holzapfel, G. A., Gasser, T. C., y Stadler, M. (2002). A structural model for the viscoelastic behavior of arterial walls: Continuum formulation and finite element analysis. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21(10):441–463.
- Holzapfel, G. A. y Ogden, R. W., editors (2003). *Biomechanics of Soft Tissue in Cardiovascular Systems*. Springer Vienna, Vienna.
- Hürkamp, A., Tanaka, M., y Kaliske, M. (2015). Complex step derivative approximation of consistent tangent operators for viscoelasticity based on fractional calculus. *Computational Mechanics*, 56(6):1055–1071.
- Kitware (2012). VTK File Formats.
- Klabunde, R. E. (2004). Cardiovascular Physiology Concepts. *Lippincott Williams & Wilkins*, pages 1–256.
- Laurent, S., Cockcroft, J., Van Bortel, L., Boutouyrie, P., Giannattasio, C., Hayoz, D., Pannier, B., Vlachopoulos, C., Wilkinson, I., y Struijker-Boudier, H. (2006). Expert consensus document on arterial stiffness: Methodological issues and clinical applications. *European Heart Journal*, 27(21):2588–2605.
- Lodish, H., Berk, A., Matsudaira, P., Kaiser, C. A., Krieger, M., Scott, M. P., Zipursky, L., y Darnell, J. (2004). *Biologia Celular y molecular*. W.H. Freeman And Company, 5th edition.
- Mackay, J. y Mensah, G. (2004). The Atlas of Heart Disease and Stroke. Technical report, World Health Organization.
- Meinders, J. M. y Hoeks, A. P. G. (2004). Simultaneous assessment of diameter and pressure waveforms in the carotid artery. *Ultrasound in Medicine and Biology*, 30(2):147–154.
- MIDES (2013). Reporte Social 2013. Technical report, Ministerio de Desarrollo Social, Montevideo.

- MIDES y OPP (2015). Reporte Uruguay 2015. Technical report, Ministerio de Desarrollo Social, Montevideo.
- Miehe, C. (1994). Aspects of the formulation and finite element implementation of large strain isotropic elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(12):1981–2004.
- Niederlaender, E. (2006). Population and Social Conditions - Causes of death in the EU. *Statistics in focus*, 10:1–11.
- Núñez, F., Martínez-Costa, C., Sánchez-Zahonero, J., Morata, J., Chorro, F. J., y Brines, J. (2010). Medida de la rigidez de la arteria carótida como marcador precoz de lesión vascular en niños y adolescentes con factores de riesgo cardiovascular. *Revista Espanola de Cardiologia*, 63(11):1253–1260.
- Pérez Zerpa, J. M., Canelas, A., Sensale, B., Bia Santana, D., y Armenitano, R. L. (2015). Modeling the arterial wall mechanics using a novel high-order viscoelastic fractional element. *Applied Mathematical Modelling*, 39(16):4767–4780.
- Radhakrishnan, J. (2012). *Changes in arterial stiffness and other cardiovascular risk variables following specific exercise programmes*. PhD thesis, Brunel University.
- Reference Values for Arterial Stiffness' Collaboration (2010). Determinants of pulse wave velocity in healthy people and in the presence of cardiovascular risk factors: 'establishing normal and reference values'. *European Heart Journal*, 31(19):2338–2350.
- Remacle, J.-F., Chevaugnon, N., Marchandise, É., y Geuzaine, C. (2007). Efficient visualization of high-order finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(4):750–771.
- Robinson, D. L., Kersh, M. E., Walsh, N. C., Ackland, D. C., de Steiger, R. N., y Pandey, M. G. (2016). Mechanical properties of normal and osteoarthritic human articular cartilage. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 61:96–109.
- Sagawa, K. (1990). Translation of Otto Frank's paper "Die Grundform des arteriellen Pulses" zeitschrift für biologie 37: 483–526 (1899). *Journal of Molecular and Cellular Cardiology*, 22(3):253–254.

- Salvatore, F. y T Christian, G. (2010). Nonlinear elasticity of biological tissues with statistical fibre orientation Nonlinear elasticity of biological tissues with statistical fibre orientation. *Journal of The Royal Society*, 3(January):955–966.
- Schulze-Bauer, C. a. J. y Holzapfel, G. a. (2003). Determination of constitutive equations for human arteries from clinical data. *J. Biomechanics*, 36:165–169.
- Shen, J. J. (2016). A structurally based viscoelastic model for passive myocardium in finite deformation. *Computational Mechanics*, 58(3):491–509.
- Simo, J. C. y Hughes, T. J. R. (1998). *Computational Inelasticity*, volume 7 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York.
- Spasic, D. T., Kovincic, N. I., y Dankuc, D. V. (2016). A new material identification pattern for the fractional Kelvin-Zener model describing biomaterials and human tissues. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 37:193–199.
- Tanaka, M., Fujikawa, M., Balzani, D., y Schröder, J. (2014). Robust numerical calculation of tangent moduli at finite strains based on complex-step derivative approximation and its application to localization analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 269:454–470.
- Urhausen, J. y Pace, M. (2013). Circulatory diseases main cause of death for men and women aged 65 years and over. Technical Report November, Eurostat.
- Valdez-Jasso, D., Bia, D., Zócalo, Y., Armentano, R. L., Haider, M. A., y Olufsen, M. S. (2011). Linear and nonlinear viscoelastic modeling of aorta and carotid pressure-area dynamics under in vivo and ex vivo conditions. *Annals of Biomedical Engineering*, 39(5):1438–1456.
- Valdez-Jasso, D., Haider, M. A., Banks, H. T., Santana, D. B., Germán, Y. Z., Armentano, R. L., y Olufsen, M. S. (2009). Analysis of viscoelastic wall properties in ovine arteries. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 56(2):210–219.

- Van Bortel, L. M., Laurent, S., Boutouyrie, P., Chowienczyk, P., Cruickshank, J. K., De Backer, T., Filipovsky, J., Huybrechts, S., Mattace-Raso, F. U. S., Protogerou, A. D., Schillaci, G., Segers, P., Vermeersch, S., y Weber, T. (2012). Expert consensus document on the measurement of aortic stiffness in daily practice using carotid-femoral pulse wave velocity. *J Hypertens*, 30(3):445–8.
- von Maltzahn, W. W., Besdo, D., y Wiemer, W. (1981). Elastic properties of arteries: A nonlinear two-layer cylindrical model. *Journal of Biomechanics*, 14(6):389–397.
- Westerhof, N., Lankhaar, J. W., y Westerhof, B. E. (2009). The arterial windkessel. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 47(2):131–141.
- WHO (2015). Enfermedades cardiovasculares. Technical report, World Health Organization Media Center.
- Zhang, M., Nigwekar, P., Castaneda, B., Hoyt, K., Joseph, J. V., di Sant’Agnese, A., Messing, E. M., Strang, J. G., Rubens, D. J., y Parker, K. J. (2008). Quantitative Characterization of Viscoelastic Properties of Human Prostate Correlated with Histology. *Ultrasound in Medicine and Biology*, 34(7):1033–1042.
- Zhu, Y., Chen, X., Zhang, X., Chen, S., Shen, Y., y Song, L. (2016). Modeling the mechanical properties of liver fibrosis in rats. *Journal of Biomechanics*, 49(9):1461–1467.
- Zocalo, Y., Arana, M., Curcio, S., García, V., Giachetto, G., Chiesa, P., y Bia, D. (2015). Daño arterial subclínico en niños, adolescentes y jóvenes. Análisis de la asociación con factores de riesgo, con la aterosclerosis del adulto y de su reversibilidad mediante intervención temprana. *Revista Uruguaya de Cardiología*, 30(2):176–187.

APÉNDICES

Apéndice A

Expresiones analíticas

A.1. Gradiente de deformación

A.1.1. Coordenadas cartesianas

$$\mathbf{x} = x(X, Y, Z) \mathbf{e}_x + y(X, Y, Z) \mathbf{e}_y + z(X, Y, Z) \mathbf{e}_z \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

A.1.2. Coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{x} = r(R, \Theta, Z) \mathbf{e}_r + \theta(R, \Theta, Z) \mathbf{e}_\theta + z(R, \Theta, Z) \mathbf{e}_z \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \Theta} - \frac{\theta}{R} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} + \frac{r}{R} & \frac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial \Theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

A.2. Tensor volumétrico y tensor isocórico elástico

A.2.1. Tensor volumétrico elástico

Se puede probar, [Canelas \(2016\)](#), que

$$\frac{\partial \det(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-\text{T}} \quad (\text{A.5})$$

por tanto, recordando que $\det(\mathbf{F}) = J$ y $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\text{T}}\mathbf{F}$ se tiene

$$\frac{\partial \det(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \det(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-\text{T}} = \frac{\partial J^2}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial J^2}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = 2J \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{J}{2} \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{A.6})$$

donde se uso que \mathbf{C} es simétrica. En consecuencia

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}}^{\circ} = 2 \frac{\partial \bar{\Psi}(J)}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \bar{\Psi}(J)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \Rightarrow \bar{\bar{\mathbf{S}}}^{\circ} = J \frac{\partial \bar{\Psi}(J)}{\partial J} \mathbf{C}^{-1}. \quad (\text{A.7})$$

A.2.2. Tensor isocórico elástico

Son útiles las siguientes expresiones

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial (J^{-2/3} \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{C} \otimes \frac{\partial J^{-2/3}}{\partial \mathbf{C}} + J^{-2/3} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}}, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial J^{-2/3}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial J^{-2/3}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{1}{3} J^{-2/3} \mathbf{C}^{-1} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{I}, \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}}^{\circ} = 2 \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = 2 \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : J^{-2/3} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right]. \quad (\text{A.10})$$

Utilizando que

$$\mathbf{A} : (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} : \mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{C} (\mathbf{A} : \mathbf{B}), \quad (\text{A.11})$$

se tiene que

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}}^{\circ} = J^{-2/3} 2 \left[\frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbf{C} \right) \mathbf{C}^{-1} \right], \quad (\text{A.12})$$

donde definiendo la función DEV

$$\text{DEV}[\bullet] = (\bullet) - \frac{1}{3} [(\bullet) : \mathbf{C}] \mathbf{C}^{-1}, \quad (\text{A.13})$$

se obtiene

$$\bar{\mathbf{S}}^\circ = J^{-2/3} \text{DEV} \left[2 \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right]. \quad (\text{A.14})$$

Apéndice B

Elemento finito tetraédrico lineal

A continuación se describen algunas expresiones importantes del elemento tetraédrico 3D, que es el más usual de los elementos 3D. En (Belytschko et al., 2001) puede encontrarse con más detalle lo que aquí se expone. La geometría de este elemento se obtiene con funciones de interpolación lineal N . Para obtener estas funciones es útil escribir la geometría del elemento e como

$$\mathbf{x}_e = \begin{pmatrix} 1 \\ x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_{1,e} & x_{2,e} & x_{3,e} & x_{4,e} \\ y_{1,e} & y_{2,e} & y_{3,e} & y_{4,e} \\ z_{1,e} & z_{2,e} & z_{3,e} & z_{4,e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{1,e} \\ N_{2,e} \\ N_{3,e} \\ N_{4,e} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_e \mathbf{N}_e \quad (\text{B.1})$$

y en consecuencia $\mathbf{N}_e = \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{x}$. $x_{i,e}$ es la coordenada del i -ésimo nodo del elemento e .

Para elegir los nodos existen diversas formas, en (Belytschko et al., 2001) se elige el primer nodo y luego los otros tres se eligen de forma que entre ellos tres, utilizando la regla de la mano derecha, se señale al primer nodo. Se tiene entonces que

$$N_{i,e}(x, y, z) = m_{1i,e} + m_{2i,e} x_e + m_{3i,e} y_e + m_{4i,e} z_e, \quad (\text{B.2})$$

donde

$$m_{ij,e} = \frac{1}{6 V_e} (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij,e}), \quad (\text{B.3})$$

siendo $V_e = \frac{\det(\mathbf{A}_e)}{6}$ el volumen del elemento y $\det(\mathbf{A}_{ij,e})$ es el determinante de la matriz reducida $\mathbf{A}_{ij,e}$ que es la matriz \mathbf{A}_e quitando la fila i y la columna j , por ejemplo

$$A_{13,e} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

En la configuración indeformada se sustituirá \mathbf{X} por \mathbf{x} y los coeficientes de $N_{i,e}$ en la configuración indeformada se notarán como $M_{ij,e}$. Para el campo de desplazamientos se tiene que

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{pmatrix} \mathbf{U}_e \quad (\text{B.5})$$

siendo útil definir $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U}_e$, donde

$$\mathbf{U}_e = [U_{x,1} \ U_{y,1} \ U_{z,1} \ U_{x,2} \ U_{y,2} \ U_{z,2} \ U_{x,3} \ U_{y,3} \ U_{z,3} \ U_{x,4} \ U_{y,4} \ U_{z,4}]^T. \quad (\text{B.6})$$

Las matriz $\mathbf{B}_{R,e}$, presentada en la Sección 3.1.1, es

$$\mathbf{B}_{R,e} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{R,1,e} & \mathbf{B}_{R,2,e} & \mathbf{B}_{R,3,e} & \mathbf{B}_{R,4,e} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

donde

$$\mathbf{B}_{R,i,e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{i,e}}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial X} \\ \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Y} \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Y} \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Y} \frac{\partial z}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Z} \frac{\partial x}{\partial Z} & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Z} \frac{\partial y}{\partial Z} & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial Z} \\ \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Y} \frac{\partial x}{\partial Z} + \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Z} \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Y} \frac{\partial y}{\partial Z} + \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Z} \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Y} \frac{\partial z}{\partial Z} + \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_{i,e}}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial Z} + \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Z} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Z} + \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Z} \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Z} + \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial X} \\ \frac{\partial N_{i,e}}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Y} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} + \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Y} \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Y} + \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Y} \frac{\partial z}{\partial X} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

y la matriz $\mathbf{B}_{R,e}$ es

$$\mathbf{B}_{R,e} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{R,1,e} & \mathbf{B}_{R,2,e} & \mathbf{B}_{R,3,e} & \mathbf{B}_{R,4,e} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{B}_{R,i,e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{i,e}}{\partial X} \\ \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Z} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Puede resultar útil que

$$\mathbf{B}_{R,i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{i,e}}{\partial X} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Z} \\ 0 & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Z} & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Z} & 0 & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial X} \\ \frac{\partial N_{i,e}}{\partial Y} & \frac{\partial N_{i,e}}{\partial X} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_e^T, \quad \mathbf{F}_e^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Y} \\ \frac{\partial x}{\partial Z} & \frac{\partial y}{\partial Z} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

donde

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \mathbf{X}}, \quad \text{con} \quad \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{u}_e \mathbf{B}_{R,e}^T, \quad (\text{B.11})$$

siendo

$$\mathbf{u}_e = \begin{pmatrix} U_{x,1,e} & U_{x,2,e} & U_{x,3,e} & U_{x,4,e} \\ U_{y,1,e} & U_{y,2,e} & U_{y,3,e} & U_{y,4,e} \\ U_{z,1,e} & U_{z,2,e} & U_{z,3,e} & U_{z,4,e} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

Apéndice C

Cilindro viscoelástico en pequeñas deformaciones

En la Ecuación (4.6) se obtiene que

$$u_r = A(t)r + \frac{B(t)}{r} + \frac{4}{3} \left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \int_{-\infty}^t u_r \exp(-(t-s)/\tau_i) ds. \quad (\text{C.1})$$

por tanto

$$u_r(t_{n+1}, r) = A(t)r + \frac{B(t)}{r} + \frac{4}{3} \left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} h(t_{n+1}, r) ds. \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} h(t_{n+1}) &= \int_{-\infty}^{t_{n+1}} u_r \exp(-(t_{n+1}-s)/\tau_i) ds \\ &= \exp(-\Delta t_n/\tau_i) h(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_r \exp(-(t_{n+1}-s)/\tau_i) ds \\ &\cong \exp(-\Delta t_n/\tau_i) h(t_n) + \exp(-\Delta t_n/2\tau_i) \Delta t_n \left[\frac{u_r(t_{n+1}) + u_r(t_n)}{2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

entonces

$$u_r(t_{n+1}, r) = A(t_{n+1})r + \frac{B(t_{n+1})}{r} + U_r(t_n, \Delta t_n, r) \quad (\text{C.4})$$

y por consecuencia inmediata

$$\varepsilon_r(t_{n+1}, r) = A(t_{n+1}) - \frac{B(t_{n+1})}{r^2} + E_r(t_n, \Delta t_n, r), \quad (\text{C.5})$$

$$\varepsilon_\theta(t_{n+1}, r) = A(t_{n+1}) + \frac{B(t_{n+1})}{r^2} + \frac{U_r(t_n, \Delta t_n, r)}{r}, \quad (\text{C.6})$$

donde

$$\begin{aligned} U_r(t_n, \Delta t_n, r) &= \frac{2}{3} \frac{\mu}{(\lambda + 2\mu)} G(\Delta t_n) \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \left\{ 2 \exp(-\Delta t_n / \tau_i) h(t_n, r) \right. \\ &\quad \left. \dots + \exp(-\Delta t_n / 2\tau_i) \Delta t_n u_r(t_n, r) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} E_r(t_n, \Delta t_n, r) &= \frac{2}{3} \frac{\mu}{(\lambda + 2\mu)} G(\Delta t_n) \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \left\{ 2 \exp(-\Delta t_n / \tau_i) \frac{\partial h}{\partial r}(t_n) \right. \\ &\quad \left. \dots + \exp(-\Delta t_n / 2\tau_i) \Delta t_n \varepsilon_r(t_n, r) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$$G(\Delta t_n) = \frac{1}{1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \exp(-\Delta t_n / 2\tau_i) \Delta t_n} \quad (\text{C.9})$$

donde usualmente se impondrá que $h(t_0) = 0$, $u_r(t_0) = 0$.

Para obtener $A(t_{n+1})$ y $B(t_{n+1})$ deben imponerse las condiciones de borde. Las dos condiciones de borde que se impondrán serán mecánicas en S_r por tanto es útil obtener el tensor \mathbf{S} . En este caso se tiene que

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{tr}(\mathbf{D}) = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta, \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}. \quad (\text{C.10})$$

Luego

$$\mathbf{S}^\circ = \lambda \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \Rightarrow S_r^\circ = \lambda (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + 2\mu \varepsilon_r, \quad (\text{C.11})$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
S_r &= \lambda (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + 2\mu \varepsilon_r \\
&\dots - \frac{2\mu}{3} \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \int_{-\infty}^t (2\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) \exp(-(t-s)/\tau_i) ds,
\end{aligned} \tag{C.12}$$

aproximando se tiene que

$$\begin{aligned}
S_r(t_{n+1}) &\cong \lambda (\varepsilon_r(t_{n+1}) + \varepsilon_\theta(t_{n+1})) + 2\mu \varepsilon_r(t_{n+1}) - \frac{2\mu}{3} \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \exp(-\Delta t_n/\tau_i) g(t_n) \\
&\dots - \frac{2\mu}{3} \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \exp(-\Delta t_n/2\tau_i) \Delta t_n \left[\frac{2\varepsilon_r(t_{n+1}) - \varepsilon_\theta(t_{n+1}) + 2\varepsilon_r(t_n) - \varepsilon_\theta(t_n)}{2} \right].
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Reordenando se tiene

$$\begin{aligned}
S_r(t_{n+1}, r) &\cong \varepsilon_r(t_{n+1}, r) [\lambda + 2\mu + 2L(\Delta t_n)] + \varepsilon_\theta(t_{n+1}, r) [\lambda - L(\Delta t_n)] \\
&\dots + M(t_n, \Delta t_n, r) + N(t_n, \Delta t_n, r)
\end{aligned} \tag{C.14}$$

donde

$$M(t_n, \Delta t_n, r) = -\frac{2\mu}{3} \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \exp(-\Delta t_n/\tau_i) g(t_n, r), \tag{C.15a}$$

$$N(t_n, \Delta t_n, r) = L(\Delta t_n) [2\varepsilon_r(t_n, r) - \varepsilon_\theta(t_n, r)], \tag{C.15b}$$

$$L(\Delta t_n) = -\frac{2\mu}{6} \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \exp(-\Delta t_n/2\tau_i) \Delta t_n. \tag{C.15c}$$

Donde g se obtiene como

$$\begin{aligned}
g(t_{n+1}, r) &= \exp(-\Delta t_n/\tau_i) g(t_n, r) \\
&\dots + \exp(-\Delta t_n/2\tau_i) \Delta t_n \left[\frac{2\varepsilon_r(t_{n+1}, r) - \varepsilon_\theta(t_{n+1}, r) + 2\varepsilon_r(t_n, r) - \varepsilon_\theta(t_n, r)}{2} \right].
\end{aligned} \tag{C.16}$$

Imponiendo $-p_1(t) \mathbf{e}_r$ en R_1 y $p_2(t) \mathbf{e}_r$ en R_2 como condiciones mecánicas se tiene que $S_r(t_{n+1}, R_1) = p_1(t_{n+1})$ y $S_r(t_{n+1}, R_2) = p_2(t_{n+1})$ obteniendo de

esa forma

$$A(t_{n+1}) = \frac{R_2^2 [p_2(t_{n+1}) - Q(t_n, \Delta t_n, R_2)] - R_1^2 [p_1(t_{n+1}) - Q(t_n, \Delta t_n, R_1)]}{[2\lambda + 2\mu + L(\Delta t_n)] (R_2^2 - R_1^2)} \quad (\text{C.17})$$

y

$$B(t_{n+1}) = \left[\frac{p_2(t_{n+1}) - p_1(t_{n+1}) + Q(t_n, \Delta t_n, R_1) - Q(t_n, \Delta t_n, R_2)}{2\mu + 3L(\Delta t_n)} \right] \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad (\text{C.18})$$

donde

$$\begin{aligned} Q(t_n, \Delta t_n, r) &= E_r(t_n, \Delta t_n, r) [\lambda + 2\mu + 2L(\Delta t_n)] + \frac{U_r(t_n, \Delta t_n, r)}{r} [\lambda - L(\Delta t_n)] \\ &\dots + M(t_n, \Delta t_n, r) + N(t_n, \Delta t_n, r). \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Apéndice D

Derivada con paso complejo

En (Tanaka et al., 2014) se realiza el análisis y comparación del método de derivada compleja respecto a otros como el de diferencias finitas.

Como ejemplo de aplicación se puede obtener la derivada de la función

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{\sin(x)^3 + \cos(x)^3}} \quad (\text{D.1})$$

en $x = 1.5$. Dicha función tiene derivada analítica en $x = 1.5$. Siendo $\frac{\partial f}{\partial x} = f'$, se tiene

$$f' = e^x \left[\frac{2 (\sin(x)^3 + \cos(x)^3) - 3 \sin(x) \cos(x) (\sin(x) - \cos(x))}{2 (\sin(x)^3 + \cos(x)^3)^{3/2}} \right]. \quad (\text{D.2})$$

Se gráfica entonces el error relativo $e_i = \frac{|g_i - f'|}{|f'|}$ utilizando

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g_1, \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{\Im[f(x+ih)]}{h} = g_2, \quad (\text{D.3})$$

donde $\Im[\bullet]$ es la parte imaginaria de \bullet ¹.

En la Figura D.1 se observa de forma clara que la derivada de paso complejo tiene una mejor aproximación para cualquier valor de h . Lo anterior significa que no es necesario utilizar un “adecuado” valor de h como sí sucede en el caso de diferencias finitas.

¹De forma implícita se definió el cálculo de la derivada de paso complejo para funciones escalares: $f' = \frac{\Im[f(x+ih)]}{h}$. Si, por ejemplo, $f = x^2$ es simple probar analíticamente que $f' = \frac{\Im[(x+ih)(x+ih)]}{h} = \frac{\Im[x^2 + 2xhi - h^2]}{h} = 2x$

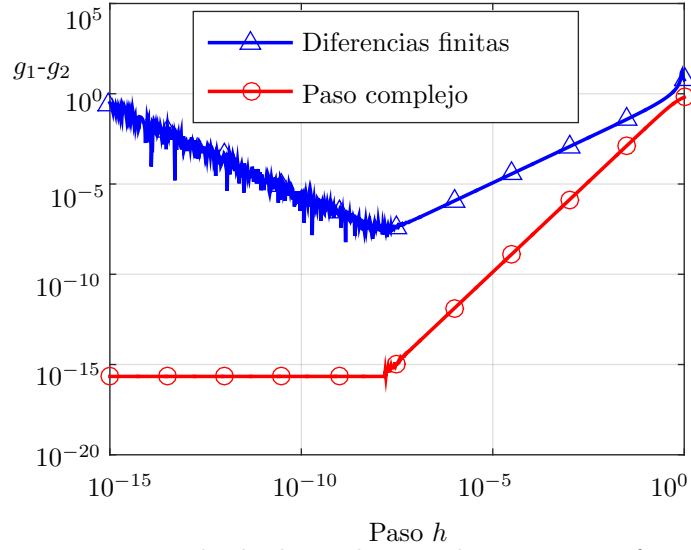


Figura D.1: Ejemplo de derivada compleja para una función escalar.

Para obtener el tensor constitutivo tangente \mathbb{C} bien puede realizarse un cálculo analítico¹ (Shen, 2016; Simo y Hughes, 1998) o puede utilizarse la derivada de paso complejo (Hürkamp et al., 2015; Tanaka et al., 2014).

En (Hürkamp et al., 2015) se utiliza la derivada de paso complejo para el cálculo del tensor constitutivo tangente en materiales viscoelásticos. En este trabajo, el autor expresa de forma clara el cálculo de la derivada de paso complejo para tensores, por lo que se entiende no es necesario mostrar en esta tesis el procedimiento explícito.

¹Semi analítico dado que igualmente se realiza una actualización en las expresiones.

Apéndice E

Modelo de pared delgada

Para realizar el modelo de pared delgada, necesario para comparar con el trabajo presentado por [Valdez-Jasso et al. \(2009\)](#), resulta útil recordar la Ecuación (2.33)

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^\circ - \int_{-\infty}^t 2\mu \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} \right) \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \exp(-(t-s)/\tau_i) ds. \quad (\text{E.1})$$

Derivando en el tiempo la ecuación anterior, recordando que en el caso de pequeñas deformaciones $\mathbf{S}^\circ = \lambda \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}$ y utilizando un solo brazo de Maxwell ($N = 1$) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}} &= \lambda \text{tr}(\dot{\mathbf{D}}) \mathbf{I} + 2\mu \dot{\mathbf{D}} - 2\mu \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} \right) \frac{\gamma}{\tau} \\ &\dots - \left(-\frac{1}{\tau} \right) \int_{-\infty}^t 2\mu \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} \right) \frac{\gamma}{\tau} \exp(-(t-s)/\tau) ds, \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

y en consecuencia

$$\dot{\mathbf{S}} = \lambda \text{tr}(\dot{\mathbf{D}}) \mathbf{I} + 2\mu \dot{\mathbf{D}} - 2\mu \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} \right) \frac{\gamma}{\tau} + \left(-\frac{1}{\tau} \right) (\mathbf{S} - \mathbf{S}^\circ). \quad (\text{E.3})$$

La ecuación anterior puede reordenarse

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}} + \frac{1}{\tau} \mathbf{S} &= \frac{2\mu}{\tau} (1 - \gamma) \mathbf{D} + \left(\frac{3\lambda + 2\mu\gamma}{3\tau} \right) \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} \\ \dots &+ \lambda \text{tr}(\dot{\mathbf{D}}) \mathbf{I} + 2\mu \dot{\mathbf{D}}. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

La Ecuación (E.4) es la forma diferencial general para el caso de pequeñas deformaciones viscoelástico. Para el caso del cilindro bajo la hipótesis de estado plano de deformaciones, se tiene que

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}(r, t) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta}(r, t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(r, t) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r, t) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}(r, t) \end{pmatrix} \quad (\text{E.5})$$

luego utilizando que la pared es delgada¹ $\sigma_{rr} \cong 0 \forall (r, t)$, $\varepsilon_{rr}(r, t) = \varepsilon_{rr}(t)$, $\varepsilon_{\theta\theta}(r, t) = \varepsilon_{\theta\theta}(t)$ y $\sigma_{\theta\theta}(r, t) = p(t) \frac{R_0}{e}$. Con lo anterior se puede escribir un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{\theta\theta} + \tau \dot{\sigma}_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} + \tau \dot{\sigma}_{zz} \end{pmatrix} &= \tau \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{rr} \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} \end{pmatrix} + \\ \dots &+ \left[\frac{3\lambda + 2\mu\gamma}{3} \right] \begin{pmatrix} 1 + \frac{6\mu(1-\gamma)}{3\lambda + 2\mu\gamma} & 1 \\ 1 & 1 + \frac{6\mu(1-\gamma)}{3\lambda + 2\mu\gamma} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

En el sistema anterior la tercer ecuación es solo útil para obtener σ_{zz} . De forma general, el problema puede resolverse con las primeras dos ecuaciones. Para obtener una relación entre los parámetros de la Ecuación (5.7) y la Ecuación (E.6) se utilizan dos ensayos que se detallan a continuación.

Ensayo 1 Un ensayo simple es el de imponer una presión constante $p(t) = p_0$. $\varepsilon_{\theta\theta}(t) = \varepsilon_{\theta\theta}^p(t) + \varepsilon_{\theta\theta}^h(t)$ (suma de particular más homogénea). La solución homogénea es transitoria por lo que $\varepsilon_{\theta\theta}^h(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ y además se impondrá que

¹Suele aceptarse esta hipótesis cuando $\frac{e}{R} < 0.1$

las deformaciones en $t = 0$ son nulas.

De lo anterior se tiene que $\varepsilon_{\theta\theta}(t \rightarrow \infty) = \varepsilon_{\theta\theta}^p(t \rightarrow \infty)$, donde para obtener la solución particular se debe resolver el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \left[\frac{3\lambda + 2\mu\gamma}{3} \right] \begin{pmatrix} 1 + \frac{6\mu(1-\gamma)}{3\lambda + 2\mu\gamma} & 1 \\ 1 & 1 + \frac{6\mu(1-\gamma)}{3\lambda + 2\mu\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^p \\ \varepsilon_{\theta\theta}^p \end{pmatrix}, \quad (\text{E.7})$$

por tanto

$$\varepsilon_{\theta\theta}(t \rightarrow \infty) = \left[\frac{3\lambda + 6\mu - 4\gamma\mu}{4\mu(1-\gamma)(3\lambda + 3\mu - \gamma\mu)} \right] \frac{p_0 R_0}{e}. \quad (\text{E.8})$$

Para obtener $\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}(t = 0)$ se debe resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{rr}(0) \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}(0) \end{pmatrix} \quad (\text{E.9})$$

por tanto

$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}(0) = \left[\frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \right] \frac{1}{\tau} \frac{p_0 R_0}{e}. \quad (\text{E.10})$$

Ensayo 2 El segundo ensayo es el de imponer una deformación constante $\varepsilon_{\theta\theta}(t) = \varepsilon_{0,\theta} = \varepsilon_0$ y $\varepsilon_{rr}(t) = \varepsilon_{0,r}$. También se asumirá que $\sigma_{\theta\theta}(0) = 0$. Para obtener $\dot{\sigma}_{\theta\theta}(0)$ primero se obtiene $\varepsilon_{0,r}$ de la primera ecuación del Sistema (E.6)

$$\varepsilon_{0,r} = - \left[\frac{3\lambda + 2\mu\gamma}{3\lambda + 6\mu - 4\mu\gamma} \right] \varepsilon_0, \quad (\text{E.11})$$

luego

$$\tau \dot{\sigma}_{\theta\theta}(0) = \frac{(3\lambda + 2\mu\gamma)}{3} \varepsilon_{r,0} + \frac{(3\lambda + 6\mu - 4\mu\gamma)}{3} \varepsilon_0, \quad (\text{E.12})$$

reordenando

$$\dot{\sigma}_{\theta\theta}(0) = \left[\frac{4\mu(1-\gamma)(3\lambda + 3\mu - \gamma\mu)}{3\lambda + 6\mu - 4\mu\gamma} \right] \frac{1}{\tau} \varepsilon_0 = \frac{E_p}{\tau} \varepsilon_0 \quad (\text{E.13})$$

donde se utilizó la Ecuación (5.10).

Apéndice F

Resultados de la caracterización

F.1. Utilizando solo códigos de pequeñas deformaciones

En el caso de analizar utilizando sólo los códigos de pequeñas deformaciones se obtienen los resultados que se muestran en la Tabla F.1, luego en la Tabla F.2 se comparan con (Valdez-Jasso et al., 2009).

En el caso de realizar el primer filtrado en las muestras se obtienen los resultados que se muestran en la Tabla F.3, luego en la Tabla F.4 se comparan con (Valdez-Jasso et al., 2009). Recordar que para el primer filtrado se quitan aquellas muestras que no generan un bucle, las que $\gamma > 0.93$ y aquellas que no hayan convergido (se evaluó el funcional más de 5000 veces).

En el caso de realizar el segundo filtrado en las muestras se obtienen los resultados que se muestran en la Tabla F.5, luego en la Tabla F.6 se comparan con (Valdez-Jasso et al., 2009). Recordar que para el segundo filtrado se utilizan solo las muestras que cumplen el primer filtrado para los cuatro estudios: Ana (1), Ana (2), Rec (1) y Rec (2).

Tabla F.1: Identificación utilizando los códigos de pequeñas deformaciones y todas las muestras.

Arteria	Estudio	μ (MPa)	γ	$\tau(\times 10^{-2}\text{s})$	R_0 (mm)	N
CD	Ana (1)	18.31 ± 14.84	0.74 ± 0.15	3.03 ± 4.66	4.06 ± 0.26	11
	Ana (2)	$\infty \pm \infty$	0.74 ± 0.16	105.52 ± 235.24	4.08 ± 0.27	11
	Rec (1)	7.96 ± 4.85	0.50 ± 0.28	120.89 ± 204.09	4.07 ± 0.26	11
	Rec (2)	12.92 ± 6.42	0.72 ± 0.18	32.71 ± 103.26	4.07 ± 0.26	11
TB	Ana (1)	0.71 ± 0.47	0.66 ± 0.07	2.09 ± 0.72	8.78 ± 1.03	11
	Ana (2)	0.70 ± 0.46	0.66 ± 0.07	2.10 ± 0.73	8.77 ± 1.03	11
	Rec (1)	0.71 ± 0.48	0.66 ± 0.08	2.08 ± 0.72	8.78 ± 1.03	11
	Rec (2)	0.71 ± 0.46	0.67 ± 0.07	2.03 ± 0.68	8.78 ± 1.03	11
AA	Ana (1)	0.31 ± 0.15	0.59 ± 0.12	2.70 ± 1.07	9.10 ± 0.68	12
	Ana (2)	0.31 ± 0.16	0.59 ± 0.12	2.70 ± 1.04	9.10 ± 0.68	12
	Rec (1)	0.30 ± 0.16	0.57 ± 0.17	13.85 ± 39.07	9.12 ± 0.72	12
	Rec (2)	0.32 ± 0.18	0.59 ± 0.18	13.39 ± 38.28	9.15 ± 0.72	12
ATDP	Ana (1)	0.83 ± 0.59	0.66 ± 0.17	25.40 ± 78.42	8.63 ± 0.24	11
	Ana (2)	0.83 ± 0.54	0.67 ± 0.16	2.27 ± 2.15	8.64 ± 0.23	11
	Rec (1)	0.83 ± 0.52	0.69 ± 0.17	1.80 ± 1.17	8.67 ± 0.20	11
	Rec (2)	0.85 ± 0.53	0.69 ± 0.17	1.77 ± 1.16	8.67 ± 0.20	11
ATDD	Ana (1)	3.54 ± 4.71	0.73 ± 0.22	1.83 ± 1.93	8.42 ± 0.26	11
	Ana (2)	4.65 ± 7.25	0.74 ± 0.21	1.42 ± 1.27	8.44 ± 0.23	11
	Rec (1)	1.07 ± 0.88	0.65 ± 0.24	20.09 ± 60.82	8.49 ± 0.32	11
	Rec (2)	1.20 ± 0.96	0.75 ± 0.19	5.66 ± 14.19	8.24 ± 0.77	11
AAD	Ana (1)	14.14 ± 19.88	0.75 ± 0.22	26.16 ± 60.79	7.87 ± 0.59	11
	Ana (2)	12.72 ± 17.34	0.79 ± 0.20	7.27 ± 8.43	7.91 ± 0.61	11
	Rec (1)	3.03 ± 2.33	0.74 ± 0.24	20.21 ± 47.50	8.10 ± 0.14	11
	Rec (2)	3.05 ± 2.26	0.69 ± 0.32	89.07 ± 282.84	8.20 ± 0.14	11
FI	Ana (1)	6.86 ± 13.29	0.77 ± 0.15	45.33 ± 113.76	2.65 ± 0.22	11
	Ana (2)	6.35 ± 11.94	0.76 ± 0.16	79.61 ± 155.08	2.66 ± 0.22	11
	Rec (1)	4.07 ± 2.83	0.79 ± 0.24	47.49 ± 146.73	2.77 ± 0.21	11
	Rec (2)	4.43 ± 2.71	0.87 ± 0.10	4.55 ± 8.66	2.75 ± 0.23	11

Tabla F.2: Comparación pequeñas deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) utilizando todas las muestras.

Arteria	Estudio	E_p (MPa)	$\tau_\epsilon (\times 10^{-2}\text{s})$	$\tau_\sigma (\times 10^{-2}\text{s})$	R_0 (mm)
CD	Paper	11.47 ± 1.45	3.82 ± 1.58	0.90 ± 1.08	4.07 ± 0.26
	Ana (1)	11.52 ± 2.03	8.09 ± 9.47	3.03 ± 4.66	4.06 ± 0.26
	Ana (2)	$\infty \pm \infty$	211.81 ± 467.72	105.52 ± 235.24	4.08 ± 0.27
	Rec (1)	11.67 ± 2.25	139.27 ± 227.47	120.89 ± 204.09	4.07 ± 0.26
	Rec (2)	10.70 ± 2.18	69.40 ± 214.29	32.71 ± 103.26	4.07 ± 0.26
TB	Paper	1.03 ± 0.28	5.91 ± 0.91	2.00 ± 0.61	8.88 ± 1.00
	Ana (1)	0.86 ± 0.28	5.94 ± 1.02	2.09 ± 0.72	8.78 ± 1.03
	Ana (2)	0.86 ± 0.28	5.95 ± 1.04	2.10 ± 0.73	8.77 ± 1.03
	Rec (1)	0.84 ± 0.25	5.95 ± 1.00	2.08 ± 0.72	8.78 ± 1.03
	Rec (2)	0.84 ± 0.25	5.90 ± 0.96	2.03 ± 0.68	8.78 ± 1.03
AA	Paper	0.58 ± 0.08	6.26 ± 1.28	2.45 ± 0.91	9.47 ± 0.65
	Ana (1)	0.44 ± 0.08	6.40 ± 1.44	2.70 ± 1.07	9.10 ± 0.68
	Ana (2)	0.44 ± 0.08	6.36 ± 1.32	2.70 ± 1.04	9.10 ± 0.68
	Rec (1)	0.44 ± 0.09	20.16 ± 47.96	13.85 ± 39.07	9.12 ± 0.72
	Rec (2)	0.44 ± 0.11	19.65 ± 46.92	13.39 ± 38.28	9.15 ± 0.72
ATDP	Paper	0.92 ± 0.10	5.14 ± 1.23	1.77 ± 1.20	8.83 ± 0.19
	Ana (1)	0.79 ± 0.13	47.15 ± 139.85	25.40 ± 78.42	8.63 ± 0.24
	Ana (2)	0.79 ± 0.12	5.91 ± 3.08	2.27 ± 2.15	8.64 ± 0.23
	Rec (1)	0.72 ± 0.21	6.41 ± 3.62	1.80 ± 1.17	8.67 ± 0.20
	Rec (2)	0.72 ± 0.22	6.59 ± 4.25	1.77 ± 1.16	8.67 ± 0.20
ATDD	Paper	0.97 ± 0.13	5.31 ± 1.50	1.60 ± 1.25	8.57 ± 0.20
	Ana (1)	0.87 ± 0.17	5.65 ± 2.67	1.83 ± 1.93	8.42 ± 0.26
	Ana (2)	0.89 ± 0.15	4.99 ± 1.37	1.42 ± 1.27	8.44 ± 0.23
	Rec (1)	0.89 ± 0.63	30.43 ± 73.02	20.09 ± 60.82	8.49 ± 0.32
	Rec (2)	0.62 ± 0.31	23.64 ± 49.59	5.66 ± 14.19	8.24 ± 0.77
AAD	Paper	2.47 ± 0.34	7.34 ± 7.00	3.06 ± 3.96	8.24 ± 0.09
	Ana (1)	1.89 ± 0.91	59.80 ± 102.89	26.16 ± 60.79	7.87 ± 0.59
	Ana (2)	1.97 ± 0.88	27.09 ± 40.26	7.27 ± 8.43	7.91 ± 0.61
	Rec (1)	1.25 ± 0.86	39.79 ± 61.67	20.21 ± 47.50	8.10 ± 0.14
	Rec (2)	1.48 ± 1.02	100.22 ± 282.43	89.07 ± 282.84	8.20 ± 0.14
FI	Paper	3.03 ± 0.53	3.56 ± 1.56	0.41 ± 0.74	2.83 ± 0.16
	Ana (1)	1.75 ± 1.15	114.74 ± 205.32	45.33 ± 113.76	2.65 ± 0.22
	Ana (2)	1.79 ± 1.13	203.49 ± 348.49	79.61 ± 155.08	2.66 ± 0.22
	Rec (1)	1.68 ± 0.97	78.28 ± 187.77	47.49 ± 146.73	2.77 ± 0.21
	Rec (2)	1.51 ± 0.97	28.66 ± 50.19	4.55 ± 8.66	2.75 ± 0.23

Realizando el primer filtrado

Tabla F.3: Identificación utilizando los códigos de pequeñas deformaciones para el primer filtrado. N indica la cantidad de muestras por arteria.

Arteria	Estudio	μ (MPa)	γ	$\tau(\times 10^{-2}\text{s})$	R_0 (mm)	N
CD	Ana (1)	18.31 ± 14.84	0.74 ± 0.15	3.03 ± 4.66	4.06 ± 0.26	11
	Ana (2)	20.02 ± 10.74	0.79 ± 0.12	0.91 ± 0.77	4.04 ± 0.27	9
	Rec (1)	10.20 ± 4.80	0.68 ± 0.15	2.26 ± 2.05	4.04 ± 0.31	7
	Rec (2)	14.87 ± 5.28	0.78 ± 0.12	0.96 ± 0.66	4.03 ± 0.24	9
TB	Ana (1)	0.71 ± 0.47	0.66 ± 0.07	2.09 ± 0.72	8.78 ± 1.03	11
	Ana (2)	0.70 ± 0.46	0.66 ± 0.07	2.10 ± 0.73	8.77 ± 1.03	11
	Rec (1)	0.71 ± 0.48	0.66 ± 0.08	2.08 ± 0.72	8.78 ± 1.03	11
	Rec (2)	0.71 ± 0.46	0.67 ± 0.07	2.03 ± 0.68	8.78 ± 1.03	11
AA	Ana (1)	0.31 ± 0.15	0.59 ± 0.12	2.70 ± 1.07	9.10 ± 0.68	12
	Ana (2)	0.31 ± 0.16	0.59 ± 0.12	2.70 ± 1.04	9.10 ± 0.68	12
	Rec (1)	0.31 ± 0.16	0.60 ± 0.14	2.57 ± 1.06	9.03 ± 0.68	11
	Rec (2)	0.34 ± 0.18	0.62 ± 0.14	2.35 ± 0.91	9.06 ± 0.68	11
ATDP	Ana (1)	0.89 ± 0.58	0.68 ± 0.16	1.76 ± 1.20	8.67 ± 0.21	10
	Ana (2)	0.89 ± 0.53	0.69 ± 0.16	1.71 ± 1.17	8.67 ± 0.22	10
	Rec (1)	0.73 ± 0.41	0.66 ± 0.15	1.95 ± 1.12	8.67 ± 0.21	10
	Rec (2)	0.75 ± 0.42	0.67 ± 0.15	1.91 ± 1.12	8.67 ± 0.22	10
ATDD	Ana (1)	0.73 ± 0.66	0.59 ± 0.18	2.29 ± 1.08	8.39 ± 0.28	5
	Ana (2)	1.13 ± 1.20	0.65 ± 0.19	1.94 ± 1.21	8.41 ± 0.25	7
	Rec (1)	0.71 ± 0.54	0.62 ± 0.16	2.14 ± 0.92	8.41 ± 0.24	7
	Rec (2)	0.69 ± 0.58	0.66 ± 0.15	8.61 ± 17.55	8.10 ± 0.95	7
AAD	Ana (1)	1.16 ± 0.67	0.65 ± 0.08	11.51 ± 6.80	7.93 ± 0.34	4
	Ana (2)	1.18 ± 0.64	0.59 ± 0.11	10.19 ± 5.90	8.01 ± 0.34	4
	Rec (1)	1.23 ± 0.82	0.62 ± 0.06	10.39 ± 7.60	8.04 ± 0.23	3
	Rec (2)	1.33 ± 0.57	0.54 ± 0.07	6.63 ± 3.61	8.26 ± 0.10	4
FI	Ana (1)	1.54 ± 1.09	0.76 ± 0.09	12.41 ± 10.05	2.55 ± 0.12	7
	Ana (2)	1.69 ± 1.15	0.76 ± 0.09	11.02 ± 10.34	2.54 ± 0.13	6
	Rec (1)	2.03 ± 1.04	0.72 ± 0.14	6.26 ± 9.52	2.62 ± 0.20	5
	Rec (2)	2.77 ± 1.49	0.78 ± 0.07	4.95 ± 8.60	2.66 ± 0.16	5

Tabla F.4: Comparación pequeñas deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) utilizando el primer filtrado.

Arteria	Estudio	E_p (MPa)	$\tau_\epsilon (\times 10^{-2}\text{s})$	$\tau_\sigma (\times 10^{-2}\text{s})$	R_0 (mm)
CD	Paper	11.47 ± 1.45	3.82 ± 1.58	0.90 ± 1.08	4.07 ± 0.26
	Ana (1)	11.52 ± 2.03	8.09 ± 9.47	3.03 ± 4.66	4.06 ± 0.26
	Ana (2)	12.28 ± 1.53	3.83 ± 1.13	0.91 ± 0.77	4.04 ± 0.27
	Rec (1)	10.99 ± 1.71	5.93 ± 2.79	2.26 ± 2.05	4.04 ± 0.31
	Rec (2)	11.02 ± 2.22	4.12 ± 0.61	0.96 ± 0.66	4.03 ± 0.24
TB	Paper	1.03 ± 0.28	5.91 ± 0.91	2.00 ± 0.61	8.88 ± 1.00
	Ana (1)	0.86 ± 0.28	5.94 ± 1.02	2.09 ± 0.72	8.78 ± 1.03
	Ana (2)	0.86 ± 0.28	5.95 ± 1.04	2.10 ± 0.73	8.77 ± 1.03
	Rec (1)	0.84 ± 0.25	5.95 ± 1.00	2.08 ± 0.72	8.78 ± 1.03
	Rec (2)	0.84 ± 0.25	5.90 ± 0.96	2.03 ± 0.68	8.78 ± 1.03
AA	Paper	0.58 ± 0.08	6.26 ± 1.28	2.45 ± 0.91	9.47 ± 0.65
	Ana (1)	0.44 ± 0.08	6.40 ± 1.44	2.70 ± 1.07	9.10 ± 0.68
	Ana (2)	0.44 ± 0.08	6.36 ± 1.32	2.70 ± 1.04	9.10 ± 0.68
	Rec (1)	0.43 ± 0.09	6.31 ± 1.21	2.57 ± 1.06	9.03 ± 0.68
	Rec (2)	0.43 ± 0.10	6.11 ± 0.68	2.35 ± 0.91	9.06 ± 0.68
ATDP	Paper	0.92 ± 0.10	5.14 ± 1.23	1.77 ± 1.20	8.83 ± 0.19
	Ana (1)	0.81 ± 0.10	4.98 ± 1.14	1.76 ± 1.20	8.67 ± 0.21
	Ana (2)	0.80 ± 0.11	5.04 ± 1.17	1.71 ± 1.17	8.67 ± 0.22
	Rec (1)	0.78 ± 0.10	5.36 ± 1.02	1.95 ± 1.12	8.67 ± 0.21
	Rec (2)	0.78 ± 0.10	5.34 ± 1.02	1.91 ± 1.12	8.67 ± 0.22
ATDD	Paper	0.97 ± 0.13	5.31 ± 1.50	1.60 ± 1.25	8.57 ± 0.20
	Ana (1)	0.83 ± 0.13	5.37 ± 0.89	2.29 ± 1.08	8.39 ± 0.28
	Ana (2)	0.87 ± 0.16	5.03 ± 1.27	1.94 ± 1.21	8.41 ± 0.25
	Rec (1)	0.81 ± 0.12	5.52 ± 0.41	2.14 ± 0.92	8.41 ± 0.24
	Rec (2)	0.72 ± 0.27	29.21 ± 62.76	8.61 ± 17.55	8.10 ± 0.95
AAD	Paper	2.47 ± 0.34	7.34 ± 7.00	3.06 ± 3.96	8.24 ± 0.09
	Ana (1)	1.64 ± 1.03	35.27 ± 24.40	11.51 ± 6.80	7.93 ± 0.34
	Ana (2)	1.88 ± 0.90	26.18 ± 19.46	10.19 ± 5.90	8.01 ± 0.34
	Rec (1)	1.80 ± 1.11	26.95 ± 20.26	10.39 ± 7.60	8.04 ± 0.23
	Rec (2)	2.31 ± 0.52	13.64 ± 6.60	6.63 ± 3.61	8.26 ± 0.10
FI	Paper	3.03 ± 0.53	3.56 ± 1.56	0.41 ± 0.74	2.83 ± 0.16
	Ana (1)	1.46 ± 1.02	61.11 ± 59.29	12.41 ± 10.05	2.55 ± 0.12
	Ana (2)	1.57 ± 1.09	58.14 ± 64.35	11.02 ± 10.34	2.54 ± 0.13
	Rec (1)	2.12 ± 1.02	37.15 ± 69.32	6.26 ± 9.52	2.62 ± 0.20
	Rec (2)	2.21 ± 0.87	19.91 ± 33.35	4.95 ± 8.60	2.66 ± 0.16

Realizando el segundo filtrado

Tabla F.5: Identificación utilizando los códigos de pequeñas deformaciones y el segundo filtrado. N indica la cantidad de muestras.

Arteria	Estudio	μ (MPa)	γ	$\tau(\times 10^{-2}\text{s})$	R_0 (mm)	N
CD	Ana (1)	16.78 ± 11.25	0.79 ± 0.09	0.86 ± 0.48	3.94 ± 0.31	4
	Ana (2)	19.62 ± 8.07	0.82 ± 0.10	0.67 ± 0.49	3.94 ± 0.31	4
	Rec (1)	12.88 ± 4.58	0.78 ± 0.08	0.94 ± 0.42	3.94 ± 0.31	4
	Rec (2)	14.90 ± 4.30	0.81 ± 0.09	0.75 ± 0.39	3.94 ± 0.31	4
TB	Ana (1)	0.71 ± 0.47	0.66 ± 0.07	2.09 ± 0.72	8.78 ± 1.03	11
	Ana (2)	0.70 ± 0.46	0.66 ± 0.07	2.10 ± 0.73	8.77 ± 1.03	11
	Rec (1)	0.71 ± 0.48	0.66 ± 0.08	2.08 ± 0.72	8.78 ± 1.03	11
	Rec (2)	0.71 ± 0.46	0.67 ± 0.07	2.03 ± 0.68	8.78 ± 1.03	11
AA	Ana (1)	0.31 ± 0.16	0.60 ± 0.13	2.59 ± 1.05	9.03 ± 0.68	11
	Ana (2)	0.31 ± 0.16	0.60 ± 0.13	2.59 ± 1.01	9.04 ± 0.68	11
	Rec (1)	0.31 ± 0.16	0.60 ± 0.14	2.57 ± 1.06	9.03 ± 0.68	11
	Rec (2)	0.34 ± 0.18	0.62 ± 0.14	2.35 ± 0.91	9.06 ± 0.68	11
ATDP	Ana (1)	0.79 ± 0.44	0.67 ± 0.16	1.83 ± 1.21	8.67 ± 0.24	8
	Ana (2)	0.82 ± 0.47	0.68 ± 0.16	1.79 ± 1.20	8.67 ± 0.24	8
	Rec (1)	0.79 ± 0.44	0.68 ± 0.17	1.81 ± 1.22	8.67 ± 0.24	8
	Rec (2)	0.81 ± 0.45	0.69 ± 0.17	1.75 ± 1.21	8.68 ± 0.24	8
ATDD	Ana (1)	0.73 ± 0.66	0.59 ± 0.18	2.29 ± 1.08	8.39 ± 0.28	5
	Ana (2)	0.78 ± 0.77	0.60 ± 0.18	2.32 ± 1.13	8.38 ± 0.28	5
	Rec (1)	0.73 ± 0.66	0.60 ± 0.19	2.28 ± 1.09	8.39 ± 0.28	5
	Rec (2)	0.69 ± 0.71	0.65 ± 0.19	11.36 ± 20.70	7.96 ± 1.12	5
AAD	Ana (1)	1.47 ± 0.99	0.68 ± 0.05	9.03 ± 10.46	7.99 ± 0.43	2
	Ana (2)	1.54 ± 0.84	0.59 ± 0.07	6.29 ± 6.54	8.27 ± 0.04	2
	Rec (1)	1.50 ± 0.96	0.66 ± 0.02	8.20 ± 9.30	8.10 ± 0.28	2
	Rec (2)	1.64 ± 0.77	0.57 ± 0.11	4.21 ± 3.69	8.33 ± 0.05	2
FI	Ana (1)	2.53 ± 0.99	0.72 ± 0.12	1.80 ± 1.56	2.63 ± 0.10	3
	Ana (2)	2.58 ± 0.98	0.73 ± 0.12	1.74 ± 1.47	2.64 ± 0.10	3
	Rec (1)	2.53 ± 0.99	0.73 ± 0.13	1.78 ± 1.57	2.63 ± 0.10	3
	Rec (2)	2.78 ± 0.74	0.76 ± 0.09	1.27 ± 0.76	2.64 ± 0.10	3

Tabla F.6: Comparación utilizando los códigos de pequeñas deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) y el segundo filtrado.

Arteria	Estudio	E_p (MPa)	$\tau_\epsilon (\times 10^{-2}\text{s})$	$\tau_\sigma (\times 10^{-2}\text{s})$	R_0 (mm)
CD	Paper	11.47 ± 1.45	3.82 ± 1.58	0.90 ± 1.08	4.07 ± 0.26
	Ana (1)	11.58 ± 1.73	3.78 ± 0.72	0.86 ± 0.48	3.94 ± 0.31
	Ana (2)	11.72 ± 2.03	3.51 ± 0.62	0.67 ± 0.49	3.94 ± 0.31
	Rec (1)	10.49 ± 2.07	4.13 ± 0.48	0.94 ± 0.42	3.94 ± 0.31
	Rec (2)	10.18 ± 2.54	3.98 ± 0.26	0.75 ± 0.39	3.94 ± 0.31
TB	Paper	1.03 ± 0.28	5.91 ± 0.91	2.00 ± 0.61	8.88 ± 1.00
	Ana (1)	0.86 ± 0.28	5.94 ± 1.02	2.09 ± 0.72	8.78 ± 1.03
	Ana (2)	0.86 ± 0.28	5.95 ± 1.04	2.10 ± 0.73	8.77 ± 1.03
	Rec (1)	0.84 ± 0.25	5.95 ± 1.00	2.08 ± 0.72	8.78 ± 1.03
	Rec (2)	0.84 ± 0.25	5.90 ± 0.96	2.03 ± 0.68	8.78 ± 1.03
AA	Paper	0.58 ± 0.08	6.26 ± 1.28	2.45 ± 0.91	9.47 ± 0.65
	Ana (1)	0.44 ± 0.08	6.23 ± 1.38	2.59 ± 1.05	9.03 ± 0.68
	Ana (2)	0.44 ± 0.08	6.20 ± 1.25	2.59 ± 1.01	9.04 ± 0.68
	Rec (1)	0.43 ± 0.09	6.31 ± 1.21	2.57 ± 1.06	9.03 ± 0.68
	Rec (2)	0.43 ± 0.10	6.11 ± 0.68	2.35 ± 0.91	9.06 ± 0.68
ATDP	Paper	0.92 ± 0.10	5.14 ± 1.23	1.77 ± 1.20	8.83 ± 0.19
	Ana (1)	0.81 ± 0.12	5.05 ± 1.17	1.83 ± 1.21	8.67 ± 0.24
	Ana (2)	0.81 ± 0.12	5.03 ± 1.10	1.79 ± 1.20	8.67 ± 0.24
	Rec (1)	0.77 ± 0.11	5.18 ± 1.05	1.81 ± 1.22	8.67 ± 0.24
	Rec (2)	0.77 ± 0.11	5.14 ± 1.03	1.75 ± 1.21	8.68 ± 0.24
ATDD	Paper	0.97 ± 0.13	5.31 ± 1.50	1.60 ± 1.25	8.57 ± 0.20
	Ana (1)	0.83 ± 0.13	5.37 ± 0.89	2.29 ± 1.08	8.39 ± 0.28
	Ana (2)	0.83 ± 0.14	5.46 ± 1.03	2.32 ± 1.13	8.38 ± 0.28
	Rec (1)	0.77 ± 0.09	5.59 ± 0.45	2.28 ± 1.09	8.39 ± 0.28
	Rec (2)	0.64 ± 0.28	38.80 ± 74.20	11.36 ± 20.70	7.96 ± 1.12
AAD	Paper	2.47 ± 0.34	7.34 ± 7.00	3.06 ± 3.96	8.24 ± 0.09
	Ana (1)	1.99 ± 1.58	30.97 ± 37.38	9.03 ± 10.46	7.99 ± 0.43
	Ana (2)	2.42 ± 0.96	14.06 ± 13.42	6.29 ± 6.54	8.27 ± 0.04
	Rec (1)	2.09 ± 1.40	24.23 ± 27.86	8.20 ± 9.30	8.10 ± 0.28
	Rec (2)	2.64 ± 0.61	8.96 ± 6.31	4.21 ± 3.69	8.33 ± 0.05
FI	Paper	3.03 ± 0.53	3.56 ± 1.56	0.41 ± 0.74	2.83 ± 0.16
	Ana (1)	2.49 ± 0.50	5.95 ± 2.78	1.80 ± 1.56	2.63 ± 0.10
	Ana (2)	2.51 ± 0.52	5.84 ± 2.70	1.74 ± 1.47	2.64 ± 0.10
	Rec (1)	2.40 ± 0.46	6.03 ± 2.76	1.78 ± 1.57	2.63 ± 0.10
	Rec (2)	2.46 ± 0.45	5.29 ± 1.90	1.27 ± 0.76	2.64 ± 0.10

F.2. Utilizando códigos de pequeñas y de grandes deformaciones

Se utilizan los mismos criterios que para el caso en que solo se utilizaron los códigos de pequeñas deformaciones. Las diferencias son que, debido a los tiempos de ejecución, solamente se utilizan 600 datos por muestra y para el caso de grandes deformaciones se permiten hasta 2000 evaluaciones del funcional. Los resultados utilizando grandes deformaciones se muestran en las Tablas F.7-F.12.

Tabla F.7: Identificación pequeñas y grandes deformaciones utilizando todas las muestras.

Arteria	Estudio	μ (MPa)	γ	τ (s)	R_0 (mm)	N
CD	Ana (1)	16.01 ± 13.80	0.73 ± 0.14	3.09 ± 4.63	4.06 ± 0.26	11
	Ana (2)	$\infty \pm \infty$	0.74 ± 0.16	105.51 ± 235.24	4.08 ± 0.27	11
	Rec (1)	8.79 ± 5.05	0.53 ± 0.30	120.63 ± 204.26	4.07 ± 0.26	11
	Rec (2)	$\infty \pm \infty$	0.73 ± 0.15	81.36 ± 184.31	4.07 ± 0.26	11
	Axi (1)	11.63 ± 8.16	0.61 ± 0.27	88.02 ± 188.00	4.06 ± 0.25	11
	Axi (2)	17.41 ± 9.34	0.76 ± 0.11	1.03 ± 0.68	4.07 ± 0.26	11
TB	Ana (1)	0.66 ± 0.35	0.65 ± 0.07	2.15 ± 0.68	8.77 ± 1.02	11
	Ana (2)	0.69 ± 0.39	0.66 ± 0.06	2.03 ± 0.62	8.77 ± 1.03	11
	Rec (1)	0.67 ± 0.34	0.66 ± 0.06	2.05 ± 0.59	8.77 ± 1.02	11
	Rec (2)	0.70 ± 0.40	0.67 ± 0.07	1.99 ± 0.60	8.78 ± 1.02	11
	Axi (1)	1.03 ± 0.37	0.61 ± 0.05	2.13 ± 0.50	9.12 ± 0.97	11
	Axi (2)	1.05 ± 0.41	0.61 ± 0.06	2.08 ± 0.51	9.12 ± 0.97	11
AA	Ana (1)	0.31 ± 0.16	0.59 ± 0.13	2.69 ± 1.14	9.10 ± 0.68	12
	Ana (2)	0.32 ± 0.17	0.60 ± 0.13	2.60 ± 1.04	9.10 ± 0.68	12
	Rec (1)	0.30 ± 0.16	0.59 ± 0.14	2.84 ± 1.20	9.09 ± 0.66	12
	Rec (2)	0.33 ± 0.17	0.61 ± 0.14	2.49 ± 1.00	9.12 ± 0.69	12
	Axi (1)	0.65 ± 0.19	0.67 ± 0.15	97.98 ± 207.29	9.69 ± 0.59	12
	Axi (2)	0.69 ± 0.17	0.69 ± 0.16	47.81 ± 57.22	9.69 ± 0.59	12
ATDP	Ana (1)	0.81 ± 0.49	0.67 ± 0.16	1.87 ± 1.15	8.67 ± 0.20	11
	Ana (2)	0.87 ± 0.64	0.67 ± 0.16	1.84 ± 1.13	8.67 ± 0.20	11
	Rec (1)	0.80 ± 0.48	0.68 ± 0.17	1.85 ± 1.15	8.67 ± 0.20	11
	Rec (2)	0.84 ± 0.52	0.69 ± 0.18	1.80 ± 1.16	8.67 ± 0.20	11

Tabla F.7: Identificación pequeñas y grandes deformaciones utilizando todas las muestras.

Arteria	Estudio	μ (MPa)	γ	τ (s)	R_0 (mm)	N
	Axi (1)	1.12 ± 0.58	0.62 ± 0.15	1.96 ± 1.10	8.94 ± 0.18	11
	Axi (2)	1.16 ± 0.63	0.63 ± 0.16	1.92 ± 1.09	8.94 ± 0.18	11
ATDD	Ana (1)	4.58 ± 7.04	0.75 ± 0.21	1.37 ± 1.21	8.44 ± 0.22	11
	Ana (2)	2.45 ± 2.93	0.73 ± 0.21	1.44 ± 1.23	8.44 ± 0.22	11
	Rec (1)	1.27 ± 0.89	0.75 ± 0.21	1.46 ± 1.10	8.44 ± 0.22	11
	Rec (2)	1.33 ± 0.97	0.76 ± 0.22	1.42 ± 1.09	8.44 ± 0.22	11
	Axi (1)	2.10 ± 2.91	0.66 ± 0.18	1.74 ± 0.99	8.66 ± 0.18	11
	Axi (2)	2.13 ± 2.77	0.67 ± 0.19	1.64 ± 1.01	8.67 ± 0.18	11
AAD	Ana (1)	11.38 ± 18.06	0.77 ± 0.18	7.27 ± 8.85	7.90 ± 0.60	11
	Ana (2)	13.58 ± 16.48	0.81 ± 0.18	5.66 ± 8.02	7.97 ± 0.62	11
	Rec (1)	1.57 ± 1.57	0.55 ± 0.23	55.99 ± 116.75	8.08 ± 0.16	11
	Rec (2)	2.11 ± 1.82	0.57 ± 0.30	122.96 ± 292.77	8.19 ± 0.15	11
	Axi (1)	7.00 ± 7.57	0.73 ± 0.19	6.40 ± 6.90	8.19 ± 0.11	11
	Axi (2)	7.85 ± 7.01	0.69 ± 0.31	88.35 ± 284.16	8.29 ± 0.11	11
FI	Ana (1)	11.61 ± 20.42	0.78 ± 0.16	45.13 ± 121.43	2.69 ± 0.20	11
	Ana (2)	10.32 ± 20.13	0.77 ± 0.16	46.46 ± 117.37	2.64 ± 0.22	11
	Rec (1)	4.39 ± 2.96	0.72 ± 0.31	85.00 ± 186.87	2.82 ± 0.16	11
	Rec (2)	3.00 ± 2.65	0.55 ± 0.35	137.87 ± 191.77	2.82 ± 0.16	11
	Axi (1)	4.25 ± 4.28	0.59 ± 0.29	86.83 ± 188.24	2.82 ± 0.16	11
	Axi (2)	7.22 ± 7.19	0.65 ± 0.31	63.85 ± 158.79	2.83 ± 0.16	11

Tabla F.8: Comparación pequeñas y grandes deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) utilizando todas las muestras.

Arteria	Estudio	E_p (MPa)	$\tau_\epsilon (\times 10^{-2} \text{s})$	$\tau_\sigma (\times 10^{-2} \text{s})$	R_0 (mm)
	Paper	11.47 ± 1.45	3.82 ± 1.58	0.90 ± 1.08	4.07 ± 0.26
CD	Ana (1)	11.46 ± 2.02	8.16 ± 9.43	3.09 ± 4.63	4.06 ± 0.26
	Ana (2)	$\infty \pm \infty$	211.79 ± 467.73	105.51 ± 235.24	4.08 ± 0.27
	Rec (1)	11.66 ± 2.26	138.92 ± 227.70	120.63 ± 204.26	4.07 ± 0.26
	Rec (2)	$\infty \pm \infty$	164.55 ± 365.06	81.36 ± 184.31	4.07 ± 0.26
	Axi (1)	12.32 ± 2.71	102.11 ± 205.46	88.02 ± 188.00	4.06 ± 0.25

Tabla F.8: Comparación pequeñas y grandes deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) utilizando todas las muestras.

Arteria	Estudio	E_p (MPa)	$\tau_\epsilon (\times 10^{-2} \text{s})$	$\tau_\sigma (\times 10^{-2} \text{s})$	R_0 (mm)
	Axi (2)	13.31 ± 1.59	3.92 ± 0.91	1.03 ± 0.68	4.07 ± 0.26
TB	Paper	1.03 ± 0.28	5.91 ± 0.91	2.00 ± 0.61	8.88 ± 1.00
	Ana (1)	0.85 ± 0.26	6.02 ± 1.00	2.15 ± 0.68	8.77 ± 1.02
	Ana (2)	0.85 ± 0.27	5.85 ± 0.93	2.03 ± 0.62	8.77 ± 1.03
	Rec (1)	0.84 ± 0.25	5.91 ± 0.88	2.05 ± 0.59	8.77 ± 1.02
	Rec (2)	0.84 ± 0.25	5.83 ± 0.88	1.99 ± 0.60	8.78 ± 1.02
	Axi (1)	1.55 ± 0.32	5.34 ± 0.77	2.13 ± 0.50	9.12 ± 0.97
	Axi (2)	1.56 ± 0.33	5.28 ± 0.77	2.08 ± 0.51	9.12 ± 0.97
AA	Paper	0.58 ± 0.08	6.26 ± 1.28	2.45 ± 0.91	9.47 ± 0.65
	Ana (1)	0.44 ± 0.08	6.37 ± 1.37	2.69 ± 1.14	9.10 ± 0.68
	Ana (2)	0.44 ± 0.08	6.31 ± 1.27	2.60 ± 1.04	9.10 ± 0.68
	Rec (1)	0.42 ± 0.08	6.70 ± 1.46	2.84 ± 1.20	9.09 ± 0.66
	Rec (2)	0.43 ± 0.09	6.24 ± 0.88	2.49 ± 1.00	9.12 ± 0.69
	Axi (1)	0.78 ± 0.41	373.67 ± 542.66	97.98 ± 207.29	9.69 ± 0.59
	Axi (2)	0.78 ± 0.41	293.74 ± 375.11	47.81 ± 57.22	9.69 ± 0.59
ATDP	Paper	0.92 ± 0.10	5.14 ± 1.23	1.77 ± 1.20	8.83 ± 0.19
	Ana (1)	0.81 ± 0.10	5.18 ± 1.12	1.87 ± 1.15	8.67 ± 0.20
	Ana (2)	0.81 ± 0.10	5.16 ± 1.12	1.84 ± 1.13	8.67 ± 0.20
	Rec (1)	0.75 ± 0.14	5.50 ± 0.98	1.85 ± 1.15	8.67 ± 0.20
	Rec (2)	0.73 ± 0.19	6.00 ± 2.29	1.80 ± 1.16	8.67 ± 0.20
	Axi (1)	1.39 ± 0.11	4.79 ± 1.06	1.96 ± 1.10	8.94 ± 0.18
	Axi (2)	1.39 ± 0.11	4.76 ± 1.03	1.92 ± 1.09	8.94 ± 0.18
ATDD	Paper	0.97 ± 0.13	5.31 ± 1.50	1.60 ± 1.25	8.57 ± 0.20
	Ana (1)	0.89 ± 0.14	4.84 ± 1.29	1.37 ± 1.21	8.44 ± 0.22
	Ana (2)	0.89 ± 0.14	4.90 ± 1.24	1.44 ± 1.23	8.44 ± 0.22
	Rec (1)	0.63 ± 0.29	8.91 ± 6.63	1.46 ± 1.10	8.44 ± 0.22
	Rec (2)	0.58 ± 0.34	11.43 ± 9.71	1.42 ± 1.09	8.44 ± 0.22
	Axi (1)	1.45 ± 0.16	4.96 ± 1.11	1.74 ± 0.99	8.66 ± 0.18
	Axi (2)	1.46 ± 0.15	4.81 ± 0.99	1.64 ± 1.01	8.67 ± 0.18
AAD	Paper	2.47 ± 0.34	7.34 ± 7.00	3.06 ± 3.96	8.24 ± 0.09
	Ana (1)	1.99 ± 0.95	28.61 ± 44.74	7.27 ± 8.85	7.90 ± 0.60

AAD

Tabla F.8: Comparación pequeñas y grandes deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) utilizando todas las muestras.

Arteria	Estudio	E_p (MPa)	$\tau_\epsilon (\times 10^{-2} \text{s})$	$\tau_\sigma (\times 10^{-2} \text{s})$	R_0 (mm)
	Ana (2)	2.14 ± 0.86	23.07 ± 40.51	5.66 ± 8.02	7.97 ± 0.62
	Rec (1)	1.74 ± 0.62	82.30 ± 150.13	55.99 ± 116.75	8.08 ± 0.16
	Rec (2)	1.89 ± 0.87	141.36 ± 303.80	122.96 ± 292.77	8.19 ± 0.15
	Axi (1)	2.78 ± 0.75	16.25 ± 15.41	6.40 ± 6.90	8.19 ± 0.11
	Axi (2)	3.26 ± 0.34	93.07 ± 285.89	88.35 ± 284.16	8.29 ± 0.11
FI	Paper	3.03 ± 0.53	3.56 ± 1.56	0.41 ± 0.74	2.83 ± 0.16
	Ana (1)	2.05 ± 1.25	103.07 ± 217.97	45.13 ± 121.43	2.69 ± 0.20
	Ana (2)	1.74 ± 1.15	117.11 ± 209.81	46.46 ± 117.37	2.64 ± 0.22
	Rec (1)	2.12 ± 0.90	103.63 ± 214.27	85.00 ± 186.87	2.82 ± 0.16
	Rec (2)	2.52 ± 0.91	170.06 ± 229.49	137.87 ± 191.77	2.82 ± 0.16
	Axi (1)	3.68 ± 0.73	102.63 ± 214.90	86.83 ± 188.24	2.82 ± 0.16
	Axi (2)	3.78 ± 0.71	73.56 ± 170.04	63.85 ± 158.79	2.83 ± 0.16

Utilizando el primer filtrado

Tabla F.9: Identificación pequeñas y grandes deformaciones con el primer filtrado. N indica la cantidad de muestras.

Arteria	Estudio	μ (MPa)	γ	τ (s)	R_0 (mm)	N
CD	Ana (1)	16.01 ± 13.80	0.73 ± 0.14	3.09 ± 4.63	4.06 ± 0.26	11
	Ana (2)	20.19 ± 10.92	0.80 ± 0.12	0.90 ± 0.77	4.04 ± 0.27	9
	Rec (1)	11.50 ± 4.33	0.72 ± 0.14	1.84 ± 2.03	4.04 ± 0.30	7
	Rec (2)	14.80 ± 5.21	0.78 ± 0.12	0.96 ± 0.66	4.03 ± 0.24	9
	Axi (1)	13.28 ± 8.14	0.72 ± 0.12	3.55 ± 5.43	4.05 ± 0.28	9
	Axi (2)	17.41 ± 9.34	0.76 ± 0.11	1.03 ± 0.68	4.07 ± 0.26	11
TB	Ana (1)	0.69 ± 0.35	0.66 ± 0.06	2.04 ± 0.61	8.85 ± 1.04	10
	Ana (2)	0.69 ± 0.39	0.66 ± 0.06	2.03 ± 0.62	8.77 ± 1.03	11
	Rec (1)	0.67 ± 0.34	0.66 ± 0.06	2.05 ± 0.59	8.77 ± 1.02	11
	Rec (2)	0.70 ± 0.40	0.67 ± 0.07	1.99 ± 0.60	8.78 ± 1.02	11
	Axi (1)	1.03 ± 0.37	0.61 ± 0.05	2.13 ± 0.50	9.12 ± 0.97	11
	Axi (2)	1.05 ± 0.41	0.61 ± 0.06	2.08 ± 0.51	9.12 ± 0.97	11
	Ana (1)	0.31 ± 0.16	0.59 ± 0.13	2.69 ± 1.14	9.10 ± 0.68	12

Tabla F.9: Identificación pequeñas y grandes deformaciones con el primer filtrado. N indica la cantidad de muestras.

Arteria	Estudio	μ (MPa)	γ	τ (s)	R_0 (mm)	N
	Ana (2)	0.32 ± 0.17	0.60 ± 0.13	2.60 ± 1.04	9.10 ± 0.68	12
	Rec (1)	0.30 ± 0.16	0.59 ± 0.15	2.72 ± 1.19	9.03 ± 0.66	11
	Rec (2)	0.33 ± 0.17	0.61 ± 0.14	2.49 ± 1.00	9.12 ± 0.69	12
	Axi (1)	0.61 ± 0.19	0.58 ± 0.11	2.15 ± 0.73	9.51 ± 0.61	7
	Axi (2)	0.62 ± 0.20	0.58 ± 0.11	2.11 ± 0.73	9.51 ± 0.61	7
ATDP	Ana (1)	0.81 ± 0.49	0.67 ± 0.16	1.87 ± 1.15	8.67 ± 0.20	11
	Ana (2)	0.87 ± 0.64	0.67 ± 0.16	1.84 ± 1.13	8.67 ± 0.20	11
	Rec (1)	0.71 ± 0.40	0.65 ± 0.15	2.00 ± 1.11	8.67 ± 0.22	10
	Rec (2)	0.73 ± 0.45	0.65 ± 0.16	2.07 ± 1.09	8.71 ± 0.19	9
	Axi (1)	1.12 ± 0.58	0.62 ± 0.15	1.96 ± 1.10	8.94 ± 0.18	11
	Axi (2)	1.16 ± 0.63	0.63 ± 0.16	1.92 ± 1.09	8.94 ± 0.18	11
ATDD	Ana (1)	0.72 ± 0.54	0.62 ± 0.14	2.09 ± 0.90	8.41 ± 0.24	7
	Ana (2)	0.75 ± 0.63	0.61 ± 0.16	2.14 ± 0.97	8.41 ± 0.24	7
	Rec (1)	0.72 ± 0.54	0.62 ± 0.16	2.07 ± 0.91	8.41 ± 0.24	7
	Rec (2)	0.73 ± 0.54	0.62 ± 0.16	2.03 ± 0.89	8.42 ± 0.24	7
	Axi (1)	1.25 ± 0.79	0.63 ± 0.16	1.90 ± 0.88	8.65 ± 0.18	10
	Axi (2)	1.32 ± 0.77	0.64 ± 0.17	1.79 ± 0.93	8.66 ± 0.19	10
AAD	Ana (1)	2.18 ± 1.87	0.68 ± 0.14	7.35 ± 7.71	8.11 ± 0.28	4
	Ana (2)	2.06 ± 1.97	0.65 ± 0.14	7.82 ± 6.56	8.12 ± 0.28	5
	Rec (1)	1.42 ± 1.40	0.62 ± 0.15	10.23 ± 6.00	8.01 ± 0.18	6
	Rec (2)	1.95 ± 1.46	0.61 ± 0.18	5.22 ± 3.99	8.26 ± 0.11	5
	Axi (1)	1.87 ± 1.35	0.60 ± 0.11	9.94 ± 6.26	8.18 ± 0.14	7
	Axi (2)	2.34 ± 1.66	0.57 ± 0.16	5.15 ± 3.79	8.32 ± 0.10	5
FI	Ana (1)	1.43 ± 0.95	0.74 ± 0.09	12.28 ± 9.56	2.57 ± 0.09	7
	Ana (2)	1.37 ± 0.94	0.76 ± 0.09	14.00 ± 10.12	2.54 ± 0.12	8
	Rec (1)	3.53 ± 2.23	0.76 ± 0.13	1.61 ± 1.75	2.73 ± 0.15	5
	Rec (2)	3.73 ± 2.66	0.78 ± 0.13	1.34 ± 1.15	2.69 ± 0.14	4
	Axi (1)	3.18 ± 1.96	0.68 ± 0.16	2.56 ± 2.30	2.71 ± 0.12	5
	Axi (2)	3.51 ± 2.41	0.67 ± 0.15	2.14 ± 1.76	2.76 ± 0.09	4

Tabla F.10: Comparación pequeñas y grandes deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) utilizando el primer filtrado.

Arteria	Estudio	E_p (MPa)	$\tau_\epsilon (\times 10^{-2}\text{s})$	$\tau_\sigma (\times 10^{-2}\text{s})$	R_0 (mm)
CD	Paper	11.47 ± 1.45	3.82 ± 1.58	0.90 ± 1.08	4.07 ± 0.26
	Ana (1)	11.46 ± 2.02	8.16 ± 9.43	3.09 ± 4.63	4.06 ± 0.26
	Ana (2)	12.25 ± 1.53	3.81 ± 1.15	0.90 ± 0.77	4.04 ± 0.27
	Rec (1)	10.97 ± 1.74	5.39 ± 2.85	1.84 ± 2.03	4.04 ± 0.30
	Rec (2)	10.93 ± 2.33	4.11 ± 0.61	0.96 ± 0.66	4.03 ± 0.24
	Axi (1)	11.71 ± 2.62	102.11 ± 205.46	3.55 ± 5.43	4.05 ± 0.28
	Axi (2)	13.31 ± 1.59	3.92 ± 0.91	1.03 ± 0.68	4.07 ± 0.26
TB	Paper	1.03 ± 0.28	5.91 ± 0.91	2.00 ± 0.61	8.88 ± 1.00
	Ana (1)	0.87 ± 0.27	5.88 ± 0.93	2.04 ± 0.61	8.85 ± 1.04
	Ana (2)	0.85 ± 0.27	5.85 ± 0.93	2.03 ± 0.62	8.77 ± 1.03
	Rec (1)	0.84 ± 0.25	5.91 ± 0.88	2.05 ± 0.59	8.77 ± 1.02
	Rec (2)	0.84 ± 0.25	5.83 ± 0.88	1.99 ± 0.60	8.78 ± 1.02
	Axi (1)	1.55 ± 0.32	5.34 ± 0.77	2.13 ± 0.50	9.12 ± 0.97
	Axi (2)	1.56 ± 0.33	5.28 ± 0.77	2.08 ± 0.51	9.12 ± 0.97
AA	Paper	0.58 ± 0.08	6.26 ± 1.28	2.45 ± 0.91	9.47 ± 0.65
	Ana (1)	0.44 ± 0.08	6.37 ± 1.37	2.69 ± 1.14	9.10 ± 0.68
	Ana (2)	0.44 ± 0.08	6.31 ± 1.27	2.60 ± 1.04	9.10 ± 0.68
	Rec (1)	0.42 ± 0.08	6.46 ± 1.24	2.72 ± 1.19	9.03 ± 0.66
	Rec (2)	0.43 ± 0.09	6.24 ± 0.88	2.49 ± 1.00	9.12 ± 0.69
	Axi (1)	0.97 ± 0.10	4.95 ± 0.92	2.15 ± 0.73	9.51 ± 0.61
	Axi (2)	0.97 ± 0.11	4.89 ± 0.88	2.11 ± 0.73	9.51 ± 0.61
ATDP	Paper	0.92 ± 0.10	5.14 ± 1.23	1.77 ± 1.20	8.83 ± 0.19
	Ana (1)	0.81 ± 0.10	5.18 ± 1.12	1.87 ± 1.15	8.67 ± 0.20
	Ana (2)	0.81 ± 0.10	5.16 ± 1.12	1.84 ± 1.13	8.67 ± 0.20
	Rec (1)	0.78 ± 0.09	5.40 ± 0.97	2.00 ± 1.11	8.67 ± 0.22
	Rec (2)	0.79 ± 0.09	5.55 ± 0.78	2.07 ± 1.09	8.71 ± 0.19
	Axi (1)	1.39 ± 0.11	4.79 ± 1.06	1.96 ± 1.10	8.94 ± 0.18
	Axi (2)	1.39 ± 0.11	4.76 ± 1.03	1.92 ± 1.09	8.94 ± 0.18
ATDD	Paper	0.97 ± 0.13	5.31 ± 1.50	1.60 ± 1.25	8.57 ± 0.20
	Ana (1)	0.86 ± 0.13	5.25 ± 0.76	2.09 ± 0.90	8.41 ± 0.24
	Ana (2)	0.86 ± 0.14	5.27 ± 0.85	2.14 ± 0.97	8.41 ± 0.24

Tabla F.10: Comparación pequeñas y grandes deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) utilizando el primer filtrado.

Arteria	Estudio	E_p (MPa)	$\tau_\epsilon (\times 10^{-2} \text{s})$	$\tau_\sigma (\times 10^{-2} \text{s})$	R_0 (mm)
	Rec (1)	0.81 ± 0.12	5.40 ± 0.49	2.07 ± 0.91	8.41 ± 0.24
	Rec (2)	0.82 ± 0.12	5.35 ± 0.54	2.03 ± 0.89	8.42 ± 0.24
	Axi (1)	1.43 ± 0.16	4.96 ± 1.11	1.90 ± 0.88	8.65 ± 0.18
	Axi (2)	1.44 ± 0.16	4.81 ± 0.99	1.79 ± 0.93	8.66 ± 0.19
AAD	Paper	2.47 ± 0.34	7.34 ± 7.00	3.06 ± 3.96	8.24 ± 0.09
	Ana (1)	2.17 ± 1.04	21.62 ± 25.44	7.35 ± 7.71	8.11 ± 0.28
	Ana (2)	2.11 ± 0.86	20.68 ± 19.64	7.82 ± 6.56	8.12 ± 0.28
	Rec (1)	1.55 ± 0.41	25.83 ± 16.61	10.23 ± 6.00	8.01 ± 0.18
	Rec (2)	2.22 ± 0.50	11.22 ± 6.86	5.22 ± 3.99	8.26 ± 0.11
	Axi (1)	2.53 ± 0.86	16.25 ± 15.41	9.94 ± 6.26	8.18 ± 0.14
	Axi (2)	3.21 ± 0.47	93.07 ± 285.89	5.15 ± 3.79	8.32 ± 0.10
FI	Paper	3.03 ± 0.53	3.56 ± 1.56	0.41 ± 0.74	2.83 ± 0.16
	Ana (1)	1.45 ± 0.97	54.16 ± 47.68	12.28 ± 9.56	2.57 ± 0.09
	Ana (2)	1.34 ± 0.98	69.89 ± 62.48	14.00 ± 10.12	2.54 ± 0.12
	Rec (1)	2.56 ± 0.47	5.78 ± 2.89	1.61 ± 1.75	2.73 ± 0.15
	Rec (2)	2.40 ± 0.36	5.62 ± 1.96	1.34 ± 1.15	2.69 ± 0.14
	Axi (1)	3.23 ± 0.60	102.63 ± 214.90	2.56 ± 2.30	2.71 ± 0.12
	Axi (2)	3.65 ± 0.74	73.56 ± 170.04	2.14 ± 1.76	2.76 ± 0.09

Utilizando el segundo filtrado

Tabla F.11: Identificación pequeñas y grandes deformaciones con el segundo filtrado. N indica la cantidad de muestras.

Arteria	Estudio	μ (MPa)	γ	τ (s)	R_0 (mm)	N
CD	Ana (1)	11.78 ± 1.83	0.75 ± 0.04	0.98 ± 0.33	3.94 ± 0.31	4
	Ana (2)	20.39 ± 9.34	0.83 ± 0.10	0.66 ± 0.51	3.94 ± 0.31	4
	Rec (1)	12.54 ± 3.93	0.78 ± 0.08	0.94 ± 0.42	3.94 ± 0.31	4
	Rec (2)	14.72 ± 4.04	0.82 ± 0.09	0.74 ± 0.40	3.94 ± 0.31	4
	Axi (1)	15.17 ± 8.41	0.77 ± 0.09	0.95 ± 0.49	3.94 ± 0.31	4
	Axi (2)	15.18 ± 3.80	0.78 ± 0.08	0.82 ± 0.45	3.94 ± 0.31	4
	Ana (1)	0.69 ± 0.35	0.66 ± 0.06	2.04 ± 0.61	8.85 ± 1.04	10

Tabla F.11: Identificación pequeñas y grandes deformaciones con el segundo filtro. N indica la cantidad de muestras.

Arteria	Estudio	μ (MPa)	γ	τ (s)	R_0 (mm)	N
	Ana (2)	0.71 ± 0.40	0.66 ± 0.07	2.01 ± 0.65	8.85 ± 1.05	10
	Rec (1)	0.69 ± 0.35	0.66 ± 0.07	2.02 ± 0.61	8.85 ± 1.04	10
	Rec (2)	0.72 ± 0.41	0.67 ± 0.07	1.95 ± 0.62	8.85 ± 1.05	10
	Axi (1)	1.06 ± 0.37	0.61 ± 0.06	2.11 ± 0.52	9.19 ± 0.99	10
	Axi (2)	1.08 ± 0.42	0.62 ± 0.06	2.05 ± 0.53	9.20 ± 1.00	10
AA	Ana (1)	0.36 ± 0.22	0.66 ± 0.14	1.95 ± 0.94	8.64 ± 0.50	6
	Ana (2)	0.37 ± 0.24	0.66 ± 0.14	1.95 ± 0.97	8.64 ± 0.49	6
	Rec (1)	0.36 ± 0.21	0.67 ± 0.15	1.93 ± 0.95	8.64 ± 0.50	6
	Rec (2)	0.37 ± 0.23	0.67 ± 0.15	1.88 ± 0.93	8.65 ± 0.50	6
	Axi (1)	0.59 ± 0.20	0.57 ± 0.12	2.12 ± 0.80	9.35 ± 0.50	6
	Axi (2)	0.60 ± 0.21	0.58 ± 0.12	2.09 ± 0.80	9.36 ± 0.50	6
ATDP	Ana (1)	0.72 ± 0.43	0.64 ± 0.15	2.13 ± 1.10	8.70 ± 0.19	9
	Ana (2)	0.71 ± 0.43	0.64 ± 0.15	2.11 ± 1.06	8.71 ± 0.18	9
	Rec (1)	0.71 ± 0.43	0.64 ± 0.16	2.12 ± 1.10	8.70 ± 0.19	9
	Rec (2)	0.73 ± 0.45	0.65 ± 0.16	2.07 ± 1.09	8.71 ± 0.19	9
	Axi (1)	1.03 ± 0.53	0.59 ± 0.15	2.20 ± 1.07	8.97 ± 0.16	9
	Axi (2)	1.05 ± 0.56	0.60 ± 0.15	2.16 ± 1.06	8.98 ± 0.16	9
ATDD	Ana (1)	0.72 ± 0.54	0.62 ± 0.14	2.09 ± 0.90	8.41 ± 0.24	7
	Ana (2)	0.75 ± 0.63	0.61 ± 0.16	2.14 ± 0.97	8.41 ± 0.24	7
	Rec (1)	0.72 ± 0.54	0.62 ± 0.16	2.07 ± 0.91	8.41 ± 0.24	7
	Rec (2)	0.73 ± 0.54	0.62 ± 0.16	2.03 ± 0.89	8.42 ± 0.24	7
	Axi (1)	0.89 ± 0.34	0.56 ± 0.12	2.26 ± 0.73	8.64 ± 0.19	7
	Axi (2)	0.90 ± 0.36	0.56 ± 0.12	2.23 ± 0.74	8.65 ± 0.20	7
AAD	Ana (1)	2.17 ± 2.30	0.69 ± 0.17	9.28 ± 8.17	8.04 ± 0.30	3
	Ana (2)	2.44 ± 2.60	0.64 ± 0.20	7.24 ± 6.00	8.22 ± 0.01	3
	Rec (1)	2.00 ± 1.96	0.69 ± 0.19	8.75 ± 7.47	8.11 ± 0.18	3
	Rec (2)	2.16 ± 1.93	0.62 ± 0.24	5.15 ± 4.20	8.30 ± 0.08	3
	Axi (1)	2.39 ± 2.01	0.63 ± 0.17	8.26 ± 7.08	8.25 ± 0.12	3
	Axi (2)	2.63 ± 2.21	0.58 ± 0.21	5.08 ± 4.06	8.36 ± 0.10	3
FI	Ana (1)	2.09 ± 1.24	0.65 ± 0.13	2.76 ± 2.74	2.68 ± 0.06	2
	Ana (2)	2.18 ± 1.33	0.66 ± 0.14	2.60 ± 2.59	2.68 ± 0.06	2

Tabla F.11: Identificación pequeñas y grandes deformaciones con el segundo filtrado. N indica la cantidad de muestras.

Arteria	Estudio	μ (MPa)	γ	τ (s)	R_0 (mm)	N
	Rec (1)	2.09 ± 1.24	0.65 ± 0.14	2.74 ± 2.76	2.68 ± 0.06	2
	Rec (2)	2.38 ± 1.18	0.69 ± 0.11	1.84 ± 1.60	2.69 ± 0.07	2
	Axi (1)	2.45 ± 1.33	0.63 ± 0.14	2.67 ± 2.59	2.69 ± 0.07	2
	Axi (2)	2.76 ± 1.30	0.67 ± 0.11	1.89 ± 1.60	2.70 ± 0.08	2

Tabla F.12: Comparación pequeñas y grandes deformaciones con (Valdez-Jasso et al., 2009) utilizando el segundo filtrado.

Arteria	Estudio	E_p (MPa)	$\tau_c (\times 10^{-2}s)$	$\tau_\sigma (\times 10^{-2}s)$	R_0 (mm)
CD	Paper	11.47 ± 1.45	3.82 ± 1.58	0.90 ± 1.08	4.07 ± 0.26
	Ana (1)	11.45 ± 1.69	3.86 ± 0.62	0.98 ± 0.33	3.94 ± 0.31
	Ana (2)	11.64 ± 2.01	3.45 ± 0.69	0.66 ± 0.51	3.94 ± 0.31
	Rec (1)	10.46 ± 2.10	4.06 ± 0.52	0.94 ± 0.42	3.94 ± 0.31
	Rec (2)	9.97 ± 2.70	3.94 ± 0.25	0.74 ± 0.40	3.94 ± 0.31
	Axi (1)	12.14 ± 1.74	3.86 ± 0.74	0.95 ± 0.49	3.94 ± 0.31
	Axi (2)	12.31 ± 2.01	3.61 ± 0.56	0.82 ± 0.45	3.94 ± 0.31
TB	Paper	1.03 ± 0.28	5.91 ± 0.91	2.00 ± 0.61	8.88 ± 1.00
	Ana (1)	0.87 ± 0.27	5.88 ± 0.93	2.04 ± 0.61	8.85 ± 1.04
	Ana (2)	0.87 ± 0.28	5.82 ± 0.97	2.01 ± 0.65	8.85 ± 1.05
	Rec (1)	0.86 ± 0.26	5.88 ± 0.92	2.02 ± 0.61	8.85 ± 1.04
	Rec (2)	0.86 ± 0.26	5.80 ± 0.92	1.95 ± 0.62	8.85 ± 1.05
	Axi (1)	1.58 ± 0.32	5.31 ± 0.81	2.11 ± 0.52	9.19 ± 0.99
	Axi (2)	1.58 ± 0.33	5.25 ± 0.80	2.05 ± 0.53	9.20 ± 1.00
AA	Paper	0.58 ± 0.08	6.26 ± 1.28	2.45 ± 0.91	9.47 ± 0.65
	Ana (1)	0.39 ± 0.05	5.47 ± 1.15	1.95 ± 0.94	8.64 ± 0.50
	Ana (2)	0.39 ± 0.05	5.47 ± 1.16	1.95 ± 0.97	8.64 ± 0.49
	Rec (1)	0.37 ± 0.06	5.64 ± 0.82	1.93 ± 0.95	8.64 ± 0.50
	Rec (2)	0.37 ± 0.07	5.64 ± 0.63	1.88 ± 0.93	8.65 ± 0.50
	Axi (1)	0.94 ± 0.08	4.83 ± 0.94	2.12 ± 0.80	9.35 ± 0.50
	Axi (2)	0.94 ± 0.08	4.78 ± 0.91	2.09 ± 0.80	9.36 ± 0.50
ATDP	Paper	0.92 ± 0.10	5.14 ± 1.23	1.77 ± 1.20	8.83 ± 0.19
	Ana (1)	0.82 ± 0.10	5.50 ± 0.98	2.13 ± 1.10	8.70 ± 0.19

	Ana (2)	0.82 ± 0.10	5.49 ± 0.94	2.11 ± 1.06	8.71 ± 0.18
	Rec (1)	0.79 ± 0.09	5.58 ± 0.83	2.12 ± 1.10	8.70 ± 0.19
	Rec (2)	0.79 ± 0.09	5.55 ± 0.78	2.07 ± 1.09	8.71 ± 0.19
	Axi (1)	1.40 ± 0.12	5.07 ± 0.96	2.20 ± 1.07	8.97 ± 0.16
	Axi (2)	1.40 ± 0.12	5.04 ± 0.92	2.16 ± 1.06	8.98 ± 0.16
ATDD	Paper	0.97 ± 0.13	5.31 ± 1.50	1.60 ± 1.25	8.57 ± 0.20
	Ana (1)	0.86 ± 0.13	5.25 ± 0.76	2.09 ± 0.90	8.41 ± 0.24
	Ana (2)	0.86 ± 0.14	5.27 ± 0.85	2.14 ± 0.97	8.41 ± 0.24
	Rec (1)	0.81 ± 0.12	5.40 ± 0.49	2.07 ± 0.91	8.41 ± 0.24
	Rec (2)	0.82 ± 0.12	5.35 ± 0.54	2.03 ± 0.89	8.42 ± 0.24
	Axi (1)	1.42 ± 0.13	5.03 ± 0.52	2.26 ± 0.73	8.64 ± 0.19
	Axi (2)	1.42 ± 0.13	4.98 ± 0.56	2.23 ± 0.74	8.65 ± 0.20
AAD	Paper	2.47 ± 0.34	7.34 ± 7.00	3.06 ± 3.96	8.24 ± 0.09
	Ana (1)	1.87 ± 1.03	27.35 ± 27.82	9.28 ± 8.17	8.04 ± 0.30
	Ana (2)	2.16 ± 0.66	15.77 ± 11.66	7.24 ± 6.00	8.22 ± 0.01
	Rec (1)	1.61 ± 0.44	23.20 ± 20.26	8.75 ± 7.47	8.11 ± 0.18
	Rec (2)	2.03 ± 0.25	10.83 ± 6.29	5.15 ± 4.20	8.30 ± 0.08
	Axi (1)	2.73 ± 0.91	19.32 ± 17.35	8.26 ± 7.08	8.25 ± 0.12
	Axi (2)	3.17 ± 0.42	9.82 ± 6.39	5.08 ± 4.06	8.36 ± 0.10
FI	Paper	3.03 ± 0.53	3.56 ± 1.56	0.41 ± 0.74	2.83 ± 0.16
	Ana (1)	2.60 ± 0.64	6.81 ± 5.18	2.76 ± 2.74	2.68 ± 0.06
	Ana (2)	2.63 ± 0.66	6.53 ± 4.93	2.60 ± 2.59	2.68 ± 0.06
	Rec (1)	2.53 ± 0.53	6.83 ± 5.14	2.74 ± 2.76	2.68 ± 0.06
	Rec (2)	2.63 ± 0.37	5.38 ± 3.23	1.84 ± 1.60	2.69 ± 0.07
	Axi (1)	3.21 ± 0.57	6.37 ± 4.61	2.67 ± 2.59	2.69 ± 0.07
	Axi (2)	3.33 ± 0.47	5.18 ± 3.09	1.89 ± 1.60	2.70 ± 0.08