Maestría en Física - Tesis
PEDECIBA

Dinámica de correlaciones cuánticas para estados X de dos qubits.

Virginia Feldman

Orientadora: Dra. Adriana Auyuanet

Universidad de la República - 2016

Resumen

La comprensión de las ventajas que puede generar la explotación de fenómenos como el entrelazamiento al momento de crear y perfeccionar formas de transmitir y manipular la información ha llevado al desarrollo de la Teoría de la Información Cuántica. Hoy en día, a diferencia de lo que ocurría cuando recién se comenzó a explorar el área, existe consenso en la comunidad científica respecto a que el potencial del procesamiento de la información cuántica no radica únicamente en el entrelazamiento: se observan otras formas de correlaciones no clásicas, que derivan de principios fundamentales como la perturbación inducida por las medidas en el caso de la discordia cuántica. La presencia de este tipo de correlaciones es una manifestación del carácter cuántico de los sistemas y es la clave del rendimiento mejorado que se observa para ciertos protocolos cuánticos en comparación con los clásicos.

Todo esto justifica la importancia que conlleva el entendimiento de sus dinámicas en sistemas reales, es decir en sistemas que interactúan con el ambiente.

El objetivo del presente trabajo es la caracterización del entrelazamiento, la discordia cuántica, la coherencia y las correlaciones clásicas en sistemas abiertos bipartitos de dos qubits restringidos a evoluciones, markovianas y no markovianas, que mantengan la forma X de los estados cuánticos.

Más precisamente, el estudio se enfoca, por un lado, en el análisis de las dinámicas de la concurrencia, la discordia basada en medidas, la entropía relativa de coherencia y las correlaciones clásicas en un sistema de dos qubits independientes, cada uno interactuando localmente con su propio reservorio no markoviano a temperatura cero; y en el caso de dos qubits interactuando con un entorno, markoviano y no markoviano, común, a temperatura cero.

Por otro lado, se buscan relaciones dinámicas entre medidas geométricas del entrelazamiento y la discordia cuántica, basadas en las normas-p de Schatten, con $p = 1$ y $p = 2$, para estados diagonales de Bell sujetos a los canales cuánticos: phase damping, bit flip, phase flip, bit-phase flip, depolarizing y amplitude damping.

En casos particulares se constatan y se muestran relaciones explícitas entre pares de cuantificadores de estas correlaciones. Además, se presencian los fenómenos de muerte súbita y *revival* de la concurrencia, cambio súbito de la discordia cuántica y las correlaciones clásicas y *freezing* de la discordia geométrica.

Abstract

Understanding the advantages that can be generated by the exploitation of phenomena such as entanglement when creating and perfecting ways to transmit and manipulate information has led to further development of Quantum Information Theory. Today, unlike what happened when exploration of the area had just begun, the general consensus of the scientific community is that the potential of quantum information processing lies not only in entanglement: other forms of nonclassical correlations are observed like quantum discord. The presence of such correlations is a manifestation of the quantum nature of the systems and is the key to improved performance observed in certain quantum protocols when comparing to their classical analogues.

All this justifies the importance in understanding their dynamics in real systems, that is systems that interact with the environment.

The main goal of this thesis is the characterization of entanglement, quantum discord, coherence and classical correlations for two qubits open quantum systems under markovian and non markovian evolutions that keep the X form of quantum states.

More precisely, the study focuses on the analysis of the concurrence, the measurements based quantum discord, the relative entropy of coherence and the classical correlations dynamics in a system of two independent qubits, each one interacting locally with its own non markovian reservoir at zero temperature. It also explores the case of having two qubits interacting with a common bosonic, markovian and non markovian, environement at zero temperature.

In the other hand, we search for dynamical relations between geometric measures of entanglement and quantum discord by means of the Schatten p-norms, with $p = 1$ and $p = 2$, for Bell diagonal states under the phase damping, bit flip, phase flip, bit-phase flip and amplitude damping quantum channels.

Particularly, we show explicit relations between pairs of correlations quantifiers. We also observe sudden death, concurrence revival, sudden change of quantum discord and classical correlations and freezing of geometric quantum discord and classical correlations.

Índice

1 Introducción **6**

I **9**

2 Nociones preliminares **10**
2.1 Estados cuánticos . . . 10
2.1.1 Estados puros . . . 10
2.1.2 Operador densidad . . . 11
2.2 Quantum bits . . . 12
2.2.1 Definición . . . 12
2.2.2 Representación en la esfera de Bloch . . . 13
2.3 Sistemas bipartitos de dos qubits . . . 14
2.3.1 Definición . . . 14
2.3.2 Operador densidad reducido . . . 15
2.3.3 Estados X . . . 16
2.4 Medidas . . . 17
2.4.1 Medidas proyectivas . . . 17
2.4.2 Medidas generalizadas . . . 18

3 Sistemas cuánticos abiertos **19**
3.1 Definición . . . 19
3.2 Operaciones cuánticas y operadores de Kraus . . . 20
3.2.1 Representación de Kraus . . . 20
3.2.2 Canales cuánticos y su representación de Kraus . . . 22
3.3 Ecuación Maestra . . . 26
3.3.1 Dinámica markoviana . . . 27
3.3.2 Dinámica no markoviana . . . 28
3.3.3 Ejemplos . . . 29

4 Correlaciones **33**
4.1 Entrelazamiento . . . 33
4.1.1 Definiciones . . . 33
4.1.2 Enfoque operacional . . . 35

4.1.3 Cuantificación del entrelazamiento . . . 37
4.1.4 Estados puros: entropía de entrelazamiento . . . 39
4.1.5 Estados mezcla: concurrencia . . . 40
4.2 Discordia cuántica . . . 40
4.2.1 Teoría de la Información Clásica . . . 41
4.2.2 Discordia cuántica basada en las medidas . . . 44
4.3 Correlaciones clásicas . . . 48
4.4 Medidas geométricas para correlacionescuánticas . . . 49
4.4.1 Definición . . . 49
4.4.2 Norma traza y norma de Hilbert-Schmidt . . . 50
4.4.3 Medidas geométricas del entrelazamiento . . . 52
4.4.4 Medida geométrica de la discordia . . . 54
4.5 Geometría de los estados diagonales de Bell . . . 56
4.6 Medidas de coherencia . . . 58
4.6.1 Estados incoherentes y operaciones incoherentes . . . 58
4.6.2 Medidas de coherencia . . . 59
4.6.3 Entropía relativa de coherencia . . . 60
4.7 Fenómenos observados en la evolución de correlaciones . . . 60

II 63

5 Estudio de correlaciones: sistemas markovianos y no markovianos 64
5.1 Dos qubits en reservorios independientes . . . 64
5.1.1 Estado inicial $|\psi_1\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ . . . 65
5.1.2 Estado inicial $|\psi_2\rangle = \alpha|01\rangle + \beta|10\rangle$ . . . 73
5.2 Dos qubits en un reservorio común . . . 77

6 Estudio de medidas geométricas de entrelazamiento y discordia 86
6.1 Dos qubits sujetos al canal *phase damping* . . . 86
6.1.1 Norma de Hilbert-Schmidt . . . 87
6.1.2 Norma traza . . . 93
6.2 Dos qubits sujetos al canal *depolarizing* . . . 99
6.2.1 Norma de Hilbert-Schmidt . . . 99
6.2.2 Norma Traza . . . 101
6.3 Dos qubits sujetos a los canales *phase flip*, *bit flip*, *bit-phase flip* . . . 101
6.4 Dos qubits sujetos al canal *amplitude damping* . . . 102

7 Conclusiones 106

8 Apéndice 110
8.1 Apéndice A . . . 110

8.1.1 Expresión analítica: discordia y correlaciones clásicas 110
8.1.2 La discordia cuántica no presenta cambios súbitos 111
8.1.3 Las correlaciones clásicas son iguales a la discordia cuántica . 111
8.1.4 Correlaciones nulas para tiempos discretos 113
8.1.5 Coherencia y discordia en tiempo inicial 114
8.2 Apéndice B 114
8.2.1 Expresión analítica: discordia y correlaciones clásicas 114
8.2.2 Concurrencia igual a la coherencia para $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 114
8.3 Apéndice C 115
8.4 Apéndice D 116
8.4.1 Canal *Phase Damping* y estados diagonales de Bell 116
8.4.2 Contractividad de la norma-2: canal *phase damping* 118
8.4.3 Relación entre p_{MS} y p_{CS} 118
8.5 Apéndice E 119
8.5.1 Canal *depolarizing* y estados diagonales de Bell 119
8.5.2 Contractividad de la norma-2: canal *depolarizing* 120
8.6 Apéndice F 120
8.6.1 Evolución para canales *bit flip*, *phase flip* y *bit-phase flip* . . . 120
8.6.2 Contractividad de la norma-2: canales *bf*, *pf*, *bpf* 121
8.7 Apéndice G 121
8.7.1 Evolución para el canal *amplitude damping* 121
8.7.2 Contractividad de la norma-2: canal *amplitude damping* . . . 122
8.7.3 Aplicación del algoritmo de Verstraete 122

Referencias **124**

1. Introducción

Los sucesivos y rápidos avances en las áreas de la comunicación y la información han dirigido los desarrollos tecnológicos a terrenos en que los efectos de la mecánica cuántica cobran relevancia, aumentando así el interés en una rama relativamente nueva de la ciencia como es la Teoría de la Información Cuántica. Una de las principales polémicas abordadas en el estudio de este campo es la de determinar dónde radican los provechos observados al utilizar sistemas cuánticos en el procesamiento de la información. Al presente se ha mostrado en ciertos casos que los candidatos responsables de tales beneficios son la correlaciones existentes entre partículas cuánticas [1].

Desde la primera mitad del siglo XX, en el albor de la teoría cuántica, el fenómeno del entrelazamiento se ha convertido en el centro de numerosos estudios, llamando la atención por los comportamientos contraintuitivos que se le atribuyen y siendo fuente de constante debate [2]. En la segunda mitad del siglo pasado cobró relevancia como responsable de la eficiencia mejorada que muestran teóricamente las computadoras cuánticas en comparación con sus análogos clásicos, quedando en evidencia su rol en tareas como la criptografía cuántica [3] y la teleportación [4], entre otras [5, 6].

A fines de la década de los noventa, el descubrimiento de algoritmos cuánticos que no precisan de entrelazamiento para solucionar problemas no resueltos eficientemente por algoritmos clásicos [7], desencadenó la búsqueda de diferentes recursos, más allá del entrelazamiento, responsables de este tipo de ventajas observadas [8].

A comienzos del siglo XXI, Zurek y Ollivier introdujeron, a partir de dos definiciones clásicamente idénticas de la información mutua, una nueva medida del carácter cuántico de las correlaciones: la discordia cuántica [9, 10]. Paralelamente, Henderson y Vedral postularon una cantidad similar que buscaba poner una frontera entre lo que son las correlaciones clásicas y las que se pueden denominar cuánticas [11]. Se trató de enfoques diferentes por medio de los cuales se obtuvieron los mismos resultados.

La discordia cuántica fue cobrando mayor trascendencia al ser identificada como recurso para la comunicación y computación cuánticas [12, 13, 14]. Sin embargo, el hecho de que la mayoría de los estados cuánticos posean discordia no nula [15] puede

ser interpretado como que todos los estados cuánticos son recursos beneficiosos, lo que ha llevado a la comunidad científica a desconfiar de la utilidad de tal correlación como recurso explotable.

La caracterización de las correlaciones cuánticas como recursos explotables en el almacenamiento, la comunicación y el procesamiento de la información debe ser enmarcado en el estudio de los sistemas cuánticos abiertos [16]. Es indispensable tener en cuenta que los sistemas físicos no se encuentran cerrados y su interacción con el ambiente no permite que las correlaciones cuánticas sean fácilmente mantenidas. Por lo tanto, es necesario el estudio de sus dinámicas cuando los sistemas en consideración evolucionan debido a la presencia de un ambiente que se encuentra generando decoherencia [17].

Al día de hoy, aún se discute el verdadero rol que cumplen las diferentes correlaciones cuánticas y su potencial [18, 19], así como todavía no se comprenden completamente las posibles relaciones existentes entre ellas, haciendo de la Teoría de la Información Cuántica un área en constante cambio y crecimiento.

El objetivo principal de esta tesis es profundizar en la comprensión de las dinámicas de diferentes cuantificadores de correlaciones cuánticas en sistemas abiertos que interactúan con diversos ambientes, estudiando las posibles relaciones existentes entre ellos y la aparición de fenómenos particulares en sus evoluciones.

Este trabajo se encuentra dividido en dos partes: en la primera se desarrollan los conceptos teóricos indispensables para el estudio de la dinámica de correlaciones, para abordar en la segunda parte el análisis de éstas en casos paradigmáticos.

El Capítulo 2 busca introducir la caracterización de los sistemas bipartitos de dos qubits, definiendo los estados X junto a su subconjunto de estados diagonales de Bell que serán utilizados a lo largo de todo el trabajo.

El Capítulo 3 se encuentra dedicado al estudio de los sistemas cuánticos abiertos, exponiendo sus dos descripciones equivalentes, una por medio de los operadores de Kraus y la otra empleando la ecuación maestra; y definiendo además la frontera entre sistemas markovianos y no markovianos. Asimismo allí se introducen los canales cuánticos *phase damping*, *depolarizing*, *bit flip*, *phase flip* y *bit-phase flip* con los que se trabajará en el Capítulo 6, así como las evoluciones de dos qubits en reservorios bosónicos independientes y en un reservorio común, a temperatura cero, que serán empleadas en el Capítulo 5.

El Capítulo 4 se halla destinado a la presentación de diferentes cuantificadores de correlaciones. En primer lugar se define la concurrencia como cuantificador del entrelazamiento y la discordia cuántica basada en la medidas, para luego pasar al enfoque geométrico de estas correlaciones en el que se emplean la norma traza

y la de Hilbert-Schmidt. Igualmente se expone una medida de las correlaciones clásicas y una medida geométrica de la coherencia, conocida como entropía relativa de coherencia. Se concluye la sección enumerando los fenómenos observados en la evolución de las correlaciones que son particularmente de interés.

En la segunda parte de la tesis se presentan las aplicaciones de los conceptos previamente abordados. Éstas se encuentran principalmente enfocadas en la caracterización de las correlaciones cuánticas y clásicas bajo diferentes dinámicas, dirigiendo la atención a la aparición de los fenómenos de muerte súbita, renacimiento, nacimiento y cambio súbitos y *freezing*; y al estudio de nexos analíticos o cualitativos entre las diferentes correlaciones.

En el capítulo 5 se analizan las dinámicas de la concurrencia, la discordia basada en las medidas, la entropía relativa de coherencia y las correlaciones clásicas en las situaciones ya mencionados de contar con dos qubits interactuando independientemente cada uno con un ambiente bosónico a temperatura cero y con dos qubits interactuando con un reservorio común a temperatura cero. Los casos se tratan tanto en el régimen markoviano como no markoviano.

En el capítulo 6 se realiza un estudio de las medidas geométricas de entrelazamiento y discordia, con las normas traza y de Hilbert-Schmidt, aplicado a estados diagonales de Bell que evolucionan bajo los canales cuánticos *phase damping*, *depolarizing*, *bit flip*, *phase flip* y *bit-phase flip*. Por otro lado, se deriva un representación de geométrica del entrelazamiento y la discordia para una clase de estados iniciales diagonales de Bell sujetos al canal *amplitude damping*.

Finalmente, en el capítulo 7 se enumeran y discuten las conclusiones que ha dejado el trabajo.

I

2. Nociones preliminares

2.1 Estados cuánticos

2.1.1 Estados puros

Asociado a todo sistema físico aislado se encuentra un espacio vectorial complejo equipado con un producto interno: se trata de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, conocido como el espacio de estados del sistema.

El estado de un sistema hace referencia a la información disponible sobre las propiedades del mismo. Cuando se tiene conocimiento completo sobre el sistema, se dice que su estado es puro, y éste puede ser escrito como un vector que vive en el espacio de Hilbert del sistema. El vector de estado representa un estado bien definido que describe completamente al sistema y evoluciona determinísticamente.

Utilizando la notación de Dirac, el vector asociado a un estado puro ψ es representado por medio del ket $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Y los vectores $|\psi\rangle$ y $e^{i\phi}|\psi\rangle$, $\phi \in [0, 2\pi]$, describen el mismo estado físico.

Si se elige cierta base $\{|k\rangle\}$ del espacio $\mathcal{H}$, todo vector de estado puede escribirse como una combinación lineal de los elementos de la base:

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{d} c_k |k\rangle, \tag{2.1}$$

donde $d = \dim\mathcal{H}$ y c_k son coeficientes complejos, permitiendo entonces efectos de interferencia entre estados.

El coeficiente c_k es la amplitud de probabilidad asociada al estado $|k_i\rangle$, por lo que $\sum_{k=1}^{d} |c_k|^2 = 1$, lo que es equivalente a decir que el estado $|\psi\rangle$ se encuentra normalizado: $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

El espacio dual $\mathcal{H}^*$ de $\mathcal{H}$ es el espacio de las funcionales lineales continuas que van de $\mathcal{H}$ a $\mathbb{C}$. Sus elementos se definen como:

$$\langle\chi| : |\psi\rangle \mapsto \langle\chi|\psi\rangle \tag{2.2}$$

Existe un isomorfismo entre un espacio de Hilbert y su dual:

$$|\psi\rangle^\dagger = |\psi\rangle^{*T} = \langle\psi| \tag{2.3}$$

Por lo tanto, si se representa $|\psi\rangle$ como un vector columna $\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_d\end{pmatrix}$, es posible identificar $\langle\psi|$ como un vector fila $\begin{pmatrix}\psi_1 & \cdots & \psi_d\end{pmatrix}^*$.

2.1.2 Operador densidad

Cuando el sistema se encuentra en un estado puro $|\psi\rangle$ se trata de un caso ideal en el cual toda la infomación sobre el sistema es accesible.

Equivalentemente, un sistema físico cuántico puede ser descrito por medio de un operador, el operador densidad, que actúa sobre el espacio de Hilbert del sistema. Esta formulación alternativa es empleada para describir sistemas cuyo estado resulta no ser completamente conocido. A modo de ejemplo, es ilustrativo considerar el caso en el que se cuenta con una preparación para generar n estados. Si cada uno de los n estados creados fuera el mismo, entonces $|\psi\rangle = |\psi_i\rangle$ $(i = 1, ..., n)$, y se dice que el sistema es conocido: se encuentra descrito por el estado puro $|\psi\rangle$. Por lo tanto se puede predecir, con probabilidad 1, que el próximo estado en generarse será también $|\psi\rangle$. Sin embargo, si la preparación produce un cierto número de estados puros diferentes, $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, ...\}$, entonces se tiene una mezcla de estados a los que se les asocia una distribución de probabilidad $\{p_1, p_2, ...\}$. Ahora, al intentar predecir un próximo estado generado por esta preparación, no se especifica un estado puro determinado, sino un conjunto de posibles estados, cada uno con una probabilidad asociada p_i.

Un sistema cuántico descrito por un *ensemble* estadístico de estados puros, $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, se dice que se encuentra en un estado mezcla. La descripción de este tipo de sistemas está dada por el operador densidad ρ, el cual se define como una combinación lineal de la forma

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \sum_i p_i \rho_i \quad \text{con} \quad \sum_i p_i = 1 \ \text{ y } \ p_i \geq 0. \tag{2.4}$$

Para garantizar que ρ describa realmente un estado físico, se deben satisfacer las siguientes propiedades:

1. ρ debe ser hermítico: $\rho^\dagger = \rho$. Esto implica que todos sus valores propios son reales.

2. ρ deber ser definido positivo, es decir $\langle\phi|\rho|\phi\rangle \geq 0$ para todo $|\phi\rangle$. Lo cual es equivalente a pedir que todos sus autovalores sean positivos.
3. ρ deber estar normalizado: $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.
4. Para un estado puro $|\psi\rangle$, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, se tiene que $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$, ya que $\rho^2 = \rho$.
5. Para un estado mezcla, $\mathrm{Tr}(\rho^2) < 1$.
6. El valor esperado de un operador A es $\langle A\rangle = \mathrm{Tr}(\rho A)$.

El operador densidad asociado a un estado puro tiene un solo valor propio igual a 1, correspondiente al estado propio particular en el cual se encuentra el sistema, mientras que los otros son nulos. Y para tener un estado mezcla el operador densidad debe poseer más de un valor propio diferente de 0.

En una base de estados $\{|k\rangle\}$ dada, el operador densidad ρ puede representarse como una matriz cuyos elementos son $\rho_{ij} = \langle i|\,\rho\,|j\rangle$. Los elementos de la diagonal de la matriz densidad ρ_{ii}, que son no negativos, representan la probabilidad de que el sistema ocupe el estado $|i\rangle$. Es por eso que se hace referencia a ellos como las poblaciones en la base elegida. Por otro lado, los elementos fuera de la diagonal ρ_{ij} proporcionan información sobre la interferencia entre las amplitudes de los estados $|i\rangle$ y $|j\rangle$: se dice que representan las coherencias en los estados mezcla.

2.2 Quantum bits

2.2.1 Definición

En computación clásica, la unidad fundamental de información es el "bit", el cual toma solamente dos valores, comúnmente representados por un 0 y un 1. Por lo tanto, en teoría de la información clásica, un bit se define como la información ganada cuando se conoce el valor de una variable aleatoria que tiene asociados dos resultados posibles con igual probabilidad. Existe un análogo cuántico del bit clásico.

En teoría de la información cuántica, la unidad básica de información es el quantum bit o "qubit", se trata del ejemplo más simple del estado de un sistema cuántico. Un qubit vive en el espacio de Hilbert de dimensión dos, es decir que se representa como un vector en $\mathbb{C}^2$.

Al medirlo, el qubit tiene dos resultados posibles, $|0\rangle$ y $|1\rangle$, los cuales se representan en la base estándar, también llamada base computacional, como

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

A diferencia de un bit clásico, el qubit puede encontrarse en una superposición de estos estados:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \tag{2.6}$$

donde las amplitudes de probabilidad α y β son complejas y tales que normalizan el estado $|\psi\rangle$, es decir

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \tag{2.7}$$

La ecuación 2.6 describe una superposición coherente de estados: si se mide el qubit, éste se encontrará con probabilidad $|\alpha|^2$ en el estado $|0\rangle$ y con probabilidad $|\beta|^2$ en el estado $|1\rangle$.

Físicamente, un qubit puede tratarse de un sistema mecánico cuántico de dos estados: se puede obtener por ejemplo con una partícula con spin 1/2 (*up* o *down*) o con la polarización (vertical u horizontal) de un fotón.

2.2.2 Representación en la esfera de Bloch

Existe una correspondencia uno a uno entre estados puros de un qubit y los puntos en la esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^3$. Utilizando 2.7, es posible reparametrizar el vector de estado y, de esta forma, obtener una representación geométrica del estado de un qubit:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \text{sen}\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|1\rangle, \tag{2.8}$$

donde $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Los parámetros θ y ϕ definen un punto en la superficie de la esfera. Para casi todos los estados $|\psi\rangle$ existe una única manera de asignar los parámetros θ y ϕ. Las únicas excepciones son los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, que corresponden a $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ respectivamente; en ambos casos ϕ no afecta el estado físico. Esta visualización geométrica de los estados puros de un qubit se conoce como representación de Bloch (Figura 2.1).

Por otro lado, el qubit podría encontrarse en un estado mezcla, con cierta probabilidad de estar en el estado $|1\rangle$ y cierta probabilidad de estar en el estado $|0\rangle$. En este caso el qubit queda descrito por una matriz densidad de dimensiones 2×2, cuyos elementos pertenecen a $\mathbb{C}$.

El conjunto de matrices $\{\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, donde σ_1,σ_2 y σ_3 son las matrices de Pauli, forman una base completa de las matrices hermíticas de 2×2. Por lo tanto, los estados mezcla de un qubit pueden expresarse como

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1}_2 + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}), \tag{2.9}$$

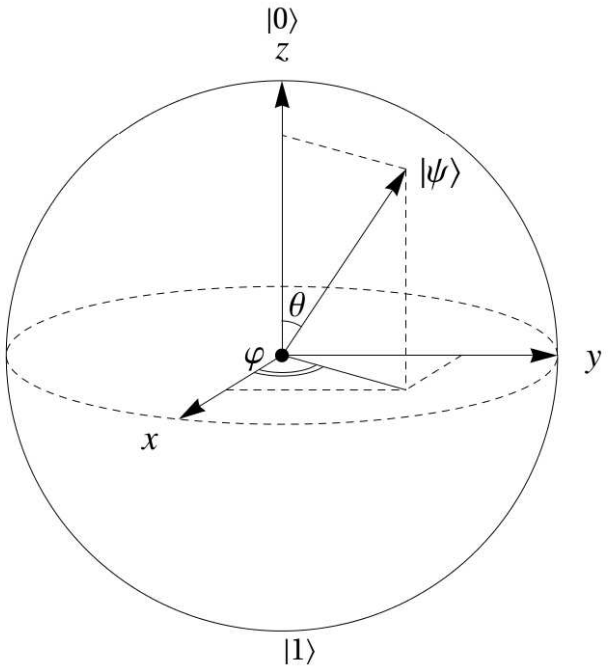


Figura 2.1: Representación de Bloch de un qubit $|\psi\rangle$.

donde $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$ es el vector de Bloch que satisface $|\vec{n}|^2 \leq 1$, y $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, con $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ y $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Teniendo en cuenta las propiedades de la matriz densidad comentadas anteriormente y calculando la traza de ρ^2:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\rho^2) &= \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{4}\left(\mathbb{1}^2 + 2(n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3) + (n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3)^2\right)\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(\frac{1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{4}\mathbb{1}\right) = \frac{1 + |\vec{n}|^2}{2} \end{aligned}, \quad (2.10)$$

se observa que si $|\vec{n}|^2 = 1$, ρ es un estado puro; mientras que si $|\vec{n}|^2 < 1$, ρ es una mezcla y se encuentra descrito por un punto que pertenece al interior de la esfera de Bloch.

2.3 Sistemas bipartitos de dos qubits

2.3.1 Definición

Si se desea describir dos o más sistemas cuánticos, cada uno con su propio espacio de Hilbert y que interactúan entre ellos, existe una forma de hacerlo conjuntamente como un solo sistema cuántico que vive en un solo espacio de Hilbert.

La noción de un sistema cuántico compuesto se encuentra en los fundamentos de la teoría de los sistemas cuánticos abiertos. De hecho, un sistema abierto y su ambiente son dos partes de un sistema compuesto.

Si se consideran dos sistemas físicos A y B, asociados a los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_A$ y $\mathcal{H}_B$ respectivamente, el espacio de Hilbert asociado al sistema bipartito total, constituido por los subsistemas A y B, se expresa por medio del producto tensorial

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \tag{2.11}$$

La dimensión del espacio resultante es $\dim(\mathcal{H}_{AB}) = \dim(\mathcal{H}_A)\dim(\mathcal{H}_B)$. Fijando dos bases ortonormales $\{|j\rangle_A\}$ de $\mathcal{H}_A$ y $\{|k\rangle_B\}$ de $\mathcal{H}_B$, un elemento genérico $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ puede escribirse como

$$|\psi\rangle = \sum_{jk} c_{jk}|j\rangle_A \otimes |k\rangle_B = \sum_{jk} c_{jk}|jk\rangle, \tag{2.12}$$

por lo que el conjunto $\{|j\rangle_A \otimes |k\rangle_B\}$ es una base del espacio $\mathcal{H}_{AB}$.

Análogamente, dados dos operadores lineales T_A y T_B que actúan sobre $\mathcal{H}_A$ y $\mathcal{H}_B$ respectivamente, es posible definir su producto tensorial como

$$(T_A \otimes T_B)(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = T_A|\psi\rangle \otimes T_B|\varphi\rangle. \tag{2.13}$$

Y luego por extensión a todo $\mathcal{H}_{AB}$. Todo operador T en $\mathcal{H}_{AB}$ puede escribirse como

$$T = \sum_k T_{Ak} \otimes T_{Bk}. \tag{2.14}$$

Las matrices densidad de sistemas bipartitos de dos qubits viven en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, por lo que la base del espacio deberá estar conformada por 16 matrices complejas de dimensiones 4×4. Estos operadores de base pueden elegirse como productos tensoriales de los elementos de base para un qubit: $\{\mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2, \mathbb{1}_2 \otimes \sigma_i, \sigma_i \otimes \mathbb{1}_2, \sigma_i \otimes \sigma_j\}$, con σ_i las matrices de Pauli.

Entonces, toda matriz densidad para dos qubits está dada por

$$\rho = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 + \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbb{1}_2 \otimes \sigma_i + \sum_{i=1}^{3} b_i \sigma_i \otimes \mathbb{1}_2 + \sum_{i,j=1}^{3} r_{ij}\sigma_i \otimes \sigma_j\right) \tag{2.15}$$

con $a_i, b_i, r_{ij} \in \mathbb{R}$; $a_i = \mathrm{Tr}(\rho \mathbb{1} \otimes \sigma_i)$, $b_i = \mathrm{Tr}(\rho \sigma_i \otimes \mathbb{1})$ y $r_{ij} = \mathrm{Tr}(\rho \sigma_i \otimes \sigma_j)$.

2.3.2 Operador densidad reducido

Puede ocurrir que se desee estudiar solamente uno de los subsitemas de un sistema cuántico compuesto. Esta situación se aborda utilizando el operador densidad reducido.

Si el sistema total bipartito se encuetra descrito por el operador densidad $\rho_{AB} \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, entonces el subsistema A se describe por medio del operador ρ_A que resulta de aplicarle la traza parcial (respecto a B) al operador ρ_{AB}:

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B\left(\rho_{AB}\right), \tag{2.16}$$

siendo Tr_B la traza parcial definida por:

$$\mathrm{Tr}_B\left(\rho^{AB}\right) = \sum_{j=0}^{d-1} (\mathbb{1} \otimes \langle j|_B)\rho^{AB}(\mathbb{1} \otimes |j\rangle_B), \tag{2.17}$$

donde $\{|j\rangle_B\}$ es una base de $\mathcal{H}_\mathcal{B}$.

El nuevo estado ρ_A pertenece a $\mathcal{H}_A$ y se llama estado reducido.

Intercambiando el rol de A y B, se obtiene la traza parcial respecto al subsistema A, ρ_B.

El sentido físico de la traza parcial reside en el hecho de que es la única operación que permite obtener estadísticas de medidas correctas para el subsitema A.

2.3.3 Estados X

Una clase especial de estados de dos qubits es la de los denominados estados X [20]. Se trata de aquellos cuyas matrices densidad tienen la forma de una X, con elementos no nulos solamente en su diagonal y antidiagonal:

$$\rho_X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

con $\rho_{41} = \rho_{14}^*$, $\rho_{32} = \rho_{23}^*$ y $\rho_{44} = 1 - \rho_{11} - \rho_{22} - \rho_{33}$.

Dentro del conjunto de los estados X se encuentran los estados diagonales de Bell, los cuales despiertan gran interés, debido a sus propiedades simétricas y sus aplicaciones.

Estados diagonales de Bell

Un paradigma de estados puros de dos qubits es el conjunto de estados de Bell. Éstos están dados en la base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ por:

$$\begin{aligned} |\Psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \\ |\Phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Una base ortonormal particular del espacio bipartito de dos qubits está dada por los estados de Bell y existe un conjunto especial de estados ρ_{BD} que son diagonales en esta base:

Los estados diagonales de Bell son una mezcla de estados de Bell que pueden escribirse en la forma

$$\rho_{BD} = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1}_4 + \sum_i r_i \sigma_i \otimes \sigma_i\right). \tag{2.20}$$

Es decir igualando a_i y b_i a 0 en la expresión 2.15

El vector $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ se denomina vector de correlación y está dado, como ya se mencionó, por

$$r_i = \mathrm{Tr}(\rho \sigma_i \otimes \sigma_i). \tag{2.21}$$

Esta clase de estados será retomada a lo largo de la tesis. Particularmente, en 4.5 se expondrá una representación geométrica de ella.

2.4 Medidas

2.4.1 Medidas proyectivas

A cada propiedad física, como lo es la energía, la posición o el momento, se le asocia un operador lineal hermítico que actúa sobre el espacio de estados $\mathcal{H}$: el observable. Los únicos resultados posibles para una medida de cierta cantidad física son los autovalores del observable correspondiente.

Existe una medida convencional en mecánica cuántica, comúnmente referida como medida de von Neumann, que se define a partir de una colección de proyectores. Dado un observable O, como se trata de un operador hermítico se sabe que tiene una descomposición espectral de la forma

$$O = \sum_i \lambda_i \Pi_i, \tag{2.22}$$

donde Π_i son proyectores, es decir $\Pi_i \Pi_j = \Pi_i \delta_{ij}$, y los λ_i son únicos. Esto significa que los Π_i no son necesariamente de rango 1, y en tal caso pueden expresarse como una suma de proyectores de rango 1, es decir que si el rango de Π_i es k, entonces

$$\Pi_i = \sum_j \left|\phi_j^i\right\rangle \left\langle\phi_j^i\right|. \tag{2.23}$$

Medir un observable O en un estado $|\psi\rangle$ da un resultado que puede ser etiquetado por λ_i, y se piensa en la medida como una proyección en uno de los Π_i.

La probabilidad de obtener λ_i es

$$\Pr(i) = \langle\psi| \Pi_i |\psi\rangle . \tag{2.24}$$

Si en lugar de un estado puro se tiene una mezcla, entonces la probabilidad es

$$\Pr(i) = \mathrm{Tr}(\Pi_i \rho). \tag{2.25}$$

Y el estado del sistema luego de realizar la medida es

$$|\psi\rangle \to \frac{\Pi_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| \Pi_i |\psi\rangle}}. \tag{2.26}$$

$$\rho \to \frac{\Pi_i \rho \Pi_i}{\mathrm{Tr}(\Pi_i \rho)}, \tag{2.27}$$

dado que se obtuvo el resultado i en la medida.

2.4.2 Medidas generalizadas

La descripción anterior de medidas resulta ser muy restrictiva. Existen medidas que pueden ser realizadas sobre un sistema y que no pueden ser descritas en este formalismo. Se trata de las medidas no proyectivas, medidas generalizadas o *positive-operator valued measure* (POVM).

Una medida generalizada en mecánica cuántica se describe como una colección de operadores positivos $E_i \geq 0$ que satisfacen $\sum_i E_i = \mathbb{1}$. Suponiendo que se tiene una medida $G = \{E_i\}$, cada E_i se encuentra asociado con un resultado de la medida y, debido a su positividad, tiene la descomposición $E_i = G_i^\dagger G_i$. Para un estado ρ, la probabilidad de obtener el resultado asociado con E_i es

$$\Pr(i) = \mathrm{Tr}(E_i \rho). \tag{2.28}$$

Y el estado luego de haber medido y obtenido el resultado i es

$$\rho \to \frac{G_i \rho G_i^\dagger}{\mathrm{Tr}(E_i \rho)}. \tag{2.29}$$

De aquí se deduce que las medidas proyectivas son un caso especial de POVM, que ocurre cuando $G_i = G_i^\dagger = \Pi_i$, y en esta situación $E_i = \Pi_i$ y $\Pi_i^\dagger \Pi_i = \Pi_i$.

La diferencia principal entre medidas proyectivas y los elementos POVM, es que los POVM no tienen por qué ser ortogonales. Mientras $\Pi_i \Pi_j = \Pi_i \delta_{ij}$, la misma relación de ortogonalidad no existe para G_i y E_i.

3. Sistemas cuánticos abiertos

3.1 Definición

En teoría, es posible estudiar un sistema cuántico S sin lidiar con la perturbación potencial inducida por el ambiente. En este caso, la evolución del sistema se asume unitaria, por lo que se encuentra descrita por la ecuación de Schrödinger o la de von Neumann. Sin embargo, en la práctica es inevitable considerar los efectos debidos a la interacción del sistema con su entorno.

Un sistema cuántico cerrado, al que se le asocia un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y que se describe por medio de un hamiltoniano $\mathrm{H}(t)$, evoluciona según la ecuación de von Neumann:

$$\dot{\rho}(t) = -i\left[\mathrm{H}(t), \rho(t)\right], \tag{3.1}$$

donde $\rho(t)$ es su operador densidad en el tiempo t, en la representación de Schrödinger.

Para sistemas cerrados la evolución de ρ puede escribirse en términos de un operador unitario $U(t)$:

$$\rho(t) = U(t)\rho U^{\dagger}(t). \tag{3.2}$$

Las dinámicas unitarias son reversibles, la irreversibilidad surge con la presencia de un ambiente externo influyendo en la evolución del sistema. En tales casos, suele no ser posible la representación de la dinámica del sistema por medio de un operador unitario que actúe solamente sobre S, por lo que que el sistema deja de poseer una evolución determinística: se dice que se está trabajando con un sistema abierto.

En la teoría de sistemas cuánticos abiertos se asume que el ambiente, incluso conteniendo una gran cantidad de grados de libertad, puede ser descrito como un sistema cuántico, y por lo tanto puede ser representado en un espacio de Hilbert. Entonces, es admisible considerar un sistema abierto S como parte de un sistema cerrado más grande constituído por él mismo y un ambiente E con el que interactúa. El espacio de Hilbert del sistema total es el producto tensorial $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$, donde $\mathcal{H}_S$ representa el espacio de Hilbert asociado al sistema S y $\mathcal{H}_E$ el espacio asociado al entorno. Los estados del espacio total están formados por combinaciones lineales de estados producto

$$|\psi\rangle = |\psi_S\rangle \otimes |\psi_E\rangle, \tag{3.3}$$

y la evolución del sistema total se encuentra generada por el hamiltoniano

$$H = H_S \otimes \mathbb{1} + H_I + \mathbb{1} \otimes H_E, \tag{3.4}$$

donde H_I describe la interacción entre S y E.

3.2 Operaciones cuánticas y operadores de Kraus

3.2.1 Representación de Kraus

Cuando se desea estudiar la evolución de un sistema cuántico en el caso más general en el que se encuentre evolucionando debido a la presencia de un ambiente, ésta puede representarse por un mapa $\mathcal{M}$ que relaciona la matriz densidad inicial $\rho(0)$ con la evolucionada $\rho(t) = \mathcal{M}(\rho(0))$.

Un mapa u operación cuántica es simplemente un formalismo matemático empleado para describir un vasto número de transformaciones a las cuales pueden estar sujetos los sistemas cuánticos.

El mapa $\mathcal{M} : \rho \to \rho'$ es un operador que actúa sobre otro, por lo que se lo denomina superoperador. Este superoperador debe cumplir ciertas propiedades específicas para mantener las características que hacen de una matriz densidad una descripción válida de un estado físico. Por lo tanto, se pide que el mapa $\mathcal{M}$ cumpla con los requisitos que se enumeran a continuación.

1. $\mathcal{M}$ debe ser lineal y convexo, es decir

$$\mathcal{M}\left(\sum_i p_i \rho_i\right) = \sum_i p_i \mathcal{M}(\rho_i) \qquad \forall p_i \geq 0. \tag{3.5}$$

   Si bien un mapa no lineal podría llevar una matriz densidad en otra, esta propiedad permite que se mantenga la interpretación de la matriz densidad como un *ensemble*.

   Suponiendo que se prepara el estado ρ_i con probabilidad p_i, el estado final será $M(\rho_i)$ con probabilidad p_i. Por lo tanto en el promedio del *ensemble*, el estado final se encuentra descrito por el operador densidad $\sum_i p_i \rho_i$ y su imagen bajo el mapa $\mathcal{M}$ es $\mathcal{M}\left(\sum_i p_i \rho_i\right)$

2. Debe preservar la traza y el carácter hermítico de ρ:

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{M}(\rho)) = 1 \tag{3.6}$$

$$(\mathcal{M}(\rho))^\dagger = \mathcal{M}(\rho) \tag{3.7}$$

La traza de una matriz densidad describe la suma de las probablidades de todos los estados posibles en el *ensemble*, y la hermiticidad de una matriz implica la pertenencia de sus autovalores al conjunto de los reales. Ambas propiedades son fundamentales para que ρ represente efectivamente un estado físico.

3. $\mathcal{M}$ debe ser completamente positivo. Esto quiere decir que para toda extensión trivial de $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M} \otimes \mathbb{1} : \mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_E \ni \rho_i \mapsto \rho_f \in \mathcal{H}_f \otimes \mathcal{H}_E, \tag{3.8}$$

$\mathcal{M}$ debe ser positivo, es decir mapear operadores ρ_i positivos en operadores ρ_f también positivos, para toda dimensión de la extensión $\mathcal{H}_E$.

Siempre es posible ver el sistema S como un subsistema de un sistema mayor, por lo que $\mathcal{M}$ puede ser extendido al sistema mayor multiplicándolo por el operador identidad $\mathcal{M} \otimes \mathbb{1}$. La imagen bajo este mapa debe ser un operador densidad, por lo tanto semidefinido positivo.

Para proceder a tener un enfoque menos abstracto sobre las operaciones cuánticas, es imprescindible enunciar el teorema de la representación de Kraus.

Teorema 3.2.1. Teorema de Kraus

Todo operador $\rho \to \mathcal{M}(\rho)$ en un espacio de dimensiones $d_S \times d_N$, con $d_N \geq d_S$, que obedece a las propiedades 1-3 , puede ser escrito en la forma:

$$\mathcal{M}(\rho) = \sum_{k=1}^{K} M_k \rho M_k^\dagger \qquad \text{con} \quad \sum_{k=1}^{K} M_k^\dagger M_k = \mathbb{1}, \tag{3.9}$$

donde M_k son llamados operadores de Kraus, con $K \leq d_S \times d_N$ siendo el número de Kraus. La evolución del sistema puede ser descrita usando un máximo de $d_S \times d_N$ operadores de Kraus.

Con el objetivo de explicar este teorema se considera que un sistema total, conformado por un subsistema S con espacio de Hilbert asociado $\mathcal{H}_S$ y su ambiente E con espacio de Hilbert $\mathcal{H}_E$, se encuentra sujeto a una evolución unitaria U_{SE}. Se asume que el estado inicial del sistema total se encuentra dado por el estado producto, no correlacionado,

$$\rho = \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_E, \tag{3.10}$$

donde los subíndices S y E hacen referencia a $\mathcal{H}_S$ y $\mathcal{H}_E$ respectivamente.

Entonces, por tratarse el sistema total de un sistema cerrado, la evolución de ρ queda dada por 3.2:

$$\rho(t) = U_{SE}(\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_E)U_{SE}^\dagger. \tag{3.11}$$

Generalmente, el interés reside en la caracterización del sistema S, por lo que se desea contar con el estado evolucionado $\rho_S(t)$. Esto útlimo se logra, como ya se mencionó, aplicando la traza parcial respecto a E, de donde se obtiene:

$$\begin{aligned}\rho_S(t) = \mathrm{Tr}_E\rho(t) &= \sum_k \langle k|U_{SE}(\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_E)U_{SE}^\dagger|k\rangle \\ &= \sum_k \langle k|U_{SE}|0\rangle\rho_S(0)\langle 0|_E)U_{SE}^\dagger|k\rangle,\end{aligned} \tag{3.12}$$

siendo $\{|k\rangle\}$ una base ortonormal de H_E.

Es posible definir los operadores de Kraus M_k, que actúan solo sobre el espacio $\mathcal{H}_S$, como

$$M_k = \langle k|U_{SE}|0\rangle = \mathrm{Tr}_E\{|0\rangle\langle k|U_{SE}\}. \tag{3.13}$$

Entonces la evolución de la matriz densidad del sistema S queda dada por

$$\rho_S(t) = \mathcal{M}(\rho_S(0)) = \sum_k M_k\rho_S(0)M_k^\dagger. \tag{3.14}$$

Y como U_{SB} es unitario, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_k M_k^\dagger M_k &= \sum_k \langle 0|U_{SB}^\dagger|k\rangle\langle k|U_{SB}|0\rangle \\ &= \langle 0|U_{SB}^\dagger(\sum_k |k\rangle\langle k|)U_{SB}|0\rangle = \mathbb{1}_S.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Se dice que 3.14 es la representación de Kraus del superoperador $\mathcal{M}$.

Es necesario destacar que la representación de Kraus no es única, ya que la elección del conjunto $\{|k\rangle\}$ es arbitraria. Habiendo elegido otro conjunto $\{|j\rangle\}$, se habría llegado a una suma diferente, pero que igualmente describiría a $\rho_S(t)$.

3.2.2 Canales cuánticos y su representación de Kraus

Con el fin de comprender con mayor profundidad la utilidad de la representación de Kraus, se presentan algunos ejemplos de sistemas cuánticos abiertos cuya evolución puede ser descrita por medio de los operadores de Kaus.

Canales *bit flip*, *phase flip* y *bit-phase flip*

En el contexto de computación cuántica, una operación cuántica se denomina canal cuántico; por lo tanto, en lo que prosigue, se utilizarán ambos términos indistintamente.

Aquí se explican tres errores comunes que pueden ocurrir en computación cuántica y los canales cuánticos que tienen asociados.

- El canal *bit flip* es un modelo de ruido o decoherencia para un solo qubit. Su acción es la de cambiar el qubit enviado a través del canal, con probabilidad p; o dejarlo invariante, con probabilidad $(1-p)$. Su contraparte clásica es el error más encontrado en computación clásica, donde un bit puede ser cambiado $(0 \leftrightarrows 1)$ debido a la presencia de ruido aleatorio.

  Bajo la acción de este mapa cuántico, el eje x de la esfera de Bloch se mantiene intacto, mientras el plano xy se comprime uniformemente en un factor de $(1-2p)$.

  Tomando la base ortonormal para un qubit $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, el error de *bit flip*, que ocurre con probabilidad p en el canal *bit flip*, tiene la siguiente acción sobre sus estados:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\to |1\rangle \\ |1\rangle &\to |0\rangle \end{aligned} \tag{3.16}$$

  El error de *bit flip* tansforma entonces el estado $|\psi\rangle$ en $|\psi\rangle \to \sigma_1|\psi\rangle$, siendo σ_1 la matriz de Pauli definida en 2.2.2.

  En consecuencia, si el estado de entrada al canal es ρ, el estado a la salida está dado por

$$\mathcal{M}_{bf}(\rho) = p\sigma_1\rho\sigma_1 + (1-p)\rho. \tag{3.17}$$

  Los operadores de Kraus correspondientes son dos:

$$M_1^{bf} = \sqrt{1-p}\mathbb{1}_2 \quad \text{y} \quad M_2^{bf} = \sqrt{p}\mathbb{1}_2. \tag{3.18}$$

  Y se verifica $\sum_{k=1}^{2} M_k^{bf\dagger} M_K^{bf} = \mathbb{1}_2$.

  Se destaca que la representación de Kraus queda igualmente dada si se sustituye p por $p'/2$.

- El canal *phase flip* se encuentra asociado a un tipo de error que solamente ocurre en el mundo cuántico, y que consiste en un cambio de fase de π en el vector de base $|1\rangle$:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\to |0\rangle \\ |1\rangle &\to -|1\rangle \end{aligned} \tag{3.19}$$

  Un estado $|\psi\rangle$ sometido a este error se transforma en $|\psi\rangle \to \sigma_2|\psi\rangle$.

  Este mapa comprime el plano xy de la esfera de bloch en un factor de $(1-2p)$, mientras que deja el eje z sin variaciones.

  Un estado ρ que pasa por el canal de *phase flip* sufre tal error con probabilidad p, es decir que su estado final queda dado por

$$\mathcal{M}_{pf}(\rho) = p\sigma_3\rho\sigma_3 + (1-p)\rho. \tag{3.20}$$

Los operadores de Kraus correspondientes son

$$M_1^{pf} = \sqrt{1 - \frac{p'}{2}}\mathbb{1}_2 \quad \text{y} \quad M_2^{pf} = \sqrt{\frac{p'}{2}}\mathbb{1}_2. \tag{3.21}$$

- Por último, el error de *bit-phase flip* corresponde al caso en el que los dos errores anteriores ocurran simultáneamente, como su nombre bien lo indica. Este tipo de error convierte los estados de la base en

$$\begin{aligned} |0\rangle &\to i|1\rangle \\ |1\rangle &\to -i|0\rangle \end{aligned} \tag{3.22}$$

Un estado $|\psi\rangle$ sometido al error de *bit-phase flip* pasa a ser $|\psi\rangle \to \sigma_3|\psi\rangle$. Un estado ρ enviado a través del canal *phase flip* sufre tal error con probabilidad p, es decir que su estado final queda dado por

$$\mathcal{M}_{bpf}(\rho) = p\sigma_2\rho\sigma_2 + (1-p)\rho. \tag{3.23}$$

Los operadores de Kraus correspondientes son

$$M_1^{bf} = \sqrt{1 - \frac{p'}{2}}\mathbb{1}_2 \quad \text{y} \quad M_2^{bf} = \sqrt{\frac{p'}{2}}\mathbb{1}_2 \tag{3.24}$$

Canal *Depolarizing*

El canal *depolarizing* describe la posibilidad de que ocurran todos lo errores precedentes con igual probabilidad $p/3$. Si ocurre un error, el estado $|\psi\rangle$ evoluciona a un *ensemble* de los estados $\sigma_1|\psi\rangle$, $\sigma_2|\psi\rangle$ y $\sigma_3|\psi\rangle$.

Bajo este canal, la polarización del spin se reduce en un factor de $(1 - \frac{4}{3}p)$, de donde surge el nombre que se le atribuye.

A continuación, se hace explícita para este canal la deducción de los operadores de Kraus. Como ya se sabe, un canal se puede representar en función de un operador unitario U_{SE} que actúa sobre $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$, donde $\mathcal{H}_S$ tiene dimensión 4. Un sistema cerrado, inicialmente en el estado producto $|\psi\rangle_S \otimes |0\rangle_E$, evoluciona de la forma

$$\begin{aligned} &U_{SE}(|\psi\rangle_S \otimes |0\rangle_E) = \\ &\sqrt{1-p}(|\psi\rangle \otimes |0\rangle_E) + \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\sigma_1|\psi\rangle_S \otimes |1\rangle_E + \sigma_2|\psi\rangle_S \otimes |2\rangle_E + \sigma_3|\psi\rangle_S \otimes |3\rangle_E\right). \end{aligned} \tag{3.25}$$

El ambiente evoluciona a uno de cuatro estados mutuamente ortogonales, es decir que midiendo solamente el ambiente en la base $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ es posible conocer el tipo de error ocurrido.

Ahora bien, para hallar una representación de Kraus del canal *depolarizing* es necesario evaluar la traza parcial respecto al ambiente. Entonces, tomando la base $\{|k\rangle_E\}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$, los operadores de Kraus tienen la forma

$$M_k =_E \langle k|U_{SE}|0\rangle_E \tag{3.26}$$

En conclusión, se tienen cuatro operadores de Kraus dados por

$$M_0^d = \sqrt{1-p}\mathbb{1}, \quad M_1^d = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_1, \quad M_2^d = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_2, \quad M_3^d = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_3 \tag{3.27}$$

Por lo tanto, un estado ρ enviado a través del canal *depolarizing* evoluciona de forma tal que su estado final será

$$\mathcal{M}_d(\rho) = \frac{p}{3}(\sigma_1\rho\sigma_1 + \sigma_2\rho\sigma_2 + \sigma_3\rho\sigma_3) + (1-p)\rho. \tag{3.28}$$

Alternativamente, se puede ver el canal *depolarizing* como una operación que deja un qubit sin variación con cierta probabilidad $(1-q)$ o reemplaza su estado por el estado completamente mezclado $\mathbb{1}/2$ con probabilidad q, donde $q = (4/3)p$.

Canal *phase damping*

El canal de *phase damping* es una de las principales fuentes de decoherencia en sistemas cuánticos abiertos, es decir que actúa sobre un estado suprimiendo los términos fuera de la diagonal y dejando los de la diagonal sin cambios. Describe cierto tipo de procesos en los que el sistema interactúa débilmente con una gran cantidad de pequeños subsistemas que componen su ambiente. La acción combinada de todas las interacciones con los subsistemas tiene un efecto sobre el sistemas, pero no lo suficientemente importante como para cambiar su energía.

Siendo S un sistema bajo la acción del canal de *phase damping*, se tiene una evolución unitaria descrita por

$$\begin{aligned} |0\rangle_S|0\rangle_E &\to \sqrt{1-p}|0\rangle_S|0\rangle_E + \sqrt{p}|0\rangle_S|1\rangle_E \\ |1\rangle_S|0\rangle_E &\to \sqrt{1-p}|1\rangle_S|0\rangle_E + \sqrt{p}|1\rangle_S|2\rangle_E \end{aligned} \tag{3.29}$$

En este caso el qubit S no presenta una transición de estado, sin embargo el entorno pasa, con probabilidad p, del estado $|0\rangle_S$ al estado $|1\rangle_S$, y al estado $|2\rangle_S$ si estaba en $|1\rangle_S$.

Para obtener los operadores de Kraus, nuevamente se evalúa la traza parcial respecto a $\mathcal{H}_E$ en la base $\{|0\rangle_E, |1\rangle_E, |2\rangle_E\}$, obteniendo:

$$M_0^{pd} = \sqrt{1-p}\mathbb{1}, \quad M_1^{pd} = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2^{pd} = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

Canal *Amplitude Damping*

El canal *amplitude damping* modeliza el decaimiento de un estado excitado de un átomo de dos niveles debido a la emisión espontánea de un fotón, por ejemplo cuando un sistema atómico interactúa con las fluctuaciones del vacío.

Sea $|0\rangle_S$ el estado atómico fundamental y $|1\rangle_S$ el estado excitado, luego de transcurrido cierto tiempo existe una probabilidad p de que el estado excitado haya decaído al estado fundamental y que se haya emitido un fotón, por lo que el entorno habría realizado una transición del estado $|0\rangle_E$ (sin fotones) al estado $|1\rangle_E$ (un fotón).

La transformación unitaria que actúa sobre el sistema (átomo) y el ambiente y describe este tipo de evolución se puede expresar como

$$\begin{aligned} |0\rangle_S|0\rangle_E &\to |0\rangle_S|0\rangle_E \\ |1\rangle_S|0\rangle_E &\to \sqrt{1-p}|1\rangle_S|0\rangle_E + \sqrt{p}|0\rangle_S|1\rangle_E \end{aligned} \tag{3.31}$$

Tomando la traza parcial respecto al ambiente en la base $\{|0\rangle_E, |1\rangle_E\}$, se obtienen los siguientes operadores de Kraus:

$$M_0^{ad} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad M_1^{ad} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

El operador M_1^{ad} induce el decaimiento de $|1\rangle_S$ a $|0\rangle_S$, mientras que M_0^{ad} describe la evolución del estado cuando este salto no ocurre.

3.3 Ecuación Maestra

Como ya fue expuesto, los sistemas abiertos en general no poseen una evolución unitaria como aquellos que se encuentran aislados, es decir que en estos casos la ecuación de von Neumann para la evolución de la matriz densidad 3.1 ya no es válida. En consecuencia, surge la necesidad de hallar un ecuación diferencial similar que describa la dinámica del operador reducido ρ_S asociado al sistema abierto. Este tipo de ecuación se denomina ecuación maestra y se trata de una descripción equivalente a la aportada por los operadores de Kraus para la evolución de un sistema.

Teniendo en cuenta que un sistema y su ambiente forman un sistema total cerrado, la matriz densidad total evoluciona unitariamente y se tiene que el operador densidad reducido es

$$\rho_S(t) = \mathrm{Tr}_E\left(U(t)\rho(0)U^\dagger(t)\right) \tag{3.33}$$

Ahora, es posible aplicar la ecuación de von Neumann y luego tomar su traza parcial respecto al ambiente para obtener la ecuación de movimiento del operador densidad reducido ρ_S:

$$\dot{\rho}_S(t) = -\mathrm{Tr}_E[H(t), \rho(t)], \tag{3.34}$$

donde $H(t)$ y $\rho(t)$ corresponden al hamiltoniano y al operador densidad del sistema total.

Para derivar una ecuación maestra que solo dependa de las variables del sistema reducido, generalmente es necesario hacer suposiciones. Existen diferentes ecuaciones de movimiento para el operador densidad reducido que aproximan las ecuaciones dinámicas exactas de arriba. Entre ellas se destaca aquella que se obtiene al despreciar efectos de memoria y suponer una interacción débil entre el sistema y el ambiente: la ecuación maestra markoviana.

3.3.1 Dinámica markoviana

Si la evolución del operador densidad $\rho(t)$ está gobernada por una ecuación diferencial en t, entonces esto significa que $\rho(t + dt)$ está completamente determinado por $\rho(t)$. En general, el operador densidad $\rho(t + dt)$ puede depender no solo de $\rho(t)$, sino también de ρ en tiempos anteriores, ya que el ambiente es un reservorio que podría servir como memoria del pasado del sistema. Sin embargo, si el tamaño del entorno es mucho mayor que el del sistema, y si el tiempo característico en el que las funciones de correlación del reservorio decaen τ_B (en otras palabras el tiempo en el que el ambiente olvida) es mucho menor que la escala temporal en la que el sistema varía apreciablemente (o tiempo de relajación τ_R), es posible despreciar los efectos de memoria en la dinámica del sistema reducido. Esta es la aproximación de Markov, para la cual se desprecian la correlaciones a corto plazo entre el sistema y el ambiente.

Por otro lado, es posible asumir que la interacción entre el sistema y el ambiente es suficientemente débil. Esta es la aproximación de Born, y cuando se satisface junto a la aproximación de Markov se dice que el sistema es markoviano.

Las condiciones de aproximación mencionadas pueden formalizarse en función de los mapas dinámicos que describen el proceso markoviano por medio de la propiedad

$$\mathcal{M}(t_1)\mathcal{M}(t_2) = \mathcal{M}(t_1 + t_2), \quad \text{para} \quad t_1, t_2 \geq 0. \tag{3.35}$$

Esta propiedad es una propiedad de semigrupos.

Un semigrupo cuántico dinámico es una familia continua de mapas dinámicos de un parámetro que stisfacen la condición anterior.

Dado un semigrupo cuántico dinámico existe, bajo ciertas condiciones, un mapa lineal $\mathcal{L}$ que es el generador del semigrupo y permite su representación en la forma exponencial

$$\mathcal{M}(t) = \exp(\mathcal{L}t). \tag{3.36}$$

De esta representación se deriva una ecuación diferencial de primer orden para la matriz reducida del sistema abierto,

$$\dot{\rho}_s(t) = \mathcal{L}\rho_S(t), \tag{3.37}$$

donde $\mathcal{L}$ es un superoperador.

La anterior se trata de la ecuación maestra markoviana.
Teorema 3.3.1. Una ecuación diferencial es una ecuación maestra markoviana si y solo si puede ser escrita como

$$\mathcal{L}\rho_S(t) = -i[H, \rho_S] + \sum_{k=1}^{N^2-1} \mathcal{L}_k\rho_S, \tag{3.38}$$

con

$$\mathcal{L}_k\rho_S = \gamma_k \left(J_k\rho_S J_k^\dagger - \frac{1}{2} J_k^\dagger J_k\rho_S - \frac{1}{2}\rho_S J_k^\dagger J_k \right). \tag{3.39}$$

Siendo N la dimensión del espacio de Hilbert del sistema $\mathcal{H}_S$ y $\gamma_k \geq 0$.

El primer término a la derecha en 3.38 describe la evolución unitaria, generada por el hamiltoniano del sistema H, mientras que la segunda parte se debe al acoplamiento con el entorno caracterizado por los operadores de salto adimensionados J_k. Las cantidades positivas γ_k tienen la dimensión del inverso de un tiempo, se encuentran dadas en términos de ciertas funciones de correlación del ambiente y juegan el rol de tasas de relajación para los diferentes modos de decaimiento del sistema abierto.

La forma explícita de los operadores de salto para un acoplamiento específico con el ambiente, suele derivarse de una dinámica hamiltoniana microscópica que incluye al ambiente; y la elección de los operadores de salto no es única.

3.3.2 Dinámica no markoviana

Las aproximaciones de Born y Markov no siempre son válidas. Existen sistemas, por ejemplo, que interactúan fuertemente con el ambiente, para los que la aproximación de Born falla. En otros casos, la estructura de los modos del ambientes induce correlaciones entre el sistema y él que invalidan la aproximación de Markov.

Los sistemas abiertos no markovianos se caracterizan principalmente por exhibir un flujo de información tanto del sistema al ambiente como del ambiente de vuelta al

sistema, y los métodos para su estudio dependen fuertemente del sistema físico dado y del aspecto específico de la dinámica en consideración. Algunos modelos pueden llevarse a soluciones exactas, mientras que otros necesitan de técnicas alternativas que llevan a ecuaciones maestras no markovianas, las cuales pueden ser resueltas analítica o numéricamente

En las próximas secciones se presentan dos ejemplos de evolución de sistemas de dos qubits: uno en el que fueron consideradas las aproximaciones de Born-Markov y otro para el que se determinó su dinámica no markoviana.

3.3.3 Ejemplos

En el capítulo 4, se describirá el comportamiento de correlaciones cuánticas y clásicas para dos tipos de sistemas cuánticos abiertos de dos qubits, utilizando tanto el enfoque markoviano como el no markoviano. Aquí se presenta una breve descripción de estos sistemas y su evolución, sin entrar en detalles respecto a los métodos de obtención y resolución de las ecuaciones maestras.

Dos qubits interactuando con un reservorio bosónico común

Se consideran dos qubits idénticos A y B, que podrían ser átomos de dos niveles, en posiciones fijas $\vec{r_i}$ y separados por una distancia $r_{ij} = |\vec{r_i} - \vec{r_i}|$, mucho mayor que el diámetro atómico, interactuando con un reservorio bosónico común a temperatura cero.

Cada qubit posee un estado fundamental $|g_i\rangle$ y un estado excitado $|e_i\rangle$ $(i = A, B)$, separados por una frecuencia de transición ω_0. Tomando esta notación, la base computacional para el sistema de dos qubits queda expresada por $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, con

$$|00\rangle = |g_A\rangle \otimes |g_B\rangle, \quad |01\rangle = |g_A\rangle \otimes |e_B\rangle, \quad |10\rangle = |e_A\rangle \otimes |g_B\rangle \text{ y } |11\rangle = |e_A\rangle \otimes |e_B\rangle \tag{3.40}$$

El Hamiltoniano del sistema se encuentra dado por $H = H_0 + H_I$ y en la aproximación de onda rotante se tiene

$$H_0 = \omega_0(\sigma_+^A\sigma_-^A + \sigma_+^B\sigma_-^B) + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k, \tag{3.41}$$

$$H_I = (\sigma_+^A + \sigma_+^B)\sum_k g_k a_k + \text{c.h.}, \tag{3.42}$$

donde $\sigma_+^i = |e_i\rangle\langle g_i|$ y $\sigma_-^i = |g_i\rangle\langle e_i|$ son los operadores de subida y bajada para el qubit i, a_k,$a_k^\dagger$, ω_k y g_k son los operadores de creación y aniquilación, la frecuencia y la constante de acoplamiento del modo k del campo, respectivamente.

En [21] se resuelve este sistema utilizando las aproximaciones de Born y Markov. La dinámica está dada por la ecuación maestra markoviana del operador densidad del sistema, que en el límite $\omega_0 t \gg 1$, tiene la forma

$$\begin{aligned}\dot{\rho}(t) = &- i\omega_0([\sigma_+^A\sigma_-^A + \sigma_+^B\sigma_-^B, \rho(t)]) - i\sum_{i\neq j}\Omega_{ij}[\sigma_+^i\sigma_-^j, \rho(t)] \\ &- \frac{1}{2}\sum_{i,j}\gamma_{i,j}\left([\rho(t)\sigma_+^i, \sigma_-^j] + [\sigma_+^i, \sigma_-^j\rho(t)]\right),\end{aligned} \tag{3.43}$$

donde $\gamma_{ii} = \gamma_0$ $(i = 1, 2)$ es la tasa de decaimiento espontáneo de los átomos, causado por su acoplamiento directo con el campo vacío. Los términos en la ecuación maestra que dependen de γ_{ij} y Ω_{ij} $(i \neq j)$ son los llamados términos colectivos y determinan las propiedades colectivas del sistema. γ_{ij} y Ω_{ij} $(i \neq j)$ dependen de la distancia entre los átomos y describen el amortiguamiento colectivo y la interacción dipolo-dipolo, y están definidos por

$$\gamma_{12} = \frac{3}{2}\left(\frac{\text{sen}(kr_{ij})}{kr_{ij}} + \frac{\cos(kr_{ij})}{kr_{ij}^2} - \frac{\text{sen}(kr_{ij})}{kr_{ij}^3}\right), \tag{3.44}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{3}{2}\left(-\frac{\cos(kr_{ij})}{kr_{ij}} + \frac{\text{sen}(kr_{ij})}{kr_{ij}^2} + \frac{\cos(kr_{ij})}{kr_{ij}^3}\right), \tag{3.45}$$

siendo $k = \omega_0/c$. Se asume que los momentos dipolares atómicos son paralelos y se encuentran polarizados en la dirección paralela al eje interatómico.

Se puede trabajar con estados X en la base $\{|g\rangle, |s\rangle, |a\rangle, |e\rangle\}$ generada por los estados de Dicke:

$$\begin{aligned}|g\rangle &= |g_1\rangle \otimes |g_2\rangle \\ |s\rangle &= 2^{-1/2}\left(|e_1\rangle \otimes |g_2\rangle + |g_1\rangle \otimes |e_2\rangle\right) \\ |a\rangle &= 2^{-1/2}\left(|e_1\rangle \otimes |g_2\rangle - |g_1\rangle \otimes |e_2\rangle\right) \\ |e\rangle &= |e_1\rangle \otimes |e_2\rangle\end{aligned} \tag{3.46}$$

Ésta se llama la base colectiva, y en ella la matriz densidad del sistema queda de la forma [22]

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{ss} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{ee} & \rho_{eg} & 0 \\ 0 & \rho_{eg}^* & \rho_{gg} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{aa} \end{pmatrix}, \tag{3.47}$$

Las ecuaciones de movimiento de los elementos de la matriz densidad se derivan de

la ecuación maestra 3.43:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{ss}(t) &= (\gamma_0 + \gamma_{12})(\rho_{ee}(t) - \rho_{ss}(t)) \\
\dot{\rho}_{ee}(t) &= -2\gamma_0 \rho_{ee}(t) \\
\dot{\rho}_{eg}(t) &= -\gamma_0 \rho_{ge}(t) \\
\dot{\rho}_{aa}(t) &= (\gamma_0 - \gamma_{12})(\rho_{ee}(t) - \rho_{aa}(t)) \\
\dot{\rho}_{gg}(t) &= 1 - \dot{\rho}_s s(t) - \dot{\rho}_{aa}(t) - \dot{\rho}_{ee}(t)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Este conjunto de ecuaciones se resuelve obteniéndose

$$\begin{aligned}
\rho_{ss}(t) &= \rho_{ss}(0)e^{-(\gamma_0+\gamma_{12})t} + \rho_{ee}(0)\frac{\gamma_0+\gamma_{12}}{\gamma_0-\gamma_{12}}\left(e^{(\gamma_0-\gamma_{12})t} - 1\right)e^{-2\gamma_0 t} \\
\rho_{ee}(t) &= \rho_{ee}(0)e^{-2\gamma_0 t} \\
\rho_{eg}(t) &= \sqrt{p(1-p)}e^{-\gamma_0 t} \\
\rho_{aa}(t) &= \rho_{aa}(0)e^{-(\gamma_0-\gamma_{12})t} + \rho_{ee}(0)\frac{\gamma_0-\gamma_{12}}{\gamma_0+\gamma_{12}}\left(e^{(\gamma_0+\gamma_{12})t} - 1\right)e^{-2\gamma_0 t} \\
\rho_{gg}(t) &= 1 - \rho_s s(t) - \rho_{aa}(t) - \rho_{ee}(t) \\
\rho_{sa} &= \rho_{sa}(0)e^{-(\gamma_0+2i\Omega_{12})t} \\
\rho_{ge} &= \rho_{ge}(0)e^{-\gamma_0 t}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

El sistema puede ser resuelto también sin hacer uso de las aproximaciones de Born y Markov. En [23] se deriva su solución, la cual será utilizada para el estudio de la dinámica no markoviana de este mismo sistema de dos qubits acoplados a un reservorio común a temperatura cero.

Dos qubits interactuando con reservorios bosónicos independientes

El otro sistema de interés consiste en el conformado por dos qubits idénticos A y B, independientes, cada uno interactuando localmente con su propio reservorio, R_A y R_B, a temperatura cero. Es decir, a diferencia del caso anterior, los dos subsistemas formados por un qubit y su reservorio no interactúan entre ellos.

Nuevamente, se considera que cada átomo posee un estado fundamental $|g_i\rangle$ y uno excitado $|e_i\rangle$, con frecuencia de transición ω_0. Además, se asume que inicialmente los qubits se encuentran entrelazados, y que cada qubit y su reservorio correspondiente están descorrelacionados.

En [16] se desarrolla un procedimiento para hallar la matriz reducida del sistema evolucionado a partir del conocimiento del operador densidad reducido de un solo qubit, sin recurrir a las aproximaciones de Born y Markov.

La dinámica del sistema compuesto por los dos átomos queda dada en la base computacional $\{|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle\}$ por:

$$\begin{aligned}
\rho_{11}(t) &= \rho_{11}(0)P_t^2 \\
\rho_{22}(t) &= \rho_{22}(0)P_t + \rho_{11}(0)P_t(1-P_t) \\
\rho_{33}(t) &= \rho_{33}(0)P_t + \rho_{11}(0)P_t(1-P_t) \\
\rho_{44}(t) &= 1 - \rho_{11}(t) - \rho_{22}(t) - \rho_{33}(t) \\
\rho_{12}(t) &= \rho_{12}(0)P_t^{3/2}, \quad \rho_{13}(t) = \rho_{13}(0)P_t^{3/2} \\
\rho_{14}(t) &= \rho_{14}(0)P_t, \quad \rho_{23}(t) = \rho_{23}(0)P_t \\
\rho_{24}(t) &= \sqrt{P_t}\,(\rho_{24}(0) + \rho_{13}(0)(1-P_t)) \\
\rho_{34}(t) &= \sqrt{P_t}\,(\rho_{34}(0) + \rho_{12}(0)(1-P_t))
\end{aligned} \tag{3.50}$$

con $\rho_{ij}(t) = \rho_{ji}^*(t)$.

La función del tiempo P_t es

$$P_t = e^{-\lambda t}\left(\cos\left(\frac{dt}{2}\right) + \frac{\lambda}{d}\sin\left(\frac{dt}{2}\right)\right)^2, \tag{3.51}$$

con $d = \sqrt{2\gamma_0\lambda - \lambda^2}$, donde λ define el ancho espectral del acoplamiento y se encuentra conectado con el tiempo de correlación del reservorio por medio de la relación $\tau_B \approx \lambda^{-1}$. Además, γ_0 representa la tasa de decaimiento de los átomos que se relaciona con el tiempo de relajación del sistema como $\gamma_0^{-1} \approx \tau_R$.

A partir de la solución exacta del sistema, se distinguen dos regímenes de acoplamiento. El régimen débil corresponde al caso en el que $\frac{\lambda}{\gamma_0} > 2$, es decir $\tau_R > 2\tau_B$, y la dinámica es esencialmente markoviana con un decaimiento exponencial controlado por γ_0. Por otro lado, el régimen de acoplamiento fuerte ocurre para $\frac{\lambda}{\gamma_0} \ll 2$, es decir $\tau_R \ll 2\tau_B$. Aquí los efectos no markovianos se vuelven relevantes.

4. Correlaciones

4.1 Entrelazamiento

El entrelazamiento es una de las características más sorprendentes de la mecánica cuántica que ocurre cuando los subsistemas de un sistema interactúan de tal forma que sus estados cuánticos no pueden ser descritos independientemente, exhibiendo correlaciones sin análogos clásicos. Tal fenómeno, al cual Einstein categorizó de "acción fantasmal a distancia", permite realizar cierta medida de una partícula e inmediatamente saber qué resultado se obtendría si se realizara la misma medida sobre otra partícula que se encuentra entrelazada con la primera, sin importar que tan distantes se encuentren.

En las últimas décadas, el entrelazamiento ha adquirido el estatus de un valioso recurso potencial para la comunicación y computación cuánticas. Explotando estados cuánticos entrelazados es posible realizar tareas que de otra forma resultarían imposibles o extremadamente difíciles por medio de la computación clásica.

4.1.1 Definiciones

Para establecer medidas del entrelazamiento se debe comenzar por explicitar cuándo un estado se encuentra entrelazado y cuándo no. Tomando tal dirección, en esta sección se define matemáticamente el concepto de entrelazamiento en el caso de estar tratando con sistemas puros compuestos por dos partes, para luego ampliarla a sistemas bipartitos que sean una mezcla.

Definición 4.1.1. Un estado puro bipartito $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ se dice que se encuentra entrelazado si y solamente si:

$$\forall |\phi_A\rangle \in \mathcal{H}_A, \forall |\phi_B\rangle \in \mathcal{H}_B, \tag{4.1}$$

$$|\psi\rangle \neq |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle. \tag{4.2}$$

De lo contrario, el estado se denomina separable.

A modo de ejemplo, consideremos el estado de Bell ya mencionado en 2.19 $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B)$. Si se lo intenta reescribir en la forma factorizada $|\phi\rangle_A|\chi\rangle_B$,

nos encontramos con que esto no es posible, sin importar la elección de $|\phi\rangle_A$ y $|\chi\rangle_B$. Tal forma producto implicaría que los qubits A y B poseen estados cuánticos definidos (en sus espacios de Hilbert individuales) independientes del otro qubit. En este caso, los dos qubits se encuentran entrelazados y ninguno tiene un estado propio.

Al trazar respecto a B para hallar ρ_A, se obtiene un múltiplo de la identidad:

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B(\left|\Phi^+\right\rangle\left\langle\Phi^+\right|) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_A. \tag{4.3}$$

Análogamente, $\rho_B = \frac{1}{2}\mathbb{1}_A$. Lo precedente implica que, si se mide en cualquier base, el resultado que se obtiene es completamente aleatorio. Sin embargo, existe una correlación perfecta entre los dos qubits: si al medir el qubit A se obtiene como resultado $|0\rangle_A$, entonces si se midiera el estado de B se obtendría con certeza $|0\rangle_B$. Se dice que el estado $|\Phi^+\rangle$, así como los otros estados de Bell se encuentran máximamente entrelazados.

Como ya fue descrito en el primer capítulo, en presencia de incertidumbre estadística clásica, el estado cuántico se describe por su matriz densidad ρ. Sin embargo, infinitos *ensembles* de estados se describen por el mismo operador densidad. Se dice que la mezcla ρ se encuentra entrelazada, si y solo si todos estos *ensembles* contienen al menos un estado entrelazado puro.

Ahora, es posible extender la definición recién dada al caso más general de un sistema bipartito representado por un operador densidad dado.

Definición 4.1.2. Un estado mezcla ρ, que vive en el espacio de operadores lineales que actúan sobre $\mathcal{H}$, se encuentra entrelazado si y solamente si toda descomposición de ρ en estados puros

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \tag{4.4}$$

con $p_j > 0$, contiene al menos un $|\psi_j\rangle$ no separable.

Es decir, un estado mezcla está entrelazado si no puede ser representado como una mezcla de estados puros no entrelazados.

En consecuencia, un estado mezcla bipartito ρ_{AB} se dice separable si puede ser escrito como

$$\rho_{sep} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i \tag{4.5}$$

donde ρ_A^i y ρ_B^i son *ensembles* arbitrarios de estados de los subsistemas A y B, y p_i es una distribución de probabilidad.

Vale destacar que para los estados mezcla decir que un estado sea separable ya no es sinónimo de decir que sea un estado producto, este útlimo de la forma $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$.

4.1.2 Enfoque operacional

En el capítulo anterior se introdujo el concepto de operaciones cuánticas junto a ciertos ejemplos. Ahora es necesario presentar un tipo de operaciones especiales, las operaciones locales en combinación con comunicación clásica (LOCC), necesarias a la hora de definir cuantificadores del entrelazamiento.

Suponiendo que se cuente con un sistema bipartito donde cada subsistema interactúa con su propio ambiente local e independiente, que haya sido preparado en un estado ρ_{AB}, y exigiendo que los estados iniciales de los ambientes sean puros, entonces el estado total del sistema más el ambiente es:

$$\rho = \rho_{AB} \otimes \left|E_0^A\right\rangle \left\langle E_0^A\right| \otimes \left|E_0^B\right\rangle \left\langle E_0^B\right| \tag{4.6}$$

Aplicando la evolución unitaria de Schrödinger para sistemas cerrados, se halla que el estado evolucionado del sistema total tiene la siguente expresión:

$$\left(U_A \otimes U_B\right) \rho \left(U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger\right), \tag{4.7}$$

donde U_A (U_B) es una transformación unitaria en $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{E_A}$ ($\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_{E_B}$), con $\mathcal{H}_i$ el espacio de Hilbert asociado al subsistema i y $\mathcal{H}_{E_i}$ el espacio de Hilbert asociado al ambiente del subsistema i.

Aplicando la traza parcial se obtiene la matriz densidad asociada al estado evolucionado del sistema bipartito AB. Expresada en la representación de Kraus, ésta queda igual a:

$$\mathcal{M}_{loc}(\rho_{AB}) = \sum_{i,j} \left(M_i^A \otimes M_j^B\right) \rho_{AB} \left(M_i^A \otimes M_j^B\right)^\dagger, \tag{4.8}$$

donde M_k^s ($s = A, B$) son los operadores de Kraus asociados a la evolución a la cual se encuentra sujeto cada qubit, es decir que denotan los efectos de decoherencia para un solo qubit. Y además verifican que $\sum_{ij} M_i^{A\dagger} M_i^A \otimes M_j^{B\,\dagger} M_j^B = \mathbb{1}$.

El tipo de operación recién descrita se dice local, lo cual es equivalente a pedir que bajo su acción los subsistemas evolucionen independientemente uno del otro. Tales operaciones se utilizarán más adelante para el estudio de dos qubits bajo diferentes canales cuánticos.

Un tipo de protocolo ampliamente utilizado en Teoría de la Información Cuántica es aquel que emplea operaciones locales y comunicación clásica (LOCC). Como lo indica su nombre, estos protocolos cuánticos comprenden operaciones locales, por ejemplo dos partes cada una realizando medidas generalizadas en su propio laboratorio, y además permiten la correlación entre ellas por medios clásicos. Las partes con

acceso a los diferentes subsistemas pueden intercambiar, por medio de comunicación clásica, información sobre las operaciones que realicen localmente y los resultados que obtengan. De esta manera, tienen la opción de realizar más operaciones locales condicionadas a la información que se les comunicó.

Un ejemplo simple de un protocolo LOCC se obtiene suponiendo que dos observadores, A y B, comparten uno de los dos estados de Bell $|\Phi^-\rangle$ y $|\Psi^-\rangle$, sin saber cuál, y pueden comunicarse por medio de cierto canal clásico, como puede ser el teléfono. Utilizando LOCC, es posible para A y B realizar una distinción entre estos dos estados. Una manera de conseguirlo ocurre cuando A mide su qubit y luego le comunica el resultado de su medida a B. Entonces, B ejecuta una medida sobre su propio qubit. Al conocer ambos resultados, A y B estarán seguros de qué estado poseían: por ejemplo, si tanto A como B miden 0, entonces el estado medido fue Φ^-.

En función de suma de operadores, las LOCC pueden expresarse como:

$$\mathcal{M}_{LOCC}(\rho_{AB}) = \sum_i \left(M_i^A \otimes M_i^B\right) \rho_{AB} \left(M_i^A \otimes M_i^B\right)^\dagger, \tag{4.9}$$

con $\sum_{ij} M_i^{A\dagger} M_i^A \otimes M_i^{B\dagger} M_i^B = \mathbb{1}$.

Bajo operaciones locales los subsistemas evolucionan independientemente, por lo que las posibles correlaciones previamente existentes no se ven afectadas. Un estado producto se mantiene producto y todo estado separable se mantiene separable.

Esto significa que no es posible crear correlaciones (ni clásicas, ni cuánticas) a partir de un estado separable y únicamente por medio de operaciones locales .

Sin embargo, un estado producto en general no se mantiene como un producto bajo la acción de una operación LOCC:

$$\mathcal{M}_{LOCC}(\rho_A \otimes \rho_B) = \sum_i \left(M_i^A \rho_A M_i^{A\dagger}\right) \otimes \left(M_i^B \rho_B M_i^{B\dagger}\right) = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i, \tag{4.10}$$

siendo $\rho_A^i = \frac{M_i^A \rho_1 M_i^{B\dagger}}{\mathrm{Tr}(M_i^A \rho_A M_i^{A\dagger})}$, $\rho_B^i = \frac{M_i^B \rho_B M_i^{B\dagger}}{\mathrm{Tr}(M_i^B \rho_B M_i^{B\dagger})}$ y $p_i = \mathrm{Tr}(M_i^A \rho_A M_i^{A\dagger})\mathrm{Tr}(M_i^B \rho_B M_i^{B\dagger})$.
De lo anterior se concluye que las correlaciones clásicas probabilísticas pueden variar bajo la acción de operaciones LOCC. Sin embargo, cualquier estado separable siempre se mantiene separable bajo este tipo de operaciones. Es decir, no se pueden crear estados entrelazados a partir de operaciones LOCC.

Considerando esta perspectiva operacional, Werner definió el entrelazamiento (1989) como aquellas correlaciones que no pueden ser creadas utilizando operaciones cuánticas locales en combinación con comunicación clásica [24]. Es precisamente en esta definición operacional del entrelazamiento que se basa el enfoque axiomático que se desarrolla a continuación.

4.1.3 Cuantificación del entrelazamiento

En esta etapa surge naturalmente la interrogante de cómo cuantificar el entrelazamiento y cómo determinar qué tan entrelazado se encuentra un sistema respecto a otro.

Una medida de entrelazamiento $E(\rho)$ es un mapa que va de las matrices densidad en los reales positivos:

$$\rho \to E(\rho) \in \mathbb{R} \tag{4.11}$$

Ahora, es razonable exigir que tal medida cumpla con ciertas propiedades fundamentales. Los postulados básicos requeridos para E son los siguientes [25]:

1. **Monótona**

   En concordancia con lo visto en la sección anterior, E no debe crecer bajo operaciones LOCC. Es decir que para toda operación $\mathcal{M}_{LOCC}$ y todo estado ρ:

   $$E(\mathcal{M}_{LOCC}(\rho)) \leq E(\rho). \tag{4.12}$$

   Esta primera condición implica que E es invariante bajo transformaciones locales unitarias (la medida no debe depender de la elección de base). Es decir, para un estado bipartito ρ_{AB}

   $$E((U_A \otimes U_B)\rho_{AB}(U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger)) = E(\rho_{AB}), \tag{4.13}$$

   para cualesquiera U_A y U_B operaciones locales unitarias que actúan sobre los subsistemas A y B respectivamente.

   La explicación de esta propiedad es sencilla: se debe a la posibilidad de invertir este tipo de operaciones, por lo que dos estados relacionados por medio de operaciones unitarias locales deben tener la misma cantidad de entrelazamiento para no violar la monotonicidad de E bajo protocolos LOCC. Más generalmente, se puede decir que la monotonicidad implica invariancia bajo operaciones reversibles.

2. **Nula para estados separables**

   El otro requerimiento evidente que refleja la definición matemática de entrelazamiento, es que se debe tener:

   $$E(\rho^{sep}) = 0 \tag{4.14}$$

   para todo ρ^{sep} estado separable de la forma 4.5.

A todas las medidas de entrelazamiento que cumplen con estas propiedades se les llama monótonos de entrelazamiento.

Existe cierta flexibilidad ante la definición de cuantificadores de correlaciones cuánticas. Si bien las propiedades anteriores son exigidas en la mayor parte de los casos, existen restricciones adicionales que no se cumplen tan estrictamente. A continuación se enumera algunas de ellas.

- **Convexa**

  Se puede requerir que E sea una función convexa. Es decir que para todo estado ρ y σ, y $p \in [0,1]$,

  $$pE(\rho) + (1-p)E(\sigma) \geq E(p\rho + (1-p)\sigma). \tag{4.15}$$

  Esta propiedad se justifica en el contexto de pérdida de información sobre un estado, que ocurre al tener un proceso en el que se comienza con un conjunto de estados ρ_i localmente identificables y que aparecen con una tasa p_i y finaliza por poseer una mezcla de estos estados, es decir de la forma $\rho = \sum_i p_i \rho_i$.

  Esta propiedad, no esencial, puede ser útil a la hora de simplificar cálculos.

- **Aditiva**

  En ciertos casos se pide que el entrelazamiento sea aditivo, lo cual corresponde a imponer que el entrelazamiento de varias copias de un estado ρ sea igual a n veces el entrelazamiento de una sola copia. Es decir,

  $$E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho). \tag{4.16}$$

- **Subaditiva**

  También se puede imponer la condición de subaditividad para el entrelazamiento. Ésta se expresa para dos estados ρ_A y ρ_B como:

  $$E(\rho_A \otimes \rho_B) \leq E(\rho_A) + E(\rho_B). \tag{4.17}$$

- **Continua**

  Por útlimo, se menciona aquí la posibilidad de que la medida de entrelazamiento cumpla con la propiedad de continuidad. En esta situación, se tiene que para todo ρ y σ,

  $$E(\rho) - E(\sigma) \to 0 \qquad \text{cuando} \quad \|\rho - \sigma\| \to 0. \tag{4.18}$$

4.1.4 Estados puros: entropía de entrelazamiento

Los axiomas recién presentados para obtener lo que se podrían llamar buenas medidas de entrelazamiento, permiten definir buenos cuantificadores como la entropía de entrelazamiento, para estados puros, y la concurrencia, para estados mezcla.

En el caso de estados puros bipartitos $|\psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, el entrelazamiento comúnmente se cuantifica por medio de la conocida entropía de von Neumann S.
Definición 4.1.3. La entropía de von Neumann $S(\rho)$, asociada al estado ρ, se define como

$$S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \log \rho) = -\lambda_i \sum_i \log \lambda_i, \tag{4.19}$$

donde λ_i son los valores propios de ρ.

Cuando se trabaja con estados puros, se verifica que S es mínima (nula), es decir

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \Longleftrightarrow S(\rho) = 0. \tag{4.20}$$

Lo anterior se debe a que un estado puro cumple $\rho = \rho^2$, por lo tanto tiene un solo valor propio igual a la unidad.

Además, la entropía de un operador densidad de rango d se encuentra acotada, satisfaciendo

$$0 \leq S(\rho) \leq \log d, \tag{4.21}$$

donde la igualdad se cumple cuando todos los valores propios, diferentes de cero, son iguales.

En Teoría de la Información Cuántica es corriente tomar el logaritmo en base 2, lo que da un máximo de entropía igual a uno para un qubit.

La medida generalmente empleada para el entrelazamiento de un estado puro $|\psi\rangle_{AB}$ es la entropía de von Neumann del operador densidad reducido $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\left(|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|\right)$. Esta entropía de entrelazamiento vale para un estado puro bipartito

$$E_{vN}(|\psi\rangle_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i, \tag{4.22}$$

con λ_i los valores propios de ρ_A, $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1$.

Un estado puro cuyo entrelazamiento es $E_{vN}(|\psi_{AB}\rangle) = \log d$, donde $d = \dim\mathcal{H}$, se dice que se encuentra máximamente entrelazado. Un ejemplo de este tipo de estados son los ya abordados estados de Bell.

Esta medida es satisfactoria en el sentido de que cumple con las principales características requeridas en la parte anterior: no crece bajo operaciones LOCC y se anula para estados separables; además es aditiva.

4.1.5 Estados mezcla: concurrencia

Para estados mezcla la entropía de von Neumann falla al distinguir correlaciones clásicas de cuánticas y ya no es una buena medida de entrelazamiento: ahora cada subsistema podría tener entropía no nula incluso sin que hubiera entrelazamiento.

Sin embargo, es posible definir una medida de entrelazamiento para estados mezcla que se reduzca a la entropía de von Neumann en el caso de los estados puros.

En 1998, Wootters presentó una expresión para una medida de entrelazamiento de dos qubits, llamada concurrencia [26].

Definición 4.1.4. La concurrencia $C(\rho_{AB})$ es un monótono de entrelazamiento definido para un estado bipartito mezcla ρ_{AB}, de dos qubits, como:

$$C(\rho_{AB}) = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i C(\rho_i), \tag{4.23}$$

donde

$$C(\rho_i) = |\langle\psi_i|(\sigma_2 \otimes \sigma_2)|\psi_i^*\rangle| \tag{4.24}$$

El proceso de minimización que aparece en la definición anterior fue resuelto, obteniendo así la siguiente expresión exacta para la concurrencia:

$$C(\rho_{AB}) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \tag{4.25}$$

donde λ_i son las raíces cuadradas de los valores propios (reales, no negativos) de $\rho\widetilde{\rho}$, dadas en orden decreciente, con $\widetilde{\rho} = (\sigma_2 \otimes \sigma_2)\rho^*(\sigma_2 \otimes \sigma_2)$.

Particularmente, para los estados X 2.18, se tiene que las raíces cuadradas de los autovalores $\lambda_{1\pm}$ y $\lambda_{2\pm}$ de $\rho\widetilde{\rho}$ son:

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_{1\pm}} &= \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} \pm |\rho_{14}|, \\ \sqrt{\lambda_{2\pm}} &= \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} \pm |\rho_{23}|. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Y se verifica que para valores particulares de los elementos de matriz hay solamente dos posibilidades para el mayor valor de la raíz de los autovalores, $\sqrt{\lambda_{1+}}$ o $\sqrt{\lambda_{2+}}$. Entonces, este tipo de estados poseen una concurrencia que queda explicitada por:

$$C(\rho_X) = 2\max\left\{0, |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}, |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}\right\}. \tag{4.27}$$

4.2 Discordia cuántica

En los últimos años, diferentes resultados teóricos y experimentales han puesto en evidencia que no solo el entrelazamiento es un recurso capaz de brindar ventajas

cuánticas: existen además otras correlaciones, como la discordia cuántica, que también pueden proporcionarlas.

Para ilustrar lo mencionado con un caso paradigmático, se considera el protocolo DQC1 ("Deterministic quantum computation with one pure qubit"). Éste fue introducido por Knill y Laflamme en 1998 [7] y demostrado experimentalmente algunos años después [27], [28] . Se trata de un modelo computacional que emplea un único qubit en un estado puro, junto a un registro de n qubits en estado completamente mezclado, permitiendo realizar tareas eficientemente para las cuales no existen algoritmos clásicos que las resuelvan en tiempo polinómico. Un circuito DQC1 puede ser utilizado, a modo de ejemplo, para aproximar la traza normalizada de un operador unitario de n qubits, mientras que los algoritmos clásicos conocidos para este problema son exponenciales en el número de qubits. El interés que despierta tal protocolo se debe a que, siendo el entrelazamiento despreciable, es razonable asumir que su poder computacional reside en la presencia de otro tipo de correlación cuántica llamada discordia cuántica.

La discordia fue la primera medida de correlaciones introducida aparte del entrelazamiento, en 2001, por Ollivier y Zurek [10] e independientemente por Henderson y Vedral [11].

Aparte del protocolo DQC1, también se demostró que la discordia cuántica es un recurso crucial para tareas como la preparación remota de estados cuánticos [29], la cual es una variante de la teleportación cuántica con la diferencia de que el emisor conoce el estado cuántico a ser comunicado, así como esencial para la discriminación de estados cuánticos [30], entre otros casos.

En esta sección de la tesis se realiza una breve introducción a la Teoría de la Información Clásica, con el objetivo de luego exponer las bases para definir un cuantificador de la discordia.

4.2.1 Teoría de la Información Clásica

La Teoría de la Información Clásica, que busca estudiar la comunicación, el almacenamiento y la cuantificación de la información, fue incialmente propuesta y desarrollada por Claude Shannon en 1948 [31]. Al presente, es un área ampliamente estudiada que proporciona herramientas y nociones empleados en información cuántica. Consecuentemente, es de suma utilidad introducir ciertos conceptos extraidos de la teoría clásica de la información para entender cómo es necesario que sean modificados a la hora de tratar con situaciones en las que los efectos cuánticos sean relevantes.

Entropía de Shannon

El concepto de información se describe en un marco probabilístico: si se desea codificar, manipular o transmitir información, es necesario tener en cuenta la existencia de errores, por lo que hablar de una teoría de la información es hablar de ésta en términos de incertidumbre. Una medida de incertidumbre para una variable aleatoria es la denominada Entropía de Shannon.

Cuando se trabaja con una variable aleatoria discreta X, con un conjunto de resultados posibles $\{x_i\}$, se plantea la necesidad de expresar de manera computable la información ganada, en promedio, al conocer el valor de la variable X. Con la finalidad de lograrlo se define la entropía de Shannon.

$$H(X) = H(p(x)) = -\sum_i p(x_i)\log p(x_i). \tag{4.28}$$

Esta definición se transforma fácilmente para sistemas continuos remplazando la suma por una integral en x.

Una obsevación pertinente refiere al logaritmo que aparece en esta expresión, el cual puede estar dado en diferentes bases, y cuando se utiliza la base dos se dice que la unidad de la entropía es el "bit". (Debe tenerse cuenta que se define $\log(0) = 0$).

Si ahora se considera el caso de tener dos variables aleatorias discretas, X con un conjunto de resultados $\{x_i\}$ e Y con el conjunto de resultados $\{y_i\}$, la distribución de probabilidad conjunta queda expresada por $P(X = x_i, Y = y_j) = p(x_i, y_j)$, con probabilidades marginales $p(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j)$ y $p(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j)$. Generalizando la ecuación 4.28 a este caso, la incertidumbre en la distribución conjunta de X e Y se define como

$$H(X, Y) = H(p(x, y)) = -\sum_{i,j} p(x_i, y_j)\log p(x_i, y_j). \tag{4.29}$$

Entropía condicional e información mutua

Se dice que dos sistemas se encuentran correlacionados si juntos contienen más información que tomados por separado. Existen distintas maneras de cuantificar cuán correlacionados se encuentran dos sistemas; una de ellas se consigue estudiando la denominada información mutua entre ellos.

La información mutua para dos variables aleatorias es una medida de la relación existente entre éstas, en particular mide la cantidad de información que es comunicada en una de las variables sobre la otra.

Clásicamente, se define la Información Mutua entre dos variables aleatorias A y B como:

$$I(X:Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) \tag{4.30}$$

Se trata de la cantidad de información común a los dos subsistemas de un sistema biparito, es decir la cantidad de información, en promedio, que conociendo el resultado x, se tiene sobre el resultado y. En 4.30, los dos primeros términos del lado derecho cuantifican el contenido de información de los subsistemas X e Y respectivamente, por lo que la información común a los dos subsistemas se cuenta dos veces y es necesario sustraerle el contenido de información del sistema combinado.

Es relevante destacar que la información mutua es simétrica, es decir que $I(X:Y) = I(Y:X)$.

Ahora se supone que se desea conocer la probabilidad de observar el evento y_j siendo que el evento x_i ya fue observado. La cantidad relevante asociada a este proceso es la probabilidad condicional, dada por la regla de Bayes:

$$P(Y = y_j|X = x_i) = p_{x_i}(y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}. \tag{4.31}$$

De aquí surge la motivación para intorducir la entropía condicional $H(Y|X)$:

$$H(Y|X) = -\sum_{i,j} p(x_i, y_j) \log p_{x_i}(y_j) \tag{4.32}$$

Se puede obtener 4.32 observando que

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \sum_i p(x_i) H(Y|X = x_i) = -\sum_i p(x) \sum_j p(y_j|x_i) \log p(y_j|x_i) \\ &= -\sum_{i,j} p(x_i, y_j) \log p(y_j, x_i) \end{aligned} \tag{4.33}$$

La entropía condicional cuantifica la cantidad de información necesaria para describir la variable aleatoria Y, teniendo en cuenta que X se encuentra en un estado dado. Es decir que se trata de una medida de la ignorancia, o la incertidumbre, que persiste respecto a la variable Y luego de realizar medidas para determinar el valor de X.

Como manera de sintetizar estos nuevos conceptos, es conveniente señalar la diferencia entre $I(X:Y)$ y $H(X|Y)$. La entropía de Shannon condicional mide la información que todavía no se posee luego de conocer x, mientras que la información mutua representa la ingnorancia promedial respecto a y antes de conocer x menos la ignorancia respecto a y cuando ya es conocido x, es decir la cantidad (positiva) de información que se aprende sobre y a partir de la observación de x.

Dada la definición de entropía condicional 4.32, y su análogo con X e Y intercambiados, se demuestra que

$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X), \tag{4.34}$$
$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y). \tag{4.35}$$

Utilizando lo anterior, se concluye que para sistemas clásicos existe una forma alternativa y equivalente a 4.30 de reescribir la información mutua de Shannon:

$$J(X:Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) - H(X|Y). \tag{4.36}$$

La información mutua proporciona por lo tanto, una medida del decremento medio de la entropía del sistema X (Y) cuando se conoce el estado del sistema Y (X). Como esta cantidad es positiva, se concluye que la incertidumbre inicial en Y (X) no puede aumentarse realizando observaciones sobre X (Y).

La igualdad entre las dos expresiones de la información mutua, $I(X:Y)$ y $J(X:Y)$, recién presentada para casos clásicos, en general no se cumple para análogos cuánticos.

4.2.2 Discordia cuántica basada en las medidas

Para un sistema clásico, es posible obtener toda su información sin perturbarlo. Sin embargo, en el caso cuántico el proceso de medición puede modificar el sistema; de donde surgen dos expresiones para la información mutua que ya no son equivalentes en la teoría cuántica de la información. De aquí deriva la idea fundamental para definir la discordia cuántica basada en las medidas.

Generalizar los conceptos mencionados en la sección precedente para trabajar con un sistema cuántico bipartito, con subsistemas A y B, es el primer paso del procedimiento para definir la discordia. Ahora, los sistemas pasan a estar descritos por sus matrices densidad, por lo que tanto la entropía como la información mutua van a depender de éstas.

Con el fin de realizar el pasaje de $I(A:B)$ y $J(A:B)$ al dominio cuántico es necesario especificar qué significa cuánticamente conocer el estado de A dado que conozco el estado de B. La respuesta al problema surge de comprender que en mecánica cuántica el hecho de conocer un estado es el hecho de medirlo; es decir que los resultados b_i obtenidos a partir de una medida realizada en el sistema B ahora dependen del tipo de medida hecha.

Si se considera una medida proyectiva $\{\Pi_i^B\}$ realizada sobre B, tal que $\sum_i \Pi_i^B = \mathbb{1}$, el resultado b_i se obtiene con probabilidad:

$$p(b_i) = \mathrm{Tr}(\Pi_i^B \rho_{AB}) \tag{4.37}$$

En este contexto, el subsistema A se encuentra en el estado

$$\rho_{A|B=b_i} = \rho_{A|\{\Pi_i^B\}} = \mathrm{Tr}_B(\Pi_i^B \rho_{AB})/\mathrm{Tr}(\Pi_i^B \rho_{AB}) \tag{4.38}$$

Por lo tanto, el análogo cuántico de la entropía condicional 4.34 puede ser definido, para la medida Π_i^B, como:

$$S(\rho_A|\{\Pi_i^B\}) = \sum_i p(b_i) S(\rho_{A|\{\Pi_i^B\}}). \tag{4.39}$$

Aquí $S(X)$ designa la entropía de von Neumann 4.19.

La expresión clásica para la información mutua 4.30 se extiende fácilmente a su versión cuántica sustituyendo las distribuciones de probabilidad clásicas por las matrices de densidad correspondientes y empleando la entropía de von Neumann en lugar de la entropía de Shannon.

Se puede entonces definir el análogo cuántico para $I(A:B)$ de la siguiente forma:

$$I(A:B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}). \tag{4.40}$$

Generalmente, se utiliza la información mutua cuántica como un cuantificador de las correlaciones totales (cuánticas y clásicas) de un sistema [32].

Por otro lado, la generalización cuántica de 4.36 queda:

$$J(A|\{\Pi_i^B\}) = S(\rho_A) - S(\rho_A|\{\Pi_i^B\}). \tag{4.41}$$

Con el propósito de cuantificar la cantidad de información, tanto clásica como cuántica, contenida entre A y B, se maximiza 4.41 sobre todas las posibles medidas válidas de realizar sobre B. Entonces,

$$J(A|B) = \max_{\{\Pi_i^B\}} J(A|\{\Pi_i^B\}). \tag{4.42}$$

Esta expresión describe la cantidad de información referente al sistema A que es posible obtener como resultado de las medidas realizadas solamente en B.

En este punto ya es posible introducir la discordia cuántica $D(A|B)$. Ésta se define de la siguiente manera [10]:

Definición 4.2.1. Discordia cuántica

$$D(A|B) = I(A:B) - J(A|B) = S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) + \text{mín}_{\{\Pi_i^B\}} S(\rho_A|\{\Pi_i^B\}). \quad (4.43)$$

Dado que clásicamente $I(A:B)$ y $J(A|B)$ coinciden, es razonable asumir que si existe una diferencia entre las cantidades 4.40 y 4.42, ella debe estar originada por fenómemos de origen cuaántico.

La expresión cuántica de $J(A|B)$ es equivalente a la entropía condicional clásica cuando A y B son clásicos, por lo que es posible definir un estado como clásico cuando

$$I(A:B) = J(B|A). \quad (4.44)$$

A continuación, se enumeran ciertas propiedades relevantes de la discordia cuántica.

1. Se trata de una cantidad no negativa.

$$D(A|B) \geq 0 \quad (4.45)$$

   para todo A y B, con la igualdad válida para sistemas que solamente poseen correlaciones clásicas.

2. Se anula si y solo si el sistema cuántico no se ve perturbado por medidas locales.

3. Al igual que las medidas de entrelazamiento, es invariante bajo transformaciones locales unitarias.

4. No es simétrica: en general $D(A|B) \neq D(B|A)$. Esto se debe a que la entropía condicional no es una función simétrica ante el intercambio del rol de los subsistemas A y B.

5. La discordia de un estado puro bipartito coincide con el entrelazamiento medido por la entropía de von Neumann.

6. Los estados con discordia nula son separables

Como se percibe claramente en 4.43, el mayor obstáculo a la hora de evaluar la discordia de cierto sistema se encuentra en el proceso de optimización, ya que es necesario realizar una minimización en el conjunto de medidas posibles sobre B. Incluso en los casos más simples de estados de dos qubits, se han obtenido expresiones analíticas de la discordia solo bajo ciertas restricciones y para cierta subclase de estados cuyas matrices densidad tienen importantes simetrías, como estados diagonales de Bell [33] o estados X [34].

Para estados diagonales de Bell de la forma 2.20, en [33] se demostró una expresión analítica.

$$\begin{aligned} D(\rho_{BD}) =& \frac{1}{4}\Big[(1-r_1-r_2-r_3)\log_2(1-r_1-r_2-r_3) \\ &+ (1-r_1+r_2+r_3)\log_2(1-r_1+r_2+r_3) \\ &+ (1+r_1-r_2+r_3)\log_2(1+r_1-r_2+r_3) \\ &+ (1+r_1+r_2-r_3)\log_2(1+r_1+r_2-r_3)\Big] \\ &- \frac{1-r}{2}\log_2(1-r) - \frac{1+r}{2}\log_2(1+r), \end{aligned} \tag{4.46}$$

siendo $r = \max\{|r_1|, |r_2|, |r_3|\}$.

Para estados X de dos qubits de la forma 2.18 aún no se conoce una expresión analítica exacta: los resultados obtenidos en [35] y luego en [36] inicialmente se consideraron aplicables para todos los casos, sin embargo se propuso un contraejemplo en [37].

De cualquier modo, la expresión cerrada de la discordia para estados X se demostró válida para una amplia variedad de estados X reales tales que [38]

$$2|\rho_{23} + \rho 14| \geq 2|\rho_{23} - \rho 14|. \tag{4.47}$$

Para estados de este tipo, y que además cumplen con alguna de las siguientes condiciones

$$(|\rho_{23}| + |\rho_{14}|)^2 \leq (\rho_{11} - \rho_{22})(\rho_{44} - \rho_{33}) \tag{4.48}$$

o

$$|\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}| \leq |\rho_{23}| + |\rho_{14}| \tag{4.49}$$

la expresión analítica introducida en [35], y que se explicita a continuación, es válida.

Si ρ cumple con las estipulaciones recién mencionadas, su discordia puede hallarse como:

$$D(\rho_X) = \min\{D_1, D_2\}, \tag{4.50}$$

donde λ_i son los valores propios de ρ_X y $D_j = \Gamma(\rho_{11} + \rho_{33}) + \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \log_2 \lambda_i + Q_j$, con $\Gamma(\alpha) = -\alpha\log_2\alpha - (1-\alpha)\log_2(1-\alpha)$ y

$$\begin{aligned} Q_1 &= \Gamma\left(\frac{1+\sqrt{(1-2(\rho_{33}+\rho_{44}))^2 + 4(|\rho_{14}|+|\rho_{23}|)^2}}{2}\right), \\ Q_2 &= -\sum_i \rho_{ii}\log_2\rho_{ii} - \Gamma(\rho_{11}+\rho_{33}). \end{aligned} \tag{4.51}$$

En casos en los que no se verifique 4.48 ni 4.49, la expresión anterior es una excelente aproximación, con un error absoluto muy pequeño, como se destaca en [39].

Contar con una fórmula analítica para la discordia cuántica no solo disminuye el coste computacional a la hora de resolver problemas que involucren cálculos de ella, sino que también permitiría hallar relaciones explícitas entre ésta y otras correlaciones, en caso de haberlas.

4.3 Correlaciones clásicas

Para cuantificar las correlaciones clásicas entre dos subsistemas (A y B), en [11] se sugieren cuatro propiedades que son de esperarse para una medida de correlaciones clásicas (CC).

1. C debe anularse para $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$, con la finalidad de que los estados producto no se encuentren correlacionados.
2. C debe ser invariante bajo transformaciones locales unitarias, ésto para que cualquier cambio de base no afecte la correlación entre dos subsistemas.
3. C no debe incrementar bajo operaciones locales: si los dos subsistemas evolucionan independientemente, la correlación entre ellos no debe aumentar.
4. $C = S(\rho_A) = S(\rho_B)$ para estados puros.

Una medida propuesta en [11] que verifica estas propiedades se define a continuación.

$$CC(\rho_{AB}) = S(\rho_A) - \min_{\{\Pi_k^B\}} S(\rho_{A|B}) \tag{4.52}$$

donde el mínimo se toma sobre el conjunto de POVM $\{\Pi_k^B\}$ (cuya definición se introdujo en 2.4.2) sobre el subsistema B. Esta medida es una generalización de la información mutua clásica.

Un estado mezcla bipartito se dice que se encuentra clásicamente correlacionado si puede ser escrito como [40]:

$$\rho_{\text{cc}} = \sum_{i,j} p_{ij} |i\rangle\langle i|^A \otimes |j\rangle\langle j|^B, \tag{4.53}$$

donde $\{|i\rangle^A\}$ son estados ortogonales del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_A$ y $\{|j\rangle^B\}$ son estados ortogonales en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_B$. Las probabilidades p_{ij} son no negativas y su suma es 1 $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$.

Si el estado no puede ser escrito como en 4.53, se dice que se encuentra correlacionado cuánticamente.

Es importante destacar que todo estado correlacionado clásicamente también es separable, sin embargo, un estado separable no necesariamente se encuentra clásicamente correlacionado.

Detrás de esta definición para estados clásicamente correlacionados se encuentra el hecho de que estos estados no se ven perturbados por medidas de von Neumann locales en los subespacios A y B. Los operadores de medida correspondientes a estas medidas no perturbativas de von Neumann están dados por $E_i^A = |i\rangle\langle i|^A$ y $E_j^B = |j\rangle\langle j|^B$.

Para estados X, la expresión analítica 4.50 para la discordia, permite también deducir una forma analítica para las correlaciones clásicas [36]:

$$CC = \max\{C_1, C_2\}, \tag{4.54}$$

donde

$$\begin{aligned} C_1 =& \Gamma\left(\rho_{11} + \rho_{22}\right) - \Gamma(A) \\ C_2 =& \Gamma\left(\rho_{11} + \rho_{22}\right) + \Gamma\left(\rho_{11} + \rho_{33}\right) + \sum_i \rho_{ii}\mathrm{Log}_2\rho_{ii}, \end{aligned} \tag{4.55}$$

con Γ que fue definido en 4.50 y $A = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{(1-2(\rho_{33}+\rho_{44}))^2 + 4(|\rho_{14}| + |\rho_{23}|)^2}\right)$.

Esta fórmula es exacta para la misma región en la que es válida la discordia analítica, 4.48 y 4.49, mientras que en otras regiones es una buena aproximación.

4.4 Medidas geométricas para correlaciones cuánticas

4.4.1 Definición

La medida geométrica de cierta correlación cuántica $\mathcal{C}$ se entiende como la mínima distancia del estado de interés al subconjunto de estados $\{C_0\}$ para los que $\mathcal{C}$ se anula:

$$\mathcal{C} = \min_{\sigma\in\{C_0\}} d(\rho, \sigma) \tag{4.56}$$

Con el objetivo de calcular este tipo de cuantificadores se debe determinar cuál es el subconjunto de estados cuánticos que anulan la correlación y seleccionar la norma que induce la métrica (o distancia) d empleada.

Las exigencias que se impongan sobre las medidas de correlaciones geométricas se traducen por medio de ciertas restricciones exigidas a las distancias utilizadas. Por ejemplo, si se desea que la medida geométrica de cierta correlación cumpla con la propiedad de monotonicidad que, como ya se comentó, verifican la concurrencia y la discordia cuántica basada en medidas, es imprescindible que la distancia sea contractiva bajo mapas $\mathcal{M}_{CPPT}$ completamente positivos y que preserven la traza,

esto es bajo canales cuánticos. Por lo tanto, para todo estado ρ y σ, y toda operación $\mathcal{M}_{CPPT}$:

$$d(\rho,\sigma) \geq d(\mathcal{M}_{CPPT}(\rho), \mathcal{M}_{CPPT}(\sigma)). \tag{4.57}$$

En este caso se dice que la medida geométrica de correlaciones asociada a d es contractiva bajo operaciones cuánticas locales (o mapas CPPT).

Un punto a subrayar es que las operaciones unitarias pueden verse como mapas CPPT reversibles, entonces $d(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = d(\rho,\sigma)$, para todo par ρ, σ y todo U unitario.

También se puede exigir que d sea invariante bajo reflexiones en el conjunto de estados cuánticos. En este caso, d debe ser invariante bajo trasposiciones:

$$d(\rho,\sigma) = d(\rho^T, \sigma^T), \tag{4.58}$$

para todo ρ y todo σ.

Aparte, si se busca que la medida geométrica de $\mathcal{C}$ sea convexa, es esencial exigir que d sea conjuntamente convexa:

$$d(p\rho + (1-p)\sigma, p\tau + (1-p)\varsigma) \leq pd(\rho,\tau) + (1-p)d(\sigma,\varsigma) \tag{4.59}$$

para todo ρ, σ, τ, ς, y para todo $p \in [0,1]$.

4.4.2 Norma traza y norma de Hilbert-Schmidt

Un tipo de distancias que pueden ser empleadas son aquellas inducidas por las normas-p de Schatten $\|\cdot\|_p$ y definidas para el operador A como:

$$\|A\|_p = \left(\mathrm{Tr}\left[\sqrt{A^\dagger A}^p\right]\right)^{p^{-1}} = \left(\sum_i \mu_i^p\right)^{p^{-1}}, \tag{4.60}$$

donde μ_i son los valores singulares de A, es decir los valores propios del operador hermítico $|A| = \sqrt{A^\dagger A}\sqrt{A^\dagger A} = \sum_i \sqrt{\mu_i}|i\rangle\langle i|$ (con $|i\rangle$ sus autoestados).

Si se elige $p = 1$ se obtiene la norma-1 también conocida como norma traza, es decir

$$\|A\|_1 = \mathrm{Tr}\sqrt{AA^\dagger}. \tag{4.61}$$

En particular, para operadores A_h hermíticos,

$$\|A_h\|_1 = \mathrm{Tr}|A_h| = \sum_i |\lambda_i|, \tag{4.62}$$

con λ_i los valores propios de A_h.

La distancia d_1, inducida por la norma-1, entre dos operadores ρ y σ es:

$$d_1(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}\|\rho-\sigma\|_1 \tag{4.63}$$

Por otra parte, optando por $p = 2$ se consigue la norma-2 o norma de Hilbert-Schmidt, cuyo valor es:

$$\|A\|_p = \sqrt{\mathrm{Tr}(AA^\dagger)} \tag{4.64}$$

Esta norma induce la distancia d_2, que para dos operadores ρ y σ queda dada por:

$$d_2(\rho,\sigma) = \|\rho-\sigma\|_2^2. \tag{4.65}$$

La única de estas normas que cumple con la contractividad para toda dimensión de A es la distancia traza. Para la distancia de Hilbert-Schmidt se tiene que [41]

$$d_2\left(\mathcal{M}_{CPPT}(\sigma),\mathcal{M}_{CPPT}(\rho)\right)_2 \leq \|\mathcal{M}_{CPPT}\|_2 d(\sigma,\rho)_2, \tag{4.66}$$

con σ y ρ estados cualesquiera, y para todo mapa $\mathcal{M}_{CPPT}(A)$, con $\|\mathcal{M}_{CPPT}\|_2 = \sup_{A\in S_N} \frac{\|\mathcal{M}_{CPPT}(A)\|_2}{\|A\|_2}$, donde S_N es el espacio de las matrices de dimensión $N\times N$.

Esto no quiere decir que sea no contractiva para todo canal cuántico, existen diversas operaciones para las cuales los estados cuánticos evolucionan de forma tal que la norma-2 es contractiva.

Si bien la distancia de Hilbert Schmidt ha llevado a inconsistencias debido a su no contractividad en ciertos casos, a priori no debería descartarse como cuantificador de correlaciones cuánticas, debiendo analizarse el canal con el cual se está trabajando.

En particular, para un solo qubit la distancia traza y la de Hilbert-Schmidt coinciden a menos de un factor constante, por lo que la contractividad de una implica la contractividad de la otra. Esto se puede mostrar tomando dos estados de un qubit ρ y ς y escribiéndolos en la forma 2.9, con $\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{n}\cdot\vec{\sigma})$ y $\varsigma = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{m}\cdot\vec{\sigma})$. Como para operadores hermíticos la norma traza es la suma del valor absolutos de sus autovalores, se obtiene:

$$\|\rho-\varsigma\|_1 = \|\frac{1}{2}(\vec{n}-\vec{m})\cdot\vec{\sigma}\|_1 = \mathrm{Tr}|(\vec{n}-\vec{m})\cdot\vec{\sigma}|. \tag{4.67}$$

Los valores propios de $(\vec{n}-\vec{m})\cdot\vec{\sigma}$ son $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\sum_i (m_i-n_i)^2} = \frac{1}{2}\|\vec{m}-\vec{n}\|_2$, por lo que

$$\|\rho-\varsigma\|_1 = \|\vec{m}-\vec{n}\|_2. \tag{4.68}$$

Por otro lado, $(\rho-\sigma)^2$ tiene valor propio doble igual a $\frac{1}{4}\|\vec{m}-\vec{n}\|_2^2$, de donde:

$$\|\rho-\varsigma\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}(\rho-\sigma)^2} = \frac{1}{2}\|\vec{m}-\vec{n}\|_2 = \frac{1}{2}\|\rho-\varsigma\|_1. \tag{4.69}$$

Este resultado no se replica en el caso de tener un sistema con dimensión mayor a dos.

Por otro lado, para dimensión mayor a dos la norma traza representa una cota superior para la norma de Hilbert-Schmidt, ya que:

$$\|A\|_2^2 = \sum_i \lambda_i \leq \left(\sum_i \sqrt{\lambda_i}\right)^2 = \|A\|_1^2. \tag{4.70}$$

La distancia de Hilbert-Schmidt entre dos estados diagonales de Bell cualesquiera es equivalente a la mitad de la distancia euclidiana entre los vectores de correlación que los representan. Para dos estados diagonales de Bell ρ_{BD} y σ_{BD} arbitrarios, de la forma 2.20 con vectores de correlación respectivos $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ y $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$, la distancia de Hilbert-Schmidt entre ellos se puede escribir como [42]:

$$d_2(\rho_{BD}, \sigma_{BD}) = \mathrm{Tr}(\rho - \zeta)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(r_i - z_i)^2. \tag{4.71}$$

Esto quiere decir que

$$d_2(\rho_{BD}, \sigma_{BD}) = \frac{1}{4}\|\vec{r} - \vec{z}\|_2^2; \tag{4.72}$$

resultado que será de suma importancia para el desarrollo del trabajo.

4.4.3 Medidas geométricas del entrelazamiento

Como se expuso en la sección 4.1, el entrelazamiento se anula para los estados separables. Por lo tanto, remitiéndose a 4.56, es posible definir una medida geométrica del entrelazamiento en función de la distancia d entre el estado de interés y el estado separable más próximo:

$$E_d(\rho) = \min_{\{\rho_{\mathrm{sep}} \in \mathcal{S}\}} d(\rho, \rho_{\mathrm{sep}}), \tag{4.73}$$

donde $\mathcal{S}$ representa el conjunto de los estados separables, los cuales pueden escribirse en la forma 4.5.

Utilizando la norma traza y la norma de Hilbert-Schmidt, se obtiene:

$$E_{\mathrm{Tr}}(\rho) = \min_{\{\rho_{\mathrm{sep}} \in \mathcal{S}\}} \frac{1}{2}\|\rho - \rho_{\mathrm{sep}}\|_1 = \min_{\{\rho_{\mathrm{sep}} \in \mathcal{S}\}} \mathrm{Tr}|\rho - \rho_{\mathrm{sep}}|, \tag{4.74}$$

$$E_{\mathrm{HS}}(\rho) = \min_{\{\rho_{\mathrm{sep}} \in \mathcal{S}\}} \|\rho - \rho_{\mathrm{sep}}\|_2^2 = \min_{\{\rho_{\mathrm{sep}} \in \mathcal{S}\}} \mathrm{Tr}\left((\rho - \rho_{\mathrm{sep}})^2\right). \tag{4.75}$$

Las medidas geométricas del entrelazamiento son fácilmente computables siempre que se conozca el estado separable más cercano al estado estudiado, por lo tanto el problema de calcular el entrelazamiento geométrico de un estado cuántico ρ se reduce a hallar el estado con forma 4.5 más próximo a ρ.

Estado separable más próximo

Frank Verstraete describe en [43] un algoritmo para determinar el estado separable más próximo a un estado entrelazado cualquiera, con la norma de Hilbert-Schmidt. Los pasos del esquema se resumen a continuación.

1. Se halla la descomposición de la traspuesta parcial de ρ

$$\rho^{TP} = QDQ^{\dagger}. \tag{4.76}$$

2. Se define G^2 como la única matriz diagonal semidefinida positiva y normalizada, tal que sus elementos sean $g_i^2 = d_i + \lambda$ o $g_i = 0$.

3. El estado parcialmente traspuesto más proximo queda dado por $\rho_s = (QG^2Q^{\dagger})^{TP}$.

El algoritmo mencionado se puede probar para el caso de un estado bipartito de dos qubits.

En primera instancia es necesario observar que la norma de Hilbert-Schmidt es invariante bajo trasposiciones parciales.

Luego, se debe tener en consideración que la norma de Hilbert-Schmidt es invariante bajo transformaciones unitarias U, es decir que

$$\|(\rho_{AB})^{\mathrm{TP}_B} - \sigma^{\mathrm{TP}_B}\|_2 = \|U((\rho_{AB})^{\mathrm{TP}_B} - \sigma^{\mathrm{TP}_B})U^{\dagger}\|_2 = \|U(\rho_{AB})^{\mathrm{TP}_B}U^{\dagger} - U\sigma^{\mathrm{TP}_B}U^{\dagger}\|_2. \tag{4.77}$$

Por otro lado, en [44] se probó que si σ_{AB} es separable entonces la transpuesta parcial es también un estado cuántico, por lo que se trata de una matriz semidefinida positiva. Esta condición es necesaria y suficiente para todos los estados separables en dimensiones 2×2 y 2×3.

Tomando en consideración lo anterior, es posible definir $\sigma' = \sigma^{\mathrm{TP}_B}$, que también representa un estado cuántico. Y eligiendo U tal que diagonalice $(\rho_{AB})^{\mathrm{TP}_B}$, es decir $D = U(\rho_{AB})^{\mathrm{TP}_B}U^{\dagger}$, donde D es una matriz diagonal con elementos en la diagonal iguales a d_i, el problema a resolver se reduce a hallar σ' tal que minimice la distancia

$$\|D - U\sigma'U^{\dagger}\|_2, \tag{4.78}$$

con la restricción $\mathrm{Tr}\sigma' = 1$.

Es un resultado conocido que la matriz más próxima a una matriz diagonal, con la norma de Hilbert-Schmidt, es también diagonal. Por lo tanto, $U\sigma'U^{\dagger} = G^2$, con G^2 una matriz diagonal cuyos elementos son $e_i^2 \geq 0$ (ya que es semidefinida positiva). Además, como la traza es invariante bajo transformaciones unitarias $\mathrm{Tr}G^2 = \mathrm{Tr}\sigma' = 1$.

Es posible escribir

$$\|D - G^2\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}(D - G^2)^2} = \sqrt{\sum_i (d_i - e_i)^2}. \tag{4.79}$$

Para minimizar 4.79 alcanza con que $e_i^2 = 0$ en el caso de que $d_i < 0$, y que $e_i^2 = d_i + \delta$, en el caso en que $d_i \geq 0$, donde δ se determina normalizando G^2. Si $d_i + \delta < 0$ es necesario imponer $e_i^2 = 0$ para cumplir el requrimiento de que G^2 sea semidefinida positiva, y volver a normalizar para obtener los nuevos δ.

Por último, haciendo la traspuesta parcial de σ' se obtiene el estado más próximo σ a ρ buscado.

Consecuentemente, se deriva una expresión para el entrelazamiento geométrico de un estado ρ con la norma de Hilbert-Schmidt:

$$E_{\mathrm{HS}} = \frac{1}{n_p} \left(\sum_{i \in I_p} d_i + \sum_{i \in I_n} d_i \right)^2 + \sum_{i \in I_n} d_i^2, \tag{4.80}$$

siendo I_n el conjunto de todos los índices correspondientes a valores propios negativos de la traspuesta parcial de ρ, I_p el conjunto de los índices correspondientes a los autovalores positivo de la traspuesta de ρ, pero para lo cuales $e_i^2 = 0$, y n_p el rango de G^2.

En lo que respecta a la norma traza, en la literatura no se encuentra una solución analítica al problema de determinar el estado separable más próximo a un estado ρ cualquiera con el objetivo de calcular su entrelazamiento geométrico. En el capítulo 6 se opta por determinar una expresión para este último restringiendo la búsqueda de estados separables más próximos al conjunto de estados que poseen las mismas poblaciones que ρ.

4.4.4 Medida geométrica de la discordia

Se probó [45] que la discordia cuántica, para medidas realizadas sobre el subsistema A, se anula para estados llamados cuánticos-clásicos (q-c) [58] que son estados separables de la forma siguiente:

$$\rho_{qc} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes |i\rangle\langle i|^B, \tag{4.81}$$

donde $|i\rangle^A$ son estados ortogonales en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_A$, ρ_i^B son estados en el espacio $\mathcal{H}_B$, y las probabilidades p_i no negativas suman 1.

La medida de von Neumann correspondiente, realizada en el subsitema B, que no perturba el estado total está dada por los operadores de medida $\Pi_i^B = |i\rangle\langle i|^B$.

Análogamente, un estado clásico-cuántico (c-q) tiene la forma

$$\rho_{\mathrm{cq}} = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|^A \otimes \rho_i^B. \tag{4.82}$$

Este tipo de estados no se ve perturbado por una medida de von Neumann local realizada en el subespacio A, con operadores de medida $\Pi_i^A = |i\rangle\langle i|^A$

Si las medidas se realizan sobre los dos subsistemas, los estados no perturbados por ellas son un subconjunto de los anteriores. Se trata de los estados clásicos-clásicos (cc) definidos en 4.53.

Al igual que se propusieron las medidas geométricas para el entrelazamiento, se propone una medida análoga para la discordia en función de la mínima distancia del estado de interés al conjunto de los estados cuánticos-clásicos, ya que la definición de discordia dada anteriormente es asimétrica y con medidas realizadas sobre el subsistema B.

$$D_d(\rho) = \min_{\{\rho_{\mathrm{qc}} \in \Omega_0\}} d(\rho, \rho_{\mathrm{qc}}), \tag{4.83}$$

siendo Ω_0 el conjunto de estados cuánticos-clásicos, que anulan la discordia.

Para estados generales de dos qubits 2.15, la discordia geométrica con la norma de Hilbert-Schmidt toma la forma [45]:

$$D_{\mathrm{HS}}(\rho) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{b}\|_2^2 + \|R\|_2^2 - k_{max}\right), \tag{4.84}$$

donde $b_i = \mathrm{Tr}(\rho\sigma_i \otimes \mathbb{1})$, R es el tensor de correlación cuyos elementos se encuentran dados por $r_{ij} = \mathrm{Tr}(\rho\sigma_i \otimes \sigma_j)$ y k_{max} es el máximo valor de la matrix $\vec{b}\vec{b}^T + RR^T$.

Existen canales particulares para los cuales la discordia cuántica es simétrica respecto al intercambio entre A y B, en estos casos el mínimo de 4.83 se encuentra en el subconjunto de los estados clásicos-clásicos, restringiendo de esta forma la minimización solamente a esos estados.

Para estados diagonales de Bell ρ_{BD}, la discordia es simétrica al intercambiar A y B, es decir $D(A|B) = D(B|A)$, por lo que los estados clásico-cuánticos se corresponden con los clásicos-clásicos. Además está demostrado que el estado clásico más próximo a ρ_{BD}, tanto con la norma traza como con la norma de Hilbert-Schmidt, es también diagonal en la base de Bell [45],[46]. Este resultado va a ser utilizado a la hora de calcular las discordias geométricas para la evolución de estados diagonales de Bell bajo diferentes canales cuánticos. Entonces, para estos estados la discordia geométrica con la norma de Hilbert-Schmidt podrá ser calculada utilizando 4.72, es decir hallando la distancia euclidiana entre el vector de correlación de ρ_{BD} y el de

su estado clásico más próximo. Este punto se retomará más adelante, en el último capítulo de la tesis.

Por otro lado, la discordia con la norma-1 para estados X generales tiene una forma analítica que fue demostrada en [47] y se enuncia a continuación.

Sean

$$\gamma_1 = 2(\rho_{32} + \rho_{41}) \tag{4.85}$$
$$\gamma_2 = 2(\rho_{32} - \rho_{41}) \tag{4.86}$$
$$\gamma_3 = 1 - 2(\rho_{22} + \rho_{33}) \tag{4.87}$$
$$x = 2((\rho_{11} + \rho_{22}) - 1) \tag{4.88}$$

La discordia geométrica con la norma traza vale

$$D_{\mathrm{Tr}}(\rho_X) = \begin{cases} \frac{|\gamma_1|}{2}, & \text{si } \gamma_1^2 - \gamma_3^2 + x^2 < 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma_1^2 \max\{\gamma_3^2,\gamma_2^2+x^2\} - \gamma_2^2 \min\{\gamma_3^2,\gamma_1^2\}}{\max\{\gamma_3^2,\gamma_2^2+x^2\} - \gamma_2^2 \min\{\gamma_3^2,\gamma_1^2\} + \gamma_1^2 - \gamma_2^2}}, & \text{si } \gamma_1^2 - \gamma_3^2 + x^2 \geq 0 \end{cases} \tag{4.89}$$

Este resultado se reduce para estados diagonales de Bell a:

$$D_{\mathrm{Tr}}(\rho_{BD}) = \frac{r_{int}}{2}, \tag{4.90}$$

donde r_{int} es el valor intermedio de los módulos $|r_i|$ de las componentes del vector de correlación de ρ_{BD}.

4.5 Geometría de los estados diagonales de Bell

En 2.3.3 se introdujeron los estados de dos qubits que son diagonales en la base de Bell 2.20, y en las secciones posteriores se expusieron varias propiedades interesantes sobre ellos.

Aquí se presenta una visiualización geométrica de los estados separables y los estados clásicos pertenecientes al conjunto de los estados diagonales de Bell .

Para $\rho_{BD} = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1}_4 + \sum_i r_i \sigma_i \otimes \sigma_i\right)$ existen solo tres parámetros r_i independientes, por lo que estos estados pueden representarse geométricamente en el espacio tridimensional con relativa simplicidad. A modo de ejemplo, el estado identidad $\rho = \frac{1}{4}\mathbb{1}_4$ queda representado por el vector de correlación $\vec{r} = (0,0,0)$, mientras que los estados de Bell $|\Phi^+\rangle$,$|\Phi^-\rangle$,$|\Psi^+\rangle$ y $|\Psi^-\rangle$ quedan determinados por los vectores $\vec{r} = (1,-1,1)$, $\vec{r} = (-1,1,1)$, $\vec{r} = (1,1,-1)$ y $\vec{r} = (-1,-1,-1)$, respectivamente.

El operador densidad ρ_{BD} debe ser positivo, por lo que sus valores propios son positivos, esto se traduce en cuatro ecuaciones que imponen restricciones a los valores posibles de los parámetros r_i:

$$\begin{aligned} 1 - r_1 - r_2 - r_3 &\geq 0 \\ 1 - r_1 + r_2 + r_3 &\geq 0 \\ 1 + r_1 - r_2 + r_3 &\geq 0 \\ 1 + r_1 + r_2 - r_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.91}$$

Por lo tanto, los estados diagonales de Bell permitidos se encuentran dentro del tetraedro representado en la Figura 4.1.

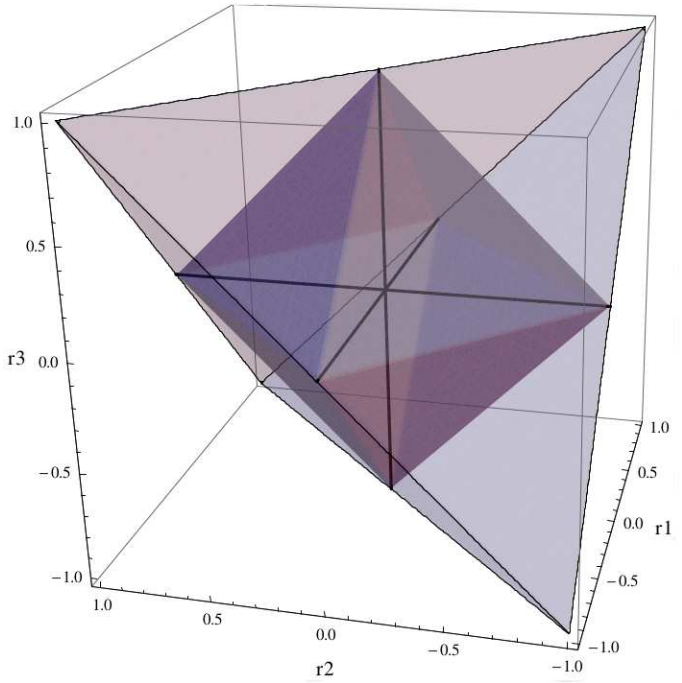


Figura 4.1: Representación en $\mathbb{R}^3$ del espacio de estados diagonales en la base de Bell. Los estados físicos se encuentran en el interior del tetraedro en gris claro, la región de los estados separables corresponde al interior del octaedro en gris oscuro y los ejes, en negro, corresponden a los estados clásicos.

El requerimiento de positividad de la transpuesta parcial de ρ_{BD} permite hallar la región de estados separables. La traspuesta parcial lo que hace es cambiar el signo de r_2 en los valores propios del estado, de forma que la región de estados separables es el interior del octaedro definido por los vértices correspondientes a los estados de Bell.

En lo que respecta a la discordia, como ya se mencionó, ésta es simétrica para estados diagonales de Bell, lo que implica que los estados clásicos-cuánticos que anulan la

discordia geométrica son los mismos que los estados cuánticos-clásicos que la anulan cuando las medidas se realizan sobre B, es decir que deben tener la forma de los estados clásicos-clásicos 4.53. En [45] se muestra que estos estados corresponden a la intersección de los ejes dados por los versores $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ con el tetraedro de los estados permitidos.

4.6 Medidas de coherencia

La coherencia cuántica surge del principio de superposición y cumple un papel esencial en el mundo de la mecánica cuántica: por ejemplo se trata de una condición necesaria para la existencia de correlaciones cuánticas y es un recurso importante en computación cuántica.

4.6.1 Estados incoherentes y operaciones incoherentes

Para definir una medida de coherencia es necesario comenzar por entender cuáles son los estados incoherentes. Siendo $\{|j\rangle\}$ una base del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión d, se dice que las matrices densidad diagonales en esta base son incoherentes y pertenecen al conjunto $\mathcal{I}$.

Todo operador densidad $\rho_{\text{in}} \in \mathcal{I}$, tiene la siguiente forma:

$$\rho_{\text{in}} = \sum_{j=1}^{d} c_j |j\rangle\langle j|. \tag{4.92}$$

Análogamente al caso de medidas de entrelazamiento para el cual se definió un tipo de operaciones que no generaban entrelazamiento, para presentar un cuantificador de coherencia, es necesario definir un tipo de operaciones denominadas incoherentes.

Las operaciones incoherentes son tales que

$$M_k \mathcal{I} M_k^\dagger \subset \mathcal{I} \tag{4.93}$$

para todo k, con M_k los operadores de Kraus. Por medio de esta definición se garantiza que no se cree coherencia a partir de un estado incoherente.

Una clase de operaciones cuánticas de interés son las operaciones incoherentes completamente positivas y que preservan la traza $\mathcal{M}_{ICPPT}$.

Otro tipo de operaciones cuánticas necesarias para definir una medida de coherencia son las operaciones selectivas, para las cuales se retienen los resultados de una

medida y por lo tanto permiten una subselección según esos resultados. El estado correspondiente al resultado k está dado por

$$\rho_k = \frac{M_k \rho M_k^\dagger}{p_k} \tag{4.94}$$

y ocurre con probabilidad $p_k = \mathrm{Tr}(M_k \rho M_k^\dagger)$.

4.6.2 Medidas de coherencia

Al igual que en los casos del entrelazamiento y la discordia, es posible enunciar ciertas propiedades que un buen cuantificador de la coherencia debe cumplir.

Una medida de coherencia Co debe mapear estados cuánticos a valores reales no negativos, al mismo tiempo que satisface los siguientes requerimientos:

1. Co debe ser nula para todos los estados incoherentes, es decir

$$Co(\rho_{\mathrm{in}}) = 0 \ \text{ para todo } \ \rho_{\mathrm{in}} \in \mathcal{I} \tag{4.95}$$

   Es posible pedir la condición más fuerte de que $Co(\rho_{\mathrm{in}})$ se anule si y solo si $\rho_{\mathrm{in}} \in \mathcal{I}$.

2. C debe ser monótona bajo operaciones incoherentes ICPPT:

$$Co(\rho) \geq C(\mathcal{M}_{ICPPT}(\rho)), \ \text{ para toda } \ \mathcal{M}_{ICPPT}. \tag{4.96}$$

3. También debe ser monótona bajo medidas selectivas en promedio:

$$Co(\rho) \geq \sum_k p_k Co(\rho_k), \tag{4.97}$$

   donde ρ_k está dado por 4.94 y se debe cumplir para todo $\{M_k\}$.

4. Físicamente, es necesario pedir que la coherencia decremente solo bajo mezcla de estado cuánticos, es decir:

$$\sum_k p_k Co(\rho_k) \geq Co\left(\sum_k p_k \rho_k\right) \tag{4.98}$$

   para todo conjunto de estados $\{\rho_k\}$ y todo $p_k \geq 0$, con $\sum_k p_k = 1$.

   Esta condición junto con la anterior implican el requerimiento (2), ya que $Co(\mathcal{M}_{ICPPT}(\rho)) = Co\left(\sum_k p_k \rho_k\right) \leq \sum_k p_k Co(\rho_k) \leq Co(\rho)$.

4.6.3 Entropía relativa de coherencia

Nuevamente, es posible definir una medida de la coherencia basada en la mínima distancia del estado de interés al conjunto de los estados incoherentes:

$$Co_d(\rho) = \min_{\{\rho_{\text{in}} \in \mathcal{I}\}} d(\rho, \rho_{\text{in}}) \tag{4.99}$$

La distancia empleada deber ser contractiva bajo mapas completamente positivos y que preservan la traza si se desea cumplir con la propiedad (2), además debe ser conjuntamente convexa para cumplir con la propiedad (4).

Una buena opción es utilizar la entropía relativa, que se define como

$$S(\rho||\sigma) = \text{Tr}(\rho\log(\rho)) - \text{Tr}(\rho\log(\sigma)). \tag{4.100}$$

La medida inducida Co_{ER} cumple con la propiedades mencionadas y además admite la siguiente expresión cerrada

$$Co_{ER} = \min_{\{\rho_{\text{in}} \in \mathcal{I}\}} S(\rho||\rho_{\text{in}}) = S(\rho_{\text{diag}}) - S(\rho), \tag{4.101}$$

siendo S la entropía de von Neumann 4.19, $\rho = \sum_{i,j} \rho_{ij}|i\rangle\langle j|$ y $\rho_{\text{diag}} = \sum_i \rho_{ii}|i\rangle\langle i|$ que se obtiene simplemente de anular los elementos fuera de la diagonal de ρ.

4.7 Fenómenos observados en la evolución de correlaciones

Existen diferentes fenómenos que se presentan durante la evolución de las correlaciones cuánticas y clásicas en sistemas abiertos. Cada uno de ellos merece un estudio adecuado debido a las aplicaciones o a las dificultades que plantean para el desarrollo de la comunicación y la computación cuánticas.

Muerte súbita y renacimiento

La decoherencia generada por el ambiente sobre los sistemas cuánticos abiertos provoca inevitablemente la desaparición de sus correlaciones cuánticas. En algunos casos esta ”muerte“ de las correlaciones se da repentinamente cuando éstas decaen a cero en un tiempo finito. Al ocurrir tal fenómeno, se dice que la correlación sufre una “muerte súbita”. Este concepto fue introducido por Eberly y Yu en [48].

Se sabe que el fenómeno de muerte súbita ocurre para el entrelazamiento al tener ambientes disipativos [49]. Por otro lado, la discordia cuántica es robusta respecto a la muerte súbita para interacciones con reservorios [50].

En ocasiones, la correlación puede revivir luego de mantenerse nula por cierto lapso, aquí se dice que se observa un renacimiento o *revival* de ella. Tal fenómeno suele apreciarse para la dinámica del entrelazamiento en sistemas no markovianos, debido a los efectos de memoria.

Nacimiento súbito

Bajo ciertas circunstancias, un sistema puede comenzar no teniendo una correlación cuántica, que luego de un tiempo sí se presenta. En este caso se habla de nacimiento súbito.

Cambio súbito

El cambio súbito de una correlación se observa cuando su dinámica durante la evolución de un sistema presenta una discontinuidad en su derivada temporal para ciertos puntos, y se observan transiciones súbitas entre diferentes comportamientos dinámicos.

Se trata de un fenómeno que ocurre frecuentemente para la discordia cuántica y las correlaciones clásicas cuando la base que minimiza las expresiones 4.43 y 4.52 cambia repentinamente.

Freezing

El *freezing* (o congelamiento) de las correlaciones es el nombre que se le otorga a la constancia de ellas por cierto período durante su evolución. Se aprecia comúnmente para medidas geométricas de la discordia cuántica.

Bajo canales locales no disipativos, se observó que la discordia cuántica basada en las medidas se mantiene constante durante intervalos temporales finitos en evoluciones markovianas [51], y para múltiples intervalos [52] o para todo tiempo [53] en condiciones no markovianas, al considerar dos qubits no interactuantes inicialmente con forma diagonal de Bell. Contrariamente, este fenómeno no se manifiesta para ninguna medida de entrelazamiento.

En [54] se mostró que todas las funciones de distancia que respetan las propiedades de invariancia bajo trasposición, convexidad y contractividad bajo canales cuánticos

da lugar a medidas geométricas de correlaciones cuánticas (excepto para el entrelazamiento) que exhiben *freezing*. Es decir que el fenómeno es independiente de la medida adoptada, lo que da razones para suponer que no se trata de una simple consecuencia matemática.

II

5. Estudio de correlaciones: sistemas markovianos y no markovianos

El capítulo que aquí comienza se encuentra dedicado al estudio de la evolución de la concurrencia, la discordia cuántica, la entropía relativa de coherencia y las correlaciones clásicas en dos casos: por un lado el que atañe a dos qubits interactuando con reservorios independientes a temperatura cero y por otro lado el de dos qubits en interacción con un ambiente común también a temperatura cero.

Se seleccionaron diferentes estados iniciales, corrientemente estudiados en la literatura, con un enfoque en el análisis de los fenómenos de muerte y nacimiento súbitos, renacimiento y cambio súbito, en presencia de ambientes markovianos y no markovianos; y en la búsqueda de relaciones entre las diferentes correlaciones.

5.1 Dos qubits en reservorios independientes

La presente sección se encuadra en el estudio de un sistema de dos qubits cada uno interactuando localmente con su propio reservorio bosónico a temperatura cero. Tal sistema fue previamente introducido en 3.3.3.

Se considera un estado inicial con forma X en la base estándar 2.18, de modo tal que la matriz densidad evolucionada $\rho(t)$ mantiene esa misma forma. Sus elementos están dados por 3.50

$$\begin{aligned}
\rho_{11}(t) =& \rho_{11}(0)P_t^2 \\
\rho_{22}(t) =& \rho_{22}(0)P_t + \rho_{11}(0)P_t(1-P_t) \\
\rho_{33}(t) =& \rho_{33}(0)P_t + \rho_{11}(0)P_t(1-P_t) \\
\rho_{44}(t) =& 1 - \rho_{11}(t) - \rho_{22}(t) - \rho_{33}(t) \\
\rho_{23}(t) =& \rho_{23}(0)P_t \\
\rho_{14}(t) =& \rho_{14}(0)P_t,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

donde P_t fue explicitado en 5.2:

$$P_t = e^{-\lambda t}\left(\cos\left(\frac{dt}{2}\right) + \frac{\lambda}{d}\sin\left(\frac{dt}{2}\right)\right)^2, \tag{5.2}$$

con $d = \sqrt{2\gamma_0\lambda - \lambda^2}$, donde λ define el ancho espectral del acoplamiento y γ_0 representa la tasa de decaimiento de los átomos.

5.1.1 Estado inicial $|\psi_1\rangle = \alpha\,|00\rangle + \beta\,|11\rangle$

Dinámica no markoviana

Se pretende analizar el caso en el que el estado inicial es un estado puro superposición de los dos qubits en su estado fundamental y los dos en su estado excitado, de la forma

$$|\psi_1\rangle = \alpha\,|00\rangle + \beta\,|11\rangle \tag{5.3}$$

con $|\alpha|^2+|\beta|^2 = 1$, y el estudio se restringirá a los casos en los que la matriz densidad sea real.

Los elementos de la matriz densidad inicial $\rho(0) = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ están dados en la base estándar por:

$$\begin{aligned}
\rho_{11}(0) &= 1-\alpha^2\\
\rho_{22}(0) &= \rho_{33}(0) = 0\\
\rho_{44}(0) &= \alpha^2\\
\rho_{14}(0) &= \alpha\sqrt{1-\alpha^2}\\
\rho_{23}(0) &= 0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

La matriz evolucionada $\rho(t)$ es una mezcla y tiene la forma

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & 0 & 0 & \rho_{14}(t)\\ 0 & \rho_{22}(t) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \rho_{33}(t) & 0\\ \rho_{14}(t) & 0 & 0 & \rho_{44}(t)\end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

donde

$$\begin{aligned}
\rho_{11}(t) &= (1-\alpha^2)P_t^2\\
\rho_{22}(t) &= \rho_{33}(t) = (1-\alpha^2)P_t(1-P_t)\\
\rho_{44}(t) &= (1-\alpha^2)P_t^2 - 2(1-\alpha^2)P_t(1-P_t)\\
\rho_{14}(t) &= \alpha\sqrt{1-\alpha^2}P_t
\end{aligned} \tag{5.6}$$

• Discordia cuántica

Comenzando el estudio con la dinámica de la discordia cuántica, es necesario destacar que, al cumplirse la condición 4.49, es decir

$$|\sqrt{\rho_{11}(t)\rho_{44}(t)} - \sqrt{\rho_{22}(t)\rho_{33}(t)}| \leq |\rho_{23}(t)| + |\rho_{14}(t)|, \tag{5.7}$$

la expresión 4.50 ($D = \min\{D_1, D_2\}$) puede utilizarse para obtener los valores exactos de la discordia y las correlaciones clásicas para todo tiempo, todo α y todo valor de $\frac{\lambda}{\gamma_0}$. La demostración se desarrolla en la sección 8.1.1 del Apéndice.

Graficando $D_2 - D_1$ en función del parámetro α y de P_t (Apéndice 8.1.2) se observa que esta diferencia es siempre positiva, es decir que $\min\{D_1, D_2\} = D_1$. Por lo tanto, para este tipo de estados iniciales, la discordia cuántica evoluciona siempre manteniéndose igual a D_1. Esto a su vez implica que en su evolución no se manifestará el fenómeno de cambio súbito.

• Discordia cuántica y entropía relativa de coherencia

Como paso previo, se deja demostrada aquí una propiedad de la entropía relativa de coherencia, que se utilizará tanto en esta sección como en las siguientes.

Propiedad La entropía relativa de coherencia para estados X es siempre igual a la expresión D_2 en la fórmula analítica de la discordia 4.50.

Demostración

$$D_2(\rho_X) = \sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i - \sum_i \rho_{ii} \log_2 \rho_{ii} = -S(\rho_X) + S(\rho_{diag}) = Co(\rho_X) \tag{5.8}$$

donde λ_i son los autovalores de ρ_X y ρ_{diag} es la matriz diagonal que surge de anular las coherencias de ρ_X.□

Este resultado permite relacionar la discordia cuántica con la entropía relativa de coherencia analíticamente cuando se está en las regiones restringidas por 4.48 o 4.49 para las cuales la coherencia es siempre mayor o igual a la discordia. Es probable que este resultado sea general, teniendo en consideración que la expresión analítica de la discordia 4.50 es siempre una buena aproximación de su valor real.

Tal resultado deja también al descubierto la posible existencia de un nexo subyacente entre diferentes correlaciones cuánticas, relación que aún es debatida y no se comprende completamente. Vale cuestionarse si se trata meramente de un vínculo resultante de la matemática con la que se definieron los cuantificadores de correlaciones o si hay una relación conceptual más profunda.

Para el caso que aquí compete, a partir del resultado mencionado arriba se desprende que la discordia cuántica siempre se mantendrá con valores inferiores a la coherencia,

excepto para el tiempo inicial $t = 0$ en el que la discordia cuántica iguala a la coherencia (Apéndice 8.1.5).

• Discordia cuántica y correlaciones clásicas

Otra característica a destacar es que para este tipo de dinámicas las correlaciones clásicas coinciden con la discordia cuántica, para todo tiempo, todo α y para todo valor del parámetro $\frac{\lambda}{\gamma_0}$. La prueba se encuentra en la sección 8.1.4 del Apéndice. Esto se puede interpretar diciendo que las correlaciones cuánticas y las clásicas tienen el mismo peso en la magnitud de las correlaciones totales.

• Concurrencia en comparación con la otras correlaciones

Pasando al análisis de la evolución de la concurrencia, se sabe que el valor de ésta viene dado por la ecuación 4.27; en el caso estudiado la verificación de la condición 4.49 es equivalente a mostrar que

$$|\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} \geq |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}, \tag{5.9}$$

y la expresión para la concurrencia se reduce a:

$$C = \max\{0, |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}\} = \max\{0, 2\sqrt{1-\alpha^2}P_t(\alpha - \sqrt{1-\alpha^2}(1-P_t))\} \tag{5.10}$$

La discordia cuántica es una función positiva y creciente con P_t (Apéndice 8.1.2), por lo que alcanza su mínimo cuando $P_t = 0$, caso en el que ella también es nula. Como P_t se anula para valores discretos del tiempo $t_n = \frac{2}{d}(n\pi - \text{Arctan}\left(\frac{d}{\lambda}\right))$ (con n entero) [55], la discordia también presenta ceros discretos. Ello quiere decir que no se observarán períodos con discordia nula y luego *revivals* de ésta, así como no se presenciará muerte súbita. Lo mismo ocurre con la coherencia, como se muestra en las Figuras 5.2 y 5.3.

Estos resultados contrastan con el comportamiento de la concurrencia. Para visualizar lo recién mencionado, se estudia el comportamiento de la concurrencia, la coherencia y la discordia (por ende las correlaciones clásicas) fijando $\frac{\lambda}{\gamma_0} = 0.08$ y variando el parámetro α.

En la Figura 5.1 se muestra el valor de la concurrencia en función de α y del tiempo adimensionado $\tau = \gamma_0 t$. La independencia de los reservorios descarta la observación del fenómeno de nacimiento súbito, por lo que el sistema siempre debe comenzar entrelazado con el fin de observar períodos con valores no nulos de la concurrencia. Sin embargo, sí se presencia la muerte súbita y el renacimiento del entrelazamiento para ciertos intervalos de α.

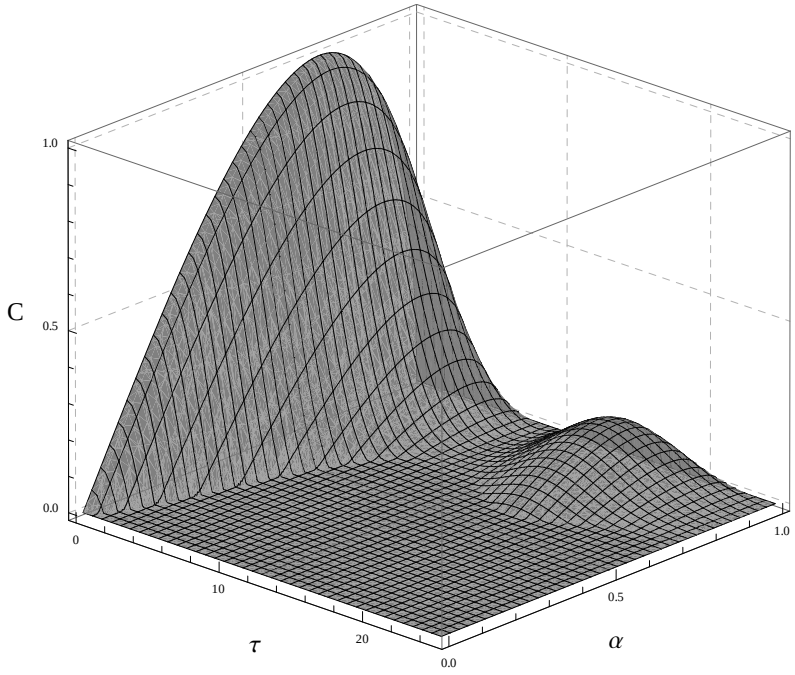


Figura 5.1: Concurrencia en función de $\tau = \gamma_0 t$ y α, para el estado inicial $|\psi_1\rangle = \alpha\,|00\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|11\rangle$ y $\lambda/\gamma_0 = 0.08$.

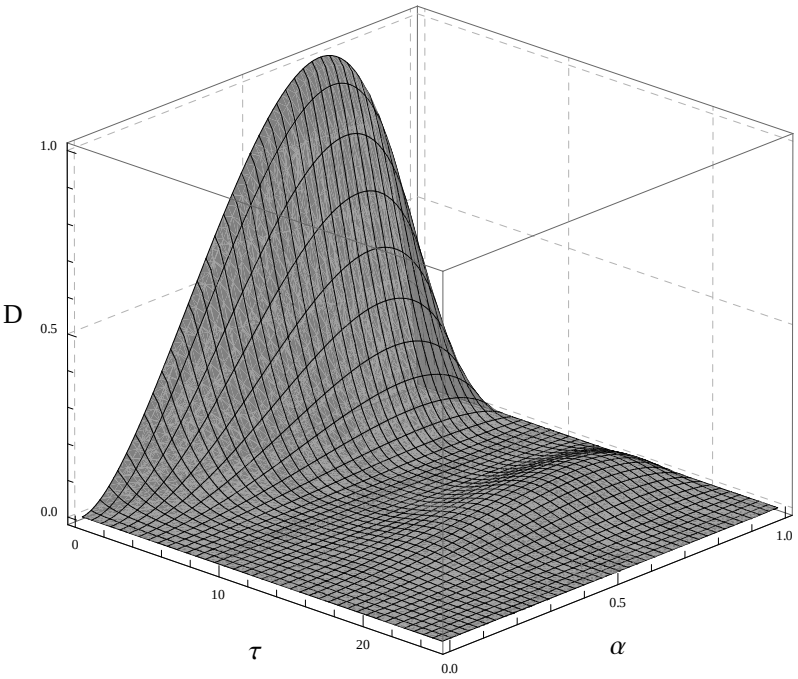


Figura 5.2: Discordia cuántica (correlaciones clásicas) en función de $\tau = \gamma_0 t$ y α, para el estado inicial $|\psi_1\rangle = \alpha\,|00\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|11\rangle$ y $\lambda/\gamma_0 = 0.08$.

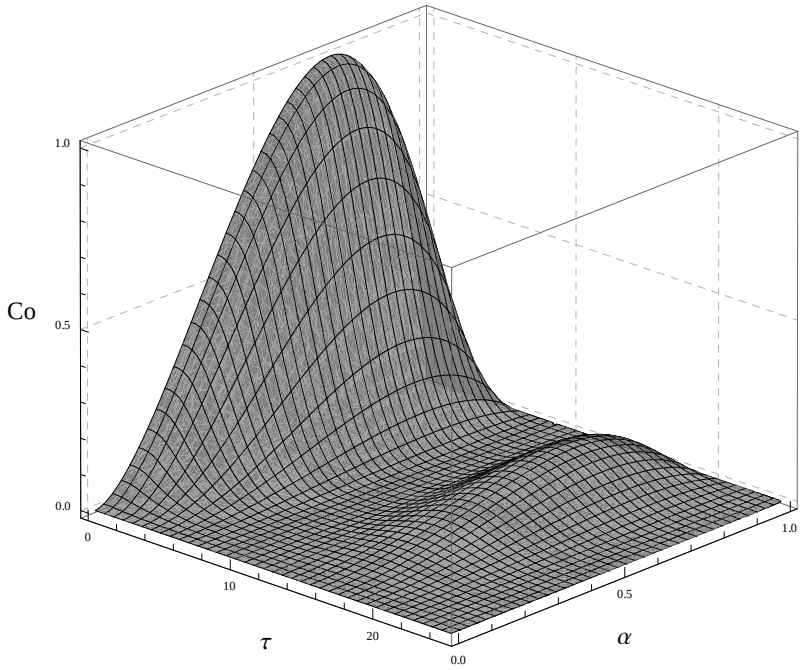


Figura 5.3: Entropía relativa de coherencia en función de $\tau = \gamma_0 t$ y α, para el estado inicial $|\psi_1\rangle = \alpha\,|00\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|11\rangle$ y para $\lambda/\gamma_0 = 0.08$.

Se distinguen tres regiones con claros comportamientos diferentes del entrelazamiento:

(I) una zona en la que la concurrencia presenta muerte súbita y no renacimientos,

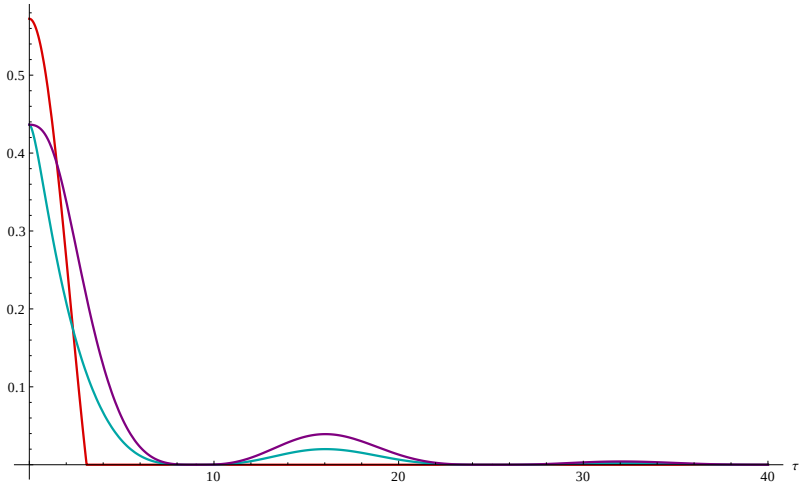
(II) una región en la que la concurrencia presenta muerte súbita y renacimientos, y

(III) una región en la no se observa muerte súbita de la concurrencia.

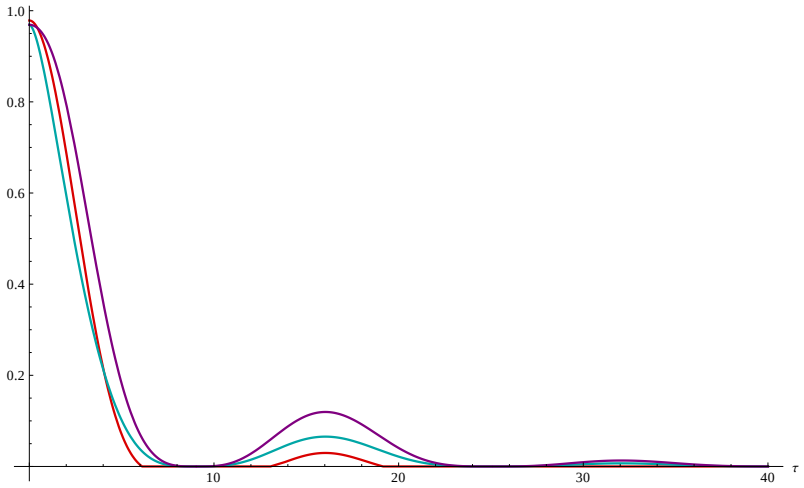
Los renacimientos del entrelazamiento, así como las oscilaciones de las otras correlaciones, en este caso se deben a los efectos de memoria en la dinámica no markoviana entre el qubit y el ambiente, y pueden ser explicados como consecuencia del flujo de correlaciones entre los dos qubits y las diferentes partes del ambiente. En particular, pueden crearse correlaciones entre los dos reservorios independientes.

En la Figura 5.4 se muestra la dinámica de la discordia o las correlaciones clásicas, la concurrencia y la entropía relativa de coherencia para $\alpha = 0.3$, $\alpha = 0.63$ y $\alpha = 0.97$ correspondientes a las regiones (I), (II) y (III) respectivamente.

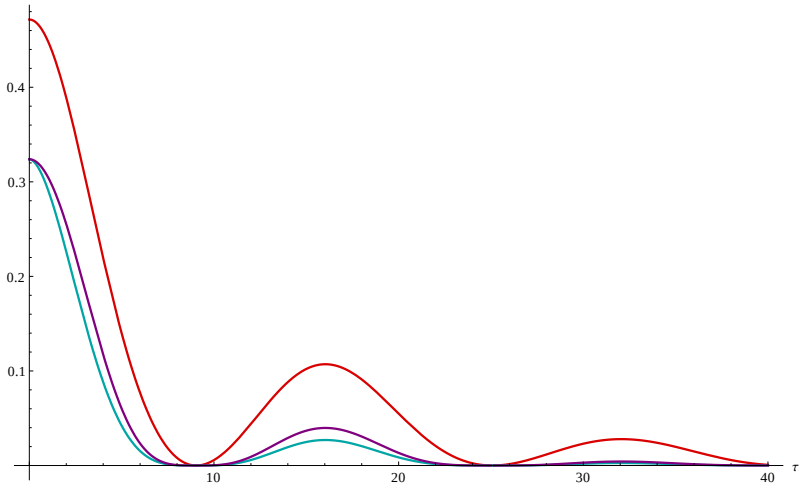
En 5.4a y 5.4b se observa que la concurrencia y la discordia se cruzan, es decir que no es posible determinar un orden relativo entre ellas. Sin embargo, en 5.4c el entrelazamiento se mantiene siempre mayor a la discordia y la coherencia, diferenciándose así los casos en los que se exhiben lapsos con entrelazamiento nulo seguidos de su renacimiento, de los que no. Esto se debe a que el entrelazamiento comienza siendo mayor que las otras correlaciones y al anularse para tiempos dicretos, esos tiempos deben ser los mismos para los cuales se anulan las otras correlaciones. Su comportamiento parece estar regulado por la función P_t más que por una relación con las otras correlaciones.



(a) $\alpha = 0.3$



(b) $\alpha = 0.63$

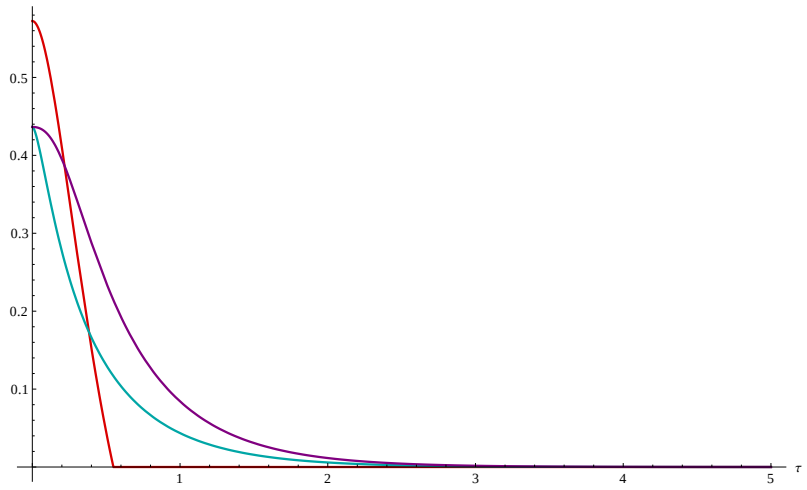


(c) $\alpha = 0.97$

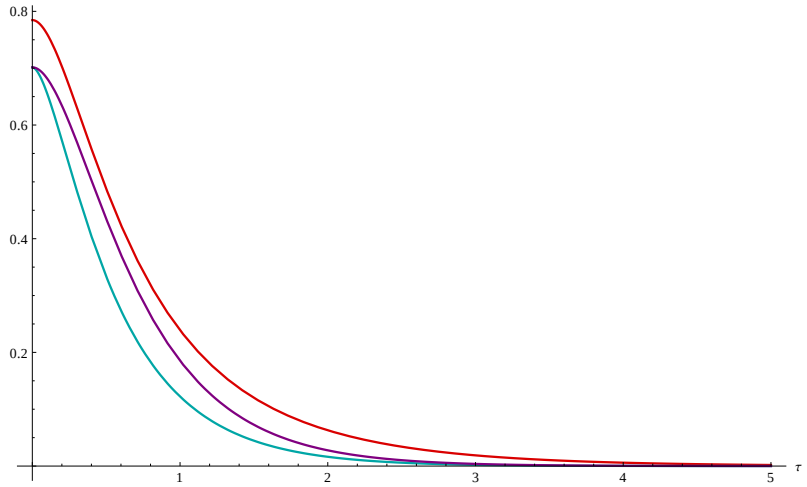
Figura 5.4: Concurrencia (rojo), discordia cuántica o correlaciones clásicas (cian) y entropía relativa de coherencia (violeta), en función de τ, para el estado inicial $|\psi_1\rangle = \alpha\,|00\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|11\rangle$, con $\lambda/\gamma_0 = 0.08$.

Dinámica markoviana

A modo de comparación, en la Figura 5.5 se representan las evoluciones de las correlaciones para el mismo tipo de estados iniciales, pero bajo una dinámica markoviana dada por el parámetro $\lambda/\gamma_0 = 5$, para valores de α iguales a 0.3 y 0.9.



(a) $\alpha = 0.3$



(b) $\alpha = 0.9$

Figura 5.5: Concurrencia (rojo), discordia cuántica o correlaciones clásicas (cian) y entropía relativa de coherencia (violeta), en función de τ, para el estado inicial $|\psi_1\rangle = \alpha\,|00\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|11\rangle$, con $\lambda/\gamma_0 = 5$.

Bajo la dinámica markoviana, el entrelazamiento parece tener dos comportamientos diferentes: uno en el que se aprecia una muerte súbita marcada (Figura 5.5a) y otro en el que no (Figura 5.5b), distinguiéndose nuevamente la ausencia y presencia, respectivamente, de un orden relativo entre las diferentes correlaciones. Por otro

lado, tanto la dicordia como la coherencia no exhiben un cambio significativo en su comportamiento para estos dos casos.

En general, no se constata un comportamiento particular de la discordia (o las correlaciones clásicas) y la coherencia que permita predecir la existencia de renacimientos del entrelazamiento. Aquí, el fenómeno de *revival* parece ocurrir meramente debido al flujo de información entre el sistema y el ambiente en el régimen no markoviano.

5.1.2 Estado inicial $|\psi_2\rangle = \alpha\,|01\rangle + \beta\,|10\rangle$

Para estados iniciales que son una superposición de estados puros en los que uno de los qubits se encuentra en su estado fundamental y el otro en su estado excitado, es decir de la forma

$$|\psi_2\rangle = \alpha\,|01\rangle + \beta\,|10\rangle\,, \tag{5.11}$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, y α y β reales, la matriz densidad en $t = 0$ tiene forma X y sus elementos son:

$$\begin{aligned} \rho_{11}(0) &= \rho_{44} = \rho_{14}(0) = 0 \\ \rho_{22}(0) &= 1 - \alpha^2 \\ \rho_{33}(0) &= \alpha^2 \\ \rho_{23}(0) &= \alpha\sqrt{1-\alpha^2} \end{aligned} \tag{5.12}$$

La matriz densidad $\rho(t)$ sigue manteniendo la forma X durante la evolución y está dada por:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22}(t) & \rho_{23}(t) & 0 \\ 0 & \rho_{23}(t) & \rho_{33}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44}(t) \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

donde

$$\begin{aligned} \rho_{22}(t) &= (1-\alpha^2)P_t \\ \rho_{33}(t) &= \alpha^2 P_t \\ \rho_{23}(t) &= \alpha\sqrt{1-\alpha^2}P_t \\ \rho_{44}(t) &= 1 - P_t \end{aligned} \tag{5.14}$$

Nuevamente se trata de estados para los cuales se cumple la condición 4.49 (Apéndice 8.2.1), por lo que la expresión 4.50 puede utilizarse para obtener los valores exactos de la discordia y las correlaciones clásicas, para todo tiempo, todo α y todo valor de $\frac{\lambda}{\gamma_0}$.

En la Figura 5.6 se muestra el valor de la concurrencia en función de α y del tiempo adimensionado $\tau = \gamma_0 t$ para $\lambda/\gamma_0 = 0.08$, mientras que en 5.7 y 5.8 se grafican respectivamente la discordia y las correlaciones clásicas en función de α y τ para el mismo valor del parámetro λ/γ_0.

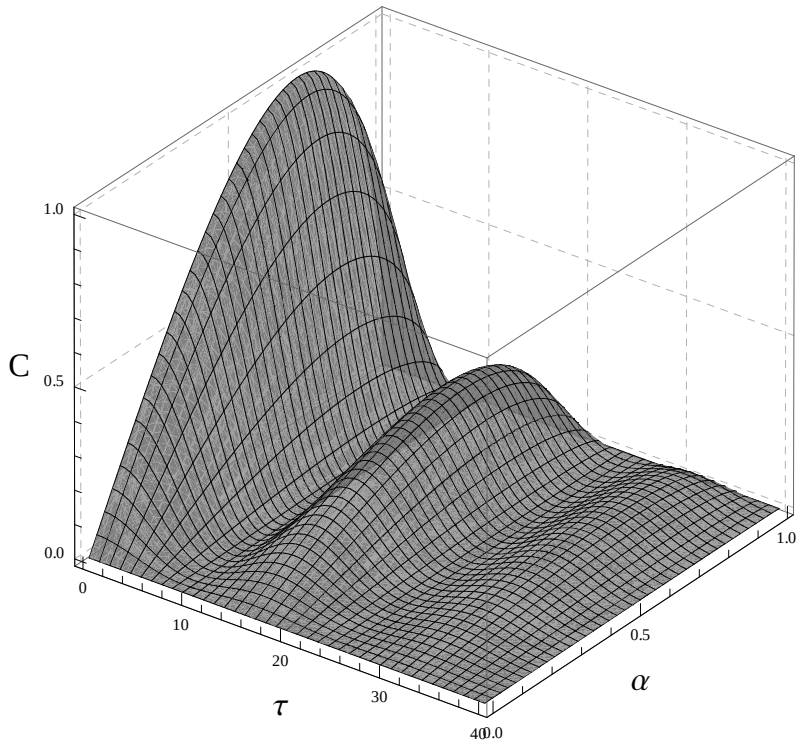


Figura 5.6: Concurrencia en función de $\tau = \gamma_0 t$ y α, para el estado inicial $|\psi_2\rangle = \alpha\,|01\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|10\rangle$ y $\lambda/\gamma_0 = 0.08$.

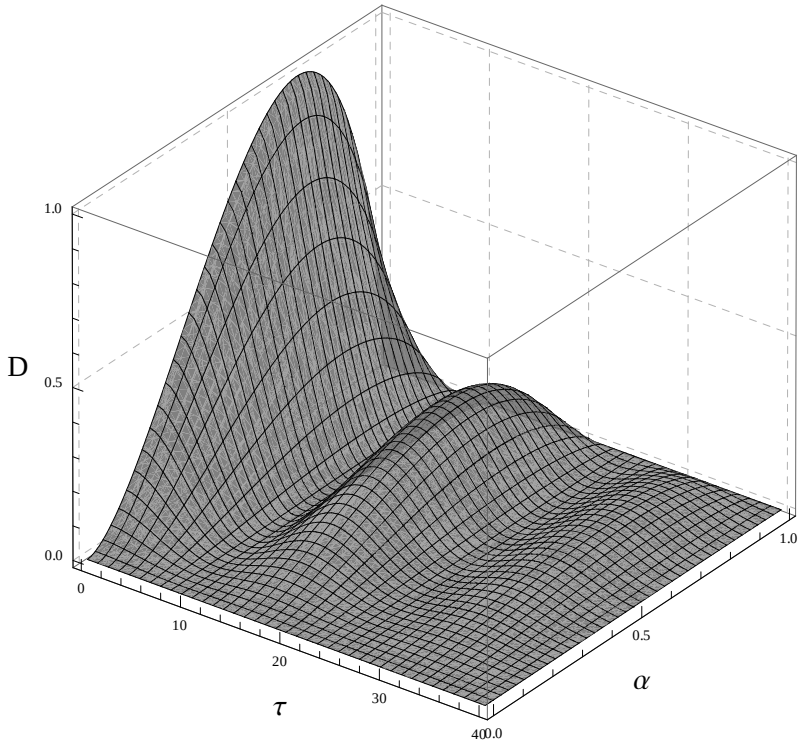


Figura 5.7: Discordia en función de $\tau = \gamma_0 t$ y α, para el estado inicial $|\psi_2\rangle = \alpha\,|01\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|10\rangle$ y $\lambda/\gamma_0 = 0.08$.

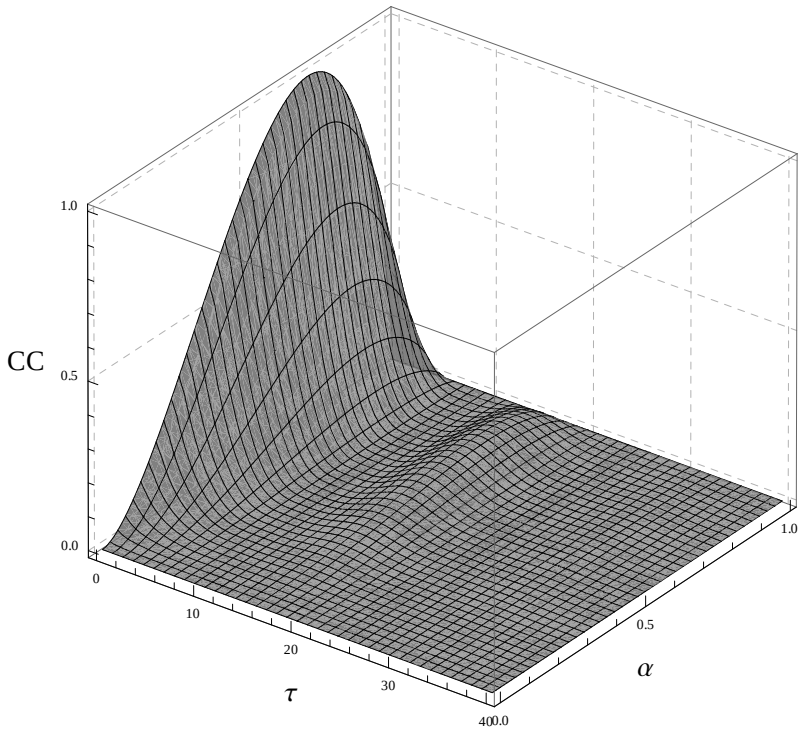


Figura 5.8: Correlaciones clásicas en función de $\tau = \gamma_0 t$ y α, para el estado inicial $|\psi_2\rangle = \alpha\,|01\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|10\rangle$ y para $\lambda/\gamma_0 = 0.08$.

Como se observa en la Figura 5.6, a diferencia del caso anterior, ahora no es posible apreciar el *revival* del Entrelazamiento para ningún α. La discordia y la coherencia presentan un comportamiento similar y están sujetas cualitativamente al mismo tipo de evolución que el explicitado en la sección anterior. Si bien tanto la discordia como la coherencia y las correlaciones clásicas tienen inicialmente el mismo valor, las correlaciones clásicas parecen decaer más rápidamente que las otras, dejando ver un comportamiento marcadamente diferente al presenciado para estados iniciales de la forma estudiada en la sección precedente, caso en el cual eran iguales a la discordia. Esto se puede apreciar en la Figura 5.9.

Por otro lado, se constata un orden relativo entre las diferentes correlaciones, manteniéndose el entrelazamiento siempre con valores superiores a los de la discordia y las correlaciones clásicas y superiores o iguales a los de la coherencia, para todo valor de α y todo tiempo.

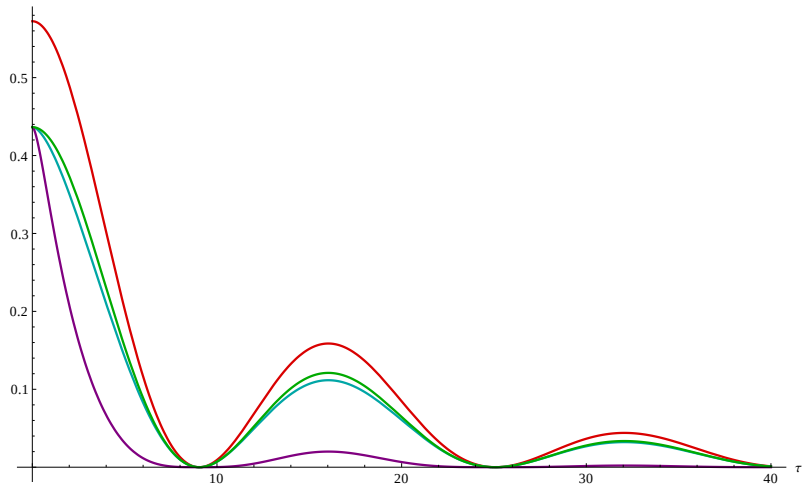


Figura 5.9: Concurrencia (rojo), discordia cuántica (cian), correlaciones clásicas (violeta) y entropía relativa de coherencia (verde), en función de τ, para el estado inicial $|\psi_2\rangle = \alpha\,|01\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|10\rangle$ con $\alpha = 0.3$ y $\lambda/\gamma_0 = 0.08$.

Cuando $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, se presenta un comportamiento que merece destacarse. En este caso, la concurrencia es igual a la coherencia para todo tiempo; ambas mayores que la discordia. Este resultado se muestra en la sección 8.2.2 del Apéndice.

5.2 Dos qubits interactuando con un reservorio común a temperatura cero

Dinámica markoviana

En esta sección se analiza la evolución de un sistema de dos qubits, que pueden ser átomos de dos niveles, acoplados a un ambiente bosónico común a temperatura cero, en la aproximación markoviana. La dinámica de tal sistema se discutió en la sección 3.3.3 de la tesis, donde se dejó expresada la evolución de la matriz densidad del sistema en la base colectiva 3.49.

Tomando los átomos en un estado inicial que sea una superposición de los estados del sistema en los que ningún átomo está excitado o los dos lo están, es decir de la forma

$$|\psi\rangle = \alpha\,|11\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|00\rangle\,, \tag{5.15}$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$, los elementos de la matriz densidad evolucionada se reducen a

$$\begin{aligned}
\rho_{ss}(t) &= \alpha e^{-\gamma_0 t}\frac{\gamma_0+\gamma_{12}}{\gamma_0-\gamma_{12}}\left(e^{-\gamma_{12}t}-e^{-\gamma_0 t}\right)\\
\rho_{ee}(t) &= \alpha e^{-2\gamma_0 t}\\
\rho_{eg}(t) &= \sqrt{\alpha(1-\alpha)}e^{-\gamma_0 t} \qquad\qquad ,\\
\rho_{aa}(t) &= \alpha e^{-\gamma_0 t}\frac{\gamma_0-\gamma_{12}}{\gamma_0+\gamma_{12}}\left(e^{-\gamma_{12}t}-e^{-\gamma_0 t}\right)\\
\rho_{gg}(t) &= 1-\rho_{ss}(t)-\rho_{aa}(t)-\rho_{ee}(t)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

siendo γ_{12} el amortiguamiento colectivo que depende de $k = \omega_0/c$, con ω_0 la frecuencia de transición entre los átomos, y de la distancia de separación de los qubits r_{12}.

El pasaje a la base computacional se explicita en la sección 8.3 del apéndice.

En la Figuras 5.10, 5.11, 5.12 y 5.13 se representan respectivamente la concurrencia, la discordia, las correlaciones clásicas y la entropía relativa de coherencia en función del parámetro α y del tiempo adimensionado $\tau = \gamma_0 t$, para $kr_{12} = \pi/10$.

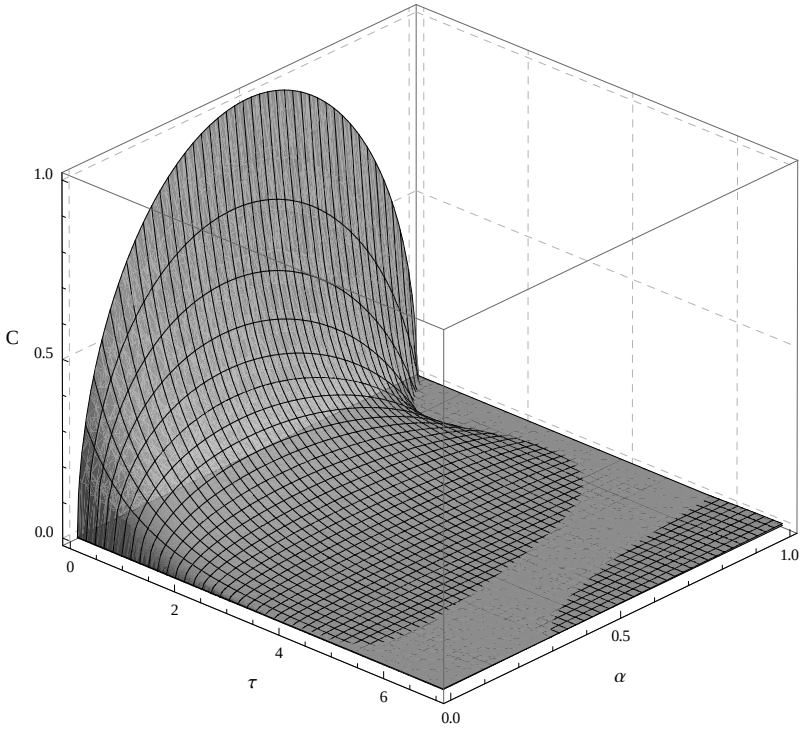


Figura 5.10: Concurrencia en función de $\tau = \gamma_0 t$ y α, para el estado inicial $|\psi\rangle = \alpha\,|11\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|00\rangle$ y $kr_{12} = \pi/10$.

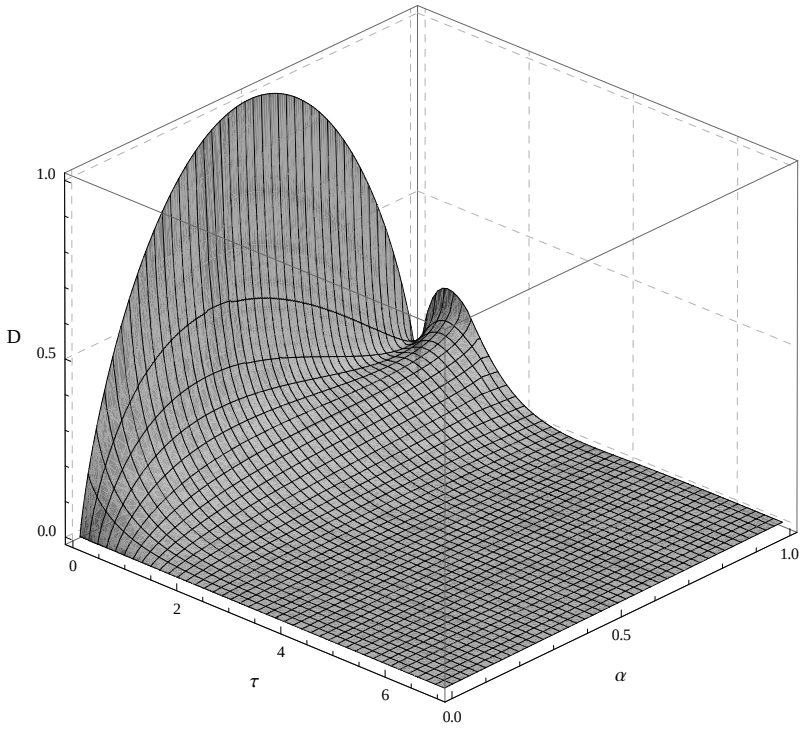


Figura 5.11: Discordia en función de $\tau = \gamma_0 t$ y α, para el estado inicial $|\psi\rangle = \alpha\,|11\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|00\rangle$ y $kr_{12} = \pi/10$.

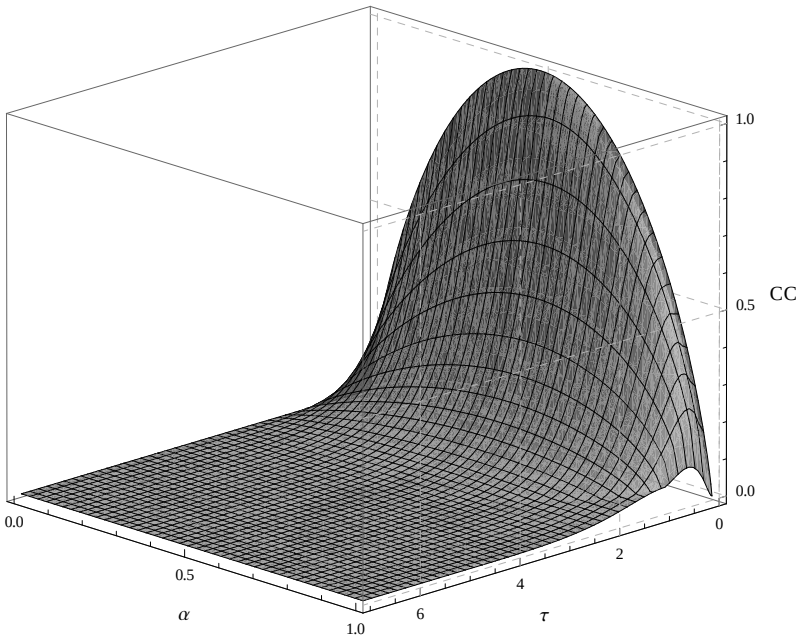


Figura 5.12: Correlaciones clásicas en función de $\tau = \gamma_0 t$ y α, para el estado inicial $|\psi\rangle = \alpha\,|11\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|00\rangle$ y $kr_{12} = \pi/10$.

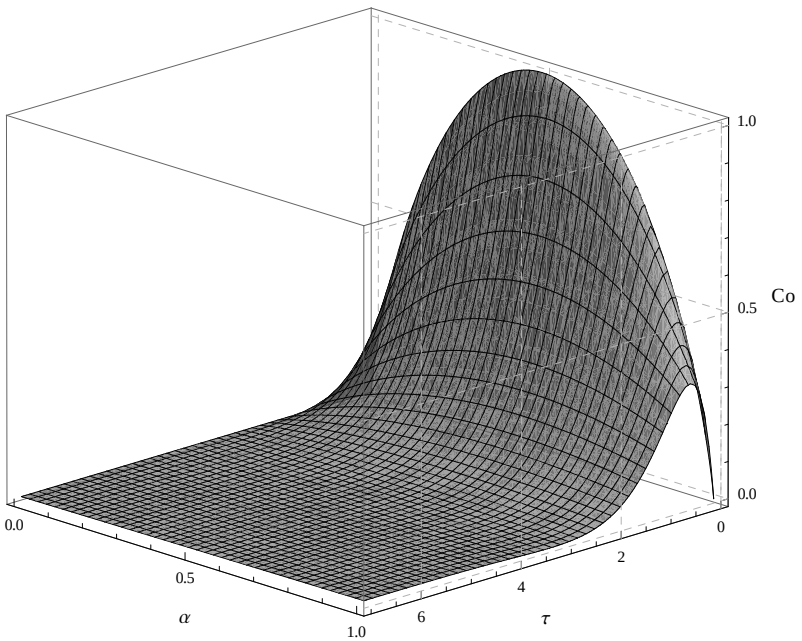


Figura 5.13: Entropía relativa de coherencia en función de $\tau = \gamma_0 t$ y α, para el estado inicial $|\psi\rangle = \alpha\,|11\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|00\rangle$ y $kr_{12} = \pi/10$.

• Concurrencia

En 5.1.1 se observó que cuando no se tiene acoplamiento entre los qubits y se comienza con un estado incial de la forma $|\psi\rangle = \alpha|11\rangle + \sqrt{1-\alpha}|00\rangle$, el entrelazamiento sufre muerte súbita y en ningún tiempo posterior revive. Sin embargo, al tener un reservorio común la concurrencia presenta muerte súbita y renacimiento para todo valor de α, incluso siendo que el sistema se estudia en la aproximación markoviana.

Se distinguen tres regiones para el comportamiento temporal del entrelazamiento en función de α:

I) una zona en la que se observa una muerte súbita de la concurrencia seguida rápidamente por su renacimiento,

II) una segunda región que está comprendida aproximadamente entre $\alpha_{inf} \approx 0.85$ y $\alpha_{sup} \approx 0.95$, para la cual la concurrencia presenta dos muertes súbitas y dos renacimientos, antes de decaer a cero debido a la decoherencia y

III) una tercera en la que el entrelazamiento presenta nuevamente una sola muerte súbita y un solo renacimiento espaciados por un largo período de ausencia.

El tiempo de la primera muerte súbita se aproxima al tiempo inicial a medida que el parámetro α aumenta, presentando su evolución una discontinuidad para $\alpha \approx \alpha_{inf}$.

A diferencia del caso no markoviano en el que se consideraron los ambientes bosónicos independientes, aquí los renacimientos del entrelazamiento no pueden estar relacionados a efectos de memoria, ya que el sistema se trabaja en la aproximación de Born-Markov. En esta situación los renacimientos se deben a la interacción directa entre los dipolos.

• Discordia cuántica

En lo que respecta a la discordia, se observan dos regiones: una en la que decae monótonamente y otra, a partir de valores de α próximos a la cota inferior de la región II del entrelazamiento (α_{inf}), en la que se observa una disminución inicial de la discordia, proseguida por un breve aumento antes de continuar disminuyendo. Para ningún valor del parámetro α se presencia un cambio súbito marcado de la discordia.

• Entropía relativa de coherencia

La entropía relativa de coherencia también presenta dos regiones claras: una primera zona en la que disminuye monótonamente y una seguna zona, a partir de α inferiores, pero próximos a α_{inf}, en la que inicialmente se crea coherencia y luego disminuye tendiendo a cero.

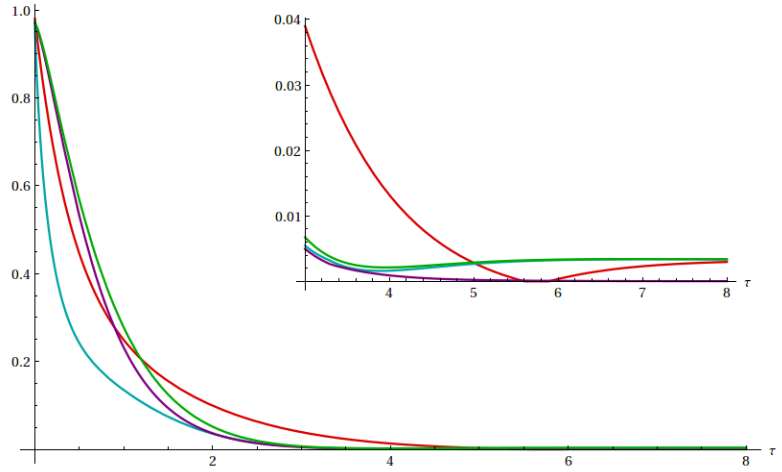
• Correlaciones clásicas

Por su parte, las correlaciones clásicas decrecen monótonamente con el tiempo, para $\alpha \lesssim 0.9$; mientras que para valores de $\alpha \approx 1$ presenta oscilaciones iniciales, en las que la correlación disminuye levemente para luego aumentar por un breve lapso antes de caer hasta anularse. Se destaca que estas oscilaciones se encuentran limitadas a tiempos próximos al inicial, no se presentan para tiempos mayores en contraste con lo que ocurre con las correlaciones cuánticas. Asimismo, a medida que α aumenta se hace marcada la presencia de un cambio súbito en las correlaciones clásicas. El tiempo en el que ocurre el cambio súbito se va distanciando del tiempo inicial al disminuir α.

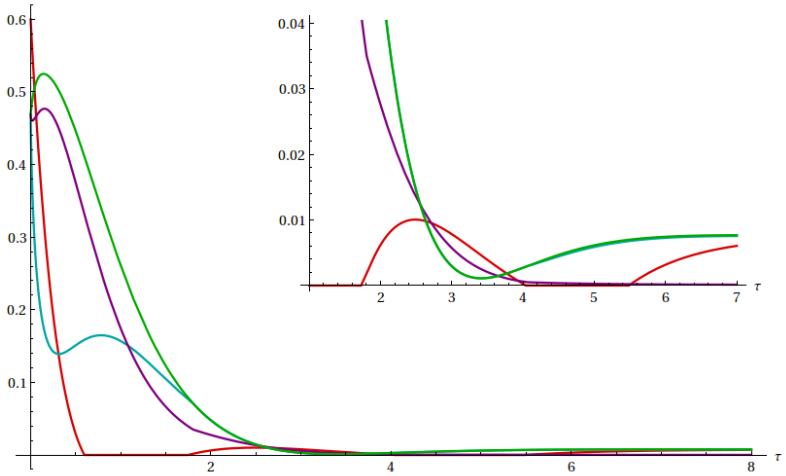
El cambio súbito corresponde al cambio de la base que minimiza las expresiones para las correlaciones clásicas 4.52 y para la discordia 4.43. Si bien el cambio de base no es marcado para la discordia, el tiempo en el que ocurre indica el momento en el que la coherencia pasa a tener el mismo valor que la discordia como se observa en las Figuras 5.14b y 5.14c.

• Concurrencia en comparación con las otras correlaciones

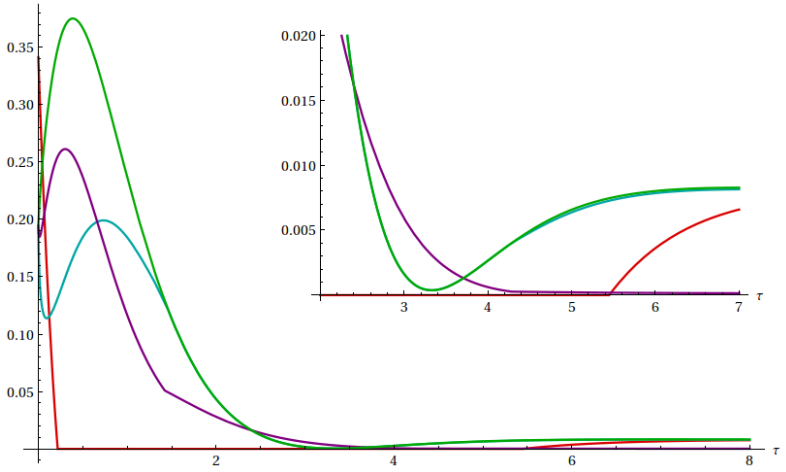
La concurrencia, la discordia, la entropía relativa de coherencia y las correlaciones clásicas presentan dinámicas similares para valores de $\alpha < \alpha_{inf}$; sin embargo, para α próximos a la unidad ($\alpha > \alpha_{inf}$), las evoluciones se diversifican observándose múltiples renacimientos del entrelazamiento, creación inicial de coherencia y discordia, y cambio súbito marcado en las correlaciones clásicas. En la Figura 5.14 se representan las correlaciones en función de τ, para $kr_{12} = \pi/10$ y para valores de α pertenecientes a las tres regiones destacadas del entrelazamiento, específicamente $\alpha = 0.4$, $\alpha = 0.9$ y $\alpha = 0.97$.



(a) $\alpha = 0.4$



(b) $\alpha = 0.9$



(c) $\alpha = 0.97$

Figura 5.14: Concurrencia (rojo), discordia cuántica (cian), correlaciones clásicas (violeta) y entropía relativa de coherencia (verde), en función de τ, para el estado inicial $|\psi\rangle = \alpha\,|11\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|00\rangle$, con $kr_{12} = \pi/10$. A la derecha de cada gráfica se encuentra una ampliación para cierto lapso.

Con el fin de relacionar la dinámica del entrelazamiento con la de las otras correlaciones, se buscó cualitativamente algún indicador en el comportamiento de la discordia, la coherencia o las correlaciones clásicas que evidenciara la aparición de múltiples renacimientos de la concurrencia. Sin embargo, no fue posible establecer ningún tipo de relación cualitativa entre las correlaciones que permitiera continuar el estudio en un rumbo analítico.

A modo de ejemplo, en la Figura 5.15 se grafican la discordia cuántica y la concurrencia para $\alpha = 0.9$ y $\alpha = 0.95$ en el entorno de los tiempos del primer y segundo renacimiento del entrelazamiento observados al tener $\alpha = 0.9$. Si bien existe una clara diferencia en el comportamiento de la concurrencia para estos dos valores de α, la discordia no presenta cambios significativos, manteniéndose con valores muy similares. Nuevamente no se constata un orden relativo para el entrelazamiento y la discordia cuántica.

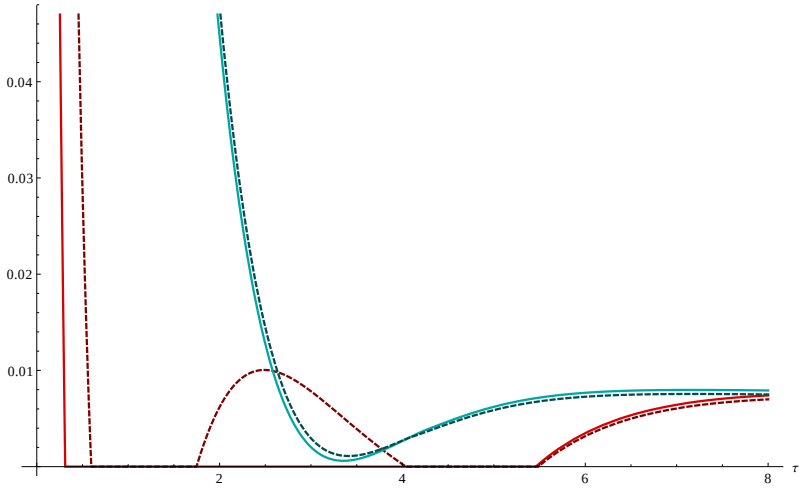


Figura 5.15: Concurrencia (rojo) y discordia cuántica (cian) en función de τ, para el estado inicial $|\psi\rangle = \alpha\,|11\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|00\rangle$, con $kr_{12} = \pi/10$. $\alpha = 0.9$ (línea a trazos) y $\alpha = 0.95$ (línea sólida).

Dinámica no markoviana

Con el fin de presentar un caso en el que se presencie el fenómeno de nacimiento súbito, se expone aquí la dinámica de este mismo sistema en su régimen no markoviano para un estado inicial mezcla de la forma

$$\rho_3 = r\,|\psi_2\rangle\,\langle\psi_2| + \frac{1-r}{4}\mathbb{1}, \tag{5.17}$$

siendo $|\psi_2\rangle = \alpha\,|01\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}\,|10\rangle$. Es decir que cuando $r = 1$ se obtiene el estado inicial $|\psi_2\rangle$ con el que se trabajó en el caso de los qubits independientes (5.1.2).

En las Figuras 5.16 y 5.17 se grafican respectivamente la concurrencia y la discordia cuántica en función de r y t, para $\lambda/\gamma_0 = 0.05$ y $\alpha = 1/\sqrt{2}$.

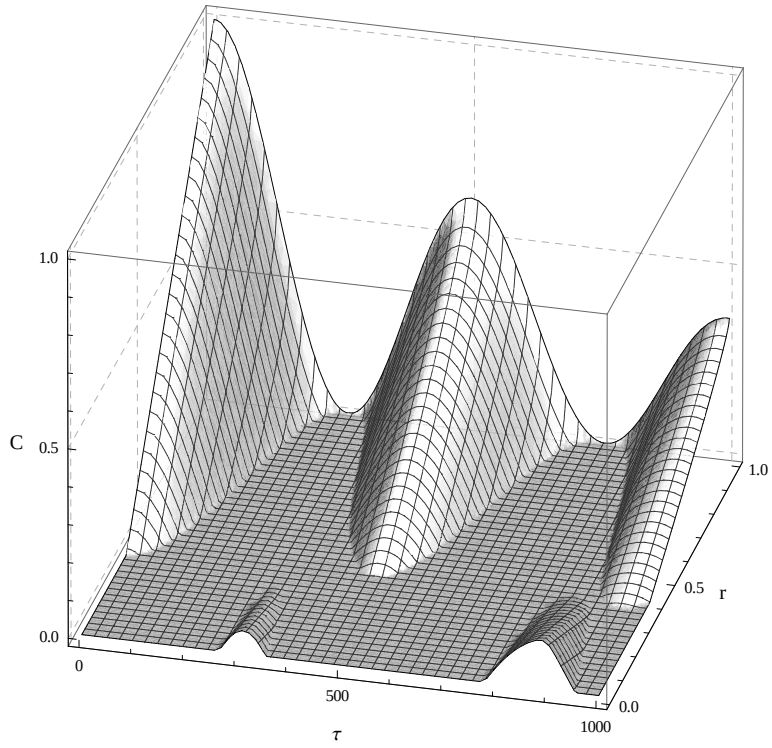


Figura 5.16: Concurrencia en función de r y t para $\alpha = 1/\sqrt{2}$ y $\lambda/\gamma_0 = 0.05$.

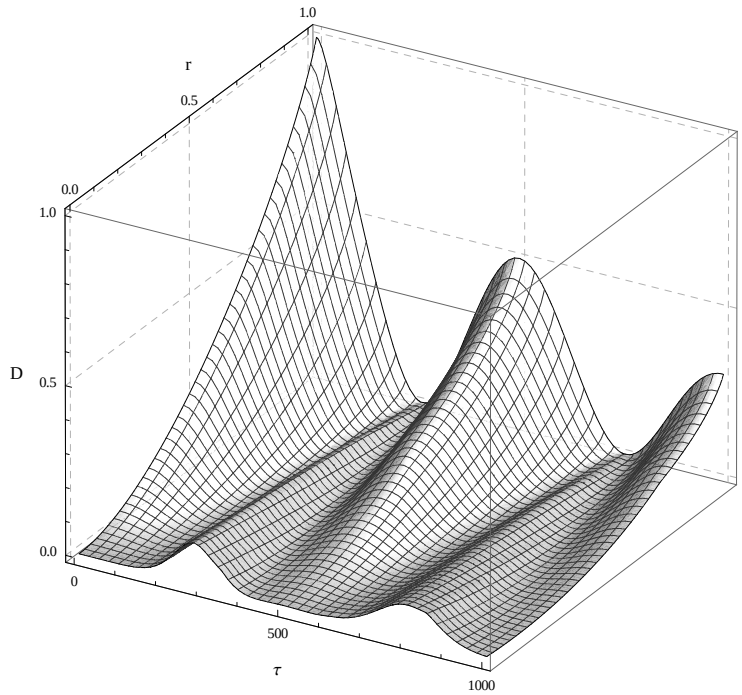


Figura 5.17: Discordia Cuántica en función de r y t para $\alpha = 1/\sqrt{2}$ y $\lambda/\gamma_0 = 0.05$.

En los casos analizados hasta el momento el máximo de las correlaciones se daba siempre en tiempo inicial o próximo a él, pero aquí se observa un comportamiento contrastante en la región correspondiente a r pequeños. Allí, las dinámicas de la discordia y la coherencia comienzan por tener un período de decremento hasta anularse, mientras el entrelazamiento es nulo, y luego se presenta un claro período de creación de estas correlaciones, donde se observa en primera instancia el crecimiento tanto de la discordia como de la entropía relativa de coherecia hasta alcanzar valores mayores que los iniciales, seguido por el nacimiento súbito del entrelazamiento. Luego, las correlaciones cuánticas continúan oscilando. Un ejemplo con tales características se muestra en la Figura 5.18, donde se representan las dinámicas de la concurrencia y de las expresiones D_1 y D_2 que aparecen en la fórmula analítica de la discordia 4.50 (siendo la discordia igual al mínimo entre D_1 y D_2, y la entropía relativa de coherencia igual a D_2), para $\alpha = 1/\sqrt{2}$, $r = 0.1$ y $\lambda/\gamma_0 = 0.05$.

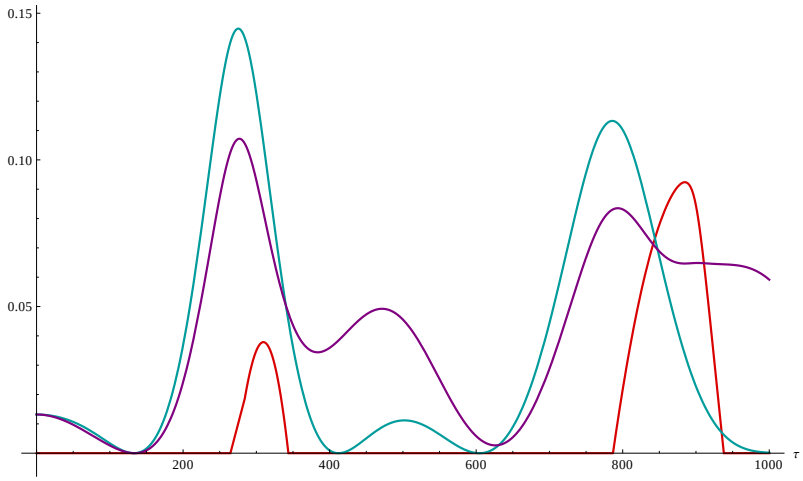


Figura 5.18: Concurrencia (rojo), D_1 (violeta), D_2 o entropía relativa de coherencia (cian) en función de t, para $\alpha = 1/\sqrt{2}$, $r = 0.1$ y $\lambda/\gamma_0 = 0.05$.

Por otro lado, las intersecciones de D_1 y D_2 señalan los múltiples cambios súbitos de la discordia cuántica, que por largos períodos pasa a tener el mismo valor que la entropía relativa de coherencia. Aquí tampoco se aprecia un orden relativo entre las correlaciones.

Para valores grandes de r el comportamiento de las tres correlaciones cuánticas se asemeja.

Este nuevo comportamiento observado parece derivar de la acción conjunta de los efectos de memoria debidos a la dinámica no markoviana y la presencia de un ambiente común.

6. Estudio de medidas geométricas de entrelazamiento y discordia

Una interrogante que surge constantemente a la hora de trabajar con correlaciones cuánticas es la de determinar en qué forma se relacionan el entrelazamiento y la discordia, los cuales aparentan ser conceptualmente muy diferentes. Con tal problemática en mente es que se decidió buscar relaciones dinámicas entre las correlaciones tomando el enfoque geométrico discutido en el cuarto capítulo. Para conseguirlo se estudiaron particularmente los conocidos canales: *phase damping*, *bit flip*, *phase flip*, *bit-phase flip* y *amplitude damping*.

6.1 Dos qubits sujetos al canal *phase damping*

En esta sección y las siguientes se estudia un sistema bipartito de dos qubits (A y B) donde cada subsistema interactúa con su propio ambiente local e independiente.

Sumado al estudio de los fénomenos de muerte súbita, cambio súbito y *freezing*, se busca hallar una relación dinámica entre entrelazamiento y discordia geométricos, con la normas traza y de Hilbert-Schmidt.

A continuación, se considera el caso de dos qubits cada uno sujeto al canal markoviano de *phase damping* (3.2.2), con ambientes simétricos, es decir con la misma probabilidad de cambio p. Para este tipo de dinámica, partiendo de un estado diagonal de Bell, es posible mostrar que el estado evolucionado mantiene siempre esa misma estructura. Suponiendo un estado inicial de la forma 2.20, con $\vec{r} = (r_1(0), r_2(0), r_3(0))$, y operadores de Kraus M_i^A y M_j^B $(i, j = 0, 1, 2)$ dados por 3.30, el vector correlación evolucionado queda expresado por (Apéndice 8.4.1):

$$\vec{r}_{\text{pd}} = r_1(0)(1-p)^2\hat{i} + r_2(0)(1-p)^2\hat{j} + r_3(0)\hat{k} \tag{6.1}$$

En la Figura 6.1 se representa el espacio de estados físicos diagonales de Bell, los estados separables y los clásicos, además de un ejemplo de trayectoria para este canal y los canales de las siguientes secciones.

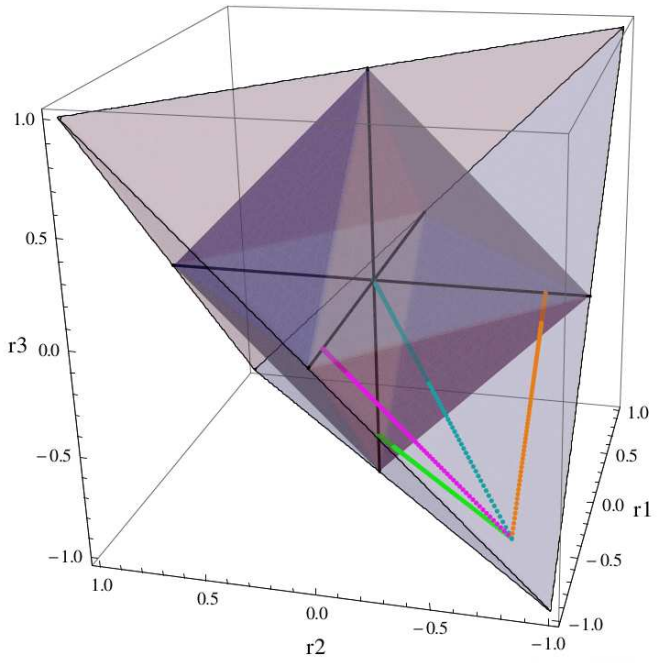


Figura 6.1: Representación en $\mathbb{R}^3$ del espacio de estados diagonales en la base de Bell. Los estados físicos se encuentran en el interior del tetraedro en gris claro. La región de los estados separables corresponde al interior del octaedro en gris oscuro. Los ejes, en negro, corresponden a los estados clásicos. La rectas representan las trayectorias de los canales *phase damping* o *phase flip* (verde), *bit flip* (magenta), *bit-phase flip* (anaranjado), *depolarizing* (cian), para un estado inicial diagonal de Bell con $c_1(0) = c_2(0) = c_3(0) = -0.8$.

6.1.1 Norma de Hilbert-Schmidt

Una de las preocupaciones que surge al trabajar con la norma de Hilbert-Schmidt para cuantificar correlaciones es su posible no contractividad bajo ciertos canales cuánticos. Esta inquietud se diluye para el caso aquí tratado: en la sección 8.4.2 del apéndice se muestra que la norma-2 es contractiva bajo el canal *phase damping*.

Como primer paso hacia el estudio del entrelazamiento y la discordia geométricos con la norma de Hilbert-Schmidt, se establecen las expresiones de estas correlaciones para estados diagonales de Bell.

• Entrelazamiento

La expresión para el entrelazamiento se obtiene utilizando que la distancia d_2 entre dos estados diagonales de Bell es proporcional a la norma-2 de la diferencia entre sus vectores de correlación 4.71 y teniendo en cuenta que los estados separables más próximos a un estado ρ_{BD} entrelazado se encuentran en la superficie del octaedro que contiene a todos los estados separables y diagonales de Bell (Figura 6.1).

Entonces, la simetría de la región de estados separables en el espacio de estados diagonales de Bell permite determinar el entrelazamiento geométrico con la norma de Hilbert-Schmidt para el estado con vector de correlación $\vec{r}_{pd}(p)$ como la distancia euclidiana (obviando el factor de proporcionalidad de un medio) del punto $(|r_1(p)|, |r_2(p)|, |r_3(p)|)$ al plano $|r_1|+|r_2|+|r_3| = 1$, cuando $|r_1(p)|+|r_2(p)|+|r_3(p)| \geqslant 1$ (estado entrelazado).

Por lo tanto, el entrelazamiento queda dado por:

$$E_{\mathrm{HS}}(p) = \frac{(|r_1(p)| + |r_2(p)| + |r_3(p)| - 1)^2}{3}. \tag{6.2}$$

En particular, para el canal *Phase Damping*:

$$E_{\mathrm{HS}}(p) = \frac{(|r_1(0)|(1-p)^2 + |r_2(0)|(1-p)^2 + |r_3(0)| - 1)^2}{3}, \tag{6.3}$$

cuando el estado se encuentra entrelazado.

El primer fenómeno mencionado en 4.7 que surge a la vista es el de la muerte súbita. Para todo estado que inicialmente sea no separable, el entrelazamiento sufre una muerte súbita (MS) en

$$p_{MS} = 1 - \sqrt{\frac{1 - |r_3(0)|}{|r_1(0)| + |r_2(0)|}}. \tag{6.4}$$

• Discordia cuántica

A continuación se enfoca la atención en la discordia cuántica: los estados clásicos-clásicos corresponden a los ejes del espacio diagonal de Bell, por lo que la discordia geométrica empleando la norma de Hilbert-Schmidt está dada por la distancia euclidiana del punto $(|r_1(p)|, |r_2(p)|, |r_3(p)|)$ al eje más próximo (obviando el factor de un medio):

$$D_{\mathrm{HS}}(p) = \mathrm{Min}\{D_1(p), D_2(p), D_3(p)\}, \tag{6.5}$$

donde

$$D_1(p) = r_2(p)^2 + r_3(p)^2 \tag{6.6}$$
$$D_2(p) = r_1(p)^2 + r_3(p)^2 \tag{6.7}$$
$$D_3(p) = r_1(p)^2 + r_2(p)^2. \tag{6.8}$$

En particular, para el canal de *phase damping* se obtiene:

$$D_1(p) = r_2(0)^2(1-p)^4 + r_3(0)^2 \tag{6.9}$$
$$D_2(p) = r_1(0)^2(1-p)^4 + r_3(0)^2 \tag{6.10}$$
$$D_3(p) = (1-p)^4(r_1(0)^2 + r_2(0)^2). \tag{6.11}$$

Como ya fue expuesto previamente, la discordia cuántica puede presentar el fenómeno de cambio súbito (CS), por lo que es necesario determinar bajo qué condiciones iniciales se obtiene para este tipo de evoluciones.

- Considerando estados diagonales de Bell iniciales tales que $|r_1(0)|, |r_2(0)| \leqslant |r_3(0)|$, con $|r_1(0)|, |r_2(0)|, |r_3(0)| \neq 0$, la discordia cuántica toma la forma $D_3(p)$ para todo p.
- Cuando $|r_2(0)|, |r_3(0)| \leqslant |r_1(0)|$ ($|r_1(0)| \neq 0$), la discordia exhibe un cambio súbito para
$$p_{CS1} = 1 - \sqrt{\frac{|r_3(0)|}{|r_1(0)|}}. \tag{6.12}$$
Comienza siendo igual a $D_1(p)$ para $p \leqslant p_{CS1}$ y luego pasa a valer $D_3(p)$ cuando $p \geqslant p_{CS1}$.
- Análogamente, si se considera $|r_1(0)|, |r_3(0)| \leqslant |r_2(0)|$ ($|r_2(0)| \neq 0$), es posible mostrar que la discordia comienza siendo igual a $D_2(p)$ y luego pasa a valer $D_3(p)$ para $p \geqslant p_{CS2}$, donde
$$p_{CS2} = 1 - \sqrt{\frac{|r_3(0)|}{|r_2(0)|}}. \tag{6.13}$$

El cambio súbito de la discordia tiene una clara interpretación geométrica para todo canal que conserva la forma diagonal de Bell de los estados: la ubicación del estado clásico más próximo (o del eje más próximo) varía de manera discontinua, y el cambio puede darse ninguna, una o más veces dependiendo de la trayectoria del estado. Para el canal *phase damping*, el tipo de evolución que sufre el estado no permite más de un cambio súbito.

• Relación dinámica entre entrelazamiento y discordia cuántica

En la búsqueda de una relación dinámica entre entrelazamiento y discordia geométricos, se obtuvieron tres expresiones diferentes para los tres valores posibles de la discordia, que relacionan las dos correlaciones en el caso de la norma-2.

- Para las situaciones en las que $D_{\mathrm{HS}}(p) = D_3(p)$, es posible expresar el entrelazamiento para $p \in [0, p_{MS}]$ como una función de la discordia cuántica en p, la discordia inicial, el entrelazamiento inicial y el parámetro $r_3(0)$:

$$E_{\mathrm{HS}}(p) = \left(\sqrt{\frac{D_3(p)}{D_3(0)}} \left(\sqrt{E_{\mathrm{HS}}(0)} - \frac{|r_3(0)| - 1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{|r_3(0)| - 1}{\sqrt{3}} \right). \tag{6.14}$$

En esta expresiones aparece el parámetro inicial $|r_3(0)|$ explícitamente, sin embargo $|r_2(0)|$ y $|r_3(0)|$ ya no lo hacen.

Equivalentemente se puede escribir

$$D_{\mathrm{HS}}(p) = D_3(p) = \left(\sqrt{3E_{\mathrm{HS}}(p)} - |r_3(0)| + 1 \right)^2 \frac{r_1(0)^2 + r_2(0)^2}{(|r_1(0)| + |r_2(0)|)^2}. \tag{6.15}$$

- Cuando $D_{\mathrm{HS}}(p) = D_i(p)$ con $i = 1, 2$, el entrelazamiento para $p \in [0, p_{MS}]$ puede expresarse como

$$E_{\mathrm{HS}}(p) = \frac{1}{9}(1 - |r_3(0)|)^2 \left(\sqrt{\frac{D_i(p) - r_3(0)^2}{D_i(p_{MS}) - r_3(0)^2}} - 1 \right)^2. \tag{6.16}$$

De forma equivalente, la discordia en función del entrelazamiento puede escribirse como

$$D_{\mathrm{HS}}(p) = D_i(p) = r_i(0)^2 \left(\frac{\sqrt{3E_{\mathrm{HS}}(p)} - |r_3(0)| + 1}{|r_1(0)| + |r_2(0)|} \right)^2 + r_3(0)^2. \tag{6.17}$$

• Relación entre p_{MS} y p_{CS}

También es posible comparar el tiempo de muerte súbita con el de cambio súbito. El tiempo p_{MS} para el cual ocurre la muerte súbita puede ser menor o mayor al parámetro p_{CSi} ($i = 1$ o 2) para el que se da el cambio súbito de la discordia, dependiendo de la relación entre los valores iniciales $|r_1(0)|$, $|r_2(0)|$ y $|r_3(0)|$. Esto, por supuesto, asumiendo que se observa un cambio súbito de la discordia ($|r_1(0)|, |r_2(0)|, |r_3(0)| \neq 0$) y que existe entrelazamiento inicial.

- Como queda demostrado en 8.4.3, cuando $|r_1(0)|, |r_3(0)| < |r_2(0)|$:

  ⋆ si $r_3(0) > 1/3$ y $|r_2(0)|(1-2|c_3(0)) < |r_3(0)|r_1(0)|$, entonces $p_{MS} > p_{CS1}$;

  ⋆ en otro caso, se tiene que $p_{MS} \geq p_{CS1}$.

  Particularmente, si $|r_3(0)| \leq 1/3$, $p_{MS} \leq p_{CS1}$, para cualquier valor de $|r_1(0)|$ y $|r_2(0)$

- Por otro lado, cuando $|r_2(0)|, |r_3(0)| \leq |r_1(0)|$:

  ⋆ si $|r_3(0)| \geq 1/3$ y $|r_1(0)|(1 - 2|r_3(0)|) < |r_3(0)||r_2(0)|$, entonces $p_{MS} > p_{CS2}$;

⋆ y para otros casos, se verifica que $p_{MS} \geq p_{CS2}$.

Particularmente, si $|r_3(0)| \leq 1/3$, $p_{MS} \leq p_{CS2}$, para cualquier valor de $|r_1(0)|$ y $|r_2(0)$.

El interés de tal observación, reside en que el tiempo p del cambio súbito de la discordia corresponde a la transición entre la decoherencia clásica y la decoherencia cuántica. Esta correspondencia quedará más clara para las medidas con la norma traza.

Conocer la relación entre estos tiempos es una herramienta, de muchas, que ayuda a sopesar la relevancia del entrelazamiento o de la discordia como recursos de protocolos cuánticos sujetos a los efectos de decoherencia del canal *phase damping*, bajo ciertas condiciones iniciales.

• **Cambio súbito y *freezing***

En las Figuras 6.2 y 6.3 se observan las evoluciones de las medidas geométricas del entrelazamiento y la discordia con la norma-2, en un caso en el que la discordia no presenta cambio súbito y en un caso en el que sí, respectivamente. En particular, para las dinámicas de la primera gráfica se observa cómo la muerte súbita del entrelazamiento ocurre antes del cambio súbito de la discordia. También fueron agregadas las correlaciones clásicas determinadas por medio de la expresión 4.54.

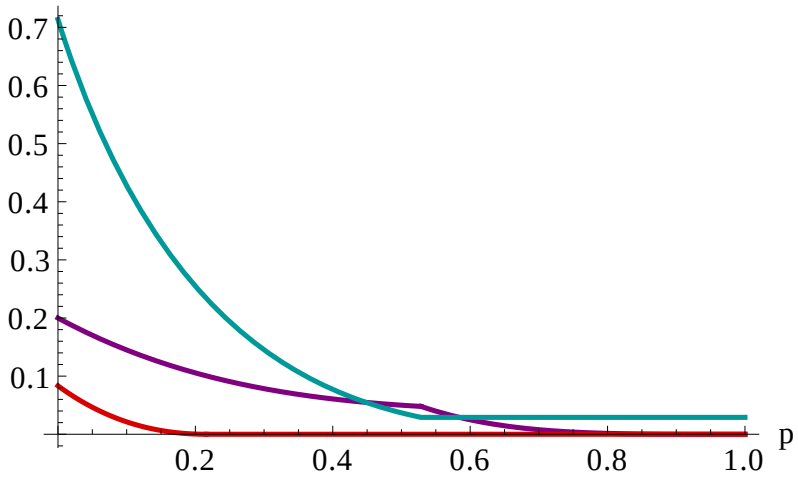


Figura 6.2: Dinámica del entrelazamiento (rojo) y la discordia (violeta) geométricos cuantificados con la norma de Hilbert-Schmidt, y de las correlaciones clásicas (cian), para un estado inicial diagonal de Bell con $r_1(0) = -0.4$, $r_2(0) = -0.9$ y $r_3(0) = -0.2$.

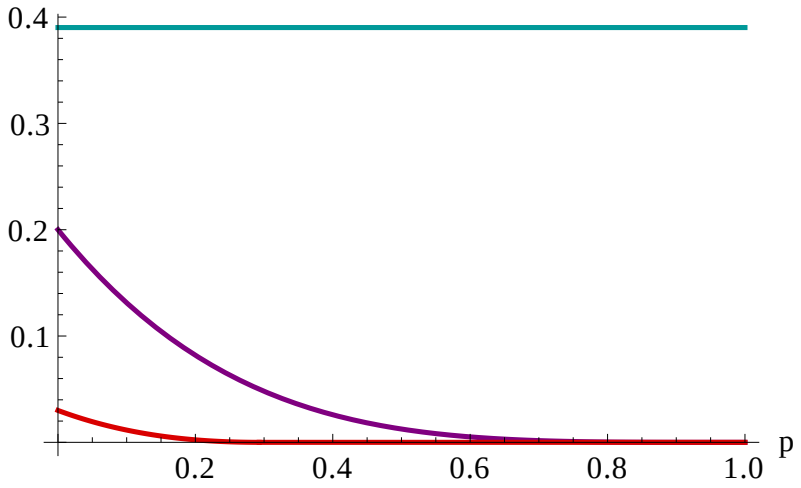


Figura 6.3: Dinámica del entrelazamiento (rojo) y la discordia (violeta) geométricos cuantificados con la norma de Hilbert-Schmidt, y de las correlaciones clásicas (cian), para un estado inicial diagonal de Bell con $r_1(0) = -0.4$, $r_2(0) = -0.2$ y $r_3(0) = -0.7$.

Gráficamente, se visualiza cómo los tiempos de CS de la discordia y las correlaciones clásicas coinciden, y la aparición del fenómeno de *freezing* para las correlaciones clásicas, posterior al cambio súbito.

Además del CS, la discordia también puede presentar *freezing*, pero éste solamente se observa en el caso de que las condiciones iniciales sean tales que $r_1(0) = 0$ ($r_2(0) = 0$) y $|r_3(0)| \leq |r_2(0)|$ ($|r_3(0)| \leq |r_1(0)|$). Bajo estas circunstancias, la discordia comienza presentando *freezing*, el cual se extiende hasta p_{CS2} (p_{CS1}), y luego pasa a valer $D_3(p)$ ($D_2(p)$).

Un ejemplo de este tipo de evolución se expone en la Figura 6.4, junto a las dinámicas del entrelazamiento y las correlaciones clásicas para el mismo estado inicial.

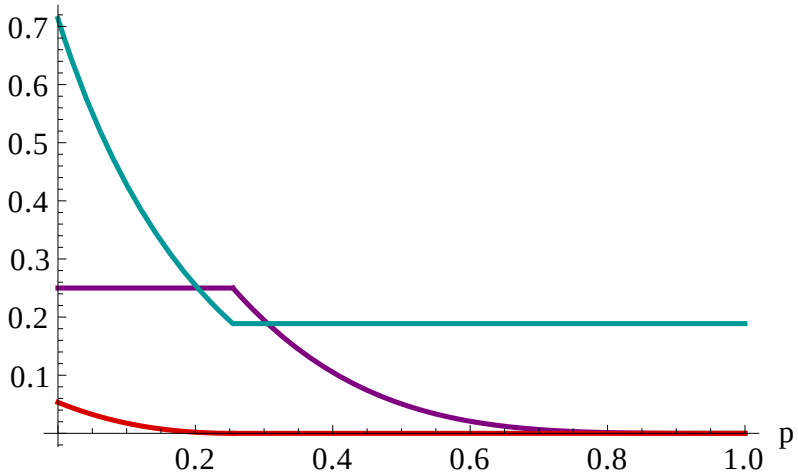


Figura 6.4: Dinámica del entrelazamiento (rojo) y la discordia (violeta) geométricos con la norma de Hilbert-Schmidt, y de las correlaciones clásicas (cian), para un estados diagonal de Bell bajo el canal *phase damping* con parámetros iniciales $r_1(0) = 0$, $r_2(0) = 0.9$ y $r_3(0) = 0.5$.

6.1.2 Norma traza

Habiendo caracterizado la evolución de las medidas geométricas del entrelazamiento y la discordia con la norma de Hilbert-Schmidt, pasamos al estudio de las mismas utilizando la norma traza.

• **Entrelazamiento**

Teniendo en cuenta que en la literatura no se encuentra un algoritmo para hallar el estado separable más próximo con la norma traza ni una expresión para el entrelazamiento geométrico asociado, en lo que prosigue se desarrolla una expresión para el estado separable más próximo a un estado X simétrico de dos qubits ρ_X con esa norma, restringiendo la búsqueda al conjunto de estados separables que cuentan con las mismas poblaciones que ρ_X, y se calcula el entrelazamiento geométrico asociado.

Para alcanzar el objetivo planteado es necesario hacer uso del lema demostrado en [57].

Lema El estado bipartido separable más próximo a un estado X, con la distancia traza, es también un estado de la forma X.

Proposición 6.1.1. Sea ρ_X la matriz asociada a un estado X de dos qubits de la forma 2.18 y σ_X el estado separable más próximo con la distancia traza, tal que sus poblaciones se corresponden con las de ρ_X, entonces la distancia traza entre ρ_X y σ_X es igual a un medio de la concurrencia de ρ_X.

Demostración

Sea ρ_X un estado con forma X, sus valores propios están dados por:

$$\begin{aligned}\lambda_{1\pm} &= \frac{1}{2}\left(\rho_{11}+\rho_{44} \pm \sqrt{(\rho_{11}-\rho_{44})^2+4\rho_{14}^2}\right)\\ \lambda_{2\pm} &= \frac{1}{2}\left(\rho_{22}+\rho_{33} \pm \sqrt{(\rho_{22}-\rho_{33})^2+4\rho_{23}^2}\right)\end{aligned} \tag{6.18}$$

Para que ρ_X se trate de un estado físico sus autovalores deben ser positivos, por lo que ρ_{14} y ρ_{23} deben cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}|\rho_{14}| &\leq \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}\\ |\rho_{23}| &\leq \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}\end{aligned} \tag{6.19}$$

El estado separable más próximo bajo las restricciones impuestas tiene la forma:

$$\sigma_X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho'_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho'_{23} & 0 \\ 0 & \rho'_{23} & \rho_{33} & 0 \\ \rho'_{14} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix} \tag{6.20}$$

Para que se trate de un estado físico se debe verificar:

$$\begin{aligned}|\rho'_{14}| &\leq \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}\\ |\rho'_{23}| &\leq \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}\end{aligned} \tag{6.21}$$

Por otro lado, para que además sea un estado separable, como ya se mencionó, su traspuesta parcial debe ser también semidefinida positiva, por lo que:

$$\begin{aligned}|\rho'_{14}| &\leq \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}\\ |\rho'_{23}| &\leq \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}\end{aligned} \tag{6.22}$$

Y de 6.21 y 6.22, se requiere que σ_X cumpla

$$|\rho'_{14}|, |\rho'_{23}| \leq \min\left\{\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}, \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}\right\} \tag{6.23}$$

La norma traza de la diferencia entre ρ_X y σ_X se reduce a:

$$\|\Sigma\|_1 = \|\rho_X - \sigma_X\|_1 = 2\left(|\rho_{14}-\rho'_{14}| + |\rho_{23}-\rho'_{23}|\right) \tag{6.24}$$

Para minimizar esta expresión, se pide que $\mathrm{sgn}(\rho_{14}) = \mathrm{sgn}(\rho'_{14})$ y $\mathrm{sgn}(\rho_{23}) = \mathrm{sgn}(\rho'_{23})$, de donde se obtiene

$$\|\Sigma\|_1 = 2\left(\left||\rho_{14}| - |\rho'_{14}|\right| + \left||\rho_{23}| - |\rho'_{23}|\right|\right) \tag{6.25}$$

Hay que observar que para no tener el caso trivial $\rho_X = \sigma_X$, es decir ρ_X separable, si $\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} < \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}$, entonces $\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} < |\rho_{14}| \leq \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}$; y si $\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} < \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}$, entonces $\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} < |\rho_{14}| \leq \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}$. Si no se impusieran esos límites inferiores, se podría estar en el caso de las restricciones 6.23 y, como ya fue establecido anteriormente, se trata de una condición suficiente y necesaria para que un estado sea separable. Teniendo en cuenta esto, se puede mostrar que si ρ_X es un estado entrelazado, 6.25 alcanza su valor mínimo si uno de los dos términos en la suma se anula. Dependiendo del valor de los elementos de ρ_X, se distinguen dos casos posibles:

1. Si $\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} < \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}$, el mínimo ocurre para $\rho'_{23} = \rho_{23}$ y $\rho'_{14} = \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}$. En este caso,
$$\|\rho_X - \sigma_X\|_1 = 2\Big||\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}\Big| \tag{6.26}$$

2. Si $\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} < \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}$, el mínimo se obtiene cuando $\rho'_{14} = \rho_{14}$ y $\rho'_{23} = \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}$. En este caso,
$$\|\rho_X - \sigma_X\|_1 = 2\Big||\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}\Big| \tag{6.27}$$

Comparando los resultados obtenidos con la expresión de la concurrencia 4.27, se concluye que la norma traza entre un estado X simétrico de dos qubits ρ_X y su estado separable más próximo es igual a la concurrencia del estado ρ_X.

□

Por lo tanto, teniendo en cuenta la definición de entrelazamiento geométrico con la norma-1, se obtiene
$$E_{\mathrm{Tr}} = \frac{1}{2}\|\rho_X - \sigma_X\|_1 = \frac{1}{2}C(\rho_X). \tag{6.28}$$

En el Apéndice 8.4.1 se obtiene la matriz densidad evolucionada para el canal phase damping. Utilizando estos resultados se concluye que el entrelazamiento con la norma traza, y bajo las restricciones ya mencionadas para el estado separable más próximo, vale:
$$E_{\mathrm{Tr}}(p) = \frac{1}{4}\max\{0, |r_1(0) \pm r_2(0)|(1-p)^2 - (1 \pm r_3(0))\}. \tag{6.29}$$

El comportamiento del entrelazamiento con la norma traza no varía significativamente respecto al observado con la norma de Hilbert-Schmidt. Queda claro de la expresión anterior, que el valor que comienza siendo el máximo, se mantiene siéndolo hasta la muerte súbita del entrelazamiento en p_{MS}.

• Relación dinámica entre entrelazamiento y discordia cuántica

Por otro lado, recurriendo a la expresión 4.90 para la discordia con la norma traza, se tiene que ésta es igual a $D_{\mathrm{Tr}}(p) = r_{int}(p)/2$, donde $r_{int}(p)$ era el valor intermedio

de los $|r_i(p)|$ $(i = 1, 2, 3)$. De aquí se puede derivar una relación dinámica entre el entrelazamiento y la discordia geométricos con la norma traza:

$$D_{\mathrm{Tr}}(p) = |r_i(0)|\frac{E_{\mathrm{Tr}}(p) + (1 \pm r_3(0))}{|r_1(0)| \pm |r_2(0)|}, \tag{6.30}$$

donde $i = 1$, si $r_{int}(p) = |r_1(0)|(1-p)^2$ e $i = 2$ si $r_{int}(p) = |r_2(0)|(1-p)^2$. Además, los signos de más o menos en el lado derecho de la expresión están dados por el valor máximo en 6.29.

- ***Freezing***

Orientando ahora el análisis en la dirección del comportamiento de la discordia para la evolución de estados diagonales de Bell sujetos al canal *phase damping* (con $r_1(0), r_2(0), r_3(0) \neq 0$), es posible clasificarlo en tres categorías según las componentes del vector de correlación inicial.

- Si $\min\{|r_1(0)|, |r_2(0)|\} \leq |r_3(0)| < \max\{|r_1(0)|, |r_2(0)|\} = r_M$, la discordia geométrica presenta inicialmente *freezing* y su valor corresponde a un medio de $|r_3(0)|$. El fenómeno se mantiene hasta su cambio súbito en

$$p_{CSM} = 1 - \sqrt{\frac{|r_3(0)|}{r_M}}, \tag{6.31}$$

  momento a partir del cual pasa a valer

$$\frac{1}{2}\max\{|r_1(0)|, |r_2(0)|\}(1-p)^2. \tag{6.32}$$

  Esto es teniendo en cuenta que las curvas $r_1(p)$ y $r_2(p)$ son siempre paralelas.

- Si $|r_3(0)| < \min\{|r_1(0)|, |r_2(0)|\} = r_m$, entonces la discordia exhibe dos cambios súbitos y *freezing* entre ellos. Ésta empieza valiendo

$$\frac{1}{2}\min\{|r_1(0)|, |r_2(0)|\}(1-p)^2; \tag{6.33}$$

  en el tiempo

$$p_{CS} = 1 - \sqrt{\frac{|r_3(0)|}{r_m}} \tag{6.34}$$

  pasa a ser constante, igual a un medio de $|r_3(0)|$; y, finalmente, a partir de p_{CSM} tiene el valor

$$\frac{1}{2}\max\{|r_1(0)|, |r_2(0)|\}(1-p)^2. \tag{6.35}$$

- Por último, si $|r_3(0)| \geq \max\{|r_1(0)|, |r_2(0)|\}$, la discordia no presenta cambio súbito.

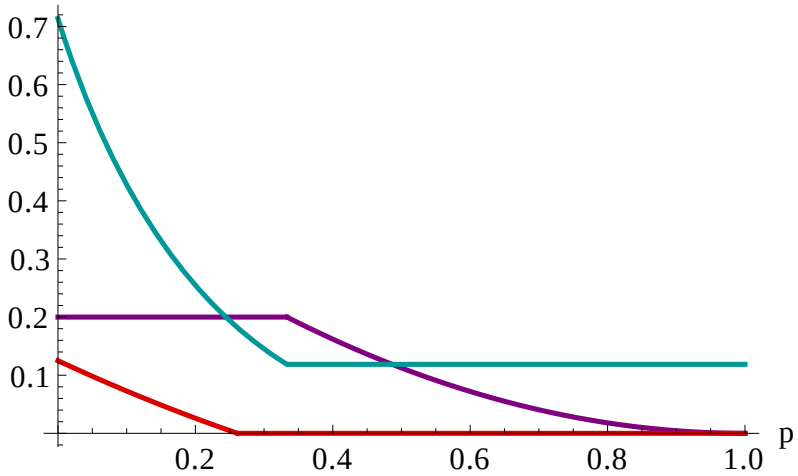
El tiempo de cambio súbito p_{CSM} se corresponde, según las condiciones, con los tiempos p_{CS1} y p_{CS2} hallados con la norma traza. Es decir, que es igual al tiempo de cambio súbito de las correlaciones clásicas.

En la Figura 6.5 se presenta un ejemplo de cada una de las categorías anteriores, junto a la evolución del entrelazamiento dado por un medio de la concurrencia y las correlaciones clásicas determinadas por la expresión 4.54.

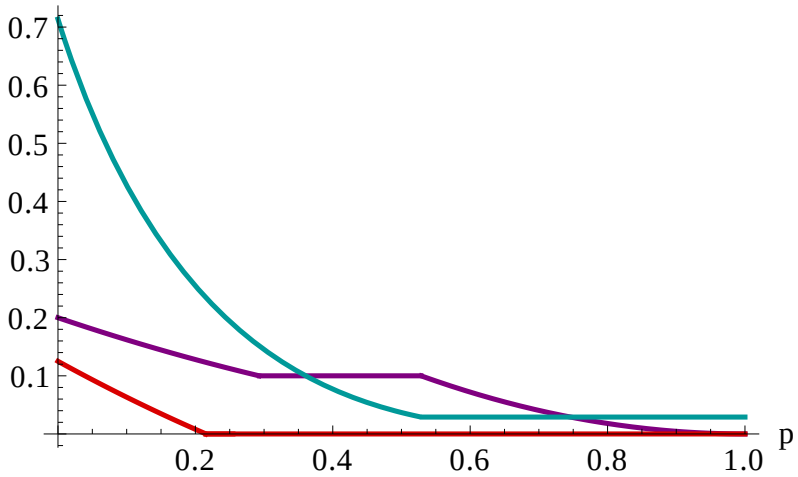
En la Figura 6.5a, que representa un caso en el que existe *freezing* inicial, se hace evidente la razón por la cual se afirmó que el cambio de base de las correlaciones clásicas corresponde a un punto de transición entre la decoherencia clásica y la decoherencia cuántica. Durante un primer lapso, las correlaciones cuánticas cuantificadas por medio de la discordia no son destruidas debido a la decoherencia generada por el ambiente, mientras que se observa pérdida de correlaciones clásicas. Luego, se presenta un segundo período para el cual las correlaciones clásicas no decaen pero la discordia sí.

Comparando con los resultados obtenidos para la norma de Hilbert-Schmidt, por un lado se tiene un comportamiento del entrelazamiento que es similar en ambos casos; pero, por otro lado, se hacen obvias las claras diferencias que existen en el comportamiento de la discordia entre las dos normas. En primer lugar, con la norma traza se puede apreciar el fenómeno de *freezing* para casos no triviales, es decir $|r_1(0)|, |r_2(0)|, |r_3(0)| \neq 0$, lo cual no ocurría con el empleo de la norma-2. Por otro lado, con la norma-1, si las condiciones iniciales son las adecuadas, el cambio súbito de la discordia puede presentarse en dos oportunidades separadas por un tiempo en el que la correlación se mantiene constante. Esto nunca ocurre con la norma de Hilbert-Schmidt: el fenómeno de *freezing* solo se da al inicio de la evolución, y como máximo ocurre un solo cambio súbito de la discordia.

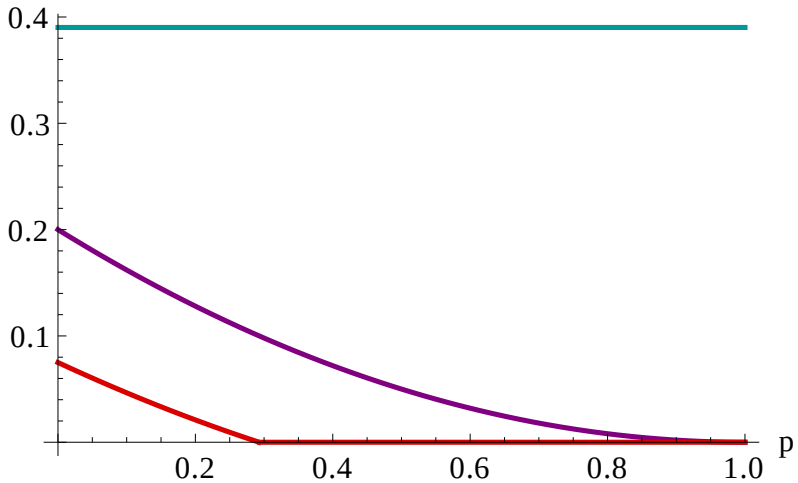
La diferencia que se aprecia entre la aparición de *freezing* para la discordia con la norma-1 en casos no triviales ($|r_1(0)|, |r_2(0)|, |r_3(0)| \neq 0$) y la no presencia de éste para la norma-2, deja planteadas dudas respecto a la confianza que se puede tener en estas medidas como buenos cuantificadores de correlaciones. Por ejemplo, un protocolo cuya ventaja cuántica se base meramente en la discordia no debería mostrar cambios en su rendimiento durante el período de *freezing*, mismo período en el que no se exhibe el fenómeno para otra medida de la discordia. Entonces, ¿habría que descartar una de las medidas, o tal vez seguir cuestionándose qué es lo que realmente cuantifican?



(a) $r_1(0) = -0.2$, $r_2(0) = -0.9$ y $r_3(0) = -0.4$.



(b) $r_1(0) = -0.4$, $r_2(0) = -0.9$ y $r_3(0) = -0.2$.



(c) $r_1(0) = -0.4$, $r_2(0) = -0.2$ y $r_3(0) = -0.7$.

Figura 6.5: Dinámica del entrelazamiento (rojo) y la discordia (violeta) geométricos con la norma traza, y de las correlaciones clásicas (cian), para estados diagonales de Bell bajo el canal *phase damping*.

6.2 Dos qubits sujetos al canal *depolarizing*

En esta sección el canal de interés será el canal *depolarizing*, presentado previamente en 3.2.2.

Nuevamente, suponiendo un estado inicial de la forma diagonal de Bell 2.20 , con $\vec{r} = (r_1(0), r_2(0), r_3(0))$, y operadores de Kraus M_i^A y M_j^B $(i, j = 0, 1, 2, 3)$ dados por 3.27, en la sección 8.5.1 del Apéndice se muestra que el vector de correlación evolucionado adquiere la forma diagonal de Bell:

$$\vec{r}_d(p) = r_1(0)(1-p)^2\hat{i} + r_2(0)(1-p)^2\hat{j} + r_3(0)(1-p)^2\hat{k}. \tag{6.36}$$

En la figura 6.1 se puede ver un ejemplo de trayectoria, con parámetros iniciales $r_1(0) = r_2(0) = r_3(0) = -0.8$.

6.2.1 Norma de Hilbert-Schmidt

En primera instancia, es nuevamente necesario destacar que la norma-2 es contractiva bajo este tipo de evolución (Apéndice 8.5.2), por lo que, en principio, no habría razones para esperar comportamientos no físicos derivados de la no contractividad para las dinámicas de las correlaciones.

• Entrelazamiento

Comenzando por el estudio del entrelazamiento, aplicando 6.2, el último se reduce a:

$$E_{\text{HS}}(p) = \frac{1}{3}(1-p)^2\left(|r_1(0)| + |r_2(0)| + |r_3(0)| - 1\right)^2, \tag{6.37}$$

para estados entrelazados.

Al igual que con el canal *phase damping*, no se presenta nacimiento súbito ni *revival* del entrelazamiento, y el fenómeno de muerte súbita se observa siempre que haya entrelazamiento inicial. El valor p_{MS} para el cual ocurre la muerte repentina del entrelazamiento es

$$p_{MS} = 1 - \frac{1}{|r_1(0)| + |r_2(0)| + |r_3(0)|}. \tag{6.38}$$

• Discordia cuántica

Por otro lado, para la discordia cuántica se tiene que

$$D_{\text{HS}} = \text{Min}\{D_1(p), D_2(p), D_3(p)\} \tag{6.39}$$

Donde

$$\begin{aligned} D_1(p) =&(1-p)^2(r_2(0)^2+r_3(0)^2) \\ D_2(p) =&(1-p)^2(r_1(0)^2+r_3(0)^2) \\ D_3(p) =&(1-p)^2(r_1(0)^2+r_2(0)^2). \end{aligned} \tag{6.40}$$

A diferencia de lo que ocurría cuando la dinámica estaba dada por el canal *phase damping*, para el canal *depolarizing* la discordia no exhibe jamás un cambio súbito y tampoco presenta *freezing*, esto se debe a que ninguna de las componentes del vector correlación evolucionado se mantiene constante y sus evoluciones son paralelas.

En la Figura 6.6 se muestra un ejemplo de dinámica de la discordia y el entrelazamiento geométrico con la norma de Hilbert Schmidt, además de las correlaciones clásicas.

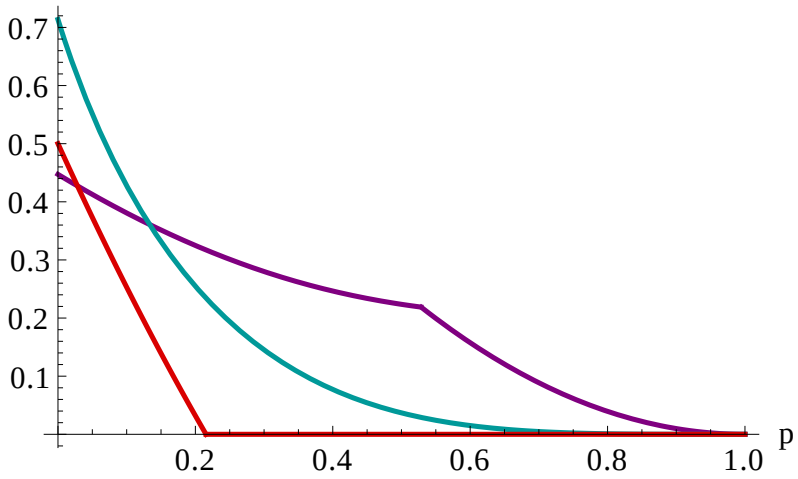


Figura 6.6: Dinámica del entrelazamiento (rojo) y la discordia (violeta) geométricos con la norma-2, y de las correlaciones clásicas (cian), para un estado diagonal de Bell bajo el canal *depolarizing* con parámetros iniciales $r_1(0) = -0.4$, $r_2(0) = -0.9$ y $r_3(0) = -0.2$.

• Relación dinámica entre entrelazamiento y discordia cuántica

De lo precedente se deduce que es posible expresar el entrelazamiento, para $p \in [0, p_{MS}]$, como una función de la discordia cuántica en p y la discordia para $p = p_{MS}$ de la siguiente manera:

$$E_{\mathrm{HS}}(p) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{D_{\mathrm{HS}}(p)}{D_{\mathrm{HS}}(p_{MS})} - 1\right). \tag{6.41}$$

Equivalentemente, se puede escribir la discordia en función del entrelazamiento como

$$D_{\mathrm{HS}}(p) = D_i(p) = \frac{3E_{\mathrm{HS}}(p)}{\left(|r_1(0)| + |r_2(0)| + |r_3(0)| - 1\right)^2}\left(r_j(0)^2 + r_k(0)^2\right), \tag{6.42}$$

siendo i, j y k diferentes.

6.2.2 Norma Traza

• Relación dinámica entre entrelazamiento y discordia

Utilizando 6.28, el entrelazamiento geométrico con la norma traza para estados diagonales de Bell bajo el canal *depolarizing* queda dado por

$$E_{\mathrm{Tr}}(p) = \max\{0, |r_1(0) \pm r_2(0)|(1-p)^2 - (1 \pm r_3(0)(1-p)^2)\}. \tag{6.43}$$

Por otro lado, la discordia es

$$D_{\mathrm{Tr}}(p) = \frac{|r_{int}(0)|}{2}(1-p)^2, \tag{6.44}$$

siendo $|r_{int}(0)|$ el valor intermedio entre de $|r_i(0)|$, con $i = 1, 2, 3$.

Nuevamente, es posible escribir la discordia en función del entrelazamiento, para $p \in [0, p_{MS}]$, obteniéndose:

$$D_{\mathrm{Tr}}(p) = \frac{|r_{int}(0)|}{2} \frac{E_{\mathrm{Tr}}(p) + 1}{|r_1(0) \pm r_2(0)| \mp r_3(0)}, \tag{6.45}$$

donde el signo de más o menos está dado por el máximo de 6.43.

La discordia con la norma traza, dada por 4.90, se comporta del mismo modo que con la norma de Hilbert-Schmidt, sin exhibir en ningún momento cambio súbito ni *freezing*, ya que la componente del vector de correlación que comienza teniendo el valor intermedio, sigue teniendo el valor intermedio para todo p.

El entrelazamiento tampoco presenta disimilitudes en comparación con la dinámica obtenida para la norma-2.

6.3 Dos qubits sujetos a los canales *phase flip*, *bit flip*, *bit-phase flip*

Tanto el canal *phase flip*, como el *bit flip* y el *bit-phase flip*, también mantienen la forma diagonal de Bell al ser aplicados a un estado inicial con esta estructura. Esto se muestra en la parte 8.6.1 del Apéndice.

En la figura 6.1 se muestran ejemplos de trayectorias en el espacio de estados diagonales de Bell para estos canales, con parámetros iniciales $r_1(0) = r_2(0) = r_3(0) = -0.8$.

Para el caso del canal *phase flip*, la evolución del vector de correlación, partiendo de un estado inicial diagonal de Bell, está dada por (8.6.1):

$$\vec{r}_{\mathrm{pf}} = r_1(0)(1-p)^2\hat{i} + r_2(0)(1-p)^2\hat{j} + r_3(0)\hat{k} \tag{6.46}$$

Esta expresión es exactamente igual a la evolución 6.1 obtenida para el canal *phase damping*, por lo tanto todos los resultados discutidos en la sección 6.1, tanto para la norma-1 como para la norma-2, son válidos para este canal.

Por otro lado evolución de un estado ρ diagonal en la base de Bell, para el canal *bit flip* se expresa como (8.6.1):

$$\vec{r}_{\text{bf}} = r_1(0)\hat{i} + r_2(0)(1-p)^2\hat{j} + r_3(0)(1-p)^2\hat{k} \tag{6.47}$$

Mientras que para el caso del *bit-phase flip*, se obtiene (8.6.1):

$$\vec{r}_{\text{bf}} = r_1(0)(1-p)^2\hat{i} + r_2(0)\hat{j} + r_3(0)(1-p)^2\hat{k} \tag{6.48}$$

Entonces, se concluye que los resultados planteados en 6.1 también se aplican para el canal *bit flip*, al intercambiar los roles de $r_1(p)$ y $r_3(p)$, y para el canal *bit-phase flip* permutando $r_2(p)$ por $r_3(p)$.

6.4 Dos qubits sujetos al canal *amplitude damping*

En esta sección se dejará planteada una visualización geométrica, similar a la que se empleó para los estados diagonales de Bell, pero en el caso de una evolución dada por el canal *amplitude damping*, el cual fue explicado en 3.2.2, partiendo de estados iniciales diagonales en la base de Bell.

La evolución de dos qubits, cada uno interactuando con su ambiente sometido al canal de *Amplitude Damping*, incialmente en un estado diagonal de Bell con vector de correlación $\vec{r}(0) = (r_1(0), r_2(0), r_3(0))$, está dada por la matriz densidad (Apéndice 8.7.1):

$$\rho_{AD}(p) = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1}_4 + \sum_i r_i(p)\sigma_i \otimes \sigma_i + m_3(\sigma_3 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_2 \otimes \sigma_3)\right) \tag{6.49}$$

donde $\vec{r}(p) = r_1(0)(1-p)\hat{i} + r_2(0)(1-p)\hat{j} + (r_3(0)(1-p)^2 + p^2)\hat{k}$, $m_3 = p$ y σ_i son las matrices de Pauli.

Nuevamente, el problema de la no contractividad de la norma de Hilbert-Schmidt desaparece, ya que ésta también es contractiva bajo el presente tipo de evoluciones, como se muestra en 8.7.2.

La clase de operadores densidad 6.49 forma un subconjunto de los estados X, sin embargo no se trata de estados del tipo diagonal de Bell, para los cuales habría que tener $m_3 = 0$. Por lo tanto, ya no es posible representar la evolución de éstos en el

espacio tridimensional de los componentes del vector correlación, como se realizó en las secciones precedentes.

Existen subconjuntos de los estados 6.49 que pueden ser representados en $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, imponiendo la siguiente restricción:

$$r_1(0) = r_2(0), \tag{6.50}$$

los estados evolucionados quedan especificados por tres parámetros y se los puede representar en el espacio tridimesional cuyos ejes corresponden a r_1, r_2 y m_3.

Para determinar la geometría de las correlaciones para este tipo de estados, se trabajó bajo la restricción 6.50, suponiendo que los estados separables y los estados clásicos más próximos pertenecen a la misma clase de estados 6.49. Esta suposición se va a demostrar más adelante para los estados clásicos más próximos. Mientras que para los estados separables más cercanos no se demostró generalmente, pero sí se verefícó numéricamente con ciertos estados tomados aleatoriamente. Esto último se logró utilizando el algoritmo de Verstraete que fue explicado en la sección 4.4.3. A modo de ejemplo, en el apéndice (8.7.3) se explicita uno de estos casos.

En la Figura 6.7 se representan los estados separables y clásicos pertenecientes al subconjunto de estados X de la forma 6.49, sujetos a la restricción 6.50, y un ejemplo de trayectoria.

• Discordia cuántica

En lo que respecta a los estados clásicos que anulan la discordia geométrica, primero es necesario destacar que, al igual que con los estados diagonales de Bell, para estados con la simetría que presentan 6.49 la discordia es simétrica al intercambiar los roles de los subsistemas A y B [56]. Nuevamente, es válido asegurar que el conjunto de los estados clásicos-clásicos se corresponde con el de los cuánticos-clásicos. Por lo tanto, la minimización que aparece en las medidas geométricas de la discordia se restringe a estados de la forma 4.53.

Por otro lado, éstos se determinan haciendo mínima la distancia traza entre ρ_{AD} y el subconjunto de estados ρ_{cc} pertenecientes al conjunto de estados X. Escribiendo los estados clásicos como

$$\rho_{cc} = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1}_4 + a\sigma_3 \otimes \sigma_3 + b(\sigma_3 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_2 \otimes \sigma_3)\right), \tag{6.51}$$

los valores propios de $\rho_{AD} - \rho_{cc}$ quedan:

$$\begin{aligned}
\lambda_1' &= \frac{1}{4}(a - r_3 - 2r_1) \\
\lambda_2' &= \frac{1}{4}(a - r_3 + 2r_1) \\
\lambda_3' &= \frac{1}{4}(r_3 - a + 2(m_3 - b)) \\
\lambda_3' &= \frac{1}{4}(r_3 - a - 2(m_3 - b))
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Entonces, $\|\rho_{AD} - \rho_{cc}\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |\lambda_i'|$ se minimiza para $a = r_3$ y $b = m_3$, y la discordia geométrica está dada por

$$D_1(\rho_{AD}) = \frac{1}{2}|r_1| \tag{6.53}$$

Ésta corresponde a un medio de la mínima distancia euclidiana entre ρ_{AD} y el plano clásico, el cual se representa en la Figura 6.7.

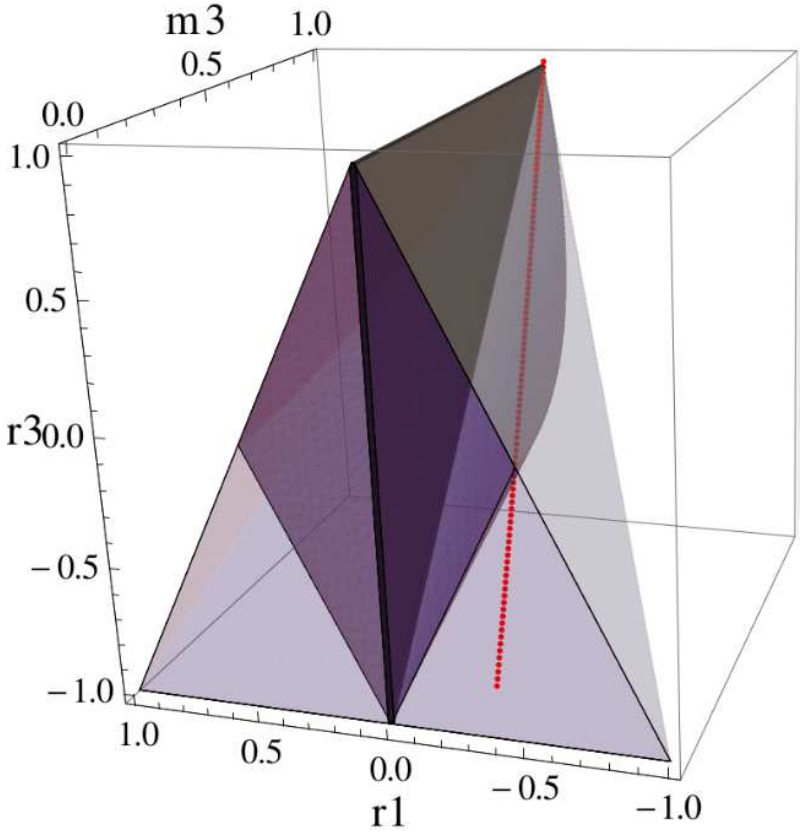


Figura 6.7: Representación en $\mathbb{R}^3$ del subconjunto de estados X con la forma 6.49 sujetos a la restricción $r_1(0) = r_2(0)$. Los estados físicos se encuentran en el interior de la región en gris claro. La región de los estados separables corresponde a la región en gris oscuro, mientras que los estados clásicos están representados por el plano negro. En rojo se muestra la trayectoria, bajo el canal *amplitude damping*, para un estado inicial con forma diagonal de Bell y parámetros $r_1(0) = r_2(0) - 0.4$ y $r_3(0) = -0.8$.

Remitiéndose a la forma analítica de la discordia geométrica con la norma traza para estados X 6.53, se tiene en este caso que:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = r_1(0)(1-p) = r_1(p) \tag{6.54}$$

Por lo que la discordia se reduce a

$$D_{\mathrm{Tr}} = \frac{|\gamma_1|}{2} \tag{6.55}$$

Este resultado es igual a 6.53, por consiguiente queda demostrado que los estados clásicos de la forma 6.49 son efectivamente los más próximos.

• Entrelazamiento

Por otro lado, para graficar los estados separables se utiliza la condición necesaria y suficiente de separabilidad dada por que la traspuesta parcial del estado sea también semidefinida positiva.

La traspuesta parcial $\rho_{AD}(p)^{\mathrm{PT}}$ de $\rho_{AD}(p)$ se obtiene simplemente cambiando el signo de $-\sigma_2 \otimes \sigma_2$:

$$\begin{aligned}\rho_{AD}(p)^{\mathrm{TP}} =& \frac{1}{4}(\mathbb{1}_4 + r_1(p)\sigma_1 \otimes \sigma_1 - r_2(p)\sigma_2 \otimes \sigma_2 \\ &+ r_3(p)\sigma_3 \otimes \sigma_3 + m_3(\sigma_3 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_2 \otimes \sigma_3))\end{aligned} \tag{6.56}$$

Los valores propios de $\rho_{AD}(p)^{\mathrm{TP}}$, obviando las dependencias en p, son:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 = 2^{-2}(1 - r_3) \\ \lambda_3 &= 2^{-2}(1 + 2\sqrt{r_1^2 + m_3^2} + r_3) \\ \lambda_4 &= 2^{-2}(1 - 2\sqrt{r_1^2 + m_3^2} + r_3)\end{aligned} \tag{6.57}$$

Como $r_1, r_3 \in [-1, 1]$ y $m_3 = p \in [0, 1]$, el único de estos autovalores que puede ser negativo es λ_4. Por lo tanto, la región de estados separables queda determinada por la intersección de la región de estados físicos con el cono de ecuación:

$$r_1^2 + m_3^2 \leq \frac{1}{4}(1 + r_3)^2 \tag{6.58}$$

Y el entrelazamiento con la norma de Hilbert-Schmidt queda dado por la mínima distancia del estado de interés al cono.

Por lo tanto, se obtuvo la geometría de los estados X con la forma 6.49, teniendo en cuenta los estados separables y los estados clásicos. Esta visualización geométrica podría facilitar la obtención de relaciones dinámicas entre entrelazamiento y discordia con las normas-1 y 2, para el tipo de evoluciones a las que esta sección hace referencia.

En esta tesis no se desarrollarán las relaciones dinámicas recién mencionadas; sin embargo este punto queda abierto para futuros estudios.

7. Conclusiones

En este trabajo se estudió en primer lugar un sistema de dos qubits interactuando cada uno con su propio reservorio bosónico a temperatura cero, para una familia de estados iniciales superposiciones de los dos qubits en el estado fundamental y los dos en el estado excitado. En el modelo no markoviano se destaca el contraste presente entre las dinámicas del entrelazamiento y el comportamiento de las otras correlaciones. Se observaron los fenómenos de muerte súbita y renacimiento de la concurrencia, notándose que al ocurrir éstos no era posible determinar un orden relativo entre el entrelazamiento y las otras correlaciones. Esto quiere decir que no es posible especificar una jerarquía entre el entrelazamiento y la discordia como se consiguió, por ejemplo, en el caso las medidas geométricas de la discordia y el entrelazamiento por medio de la entropía relativa [59]. Sin embargo sí se presenció un orden relativo al desaparecer tales fenómenos. La razón de tal orden fue adjudicada a la forma del parámetro de un qubit P_t. Por otro lado, mientras el entrelazamiento muestra profundos cambios en su evolución al variar la región en la que se trabaja dentro de una familia dada de estados iniciales, las otras correlaciones no presentan desvíos significativos en su comportamiento. Tales observaciones no permiten deducir la existencia de relaciones dinámicas entre las diferentes correlaciones.

El sistema fue comparado con su aproximación markoviana, en la que desaparecen las oscilaciones de las diferentes correlaciones, de donde se desprende que tales fenómenos son producto de los efectos de memoria en la interacción no markoviana.

En particular, para la familia de estados iniciales mencionada, se mostró que las correlaciones clásicas valen lo mismo que la discordia cuántica. Teniendo en cuenta que la información mutua corresponde a la suma de estas dos cantidades y se utiliza como cuantificador de las correlaciones totales de un sistema [32], es posible decir en este caso que la parte cuántica y la parte clásica de las correlaciones tienen el mismo peso.

Por otro lado, para este mismo sistema en su régimen no markoviano con estados iniciales que son una superposición de un qubit en su estado excitado y el otro en su estado fundamental, la evolución de las correlaciones clásicas contrasta inmensamente con su comportamiento anterior, diferenciándose del comportamiento de la discordia. Vale preguntarse entonces si la igualdad entre correlaciones clásicas y

discordia hallada para la familia de estados iniciales precedente está determinada por la presencia del estado dado por los dos qubits en su estado fundamental en la superposición inicial del sistema.

En este caso también se presenció la desaparición del fenómeno de renacimiento, dando lugar a un orden relativo entre las diferentes correlaciones.

Además, eligiendo un estado inicial particular, $\alpha\,|01\rangle + \beta\,|10\rangle$ con $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$, se demostró que la concurrencia es igual a la entropía relativa de coherencia, ambas mayores que la discordia cuántica.

En esta tesis se analizó asimismo el caso de dos qubits interactuando con un ambiente común a temperatura cero, centrándose principalmente en su aproximación markoviana y para estados iniciales que son una superposición de los dos qubits en su estado excitado y los dos en su estado fundamental. Aquí se volvió a observar el fenómeno de renacimiento del entrelazamiento, aunque no ocasionado por los efectos de memoria. Se distinguió una región de estados inciales para la cual todas las correlaciones presentaban comportamientos peculiares. Sin embargo, no fue posible establecer relaciones entre el comportamiento de la concurrencia y las dinámicas de las otras correlaciones.

Este sistema permitió a su vez observar un cambio súbito marcado en la evolución de las correlaciones clásicas, cuya aparición indica el tiempo en el que la entropía relativa de coherencia se iguala a la discordia. En este sentido, es necesario destacar que se demostró una relación jerárquica entre la entropía relativa de coherencia y la discordia cuántica para todos los estados X que cumplen con la expresión analítica de la discordia 4.50, siendo la primera siempre mayor o igual a la útlima, pudiendo ser iguales por largos lapsos o durante toda la evolución del sistema. Este resultado está en acuerdo con los expuestos en [59], trabajo en el que se halló que la entropía relativa de discordia es siempre menor o igual a la entropía relativa de coherencia. Allí también se definió una medida de la coherencia, independiente de la base, y se probó que es exactamente equivalente a la discordia cuántica. Una de las consecuencias que tiene esta posible equivalencia entre discordia y coherencia es que la existencia de *freezing* para la discordia puede significar que el fenómeno se observe igualmente para la entropía relativa de coherencia, en acuerdo con los resultados en [54], ya mencionados.

Por otra parte, en la evolución no markoviana del sistema se destaca la creación súbita de entrelazamiento, siendo que el estado inicial no contaba con él, asociada con una previa disminución y marcado aumento de la discordia y la entropía relativa de coherencia. Este tipo de dinámica fue también observada en [60] para este mismo sistema en su aproximación markoviana y cuando los dos qubits se encuentran inicialmente en sus estados excitados; allí se consideran las correlaciones

cuánticas como precursores del entrelazamiento y se muestra que el ambiente crea correlaciones que luego él mismo destruye. Probablemente esto sea lo que también sucede en el caso no markoviano.

Teniendo en consideración que todos los sistemas físicos reales se encuentran en interacción con el ambiente, queda en evidencia la necesidad de investigar formas de prevenir el decaimiento de las correlaciones cuánticas explotando los efectos no markovianos, con el fin de que se extienda el período por el cual son utilizables como recursos para tecnologías cuánticas. Con respecto a sus aplicabilidades, esto podría permitir, a modo de ejemplo, maximizar la información transmitida en protocolos cuánticos.

En lo que respecta a las medidas geométricas de entrelazamiento y discordia, fue posible estudiar sus evoluciones para los canales *phase damping*, *bit flip*, *phase flip*, *bit-phase flip* y *depolarizing*, hallándose relaciones dinámicas entre entrelazamiento y discordia con la norma traza y la norma de Hilbert-Schmidt. Por la manera en la que fue definida en entrelazamiento geométrico con la norma traza, la deducción de tales relaciones equivale a la determinación de una relación dinámica entre la discordia cuántica geométrica con la norma-1 y la concurrencia, para los canales mencionados. Queda planteada la interrogante de si las relaciones halladas son meras consecuencias matemáticas o si realmente representan una conexión conceptual entre las diferentes correlaciones.

Igualmente, se observaron diferentes comportamientos asociados al fenómeno de *freezing* para la discordia cuántica geométrica con la norma traza y la de Hilbert-Schmidt, que llevan a cuestionarse la confianza depositada sobre ambas medidas como buenos cuantificadores de la discordia.

Se estudiaron también las relaciones entre los tiempos de muerte súbita del entrelazamiento y cambio súbito de la decoherencia, y se observó que el último marca una transición entre el régimen de decoherencia de correlaciones clásicas y el régimen de decoherencia cuántica. Es relevante continuar profundizando en el estudio de este tipo de relaciones y comprender cómo pueden ser manipulados los sistemas cuánticos para extender los períodos de *freezing* de las correlaciones, el tiempo en el que ocurren las muertes súbitas y la frecuencia y magnitud de los *revival* para explotar al máximo las correlaciones como recursos para la computación y comunicación cuánticas.

Por útlimo, se caracterizó la geometría de un subconjunto de estados diagonales de Bell sujetos al canal *phase damping* que pudieron representarse en $\mathbb{R}^3$, determinando las regiones correspondientes a los estados separables y a los estados clásicos. Esto útlimo deja abierta la posibilidad de hallar también relaciones dinámicas entre el entrelazamiento y la discordia para este tipo de evoluciones.

Del trabajo aquí desarrollado se destaca la riqueza obsevada en la evolución de las diferentes correlaciones en sistemas cuánticos abiertos, dejando manifiesto que se trata de un tema que merece un estudio más profundo por todas las implicancias, teóricas y prácticas, que conlleva.

8. Apéndice

8.1 Apéndice A

En esta sección se presentarán los resultados mencionados en 5.1.1 para la evolución de estados X bajo la dinámica no markoviana de dos qubits independientes interactuando con su propio reservorio bosónico a temperatura cero, con un estado inicial de la forma $|\psi\rangle = \alpha\,|00\rangle + \beta\,|11\rangle$.

8.1.1 Expresión analítica: discordia y correlaciones clásicas

En primera instancia se va a mostrar que en este caso es posible aplicar la expresión 4.50 con el objetivo de obtener un resultado exacto para la discordia. Como $\rho_{23} = 0$ la condición principal $|\rho_{23} + \rho_{14}| \geq |\rho_{23} - \rho_{14}|$, además nos encontramos en el caso de la condición 4.49 como se probará a continuación.

Se desea mostrar que $|\rho_{14}(t)| - |\sqrt{\rho_{11}(t)\rho_{44}(t)} - \sqrt{\rho_{22}(t)\rho_{33}(t)} \geq 0$ para todo tiempo. Sustituyendo las diferentes expresiones para los elementos de matriz y observando que aquello que se encuentra dentro del valor absoluto es siempre positivo, la desigualdad se puede escribir como:

$$|\alpha|\sqrt{1-\alpha^2}P_t - \sqrt{(1-\alpha^2)P_t^2(1-2(1-\alpha^2)(1-P_t)P_t-(1-\alpha^2)P_t^2)} - \sqrt{(1-\alpha^2)^2(1-P_t)^2P_t^2} \geq 0 \tag{8.1}$$

Desarrollando lo que se desea probar positivo, se tiene:

$$\begin{aligned} &-2(1-\alpha^2)^2(P_t-1)^2P_t^2 + 2(1-\alpha^2)|P_t-1|P_t^2\sqrt{(1-\alpha^2)(1+(1-\alpha^2)(P_t-2)P_t} = \\ &= 2(1-\alpha^2)|P_t|P_t^2\left(-(1-\alpha^2)|P_t-1| + \sqrt{(1-\alpha^2)(1+(1-\alpha^2)(P_t-2)P_t}\right) \end{aligned} \tag{8.2}$$

Siendo $2(1-\alpha^2)|P_t|P_t^2$ mayor que 0, el problema se reduce a probar que lo que se encuentra multiplicándolo es positivo, es decir que basta mostrar que

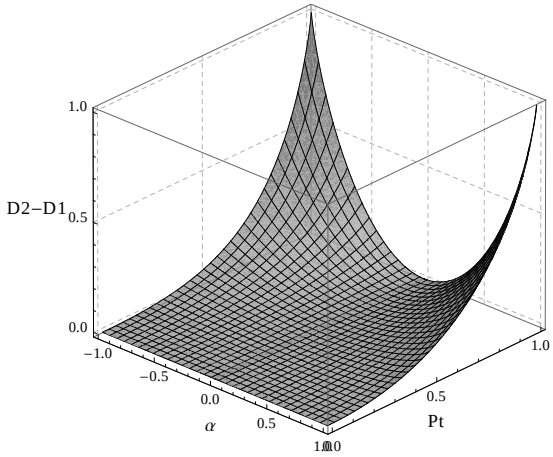


Figura 8.1: $D_2 - D_1$ en función de P_t y de α.

$$(1-\alpha^2)(1+(1-\alpha^2)(P_t-2)P_t) \geq (1-\alpha^2)^2(P_t-1)^2 \tag{8.3}$$

O equivalentemente,

$$1+(1-\alpha^2)\left((P_t-2)P_t-(P_t-1)^2\right) \geq 0 \tag{8.4}$$

8.4 se verifica, ya que $0 \geq P_t \geq 1$ y $0 \geq \alpha^2 \geq 1$. Se concluye entonces, que el caso en estudio cumple con la 4.49, y por lo tanto la ecuación 4.50 es una expresión exacta de la discordia y la ecuación 4.54 corresponde precisamente a las correlaciones clásicas.

8.1.2 La discordia cuántica no presenta cambios súbitos

Gráficamente (Figura 8.1) se observa que $D_2 - D_1 \geq 0$, para todo P_t y todo α, lo que implica que la discordia cuántica siempre se mantiene igual a D_1.

8.1.3 Las correlaciones clásicas son iguales a la discordia cuántica

Las formas analíticas para las correlaciones clásicas y la discordia cuántica se definieron en 4.50 y 4.54, respectivamente. En esta sección se va a probar que la discordia cuántica y las correlaciones clásicas son iguales para todo $\rho(t)$ que evoluciona según 3.50 a partir de un estado incial $|\psi\rangle = \alpha\,|00\rangle + \beta\,|11\rangle$.

$\rho(t)$ tiene un autovalor doble λ_1 y dos valores propios simples λ_2 y λ_3:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \rho_{22}(t)\\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\left(\rho_{11}(t)+\rho_{44}(t)+\sqrt{(\rho_{11}(t)-\rho_{44}(t))^2+4\rho_{14}(t)}\right)\\ \lambda_3 &= \frac{1}{2}\left(\rho_{11}(t)+\rho_{44}(t)-\sqrt{(\rho_{11}(t)-\rho_{44}(t))^2+4\rho_{14}(t)}\right)\end{aligned} \tag{8.5}$$

Probar $QD = CC$ equivale a probar que $Q_1 = C_1$, es decir:

$$\Gamma(\rho_{11}(t)+\rho_{33}(t)) + \sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i + \Gamma(A) = \Gamma(\rho_{11}+\rho_{22}) - \Gamma(A), \tag{8.6}$$

con $A = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{(1-2(\rho_{33}+\rho_{44}))^2+4(|\rho_{14}|+|\rho_{23}|)^2}\right)$. En este caso $\rho_{22}(t) = \rho_{33}(t)$ para todo t, por lo que se debe mostrar que:

$$\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i + 2\Gamma(A) = 0 \tag{8.7}$$

$$\begin{aligned}&\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i + 2\Gamma(A) = \frac{1}{2\log(2)}\Bigg[4(\alpha^2-1)(P_t-1)P_t \log\left((\alpha^2-1)(P_t-1)P_t\right) +\\ &2\left(-1+\sqrt{1-4(\alpha^2-1)(P_t-1)P_t}\right)\log\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4(\alpha^2-1)(P_t-1)P_t}\right)\right) -\\ &\left(-1+2(\alpha^2-1)(P_t-1)P_t+\sqrt{1-4(\alpha^2-1)(P_t-1)P_t}\right)\\ &\log\left(\frac{1}{2}\left(1-2(\alpha^2-1)(P_t-1)P_t-\sqrt{1-4(\alpha^2-1)(P_t-1)P_t}\right)\right) -\\ &2\left(1+\sqrt{1-4(\alpha^2-1)(P_t-1)P_t}\right)\log\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4(\alpha^2-1)(P_t-1)P_t}\right)\right) +\\ &\left(1-2(\alpha^2-1)(P_t-1)P_t+\sqrt{1-4(\alpha^2-1)(P_t-1)P_t}\right)\\ &\log\left(\frac{1}{2}\left(1-2(\alpha^2-1)(P_t-1)P_t+\sqrt{1-4(\alpha^2-1)(P_t-1)P_t}\right)\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{8.8}$$

Poniendo $B = 2(\alpha^2-1)(P_t-1)P_t$, 8.8 queda:

$$\begin{aligned}&\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i + 2\Gamma(A) = 2(-1+\sqrt{1-2B})\log\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-2B})\right) -\\ &(-1+B+\sqrt{1-2B})\log\left(\frac{1}{2}(1-B-\sqrt{1-2B})\right) -\\ &2(1+\sqrt{1-2B})\log\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-2B})\right) +\\ &(1-B+\sqrt{1-2B})\log\left(\frac{1}{2}(1-B+\sqrt{1-2B})\right) + 2B\log\left(\frac{B}{2}\right)\end{aligned} \tag{8.9}$$

Como se tiene que

$$\begin{aligned} 2\log\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-2B})\right) &= \log\left(\frac{1}{4}(1-\sqrt{1-2B})^2\right) \\ &= \log\left(\frac{1}{2}(1-B-\sqrt{1-2B})\right) \end{aligned} \tag{8.10}$$

y

$$2\log\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-2B})\right) = \log\left(\frac{1}{2}(1-B+\sqrt{1-2B})\right) \tag{8.11}$$

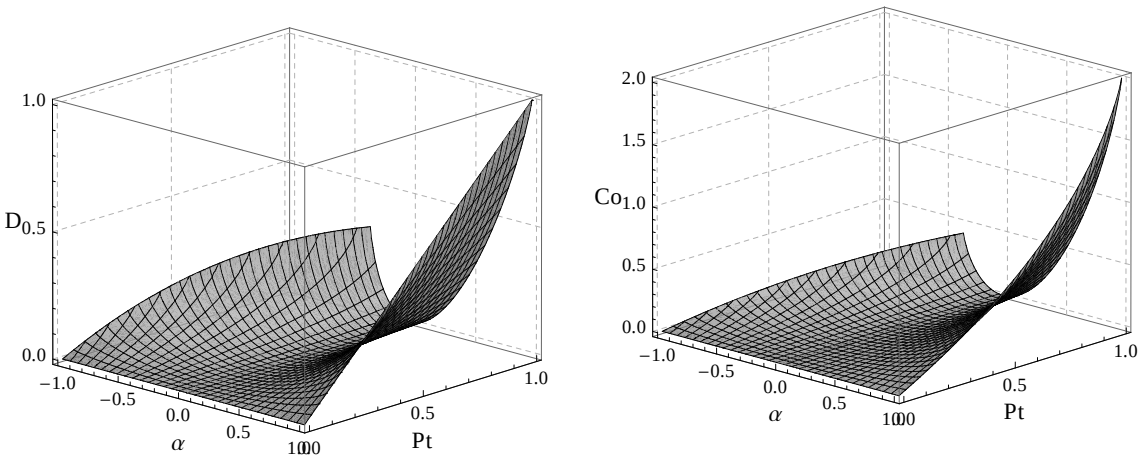
Finalmente 8.9 se simplifica y queda igual a

$$\begin{aligned} &\left(-1+\sqrt{1-2B}+1-B-\sqrt{1-2B}\right)\log\left(\frac{1}{2}(1-B-\sqrt{1-2B})\right)+ \\ &+\left(-1-\sqrt{1-2B}+1-B+\sqrt{1-2B}\right)\log\left(\frac{1}{2}(1-B+\sqrt{1-2B})\right)+2B\log\left(\frac{B}{2}\right)= \\ &=-B\log\left(frac14(1-B-\sqrt{1-2B})(1-B+\sqrt{1-2B})\right)+2B\log\left(\frac{B}{2}\right)= \\ &=-B\log\left(\left(\frac{B}{2}\right)^2\right)+2B\log\left(\frac{B}{2}\right)=0 \end{aligned} \tag{8.12}$$

Por lo tanto queda demostrado que en este caso las correlaciones valen lo mismo que la discordia cuántica.

8.1.4 Correlaciones nulas para tiempos discretos

En la Figura 8.2, se presenta el comportamiento de la discordia cuántica (correlaciones clásicas) y la entropía relativa de coherencia en función de P_t y α. Se observa que para todo α estás son crecientes con P_t y alcanzan su mínimo cuando $P_t = 0$.



(a) (b)

Figura 8.2: Discordia (a) y entropía relativa de coherencia (b) en función de α y P_t.

8.1.5 Coherencia y discordia en tiempo inicial

Mostrar que la coherencia y la discordia son iguales para $\tau = 0$ equivale a mostrar que

$$\Gamma\left(\rho_{11}(0) + \rho - 33(0)\right) + \Gamma(A) = -\sum_i \rho_{ii}(0)\mathrm{Log}_2\left(\rho_{ii}(0)\right) \tag{8.13}$$

con A dado en 4.54 Para $\tau = 0$, $P_t = 1$, y el término a la izquierda en la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned}&\Gamma(1-\alpha^2) + \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{(1-2\alpha^2)^2 + 4(\alpha\sqrt{1-\alpha^2})^2}\right)\right) = \\ &= \Gamma(1-\alpha^2) + \Gamma(1) = \Gamma(1-\alpha^2) = -(1-\alpha^2)\mathrm{Log}_2\left(1-\alpha^2\right) - \alpha^2\mathrm{Log}_2\alpha^2\end{aligned} \tag{8.14}$$

Este es el mismo valor que el término del la derecha, por lo tanto se demostró que inicialmente la coherencia y la discordia cuántica coinciden.

8.2 Apéndice B

En esta sección se desarrollan los resultados mencionados en 5.1.2 para la evolución de estados X bajo la dinámica no markoviana 3.50, con un estado inicial de la forma $|\psi\rangle = \alpha\,|01\rangle + \beta\,|10\rangle$.

8.2.1 Expresión analítica: discordia y correlaciones clásicas

En este caso $\rho_{14} = 0$, por lo que la condición general $|\rho_{23} + \rho_{14}| \geq |\rho_{23} - \rho_{14}|$ se cumple. Además, el requerimiento 4.49 también se verifica, ya que:

$$\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} = \sqrt{1-\alpha^2}|\alpha|P_t = |\rho_{23}| \tag{8.15}$$

Se concluye que es posible aplicar las expresiones analíticas 4.50 para la discordia cuántica y 4.54 para las correlaciones clásicas.

8.2.2 Concurrencia igual a la coherencia para $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

En esta sección se va a probar que la concurrencia es igual a la coherencia para todo tiempo y para todo λ/γ_0, en el caso de trabajar con una densidad $\rho(t)$ que evoluciona según 3.50 a partir de un estado incial $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\,|01\rangle + \beta\,|10\rangle\right)$.

Los autovalores de $\rho(t)$ son:

$$\begin{aligned}\lambda_{1\pm} &= \frac{1}{2}\left(\rho_{11}(t)+\rho_{44}(t) \pm \sqrt{\rho_{11}(t)^2+\rho_{44}(t)^2-2\rho_{11}(t)\rho_{44}(t)+4\rho_{14}^2}\right)\\ \lambda_{2\pm} &== \frac{1}{2}\left(\rho_{22}(t)+\rho_{33}(t) \pm \sqrt{\rho_{22}(t)^2+\rho_{33}(t)^2-2\rho_{22}(t)\rho_{33}(t)+4\rho_{23}^2}\right)\end{aligned} \tag{8.16}$$

Teniendo en cuenta que $\rho_{11}(t) = \rho_{14}(t) = 0$ para todo tiempo, $\lambda_{1-} = \lambda_{2-} = 0$ y quedan dos valores propios no nulos:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_{1+} = \rho_{44}(t) = 1-\rho_{22}(t)-\rho_{33}(t) = 1-P_t\\ \lambda_2 &= \lambda_{2+} = P_t\end{aligned} \tag{8.17}$$

Entonces la concurrencia es igual a

$$C(t) = \max\{0, P_t\} = P_t \tag{8.18}$$

Por otro lado, la coherencia se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\mathrm{Coh}(t) =& -\rho_{22}(t)\log_2\rho_{22}(t) - \rho_{33}(t)\log_2\rho_{33}(t) - \rho_{44}(t)\log_2\rho_{44}(t)+\\ &+\rho_{44}(t)\log_2\rho_{44}(t) + P_t\log_2 P_t = -P_t\log_2\frac{P_t}{2} + P_t\log_2 P_t = P_t\end{aligned} \tag{8.19}$$

Con lo que se prueba que la coherencia es igual a la concurrencia para todo tiempo y todo parámetro λ/γ_0.

Además, la discordia es, en este caso, D_2, por lo que $D_1 = \mathrm{Coh} = C$ es mayor que la discordia cuántica para todo tiempo.

8.3 Apéndice C

En esta parte del apéndice se explicita la forma del estado evolucionado para la dinámica markoviana de dos qubits en un reservorio común a temperatura cero (discutida en la sección 3.3.3), en el caso de tener un estado inicial de la forma $\alpha\,|11\rangle + \sqrt{1-\alpha}\,|00\rangle$, en la base canónica.

El pasaje de la base colectiva a la base canónica está dado por:

$$A\begin{pmatrix}\rho_{gg} & 0 & 0 & \rho_{ge}\\ 0 & \rho_{ss} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \rho_{aa} & 0\\ \rho_{eg} & 0 & 0 & \rho_{ee}\end{pmatrix}A \tag{8.20}$$

Donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1/2} & 2^{-1/2} & 0 \\ 0 & 2^{-1/2} & -2^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base.

Entonces, en la base canónica el estado evolucionado, en función de $\tau = \gamma_0 t$, queda de la forma:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \begin{pmatrix} \rho_{gg}(\tau) & 0 & 0 & \rho_{ge}(\tau) \\ 0 & \frac{\rho_{aa}(\tau)+\rho_{ss}(\tau)}{2} & \frac{-\rho_{aa}(\tau)+\rho_{ss}(\tau)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\rho_{aa}(\tau)+\rho_{ss}(\tau)}{2} & \frac{\rho_{aa}(\tau)+\rho_{ss}(\tau)}{2} & 0 \\ \rho_{eg}(\tau) & 0 & 0 & \rho_{ee}(\tau) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{11}(\tau) & 0 & 0 & \rho_{14}(\tau) \\ 0 & \rho_{22}(\tau) & \rho_{23}(\tau) & 0 \\ 0 & \rho_{23}*(\tau) & \rho_{33}(\tau) & 0 \\ \rho_{14}*(\tau) & 0 & 0 & \rho_{44}(\tau) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.21}$$

Para el caso estudiado los elementos de la matriz evolucionada en la base canónica son iguales a:

$$\begin{aligned} \rho_{22}(\tau) &= pe^{-2\tau}\frac{1-\gamma_{12}}{1+\gamma_{12}}(e^{(1+\gamma_{12})\tau}-1) + pe^{-2\tau}\frac{1+\gamma_{12}}{1-\gamma_{12}}(e^{(1-\gamma_{12})\tau}-1) = \rho_{33} \\ \rho_{44}(\tau) &= pe^{-2\tau} \\ \rho_{11}(\tau) &= 1-\rho_{22}(\tau)-\rho_{33}(\tau)-\rho_{44}(\tau) \\ \rho_{23}(\tau) &= -pe^{-2\tau}\frac{1-\gamma_{12}}{1+\gamma_{12}}(e^{(1+\gamma_{12})\tau}-1) + pe^{-2\tau}\frac{1+\gamma_{12}}{1-\gamma_{12}}(e^{(1-\gamma_{12})\tau}-1) \\ \rho_{14}(\tau) &= \sqrt{p(p-1)}e^{-\tau} \end{aligned} \tag{8.22}$$

8.4 Apéndice D

8.4.1 Canal *Phase Damping* y estados diagonales de Bell

En esta sección se muestra que para estados iniciales diagonales de Bell, con vector de correlación $\vec{r}(0) = (r_1(0), r_2(0), r_3(0))$, con ambos qubits sujetos al canal de *phase damping* con misma probabilidad p, se mantiene la estructura diagonal de Bell. El estado inicial se encuentra dado por:

$$\rho_{\text{in}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+r_3(0) & 0 & 0 & r_1(0)-r_2(0) \\ 0 & 1-r_3(0) & r_1(0)+r_2(0) & 0 \\ 0 & r_1(0)+r_2(0) & 1-r_3(0) & 0 \\ r_1(0)-r_2(0) & 0 & 0 & 1+r_3(0) \end{pmatrix} \tag{8.23}$$

Utilizando 4.8, se tiene que para dos qubits sujetos a operaciones locales:

$$\mathcal{M}_{loc}(\rho_{AB}) = \sum_{i,j} \left(M_i^A \otimes M_j^B\right) \rho_{AB} \left(M_i^A \otimes M_j^B\right)^\dagger . \tag{8.24}$$

Teniendo en cuenta que en este caso $M_i \otimes M_j = M_i^\dagger \otimes M_j^\dagger$, la matriz densidad evolucionada es

$$\rho(p) = \sum_{i,j=0}^{2} M_i \otimes M_j \rho(0) M_i \otimes M_j \tag{8.25}$$

$$\rho(p) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+r_3(0) & 0 & 0 & (r_1(0)-r_2(0))(p-1)^2 \\ 0 & 1-r_3(0) & (r_1(0)+r_2(0))(p-1)^2 & 0 \\ 0 & (r_1(0)+r_2(0))(p-1)^2 & 1-r_3(0) & 0 \\ (r_1(0)-r_2(0))(p-1)^2 & 0 & 0 & 1+r_3(0) \end{pmatrix} \tag{8.26}$$

Las componentes del vector correlación evolucionado se pueden hallar como:

$$\begin{aligned} r_1(p) =& \mathrm{Tr}\left(\rho(p)\sigma_1 \otimes \sigma_1\right) \\ r_2(p) =& \mathrm{Tr}\left(\rho(p)\sigma_2 \otimes \sigma_2\right) \\ r_3(p) =& \mathrm{Tr}\left(\rho(p)\sigma_3 \otimes \sigma_3\right) \end{aligned} \tag{8.27}$$

$$\rho(p)\sigma_1 \otimes \sigma_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (r_1(0)-r_2(0))(p-1)^2 & 0 & 0 & 1+r_3(0) \\ 0 & (r_1(0)+r_2(0))(p-1)^2 & 1-r_3(0) & 0 \\ 0 & 1-r_3(0) & (r_1(0)+r_2(0))(p-1)^2 & 0 \\ 1+r_3(0) & 0 & 0 & (r_1(0)-r_2(0))(p-1)^2) \end{pmatrix} \tag{8.28}$$

$$\rho(p)\sigma_2 \otimes \sigma_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -(r_1(0)-r_2(0))(p-1)^2 & 0 & 0 & -1-r_3(0) \\ 0 & (r_1(0)+r_2(0))(p-1)^2 & 1-r_3(0) & 0 \\ 0 & 1-r_3(0) & (r_1(0)+r_2(0))(p-1)^2 & 0 \\ -1-r_3(0) & 0 & 0 & -(r_1(0)-r_2(0))(p-1)^2) \end{pmatrix} \tag{8.29}$$

$$\rho(p)\sigma_3 \otimes \sigma_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+r_3(0) & 0 & 0 & (r_1(0)-r_2(0))(p-1)^2 \\ 0 & r_3(0)-1 & -(r_1(0)+r_2(0))(p-1)^2 & 0 \\ 0 & -(r_1(0)+r_2(0))(p-1)^2 & r_3(0)-1 & 0 \\ (r_1(0)-r_2(0))(p-1)^2 & 0 & 0 & 1+r_3(0) \end{pmatrix} \tag{8.30}$$

Y tomando la traza se concluye que:

$$\begin{aligned} r_1(p) &= r_1(0)(1-p)^2 \\ r_2(p) &= r_2(0)(1-p)^2 \\ r_3(p) &= r_3(0) \end{aligned} \tag{8.31}$$

Para mostrar que la matriz evolucionada es también diagonal de Bell, alcanza con probar que 8.26 es igual a $\frac{1}{4}\left(\mathbb{1} + r_1(p)\sigma_1 \otimes \sigma_1 + r_2(p)\sigma_2 \otimes \sigma_2 + r_3(p)\sigma_3 \otimes \sigma_3\right)$, lo cual efectivamente se verifica.

8.4.2 Contractividad de la norma-2: canal *phase damping*

A continuación se probará que la norma de Hilbert-Schmidt es contractiva cuando la evolución está dada por el canal de *phase damping*, para un estado inicial diagonal de Bell. Entonces, siendo $\rho = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1} + \sum_i r_i\sigma_i \otimes \sigma_i\right)$ y $\zeta = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1} + \sum_i z_i\sigma_i \otimes \sigma_i\right)$ dos estados diagonales de Bell cualesquiera sometidos al canal *phase damping* $\mathcal{M}_{pd}$, se desea demostrar que

$$d_2(\mathcal{M}_{ph}(\rho), \mathcal{M}_{pd}(\zeta)) \leq d_2(\rho, \zeta) \tag{8.32}$$

Usando 4.71:

$$\begin{aligned} d_2(\mathcal{M}_{pd}(\rho), \mathcal{M}_{pd}(\zeta)) &= \frac{1}{2}\sqrt{(r_1(p) - z_1(p))^2 + (r_2(p) - z_2(p))^2 + (r_3(p) - z_3(p))^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(1-p)^2(r_1 - z_1)^2 + (1-p)^2(r_2 - z_2)^2 + (r_3 - z_3)^2} \end{aligned} \tag{8.33}$$

Como $p \in [0, 1]$,

$$d_2(\mathcal{M}_{pd}(\rho), \mathcal{M}_{pd}(\zeta)) \leq \frac{1}{2}\sqrt{(r_1 - z_1)^2 + (r_2 - z_2)^2 + (r_3 - z_3)^2} = d_2(\rho, \zeta) \tag{8.34}$$

De donde queda probada la contractividad de la norma-2 bajo el canal *phase damping*.

8.4.3 Relación entre p_{MS} y p_{CS}

Se buscan relaciones entre el tiempo de muerte súbita del entrelazamiento p_{MS} y el tiempo de cambio súbtido de la discordia p_{CS}.

- **Caso:** $|r_1(0)|, |r_3(0)| \leq |r_2(0)|$

  Si $|r_3(0)| > 1/3$ y además se verifica que $|r_1(0)|(1 - 2|r_3(0)|) < |r_3(0)||r_2(0)|$, entonces

  $$(1 - |r_3(0)|)|r_2(0)| < |r_3(0)|(|r_1(0)| + |r_2(0)|) \tag{8.35}$$

  Como $|r_1(0)|, |r_2(0)|, |r_3(0)| \neq 0$ para que haya cambio de base, y tales que se tenga entrelazamiento inicial:

  $$\frac{1 - |r_3(0)|}{|r_1(0)| + |r_2(0)|} < \frac{|r_3(0)|}{|r_2(0)|} \tag{8.36}$$

  De donde se concluye que $p_{MS} > p_{CS1}$.

  Particularmente, si $|r_3(0)| \leq 1/3$:

  $$p_{MS} = 1 - \sqrt{\frac{1 - |r_3(0)|}{|r_1(0)| + |r_2(0)|}} < 1 - \sqrt{\frac{1 - |r_3(0)|}{2|r_2(0)|}} < 1 - \sqrt{\frac{|r_3(0)|}{|r_2(0)|}} = p_{CS1} \tag{8.37}$$

- **Caso:** $|r_2(0)|, |r_3(0)| \leq |r_1(0)|$

  Si $|r_3(0)| \leq 1/3$, entonces para obtener $p_{MS} > p_{CS2}$, se debe verificar:

$$\frac{1-|r_3(0)|}{|r_1(0)|+|r_2(0)|} < \frac{|r_3(0)|}{|r_1(0)|} \tag{8.38}$$

  Con $|r_1(0)|, |r_2(0)|, |r_3(0)| \neq 0$ para observar un cambio súbito de la discordia, y tales que haya entrelazamiento inicial. Es decir,

$$|r_1(0)|(1-2|r_{30}|) < |r_3(0)||r_2(0)| \tag{8.39}$$

  En cualquier otro caso, $p_{MS} < p_{CS2}$. Particularmente,si $|r_3(0)| \leq 1/3$:

$$p_{MS} = 1-\sqrt{\frac{1-|r_3(0)|}{|r_1(0)|+|r_2(0)|}} < 1-\sqrt{\frac{1-|r_3(0)|}{2|r_1(0)|}} < 1-\sqrt{\frac{|r_3(0)|}{|r_1(0)|}} = p_{CS2} \tag{8.40}$$

8.5 Apéndice E

8.5.1 Canal *depolarizing* y estados diagonales de Bell

En esta sección del apéndice se muestra la evolución de un estado de dos qubits, inicialmente con forma diagonal en la base de Bell ($\vec{r}(0) = (r_1(0), r_2(0), r_3(0))$), con ambos subsistemas sujetos al canal *depolarizing* con igual probabilidad p.

Procediendo como en para el canal *phase damping*, con los operadores de Kraus 3.27, se obtiene

$$\rho(p) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (1+r_3(0)(p-1)^2) & 0 & 0 & (r_1(0)-r_2(0))(p-1)^2 \\ 0 & (1-r_3(0)(p-1)^2) & (r_1(0)+r_2(0))(p-1)^2 & 0 \\ 0 & (r_1(0)+r_2(0))(p-1)^2 & (1-r_3(0)(p-1)^2) & 0 \\ (r_1(0)-r_2(0))(p-1)^2 & 0 & 0 & (1+r_3(0)(p-1)^2) \end{pmatrix} \tag{8.41}$$

Los componentes evolucionados del vector correlación están dados por:

$$\begin{aligned} r_1(p) &= \mathrm{Tr}(\rho(p)\sigma_1 \otimes \sigma_1) = r_1(0)(p-1)^2 \\ r_2(p) &= \mathrm{Tr}(\rho(p)\sigma_2 \otimes \sigma_2) = r_2(0)(p-1)^2 \\ r_3(p) &= \mathrm{Tr}(\rho(p)\sigma_3 \otimes \sigma_3) = r_3(0)(p-1)^2 \end{aligned} \tag{8.42}$$

Para asegurarse de que el estado tiene forma diagonal de Bell para todo p, alcanza con probar que 8.41 puede escribirse en la forma 2.20 con r_i dado por 8.42; lo cual fácilmente se verifica.

8.5.2 Contractividad de la norma-2: canal *depolarizing*

A continuación se probará que la norma de Hilbert-Schmidt es contractiva cuando la evolución está dada por el canal de *depolarizing*, para un estado inicial diagonal de Bell. Tomando dos estado diagonales de Bell $\rho = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1} + \sum_i r_i \sigma_i \otimes \sigma_i\right)$ y $\zeta = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1} + \sum_i z_i \sigma_i \otimes \sigma_i\right)$ arbitrarios, sometidos al canal de *depolarizing* $\mathcal{M}_d$, se desea demostrar que

$$d_2(\mathcal{M}_d(\rho), \mathcal{M}_d(\zeta)) \leq d_2(\rho, \zeta) \tag{8.43}$$

Empleando 4.71:

$$\begin{aligned} d_2(\mathcal{M}_d(\rho), \mathcal{M}_d(\zeta)) &= \frac{1}{2}\sqrt{(r_1(p) - z_1(p))^2 + (r_2(p) - z_2(p))^2 + (r_3(p) - z_3(p))^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(1-p)^2(r_1 - z_1)^2 + (1-p)^2(r_2 - z_2)^2 + (1-p)^2(r_3 - z_3)^2} \end{aligned} \tag{8.44}$$

Como $p \in [0, 1]$,

$$d_2(\mathcal{M}_d(\rho), \mathcal{M}_d(\zeta)) \leq \frac{1}{2}\sqrt{(r_1 - z_1)^2 + (r_2 - z_2)^2 + (r_3 - z_3)^2} = d_2(\rho, \zeta) \tag{8.45}$$

De donde se prueba la contractividad de la norma-2 bajo el canal *depolarizing*.

8.6 Apéndice F

8.6.1 Evolución para canales *bit flip*, *phase flip* y *bit-phase flip*

Para los canales *bit flip* (bf), *phase flip* (pf) y *bit-phase flip* (bpf), las matrices evolucionadas, para estados iniciales diagonales en la base de Bell con vectores de correlación $\vec{r}(0) = (r_1(0), r_2(0), r_3(0))$, quedan respectivamente de las siguientes formas:

$$\rho_{bf}(p) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 + r_3(0)(p-1)^2 & 0 & 0 & r_1(0) - r_2(0)(p-1)^2 \\ 0 & 1 - r_3(0)(p-1)^2 & r_1(0) + r_2(0)(p-1)^2 & 0 \\ 0 & r_1(0) + r_2(0)(p-1)^2 & 1 - r_3(0)(p-1)^2 & 0 \\ r_1(0) - r_2(0)(p-1)^2 & 0 & 0 & 1 + r_3(0)(p-1)^2 \end{pmatrix} \tag{8.46}$$

$$\rho_{pf}(p) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 + r_3(0) & 0 & 0 & (r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 \\ 0 & 1 - r_3(0) & (r_1(0) + r_2(0))(p-1)^2 & 0 \\ 0 & (r_1(0) + r_2(0))(p-1)^2 & 1 - r_3(0) & 0 \\ (r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 & 0 & 0 & 1 + r_3(0) \end{pmatrix} \tag{8.47}$$

$$\rho_{bpf}(p) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+r_3(0)(p-1)^2 & 0 & 0 & -r_2(0)+r_1(0)(p-1)^2 \\ 0 & 1-r_3(0)(p-1)^2 & r_2(0)+r_1(0)(p-1)^2 & 0 \\ 0 & r_2(0)+r_1(0)(p-1)^2 & 1-r_3(0)(p-1)^2 & 0 \\ -r_2(0)+r_1(0)(p-1)^2 & 0 & 0 & 1+r_3(0)(p-1)^2 \end{pmatrix} \tag{8.48}$$

Nuevamente, tomando la traza de $(\rho\sigma_i \otimes \sigma_i)$, con $i = 1, 2, 3$, para cada canal, se obtienen los siguientes vectores de correlación evolucionados:

$$\vec{r}_{bf}(p) = r_1(0)\hat{i} + r_2(0)(1-p)^2\hat{j} + r_3(0)(1-p)^2\hat{k} \tag{8.49}$$

$$\vec{r}_{pf}(p) = r_1(0)(1-p)^2\hat{i} + r_2(0)(1-p)^2\hat{j} + r_3(0)\hat{k} \tag{8.50}$$

$$\vec{r}_{bpf}(p) = r_1(0)(1-p)^2\hat{i} + r_2(0)\hat{j} + r_3(0)(1-p)^2\hat{k} \tag{8.51}$$

Además, se comprueba que 8.52, 8.47 y 8.48 pueden escribirse en la forma 2.20, por lo tanto se tratan de estados diagonales en la base de Bell.

8.6.2 Contractividad de la norma-2: canales *bf*, *pf*, *bpf*

La norma de Hilbert-Schmidt es contractiva bajo los canales *bit flip*, *phase flip*, *bit-phase flip*, para un estado inicial diagonal en la base de Bell. El caso del canal *phase flip* es el mismo que el del canal *phase damping*, por lo que la contractividad ya fue demostrada. Para los canales *phase flip* y *bit-phase flip*, la demostración es análoga, simplemente intercambiando el rol de los r_i y z_i.

8.7 Apéndice G

8.7.1 Evolución para el canal *amplitude damping*

Para *amplitude damping*, la matriz densidad evolucionada, para estados iniciales diagonales en la base de Bell con vectores de correlación $\vec{r}(0) = (r_1(0), r_2(0), r_3(0))$, queda de la siguiente forma:

$$\rho_{ad}(p) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (1+r_3(0))(1+p^2)+2(1-r_3(0))p & 0 & 0 & (r_1(0)-r_2(0))(1-p) \\ 0 & (1-p)(1-r_3(0)+(1+r_3(0))p) & (r_1(0)+r_2(0))(1-p) & 0 \\ 0 & (r_1(0)+r_2(0))(1-p) & (1-p)(1-r_3(0)+(1+r_3(0))p) & 0 \\ (r_1(0)-r_2(0))(1-p) & 0 & 0 & 1+r_3(0)(p-1)^2 \end{pmatrix} \tag{8.52}$$

Tomando la traza de $(\rho_{ad}(p)\sigma_i \otimes \sigma_j)$, con $i = 1, 2, 3$, se obtiene:

$$\begin{aligned} r_1(p) &= \mathrm{Tr}(\rho_{ad}(p)\sigma_1 \otimes \sigma_1) = r_1(0)(1-p) \\ r_2(p) &= \mathrm{Tr}(\rho_{ad}(p)\sigma_2 \otimes \sigma_2) = r_2(0)(1-p) \\ r_3(p) &= \mathrm{Tr}(\rho_{ad}(p)\sigma_3 \otimes \sigma_3) = r_3(0)(1-p)^2 + p^2 \\ m_3(p) &= \mathrm{Tr}(\rho_{ad}(p)\mathbb{1} \otimes \sigma_3) = \mathrm{Tr}(\rho_{ad}(p)\sigma_3 \otimes \mathbb{1}) = p \end{aligned} \tag{8.53}$$

8.7.2 Contractividad de la norma-2: canal *amplitude damping*

A continuación se demostrará que la norma de Hilbert-Schmidt es contractiva bajo el canal de *amplitude damping*, para un estado inicial diagonal en la base de Bell. Se consideran dos estados diagonales de Bell $\rho = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1} + \sum_i r_i \sigma_i \otimes \sigma_i\right)$ y $\zeta = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1} + \sum_i z_i \sigma_i \otimes \sigma_i\right)$ arbitrarios, sometidos a la evolución *amplitude damping*. En este caso, los estados evolucionados quedan de la forma 6.49. De la misma manera con la que se procedió para los canales de las secciones anteriores, teniendo en cuenta 4.71:

$$\begin{aligned} d_2(\mathcal{M}_{ad}(\rho), \mathcal{M}_{ad}(\zeta)) &= \frac{1}{2}\Big((1-p)^2(r_1-z_1)^2 + (1-p)^2(r_2-z_2)^2 \\ &+ (1-p)^2 r_3 + p^2 - (1-p)^2 z_3 - p^2)^2 + (p-p)^2 + (p-p)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(1-p)^2(r_1-z_1)^2 + (1-p)^2(r_2-z_2)^2 + (1-p)^4(r_3-z_3)^2} \end{aligned} \tag{8.54}$$

Como $p \in [0,1]$,

$$d_2(\mathcal{M}_d(\rho), \mathcal{M}_d(\zeta)) \leq \frac{1}{2}\sqrt{(r_1-z_1)^2 + (r_2-z_2)^2 + (r_3-z_3)^2} = d_2(\rho, \zeta) \tag{8.55}$$

Con lo que queda demostrada la contractividad de la norma-2 bajo el canal *amplitude damping*.

8.7.3 Aplicación del algoritmo de Verstraete

En esta sección se muestra un ejemplo numérico que verifica la suposición de que los estados separables más próximos con la norma de Hilbert-Schmidt a estados de la forma 6.49 tienen esa misma estructura. Se aplica el algoritmo de Verstraete, explicado en la sección 4.4.3, a un estado 6.49 con $r_1 = 0.6$, $r_2 = r_3 = -0.8$ y $m_3 = p = 0.1$.

Los valores propios de la traspuesta parcial de este estado ρ^{TP}son aproximadamente: $d_1 = d_2 \approx 0.40950$, $d_3 \approx 0.36509$ y $d_4 \approx -0.18409$. Como se observa uno se los valores propios es negativo, lo que asegura que ρ^{TP} no sea semidefinida positiva, es decir que el estado ρ se encuentre entrelazado y no se esté trabajando con un caso trivial.

La matriz traspuesta parcial se puede escribir entonces como $\rho^{TP} = UDU^T$, con $D = \mathrm{diag}(d_1, d_1, d_3, d_4)$ y U de la forma:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_{12} & u_{14} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{14} & -u_{12} \end{pmatrix} \tag{8.56}$$

donde $a \approx -0.76879$ y $b \approx -0.63949$.

La matriz denominada G^2 en la descripción del algoritmo de Verstraete (en 4.4.3), queda igual a $G^2 = \mathrm{diag}(d_1 + \delta, d_1 + \delta, d_3 + \delta, 0)$. Donde δ se halla normalizando, es decir imponiendo que $\mathrm{Tr}G^2 = 1$. El valor calculado es aproximadamente $\delta \approx -6.1363 \otimes 10^{-2}$.

Ahora, calculando UG^2U^T y tomando su transpuesta parcial se obtiene el estado separable más próximo ρ_{sep}. En este caso queda de la forma:

$$\rho_{\mathrm{sep}} = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & s_{23} & 0 \\ 1 & s_{23} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{pmatrix} \tag{8.57}$$

con $s_{11} \approx 0.17951$, $s_{22} \approx 0.34814$, $s_{23} \approx 0.14932$ y $s_{44} = 1 - s_{11} - 2s_{22}$.

Finalmente, calculando las trazas $\mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{sep}}\sigma_i \otimes \sigma_i)$, con $i = x, y, z$, $\mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{sep}}\mathbb{1}_2 \otimes \sigma_3)$ y $\mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{sep}}\sigma_3 \otimes \mathbb{1}_2)$, se muestra que el estado separable más próximo tiene también la forma propuesta.

Referencias

[1] R. Jozsa, N. Linden. On the role of entanglement in quantum-computational speed-up. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences, **49**, 2011-2032 (2003).

[2] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? Phys. Rev. **47**, 777–780 (1935).

[3] A. K. Ekert, Quantum cryptography based on Bell's theorem. Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991).

[4] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).

[5] C. H. Bennett, S. J. Wiesner, Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. Phys. Rev. Lett. **69**, 2881 (1992).

[6] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, Mixed-State Entanglement and Distillation: Is there a "Bound" Entanglement in Nature? Phys. Rev. Lett. **80**, 5239 (1998).

[7] E. Knill, R. Laflamme, Power of one qubit of quantum information. Phys. Rev. Lett. **81**, 5672-5675(998).

[8] A. Datta, G. Vidal, Role of entanglement and correlations in mixed-state quantum computation. Phys. Rev. A **75**, 042310 (2007).

[9] W. H. Zurek, Einselection and Decoherence from an Information Theory Perspective. Ann. Phys. **9**, 5 (2000).

[10] H. Ollivier, W. H. Zurek, Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations. Phys. Rev. Lett. **88**, 017901(2001).

[11] L. Henderson, V. Vedral, Classical, quantum and total correlations. J. Phys. A **34** 6899 (2001).

[12] A. Datta, A. Shaji, C. M. Caves, Quantum Discord and the Power of One Qubit. Phys. Rev. Lett. **100**, 050502 (2008).

[13] B. P. Lanyon, M. Barbieri, M. P. Almeida, A. G. White, Experimental Quantum Computing without Entanglement. Phys. Rev. Lett. **101**, 200501 (2008).

[14] M. Gu, H. M. Chrzanowski, S. M. Assad, T. Symul, K. Modi, T. C. Ralph, V. Vedral, P. K. Lam, Observing the operational significance of discord consumption. Nature Physics **8**, 671–675 (2012).

[15] A. Ferraro, L. Aolita, D. Cavalcanti, F. M. Cucchietti, A. Acín, Almost all quantum states have nonclassical correlations. Phys. Rev. A **81**, 052318 (2010).

[16] H. P. Breuer, F. Petruccione, The Theory of Open Quantum Systems. Oxford University Press (2002).

[17] W. H. Zurek, Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. Rev. Mod. Phys. **75**, (2003).

[18] G. L. Giorgi, Quantum discord and remote state preparation. Phys. Rev. A **88**, 022315 (2013).

[19] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, The role of entanglement in dynamical evolution. Europhysics Letters **62**, 5 (2003).

[20] T. Yu, J. H. Eberly, Evolution form entanglement to decoherence of bipartite mixed X states. Quantum Information and Computation, **0**, No. 0 (2006).

[21] G. S. Agarwal, Quantum statistical theories of spontaneous emission and their relation to other approaches. Springer tracts in modern physics, **70** (1974).

[22] Z. Ficek, R. Tanaś, Dark periods and revivals of entanglement in a two-qubit system. Phys. Rev. A **74**, 024304 (2006).

[23] L Mazzola, S Maniscalco, J Piilo, K-A Suominen, Interplay between entanglement and entropy in two-qubit systems. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics **43**, 8 (2010).

[24] R. F. Werner, Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. Phys. Rev. A, **40**, 4277 (1989).

[25] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, Quantum entanglement. Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).

[26] W. K. Wootters, Entanglement of formation and Concurrence. Quantum Information and Computation, **1**, 1 (2007).

[27] C. A. Ryan, J. Emerson,D. Poulin,C. Negrevergne, R. Laflamme, Characterization of complex quantum dynamics with a scalable nmr information processor. Phys. Rev. Lett. **95**, 250502 (2005).

[28] G. Passante, O. Moussa, D. Trottier, R. Laflamme, Experimental detection of nonclassical correlations in mixed-state quantum computation. Phys. Rev. A **84**, 044302 (2011).

[29] B. Dakić, Y. O. Lipp, X. Ma, M. Ringbauer, S. Kropatschek, S. Barz, T. Paterek, V. Vedral, A. Zeilinger, C. Brukner, P. Walther, Quantum discord as a resource for remote state preparation. Nat. Phys. **8**, 666 (2012).

[30] L. Roa, J. C. Retamal, M. Alid-Vaccarezza. Dissonance is required for assisted optimal state discrimination. Phys. Rev. A **84**, 044302 (2011).

[31] C. E. Shannon, A mathematical theory of communication. Bell System Tech. J. **27**, 379 (1948).

[32] J. S. Zhang, A. X. Chen, Review of quantum discord in bipartite and multipar tite systems. Quant. Phys. Lett. **1**, 2 (2012).

[33] S. Luo, Quantum discord for two-qubit systems. Phys. Rev. A **77**, 042303 (2008).

[34] L. X. Cen, X. Q. Li, J. Shao, Y. J. Yan, Quantifying quantum discord and entanglement of formation via unified purifications. Phys. Rev. A **83**, 054101 (2011).

[35] M. Ali, A. R. P. Rau, G. Alber, Quantum discord for two-qubit X states. Phys. Rev. A **81**, 042105 (2010).

[36] Cheng-Zhi Wang, et al., Classical correlation and quantum discord mediated by cavity in two coupled qubits. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **44**, 015503 (2011).

[37] X.-M. Lu, j. Ma, Z. Xi, X. Wang, Optimal measurements to access classical correlations of two-qubit states. Phys. Rev. A **83**, 012327 (2011).

[38] Q. Chen, C. Zhang, S. Yu, X. X. Yi, C. H. Oh, Quantum discord of two-qubit X states. Phys. Rev. A **84**, 042313 (2011).

[39] Y. Huang, Quantum discord for two-qubit X states: Analytical formula with very small worst-case error. Phys. Rev. A **88**, 014302 (2013).

[40] Oppenheim, Horodecki, Thermodynamical approach to quantifying quantum correlations. Phys. Rev. Lett. **89**, 180402 (2002).

[41] M. Ozawa, Entanglement measures and the Hilbert-Schmidt distance. Phys. Rev. Lett. A **268**, 158 (2000).

[42] X. Wang, S. G. Schirmer, Contractivity of the Hilbert-Schmidt distance under open-system dynamics. Phys. Rev. A **79**, 052326 (2009).

[43] F. Verstraete, J. Dehaene, B. De Moore, On the geometry of entangled states. Journal of Modern Optics **49**, 8 (2001).

[44] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).

[45] B. Dakić, V. Vedral, C. Brukner, Necessary and Sufficient Condition for Nonzero Quantum Discord. Phys. Rev. Lett. **105**, 190502 (2010).

[46] B. Aaronson, R. Lo Franco, G. Compagno, G. Adesso, Hierarchy and dynamics of trace distance correlations. New J. Phys. **15**, 0903022 (2013).

[47] F Ciccarello, T Tufarelli and V Giovannetti, Toward computability of trace distance discord. New Journal of Physics **16** (2014).

[48] T. Yu, J. H. Eberly, Finite-Time Dissentanglement via spontaneous emiccion, Phys. Rev. Lett. **93**, 140404 (2004).

[49] T. Yu, J. H. Eberly, Sudden death of entanglement. Science **323**, 598 (2002).

[50] T. Werlang, F. F. Fanchini, C. J. Villas-Boas, Robustness of quantum discord to sudden death. Phys. Rev. A **80**,024103 (2009).

[51] B. Aaronson, R. Lo Franco, G. Adesso, Comparative investigation of the *freezing* phenomena for quantum correlations under nondissipative decoherence. Phys. Rev. A **88**, 012120 (2013).

[52] L. Mazzola, J. Piilo, S. Maniscalco, Frozen discord in non-Markovian dephasing channels. International Journal of Quantum Information **09**, 981–991 (2011).

[53] P. Haikka, T. H. Johnson, S. Maniscalco, Non-Markovianity of local dephasing channels and time-invariant discord. Phys. Rev. A **87** , 010103(R) (2013).

[54] M. Cianciaruso, T. R. Bromley, W. Roga, R. Lo Franco, G. Adesso; Universal *freezing* of quantum correlations within the geometric approach. Sci. Rep. **5**, 10177 (2015).

[55] B. Bellomo, R. Lo Franco, and G. Compagno, Non-Markovian Effects on the Dynamics of Entanglement. Phys. Rev. Lett. **99**, 160502 (2007).

[56] J. Maziero, L. C. Celeri, R. M. Serra. Symmetry aspects of quantum discord. https://arxiv.org/abs/1004.2082 (2011).

[57] S. M. Hashemi Rafsanjani, C. J. Broadbent, J. H. Eberly, Bounding the entanglement of N qubits with only four measurements. Phys. Rev. A,**88**, 062331 (2013).

[58] M. Horodecki, et al., Local versus nonlocal information in quantum-information theory: formalism and phenomena. Phys Rev. A **71**, 062307 (2005).

[59] Yao Yao, Xing Xiao, Li Ge, C. P. Sun, Quantum coherence in multipartite systems. Phys. Rev. A **92**, 022112 (2015).

[60] A. Auyuanet, L. Davidovich, Quantum correlations as precursors of entanglement. Phys. Rev. A **82**, 032112 (2010).