Tesis de Maestría en Física

Renormalización del tensor energía-momento en un espacio-tiempo cuántico con simetría esférica

Nahuel Barrios

Orientador: Dr. Rodolfo Gambini

Instituto de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Renormalización del tensor energía-momento en un espacio-tiempo cuántico con simetría esférica

Estudiante: Nahuel Barrios

Orientador: Dr. Rodolfo Gambini

Tribunal:
Dr. Miguel Campiglia
Dr. Raúl Donangelo
Dr. Miguel Paternain
Dr. Jorge Pullin

Instituto de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Agosto 2016

A mi madre.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi familia: a mamá, Tatiana, Dilan, Nicole, Johana y Atenea, por toda su paciencia y apoyo. A Iván, por estar siempre ahí.

A los amigos y amigas que me acompañaron en esta aventura y gracias a quienes el camino se tornó mucho más ameno: Nacho, Virginia, Lucía A., Gastón, Andrés V., Lucía D. y Magdalena.

A Esteban, por las charlas, las buenas discusiones y su inestimable ayuda.

A Rodrigo y Miguel, por su disposición permanente a dar una mano, a discutir y pensar.

Agradezco a la Comisión Académica de Posgrado y a la Agencia Nacional de Innovación e Investigación por la financiación de parte de este proyecto. Al Instituo de Física de la Facultad de Ingeniería, por apoyarme con tiempo libre durante este semestre para dedicarme a la redacción de este trabajo.

Por último, quiero agradecer a mi orientador, Rodolfo Gambini, por su enorme paciencia, sus aportes, sugerencias y tiempo.

Resumen

La solución a las ecuaciones de vínculo en gravedad cuántica de lazos para espacio-tiempos vacíos con simetría esférica ha sido hallada recientemente, dando lugar a un espacio-tiempo de naturaleza discreta. En esta tesis consideramos un campo escalar libre y con masa sobre dicho background. En particular, mostramos que la discretización del espacio-tiempo regulariza naturalmente las divergencias ultravioletas que emergen al calcular el valor esperado del tensor energía-momento en el continuo. Así, el valor resultante es finito, pero muy grande, estableciendo una inadmisible dependencia de la macrofísica con la microestrucutra espacial. Mostramos que dicha dependencia puede eliminarse a través de una renormalización finita y discutimos su naturaleza.

Abstract

The solution to the constraint equations of loop quantum gravity for spherically symmetric vacuum space-times has been recently found, giving place to a space-time of discrete nature. In this thesis we consider a free, massive scalar field on this background. In particular, we show that the discretization of the space-time naturally regularizes the ultraviolet divergences that arise when calculating the expected value of the stress-energy tensor in the continuum. Thus, the resulting value is finite, but very large, setting an inadmissible dependence of the macrophysics on the spatial microstructure. We show that such dependence can be eliminated via a finite renormalization and discuss its nature.

Índice general

Prólogo **XV**

1. Relatividad general clásica **1**
1.1. Geometría semi-riemanniana 1
1.1.1. La conexión de Levi-Civita 3
1.1.2. El tensor de Riemann 5
1.2. Ecuaciones de Einstein 7
1.2.1. Tensor de energía-momento 7
1.2.2. Ecuaciones de campo 8
1.3. Formulación lagrangeana 9
1.3.1. Acción de Einstein-Hilbert 9
1.3.2. Acción de Palatini tetrádica 11
1.4. Formulación hamiltoniana 17
1.4.1. Foliación 17
1.4.2. Estructuras normal y espacial 17
1.4.3. Formulación ADM 22
1.5. Formulación de Ashtekar-Barbero 27
1.5.1. Tétradas y conexiones 27
1.5.2. Variables de Ashtekar 33

2. Simetría esférica **37**
2.1. Variables de Ashtekar 37
2.2. Vínculos 38
2.3. Variables polares 41
2.4. Nuevo cambio de variables 46
2.5. Abelianización del vínculo hamiltoniano 49

3. Ren. en espacio-tiempo continuo **53**
3.1. Cuantización del campo escalar 53
3.2. Expansión de funciones de Green 57
3.3. Acción efectiva 60
3.4. Regularización dimensional y renormalización 67

4. Espacio cuántico **73**
4.1. Teorías de gauge sobre redes 73
4.1.1. Producto escalar 73
4.1.2. Entrelazadores 74
4.2. El espacio cinemático $\mathcal{K}$ 75

4.2.1. Estructuras en $\mathcal{K}$ . . . 76
4.2.2. Invariancias del producto escalar . . . 76
4.3. Estados invariantes . . . 77
4.3.1. Invariancia gauge interna. El espacio $\mathcal{K}_0$ . . . 78
4.3.2. Invariancia bajo difeomorfismos. El espacio $\mathcal{K}_{\text{diff}}$ . . . 79
4.4. Nudos y estados s-nudos . . . 80
4.5. Operadores . . . 81
4.6. Simetría esférica . . . 85
4.6.1. Acción de las tríadas . . . 86

5. Cuantización del espacio-tiempo 87
5.1. Cinemática . . . 87
5.2. Operadores . . . 88
5.3. Dinámica . . . 89
5.4. Observables . . . 90

6. Ren. en espacio-tiempo cuántico 93
6.1. Introducción . . . 93
6.2. Función de Green de Feynman . . . 93
6.2.1. Continuo . . . 94
6.2.2. Cuántico . . . 95
6.3. Acción efectiva . . . 96
6.3.1. Término en a_0 . . . 97
6.3.2. Término en a_1 . . . 99
6.4. Renormalización . . . 101

7. Conclusiones 103

A. Geometría diferencial 105
A.1. Variedades . . . 105
A.1.1. Espacios topológicos . . . 105
A.1.2. Definición . . . 105
A.2. Campos vectoriales . . . 106
A.2.1. Vectores tangentes . . . 106
A.2.2. Cantidades covariantes y contravariantes . . . 107
A.3. Formas diferenciales . . . 107
A.3.1. 1-formas . . . 107
A.3.2. Vectores cotangentes . . . 108
A.3.3. Espacio cotangente como espacio dual . . . 108
A.3.4. p-formas . . . 109
A.3.5. Derivada exterior . . . 110
A.4. Cambio de coordenadas . . . 111

B. Fibrados y conexiones 113
B.1. Fibrados . . . 113
B.2. Endomorfismos . . . 116
B.3. Conexiones . . . 117
B.4. Holonomía . . . 120
B.5. Curvatura . . . 123

C. Coordenadas normales de Riemann **127**

Bibliografía **129**

Prólogo

El texto a continuación constituye mi Tesis de Maestría en Físca, *Renormalización del tensor energía-momento para un espacio-tiempo cuántico con simetría esférica*, que inicié a finales de 2013 bajo la orientación del Dr. Rodolfo Gambini. Este prólogo pretende ser un acercamiento a la misma.

La mecánica cuántica (QM por sus siglas en inglés) y la relatividad general (GR) han extendido enormemente las fronteras del mundo físico conocido desde comienzos del siglo XX. QM ha permitido desarrollar la física atómica, la física nuclear y la óptica cuántica, entre muchas otras. GR posibilitó el surgimiento de la astrofísica relativista, la cosmología, la tecnología GPS y recientemente ha recibido un gran espaldarazo tras la detección de ondas gravitacionales en LIGO. Ambas derribaron las dos estructuras fundamentales sobre las que descansaba la física newtoniana: el principio de incertidumbre de Heisenberg evaporó el determinismo newtoniano y las nociones de espacio y tiempo absolutos perdieron su validez por completo: el mismo fondo espacio-temporal se convirtió en una cantidad dinámica.

Pero QM y GR no sólo proporcionaron una forma radicalmente nueva de comprender el mundo físico sino que además parecen estar formuladas en términos mutuamente contradictorios. QM requiere de una variable temporal externa y un fondo espacio-temporal no dinámico (sobre el que se define la teoría cuántica), los cuales son incompatibles con la imagen del espacio-tiempo proporcionada por GR. Por su parte, GR asume que la métrica es un campo suave y determinista, violando el requerimiento impuesto por QM a cualquier campo dinámico: a escalas suficientemente pequeñas debe manifestarse en forma de cuantos discretos y estar gobernado por leyes probabilísticas.

La gravedad cuántica (QG) es la teoría cuyo objeto es sintetizar a QM y GR bajo un único marco conceptual. A pesar de que los físicos la han buscado casi desde la misma fundación de la mecánica cuántica y la relatividad general, aún no disponemos de una teoría cuántica de la gravedad acabada. Disponemos sí de teorías candidatas, en el sentido de que reproducen algunas características importantes que a priori se espera de una teoría cuántica de la gravedad, pero aún permanece en suspenso, para todas ellas, la prueba de que efectivamente se reducen a QM y GR a bajas energías, que es el mínimo requisito exigible para una teoría QG.

Si bien es cierto que el acelerador de partículas más potente en el presente, el LHC, funciona a unos pocos TeV, mientras que se cree que los efectos de la gravedad cuántica se volverán importantes para energías del orden de 10^{19} GeV, hay otras motivaciones, tanto teóricas como experimentales, para embarcarse en la construcción de una teoría QG.

En el plano empírico, existen en la naturaleza partículas de energías mucho

más grandes que aquellas producidas en los aceleradores (ya han sido observadas partículas astrofísicas con energías de hasta 10^{13} GeV [34]), por otra parte, pueden haber huellas residuales en la radiación cósmica de fondo de los efectos cuánticos de la gravedad en el universo temprano. Por último, existe la posibilidad concreta de poder acceder en el futuro cercano a algunos fenómenos astrofísicos capaces de comportarse como lentes amplificadores [29], que permitirían poner a prueba algunos efectos cuántico-gravitatorios.

Existen, además, buenas justificaciones teóricas para el estudio de QG. Hasta la fecha contamos con dos grandes explicaciones del universo físico: (*i*) el modelo estándar: un teoría cuántica de las interacciones electromagnéticas, débiles y fuertes que ignora completamente los efectos gravitatorios a escala cuántica; (*ii*) la relatividad general clásica: una teoría que describe la dinámica del propio espacio-tiempo, ignorando cualquier efecto de naturaleza cuántica. A continuación, enumeramos algunas dificultades teóricas que podrían elucidarse en el marco de una teoría QG.

Fondo espacio-temporal: en la actualidad, las teorías cuánticas de campos (QFT) de que disponemos están definidas sobre fondos fijos. Recientes avances en QFT sobre espacio-tiempos curvos (ver referencias en [34]) han permitido sortear parcialmente este problema mediante formulaciones independientes del fondo espacio-temporal, pese a lo cual difíciles obstáculos aún persisten, entre otros, se desprecia totalmente el "backreaction" entre la materia y la geometría, expresado clásicamente por las ecuaciones de Einstein.

Singularidades de GR: Se conocen soluciones a las ecuaciones de Einstein que, para distribuciones de masa suficientemente elevadas, muestran un comportamiento singular. Como todas ellas están caracterizadas por simetrías, podría pensarse que, como ocurre con la gravedad newtoniana, la relajación de las mismas permitiría deshacerse de los puntos singulares. Sin embargo, los teoremas de Hawking, Penrose *et al.* demuestran que no es éste el caso [25]. Podemos interpretar, por tanto, que estas singularidades provienen de aplicar la teoría clásica a regiones del espacio-tiempo donde ya no es válida. Una teoría cuántica de la gravedad podría dar solución a estos problemas.

Interacción de la gravedad con sistemas cuánticos: supongamos que a pesar de las insalvables singularidades, decidimos llevar GR adelante y proponer una ecuación semiclásica del tipo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle, \tag{1}$$

donde el lado derecho de la ecuación representa el valor esperado del tensor energía-momento de la materia en cierto estado cuántico. Supongamos, a continuación, que el estado cuántico de la materia es tal que se tiene una probabilidad $1/2$ de localizar toda la materia en una región del espacio-tiempo denotada como U_1 y la misma probabilidad de encontrarla en otra región U_2, disjunta de U_1, es decir:

$$|\text{materia}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{toda la materia en } U_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{toda la materia en } U_2\rangle. \tag{2}$$

En esta situación física, el campo gravitacional, de acuerdo a la ecuación (1), se comportaría como si la mitad de la materia estuviese en U_1 y la otra mitad en U_2. Al medir la posición de la materia, encontraríamos que toda ella se encontraría o bien en U_1, o bien en U_2, lo que implicaría que el campo gravitacional se

modificaría discontinuamente y de una manera no causal, dando lugar a serias dificultades [35]. Hasta aquí sólo hemos mencionado algunas de las fuentes teóricas que justifican la búsqueda de una teoría de la gravedad cuántica. Muchas otras pueden encontrarse en [29, 34, 31].

Una de las candidatas a teoría cuántica de la gravedad es la gravedad cuántica de lazos (LQG). Se trata de una versión moderna del enfoque canónico o hamiltoniano de la gravedad cuántica, originalmente introducido por Dirac, Bergmann, Komar, Wheeler, DeWitt, Arnowitt, Deser y Misner. Es "moderna" en el sentido que ha sido formulada en términos de conexiones en lugar de métricas. Es precisamente por esta razón que la teoría se denomina gravedad cuántica de lazos, pues las teorías de conexiones se describen naturalmente en términos de loops (lazos) de Wilson. La teoría cuántica de lazos constituye, por tanto, un intento por construir una teoría QG independiente del "background", no perturbativa y matemáticamente rigurosa en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones y lorentziano. A continuación, presentamos algunos conceptos importantes para comprender la formulación LQG. Los mismos se desarrollarán a lo largo de la tesis y resultan vitales para que la misma tenga sentido.

La formulación ADM es una formulación hamiltoniana de la relatividad general [2]. En este enfoque se asume que la variedad espacio-temporal puede foliarse por hipersuperficies tipo espacio Σ_t, donde t es una función tipo tiempo definida en la variedad. El hamiltoniano resultante es una combinación lineal de vínculos de primera clase. La dinámica queda, en consecuencia, completamente determinada por los vínculos, de modo que la evolución puede parametrizarse de manera arbitraria. Uno de estos vínculos, el vínculo hamiltoniano, genera transformaciones de gauge en la dirección temporal, perpendicularmente a la superficie Σ_t, lo que va en armonía con la ausencia de una idea de tiempo absoluto en GR. El vínculo restante genera difeomorfismos en la hipersuperficie espacial. Varios obstáculos impiden aplicar exitosamente el procedimiento de cuantización canónica a este formalismo. Uno de ellos se debe a que el álgebra de los vínculos es abierta y depende de forma no polinómica de las variables dinámicas, de modo que es casi imposible encontrar una correspondencia entre los corchetes de Poisson de las variables canónicas clásicas y los conmutadores de los operadores a los que las mismas deberían ser promovidas. Las *variables de Ashtekar* [3] resolvieron, en parte, este problema.

Los ingredientes principales del formalismo de Ashtekar están dados por una conexión SO(3) compleja y sus momentos conjugados, las tríadas. En términos de estas nuevas variables los vínculos se simplifican notablemente, permitiendo, por ejemplo, encontrar soluciones a las ecuaciones de Wheeler-DeWitt. Esta representación por conexiones permitió expresar GR en un lenguaje de teorías gauge, lo que dio lugar a la representación de loops, introducida inicialmente por Gambini y Trías para teorías gauge [24], y por Rovelli y Smolin [32] para gravedad.

Uno de los mayores obstáculos para culminar con el programa de la gravedad cuántica de lazos reside en la dinámica. Ésta se encuentra codificada en un conjunto de vínculos de primera clase cuya álgebra involucra funciones de estructura, bloqueando así el método de cuantización de Dirac. Aunque este problema no se encuentra en la mayoría de los modelos reducidos por simetría, correspondientes a espacio-tiempos homogéneos, el problema reaparece cuando se consideran modelos con dependencia espacial de las variables. Algunos de los modelos más relevantes para ser estudiados, debido a sus implicancias físicas

son los *espacio-tiempos esféricamente simétricos*, los cuales pueden describir, por ejemplo, la etapa final del colapso gravitacional de objetos astrofísicos. Este tipo de modelos poseen otra potencialidad técnica: un vínculo hamiltoniano, asociado con reparametrizaciones temporales, y otro vínculo asociado con difeomorfismos radiales.

En 2013 Gambini y Pullin obtuvieron una cuantización exitosa correspondiente a la ecuación de Einstein en el vacío con simetría esférica [22]. A través de un reescalado y una combinación lineal con el vínculo de difeomorfismos, consiguieron abelianizar el vínculo hamiltoniano, de manera que el álgebra de los vínculos constituyó una verdadera álgebra de Lie. Así, el método de cuantización de Dirac pudo completarse mediante técnicas de gravedad cuántica de lazos. Se construyeron explícitamente las soluciones exactas del espacio de Hilbert físico, aniquilado por todos los vínculos. Se encontraron nuevos observables sin contraparte clásica, asociados a la naturaleza discreta de las redes de espín, y por último, se logró eliminar la singularidad presente en el interior de los agujeros negros clásicos. Una de las consecuencias de esta cuantización es que la coordenada radial se convierte en una cantidad discreta. En este trabajo consideramos un campo escalar con masa y libre sobre este espacio-tiempo cuantizado. En particular se busca verificar que la naturaleza discreta del espacio-tiempo elimina naturalmente las divergencias que emergen al calcular el valor esperado del tensor energía-impulso sobre un espacio-tiempo continuo. Se trata de un ejemplo de cómo las teorías cuánticas de campos sobre espacio-tiempos cuánticos tratan con las divergencias de teorías cuánticas de campos en el continuo.

Organización del texto

En el capítulo 1 revisamos varias ideas importantes de la relatividad general clásica. Comenzamos repasando nociones de geometría semi-riemanniana. En § 1.2 presentamos la ecuación de Einstein y el tensor de energía-momento. En § 1.3 introducimos la acción de Einstein-Hilbert y la de Palatini en su forma tetrádica, donde presentaremos parte del formalismo necesario para definir las variables de Ashtekar, y derivaremos las ecuaciones de Einstein a partir de las mismas. En § 1.4 definimos con precisión la foliación que habilita una formulación hamiltoniana de la relatividad general, introduciendo finalmente el formalismo ADM y en § 1.5 las variables de Ashtekar.

En el capítulo 2 mostramos cómo se ve reducido el formalismo de Ashtekar en espacio-tiempos esféricamente simétricos. Introducimos nuevas variables, producto de la simetría, y a partir de las mismas abelianizamos el vínculo hamiltoniano.

El capítulo 3 está dedicado a la renormalización del tensor energía-momento para un campo escalar con masa sobre un espacio-tiempo curvo y continuo. Primeramente, introducimos la cuantización del campo escalar en un espacio-tiempo curvo y discutimos las principales diferencias en relación al espacio-tiempo minkowskiano. Luego, introducimos aproximaciones útiles para estudiar los modos de alta frecuencua del campo escalar. En § 3.3 introducimos la ecuación semiclásica que posibilita el cálculo del valor esperado del tensor energía-momento. Luego, presentamos la acción efectiva asociada al mismo, y sus divergencias. En § 3.4 procedemos a la regularización dimensional de las mismas y

obtenemos el valor esperado del tensor energía-momento renormalizado.

El capítulo 4 está dedicado a introducir algunos conceptos básicos de LQG. Presentamos la construcción del espacio cinemático físico, presentamos los operadores que actúan sobre el mismo y de qué modo se ven simplificados en espacio-tiempos con simetría esférica.

En el capítulo 5 presentamos en detalle la cuantización del espacio-tiempo esféricamente simétrico obtenida tras la abelianización del vínculo hamiltoniano y la cuantización de Dirac. Construimos el espacio cinemático y derivamos los operadores, la dinámica y los observables.

La renormalización del valor medio del tensor energía-momento se presenta en el capítulo 6. Mostramos en detalle de qué manera la función de Green se modifica sobre el espacio-tiempo cuántico introducido en el capítulo 5. Proseguimos con el cálculo de la acción efectiva, discutiendo las diferencias que surgen en relación a espacio-tiempos continuos. En particular, verificamos que la naturaleza discreta del espacio-tiempo cuantizado funciona como un regulador natural, eliminando las divergencias propias de los fondos clásicos. Finalmente, procedemos a una renormalización finita del lagrangeano gravitacional, justificando su necesidad.

En el capítulo 7 presentamos las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 1

Relatividad general clásica

En este capítulo abordaremos la teoría de la relatividad general clásica. Comenzaremos definiendo conceptos matemáticos fundamentales para un desarrollo preciso de dicha teoría. No obstante, los mismos se apoyan en nociones aún más básicas, las cuales se exhiben con cierto grado de detalle en los apéndices A y B. En el transcurso del capítulo introduciremos las ecuaciones de Einstein así como su formulación lagrangeana y hamiltoniana.

1.1. Geometría semi-riemanniana

Sea M una variedad de n dimensiones. Definimos el fibrado de *tensores* de tipo (o rango) (r, s) como el producto tensorial de r copias del fibrado tangente y s copias del fibrado cotangente:

$$\underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{\text{r}} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \ldots T^*M}_{\text{s}} \tag{1.1}$$

Llamamos tensor de tipo (r, s) a una sección de este fibrado. Definimos los tensores $(0, 0)$ como las funciones sobre M.

Como las secciones de TM y T^*M están dadas por campos vectoriales y 1-formas respectivamente, un tensor (r, s) es una combinación lineal de tensores de la forma

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_s \tag{1.2}$$

donde $v_1, \ldots, v_r$ son campos vectoriales y $\omega_1 \ldots \omega_s$, 1-formas. Así, una base de tensores (r, s) está dada, en coordenadas locales, por

$$\partial_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\alpha_r} \otimes dx^{\beta_1} \cdots \otimes dx^{\beta_s} \tag{1.3}$$

donde los índices α_i, β_j pueden tomar valores desde 1 a n. Luego, cualquier tensor (r, s), X, puede escribirse como

$$X = X^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_s} \partial_{\alpha_1} \otimes \partial_{\alpha_r} \otimes dx^{\beta_1} \ldots dx^{\beta_s} \tag{1.4}$$

en coordenadas locales, donde las funciones $X^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_s}$ son las componentes del tensor. Más adelante, utilizaremos los subíndices y superíndices como *índices abstractos*, en el sentido de que su único propósito será dar cuenta del rango del

tensor bajo consideración, sin hacer referencia a ningún sistema coordenado en concreto.

Un tensor (r, s) también puede pensarse como un objeto que acepta r 1-formas y s campos vectoriales como entradas, y arroja como salida una función sobre M que toma valores en $\mathbb{R}$, de forma $C^\infty(M)$-lineal en cada entrada.

Una métrica semi-riemanniana es un ejemplo de tensor (0,2), ya que toma como entradas dos campos vectoriales, v, w, dando como salida una función $g(v, w)$, $C^\infty(M)$-lineal:

$$g(v + v', w) = g(v, w) + g(v', w) \tag{1.5}$$
$$g(v, w + w') = g(v, w) + g(v, w') \tag{1.6}$$
$$g(fv, w) = g(v, fw) = fg(v, w) \tag{1.7}$$

donde $v, v', w, w' \in \mathrm{Vect}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$. En coordenadas locales, tenemos:

$$g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta \tag{1.8}$$

con $g_{\alpha\beta} = g(\partial_\alpha, \partial_\beta)$. Las formas diferenciales conforman otro ejemplo de tensor: una p-forma puede pensarse como un tensor de tipo $(0, p)$ completamente antisimétrico, a causa de que podemos identificar $\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p} dx^{\alpha_i} \ldots dx^{\alpha_p}$, donde el coeficiente $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ cambia su signo cada vez que intercambiamos dos de sus índices, con el tensor $(0, p)$ $\frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p} dx^{\alpha_i} \ldots dx^{\alpha_p}$. En consecuencia, $\Lambda^p V$ puede interpretarse como un subespacio del p-producto tensorial $V \otimes \cdots \otimes V$ y el fibrado $\Lambda^p(T^*M)$ como un subfibrado del fibrado de tensores $(0, p)$.

Hay un número de operaciones básicas sobre tensores que que es indispensable introducir para trabajar en GR. Se define el producto tensorial de un tensor de tipo (r, s), X, y otro de rango (r', s'), Y, como el tensor de tipo $(r + r', s + s')$, $X \otimes Y$ dado por

$$(X \otimes Y)^{\alpha_1\ldots\alpha_{r+r'}}{}_{\beta_1\ldots\beta_{s+s'}} = X^{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_s} Y^{\alpha_{r+1}\ldots\alpha_{r+r'}}{}_{\beta s+1\ldots\beta s+s'}. \tag{1.9}$$

En segundo lugar, de la misma manera que una 1-forma aplicada a un campo vectorial da lugar a una función real sobre M, es posible obtener un tensor $(r - 1, s - 1)$ a partir de un tensor (r, s). Por ejemplo, dado $X = v_1 \otimes \ldots v_r \otimes \omega_1 \cdots \otimes \omega_s$ podemos *contraer* el i-ésimo campo vectorial con la j-ésima 1-forma obteniendo así un tensor Y de rango $(r - 1, s - 1)$:

$$Y = \omega_j(v_i) v_1 \otimes \ldots \hat{v_i} \cdots \otimes v_r \otimes \omega_1 \otimes \ldots \hat{\omega_j} \cdots \otimes \omega_s, \tag{1.10}$$

donde el símbolo $\hat{}$ sobre v_i y ω_j denota la ausencia de estos factores en el nuevo tensor Y. En términos de componentes podemos pensar que hemos obtenido Y a partir de X contrayendo un superíndice con un subíndice, es decir, si el mismo índice μ aparece como el i-ésimo superíndice y el j-ésimo subíndice de las componentes de un tensor X , las componentes de Y están dadas por

$$Y^{\alpha_1\ldots\hat{\alpha_i}\ldots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\hat{\beta_j}\ldots\beta_s} = X^{\alpha_1\ldots\mu\ldots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\mu\ldots\beta_s}. \tag{1.11}$$

El tensor de curvatura de Riemann, del que hablaremos dentro de algunas líneas, es un buen ejemplo de tensor $(1, 3)$, con componentes $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$. Podemos contraer este tensor, obteniendo el llamado tensor de Ricci, esto es, un tensor $(0, 2)$ dado por $R_{\beta\gamma} = R^\alpha{}_{\beta\alpha\gamma}$.

Otra poderosa técnica que podemos utilizar trabajando con tensores consiste en subir y bajar índices a partir de una métrica semi-riemanniana. Consideremos la métrica de componentes $g_{\alpha\beta}$ así como su inversa $g^{\alpha\beta}$ ($g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$). Por ejemplo, a partir del tensor de Ricci podemos obtener un tensor $(1,1)$ subiendo un índice:

$$R^{\alpha}_{\beta} = g^{\alpha\gamma}R_{\beta\gamma}. \tag{1.12}$$

Podemos, además, contraer este último para obtener un tensor $(0,0)$, denominado escalar de Ricci:

$$R = R^{\alpha}_{\alpha}. \tag{1.13}$$

1.1.1. La conexión de Levi-Civita

En relatividad general, la métrica da lugar a una conexión sobre el fibrado tangente: la conexión de Levi-Civita. Ésta se encuentra caracterizada completamente por las dos propiedades siguientes:

- Es compatible con la métrica: los vectores tangentes conservan su módulo cuando se trasladan paralelamente.
- Es libre de torsión: el vector tangente no rota al ser transportado paralelamente. (Ver [5] para un desarrollo riguroso de esta idea)

Sea M una variedad equipada con una métrica semi-riemanniana g, y sea D una conexión sobre el fibrado tangente TM, la conexión D permite tomar la derivada de un campo vectorial v sobre M en la dirección u, dando lugar a un nuevo campo vectorial $D_u v$. Se dice que D es *compatible con la métrica* si para todo $u, v, w \in \mathrm{Vect}(M)$

$$ug(v,w) = g(D_u v, w) + g(v, D_u w). \tag{1.14}$$

En caso de que D no fuese compatible con la métrica aparecería un tercer término en la igualdad anterior, vinculado con la derivada de g. Se dice que D es *libre de torsión* si para todo $u, v, w \in \mathrm{Vect}(M)$

$$[v,w] = D_v w - D_w v, \tag{1.15}$$

donde $[v,w](f) = v(w(f)) - w(v(f))$ es el corchete de Lie entre los campos v y w.

A continuación, probaremos que dada una métrica cualquiera g, existe una única conexión compatible con la misma y simultáneamente libre de torsión. Dicho objeto recibirá la denominación de *conexión de Levi-Civita*.

Prueba: Supongamos que ∇ es una conexión libre de torsión y compatible con la métrica sobre TM. Trabajando en coordenadas locales: $\nabla_\alpha = \nabla_{\partial_\alpha}$. Como ∇ es compatible con la métrica se cumple que

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = g(\nabla_\alpha \partial_\beta, \partial_\gamma) + g(\partial_\beta, \nabla_\alpha \partial_\gamma). \tag{1.16}$$

Permutando índices:

1. $\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \underbrace{g(\nabla_\alpha \partial_\beta, \partial_\gamma)}_{a} + \underbrace{g(\partial_\beta, \nabla_\alpha \partial_\gamma)}_{b}$

2. $\partial_\beta g_{\gamma\alpha} = \underbrace{g(\nabla_\beta \partial_\gamma, \partial_\alpha)}_{c} + \underbrace{g(\partial_\gamma, \nabla_\beta \partial_\alpha)}_{d}$

3. $\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \underbrace{g(\nabla_\gamma \partial_\alpha, \partial_\beta)}_{e} + \underbrace{g(\partial_\alpha, \nabla_\gamma \partial_\beta)}_{f}.$

Como además la conexión es libre de torsión y los campos coordenados conmutan, se tiene:

$$\nabla_\alpha \partial_\beta - \nabla_\beta \partial_\alpha = [\partial_\beta, \partial_\alpha] = 0. \tag{1.17}$$

Conjuntamente con la propiedad de simetría de la métrica, $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, esto implica que los términos etiquetados como b y e son iguales. Lo mismo ocurre con los términos c y f. Haciendo $1 + 2 - 3$ se obtiene

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = 2g(\nabla_\alpha \partial_\beta, \partial_\gamma). \tag{1.18}$$

Para mostrar que ∇ existe y es única alcanza con obtener una fórmula explícita para ∇ a partir de la expresión (1.18). Como se señala en § B.3, trabajando con una base local de secciones e_i de un fibrado vectorial E, las componentes del potencial vector A pueden escribirse como:

$$D_\alpha e_j = A^i_{\alpha j} e_i. \tag{1.19}$$

Para el caso concreto de la conexión de Levi-Civita, definimos los *símbolos de Christoffel* como

$$\nabla_\alpha \partial_\beta = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \partial_\gamma. \tag{1.20}$$

Luego, la derivada covariante de cualquier campo vectorial w (§ B.3) en la dirección v es

$$\nabla_v w = v^\alpha (\partial_\alpha w^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} w^\gamma) \partial_\beta. \tag{1.21}$$

Así, reescribiendo (1.18)

$$\begin{aligned} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} &= 2g(\Gamma^\delta_{\alpha\beta} \partial_\delta, \partial_\gamma) && (1.22)\\ &= 2\Gamma^\delta_{\alpha\beta} g(\partial_\delta, \partial_\gamma) && (1.23)\\ &= 2g_{\delta\gamma} \Gamma^\delta_{\alpha\beta}. && (1.24) \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando la inversa de la métrica, se obtienen los símbolos de Christoffel

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} (\partial_\alpha g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\delta\alpha} - \partial_\delta g_{\alpha\beta}). \tag{1.25}$$

Una vez obtenida la conexión de Levi-Civita en el fibrado tangente TM se tienen, automáticamente, conexiones en fibrados tensoriales (r, s). Dado un tensor (r, s), X, podemos calcular $(\nabla_\mu X)^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_s}$ en términos de derivadas parciales de las componentes de X y los símbolos de Christoffel. Por ejemplo, para el caso de un tensor $(2, 2)$ el resultado es

$$(\nabla_\mu X)^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = \partial_\mu X^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} + \overbrace{\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} X^{\lambda\beta}{}_{\gamma\delta} + \Gamma^\beta_{\mu\lambda} X^{\alpha\lambda}{}_{\gamma\delta}}^{\text{(+) para índices vectoriales}} - \underbrace{\Gamma^\lambda_{\mu\gamma} X^{\alpha\beta}{}_{\lambda\delta} - \Gamma^\lambda_{\mu\delta} X^{\alpha\beta}{}_{\gamma\lambda}}_{\text{(-) para índices covectoriales}}. \tag{1.26}$$

Y, de manera análoga, puede construirse la derivada covariante para un tensor (r, s) cualquiera.

Antes de terminar este apartado probaremos que $\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$. Para ello, hay que observar que

$$\begin{aligned}\partial_\alpha g_{\beta\gamma} &= \partial_\alpha g(\partial_\beta, \partial_\gamma) && (1.27)\\ &= g(\nabla_\alpha \partial_\beta, \partial_\gamma) + g(\partial_\beta, \nabla_\alpha \partial_\gamma) && (1.28)\\ &= g(\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_\mu, \partial_\gamma) + g(\partial_\beta, \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}\partial_\mu) && (1.29)\\ &= \Gamma^\mu_{\alpha\beta} g_{\mu\gamma} + \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} g_{\beta\mu}. && (1.30)\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} g_{\mu\gamma} - \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} g_{\beta\mu} = 0. \tag{1.31}$$

Alcanza con que la conexión ∇ satisfaga esta relación para que sea compatible con la métrica g

Geodésicas

Sea γ un camino en M. Sea $v(t)$ un vector tangente a la curva $\gamma(t)$ en cada t. Como se muestra en § B.4, se cumple la relación:

$$D_{\gamma'(t)} u(t) = \frac{d}{dt} u(t) + A(\gamma'(t)) u(t). \tag{1.32}$$

O, utilizando el lenguaje de la relatividad general

$$D_{\gamma'(t)} v^\mu(t) = \frac{d}{dt} v^\mu(t) + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{d\gamma^\lambda}{dt} v^\nu(t). \tag{1.33}$$

Decimos que γ es una *geodésica* si su vector tangente $\gamma'(t)$ se transporta paralelamente a lo largo de γ, es decir,

$$D_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = 0. \tag{1.34}$$

En coordenadas:

$$\frac{d^2\gamma^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{d\gamma^\nu}{dt} \frac{d\gamma^\lambda}{dt} = 0. \tag{1.35}$$

El camino de una partícula en caída libre obedece esta ecuación.

1.1.2. El tensor de Riemann

Definimos el tensor de Riemann como el tensor de curvatura asociado a la conexión de Levi-Civita. Formalmente, dados tres campos vectoriales sobre M, u, v, w, definimos:

$$R(u, v)w = (\nabla_u \nabla_v - \nabla_v \nabla_u - \nabla_{[u,v]})w. \tag{1.36}$$

En términos de una base local de campos vectoriales $\{e_\alpha\}$, las componentes $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ están dadas por:

$$R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} e_\alpha. \tag{1.37}$$

Este objeto es también un tensor $(1, 3)$, puesto que al evaluarlo en una 1-forma μ y tres campos vectoriales en M, u, v y w, devuelve una función en

M, $\mu(R(u,v)w)$ siendo, además, $C^\infty(M)$-lineal (lo cual halla justificación en la teoría general de la curvatura, expuesta en el apéndice B). A continuación calcularemos las componentes $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ para el caso de una base coordenada. Por definición, se tiene que

$$R(\partial_\beta, \partial_\gamma)\partial_\delta = (\nabla_\beta \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_\beta)\partial_\delta, \tag{1.38}$$

ya que $[\partial_\beta, \partial_\gamma] = 0$. Luego, utilizando $\nabla_\alpha \partial_\beta = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_\gamma$,

$$\begin{aligned} R(\partial_\beta, \partial_\gamma)\partial_\delta &= \nabla_\beta(\Gamma^\sigma_{\gamma\delta}\partial_\sigma) - \nabla_\gamma(\Gamma^\sigma_{\beta\delta}\partial_\sigma) && (1.39)\\ &= (\partial_\beta\Gamma^\sigma_{\gamma\delta})\partial_\sigma + \Gamma^\sigma_{\gamma\delta}\nabla_\beta\partial_\sigma - (\partial_\gamma\Gamma^\sigma_{\beta\delta})\partial_\sigma - \Gamma^\sigma_{\beta\delta}\nabla_\gamma\partial_\sigma && (1.40)\\ &= (\partial_\beta\Gamma^\sigma_{\gamma\delta})\partial_\sigma + \Gamma^\sigma_{\gamma\delta}\Gamma^\tau_{\beta\sigma}\partial_\tau - (\partial_\gamma\Gamma^\sigma_{\beta\delta})\partial_\sigma - \Gamma^\sigma_{\beta\delta}\Gamma^\tau_{\gamma\sigma}\partial_\tau. && (1.41)\end{aligned}$$

Renombrando índices, se obtiene, finalmente,

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\beta\Gamma^\alpha_{\gamma\delta} - \partial_\gamma\Gamma^\alpha_{\beta\delta} + \Gamma^\sigma_{\gamma\delta}\Gamma^\alpha_{\beta\sigma} - \Gamma^\sigma_{\beta\delta}\Gamma^\alpha_{\gamma\sigma}. \tag{1.42}$$

Simetrías

El tensor de Riemann posee tres simetrías básicas:

1. $R^\lambda_{\beta\gamma\delta} = -R^\lambda_{\gamma\beta\delta}$
2. $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\delta\beta\gamma\alpha}$
3. $R^\lambda_{[\beta\gamma\delta]} = 0$

La primera relación es equivalente a

$$R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta = -R(e_\gamma, e_\beta)e_\delta, \tag{1.43}$$

donde $\{e_\alpha\}$ es una base de campos vectoriales. Dicha relación es una consecuencia de la definición misma de curvatura, puesto que $F(v,w) = -F(w,v)$ para dos campos vectoriales cualesquiera v, w, y para cualquier curvatura F.
La segunda relación puede reescribirse como

$$g(e_\alpha, R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta) = -g(e_\delta, R(e_\beta, e_\gamma)e_\alpha), \tag{1.44}$$

que es lo mismo que

$$g(u, R(v,w)z) = -g(z, R(v,w)u) \tag{1.45}$$

con u, v, w, z campos vectoriales. Como los campos vectoriales coordenados constituyen una base, alcanza con probar la relación para éstos, en cuyo caso $[v,w] = 0$. Como la conexión es compatible con la métrica se satisface

$$\begin{aligned} vw(g(u,z)) &= v(g(\nabla_w u, z) + g(u, \nabla_w z))\\ &= g(\nabla_v\nabla_w u, z) + g(\nabla_w u, \nabla_v z)\\ &\quad + g(\nabla_v u, \nabla_w z) + g(u, \nabla_v\nabla_w z).\end{aligned} \tag{1.46}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} wv(g(u,z)) &= g(\nabla_w\nabla_v u, z) + g(\nabla_w u, \nabla_v z)\\ &\quad + g(\nabla_w u, \nabla_v z) + g(u, \nabla_w\nabla_v z).\end{aligned} \tag{1.47}$$

Luego,

$$(vw - wv)(g(u,z)) = g([\nabla_v, \nabla_w]u, z) + g(u, [\nabla_v, \nabla_w]z), \tag{1.48}$$

lo cual es equivalente, para los campos coordenados, a:

$$g(R(v,w)u, z = -g(u, R(v,w)z). \tag{1.49}$$

La última de las relaciones es igual a

$$R^{\lambda}_{\beta\gamma\delta} + R^{\lambda}_{\gamma\delta\beta} + R^{\lambda}_{\delta\beta\gamma} = 0, \tag{1.50}$$

es decir,

$$R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta + R(e_\gamma, e_\delta)e_\beta + R(e_\delta, e_\beta)e_\gamma = 0. \tag{1.51}$$

Independizándonos de las coordenadas, la igualdad anterior establece que

$$R(u,v)w + R(v,w)u + R(w,u)v = 0 \tag{1.52}$$

para tres campos vectoriales cualesquiera u, v, w. Para mostrar la igualdad, trabajaremos con campos vectoriales coordenados, los cuales poseen corchete de Lie nulo, por las mismas razones esgrimidas en la prueba de la segunda simetría. Luego,

$$\begin{aligned} &R(u,v)w + R(v,w)u + R(w,u)v = \\ &\nabla_u\nabla_v w - \nabla_v\nabla_u w + \nabla_v\nabla_w u - \nabla_w\nabla_v u + \nabla_w\nabla_u v - \nabla_u\nabla_w v. \end{aligned} \tag{1.53}$$

Como la conexión es libre de torsión, esta última igualdad puede reescribirse como

$$\nabla_u[v,w] + \nabla_v[w,u] + \nabla_w[u,v], \tag{1.54}$$

lo cual es cero, pues los corchetes de Lie son nulos para campos vectoriales coordenados.

Si bien no añaden información nueva, pues se derivan de las simetrías presentadas inicialmente, es conveniente señalar las siguientes relaciones ya que resultarán útiles a futuro:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{1.55}$$

$$R_{[\alpha\beta\gamma\delta]} = 0 \tag{1.56}$$

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}. \tag{1.57}$$

1.2. Ecuaciones de Einstein

1.2.1. Tensor de energía-momento

En física relativista, la información referente al flujo de energía y momento a través de un punto del espacio-tiempo se concentra en un tensor (0,2): el *tensor de energía-momento*, $T_{\mu\nu}$. Supongamos que el espacio-tiempo se puede dividir en espacio y tiempo, representándose como $S \times \mathbb{R}$. Sean las coordenadas $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$, donde $x^0 = t$ es la coordenada temporal y x^i, $i = 1, \ldots, n-1$ son las coordenadas espaciales. Bajo este esquema, T^{00} representa la densidad de energía, T^{i0} el flujo de energía en la dirección ∂_i, T^{0j} la densidad de la j-ésima

componente del momento y T^{ij} representa la j-ésima componente del momento en la dirección ∂_i. Supondremos que este tensor es simétrico:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}. \tag{1.58}$$

Así, sobre un espacio-tiempo curvo la ley de conservación de la energía y el momento viene dada por

$$\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0. \tag{1.59}$$

En el espacio de Minkowski la expresión $\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0$ da lugar a cuatro ecuaciones: para $\nu = 0$ se obtiene la ecuación de conservación de la energía

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{i0}}{\partial x^i} = 0, \tag{1.60}$$

mientras que, $\nu = 1, 2, 3$ implica la conservación del momento

$$\frac{\partial T^{0j}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} = 0. \tag{1.61}$$

1.2.2. Ecuaciones de campo

En la búsqueda de ecuaciones que describan la gravitación, es razonable comenzar por aquellas que sean consistentes con la conservación de la energía. Supongamos, entonces, una de la forma:

$$C_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \tag{1.62}$$

donde $C_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico con divergencia nula, dependiente sólo del tensor de Riemann.

Un objeto de esta naturaleza puede conseguirse a partir de la identidad de Bianchi:

$$[\nabla_\alpha, R(\partial_\beta, \partial_\gamma)] + [\nabla_\beta, R(\partial_\gamma, \partial_\alpha)] + [\nabla_\gamma, R(\partial_\alpha, \partial_\beta)] = 0, \tag{1.63}$$

que puede reescribirse como

$$\nabla_{[\alpha} R^{\lambda}_{\beta\gamma]\delta} = 0. \tag{1.64}$$

Contrayendo y escribiendo explícitamente la antisimetría

$$\nabla_\alpha R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + \nabla_\beta R^{\alpha}_{\gamma\alpha\delta} + \nabla_\gamma R^{\alpha}_{\alpha\beta\delta} = 0 \tag{1.65}$$

o

$$\nabla_\alpha R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + \nabla_\beta R^{\alpha}_{\gamma\alpha\delta} - \nabla_\gamma R^{\alpha}_{\beta\alpha\delta} = 0. \tag{1.66}$$

Esta última igualdad puede reescribirse utilizando simetrías del tensor de Riemann, obteniéndose:

$$\nabla^\alpha R_{\delta\gamma\beta\alpha} + \nabla_\beta R_{\gamma\delta} - \nabla_\gamma R_{\beta\delta} = 0, \tag{1.67}$$

y, subiendo el índice β y contrayéndolo con δ se consigue:

$$\nabla^\alpha R_{\gamma\alpha} + \nabla^\beta R^{\beta}_{\gamma\beta} - \nabla_\gamma R = 0. \tag{1.68}$$

Finalmente, renombrando los índices mudos y dividiendo entre dos:

$$\nabla^\alpha R_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2}\nabla_\gamma R = 0, \tag{1.69}$$

que también puede escribirse así:

$$\nabla^\alpha (R_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2} g_{\gamma\alpha} R) = 0, \tag{1.70}$$

pues $\nabla^\alpha g_{\gamma\alpha} = 0$.

El *tensor de Einstein* $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ es el más simple de los infinitos tensores que cumplen los requerimientos que habíamos exigido para una ecuación satisfactoria de la gravedad. Las *ecuaciones de campo de Einstein* para la relatividad general están dadas por:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{1.71}$$

donde la velocidad de la luz es $c = 1$ y G es la constante de gravitación de Newton.

Sin embargo, existe otro tipo de tensor $(0, 2)$ simétrico y con divergencia nula que podemos fabricar a partir de la métrica: la misma métrica, ya que

$$\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0. \tag{1.72}$$

Lo que permite modificar la ecuación de Einstein de la siguiente manera:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{1.73}$$

El parámetro Λ se denomina *constante cosmológica*. Fue introducido por Einstein con el fin de que la ecuaciones de campo admitieran una solución de universo estático, hacia donde parecían apuntar las observaciones de aquel entonces. Colocado a la derecha de la igualdad, este término puede ser absorbido por el tensor energía-momento, interpretándose como el valor del mismo en el vacío.

1.3. Formulación lagrangeana

1.3.1. Acción de Einstein-Hilbert

En este apartado presentamos la acción de Einstein-Hilbert y mostramos que las ecuaciones de Euler-Lagrange que se deducen de extremizar la misma, considerando a la métrica como variable dinámica son, en efecto, las ecuaciones de campo de Einstein.

El lagrangeano para GR en el vacío está dado por:

$$L = R\text{vol}, \tag{1.74}$$

donde R es el escalar de Ricci de g y "vol" es la forma volumen asociada a g, por lo tanto, la acción de Einstein-Hilbert es:

$$S(g) = \int_M R\text{vol}. \tag{1.75}$$

Para enfatizar la dependencia de la forma volumen con respecto a la métrica, se puede reescribir la mencionada acción en coordenadas locales:

$$S(g) = \int_M R\sqrt{|g|}d^n x. \tag{1.76}$$

donde el símbolo g refiere a $\det g$, en el caso de una métrica lorentziana se cumple $|g| = -g$.

A continuación, procederemos a la extremización de S. Sea g una métrica lorentziana y δg cualquier tensor simétrico $(0,2)$ que se anula fuera de un conjunto compacto. Si $s \in \mathbb{R}$ es pequeño, entonces $g + s\delta g$ es también una métrica lorentziana. Puesto que s es una cantidad variable, $g+s\delta g$ constituye un camino de métricas que pasan por g. Esta observación permite definir la variación de la acción con respecto a la métrica:

$$\delta S(g) = \frac{d}{ds}S(g + s\delta g). \tag{1.77}$$

De manera similar, es posible definir la variación de la acción con respecto a cualquier cantidad dependiente de g. De este modo:

$$\delta S = \int_M \delta(R \text{ vol}) = \int_M (\delta R)\text{vol} + R(\delta \text{ vol}). \tag{1.78}$$

Por consiguiente, para efectuar este cálculo es necesario determinar las variaciones de R y de la forma volumen respecto de la métrica.

Comencemos por la segunda. Para ello utilizaremos un resultado del álgebra de matrices: dada una matriz cualquiera A, se cumple la identidad $\det(1+sA) = 1 + s\text{Tr}(A)$ a menos de términos de orden s^2. De aquí se desprende que

$$\frac{d}{ds}\det(A + sB)|_{s=0} = \frac{d}{ds}\det(A)\det(1 + sA^{-1}B)|_{s=0} \tag{1.79}$$

$$= \det(A)\text{Tr}(A^{-1}B), \tag{1.80}$$

por lo tanto,

$$\delta(\det g) = (\det g)\text{Tr}(g^{-1}\delta g) = (\det g)g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}. \tag{1.81}$$

Por otra parte, como $g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = 4 \implies g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}$. Luego:

$$\delta(\det g) = -(\det g)g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \to \delta\sqrt{-\det g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-\det g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}. \tag{1.82}$$

Así,

$$\delta\text{vol} = -\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\delta g^{\alpha\beta})\text{vol}. \tag{1.83}$$

Para calcular δR es necesario calcular la variación de los símbolos de Christoffel, del tensor de Riemann y del tensor de Ricci. Se puede probar que

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\eta}(\nabla_\beta\delta g_{\gamma\eta} + \nabla_\gamma\delta g_{\beta\eta} - \nabla_\eta g_{\beta\gamma}). \tag{1.84}$$

Utilizando la expresión (1.42) es posible mostrar que

$$\delta R^{\alpha}_{\beta\gamma\eta} = \nabla_\beta\delta\Gamma^{\alpha}_{\gamma\eta} - \nabla_\gamma\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\eta}. \tag{1.85}$$

Luego,

$$\delta R_{\alpha\beta} = \delta R^{\gamma}_{\alpha\gamma\beta} = \nabla_\alpha \delta\Gamma^{\gamma}_{\gamma\beta} - \nabla_\gamma \delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}, \tag{1.86}$$

y a partir de la variación para los símbolos de Christoffel:

$$\delta R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^{\gamma\eta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\delta g_{\gamma\eta} + g^{\gamma\eta}\nabla_\gamma\nabla_\eta\delta g_{\alpha\beta} - g^{\gamma\eta}\nabla_\gamma(\nabla_\beta\delta g_{\alpha\eta} + \nabla_\alpha\delta g_{\beta\eta})). \tag{1.87}$$

Finalmente, la variación del escalar de Ricci es

$$\begin{aligned} \delta R &= \delta(g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}) && (1.88)\\ &= (\delta g^{\alpha\beta})R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} && (1.89)\\ &= R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla^\gamma\nabla_\gamma(g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}) - \nabla^\alpha\nabla^\beta\delta g_{\alpha\beta}. && (1.90) \end{aligned}$$

De lo que se desprende que la variación de la acción es

$$\delta S = \int_M (R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla^\alpha\omega_\alpha - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta})vol, \tag{1.91}$$

donde,

$$\omega_\alpha = g^{\gamma\eta}\nabla_\alpha\delta g_{\gamma\eta} - \nabla^\beta\delta g_{\alpha\beta}. \tag{1.92}$$

Ignorando los términos de borde se obtiene:

$$\int_M (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta})(\delta g^{\alpha\beta})vol, \tag{1.93}$$

de lo que se deduce, finalmente, que

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 0. \tag{1.94}$$

Por lo tanto, hemos recuperado la ecuaciones de Einstein en el vacío.

La acción que contempla campos materiales es de la forma

$$S = \frac{S_g}{16\pi G} + S_m, \tag{1.95}$$

donde S_m es la acción material y S_g es la acción de Einstein-Hilbert. Extremizando la acción se obtiene la identidad

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \tag{1.96}$$

de manera que el tensor de energía-momento queda definido por:

$$T_{\mu\nu} = -2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{1.97}$$

Por lo tanto, la simetría de $T_{\mu\nu}$ se deriva de manera automática de la de $g^{\mu\nu}$.

1.3.2. Acción de Palatini tetrádica

Una formulación alternativa a la Hilbert-Einstein fue desarrollada por Palatini. En ésta, la métrica y la conexión son tratadas como variables independientes. Al variar la acción con respecto a la métrica se obtienen las ecuaciones de Einstein usuales, mientras que al variarla con respecto a la conexión, se imponen restricciones sobre la misma, obligándola a ser libre de torsión y compatible con la métrica. La formulación que veremos en este apartado es la *Acción de Palatini tetrádica*, donde las variables dinámicas son la conexión espinorial y las tétradas, las cuales introduciremos a continuación.

Tétradas

Sea M una variedad orientada de 4 dimensiones difeomorfa a $\mathbb{R}^4$. Físicamente, M puede visualizarse como un pequeño subconjunto abierto del espacio-tiempo (ya que cada variedad puede cubrirse con cartas difeomorfas a $\mathbb{R}^4$). Como el fibrado tangente a $\mathbb{R}^4$ es trivial, también lo es TM. Una trivialización de TM es un isomorfismo entre fibrados vectoriales

$$e : M \times \mathbb{R}^n \to TM \tag{1.98}$$

que envía cada fibra $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ del fibrado trivial $M \times \mathbb{R}^n$ al correspondiente espacio tangente T_pM. Dicha trivialización recibe el nombre de *tétrada*.

La idea del formalismo de Palatini consiste en efectuar los cálculos sobre el fibrado trivial $M \times \mathbb{R}^n$, de modo que funcione como sustituto del fibrado tangente. Para ello, nos valdremos de las tétradas e así como de sus inversas, las cotétradas:

$$e^{-1} : TM \to M \times \mathbb{R}^n. \tag{1.99}$$

Una sección de $M \times \mathbb{R}^4$ consiste en una función sobre M valuada en $\mathbb{R}^4$. Por lo tanto, existe una base natural de secciones, $\xi_0, \ldots, \xi_3$ dadas por

$$\xi_0 = (1, 0, 0, 0), \tag{1.100}$$
$$\xi_1 = (0, 1, 0, 0), \tag{1.101}$$
$$\xi_2 = (0, 0, 1, 0), \tag{1.102}$$
$$\xi_3 = (0, 0, 0, 1). \tag{1.103}$$

De este modo, cualquier sección s puede escribirse como

$$s = s^I \xi_I. \tag{1.104}$$

En este esquema, llamaremos a $\mathbb{R}^4$ *espacio interno*. En general, cuando se trate de índices, utilizaremos mayúsculas latinas para hablar de índices internos, asociados a la base ξ_I, y letras griegas para los índices espacio-temporales, asociados a campos vectoriales coordenados ∂_μ sobre una carta.

Las tétradas $e : M \times \mathbb{R}^4 \to TM$ pueden visualizarse, también, como mapas cuyo dominio está constituido por las secciones de $M \times \mathbb{R}^4$ y su codominio por los campos vectoriales sobre M. Así, aplicando este mapa a las secciones ξ_I, obtenemos una base de campos vectoriales $e(\xi_I)$ sobre M. En una carta podemos definir

$$e(\xi_I) = e_I^\alpha \partial_\alpha, \tag{1.105}$$

donde las componentes $e_I^\alpha \in C^\infty(M)$. En lo que sigue, abreviaremos $e(\xi_I)$ como e_I. Dadas dos secciones s y s' de $M \times \mathbb{R}^4$, definimos su producto interno $\eta(s, s')$ como

$$\eta(s, s') = \eta_{IJ} s^I s'^J, \tag{1.106}$$

donde η_{IJ} son las componentes de la métrica de Minkowski:

$$\eta_{IJ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.107}$$

y se denomina *métrica interna*. Dicha métrica, así como su inversa, permiten subir y bajar índices internos.

Sea g la métrica con la que viene equipada la variedad M, decimos que la tétrada e es ortonormal si

$$g(e_I, e_J) = \eta_{IJ}. \tag{1.108}$$

En este caso, g y η están vinculados mediante la relación:

$$g(e(s), e(s')) = \eta(s, s'), \tag{1.109}$$

para dos secciones cualesquiera s, s' de $M \times \mathbb{R}^4$. Mostremos (1.109):

$$\begin{aligned} g(e(s), e(s')) &= g(e(s^I \xi_I), e(s^J \xi_J)) && (1.110)\\ &= s^I s^J g(e_I, e_J) && (1.111)\\ &= \eta_{IJ} s^I s^J && (1.112)\\ &= \eta(s^I \xi_I, s^J \xi_J) && (1.113)\\ &= \eta(s, s'). && (1.114) \end{aligned}$$

En términos de índices, la identidad (1.109) se expresa como

$$\eta_{IJ} = g(e_I, e_J) = g_{\alpha\beta} e_I^\alpha e_J^\beta \implies \delta_J^I = e_\alpha^I e_J^\alpha \quad \text{y} \quad g_\beta^\alpha = e_I^\alpha e_\beta^I. \tag{1.115}$$

Así, la cotétrada puede escribirse como

$$e^{-1} v = e_\alpha^I v^\alpha \xi_I, \tag{1.116}$$

lo que es consistente, pues,

$$e^{-1} v = e_\alpha^I v^\alpha \xi_I = e_\alpha^I e_J^\alpha s^J \xi_I = s^I \xi_I = s. \tag{1.117}$$

A partir de estas relaciones puede derivarse una igualdad que exprese g en función de las cotétradas:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g(\partial_\alpha, \partial_\beta) && (1.118)\\ &= \eta(e^{-1}\partial_\alpha, e^{-1}\partial_\beta) && (1.119)\\ &= \eta(e_\alpha^I \xi_I, e_\beta^J \xi_J) && (1.120)\\ &= \eta_{IJ} e_\alpha^I e_\beta^J. && (1.121) \end{aligned}$$

Conexión de Lorentz

Decimos que una conexión D sobre $M \times \mathbb{R}^4$ es una *conexión de Lorentz* si satisface

$$v\eta(s, s') = \eta(D_v s, s') + \eta(s, D_v s'). \tag{1.122}$$

Un caso especial entre estas conexiones es el de la conexión estándar plana D^0, definida como

$$D_v^0 s = v(s^I) \xi_I. \tag{1.123}$$

Como se justifica en § B.3 cualquier conexión D puede reescribirse como $D^0 + A$ para algún potencial vector A:

$$D_v s = (v(s^J) + A_{\mu I}^J v^\mu s^I) \xi_J. \tag{1.124}$$

Por otra parte, la curvatura asociada a la conexión D es:

$$F^{IJ}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A^{IJ}_\beta - \partial_\beta A^{IJ}_\alpha + [A_\alpha, A_\beta]^{IJ}. \tag{1.125}$$

El potencial vector asociado a una conexión de Lorentz está sujeto a la condición $A^{IK}_\mu = -A^{KI}_\mu$: reescribiendo la ecuación (1.122) en términos de índices, en el lado izquierdo de la igualdad tenemos

$$v\eta(s, s') = v(s^J s'^K \eta_{JK}), \tag{1.126}$$

mientras que el lado derecho queda:

$$\eta(D_v s, s') + \eta(s, D_v s') \tag{1.127}$$
$$= \eta((v(s^J) + A^J_{\mu I} v^\mu s^I)\xi_J, s'^K \xi_K) + \eta(s^J \xi_J, (v(s'^K) + A^K_{\nu T} v^\nu s'^T)\xi_K) \tag{1.128}$$
$$= v(s^J s'^K \eta_{JK}) + (A^{IK}_\mu + A^{KI}_\mu) s_I s'_K v^\mu, \tag{1.129}$$

y en consecuencia:

$$A^{IK}_\mu = -A^{KI}_\mu. \tag{1.130}$$

Se puede probar que esto implica que A_μ vive en una álgebra de Lie de Lorentz, $\mathfrak{so}(3,1)$. Denominaremos a este potencial vector *conexión espinorial*. Haciendo uso de la identidad (1.130) conjuntamente con (1.125) se puede probar que $F^{IJ}_{\alpha\beta} = -F^{JI}_{\alpha\beta}$.

Mediante las tétradas, es posible transferir la conexión de Lorentz del fibrado trivial al fibrado tangente, obteniéndose una conexión $\widetilde{\nabla}$ definida por

$$\widetilde{\nabla}_\alpha \partial_\beta = \widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} \partial_\gamma, \tag{1.131}$$

donde

$$\widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = A^J_{\alpha I} e^I_\beta e^\gamma_J. \tag{1.132}$$

Denominaremos a $\widetilde{\nabla}$ conexión imitación de Levi-Civita y a $\widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$ símbolos imitación de Christoffel. De manera similar, se define el tensor imitación de Riemann,

$$\widetilde{R}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = F^{IJ}_{\alpha\beta} e^\delta_I e^\gamma_J, \tag{1.133}$$

el tensor imitación de Ricci,

$$\widetilde{R}_{\alpha\beta} = \widetilde{R}^\gamma_{\alpha\gamma\beta}, \tag{1.134}$$

y el escalar imitación de Ricci

$$\widetilde{R} = \widetilde{R}^\alpha_\alpha. \tag{1.135}$$

Finalmente, podemos introducir la acción de Palatini. Conviene recordar que, a diferencia de la acción de Einstein-Hilbert, no se trata de una función de la métrica, sino de las tétradas y el potencial vector. La *acción de Palatini* se define, entonces, como:

$$S(A, e) = \int_M \widetilde{R} \mathrm{vol} \tag{1.136}$$

Utilizando las relaciones (1.115) conjuntamente con la ecuación (1.133), la acción de Palatini adquiere la forma

$$S(A, e) = \int_M e^\alpha_I e^\beta_J F^{IJ}_{\alpha\beta} \mathrm{vol}. \tag{1.137}$$

La forma volumen está dada por la expresión usual en términos de la métrica, expresada en función de las tétradas.

Lo que resta de este apartado está dedicado a mostrar que $\delta S = 0$ implica forzosamente que la métrica $g_{\alpha\beta} = \eta_{IJ} e^I_\alpha e^J_\beta$ debe satisfacer la ecuaciones de Einstein. Comenzamos calculando la variación de S según las tétradas, esto es, calculando δS e imponiendo $\delta A = 0$. Como se expuso para el caso de la acción de Einstein-Hilbert, la variación del volumen es:

$$\delta \text{vol} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\delta g^{\alpha\beta} \text{vol}), \tag{1.138}$$

pero ahora,

$$\delta g^{\alpha\beta} = \delta(\eta^{IJ} e^\alpha_I e^\beta_J) = 2\eta^{IJ} e^\beta_J \delta e^\alpha_I. \tag{1.139}$$

Por lo tanto,

$$\delta \text{vol} = -\eta^{IJ} g_{\alpha\beta} e^\beta_J (\delta e^\alpha_I) \text{vol} \implies \delta \text{vol} = -e^K_\gamma (\delta e^\gamma_K) \text{vol}. \tag{1.140}$$

La variación de la acción respecto de la tétrada, entonces, es

$$\delta S = \int_M ((\delta e^\alpha_I) e^\beta_J F^{IJ}_{\alpha\beta} + e^\alpha_I (\delta e^\beta_J) F^{IJ}_{\alpha\beta} - e^K_\gamma (\delta e^\gamma_K) e^\alpha_I e^\beta_J F^{IJ}_{\alpha\beta}) \text{vol} \tag{1.141}$$

$$= 2 \int_M (\underbrace{e^\beta_J F^{IJ}_{\alpha\beta}}_{\text{I}} - \frac{1}{2} \underbrace{e^I_\alpha e^\gamma_K e^\delta_L F^{KL}_{\gamma\delta}}_{\text{II}}) (\delta e^\alpha_I) \text{vol}. \tag{1.142}$$

Detengámonos en el término (I) en la ecuación (1.142):

$$e^\beta_J F^{IJ}_{\alpha\beta} = e^\beta_J \widetilde{R}^{\alpha\gamma}_{\alpha\beta} e^I_\delta e^J_\gamma \tag{1.143}$$

$$= \widetilde{R}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} e^I_\delta g^{\beta_\gamma} \tag{1.144}$$

$$= \widetilde{R}_{\alpha\delta} e^\delta_J \eta^{IJ}, \tag{1.145}$$

donde hemos hecho uso de la definición del tensor de Riemann imitación. Vayamos a (II). Primero, observemos que

$$F^{KL}_{\gamma\delta} e^\gamma_K e^\delta_L = \widetilde{R}^{\delta\gamma}_{\gamma\delta} = \widetilde{R}^\gamma_\gamma = \widetilde{R}. \tag{1.146}$$

Mediante esta identidad y multiplicando por $e^J_\beta e^\beta_J = 1$, (II) puede reescribirse como

$$\widetilde{R} e^I_\alpha e^J_\beta e^\beta_J = \widetilde{R} g_{\alpha\beta} \eta^{IJ} e^\beta_J. \tag{1.147}$$

Finalmente, δS puede expresarse en términos de $\widetilde{R}_{\alpha\beta}$ y $\widetilde{R}$:

$$\delta S = 2 \int_M (\widetilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \widetilde{R} g_{\alpha\beta}) \eta^{IJ} e^\beta_J (\delta e^\alpha_I) vol. \tag{1.148}$$

Luego, $\delta S = 0$ para una variación arbitraria si y sólo si

$$\widetilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \widetilde{R} g_{\alpha\beta} = 0. \tag{1.149}$$

Cuando $\widetilde{\nabla} = \nabla$ (1.149) es la ecuación de Einstein, lo que resulta de variar la acción con respecto a la conexión e imponer $\delta e = 0$:

$$\delta S = \int_M (\delta \widetilde{R}) vol \tag{1.150}$$

$$= \int_M g^{\alpha\beta} (\delta \widetilde{R}_{\alpha\beta}) vol. \tag{1.151}$$

De la ecuación (1.85) se tiene $\delta \widetilde{R}^{\lambda}_{\alpha\sigma\beta} = 2\widetilde{\nabla}_{[\alpha} \delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma]\beta}$, con lo cual

$$\delta \widetilde{R}_{\alpha\beta} = 2\widetilde{\nabla}_{[\alpha} \delta \widetilde{\Gamma}^{\gamma}_{\gamma]\beta}. \tag{1.152}$$

Como $\delta \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$, si se escribe

$$\widetilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} + C^{\gamma}_{\alpha\beta}, \tag{1.153}$$

entonces

$$\delta \widetilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \delta C^{\gamma}_{\alpha\beta}. \tag{1.154}$$

En consecuencia,

$$\delta \widetilde{R}_{\alpha\beta} = \widetilde{\nabla}_{\alpha} \delta C^{\gamma}_{\gamma\beta} - \widetilde{\nabla}_{\gamma} \delta C^{\gamma}_{\alpha\beta}. \tag{1.155}$$

y,

$$\widetilde{\nabla}_{\alpha} \delta C^{\gamma}_{\gamma\beta} = \partial_{\alpha} \delta C^{\gamma}_{\gamma\beta} - \widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\gamma} \delta C^{\gamma}_{\alpha\beta} - \widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta} \delta C^{\gamma}_{\gamma\lambda} + \widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\alpha\lambda} \delta C^{\lambda}_{\gamma\beta}. \tag{1.156}$$

que, haciendo uso de la relación (1.153), puede expresarse como

$$\widetilde{\nabla}_{\alpha} \delta C^{\gamma}_{\gamma\beta} = \nabla_{\alpha} \delta C^{\gamma}_{\gamma\beta} - C^{\lambda}_{\alpha\gamma} \delta C^{\gamma}_{\lambda\beta} - C^{\lambda}_{\alpha\beta} \delta C^{\gamma}_{\gamma\lambda} + C^{\gamma}_{\alpha\lambda} \delta C^{\lambda}_{\gamma\beta}. \tag{1.157}$$

Realizando un cálculo análogo para $\widetilde{\nabla}_{\gamma} \delta C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ y sustituyendo en (1.155) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta \widetilde{R}_{\alpha\beta} = {} & \nabla_{\alpha} \delta C^{\gamma}_{\gamma\beta} - \nabla_{\gamma} C^{\gamma}_{\alpha\beta} - C^{\lambda}_{\alpha\beta} \delta C^{\gamma}_{\gamma\lambda} \\ & + C^{\lambda}_{\gamma\alpha} \delta C^{\gamma}_{\lambda\beta} + C^{\lambda}_{\gamma\beta} \delta C^{\gamma}_{\alpha\lambda} - C^{\gamma}_{\gamma\lambda} \delta C^{\lambda}_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{1.158}$$

Y consecuentemente,

$$\begin{aligned} \delta \widetilde{R} = {} & g^{\alpha\beta} (\nabla_{\alpha} \delta C^{\gamma}_{\gamma\beta} - \nabla_{\gamma} C^{\gamma}_{\alpha\beta} - C^{\lambda}_{\alpha\beta} \delta C^{\gamma}_{\gamma\lambda} \\ & + C^{\lambda}_{\gamma\alpha} \delta C^{\gamma}_{\lambda\beta} + C^{\lambda}_{\gamma\beta} \delta C^{\gamma}_{\alpha\lambda} - C^{\gamma}_{\gamma\lambda} \delta C^{\lambda}_{\alpha\beta}). \end{aligned} \tag{1.159}$$

Los términos donde aparece ∇ corresponden a divergencias totales y, por tanto, sólo contribuyen con términos de borde. El resto de los términos se anulan sii $C^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$, lo que implica que

$$\widetilde{\nabla} = \nabla. \tag{1.160}$$

Por lo tanto, la ecuación (1.149) es la ecuación de Einstein en el vacío. Hemos obtenido mediante el formalismo de Palatini una formulación equivalente a la de Einstein-Hilbert.

1.4. Formulación hamiltoniana

En esta sección abordaremos la formulación hamiltoniana de la relatividad general. Como veremos más adelante, este enfoque permite estudiar las ecuaciones de Einstein en mayor profundidad y sienta las bases para una cuantización canónica de las mismas. En primer lugar, estudiaremos la formulación de Arnowitt, Deser y Misner (ADM), y en segundo término, la introducida por Ashtekar (1987). Este último formalismo es fundamental para LQG, pues habilita una representación por conexiones de GR y simplifica notablemente los vínculos de la teoría.

1.4.1. Foliación

Una formulación canónica de la relatividad general requiere una separación del espacio y del tiempo, puesto que, a diferencia de las derivadas espaciales, sólo las derivadas temporales permiten definir momentos. Por lo tanto, de aquí en más, asumiremos que el espacio-tiempo M puede foliarse por hipersuperficies espaciales Σ_t: t =const. y que es globalmente hiperbólico, a saber, que M es difeomorfa a $S \times \mathbb{R}$, donde la variedad S representa el "espacio" y $\mathbb{R}$ el tiempo. Dado un espacio-tiempo M, existen múltiples difeomorfismos

$$\phi : M \to S \times \mathbb{R}, \tag{1.161}$$

cada uno de los cuales da lugar a un *tiempo coordenado* t en M definido por el pullback por ϕ de la coordenada temporal en $S \times \mathbb{R}$.

1.4.2. Estructuras normal y espacial

Sea Σ_t una hipersuperficie en M. En lo que sigue, asumiremos que Σ_t es tipo espacio, de modo que la métrica g restringida a Σ_t es riemanniana:

$$g(v, v) > 0, \tag{1.162}$$

para cualquier $v \in T_p\Sigma_t$ no nulo. Llamaremos a este objeto, *métrica inducida* y lo denotaremos como h. Bajo estas condiciones es posible definir un campo vectorial unitario tipo tiempo, n, normal a Σ_t:

$$g(n, n) = -1 \text{ y } \forall v \in T_p\Sigma_t \quad g(n, v) = 0. \tag{1.163}$$

En principio, hay dos elecciones posibles para n, pues el mismo siempre puede multiplicarse por (-1). Para trabajar con un único campo vectorial normal, exigimos que apunte hacia el futuro: $n^a \partial_a t > 0$. En el caso de espacio-tiempos globalmente hiperbólicos, esto siempre puede efectuarse.

Con esta estructura, el espacio tangente en cada punto de Σ_t se descompone naturalmente en un espacio tangente espacial, generado por los vectores tangentes a Σ_t y un espacio normal, generado por el campo vectorial n^a. Así, cualquier vector $v \in T_pM$, puede descomponerse como:

$$v = \underbrace{-g(v, n)n}_{\perp} + \underbrace{(v + g(v, n)n)}_{\parallel}. \tag{1.164}$$

Podemos chequear, por ejemplo, que la componente normal de n es, en efecto, n:

$$-g(n,n)n = n, \tag{1.165}$$

y que la componente tangente de cualquier vector v es ortogonal a n:

$$g(v + g(v,n)n, n) = g(v,n) + g(v,n)g(n,n) = 0. \tag{1.166}$$

En particular, dados dos campos vectoriales $u, v \in \Sigma_t$, podemos descomponer $\nabla_u v$ en sus partes normal y tangente:

$$\nabla_u v = -g(\nabla_u v, n)n + (\nabla_u v + g(\nabla_u v, n)). \tag{1.167}$$

El primer término lo reescribiremos así:

$$-g(\nabla_u v, n) = K(u,v)n. \tag{1.168}$$

$K(u,v)$ se denomina *curvatura extrínseca* y puede interpretarse como el transporte paralelo del campo vectorial normal a lo largo de la hipersuperficie Σ_t o como la variación de la métrica inducida a lo largo de la curva integral generada por el campo vectorial normal, como veremos más adelante.

La cantidad:

$$D_u v = \nabla_u v + g(\nabla_u, n)n, \quad u, v \in \Sigma_t \tag{1.169}$$

es la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica inducida h. Para justificar dicha afirmación es necesario probar que D cumple con las tres propiedades siguientes: (i) obedece la ley de Leibniz, (ii) es compatible con la métrica inducida y (iii) es libre de torsión. Comencemos probando (i):

$$\begin{aligned} D_v(fw) &= D_v(fw) + g(n, D_v(fw))n && (1.170)\\ &= v(f)w + fD_v w + g(n, v(f)w)n + g(n, fD_v w) && (1.171)\\ &= v(f)w + f(D_v w + g(n, D_v w)n) && (1.172)\\ &= v(f)w + fD_v w, && (1.173) \end{aligned}$$

donde únicamente se ha usado la definición de D y que $g(n,w) = 0$. La prueba de (ii):

$$\begin{aligned} ug(v,w) &= g(\nabla_u v, w) + g(v, \nabla_u w) && (1.174)\\ &= g(K(u,v)n + D_u v, w) + g(v, K(u,w)n + D_u w) && (1.175)\\ &= g(D_u v, w) + g(v, D_u w), && (1.176) \end{aligned}$$

donde hemos usado que $g(n,w) = g(v,n) = 0$. Por último, veamos que esta conexión es libre de torsión:

$$\begin{aligned} D_u v - D_v u &= \nabla_u v - K(u,v)n - \nabla_v u + K(v,u)n && (1.177)\\ &= \nabla_u v - \nabla_v u && (1.178)\\ &= [u,v], && (1.179) \end{aligned}$$

donde nos hemos valido de que $K(u,v) = K(v,u)$, lo que probaremos más abajo, y de que ∇ es libre de torsión.

$K(u,v)$ es un tensor simétrico, y por lo tanto, una cantidad $C^\infty(\Sigma)$-lineal en los campos vectoriales u y v. En coordenadas locales:

$$K(u,v) = K_{ij}u^i v^j, \tag{1.180}$$

donde

$$K_{ij} = K(\partial_i, \partial_j). \tag{1.181}$$

Para mostrar que $K(u,v)$ es $C^\infty(\Sigma_t)$-lineal en u alcanza con observar que

$$K(fu,v) = -g(\nabla_{fu}v, n) = -g(f\nabla_u v, n) = -fg(\nabla_u v, n) = fK(u,v) \tag{1.182}$$

$\forall f \in C^\infty(\Sigma_t)$. Para la linealidad en v:

$$K(u,fv) = -g(\nabla_u fv, n) = -fg(\nabla_u v, n) = -fK(u,v). \tag{1.183}$$

Por último, para justificar que $K(u,v) = K(v,u)$ alcanza con mostrar que $K_{ij} = K_{ji}$:

$$\begin{aligned} K_{ij} - K_{ji} &= K(\partial_i, \partial_j) - K(\partial_j, \partial_i) && (1.184)\\ &= -g(\nabla_i \partial_j, n) + g(\nabla_j \partial_i, n) && (1.185)\\ &= -g([\partial_i, \partial_j], n) && (1.186)\\ &= 0, && (1.187) \end{aligned}$$

utilizando que ∇ es libre de torsión.

Finalizamos este apartado presentando una definición alternativa para la curvatura extrínseca:

$$K(u,v) = g(\nabla_u n, v). \tag{1.188}$$

Como ∇ es compatible con la métrica, ambas definiciones son equivalentes:

$$0 = ug(n,v) = g(\nabla_u v, n) + g(v, \nabla_u n). \tag{1.189}$$

Esta definición da cuenta de una importante interpretación de la curvatura extrínseca, a saber, que mide cuánto rota el vector normal unitario n en la dirección v cuando es trasladado paralelamente en la dirección u.

La ecuación (1.188) puede reescribirse en términos de índices:

$$K_{ij} = (\nabla_i n)_l (\partial_j)^l = \nabla_i n_j, \tag{1.190}$$

donde ∂_j es un vector de la base coordenada en Σ. En consecuencia $\nabla_i n_j = D_i n_j + g(\nabla_i n, n) n_j$, pero $n_j = 0$, con lo cual, K_{ij} puede escribirse como

$$K_{ij} = (D_i n)_j. \tag{1.191}$$

Derivada temporal, vector shift y función lapso

La métrica inducida en las hipersuperficies espaciales, h_{ab}, jugará un rol crucial como variable de configuración para la gravedad canónica. Para definirla correctamente, debemos hacer uso de una función tiempo, o de la foliación Σ_t generada por la misma, de manera de poder interpretar h_{ab} como un tensor tridimensional sobre una familia de variedades Σ_t.

En este caso, con una interpretación de campos espaciales dependientes del tiempo, tiene sentido definir derivadas temporales de la métrica inducida, así

como de otros campos. Una derivada requiere una dirección, por lo tanto, la función t es insuficiente para definirla. Introducimos entonces, un *campo vectorial evolución temporal*, t^a, para definir la dirección de las derivadas temporales, tal que $t^a\nabla_a t = 1$. Esta condición asegura que $t^a\nabla_a$ pueda interpretarse como $\frac{\partial}{\partial t}$, i.e. como la derivada parcial temporal para algún conjunto de coordenadas espaciales. Se puede observar que una derivada $\frac{\partial}{\partial t}$ queda definida de manera única sólo en caso de que las coordenadas espaciales x^b satisfagan $t^a\nabla_a x^b = 0$. En caso que no se especifiquen estas coordenadas, el campo vectorial t^a no es único, incluso si la función t ha sido fijada. Esta libertad puede parametrizarse descomponiendo t^a en su parte espacial y otra perpendicular a Σ_t, como se mencionó en el apartado anterior

$$t^a = -t^b n_b n^a + (t^a + t^b n_b n^a), \tag{1.192}$$

que reescribiremos como

$$t^a = N n^a + N^a. \tag{1.193}$$

Denominaremos a $N^a = t^a + t^b n_b n^a$ *vector shift* y a $N = -t^b n_b$ *función lapso*. Para hablar de dependencia temporal de un campo, debemos ser capaces

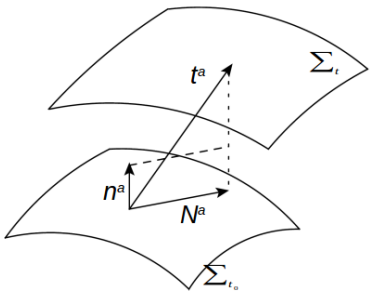

Figura 1.1: Descomposición de t^a

de identificar puntos que nos permitan describirla. Un campo vectorial evolución temporal posibilita esta asociación: tomamos arbitrariamente una de sus curvas integrales e identificamos sus intersecciones con las superficies Σ_t como correspondientes al mismo punto espacial en diferentes instantes temporales. La condición $t^a\nabla_a t = 1$ garantiza que la curvas integrales intersecan cada Σ_t exactamente una vez, haciendo que esta identificación esté bien definida. Así, definimos la *derivada temporal* como la derivada de Lie a lo largo del campo vectorial evolución temporal t^a:

$$\dot{T}^{a_1\ldots a_n}{}_{b_1\ldots b_m} \equiv h^{a_1}_{c_1}\ldots h^{a_n}_{c_n} h^{d_1}_{b_1}\ldots h^{d_m}_{b_m}\mathcal{L}_t T^{c_1\ldots c_n}{}_{d_1\ldots d_m}, \tag{1.194}$$

donde hemos incluido proyecciones espaciales para garantizar que $\dot{T}^{a_1\ldots a_n}{}_{b_1\ldots b_m}$ es espacial.

Métrica inducida y curvatura extrínseca como funciones del vector shift y el lapso

La métrica inducida en Σ_t está dada por

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b, \tag{1.195}$$

la cual queda unívocamente determinada por las dos condiciones siguientes:

- es insensible a la dirección normal: $h_{ab}n^b = 0$,
- cuando se aplica a campos vectoriales tangentes a Σ_t, da lugar a la misma geometría que g_{ab}: $h_{ab}s^a = g_{ab}s^a \ \forall s^a$ tangente a Σ_t.

Asimismo, podemos observar que h^a_b actúa como proyector sobre Σ. Si tomamos un campo v^b, entonces

$$h^a_b v^b n_a = (g^a_b + n^a n_b)n_a v^b = n_b v^b - n_b v^b = 0, \tag{1.196}$$

con lo cual, en efecto, $h^a_b v^b$ no tiene componente en la dirección perpendicular a Σ_{t_0}. A partir de esta propiedad y de la ecuación (1.169), podemos escribir la derivada covariante asociada a la métrica inducida, en términos de índices:

$$D_c T^{a_1\dots a_k}{}_{b_1\dots b_l} = h^{a_1}_{d_1}\dots h^{a_k}_{d_k} h^{e_l}_{b_l} h^f_c \nabla_f T^{d_1\dots d_k}{}_{e_1\dots e_l}. \tag{1.197}$$

donde T es un tensor (k,l) sobre el espacio-tiempo.

La curvatura extrínseca puede también vincularse con la métrica inducida:

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{ab} \tag{1.198}$$

Para probar esto, calculamos

$$\mathcal{L}_n h_{ab} = n^c\nabla_c h_{ab} + h_{cb}\nabla_a n^c + h_{ac}\nabla_b n^c \tag{1.199}$$
$$= n^c\nabla_c(n_a n_b) + \nabla_a n_b + \nabla_b n_a \tag{1.200}$$
$$= (g^c_a + n_a n^c)\nabla_c n_b + (g^c_b + n_b n^c)\nabla_c n_a = 2K_{ab}. \tag{1.201}$$

Por último, se puede probar que:

$$K_{ab} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a), \tag{1.202}$$

donde $\dot{h}_{ab} = h^c_a h^d_b \mathcal{L}_t h_{cd}$, lo que se puede deducir a partir de la relación (1.198):

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{ab} = \frac{1}{2N}(Nn^c\nabla_c h_{ab} + h_{ac}\nabla_b(Nn^c) + h_{cb}\nabla_a(Nn^c)) \tag{1.203}$$
$$= \frac{1}{2N}h^c_a h^d_b \mathcal{L}_{t-N} h_{cd} = \frac{1}{2N}h^c_a h^d_b(\mathcal{L}_t h_{cd} - \mathcal{L}_N h_{cd}), \tag{1.204}$$

donde hemos reemplazado Nn^a por $t^a - N^a$. La identidad (1.202) queda probada ya que $\mathcal{L}_N h_{cd} = D_a N_b + D_b N_a$, pues D_a es compatible con h_{ab}.

Descomposición de la métrica

Utilizando las definiciones precedentes, podemos calcular el elemento de línea:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + h_{ab}(dx^a + N^a dt)(dx^b + N^b dt), \tag{1.205}$$

en coordendas x^a tales que $t^a\nabla_a = \frac{\partial}{\partial t}$.

Para medidas de integración u otros propósitos, es útil calcular el determinante de la métrica. La inversa de la métrica espacio-temporal puede expresarse como:

$$g^{ab} = h^{ab} - n^a n^b = h^{ab} - \frac{1}{N^2}(t^a - N^a)(t^b - N^b). \tag{1.206}$$

De allí, $g^{00} = -1/N^2$, mientras que su parte puramente espacial es h^{ab}. El vector shift únicamente contribuye a las componentes combinadas espacio y tiempo. Del álgebra de matrices se sabe que la componente (i, j) de la inversa de una matriz A está dada por el cofactor C_{ji} dividido entre el determinante de $A : (A^{-1})^{ij} = C_{ji}/detA$. Aquí, para la componente $(0, 0)$ de la métrica inversa, tenemos el cofactor dado por el determinante de h_{ab}, $C_{00} = \det h_{ab}$. Por lo tanto $g^{00} = -1/N^2 = C_{00}/det(g_{cd})$, luego

$$\det(g_{cd}) = -N^2 \det(h_{ab}). \tag{1.207}$$

Como puede verse en (1.205), toda la información dada por la métrica g_{ab} también está contenida en las variables N, N^a y h_{ab}. En la formulación ADM utilizaremos estas variables como las variables canónicas.

1.4.3. Formulación ADM

Ecuaciones de Gauss-Codazzi

Sean un punto $p \in \Sigma_t$ y un conjunto de coordenadas locales x^0, x^1, x^2, x^3 en un entorno de p tales que $x^0 = t$ y que los campos vectoriales $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ sean tangentes a Σ_t en p.

A continuación, calcularemos $R^{\alpha}{}_{ijk}$ en términos de K_{ij} y ${}^3R^m_{ijk}$, el tensor de Riemann asociado a la métrica inducida en Σ_t. Recordemos que

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \nabla_i \nabla_j \partial_k - \nabla_j \nabla_i \partial_k, \tag{1.208}$$
$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^{\alpha}{}_{ijk} \partial_\alpha; \tag{1.209}$$

por otro lado, que $\nabla_u v = K(u, v)n + D_u v$ para dos campos vectoriales cualesquiera u, v sobre Σ_t, implica que

$$\nabla_i \partial_j = K_{ij} n + {}^3\Gamma^m_{ij} \partial_m, \tag{1.210}$$

donde ${}^3\Gamma^m_{ij}$ son los símbolos de Christoffel asociados a la métrica inducida. De $K(u, v) = g(\nabla_u n, v)$ se desprende que

$$\nabla_i n = K^m_i \partial_m. \tag{1.211}$$

Valiéndonos de (1.210) y (1.211) es posible reescribir el primer término de (1.208):

$$\nabla_i \nabla_j \partial_k = \nabla_i (K_{jk} n + {}^3\Gamma^m_{jk}\, \partial_m) \tag{1.212}$$
$$= K_{jk,i} n + K_{jk} \nabla_i n + {}^3\Gamma^m_{jk,i}\, \partial_m + {}^3\Gamma^m_{jk}\, \nabla_i \partial_m \tag{1.213}$$
$$= (K_{jk,i} + {}^3\Gamma^m_{jk}\, K_{im}) n + K_{jk} K^m_i \partial_m + ({}^3\Gamma^m_{jk,i} + {}^3\Gamma^l_{jk}\ {}^3\Gamma^m_{il}) \partial_m. \tag{1.214}$$

Sustrayendo el segundo término de (1.208) a (1.214), que se obtiene intercambiando en el resultado (1.214) el índice i por j, se obtiene la identidad:

$$\begin{aligned} R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = {} & (K_{jk,i} - K_{ik,j} + {}^3\Gamma^m_{jk}\, K_{im} - {}^3\Gamma^m_{ik}\, K_{jm}) n \\ & + (K_{jk} K^m_i - K_{ik} K^m_j) \partial_m \\ & + ({}^3\Gamma^m_{jk,i} - {}^3\Gamma^m_{ik,j} + {}^3\Gamma^l_{jk}\ {}^3\Gamma^m_{il} - {}^3\Gamma^l_{ik}\ {}^3\Gamma^m_{jl}) \partial_m. \end{aligned} \tag{1.215}$$

La primera línea del lado derecho es igual a $(D_iK_{jk} - D_jK_{ik})n$, mientras que la tercera es equivalente a ${}^3R^m_{ijk}\partial_m$.

Finalmente, las *ecuaciones de Gauss-Codazzi* son:

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = (D_iK_{jk} - D_jK_{ik})n + ({}^3R^m_{ijk} + K_{jk}K^m_i - K_{ik}K^m_j)\partial_m, \quad (1.216)$$

que en términos de índices adquieren el aspecto:

$$R^\alpha_{ijk} = (D_iK_{jk} - D_jK_{ik})n^\alpha + {}^3R^\alpha_{ijk} + K_{jk}K^\alpha_i - K_{ik}K^\alpha_j. \quad (1.217)$$

Proyectando sobre Σ_t, obtenemos la *ecuación de Gauss*

$$h^a_\alpha h^i_b h^j_c h^k_d R^\alpha_{ijk} = {}^3R^a_{bcd} + K_{cd}K^a_b - K_{bd}K^a_c. \quad (1.218)$$

Utilizando la simetría (2) del tensor de Riemann y contrayendo índices en (1.217) llegamos a la *ecuación de Codazzi*

$$R_{i\alpha}n^\alpha h^i_\nu = D_aK^a_\nu - D_\nu K^a_a. \quad (1.219)$$

La curvatura extrínseca, como se muestra en la ecuación (1.202) desempeña el rol de "velocidad" de la métrica espacial y, así, es un candidato para su momento. En efecto, aparece en la acción de Einstein-Hilbert debido a las relaciones de Gauss-Codazzi. Utilizando las simetrías del tensor de Riemann, se deduce que

$$R_{abcd}h^{ac}h^{bd} = R + 2R_{ab}n^an^b, \quad (1.220)$$

y reescribiendo R_{abcd} a partir de la ecuación de Gauss, el escalar de curvatura adquiere la forma:

$$R = {}^3R + (K^a_a)^2 - K_{ab}K^{ab} - 2R_{ab}n^an^b. \quad (1.221)$$

Por otro lado, usando la ecuación de Codazzi y reescribiendo la curvatura extrínseca en función de la derivada covariante del vector normal se obtiene que

$$R_{ab}n^an^b = -n^a(\nabla_a\nabla_k - \nabla_k\nabla_a)n^k \quad (1.222)$$

$$= (K^a_a)^2 - K_{ab}K^{ab} + \nabla_a(n^b\nabla_b n^a) - \nabla_b(n^b\nabla_a n^a). \quad (1.223)$$

En consecuencia, podemos escribir el lagrangeano para la relatividad general como

$$L_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi G}\int_\Sigma d^3x\sqrt{-g}R \quad (1.224)$$

$$= \frac{1}{16\pi G}\int d^3xN\sqrt{h}({}^3R + K_{ab}K^{ab} - (K^a_a)^2) \quad (1.225)$$

a menos de términos de borde que no afectan las ecuaciones de campo locales.

Hamiltoniano

De (1.225) se deduce inmediatamente que la acción depende de $\dot{h}_{ab}$ a través de K_{ab}, siendo, por otra parte, independiente de las derivadas temporales de las restantes componentes espacio-temporales de la métrica, N y N^a. Esto implica

que el lagrangeano es singular y que, en consecuencia, debería dar lugar a cuatro vínculos primarios, como demostraremos en breve.

Los momentos canónicos están dados por

$$p_N(x) = \frac{\delta L_{grav}}{\delta \dot{N}(x)} = 0, \tag{1.226}$$

$$p_a(x) = \frac{\delta L_{grav}}{\delta \dot{N}^a(x)} = 0, \tag{1.227}$$

$$p^{ab}(x) = \frac{\delta L_{grav}}{\delta \dot{h}_{ab}(x)} = \frac{1}{2N}\frac{\delta L_{grav}}{\delta K_{ab}} = \frac{\sqrt{h}}{16\pi G}(K^{ab} - K^c_c h^{ab}), \tag{1.228}$$

de donde se desprenden inmediatamente los cuatro vínculos primarios $p_N \approx 0$ y $p_a \approx 0$. El espacio de fases es de veinte dimensiones y posee como coordenadas a $N, N^a, h_{ab}, p_N, p_a, p^{ab}$. Viene, además, equipado con la siguiente estructura simpléctica

$$\{N(t,x), p_N(t,x')\} = \delta^3(x - x'), \tag{1.229}$$

$$\{N^a(t,x), p_b(t,x')\} = \delta^3(x - x'), \tag{1.230}$$

$$\{h_{ab}(t,x), p^{cd}(t,x')\} = \delta^{cd}_{ab}\delta^3(x - x'), \tag{1.231}$$

donde el símbolo $\{\dots,\dots\}$ denota al corchete de Poisson y $\delta^{cd}_{ab} = \frac{1}{2}(\delta^c_a\delta^d_b - \delta^c_b\delta^d_a)$.

Debido a la presencia de los vínculos primarios, el hamiltoniano está bien definido únicamente en una región restringida del espacio de fases. Para tener en cuenta esta restricción introducimos los cuatro multiplicadores de Lagrange, λ y λ^a, lo que permite escribir el hamiltoniano como

$$H_{grav} = \int_\Sigma d^3x(\dot{h}_{ab}p^{ab} - L_{grav} + \lambda p_N + \lambda^a p_a) \tag{1.232}$$

$$= \int_\Sigma d^3x \left(\frac{16\pi G N}{\sqrt{h}}\left(p_{ab}p^{ab} - \frac{1}{2}(p^c_c)^2\right) + 2p^{ab}D_a N_b - \frac{N\sqrt{h}}{16\pi G}\,{}^3R\right) + \int_\Sigma d^3x(\lambda p_N + \lambda^a p_a). \tag{1.233}$$

Los vínculos primarios implican vínculos secundarios:

$$0 \approx \dot{p}_N = \{p_N, H_{grav}\} = -\frac{16\pi G}{\sqrt{h}}\left(p_{ab}p^{ab} - \frac{1}{2}(p^a_a)^2\right) + \frac{\sqrt{h}}{16\pi G}\,{}^3R \equiv -C, \tag{1.234}$$

denominado *vínculo hamiltoniano*, y

$$0 \approx \dot{p}_a = \{p_a, H_{grav}\} = 2\sqrt{h}D^b((\sqrt{h})^{-1}p_{ab}) = 2D_b p^b_a \equiv -C_a, \tag{1.235}$$

que recibe el nombre de *vínculo de difeomorfismos*. Se puede verificar que no hay vínculos terciarios.

Finalmente, el hamiltoniano puede escribirse como

$$H_{grav} = \int d^3x(NC + N^a C_a + \lambda p_N + \lambda^a p_a), \tag{1.236}$$

a menos de un término de borde (que surge luego de deducir C_a, pues para ello se debe integrar por partes).

Dinámica

El hamiltoniano, entonces, es una combinación lineal de vínculos, y por tanto, se anula débilmente. Este hecho se encuentra en concordancia con la idea de que no existe un tiempo absoluto en relatividad general (pues un hamiltoniano no nulo en la hipersuperficie de vínculo permitiría definir evoluciones temporales físicas). En su lugar, la dinámica queda determinada por los vínculos, de manera que la evolución, en tanto flujo de gauge, puede parametrizarse arbitrariamente. De hecho, cálculos explícitos, que mostraremos más adelante, confirman que los vínculos son de primera clase y que, por lo tanto, generan transformaciones de gauge que no alteran la información física de las soluciones. El vínculo hamiltoniano genera esta transformación de gauge para el tiempo, mientras el vínculo de difeomorfismos hace lo propio para las coordenadas espaciales. Así, una vez satisfechas las restricciones impuestas por los vínculos, puede asegurarse que la formulación es espacio-tiempo covariante, incluso luego de realizar la división entre espacio y tiempo determinada por la función t.

Las ecuaciones de evolución para N y N^a están dadas por:

$$\dot{N}(t,x) = \lambda(t,x), \tag{1.237}$$

$$\dot{N}^\alpha(t,x) = \lambda^\alpha(t,x), \tag{1.238}$$

lo que deja en evidencia que la evolución de la función lapso y el vector shift es completamente arbitraria. Por lo tanto, en el espacio de fases el sistema puede describirse por las variables h_{ab} y p^{ab}, mientras que la función lapso y el vector shift pueden considerarse multiplicadores de Lagrange. Así, las ecuaciones dinámicas para h_{ab} y p^{ab} pueden calcularse directamente a partir del hamiltoniano reducido

$$H = \int_\Sigma d^3x[NC + N^a C_a], \tag{1.239}$$

obteniéndose

$$\dot{h}_{ab} = 2NG_{abcd}p^{cd} + 2\nabla_{(a}N_{b)}, \tag{1.240}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}^{ab} = {} & \frac{1}{\sqrt{h}}Nh^{ab}\left(p^{cd}p_{cd} - \frac{1}{2}p^2\right) - \frac{2N}{\sqrt{h}}\left(p^{ac}p_c^b - \frac{1}{2}pp^{ab}\right) - N\sqrt{h}\ {}^3R^{ab} \\ & + N\sqrt{h}\frac{1}{2}\ {}^3Rh^{ab} + \sqrt{h}\left(\nabla^a\nabla^b N - h^{ab}\nabla^c\nabla_c N\right) \\ & - 2p^{c(a}\nabla_c N^{b)} + \nabla_c\left(N^c p^{ab}\right),\end{aligned} \tag{1.241}$$

donde hemos descartado los términos de borde y $G_{abcd} = \frac{1}{\sqrt{h}}(h_{ac}h_{bd} + h_{ad}h_{bc} - h_{ab}h_{cd})$

Acción de los vínculos

La acción de los vínculos sobre las variables dinámicas puede hallarse calculando los correspondientes corchetes de Poisson. Para ello introducimos los vínculos suavizados:

$$C(N) = \int_\Sigma d^3x NC\sqrt{h}, \tag{1.242}$$

$$C(\vec{N}) = \int_\Sigma d^3x N^a C_a\sqrt{h}. \tag{1.243}$$

La acción sobre la métrica inducida es:

$$\{h_{cd}(y), C(\vec{N})\} = \{h_{cd}(y), \int_\Sigma d^3x N^a(-2[D^b((\sqrt{h})^{-1}p_{ab})])\sqrt{h}\} \tag{1.244}$$

$$= \{h_{cd}(y), \int_\Sigma d^3x N^a(-2D^b p_{ab})\} \tag{1.245}$$

$$= \{h_{cd}(y), \int_\Sigma d^3x D_b N_a(2p^{ab})\} \tag{1.246}$$

$$= \int_\Sigma D_b N_a(x)(\delta^a_c\delta^b_d + \delta^a_d\delta^b_c)\delta^3(x-y) \tag{1.247}$$

$$= 2(D_c N_d(y) + D_d N_c(y)) = 2\mathfrak{L}_{N^a} h_{cd}(y), \tag{1.248}$$

mientras que la acción sobre su momento conjugado:

$$\{p^{cd}(y), C(\vec{N})\} = \{p^{cd}(y), \int_\Sigma d^3x N^a(-2[D^b(h^{-1/2}p_{ab})])\sqrt{h}\} \tag{1.249}$$

$$= \{p^{cd}(y), \int_\Sigma d^3x N^a(-2D^b p_{ab})\} \tag{1.250}$$

$$= \{p^{cd}(y), \int_\Sigma d^3x N_a(-2D_b p^{ab})\} \tag{1.251}$$

$$= \{p^{cd}(y), \int_\Sigma d^3x 2h_{aa'}N^{a'}(-2D_b p^{ab})\} \tag{1.252}$$

$$= \{p^{cd}(y), \int_\Sigma d^3x 2h_{aa'}(D_b N^{a'})p^{ab}\} \tag{1.253}$$

$$= \int_\Sigma d^3x(\delta^c_d\delta^d_{a'} + \delta^d_a\delta^c_{a'})\delta^3(x-y)(D_b N^{a'})p^{ab} \tag{1.254}$$

$$= 2(-(D_b N^d)p^{cb} - (D_b N^c)p^{db}) = 2\mathfrak{L}_{N^a} p^{cd}(y). \tag{1.255}$$

Por lo tanto, el vínculo de difeomorfismos, $C(\vec{N})$, a menos de un factor 2, es un generador de difeomorfismos espaciales sobre las variables dinámicas. De modo similar se puede probar que:

$$\{h_{cd}(y), C(N)\} = \mathfrak{L}_{Nn^a} h_{cd}(y) \tag{1.256}$$

$$\{p^{cd}(y), C(N)\} = \mathfrak{L}_{Nn^a} p^{cd}(y). \tag{1.257}$$

Luego, $C(N)$ genera difeomorfismos en la dirección normal a Σ. Así, la acción de este vínculo puede interpretarse como la de una evolución temporal, correspondiente a trasladar Σ a lo largo de su dirección normal. Calculemos ahora la evolución temporal para una función cualquiera de las variables dinámicas:

$$\{f, H\} = \{f, C(N) + C(\vec{N})\} = \mathfrak{L}_{Nn^a} f + \mathfrak{L}_{N^a} f = \mathfrak{L}_{t^a} f. \tag{1.258}$$

En consecuencia, la evolución temporal consta de dos partes: una evolución temporal normal a Σ y otra, correspondiente a un difeomorfismo espacial en Σ. Esto se debe a que en la foliación elegida, el campo vectorial t^a no es normal a las superficies Σ. Si escogiéramos una foliación donde el vector shift fuese nulo, entonces $C(N)$ coincidiría con el hamiltoniano. De esta observación proviene su nombre.

Álgebra de los vínculos

El corchete de Poisson entre los vínculos arroja el siguiente resultado:

$$\{C(\vec{N}), C(\vec{N}')\} = C([\vec{N}, \vec{N}']), \tag{1.259}$$

$$\{C(\vec{N}), C(N)\} = C(\vec{N}(N)), \tag{1.260}$$

$$\{C(N), C(N')\} = C((N\partial^i N' - N'\partial^i N)\partial_i). \tag{1.261}$$

Por lo tanto, todos los vínculos son de primera clase, pues el resultado de los corchetes de Poisson siempre es otro vínculo.

1.5. Formulación de Ashtekar-Barbero

A continuación, se presentará una formulación alternativa donde se eligen variables dinámicas diferentes a las del formalismo ADM: las variables de Ashtekar [3]. Esta elección simplifica notablemente la estructura del la teoría, lo que permite avanzar más lejos en el proceso de cuantización.

1.5.1. Tétradas y conexiones

Las tétradas proporcionan una especificación alternativa y equivalente a la formulación en términos de métricas o elementos de línea de la geometría del espacio-tiempo. El transporte paralelo o las derivadas covariantes son formuladas, entonces, por conexiones que generalizan los símbolos de Christoffel usuales, como ya se expuso en el desarrollo del formalismo de Palatini. En esta sección, profundizaremos en torno a estas ideas.

Tétradas

Definimos las *tétradas* como un conjunto de cuatro campos vectoriales e^μ_a, etiquetados por un índice adicional a, que toma valores $0, 1, 2, 3$, dando lugar a una base ortonormal en el espacio tangente a cada punto:

$$g_{\mu\nu} e^\mu_a e^\nu_b = \eta_{ab}, \tag{1.262}$$

donde η_{IJ} es la métrica de Minkowski. Así, e^μ_0 es tipo tiempo y $e^\mu_1, e^\mu_2, e^\mu_3$ son tipo espacio. Las tétradas e^μ_a pueden interpretarse como campos vectoriales dobles, a saber, campos vectoriales sobre el fibrado tangente del espacio-tiempo que toman valores en el espacio de Minkowski. Dada una 1-forma sobre el espacio-tiempo ω_μ, $e^\mu_a \omega_\mu$ asigna a cada punto en el espacio-tiempo un covector en el espacio de Minkowski. En este contexto, podemos pensar que el espacio-tiempo, M, viene equipado con dos estructuras vectoriales independientes: el espacio tangente y un espacio de Minkowski para cada punto de la variedad. En este contexto denominamos al espacio de Minkowski *espacio interno*. A partir de la métrica de Minkowski es posible contraer los índices internos (representados por letras latinas) de una tétrada:

$$\eta^{ab} e^\mu_a e_{\nu b} = \delta^\mu_\nu, \tag{1.263}$$

donde $e_{\mu b} \equiv g_{\mu\nu} e^\nu_b$. Subiendo el índice ν, tenemos:

$$\eta^{ab} e^\mu_a e^\nu_b = g^{\mu\nu}. \tag{1.264}$$

Las ecuaciones (1.263) y (1.264) expresan las relaciones de ortogonalidad entre las componentes de la tétrada, tanto en el espacio-tiempo como en el espacio interno. La métrica interna permite, además, subir y bajar índices internos:

$$e^a_\mu = \eta^{ab} e^\nu_b g_{\mu\nu}. \tag{1.265}$$

En consecuencia, las relaciones de ortogonalidad muestran que e^a_μ es la inversa de e^μ_a. La denominaremos cotétrada.

En términos de espacios vectoriales, donde M_p designa al espacio interno en un punto $p \in M$ cualquiera, la tétrada evaluada en dicho punto constituye una isometría $e^\mu_a(p) : M_p \to T_pM / v^a \to e^\mu_a(p) v^a$ con mapa inverso $e^a_\mu : T_pM \to M_p$. Esto implica que los índices espacio-temporales pueden reemplazarse por índices internos sin modificar la geometría, y recíprocamente, por medio de contracciones con la tétrada y la cotétrada. Entonces, para cualquier campo tensorial $T^{\mu_1 \dots \mu_n}{}_{\nu_1 \dots \nu_m}$ definimos $T^{a_1 \dots a_n}{}_{b_1 \dots b_m} = e^{a_1}_{\mu_1} \dots e^{a_n}_{\mu_n} e^{\nu_1}_{b_1} \dots e^{\nu_m}_{b_m} T^{\mu_1 \dots \mu_n}{}_{\nu_1 \dots \nu_m}$.

La ecuación (1.264) permite observar que toda la información contenida en la métrica se encuentra también en la tétradas, puesto que la primera es pasible de ser reconstruida a partir de estas últimas. En consecuencia, las tétradas pueden interpretarse como una descripción fundamental de la geometría, siendo la métrica un concepto derivado. Sin embargo, las tétradas tienen un total de 16 componentes independientes, mientras que la métrica posee 10. La respuesta para esta diferencia reside en que al aplicar una transformación de Lorentz sobre las tétradas, $e^\mu_a \to \Lambda^b_a e^\mu_b$, la métrica g^{ab} permanece invariante:

$$\eta^{ab} \Lambda^c_a \Lambda^d_b e^\mu_c e^\nu_d = \Lambda^T \eta \Lambda^{cd} e^\mu_c e^\nu_d = \eta^{cd} e^\mu_c e^\nu_d = g^{\mu\nu}. \tag{1.266}$$

Estas transformaciones de Lorentz dan lugar a una nueva libertad gauge: el gauge interno. Luego, los seis nuevos grados de libertad corresponden a los seis parámetros independientes de una transformación de Lorentz.

Conexiones

Como se muestra en § B.4, para campos vectoriales sobre una variedad curva, el transporte paralelo no está definido de manera única, a menos que se especifique una conexión. En la sección 1.1.1 definimos la conexión de Levi-Civita, la cual actúa sobre campos vectoriales espacio-temporales como: $\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\rho} v^\rho$. En el formalismo que hemos introducido aparece un nuevo tipo de campo vectorial, v^a, cuya derivada covariante debe definirse de manera independiente a como se define para v^μ. Así, para especificar la derivada covariante de campos vectoriales internos es necesaria una *conexión espinorial* $\omega^a_{\mu b}$, análoga a $\Gamma^\nu_{\mu\rho}$ tal que:

$$D_\mu v^a = \nabla_\mu v^a + \omega^a_{\mu b} v^b, \tag{1.267}$$

para un campo vectorial interno cualquiera v^a. En general, para un tensor con índices espacio-temporales e internos se cumple:

$$\begin{aligned} D_\mu T^{a_1 \dots a_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} &= \partial_\mu T^{a_1 \dots a_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} - \Gamma^\rho_{\mu\nu_k} T^{a_1 \dots a_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_{k-1} \rho \nu_{k+1} \nu_n} \\ &\quad + \omega^{a_l}_{b\mu} T^{a_1 \dots a_{l-1} b a_{l+1} \dots a_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \end{aligned} \tag{1.268}$$

$$= \nabla_\mu T^{a_1 \dots a_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} + \omega^{a_l}_{b\mu} T^{a_1 \dots a_{l-1} b a_{l+1} \dots a_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}, \tag{1.269}$$

Hay que resaltar que la métrica de Minkowski es un escalar desde la perspectiva de la conexión de Levi-Civita, pues ésta actúa sobre índices espacio-temporales; sin embargo, varía bajo la acción de la derivada covariante D_μ

$$D_\mu \eta_{ab} = \nabla_\mu \eta_{ab} - \omega^c_{\mu a}\eta_{cb} - \omega^c_{\mu b}\eta_{ac} = -\omega_{\mu ba} - \omega_{\mu ab}, \tag{1.270}$$

a menos que $\omega_{\mu ba} = -\omega_{\mu ab}$. Por lo tanto, aquellas conexiones que dejen la métrica de Minkowski invariante deben ser antisimétricas en sus índices internos, lo que implica que $v^\mu \omega^a_{\mu b} \in \mathfrak{so}(1,3)$[5].

Así, hemos construido una derivada covariante D_μ que preserva la métrica interna, así como la métrica espacio-temporal (pues ∇_μ obedece esta propiedad). No obstante, en el formalismo tetrádico, no describiremos la geometría del espacio-tiempo mediante el uso de métricas sino de tétradas y cotétradas. Por consiguiente, es razonable exigir la compatibilidad de la derivada covariante con las cotétradas:

$$D_\mu e^a_\nu = 0 \tag{1.271}$$

Así,

$$D_\mu e^a_\nu = \nabla_\mu e^a_\nu + \omega^a_{\mu b} e^b_\nu = 0 \tag{1.272}$$

con lo cual,

$$\omega^a_{\mu b} = -e^\nu_b \nabla_\mu e^a_\nu. \tag{1.273}$$

Por otra parte,

$$\nabla_\mu (e^a_\nu e^\nu_b) = \nabla_\mu (\delta^a_b) \to e^\nu_b \nabla_\mu e^a_\nu = -e^a_\nu \nabla_\mu e^\nu_b. \tag{1.274}$$

Finalmente, podemos escribir las componentes de la conexión espinorial en función de las tétradas y cotétradas:

$$\omega^a_{\mu b} = e^a_\nu \nabla_\mu e^\nu_b. \tag{1.275}$$

Nuevas variables

Para construir la teoría canónica asumamos que el espacio-tiempo es globalmente hiperbólico ($M = \mathbb{R} \times \Sigma$). Sean $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ la métrica inducida y $K_{\mu\nu} = 1/2\mathcal{L}_n h_{\mu\nu}$ la curvatura extrínseca. En términos de las tétradas, la métrica inducida puede escribirse como

$$h_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu + n_\mu n_\nu = -e^0_\mu e^0_\nu + \delta_{ij} e^i_\mu e^j_\nu + n_\mu n_\nu, \tag{1.276}$$

donde los índices i y j toman los valores 1, 2 y 3. La expresión para $h_{\mu\nu}$ sugiere la fijación de un gauge de forma de eliminar algunos grados de libertad no dinámicos. Impondremos, por tanto, que la componente e^0_μ coincida con el vector normal n_μ. Esta elección gauge, denominado gauge temporal, reduce la simetría del gauge local al grupo de las rotaciones espaciales $SO(3)$.

Implementando el gauge temporal y proyectando la métrica inducida sobre la hipersuperficie, tenemos

$$h_{\alpha\beta} = \delta_{ij} e^i_\alpha e^j_\beta, \tag{1.277}$$

donde los índices griegos toman los valores 1, 2, 3 mientras que los índices latinos están relacionados con la simetría local $SO(3)$. Se puede observar que la condición de ortogonalidad $n^\mu h_{\mu\nu} = 0$ se satisface de manera automática.

Considerando la descomposición de la métrica espacio-temporal (1.205): $ds^2 = e^a_\mu e_{a\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + h_{\alpha\beta}(N^\alpha dt + dx^\alpha)(N^\beta dt + dx^\beta)$, podemos escribir las componentes de las tétradas y su inversa en el sistema de coordenadas (t, x) como:

$$e^a_\mu = \begin{pmatrix} N & N^\alpha \\ 0 & e^i_\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad e^\nu_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & 0 \\ -\frac{N^\beta}{N} & e^\beta_j \end{pmatrix}. \tag{1.278}$$

Es importante resaltar que la trimétrica (1.277) es invariante bajo rotaciones locales de la base de tétradas, lo que agrega tres grados de libertad extra con respecto a la trimétrica de la formulación ADM. En consecuencia, el número de vínculos de la teoría canónica escrito en el formalismo tetrádico debe incrementarse. Concretamente, deberíamos tener tres vínculos más, de manera de reabsorber los grados de libertad gauge de la simetría $SO(3)$.

Para hallar este vínculo, en primer lugar, definimos la 1-forma

$$K^i_\alpha \equiv X^i_a X^\mu_\alpha \omega^{a0}_\mu, \tag{1.279}$$

donde X^μ_α son las componentes del proyector de M a Σ. Análogamente, X^i_a son las componentes del mapa inverso que proyecta desde el espacio interno cuadridimensional al tridimensional. La 1-forma K^i_α puede reescribirse en términos de las tétradas y n^μ, utilizando la ecuación (1.275) :

$$K^i_\alpha = X^i_a X^\mu_\alpha e^{\nu a}(\nabla_\mu e^0_\nu) = X^\mu_\alpha X^\beta_\nu e^i_\beta (\nabla_\mu n^\nu). \tag{1.280}$$

Del mismo modo que las tétradas proyectadas en Σ (también llamadas tríadas) están relacionadas con la métrica espacial, la 1-forma K^i_α está relacionada con la curvatura extrínseca. Sea $\mathcal{K}$ una 2-forma en Σ definida por

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} = \delta_{ik} K^i_\alpha e^k_\beta, \tag{1.281}$$

en lo que sigue, mostraremos que la parte simétrica de la 2-forma $\mathcal{K}$ coincide con la curvatura extrínseca. Comencemos reescribiendo $\mathcal{K}$ a partir de (1.280),

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} = \delta_{ij} X^\mu_\alpha X^\gamma_\nu (\nabla_\mu n^\nu) e^i_\gamma e^j_\beta. \tag{1.282}$$

Por su parte, la curvatura extrínseca puede reformularse como

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n(\delta_{ij} e^i_\alpha e^j_\beta) \tag{1.283}$$

$$= \frac{1}{2}\delta_{ij}(e^j_\beta \mathcal{L}_n e^i_\alpha + e^i_\alpha \mathcal{L}_n e^j_\beta) \tag{1.284}$$

$$= \frac{1}{2}\delta_{ij}(e^j_\beta e^i_\nu (\nabla_\alpha n^\nu) + e^j_\nu e^i_\alpha (\nabla_\beta n^\nu)) \tag{1.285}$$

$$= \frac{1}{2}(e^j_\beta X^\gamma_\nu e^i_\gamma X^\mu_\alpha \nabla_\mu n^\nu + e^i_\beta X^\gamma_\nu e^j_\gamma X^\mu_\alpha \nabla_\mu n^\nu). \tag{1.286}$$

Por lo tanto, en efecto, $K_{\alpha\beta} = \mathcal{K}_{(\alpha\beta)}$. Exigiremos entonces que:

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}, \tag{1.287}$$

con lo cual, imponemos un nuevo vínculo sobre la 1-forma K^i_α:

$$\mathcal{K}_{[\alpha\beta]} = K^i_{[\alpha} e_{\beta]i} \approx 0. \tag{1.288}$$

Así, $\mathcal{K}_{[\alpha\beta]}$ es una matriz 3×3 antisimétrica que se anula, con lo cual reabsorbe exactamente los tres grados de libertad que habíamos introducido al seleccionar las tétradas como variables fundamentales.

Definimos, a continuación, las tríadas densitizadas como

$$E^\alpha_i = e e^\alpha_i, \tag{1.289}$$

donde $e = det[e^i_\alpha] = (det[e^\alpha_i])^{-1}$. La ecuación (1.288) puede reescribirse en términos de las tríadas densitizadas:

$$\mathcal{R}_{ij} = e e^\alpha_i e^\beta_j \mathcal{K}_{[\alpha\beta]} = e e^\alpha_i e^\beta_j K^k_{[\alpha} e_{\beta]k} = K_{\alpha[i} E^\alpha_{j]} \approx 0. \tag{1.290}$$

Las variables canónicas de la formulación ADM pueden también expresarse en función de estas nuevas variables

$$h_{\alpha\beta} = \delta_{ij} e^i_\alpha e^j_\beta = \delta_{ij} e^2 E^i_\alpha E^j_\beta = \delta_{ij} E E^i_\alpha E^j_\beta, \tag{1.291}$$

donde hemos usado que $E = \det(E^\alpha_i) = \det(e e^\alpha_i) = e^3 \det(e^\alpha_i) = e^2$. Por otra parte

$$p^{\alpha\beta} = \sqrt{h}(K^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} K^\gamma_\gamma) = \sqrt{h}(K^{i(\alpha} e^{\beta)i} - h^{\alpha\beta} K^{i\gamma} e_{i\gamma}) \tag{1.292}$$

$$= \sqrt{E}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{K^{i\alpha} E^\beta_i + K^{i\beta} E^\alpha_i}{2} - \frac{1}{\sqrt{E}} \delta^{ij} E^\alpha_i E^\beta_j K^{i\gamma} E_{i\gamma}\right) \tag{1.293}$$

$$= \frac{K^{i\alpha} E^\beta_i + K^{\beta i} E^\alpha_i}{2} - \delta^{ij} E^\alpha_i E^\beta_j K^{i\gamma} E_{i\gamma}. \tag{1.294}$$

Asimismo,

$$2\delta^{(\alpha}_\delta E^{\beta)i} E^j_\gamma E^{[\gamma}_i K^{\delta]}_j = 2\frac{\delta^\alpha_\delta E^{\beta i} + \delta^\beta_\delta E^{\alpha i}}{2} E^j_\gamma \frac{E^\gamma_i K^\delta_j - E^\delta_i K^\gamma_j}{2} \tag{1.295}$$

$$\frac{K^{i\alpha} E^\beta_i + K^{\beta i} E^\alpha_i}{2} - \delta^{ij} E^\alpha_i E^\beta_j K^{i\gamma} E_{i\gamma}. \tag{1.296}$$

donde nos hemos valido de las relaciones de ortogonalidad de las tétradas. Luego, el momento canónico conjugado de la métrica inducida puede escribirse como

$$p^{\alpha\beta} = 2\delta^{(\alpha}_\delta E^{\beta)i} E^j_\gamma E^{[\gamma}_i K^{\delta]}_j. \tag{1.297}$$

En términos de estas nuevas variables el vínculo de difeomorfismos puede reescribirse como:

$$C_\alpha = -2 D_\beta [K^i_\alpha E^\beta_i - \delta^\beta_\alpha K^i_\gamma E^\gamma_i], \tag{1.298}$$

donde hemos utilizado que $\delta^\beta_\alpha = \delta^j_i e^i_\alpha e^\beta_j = \delta^j_i E^i_\alpha E^\beta_j = E^i_\alpha E^\beta_i$ y que como $K^i_{[\alpha} e_{\beta]i} \approx 0$ entonces $K^i_\alpha E^\beta_i \approx K^\beta_i E^i_\alpha$. Del mismo modo, se puede reescribir el vínculo hamiltoniano:

$$C = \sqrt{E} E^\alpha_i E^\beta_j (K^j_\alpha K^i_\beta - K^i_\alpha K^j_\beta) - \frac{1}{\sqrt{E}} \, {}^3R(E), \tag{1.299}$$

donde el escalar de Ricci ${}^3R(E)$ es considerado como una función de las tétradas densitizadas. En este punto, es importante demostrar que la dinámica canónica,

descrita por las nuevas variables en el espacio de fases extendido (en el sentido de que el espacio de fases asociado a las nuevas variables tiene seis dimensiones más con respecto al ADM), es equivalente a la descrita por las variables ADM usuales. Para ello alcanza con observar, en primer lugar, que el espacio de fases viene equipado con la siguiente estructura simpléctica

$$\{E^i_\gamma(t,x), K^\delta_j(t,y)\} = \delta^i_j \delta^\delta_\gamma \delta^3(x-y), \tag{1.300}$$

$$\{E^i_\gamma(t,x), E^j_\delta(t,y)\} = \{K^\gamma_i(t,x), K^\delta_j(t,y)\} = 0. \tag{1.301}$$

Luego, observamos que la versión suavizada del vínculo (1.290),

$$\mathcal{R}(\alpha) = \int_\Sigma d^3x \alpha^{ik} K_{\alpha i} E^\alpha_j, \tag{1.302}$$

donde α^{ik} es una función matricial antisimétrica arbitraria, genera rotaciones $SO(3)$. De hecho, calculando el álgebra de Poisson generada por el vínculo rotacional, obtenemos:

$$\{\mathcal{R}(\alpha), \mathcal{R}(\alpha')\} = \left\{ \int \alpha^{ij} K_{\alpha i}(x,t) E^\alpha_j(x,t) d^3x, \int \alpha'^{kl} K_{\beta k}(y,t) E^\beta_l(y,t) d^3y \right\} \tag{1.303}$$

$$= \int d^3x d^3y \alpha^{ij} \alpha'^{kl} \left(K_{\alpha i}(x,t) \{E^\alpha_j(x,t), K_{\beta k}(y,t)\} E^\beta_l \right) + \int d^3x d^3y \alpha^{ij} \alpha'^{kl} \left(\{K_{\alpha i}(x,t), E^\beta_l(y,t)\} K_{\beta k}(y,t) E^\alpha_j(x,t) \right) \tag{1.304}$$

$$= \int d^3x ((\alpha\alpha')^{il} K_{\alpha i}(x,t) E^\alpha_l(x,t) - (\alpha'\alpha)^{kj} K_{\alpha k}(x,t) E^\alpha_j(x,t)) \tag{1.305}$$

$$= \int d^3x [\alpha, \alpha']^{ij} K_{\alpha i} E^\alpha_j = \mathcal{R}([\alpha, \alpha']). \tag{1.306}$$

que es exactamente el álgebra de las rotaciones espaciales $SO(3)$. Cualquier corchete de Poisson entre el vínculo rotacional y las variables canónicas ADM se anula, puesto que las mismas son manifiestamente invariantes bajo rotaciones. Por depender únicamente de las tétradas, el tensor $h_{\alpha\beta}$ satisface la relación:

$$\{h_{\alpha\beta}(t,x), h_{\gamma\delta}(t,y)\} = 0. \tag{1.307}$$

El momento canónico, por otra parte, cumple:

$$\{p^{\alpha\beta(t,x)}, p^{\gamma\delta}(t,y)\} = -\frac{\sqrt{h}}{8} [h^{\alpha\gamma}\mathcal{R}^{\beta\delta} + h^{\alpha\delta}\mathcal{R}^{\beta\gamma} + h^{\beta\gamma}\mathcal{R}^{\alpha\delta} + h^{\beta\delta}\mathcal{R}^{\alpha\gamma}](t,x)\delta^3(x-y). \tag{1.308}$$

Además,

$$\{p^{\alpha\beta}(t,x), h_{\gamma\delta}(t,y)\} = \delta^\alpha_{(\gamma}\delta^\beta_{\delta)}\delta^3(x-y). \tag{1.309}$$

Vemos entonces que, siempre que se satisfaga el vínculo rotacional, el álgebra generada por las variables (E^i_α, K^α_i) es el álgebra usual. Por lo tanto, la dinámica generada por las nuevas variables es equivalente a la ADM.

1.5.2. Variables de Ashtekar

Las transformaciones $E^\alpha_j \to E^\alpha_j/\beta$ y $K^j_\alpha \to \beta K^j_\alpha$ son canónicas, puesto que no modifican la estructura simpléctica de (E^i_α, K^α_i). El parámtero β se denomina parámetro de Barbero-Immirzi (BI) y, en general, es un número complejo. El vínculo rotacional permanece invariante bajo este reescalado:

$$\mathcal{R}_k = \epsilon_{kij}\mathcal{R}^{ij} = \epsilon_{kij}\ {}^{(\beta)}K^i_\alpha\ {}^{(\beta)}E^{\alpha j} \approx 0, \tag{1.310}$$

donde hemos utilizado las propiedades de antisimetría del símbolo de Levi-Civita y hemos denotado a las variables reescaladas por el parámetro BI como ${}^{(\beta)}K^i_\alpha$ y ${}^{(\beta)}E^\alpha_i$. El vector $\mathcal{R}_k$ contiene la misma información que $\mathcal{R}_{ij}$ puesto que ésta es una matriz 3×3 antisimétrica.

Introducimos ahora la conexión de componentes Γ^{ij}_α, asociada con la simetría $SO(3)$, de modo que la derivada covariante de un tensor que conste tanto de índices espacio-temporales como de índices internos es

$$\begin{aligned} D_\beta T^{i_1\ldots i_m}{}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} &= \partial_\beta\beta T^{i_1\ldots i_m}{}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha_k} T^{i_1\ldots i_m}{}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\gamma\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n} \\ &\quad + \Gamma^{i_l}{}_{j\beta} T^{i_1\ldots i_{l-1}j i_{l+1}\ldots i_m}{}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}. \end{aligned} \tag{1.311}$$

Como antes, requerimos que el operador derivada covariante sea compatible con la base de tétradas:

$$D_\beta e^i_\alpha = 0 \implies \Gamma^{ij}{}_\alpha = e^{\beta i}\nabla_\alpha e^j_\beta. \tag{1.312}$$

La curvatura 2-forma, $R^{ij}_{\alpha\beta}$ se obtiene considerando los conmutadores de dos derivadas covariantes sobre un escalar que toma valores en $SO(3)$, i.e.:

$$R^i_{\alpha\beta j}\nu^j = [D_\alpha, D_\beta]\nu^i \implies R^{ik}_{\alpha\beta} = 2\partial_{[\alpha}\Gamma^{ik}{}_{\beta]}. \tag{1.313}$$

Por otro lado, considerando que $e = \sqrt{h}$ implica $\nabla_\alpha e = 0$ y la compatibilidad de la derivada covariante con las tétradas se puede verificar que

$$D_\alpha E^\alpha_j = \nabla_\alpha(e e^\beta_j) - \Gamma^k{}_{j\alpha} e e^\beta_k = e D_\alpha e^\beta_j = 0. \tag{1.314}$$

Además, como para cualquier campo vectorial V^μ se satisface: $\sqrt{g}\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu(\sqrt{g}V^\mu)$, entonces $\partial_\alpha E^\alpha_j = \partial_\alpha(e e^\alpha_j) = \nabla_\alpha E^\alpha_j$, lo que da lugar a la relación

$$D_\alpha E^\alpha_j = \partial_\alpha E^\alpha_j - \Gamma^k{}_{j\alpha} E^\alpha_k = \partial_\alpha E^\alpha_j + \epsilon^l_{jk}\Gamma^k_\alpha E^\alpha_j = 0, \tag{1.315}$$

donde hemos definido $\Gamma^k_\alpha \equiv -1/2\epsilon^k_{ij}\Gamma^{ij}{}_\alpha$. Podemos reescribir dicha cantidad en función de las tríadas:

$$\Gamma^i_\alpha = \frac{1}{2}\epsilon^i_{jk}E^{\beta k}[\partial_\beta E^j_\alpha - \partial_\alpha E^j_\beta + E^{\gamma j}E_{\alpha l}\partial_\beta E^l_\gamma] \tag{1.316}$$

$$+ \frac{1}{4}\epsilon^i_{jk}E^{\beta k}\left[2E^j_\alpha\frac{\partial_\beta E^{-1}}{E^{-1}} - E^j_\beta\frac{\partial_\alpha E^{-1}}{E^{-1}}\right]. \tag{1.317}$$

De esta expresión se deduce que el reescalado $E^\alpha_j \to {}^{(\beta)}E^\alpha_j = E^\alpha_j/\beta$ no modifica a Γ^k_α . Utilizando la igualdad fuerte (1.315) podemos reemplazar el vínculo rotacional por el denominado *vínculo de Gauss*, G_k:

$$G_k = D_\alpha E^\alpha_k + \mathcal{R}_k = \partial_\alpha\ {}^{(\beta)}E^\alpha_k + \epsilon^j_{ki}\Gamma^i_\alpha\ {}^{(\beta)}E^\alpha_j + \epsilon^j_{ki}\ {}^{(\beta)}K^i_\alpha\ {}^{(\beta)}E^\alpha_j \tag{1.318}$$

$$= \partial_\alpha\ {}^{(\beta)}E^\alpha_k + \epsilon^j_{ki}\ {}^{(\beta)}\mathcal{A}^i_\alpha\ {}^{(\beta)}E^\alpha_j \approx 0, \tag{1.319}$$

donde hemos introducido la conexión de Ashtekar-Barbero: ${}^{(\beta)}\mathcal{A}^i_\alpha = \Gamma^i_\alpha + \beta K^i_\alpha$.

Se puede verificar que la transformación de variables

$$(K^i_\alpha, E^\beta_k) \to ({}^{(\beta)}\mathcal{A}^i_\alpha,\ {}^{(\beta)}E^\gamma_k) \tag{1.320}$$

es canónica, puesto que la estructura simpléctica permanece inalterada:

$$\{\ {}^{(\beta)}E^i_\gamma(t,x),\ {}^{(\beta)}A^\delta_j(t,y)\} = \delta^i_j\delta^\delta_\gamma\delta^3(x-y) \tag{1.321}$$

$$\{\ {}^{(\beta)}E^i_\gamma(t,x),\ {}^{(\beta)}E^j_\delta(t,y)\} = \{\ {}^{(\beta)}A^\gamma_i(t,x),\ {}^{(\beta)}A^\delta_j(t,y)\} = 0. \tag{1.322}$$

La curvatura asociada a la nueva conexión es:

$$\mathcal{F}^k_{\alpha\beta} = 2\partial_{[\alpha}\ {}^{(\beta)}\mathcal{A}^k_{\beta]} + \epsilon^k_{ij}\ {}^{(\beta)}\mathcal{A}^i_\alpha\ {}^{(\beta)}\mathcal{A}^j_\beta \tag{1.323}$$

$$= R^k_{\alpha\beta} + \epsilon^k_{ij}\ {}^{(\beta)}K^i_\alpha\ {}^{(\beta)}K^j_\beta + \epsilon^k_{ij}\Gamma^i_\alpha\ {}^{(\beta)}K^j_\beta + \epsilon^k_{ij}\ {}^{(\beta)}K^i_\alpha\Gamma^j_\beta + 2\partial_{[\alpha}\ {}^{(\beta)}K^k_{\beta]}. \tag{1.324}$$

donde $R^k_{\alpha\beta} = \partial_{[\alpha}\Gamma^k_{\beta]} + \epsilon^k_{ij}\Gamma^i_\alpha\Gamma^j_\beta$ y, además, $R^{ij}_{\alpha\beta} = \epsilon^{ij}_k R^k_{\alpha\beta}$.
Por otro lado, tenemos que

$$D_{[\alpha}\ {}^{(\beta)}K^k_{\beta]}$$
$$= \partial_{[\alpha}\ {}^{(\beta)}K^k_{\beta]} + (-\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\ {}^{(\beta)}K^k_\gamma + \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\ {}^{(\beta)}K^k_\gamma) + (\Gamma^k{}_{l\gamma}\ {}^{(\beta)}K^l_\beta - \Gamma^k{}_{l\beta}\ {}^{(\beta)}K^l_\alpha). \tag{1.325}$$

La suma del segundo y tercer sumando en (1.325) es cero, pues lo símbolos de Christoffel son simétricos en sus índices inferiores. Además,

$$\Gamma^k_\alpha = -\frac{1}{2}\epsilon^k_{ij}\Gamma^{ij}{}_\alpha = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\Gamma_{ij\alpha}. \tag{1.326}$$

Multiplicando por ϵ_{kmn}:

$$\epsilon_{kmn}\Gamma^k_\alpha = -\frac{1}{2}\epsilon_{kmn}\epsilon^{kij}\Gamma_{ij\alpha} = -\frac{1}{2}(\delta^i_m\delta^j_n - \delta^j_m\delta^i_n)\Gamma_{ij\alpha} = \Gamma_{nm\alpha}, \tag{1.327}$$

de lo que se deduce:

$$\Gamma^m{}_{n\alpha} = \epsilon^m_{kn}\Gamma^k_\alpha. \tag{1.328}$$

Luego,

$$\epsilon^k_{ij}\Gamma^i_\alpha\ {}^{(\beta)}K^j_\beta = \Gamma^k_{j\alpha}\ {}^{(\beta)}K^j_\beta. \tag{1.329}$$

A partir de esta última relación podemos reescribir la curvatura asociada a la conexión de Ashtekar-Barbero como:

$$\mathcal{F}^k_{\alpha\beta} = R^k_{\alpha\beta} + 2D_{[\alpha}\ {}^{(\beta)}K^k_{\beta]} + \epsilon^k_{ij}\ {}^{(\beta)}K^i_\alpha\ {}^{(\beta)}K^j_\beta. \tag{1.330}$$

Una fórmula útil surge de reescribir la identidad de Bianchi cíclica como

$$\epsilon^{ij}_k R^k_{[\alpha\beta}E_{\gamma]j} = 0, \tag{1.331}$$

equivalentemente:

$$R^j_{\alpha\beta}E^\beta_j = 0. \tag{1.332}$$

Haciendo uso de esta identidad, conjuntamente con las ecuaciones (1.323) y (1.330) pueden encontrarse expresiones para los vínculos en función de las variables de Ashtekar-Barbero. Contrayendo la ecuación (1.330) con ${}^{(\beta)}E^{\beta}_{k}$:

$$\mathcal{F}^{k}_{\alpha\beta}\ {}^{(\beta)}E^{\beta}_{k} = R^{k}_{\alpha\beta}\ {}^{(\beta)}E^{\beta}_{j} + 2D_{[\alpha}\ {}^{(\beta)}K^{k}_{\beta]}\ {}^{(\beta)}E^{\beta}_{k} + \epsilon^{k}_{ij}\ {}^{(\beta)}K^{i}_{\alpha}\ {}^{(\beta)}K^{j}_{\beta}\ {}^{(\beta)}E^{\beta}_{k} \quad (1.333)$$

El primer sumando es cero, debido a la relación (1.332). Utilizando la definición de $\mathcal{R}_k$ y la ecuación fuerte (1.315), el tercer sumando se puede reescribir como:

$$\epsilon^{k}_{ij}\ {}^{(\beta)}K^{i}_{\alpha}\ {}^{(\beta)}K^{i}_{\beta}\ {}^{(\beta)}E^{\beta}_{k} = {}^{(\beta)}K^{i}_{\alpha}\mathcal{R}_i = {}^{(\beta)}K^{i}_{\alpha}\mathcal{G}_i. \quad (1.334)$$

Por otra parte,

$$2D_{[\alpha}\ {}^{(\beta)}K^{k}_{\beta]}\ {}^{(\beta)}E^{\beta}_{k} = C_{\alpha}. \quad (1.335)$$

Así,

$$C_{\alpha} = \mathcal{F}^{k}_{\alpha\beta}\ {}^{(\beta)}E^{\beta}_{k} - {}^{(\beta)}K^{i}_{\alpha}G_i. \quad (1.336)$$

De forma similar, se puede mostrar que el vínculo hamiltoniano toma el aspecto siguiente:

$$C = \beta^2\sqrt{E}\ {}^{(\beta)}E^{\alpha}_{i}\ {}^{(\beta)}E^{\gamma}_{j}[\epsilon^{ij}_{k}\mathcal{F}^{k}_{\alpha\gamma} - 2(\beta^2+1)K^{i}_{[\alpha}K^{j}_{\gamma]}] \quad (1.337)$$

$$+ \beta^2\sqrt{E}\ {}^{(\beta)}E^{\gamma}_{j}D_{\gamma}G^{j}. \quad (1.338)$$

Luego, los vínculos dados por las ecuaciones (1.337), (1.336), (1.318) son completamente equivalentes a:

$$G_i = D_{\alpha} \equiv \partial_{\alpha}E^{\alpha}_{i} + \epsilon^{k}_{ij}\ {}^{(\beta)}\mathcal{A}^{j}_{\alpha}E^{\alpha}_{k} \approx 0 \quad (1.339)$$

$$C_{\alpha} = E^{\beta}_{i}\mathcal{F}^{i}_{\alpha\beta} \approx 0 \quad (1.340)$$

$$C = \sqrt{E}E^{\alpha}_{i}E^{\gamma}_{j}[\epsilon^{ij}_{k}\mathcal{F}^{k}_{\alpha\gamma} - 2(\beta^2+1)K^{i}_{[\alpha}K^{j}_{\gamma]}] \approx 0. \quad (1.341)$$

Acción de los vínculos

De la misma manera que los vínculos (1.234) y (1.235) generan difeomorfismos en la dirección normal a Σ y en las direcciones espaciales respectivamente, así también actúan los vínculos (1.341) y (1.340) en las nuevas variables E^{α}_{i} y $\mathcal{A}^{i}_{\alpha}$. Por su parte, el vínculo de Gauss genera rotaciones correspondientes al grupo $SO(3)$.

Para calcular los corchetes de Poisson de los vínculos con las variables dinámicas, introducimos, primeramente, las versiones suavizadas de los mismo. El vínculo de Gauss:

$$C_G(\Lambda) \equiv \int_{\Sigma} d^3x\Lambda^{i}G_i, \quad (1.342)$$

donde Λ es un campo suave en Σ que toma valores en $\mathfrak{so}(3)$. El vínculo de difeomorfismos:

$$C_{\text{diff}}(\vec{N}) \equiv \int_{\Sigma} d^3x\left(N^{\alpha}E^{\beta}_{i}\mathcal{F}^{i}_{\alpha\beta} - (N^{\alpha}A^{i}_{\alpha})G_i\right), \quad (1.343)$$

donde $\vec{N}$ es un campo suave sobre Σ. En la definición anterior se sumó un término proporcional al vínculo de Gauss, eliminando una parte proporcional al mismo, que genera rotaciones internas. Y el vínculo hamiltoniano suavizado:

$$C(N) \equiv \int_{\Sigma} d^3xN\frac{1}{\sqrt{det(E^{i}_{\alpha})}}E^{\alpha}_{i}E^{\beta}_{j}[\epsilon^{ij}_{k}\mathcal{F}^{k}_{\alpha\beta} - 2(\beta^2+1)K^{i}_{[\alpha}K^{j}_{\beta]}. \quad (1.344)$$

Los corchetes de Poisson del vínculo de Gauss con las variables dinámicas son:

$$\{\mathcal{A}^i_\alpha, C_G(\Lambda)\} = -D_\alpha \Lambda^i, \tag{1.345}$$
$$\{E^\alpha_i, C_G(\Lambda)\} = \epsilon^k_{ij}\Lambda^j E^\alpha_k. \tag{1.346}$$

Lo que demuestra que, en efecto, el vínculo de Gauss genera rotaciones en el espacio interno. Los corchetes con el vínculo de difeomorfismos suavizado están dados por:

$$\{\mathcal{A}^i_\alpha, C_{\text{diff}}(\vec{N})\} = \mathcal{L}_{\vec{N}}\mathcal{A}^i_\alpha, \tag{1.347}$$
$$\{E^\alpha_i, C_{\text{diff}}(\vec{N})\} = \mathcal{L}_{\vec{N}}E^\alpha_i. \tag{1.348}$$

Por lo tanto, genera difeomorfismos espaciales en la dirección $\vec{N}$. Por último, el vínculo hamiltoniano genera difeomorfismos en la dirección perpendicular a Σ:

$$\{\mathcal{A}^i_\alpha, C(N)\} \approx \mathcal{L}_{Nn}\mathcal{A}^i_\alpha, \tag{1.349}$$
$$\{E^\alpha_i, C(N)\} \approx \mathcal{L}_{Nn}E^\alpha_i. \tag{1.350}$$

Los símbolos de igualdad débil se deben a que en las igualdades aparecen otros sumandos que se anulan sobre la superficie de vínculo.

Álgebra de los vínculos

El álgebra de los vínculos presentados en el apartado anterior se muestra a continuación:

$$\{C_G(\Lambda), C_G(\lambda')\} = C_G[\Lambda, \Lambda'], \tag{1.351}$$
$$\{C_G(\Lambda), C_{\text{diff}}(\vec{N})\} = -C_G(\mathcal{L}_{\vec{N}}\Lambda), \tag{1.352}$$
$$\{C_G(\Lambda), C(N)\} = 0, \tag{1.353}$$
$$\{C_{\text{diff}}(\vec{N}), C_{\text{diff}}(\vec{N}')\} = C_{\text{diff}}([\vec{N}, \vec{N}']) \tag{1.354}$$
$$\{C_{\text{diff}}(\vec{N}), C(M)\} = -C(\mathcal{L}_N M), \tag{1.355}$$
$$\begin{aligned}\{C(N), C(M)\} = &-4(C_{\text{diff}}(\vec{S}) + C_G(S^\alpha A^i_\alpha)) \\ &- 4\left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right) C_G\left(\frac{[E^i_\alpha \partial^\alpha N, E^i_\beta \partial^\beta M]}{h}\right),\end{aligned} \tag{1.356}$$

donde

$$S^\alpha = (N\partial_\beta M - M\partial_\beta N)\frac{E^\beta_i E^{\alpha i}}{h}. \tag{1.357}$$

Capítulo 2

Simetría esférica

En este capítulo presentamos las reducciones que se imponen sobre el formalismo de Ashtekar en espacio-tiempos esféricamente simétricos. Mostramos además que mediante una combinación lineal con el vínculo de difeomorfismos y un reescalado, el vínculo hamiltoniano se abelianiza de modo que el álgebra de los vínculos constituye un álgebra de Lie [23], lo que viabiliza el método de cuantización canónica, como veremos en el capítulo 5.

2.1. Variables de Ashtekar

Consideremos un espacio cuadridimensional M que puede foliarse por hipersuperficies tipo espacio Σ_t, etiquetadas por un parámetro tipo tiempo t, donde la topología de cada una de las hipersuperficies Σ_t es de la forma $\Sigma = I \times S^2$, e I es una variedad unidimensional caracterizada por una coordenada x (la coordenada radial) y S^2 es una 2-esfera de coordenadas θ y ϕ.

Supongamos, además, que Σ_t admite simetría esférica, a saber, que existen tres vectores de Killing de S^2 que forman el álgebra $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$. En este caso, la conexión de Ashtekar adquiere la siguiente expresión reducida:

$$\begin{aligned} A = A_\alpha^i \tau_i dx^\alpha = A_x(x)\tau_3 dx + (A_1(x)\tau_1 + A_2(x)\tau_2)d\theta \\ + [(A_1(x)\tau_2 - A_2(x)\tau_1)\sin\theta + \tau_3\cos\theta]d\phi, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde A_x, A_1 y A_2 son funciones de x, $\tau_i = -i\sigma_i/2$, y las σ_i son las matrices de Pauli (i.e. generadores ortonormales de $SU(2)$). Notar que $\tau_i \wedge \tau_j \equiv [\tau_i, \tau_j] = \epsilon_{ij}{}^k \tau_k$. En (2.1), y de aquí en adelante, omitiremos el índice β en la conexión de Ashtekar. Análogamente, las tríadas densitizadas adquieren la forma:

$$\begin{aligned} \widetilde{E} = \widetilde{E}_i^\alpha \tau^i \partial_a = E^x(x)\tau_3 \sin\theta \, \frac{\partial}{\partial x} + (E^1(x)\tau_1 + E^2(x)\tau_2)\sin\theta \, \frac{\partial}{\partial\theta} \\ + (E^1(x)\tau_2 - E^2(x)\tau_1)\frac{\partial}{\partial\phi}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde E^x, E^1 y E^2 son funciones de x. Se puede ver que la teoría ha sido reducida de 3+1 a 1+1 dimensiones.

En términos de las variables reducidas por simetría, la estructura simpléctica

está caracterizada por la 2-forma simpléctica:

$$\Omega = \frac{1}{8\pi G\beta}\int_\Sigma d^3x\delta\widetilde{E}^\alpha_i \wedge \delta A^i_\alpha \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8\pi G\beta}\int_I\int d\theta d\phi \sin\theta(\delta E^x \wedge \delta A_x + 2(\delta E^1 \wedge \delta A_1 + \delta E^2 \wedge \delta A_2)) \\ &= \frac{1}{2G\beta}\int_I(\delta E^x \wedge \delta A_x + 2(\delta E^1 \wedge \delta A_1 + \delta E^2 \wedge \delta A_2)), \end{aligned} \tag{2.4}$$

que da lugar al álgebra siguiente:

$$\{A_x(x), E^x(x')\} = 2G\beta\delta(x-x') \tag{2.5}$$

$$\{A_1(x), E^1(x')\} = G\beta\delta(x-x') \tag{2.6}$$

$$\{A_2(x), E^2(x')\} = G\beta\delta(x-x'), \tag{2.7}$$

todos los corchetes restantes se anulan. G es la constante de gravitación universal y β el parámetro de Barbero-Immirzi.

El tensor de curvatura satisface:

$$F = \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \tag{2.8}$$

En § B.5 se muestra que el tensor curvatura se vincula con la conexión mediante la siguiente relación:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta]. \tag{2.9}$$

Calculemos a modo de ejemplo la componente $F_{\theta\phi}$:

$$F_{\theta\phi} = \partial_\theta A_\phi - \partial_\phi A_\theta + [A_\theta, A_\phi] \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} &= A_1\tau_2\cos\theta - \tau_3\sin\theta - A_2\tau_1\cos\theta + A_1^2\sin\theta[\tau_1,\tau_2] + A_1\cos\theta[\tau_1,\tau_3] \\ &+ [A_2\tau_2, \tau_3\cos\theta] - [A_2\tau_2, A_2\tau_1\sin\theta] \\ &= (A_1^2 + A_2^2 - 1)\tau_3\sin\theta. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Calculando de manera análoga las demás componentes de $F_{\alpha\beta}$ se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} F = (A_1^2 + A_2^2 - 1)\tau_3\sin\theta\ d\theta\wedge d\phi - (A_1'\tau_2 - A_2'\tau_1 - A_xA_1\tau_1)\sin\theta\ d\phi\wedge dx \\ + A_xA_2\tau_2\sin\theta\ d\phi\wedge dx + [(A_1'\tau_1 + A_2'\tau_2) + A_x(A_1\tau_2 - A_2\tau_1)]dx\wedge d\theta. \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.2. Vínculos

En la teoría completa, la dinámica se describe por medio de tres vínculos. En esta sección estudiaremos cómo se ven simplificados dichos vínculos debido a la simetría esférica. Comencemos por el vínculo de Gauss:

$$C_G[\Lambda^i(\vec{x})] \equiv \frac{1}{8\pi G\beta}\int_\Sigma d^3x\Lambda^i G_i, \tag{2.13}$$

que genera la simetría interna $SU(2)$ (equivalente a $SO(3)$), donde

$$G_i = D_\alpha \widetilde{E}_i^\alpha \equiv \partial_\alpha \widetilde{E}_i^\alpha + \epsilon_{ij}{}^k A_\alpha^j \widetilde{E}_k^\alpha, \tag{2.14}$$

para cualquier campo suave $\Lambda(\vec{x})$ sobre Σ. Con las variables de simetría reducida de (2.1) y (2.2) se puede mostrar que tanto $G_{i=1}$ como $G_{i=2}$ son idénticamente nulas. A modo ilustrativo calculemos $G_{i=2}$:

$$\begin{aligned} G_2 &= \partial_\alpha \widetilde{E}_2^\alpha + \epsilon_{2j}{}^k A_\alpha^j E_k^\alpha && (2.15)\\ &= \partial_\alpha \widetilde{E}_2^\alpha + A_\alpha^3 E_1^\alpha - A_\alpha^1 E_3^\alpha && (2.16)\\ &= \partial_\theta \widetilde{E}_2^\theta + \partial_\phi \widetilde{E}_2^\phi + A_x^3 \widetilde{E}_1^x + A_\phi^3 \widetilde{E}_1^\phi - A_\theta^1 E_3^\theta && (2.17)\\ &= \partial_\theta (E^2(x)\sin\theta) + \partial_\phi (E^1(x)) - E^2(x)\cos\theta = 0. && (2.18) \end{aligned}$$

Así, la única componente no nula es $G_{i=3}$:

$$\begin{aligned} G_3 &= \partial_\alpha \widetilde{E}_3^\alpha + \epsilon_{3j}{}^k A_\alpha^j \widetilde{E}_k^\alpha && (2.19)\\ &= \partial_\alpha \widetilde{E}_3^\alpha + A_\alpha^1 \widetilde{E}_2^\alpha - A_\alpha^2 \widetilde{E}_1^\alpha && (2.20)\\ &= \partial_x \widetilde{E}_3^x + A_\theta^1 \widetilde{E}_2^\theta + A_\phi^1 \widetilde{E}_2^\phi - A_\theta^2 \widetilde{E}_1^\theta - A_\phi^2 \widetilde{E}_1^\phi && (2.21)\\ &= \partial_x (E^x \sin\theta) + A_1 E^2 \sin\theta - A_2 \sin\theta\ E^1 - A_2 E^1 \sin\theta + A_1 E^2 \sin\theta && (2.22)\\ &= \sin\theta\ (E^x)' + 2\sin\theta\ (E^2 A_1 - E^1 A_2). && (2.23) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$C_G[\lambda(x)] = \frac{1}{2G\beta}\int_I dx \lambda((E^x)' + 2A_1E^2 - 2A_2E^1) \equiv \int_I dx \lambda(x) U(x), \tag{2.24}$$

donde $\lambda(x) \equiv \frac{1}{4\pi}\int d\theta d\phi \sin\theta\ \Lambda^{i=3}(x,\theta,\phi)$. Veamos que, en efecto, las transformaciones de gauge correspondientes a $SU(2)$ se reducen por simetría al grupo $U(1)$. Utilizando las relaciones (2.5)-(2.7) se pueden realizar los cálculos siguientes:

$$\begin{aligned} \delta E^1(x) &= \{E^1(x), C_G\} && (2.25)\\ &= \left\{ E^1(x), \frac{1}{2G\beta}\int_I dx' \lambda(x')(2A_1(x')E^2(x') - 2A_2(x')E^1(x')) \right\} && (2.26)\\ &= -\int dx' \lambda(x')\delta(x'-x)E^2(x') = -\lambda(x)E^2(x), && (2.27) \end{aligned}$$

análogamente,

$$\delta E^2(x) = \lambda(x)E^1(x), \quad \delta A_1(x) = -\lambda(x)A_2(x), \quad \delta A_2(x) = \lambda(x)A_1(x). \tag{2.28}$$

Mientras que,

$$\begin{aligned} \delta A_x = \{A_x(x), C_G\} &= \left\{ A_x, \frac{1}{2G\beta}\int_I dx' \lambda(x')\partial_{x'} E^x(x') \right\} && (2.29)\\ &= \int dx' \lambda(x')\partial_{x'}\delta(x-x') = -\partial_x \lambda(x). && (2.30) \end{aligned}$$

y trivialmente,

$$\delta E^x(x) = 0. \tag{2.31}$$

Estas transformaciones son equivalentes a la transformación infinitesimal del grupo $U(1)$, $1 + \tau_3\lambda(x)$, que rota los vectores del plano (τ_1, τ_2) un ángulo $\lambda(x)$ infinitesimal. Resumiendo, la transformación de gauge $SU(2)$, $e^{\vec{\tau}\cdot\vec{\Lambda}(x)}$, se reduce a la transformación $U(1)$ $e^{\tau_3\lambda(x)}$:

$$E \to E' = e^{\tau_3\lambda(x)} E e^{-\tau_3\lambda(x)} \text{ y} \tag{2.32}$$

$$A \to A' = e^{\tau_3\lambda(x)} A e^{-\tau_3\lambda(x)} + e^{\tau_3\lambda(x)} d e^{-\tau_3\lambda(x)} \tag{2.33}$$

$$= e^{\tau_3\lambda(x)} A e^{-\tau_3\lambda(x)} - \partial_x\lambda(x)\tau_3 dx. \tag{2.34}$$

El vínculo de difeomorfismos está dado por

$$C_{\text{diff}}[N^a(\vec{x})] \equiv \frac{1}{8\pi G\beta}\int_\Sigma d^3x (N^\alpha \widetilde{E}^\beta_i F^i_{\alpha\beta} - N^\alpha A^i_\alpha G_i), \tag{2.35}$$

que genera los difeomorfismos espaciales en Σ para cualquier campo vectorial suave $N^\alpha(\vec{x})$. En términos de las variables de simetría reducida, las componentes acopladas con N^θ y N^ϕ son idénticamente nulas, de modo que la única contribución proviene del término acoplado con N^x. La misma está dada por la expresión

$$C_{\text{diff}}[N^x(x)] = \frac{1}{8\pi G\beta}\int_\Sigma d^3x (N^x \widetilde{E}^\beta_i F^i_{x\beta} - N^x A^i_x G_i). \tag{2.36}$$

Además, se tiene que:

$$N^x A^i_x G i = N^x A^3_x G_3 = N^x A_x \sin\theta((E^x)' + 2A_1E^2 - 2A_2E^1), \tag{2.37}$$

y,

$$N^x \widetilde{E}^\theta_i F^i_{x\beta} = N^x(E^1\sin\theta\ F^1_{x\theta} + E^2F^2_{x\theta} + E^1F^2_{x\phi} - E^2F^1_{x\phi}) \tag{2.38}$$

$$= N^x(2A_1'E^1\sin\theta - 2A_xA_2E^1\sin\theta + 2E^2A_2'\sin\theta + 2E^2A_xA_1\sin\theta). \tag{2.39}$$

Por lo tanto,

$$C_{\text{diff}}[N^x(x)] = \frac{1}{2G\beta}\int_I dx N^x(2A_1'E^1 + 2A_2'E^2 - A_x(E^x)') \equiv \int_I dx N^x(x) D(x), \tag{2.40}$$

donde $N^x(x) \equiv \frac{1}{4\pi}\int d\theta d\phi \sin\theta\ N^{a=x}(x,\theta,\phi)$. Ese vínculo genera el difeomorfismo en la dirección de x.

Por último, el vínculo hamiltoniano está dado por

$$C[N(\vec{x})] \equiv \frac{1}{16\pi G}\int_\Sigma d^3x N(\vec{x}) e^{-1}\{\epsilon_i{}^{jk} F^i_{\alpha\beta}\widetilde{E}^\alpha_j\widetilde{E}^\beta_k - 2(1+\beta^2)K^i_{[\alpha}K^j_{\beta]}\widetilde{E}^\alpha_i\widetilde{E}^\beta_j\}, \tag{2.41}$$

donde, recordemos, $e = |\det(\widetilde{E}^\alpha_i)|$. De (2.2) se desprende, además, que $\det\widetilde{E}^\alpha_i = E^x[(E^1)^2 + (E^2)^2]\sin^2\theta$.

Debido a la simetría esférica, la curvatura extrínseca adquiere la expresión siguiente:

$$K = K_\alpha^i \tau_i dx^\alpha \tag{2.42}$$
$$= K_x(x)\tau_3 dx + (K_1(x)\tau_1 + K_2(x)\tau_2)d\theta + (K_1(x)\tau_2 - K_2(x)\tau_1)\sin\theta\ d\phi, \tag{2.43}$$

donde K_x, K_1 y K_2 pueden escribirse en función de las funciones A y E. De manera similar al vínculo de Gauss y al vínculo de difeomorfismos, el vínculo hamiltoniano puede reescribirse como

$$\begin{aligned} C[N(x)] = \frac{1}{2G}\int_I dx \frac{N(x)}{\sqrt{|E^x|[(E^1)^2 + (E^2)^2]}} \\ \times \{2E^x(E^1 A_2' - E^2 A_1') + 2A_x E^x(A_1 E^1 + A_2 E^2) \\ + (A_1^2 + A_2^2 - 1)[(E^1)^2 + (E^2)^2] - (1-\beta^2)(2K_x E^x(K_1 E^1 + K_2 E^2) \\ + [(K_1)^2 + (K_2)^2][(E^1)^2 + (E^2)^2])\}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Luego,

$$C[N(x)] \equiv \int_I dx N(x) C(x), \tag{2.45}$$

donde $N(x) = \frac{1}{4\pi}\int d\theta d\phi \sin\theta\ N(x,\theta,\phi)$.

2.3. Variables polares

Comenzamos esta sección definiendo las variables polares A_ρ y E^ρ como:

$$A_1 = A_\rho \cos\gamma, \quad A_2 = A_\rho \sin\gamma, \tag{2.46}$$
$$E^1 = E^\rho \cos(\alpha+\gamma), \quad E^2 = E^\rho \sin(\alpha+\gamma). \tag{2.47}$$

Notar que A_ρ, E^ρ y el producto interno $(A_1, A_2)\cdot(E^1, E^2) = A_1E^1 + A_2E^2 = A_\rho E^\rho \cos\alpha$ son invariantes bajo una rotación $U(1)$. A partir de las transformaciones mostradas de manera explícita en la sección anterior para las variables A y E:

$$\delta A_\rho = \frac{1}{2}(2(A_1\delta A_1 + A_2\delta A_2))^{-1/2} \tag{2.48}$$
$$= \frac{1}{2}(2(A_1(-\lambda A_2) + A_2(\lambda A_1)))^{-1/2} = 0. \tag{2.49}$$

De manera análoga puede mostrarse que $\delta E^\rho = 0$, mientras que

$$\delta(A_1E^1 + A_2E^2) = \delta A_1 E^1 + A_1\delta E^1 + \delta A_2 E^2 + A^2\delta E^2 \tag{2.50}$$
$$= -\lambda A_2 E^1 + A_1(-\lambda)E^2 + \lambda A_1 E^2 + A_2\lambda E^1 = 0. \tag{2.51}$$

Así, el ángulo $\alpha(x)$ entre (A_1, A_2) y (E^1, E^2) es una cantidad independiente del gauge, mientras que el ángulo $\gamma(x)$ es puro gauge. En términos de estas

variables polares, la 2-forma simpléctica puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{2G\beta}\int_I dx\{\delta E^x \wedge \delta A_x + 2(\cos\alpha\ \delta E^\rho \wedge \delta A_\rho + \sin\alpha\ A_\rho \delta E^\rho \wedge \delta\gamma \\ &+ \sin\alpha\ E^\rho \delta A_\rho \wedge \delta\gamma + \sin\alpha\ E^\rho \delta A_\rho \wedge \delta\alpha + \cos\alpha\ A_\rho E^\rho \delta\alpha \wedge \delta\gamma)\} \qquad (2.52)\\ &= \frac{1}{2G\beta}\int dx\{\delta E^x \wedge \delta A_x + 2[\delta(E^\rho\cos\alpha)\wedge\delta A_\rho + \delta(A_\rho E^\rho \sin\alpha)\wedge\delta\gamma]\} \qquad (2.53)\\ &= \frac{1}{2G\beta}\int_I dx\{\delta E^x \wedge \delta A_x + 2[\delta E^\rho \wedge \delta(A_\rho\cos\alpha) + \delta(A_\rho E^\rho\sin\alpha)\wedge\delta(\alpha+\gamma)]\}. \qquad (2.54)\end{aligned}$$

La ecuación (2.54) implica que existe una transformación canónica entre las variables $(A_x, A_1, A_2; E^x, E^1, E^2)$ y las nuevas variables $(A_x, \bar{A}_\rho, \eta; E^x, E^\rho, P^\eta)$, definidas como:

$$\bar{A}_\rho \equiv 2A_\rho\cos\alpha, \qquad (2.55)$$
$$\eta \equiv \alpha + \gamma, \qquad (2.56)$$
$$P^\eta \equiv 2A_\rho E^\rho \sin\alpha = 2A_1E^2 - 2A_2E^1, \qquad (2.57)$$

de manera que satisfacen el álgebra

$$\{A_x(x), E^x(x')\} = 2G\beta\delta(x-x'), \qquad (2.58)$$
$$\{\bar{A}_\rho(x), E^\rho(x')\} = 2G\beta\delta(x-x'), \qquad (2.59)$$
$$\{\eta(x), P^\eta(x')\} = 2G\beta\delta(x-x'), \qquad (2.60)$$

donde todos los demás corchetes entre estas nuevas variables canónicas son nulos.

En términos de estas variables, el vínculo de Gauss (2.24) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2G\beta}((E^x)' + 2A_1E^2 - 2A_2E^1) = \frac{1}{2G\beta}((E^x)' + 2A_\rho E^\rho\sin\alpha) \qquad (2.61)\\ &= \frac{1}{2G\beta}((E^x)' + P^\eta), \qquad (2.62)\end{aligned}$$

por su parte, el vínculo de difeomorfismos (2.40) adquiere la forma

$$\begin{aligned}D &= \frac{1}{2G\beta}(2A_1'E^1 + 2A_2'E^2 - A_x(E^x)') \qquad (2.63)\\ &= \frac{1}{2G\beta}(2A_\rho'E^\rho\cos\alpha + 2A_\rho E^\rho\sin\alpha\ \gamma' - A_x(E^x)') \qquad (2.64)\\ &= \frac{1}{2G\beta}[((2A_\rho\cos\alpha)' + 2A_\rho\sin\alpha\ \alpha')E^\rho + 2A_\rho E^\rho\sin\alpha\ \gamma' - A_x(E^x)'] \qquad (2.65)\\ &= \frac{1}{2G\beta}(\bar{A}_\rho' E^\rho + \eta' P^\eta - A_x(E^x)'). \qquad (2.66)\end{aligned}$$

El vínculo hamiltoniano puede ser reescrito en función de las variables A y E. Para ello, realizamos un cambio de variable rotando la base ortonormal (τ_1, τ_2, τ_3) de $\mathfrak{su}(2)$ a una nueva base ortonormal $(\tau_1', \tau_2', \tau_3)$:

$$\tau_{1'}(x) \equiv \tau_1\cos(\alpha+\gamma) + \tau_2\sin(\alpha+\gamma), \qquad (2.67)$$
$$\tau_{2'}(x) \equiv -\tau_1\sin(\alpha+\gamma) + \tau_2\cos(\alpha+\gamma). \qquad (2.68)$$

Debe notarse que el ángulo de rotación varía según el punto x. Así, $\tau_{1'}$ y $\tau_{2'}$ son funciones de x, cumpliéndose

$$\tau'_{1'} = (-\tau_1 \sin(\alpha+\gamma) + \tau_2 \cos(\alpha+\gamma))(\alpha+\gamma)' = \tau_{2'}(\alpha+\gamma)' \tag{2.69}$$
$$\tau'_{2'} = (-\tau_1 \cos(\alpha+\gamma) - \tau_2 \sin(\alpha+\gamma))(\alpha+\gamma)' = -\tau_{1'}(\alpha+\gamma)'. \tag{2.70}$$

A partir de las ecuaciones (2.67), (2.68), las identidades (2.1), (2.2) pueden reescribirse como:

$$\begin{aligned} A =& A_x(x)\tau_3 dx + A_\rho(x)(\cos\alpha\ \tau_{1'}(x) - \sin\alpha\ \tau_{2'}(x))d\theta \\ &+ A_\rho(x)(\sin\alpha\ \tau_{1'}(x) + \cos\alpha\ \tau_{2'}(x))\sin\theta\ d\phi + \tau_3\cos\theta\ d\phi, \end{aligned} \tag{2.71}$$

$$E = E^x(x)\tau_3 \sin\theta\ \frac{\partial}{\partial x} + E^\rho(x)\tau_{1'}(x)\sin\theta\ \frac{\partial}{\partial\theta} + E^\rho(x)\tau_{2'}(x)\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{2.72}$$

De la expresión (2.72), donde la matriz $\widetilde{E}^\alpha_i$ es diagonal, se desprende directamente que $h = \det(\widetilde{E}^\alpha_i) = E^x(E^\rho)^2\sin^2\theta$. A su vez, como $e^i_\alpha = \sqrt{h}(\widetilde{E}^\alpha_i)^{-1}$, la cotríada no densitizada puede escribirse como

$$e = e^i_\alpha \tau_i dx^\alpha = \frac{E^\rho}{\sqrt{|E^x|}}\tau_3 dx + \sqrt{|E^x|}\tau_{1'}(x)d\theta + \sqrt{|E^x|}\sin\theta\ \tau_{2'}(x)d\phi. \tag{2.73}$$

En consecuencia, las componentes no nulas de la trimétrica ($h_{\alpha\beta} = e^i_\alpha e^j_\beta \delta_{ij}$) son las siguientes:

$$h_{xx} = \frac{(E^\rho)^2}{|E_x|}, \qquad h_{\theta\theta} = |E^x|, \qquad h_{\phi\phi} = |E^x|\sin^2\theta. \tag{2.74}$$

La derivada exterior (ver § A.3.5) de (2.73) da lugar a:

$$\begin{aligned} de =& \frac{(E^x)'}{2\sqrt{|E^x|}}\tau_{1'}dx\wedge d\theta + \sqrt{|E^x|}(\alpha+\gamma)'\tau_{2'}dx\wedge d\theta \\ &+ \frac{(E^x)'}{2\sqrt{|E^x|}}\tau_{2'}\sin\theta\ dx\wedge d\phi - \sqrt{|E^x|}(\alpha+\gamma)'\tau_{1'}\sin\theta\ dx\wedge d\phi \\ &+ \sqrt{|E^x|}\tau_{2'}\cos\theta\ d\theta\wedge d\phi, \end{aligned} \tag{2.75}$$

donde hemos usado las igualdades (2.69) y (2.70). A partir de las identidades (2.73) y (2.75) y de las relaciones de conmutación de los generadores $\tau_{1'}$, $\tau_{2'}$, τ_3 pueden obtenerse las componentes de la conexión Γ, compatible con la tríadas, i.e., $de + \Gamma\wedge e = 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma\wedge e =& (\Gamma^i_x\tau_i dx + \Gamma^i_\theta\tau_i d\theta + \Gamma^i_\phi\tau_i d\phi)\wedge((E^\rho/\sqrt{|E^x|})\tau_3 dx \\ &+ \sqrt{|E^x|}\tau_{1'}d\theta + \sqrt{|E^x|}\sin\theta\ \tau_{2'}d\phi) \end{aligned} \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned} =& dx\wedge d\theta\left(\sqrt{|E^x|}\Gamma^i_x\tau_i\wedge\tau_{1'} - \frac{E^\rho}{\sqrt{|E^x|}}\Gamma^i_\theta\tau_i\wedge\tau_3\right) \\ &+ dx\wedge d\phi\left(\Gamma^i_x\sqrt{|E^x|}\sin\theta\ \tau_i\wedge\tau_{2'} - \Gamma^i_\phi\frac{E^\rho}{\sqrt{|E^x|}}\tau_i\wedge\tau_3\right) \\ &+ d\theta\wedge d\phi(\Gamma^i_\theta\sqrt{|E^x|}\sin\theta\ \tau_i\wedge\tau_{2'} - \Gamma^i_\phi\sqrt{E^x}\tau_i\wedge\tau_{1'}), \end{aligned} \tag{2.77}$$

que igualado al opuesto de (2.75) da lugar a:

$$\Gamma = \Gamma^i_\alpha \tau_i dx^\alpha = -(\alpha+\gamma)'\tau_3 dx + \frac{(E^x)'}{2E^\rho}\tau_{2'}d\theta - \frac{(E^x)'}{2E^\rho}\tau_{1'}\sin\theta\ d\phi + \tau_3\cos\theta\ d\phi. \tag{2.78}$$

Utilizando estas expresiones es posible reescribir la curvatura en términos de las variables A y E, pues $\beta K = A - \Gamma$:

$$\beta K = \beta K^i_\alpha \tau_i dx^\alpha \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned} =&[A_x + (\alpha+\gamma)']\tau_3 dx + \left[A_\rho\cos\alpha\tau_{1'} - \left(A_\rho\sin\alpha + \frac{(E^x)'}{2E^\rho}\right)\tau_{2'}\right]d\theta \\ &+ \left[A_\rho\cos\alpha\tau_{2'} + \left(A_\rho\sin\alpha + \frac{(E^x)'}{2E^\rho}\right)\tau_{1'}\right]\sin\theta d\phi. \end{aligned} \tag{2.80}$$

Asimismo, para que obedezca la identidad (2.42) deben satisfacerse las relaciones:

$$\beta K_x = A_x + (\alpha+\gamma)' \tag{2.81}$$

$$\beta K_1 = A_\rho\cos\gamma + \frac{(E^x)'}{2E^\rho}\sin(\alpha+\gamma), \tag{2.82}$$

$$\beta K_2 = A_\rho\sin\gamma - \frac{(E^x)'}{2E^\rho}\cos(\alpha+\gamma). \tag{2.83}$$

Imponiendo el vínculo de Gauss (2.61): $U = 0 \to \frac{(E^x)'}{2E^\rho} = -A_\rho\sin\alpha$, se obtiene:

$$\beta K_1 = A_\rho\cos\alpha\ \cos(\alpha+\gamma), \tag{2.84}$$

$$\beta K_2 = A_\rho\cos\alpha\ \sin(\alpha+\gamma), \tag{2.85}$$

de modo que

$$\beta K = \beta K^i_\alpha \tau_i dx^\alpha = [A_x + (\alpha+\gamma)']\tau_3 dx + A_\rho\cos\alpha\ \tau_{1'}d\theta + A_\rho\cos\alpha\ \tau_{2'}\sin\theta\ d\phi. \tag{2.86}$$

Las ecuaciones (2.81), (2.82) y (2.83), conjuntamente con las formas polares de las variables A y E, permiten reescribir el vínculo hamiltoniano como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} &2G\sqrt{h}C \equiv 2E^x(E^1A_2' - E^2A_1') + 2A_xE^x(A_1E^1 + A_2E^2) \\ &+ (A_1^2 + A_2^2 - 1)[(E^1)^2 + (E^2)^2] - (1+\beta^2)[(K_1)^2 + (K_2)^2][(E^1)^2 + (E^2)^2] \\ &- 2K_xE^x(1+\beta^2)(K_1E^1 + K_2E^2) \end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned} =&-\frac{1}{4\beta^2}\{4(\beta^2 + A_\rho^2)(E^\rho)^2 + (1+\beta^2)((E^x)')^2 \\ &+ 8\beta^2E^xE^\rho A_\rho'\sin\alpha + 8E^xE^\rho A_xA_\rho\cos\alpha \\ &+ 8E^xE^\rho A_\rho\cos\alpha((1+\beta^2)\alpha' + \gamma') + 4(1+\beta^2)E^\rho A_\rho(E^x)'\sin\alpha\}, \end{aligned} \tag{2.88}$$

donde $\sqrt{h} = \sqrt{|E^x|[(E^1)^2 + (E^2)^2]}$; se puede ver en (2.44) que el factor $\sin\theta$ es absorbido por $N(x)$. A pesar de que el vínculo hamiltoniano, C, es $U(1)$ invariante, la expresión de arriba aún involucra cantidades $U(1)$-dependientes

como A_x y γ. Para que la $U(1)$-invariancia sea explícita, es suficiente con sumar un múltiplo del vínculo de Gauss:

$$2G\beta E^x\partial_x U = 2E^xE^\rho A'_\rho\sin\alpha + 2E^xE^\rho A_\rho\cos\alpha\;\alpha' + 2E^xA_\rho E^{\rho'}\sin\alpha + E^x(E^x)'', \tag{2.89}$$

así, el nuevo vínculo $\sqrt{h}C$, tal que $2G\sqrt{h}C \to 2G\sqrt{h}C + 2G\beta E^x\partial_x U$, está dado por

$$\begin{aligned} 2G\sqrt{h}C = &-\frac{1}{4\beta^2}\{4(\beta^2+A_\rho^2)(E^\rho)^2 + (1+\beta^2)((E^x)')^2 \\ &+ 8E^xE^\rho A_\rho(A_x+\alpha'+\gamma')\cos\alpha + 4(1+\beta^2)E^\rho A_\rho(E^x)'\sin\alpha\} \\ &+ 2E^xA_\rho(E^\rho)'\sin\alpha + E^x(E^x)'', \end{aligned} \tag{2.90}$$

donde A_x y γ aparecen solamente por medio de la cantidad $U(1)$-invariante $\beta K_x = A_x + (\alpha+\gamma)'$. $A_\rho\cos\alpha$ y $A_\rho\sin\alpha$ pueden reescribirse por medio de las ecuaciones (2.55), (2.56), (2.57) produciendo la identidad siguiente:

$$A_\rho^2 = \frac{\bar{A}_\rho^2}{4} + A_\rho^2\sin^2\alpha = \frac{\bar{A}_\rho^2}{4} + \left(\frac{P^\eta}{2E^\rho}\right)^2, \tag{2.91}$$

de manera que el vínculo hamiltoniano adopta la expresión:

$$\begin{aligned} 2G\sqrt{h}C = &-(E^\rho)^2 - \frac{\bar{A}_\rho^2(E^\rho)^2}{4\beta^2} - \frac{E^xE^\rho\bar{A}_\rho}{\beta^2}(A_x+\alpha'+\gamma') + \frac{E^x(E^\rho)'P^\eta}{E^\rho} \\ &- \frac{(P^\eta)^2}{4\beta^2} - \frac{1+\beta^2}{2\beta^2}(E^x)'P^\eta - \frac{1+\beta^2}{4\beta^2}((E^x)')^2 + E^x(E^x)''. \end{aligned} \tag{2.92}$$

Imponiendo el vínculo de Gauss (2.61), se tiene que $(E^x)' = -P^\eta$, en consecuencia, el vínculo hamiltoniano adquiere la forma

$$\begin{aligned} 2G\sqrt{h}C = &-(E^\rho)^2 - \frac{\bar{A}_\rho^2(E^\rho)^2}{4\beta^2} - \frac{E^xE^\rho\bar{A}_\rho}{\beta^2}(A_x+\alpha'+\gamma') - \frac{E^x(E^x)'(E^\rho)'}{E^\rho} \\ &+ \frac{((E^x)')^2}{4} + E^x(E^x)''. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Por último, como $\sqrt{h} = \sqrt{|E^x|[(E^1)^2+(E^2)^2]} = \sqrt{|E^x|}E^\rho$, tenemos:

$$\begin{aligned} C = \frac{1}{2G}\Bigg\{ &-\frac{E^\rho}{\sqrt{|E^x|}} - \frac{\bar{A}_\rho^2E^\rho}{4\beta^2\sqrt{|E^x|}} - \mathrm{sgn}(E^x)\frac{\sqrt{|E^x|}\bar{A}_\rho}{\beta^2}(A_x+\alpha'+\gamma') \\ &- \mathrm{sgn}(E^x)\frac{\sqrt{|E^x|(E^x)'(E^\rho)'}}{(E^\rho)^2} + \frac{((E^x)')^2}{4\sqrt{|E^x|}E^\rho} + \mathrm{sgn}(E^x)\frac{\sqrt{|E^x|}(E^x)''}{E^\rho}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.94}$$

Luego, hemos conseguido una expresión para C que está escrita enteramente en función de variables independientes del gauge $U(1)$, a saber, $E^\rho, \bar{A}_\rho, E^x$ y $A_x + \alpha' + \gamma'$.

2.4. Nuevo cambio de variables

Para arrojar luz sobre el significado físico de las variables de Ashtekar podemos realizar un nuevo cambio de variables, de forma de separar las variables $U(1)$-dependientes de aquellas $U(1)$-independientes. Para ello, observemos en primer lugar que el término

$$\int_I (\delta E^x \wedge \delta(\alpha+\gamma)' + \delta(E^x)' \wedge \delta(\alpha+\gamma))dx = \int_I (\delta(E^x) \wedge \delta(\alpha+\gamma))', \quad (2.95)$$

sólo da una contribución de borde, lo que permite redefinir la 2-forma simpléctica (2.54) como:

$$\begin{aligned}\Omega =& \frac{1}{2G\beta}\int_I dx\big\{\delta E^x \wedge \delta(A_x + \alpha' + \gamma') + \delta E^\rho \wedge \delta(2A_\rho \cos\alpha) \\ &+ \delta(2A_\rho E^\rho \sin\alpha + (E^x)') \wedge \delta(\alpha+\gamma)\big\}.\end{aligned} \quad (2.96)$$

Esta expresión para la forma simpléctica sugiere una transformación canónica de $(A_x, \bar{A}_\rho, \eta; E^x, E^\rho, P_\eta)$ a un nuevo conjunto de variables $(\bar{A}_x, \bar{A}_\rho, \eta; E^x, E^\rho, \bar{P}_\eta)$, dado por:

$$\bar{A}_x = A_x + \eta' \equiv A_x + (\alpha+\gamma)', \quad (2.97)$$
$$\bar{P}^\eta = P^\eta + (E^x)'. \quad (2.98)$$

El álgebra para estas nuevas variables queda determinada por las siguientes relaciones:

$$\{\bar{A}_x(x), E^x(x')\} = 2G\beta\delta(x-x'), \quad (2.99)$$
$$\{\bar{A}_\rho(x), E^\rho(x')\} = 2G\beta\delta(x-x'), \quad (2.100)$$
$$\{\eta(x), \bar{P}^\eta(x')\} = 2G\beta\delta(x-x'), \quad (2.101)$$

con todos los demás corchetes iguales a cero. Mientras que los tres vínculos (2.61), (2.66), (2.94) adoptan la forma

$$U = \frac{1}{2G\beta}\bar{P}^\eta, \quad (2.102)$$
$$D = \frac{1}{2G\beta}(\bar{A}'_\rho E^\rho + \eta'\bar{P}^\eta - \bar{A}_x(E^x)'), \quad (2.103)$$
$$\begin{aligned}C =& \frac{1}{2G}\Bigg\{ - \frac{E^\rho}{\sqrt{|E^x|}} - \frac{\bar{A}_\rho^2 E^\rho}{4\beta^2\sqrt{|E^x|}} - \mathrm{sgn}(E^x)\frac{\sqrt{|E^x|}\bar{A}_\rho\bar{A}_x}{\beta^2} \\ &- \mathrm{sgn}(E^x)\frac{\sqrt{|E^x|}(E^x)'(E^\rho)'}{(E^\rho)^2} + \frac{((E^x)')^2}{4\sqrt{|E^x|}E^\rho} + \mathrm{sgn}(E^x)\frac{\sqrt{|E^x|}(E^x)''}{E^\rho}\Bigg\}.\end{aligned} \quad (2.104)$$

Los corchetes de Poisson entre los vínculos están dados por:

$$\{C_G[\lambda], C_G[\lambda']\} = 0, \tag{2.105}$$

$$\{C_G[\lambda], C[N]\} = 0, \tag{2.106}$$

$$\{C_G[\lambda], C_{\text{diff}}[N^x]\} = -C_G[N^x\lambda'] = C_G[\mathcal{L}_{N^x}\lambda], \tag{2.107}$$

$$\{C_{\text{diff}}[M^x], C_{\text{diff}}[N^x]\} = C_{\text{diff}}[M^x(N^x)' - N^x(M^x)'] \equiv C_{\text{diff}}[[M^x, N^x]] \tag{2.108}$$

$$\{C[N], C_{\text{diff}}[N^x]\} = -C[N^xN'] = -C[\mathcal{L}_{N^x}N], \tag{2.109}$$

$$\{C[N], C[M]\} = C_{\text{diff}}\left[(NM' - MN')\frac{E_x^2}{|h|}\right] - C_G\left[(NM' - MN')\frac{E_x^2}{|h|}\eta'\right]. \tag{2.110}$$

Vemos entonces que los vínculos son de primera clase. El álgebra es abierta pues en lugar de constantes de estructura se tienen funciones de estructura, dependientes de las variables dinámicas.

El hamiltoniano en la teoría completa está dado por

$$H = C[N(\vec{x})] + C_{\text{diff}}[N^\alpha(\vec{x})] + C_G[\omega^i \cdot t(\vec{x})]. \tag{2.111}$$

Como mostramos anteriormente, en el caso de un espacio-tiempo con simetría esférica H adopta la forma

$$\begin{aligned} H &= C[N] + C_{\text{diff}}[N^x] + C_g[\omega^3 \cdot t] \\ &\equiv \int_I dx[N(x)C(x) + N^x(x)D(x) + (\omega^3(x) \cdot t)U(x)], \end{aligned} \tag{2.112}$$

donde N, N^x y $\omega^3 \cdot t$ son multiplicadores de Lagrange. La evolución de las variables canónicas con respecto al parámetro t está descrita por las ecuaciones de Hamilton, arrojando los resultados

$$\dot{\bar{A}}_x = 2G\beta\left\{N\frac{\partial C}{\partial E^x} - \left(N\frac{\partial C}{\partial (E^x)'}\right)' + \left(N\frac{\partial C}{\partial (E^x)''}\right)'' - \left(N^x\frac{\partial D}{\partial (E^x)'}\right)'\right\}, \tag{2.113}$$

$$\dot{\bar{A}}_\rho = 2G\beta\left\{N\frac{\partial C}{\partial E^\rho} - \left(N\frac{\partial C}{\partial (E^\rho)'}\right)' + N^x\frac{\partial D}{\partial E^\rho}\right\}, \tag{2.114}$$

$$\dot{E}_x = -2G\beta\left\{N\frac{\partial C}{\partial \bar{A}_x} + N^x\frac{\partial D}{\partial \bar{A}_x}\right\}, \tag{2.115}$$

$$\dot{E}^\rho = -2G\beta\left\{N\frac{\partial C}{\partial \bar{A}_\rho} - \left(N^x\frac{\partial D}{\partial \bar{A}'_\rho}\right)'\right\}, \tag{2.116}$$

$$\dot{\eta} = 2G\beta\left\{N^x\frac{\partial D}{\partial \bar{P}^\eta} + (\omega^3 \cdot t)\frac{\partial U}{\partial \bar{P}^\eta}\right\} = N^x\eta' + (\omega^3 \cdot t), \tag{2.117}$$

$$\dot{\bar{P}}^\eta = -2G\beta\left(-N^x\frac{\partial D}{\partial \eta'}\right)' = (N^x\bar{P}^\eta)'. \tag{2.118}$$

Los tres vínculos $U = 0, D = 0$ y $C = 0$ conjuntamente con las ecuaciones de Hamilton de arriba son completamente equivalentes a las ecuaciones de Einstein.

Cabe mencionar que el vínculo de Gauss $U = 0$ implica solamente $\bar{P}^\eta = 0$. Por otra parte, se puede observar que la evolución del par $(\eta; \bar{P}^\eta)$ es independiente de las variables $(\bar{A}_x, \bar{A}_\rho; E^x, E^\rho)$ y recíprocamente. Esto se debe a que la geometría del espacio-tiempo queda completamente especificada por $(\bar{A}_x, \bar{A}_\rho; E^x, E^\rho)$, mientras que las variables $(\eta; \bar{P}^\eta)$ dan cuenta de los grados de libertad internos. Por lo tanto, la estructura canónica en términos de las variables $(\bar{A}_x, \bar{A}_\rho, \eta; E^x, E^\rho, \bar{P}^\eta)$ desacopla los grados de libertad gauge de los geométricos. Para verificar esta aserción, estudiemos la relación entre las variables de Ashtekar y las variables métricas.

Comencemos escogiendo coordenadas $x^\alpha = (x, \theta, \phi)$ sobre el espacio tridimensional Σ_t con simetría esférica. El elemento de línea está completamente caracterizado por dos funciones, $\Lambda(t, x)$ y $R(t, x)$ tales que

$$d\sigma^2(t) = h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \Lambda^2(t, x) dx^2 + R^2(t, x) d\Omega^2, \tag{2.119}$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ y R es el *radio de curvatura*. Esta expresión para el elemento de línea junto con las relaciones (2.74) implican directamente que

$$E^\rho = R\Lambda, \qquad\qquad |E^x| = R^2. \tag{2.120}$$

Por otro lado, para especificar el elemento de línea del espacio-tiempo cuadridimensional (M, g) también son necesarios la función lapso N y el vector shift N^α:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + h_{\alpha\beta}(dx^\alpha + N^\alpha dt)(dx^\beta + N^\beta dt). \tag{2.121}$$

Debido a la simetría esférica, sólo la componente radial N^x del vector shift sobrevive y tanto $N(t, x)$ como $N^x(t, x)$ dependen únicamente de t y x. La curvatura extrínseca puede expresarse en función de estas variables como:

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2N}\left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial N_\beta}{\partial x^\alpha} - \partial_t g_{\alpha\beta} - 2\Gamma_{\gamma\alpha\beta} N^\gamma\right). \tag{2.122}$$

Para el elemento de línea (2.119), las componentes no nulas de $K_{\alpha\beta}$ son:

$$K_{xx} = -N^{-1}\Lambda(\dot{\Lambda} - (\Lambda N^x)'), \tag{2.123}$$

$$K_{\theta\theta} = -N^{-1} R(\dot{R} - R' N^x), \tag{2.124}$$

$$K_{\phi\phi} = \sin^2\theta K_{\theta\theta}. \tag{2.125}$$

Utilizando la relación mostrada en el capítulo anterior $K^i_\alpha = K^\beta_\alpha e^i_\beta$ y las formas diagonales de K (2.86) y e (2.73) se obtienen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \bar{A}_x =& A_x + (\alpha + \beta)' = \beta K^3_x = \beta K^x_x e^3_x = \beta K_{xx} \frac{\sqrt{E^x}}{E^\rho} \\ =& \beta K_{xx} \Lambda^{-1} = -\beta N^{-1}(\dot{\Lambda} - (\Lambda N^x)') \end{aligned} \tag{2.126}$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_\rho =& 2A_\rho \cos\alpha = 2\beta (K^1)'_\theta = 2\beta K_{\theta\theta} \frac{1}{\sqrt{E^x}} \\ =& 2\beta K_{\theta\theta} R^{-1} = -2\beta N^{-1}(\dot{R} - R' N^x). \end{aligned} \tag{2.127}$$

En conclusión, las componentes de E se vinculan con la geometría intrínseca de la hipersuperficie Σ_t, mientras que las componentes de A están relacionadas con la geometría extrínseca. Por su parte, las variables $(\eta, \bar{P}^\eta)$ están asociadas únicamente a los grados de libertad internos de $U(1)$, los cuales se encuentran completamente desacoplados de los grados de libertad correspondientes a la métrica.

2.5. Abelianización del vínculo hamiltoniano

Una de las principales dificultades que surgirán al momento de cuantizar la teoría, reside en el hecho de que el corchete de Poisson entre dos vínculos hamiltonianos (2.110) arroja como resultado un vínculo de Gauss y un vínculo de difeomorfismos cuyo multiplicador depende de las variables dinámicas. Esto implica que el álgebra de los vínculos es un álgebra abierta y no de Lie, de manera que no es posible aplicar las técnicas estándar de cuantización de Dirac a la teoría. En esta sección probaremos que mediante un reescalado de los multiplicadores de Lagrange y una combinación lineal con el vínculo de difeomorfismos se puede abelianizar el vínculo hamiltoniano, posibilitando la aplicación del procedimiento de cuantización canónica[23, 19].

En lo que sigue, consideraremos $\beta = 1$, $E^x > 0$ y momentáneamente utilizaremos $G = 1$. En término de la variables asociadas a la curvatura extrínseca el vínculo de difeomorfismos (2.104) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} C =& \frac{((E^x)')^2}{8\sqrt{E^x}E^\rho} - \frac{E^\rho}{2\sqrt{E^x}} - 2K_\rho\sqrt{E^x}\bar{K}_x - \frac{E^\rho K_\rho^2}{2\sqrt{E^x}} \\ & - \frac{\sqrt{E^x}(E^x)'(E^\rho)'}{2(E^\rho)^2} + \frac{\sqrt{E^x}(E^x)''}{2E^\rho}. \end{aligned} \tag{2.128}$$

donde $\bar{K}_x = 2K_x$. En lo que queda de este capítulo suprimiremos la barra en $\bar{K}_x$ para simplificar la notación, por lo tanto, siempre que aparezca K_x estaremos haciendo referencia a $\bar{K}_x$.

Los corchetes de Poisson están dados por

$$\{K_x(x), E^x(y)\} = \delta(x-y), \tag{2.129}$$

$$\{K_\rho(x), E^\rho(y)\} = \delta(x-y), \tag{2.130}$$

donde los demás corchetes son nulos. Luego, el corchete de Poisson entre el vínculo hamiltoniano y las variables dinámicas da lugar a:

$$\begin{aligned} \{C, K_\rho\} =& \frac{1}{(E^\rho)^2}\frac{((E^x)')^2}{8\sqrt{E^x}}\delta(x-y) + \frac{1+K_\rho^2}{2\sqrt{E^x}}\delta(x-y) + \frac{\sqrt{E^x}(E^x)''}{2E^\rho}\delta(x-y) \\ & - \frac{\sqrt{E^x}}{(E^\rho)^3}(E^x)'(E^\rho)'\delta(x-y) + \frac{\sqrt{E^x}(E^x)'}{2(E^\rho)^2}\delta_x(x-y) \end{aligned} \tag{2.131}$$

$$\{C, E^\rho\} = -\frac{E^\rho}{\sqrt{E^x}}K_\rho\delta(x-y) - 2K_x\sqrt{E^x}\delta(x-y) \tag{2.132}$$

$$\begin{aligned} \{C, K_x\} =& \frac{1}{4}\frac{(E^x)'}{\sqrt{E^x}E^\rho}(-\delta_x(x-y)) + \frac{1}{16}\frac{((E^x)')^2}{(\sqrt{E^x})^3E^\rho}\delta(x-y) \\ & - \frac{E^\rho(1+K_\rho^2)}{4(\sqrt{E^x})^3}\delta(x-y) + \frac{K_\rho K_x}{\sqrt{E^x}}\delta(x-y) + \frac{1}{4}\frac{(E^x)'(E^\rho)'}{\sqrt{E^x}(E^\rho)^2}\delta(x-y) \\ & + \frac{\sqrt{E^x}(E^\rho)'}{2(E^\rho)^2}\delta_x(x-y) - \frac{1}{4}\frac{(E^x)''}{\sqrt{E^x}E^\rho}\delta(x-y) - \frac{\sqrt{E^x}}{2E^\rho}\delta_{xx}(x-y) \end{aligned} \tag{2.133}$$

$$\{C, E^x\} = -2K_\rho\sqrt{E^x}\delta(x-y). \tag{2.134}$$

El corchete de Poisson entre dos vínculos hamiltonianos es:

$$\{C(N),C(M)\}=\left\{C(N),\int dyM\frac{((E^x)')^2}{8\sqrt{E^x}E^\rho}\right\}$$
$$+\left\{C(N),-\int Mdy\frac{E^\rho}{2\sqrt{E^x}}(1+K_\rho^2)\right\}+\left\{C(N),-\int Mdy2K_\rho K_x\sqrt{E^x}\right\}$$
$$\left\{C(N),-\int Mdy\frac{\sqrt{E^x}(E^x)'(E^\rho)'}{2(E^\rho)^2}\right\}+\left\{C(N),\int Mdy\frac{\sqrt{E^x}(E^x)''}{2E^\rho}\right\}.$$

Reemplazando los corchetes de Poisson entre el vínculo hamiltoniano y las variables dinámicas por sus valores:

$$\{C(N),C(M)\}=\int dx\frac{E^x}{(E^\rho)^2}(MN'-NM')(K_x(E^x)'-(K_\rho)'E^\rho). \quad (2.135)$$

Para abelianizar el vínculo hamiltoniano, en primer lugar, le sumamos a éste un múltiplo del vínculo de difeomorfismos,

$$\begin{aligned}\bar{C}\equiv&C-\frac{2\sqrt{E^x}}{(E^x)'}K_\rho C_{\rm diff}=\frac{((E^x)')^2}{8\sqrt{E^x}E^\rho}-\frac{E^\rho}{2\sqrt{E^x}}(1+K_\rho^2)\\&-\frac{2\sqrt{E^x}E^\rho}{(E^x)'}K_\rho K_\rho'-\frac{\sqrt{E^x}(E^x)'(E^\rho)'}{2(E^\rho)^2}+\frac{\sqrt{E^x}(E^x)''}{2E^\rho},\end{aligned} \quad (2.136)$$

y posteriormente lo reescalamos por la cantidad $\frac{(E^x)'}{E^\rho}$, de modo que

$$C_A\equiv\frac{(E^x)'}{E^\rho}\bar{C}=-\left(\sqrt{E^x}\left[1+K_\rho^2-\frac{((E^x)')^2}{4(E^\rho)^2}\right]\right)', \quad (2.137)$$

con lo cual, el vínculo hamiltoniano se convierte en una derivada total. Verifiquemos que este nuevo vínculo hamiltoniano está abelianizado:

$$\begin{aligned}&\{C_A(N),C_A(M)\}=\\&\int dxdyN(x)M(y)\left[\frac{(E^x)'K_\rho}{\sqrt{E^x}}\{C_A(x),K_\rho(y)\}\right.\\&+2\sqrt{E^x}(\{C_A(x),K_\rho)(y)\}(K_\rho)'+\{C_A(x),(K_\rho)'\}K_\rho)\\&+\frac{1}{2}\frac{(((E^x)')^2\sqrt{E^x})'}{(E^\rho)^3}\{C_A(x),E^\rho(y)\}-\frac{3}{2}\frac{\sqrt{E^x}((E^x)')^2}{(E^\rho)^4}(E^\rho)'\{C_A(x),E^\rho(y)\}\\&\left.+\frac{\sqrt{E^x}((E^x)')^2}{2(E^\rho)^3}\{C_A(x),(E^\rho)'(y)\}\right]\end{aligned} \quad (2.138)$$

sustituyendo, entonces, los corchetes que se muestran a continuación en la ex-

presión (2.138),

$$\{C_A(x), K_\rho(y)\} = \left(\frac{((E^x)')^2\sqrt{E^x}}{2(E^\rho)^3}\right)'(-\delta(x-y)) + \frac{\sqrt{E^x}((E^x)')^2}{2(E^\rho)^3}(-\delta_x(x-y)),$$

(2.139)

$$\{C_A(x), E^\rho(y)\} = (2\sqrt{E^x}K_\rho)'\delta(x-y) + 2\sqrt{E^x}K_\rho\delta_x(x-y), \tag{2.140}$$

$$\{C_A(x), (E^\rho)'(y)\} = (2\sqrt{E^x}K_\rho)'(-\delta_x(x-y)) - 2\sqrt{E^x}K_\rho\delta_{xy}(x-y), \tag{2.141}$$

$$\{C_A(x), (K_\rho)'(y)\} = \left(\frac{((E^x)')^2\sqrt{E^x}}{2(E^\rho)^3}\right)'(-\delta(x-y)) \tag{2.142}$$

$$+ \frac{\sqrt{E^x}((E^x)')^2}{2(E^\rho)^3}(-\delta_{xy}(x-y)), \tag{2.143}$$

y resolviendo algunas integrales por partes se obtiene la identidad:

$$\begin{aligned}\{C_A(N), C_A(M)\} = \int dy(&-(MA')'NB - (MA)'(NB)' - MA(NB')') \\ &+ (B'M)'NA + (NA')'BM + (MB)'(NA')),\end{aligned} \tag{2.144}$$

donde $A \equiv 2\sqrt{E^x}K_\rho$ y $B \equiv \frac{\sqrt{E^x}((E^x)')^2}{2(E^\rho)^3}$. Realizando las derivadas correspondientes se consigue el resultado buscado,

$$\{C_A(N), C_A(M)\} = 0. \tag{2.145}$$

En efecto, con este nuevo vínculo hamiltoniano el álgebra de los vínculos es un álgebra de Lie. Nos encontramos, ahora sí, bajo las condiciones adecuadas para aplicar la cuantización de Dirac, lo que haremos en el capítulo 5.

Antes de concluir esta sección, mostraremos que este nuevo conjunto de vínculos da lugar a la misma solución métrica que los anteriores, a saber, la solución de Schwarzschild. En lo que sigue, eliminaremos la libertad gauge asociada al vínculo de Gauss, imponiendo $\eta = 0$. Los vínculos, tras la modificación realizada al vínculo hamiltoniano, están dados por

$$C(\bar{N}) = -\int dx\bar{N}\left[\sqrt{E^x}\left(1 - \frac{((E^x)')^2}{4(E^\rho)^2} + (K_\rho)^2\right)\right]', \tag{2.146}$$

$$C_{\text{diff}}(\bar{N}^r) = \int dx\bar{N}^r[-(E^x)'K_x + E^\rho(K_\rho)'] \tag{2.147}$$

donde

$$N^r = \bar{N}^r - 2N\frac{K_\rho\sqrt{E^x}}{(E^x)'}, \qquad N = \bar{N}\frac{(E^x)'}{E^\rho}. \tag{2.148}$$

Integrando por partes el vínculo hamiltoniano se obtiene:

$$C(\widetilde{N}) = -\int dx\widetilde{N}\left(-\sqrt{E^x}(1+K_\rho^2) + 2GM + \frac{((E^x)')^2\sqrt{E^x}}{4(E^\rho)^2}\right), \tag{2.149}$$

donde la función lapso es ahora $\widetilde{N} \equiv \bar{N}'$. El término $2GM$ surge tras imponer condiciones de borde para la función lapso [27, 20, 23]. El hamiltoniano total es

$$\begin{aligned} H = \int dx \Big[\widetilde{N} \Big(\sqrt{E^x}(1+K_\rho^2) - \frac{((E^x)')^2\sqrt{E^x}}{4(E^\rho)^2} - 2GM \Big) \\ + \bar{N}^r(-(E^x)'K_x + E^\rho K_\rho') \Big]. \end{aligned} \tag{2.150}$$

Fijando las condiciones de gauge $E^x = x^2$ y $K_\rho = 0$ e imponiendo su conservación en el tiempo:

$$\{E^x, H\} = -\bar{N}^r(E^x)' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{N}^r = 0, \tag{2.151}$$

entonces,

$$N^r = -2N\frac{K_\rho\sqrt{E^x}}{(E^x)'} = 0. \tag{2.152}$$

Como $\bar{N}^r = 0$, entonces $\{K_\rho, H\} = 0$ implica que $\widetilde{N} = 0$, por lo tanto, $\bar{N}' = 0$:

$$\bar{N}' = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{E^\rho}{(E^x)'} N \right)' = 0, \tag{2.153}$$

eligiendo la constante de integración igual a $1/2$, obtenemos:

$$N = \frac{1}{2}\frac{(E^x)'}{E^\rho}. \tag{2.154}$$

Por otro lado, resolviendo el vínculo hamiltoniano

$$\sqrt{E^x}(1+K_\rho^2) + 2GM + \frac{((E^x)')^2\sqrt{E^x}}{4(E^\rho)^2} = 0, \tag{2.155}$$

y reemplazando por las fijaciones de gauge para E^x y K_ρ

$$E^\rho = \frac{x}{\sqrt{1-\frac{2GM}{x}}}. \tag{2.156}$$

Sustituyendo este valor para E^ρ y la fijación de gauge para E^x en (2.154),

$$N = \sqrt{1-\frac{2GM}{x}}. \tag{2.157}$$

Por lo tanto, la métrica es:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(N^2 - gN^xN^x)dt^2 + \frac{(E^\rho)^2}{E^x}dx^2 + E^x d\Omega^2 \\ &= \left(1-\frac{2GM}{x}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{x}\right)^{-1}dx^2 + x^2 d\Omega^2. \end{aligned} \tag{2.158}$$

En efecto, hemos recuperado la métrica de Schwarzschild en su forma usual.

Capítulo 3

Renormalización en espacio-tiempo continuo

En este capítulo abordaremos la renormalización del tensor energía-momento asociado a un campo escalar libre en un espacio-tiempo con curvatura, es decir, de la cantidad $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ que aparece en la teoría semiclásica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda_B g_{\mu\nu} = -8\pi G_B \langle T_{\mu\nu} \rangle. \tag{3.1}$$

Para ello introduciremos, en primer término, la teoría del campo escalar libre en un espacio-tiempo curvo cualquiera, luego nos detendremos en algunos desarrollos que permiten un estudio más exhaustivo de las divergencias ultravioletas, para luego aplicar sobre las mismas el método de regularización dimensional, obteniendo finalmente un valor renormalizado de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$.

3.1. Cuantización del campo escalar

La cuantización del campo escalar sobre un espacio-tiempo curvo guarda una gran similitud con la del espacio-tiempo de Minkowski. La densidad lagrangeana está dada por:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{-g(x)} [g^{\mu\nu} \phi(x)_{;\mu} \phi(x)_{;\nu} - (m^2 + \xi R(x)) \phi^2(x)], \tag{3.2}$$

donde x es un punto del espacio-tiempo, $\phi(x)$ un campo escalar y m la masa del cuanto de dicho campo. El punto y coma ; en los subíndices indica una derivada covariante (de aquí en adelante adoptaremos esta convención). El acoplamiento entre los campos escalar y gravitacional está representado por el término $\xi R \phi^2$, donde ξ es un factor numérico y $R(x)$ es el escalar de Ricci. Se trata del único acoplamiento local de este tipo con las dimensiones correctas. La acción, en consecuencia, está dada por:

$$S = \int \mathcal{L}(x) d^n x, \tag{3.3}$$

donde n es la dimensión del espacio-tiempo. La ecuación del movimiento derivada de $\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$ es

$$[\Box_x + m^2 + \xi R(x)] \phi(x) = 0, \tag{3.4}$$

donde $\Box_x = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$. El producto escalar entre los campos se define como

$$(\phi_1, \phi_2) = -i\int_\Sigma [\phi_1(x)\partial_\mu\phi_2(x)^* - (\partial_\mu\phi_1)\phi_2]\sqrt{-g_\Sigma(x)}d\Sigma^\mu, \tag{3.5}$$

donde $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$, siendo n^μ un vector unitario dirigido hacia el futuro, ortogonal a la hipersuperficie espacial Σ y $d\Sigma$ el elemento de volumen en Σ. Bajo la hipótesis de que Σ es una superficie de Cauchy, se puede mostrar que (ϕ_1, ϕ_2) es independiente de Σ [25].

Existe un conjunto completo de modos, $u_i(x)$, solución de (3.4), que son ortonormales en el producto interno (3.5), de modo que:

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \qquad (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij}, \qquad (u_i, u_j^*) = 0, \tag{3.6}$$

lo que permite expandir ϕ:

$$\phi(x) = \sum_i [a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)]. \tag{3.7}$$

La cuantización covariante de la teoría es implementada adoptando las relaciones de conmutación

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \text{ etc.} \tag{3.8}$$

La construcción del estado vacío, del espacio de Fock, etcétera puede realizarse exactamente igual al caso minkowskiano. Sin embargo, existe una ambigüedad inherente a este formalismo. En el espacio de Minkowski hay un conjunto natural de modos, asociados con el sistema de coordenadas rectangulares (t, x, y, z). Dichas coordenadas están asociadas con el grupo de Poincaré, la acción del cual deja invariante el elemento de línea de Minkowski, específicamente, el vector $\frac{\partial}{\partial t}$ es un vector de Killing del espacio de Minkowski, ortogonal a las hipersuperficies tipo espacio t =constante y los modos son autofunciones de este vector de Killing con autovalores $-i\omega$ ($\omega > 0$). El vacío es invariante bajo la acción del grupo de Poincaré. En un espacio-tiempo curvo el grupo de Poincaré ya no es un grupo de simetría, y, en general, no habrá vectores de Killing que permitan definir modos de frecuencia positiva. Así, tampoco dispondremos de una descomposición natural de ϕ en acuerdo con estas coordenadas privilegiadas.

Podemos considerar, en consecuencia, un segundo conjunto completo de modos ortonormales $\bar{u}_j(x)$, tales que

$$\phi(x) = \sum_j [\bar{a}_j \bar{u}_j(x) + \bar{a}_j^\dagger \bar{u}_j^*(x)]. \tag{3.9}$$

Esta nueva descomposición de ϕ permite definir un nuevo estado vacío y un nuevo espacio de Fock. Como ambos conjuntos de modos son completos, los nuevos modos pueden expresarse en función de los viejos:

$$\bar{u}_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*), \tag{3.10}$$

y recíprocamente:

$$u_i = \sum_j (\alpha_{ji}^* \bar{u}_j - \beta_{ji} \bar{u}_j^*). \tag{3.11}$$

Estas relaciones son conocidas como transformaciones de Bogolubov. Las matrices α_{ij}, β_{ij} se denominan coeficientes de Bogolubov. Usando las relaciones anteriores y (3.6) pueden determinarse estos coeficientes:

$$\alpha_{ij} = (\bar{u}_i, u_j), \quad \beta_{ij} = -(\bar{u}_i, u_j^*). \tag{3.12}$$

Considerando que ambas expansiones para ϕ deben ser iguales y la ortonormalidad de los modos se puede mostrar que:

$$a_i = \sum_j (\alpha_{ji}\bar{a}_j + \beta_{ji}^*\bar{a}_j^\dagger), \tag{3.13}$$

$$\bar{a}_j = \sum_i (\alpha_{ji}^* a_i - \beta_{ji}^* a_i^\dagger). \tag{3.14}$$

Además, los coeficientes de Bogolubov satisfacen las propiedades

$$\sum_k (\alpha_{ik}\alpha_{jk}^* - \beta_{ik}\beta_{jk}^*) = \delta_{ij}, \tag{3.15}$$

$$\sum_k (\alpha_{ik}\beta_{jk} - \beta_{ik}\alpha_{jk}) = 0. \tag{3.16}$$

De (3.13) se sigue inmediatamente que dos espacios de Fock basados en dos elecciones diferentes de modos, u_i y $\bar{u}_j$, son diferentes cuando $\beta_{ji} \neq 0$. Por ejemplo, $|\bar{0}\rangle$ (el vacío asociado a los modos $\bar{u}_i$) no será aniquilado por a_i:

$$a_i|\bar{0}\rangle = \sum_j \beta_{ji}^* |\bar{1}_j\rangle \neq 0. \tag{3.17}$$

Incluso el valor esperado del operador número $N_i = a_i^\dagger a_i$, para el número de partículas en el modo u_i, en el estado $|\bar{0}\rangle$, es

$$\langle\bar{0}|N_i|\bar{0}\rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2, \tag{3.18}$$

de manera que el vacío de los modos $\bar{u}_j$ contiene $\sum_j |\beta_{ji}|^2$ partículas en el modo u_i.

El espacio de Fock basado en el estado $|0\rangle$ puede relacionarse con el que se basa en $|\bar{0}\rangle$ usando la relación de completitud del espacio de Fock:

$$\begin{aligned} &|\ {}^{(1)}n_{i_1},\ {}^{(2)}n_{i_2}, \ldots\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_k} |\bar{1}_{j_1}, \bar{1}_{j_2}, \ldots, \bar{1}_{j_k}\rangle\langle\bar{1}_{j_1}, \bar{1}_{j_2}, \ldots, \bar{1}_{j_k}|\ {}^{(1)}n_{i_1},\ {}^{(2)}n_{i_2}, \ldots\rangle. \end{aligned} \tag{3.19}$$

En la notación usada aquí tenemos, por ejemplo,

$$|\ {}^{(1)}n_{i_1}\rangle = |1_{i_1}, 1_{i_1}, \ldots, 1_{i_1}\rangle/(\ {}^{(1)}n_i!)^{1/2}, \tag{3.20}$$

donde "1_{i_1}" está repetido ${}^{(1)}n_i$ veces. El elemento de matriz

$$\langle\bar{1}_{j_1}, \bar{1}_{j_2}, \ldots, \bar{1}_{j_k}|\ {}^{(1)}n_{i_1}\ {}^{(2)}n_{i_2}, \ldots\rangle \tag{3.21}$$

puede interpretarse como la amplitud de transición del estado $|\ {}^{(1)}n_{i_1}\ {}^{(2)}n_{i_2},\dots\rangle$ a $|\bar{1}_{j_1},\bar{1}_{j_2},\dots,\bar{1}_{j_k}\rangle$, y puede escribirse en términos de los coeficientes de Bogolubov. En particular, la transición del vacío a un estado de muchas partículas puede obtenerse escribiendo este último estado en función del vacío y operadores de creación, obteniéndose los resultados:

$$\langle\bar{0}\,|\,1_{j_1},\dots,1_{j_k}\rangle \begin{cases} i^{k/2}\langle\bar{0}\,|\,0\rangle\sum_\rho \Lambda_{\rho_1\rho_2}\dots\Lambda_{\rho_{k-1}\rho_k} & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\langle\bar{1}_{j_1},\bar{1}_{j_2},\dots,\bar{1}_{j_k}\,|\,0\rangle \begin{cases} i^{k/2}\langle\bar{0}\,|\,0\rangle\sum_\rho V_{\rho_1\rho_2}\dots V_{\rho_{k-1}\rho_k} & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases} \tag{3.23}$$

donde la suma en ρ barre todas las permutaciones posibles del conjunto $\{j_1,\dots,j_k\}$ y

$$\Lambda_{ij} = -i\sum_k \beta_{kj}\alpha^{-1}_{ik}, \tag{3.24}$$

$$V_{ij} = i\sum_k \beta^*_{jk}\alpha^{-1}_{ki}. \tag{3.25}$$

Las amplitudes de transición de estados de muchas a muchas partículas puede encontrarse en [7].

Funciones de Green

En espacio-tiempos curvos las funciones de Green se definen de la misma manera que en el espacio-tiempo de Minkowski, guardando especial cuidado en lo referente a la elección del estado vacío pues, como acabamos de mostrar, no es único. El propagador de Feynman para el campo descrito por (3.4) es:

$$iG_F(x,x') = \langle 0|T(\phi(x)\phi(x'))|0\rangle \tag{3.26}$$

que, como consecuencia de (3.4), satisface

$$[\Box_x + m^2 + \xi R(x)]G_F(x.x') = -(-g(x))^{-1/2}\delta^n(x-x'). \tag{3.27}$$

Es importante resaltar que (3.27) no especifica el estado $|0\rangle$ que aparece en (3.26), así como tampoco asegura que la solución tenga la propiedades de un producto T-ordenado. Para fijar el estado vacío e imponer el orden temporal deben especificarse las condiciones de borde sobre la solución de (3.27). En espacio-tiempos curvos la mencionada especificación no es tan simple como en el caso minkowskiano, estando sujeta a características globales del espacio-tiempo curvo en concreto.

Concluimos esta sección con el tensor de energía-impulso para el campo escalar acoplado a gravedad. A partir de la igualdad

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{[-g(x)]^{1/2}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{3.28}$$

puede calcularse directamente, dando como resultado:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} =& (1-2\xi)\phi_{;\mu}\phi_{;\nu} + (2\xi-1/2)g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\phi_{;\rho}\phi_\sigma - 2\xi\phi_{;\mu\nu}\phi \\ & - 2\xi\phi_{;\mu\nu}\phi + 2/n\xi g_{\mu\nu}\phi\Box\phi - \xi[R_{\mu\nu} - 1/2Rg_{\mu\nu} + 2(n-1)/n\xi Rg_{\mu\nu}]\phi^2. \end{aligned} \tag{3.29}$$

3.2. Expansión de funciones de Green

Para tratar con las divergencias ultravioletas que emergen al calcular $\langle T_{\mu\nu}\rangle$, únicamente hay que considerar el comportamiento de los campos para frecuencias altas (o longitud de onda corta). En esta sección nos detendremos en el comportamiento de las funciones de Green, tales como $G_F(x,x')$ (de Feynman) en el límite $x \to x'$.

En coordenadas normales de Riemann (ver apéndice C) y^μ, para el punto x, con origen en el punto x', la métrica puede desarrollarse como

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} &+ \frac{1}{3}R_{\mu\alpha\nu\beta}y^\alpha y^\beta - \frac{1}{6}R_{\mu\alpha\nu\beta;\gamma}y^\alpha y^\beta y^\gamma \\ &+ \left[\frac{1}{20}R_{\mu\alpha\nu\beta;\gamma\delta} + \frac{2}{45}R_{\alpha\mu\beta\lambda}R^{\lambda}{}_{\gamma\nu\delta}\right] y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta + \dots \end{aligned} \tag{3.30}$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski y los coeficientes están evaluados en $y = 0$. Por su parte, el determinante de la métrica puede desarrollarse como

$$\begin{aligned} g =& 1 - \frac{1}{3}R_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta - \frac{1}{6}R_{\alpha\beta;\gamma}y^\alpha y^\beta y^\gamma \\ &+ \left(\frac{1}{18}R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta} - \frac{1}{90}R^{\kappa}_{\lambda\alpha\beta}R^{\lambda}_{\gamma\delta\kappa} - \frac{1}{20}R_{\alpha\beta;\gamma\delta}\right) \times y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta + \dots \end{aligned} \tag{3.31}$$

Todos los índices a la derecha de las igualdades (3.30) y (3.31) se suben y bajan mediante la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Se define:

$$\bar{G}_F(x,x') \equiv (-g(x))^{1/4}G_F(x,x') \to G_F(x,x') = (-g(x))^{-1/4}\bar{G}_F(x,x'). \tag{3.32}$$

Sustituyendo esta última expresión y los desarrollos (3.30) y (3.31) en la ecuación (3.27) se encuentra que $\bar{G}_F(x,x')$ satisface la ecuación

$$\begin{aligned} &\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\bar{G} + \Big[m^2 + (\xi - \frac{1}{6})R\Big]\bar{G} - \frac{1}{3}R_\alpha{}^\nu y^\alpha\partial_\nu\bar{G} + \frac{1}{3}R^{\mu\ \ \nu}_{\ \alpha\ \beta}y^\alpha y^\beta\partial_\mu\partial_\nu\bar{G} \\ &- \Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)R_{;\alpha}y^\alpha\bar{G} + \Big(-\frac{1}{3}R_\alpha{}^\nu{}_{;\beta} + \frac{1}{6}R_{\alpha\beta}{}^{;\nu}\Big)y^\alpha y^\beta\partial_\nu\bar{G} + \frac{1}{6}R^{\mu\ \ \nu}_{\ \alpha\ \beta;\gamma}\partial_\mu\partial_\nu\bar{G} \\ &\times y^\alpha y^\beta y^\gamma + \frac{1}{2}\Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)R_{;\alpha\beta}y^\alpha y^\beta\bar{G} + \Big(-\frac{1}{30}R_\alpha{}^\lambda R_{\lambda\beta} + \frac{1}{60}R_\alpha{}^\lambda R_{\lambda\beta} + \frac{1}{120}R_{;\alpha\beta} \\ &+ \frac{1}{60}R^{\lambda\mu\kappa}_\alpha R_{\lambda\mu\kappa\beta} - \frac{1}{40}\Box R_{\alpha\beta}\Big)y^\alpha y^\beta\bar{G} + \Big(-\frac{3}{20}R^\nu{}_{\alpha;\beta\gamma} + \frac{1}{10}R_{\alpha\beta}{}^{;\nu}{}_\gamma - \frac{1}{60}R^{\kappa\ \ \nu}_{\ \alpha\ \beta} \\ &+ \frac{1}{15}R^\kappa{}_{\alpha\lambda\beta}R_\kappa{}^\nu{}_\gamma{}^\lambda\Big)y^\alpha y^\beta y^\gamma\partial_\nu\bar{G} + \Big(\frac{1}{20}R^{\mu\ \ \nu}_{\ \alpha\ \beta;\gamma\delta} + \frac{1}{15}R^\mu{}_{\alpha\lambda\beta}R^\lambda{}_\gamma{}^\nu{}_\delta\Big)y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta \\ &\times\partial_\mu\partial_\nu\bar{G} = -\delta(y), \end{aligned} \tag{3.33}$$

donde hemos omitido el subíndice F para simplificar notación. Hemos retenido en el desarrollo anterior únicamente términos que involucran derivadas de la métrica hasta orden cuatro, ya que, como probaremos más adelante, estos términos agotan las divergencias ultravioletas que surgen durante la renormalización del tensor energía-impulso. La transformada de Fourier de $\bar{G}_F(x,x')$ está dada por

$$\bar{G}_F(x,x') = (2\pi)^{-n}\int d^n k e^{-iky}\bar{G}_F(k), \tag{3.34}$$

con $ky = \eta^{\alpha\beta}k_\alpha y_\beta$. Puede garantizarse que esta ecuación representa un producto tiempo ordenado integrando en k^0 con el contorno apropiado, lo que es equivalente a sustituir m^2 por $m^2 - i\epsilon$. Para hallar la solución de (3.33) en el espacio de momentos procederemos iterativamente. En primer lugar, escribimos

$$\bar{G}(k) = \bar{G}_0(k) + \bar{G}_1(k) + \bar{G}_2(k) + \ldots, \tag{3.35}$$

de forma que

$$\bar{G}_i(x,x') = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{iky} \bar{G}_i(k), \quad \text{i=0,1,2}\ldots, \tag{3.36}$$

donde $\bar{G}_i(k)$ posee un coeficiente geométrico que involucra i derivadas de la métrica, de lo que se sigue que $\bar{G}_i(k)$ es de orden $k^{-(2-i)}$, en consecuencia, (3.35) es una expansión asintótica para valores grandes de k. Es fácil ver que la solución de orden más bajo viene dada por:

$$\bar{G}_0(k) = (k^2 - m^2)^{-1} \tag{3.37}$$

y que

$$\bar{G}_1(k) = 0. \tag{3.38}$$

Luego, $\bar{G}_2$ debe satisfacer

$$\begin{aligned}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\bar{G}_2 + m^2\bar{G}_2 + \Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)R\bar{G}_0 - \frac{1}{3}R_\alpha{}^\nu y^\alpha \partial_\nu \bar{G}_0 \\ + \frac{1}{3}R^\mu{}_{\alpha\ \beta}{}^\nu y^\alpha y^\beta \partial_\mu\partial_\nu\bar{G}_0 = 0,\end{aligned} \tag{3.39}$$

pero $\bar{G}_0(x,x')$ es invariante Lorentz, puesto que sólo es función de $\eta_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta$. En consecuencia,

$$-\frac{1}{3}R_\alpha{}^\nu y^\alpha\partial_\nu\bar{G}_0 + \frac{1}{3}R^\mu{}_{\alpha\ \beta}{}^\nu y^\alpha y^\beta\partial_\mu\partial_\nu\bar{G}_0 = 0, \tag{3.40}$$

con lo cual (3.39) es equivalente a

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\bar{G}_2 + m^2\bar{G}_2 + \Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)R\bar{G}_0 = 0, \tag{3.41}$$

que en el espacio de momentos toma la forma

$$(-k^2+m^2)\bar{G}_2(k) + \Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)R(k^2-m^2)^{-1} = 0 \to \bar{G}_2(k) = -\frac{(1/6-\xi)R}{(k^2-m^2)^2}. \tag{3.42}$$

La invariancia Lorentz de $\bar{G}_0(x,x')$ también da lugar a simplificaciones en (3.33) para el cálculo de $\bar{G}_3$ y $\bar{G}_4$, a saber,

$$\Big(-\frac{1}{3}R_\alpha{}^\nu{}_{;\beta} + \frac{1}{6}R_{\alpha\beta}{}^{;\nu}\Big)y^\alpha y^\beta\partial_\nu\bar{G}_0 + \frac{1}{6}R^\mu{}_{\alpha\ \beta;\gamma}{}^\nu y^\alpha y^\beta y^\gamma\partial_\mu\partial_\nu\bar{G}_0 = 0 \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}&\Big(-\frac{3}{20}R^\nu{}_{\alpha;\beta\gamma} + \frac{1}{10}R_{\alpha\beta}{}^{;\nu}{}_\gamma - \frac{1}{60}R^\kappa{}_{\alpha\ \beta}{}^\nu R_{\kappa\gamma} + \frac{1}{15}R^\kappa{}_{\alpha\lambda\beta}R_\kappa{}^{\nu\ \lambda}{}_\gamma\Big)y^\alpha y^\beta y^\gamma\partial_\nu\bar{G}_0 \\ &+ \Big(\frac{1}{20}R^\mu{}_{\alpha\ \beta;\gamma\delta}{}^\nu + \frac{1}{15}R^\mu_{\alpha\lambda\beta}R^\lambda{}_{\gamma\ \delta}{}^\nu\Big)y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta\partial_\mu\partial_\nu\bar{G}_0 = 0.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Por otra parte, como $\bar{G}_2(x,x')$ también es una cantidad invariante Lorentz, satisface una igualdad análoga a la satisfecha por $\bar{G}_0$ en la ecuación (3.40). Luego, (3.33) se reduce a la siguiente ecuación para tercer y cuarto orden en derivadas de la métrica:

$$\begin{aligned}&\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\bar{G}+\Big[m^2+\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)R\Big]\bar{G}-\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)R_{;\alpha}y^\alpha\bar{G}+\frac{1}{2}\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)R_{;\alpha\beta}y^\alpha y^\beta\bar{G}\\&+\Big(-\frac{1}{30}R_\alpha{}^\lambda R_{\lambda\beta}+\frac{1}{60}R^\kappa{}_\alpha{}^\lambda{}_\beta R_{\kappa\lambda}+\frac{1}{60}R^{\lambda\mu\kappa}{}_\alpha R_{\lambda\mu\kappa\beta}+\frac{1}{120}R_{;\alpha\beta}-\frac{1}{40}\Box R_{\alpha\beta}\Big)\\&\times y^\alpha y^\beta\bar{G}=-\delta(y).\end{aligned}\tag{3.45}$$

En el espacio de momentos

$$\begin{aligned}&\Big[k^2-m^2-\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)R\Big]\bar{G}(k)+i\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)R_{;\alpha}\partial^\alpha\bar{G}(k)+\Big[-\frac{1}{40}\Box R_{\alpha\beta}\\&+\frac{1}{120}R_{;\alpha\beta}+\frac{1}{2}\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)R_{;\alpha\beta}-\frac{1}{30}R_\alpha{}^\lambda R_{\lambda\beta}+\frac{1}{60}R^\kappa{}_\alpha{}^\lambda{}_\beta R_{\kappa\lambda}+\frac{1}{60}R^{\lambda\mu\kappa}{}_\alpha R_{\lambda\mu\kappa\beta}\Big]\\&\times\partial^\alpha\partial^\beta\bar{G}(k)=1,\end{aligned}\tag{3.46}$$

donde $\partial^\alpha\bar{G}(k)=\partial\bar{G}/\partial k_\alpha$. Finalmente, utilizando que

$$(k^2-m^2)^{-1}\partial^\alpha(k^2-m^2)^{-1}=1/2\partial^\alpha(k^2+m^2)^{-2},\tag{3.47}$$

$$(k^2-m^2)^{-1}\partial^\alpha\partial^\beta(k^2-m^2)^{-1}=\frac{1}{3}\partial^\alpha\partial^\beta(k^2-m^2)^{-2}-2/3\eta^{\alpha\beta}(k^2-m^2)^{-3},\tag{3.48}$$

$\bar{G}_F(k)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned}\bar{G}_F(k)\approx&(k^2-m^2)^{-1}-\Big(\frac{1}{6}-\xi\Big)R(k^2-m^2)^{-2}\\&+\frac{1}{2}i\Big(\frac{1}{6}-\xi\Big)R_{;\alpha}\partial^\alpha(k^2-m^2)^{-2}-\frac{1}{3}a_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial^\beta(k^2-m^2)^{-2}\\&+\Big[\Big(\frac{1}{6}-\xi\Big)^2R^2+\frac{2}{3}a_\lambda^\lambda\Big](k^2-m^2)^{-3},\end{aligned}\tag{3.49}$$

donde

$$\begin{aligned}a_{\alpha\beta}=&\frac{1}{2}\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)R_{;\alpha\beta}+\frac{1}{120}R_{;\alpha\beta}-\frac{1}{40}R_{\alpha\beta;\lambda}{}^\lambda-\frac{1}{30}R_\alpha{}^\lambda R_{\lambda\beta}\\&+\frac{1}{60}R^\kappa{}_\alpha{}^\lambda{}_\beta R_{\kappa\lambda}+\frac{1}{60}R^{\lambda\mu\kappa}{}_\alpha R_{\lambda\mu\kappa\beta}.\end{aligned}\tag{3.50}$$

Sustituyendo el resultado para $\bar{G}_F(k)$ en $\bar{G}_F(x,x')$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{G}_F(x,x')\approx\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}e^{-iky}\Big[&a_0(x,x')+a_1(x,x')\Big(-\frac{\partial}{\partial m^2}\Big)\\&+a_2(x,x')\Big(\frac{\partial}{\partial m^2}\Big)^2\Big](k^2-m^2)^{-1},\end{aligned}\tag{3.51}$$

donde

$$a_0(x,x') \equiv 1 \tag{3.52}$$

$$a_1(x,x') \equiv \Big(\frac{1}{6}-\xi\Big)R - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{6}-\xi\Big)R_{;\alpha}y^\alpha - \frac{1}{3}a_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta \tag{3.53}$$

$$a_2(x,x') \equiv \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{6}-\xi\Big)^2 R^2 + \frac{1}{3}a^\lambda{}_\lambda, \tag{3.54}$$

y todas las cantidades geométricas están evaluadas en el origen de coordenadas, x'.

Introduciendo la representación integral

$$(k^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1} = -i\int_0^\infty ds e^{is(k^2-m^2+i\epsilon)} \tag{3.55}$$

en (3.51) e integrando en k se obtiene

$$\bar{G}_F(x,x') = -i(4\pi)^{-n/2}\int_0^\infty ids(is)^{-n/2}\exp[-im^2 s + (\sigma/2is)]F(x,x';is), \tag{3.56}$$

donde $\sigma(x,x') = 1/2y_\alpha y^\alpha$ y la función F está dada por la siguiente expansión asintótica

$$F(x,x';is) \approx a_0(x,x') + a_1(x,x')is + a_2(x,x')(is)^2 + \ldots \tag{3.57}$$

A partir de esta última expresión y (3.32) se obtiene la siguiente identidad:

$$G_F^{DS}(x,x') = -i\Delta^{1/2}(x,x')(4\pi)^{-n/2}\int_0^\infty ids(is)^{-n/2}e^{-im^2 s+(\sigma/2is)}F(x,x';is), \tag{3.58}$$

Se utiliza el superíndice DS para esta expansión puesto que DeWitt y Schwinger fueron quienes la derivaron originalmente. Δ es el determinante de Van Vleck $\Delta(x,x') = -\det[\partial_\mu\partial_\nu\sigma(x,x')][g(x)g(x')]^{-1/2}$, que en coordenadas normales se reduce a $[-g(x)]^{-1/2}$, pues

$$\begin{aligned}\Delta(x,x') &= -\det[\partial_\mu\partial_\nu 1/2y_\alpha y^\alpha][g(x)\det(\eta_{\mu\nu})]^{-1/2} \\ &= -\det[\delta_{\mu\nu}][-g(x)]^{-1/2}.\end{aligned} \tag{3.59}$$

En el tratamiento de DeWitt, la extensión de la expansión asintótica (3.57) a cualquier orden es

$$F(x,x';is) \approx \sum_0^\infty a_j(x,x')(is)^j, \tag{3.60}$$

con $a_0(x,x') = 1$. Las a_i siguientes pueden determinarse a través de relaciones de recursión, de forma similar a como hemos hecho más arriba en esta sección.

3.3. Acción efectiva

Concentrémonos ahora en la teoría semiclásica, donde el campo gravitacional es tratado clásicamente mientras que los campos materiales son tratados

cuánticamente. La idea es similar a la teoría semiclásica de la electrodinámica, donde el campo electromagnético clásico está acoplado al valor esperado del operador corriente eléctrica. En consecuencia, buscamos una teoría basada en las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{3.61}$$

pero donde el tensor de energía-momento es considerado como el valor esperado de una magnitud cuántica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda_B g_{\mu\nu} = -8\pi G_B \langle T_{\mu\nu}\rangle. \tag{3.62}$$

La razón para los subíndices B en la constante cosmológica y en la constante de Newton se clarificarán en el transcurso de la renormalización.

La ecuación clásica (3.61) puede derivarse de la acción

$$S = S_g + S_m, \tag{3.63}$$

a partir de la ecuación

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \tag{3.64}$$

El sumando S_g en (3.63) corresponde a la acción gravitacional

$$S_g = \int L_g\sqrt{-g}d^n x = \int \sqrt{-g}(16\pi G_B)^{-1}(R - 2\Lambda)d^n x, \tag{3.65}$$

de modo que $2\sqrt{-g}\delta S_g/\delta g^{\mu\nu}$ da lugar a la parte izquierda de la ecuación (3.61). El término S_m corresponde a la acción material clásica, para la cual se satisface:

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu}, \tag{3.66}$$

que es el lado derecho de la igualdad (3.61).

Para trabajar en el caso semiclásico introducimos la acción efectiva W para los campos materiales cuánticos:

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}} = \langle T_{\mu\nu}\rangle, \tag{3.67}$$

donde el significado preciso de $\langle\ \rangle$ será elucidado más adelante. Para estudiar con más detalle la acción efectiva pondremos foco, brevemente, en algunos conceptos vinculados con el método de la integral de caminos. Un análisis más detallado puede encontrarse, por ejemplo, en el trabajo de Abers y Lee [1]. Comenzamos introduciendo el generador funcional para un campo ϕ y acción S:

$$Z[J] = \langle \text{out}, 0 \,|\, 0, \text{in}\rangle = \int \mathcal{D}[\phi]\text{exp}\Big\{iS[\phi] + i\int d^n x J(x)\phi(x)\Big\}, \tag{3.68}$$

donde la integral está definida en el espacio de funciones ϕ con una medida apropiada. Esta cantidad arroja como resultado la amplitud de transición del vacío inicial $|0, \text{in}\rangle$ al vacío final $|0, \text{out}\rangle$ en la presencia de una fuente $J(x)$ encargada de la producción de partículas. En el espacio de Minkowski, cuando

la mencionada fuente es apagada los dos vacíos se reducen al vacío libre del espacio-tiempo minkowskiano $|0\rangle$, de forma que $Z[0] = \langle 0 \,|\, 0\rangle = 1$, obteniéndose una condición de normalización. Diferenciando funcionalmente al generador Z con respecto a la fuente J, se obtienen las funciones de Green conectadas, tiempo ordenadas de la teoría, a saber,

$$i^j \langle 0|T(\phi(x_1)\dots\phi(x_j))|0\rangle_c = \left(\frac{\delta^j \ln Z}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_j)}\right)_{J=0}. \tag{3.69}$$

Consideremos ahora el generador funcional para la acción material S_m:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\phi] \exp\Big\{S_m[\phi] + i\int J(x)\phi(x)d^n x\Big\}. \tag{3.70}$$

La presencia de la corriente externa J puede provocar que el estado vacío $|0, \text{in}\rangle$ sea inestable, i.e., que dé lugar a la producción de partículas. Cuando el espacio-tiempo es curvo, en general $|0, \text{out}\rangle \neq |0, \text{in}\rangle$, incluso en la ausencia de corrientes J, de modo que la condición de normalización del espacio de Minkowski deja de ser válida. No obstante, la cuantización por integral de caminos aún funciona cuando el espacio-tiempo goza de curvatura, diferenciándose del espacio plano en que S_m refiere únicamente a la acción material y $J(x)$ constituye una densidad escalar (pues estamos trabajando con campos escalares). Así, la variación de (3.70) con respecto a J evaluada en $J = 0$ es

$$\delta Z[0] = i\int \mathcal{D}[\phi]\delta S_m e^{iS_m[\phi]} = i\langle \text{out}, 0|\delta \text{S}_\text{m}|0, \text{in}\rangle = \text{i}\langle \text{out}, 0|\delta \text{S}_\text{m}|0, \text{in}\rangle. \tag{3.71}$$

De esta expresión y (3.66) se deduce directamente que

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta Z[0]}{\delta g^{\mu\nu}} = i\langle \text{out}, 0|T_{\mu\nu}|0, \text{in}\rangle. \tag{3.72}$$

Además, como la acción material viene exponenciada en $Z[0]$, es posible la identificación

$$Z[0] = e^{iW}, \tag{3.73}$$

de donde,

$$W = -i\ln\langle \text{out}, 0 \,|\, 0, \text{in}\rangle \tag{3.74}$$

y de (3.72) se deduce que

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}} = -i\frac{2}{\sqrt{-g}Z[0]}\frac{\delta Z[0]}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{3.75}$$

$$= \frac{\langle \text{out}, 0|\text{T}_{\mu\nu}|0, \text{in}\rangle}{\langle \text{out}, 0 \,|\, 0, \text{in}\rangle}. \tag{3.76}$$

Recordemos que la acción correspondiente a un campo escalar cuántico sobre un espacio-tiempo curvo viene dada por:

$$S_m[\phi] = \frac{1}{2}\int d^n x\sqrt{-g}\{g^{\mu\nu}\phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - [m^2 - i\epsilon + \xi R]\phi^2\}, \tag{3.77}$$

donde el factor infinitesimal ϵ (que se encuentra vinculado a las condiciones de borde de ϕ) puede utilizarse para que la integral funcional converja. Integrando

por partes el primer integrando en (3.77) y despreciando un término de borde, S_m puede reescribirse como

$$S_m[\phi] = -\frac{1}{2}\int d^n x\sqrt{-g}\phi[\Box + m^2 - i\epsilon + \xi R]\phi, \tag{3.78}$$

lo que permite sustituir el exponente de la integral en (3.70) por:

$$-\frac{1}{2}\int d^n x d^n y\sqrt{-g(x)}\sqrt{-g(y)}\phi(x)K_{xy}\phi(y) + \int d^n x J(x)\phi(x), \tag{3.79}$$

donde el operador simétrico K_{xy} queda definido por medio de la relación:

$$K_{xy} \equiv (\Box_x + m^2 - i\epsilon + \xi R)\delta^n(x-y)[-g(y)]^{-1/2}. \tag{3.80}$$

K_{xy} puede tratarse formalmente como una matriz simétrica con índices continuos x e y. Su inverso se define como

$$\int d^n y[-g(y)]^{1/2}K_{xy}K^{-1}_{yz} = \delta(x-z)[-g(z)]^{-1/2}. \tag{3.81}$$

Por otra parte,

$$\int d^n y[-g(y)]^{1/2}K_{xy}G_F(y,z) \tag{3.82}$$

$$= \int d^n y[-g(y)]^{1/2}(\Box_x + m^2 - i\epsilon + \xi R)G_F(y,z)\delta^n(x-y)[-g(y)]^{-1/2} \tag{3.83}$$

$$= -(\Box_x + m^2 - i\epsilon + \xi R)G_F(x,z) = -\delta(x-z)[-g(z)]^{-1/2}, \tag{3.84}$$

donde hemos utilizando la identidad

$$\int d^n x[-g(x)]^{1/2}\delta^n(x-y)[-g(y)]^{-1/2} = 1, \tag{3.85}$$

y la ecuación (3.27). Luego,

$$K^{-1}_{xz} = -G_F(x,z). \tag{3.86}$$

K_{xy} satisface, además, las siguientes propiedades:

$$\int d^n y(-g(y))^{1/2}K^{1/2}_{xy}K^{1/2}_{yz} = K_{xz}, \tag{3.87}$$

$$\int d^n y(-g(y))^{1/2}K^{1/2}_{xy}K^{-1/2}_{yz} = \delta^n(x-z)(-g(z))^{-1/2}. \tag{3.88}$$

Consideremos ahora el cambio de variable

$$\phi'(x) = \int d^n y\sqrt{-g(y)}K^{1/2}_{xy}\phi(y), \tag{3.89}$$

que, al sustituirlo en (3.79), adquiere la forma

$$-\frac{1}{2}\int d^n x\sqrt{-g(x)}\Big[\phi'(x) - \int d^n y J(y)K^{-1/2}_{yx}\Big]^2 - \frac{1}{2}\int d^n x d^n y J(x)G_F(x,y)J(y). \tag{3.90}$$

Para verificar dicha aserción, desarrollemos el cuadrado en la expresión anterior:

$$-\frac{1}{2}\int d^n x\sqrt{-g(x)}\Big[\phi'(x)-\int d^n y J(y)K_{yx}^{-1/2}\Big]^2 \tag{3.91}$$

$$\begin{aligned}&=-\frac{1}{2}\int d^n x(\phi'(x))^2+\int d^n x d^n y\phi'(x)J(y)K_{yx}^{-1/2}\\&-\frac{1}{2}\int d^n x d^n y d^n z J(y)J(z)K_{yx}^{-1/2}K_{zx}^{-1/2}-\frac{1}{2}\int d^n x d^n y J(x)J(y)G_F(x,y).\end{aligned} \tag{3.92}$$

El primer sumando en (3.92) consiste en:

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\int d^n x d^n y d^n z K_{xy}^{1/2}K_{xz}^{1/2}\phi(y)\phi(z)\sqrt{-g(y)}\sqrt{-g(z)}\sqrt{-g(x)}\\&=-\frac{1}{2}\int d^n y d^n z K_{yz}\phi(y)\phi(z)\sqrt{-g(y)}\sqrt{-g(z)},\end{aligned} \tag{3.93}$$

mientras que el segundo sumando verifica:

$$\begin{aligned}&\int d^n x d^n y d^n z K_{xz}^{1/2}K_{yx}^{-1/2}\sqrt{-g(z)}\sqrt{-g(x)}J(y)\\&=\int d^n y d^n z\delta^n(z-y)(-g(z))^{-1/2}(-g(z))^{1/2}J(y)\phi(z)=\int d^n y J(y)\phi(y),\end{aligned} \tag{3.94}$$

donde hemos utilizado las propiedades (3.87), (3.88). Análogamente, puede constatarse que el tercer y cuarto término se cancelan mutuamente. Al sustituir, entonces, (3.90) en el exponente (3.70) y realizar la integral, el segundo término en (3.90) puede removerse de la misma, pues se trata de una cantidad independiente de ϕ, mientras que el primero da lugar a una integral de tipo gaussiano que puede resolverse, arrojando como resultado un factor numérico. En consecuencia,

$$Z(J)\propto(\det K^{1/2})^{-1}\exp\Big[-\frac{1}{2}i\int d^n x d^n y J(x)G_F(x,y)J(y)\Big], \tag{3.95}$$

donde

$$(\det K^{1/2})^{-1}=[\det(-G_F)]^{1/2} \tag{3.96}$$

es el jacobiano que surge del cambio de variable $\phi\to\phi'$, es decir, de tomar el determinante de

$$\frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi'(x)}=(K_{xy}^{1/2})^{-1}. \tag{3.97}$$

Por lo tanto,

$$Z[0]\propto[\det(-G_F)]^{1/2}, \tag{3.98}$$

donde la constante de proporcionalidad es independiente de la métrica y puede ignorarse. De (3.73) tenemos que:

$$W=-i\ \ln Z[0]=-\frac{1}{2}i\mathrm{Tr}[\ln(-G_F)], \tag{3.99}$$

donde hemos usado la propiedad del álgebra de matrices $\ln(\det M) = \mathrm{Tr}(\ln M)$, siendo M una matriz cuadrada invertible. En la ecuación anterior, G_F se interpreta como un operador que opera sobre un espacio de vectores $|x\rangle$, normalizados por:

$$\langle x \,|\, x' \rangle = \delta^n(x - x')[-g(x)]^{-1/2}, \tag{3.100}$$

tal que

$$G_F(x, x') = \langle x|G_F|x'\rangle. \tag{3.101}$$

La traza de un operador M que actúa en este espacio se define como

$$\mathrm{Tr}M = \int d^n x[-g(x)]^{1/2} M_{xx} = \int d^n x[-g(x)]^{1/2}\langle x|M|x\rangle. \tag{3.102}$$

Para darle un sentido más claro a la expresión (3.86) debemos usar una representación para la función de Green de Feynman G_F. Para ese fin, en primer término, reescribimos el operador equivalente a (3.86) como

$$G_F = -K^{-1} \tag{3.103}$$

que puede expresarse de forma integral:

$$-K^{-1} = -i\int_0^\infty e^{-iKs} ds. \tag{3.104}$$

Por otra parte, la expansión de DeWitt-Schwinger (3.58) da lugar a:

$$\langle x|e^{-iKs}|x'\rangle = i(4\pi)^{-n/2}\Delta^{1/2}(x, x')e^{-im^2 s + \sigma/2is}F(x, x'; is)(is)^{-n/2}. \tag{3.105}$$

Si, además, se asume que K tiene una parte levemente imaginaria, entonces

$$\int_\Lambda^\infty e^{-iKs}(is)^{-1} = -Ei(-i\Lambda K), \tag{3.106}$$

donde Ei es la función integral exponencial:

$$Ei(x) = \gamma + \ln(-x) + \mathcal{O}(x), \tag{3.107}$$

y γ es la constante de Euler-Mascheroni, con lo cual

$$\int_\Lambda^\infty e^{-iKs}(is)^{-1} ids = -\gamma - \ln(i\Lambda) - \ln(K) = cte. \; - \; \ln(K), \tag{3.108}$$

y como $\ln(-G_F) = \ln(K^{-1}) \to \ln(-G_F) = -\ln(K)$, entonces

$$\int_0^\infty e^{-iKs}(is)^{-1} i \; ds = cte. \; + \; \ln(-G_F), \tag{3.109}$$

a menos de una constante independiente de la métrica (infinita) que en lo que sigue puede ignorarse, lo que implica que

$$\langle x|\ln(-G_F^{DS})|x'\rangle = -\int_{m^2}^\infty G_F^{DS}(x, x')dm^2, \tag{3.110}$$

donde la integral con respecto a m^2 da lugar a una potencia extra $(is)^{-1}$ que aparece en (3.109). Ahora estamos en condiciones de calcular W, pues,

$$\mathrm{Tr}[\ln(-G_F)] = \lim_{x\to x'} \int d^n x[-g(x)]^{1/2} \langle x|\ln(-G_F)|x'\rangle \tag{3.111}$$

$$= -\lim_{x\to x'} \int d^n x[-g(x)]^{1/2} \int_{m^2}^{\infty} G_F^{DS}(x,x')dm^2, \tag{3.112}$$

y, consecuentemente,

$$W = \frac{1}{2} i \int_{m^2}^{\infty} dm^2 \int d^n x[-g(x)]^{1/2} G_F^{DS}(x,x). \tag{3.113}$$

Definimos la densidad lagrangeana efectiva $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ como

$$W = \int \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) d^n x \equiv \int [-g(x)]^{1/2} L_{\text{eff}} d^n x, \tag{3.114}$$

de modo que

$$L_{\text{eff}} = [-g(x)]^{-1/2} \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{2} i \lim_{x'\to x} \int_{m^2}^{\infty} dm^2 G_F^{DS}(x,x'). \tag{3.115}$$

Se puede observar de la expresión para G_F^{DS} que L_{eff} diverge en el límite inferior de la integral en s, pues el factor con el exponente $\sigma/2s$ se anula en el límite $x' \to x$ y la convergencia en el límite superior de la integral del término con la masa en el exponente queda asegurada por el término $-i\epsilon$, sumado de manera implícita en la representación de DeWitt-Schwinger de G_F. En cuatro dimensiones, los términos potencialmente divergentes en la expansión de DeWitt-Schwinger de L_{eff} son los siguientes:

$$\begin{aligned} L_{\text{div}} = &- \lim_{x'\to x} \frac{\Delta^{1/2}(x,x')}{32\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-i(m^2 s - \sigma/2s)} [a_0(x,x') \\ &+ a_1(x.x')is + a_2(x,x')(is)^2], \end{aligned} \tag{3.116}$$

donde los coeficientes a_0, a_1 y a_2 están dados por las ecuaciones (3.52)-(3.54). El resto de los términos de la expansión asintótica son finitos en el límite $x' \to x$. Claramente, las divergencias de L_{eff} serán las mismas que afectarán a $\langle T_{\mu\nu}\rangle$. Los coeficientes a_0, a_1 y a_2 en el límite $x \to x'$ son enteramente geométricos, dependiendo únicamente del tensor de Riemann o sus contracciones. Estas divergencias se deben al comportamiento ultravioleta de los modos del campo escalar, es decir, de longitud de onda corta. Dichos modos sólo son sensibles a la geometría local, ignorando las características globales del espacio-tiempo, como la topología. Estos modos también son independientes del estado cuántico empleado para $\langle T_{\mu\nu}\rangle$, como veremos más adelante.

Debido a la naturaleza enteramente geométrica de L_{div} resulta adecuado considerarlo parte de la contribución gravitacional en vez de una contribución del campo cuántico material. Por supuesto, esto no es cierto para las demás porciones finitas de L_{eff}, que incluyen los modos de longitud de onda larga, los cuales están vinculados con estructuras más grandes de la variedad y son sensibles al estado cuántico.

3.4. Regularización dimensional y renormalización

Esta sección está dedicada a determinar la forma precisa de los términos geométricos en L_{div}, de manera de viabilizar una comparación con el lagrangeano gravitacional convencional L_g que aparece en (3.65). Puesto que los términos en L_{div} divergen, el objetivo de esta sección consistirá en reexpresarlos de forma que adquieran el aspecto $\infty\times$objeto geométrico. Existen varios métodos que permiten dicha reformulación de los términos divergentes; en esta tesis, nos restringiremos a uno sólo de ellos: la *regularización dimensional* (otras métodos de regularización pueden encontrarse en [6]). La estrategia consistirá en considerar la dimensión física n como una cantidad variable, extendiéndola analíticamente al plano complejo, permitiendo que las partes divergentes adquieran valores transitoriamente finitos para estudiar detenidamente las divergencias que surgen cuando se toma el límite $n \to 4$.

En n dimensiones, la expansión asintótica de L_{eff} está dada por:

$$L_{\text{eff}} \approx \lim_{x' \to x} \frac{\Delta^{1/2}(x,x')}{2(4\pi)^{n/2}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,x') \int_0^\infty (is)^{j-1-n/2} e^{-i(m^2 s - \sigma/2s)} ids, \quad (3.117)$$

la cual diverge para $j - 1 - n/2 < 0$, lo que es equivalente a decir que los primeros $1/2n+1$ términos son divergentes cuando $\sigma \to 0$. Si n es tratada como una variable que puede extenderse analíticamente a través del plano complejo, puede tomarse el límite $x' \to x$

$$L_{\text{eff}} \approx \frac{1}{2}(4\pi)^{-n/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \int_0^\infty (is)^{j-1-n/2} e^{-im^2 s} ids \quad (3.118)$$

donde $a_j(x) \equiv a_j(x,x)$. Realizando el cambio de variable $m^2 s = u$:

$$\int_0^\infty (is)^{j-1-n/2} e^{-im^2 s} ids = \overbrace{\int_0^\infty (iu)^{j-n/2-1} e^{-iu} du}^{=\Gamma(j-n/2)} (m^2)^{n/2-j}, \quad (3.119)$$

donde hemos introducido la función Γ:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (3.120)$$

que permite reescribir el lagrangeano efectivo como

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(4\pi)^{-n/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) (m^2)^{n/2-j} \Gamma(j - n/2). \quad (3.121)$$

En lugar de permitir que las dimensiones de L_{eff} varíen conforme tomamos el límite $n \to 4$, resulta conveniente dejarlas fijas, como (longitud)$^{-4}$. Para ello es necesario introducir una escala de masa arbitraria tal que (3.121) se reescribe como:

$$L_{\text{eff}} \approx \frac{1}{2}(4\pi)^{-n/2} (m/\mu)^{n-4} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) m^{4-2j} \Gamma(j - n/2). \quad (3.122)$$

Cuando $n \to 4$, los tres primeros términos en la serie anterior divergen, debido a los polos de las funciones Γ, los cuales son manifiestamente evidentes en los siguientes desarrollos:

$$\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right) = \frac{4}{n(n-2)}\left(\frac{2}{4-n} - \gamma\right) + \mathcal{O}(n-4), \tag{3.123}$$

$$\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right) = \frac{2}{2-n}\left(\frac{2}{4-n} - \gamma\right) + \mathcal{O}(n-4), \tag{3.124}$$

$$\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right) = \frac{2}{4-n} - \gamma + \mathcal{O}(n-4). \tag{3.125}$$

Llamando a estos tres términos $L_{\rm div}$, se obtiene

$$L_{\rm div} = -(4\pi)^{-n/2}\Big\{\frac{1}{n-4} + \frac{1}{2}\Big[\gamma + \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)\Big]\Big\}\Big(\frac{4m^4 a_0}{n(n-2)} - \frac{2m^2 a_1}{n-2} + a_2\Big), \tag{3.126}$$

donde hemos utilizado la expansión

$$(m/\mu)^{n-4} = 1 + \frac{1}{2}(n-4)\ln(m^2/\mu^2) + \mathcal{O}((n-4)^2), \tag{3.127}$$

y hemos descartado términos que se anulan cuando $n \to 4$. Las funciones a_0, a_1 y a_2 son el resultado de tomar el límite $x \to x'$ en las expresiones (3.52)-(3.54):

$$a_0(x) = 1, \tag{3.128}$$

$$a_1(x) = (1/6 - \xi)R, \tag{3.129}$$

$$a_2(x) = \frac{1}{180}R_{\alpha\beta;\delta}R^{\alpha\beta;\delta} - \frac{1}{180}R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} - \xi\right)\Box R + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \xi\right)^2 R^2. \tag{3.130}$$

Por otra parte, el lagrangeano gravitacional está dado por:

$$L_g = (16\pi G_B)^{-1}(R - 2\Lambda). \tag{3.131}$$

Definiendo el nuevo lagrangeano gravitacional como $\widetilde{L}_g = L_g + L_{\rm div}$ se obtiene el siguiente resultado:

$$\widetilde{L}_g = \\ -\left(A + \frac{\Lambda_B}{8\pi G_B}\right) + \left(B + \frac{1}{16\pi G_B}\right)R - \frac{a_2(x)}{(4\pi)^{n/2}}\Big\{\frac{1}{n-4} + \frac{1}{2}\Big[\gamma + ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)\Big]\Big\}, \tag{3.132}$$

donde

$$A = \frac{4m^4}{(4\pi)^{n/2}n(n-2)}\Big\{\frac{1}{n-4} + \frac{1}{2}\Big[\gamma + ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)\Big]\Big\}, \tag{3.133}$$

y

$$B = \frac{2m^2(1/6-\xi)}{(4\pi)^{n/2}(n-2)}\Big\{\frac{1}{n-4} + \frac{1}{2}\Big[\gamma + ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)\Big]\Big\}. \tag{3.134}$$

El primer término a la derecha del signo de igualdad en (3.132) es una constante. La contribución de $L_{\rm div}$ (A) es, por tanto, indistinguible físicamente de Λ_B. Esta

es la parte del lagrangeano gravitacional que da lugar al término asociado a la constante cosmológica $\Lambda g_{\mu\nu}$ en las ecuaciones de campo. Así, el efecto del campo cuántico escalar es cambiar, o *renormalizar*, la contante cosmológica Λ_B por

$$\Lambda \equiv \Lambda_B + \frac{32\pi m^4 G_B}{(4\pi)^{n/2} n(n-2)} \left\{ \frac{1}{n-4} + \frac{1}{2}\Big[\gamma + \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)\Big] \right\}. \tag{3.135}$$

Puesto que una observación física sólo dará lugar al valor renormalizado Λ, el término divergente $1/(n-4)$ cuando $n \to 4$ no encarna ninguna dificultad, pues nunca es visto de forma aislada. Esta técnica de absorber una cantidad infinita en una cantidad física renormalizada es común en teoría cuántica de campos, por ejemplo, en electrodinámica cuántica un electrón está "vestido" en una nube de fotones virtuales que contribuyen (infinitamente) a la masa del electrón, sin embargo, sólo es medible la masa del electrón renormalizada (la cual es finita). El electrón es inseparable de esta nube de fotones, por lo que nunca vemos la masa "desnuda". Adoptando esta terminología es que hablamos de la constante cosmológica desnuda, Λ_B. El subíndice B proviene del inglés "bare".

El segundo término en (3.132) muestra que $L_{\rm div}$ también renormaliza la contante gravitacional de Newton, modificando G_B por

$$G = G_B/(1 + 16\pi G_B B). \tag{3.136}$$

El último término en (3.132) no se encuentra en el lagrangeano usual de Einstein. El factor $a_2(x)$ es de cuarto orden en derivadas de la métrica, y, por lo tanto, representa correcciones de orden más alto a la teoría general de la relatividad, la cual sólo contiene términos de hasta segundo orden en derivadas de la métrica. Cuando este término extra es añadido en S_g, el lado izquierdo de la ecuación de campo (3.62) se modifica, expresándose de la siguiente manera

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha\ {}^{(1)}H_{\mu\nu} + \beta\ {}^{(2)}H_{\mu\nu} + \gamma H_{\mu\nu}, \tag{3.137}$$

donde

$$\begin{aligned} {}^{(1)}H_{\mu\nu} \equiv & \frac{1}{(-g)^{1/2}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int (-g)^{1/2} R^2 d^n x \\ = & 2R_{;\mu\nu} - 2g_{\mu\nu}\Box R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^2 + 2RR_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{3.138}$$

$$\begin{aligned} {}^{(2)}H_{\mu\nu} \equiv & \frac{1}{(-g)^{1/2}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int (-g)^{1/2} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} d^n x \\ = & 2R_{\mu}{}^{\alpha}{}_{;\nu\alpha} - \Box R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box R + 2R_{\mu}{}^{\alpha}R_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{3.139}$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} \equiv & \frac{1}{(-g)^{1/2}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int (-g)^{1/2} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} d^n x \\ = & -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} + 2R_{\mu\alpha\beta\gamma}R_{\nu}{}^{\alpha\beta\gamma} - 4\Box R_{\mu\nu} \\ & + 2R_{;\mu\nu} - 4R_{\mu\alpha}R^{\alpha}{}_{\nu} + 4R^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu}. \end{aligned} \tag{3.140}$$

El teorema de Gauss-Bonnet generalizado [6] establece, para el caso $n = 4$, que

$$\int d^4x[-g(x)]^{1/2}(R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} + R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}) \tag{3.141}$$

es un invariante topológico, con lo cual, su variación con respecto a la métrica es idénticamente nula, de lo que se sigue que

$$H_{\mu\nu} = -\ {}^{(1)}H_{\mu\nu} + 4\ {}^{(2)}H_{\mu\nu}. \tag{3.142}$$

La divergencia presente en los tres coeficientes α, β y γ en (3.137) cuando $n \to 4$ puede resolverse introduciendo términos con derivadas de cuarto orden de la métrica en el lagrangeano gravitacional original con coeficientes desnudos a_B, b_B y c_B. Así, los términos divergentes en los coeficientes α, β, γ son absorbidos en las constantes desnudas, obteniéndose finalmente coeficientes renormalizados a, b y c. Debido a la relación (3.142) sólo dos de estos coeficientes serán independientes, de modo que puede optarse por fijar $c = 0$. Los valores de a y b deberán ser determinados mediante experimentos.

Una vez removidos los términos $L_{\rm div}$ de $L_{\rm eff}$, el resto es finito; recibiendo la denominación de lagrangeano efectivo renormalizado:

$$L_{\rm ren} \equiv L_{\rm eff} - L_{\rm div}. \tag{3.143}$$

En cuatro dimensiones, la expansión asintótica de $L_{\rm ren}$ consistirá en todos lo términos con $j \geq 3$ en (3.118), es decir

$$L_{\rm ren} \approx \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty \sum_{j=3}^{\infty} a_j(x)(is)^{j-3} e^{-im^2 s} i\ ds, \tag{3.144}$$

que puede integrarse por partes tres veces, arrojando el resultado:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{64\pi^2} \int_0^\infty \ln(is) \frac{\partial^3}{\partial(is)^3} [F(x,x;is)e^{-ism^2}] d(is) \\ &+\frac{1}{64\pi^2} \int_0^\infty \ln(is) \frac{\partial^3}{\partial(is)^3} \{[a_0 + a_1(is) + a_2(is)^2] e^{-ism^2}\} ids. \end{aligned} \tag{3.145}$$

El segundo sumando simplemente renormaliza Λ, G, a, b y c por cantidades finitas, esto significa que es de la misma forma que $L_{\rm div}$, involucrando términos constante$\times a_j$, j=1,2,3. Es evidente que el lagrangeano efectivo renormalizado siempre es ambiguo en lo referente a términos de renormalización finitos, por lo que el segundo término puede ignorarse. Por esta misma razón, tampoco debe ser causa de desvelos el factor de escala μ introducido en la renormalización: reescalar μ sólo modifica $L_{\rm div}$ en una cantidad finita, alterando únicamente los coeficientes geométricos a_0, a_1 y a_2. En la práctica, el valor de μ debería dejarse fijo y, para este valor de μ, deberían calibrarse los instrumentos encargados de medir las constantes Λ, G, a y b. Una vez determinadas estas constantes, cálculos posteriores pueden hacerse, con el valor de μ prefijado y los valores medidos de las constantes, permitiendo formular predicciones acerca de las mediciones de los intrumentos calibrados.

Finalmente, el lagrangeano renormalizado puede escribirse así:

$$L_{\rm ren} = -\frac{1}{64\pi^2} \int_0^\infty \ln(is) \frac{\partial^3}{\partial(is)^3} [F(x,x;is)e^{-ism^2}] d(is). \tag{3.146}$$

En conclusión, la renormalización nos permite trabajar con una acción para el campo cuántico escalar acoplado al campo gravitacional en la forma

$$S = S_g + W \tag{3.147}$$

y transferir las partes divergentes de W a S_g, absorbiendo los infinitos en las constantes de acoplamiento renormalizadas. Luego,

$$S = (S_g)_{\rm ren} + W_{\rm ren}, \tag{3.148}$$

donde $(S_g)_{\rm ren}$ contiene las constantes físicas renormalizadas y $W_{\rm ren}$ es finito. Insertando S en (3.64) se obtiene la ecuación semiclásica en cuatro dimensiones:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + a\,{}^{(1)}H_{\mu\nu} + b\,{}^{(2)}H_{\mu\nu} = -8\pi G \frac{\langle {\rm out}, 0|T_{\mu\nu}|0, {\rm in}\rangle_{\rm ren}}{\langle {\rm out}, 0\,|\,0, {\rm in}\rangle}, \tag{3.149}$$

donde el lado derecho es ahora finito y las constantes Λ, a, b y G, deben determinarse experimentalmente. Durante el curso de la renormalización no se hizo uso explícito de $|0, {\rm out}\rangle$ o $|0, {\rm in}\rangle$. En particular, no es necesario asumir que existen regiones asintóticas "out" o "in", donde el concepto de vacío sea simple o se corresponda fuertemente con el concepto de vacío físico. Los vacíos "in" o "out"desempeñan un papel puramente formal. La aparición de $\langle {\rm out}, 0|{\rm T}_{\mu\nu}|0, {\rm in}\rangle$ en vez de $\langle {\rm in}, 0|{\rm T}_{\mu\nu}|0, {\rm in}\rangle$ o $\langle {\rm out}, 0|{\rm T}_{\mu\nu}|0, {\rm out}\rangle$ está relacionada con las condiciones de borde implícitas en la representación de DeWitt-Schwinger del propagador de Feynman. Como mencionamos anteriormente las divergencias que emergen del comportamiento ultravioleta del propagador son independientes de las características globales de la variedad y de los estados cuánticos. Por lo tanto, se espera que las divergencias en las tres formas mencionadas para $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ sean las mismas. Estas aserciones se confirman utilizando las ecuaciones (3.22) y (3.23) para escribir $|0, {\rm out}\rangle$ en términos de estados de muchas partículas "in". Las cantidad $\langle 1_{j_1}, 1_{j_2}, \ldots, 1_{j_k}, {\rm in}|T_{\mu\nu}|0, {\rm in}\rangle$ puede evaluarse expandiendo $T_{\mu\nu}$ en operadores de creación y aniquilación, y permitiéndoles actuar sobre $|0, {\rm in}\rangle$. El resultado es

$$\langle {\rm in}, 0|T_{\mu\nu}|0, {\rm in}\rangle = \frac{\langle {\rm out}, 0|T_{\mu\nu}|0, {\rm in}\rangle}{\langle {\rm out}, 0\,|\,0, {\rm in}\rangle} - i\sum_{i,j} \Lambda_{ij} T_{\mu\nu}(u^*_{{\rm in},i}, u^*_{{\rm in},j}), \tag{3.150}$$

donde $T_{\mu\nu}(\phi, \phi)$ denota la expresión bilineal (3.29) y los modos $u_{\rm in,i}$ son modos en la región "in". Una expresión análoga se obtiene para $\langle {\rm out}, 0|{\rm T}_{\mu\nu}|0, {\rm out}\rangle$ con Λ_{ij} reemplazada por V_{ij} y $u_{\rm in}$ por $u_{\rm out}$. El último término en (3.150) es finito, luego, las divergencias presentes en $\langle {\rm in}, 0|{\rm T}_{\mu\nu}|0, {\rm in}\rangle$ son las mismas que las presentes en $\langle {\rm out}, 0|{\rm T}_{\mu\nu}|0, {\rm in}\rangle / \langle {\rm out}, 0\,|\,0, {\rm in}\rangle$.

Capítulo 4

Espacio cuántico

Este capítulo está dedicado a la presentación de algunos conceptos centrales de LQG. En primer lugar, presentaremos algunas nociones de teorías gauge en redes, extremadamente útiles para el formalismo de LQG. Posteriormente abordaremos la construcción del espacio cinemático de la teoría así como de los operadores que actúan sobre él y, finalmente, mencionaremos cómo se ven reducidos estos últimos en un espacio-tiempo esféricamente simétrico.

4.1. Teorías de gauge sobre redes

4.1.1. Producto escalar

Consideremos una red tridimensional Γ con L enlaces l y N nodos n. Para definir en dicha red una teoría de Yang-Mills, con un grupo de guage compacto G, asociamos a cada enlace l un elemento de este grupo, el cual denotaremos como U_l. Sea además el espacio de Hilbert $\widetilde{K}_\Gamma = L^2[G^L, dU_l]$, donde $dU_l = dU_1 \cdots dU_L$ es la medida de Haar sobre el grupo y G^L es el producto tensorial de L copias de G, los estados cuánticos en $\widetilde{K}_\Gamma$ son funciones $\Psi(U_l)$ de L elementos del grupo. El producto escalar de dos estos estados está dado por

$$\langle \Psi \,|\, \Phi \rangle \equiv \int dU_1 \dots dU_L \overline{\Psi(U_1, \dots, U_L)} \Phi(U_1, \dots, U_L). \tag{4.1}$$

Sea j un índice asociado a representaciones unitarias irreducibles de G y sean $(R^j(U))^k_i$ los elementos de matriz de la represetación; el teorema de Peter-Weyl establece que una base ortonormal de $L^2[G, dU]$ está dada por los estados $|j, i, k\rangle$ definidos como $\langle U \,|\, j, i, k\rangle = (R^j(U))^k_i$. Luego, una base en $\widetilde{K}_\Gamma$ está dada por los estados

$$|j_l, i_l, k_l\rangle \equiv |j_1, \dots j_L, i_1, \dots, i_L, k_1, \dots, k_L\rangle, \tag{4.2}$$

donde $\langle U_l \,|\, j_l, i_l, k_l\rangle = \Pi_l (R^{j_l}(U_l))^{k_l}_{i_l}$.

La teoría debe permanecer invariante bajo transformaciones de gauge. Por otra parte, las variables U_l transforman como $U_l \to \lambda^{-1}_{n_i} U_l \lambda_{n_f}$, donde el enlace l se encuentra entre los nodos n_i y n_f. Por lo tanto, los estados invariantes gauge deben satisfacer:

$$\Psi(U_l) = \Psi(\lambda^{-1}_{n_i} U_l \lambda_{n_f}). \tag{4.3}$$

Estos estados forman un subespacio lineal $\widetilde{K}^0_\Gamma$ de $\widetilde{K}_\Gamma$: el espacio $\widetilde{K}^0_\Gamma$ es el espacio de Hilbert (a tiempo fijo) de los estados invariantes gauge de la teoría. Una base ortonormal de estados en $\widetilde{K}^0_\Gamma$ puede obtenerse a partir de la noción de entrelazador.

4.1.2. Entrelazadores

Consideremos N representaciones irreducibles $j_1, \ldots, j_N$ del grupo de gauge y el producto tensorial de espacios de Hilbert

$$\mathcal{H}_{j_1,\ldots,j_N} = \mathcal{H}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{j_N}. \tag{4.4}$$

Este subespacio puede descomponerse en una suma de componentes irreducibles. En particular, la componente $\mathcal{H}^0_{j_1,\cdots,j_N}$ es el subespacio formado por los vectores invariantes bajo la acción de elementos del grupo, es decir, el subespacio que transforma en la representación trivial. Este espacio es de k dimensiones, donde k es el número de veces que aparece la representación trivial en la descomposición. Como $\mathcal{H}^0_{j_1,\cdots,j_N}$ es un espacio de Hilbert, podemos tomar una base ortonormal del mismo. Denominaremos *entrelazadores* entre las representaciones $j_1, \cdots, j_N$ a los elementos i de esta base.

Los elementos de $\mathcal{H}_{j_1,\cdots,j_N}$ son tensores $v^{\alpha_1\cdots\alpha_N}$ con un índice en cada representación. Así, los elementos de $\mathcal{H}^0_{j_1,\cdots,j_N}$ son tensores $v^{\alpha_1\cdots\alpha_N}$ invariantes bajo la acción del grupo G en todos sus índices:

$$R^{(j_1)\alpha_1}_{\beta_1}(U)\cdots R^{(j_N)\alpha_N}_{\beta_N}(U) v^{\beta_1\cdots\beta_N} = v^{\alpha_1\cdots\alpha_N}. \tag{4.5}$$

Llamamos entrelazadores $v^{\alpha_1\cdots\alpha_N}_i$ a los elementos de un conjunto formado por k de esos tensores invariantes, mutuamente ortonormales en el producto escalar de $\mathcal{H}^0_{j_1,\cdots,j_N}$. Esto significa que satisfacen

$$\overline{v^{\alpha_1\cdots\alpha_N}}_i v_{i'\alpha_1\cdots\alpha_N} = \delta_{ii'}. \tag{4.6}$$

Si el espacio $\mathcal{H}_j$ está asociado a una representación j, su espacio dual $\mathcal{H}^*_j$ está asociado a la representación j^*. Un entrelazador i entre las n representaciones duales $j_1^*, \cdots, j_n^*$ y m representaciones $j_1, \cdots, j_m$ es un tensor invariante en el espacio $(\otimes_{i=1,n}\mathcal{H}^*_{j_i}) \otimes (\otimes_{k=1,m}\mathcal{H}_{j_k})$, esto es, un mapa covariante

$$i : (\otimes_{i=1,n}\mathcal{H}_{j_i}) \to (\otimes_{k=1,m}\mathcal{H}_{jk}), \tag{4.7}$$

o un tensor invariante con n índices abajo y m índices arriba.

A continuación, asociamos una representación j_l del grupo de gauge a cada enlace l y un entrelazador i_n a cada nodo n (entre las representaciones asociadas a los enlaces adyacentes al nodo) de la red. Llamamos a $s = (\Gamma, j_l, i_n)$ una *red de espín*. Cada red de espín define un estado $|s\rangle$ de la siguiente manera:

$$\langle U_l \,|\, s\rangle = \psi_s(U_l) = \prod_l R^{j_l}(U_l) \cdot \prod_n i_n, \tag{4.8}$$

donde el punto indica contracción en todos los índices. Los estados $|s\rangle$ forman una base ortonormal en $\widetilde{K}^0_\Gamma$

$$\langle s \,|\, s'\rangle = \delta_{ss'}. \tag{4.9}$$

Esta base desempeñará un papel clave en gravedad cuántica.

4.2. El espacio cinemático $\mathcal{K}$

Funciones cilíndricas

Sea $\mathcal{G}$ el espacio de conexiones reales suaves en tres dimensiones, definidas en un superficie tridimensional Σ, a menos de algunos puntos aislados. Sea τ_i una base fija en el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$, eligiendo $\tau_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$, siendo σ_i las matrices de Pauli, es posible escribir una conexión $\mathfrak{su}(2)$ como:

$$A(\vec{\tau}) = A^i_\alpha(\vec{\tau})\tau_i dx^\alpha. \tag{4.10}$$

Un camino orientado γ en Σ y una conexión A determinan un elemento del grupo $SU(2)$, la holonomía de A a lo largo del camino γ:

$$U(A,\gamma) = Pe^{\int_\gamma A}. \tag{4.11}$$

Para un γ dado, la holonomía $U(A,\gamma)$ es un funcional de $\mathcal{G}$. Consideremos ahora una colección ordenada Γ de caminos suaves orientados γ_l con $l = 1, \cdots, L$ y una función suave $f(U_1, \cdots, U_L)$ de L elementos del grupo. Un par (Γ, f) define un funcional de A:

$$\Psi_{\Gamma,f}[A] = f(U(A,\gamma_1), \cdots, U(A,\gamma_L)). \tag{4.12}$$

$\mathcal{S}$ se define como el espacio lineal de todos los funcionales $\Psi_{\Gamma,f}[A]$, para todo Γ y f. Dichos funcionales se denominan *funciones cilíndricas*.

Γ recibe la denominación de *grafo orientado y ordenado* embebido en Σ. En lo que refiere a funciones cilíndricas, modificar el orden u orientación de un grafo es lo mismo que cambiar el orden de los argumentos de la función f, o reemplazar argumentos por sus inversos.

Producto escalar

Dados dos funcionales $\Psi_{\Gamma,f}[A]$ y $\Psi_{\Gamma,g}[A]$ definidos sobre el mismo grafo ordenado y orientado, el producto escalar viene dado por:

$$\langle \Psi_{\Gamma,f} \,|\, \Psi_{\Gamma,g} \rangle \equiv \int dU_1 \cdots dU_L \overline{f(U_1, \cdots, U_L)} g(U_1, \cdots, U_L), \tag{4.13}$$

donde dU es la medida de Haar en $SU(2)$.

La definición anterior puede extenderse fácilmente al caso de funcionales en grafos diferentes Γ' y Γ''. Sea $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$, se definen:

$$f(U_1, \ldots, U_{L'}, U_{L'+1}, \ldots, U_{L'+L''}) = f'(U_1, \ldots, U_{L'}) \tag{4.14}$$

$$g(U_1, \ldots, U_{L''}, U_{L''+1}, \ldots, U_{L'+L''}) = g''(U_1, \ldots, U_{L''}) \tag{4.15}$$

para toda función f' en Γ' y g'' en Γ''. Con estas definiciones el producto escalar (4.13) es válido para dos funcionales cualesquiera en $\mathcal{S}$:

$$\langle \Psi_{\Gamma',f'} \,|\, \Psi_{\Gamma'',g''} \rangle \equiv \langle \Psi_{\Gamma,f} \,|\, \Psi_{\Gamma,g} \rangle. \tag{4.16}$$

Aunque (4.1) es similar a (4.13) la diferencia es importante: en (4.13) estamos tratando con una teoría continua en la cual los estados no viven en una sola red Γ, sino en todas las posibles redes en Σ.

Se define el *espacio de Hilbert cinemático* $\mathcal{K}$ para gravedad cuántica, como el espacio resultante de completar $\mathcal{S}$ en la norma definida por el producto escalar (4.13).

4.2.1. Estructuras en $\mathcal{K}$

Subespacios grafo

Las funciones cilíndricas con soporte en un grafo dado Γ, forman un subespacio de dimensión finita $\widetilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ de $\mathcal{K}$. Entonces, por definición, $\widetilde{\mathcal{K}}_\Gamma = L^2[SU(2)^L]$, donde L es el número de caminos en Γ.

Base ortonormal

La principal herramienta para hallar una base en $\mathcal{K}$ la proporciona el teorema de Peter-Weyl, el cual establece que una base del espacio de Hilbert de funciones cuadrado integrables en $SU(2)$ está dada por los elementos de matriz de representaciones irreducibles del grupo. Las representaciones irreducibles de $SU(2)$ están identificadas por el espín semienterio j. Se denota como $\mathcal{H}_j$ al espacio de Hilbert sobre el que se define la representación j y v^α a sus vectores. Los elementos de matriz de la representación j vienen dados por:

$$R^{(j)\alpha}_{\beta}(U) = \langle U \,|\, j, \alpha, \beta \rangle. \tag{4.17}$$

Eligiendo para cada grafo Γ un orden y una orientación, entonces una base

$$|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle \equiv |\Gamma, j_1, \ldots, j_L, \alpha_1, \ldots, \alpha_L, \beta_1, \ldots, \beta_L\rangle \tag{4.18}$$

de $\widetilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ se obtiene tomando el producto tensorial de (4.17)

$$\langle A \,|\, \Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle = R^{(j_1)\alpha_1}_{\beta_1}(U(A,\gamma_1)) \ldots R^{(j_L)\alpha_L}_{\beta_L}(U(A,\gamma_L)). \tag{4.19}$$

Se puede observar que los vectores aparecen en $\widetilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ y $\widetilde{\mathcal{K}}_{\Gamma'}$ si $\Gamma \subset \Gamma'$. No obstante, es sencillo liberarse de esta redundancia, puesto que todos los vectores de $\widetilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ corresponden a la representación trivial de los caminos que están en Γ' pero no en Γ. Luego, una base ortonormal de $\mathcal{K}$ está dada por los estados $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$ definidos en (4.19) donde los espines $j_l = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ nunca toman el valor cero. Este hecho justifica la siguiente definición.

Para cada grafo Γ, se define el *subespacio propio* $\mathcal{K}_\Gamma$ como el subconjunto de $\widetilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ generado por los estados (4.19) con $j_l > 0$. Los subespacios propios $\mathcal{K}_\Gamma$ son ortogonales entre sí y generan $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} \sim \oplus \mathcal{K}_\Gamma, \tag{4.20}$$

donde se incluye el grafo nulo $\Gamma = \emptyset$; el espacio de Hilbert correspondiente es el espacio unidimensional generado por el estado $\Psi[A] = 1$. Este estado se denota $|\emptyset\rangle$, luego $\langle A \,|\, \emptyset\rangle = 1$.

4.2.2. Invariancias del producto escalar

Transformaciones de gauge locales

Bajo una transformación de gauge local de $SU(2)$, a saber, $\lambda : \Sigma \to SU(2)$, la conexión A transforma de manera inhomogénea como (ver § B.3):

$$A \to A_\lambda = \lambda A \lambda^{-1} + \lambda d\lambda^{-1}. \tag{4.21}$$

Esta transformación de A induce una representación natural de transformaciones de gauge locales $\Psi(A) \to \Psi(A_{\lambda^{-1}})$ en $\mathcal{K}$. La holonomía, por su parte, transforma como (ver § B.4)

$$U[A,\gamma] \to U[A_\lambda,\gamma] = \lambda(x_f^\gamma) U[A,\gamma] \lambda^{-1}(x_i^\gamma), \tag{4.22}$$

donde $x_i^\gamma, x_f^\gamma \in \Sigma$ son los puntos inicial y final del camino γ. Para un par (Γ, f) dado, se define

$$f_\lambda(U_1,\ldots,U_L) = f(\lambda(x_f^{\gamma_1})U_1\lambda^{-1}(x_i^{\gamma_1}),\ldots,\lambda(x_f^{\gamma_L})U_L\lambda^{-1}(x_i^{\gamma_L})). \tag{4.23}$$

Así, la acción de la transformación de gauge local U_λ sobre los estados cuánticos es

$$\Psi_{\Gamma,f}(A) \to [U_\lambda \Psi_{\Gamma,f}](A) = \Psi_{\Gamma,f}(A_{\lambda^{-1}}) = \Psi_{\Gamma,f_{\lambda^{-1}}}(A). \tag{4.24}$$

Como la medida de Haar es invariante bajo la acción derecha e izquierda del grupo, el producto escalar (4.13) también lo es. A partir de esta última ecuación y de la definición de los estados $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$, se puede ver que los mismos transforman como

$$\begin{aligned} U_\lambda|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle = {} & R^{(j_1)\alpha_1}_{\alpha_1'}(\lambda^{-1}(x_{f_1}))R^{(j_1)\beta_1'}_{\beta_1}(\lambda(x_{i1}))\ldots \\ & R^{(j_L)\alpha_L}_{\alpha_L'}(\lambda^{-1}(x_{f_L}))R^{(j_L)\beta_L'}_{\beta_L}(\lambda(x_{i_L})) \\ & |\Gamma, j_l, \alpha_l', \beta_l'\rangle, \end{aligned} \tag{4.25}$$

donde i_l y f_l son los puntos donde el enlace l comienza y termina respectivamente.

Difeomorfismos espaciales

Bajo la acción de un difeomorfismo, la conexión A transforma como una 1-forma

$$A \to \phi^* A. \tag{4.26}$$

$\mathcal{S}$ posee una representación U_ϕ del grupo de difeomorfismos definida por

$$U_\phi \Psi(A) = \Psi((\phi^*)^{-1}A). \tag{4.27}$$

La holonomía, por tanto, transforma de acuerdo a la expresión:

$$U[A,\gamma] \to U[\phi^* A,\gamma] = U[A,\phi^{-1}\gamma], \tag{4.28}$$

donde $(\phi\gamma)(s) \equiv (\phi(\gamma(s)))$. Por lo tanto, bajo la acción de un difeomorfismo espacial una función cilíndrica $\Psi_{\Gamma,f}[A]$ se transforma en otra función cilíndrica $\Psi_{\phi\Gamma,f}[A]$. La invariancia del producto escalar bajo difeomorfismos espaciales, entonces, es directa, pues (4.13) no depende explícitamente del grafo.

4.3. Estados invariantes

El espacio de estados cinemáticos $\mathcal{K}$ es un espacio de funcionales de onda de la conexión $\Psi[A]$ arbitrarios. Sin embargo, para que la teoría cuántica de la gravedad sea consistente con la relatividad general clásica es necesario que

los funcionales de onda sean invariantes bajo transformaciones de gauge locales y difeomorfismos. Denotaremos como $\mathcal{K}_0$ al espacio de estados invariante bajo transformaciones locales $SU(2)$, y por $\mathcal{K}_{\text{diff}}$ al espacio de estados invariantes bajo transformaciones de gauge $SU(2)$ y difeomorfismos. Por último el espacio de estados físicos $\mathcal{H}$ estará dado por los elementos de $\mathcal{K}_{\text{diff}}$ que sean solución de la ecuación de Wheeler-DeWitt. Dedicaremos las secciones subsuguientes a la construcción de los espacios $\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{K}_{\text{diff}}$.

4.3.1. Invariancia gauge interna. El espacio $\mathcal{K}_0$

Para obtener una base del espacio $\mathcal{K}_0$ podemos recurrir al concepto de redes de espín, introducido al comienzo del capítulo en el contexto de teorías gauge en redes. En gravedad cuántica, las redes de espín en gravedad cuántica son diferentes a las introducidas anteriormente debido a la invariancia ante difeomorfismos espaciales.

Redes de espín

Los puntos ubicados en los extremos de curvas orientadas en Γ se denominan *nodos*. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que cada conjunto de curvas Γ está compuesto por curvas γ en Σ que, en caso que se solapen, sólo lo hacen en los nodos. Desde esta perspectiva, Γ constituye un grafo inmerso en una variedad, esto es, una colección de nodos n, que son puntos de Σ, unidos por enlaces l, que son curvas en Σ. Llamamos *multiplicidad* de un nodo a la cantidad $m = m_{\text{in}} + m_{\text{out}}$, donde m_{out} es el número de enlaces que comienzan en el nodo y m_{in} el número de enlaces que terminan en el mismo.

Dado un grafo Γ, ordenado y orientado, j_l es un número que le asigna al enlace l una representación irreducible de $SU(2)$ diferente de la trivial. Denotamos por i_n al entrelazador asociado a cada nodo n. El triplete $S = (\Gamma, j_l, i_n)$ se denomina *red de espín embebida en* Σ. A una elección de j_l e i_n se le llama *color* de los enlaces y los nodos respectivamente.

Estados de redes de espín

Consideremos una red de espín $S = (\Gamma, j_l, i_n)$ con L enlaces y N nodos. El estado $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$ definido en la sección 4.2.1 consta de L índices α_l arriba y L índices β_l abajo. Los N entrelazadores i_n poseen un conjunto de índices duales a aquéllos. La contracción de los mismos da lugar a un estado de red de espín $|S\rangle$:

$$|S\rangle \equiv \sum_{\alpha_l,\beta_l} v_{i_1}^{\beta_1\dots\beta_{n_1}}{}_{\alpha_1\dots\alpha_{n_1}} v_{i_2}^{\beta_{n_1+1}\dots\beta_{n_2}}{}_{\alpha_{n_1+1}\dots\alpha_{n_2}} \cdots v_{i_N}^{\beta_{n_{N-1}}\dots\beta_L}{}_{\alpha_{n_{N-1}}\dots\alpha_L} |\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle, \tag{4.29}$$

El patrón de contracción de índices está dictado por lo topología del grafo: el índice α_l (β_l) de los enlaces l se contrae con los respectivos índices del entrelazador v_{i_n} del nodo n, donde comienza el enlace l (termina). La invariancia gauge de este estado se sigue inmediatamente de las propiedades de transformación de los estados de la base (4.25) y de la invariancia de los entrelazadores. Este

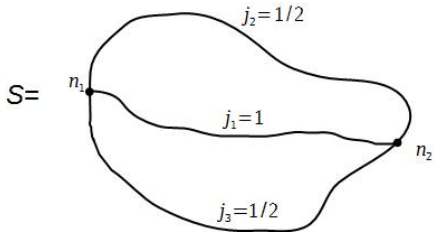

Figura 4.1: Una red de espín con dos nodos trivalentes

estado puede escribirse como un funcional de la conexión, a saber:

$$\begin{aligned}\Psi_S[A] = \langle A \,|\, S\rangle &\equiv \left(\otimes_l \, R^{(j_l)}(U[A,\gamma_l]) \right) \cdot \left(\otimes_n \, i_n \right) \\ &= \langle A \,|\, \Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle \cdot \left(\otimes_n \, i_n \right).\end{aligned} \tag{4.30}$$

La notación $\cdot$ indica la contracción entre espacios duales.

Utilizando las relaciones de ortonormalidad entre los entrelazadores y los estados de la base se puede deducir directamente que el conjunto de los estados $|S\rangle$ forma una base ortonormal en $\mathcal{K}_0$. La base queda etiquetada mediante las redes de espín, es decir, por medio de los grafos Γ y los colores (j_l, i_n).

4.3.2. Invariancia bajo difeomorfismos. El espacio $\mathcal{K}_{\text{diff}}$

En este apartado buscaremos estados invariantes bajo la acción de difeomorfismos espaciales. En primer lugar, se puede observar que los estados de redes de espín $|S\rangle$ no son invariantes bajo difeomorfismos puesto que, en general, dichas transformaciones mueven los grafos sobre la variedad, cambiando así el estado. Por otra parte, el color de una red de espín también pueden modificarse a causa de la acción de un difeomorfismo. En particular, un difeomorfismo que deje un grafo Γ invariante puede aún afectar el estado de red de espín $|\Gamma, j_l, i_n\rangle$, modificando la orientación u orden de los enlaces.

Para determinar los estados invariantes por difeomorfismos debemos investigar el espacio de los funcionales Φ que actúan sobre los estados $\Psi \in \mathcal{S}_0$ (el subespacio de $\mathcal{S}$ invariante bajo transformaciones de $SU(2)$), es decir, el espacio dual de $\mathcal{S}_0$, al que denotaremos como $\mathcal{S}_0'$. La acción del grupo de difeomorfismos sobre elementos de este grupo queda determinada por la siguiente relación:

$$(U_\phi \Phi)(\Psi) \equiv \Phi(U_{\phi^{-1}} \Psi). \tag{4.31}$$

Por lo tanto, un elemento invariante bajo difeomorfismos $\Phi \in \mathcal{S}_0'$ es un funcional lineal tal que

$$\Phi(U_\phi \Psi) \equiv \Phi(\Psi). \tag{4.32}$$

El espacio $\mathcal{K}_{\text{diff}}$ es el espacio constituido por dichos elementos. Mostraremos a continuación que la imagen del mapa $P_{\text{diff}} : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0'$ es precisamente $\mathcal{K}_{\text{diff}}$. Sea $P_{\text{diff}}\Psi \in \mathcal{S}_0'$ tal que:

$$(P_{\text{diff}}\Psi)(\Psi') \equiv \sum_{\Psi'' = U_\phi \Psi} < \Psi'', \Psi' > . \tag{4.33}$$

La suma recorre todos los estados $\Psi'' \in \mathcal{S}_0$ para los cuales existe un difeomorfismo ϕ tal que $\Psi'' = U_\phi \Psi$. Esta suma está bien definida, ya que siempre es finita, pues los estados Ψ, Ψ' pueden escribirse como combinación lineal finita de estados de redes de espín. En caso de que un difeomorfismo sobre Ψ cambie el grafo, entonces transforma el estado en otro ortogonal a sí mismo. Si cambia sólo su orden y/u orientación, por tratarse de una cantidad finita de transformaciones, añade una cantidad finita a la suma. Por otra parte, claramente $P_{\text{diff}}\Psi$ es invariante bajo difeomorfismos. Así, la imagen de P_{diff} es $\mathcal{K}_{\text{diff}}$. Los estados relacionados mediante un difeomorfismo se proyectan por P_{diff} en el mismo elemento de $\mathcal{K}_{\text{diff}}$:

$$P_{\text{diff}}\Psi = P_{\text{diff}}(U_\phi \Psi). \tag{4.34}$$

El producto escalar en $\mathcal{K}_{\text{diff}}$ se define como

$$< P_{\text{diff}}\Psi, P_{\text{diff}}\Psi' >_{\mathcal{K}_{\text{diff}}} \equiv (P_{\text{diff}}\Psi)(\Psi'). \tag{4.35}$$

4.4. Nudos y estados s-nudos

Un difeomorfismo envía un estado de red de espín $|S\rangle$ a un estado ortogonal, o a un estado que surge como resultado de un cambio del orden y/o de la orientación de los enlaces. Denotamos por $g_k|S\rangle$ los estados que se obtienen de $|S\rangle$ a través de un difeomorfismo que modifique la orientación y/u orden de los enlaces. Los mapas g_k forman un grupo discreto G_Γ, con lo cual el rango del índice discreto k es finito. Luego,

$$\langle S|P_{\text{diff}}|S'\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \Gamma \neq \phi\Gamma' \\ \sum_k \langle S_k|g_k|S'\rangle & \text{si } \Gamma = \phi\Gamma'. \end{cases} \tag{4.36}$$

Una clase de equivalencia K bajo difeomorfismos de grafos no orientados Γ se denomina *nudo*. De la ecuación anterior se desprende, entonces, que las redes de espín S y S' definen estados ortogonales en $\mathcal{K}_{\text{diff}}$ a menos que estén anudadas de la misma manera, i.e., a menos que estén definidos sobre grafos Γ y Γ' correspondientes al mismo nudo. Luego, los estados base en $\mathcal{K}_{\text{diff}}$ son etiquetados por nudos K. Llamamos $\mathcal{K}_K$ al subespacio de $\mathcal{K}_{\text{diff}}$ generado por los estados de la base perteneciente al mismo nudo K: $\mathcal{K}_K = P_{\text{diff}}\mathcal{K}_\Gamma$. En el espacio $\mathcal{K}_K$ los estados se distinguen únicamente por el color de los enlaces o nodos. Dicho estados no son necesariamente mutuamente ortogonales. Por lo tanto, para obtener una base ortonormal de $\mathcal{K}_K$ es necesario realizar un proceso de ortonormalización a la forma cuadrática definida en (4.36). Denotaremos a los estados resultantes de dicha ortonormalización $|s\rangle = |K, c\rangle$. Al número c se le denomina *color del nudo*. Estos estados se denominan *estados de espín-nudo* o *estados s-nudo*.

Una de las principales propiedades de los nudos es que forman un conjunto discreto, así, el conjunto de las etiquetas K es también discreto. Luego, $\mathcal{K}_{\text{diff}}$ admite una base discreta ortonormal $|s\rangle = |K, c\rangle$ y $\mathcal{K}_{\text{diff}}$ es un espacio de Hilbert separable. Con esto concluimos la construcción del espacio de estados cinemático de LQG.

4.5. Operadores

Como se mostró en § 1.5, la teoría canónica clásica admite dos variables de campo básicas: la conexión A^i_α y su momento canónicamente conjugado E^α_i. Los operadores cuánticos asociados a estas cantidades pueden definirse, entonces, como:

$$\hat{A}^i_\alpha(\tau)\Psi[A] = A^i_\alpha\Psi[A], \tag{4.37}$$

$$\hat{E}^\alpha_i(\tau)\Psi[A] = -i\hbar 8\pi G\frac{\delta}{\delta A^i_\alpha(\tau)}\Psi[A]. \tag{4.38}$$

Ambos actúan sobre funcionales $\Psi[A]$. El primero actúa como un operador multiplicativo, mientras que el segundo es una derivada funcional. El problema con estos operadores es que los dos envían al funcional $\Psi[A]$ fuera del espacio de estados que hemos construido en la sección anterior. En particular, no están bien definidos en $\mathcal{K}$. Este obstáculo puede removerse fácilmente tomando como operadores básicos, en vez de A y E, alguna función de los mismos.

La conexión A

La holonomía $U(A,\gamma)$ está bien definida en $\mathcal{S}$. Sean $U^A{}_B(A,\gamma)$ los elementos de matriz del elemento de grupo $U(A,\gamma)$, entonces

$$(U^A{}_B(A,\gamma)\Psi)[A] = U^A{}_B(A,\gamma)[A]\Psi[A]. \tag{4.39}$$

El lado derecho de la ecuación pertenece a $\mathcal{S}$ si $\Psi[A]\in\mathcal{S}$. De hecho, cualquier función cilíndrica de la conexión está bien definida como un operador multiplicativo en $\mathcal{K}$.

El momento conjugado E

Para entender la acción de E debemos calcular la derivada funcional de la holonomía. Se puede mostrar que:

$$\frac{\delta}{\delta A^i_\alpha(x)}U(A,\gamma) = \int ds\dot{\gamma}^\alpha(s)\delta^3(\gamma(s),x)[U(A,\gamma_1)\tau_i U(A,\gamma_2)], \tag{4.40}$$

donde s es una parametrización arbitraria de la curva γ y $\dot{\gamma}^\alpha(s)\equiv\frac{d\gamma^\alpha}{ds}$ es el vector tangente a la curva en el punto $\gamma(s)$, γ_1 y γ_2 son dos segmentos de γ separados por el punto x.

El lado derecho de (4.40) es una distribución bidimensional pues una de las tres deltas en δ^3 es integrada en ds. En consecuencia, trataremos de construir un operador bien definido en $\mathcal{K}$ integrando E en una superficie de dos dimensiones.

Para este propósito, consideremos la superficie bidimensional $\mathcal{S}$ embebida en la variedad tridimensional Σ. Sean $\vec{\sigma}=(\sigma^1,\sigma^2)$ las coordenadas sobre la superficie $\mathcal{S}$. Ésta se define en Σ por el mapa $\mathcal{S}:(\sigma^1,\sigma^2)\to x^\alpha(\sigma^1,\sigma^2)$. Consideremos el operador

$$E_i(\mathcal{S}) \equiv -i\hbar 8\pi G\int_{\mathcal{S}} d\sigma^1 d\sigma^2 n_\alpha(\vec{\sigma})\frac{\delta}{\delta A^i_\alpha(\vec{x}(\vec{\sigma}))}, \tag{4.41}$$

donde

$$n_\alpha(\vec{\sigma}) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x^\beta(\vec{\sigma})}{\partial\sigma^1}\frac{\partial x^\gamma}{\partial\sigma^2} \tag{4.42}$$

es la 1-forma normal a $\mathcal{S}$ y $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ es el símbolo de Levi-Civita.

A continuación, calcularemos la acción del operador $E_i(\mathcal{S})$ en la holonomía $U(A,\gamma)$. Para dicho fin, asumamos que los puntos finales de la curva γ no pertenecen a $\mathcal{S}$ y, por simplicidad, que la intersección entre γ y $\mathcal{S}$ consta a lo sumo de sólo un punto P.

La curva está separada en dos tramos, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, por P. Utilizando (4.40) y (4.41), se obtiene

$$E_i(\mathcal{S})U(A,\gamma) \tag{4.43}$$

$$= -i\hbar 8\pi G \int_{\mathcal{S}} d\sigma^1 d\sigma^2 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma^1}\frac{\partial x^\beta}{\partial \sigma^2}\frac{\delta}{\delta A^i_\gamma(\vec{x}(\vec{\sigma}))} U(A,\gamma) \tag{4.44}$$

$$= -i\hbar 8\pi G \int_{\mathcal{S}}\int_{\gamma} d\sigma^1 d\sigma^2 ds \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma^1}\frac{\partial x^\beta}{\partial \sigma^2}\frac{\partial x^\gamma}{\partial s}\delta^3(\vec{x}(\vec{\sigma}),\vec{x}(s)) \times U(A,\gamma_1)\tau_i U(A,\gamma_2). \tag{4.45}$$

La última de estas integrales se anula a menos que la curva y la superficie se intersequen. Asumamos entonces que existe un único punto intersección de coordenadas $x^\alpha = 0$. Haciendo el cambio de variable $(\sigma^1,\sigma^2,s) \to (x^1,x^2,x^3)$:

$$x^\alpha(\sigma^1,\sigma^2,s) = x^\alpha(\sigma^1,\sigma^2) + x^\alpha(s), \tag{4.46}$$

cuyo jacobiano

$$J \equiv \frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(\sigma^1,\sigma^2,s)} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma^1}\frac{\partial x^\beta}{\partial \sigma^2}\frac{\partial x^\gamma}{\partial s}, \tag{4.47}$$

aparece en la integral (4.45), ésta puede resolverse, dando lugar al resultado siguiente:

$$\int_{\mathcal{S}}\int_{\gamma} d\sigma^1 d\sigma^2 ds \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma^1}\frac{\partial x^\beta}{\partial \sigma^2}\frac{\partial x^\gamma}{\partial s}\delta^3(\vec{x}(\vec{\sigma}),\vec{x}(s)) = \pm 1. \tag{4.48}$$

El signo está dado por la orientación relativa de la superficie y la curva. Luego:

$$\hat{E}_i(\mathcal{S})U(A,\gamma) = \pm i8\pi G\hbar U(A,\gamma_1)\tau_i U(A,\gamma_2). \tag{4.49}$$

Así, la acción del operador $\hat{E}^i(\mathcal{S})$ sobre la holonomía $U(A,\gamma)$ consiste en insertar la matriz $(\pm i\hbar\tau_i)$ en el punto de intersección entre $\mathcal{S}$ y γ.

La generalización a múltiples intersecciones es inmediata. Usando la letra p para denotar diferentes puntos de intersección:

$$E_i(\mathcal{S})U(A,\gamma) = \sum_{p\in(S\cup\gamma)} \pm i8\pi G\hbar U(A,\gamma_1^p)\tau_i U(A,\gamma_2^p). \tag{4.50}$$

Para una holonomía en una representación arbitraria j:

$$E_i(\mathcal{S})R^j(U(A,\gamma)) = \pm i8\pi G\hbar R^j(U(A,\gamma_1))\ {}^{(j)}\tau_i R^j(U(A,\gamma_2)), \tag{4.51}$$

donde ${}^{(j)}\tau_i$ es el generador $SU(2)$ en la representación de espín j.Por lo tanto, $E_i(\mathcal{S})$ es un operador bien definido en $\mathcal{K}$.

Calculemos la acción del operador $E^2(\mathcal{S}) \equiv \sum_i E_i(\mathcal{S})E_i(\mathcal{S})$, asumiendo que existe una única intersección entre $\mathcal{S}$ y el grafo del estado de la red de espín. Sea j

el espín del enlace de la intersección. Usando (4.51) y que ${}^{(j)}\tau_i \, {}^{(j)}\tau_i = j(j+1)\times\mathbb{1}$, entonces

$$E^2(\mathcal{S})|S\rangle = (8\pi G)^2\hbar^2 j(j+1)|S\rangle. \tag{4.52}$$

Sin embargo, esta expresión no es válida cuando la intersección consiste de varios puntos, pues las matrices τ_i deben contraerse en puntos distintos. Para resolver esta dificultad alcanza con dividir la superficie $\mathcal{S}$ en N superficies más pequeñas S_n, que se vuelven más y más pequeñas a medida que $N \to \infty$ y tales que para cualquier N se satisface $\cup_n \mathcal{S}_n = \mathcal{S}$. Se define entonces el operador asociado a la superficie $\mathcal{S}$

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathcal{S}) \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_n \sqrt{E^2(\mathcal{S}_n)}. \tag{4.53}$$

Para un valor de N suficiente grande, ningún $\mathcal{S}_n$ contendrá más de una intersección con Γ (en la hipótesis de que ningún nodo se encuentre en $\mathcal{S}$). Por lo tanto, la suma sobre N que surge como resultado de aplicar el operador $\hat{\mathbf{A}}$ a un estado de red de espín se reduce a una suma sobre las intersecciones entre Γ y γ, que es independiente de N, para N suficientemente grande. Así, valiéndonos además de la expresión (4.52), se obtiene:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathcal{S})|S\rangle = 8\pi G\hbar \sum_{P\in(\mathcal{S}\cap\Gamma)} \sqrt{j_P(j_P+1)}|S\rangle, \tag{4.54}$$

donde j_P es el color del enlace que corta a $\mathcal{S}$ en P. Este es un resultado clave. En primer término, los estado de redes de espín son autofunciones de este operador (con la elección apropiada de entrelazadores) y sus autovalores reales, por lo tanto, se trata de un operador autoadjunto. En segundo lugar, está bien definido en $\mathcal{K}$, siendo su análogo clásico el área de la superficie $\mathcal{S}$:

$$\mathbf{A}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} \sqrt{n_\alpha E_i^\alpha n_\beta E_i^\beta} d^2\sigma. \tag{4.55}$$

Así, el operador $\hat{\mathbf{A}}$ puede interpretarse físicamente como el operador asociado al área de la superficie $\mathcal{S}$. Este hecho implica inmediatamente una predicción física: cualquier medida del área de una superficie física sólo puede arrojar un resultado que se encuentre en el espectro de este operador. Como el espectro es discreto, esto significa que el área está cuantizada. Los valores propios son:

$$\mathbf{A}_{\vec{j}} = 8\pi\hbar G c^{-3} \sum_i \sqrt{j_i(j_i+1)}. \tag{4.56}$$

Si en vez de usar la conexión real se hubiese usado la conexión de Barbero, el resultado sería:

$$\mathbf{A}_{\vec{j}} = 8\pi\beta\hbar G c^{-3} \sum_i \sqrt{j_i(j_i+1)}. \tag{4.57}$$

Así, a menos del parámetro de Immirzi β, la ecuación (4.57) es una predicción cuantitativa de LQG. El valor más pequeño no nulo ($j = 1/2$) que puede tomar el área, considerando $\beta = 1$ es

$$\mathbf{A}_0 = 4\sqrt{3}\pi\hbar G c^{-3} \sim 10^{-66} cm^2. \tag{4.58}$$

Esta magnitud corresponde entonces a un cuanto de área portado por un enlace en la representación fundamental $j = 1/2$. El hecho de que exista una cota inferior para el área indica que existe un tamaño mínimo del espacio físico, en la escala de Planck.

Una discretización intrínseca del espacio físico en la escala de Planck era un resultado esperable de la gravedad cuántica. En el contexto de LQG esta naturaleza discreta no ha sido impuesta o postulada, sino que surge como una consecuencia directa de la cuantización.

Análogamente, puede construirse un operador asociado al volumen de una cierta región $\mathcal{R}$. Clásicamente, el volumen de dicha región está dado por

$$V(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} d^3x \sqrt{\frac{1}{3!}|\epsilon_{\alpha\beta\gamma} E^{\alpha i} E^{\beta j} E^{\gamma k}|}. \tag{4.59}$$

Se puede mostrar que se trata de un operador bien definido, no negativo y autoadjunto, con espectro discreto.

Interpretación física de los estados de red de espín

La propiedad esencial del operador volumen es que, al actuar sobre un estado de red de espín, solamente contribuyen al resultado los nodos de la red. Esto significa que el volumen de una región $\mathcal{R}$ es una suma de términos, uno para cada nodo de la red de espín dentro de $\mathcal{R}$. Así, puede interpretarse una red de espín con N nodos como un arreglo de N cuantos de volumen. Dichos cuantos están separados uno del otro mediante superficies, cuya área está determinada por el operador área. Este operador tiene contribuciones de cada enlace de la red de espín que corta la superficie $\mathcal{S}$. Se desprende entonces la siguiente interpretación: dos cuantos de volumen son contiguos si los correspondientes nodos están conectados por un enlace l. En este caso, hay una superficie elemental separándolos, cuya área queda especificada por el color j_l del enlace l:

$$\mathbf{A}_l = 8\pi c^{-3} \hbar G \sqrt{j_l(j_l+1)}. \tag{4.60}$$

De esta manera, los entrelazadores i_n asociados a los nodos son los números cuánticos del volumen y el espín j_l, asociado a los enlaces, es el número cuántico asociado al área. El volumen se encuentra en los nodos y el área en el enlace que los une. Luego, un estado de red de espín $|S\rangle$ determina una métrica discreta y cuantizada, en tres dimensiones.

Interpretación física de los estados de s-nudos

Consideremos un estado s-nudo $|s\rangle$. Por simplicidad, consideraremos difeomorfismos que sólo modifican la ubicación del grafo en la variedad tridimensional, lo que permite deshacernos de los tecnicismos asociados a los difeomorfismos que afectan a la orientación y/o el orden. En este caso, $|s\rangle$ puede interpretarse como la proyección bajo P_{diff} del estado de red de espín $|S\rangle$, excepto por su localización en la variedad tridimensional. Así, $|s\rangle$ retiene la información acerca del volumen y los cuantos de volumen adyacentes, y acerca del área y las superficies que separan a estos volúmenes, pero, debido a la acción de P_{diff}, se pierde cualquier información relacionada con la localización de estos cuantos de volumen en la variedad tridimensional.

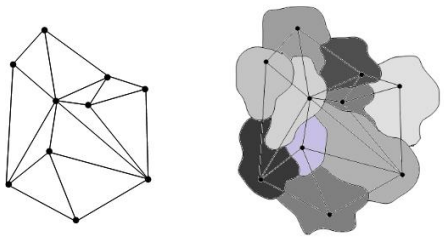

Figura 4.2: El grafo de una espuma de espín abstracta y el ensamble de cuantos de volumen que representa. Los cuantos de volumen son adyacentes cuando los correspondientes nodos están enlazados.

En conclusión, los estados $|s\rangle$ representan una geometría discreta y cuantizada, la cual está compuesta por cuantos de espacio abstractos que no viven en la variedad tridimensional sino que simplemente están localizados uno respecto del otro. Su relación espacial está únicamente determinada por la relación de adyacencia definida mediante los enlaces. El volumen de los cuantos y el área de las superficies están determinados por el color de los s-nudos. Los espines j_l son los números cuánticos asociados al área y los entrelazadores i_n hacen lo propio con el volumen. Finalmente, hemos conseguido construir estados cuánticos definidos de una manera invariante bajo difeomorfismos espaciales y con una interpretación física sencilla.

4.6. Simetría esférica

En las secciones anteriores hemos introducido conceptos y técnicas de LQG en un contexto general. En esta sección nos abocaremos a mencionar brevemente las simplificaciones que surgen cuando el espacio-tiempo es esféricamente simétrico. Como se mostró en el capítulo dedicado a simetría esférica, la reducción por simetría daba lugar a tres pares de variables canónicas: $(\bar{A}_\rho, E^\rho), (\bar{A}_x, E^x)$ y (η, P^η). Los estados de redes de espín, en este caso, están dados por el producto de holonomías de estas variables. Dado un grafo g, con aristas (enlaces) e_j y vértices (nodos) v_j, los estados de red de espín adoptan la forma

$$T_{g,\vec{k},\vec{\mu},\vec{n}} = \prod_{e_j \in g} e^{\frac{i}{2} k_j \int_{e_j} \bar{A}_x(x) dx} \prod_{v_j \in g} e^{i\mu_j \bar{A}_\rho(v_j)} e^{i n_j \eta(v_j)}, \tag{4.61}$$

donde k_j, la valencia de la arista e_j, es la representación del elemento del grupo $U(1)$, obtenido al tomar la holonomía de la conexión $\bar{A}_x$. La situación para $\bar{A}_\rho$ y η es más difícil. De manera intuitiva se puede pensar que μ_j y n_j son el resultado de integrar las variables $\bar{A}_\rho$ y η en una curva angular de radio constante ya que, al no haber dependencia angular, la integral tendrá un efecto meramente multiplicativo. Sin embargo, ni $\bar{A}_\rho$ ni η son conexiones genuinas, lo que imposibilita definir una holonomía asociada a estas variables. La expresión (4.61) puede derivarse partiendo de la holonomía para la teoría completa $U(A, \gamma) = e^{\int A^i_\alpha \tau_i dx^\alpha}$ e introduciendo la conexión esféricamente simétrica [9].

4.6.1. Acción de las tríadas

Recordemos que el operador E^α_i se definía como $\hat{E}^\alpha_i = -i\hbar 8\pi G \frac{\delta}{\delta \bar{A}^i_\alpha}$, con lo cual

$$\hat{E}^x = -i\hbar 8\pi G \frac{\delta}{\delta \bar{A}_x(x)}, \tag{4.62}$$

que, actuando sobre el estado (4.61), arroja el resultado:

$$\hat{E}^x(x) T_{g,\vec{k},\vec{\mu},\vec{n}} = 8\pi G\hbar \frac{k_j^+(x) + k_j^-(x)}{2} T_{g,\vec{k},\vec{\mu},\vec{n}}, \tag{4.63}$$

donde $k_j^+(x)$ y $k_j^-(x)$ son las valencias de las aristas que se intersecan en x, en caso de que se trate de un vértice, o las valencias de la arista que contenga al punto x en caso que no. Por su parte, el operador

$$\hat{E}^\rho(x) = -i\hbar 8\pi G \frac{\delta}{\delta \bar{A}_\rho(x)} \tag{4.64}$$

aplicado sobre los estados (4.61) tiene un resultado distribucional, pues $\bar{A}_\rho$ no está integrado. Para suavizar el resultado integramos en una región $\mathcal{I}$:

$$\int_{\mathcal{I}} \hat{E}^\rho T_{g,\vec{k},\vec{\mu},\vec{n}} dx = 8\pi G\hbar \sum_{v_j \in \mathcal{I}} \mu_j T_{g,\vec{k},\vec{\mu},\vec{n}}. \tag{4.65}$$

De manera análoga,

$$\int_{\mathcal{I}} \hat{P}^\eta T_{g,\vec{k},\vec{\mu},\vec{n}} dx = 8\pi G\hbar \sum_{v_j \in \mathcal{I}} n_j T_{g,\vec{k},\vec{\mu},\vec{n}}. \tag{4.66}$$

Por último, mencionamos la acción de la derivada del operador $\hat{E}^x$, la cual puede expresarse como una diferencia finita. Más adelante dicho operador aparecerá en expresiones en las que se encontrará como integrando; en este caso el espaciado de la diferencia finita termina cancelándose, dando lugar al resultado:

$$\int_{x^-}^{x^+} (E^x)' dx = E(x^+) - E(x^-). \tag{4.67}$$

Capítulo 5

Cuantización del espacio-tiempo

En esta sección procedemos a la aplicación de la cuantización de Dirac para el caso de un espacio-tiempo esféricamente simétrico y vacío, donde el vínculo hamiltoniano ha sido abelianizado. Puede mostrarse que clásicamente la única solución que caracteriza a espacio-tiempos esféricamente simétricos en el vacío es la de agujero negro. Así, los resultados de esta sección corresponderán a un agujero negro cuántico. A lo largo de toda la sección supondremos que el parámetro B.I. vale uno: $\beta = 1$.

5.1. Cinemática

Como se mencionó en el capítulo anterior, dado un grafo g, con aristas e_j y vértices v_j los estados de red de espín toman la forma:

$$T_{g,\vec{k},\vec{\mu}}(\bar{A}_x, \bar{A}_\rho, \eta) = \prod_{e_j \in g} e^{\frac{i}{2} k_j \int_{e_j} dx \bar{A}_x(x)} \prod_{v_j \in g} e^{i\mu_j \bar{A}_\rho(v_j)} e^{i n_j \eta(v_j)}, \tag{5.1}$$

donde k_j son las valencias asociadas a las aristas y μ_j son las "valencias" asociadas a los vértices. En primer lugar, impongamos el vínculo de Gauss,

$$\mathcal{G} = \int dx \lambda((E^x)' + P^\eta), \tag{5.2}$$

al estado (5.1):

$$\hat{G}_g(\lambda) T_{g,\vec{k},\vec{\mu}} = 8\pi l_P^2 \sum_{v_j \in g} \lambda(v_j) \left(k_{e_j^+} - k_{e_j^-} - 2n_j \right) T_{g,\vec{k},\vec{\mu}} = 0, \tag{5.3}$$

donde $l_P^2 = \hbar G$. Por lo tanto,

$$n_j = \frac{1}{2} \left(k_{e_j^+} - k_{e_j^-} \right). \tag{5.4}$$

Esto implica que la holonomía en la variable η es:

$$\prod_{v_j \in g} e^{\frac{i}{2}(k_{e_j^+} - k_{e_j^-})\eta(v_j)} = \prod_{e_j \in g} e^{\frac{1}{2} \int_{e_j \in g} dx k_j(x) \eta'(x)} \tag{5.5}$$

Combinando este término con la holonomía en la variable $\bar{A}_x$

$$\prod_{e_j \in g} e^{\frac{1}{2}\int_{e_j \in g} dx k_j(x)(\bar{A}_x + \eta')} = \prod_{e_j \in g} e^{\frac{1}{2}\int_{e_j \in g} dx k_j K_x}. \tag{5.6}$$

Y por lo tanto, los estados de redes de espín quedan reducidos a la siguiente expresión:

$$T_{g,\vec{k},\vec{\mu}}(K_x, K_\rho) = \prod_{e_j \in g} e^{\frac{i}{2}\int_{e_j} dx k_j K_x(x)} \prod_{v_j \in g} e^{\frac{i}{2}\mu_j K_\rho(v_j)}. \tag{5.7}$$

Adoptando una representación para las holonomías puntuales K_ρ como funciones periódicas, las etiquetas μ_j deben pertenecer a un subconjunto numerable de la recta real con puntos igualmente espaciados, no hay obstáculo, entonces, para que las etiquetas $\vec{\mu}$ estén caracterizadas por enteros, por ejemplo, $\vec{n}$. El espacio de Hilbert cinemático es entonces

$$\mathcal{H}^A_{kin} = \mathcal{H}^m_{kin} \otimes \left[\otimes^V_{j=1} l^2_j \otimes l^2_j\right], \tag{5.8}$$

donde $\mathcal{H}^m_{kin} = L^2(\mathbb{R}, dM)$ es la descripción estándar para el grado de libertad global correspondiente a la masa del agujero negro [27, 20, 23, 13] y l^2 denota el espacio de las funciones cuadrado sumables. Dicho espacio está equipado con el producto interno

$$\langle g, \vec{k}, \vec{n}, M \mid g', \vec{k}', \vec{n}', M' \rangle = \delta(M - M')\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{\vec{n},\vec{n}'}\delta_{g,g'}, \tag{5.9}$$

con $n_j \in \mathbb{Z}$.

5.2. Operadores

El operador masa funciona como un operador multiplicativo

$$\hat{M}|g, \vec{k}, \vec{\mu}, M\rangle = M|g, \vec{k}, \vec{\mu}, M\rangle. \tag{5.10}$$

Como vimos en la sección 4.6, las tríadas también actúan de forma multiplicativa

$$\hat{E}^x(x)|g, \vec{k}, \vec{\mu}, M\rangle = l^2_P k_j(x)|g, \vec{k}, \vec{\mu}, M\rangle \tag{5.11}$$

$$\int_I dx \hat{E}^\rho(x)|g, \vec{k}, \vec{\mu}, M\rangle = l^2_P \sum_{v_j \in g} \mu_j |g, \vec{k}, \vec{\mu}, M\rangle, \tag{5.12}$$

siendo $k_j(x)$ la valencia del enlace que contiene al punto x. Las holonomías, por su parte, actúan del siguiente modo:

$$e^{n\frac{i}{2}\int_{e_j} dx K_x(x)}|g, \vec{k}, \vec{\mu}, M\rangle = |g, \vec{k} + n x_j, \vec{\mu}, M\rangle, \tag{5.13}$$

$$e^{n\frac{i}{2}\rho K_\rho(v_j)}|g, \vec{k}, \vec{\mu}, M\rangle = |g, \vec{k}, \vec{\mu} + n\rho x_j, M\rangle, \tag{5.14}$$

donde x_j es un vector cuya única componente no nula es la j y vale 1. Estamos interesados en estados con un número fijo de vértices, pues la acción de los vínculos no modifica su cantidad. Así, la acción de la holonomía puntual ha sido restringida a los vértices, pues si no fuese de ese modo crearía nuevos vértices en la red.

5.3. Dinámica

En esta sección buscaremos los estados físicos, es decir, aquellos que son solución del vínculo hamiltoniano. Primeramente, observamos que el vínculo hamiltoniano (2.149) puede reescribirse como

$$\mathcal{H}(\widetilde{N}) = \int dx \widetilde{N} H_- H_+, \tag{5.15}$$

donde,

$$\mathcal{H}_\pm = \sqrt{\sqrt{E^x}(1+K_\rho^2) - 2GM} \pm \frac{(E^x)'(E^x)^{1/4}}{2E^\rho}. \tag{5.16}$$

Absorbiendo el factor H_+ en la función lapso y multiplicando el integrando por $4(E^\rho)^2$, se obtiene

$$\mathcal{H}(\underline{N}) = \int dx \underline{N} \left(2E^\rho \sqrt{\sqrt{E^x}\left(1+K_\rho^2\right) - 2GM} - (E^x)'(E^x)^{1/4} \right), \tag{5.17}$$

donde $\underline{N}$ es un nuevo multiplicador de Lagrange que emerge tras la absorción de H_+ y el nuevo reescalado.

Escogiendo ahora un orden de factores, y reemplazando K_ρ^2 por su versión holonomizada (puesto que K_ρ no está bien definido en el espacio de Hilbert cinemático): $K_\rho \to \sin(\rho K_\rho)/\rho$, el operador cuántico adopta la forma:

$$\hat{\mathcal{H}}(N) = \int dx N \left(2 \left\{ \sqrt{\sqrt{\hat{E}^x}(1+\sin^2(\rho\hat{K}_\rho)/\rho^2) - 2GM} \right\} \hat{E}^\rho - \frac{(\hat{E}^x)'}{(\hat{E}^x)^{-1/4}} \right). \tag{5.18}$$

Para hallar los estados físicos resulta conveniente, en lugar de utilizar la representación de holonomías, utilizar la representación de conexiones. Esta conveniencia se justifica en que el operador $\sin(\hat{\rho}K_\rho)$ actúa sobre los estados base $|g, \vec{k}, \vec{\mu}, M\rangle$ modificando el índice μ, y dando lugar a una ecuación de diferencias finitas complicada de resolver. En cambio, utilizando la representación mezclada, la acción del operador mencionado es meramente multiplicativa, mientras que E^ρ actúa como $-il_P^2 \partial/\partial K_\rho$. Luego, los estados buscados son una combinación lineal de vectores de la base $|g, \vec{k}, \vec{K}_\rho, M\rangle$, donde $\vec{K}_\rho$ es un vector cuya j-ésima componente es $K_\rho(v_j)$. Estos estados son de la forma:

$$\begin{aligned} |\Psi_g\rangle = &\int_0^\infty dM \prod_{v_j \in g} \int_0^{\pi/\rho} dK_\rho(v_j) \\ &\times \sum_{\vec{k}} |g, \vec{k}, \vec{K}_\rho, M\rangle \Psi(M, \vec{k}, \vec{K}_\rho). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Los coeficientes de (5.19) pueden simplificarse notando que el operador hamiltoniano actúa únicamente sobre los vértices:

$$\hat{\mathcal{H}}(N) = \sum_{v_j \in g} N(v_j) H(v_j). \tag{5.20}$$

Factorizando, en consecuencia, la función Ψ como

$$\Psi(M, \vec{k}, \vec{K}_\rho) = \prod_j \psi_j(M, k_j, k_{j+1}, K_\rho(v_j)). \tag{5.21}$$

La ecuación $\hat{H}|\Psi_g\rangle = 0$ da lugar a

$$\begin{aligned} &- 4il_P^2\sqrt{l_P k_j^{1/2}\left(1+\frac{\sin^2(\rho K_\rho)}{\rho^2}\right)-2GM}\partial_{K_\rho(v_j)}\psi_j \\ &- l_P^2 l_P^{1/2} k_j^{1/4}(k_{j+1}-k_j)\psi_j = 0, \end{aligned} \tag{5.22}$$

multiplicando por $-l_P^2 l_P^{1/2} k_j^{1/4}$:

$$4i\sqrt{\left(1+\frac{\sin^2(\rho K_\rho)}{\rho^2}-\frac{2GM}{l_P k_j^{1/2}}\right)}\partial_{K_\rho(v_j)}\psi_j + (k_{j+1}-K_j)\psi_j = 0, \tag{5.23}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} &4i\left(1-\frac{2GM}{l_P k_j^{1/2}}\right)^{1/2}\sqrt{1+\sin^2(\rho K_\rho)\rho^{-2}\left(1-\frac{2GM}{l_P k_j^{1/2}}\right)^{-1}}\partial_{K_\rho(v_j)}\psi_j \\ &+ (k_{j+1}-k_j)\psi_j = 0. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Multiplicando y dividiendo el primer sumando por ρ, y definiendo:

$$y_j \equiv \rho K_\rho(v_j) \qquad\qquad m_j^2 \equiv \rho^{-2}\left(1-\frac{2GM}{l_P k_j^{1/2}}\right)^{-1}, \tag{5.25}$$

la ecuación anterior adquiere la forma

$$4i\frac{1}{m_j}\sqrt{1+m_j^2\sin^2 y_j}\partial_{y_j}\psi_j + (k_{j+1}-k_j)\psi_j = 0. \tag{5.26}$$

La solución para ψ_j es:

$$\psi_j(M, k_j, k_{j+1}, K_\rho(v_j)) = \exp\left(\frac{i}{4}m_j(k_{j+1}-k_j)F(\rho K_\rho(v_j), im_j)\right), \tag{5.27}$$

con

$$F(\phi, K) = \int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1-K^2\sin^2 t}}. \tag{5.28}$$

Estos resultados son normalizables con respecto al producto escalar cinemático definido en el capítulo 4. Aplicando el procedimiento descrito allí podremos obtener estados invariantes bajo difeomorfismos, obteniendo el espacio de estados físicos.

5.4. Observables

Un observable es una cantidad invariante gauge, es decir, una función de las variables canónicas cuyo corchete de Poisson con todos los vínculos es cero. En nuestro caso, uno de los observables se reconoce de manera inmediata, la masa M del agujero negro, que puede identificarse como un observable de borde [27, 19, 23]. Surgen, además, otros observables sin análogo clásico. El primero de

ellos es el número de vértices. Puesto que ni el operador vínculo hamiltoniano (5.18) ni el vínculo de difeomorfismos modifican el número de vértices al actuar sobre los estados cinemáticos, podemos construir el observable de Dirac $\hat{V}$ tal que al actuar sobre los estados Ψ_g da un número entero V (el número total de vértices). Es más, la restricción a difeomorfismos invertibles en la teoría clásica implica que la variable E^x es monótonamente creciente, lo que da lugar a valores monótonamente crecientes de $\vec{k}$ que, a nivel cuántico, caracterizan la secuencia de radios de la geometría (la ecuación (2.120) del capítulo 2 promovida a nivel cuántico es $\hat{E}^x = \hat{R}^2$). El segundo observable emerge de la observación de que el orden de los vértices es invariante bajo la acción de difeomorfismos radiales. Sea z un parámetro en el intervalo $[0, 1]$, se define

$$\hat{O}(z)|\Psi\rangle_f = l_P^2 k_{int(Vz)}|\Psi\rangle_f, \tag{5.29}$$

donde V es el número total de vértices e $\mathrm{Int}(Vz)$ es la parte entera de Vz. Al variar z entre 0 y 1, el operador dará como resultado las componentes del vector $\vec{k}$ de forma ordenada. Este observable puede utilizarse para captar la parte invariante gauge del operador $\hat{E}^x$ (el cual no es un observable, puesto que no es invariante bajo difeomorfismos), viabilizando una representación del mismo en el espacio de estados físicos. Sea la función $z : \mathbb{R} \to [0, 1]$, definimos el operador:

$$\hat{E}^x(x)|\Psi\rangle_f = \hat{O}(z(x))|\Psi\rangle_f, \tag{5.30}$$

el cual, en efecto, es un observable de Dirac. Su valor queda especificado una vez elegida la función $z(x)$: así, esta función codifica la libertad gauge en E^x.

El uso de observables de Dirac parametrizados permite expresar la métrica en términos de éstos y funciones explícitas que desempeñan el rol de parámetros. De la descomposición ADM de la métrica tenemos las expresiones clásicas

$$\begin{aligned} g_{tx} = h_{xx}N^x &= -\frac{2NK_\rho\sqrt{E^x}}{(E^x)'}\frac{(E^\rho)^2}{E^x} \\ &= \sqrt{(1+K_\rho^2) - \frac{2GM}{\sqrt{E^x}}} - \frac{2K_\rho(E^x)'}{4\sqrt{E^x}\left(1+K_\rho^2-\frac{2GM}{\sqrt{E^x}}\right)} \\ &= -\frac{K_\rho(E^x)'}{2\sqrt{E^x}\sqrt{1+K_\rho^2-\frac{2GM}{\sqrt{E^x}}}}, \end{aligned} \tag{5.31}$$

$$g_{xx} = h_{xx} = \frac{((E^x)')^2}{4E^x\left(1+K_\rho^2-\frac{2GM}{\sqrt{E^x}}\right)} \tag{5.32}$$

$$g_{tt} = (-N^2 + h_{xx}(N^x)^2) = \left(1 - \frac{2GM}{\sqrt{E^x}}\right), \tag{5.33}$$

las cuales pueden promoverse a operadores cuánticos sustituyendo $E^x \to \hat{E}^x$ y $M \to \hat{M}$. La cantidad K_ρ es un parámetro funcional del cual dependen los observables.

Capítulo 6

Renormalización en espacio-tiempo cuántico

6.1. Introducción

Como vimos en el capítulo anterior, el espacio-tiempo con simetría esférica que emerge tras la cuantización es de naturaleza discreta y se caracteriza completamente por la masa ADM y una red de espín unidimensional, dada por el grafo g y un conjunto de números enteros correspondientes a las valencias de la red de espín $\vec{k}$. Éstos se vinculan con la tríada $\hat{E}^x$, de modo que la coordenada radial está cuantizada, con un espaciado de red subplanckiano:

$$r_i^2 = l_P^2 k_i \tag{6.1}$$

donde el índice i está asociado con los vértices radiales de la red de espín.

En este capítulo estudiaremos el valor esperado del tensor energía-momento de un campo cuántico escalar libre, sobre un espacio-tiempo cuántico esféricamente simétrico, para modos de alta frecuencia. Ya han sido considerados campos cuánticos sobre este tipo de espacios: el efecto Casimir entre dos cascarones esféricos[20] ha sido estudiado y la radiación de Hawking ha sido derivada con pequeñas correcciones [22]. La principal diferencia que surge al tratar campos cuánticos sobre espacio-tiempos cuánticos en oposición a espacio-tiempos clásicos es que las ecuaciones de campo se discretizan y las divergencias se regulan naturalmente, como veremos en la sección 6.3. Sin embargo, debido a que el espaciado de la red es subplanckiano, las cantidades divergentes en el continuo se vuelven finitas pero enormes, estableciendo una inadmisible dependencia de la macrofísica con respecto a la microestructura espacial. Dicha relación puede eliminarse a través de una renormalización finita.

6.2. Función de Green de Feynman

Como señalamos en el capítulo 3, el tensor energía-momento se vincula con la acción efectiva mediante la relación:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{6.2}$$

donde

$$W = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\ln(-G_F)) \tag{6.3}$$

es la acción efectiva y G_F es el propagador de Feynman para un campo escalar, es decir,

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2 + \xi R)G_F(x,x') = -(-g(x))^{-1/2}\delta(x-x'). \tag{6.4}$$

Por lo tanto, para analizar las divergencias de $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ o de qué modo se ven alteradas las mismas sobre un fondo espacio-temporal cuantizado, es necesario estudiar el propagador de Feynman.

6.2.1. Continuo

En este apartado adaptaremos brevemente las ideas expuestas en el capítulo 3 al caso 1+1 dimensional, ya que el espacio-tiempo cuántico con el que contrastaremos los resultados es esféricamente simétrico.

La acción gravitacional con una posible constante cosmológica en 1+1 dimensiones está dada por:

$$S_g = \int dx^0 dr \frac{\sqrt{-g^{(2)}}}{4G_B}(Rr^2 - 2\Lambda_B), \tag{6.5}$$

donde G_B y Λ_B son los valores de las constantes de Newton y cosmológica desnudas. La acción total es, entonces

$$S = S_g + S_m, \tag{6.6}$$

donde S_m es la acción material.

Por otro lado, en coordenadas normales de Riemann próximas a un punto x' (pues nuestro objetivo es estudiar las divergencias ultravioletas), la métrica puede expandirse como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R_{\mu\alpha\nu\beta}y^\alpha y^\beta - \frac{1}{6}R_{\mu\alpha\nu\beta;\gamma}y^\alpha y^\beta y^\gamma + \ldots, \tag{6.7}$$

donde y^μ son las coordenadas del punto x. El propagador de Feynman reescalado $\bar{G} = (-g)^{1/4}G$ en el espacio de momentos puede escribirse como

$$\begin{aligned}\bar{G}_F(x,x') \approx \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{-iky}\Big[a_0(x,x') + a_1(x,x')\Big(-\frac{\partial}{\partial m^2}\Big) \\ + a_2(x,x')\Big(\frac{\partial}{\partial m^2}\Big)^2\Big](k^2-m^2)^{-1},\end{aligned} \tag{6.8}$$

donde a_0, a_1 y a_2 son términos puramente geométricos cuya expresión explícita se muestra en (3.52)-(3.54). Utilizando la identidad

$$(k^2-m^2)^{-1} = -i\int_0^\infty ds\, \exp(is(k^2-m^2)), \tag{6.9}$$

puede integrarse en k, obteniéndose

$$\bar{G}(x,x') \approx -\frac{i}{4\pi}\int_0^\infty \frac{ds}{s}e^{-im^2 s + \frac{\sigma}{2is}}[1 + a_1(x,x')(is) + a_2(x,x')(is)^2]. \tag{6.10}$$

con $\sigma = 1/2y_\alpha y^\alpha$. A diferencia del caso en 3+1 dimensiones, en 1+1 el término en a_2 no da lugar a divergencias.

6.2.2. Cuántico

En este apartado calcularemos el propagador de Feynman para un espaciotiempo esféricamente simétrico, del tipo introducido en la sección anterior. Puesto que el espaciado de la red es muy fino, en la mayor parte de los cálculos subsiguientes aproximaremos las ecuaciones discretas por ecuaciones en el continuo e introduciremos la discretización en puntos clave, donde sea relevante.

Consideremos una red de espín equiespaciada en coordenadas normales, con un paso de red Δ. Esta discretización impone un valor máximo en k^1:

$$k^1_{max} = 2\pi/\Delta. \tag{6.11}$$

La función de Green está dada, entonces, por

$$\begin{aligned}\bar{G}_\Delta(x,x') \approx & \int_{-2\pi/\Delta}^{2\pi/\Delta} \frac{dk_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \exp(-(ik_0y^0 - ik_1y^1)) \\ & \times \Big[1 + a_1(x,x')\Big(-\frac{\partial}{\partial m^2}\Big)\Big] \frac{1}{k_0^2 - k_1^2 - m^2},\end{aligned} \tag{6.12}$$

Sustituyendo en la expresión anterior la representación integral

$$(k^2 - m^2)^{-1} = -i \int_0^\infty ds e^{is(k^2 - m^2)}, \tag{6.13}$$

(6.12) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\bar{G}_\Delta(x,x') = & -i \int_0^\infty ds \int_{-2\pi/\Delta}^{2\pi/\Delta} \frac{dk_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \Big[1 + a_1(x,x')\Big(-\frac{\partial}{\partial m^2}\Big)\Big] \\ & \times e^{is(k_0^2 - k_1^2 - m^2)} e^{-(ik_0y^0 - ik_1y^1)}.\end{aligned} \tag{6.14}$$

Concentrémonos, en primer término, en la integrales en k^0 y k^1. Reagrupando términos en los exponentes, la integral en k_1 se reduce a:

$$\int_{-2\pi/\Delta}^{2\pi/\Delta} \frac{dk_1}{2\pi} e^{-isk_1^2 + ik_1y^1} = \int_{-2\pi/\Delta}^{2\pi/\Delta} \frac{dk_1}{2\pi} e^{-is\left(k_1 - \frac{y_1}{2s}\right)^2} \tag{6.15}$$

$$= e^{\frac{y_1^2}{4is}} \int_{\sqrt{is}(-\frac{2\pi}{\Delta} - \frac{y_1}{2s})}^{\sqrt{is}(\frac{2\pi}{\Delta} - \frac{y_1}{2s})} \frac{du}{2\pi} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{is}} \tag{6.16}$$

$$= e^{\frac{y_1^2}{4is}} \frac{1}{2\pi\sqrt{is}} \Bigg[-\underbrace{\int_0^{-\sqrt{is}(\frac{2\pi}{\Delta} + \frac{y_1}{2s})} du\, e^{-u^2}}_{= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erf}(-\sqrt{is}(\frac{2\pi}{\Delta} + \frac{y_1}{2s}))} + \underbrace{\int_0^{\sqrt{is}(\frac{2\pi}{\Delta} - \frac{y_1}{2s})} du\, e^{-u^2}}_{= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erf}(\sqrt{is}(\frac{2\pi}{\Delta} - \frac{y_1}{2s}))} \Bigg] \tag{6.17}$$

$$= e^{\frac{y_1^2}{4is}} \frac{1}{4\sqrt{\pi is}} \Bigg[\mathrm{erf}\Big(\sqrt{is}\Big(\frac{2\pi}{\Delta} - \frac{y_1}{2s}\Big)\Big) - \mathrm{erf}\Big(-\sqrt{is}\Big(\frac{2\pi}{\Delta} + \frac{y_1}{2s}\Big)\Big) \Bigg], \tag{6.18}$$

donde en (6.16) hemos realizado el cambio de variable $u = \sqrt{is}\Big(k_1 - y_1/2s\Big)$.

Por otra parte, la integral en k^0 es:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}e^{isk_0^2-ik_0y^0}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}e^{-\frac{s}{i}(k_0-\frac{y_0}{2s})^2}e^{-\frac{y_0^2}{4is}} \tag{6.19}$$

$$=e^{-\frac{y_0^2}{4is}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv}{2\pi}\sqrt{\frac{i}{s}}e^{-v^2} \tag{6.20}$$

$$=e^{-\frac{y_0^2}{4is}}\sqrt{\frac{i}{s}}\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}, \tag{6.21}$$

donde en (6.20) hemos efectuado el cambio de variable $v=\sqrt{s/i}(k_0-y_0/2s)$.

Sustituyendo los resultados (6.21) y (6.18) en (6.14) se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{G}_\Delta(x,x')=&-\frac{i}{8\pi}\int_0^\infty\frac{ds}{s}\exp\Big(-im^2s+\frac{\sigma}{2is}\Big)\{1+a_1(x,x')(is)\}\\&\times\Big[\mathrm{erf}\Big(\frac{\sqrt{i}}{2}\Big(\frac{4\pi s-y_1\Delta}{\Delta\sqrt{s}}\Big)\Big)-\mathrm{erf}\Big(-\frac{\sqrt{i}}{2}\Big(\frac{4\pi s+y_1\Delta}{\Delta\sqrt{s}}\Big)\Big)\Big],\end{aligned} \tag{6.22}$$

donde $\sigma=y^\alpha y_\alpha/2$ es la mitad del cuadrado de la distancia propia entre x y x'. La consistencia de este resultado puede verificarse estudiando el límite $\Delta\to 0$:

$$\mathrm{erf}\Big(\pm\frac{\sqrt{i}}{2}\Big(\frac{4\pi s\mp y_1\Delta}{\Delta\sqrt{s}}\Big)\Big)\underset{\Delta\to0}{\longrightarrow}\mathrm{erf}\Big(\pm\frac{\sqrt{i}}{2}\frac{4\pi\sqrt{s}}{\Delta}\Big), \tag{6.23}$$

utilizando además que $\mathrm{erf}(-z)=-\mathrm{erf}(z)$ se obtiene

$$\mathrm{erf}\Big(\frac{\sqrt{i}}{2}\Big(\frac{4\pi s-y_1\Delta}{\Delta\sqrt{s}}\Big)\Big)-\mathrm{erf}\Big(-\frac{\sqrt{i}}{2}\Big(\frac{4\pi s+y_1\Delta}{\Delta\sqrt{s}}\Big)\Big)\underset{\Delta\to0}{\longrightarrow}2\mathrm{erf}\Big(\frac{2\pi\sqrt{is}}{\Delta}\Big), \tag{6.24}$$

y como

$$\lim_{\Delta\to0^+}\mathrm{erf}\Big(\frac{2\pi\sqrt{is}}{\Delta}\Big)=1, \tag{6.25}$$

en efecto, recuperamos el resultado para espacio-tiempos continuos (6.10):

$$\lim_{\Delta\to0^+}\bar{G}_\Delta(x,x')=-\frac{i}{4\pi}\int_0^\infty\frac{ds}{s}\exp\Big(-im^2s+\frac{\sigma}{2is}\Big)\{1+a_1(x,x')(is)\}=\bar{G}(x,x'). \tag{6.26}$$

6.3. Acción efectiva

Como se expuso en la sección 3.3 del capítulo 3, la acción efectiva está dada por

$$W=\int d^nx\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}=\int[-g(x)]^{1/2}L_{\mathrm{eff}}d^nx, \tag{6.27}$$

y

$$L_{\mathrm{eff}}=\frac{i}{2}\lim_{x'\to x}\int_{m^2}^\infty dm^2\ G_F(x,x'). \tag{6.28}$$

Para obtener el lagrangeano efectivo para el espacio-tiempo cuántico alcanza con reemplazar $G_F(x,x')$ por $G_\Delta(x,x')$ en (6.28):

$$L_{\mathrm{eff}}=-\frac{i}{8\pi}\int_0^\infty\frac{ds}{s^2}e^{-im^2s}\mathrm{erf}\Big(\frac{2\pi\sqrt{is}}{\Delta}\Big)F(x,x';is). \tag{6.29}$$

Nos interesa estudiar aquellos términos divergentes en espacio-tiempos continuos esféricamente simétricos, es decir:

$$L_{\rm div} = -\frac{i}{8\pi}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-im^2 s}\mathrm{erf}\Big(\frac{2\pi\sqrt{is}}{\Delta}\Big)(a_0(x) + a_1(x)(is)), \tag{6.30}$$

donde $a_0(x) = a_0(x,x)$ y $a_1(x) = a_1(x,x)$. En los apartados siguientes nos dedicaremos a calcular explícitamente $L_{\rm div}$. Procederemos por dos caminos, (i) utilizando el desarrollo de Taylor para la función error y extendiendo analíticamente el resultado a la región asintótica y (ii) usando la serie asintótica de la función error; obteniéndose el mismo resultado en ambos casos.

6.3.1. Término en a_0

El término en a_0 está dado por

$$L_{{\rm eff},a_0} = -\frac{i}{8\pi}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-im^2 s}\mathrm{erf}\left(\frac{2\pi}{\Delta}\sqrt{is}\right), \tag{6.31}$$

donde hemos hecho la sustitución $a_0 = 1$.

Serie de Taylor

La función error puede expandirse del siguiente modo:

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}. \tag{6.32}$$

Insertando esta expansión en (6.31):

$$L_{{\rm eff},a_0} = -\frac{1}{4(\pi)^{3/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^{n+3/2}}{n!(2n+1)}\left(\frac{2\pi}{\Delta}\right)^{2n+1}\int_0^\infty ds\; e^{-im^2 s}s^{n-3/2}, \tag{6.33}$$

y haciendo el cambio de variable $u = im^2 s$:

$$L_{{\rm eff},a_0} \tag{6.34}$$

$$= -\frac{1}{4(\pi)^{3/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^{n+3/2}(im^2)^{-n+1/2}}{n!(2n+1)}\left(\frac{2\pi}{\Delta}\right)^{2n+1}\underbrace{\int_0^\infty du e^{-u}u^{n-1/2-1}}_{=\Gamma(n-\frac{1}{2})} \tag{6.35}$$

$$= \frac{1}{4(\pi)^{3/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\left(\frac{2\pi}{\Delta}\right)^{2n+1} m^{-2n+1}\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \tag{6.36}$$

$$= \frac{m}{2\Delta\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\left(\frac{2\pi}{\Delta m}\right)^{2n}\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right). \tag{6.37}$$

Por otra parte, la serie que aparece en (6.37) satisface la relación:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}k^n\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\frac{\pi}{k}}(\sqrt{k(k+1)} + \sinh^{-1}(\sqrt{k})). \tag{6.38}$$

En (6.37), $k = \left(\frac{2\pi}{\Delta m}\right)^2 \implies k << 1$, ya que Δ es del orden de la longitud de Planck. Tomemos, pues, la expansión asintótica del término a la derecha de la igualdad (6.38), a saber:

$$\sqrt{k+1} + \frac{1}{\sqrt{k}}\sinh^{-1}(\sqrt{k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{k} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{k}}\left(-\ln\left(\frac{1}{k}\right) + 1 + \ln(4)\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{k}\right)^{3/2}\right). \tag{6.39}$$

Por lo tanto, la ecuación (6.37), puede reescribirse como

$$L_{\text{eff},a_0} \tag{6.40}$$

$$\approx -\frac{m}{2\Delta}\left(\frac{2\pi}{\Delta m} + \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{2\pi}\left[-\ln\left(\left(\frac{\Delta m}{2\pi}\right)^2\right) + 1 + \ln(4)\right]\right) \tag{6.41}$$

$$\approx -\left(\frac{\pi}{\Delta^2} + \frac{m^2}{8\pi}\left[\ln\left(\frac{16\pi^2}{\Delta^2 m^2}\right) + 1\right]\right) \tag{6.42}$$

Expansión asintótica

La serie asintótica para la función error es

$$\text{erf}(z) = 1 - \frac{e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2z^2)^n}. \tag{6.43}$$

Sustituyendo esta expresión en (6.31), se obtiene:

$$L_{\text{eff},a_0} = \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2}\frac{\Delta}{8\pi^{3/2}\sqrt{is}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!\Delta^{2n}}{2^n\ i^n\ s^n(4\pi^2)^n}, \tag{6.44}$$

donde hemos ignorado el primer sumando en (6.43) por tratarse de una constante (infinita), independiente de Δ.
Concentrémonos ahora en la integral en s. Aplicando el cambio de variable $u = i(\frac{4\pi^2}{\Delta^2} + m^2)s$, se obtiene la identidad

$$\int_0^\infty ds\ e^{-i(4\pi^2/\Delta^2+m^2)s}s^{n-3/2-1} = \alpha^{n+3/2}\Gamma(-n-3/2), \tag{6.45}$$

donde

$$\alpha = i(4\pi^2/\Delta^2 + m^2), \tag{6.46}$$

con lo cual L_{eff,a_0} toma la forma

$$L_{\text{eff},a_0} = \frac{i}{2}\frac{i\Delta}{16\pi^{5/2})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!\Delta^{2n}}{2^n(4\pi^2)^n}\left(\frac{4\pi^2}{\Delta^2} + m^2\right)\Gamma\left(-n-\frac{3}{2}\right), \tag{6.47}$$

reagrupando términos:

$$L_{\text{eff},a_0} = \frac{2^{3/2}(4\pi^2)^{3/2}}{\Delta 16\pi^{5/2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n-1)!!\left(\frac{1}{2} + \frac{m^2\Delta^2}{8\pi^2}\right)^{n+3/2}\Gamma\left(-n-\frac{3}{2}\right). \tag{6.48}$$

Estudiemos ahora la serie de la ecuación (6.48):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n-1)!!k^{n+3/2}\Gamma\left(-n-\frac{3}{2}\right), \tag{6.49}$$

donde $k=\frac{1}{2}+\frac{m^2\Delta^2}{8\pi^2}$. Puesto que nos interesa estudiar la aproximación donde $m\Delta\to 0$, expandamos en torno a $k=1/2$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n-1)!!k^{n+3/2}\Gamma\left(-n-\frac{3}{2}\right)\underset{k\to 1/2}{\approx}\\
&\left[\frac{-\arg\left(-\frac{\sqrt{2k}-1}{2k-1}\right)-\arg(2k-1)+\pi}{2\pi}\right]\left(-i\sqrt{2}\pi^{3/2}\left(k-\frac{1}{2}\right)+\mathcal{O}\left(k-\frac{1}{2}\right)^7\right)\\
&+\left[\frac{\arg\left(\frac{2k-2\sqrt{2}\sqrt{k}+1}{2k-1}\right)}{2\pi}\right]\left(-i\sqrt{2}\pi^{3/2}\left(k-\frac{1}{2}\right)+\mathcal{O}\left(k-\frac{1}{2}\right)^7\right)\\
&+\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(-\ln\left(k-\frac{1}{2}\right)+\ln(2)-i\pi+1\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)+\mathcal{O}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2,
\end{aligned} \tag{6.50}$$

utilizando que $\arg(k)$=0 y sustituyendo esta expansión en (6.48), con $k=\frac{1}{2}+\frac{m^2\Delta^2}{8\pi^2}$ se obtiene:

$$L_{\text{eff},a_0}\approx-\left(\frac{\pi}{\Delta^2}+\frac{m^2}{8\pi}\left(1+\ln\left(\frac{16\pi^2}{m^2\Delta^2}\right)\right)\right). \tag{6.51}$$

En efectos, ambos cálculos, serie de Taylor y expansión asintótica han arrojado el mismo resultado para L_{eff,a_0}.

6.3.2. Término en a_1

El término en $a_1(x)$ es:

$$L_{\text{eff},a_1}=-\frac{i}{8\pi}\int_0^{\infty}\frac{ds}{s^2}e^{-im^2s}\text{erf}\Big(\frac{2\pi\sqrt{is}}{\Delta}\Big)a_1(x)(is). \tag{6.52}$$

Serie de Taylor

Usando el desarrollo (6.32) para la función error en (6.52) y reemplazando:

$$L_{\text{eff},a_1}=\frac{1}{4\pi^{3/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\int_0^{\infty}ds\,\left(\frac{2\pi\sqrt{is}}{\Delta}\right)^{2n+1}e^{-im^2s}a_1(x), \tag{6.53}$$

haciendo el cambio de variable $im^2s=u$, la integral en s da lugar a un término proporcional a una función Γ, de modo que L_{eff,a_1} puede reexpresarse como

$$L_{\text{eff},a_1}=\frac{1}{4\pi^{3/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\left(\frac{2\pi}{\Delta m}\right)^{2n+1}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)a_1(x), \tag{6.54}$$

por otra parte, la serie que aparece en (6.54) obedece

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}k^{2n+1}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\sinh^{-1}(k), \tag{6.55}$$

donde $k=\frac{2\pi}{\Delta m}$. Como $\Delta m\to 0$, podemos considerar la expansión asintótica de $\sinh^{-1}(k)$

$$\sinh^{-1}(k)\underset{k\to\infty}{\approx}-\ln\left(\frac{1}{2k}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \tag{6.56}$$

como una buena aproximación, de manera que

$$L_{\text{eff},a_1}\approx\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{4\pi}{\Delta m}\right)a_1(x). \tag{6.57}$$

Reemplazando $a_1(x)$ por su valor L_{eff,a_1} adquiere la forma

$$L_{\text{eff},a_1}\approx\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{4\pi}{\Delta m}\right)a_1(x). \tag{6.58}$$

Expansión asintótica

Procediendo de manera análoga al apartado anterior, pero considerando la expansión asintótica (6.43), L_{eff,a_1} toma la forma

$$\begin{aligned}L_{\text{eff},a_1}=&-\frac{1}{16\pi^{5/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!\Delta^{2n+1}}{(2i)^n(4\pi)^{2n}i^{n+1/2}}\\&\times\int_0^{\infty}ds\;e^{-i(4\pi^2/\Delta^2+m^2)s}s^{-n-3/2}a_1(x),\end{aligned} \tag{6.59}$$

donde hemos omitido la constante infinita independiente de Δ del mismo modo que hemos hecho en el apartado 6.3.1. Mediante el cambio de variable $u=i\left(\frac{4\pi^2}{\Delta^2}+m^2\right)s$, la integral en s puede resolverse, dando lugar a una función Γ, de forma que L_{eff,a_1} obedece también la expresión siguiente:

$$L_{\text{eff},a_1}=-\frac{\sqrt{8}}{16\pi^{3/2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n-1)!!\left(\frac{1}{2}+\frac{m^2\Delta^2}{8\pi^2}\right)^{n+1/2}\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right). \tag{6.60}$$

La serie en (6.60) cumple, además, que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n-1)!!\;k^{n+1/2}\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{2\pi}\tanh^{-1}(\sqrt{2k}). \tag{6.61}$$

Por otra parte, como $m\Delta\to 0$, es útil desarrollar la tangente hiperbólica de la ecuación anterior en torno a $k=1/2$:

$$-\sqrt{2\pi}\tanh^{-1}(\sqrt{2k})\underset{k\to 1/2}{\approx}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\ln\left(k-\frac{1}{2}\right)-\ln(2)+i\pi\right)+\mathcal{O}\left(k-\frac{1}{2}\right), \tag{6.62}$$

el término en $(k-1/2)$ da lugar a un término proporcional a $m^2\Delta^2$ y, por lo tanto, es despreciable. Considerando sólo la parte real del desarrollo, pues $k \in \mathbb{R}$, tenemos

$$-\sqrt{2\pi}\tanh^{-1}\left(\sqrt{1+\frac{m^2\Delta^2}{4\pi^2}}\right) \underset{k\to 1/2}{\approx} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{m^2\Delta^2}{16\pi^2}\right). \tag{6.63}$$

Finalmente, reemplazando este resultado por la serie en (6.60) recuperamos, en efecto, la relación (6.58).

A diferencia de lo que ocurría en el caso de un espacio-tiempo continuo, donde las contribuciones en a_0 y a_1 daban lugar a divergencias, como hemos demostrado, para un espacio-tiempo discreto estas contribuciones son finitas, aunque dependientes del espaciado de la red Δ. En particular, para un valor finito Δ subplanckiano son contribuciones importantes, lo que se traduce en una dependencia de la macrofísica con respecto a la microfísica. Este problema puede resolverse mediante una renormalización finita, como mostramos a continuación.

6.4. Renormalización

La densidad lagrangeana gravitacional está dada por:

$$L_g = (-g^{(2)})^{1/2}\left[-\frac{\Lambda_B^{(2)}}{8\pi G_B}+\frac{r^2}{16\pi G_B}R\right]. \tag{6.64}$$

Los términos dependientes de la microfísica pueden absorberse en el mismo. Redefiniendo el lagrangeano gravitacional como $L_{\text{ren}} = L_g + L_{\text{eff},a_0} + L_{\text{eff},a_1}$, entonces

$$L_{\text{ren}} = -\left(A+\frac{\Lambda_B^{(2)}}{8\pi G_B}\right)+\left(B+\frac{r^2}{16\pi G_B}\right)\ R, \tag{6.65}$$

donde

$$A = \frac{\pi}{\Delta^2}+\frac{m^2}{8\pi}\left[1+\ln\left(\frac{16\pi^2}{m^2\Delta^2}\right)\right], \tag{6.66}$$

$$B = \frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{4\pi}{m\Delta}\right)\left(\frac{1}{6}-\xi\right). \tag{6.67}$$

El primer término a la derecha de la igualdad en la expresión (6.65) es indistinguible físicamente del término en Λ_B en el lagrangeano gravitacional original. Lo mismo ocurre con el sumando asociado a la constante de Newton. Definimos entonces las constantes cosmológica y de Newton renormalizadas como:

$$\Lambda^{(2)} = \Lambda_B^{(2)} + 8\pi G_B\ A, \tag{6.68}$$

$$G = \left(\frac{16\pi B}{r^2}+\frac{1}{G_B}\right)^{-1}. \tag{6.69}$$

Finalmente, hemos eliminado la dependencia de la macrofísica con respecto a la microestructura, puesto que cualquier observación macro versará sobre estas constantes renormalizadas, ignorando completamente los términos vinculados con Δ.

Capítulo 7

Conclusiones

Mostramos que la naturaleza discreta del espacio-tiempo cuántico regulariza naturalmente las divergencias que emergen cuando se calcula el valor esperado del tensor energía-momento sobre un espacio-tiempo continuo, para un campo escalar libre y con masa. Los términos divergentes fueron reemplazados por términos finitos, pero dependientes de los detalles de la microestructura del estado cuántico del fondo espacio-temporal. Mostramos que tal dependencia puede removerse mediante una renormalización finita que absorbe la dependencia de los detalles de la microfísica en la constante cosmológica y la constante de Newton desnudas.

El hecho de que las constantes desnudas dependan de los microestados es importante y en nuestra opinión estará presente genéricamente cuando se cuanticen campos de prueba en espacio-tiempos cuánticos. Si bien puede pensarse que en una cuantización completa donde el "backreaction"de los campos materiales es tomado en cuenta este resultado puede cambiar, de persistir, sugeriría que posiblemente sea necesario buscar extensiones del formalismo de lazos que no requieran este tipo de hipótesis.

Apéndice A

Geometría diferencial

A.1. Variedades

La relatividad general da lugar a espacio-tiempos más generales que $\mathbb{R}^n$. En particular, debemos considerar espacios que localmente se ven como $\mathbb{R}^n$, aunque no necesariamente luzcan así globalmente. Para formalizar esta noción es necesario introducir algunos conceptos matemáticos. Comenzaremos con el de espacio topológico.

A.1.1. Espacios topológicos

Un espacio topológico es un conjunto X junto con una familia de subconjuntos de X, llamados conjuntos abiertos, que satisfacen las siguientes propiedades:

1. El conjunto vacío y X son conjuntos abiertos.
2. Si U, $V \subseteq X$ son abiertos, entonces $U \cap V$ es un conjunto abierto.
3. Si los conjuntos $U_\alpha \subseteq X$ son abiertos, entonces $\cup U_\alpha$ es un conjunto abierto.

La colección de conjuntos abiertos se conoce como la *topología* de X. Un conjunto abierto que contiene a un punto x de X se llama entorno de x.

Una colección de conjuntos abiertos U_α se denomina recubrimiento del espacio topológico X si su unión contiene a X.

Dado un espacio topológico X y un conjunto abierto $U \subseteq X$, definimos una carta como una función continua $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ con inversa continua (definida sobre el conjunto $\varphi(U)$).

A.1.2. Definición

Una *variedad* de n dimensiones suave es un espacio topológico M equipado con cartas $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$, donde los U_α constituyen un recubrimiento de M tal que la función de transición $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ es suave (i.e. infinitamente diferenciable) donde sea que esté definida. Una colección de cartas de este tipo se denomina atlas.

¿Cómo se vincula esta definición formal con la idea intuitiva expuesta al comienzo de la sección? Primero, cada punto de M pertenece a algún subconjunto

abierto U_α que se ve localmente como $\mathbb{R}^n$ (en el sentido de que existe una carta), y por lo tanto podemos construir toda la variedad a partir de "parches"que lucen como $\mathbb{R}^n$. Además, la definición de variedad permite discernir sin ambigüedades si una función sobre M es o no suave. Diremos que una función $f : M \to \mathbb{R}$ es suave si para todo α, $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es suave.

A.2. Campos vectoriales

La definición de campo vectorial sobre una variedad se apoya principalmente en la idea de que es posible derivar cualquier función f en la dirección de los vectores. Para precisar esta definición necesitaremos algunos conceptos previos.

Denotaremos como $C^\infty(M)$ al conjunto de funciones $f : M \to \mathbb{R}$ suaves. Este conjunto constituye un álgebra sobre el conjunto de los números reales. Esto significa que es cerrado bajo la adición, la multiplicación entre funciones y por números reales y que se satisfacen las siguientes relaciones:

$$f + g = g + f \qquad f + (g + h) = (f + g) + h \qquad f(gh) = (fg)h \tag{A.1}$$

$$f(g + h) = fg + fh \qquad (f + g)h = fh + gh \qquad 1f = f \tag{A.2}$$

$$\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f \qquad \alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g \qquad (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f \tag{A.3}$$

donde $f, g, h \in C^\infty(M)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se trata de un álgebra conmutativa ya que $fg = gf$.

Denominaremos *campo vectorial* v sobre una variedad M a cualquier función de $C^\infty(M)$ a $C^\infty(M)$ que satisfaga las siguientes propiedades:

$$v(f + g) = v(f) + v(g) \tag{A.4}$$

$$v(\alpha f) = \alpha v(f) \tag{A.5}$$

$$v(fg) = v(f)g + fv(g) \tag{A.6}$$

para cualquier $f, g \in C^\infty(M)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Hay que notar que en esta definición se condensan las características básicas de la derivada direccional. Las primeras dos propiedades dan cuenta de la linealidad mientras que la última expresa la regla del producto o ley de Leibniz.

Llamaremos $\mathrm{Vect}(M)$ al conjunto de todos los campos vectoriales sobre M.

A.2.1. Vectores tangentes

Para obtener una definición rigurosa de vector tangente en un punto $p \in M$ hay que notar, siguiendo la línea de razonamiento trazada para los campos, que la función de un vector tangente debería consistir en tomar la derivada direccional, evaluándola en el punto p. Por ejemplo, dado un campo vectorial v sobre M, se puede tomar la derivada $v(f)$ de cualquier función $f \in C^\infty(M)$ y, finalmente, evaluarla en p. Esto es, determinar $v(f)(p)$.

Así, definimos:

$$v_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \quad / \quad v_p(f) = v(f)(p) \tag{A.7}$$

Se puede ver que v_p posee las siguientes propiedades, que se siguen directamente

de la definición de campo vectorial:

$$v_p(f+g) = v_p(f) + v_p(g) \tag{A.8}$$
$$v_p(\alpha f) = \alpha v_p(f) \tag{A.9}$$
$$v_p(fg) = v_p(f)g(p) + f(p)v_p(g) \tag{A.10}$$

Denominaremos *vector tangente* en $p \in M$ a cualquier función desde $C^\infty(M)$ a $\mathbb{R}$ que cumpla estas tres propiedades. Denotaremos por T_pM al *espacio tangente* en p, es decir, al conjunto de todos los vectores tangentes en p.

Por último, dados $v, w \in T_pM$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$(v+w)(f) = v(f) + w(f) \tag{A.11}$$
$$(\alpha v)(f) = \alpha v(f) \tag{A.12}$$

Por lo tanto, en efecto, T_pM es un espacio vectorial.

A.2.2. Cantidades covariantes y contravariantes

Dadas las funciones $\phi : M \to N$ y $f : N \to \mathbb{R}$, donde M y N son variedades. Se define el *pullback* de f a través de ϕ como:

$$\phi^* f = f \circ \phi \tag{A.13}$$

El punto a resaltar es que, mientras ϕ "va hacia delante"(de M a N), la operación pullback ϕ^* "va hacia atrás"(a partir de funciones en N construye funciones en M). Por esta razón diremos que las funciones sobre variedades que toman valores en los reales, así como cualquier otro objeto que transforme de la misma manera que éstas ante ϕ, son *contravariantes*.

A diferencia de éstos, los vectores tangentes (así como cualquier objeto que transforme al igual que ellos bajo ϕ) son *covariantes*: un vector tangente $v \in T_pM$ y una función $\phi : M \to N$ dan lugar a otro vector tangente $\phi_* v \in T_{\phi(p)}N$, definido como el pushforward de v por ϕ:

$$(\phi_* v)(f) = v(\phi^* f) \tag{A.14}$$

Antes de concluir esta sección, una última definición: se dice que $\phi : M \to N$ es suave si $f \in C^\infty(N)$ implica que $\phi^* f \in C^\infty(M)$.

A.3. Formas diferenciales

A.3.1. 1-formas

Trataremos de generalizar el concepto de gradiente de una función sobre $\mathbb{R}^n$ a funciones sobre variedades arbitrarias. Recordemos que la derivada direccional de una función en $\mathbb{R}^n$ sobre la dirección v es $\nabla f.v = vf$ (usaremos indistintamente vf o $v(f)$ para denotar a la derivada direccional). En otras palabras, el gradiente de f es un objeto que contiene información sobre la derivada direccional de f en una dirección cualquiera. Buscamos un objeto que realice este mismo trabajo sobre cualquier variedad M.

Para ello detengámonos en el papel que cumple ∇f en la fórmula $\nabla f.v = vf$. Para cada campo vectorial v que elijamos, esta expresión da lugar a una función

vf, la derivada direccional de f en la dirección v. Por lo tanto, lo que realmente nos interesa es el operador

$$v \mapsto vf \tag{A.15}$$

Este mapa tiene sólo una propiedad esencial, la linealidad

$$\nabla f.(v + w) = \nabla f.v + \nabla f.w \tag{A.16}$$

para dos campos vectoriales cualquiera v y w, y

$$\nabla f.(gv) = g(\nabla f.v) \tag{A.17}$$

donde g es cualquier función suave sobre $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto la aplicación $v \mapsto \nabla f.v$ es lineal sobre $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Generalizando estas ideas a variedades arbitrarias construimos la definición siguiente: una *1-forma* sobre una variedad M consiste en un mapa desde $\mathrm{Vect}(M)$ a $C^\infty(M)$, lineal sobre $C^\infty(M)$. Utilizamos el símbolo $\Omega^1(M)$ para indicar el espacio de todas las 1-formas sobre una variedad M.

El ejemplo básico de una 1-forma es df, definida por

$$df(v) = vf. \tag{A.18}$$

donde $f : M \to \mathbb{R}$ es suave. Para probar que en efecto df es una 1-forma alcanza con observar que cumple con las propiedades de linealidad definidas anteriormente. df recibe el nombre de *diferencial* o *derivada exterior* de f. De manera general, definimos el diferencial o la derivada exterior como el mapa $d : C^\infty(M) \to \Omega^1(M)$ de modo que la imagen de cada función f es su diferencial df.

A.3.2. Vectores cotangentes

Al igual que un campo vectorial sobre M da lugar a un vector tangente, una 1-forma sobre M da lugar a cierto tipo de vector en cada punto de la variedad: el vector cotangente. Denominamos *vector cotangente* ω en $p \in M$ al mapa lineal cuyo dominio es el espacio tangente T_pM y su codominio $\mathbb{R}$. Denotaremos con el símbolo T_p^*M al espacio de todos los vectores cotangentes en p.

Por ejemplo, dada una 1-forma ω sobre M y un campo vectorial v sobre M, es posible definir un vector cotangente $\omega_p \in T_p^*M$ a partir de la relación:

$$\omega_p(v_p) = \omega(v)(p). \tag{A.19}$$

A.3.3. Espacio cotangente como espacio dual

Sea un espacio vectorial V, se define el espacio vectorial dual V^* como el espacio de todos los funcionales lineales $\omega : V \to \mathbb{R}$. En particular, el espacio cotangente T_p^*M es el dual del espacio tangente T_pM.

Consecuentemente, dado un mapa $f : V \to W$, se obtiene automáticamente otro mapa, el dual de f, $f^* : W^* \to V^*$ definido por

$$(f^*\omega)(v) = \omega(f(v)) \quad \omega \in W^*. \tag{A.20}$$

Ergo, mapas lineales entre espacios vectoriales dan lugar a mapas entre sus espacios duales que "van hacia atrás".

Esto último implica que los vectores cotangentes son contravariantes. Veámoslo más en detalle: supongamos que tenemos un mapa $\phi : M \to N$ entre variedades, donde $\phi(p) = q$. Esto implica que existe un mapa lineal $\phi_* : T_pM \to T_qN$ que da lugar a un mapa dual:

$$\phi^* : T_q^*N \to T_p^*M. \tag{A.21}$$

$\phi^*\omega$ recibirá el nombre de pullback de ω por ϕ. Explícitamente, si $v \in T_pM$ y $\omega \in T_q^*N$, tenemos

$$(\phi^*\omega)(v) = \omega(\phi_* v). \tag{A.22}$$

Este pullback también se puede realizar globalmente, es decir, a partir de una 1-forma ω sobre N puede obtenerse una 1-forma sobre M, a saber:

$$(\phi^*\omega)_p = \phi^*(\omega_q) \tag{A.23}$$

donde $\phi(p) = q$.

Por último, probaremos que $\{dx^\mu\}$ constituye una base de 1-formas en $\mathbb{R}^n$. Para ello hay que probar que: *i*) las 1-formas dx^μ generan todas las 1-formas sobre $\mathbb{R}^n$ y *ii*) son linealmente independientes.

Para demostrar *i*) alcanza con mostrar que cualquier 1-forma ω puede escribirse como $\omega = \omega_\mu dx^\mu$. Para verificar esta relación es suficiente con evaluar ambos lados de la igualdad en un campo vectorial $v = v^\nu \partial_\nu$. A la izquierda tenemos

$$\omega(v) = \omega(v^\nu \partial_\nu) = v^\nu \omega_\nu \tag{A.24}$$

y a la derecha

$$(\omega_\mu dx^\mu)(v) = (\omega_\mu dx^\mu)(v^\nu \partial_\nu) = \omega_\nu v^\nu \tag{A.25}$$

usando que $dx^\mu(\partial_\nu) = \partial_\nu(x^\mu) = \delta^\mu_\nu$.

Para probar *ii*) es suficiente con mostrar que si $\omega = \omega_\mu dx^\mu = 0$, entonces necesariamente las funciones ω_μ son cero. Para ello evaluemos ω en un campo vectorial arbitrario $v = v^\nu \partial_\nu$:

$$\omega(v) = \omega_\mu dx^\mu(v^\nu \partial_\nu) = \omega_\nu v^\nu = 0 \tag{A.26}$$

como v es arbitrario, entonces $\omega_\nu = 0$.

A.3.4. p-formas

Llamaremos álgebra exterior sobre un espacio vectorial V, simbólicamente ΛV, a la estructura algebraica generada a partir de V junto con las relaciones

$$v \wedge w = -w \wedge v \tag{A.27}$$

para todo $v, w \in V$. El producto simbolizado por una $\wedge$ lo denominaremos producto cuña o producto exterior.

En general, para cualquier espacio vectorial V, definimos $\Lambda^p V$ como el subespacio de ΛV consistente en todas las combinaciones lineales de productos de p vectores de V, es decir combinaciones lineales de términos de la forma

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p. \tag{A.28}$$

Se dice que los elementos que pertenecen a $\Lambda^p V$ tienen grado p. Como ejemplo de la definición anterior se tienen: $\Lambda^1 V$, que no es otra cosa que el mismo V, y $\Lambda^0 V$, que por convención se define igual a $\mathbb{R}$. Por otra parte, se desprende directamente de la antisimetría del producto exterior que si V es n-dimensional, $\Lambda^p V$ es vacío para $p > n$, mientras que para $0 \leq p \leq n$ su dimensión es $n!/p!(n-p)!$.

Recordemos que nuestro interés último es trabajar sobre variedades suaves. Adaptemos, pues, la construcción anterior a una variedad M. Definimos las *formas diferenciales* sobre M como los objetos pertenecientes a la estructura algebraica generada por $\Omega^1(M)$, junto con las relaciones

$$\omega \wedge \mu = -\mu \wedge \omega \tag{A.29}$$

para todo $\omega, \mu \in \Omega^1(M)$. Es conveniente hacer algunas aclaraciones acerca de esta defínción.

En primer lugar, $\Omega(M)$ constituye un álgebra sobre $C^\infty(M)$, por lo tanto, consiste en combinaciones lineales (localmente finitas) de productos cuña de 1-formas con funciones como coeficientes. En segundo lugar, debido a lo anterior, en las reglas del álgebra (enunciadas en la sección de campos vectoriales) para $\Omega(M)$ los números deben ser sustituidos por funciones de $C^\infty(M)$.

Definimos las 0-formas, $\Omega^0(M)$, como las funciones, y el producto cuña de las funciones con formas diferenciales como el producto ordinario: $f \wedge \omega = f\omega$. Elementos que sean combinaciones lineales de productos de p 1-formas se denominan *p-formas*. Denotamos al espacio de las p-formas sobre M como $\Omega^p(M)$. Así,

$$\Omega(M) = \bigoplus_p \Omega^p(M). \tag{A.30}$$

Una relación importante entre formas diferenciales es la siguiente: sean $\omega \in \Omega^p(M)$ y $\mu \in \Omega^q(M)$, entonces

$$\omega \wedge \mu = (-1)^{pq} \mu \wedge \omega. \tag{A.31}$$

Se puede probar fácilmente reescribiendo ω y μ en términos de 1-formas y utilizando la antilinealidad del producto exterior.

A.3.5. Derivada exterior

Se define la derivada exterior o diferencial como el único conjunto de mapas

$$d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M) \tag{A.32}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$ es consistente con nuestra definición previa.
2. $d(\omega + \mu) = d\omega + d\mu$ y $d(c\omega) = cd\omega$ para todo $\omega, \mu \in \Omega(M)$ y $c \in \mathbb{R}$.
3. $d(\omega \wedge \mu) = d\omega \wedge \mu + (-1)^p \omega \wedge d\mu$ para todo $\omega \in \Omega^p(M)$ y $\mu \in \Omega(M)$.
4. $d(d\omega) = 0$ para todo $\omega \in \Omega(M)$.

A.4. Cambio de coordenadas

En esta sección abordaremos las transformaciones de campos vectoriales y 1-formas bajo cambios de coordenadas. La idea ya ha sido esbozada: dada una variedad M de dimensión n, una carta es un difeomorfismo φ desde un conjunto abierto $U \in M$ a $\mathbb{R}^n$, lo cual nos permite convertir las operaciones sobre M en operaciones sobre $\mathbb{R}^n$. En efecto, valiéndonos de esta carta podemos efectuar un pullback sobre las funciones coordenadas x^μ desde $\mathbb{R}^n$ a U. Acataremos la convención de escribir a estas últimas como x^μ (una notación más rigurosa sería $\varphi^* x^\mu$) y nos referiremos a ellas como coordenadas locales en U.

De manera similar, podemos efectuar un pushforward sobre la elementos de la base ∂_μ (correspondiente a los ejes coordenados) de campos vectoriales en $\mathbb{R}^n$, mediante φ^{-1}, a elementos de una base de campos vectoriales en U, los que escribiremos también como ∂_μ y denominaremos *campos vectoriales coordenados* asociados a las coordenadas locales x^μ sobre U. Así, podemos escribir cualquier vector v sobre U como:

$$v = v^\mu \partial_\mu. \tag{A.33}$$

Procedemos análogamente con los elementos de la base de 1-formas coordenadas dx^μ sobre $\mathbb{R}^n$. Efectuando un pullback mediante φ hacia U, se obtiene una base de 1-formas sobre U. Las denominaremos *1-formas coordenadas* asociadas a las coordenadas locales x^μ y las escribiremos simplemente como dx^μ.

Así, podemos escribir cualquier 1-forma ω sobre U como:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu. \tag{A.34}$$

Detengámonos ahora en los cambios de coordenadas. Las funciones coordenadas usuales sobre $\mathbb{R}^n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan lugar a una base ∂_μ para $\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^n)$. Dado un campo vectorial cualquiera v sobre $\mathbb{R}^n$, se puede escribir de manera única como $v = v^\mu \partial_\mu$, donde v^μ son funciones pertenecientes a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Supongamos ahora que elegimos otro sistema de coordenadas sobre $\mathbb{R}^n$, i.e. algún otro conjunto de funciones $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ tales que ∂'_ν sea otra base para $\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^n)$. Luego, el mismo vector v puede escribirse como $v = v'^\nu \partial'_\nu$. Nuestro objetivo es determinar cómo se vinculan las componentes del vector en una y otra base (el razonamiento puede extenderse sin problemas a cartas sobre variedades). En primer lugar observemos que los elementos de una base pueden escribirse en términos de los de la otra,

$$\partial_\mu = T^\nu_\mu \partial'_\nu. \tag{A.35}$$

Apliquemos ambos lados de la igualdad a la función coordenada x'^λ:

$$\partial_\mu x'^\lambda = T^\nu_\mu \partial'_\nu x'^\lambda. \tag{A.36}$$

Como $\partial'_\nu x'^\lambda = \delta^\lambda_\nu$ se obtiene:

$$T^\lambda_\mu = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}, \tag{A.37}$$

con lo cual

$$v'^\nu \partial'_\nu = v^\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \partial'_\nu, \tag{A.38}$$

e igualando coeficientes se tiene

$$v'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} v^\mu. \tag{A.39}$$

Se puede razonar análogamente con las 1-formas, obteniéndose las expresiones

$$dx'_\nu = \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu} dx_\mu. \tag{A.40}$$

$$\omega'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \omega_\mu. \tag{A.41}$$

Hasta aquí hemos estado trabajando con transformaciones de coordenadas pasivas, es decir, con cambios en las funciones coordenadas. Las transformaciones de coordenadas activas están caracterizadas completamente por difeomorfismos (homeomorfismos diferenciables con inversa diferenciable):

$$\phi : M \to M. \tag{A.42}$$

Las diferencias entre transformaciones pasivas y activas son solamente de enfoque.

Consideremos entonces el efecto que un mapa $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tiene sobre campos vectoriales y 1-formas. En el caso que $n = m$ se tratará de un difeomorfismo, sin embargo, por sencillez, trabajaremos en este caso más general. Sean $x^1, x^2, ..., x^m$ las coordenadas en $\mathbb{R}^m$ y $x'^1, ..., x'^n$ las coordenadas en $\mathbb{R}^n$. Primero notemos que se puede realizar un pullback sobre las funciones coordenadas x'^ν en $\mathbb{R}^n$ a funciones $\phi^* x'^\nu$ en $\mathbb{R}^m$: $(\phi^* x'^\nu)(p) = x'^\nu(\phi(p))$, para cualquier $p \in M$. Detengámonos ahora en el campo vectorial coordenado ∂_μ en $\mathbb{R}^m$. Se le puede efectuar un pushforward, obteniéndose:

$$\phi_* \partial_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \partial'_\nu. \tag{A.43}$$

Conviene aclarar que la notación no es demasiado rigurosa y $\partial x'^\nu \ \partial x^\mu$ refiere a $\partial(\phi^* x'^\nu) \ \partial x^\mu$. La prueba de la igualdad anterior es directa; se aplican las expresiones a ambos lados de la igualdad a una función coordenada cualquiera x'^λ de $\mathbb{R}^n$, verificándose el mismo resultado para los dos casos.

Para las 1-formas se puede efectuar un pullback. El resultado es:

$$\phi^*(dx'^\nu) = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu. \tag{A.44}$$

Apéndice B

Fibrados y conexiones

B.1. Fibrados

Comenzaremos este apartado introduciendo varias definiciones importantes. Un *fibrado* es una estructura que consiste en dos variedades, M y E, y un mapa sobreyectivo $\pi : E \to M$. En general, a la variedad E se le denomina *espacio total*, a M *espacio base* y a π *proyección*. El espacio

$$E_p = \{q \in E : \pi(q) = p\} \tag{B.1}$$

para cada punto $p \in M$ recibe el nombre de *fibra sobre* p. En adelante, llamaremos fibrado a '$\pi : E \to M$' y en ocasiones sólo hablaremos del fibrado 'E'.

Un ejemplo de fibrado es el *fibrado tangente* a una variedad M. El espacio total, TM, está dado por:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM. \tag{B.2}$$

La proyección $\pi : TM \to M$ mapea cada vector tangente $v \in T_pM$ en el punto $p \in M$. Así, la fibra sobre cualquier punto $p \in M$ es el espacio tangente T_pM. Se puede verificar que, en efecto, TM es una variedad. Para especificar un punto en TM es necesario identificar un punto $p \in M$ y un vector $v \in T_pM$; como M se ve localmente como $\mathbb{R}^n$, al igual que el espacio tangente en cada punto, TM luce como $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ localmente. Las cartas para TM se pueden definir a partir de las cartas para la variedad M, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$. Sea V_α el subconjunto de TM dado por $V_\alpha = \{v \in TM : \pi(v) \in U_\alpha\}$; las cartas de TM se definen como $\psi_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que

$$\psi_\alpha(v) = (\varphi_\alpha(\pi(v)), (\varphi_\alpha)_* v). \tag{B.3}$$

Dadas dos variedades M y F, definimos el *fibrado trivial* sobre M con *fibra estándar* F como el producto cartesiano $E = M \times F$ tal que el mapa proyección es

$$\pi(p, f) = p \quad \forall (p, f) \in M \times F. \tag{B.4}$$

En el fibrado trivial $E = M \times F$, la fibra sobre p es

$$E_p = \{p\} \times F. \tag{B.5}$$

Morfismos y trivialización local

Llamaremos *morfismo* de un fibrado $\pi : E \to M$ al fibrado $\pi' : E' \to M'$ a los mapas $\psi : E \to E'$ y $\phi : M \to M'$ tales que ψ envía cada fibra E_p a la fibra $E'_{\phi(p)}$. Hablamos de isomorfismo si tanto ϕ como ψ son difeomorfismos.
Dado un fibrado $\pi : E \to M$ y una subvariedad $S \subseteq M$, definimos la restricción de E a S como

$$E|_S = \{q \in E : \pi(q) \in S\}, \tag{B.6}$$

tomando S como el espacio base y π (restringido a S) como la proyección.

Se dice que un fibrado $\pi : E \to M$ es *localmente trivial* con fibra estándar F si para cada punto $p \in M$ existe un entorno U de p y un isomorfismo entre fibrados

$$\phi : E|_U \to U \times F \tag{B.7}$$

que envía cada fibra E_p a la fibra $\{p\} \times F$. ϕ recibe el nombre de *trivialización local*.

Fibrados vectoriales

Un *fibrado vectorial real* n-dimensional es un fibrado localmente trivial $\pi : E \to M$ donde cada fibra E_p es un espacio vectorial de dimensión n y donde para cada punto $p \in M$ existe un entorno U de p junto con una trivialización local

$$\phi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^n \tag{B.8}$$

que mapea cada fibra E_p en la fibra $\{p\} \times \mathbb{R}^n$, linealmente. Los fibrados vectoriales complejos se definen análogamente, con $\mathbb{C}^n$ tomando el lugar de $\mathbb{R}^n$.

Dados dos fibrados vectoriales $\pi : E \to M$ y $\pi' : E' \to M'$, un morfismo entre fibrados vectoriales es un morfismo entre fibrados $\psi : E \to E'$ cuya restricción a cada fibra E_p de E es lineal.

Una *sección* de un fibrado $\pi : E \to M$ es una función $s : M \to E$ tal que $\forall p \in M$,

$$s(p) \in E_p. \tag{B.9}$$

En otras palabras, la sección le asigna a cada punto en el espacio base un vector en la fibra sobre ese punto. Las secciones de un fibrado vectorial E sobre M pueden sumarse, así como multiplicarse por funciones sobre M. Siendo rigurosos: sean s y s' secciones de E y $f \in C^\infty(M)$, definimos la sección $s + s'$ como

$$(s + s')(p) = s(p) + s'(p), \tag{B.10}$$

y la sección fs por

$$(fs)(p) = f(p)s(p). \tag{B.11}$$

El conjunto de todas las secciones de E se denota $\Gamma(E)$.

Dado un fibrado vectorial E decimos que las secciones $e_1, ..., e_n$ de E forman una *base de secciones* de E si cualquier sección $s \in \Gamma(E)$ puede escribirse de manera única como una suma

$$s = s^i e_i, \tag{B.12}$$

donde $s^i \in C^\infty(M)$. Hay que observar que un fibrado vectorial posee una base de secciones si y sólo si es isomorfo a un fibrado trivial. Para probar esto alcanza con notar que una base de secciones determina el siguiente isomorfismo:

$$\psi : M \times \mathbb{R}^n \to E \quad / \quad \psi(p, v) = v^i e_i(p) \tag{B.13}$$

con $p \in M, v \in \mathbb{R}^n$. Recíprocamente, dado un isomorfismo entre fibrados vectoriales $\psi : M \times \mathbb{R}^n \to E$, éste puede utilizarse para transferir la base de secciones de $M \times \mathbb{R}^n$ a una base de secciones de E. Como, por definición, los fibrados vectoriales son localmente isomorfos a un fibrado trivial, para realizar cálculos locales siempre podemos hacer uso de una base de secciones en algún entorno de cualquier punto del espacio base.

Ejemplos

En este apartado veremos algunos ejemplos de fibrados vectoriales construidos a partir de otros ya dados.

En un fibrado vectorial E sobre M, cada fibra E_p es un espacio vectorial, y por tanto, tiene un espacio dual E_p^*. Definimos el *fibrado vectorial dual* E^* como la unión de E_p^* para todo $p \in M$, tal que su correspondiente proyección $\pi : E^* \to M$ envía cada E_p^* al correspondiente punto p. Un ejemplo de fibrado dual es el *fibrado cotangente* T^*M. En este caso, la fibra T_p^*M es el espacio cotangente en p. Luego, una sección de T^*M es una 1-forma sobre M.

Dados dos fibrados vectoriales E y E' sobre M, definimos la *suma directa de fibrados vectoriales* $E \oplus E'$ sobre M. La fibra sobre p de este fibrado es el espacio vectorial $E_p \oplus E'_p$. Análogamente, podemos construir el *producto tensorial de fibrados vectoriales* $E \otimes E'$ sobre M cuya fibra sobre p es $E_p \otimes E'_p$.

Otro ejemplo resulta de "pegar"fibrados vectoriales triviales. Sea M una variedad y $\{U_\alpha\}$ un recubrimiento abierto de M. Sean V un espacio vectorial y ρ una representación sobre V de algún grupo G, se obtiene un fibrado vectorial $\pi : E \to M$ a partir de los fibrados triviales $U_\alpha \times V$, usando las funciones de transición $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$. E está dado por

$$\bigcup_\alpha U_\alpha \times V, \tag{B.14}$$

considerándose dos puntos cualquiera: $(p, v) \in U_\alpha \times V$ y $(p, v') \in U_\beta \times V$ como iguales si

$$v = \rho(g_{\alpha\beta})v'. \tag{B.15}$$

En general, seremos más económicos y escribiremos $v = g_{\alpha\beta}v'$.

Para que este procedimiento dé lugar a fibrados vectoriales es necesario que las funciones de transición satisfagan algunas condiciones de consistencia. Supongamos que $p \in U_\alpha$. Por lo dicho arriba debemos identificar $(p, v) \in U_\alpha \times V$ con $(p, g_{\alpha\alpha}v) \in U_\alpha \times V$, sin embargo, no queremos identificar puntos en un mismo fibrado trivial $U_\alpha \times V$, por lo que debemos imponer la condición

$$g_{\alpha\alpha} = 1 \text{ sobre } U_\alpha. \tag{B.16}$$

Siguiendo la lógica anterior pueden deducirse condiciones análogas. Si $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, identificamos

$$(p, v) \in U_\alpha \times V \tag{B.17}$$

con

$$(p, g_{\gamma\alpha}v) \in U_\gamma \times V, \tag{B.18}$$

el que a su vez identificamos con

$$(p, g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha}v) \in U_\beta \times V, \tag{B.19}$$

que finalmente identificamos con

$$(p, g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha}v) \in U_\alpha \times V. \tag{B.20}$$

Por la misma razón esgrimida para $g_{\alpha\alpha}$,

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1 \text{ en } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma. \tag{B.21}$$

Y así, pueden derivarse restricciones sobre las funciones de transición para la intersección de un número arbitrario de abiertos.
Utilizaremos $[p, v]_\alpha$ para simbolizar al punto de E correspondiente a $(p, v) \in U_\alpha \times V$. Identificamos $[p, v]_\alpha = [p, g_{\beta\alpha}v]_\beta$. Definimos la proyección $\pi : E \to V$ como

$$\pi[p, v]_\alpha = p. \tag{B.22}$$

Luego, la fibra E_p es el conjunto de los puntos en E de la forma $[p, v]_\alpha$. Si las funciones de transición satisfacen las condiciones de consistencia, en efecto, $\pi : E \to M$ es un fibrado vectorial. A esta clase de fibrados se les llama *G-fibrados*. Al grupo G se le denomina *grupo de gauge* del fibrado, siendo V la fibra estándar.

Como cada fibra de un G-fibrado es un espacio vectorial V tiene sentido distinguir aquellas transformaciones $T : E_p \to E_p$ de la forma $\rho(g)$. De manera más precisa, dado $p \in U_\alpha$, decimos que T *vive en* G si es de la forma

$$[p, v]_\alpha \longmapsto [p, gv]_\alpha \tag{B.23}$$

para algún $g \in G$. Esta definición es independiente de α: si además $p \in U_\beta$, entonces

$$[p, v]_\alpha = [p, g_{\beta\alpha}v]_\beta \tag{B.24}$$

y de manera similar

$$[p, gv]_\alpha = [p, g_{\beta\alpha}gv]_\beta \tag{B.25}$$

Por lo tanto, en $U_\alpha \cap U_\beta$, T está dado por

$$[p, g_{\beta\alpha}v]_\beta \longmapsto [p, g_{\beta\alpha}gv]_\beta \tag{B.26}$$

que es lo mismo que

$$[p, v']_\beta \to [p, g'v']_\beta \tag{B.27}$$

donde $v' = g_{\beta\alpha}v$, $g' = g_{\beta\alpha}gg_{\beta\alpha}^{-1}$.

El mismo concepto se aplica a las álgebras de Lie. Afirmamos que $T : E_p \to E_p$ *vive en* $\mathfrak{g}$ si posee la forma

$$[p, v]_\alpha \longmapsto [p, d\rho(x)v]_\alpha \tag{B.28}$$

para algún $x \in \mathfrak{g}$.

B.2. Endomorfismos

Dado un espacio vectorial V, llamaremos *endomorfismos*, $\mathrm{End}(V)$, a las funciones lineales de V a sí mismo. Los endomorfismos constituyen un espacio vectorial, pues:

$$(\alpha T)(v) = \alpha T(v), \tag{B.29}$$

$$(S + T)(v) = S(v) + T(v) \tag{B.30}$$

para todo $S, T \in \mathrm{End}(V)$, $v \in V$ y para cualquier escalar α.

Sea e_i un elemento de la base de V y e^j un elemento de la base de V^*, una base conveniente de $\mathrm{End}(V)$ está dada por los elementos e^i_j tales que

$$e^i_j e_k = \delta^i_k e_j. \tag{B.31}$$

Existe un isomorfismo

$$V \otimes V^* \cong \mathrm{End}(V) \tag{B.32}$$

que asigna al elemento $v \otimes f \in V \otimes V^*$ la función lineal dada por

$$x \longmapsto f(x)v \quad \forall x \in V. \tag{B.33}$$

En términos de bases, este isomorfismo se expresa como

$$e^i \otimes e_j \longmapsto e^i_j. \tag{B.34}$$

Consecuentemente, dado un fibrado vectorial E sobre una variedad M, llamamos *fibrado de endomorfismos* de E, $\mathrm{End}(E)$, al fibrado $E \otimes E^*$. La fibra de $\mathrm{End}(E)$ sobre cualquier punto $p \in M$ es igual a $\mathrm{End}(E_p)$. De este modo, cualquier sección T de $\mathrm{End}(E)$ define un mapa de E a sí mismo que envía $v \in E_p$ a $T(p)v \in E_p$, y, por lo tanto, es un morfismo entre fibrados vectoriales.

Así, cualquier sección T de $\mathrm{End}(E)$ actúa sobre cualquier sección s de E, dando lugar a una nueva sección Ts de E:

$$(Ts)(p) = T(p)s(p). \tag{B.35}$$

Ergo, T determina una función $C^\infty(M)$-lineal

$$T : \Gamma(E) \to \Gamma(E), \tag{B.36}$$

donde $\Gamma(E)$ es el conjunto de todas las secciones de E. Puede mostrarse que todos los mapas $C^\infty(M)$-lineales $T : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ corresponden a secciones de $\mathrm{End}(E)$.

Sea $\pi : E \to M$ un G-fibrado, con G grupo de Lie. Sea $T \in \mathrm{End}(E)$. Si $T(p)$ vive en G para todo $p \in M$, decimos que T es una *transformación de gauge*. El conjunto de todas las transformaciones de gauge constituyen un grupo, con el producto y la inversa definidos por

$$(gh)(p) = g(p)h(p) \tag{B.37}$$

$$g^{-1}(p) = g(p)^{-1}. \tag{B.38}$$

En teorías gauge los campos son secciones de G-fibrados y las leyes físicas están expresadas por ecuaciones diferenciales tales que si una sección s es solución, también lo es gs, para cualquier transformación de gauge g.

B.3. Conexiones

Sea E un fibrado vectorial sobre M. Una *conexión* D sobre M le asigna a cada campo vectorial v sobre M una función $D_v : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ que satisface

las propiedades:

$$D_v(\alpha s) = \alpha D_v s \tag{B.39}$$
$$D_v(s+t) = D_v s + D_v t \tag{B.40}$$
$$D_v(fs) = v(f)s + fD_v s \tag{B.41}$$
$$D_{v+w}s = D_v s + D_w s \tag{B.42}$$
$$D_{fv}s = fD_v s \tag{B.43}$$

para todo $v, w \in \mathrm{Vect}(M)$, $s, t \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$ y cualquier escalar α (donde escalar refiere a cualquier número real o complejo dependiendo del tipo de fibrado E). La tercer propiedad, la ley de Leibniz, le permite a D_v actuar como un diferenciación. Dados una sección s y un campo vectorial v arbitrarios, llamamos *derivada covariante* de s en la dirección v a $D_v s$.

Sean $\{x^\mu\}$ las coordenadas de un conjunto abierto $U \subseteq M$, $\{\partial_\mu\}$ la correspondiente base de campos vectoriales coordenados, y $\{e_i\}$ una base de secciones de E sobre U. Se cumple que

$$D_\mu e_j = A^i_{\mu j} e_i. \tag{B.44}$$

Las funciones definidas sobre U, $A^i_{\mu j}$, reciben el nombre de componentes del *potencial vector*. Una de las utilidades del potencial vector reside en que podemos utilizarlo para calcular la derivada covariante $D_v s$ de cualquier sección s:

$$D_v s = D_{v^\mu \partial_\mu} s \tag{B.45}$$
$$= v^\mu D_{\partial\mu} s \tag{B.46}$$
$$= v^\mu D_\mu (s^i e_i) \tag{B.47}$$
$$= v^\mu ((\partial_\mu s^i) e_i + A^j_{\mu i} s^i e_j) \tag{B.48}$$
$$= v^\mu (\partial_\mu s^i + A^i_{\mu j} s^j) e_i. \tag{B.49}$$

El término $A^j_{\mu i} v^\mu s^i e_j$ es una nueva sección de E sobre U. Así, si evaluamos el potencial vector en un campo vectorial y una sección obtenemos una nueva sección de E sobre U, $C^\infty(U)$-linealmente. Podemos, entonces, pensar en el potencial vector como en una 1-forma End(E)-valuad sobre U, i.e., una sección del fibrado

$$\mathrm{End}(E|_U) \otimes T^*U, \tag{B.50}$$

pues si definimos el potencial vector como $A = A^j_{\mu i} e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu$, el término correspondiente a la 1-forma se alimenta de un campo vectorial v sobre U, resultando en una sección de (E) sobre U,

$$A(v) = A^j_{\mu i}(e_j \otimes e^i \otimes) dx^\mu(v) \tag{B.51}$$
$$= A^j_{\mu i} v^\mu (e_j \otimes e^i), \tag{B.52}$$

que si, a su vez, se alimenta con cualquier sección s de E sobre U da lugar a

$$A(v)s = A^j_{\mu i} v^\mu (e_j \otimes e^i) s \tag{B.53}$$
$$= A^j_{\mu i} v^\mu s^i e_j \tag{B.54}$$

¡que es la sección que buscábamos!

En ocasiones obviaremos los índices internos, definiendo $A_\mu = A^j_{\mu i} e_j \otimes e^i$. Dada una conexión D^0, entonces $D = D^0 + A$ también es una conexión. Es más, cualquier conexión D puede escribirse como $D^0 + A$. De hecho, cuando trabajamos en coordenadas locales usando una trivialización local de E, usábamos de manera implícita la conexión

$$D^0_v s = v(s^j) e_j \tag{B.55}$$

escribiendo una conexión cualquiera, D, como $D^0 + A$. La conexión D^0 se denomina *conexión estándar plana* sobre $E|_U$ y depende de la elección de la trivialización local de E.

Para probar las aserciones anteriores debemos, en primer lugar, verificar que si D^0 es una conexión sobre E, y A es una 1-forma End(E)-valuada entonces $D = D^0 + A$ es una conexión sobre E. La única parte no trivial radica en verificar la ley de Leibniz:

$$\begin{aligned} D_v(fs) &= D^0_v(fs) + A(v)(fs) && \text{(B.56)} \\ &= v(f)s + fD^0_v s + fA(v)s && \text{(B.57)} \\ &= v(f)s + fD_v(s). && \text{(B.58)} \end{aligned}$$

En segundo lugar, hay que verificar que si D es una conexión cualquiera sobre E, $D = D^0 + A$. Esto se traduce en probar que $A = D - D^0$ es $C^\infty(M)$-lineal en v y s. La linealidad en v es directa, pues $D_v s$ y $D^0_v s$ dependen linealmente en v. Veamos la linealidad en s:

$$\begin{aligned} D_v(fs) - D^0_v(fs) &= v(f)s + fD_v s - v(f)s - fD^0_v s && \text{(B.59)} \\ &= f(D_v s - D^0_v s), && \text{(B.60)} \end{aligned}$$

para cualquier función f sobre M. Luego, valiéndonos de estas propiedades de linealidad para $A(v)s$, podemos fabricar una 1-forma End(E)-valuada. Por ejemplo, dadas las coordenadas locales $\{x^\mu\}$ y una base local de secciones $\{e_i\}$ de E, podemos definir

$$A = A^j_{\mu i} e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu \tag{B.61}$$

donde $A(\partial_\mu)e_j = A^i_{\mu j} e_i$.

Cuando un fibrado vectorial E consta de alguna estructura extra, las conexiones que son compatibles con ella adquieren una dimensión especialmente importante. En relatividad general, por ejemplo, es crucial el fibrado tangente al espacio-tiempo. Como éste posee una métrica, las conexiones más relevantes, desde un punto de vista físico, serán aquellas que preserven la métrica. En teorías gauge este papel lo interpretan las G-conexiones.

Decimos que D es una G-conexión si en coordenadas locales las componentes $A_\mu \in \text{End}(E)$ viven el el álgebra de Lie de G, $\mathfrak{g}$. Pese a su aspecto, esta definición es independiente de las coordenadas locales: si realizamos un cambio de coordenadas a x'^ν, las nuevas componentes A'_ν pueden escribirse como

$$A'_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A_\mu, \tag{B.62}$$

que también viven en $\mathfrak{g}$ si lo verifican las componentes A_μ.

Las transformaciones de gauge también puden efectuarse sobre G-conexiones. Sea D una G-conexión sobre E y sea g una transformación de gauge, entonces existe una conexión D' definida por

$$D'_v(s) = gD_v(g^{-1}s). \tag{B.63}$$

Desarrollemos un poco más esta expresión para determinar de qué modo transforma el potencial vector bajo transformaciones de gauge, teniendo en cuenta que por g en realidad estamos refiriéndonos a $\rho(g) \in End(E)$, y que, por tanto, podemos escribirla como $g = g^j_k e_j \otimes e^k$;

$$\begin{aligned} D'_v(s) &= gD_v(g^{-1}s) && \text{(B.64)}\\ &= gD^0_v(g^{-1}s) + gv^\mu\partial_\mu((g^{-1})^j_k)s^k e_j + gA_\mu v^\mu(g^{-1}s) && \text{(B.65)}\\ &= gD^0_v(g^{-1}s) + gv^\mu\partial_\mu(g^{-1})s + gA_\mu g^{-1}v^\mu s. && \text{(B.66)} \end{aligned}$$

Luego,

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1}. \tag{B.67}$$

B.4. Holonomía

Una conexión sobre un fibrado vectorial juega dos papeles fundamentales. Uno de ellos, estudiando en el apartado anterior, viabiliza la diferenciación de secciones; el otro, posibilita la noción de 'transporte paralelo'.

Transporte paralelo

Sean E un fibrado vectorial sobre M dotado de una conexión D, $\gamma[0,T] \to M$ un camino suave entre los puntos p y q, $u(t)$ un vector en la fibra de E sobre $\gamma(t)$. Decir que $u(t)$ es 'transportado paralelamente' a lo largo de γ es equivalente a decir que la derviada covariante de $u(t)$ en la dirección de γ, $\gamma'(t)$, es cero. Formalmente:

$$D_{\gamma'(t)}u(t) = 0. \tag{B.68}$$

Usando una trivialización local $E|_U \cong U \times V$ de E sobre un entorno U de $\gamma(t)$, podemos pensar en las secciones s de E como funciones V-valuadas y en la conexión D de la siguiente manera:

$$D_\mu s = \partial_\mu s + A_\mu s, \tag{B.69}$$

donde A_μ es una función End(E)-valuada. Así, definimos la *derivada covariante*

$$D_{\gamma'(t)}u(t) = \frac{d}{dt}u(t) + A(\gamma'(t))u(t). \tag{B.70}$$

Decimos, en consecuencia, que $u(t)$ se *transporta paralelamente* a lo largo de la curva γ si $D_{\gamma'(t)}u(t) = 0$ para todo t.

En general, cualquier vector $u \in E_p$ puede trasladarse paralelamente a lo largo de γ, esto es, puede encontrarse un vector $u(t) \in E_{\gamma(t)}$ tal que

$$u(0) = u, \quad D_{\gamma'(t)}u(t) = 0. \tag{B.71}$$

Para ello, alcanza con trabajar en coordenadas locales y hallar la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}u(t) + A(\gamma'(t))u(t) = 0. \tag{B.72}$$

. En su forma integral la ecuación se escribe como

$$u(t) = u - \int_0^t A(\gamma'(t_1))u(t_1)dt_1. \tag{B.73}$$

Aplicando de manera recursiva esta relación un número infinito de veces, la solución $u(t)$ puede escribirse como

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n \int_{t\geq t_1\geq\cdots\geq t_n\geq 0} A(\gamma'(t_1))\dots A(\gamma'(t_n))dt_n...dt_1\right)u. \tag{B.74}$$

La integral adquiere una forma más elegante haciendo uso del producto camino-ordenado:

$$PA(\gamma'(t_1))\dots A(\gamma'(t_n)) \equiv A(\gamma'(t_{\sigma(1)}))\dots A(\gamma'(t_{\sigma(n)})), \tag{B.75}$$

con

$$t_{\sigma(1)} \geq \cdots \geq t_{\sigma(n)}. \tag{B.76}$$

Se tiene:

$$\int_{t\geq t_1\geq\cdots\geq t_n\geq 0} A(\gamma'(t_1))\dots A(\gamma'(t_n))dt_n...dt_1 \tag{B.77}$$

$$= \frac{1}{n!}\int_{t_i\in[0,t]} PA(\gamma'(t_1))\dots A(\gamma'(t_n))dt_n...dt_1 \tag{B.78}$$

$$= \frac{1}{n!}P\left(\int_0^t A(\gamma'(s))ds\right)^n. \tag{B.79}$$

Definiendo la exponencial

$$Pe^{-\int_0^t A(\gamma'(s))ds} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}P\left(\int_0^t A(\gamma'(s))ds\right)^n, \tag{B.80}$$

la solución $u(t)$ puede expresarse, finalmente, como

$$u(t) = Pe^{-\int_0^t A(\gamma'(s))ds}u. \tag{B.81}$$

Holonomías

Sea $\gamma : [0,T] \to M$ un camino suave de p a q en la variedad M y E un fibrado vectorial con conexión D. Dado $u \in E_p$, denotaremos por $H(\gamma, D)u$ el resultado de transportar paralelamente u hasta el punto q a través del camino γ. Como la ecuación diferencial que da cuenta del transporte paralelo es lineal, el mapa $H(\gamma, D) : E_p \to E_q$ también lo es. Lo llamamos *holonomía* a lo largo del camino γ. De manera más general, si γ es suave por partes, identificando los puntos donde no es suave, puede partirse en piezas maximalmente suaves $\gamma_i : [t_i, t_{i+1}] \to M$, con $1 \leq i \leq n$ quedando la holonomía definida como

$$H(\gamma, D) = H(\gamma_n, D)\dots H(\gamma_1, D). \tag{B.82}$$

Propiedades

- Sea $\alpha : [0,T] \to M$ un camino suave. Sea $f : [0,S] \to [0,T]$ una función suave tal que $f(0) = 0,\ f(s) = T$. Sea β el camino reparametrizado, dado por $\beta(t) = \alpha(f(t))$. Se puede probar que para cualquier conexión D en el fibrado $\pi : E \to M$ se verifica

$$H(\alpha, D) = H(\beta, D). \tag{B.83}$$

- Sean α y β dos caminos componibles en M, entonces

$$H(\beta\alpha, D) = H(\beta, D)H(\alpha, D). \tag{B.84}$$

- Para cualquier camino $\alpha : [0,T] \to M$ de p a q existe un camino inverso α^{-1} de q a p dado por $\alpha^{-1} = \alpha(T - t)$. Se puede mostrar que

$$H(\alpha^{-1}, D) = H(\alpha, D)^{-1}, \tag{B.85}$$

- Para cualquier punto p se puede definir el loop identidad $1_p : [0,1] \to M$ dado por el camino que permanece en p: $1_p(t) = 0$. Dado un camino α en M la holonomía satisface

$$H(1_q\alpha, D) = H(\alpha, D) \tag{B.86}$$
$$H(\alpha 1_p, D) = H(\alpha, D) \tag{B.87}$$
$$H(1_p, D) = 1. \tag{B.88}$$

Veamos, a continuación, como se ve afectada la holonomía cuando se aplica una transformación de gauge a la conexión. Supongamos que $u(t) \in E_{\gamma(t)}$ obedece la ecuación de transporte paralelo

$$D_{\gamma'(t)}u(t) = 0. \tag{B.89}$$

Si llamamos A al potencial vector esta ecuación es equivalente a

$$\frac{d}{dt}u(t) = -\gamma'^{\mu}(t)A_\mu(\gamma(t))u(t). \tag{B.90}$$

Definimos $w(t)$ como

$$w(t) = g(\gamma(t))u(t). \tag{B.91}$$

Diferenciando w:

$$\frac{d}{dt}w(t) = \left(\frac{d}{dt}g(\gamma(t))\right)u(t) + g(\gamma(t))\frac{d}{dt}u(t) \tag{B.92}$$
$$= \gamma'^{\mu}(t)(\partial_\mu g)u(t) - g\gamma'^{\mu}(t)A_\mu u(t) \tag{B.93}$$
$$= \gamma'\mu(t)(\partial_\mu g)g^{-1}w(t) - \gamma'^{\mu}(t)gA_\mu g^{-1}w(t). \tag{B.94}$$

Como gg^{-1} es constante, tenemos que $(\partial_\mu g)g^{-1} = -g\partial_\mu g^{-1}$,

$$\frac{d}{dt}w(t) = -\gamma'^{\mu}(t)g(\partial_\mu g^{-1})w(t) - \gamma'^{\mu}(t)gA_\mu g^{-1}w(t) \tag{B.95}$$
$$= -\gamma'^{\mu}(t)A'_\mu w(t), \tag{B.96}$$

donde A' es el potencial vector obtenido a partir de A mediante una transformación de gauge. Consecuentemente, $w(t)$ satisface la ecuación de transporte paralelo

$$D'_{\gamma'(t)}w(t) = 0, \tag{B.97}$$

donde D' es el resultado de aplicar la transformación de gauge g a D.

Además,

$$\begin{aligned} H(\gamma, D')w(0) &= H(\gamma, D')g(\gamma(0))u(0) && \text{(B.98)}\\ &= w(T) && \text{(B.99)}\\ &= g(\gamma(T))u(T) && \text{(B.100)}\\ &= g(\gamma(T))H(\gamma, D)u(0). && \text{(B.101)} \end{aligned}$$

Por tanto, bajo una transformación de gauge $H(\gamma, D)$ transforma como

$$H(\gamma, D') = g(\gamma(T))H(\gamma, D)g(\gamma(0))^{-1}. \tag{B.102}$$

Algo muy especial ocurre cuando consideramos la holonomía sobre un loop. Sea γ un loop con base en el punto $p \in M$, la holonomía $H(\gamma, D)$ es un mapa lineal de E_p a sí mismo, es decir,

$$H(\gamma, D) \in \mathrm{End}(E)_p.$$

Si, en este caso, le aplicamos una transformación de gauge g a D obtenemos

$$H(\gamma, D') = g(p)H(\gamma, D)g(p)^-1,$$

y, por lo tanto, tomando la traza obtenemos un objeto invariante gauge:

$$\begin{aligned} tr(H(\gamma, D')) &= tr(g(p)H(\gamma, D)g(p)^{-1}) && \text{(B.103)}\\ &= tr(H(\gamma, D)). && \text{(B.104)} \end{aligned}$$

A la traza de la holonomía la denominamos loop de Wilson.

B.5. Curvatura

Sea E un fibrado vectorial sobre M con conexión D, la "curvatura"de una conexión D "mide"la no conmutación de las derivadas covariantes. Dados dos campos vectoriales v y w sobre M, definimos la *curvatura* $F(v, w)$ como el operador sobre secciones de E dado por

$$F(v, w)s = D_v D_w s - D_w D_v s - D_{[v,w]}s. \tag{B.105}$$

Propiedades

- $F(v, w) = -F(w, v)$
- $F(fv, w)s = F(v, fw)s = F(v, w)(fs) = fF(v, w)s.$
- $F(v, w)(fs) = fF(v, w)s$

Así, para v y w fijos, $F(v,w)$ define un mapa $C^\infty(M)$-lineal de $\Gamma(E)$ a sí mismo, lo que implica que $F(v,w)$ corresponde a una sección de $\mathrm{End}(E)$.

Estudiemos la curvatura en términos de las coordenadas locales $\{x^\mu\}$ en algún conjunto abierto $U \subset M$. Definimos $F_{\mu\nu}$ como la sección de $\mathrm{End}(E)$ dada por $F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu)$. Como $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$, tenemos

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]. \tag{B.106}$$

Así, por las propiedades de linealidad, para dos campos vectoriales cualesquiera v, w sobre U, podemos escribir

$$F(v,w) = v^\mu w^\nu F_{\mu\nu}. \tag{B.107}$$

Considerando una base local de secciones $\{e_i\}$ para E sobre U, podemos definir las componentes del potencial vector como

$$D_\mu e_j = A^i_{\mu j} e_i. \tag{B.108}$$

Utilizando esta relación es posible reescribir la expresión para la curvatura en términos del potencial vector

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} e_i &= D_\mu D_\nu e_i - D_\nu D_\mu e_i && \text{(B.109)}\\ &= D_\mu (A^j_{\nu i} e_j) - D_\nu (A^j_{\mu i} e_j) && \text{(B.110)}\\ &= (\partial_\mu A^j_{\nu i}) e_j + A^k_{\mu j} A^j_{\nu i} e_k - (\partial_\nu A^j_{\mu i}) e_j - A^k_{\nu j} A^j_{\mu i} e_k. && \text{(B.111)} \end{aligned}$$

Renombrando índices:

$$F_{\mu\nu} e_i = (\partial_\mu A^j_{\nu i} - \partial_\nu A^j_{\mu i} + A^j_{\mu k} A^k_{\nu i} - A^j_{\nu k} A^k_{\mu i}) e_j. \tag{B.112}$$

Como las secciones $e_j \otimes e^i$ constituyen una base local de secciones para $\mathrm{End}(E)$ también podemos escribir

$$F_{\mu\nu} = F^j_{\mu\nu i} e_j \otimes e^i. \tag{B.113}$$

Luego,

$$F^j_{\mu\nu i} = \partial_\mu A^j_{\nu i} - \partial_\nu A^j_{\mu i} + A^j_{\mu k} A^k_{\nu i} - A^j_{\nu k} A^k_{\mu i}. \tag{B.114}$$

Suprimiendo los índices internos asociados a la base de secciones de E sobre U, la expresión para la curvatura adquiere la forma:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \tag{B.115}$$

Curvatura como 2-forma

El cálculo de conexiones y curvaturas puede clarificarse usando formas diferenciales $\mathrm{End}(E)$-valuadas, a saber, secciones del fibrado $\mathrm{End}(E) \otimes \Lambda T^* M$, o su restricción a algún conjunto abierto en M. Como hemos visto, dados dos campos vectoriales cualesquiera v y w, $F(v,w)$ es una sección de $\mathrm{End}(E)$, en consecuencia, trabjando con coordenadas locales en un conjunto abierto U, las "componentes" $F_{\mu\nu}$ son secciones de $\mathrm{End}(E)$ sobre U. Podemos definir, entonces, la *curvatura 2-forma* F, como una 2-forma $\mathrm{End}(E)$-valuada:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{B.116}$$

El factor 1/2 se introduce a causa del doble conteo introducido por la antisimetría.

Definimos la *derivada exterior covariante* de una sección s de E como la 1-forma E-valuada $d_D s$ tal que

$$d_D s(v) = D_v s \tag{B.117}$$

para cualquier campo vectorial v sobre M. En coordenadas locales la podemos expresar como

$$d_D s = D_\mu s \otimes dx^\mu. \tag{B.118}$$

Como cualquier forma diferencial E-valuada puede escribirse como suma de formas del tipo $s \otimes \omega$ (no necesariamente de manera única), donde s es una sección de E y ω es una forma diferencial ordinaria sobre M, para definir d_D sobre formas diferenciales E-valuadas arbitrarias alcanza con definirlas para formas del tipo $s \otimes \omega$. Entonces:

$$d_D(s \otimes \omega) = d_D s \wedge \omega + s \otimes d\omega, \tag{B.119}$$

donde el producto cuña entre una forma E-valuada, $s \otimes \omega$, y una forma ordinaria, μ, está dado por $(s \otimes \omega) \wedge \mu = s \otimes (\omega \wedge \mu)$ y es $C^\infty(M)$-lineal en cada factor.

Identidad de Bianchi

Terminamos este apéndice con una identidad importantísima, la identidad de Bianchi. Dados tres operadores lineales $X, Y, Z : V \to V$ sobre un espacio vectorial V la identidad de Jacobi establece que

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \tag{B.120}$$

En particular, si u, v y w son campos vectoriales sobre M, se obtiene la *identidad de Bianchi*

$$[D_u, [D_v, D_w]] + [D_v, [D_w, D_u]] + [D_w, [D_u, D_v]] = 0. \tag{B.121}$$

Podemos vincular esta identidad con la curvatura. Tomando u, v y w como campos vectoriales coordenados ∂_μ, ∂_ν, ∂_λ, y usando que $[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu}$ la identidad adopta la forma:

$$[D_\mu, F_{\nu\lambda}] + [D_\nu, F_{\lambda\mu}] + [D_\lambda, F_{\mu\nu}] = 0. \tag{B.122}$$

Apéndice C

Coordenadas normales de Riemann

La métrica en el espacio de Minkowski toma la forma más simple posible en sistemas coordenados cuyas líneas coordenadas son geodésicas ortogonales. En este apéndice mostraremos que este hecho puede extenderse a espacio-tiempos más generales, donde la métrica adoptará una forma particularmente simple cuando se exprese en coordenadas geodésicas. La idea se sustenta en que, como localmente en un entorno de un punto p del espacio-tiempo se puede resolver la ecuación geodésica con cuatro condiciones iniciales linealmente independientes, podemos asumir la existencia de un sistema coordenado $\{\xi^a\}$, en donde las líneas coordenadas son geodésicas $\xi^a(\tau) = \xi^a\tau$, lo que significa que las coordenadas geodésicas satisfacen $\ddot{\xi}^a = 0$. Denominamos a estas coordenadas *coordenadas normales de Riemann*.

Procedamos a la construcción general de dichas coordenadas. Consideremos, en primer lugar, la ecuación geodésica

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0. \tag{C.1}$$

Las geodésicas que pasan por el punto p con coordenadas x_0^α en $\tau = 0$, y con cuadrivelocidad u_0^α,

$$x^\alpha(\tau = 0) = x_0^\alpha, \quad \dot{x}^\alpha(\tau = 0) = u_0^\alpha, \tag{C.2}$$

cumplen, de acuerdo a la ecuación geodésica, lo que sigue:

$$\ddot{x}^\alpha(\tau = 0) = -\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x_0)u_0^\beta u_0^\gamma. \tag{C.3}$$

Haciendo una expansión de Taylor alrededor de $\tau = 0$, podemos escribir la solución a la ecuación geodésica como

$$x^\alpha(\tau) = x_0^\alpha + \tau u_0^\alpha - \frac{1}{2}\tau^2\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x_0)u_0^\beta u_0^\gamma + \dots. \tag{C.4}$$

Por otra parte, podemos expandir la cuadrivelocidad (arbitraria) u_0^α en términos de cuatro vectores linealmente independientes y ortonormales en p:

$$u_0^\alpha = \lambda^a e_a^\alpha, \quad g_{\alpha\beta}(x_0)e_a^\alpha e_b^\beta = \eta_{ab}. \tag{C.5}$$

Podemos pensar, entonces, en la expansión de Taylor (C.4) como una transformación de coordenadas

$$x^\alpha(\xi) = x_0^\alpha + (\xi - \xi_0)^a e_a^\alpha - \frac{1}{2}(\xi - \xi_0)^b(\xi - \xi_0)^c \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x_0) e_b^\beta e_c^\gamma + \dots . \qquad \text{(C.6)}$$

que posee las siguientes propiedades: Para $\xi^a(\tau) = \xi_0^a + \tau\lambda^a$ se reduce a la serie de Taylor (C.4) con $u_0^\alpha = \lambda^a e_a^\alpha$. Así, en este sistema coordenado particular, las líneas coordenadas

$$\xi_{(b)}^a(\tau) = \xi_0^a + \tau\delta_b^a, \quad b = 0, 1, 2, 3, \qquad \text{(C.7)}$$

son geodésicas, como se buscaba.

Bibliografía

[1] E. Abers and B. Lee. Gauge theories. *Physics Reports*, 9c(1), 1973.

[2] R. L. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. The Dynamics of general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, 40, 2008.

[3] A. Ashtekar. New variables for classical and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 57, 1986.

[4] A. Ashtekar and J. Lewandowski. Background independent quantum gravity: A status report. *Class. Quant. Grav.*, 21, 2004.

[5] J. Baez and J. Muniain. *Gauge Fields, Knots and Gravity.* World Scientific, New Jersey, USA, 1994.

[6] N. Birrell and P. Davies. *Quantum fields theory in curved space.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1984.

[7] N. Birrell and J. Taylor. Analysis of interacting quantum field theories in curved spacetime. *J. Math. Phys.*, 21, 1980.

[8] M. Blau. *Lecture notes on general relativity.* Institut für Theoretische Physik, Universität Bern, Bern, Switzerland, 2015.

[9] M. Bojowald. Spherically symmetric quantum geometry: states and basic operators. *Class. Quant. Grav.*, 21(15), 2004.

[10] M. Bojowald. *Canonical Gravity and Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2011.

[11] M. Bojowald and R. Swiderski. Spherically symmetric quantum geometry: Hamiltonian constraint. *Class. Quant. Grav.*, 2005.

[12] T. S. Bunch and L. Parker. Feynman propagator in curved spacetime: A momentum-space representation. *Phys. Rev. D*, 20(10), 1979.

[13] M. Campiglia, R. Gambini, and J. Pullin. Loop quantization of spherically symmetric midi-superspaces. *Class. Quant. Grav.*, 24, 2008.

[14] M. Campiglia, R. Gambini, and J. Pullin. Loop quantization of spherically symmetric midi-superspaces : The interior problem. *AIP Conf.Proc.*, 977, 2008.

[15] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry.* Addison-Wesley, San Francisco, USA, 2004.

[16] D. Chiou, W. Ni, and A. Tang. Loop quantization of spherically symmetric midisuperspaces and loop quantum geometry of the maximally extended schwarzschild spacetime. 2012.

[17] R. Gambini, N. Barrios, and J. Pullin. Stress energy tensor renormalization for a spherically symmetric massive scalar field on a quantum space-time. 2015.

[18] R. Gambini, E. Mato, and J. Pullin. Quantum spacetime of a charged black hole. *Phys. Rev. D*, 91(8), 2015.

[19] R. Gambini, J. Olmedo, and J. Pullin. Quantum black holes in loop quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, 31, 2013.

[20] R. Gambini, J. Olmedo, and J. Pullin. Casimir effect in a quantum space–time. *Class. Quant. Grav.*, 32(11), 2015.

[21] R. Gambini and R. A. Porto. Relational time in generally covariant quantum systems: Four models. *Phys. Rev. D*, 63, 2001.

[22] R. Gambini and J. Pullin. Hawking radiation from a spherical loop quantum gravity black hole. *Class. Quant. Grav.*, 31, 2013.

[23] R. Gambini and J. Pullin. Loop quantization of the schwarzschild black hole. *Phys. Rev. Lett.*, 110(21), 2013.

[24] R. Gambini and A. Trias. Geometrical origin of gauge theories. *Phys. Rev. D*, 23, 1981.

[25] S. Hawking and G. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-time*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1975.

[26] M. Henneaux and C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, Princeton, USA, 1992.

[27] K. V. Kuchař. Geometrodynamics of Schwarzschild Black Holes. *Phys. Rev. D.*, 50(3961), 1994.

[28] E. Mato. *Cuantización de un agujero negro de Reisner-Nordström*. Tesis de maestría, Montevideo, Uruguay, 2015.

[29] S. Mercuri. Introduction to loop quantum gravity. *PoS*, ISFTG, 2010.

[30] L. Parker and D. Toms. *Quantum field theory in curved spacetime*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2009.

[31] C. Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.

[32] C. Rovelli and L. Smolin. Loop space representation of quantum general relativity. *Nuc. Phys. B*, 331(1), 1990.

[33] T. Thiemann. Quantum gravity as the natural regulator of matter quantum field theories. *Class. Quant. Grav.*, 15, 1998.

[34] T. Thiemann. *Modern Canonical Quantum General Relativity.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2007.

[35] R. Wald. *General Relativity.* The University of Chicago Press, Chicago, USA, 1984.