



Tesis de Maestría en Física

Cuantización de ondas gravitacionales primordiales

Lic. Florencia Benítez Martínez

Instituto de Física, Facultad de Ciencias, UdelaR.

Orientador: Dr. Rodolfo Gambini, UdelaR.

Co-orientador: Dr. Javier Olmedo, LSU.

Montevideo, diciembre de 2015.

A mis queridas Delia y Pipi...

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mi madre, por el apoyo incondicional de siempre.

A Javier Olmedo, por todo el tiempo y la dedicación volcados en este trabajo. También por recibirme en la Universidad estatal de Luisiana, junto con Jorge Pullin, y hacer agradable mi estadía allí.

A Rodolfo, por aceptar ser mi tutor de tesis, y por el gran número de cursos que ha dictado al grupo de estudiantes de física teórica, enriqueciendo nuestra formación como investigadores.

A mis compañeros del grupo de física teórica, por los cursos y dudas compartidas.

Por último, quiero agradecer a la ANII y a la CAP por la financiación otorgada.

Índice

1. Introducción	10
1.1. Introducción a la cosmología cuántica	10
1.2. Estructura y objetivos de nuestro trabajo	15
2. Relatividad General	17
2.1. Conceptos elementales	17
2.1.1. Variedades	17
2.1.2. Tensores	18
2.1.3. Derivadas de tensores y curvatura	20
2.1.4. Ecuaciones de Einstein	21
2.2. Acción para campos clásicos	23
2.2.1. Formulación Lagrangiana	23
2.2.2. Formulación Hamiltoniana	29
3. Perturbaciones cosmológicas	37
3.1. Descripción del modelo	38
3.2. Ondas tensoriales	44
3.2.1. Transformación canónica para las perturbaciones tensoriales	45
3.3. Discusión	48
4. Cuantización de Fock de perturbaciones cosmológicas sobre un fondo clásico	49
4.1. Cuantización de campos lineales en un espaciotiempo de de Sitter.	49
4.2. Criterios de unicidad para la cuantización de Fock	53
4.2.1. Cuantización de Fock de las perturbaciones tensoriales	54
4.2.2. Dinámica	55
4.2.3. Unicidad de la representación	58
4.2.4. Unicidad de la descripción del campo	63
4.2.5. Discusión	66
5. Cuantización híbrida y ansatz de Born-Oppenheimer	68
5.1. Estructura cinemática	69
5.2. Representación cuántica de los vínculos	70
5.3. Ansatz de Born-Oppenheimer	71

5.4. Ecuaciones efectivas para las ondas tensoriales	75
5.5. Discusión	77
6. Conclusiones	78
7. Trabajo a futuro	82
8. Anexos	83
8.1. Anexo I: Teoría clásica de campos y sistemas vinculados	83
8.1.1. Vínculos primarios	83
8.1.2. Teoremas importantes	85
8.1.3. Vínculos secundarios	85
8.2. Anexo II: Armónicos	87
8.2.1. Armónicos escalares	88
8.2.2. Armónicos vectoriales	88
8.2.3. Armónicos tensoriales	90
8.3. Anexo III: Derivadas segundas despreciables (autoconsistencia de la aproximación)	91

Cuantización de ondas gravitacionales primordiales

Resumen

En este trabajo estudiamos la cuantización de perturbaciones cosmológicas tensoriales en un espaciotiempo homogéneo e isótropo. Comenzamos perturbando la acción hasta segundo orden en las inhomogeneidades alrededor de soluciones homogéneas e isótropas. Descartamos las perturbaciones escalares y vectoriales, puesto que su dinámica no está acoplada a las tensoriales. El sistema clásico queda determinado por el modo homogéneo del vínculo escalar. Después llevamos a cabo una transformación canónica sobre el sistema que, además de simplificar la dinámica, permite adoptar una cuantización para las perturbaciones tensoriales de tipo Fock con dinámica unitaria. Combinamos esta representación con una cuantización canónica y no perturbativa para el sector homogéneo. Esta descripción es usualmente conocida como *cuantización híbrida*, ya que uno puede adoptar distintas representaciones para diferentes grados de libertad. Dado que la dinámica cuántica es lo suficientemente compleja, estudiamos soluciones aproximadas al vínculo escalar mediante un *ansatz* de Born-Oppenheimer. Bajo ciertas aproximaciones podemos proporcionar las ecuaciones efectivas para las perturbaciones así como una ecuación de tipo Schrödinger que ha sido recientemente propuesta en el estudio de perturbaciones cosmológicas sobre la conocida como *métrica vestida*.

1. Introducción

1.1. Introducción a la cosmología cuántica

El paradigma de las perturbaciones cosmológicas es una de las áreas más atractivas sobre el estudio de la evolución del Universo, desde sus comienzos hasta el presente. Este formalismo está basado en la suposición de que nuestro Universo cumple con las características de homogeneidad e isotropía a gran escala, y está descrito por la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), la cual satisface las ecuaciones de Einstein [1]. La teoría de las perturbaciones cosmológicas [2–6], junto con el paradigma de inflación [7] y los principios de la mecánica cuántica, combinadas, proporcionan una explicación satisfactoria para el origen y evolución del Universo hasta nuestros días, así como su estructura a gran escala. Las predicciones de esta teoría están amparadas por observaciones de gran precisión, como son las misiones COBE [8], WMAP [9–12], Planck [13,14] o BICEP [15], entre otras. En resumen, una expansión acelerada del Universo en algún instante en el pasado permite explicar varios problemas de la cosmología tradicional, como son el problema de la planitud o el del horizonte de partícula [7]. Más aún, cuando uno introduce pequeñas inhomogeneidades tratadas en el nivel cuántico como pequeñas fluctuaciones geométricas, la aceleración del Universo produce un estiramiento de las escalas microscópicas junto con una decoherencia, tal que los campos microscópicos se vuelven macroscópicos e indistinguibles de variables estocásticas. Este es el fenómeno que permite explicar el origen de las inhomogeneidades de nuestro Universo si este era inicialmente homogéneo¹.

Se debe enfatizar que la teoría de las perturbaciones cosmológicas está basada primeramente en el hecho de que el Universo es homogéneo e isótropo, pero con pequeñas inhomogeneidades relacionadas con fluctuaciones cuánticas de la geometría. Estas se pueden clasificar según su naturaleza puramente escalar o tensorial, y son tratadas como campos lineales que se propagan por el espaciotiempo de fondo. Además, tradicionalmente, se asume la aproximación semiclásica donde es aplicable la teoría cuántica de campos en un fondo curvo [16,17]. En este caso uno asume que los campos que se propagan por el espaciotiempo tienen una interacción con el fondo lo suficientemente débil como para que su evolución pueda ser desacoplada. Entonces es posible tratar los campos en el nivel cuántico mediante una representación estándar de tipo Fock,

¹O al menos la región microscópica en el pasado que se corresponde con la porción del Universo que observamos hoy en día.

mientras que el fondo evoluciona siguiendo unas ecuaciones de movimiento dadas. Como carecemos de un entendimiento profundo de la naturaleza cuántica de la gravedad, uno normalmente toma las ecuaciones de Einstein o, en el mejor de los casos, una descripción semiclásica para el espaciotiempo de fondo que pueda incorporar correcciones de naturaleza cuántica. Esta es la descripción más simple que se ha podido dar hasta ahora compatible con los resultados observacionales.

A pesar de que este paradigma muestra carencias en muchos aspectos, cuando tratamos de explicar la física de nuestro Universo primitivo hasta su estado actual a gran escala, parece ser una muy buena aproximación. La distribución Gaussiana de las anisotropías del fondo cósmico de microondas se puede explicar naturalmente por medio del espectro de potencias de las fluctuaciones de las perturbaciones (escalares y tensoriales) siempre y cuando estén al inicio la inflación en el estado de Bunch-Davis [18] (el estado de vacío con máxima simetría en un espaciotiempo de de Sitter). Uno puede entonces estimar el espectro de anisotropías que observaríamos hoy en día [6] y que quedó impreso en el fondo cósmico de microondas en el momento del desacople [7]. Los modelos usuales predicen anisotropías de temperatura del fondo cósmico de microondas compatibles con los resultados observacionales. Pero, como fue en principio anunciado por WMAP [10,11] y más tarde confirmado por Planck [13,14], existen anomalías en el espectro de temperaturas a gran escala que indican que en el Universo primitivo pudo haber procesos físicos no considerados hasta ahora. Aunque existen multitud de modelos que podrían explicar este fenómeno, nosotros vamos a concentrarnos en esta tesis en el estudio de correcciones cuánticas en la geometría de fondo que sean también capaces de producir anomalías, tanto una supresión como una acentuación del espectro de anisotropías de gran escala.

De todas las teorías que tratan de hacer compatible la relatividad general con los principios de la mecánica cuántica, uno de los formalismos más interesantes es la gravedad cuántica de lazos (GCL) [19–21]. Se trata de un programa de cuantización canónico, no perturbativo y libre de estructuras de fondo. A su vez, está basado en el programa de cuantización de Dirac para sistemas vinculados [22,23]. La GCL parte de una descripción para la teoría de Einstein en términos de una conexión $SU(2)$ y una tríada densitizada que forman un par canónico de variables. La invariancia bajo transformaciones $SU(2)$ es bien conocida si uno considera holonomías de la conexión $SU(2)$ a lo largo de aristas continuas a trozos para construir los estados básicos del modelo cuántico (junto con ciertas condiciones que no describiremos en detalle). Además, la teoría proporciona una representación invariante bajo difeomorfismos sobre un espacio de Hilbert

bien adaptado a estas holonomías. Las únicas simetrías que no han sido tratadas con la profundidad necesaria en la teoría cuántica son las reparametrizaciones temporales.

Junto con este formalismo se ha venido desarrollando la cosmología cuántica de lazos [24–28] (CCL). Aquí se trata la cuantización de modelos reducidos por simetría basándose en el programa de cuantización de la GCL. Ha surgido como una importante rama de investigación en cosmología cuántica y de la física del Universo primitivo. Una de sus características principales es el reemplazo de la singularidad clásica por un rebote cuántico [29–31]. Esta provee una extensión natural del Universo primitivo previo a la etapa de inflación hasta el régimen de Planck, sin descuidar completamente las correcciones cuánticas. Uno de los modelos que ha sido estudiado en bastante profundidad dentro de este marco es el de un espaciotiempo homogéneo e isótropo acoplado a un campo escalar con masa [32]. Aunque la dinámica cuántica de este modelo no ha sido completamente analizada, el buen comportamiento semiclásico del modelo en el que la masa es nula [29–31], hace creer que una dinámica efectiva para un campo escalar con masa codificará las correcciones cuánticas relevantes de los estados cuánticos semiclásicos. Bajo esta hipótesis, y si se dan las condiciones necesarias, después de que se produzca el rebote cuántico, casi todas las trayectorias semiclásicas sufren un periodo inflacionario. Es por ello que resulta interesante analizar perturbaciones sobre este tipo de espaciotiempos y ver qué física de altas energías es potencialmente observable en el fondo cósmico de microondas. En este ámbito se han desarrollado varios formalismos para atacar el problema. Aunque la dinámica cuántica no ha sido totalmente resuelta para ninguno de ellos, uno trata de buscar aproximaciones y justificaciones que permitan en última instancia proporcionar un conjunto de ecuaciones de movimiento para las perturbaciones que incorporen correcciones de gravedad cuántica.

El primero de estos formalismos consiste en una formulación covariante del sistema perturbado en el que las correcciones cuánticas quedan fijadas al exigir que el álgebra de los vínculos quede libre de anomalías [33–46]. Este tipo de correcciones cuánticas modifican las ecuaciones de movimiento de las perturbaciones de tal modo que en la región cercana a la singularidad pasan de ser hiperbólicas a elípticas. Las predicciones de este formalismo parecen ser incompatibles con las observaciones [46]. El segundo formalismo incorpora correcciones cuánticas asumiendo que las perturbaciones están descritas por un hamiltoniano efectivo que incorpora un número limitado de correcciones cuánticas dado por el valor esperado de ciertos operadores del espaciotiempo de fondo cuántico [47,48]. Este formalismo se conoce como *métrica vestida*, ya que la geometría que sienten las perturbaciones no se corresponde exactamente ni con la geometría semiclásica

ni con la cuántica, si no que incorpora sólo ciertas fluctuaciones. Sus predicciones han sido confrontadas con las observaciones [49,50], y resultan estar bastante de acuerdo con ellas. El tercer formalismo, que adoptaremos en esta tesis de maestría, es el conocido como *cuantización híbrida*. Los dos formalismos anteriores se basan en éste ya que combinan una cuantización para el fondo y para las perturbaciones que son en principio diferentes en el nivel fundamental. Aunque esta combinación parece natural en este contexto de perturbaciones cosmológicas, su motivación original fue introducida en el estudio de cosmologías inhomogéneas de Gowdy [51,52]. Sin entrar en excesivos detalles, este tipo de espaciotiempos en vacío, tras una fijación parcial de gauge, pueden reducirse a un espaciotiempo de tipo Bianchi I (en el caso en que las secciones espaciales tienen la topología de un tres-toro) acoplado a ondas tensoriales. Aquí las ondas tensoriales no son perturbaciones, si no que producen inhomogeneidades que pueden modificar sustancialmente la dinámica del espaciotiempo de fondo de Bianchi I. Dada la complejidad del sistema, en un primer intento de atacar la dinámica cuántica en un contexto de la GCL [53], se propuso combinar una cuantización estándar de Fock para las ondas tensoriales (aunque no sean perturbativas) con una representación no estándar de tipo polimérica para los grados de libertad de la cosmología de Bianchi I. En este último caso, la singularidad clásica se resuelve, resultando una descripción a priori físicamente aceptable, y consistente, ya que esta combinación se pudo llevar a cabo satisfactoriamente en este modelo en concreto. La hipótesis detrás de esta construcción es la existencia de un régimen intermedio entre un tratamiento completo dentro de una teoría de gravedad cuántica y el tradicional de tipo teoría cuántica de campos en un espaciotiempo curvo. Esta cuantización híbrida se ha extendido al contexto de la teoría de perturbaciones cosmológicas [54–59]. Dicha descripción incorpora diferentes propiedades de los formalismos covariantes y de geometría vestida que mencionamos anteriormente, así como los generaliza en ciertos sentidos. En este caso, las correcciones cuánticas que se incorporarán a las ecuaciones de movimiento de las perturbaciones serán tales que las correcciones perturbativas al fondo cuántico no modifiquen la discretización intrínseca de su geometría [54–59]. Este formalismo admite una descripción de tipo métrica vestida [58], bajo ciertas aproximaciones, así como es compatible con una formulación covariante [59]. Aunque las predicciones del mismo no han sido testeadas aún, los cálculos preliminares parecen indicar que sus predicciones son compatibles con las observaciones.

El propósito de esta tesis es extender este último formalismo para incorporar en él perturbaciones puramente tensoriales. Hasta la fecha, sólo se han considerado inhom-

geneidades escalares, dada su relevancia física y su complejidad técnica con respecto a las tensoriales. En las propuestas iniciales para perturbaciones escalares [54–58] se adoptaron distintas fijaciones de gauge en el nivel clásico. Pero en su versión más reciente [59] se ha conseguido una formulación completamente covariante y que no exige fijaciones de gauge clásicas previas. Además, ha sido posible probar que bajo ciertas aproximaciones es posible recuperar el formalismo de métrica vestida [58,59], aunque las ecuaciones efectivas de las perturbaciones pueden obtenerse en pasos previos y no es necesario exigir demasiadas aproximaciones. Las perturbaciones tensoriales de este modelo concreto son compatibles por naturaleza con una formulación covariante y no requieren consideraciones adicionales. Es importante dejar claro que en este trabajo no vamos a adoptar una cuantización para el fondo dentro de la CCL. Asumiremos únicamente que el espaciotiempo de FRW admite una cuantización canónica y no perturbativa genérica. Entonces completaremos el formalismo para las perturbaciones escalares [59] para que incorpore perturbaciones tensoriales. Estudiaremos qué aproximaciones son necesarias para ellas si uno pretende recuperar la formulación de geometría vestida, aunque veremos que las ecuaciones de movimiento efectivas pueden ser obtenidas también sin exigir todas las aproximaciones del caso anterior. Las ecuaciones efectivas son esenciales para proseguir con el análisis de las predicciones que este modelo puede dar, y así confrontarlo con las observaciones.

Aunque en esta tesis no vamos a estudiar este problema, vale la pena mencionar el procedimiento que normalmente se sigue para comparar las predicciones con las observaciones actuales. Las ecuaciones de movimiento efectivas extienden el escenario preinflacionario hasta las escalas de Planck (donde las correcciones cuánticas alteran notablemente la geometría con respecto a la gravedad de Einstein). Asumiendo que el tratamiento perturbativo sigue siendo válido allí, así como una descripción cuántica estándar para las perturbaciones, es necesario determinar el estado inicial (o al menos una familia de ellos) en el que se encuentran las perturbaciones. En el caso de la CCL se han considerado estados con un comportamiento ultravioleta concreto [49,50] en el instante en el que se produce el rebote cuántico. Aunque las predicciones obtenidas son compatibles con las observaciones, no son capaces de explicar las anomalías a gran escala. Cabe la posibilidad de que correcciones cuánticas adicionales que la geometría vestida no incorpora, o elecciones de estados iniciales alternativas, puedan dar cuenta de ellas. También existe la posibilidad de que el Universo inicialmente no sea perfectamente isótropo [60,61]. Por ello, desarrollar el formalismo de la Ref. [59] es un paso previo y necesario para poder entender los aspectos que acabamos de mencionar. En

concreto, en trabajos futuros se pretende estudiar el espectro de potencia modificado para los modos tensoriales primordiales y la relación entre el índice espectral tensorial y el cociente tensorial-escalar, puesto que su relación proporciona una predicción de los modelos inflacionarios que espera ser falseada por las misiones de alta precisión que se centrarán en la observación indirecta de las ondas gravitacionales primordiales en el futuro.

1.2. Estructura y objetivos de nuestro trabajo

Esta tesis está compuesta por siete secciones que componen su cuerpo principal, y tres anexos. La primera sección, como ya hemos visto, contiene una introducción que además nos sirve para describir el problema que queremos estudiar aquí y la estrategia que seguiremos para afrontarlo. El resto de las secciones están organizadas del siguiente modo:

- En la sección 2 de la tesis haremos un breve repaso sobre los conceptos más elementales de la relatividad general y recordaremos las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana. Serán la base para estudio del modelo cosmológico que vamos a considerar en este trabajo.
- En la sección 3 vamos a definir rigurosamente un espaciotiempo plano, homogéneo e isótropo sobre el que vamos a introducir las perturbaciones cosmológicas. Como nos quedamos a un orden de truncación perturbativo de segundo orden en la acción, las distintas perturbaciones (escalares, vectoriales y tensoriales) no están acopladas. Esto nos permite restringir el estudio a las perturbaciones puramente tensoriales. En esta sección además realizamos una transformación canónica que no solo nos facilitará el estudio de las mismas, sino que tendrá consecuencias fundamentales con respecto a la cuantización que adoptaremos en la sección 4 para las perturbaciones.
- En la sección 4 realizaremos la cuantización de Fock de las perturbaciones sobre un fondo clásico. La estrategia que seguiremos ya ha sido aplicada en perturbaciones escalares. Uno de los objetivos de esta tesis es probar que los modos tensoriales admiten también una cuantización similar. Concretamente, comenzaremos por probar que su dinámica es unitaria en el nivel cuántico para una representación concreta. Después probaremos que cualquier estado cuántico compatible con las simetrías espaciales del fondo cosmológico y que admite una dinámica unitaria está

dentro de la misma clase de equivalencia unitaria de cuantizaciones de Fock. Por último comprobaremos que una descripción para las perturbaciones en términos de un conjunto de variables nuevas (implementada a través de transformación canónica dependiente del tiempo) no es compatible con una dinámica unitaria.

- En la sección 5 pasaremos a una cuantización híbrida del modelo. En este caso asumimos cuantizaciones separadas para el sector homogéneo y las perturbaciones (y para estas adoptamos la descripción de Fock de la sección 4). Asumiremos un ansatz de tipo Born-Oppenheimer para los estados cuánticos del sistema para analizar la dinámica de forma aproximada. Dentro de esta descripción analizaremos las aproximaciones que son necesarias para recuperar una descripción de tipo geometría vestida. Concluiremos el trabajo dando las ecuaciones efectivas para las ondas tensoriales dentro de la cuantización híbrida.
- Por último, en la sección 6 repasaremos las principales conclusiones de nuestro estudio, y en la sección 7 el trabajo a futuro que se va a realizar en relación a los resultados alcanzados en esta tesis de maestría.

2. Relatividad General

2.1. Conceptos elementales

En esta sección vamos a introducir las herramientas básicas en geometría diferencial en las que se basa la relatividad general, así como los conceptos fundamentales detrás de la gravedad de Einstein. Comenzaremos por introducir el concepto de variedad diferenciable. Sobre ella, definiremos tensores: aquellos objetos en los que codificamos la información sobre magnitudes físicas. Entre ellos se encuentran la métrica, el tensor de curvatura o el de energía-momento. Finalmente definiremos las ecuaciones de Einstein mediante relaciones consistentes entre el tensor de energía-momento y el de Einstein.

2.1.1. Variedades

Una variedad (o variedad diferenciable) es uno de los conceptos fundamentales de la física y la matemática. Corresponde a un espacio posiblemente curvo y con una topología complicada, el cual 'coincide' localmente con \mathbb{R}^n . Es decir, su métrica no es la misma, pero funciones y coordenadas funcionan de forma muy similar. La variedad completa se construye uniendo 'parches' de dichas regiones locales. La dimensión de estos espacios euclídeos utilizados debe ser la misma en cada región de la variedad. Por tanto, tenemos una variedad de dimensión n .

Algunos ejemplos de variedades:

- \mathbb{R}^n por sí misma, incluyendo la recta (\mathbb{R}), el plano (\mathbb{R}^2), etc.
- La n -esfera, S^n , lugar geométrico de todos los puntos a una distancia fija del origen en \mathbb{R}^{n+1} . El círculo S^1 y la 2-esfera S^2 , son los ejemplos más útiles.
- El n -toro, T^n , resulta de tomar un cubo n -dimensional e identificar los lados opuestos (Ver figura (1)).
- Una superficie Riemanniana de género g es esencialmente un 2-toro con g hoyos en lugar de uno (Ver figura (2)).
- En un aspecto más abstracto, un conjunto de transformaciones en \mathbb{R}^n forma una variedad. Los grupos de Lie son variedades que también tienen estructura de grupo. Por ejemplo, $SO(2)$, el conjunto de rotaciones en dos dimensiones, es la misma variedad que S^1 .

- El producto de dos variedades es una variedad. Dadas dos variedades M y M' , de dimensiones n y n' respectivamente, podemos construir una variedad $M \times M'$, de dimensión $n + n'$, que consiste en pares ordenados (p, p') con $p \in M$ y $p' \in M'$.

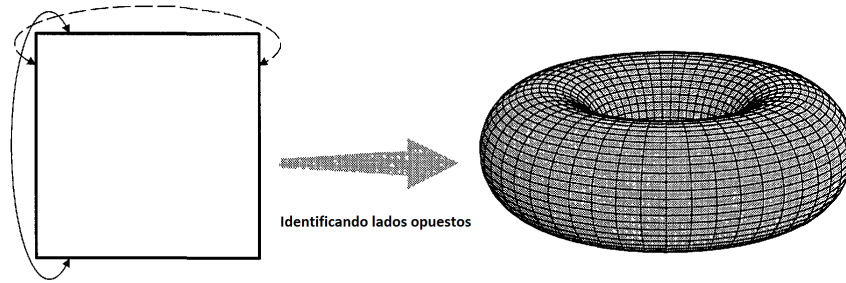


Figura 1: 2-toro

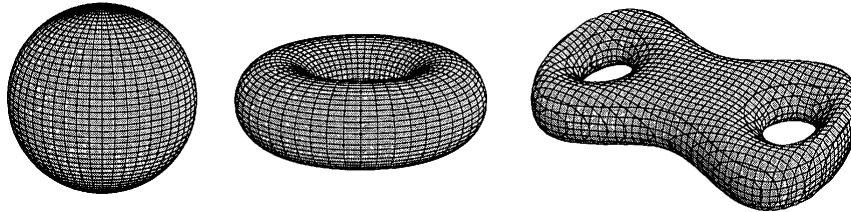


Figura 2: Superficies Riemannianas de género 0, 1 y 2.

2.1.2. Tensores

Un tensor T de rango (k, l) es un mapa multilinear de una colección de vectores y vectores duales en \mathbb{R} ,

$$T : T_p^* \times \dots \times T_p^* \times T_p \times \dots \times T_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1)$$

con T_p el espacio tangente en un punto p multiplicado (bajo producto cartesiano) k veces y T_p^* el espacio dual multiplicado l veces.

El espacio de todos los tensores de rango (k, l) forma un espacio vectorial. Para construir una base de este espacio necesitamos definir la operación 'producto tensorial', representada por el símbolo \otimes . Si T es un tensor de rango (k, l) y S uno de rango (m, n) , definimos el tensor $T \otimes S$ de rango $(k + m, l + n)$ como

$$T \otimes S (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, \dots, \omega^{(k+m)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}, \dots, V^{(l+n)}) = T (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) \times$$

$$S (\omega^{(k+1)}, \dots, \omega^{(k+m)}, V^{(l+1)}, \dots, V^{(l+n)}), \quad (2)$$

$\omega^{(i)}$ y $V^{(i)}$ son vectores y vectores duales distintos. Nótese que, en general, el producto tensorial no es conmutativo. Un tensor de rango (k, l) tiene k índices superiores y l inferiores, donde el orden es un factor importante.

Los tensores pueden ser representados en términos de sus componentes. Esto resulta de gran utilidad a la hora de realizar operaciones. Las componentes de un tensor quedan definidas con respecto a una base dada, que no es otra cosa que un conjunto de tensores de referencia que son linealmente independientes. Esto es equivalente a elegir un conjunto de vectores $\omega_a^{(i)}$ y los duales $V_b^{(i)}$, todo ellos linealmente independientes, con a y b tomando valores desde 1 hasta la dimensión del espacio tangente T_p^i o del dual $T_p^{(i)*}$ que corresponda. Por ejemplo, definimos las componentes de un tensor T arbitrario como

$$T_{a \dots b}^{c \dots d} = T (\omega_a^{(1)}, \dots, \omega_b^{(i)}, V_c^{(1)}, \dots, V_d^{(l)}).$$

De ahora en adelante nos referiremos a cualquier tensor en términos de sus componentes. Un ejemplo que nos resulta familiar es el tensor métrico, g_{ab} , de rango $(0, 2)$. Se trata de un tensor simétrico que no tiene que ser necesariamente definido positivo. Este permite definir un producto interno a través de su acción sobre dos vectores

$$g(V, W) = g_{ab} V^a W^b = V \cdot W. \quad (3)$$

En esta expresión usamos el convenio de sumación de Einstein, que indica que cuando dos índices aparecen repetidos, debemos sumarlos en su rango de definición. El término métrica se debe a que este tipo de tensores permiten definir distancias entre elementos del espacio tangente donde están definidos. La métrica también se usa para relacionar elementos de T_p y del dual T_p^* . Por ejemplo,

$$V_a = g_{ab} V^b.$$

2.1.3. Derivadas de tensores y curvatura

Un elemento necesario para construir la curvatura requiere definiciones precisas sobre cómo se puede derivar un tensor.

Derivada de Lie: La derivada de Lie es una derivación en el álgebra de funciones diferenciables sobre una variedad diferenciable M , cuya definición puede extenderse al álgebra tensorial de la variedad. Obtenemos entonces lo que en topología diferencial se denomina derivación tensorial: una aplicación \mathbb{R} -lineal sobre el conjunto de tensores de tipo (k, l) , que preserva el tipo tensorial y satisface la regla del producto de Leibniz y que conmuta con las contracciones. Alcanza con definir explícitamente su acción sobre funciones y campos de vectores. Si X es un campo diferenciable de vectores:

$$\mathcal{L}_X f = X(f), \quad (4)$$

para toda función diferenciable, f .

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y], \quad (5)$$

para todo campo diferenciable, Y .²

Derivada covariante: Claramente, la curvatura del espaciotiempo depende de alguna manera de la métrica. Queremos formalizar este concepto bajo una estructura matemática útil. Por conveniencia, de ahora en adelante asumiremos que la métrica g_{ab} es Lorentziana, concretamente con signatura $-+++$, sobre una variedad de dimensión cuatro. Por tanto los índices a, b , etc. van desde 0 hasta 3. La curvatura se manifiesta a través de la llamada “conexión”. Existe una única conexión simétrica que podemos construir a partir de la condición $\nabla_a g_{bc} = 0$, y que está encapsulada en los objetos llamados *símbolos de Christoffel*,

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc}). \quad (6)$$

Aquí ∂_a significa derivada parcial respecto a la coordenada x^a . No deben identificarse estos objetos con tensores, por eso les llamamos “símbolos”. La *derivada covariante* ∇_a es una generalización de la derivada parcial que tiene en cuenta la curvatura. La

²[,] es el corchete de Lie, definido por: $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$.

derivada covariante de un campo vectorial V^b está dada por

$$\nabla_a V^b = \partial_a V^b + \Gamma_{ac}^b V^c. \quad (7)$$

Por ejemplo, la conexión también aparece en la definición de geodésica (generalización del concepto de línea recta). Una curva parametrizada $x^a(\lambda)$ es una geodésica si obedece

$$\frac{d^2 x^a}{d\lambda^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\lambda} \frac{dx^c}{d\lambda} = 0. \quad (8)$$

Toda la información acerca de la curvatura de una variedad está contenida en un tensor de rango $(1, 3)$, conocido como *tensor de Riemann*,

$$R^a{}_{bcd} = \partial_c \Gamma_{db}^a - \partial_d \Gamma_{cb}^a + \Gamma_{ce}^a \Gamma_{db}^e - \Gamma_{de}^a \Gamma_{cb}^e. \quad (9)$$

Este tiene todas sus componentes nulas si y sólo si la métrica es perfectamente plana. Es antisimétrico en los índices c y d . Además este satisface las identidades de Bianchi

$$\nabla_{[a} R^e{}_{bc]d} = 0,$$

donde los corchetes significan antisimetrización de los índices.

El tensor de Riemann puede contraerse en forma del *tensor de Ricci*,

$$R_{ab} = R^c{}_{acb}, \quad (10)$$

que es un tensor simétrico. Si tomamos su traza, $R = g^{ab} R_{ab}$, obtenemos el llamado *escalar de Ricci* o *curvatura escalar*.

Desde un punto de vista físico, la curvatura del espaciotiempo codifica la información, por ejemplo, de las fuerzas de marea a las que ya estamos acostumbrados.

2.1.4. Ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einstein se pueden derivar de dos formas. La primera, por medio de la ecuación de Poisson para el potencial gravitatorio en gravedad Newtoniana, y que desarrollaremos a continuación. La segunda, más fundamental, a partir de una acción que nos permite derivar las ecuaciones de movimiento. Esta última opción la describiremos más adelante.

La ecuación de Poisson para el potencial Newtoniano Φ es

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (11)$$

con $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$, el Laplaciano espacial plano (con i, j desde 1 hasta 3), y ρ la densidad de materia.

El principio de covariancia general de Einstein involucra el uso de tensores. Si uno relaciona el potencial Newtoniano a la izquierda de la ecuación con el tensor métrico g_{ab} y la densidad de materia a la derecha con el tensor energía-momento, T_{ab} ,

$$[\nabla^2 g]_{ab} \propto T_{ab}. \quad (12)$$

Ahora bien, a la izquierda tenemos un tensor $(0, 2)$, simétrico, de segundo orden en derivadas de la métrica. Recordemos que el tensor de Riemann se construye con símbolos de Christoffel y sus derivadas primeras, y a su vez los símbolos de Christoffel con la métrica y sus derivadas primeras. Por lo tanto, el tensor de Riemann es la magnitud física que contiene derivadas segundas de la métrica. Obsérvese que $R^a{}_{bcd}$ no tiene el número correcto de índices pero podemos contraerlo en forma del tensor de Ricci que sí lo tiene. En conclusión, la ecuación tentativa para el campo gravitacional es

$$R_{ab} = \kappa T_{ab}, \quad (13)$$

para alguna constante κ . Pero existe un problema con la conservación de la energía, ya que se debe cumplir $\nabla^a T_{ab} = 0$, y por tanto $\nabla^a R_{ab} = 0$. Pero eso no es cierto en general. Haciendo uso de las identidades de Bianchi, $\nabla^a R_{ab} = \frac{1}{2}\nabla_b R$. Entonces, debemos considerar una nueva definición: el *tensor de Einstein*

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}, \quad (14)$$

que es conservado automáticamente. Finalmente, proponemos

$$G_{ab} = \kappa T_{ab}, \quad (15)$$

como la ecuación de campo para la métrica, la cual satisface todos los requerimientos mencionados anteriormente. El lado derecho es una expresión covariante de la densidad de energía-momento en forma de un tensor $(0, 2)$ simétrico y conservado, mientras que

el lado izquierdo es un tensor $(0, 2)$ simétrico y conservado, construido por la métrica y sus derivadas segundas.

Sólo resta fijar la constante de proporcionalidad κ , y eso se realiza verificando que la ecuación tenga concordancia con la ecuación de Poisson en el límite Newtoniano. Una vez realizado esto, se obtiene $\kappa = 8\pi G$.

Finalmente, la *ecuación de Einstein* para relatividad general es

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi GT_{ab}. \quad (16)$$

2.2. Acción para campos clásicos

2.2.1. Formulación Lagrangiana

Consideremos una teoría que involucre un campo tensorial ψ definido en una variedad M . Sea $S[\psi]$ una relación funcional sobre ψ , es decir, S es una aplicación que va de las configuraciones de campo en M , en los números. Ahora nos gustaría definir la derivada funcional de S respecto del campo tensorial ψ . Para ello, tomemos una familia uniparamétrica suave de las configuraciones de campo, ψ_λ , con condiciones de borde apropiadas en $\lambda = 0$. Asumiremos que $\psi_{\lambda=0}$ y $\frac{d\psi}{d\lambda} |_{\lambda=0}$ están bien definidos. Y supondremos además que $\frac{dS}{d\lambda}$ existe en $\lambda = 0$ para estas familias uniparamétricas. Si para el campo tensorial χ de tipo (k, l) , existe uno χ de tipo (l, k) , de modo que para todas estas familias ψ_λ tenemos

$$\frac{dS}{d\lambda} = \int_M \chi \delta\psi, \quad (17)$$

donde $\delta\psi = \frac{d\psi}{d\lambda} |_{\lambda=0}$, entonces decimos que S es *funcionalmente diferenciable* en ψ_0 . Llamamos entonces a χ la derivada funcional de S y la denotamos por

$$\chi = \left[\frac{\delta S}{\delta \psi} \right]_{\psi_0}. \quad (18)$$

Consideremos ahora un funcional S de la forma

$$S[\psi] = \int_M \mathcal{L}[\psi], \quad (19)$$

donde \mathcal{L} es una función local de ψ y de un número finito de sus derivadas,

$$\mathcal{L} |_{x=0} = \mathcal{L}(\psi(x), \nabla\psi(x), \dots, \nabla^k\psi(x)). \quad (20)$$

Supongamos que S es funcionalmente diferenciable y que las configuraciones del campo ψ que extremizan S ,

$$\left[\frac{\delta S}{\delta \psi} \right]_{\psi} = 0, \quad (21)$$

son precisamente las que son soluciones de la ecuación de campo para ψ . S es llamada *acción*, \mathcal{L} es llamada *densidad lagrangiana*, y la especificación de \mathcal{L} es lo que llamamos *formulación lagrangiana* de la teoría de campos.

La formulación lagrangiana de la teoría de campos es prácticamente análoga a la formulación lagrangiana de la mecánica de la partícula. En la mecánica de la partícula se especifica una acción funcional de la trayectoria de la partícula como la integral de una función lagrangiana sobre esa misma trayectoria. El problema variacional análogo a (21) se trata precisamente enfocando nuestra atención en trayectorias finitas y buscando los extremos de la acción, respecto a las variaciones de camino que dejan los extremos fijos. Por analogía, para plantear nuestro problema variacional en el caso del campo, debemos enfocar la atención en una región compacta, U , de M y considerar las familias de un parámetro ψ_{λ} .

Continuando con la analogía, tenemos que en relatividad general, la variable de campo es la métrica del espacio-tiempo, g_{ab} , definida en una variedad de dimensión cuatro, M . Por simplicidad asumiremos que esta variedad tiene topología compacta. Además, el elemento de volumen a usarse en las integrales (17) y (19), y que denotaremos por ϵ_{abcd} , está determinado por g_{ab} , a través de la ecuación $\epsilon^{a_1 \dots a_n} \epsilon_{a_1 \dots a_n} = (-1)^s n!$, donde n es la dimensión de la variedad y $s = 1$ para la métrica Lorentziana. Consecuentemente, el elemento de volumen depende de la variable de campo. Por tanto, su variación debe ser tenida en cuenta a la hora de calcular las derivadas funcionales. Una forma de manejar esta situación es definir \mathcal{L} como un tensor antisimétrico de cuarto orden en lugar de un escalar incorporando el elemento de volumen en \mathcal{L} . Esto requiere hacer una modificación similar en nuestra definición de derivada funcional. Nosotros vamos a seguir un procedimiento más simple que consiste en introducir un elemento de volumen fijo $e_{abcd} = e_{[abcd]}$ en M , definiendo las integrales sobre M respecto a e_{abcd} en lugar de ϵ_{abcd} . Una forma de hacerlo (al menos en una porción de M) es elegir un sistema de coordenadas y tomar e_{abcd} como el elemento de volumen asociado. Dado que dos elementos de volumen arbitrarios difieren entre sí, en cada punto, en un factor escalar, tenemos

$$\epsilon_{abcd} = f e_{abcd}. \quad (22)$$

Para determinar el valor de f , debemos tener en cuenta que ϵ_{abcd} es un tensor totalmente antisimétrico, por lo que debe cumplir

$$\epsilon^{a_1 \dots a_n} \epsilon_{b_1 \dots b_n} = (-1)^s n! \delta^{[a_1}_{b_1} \delta^{a_2}_{b_2} \dots \delta^{a_n]}_{b_n}, \quad (23)$$

y su derivada covariante cumple

$$\nabla_b \epsilon_{a_1 \dots a_n} = 0. \quad (24)$$

El elemento de volumen que cumple estas condiciones es el que surge de sustituir f por $\sqrt{-g}$, donde g es el determinante de la matriz de componentes g_{ab} de la métrica en esa base, entonces

$$\epsilon = \sqrt{-g} \varepsilon_{abcd} dx^a dx^b dx^c dx^d \sim \sqrt{-g} d^4x. \quad (25)$$

Dado un elemento de volumen e_{abcd} en M , definimos un tensor densidad $T^{a\dots b}_{c\dots d}$ como un tensor que puede ser expresado de la forma

$$T^{a\dots b}_{c\dots d} = \sqrt{-g} \tilde{T}^{a\dots b}_{c\dots d}, \quad (26)$$

donde $\tilde{T}^{a\dots b}_{c\dots d}$ incorpora (localmente) información geométrica (y por tanto física) de la variedad a través de $\sqrt{-g}$, mientras que el elemento de volumen e_{abcd} queda fijado y ya no integra a ningún elemento físico en su definición. Para que la acción S sea independiente de e_{abcd} , es necesario que la densidad lagrangiana \mathcal{L} sea una densidad escalar. Similarmente, para que $\frac{dS}{d\lambda}$ sea independiente de e_{abcd} , las derivadas funcionales de S deben ser densidades tensoriales.

Demostraremos que (exceptuando los términos de borde) la densidad escalar

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g} R, \quad (27)$$

es una densidad Lagrangiana para la ecuación de Einstein en el vacío. La acción correspondiente,

$$S [g^{ab}] = \int \mathcal{L}_G e, \quad (28)$$

es conocida como *acción de Hilbert-Einstein*. Aquí hemos escrito $e = e_{abcd} dx^a dx^b dx^c dx^d =$

d^4x con el fin de enfatizar el uso de este elemento de volumen. Además, por conveniencia, hemos tomado la inversa de la métrica g^{ab} , en lugar de g_{ab} , como la variable del campo. Consideremos una familia uniparamétrica para g^{ab} , y su variación respecto del parámetro $\delta g^{ab} = dg^{ab}/d\lambda$. Para esta familia uniparamétrica, tenemos

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = \sqrt{-g} (\delta R_{ab}) g^{ab} + \sqrt{-g} R_{ab} \delta g^{ab} + R \delta (\sqrt{-g}). \quad (29)$$

Además,

$$g^{ab} \delta R_{ab} = \nabla^a v_a. \quad (30)$$

Esta igualdad aparece al linealizar la ecuación de Einstein para

$$\gamma_{ab} = \left. \frac{dg_{ab}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad (31)$$

tal que,

$$0 = \dot{R}_{ac} = -\frac{1}{2} g^{bd0} \nabla_a^0 \nabla_c \gamma_{bd} - \frac{1}{2} g^{bd0} \nabla_b^0 \nabla_d \gamma_{ac} + g^{bd0} \nabla_b^0 \nabla_{(c} \gamma_{a)d}, \quad (32)$$

donde

$$v_a = \nabla^b (\delta g_{ab}) - g^{cd} \nabla_a (\delta g_{cd}). \quad (33)$$

En general, la traza de una matriz cumple

$$\text{tr} \left[\frac{dA}{dt} A^{-1} \right] = \frac{1}{\det(A)} \frac{d}{dt} [\det(A)]. \quad (34)$$

Por lo tanto,

$$\delta (\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ab} \delta g_{ab} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab}. \quad (35)$$

De esta manera, llegamos a que

$$\frac{dS_G}{d\lambda} = \int \frac{d\mathcal{L}_G}{d\lambda} = \int \nabla^a v_a \sqrt{-g} e + \int \left(R_{ab} + \frac{1}{2} R g_{ab} \right) \delta g^{ab} \sqrt{-g} e. \quad (36)$$

El primer término de la ecuación (36) es la integral de una divergencia, $\nabla^a v_a$, con respecto al elemento de volumen natural $\epsilon = \sqrt{-g} e$. De hecho, por el teorema de Stockes, esta integral contribuye con un término de borde. Dado que en nuestro modelo

estamos considerando una variedad compacta (carece de bordes), podemos descartar ese término. En consecuencia, encontramos que

$$\frac{\delta S_G}{\delta g^{ab}} = \sqrt{-g} \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right). \quad (37)$$

Vemos que de las ecuaciones (21) y (37) resulta la ecuación de Einstein en el vacío, tal como queríamos. Desde el punto de vista lagrangiano, la ecuación de Einstein surge de una manera muy natural, ya que la densidad lagrangiana (27) es una de las densidades escalares más simples que se pueden construir de la métrica del espaciotiempo.

Es interesante notar que, en lugar de ver solamente la métrica como variable de campo de la relatividad general, podemos ver la métrica y el operador derivada ∇_a como variables independientes. Observemos que si utilizamos la misma densidad lagrangiana (27) pero vemos R_{ab} como una función únicamente del operador derivada (independiente de g^{ab}) y variamos la acción de Palatini,

$$\varphi_G [g^{ab}, \nabla_a] = \int \sqrt{-g} R_{ab} g^{ab} e, \quad (38)$$

con respecto a g^{ab} y ∇_a , recuperamos la ecuación de Einstein (37) junto con la condición de compatibilidad de la métrica $\nabla_c g^{ab} = 0$ en el operador derivada.

Si pasamos de la ecuación de Einstein en el vacío al caso en que existe un campo con masa, también es posible realizar una formulación lagrangiana de una manera muy simple. Primero, debemos encontrar una densidad lagrangiana adecuada para dicho campo con masa en el espaciotiempo.

Como ejemplo, podemos considerar un campo escalar con masa. Para obtener las ecuaciones de Einstein acopladas al campo, construimos una densidad lagrangiana total, \mathcal{L} , mediante la adición de una densidad lagrangiana \mathcal{L}_G con un múltiplo de la densidad lagrangiana del campo con masa, \mathcal{L}_M ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \alpha_M \mathcal{L}_M, \quad (39)$$

donde α_M es una constante. Dado que \mathcal{L}_G no depende del campo con masa, la variación de la acción total, S , con respecto a él, da lugar a la misma ecuación que la variación de S_M . La variación de S con respecto a g^{ab} da lugar a la ecuación

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (40)$$

donde el tensor T_{ab} se define como

$$T_{ab} = -\frac{\alpha_M}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}. \quad (41)$$

La acción de la materia S_M debe ser invariante bajo difeomorfismos, i.e., si $f : M \rightarrow M$ es una familia de difeomorfismos de un parámetro, tenemos

$$S_M [g^{ab}, \psi] = S_M [f_\lambda^* g^{ab}, f_\lambda^* \psi], \quad (42)$$

donde $f_\lambda^* : V_p \rightarrow V_p$. De hecho, para dichas variaciones, tenemos

$$0 = \frac{dS_M}{d\lambda} = \int \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} \delta g^{ab} + \int \frac{\delta S_M}{\delta \psi} \delta \psi, \quad (43)$$

donde δg^{ab} tiene la forma general $\delta g^{ab} = \nabla^{(a} w^{b)}$, siendo w^a un campo vectorial arbitrario. Supongamos que ψ satisface las ecuaciones del campo con masa. Entonces $\delta S_M / \delta \psi |_{\psi=0} = 0$, así que el segundo término en la ecuación (43) no contribuye. Usando la definición (42) encontramos que para un campo vectorial arbitrario y suave w^a ,

$$0 = \int \sqrt{-g} T_{ab} \nabla^{(a} w^{b)} \epsilon = \int T_{ab} \nabla^a w^b \epsilon = - \int (\nabla^a T_{ab}) w^b \epsilon, \quad (44)$$

lo que implica que

$$\nabla^a T_{ab} = 0. \quad (45)$$

Para una acción invariante bajo difeomorfismos, T_{ab} siempre se conserva en virtud de la ecuación de campo. Esto refuerza la interpretación de T_{ab} . Viene a representar el tensor energía-momento del campo con masa. Notemos que aplicando el argumento anterior a S_G tenemos

$$\nabla^a G_{ab} = 0. \quad (46)$$

Entonces, en la formulación lagrangiana de relatividad general, las identidades de Bianchi pueden ser vistas como consecuencia de la invariancia de la acción de Hilbert-Einstein bajo difeomorfismos.

2.2.2. Formulación Hamiltoniana

La formulación lagrangiana de una teoría de campos es covariante en el espaciotiempo. Especificamos en la variedad del espaciotiempo una acción funcional del campo ψ cuya extremización da lugar a las ecuaciones del campo. El primer paso para la formulación hamiltoniana consiste en escoger una función global de tiempo t y un campo vectorial t^a en M tal que uno pueda foliar el espaciotiempo en hipersuperficies Σ_t de Cauchy (para cada t constante tendríamos una variedad espacial de dimensión tres). El campo vectorial t^a puede ser interpretado como el “flujo de tiempo” en el espaciotiempo ya que ha de cumplir $t^a \nabla_a t = 1$. Este puede ser utilizado para identificar cada superficie Σ_t con una superficie inicial de referencia Σ_0 . Conviene aclarar que en el espaciotiempo de Minkowski la elección de t y t^a usualmente se realiza a través de un sistema de coordenadas inercial, pero en un espaciotiempo curvo no hay ninguna elección preferencial.

Otra cuestión que conviene tener en cuenta concierne la realización de integrales sobre M . Sería natural para la mayoría de los propósitos usar el elemento de volumen ϵ_{abcd} asociado con la métrica del espaciotiempo. Similarmente, en la realización de integrales sobre Σ_t sería natural, en la mayoría de los casos, utilizar el elemento de volumen ${}^{(3)}\epsilon_{abc} = \epsilon_{dabc} n^d$, donde n^d es la normal unitaria a Σ_t . Sin embargo, estos elementos de volumen, en general, van a depender del tiempo en el sentido en que $\mathcal{L}_t \epsilon_{abcd} \neq 0$ y $\mathcal{L}_t {}^{(3)}\epsilon_{abc} \neq 0$, donde \mathcal{L}_t es la derivada de Lie respecto de t en la dirección del flujo temporal t_a . El uso de un elemento de volumen dependiente del tiempo sobre Σ_t no es conveniente en el caso en que deseemos identificar Σ_t con Σ_0 a fin de ver la evolución dinámica como el cambio de los campos con respecto a una variedad de referencia Σ_0 . Por lo tanto, introduciremos un elemento de volumen fiducial e_{abcd} en M que satisfaga $\mathcal{L}_t e_{abcd} = 0$. Una forma de realizar esto, al menos localmente, es introducir coordenadas x^1, x^2, x^3 en adición a t tal que $t^a = (\partial/\partial t)^a$ y tomar e_{abcd} como el elemento de volumen fiducial coordinado $d^4x = e_{abcd} (dt)^a (dx^1)^b (dx^2)^c (dx^3)^d$. Sobre cada Σ_t , definimos ${}^{(3)}e_{abc} = e_{dabc} t^d$. A menos que se indique lo contrario, todas las integrales sobre M serán realizadas utilizando el elemento de volumen e_{abcd} y todas las integrales sobre Σ_t serán con respecto al elemento de volumen ${}^{(3)}e_{abc}$.

En general, el primer paso para construir una formulación hamiltoniana para un campo tensorial arbitrario ψ es definir un espacio V_q de configuración especificando qué campo o campos tensoriales q en Σ_t describen físicamente la configuración instantánea de ψ . Junto con la configuración, también es necesario especificar un espacio de

momentos. Este se puede identificar de manera natural con el “espacio cotangente” V_q^* del espacio de configuración V_q . De ahora en adelante identificaremos el espacio V_q^* como el conjunto de aplicaciones, representadas por campos tensoriales en Σ_t de tipo (l, k) , y que denotaremos por π , tales que mapean las variaciones infinitesimales de la configuración δq (campos tensoriales de tipo (k, l)) en \mathbb{R} a través de $\delta q \rightarrow \int_{\Sigma_t} \pi \delta q \in \mathbb{R}$ (donde la contracción de los índices es entendida).

El último paso requerido para la formulación hamiltoniana de la teoría de campos es la especificación de un funcional $H[q, \pi]$ en Σ_t , llamada *hamiltoniano*, el cual tiene la forma

$$H = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}, \quad (47)$$

donde la densidad hamiltoniana \mathcal{H} es la función local de q , π y de sus derivadas espaciales hasta un orden finito, tal que las ecuaciones

$$\dot{q} \equiv \hbar_t q = \frac{\delta H}{\delta \pi}, \quad (48)$$

$$\dot{\pi} \equiv \hbar_t \pi = -\frac{\delta H}{\delta q}, \quad (49)$$

son equivalentes a la ecuación de campo que satisface ψ .

Para cerrar esta formulación, se debe dar una prescripción para asociar un momento π con el campo ψ en Σ_t . Por ejemplo, dada una formulación lagrangiana de una teoría de campos, existe una prescripción estándar para obtener la formulación hamiltoniana análoga al procedimiento utilizado en mecánica de la partícula. Primero, tomamos q simplemente como el campo ψ evaluado en Σ_t . Luego, vemos la densidad lagrangiana como una función de q , sus derivadas temporales, y sus derivadas espaciales. Asumiendo que \mathcal{L} no depende de las derivadas temporales de orden mayor a uno respecto a q , tomamos el momento, π , asociado a ψ en Σ_t como

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}. \quad (50)$$

A continuación, intentaremos resolver la ecuación (50) para \dot{q} como función de q y π . Si esto es posible, definimos

$$\mathcal{H}(q, \pi) = \pi \dot{q} - \mathcal{L}, \quad (51)$$

donde se debe entender $\dot{q} = \dot{q}(q, \pi)$. Con esta elección de \mathcal{H} , las ecuaciones (48) y (49) son equivalentes a la ecuación (21). Para probar esto, definimos

$$J = \int_{t_1}^{t_2} H dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} = -S + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \pi \dot{q}. \quad (52)$$

Entonces, para una variación suave de un parámetro de ψ que satisface $\delta\psi = 0$ en $t = t_1$ y $t = t_2$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\lambda} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left[\frac{\delta H}{\delta q} \delta q + \frac{\delta H}{\delta \pi} \delta \pi \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} [\pi \delta \dot{q} + \dot{q} \delta \pi] - \frac{dS}{d\lambda} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} [-\dot{\pi} \delta q + \dot{q} \delta \pi] - \frac{dS}{d\lambda}, \end{aligned} \quad (53)$$

donde en la última igualdad realizamos una integración por partes. Comparando el primer y el último término de la ecuación anterior, vemos que $\delta S / \delta \psi = 0$ si y sólo si se satisfacen las ecuaciones (48) y (49).

Haciendo analogía al procedimiento que se realiza para obtener la formulación hamiltoniana en la teoría de un campo de Klein-Gordon en el espaciotiempo de Minkowski, y la formulación hamiltoniana de las ecuaciones de Maxwell en el espacio-tiempo de Minkowski (Ref. [1]), intentaremos obtener la formulación hamiltoniana de las ecuaciones de Einstein (Ref. [62]).

Elegimos la función de tiempo t y el campo vectorial “flujo de tiempo” t^a en M que satisface $t^a \nabla_a t = 1$, como mencionamos arriba. Notemos que por ahora no nos es posible interpretar t y t^a en términos de medidas físicas usando relojes hasta que conozcamos la métrica del espaciotiempo, ya que es una variable desconocida cuya determinación requiere integrar las ecuaciones de Einstein. Dada una métrica g_{ab} , es conveniente descomponer t^a en sus partes normal y tangencial con respecto a las superficies Σ_t , de tiempo t constante. Definimos la *función lapso*, N , como

$$N \equiv -g_{ab} t^a n^b = (n^a \nabla_a t)^{-1}, \quad (54)$$

y el *vector desplazamiento* N^a como

$$N^a \equiv h^a_b t^b, \quad (55)$$

donde n^a es un vector normal (unitario) a Σ_t y $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$ es la métrica espacial

inducida en Σ_t . Entonces, N mide la tasa de cambio de tiempo propio, τ , con respecto a la coordenada de tiempo, t , a medida que nos movemos normalmente a Σ_t , es decir $d\tau = Ndt$; mientras que N^a mide la cantidad de desplazamientos tangenciales a Σ_t contenidos en el campo vectorial de flujo de tiempo t^a (Fig.3).

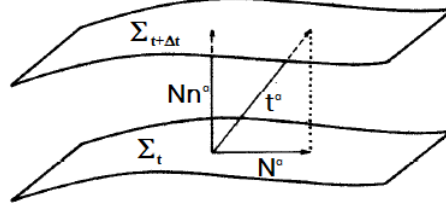


Figura 3: Diagrama del espaciotiempo donde se ilustra la definición de la función lapso, N , y el vector desplazamiento, N^a .

En términos de N , N^a , y t^a , tenemos

$$n^a = \frac{1}{N} (t^a - N^a), \quad (56)$$

y por lo tanto, la inversa de la métrica del espaciotiempo puede ser escrita como

$$g^{ab} = h^{ab} - n^a n^b = h^{ab} - N^{-2} (t^a - N^a) (t^b - N^b). \quad (57)$$

Es conveniente elegir, como nuestras variables de campo la métrica espacial, h_{ab} , la función lapso N , y la forma covariante del vector desplazamiento, $N_a = h_{ab}N^b$ (donde los índices de los vectores espaciales suben y bajan con h_{ab}), en lugar de la inversa de la métrica, g^{ab} . Los requerimientos de que $h^{ac}h_{cb}$ sea el operador identidad en el espacio tangente Σ_t y que $h^{ab}\nabla_b t = 0$, nos permiten calcular h^{ab} a partir de h_{ab} y, de ahí, obtener $N^a = h^{ab}N_b$. Así, de la ecuación (57) vemos que la información contenida en (h_{ab}, N, N_a) es equivalente a la contenida en g^{ab} .

Nuevamente, debemos utilizar un elemento de volumen fijo e_{abcd} en el espacio-tiempo que satisfaga $\mathcal{L}_t e_{abcd} = 0$ y usaremos el elemento de volumen ${}^{(3)}\epsilon_{abc} = \sqrt{h} {}^{(3)}e_{abc}$, donde h es el determinante de la matriz de componentes de h_{ab} evaluada en una base donde las componentes no nulas de ${}^{(3)}e_{abc}$ toman los valores ± 1 . Entonces, resulta que

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h}. \quad (58)$$

El primer paso para obtener el funcional hamiltoniano para relatividad general es expre-

sar la acción gravitacional (28) en términos de (h_{ab}, N, N_a) y sus derivadas temporales y espaciales. Para ello introducimos la curvatura extrínseca, K_{ab} , que está relacionada con la derivada temporal de h_{ab} , $\dot{h}_{ab} = \mathcal{L}_t h_{ab}$, de modo que,

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab} = \frac{1}{2} [n^c \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b n^c + h_{cb} \nabla_a n^c] \\ &= \frac{1}{2} N^{-1} [N n^c \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b (N n^c) + h_{cb} \nabla_a (N n^c)] \\ &= \frac{1}{2} N^{-1} h_a^c h_b^d [\mathcal{L}_t h_{ab} + \mathcal{L}_N h_{cd}] = \frac{1}{2} N^{-1} [\dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a], \end{aligned} \quad (59)$$

donde D_a es el operador derivada en Σ_t compatible con h_{ab} y donde la ecuación (56) se utilizó para pasar de la segunda a la tercera línea.

Expresamos la curvatura escalar, R , como

$$R = 2 (G_{ab} n^a n^b - R_{ab} n^a n^b). \quad (60)$$

Considerando las relaciones de Gauss-Codacci

$$(i) R_{abc}{}^d = h_a^f h_b^g h_c^k h_j^d R_{fgk}{}^j - K_{ac} K_b^d + K_{bc} K_a^d, \quad (61)$$

$$(ii) D_a K^a{}_b - D_b K^a{}_a = R_{cd} n^d h^c{}_b, \quad (62)$$

obtenemos

$$G_{ab} n^a n^b = \frac{1}{2} \{ {}^{(3)}R - K_{ab} K^{ab} + K^2 \}, \quad (63)$$

donde $K = K^a{}_a$. Por otro lado, de la definición del tensor de Riemann tenemos

$$\begin{aligned} R_{ab} n^a n^b &= R_{acb}{}^c n^a n^b = -n^a (\nabla_a \nabla_c - \nabla_c \nabla_a) n^c \\ &= (\nabla_a n^a) (\nabla_c n^c) - (\nabla_c n^a) (\nabla_a n^c) - \nabla_a (n^a \nabla_c n^c) + \nabla_c (n^a \nabla_a n^a) \\ &= K^2 - K_{ac} K^{ac} - \nabla_a (n^a \nabla_c n^c) + \nabla_c (n^a \nabla_a n^c). \end{aligned} \quad (64)$$

Los últimos dos términos de la derecha de la ecuación (64) son divergencias, y deben ser descartadas. Así, de las ecuaciones (27), (58) y (64) obtenemos

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{h}N \left[{}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2 \right]. \quad (65)$$

La sustitución de la ecuación (59) en la ecuación (65) expresa la acción gravitacional en la forma deseada, dada en la Ref. [63].

El momento canónicamente conjugado de h_{ab} es

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}} = \sqrt{h} (K^{ab} - Kh^{ab}). \quad (66)$$

Sin embargo, \mathcal{L}_G no contiene ninguna derivada temporal de N y N_a , por tanto, su momento conjugado es nulo. En analogía con el caso electromagnético, interpretamos este hecho como signo de que N y N_a no son en realidad variables dinámicas. Entonces, la configuración en nuestra formulación hamiltoniana está codificada únicamente en la métrica Riemanniana h_{ab} sobre Σ_t . Definimos la densidad hamiltoniana como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G &= \pi^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathcal{L}_G = -h^{1/2}N {}^{(3)}R + Nh^{-1/2} \left[\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi^2 \right] + 2\pi^{ab}D_a N_b \\ &= h^{1/2} \left\{ N \left[-{}^{(3)}R + h^{-1}\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}h^{-1}\pi^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2N^a [D_a (h^{-1/2}\pi^{ab})] + 2D_a (h^{-1/2}N_b\pi^{ab}) \right\}, \end{aligned} \quad (67)$$

donde $\pi = \pi^a_a$. Nuevamente, el último término de la ecuación (70) contribuye sólo a un término de borde a $H_G = \int \mathcal{H}_G {}^{(3)}e$ y será descartado. La variación de H_G con respecto a N y N_a da lugar a las ecuaciones

$$- {}^{(3)}R + h^{-1}\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}h^{-1}\pi^2 = 0, \quad (68)$$

$$D_a (h^{-1/2}\pi^{ab}) = 0, \quad (69)$$

que resultan ser vínculos (no involucran derivadas temporales de los campos del espacio de fases) y, por lo tanto, N y N_a son los multiplicadores de Lagrange correspondientes.

La ecuaciones dinámicas (48) y (49), obtenidas a partir de H_G son (ver Ref. [63])

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta H_G}{\delta \pi_{ab}} = 2h^{-1/2}N \left(\pi_{ab} - \frac{1}{2}h_{ab}\pi \right) + 2D_{(a}N_{b)}, \quad (70)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}^{ab} = -\frac{\delta H_G}{\delta h_{ab}} = & -Nh^{1/2} \left({}^{(3)}R^{ab} - \frac{1}{2}{}^{(3)}R h^{ab} \right) + \frac{1}{2}Nh^{-1/2}h^{ab} \left(\pi_{cd}\pi^{cd} - \frac{1}{2}\pi^2 \right) \\
& -2Nh^{-1/2} \left(\pi^{ac}\pi_c{}^b - \frac{1}{2}\pi\pi^{ab} \right) + h^{1/2} \left(D^a D^b N - h^{ab} D^c D_c N \right) \\
& + h^{1/2} D_c \left(h^{-1/2} N^c \pi^{ab} \right) - 2\pi^{c(a} D_c N^{b)}, \tag{71}
\end{aligned}$$

donde despreciamos otra vez los términos de borde, y utilizamos la ecuación (69). Las ecuaciones (68) y (71) son equivalentes a las ecuaciones de Einstein en el vacío, $R_{ab} = 0$. Por tanto, hemos tenido éxito en realizar una formulación hamiltoniana de las ecuaciones de Einstein.

La presencia de vínculos en nuestra formulación indica que no hemos aislado los grados de libertad dinámicos verdaderos en nuestra elección de la configuración espacial. Aún cuando hemos eliminado N y N_a como variables dinámicas, los vínculos nos dicen que nuestro espacio de fases es demasiado “grande”. Esto está directamente relacionado con la libertad de gauge en nuestras variables de configuración.

En las ecuaciones de Einstein existe la libertad de gauge en la elección de la configuración del campo h_{ab} . Si ψ es un difeomorfismo cualquiera de Σ_t , entonces h_{ab} y $\psi^* h_{ab}$ representan la misma configuración física. Esto sugiere que debemos tomar el espacio de configuración de relatividad general como la clase de equivalencia, \tilde{h}_{ab} , de métricas Riemannianas sobre Σ_t relacionadas mediante un difeomorfismo. Este espacio de configuraciones es conocido como *superespacio* (Ref. [62]). Utilizando el superespacio como el espacio de configuraciones, tenemos que para cada campo vectorial w^a en Σ_t el momento conjugado π^{ab} debe satisfacer

$$\int \pi^{ab} (\delta h_{ab} + D_{(a} w_{b)}) = \int \pi^{ab} \delta h_{ab}, \tag{72}$$

lo que implica que π^{ab} satisface automáticamente

$$D_a (h^{-1/2} \pi^{ab}) = 0. \tag{73}$$

De esta forma, el vínculo (69) puede ser eliminado por la elección del superespacio como espacio de configuraciones.

Sin embargo, el vínculo (68) permanece. Ésto puede verse como consecuencia de la libertad de gauge involucrada en la elección de pasar del espacio-tiempo a espacio y tiempo. Esto es análogo al vínculo que surge al parametrizar una teoría libre de vínculos

en un espacio-tiempo fijo, es decir, cuando introducimos al Lagrangiano una función tiempo (que define la elección de las hipersuperficies, Σ_t , con respecto a la superficie de referencia Σ_0) y tratamos esta función de tiempo como una variable dinámica (Ref. [76]). En el caso de este tipo de teorías parametrizadas, el vínculo análogo a (68) es lineal en el momento conjugado a la función tiempo. Es posible “deparametrizar” la teoría resolviendo el vínculo para el momento. Sin embargo, en el caso de las ecuaciones de Einstein, el vínculo (68) es cuadrático en el momento, y una “deparametrización” similar no es obvia. Entonces, no es probable encontrar un espacio de configuraciones para relatividad general tal que solamente los grados de libertad dinámicos estén presentes en el espacio de fases. La permanencia del vínculo (68) parece ser una característica inevitable de la formulación hamiltoniana de la relatividad general.

Debemos notar además que en nuestro análisis hemos despreciado términos de borde, ya que nuestra variedad no posee uno. Pero en otras situaciones estos deben ser incorporados, dando lugar a una formulación técnicamente más complicada. Pero esto queda fuera de los propósitos de esta tesis.

3. Perturbaciones cosmológicas

Una vez establecido el marco teórico en el que vamos a trabajar, en esta sección nos centraremos en el estudio de pequeñas inhomogeneidades (en el ámbito de perturbaciones cosmológicas) sobre un espaciotiempo de fondo homogéneo e isótropo, con topología plana y compacta. Como ya mencionamos al principio de esta monografía, este tipo de modelos permiten explicar muchos de los aspectos que se observan en el Universo a gran escala, desde sus orígenes hasta su estado actual.

Empezaremos por aplicar una reducción por simetría de la relatividad general clásica. Concretamente, asumiremos que la métrica es homogénea e isótropa, así como el contenido material (de otro modo la simetría no se preservará con la evolución). Sobre este espaciotiempo de fondo introducimos pequeñas inhomogeneidades correspondientes a la gravedad de Einstein linealizada. A nivel de la acción esto corresponde a una truncación de orden cuadrático en las perturbaciones.

La forma usual de proceder involucra identificar cantidades invariantes bajo ciertas transformaciones de coordenadas compatibles con el orden perturbativo, y que comúnmente se denominan transformaciones de gauge. Asimismo, las cantidades invariantes se denominan potenciales invariantes de gauge. Estos potenciales codifican la información física (a nivel perturbativo) y corresponderían a grados de libertad puramente dinámicos. Entre estas cantidades, las variables de Mukhanov-Sasaki resultan ser muy útiles a la hora de estudiar la dinámica del modelo así como su cuantización, en particular durante el período de inflación (ver Ref.[2]).

Este desarrollo nos permitirá entender la evolución de las inhomogeneidades desde su formación en el Universo primitivo hasta nuestros días, dentro de un régimen lineal, asumiendo que estas ya existían previamente. Este modelo, por ahora, no nos permite decretar el origen de las mismas si no que postula su formación a partir de fluctuaciones cuánticas espaciotemporales gobernadas por una teoría fundamental que todavía no ha sido concretada. Además, se asume que la transición entre el mundo cuántico y el macroscópico tiene su origen en la inflación cosmológica. Tras un período de inflación repentino, aquellas escalas microscópicas quedan fuertemente estiradas hasta el punto de alcanzar tamaños astronómicos o cosmológicos, donde la física clásica (la relatividad general) es suficiente para describir la evolución del sistema. El problema de valores iniciales queda relevado al régimen en el que una teoría cuántica de campos en un espaciotiempo curvo resulta ser una aproximación muy buena de la física que pretendemos estudiar.

El modelo inflacionario que utilizaremos como punto de partida del estudio será un espaciotiempo de FRW con un campo escalar con masa mínimamente acoplado.

3.1. Descripción del modelo

El espaciotiempo que vamos a considerar para nuestro análisis es una variedad M de dimensión cuatro equipada con una métrica Lorentziana g_{ab} . Como hemos mencionado anteriormente, trabajaremos bajo las hipótesis de homogeneidad e isotropía. La definición estándar de espaciotiempo (espacialmente) homogéneo se basa en la existencia de una familia uniparamétrica de hipersuperficies Σ_t que “llena” el espaciotiempo (ver Fig.(4)) tal que para cada t y para cada dos puntos cualesquiera $p, q \in \Sigma_t$, existe una isometría del espacio métrico que lleva p en q .

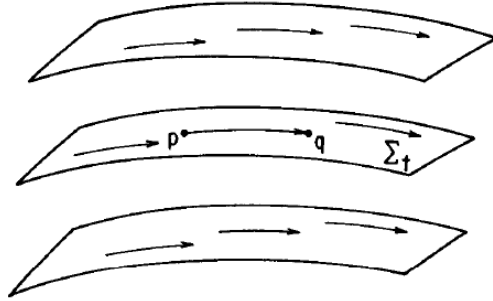


Figura 4: Hipersuperficies de homogeneidad espacial en el espaciotiempo.

Por otro lado, el espaciotiempo es (espacialmente) isótropo en cada punto si existe una congruencia de curvas de tiempo (que comúnmente se identifican con observadores), con vectores tangentes u^a , “llenando” el espaciotiempo (ver Fig.(5)), y que satisfacen la siguiente propiedad: dado un punto cualquiera p y dos vectores espaciales unitarios tangentes $s_1^a, s_2^a \in V_p$ (vectores ortogonales a u^a en p), existe una isometría de g_{ab} que deja fijos a p y a u_a en p , pero rota s_1^a en s_2^a . Entonces, en un Universo isótropo es imposible construir geoméricamente un vector tangente preferente, ortogonal a u^a .

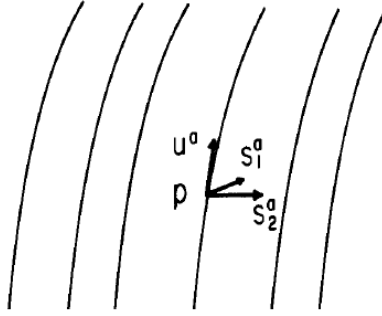


Figura 5: Línea de mundo de observadores isótopos en el espacio-tiempo.

Por tanto, bajo estas hipótesis podemos foliar el espaciotiempo en superficies de Cauchy isomorfas a una variedad Σ de dimensión tres. Asumiremos además que Σ tiene topología isomorfa a la de un tres-toro.

Por conveniencia, separaremos la métrica espaciotemporal g_{ab} en términos de la función lapso, N , el vector desplazamiento, N_i , y la tres-métrica h_{ij} , respecto a la foliación anteriormente mencionada. Además, usaremos los índices latinos i, j, k , etc. que toman valores entre 1 y 3 para denotar aquellos tensores que están definidos en las superficies espaciales. Dado que pretendemos estudiar modelos aproximadamente homogéneos, será conveniente escribir N , N_i y h_{ij} como una suma de dos contribuciones. Una será puramente homogénea mientras que la otra corresponderá con un campo (perturbación) que admitirá una descomposición en armónicos, \tilde{Q} . Estos corresponden a las autofunciones del operador de Laplace-Beltrami asociado a una métrica fiducial sobre la hipersuperficie Σ , que denotaremos por ${}^0h_{ij}$. A dicha métrica fiducial le corresponde una conexión ${}^0\nabla$. En este caso los armónicos satisfacen la ecuación de autovalores

$${}^0h^{ij}{}^0\nabla_i{}^0\nabla_j Q_{n,l} = -\omega_n^2 Q_{n,l}, \quad (74)$$

siendo n un entero positivo que enumera los autovalores, y $l \in \{1, 2, \dots, g_n\}$ indica la degeneración de estos.³ En adelante llamamos simplemente \mathbf{n} al conjunto de etiquetas que determina cada armónico para simplificar la notación.

Los armónicos $Q_{\mathbf{n}}$ permiten expandir cualquier función escalar en superposiciones lineales de ellos. Asimismo, a partir de los armónicos $Q_{\mathbf{n}}$ podemos construir otros armó-

³Debemos recordar que diferentes tipos de armónicos (escalares, vectoriales, tensoriales) pueden tener diferentes etiquetados. En el Anexo II (8.2) proporcionamos explícitamente los armónicos sobre el tres-toro.

nicos más generales como los vectoriales y tensoriales que permiten expandir tensores de rango 1 y 2, respectivamente. Como primer paso, tomamos los armónicos escalares reales, a los cuales les llamamos $\tilde{Q}_{\mathbf{n}}$, y mediante derivación covariante construimos cantidades vectoriales, $\left(\tilde{P}_i\right)_{\mathbf{n}}$. Además, consideraremos otras cantidades vectoriales, transversas, $\left(\tilde{S}_i\right)_{\mathbf{n}_v}$, que son solución de la ecuación (74) y ortogonales a los $\left(\tilde{P}_i\right)_{\mathbf{n}}$. Notemos que estos armónicos llevan etiquetas diferentes a las escalares que hemos denotado por \mathbf{n}_v . Otra vez, derivando covariantemente los armónicos escalares y vectoriales, se obtienen los tensores simétricos $\left(\tilde{P}_{ij}\right)_{\mathbf{n}}$ y $\left(\tilde{S}_{ij}\right)_{\mathbf{n}_v}$, respectivamente. A estos debemos incorporar las soluciones tensoriales de la ecuación (74), $\left(\tilde{G}_{ij}\right)_{\mathbf{n}_t}$, las cuales son cantidades transversas y de traza nula. De nuevo, introducimos una nueva etiqueta \mathbf{n}_t para estos armónicos. Además, los tres tipos de armónicos tensoriales $\left(\tilde{P}_{ij}\right)_{\mathbf{n}}$, $\left(\tilde{S}_{ij}\right)_{\mathbf{n}_v}$ y $\left(\tilde{G}_{ij}\right)_{\mathbf{n}_t}$ son ortogonales entre sí.

Todas estas funciones que hemos construido forman un conjunto ortogonal que permite la expansión en serie de cualquier escalar, vector o tensor simétrico de cuadrado integrable, con respecto a $\sqrt{^0h}d^3x$, en la hipersuperficie Σ , N , N_i , h_{ij} y el campo Φ . Los detalles de este desarrollo se pueden ver en el Anexo II (8.2).

En resumen, vamos a descomponer dichas variables en parte homogénea y parte perturbativa,

$$h_{ij}(t, x) = (\sigma e^{\alpha(t)})^2 \left[{}^0h_{ij}(x) \left(1 + 2\epsilon \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}(t) \tilde{Q}_{\mathbf{n}}(x) \right) + 6\epsilon \sum_{\mathbf{n}} b_{\mathbf{n}}(t) \left(\tilde{P}_{ij}\right)_{\mathbf{n}}(x) \right] \\ + 2\sqrt{3}\epsilon (\sigma e^{\alpha(t)})^2 \left[\sum_{\mathbf{n}_v} c_{\mathbf{n}_v}(t) \left(\tilde{S}_{ij}\right)_{\mathbf{n}_v}(x) + \sqrt{2} \sum_{\mathbf{n}_t} d_{\mathbf{n}_t}(t) \left(\tilde{G}_{ij}\right)_{\mathbf{n}_t}(x) \right], \quad (75)$$

$$N(t, x) = \sigma N_0(t) \left(1 + \epsilon \sum_{\mathbf{n}} g_{\mathbf{n}}(t) \tilde{Q}_{\mathbf{n}}(x) \right), \quad (76)$$

$$N_i(t, x) = \epsilon \sigma^2 e^{\alpha(t)} \left[\sum_{\mathbf{n}} k_{\mathbf{n}}(t) \left(\tilde{P}_i\right)_{\mathbf{n}}(x) + 2\sqrt{3} \sum_{\mathbf{n}_v} l_{\mathbf{n}_v}(t) \left(\tilde{S}_i\right)_{\mathbf{n}_v}(x) \right], \quad (77)$$

$$\Phi(t, x) = \frac{1}{l_0^{3/2}} \left(\varphi(t) + \epsilon \sum_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}(t) \tilde{Q}_{\mathbf{n}}(x) \right), \quad (78)$$

donde hemos introducido un parámetro adimensional ϵ , y además $l_0^3 = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h}$ y $\sigma^2 = \kappa / (6l_0^3)$.

Cuando las inhomogeneidades se anulan, N , N_i , h_{ij} y Φ quedan determinados por las variables α , N_0 y φ , llamadas *variables homogéneas*. En esta situación se recupera el modelo de FRW. Por otro lado, a las variables $a_{\mathbf{n}}$, $b_{\mathbf{n}}$, $c_{\mathbf{n}_v}$, $d_{\mathbf{n}_t}$, $f_{\mathbf{n}}$, $g_{\mathbf{n}}$, $k_{\mathbf{n}}$, $l_{\mathbf{n}_v}$ les llamamos *variables inhomogéneas* o *perturbaciones*.

$a_{\mathbf{n}}$, $b_{\mathbf{n}}$, $f_{\mathbf{n}}$, $g_{\mathbf{n}}$ y $k_{\mathbf{n}}$ son *perturbaciones escalares*, debido a que están asociadas a los armónicos escalares y sus derivadas covariantes. Análogamente, $c_{\mathbf{n}_v}$ y $l_{\mathbf{n}_v}$, son *perturbaciones vectoriales*; y, por último, las variables $d_{\mathbf{n}_t}$ son *perturbaciones tensoriales*.

La acción del sistema se compone de una parte gravitatoria, la acción de Hilbert-Einstein, que se puede escribir como

$$S_{HE} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{h} \left(\frac{1}{2} (h^{ik} h^{jl} + h^{il} h^{jk} - 2h^{ij} h^{kl}) K_{ij} K_{kl} + {}^3R \right). \quad (79)$$

Aquí K_{ab} es la curvatura extrínseca

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(-\frac{dh_{ij}}{dt} + \nabla_i N_j + \nabla_j N_i \right), \quad (80)$$

y 3R el *pullback* del escalar Ricci sobre la hipersuperficie espacial. A esta acción falta añadirle una contribución del campo material, de masa m , que es la integral espaciotemporal de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{mat} = \frac{1}{2} N \sqrt{h} \left[\frac{1}{N^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - 2 \frac{N^a}{N^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x^a} - \left(h^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x^a} \frac{\partial \Phi}{\partial x^b} - m^2 \Phi^2 \right]. \quad (81)$$

Al escribir las variables en función del parámetro ϵ , podemos despreciar los términos de orden mayor a dos en la acción (ya que los términos lineales se anulan al integrarlos en el espacio). Tras un cálculo sencillo pero largo, la acción final es

$$S_T = S_{HS} + S_{mat} = \int_{\mathbb{R}dt} \left[L_0 + \epsilon^2 \left(\sum_{\mathbf{n}} {}^E L_2^{\mathbf{n}} + \sum_{\mathbf{n}_v} {}^V L_2^{\mathbf{n}_v} + \sum_{\mathbf{n}_t} {}^T L_2^{\mathbf{n}_t} \right) \right] + O(\epsilon^3), \quad (82)$$

$$L_0 = \frac{1}{2} N_0 e^{\alpha} (-\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 - e^{2\alpha} \tilde{m}^2 \varphi^2), \quad (83)$$

$$\begin{aligned}
{}^E L_2^n &= \frac{1}{2} N_0 e^\alpha \left\{ -\dot{a}_n^2 + \dot{b}_n^2 + \dot{f}_n^2 - 2\dot{\alpha} (4b_n \dot{b}_n - g_n \dot{a}_n) \right. \\
&+ 2\dot{\varphi} (3a_n - g_n) \dot{f}_n - (\dot{\alpha}^2 - \dot{\varphi}^2) \left(\frac{3}{2} a_n^2 - 6b_n^2 - (3a_n - g_n) g_n \right) \\
&- \frac{2}{3} (\dot{a}_n + \dot{b}_n) k_n + \frac{2}{3} \dot{\alpha} g_n k_n - \frac{2}{N_0} \dot{\varphi} f_n k_n \\
&+ \frac{1}{2} \omega_n^2 a_n^2 + \frac{1}{3} \omega_n^2 b_n^2 - \omega_n^2 f_n^2 \\
&+ \frac{2}{3} \omega_n^2 a_n b_n - e^{2\alpha} \tilde{m}^2 (f_n^2 + 2\varphi (3a_n - g_n) f_n) \\
&- e^{2\alpha} \tilde{m}^2 \varphi^2 \left(\frac{3}{2} a_n^2 - 6b_n^2 + 3a_n g_n \right) \\
&\left. + \frac{2}{3} [\omega_n^2 a_n + \omega_n^2 b_n] g_n \right\}, \tag{84}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^V L_2^{n_v} &= \frac{1}{2} N_0 e^\alpha \omega_n^2 [\dot{c}_{n_v}^2 + 8\dot{\alpha} c_{n_v} \dot{c}_{n_v} + 6(\dot{\alpha}^2 - \dot{\varphi}^2) c_{n_v}^2 \\
&- 2l_{n_v} \dot{c}_{n_v} + 6e^{2\alpha} \tilde{m}^2 \varphi^2 c_{n_v}^2 + \frac{1}{N_0^2} l_{n_v}^2], \tag{85}
\end{aligned}$$

$${}^T L_2^{n_t} = \frac{1}{2} N_0 e^\alpha \left[\dot{d}_{n_t}^2 + 8\dot{\alpha} d_{n_t} \dot{d}_{n_t} + 6(\dot{\alpha}^2 - \dot{\varphi}^2) d_{n_t}^2 - \omega_n^2 d_{n_t}^2 + 6e^{2\alpha} \tilde{m}^2 \varphi^2 d_{n_t}^2 \right]. \tag{86}$$

Aquí el punto sobre las variables indica la derivada respecto a un tiempo correspondiente a un lapso homogéneo arbitrario.

A continuación, realizamos la transformada de Legendre del lagrangiano con respecto a las derivadas temporales de las variables y obtenemos el hamiltoniano del sistema (truncando a segundo orden en las perturbaciones):

$$\begin{aligned}
H &= N_0 \left[H_{|0} + \epsilon^2 \left(\sum_{\mathbf{n}} {}^E H_{|2}^{\mathbf{n}} + \sum_{\mathbf{n}_v} {}^V H_{|2}^{\mathbf{n}_v} + \sum_{\mathbf{n}_t} {}^T H_{|2}^{\mathbf{n}_t} + \sum_{\mathbf{n}} g_n {}^E H_{|1}^{\mathbf{n}} \right) \right] \\
&+ \epsilon^2 \left(\sum_{\mathbf{n}} k_n {}^E H_{-1}^{\mathbf{n}} + \sum_{\mathbf{n}_v} l_n {}^V H_{-1}^{\mathbf{n}_v} \right) + O(\epsilon^3). \tag{87}
\end{aligned}$$

En la ecuación (87) la línea vertical y horizontal en los subíndices de los vínculos indican su relación con el vector desplazamiento y la función lapso, respectivamente.

Los supraíndices E , V y T , indican la naturaleza de la perturbación a la que nos estamos refiriendo, escalar, vectorial o tensorial, respectivamente.

El hamiltoniano anterior es una combinación lineal de vínculos, donde las variables N_0 , $N_0 g_n$, k_n y l_{n_v} actúan como multiplicadores de Lagrange. Por tanto, no son grados de libertad físicos. El primer término consiste en lo que sería el vínculo de un espaciotiempo de FRW, si estuviéramos en ausencia de inhomogeneidades.

Veamos cuales son las expresiones de los vínculos en términos de las variables y de sus momentos canónicamente conjugados (a los cuales llamamos π_q , siendo q la variable correspondiente).

$$H_{|0} = \frac{1}{2} e^{-3\alpha} \left(-\pi_\alpha^2 + \pi_\varphi^2 + e^{6\alpha} \tilde{m}^2 \varphi^2 \right), \quad (88)$$

$$\begin{aligned} {}^E H_{|2}^n &= \frac{1}{2} e^{-3\alpha} \left\{ -\pi_{a_n}^2 + \pi_{b_n}^2 + \pi_{f_n}^2 + 2\pi_\alpha a_n \pi_{a_n} + 8\pi_\alpha b_n \pi_{b_n} - 6\pi_\alpha a_n \pi_{f_n} \right. \\ &\quad \frac{1}{6} \left[3\pi_\alpha^2 + 45\pi_\varphi^2 + 9e^{6\alpha} \tilde{m}^2 \varphi^2 - 2\omega_n^2 e^{4\alpha} \right] a_n^2 \\ &\quad \left. + \left[30\pi_\alpha^2 + 18e^{6\alpha} \tilde{m}^2 \varphi^2 - \omega_n^2 e^{4\alpha} \right] b_n^2 \right. \\ &\quad \left. + e^{4\alpha} \left(\omega_n^2 + e^{2\alpha} \tilde{m}^2 \right) f_n^2 - \frac{2}{3} \omega_n^2 e^{4\alpha} a_n b_n + 6e^{6\alpha} \tilde{m}^2 \varphi a_n f_n \right\}, \quad (89) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^V H_{|2}^{n_v} &= \frac{1}{2} e^{-3\alpha} \left[\frac{1}{\omega_n^2} \pi_{c_{n_v}}^2 + 8\pi_\alpha c_{n_v} \pi_{c_{n_v}} + 2\omega_n^2 (5\pi_\alpha^2 + 3\pi_\varphi^2) c_{n_v}^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\omega_n^2 (-3e^{6\alpha} \tilde{m}^2 \varphi^2) c_{n_v}^2 \right], \quad (90) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^T H_{|2}^{n_t} &= \frac{1}{2} e^{-3\alpha} \left[\pi_{d_{n_t}}^2 + 8\pi_\alpha d_{n_t} \pi_{d_{n_t}} + 2(5\pi_\alpha^2 + 3\pi_\varphi^2 - 3e^{6\alpha} \tilde{m}^2 \varphi^2) d_{n_t}^2 \right. \\ &\quad \left. + \omega_n^2 e^{4\alpha} d_{n_t}^2 \right], \quad (91) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^E H_{|1}^n &= \frac{1}{2} e^{-3\alpha} \left\{ -2\pi_\alpha \pi_{a_n} + 2\pi_\varphi \pi_{f_n} - (\pi_\alpha^2 + 3\pi_\varphi^2 - 3e^{6\alpha} \tilde{m}^2 \varphi^2) a_n^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} e^{4\alpha} [\omega_n^2 a_n + \omega_n^2 b_n] + 2e^{6\alpha} \tilde{m}^2 \varphi^2 f_n \right\}, \quad (92) \end{aligned}$$

$${}^E H_{-1}^n = \frac{1}{3} e^{-\alpha} [-\pi_{a_n} + \pi_{b_n} + 3\pi_\varphi f_n + \pi_\alpha (a_n + 4b_n)], \quad (93)$$

$${}^V H_{-1}^{n_v} = e^{-\alpha} [\pi_{c_{n_v}} + 4\omega_n^2 \pi_\alpha c_{n_v}]. \quad (94)$$

Aquí, $\tilde{m} = \sigma m$.

En el caso perturbado, el modo cero del vínculo hamiltoniano tiene contribuciones

de las inhomogeneidades (cuadráticas en las perturbaciones) las cuales incluimos en la suma de los términos de $H|_2^n$. Por otro lado, ${}^E H|_1^n$ y ${}^E H|_{-1}^n$ son vínculos lineales en las perturbaciones. Los que están asociados a la función lapso (raya horizontal) generan difeomorfismos infinitesimales temporales, y los asociados al vector desplazamiento (raya vertical) generan difeomorfismos infinitesimales espaciales.

Finalmente, para el orden de desarrollo que adoptamos en la acción, el sistema perturbado es simpléctico, con variables canónicas dadas por los modos de orden cero, α y φ , los coeficientes de Fourier $\{X_{q_l}^n\} \equiv \{a_n, b_n, c_{n_v}, d_{n_t}, f_n\}$ (con $l = 1, \dots, 5$), y sus momentos correspondientes $\{X_{p_l}^n\} \equiv \{\pi_{a_n}, \pi_{b_n}, \pi_{c_{n_v}}, \pi_{d_{n_t}}, \pi_{f_n}\}$.

3.2. Ondas tensoriales

La forma natural de proceder en teoría de perturbaciones cosmológicas consiste en identificar aquellas perturbaciones que son invariantes de gauge con respecto a aquellas transformaciones de coordenadas que son del mismo orden que las perturbaciones. En el lenguaje del formalismo canónico esto quiere decir que estas funciones del espacio de fases deben conmutar con los vínculos que generan estas transformaciones. Una vez realizada la identificación, podemos describir el sistema perturbativo en términos de variables invariantes gauge (sin fijación previa de la libertad) y aquellas funciones del espacio de fases que podemos identificar con grados de libertad gauge (no dinámicos), de modo de trabajar solamente con variables físicas.

Afortunadamente, las perturbaciones tensoriales son invariantes de gauge, por lo que el primer paso que mencionamos se satisface automáticamente. No es el caso de las perturbaciones escalares ni de las vectoriales. Sin embargo, no es difícil darse cuenta de que i) las perturbaciones vectoriales a este orden perturbativo no se propagan (no son grados de libertad físicos), y ii) las perturbaciones escalares se pueden dividir en un grado de libertad físico y dos variables no dinámicas. Además, el hecho de que los distintos tipos de perturbaciones (escalar, vectorial y tensorial) no están acopladas en este tipo de espaciotiempos homogéneos e isótropos (y a este orden perturbativo), nos permite estudiar cada una por separado.

Por ejemplo, las perturbaciones escalares ya fueron estudiadas en la Ref. [59]. Aunque no vamos a reproducir el estudio en esta tesis, puesto que nos vamos a concentrar en perturbaciones tensoriales, merece la pena explicar en unas líneas la estrategia seguida allí. Concretamente, los autores introducen una transformación canónica (o simplec-

tomorfismo⁴) que describe las perturbaciones en términos de perturbaciones conocidas como variables de Mukhanov-Sasaki (ver subsección (3.2.1)), dos combinaciones de vínculos perturbativos lineales y sus pares conjugados apropiados. Esta transformación respeta la estructura canónica del conjunto de variables utilizadas para describir las perturbaciones. Eligen una combinación de los vínculos perturbativos lineales que conmutan. Las variables de Mukhanov-Sasaki son invariantes gauge y, por lo tanto, conmutan con los vínculos perturbativos. Después completan la transformación canónica considerando no sólo las inhomogeneidades sino también el sector homogéneo del espacio de fases, parametrizado por las variables canónicas de modo cero $\{\alpha, \pi_\alpha, \varphi, \pi_\varphi\}$.

Siguiendo con el propósito de esta tesis, volvamos al caso de las perturbaciones tensoriales d_{n_i} . Para simplificar la notación, de ahora en adelante las denotaremos simplemente por $d_{\mathbf{n}}$. Aquí no es necesario llevar a cabo una transformación canónica en el sistema para separar los grados de libertad físicos de los puramente gauge, puesto que ya son invariantes de gauge. Sin embargo, si conviene introducir una redefinición de las mismas, por medio de un simplectomorfismo completo en el sistema, que permitirá simplificar la dinámica de estas perturbaciones, ya que su ecuación de movimiento de cada modo será como la de un oscilador armónico sometido a un potencial dependiente del tiempo.

De ahora en adelante ignoraremos las perturbaciones escalares y vectoriales en nuestro análisis (recordemos que esto es factible ya que están desacopladas entre sí), y nos centraremos en las perturbación tensoriales.

3.2.1. Transformación canónica para las perturbaciones tensoriales

Recordemos que la acción del sistema, incluyendo sólo los modos tensoriales, tiene la forma.

$$S = \int dt \left\{ \dot{\alpha}\pi_\alpha + \dot{\varphi}\pi_\varphi + \sum_{\mathbf{n}} \dot{d}_{\mathbf{n}}\pi_{d_{\mathbf{n}}} - N_0 \left(H_0 + \sum_{\mathbf{n}} {}^T H_{|2}^{\mathbf{n}} \right) \right\}. \quad (95)$$

Vamos a redefinir las perturbaciones tensoriales $d_{\mathbf{n}}$ introduciendo un reescalado

$$\tilde{d}_{\mathbf{n}} = e^\alpha d_{\mathbf{n}} \Rightarrow d_{\mathbf{n}} = e^{-\alpha} \tilde{d}_{\mathbf{n}}, \quad (96)$$

⁴Un simplectomorfismo es un difeomorfismo definido sobre una variedad simpléctica, que preserva la forma simpléctica, es decir, tal que el pullback de la forma simpléctica coincide con la propia forma simpléctica.

donde \tilde{d}_n es la nueva perturbación reescalada. En tanto, su momento canónicamente conjugado es

$$\pi_{\tilde{d}_n} = e^{-\alpha} (\pi_{d_n} + 3\pi_\alpha d_n) \Rightarrow \pi_{d_n} = e^\alpha \pi_{\tilde{d}_n} - 3\pi_\alpha e^{-\alpha} \tilde{d}_n. \quad (97)$$

Si sustituimos el cambio anterior en la acción (95) y manipulamos convenientemente, esta última toma la forma

$$S = \int dt \left\{ \frac{d}{dt} \left[\alpha - \frac{3}{2} e^{-2\alpha} \sum_n \tilde{d}_n^2 \right] \left(\pi_\alpha - \sum_n \tilde{d}_n \pi_{\tilde{d}_n} \right) + \dot{\varphi} \pi_\varphi + \right. \\ \left. + \sum_n \dot{\tilde{d}}_n \pi_{\tilde{d}_n} - N_0 \left(H_0 + \sum_n {}^T H_{|2}^n \right) \right\} \quad (98)$$

Para mantener la estructura de (95), es claro que debemos hacer la siguiente redefinición de la variable α y su momento canónico, π_α :

$$\tilde{\alpha} = \alpha - \frac{3}{2} e^{-2\alpha} \sum_n \tilde{d}_n^2 \Rightarrow \alpha = \tilde{\alpha} + \frac{3}{2} e^{-2\tilde{\alpha}} \sum_n \tilde{d}_n^2, \quad (99)$$

$$\pi_{\tilde{\alpha}} = \pi_\alpha - \sum_n \tilde{d}_n \pi_{\tilde{d}_n} \Rightarrow \pi_\alpha = \pi_{\tilde{\alpha}} + \sum_n \tilde{d}_n \pi_{\tilde{d}_n}, \quad (100)$$

donde hemos despreciado ordenes superiores a los cuadráticos en las perturbaciones. A su vez, el campo escalar φ y su momento conjugado deben mantenerse tal cual. Calculamos H_0 y ${}^T H_{|2}^n$ en términos de las variables invariantes de gauge. Obsérvese que para ${}^T H_{|2}^n$ alcanza con hacer $\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}$ pues que los términos ya son todos de orden 2, y estamos truncando justamente en ese orden. Trabajar con el segundo término implicaría descartarlo al final por ser de orden 4. Entonces, El hamiltoniano total es

$$H = H_0 + \sum_n {}^T H_{|2}^n = \frac{1}{2} (\pi_\varphi^2 - \pi_{\tilde{\alpha}}^2) e^{-3\tilde{\alpha}} + \frac{1}{2} \tilde{m}^2 \varphi^2 e^{3\tilde{\alpha}} \\ + \sum_n \left[\frac{1}{2} e^{-\tilde{\alpha}} \pi_{\tilde{d}_n}^2 + \left(-\frac{1}{4} \pi_{\tilde{\alpha}}^2 e^{-5\tilde{\alpha}} + \frac{3}{4} \pi_\varphi^2 e^{-5\tilde{\alpha}} - \frac{3}{4} \tilde{m}^2 \varphi^2 e^{\tilde{\alpha}} + \frac{\omega_n^2}{2} e^{-\tilde{\alpha}} \right) \tilde{d}_n^2 \right] \quad (101)$$

Vamos a absorber los términos no homogéneos en un nuevo hamiltoniano de segundo orden llamado ${}^T\tilde{H}_{|2}^n$, lo que dejará definido el término homogéneo, al que llamaremos \tilde{H}_0 , es decir

$$\tilde{H}_0 = \frac{1}{2} (\pi_\varphi^2 - \pi_{\tilde{\alpha}}^2) e^{-3\tilde{\alpha}} + \frac{1}{2} \tilde{m}^2 \varphi^2 e^{3\tilde{\alpha}}, \quad (102)$$

$${}^T\tilde{H}_{|2}^n = \frac{1}{2} e^{-\tilde{\alpha}} \pi_{\tilde{d}_n}^2 + \left(-\frac{1}{4} \pi_{\tilde{\alpha}}^2 e^{-5\tilde{\alpha}} + \frac{3}{4} \pi_\varphi^2 e^{-5\tilde{\alpha}} - \frac{3}{4} \tilde{m}^2 \varphi^2 e^{\tilde{\alpha}} + \frac{\omega_n^2}{2} e^{-\tilde{\alpha}} \right) \tilde{d}_n^2. \quad (103)$$

Por otro lado, contamos con la identidad

$$\pi_\varphi^2 = 2H_0 e^{3\tilde{\alpha}} + \pi_{\tilde{\alpha}}^2 - \tilde{m}^2 \varphi^2 e^{6\tilde{\alpha}}, \quad (104)$$

de la cual podemos hacer uso sustituyendo en ${}^T\tilde{H}_{|2}^n$, para concluir con una nueva redefinición del orden cero y de la función lapso, tal que

$${}^T\bar{H}_{|2}^n = \frac{1}{2} e^{-\tilde{\alpha}} \pi_{\tilde{d}_n}^2 + \left(\frac{1}{2} \pi_{\tilde{\alpha}}^2 e^{-5\tilde{\alpha}} - \frac{3}{2} \tilde{m}^2 \varphi^2 e^{\tilde{\alpha}} + \frac{\omega_n^2}{2} e^{-\tilde{\alpha}} \right) \tilde{d}_n^2 \quad (105)$$

$${}^T\tilde{H}_{|2}^n = {}^T\bar{H}_{|2}^n + \frac{3}{2} e^{-2\tilde{\alpha}} H_0 \tilde{d}_n^2 \quad (106)$$

$$H = \bar{N}_0 \left(H_0 + \sum_n {}^T\bar{H}_{|2}^n \right). \quad (107)$$

Finalmente,

$$\bar{N}_0 = \left(1 + \frac{3}{2} e^{-2\tilde{\alpha}} \sum_n \tilde{d}_n^2 \right) N_0. \quad (108)$$

Esta última redefinición introducida en el sistema nos permitirá simplificar considerablemente los cálculos al permitirnos interpretar el modo cero del vínculo escalar (bajo ciertas aproximaciones) como el hamiltoniano de las perturbaciones que satisfacen una ecuación de Schrödinger con el campo escalar φ haciendo el papel de reloj físico del sistema. Además, podremos deducir fácilmente las ecuaciones de movimiento efectivas de las perturbaciones tensoriales, al menos para una familia de estados cuánticos.

Es sencillo calcular las ecuaciones de movimiento para las perturbaciones tensoriales tomando los corchetes de Poisson con el vínculo hamiltoniano. Entonces, teniendo en cuenta que $\dot{\tilde{d}}_n = \bar{N}_0 \{ \tilde{d}_n, {}^T\bar{H}_{|2}^n \}$ y que $\dot{\pi}_{\tilde{d}_n} = \bar{N}_0 \{ \pi_{\tilde{d}_n}, {}^T\bar{H}_{|2}^n \}$ y combinándolas, llegamos

a la ecuación

$$\tilde{d}_{\mathbf{n}}'' + (\pi_{\tilde{\alpha}}^2 e^{-4\tilde{\alpha}} - 3\tilde{m}^2 \varphi^2 e^{2\tilde{\alpha}} + \omega_n^2) \tilde{d}_{\mathbf{n}} = O(\epsilon), \quad (109)$$

donde las primas denotan derivación con respecto al tiempo conforme definido como $e^{\tilde{\alpha}} d\eta = \bar{N}_0 dt$. Esta expresión puede interpretarse como una ecuación de Klein-Gordon con una masa que depende del tiempo a través de las variables homogéneas. Esto justifica en el nivel clásico el escalado del campo por el factor de escala de la geometría de fondo.

3.3. Discusión

En la sección próxima veremos que esta elección es en realidad necesaria si uno pretende adoptar una cuantización de Fock para las ondas tensoriales compatible con ciertos criterios de unicidad.

El escalado de las perturbaciones que hemos realizado es determinante para conservar la unitariedad de la dinámica cuántica del campo sobre el fondo clásico. Las propiedades mencionadas se dan también en cuantizaciones en términos de los invariantes de gauge asociados a las perturbaciones escalares, ya que sus ecuaciones dinámicas son de tipo Klein-Gordon, con un término de masa representado por una función de las variables homogéneas.

Dado que los modos tensoriales son invariantes de gauge, en nuestro trabajo basta considerar una transformación local no trivial para obtener una parametrización única (salvo aquellas unitariamente equivalentes que no introducen ambigüedades) y una dinámica unitaria.

4. Cuantización de Fock de perturbaciones cosmológicas sobre un fondo clásico

Antes de estudiar la cuantización híbrida, que es el objetivo de esta tesis, haremos una descripción de la cuantización de Fock de las perturbaciones sobre un escenario inflacionario. Esto nos servirá para motivar más aún nuestro trabajo desde un punto de vista tanto fundamental como físico.

En una primera instancia haremos un repaso sobre las consecuencias físicas de esta cuantización en el entendimiento de las propiedades del Universo primitivo. Como ejemplo, haremos un estudio sobre los campos en un espaciotiempo de de Sitter, mencionaremos cual es la mejor elección del estado de vacío y, finalmente, calcularemos el espectro de potencia de los modos tensoriales. Sin embargo, este modelo no sirve para explicar en buena aproximación la evolución completa del Universo primitivo y es por ello que consideramos en esta tesis espaciotiempos más generales. Pero además, será necesario adoptar criterios físicos que nos permitan fijar las posibles representaciones para las perturbaciones.

En este sentido adoptaremos una serie de criterios que nos permitirán seleccionar una familia de representaciones compatibles con las simetrías espaciales y una dinámica unitaria en el nivel cuántico, eliminando toda ambigüedad posible en la elección de cuantizaciones que den predicciones físicamente inequivalentes.

Finalmente, volveremos a discutir la importancia de las transformaciones canónicas presentadas en la sección 3. Apelando a los criterios mencionados arriba, podemos fijar también las variables de campo relacionadas con las perturbaciones, restringiendo más todavía la libertad en la teoría de campos.

4.1. Cuantización de campos lineales en un espaciotiempo de de Sitter.

Para tener una idea cualitativa de las consecuencias de un proceso inflacionario, consideraremos por simplicidad un campo de prueba sobre un espaciotiempo en una fase pura de de Sitter. La forma tradicional de cuantizar este campo es a través de la siguiente descomposición,

$$\hat{v}(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[v_k(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + v_k^*(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \right], \quad (110)$$

donde los operadores de aniquilación y creación satisfacen las relaciones de conmutación $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. Además η es el tiempo conforme, \mathbf{x} las coordenadas espaciales, \mathbf{k} el número de onda de cada modo y $k = \|\mathbf{k}\|$ su módulo⁵. La función de modos, $v_k(\eta)$, es solución de la ecuación clásica de Klein-Gordon,

$$v_k'' + \omega_v^2(k, \eta) v_k = 0 \text{ con } \omega_v^2(k, \eta) = k^2 - \frac{2}{\eta^2}, \quad (111)$$

que es la ecuación de movimiento para un oscilador armónico con masa dependiente del tiempo, lo que significa que el campo vive en un espaciotiempo también dependiente del tiempo. Además, debido a la homogeneidad e isotropía, solo dependen de k (no de su dirección). La solución general de la ecuación (111) es

$$v_k(\eta) = [A(k) H_\nu^{(1)}(-k\eta) + B(k) H_\nu^{(2)}(-k\eta)] \sqrt{-\eta}, \quad (112)$$

donde H_ν es la función de Hankel. En particular, en el caso considerado de de Sitter, $\nu = 3/2$ entonces

$$H_{3/2}^{(2)}(z) = [H_{3/2}^{(1)}(z)]^* = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-iz} \left(1 + \frac{1}{iz}\right). \quad (113)$$

La cuantización canónica consiste en imponer las reglas de conmutación $[\hat{v}(\mathbf{x}, \eta), \hat{v}(\mathbf{x}', \eta)] = [\hat{\pi}(\mathbf{x}, \eta), \hat{\pi}(\mathbf{x}', \eta)] = 0$ y $[\hat{v}(\mathbf{x}, \eta), \hat{\pi}(\mathbf{x}', \eta)] = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ sobre las hipersuperficies de tiempo constante, siendo $\hat{\pi}$ el momento canónicamente conjugado de \hat{v} . De (110) y las relaciones de conmutación de los operadores de aniquilación y creación, tenemos

$$v_k v_k'^* - v_k^* v_k' = i, \quad (114)$$

lo que determina la normalización del Wronskiano⁶. La elección de una función específica $v_k(\eta)$ corresponde a la elección de una prescripción para el vacío físico, definido por

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0. \quad (115)$$

⁵En este modelo asumimos que la topología espacial no es compacta. En caso contrario, y desde un punto de vista práctico, uno siempre puede aproximar muy bien este límite considerando que las escalas típicas de las secciones espaciales son mucho mayores que cualquier otra escala típica del sistema.

⁶El Wronskiano es el determinante de la matriz construida al colocar las funciones en el primer renglón (o fila), la primera derivada de cada función en el segundo renglón, y así hasta la derivada $n - 1$, formando así una matriz cuadrada, a veces llamada matriz fundamental.

La elección más natural para el vacío es escoger la solución que corresponda al vacío usual de Minkowski

$$v_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, \quad (116)$$

cuando $k\eta \rightarrow -\infty$. Esto implica que la función de modos que debemos escoger es

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(1 + \frac{1}{ik\eta} \right) e^{-ik\eta}. \quad (117)$$

Esta elección es referida como el vacío de Bunch-Davies, que es el vacío máximamente simétrico con respecto al espaciotiempo de de Sitter. La razón de tomar el vacío que más se parece al de Minkowski es porque aquellos modos que se encuentran a escalas por debajo del horizonte de Hubble (escalas sub-Hubble) en el pasado se propagan como modos Minkowskianos (localmente).

Una vez fijadas las condiciones iniciales en el pasado, v_k queda completamente determinada. Luego de que los modos se vuelven super-Hubble, es decir, $k\eta \ll 1$, la perturbación del campo de prueba está dada por

$$\hat{v} \rightarrow \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{H}{\sqrt{2k^3 a(\eta)}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (118)$$

donde $a(\eta) = e^{\alpha(\eta)}$ para una fase inflacionaria de de Sitter, y H es una constante en este caso. Todos los modos son proporcionales a $\left(\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right)$, por lo cual las variables $\hat{v}_{\mathbf{k}}$ conmutan. Deducimos que \hat{v} tiene las mismas propiedades estadísticas que un campo clásico, estocástico, gaussiano. Podemos interpretar nuestros operadores cuánticos como si fueran campos estocásticos con estadísticas gaussianas e introducir así una variable aleatoria gaussiana, de norma uno, $e_v(\mathbf{k})$, que satisface

$$\langle e_v(\mathbf{k}) \rangle = 0, \quad \langle e_v(\mathbf{k}) e_v^*(\mathbf{k}') \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (119)$$

En esta descripción, los operadores son reemplazados por variables estocásticas, tal que $\hat{v}_{\mathbf{k}} \rightarrow v_{\mathbf{k}} = v_k(\eta) e_v(\mathbf{k})$ e identificamos el promedio cuántico en el vacío, es decir, $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$ por un ensemble clásico, $\langle \dots \rangle$.

La función de correlación de v , que es un observable comúnmente empleado en cosmología, se define como

$$\xi_v \equiv \langle 0 | \hat{v}(\mathbf{x}, \eta) \hat{v}(\mathbf{x}', \eta) | 0 \rangle, \quad (120)$$

y toma la forma

$$\xi_v = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |v_k|^2 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}. \quad (121)$$

Interesantemente, en un Universo de Friedmann, la isotropía implica que podemos integrar en el ángulo, obteniendo

$$\xi_v = \int \frac{dk}{k} \frac{k^3}{2\pi^2} |v_k|^2 \frac{\sin kr}{kr}, \quad (122)$$

y esto es, debido a la simetría del fondo, una función de $r = |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ solamente. Entonces, definimos el espectro de potencia como

$$P_v(k) = |v_k|^2, \quad \mathcal{P}_v(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |v_k|^2. \quad (123)$$

En la representación estocástica, la función de correlación de $v_{\mathbf{k}}$ está dada simplemente por

$$\langle v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'}^* \rangle = P_v(k) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (124)$$

En teoría de perturbaciones cosmológicas se pueden aplicar argumentos similares, con la salvedad de que las soluciones $v_k(\eta)$ ya no coincidirán exactamente con las del vacío de Bunch-Davies, y uno debe dar una prescripción para elegir los datos iniciales para ellas. No obstante, si identificamos nuestro campo de prueba $\hat{v}(\mathbf{x}, \eta)$ con la perturbación escalar de Mukhanov-Sasaki [2–6] en un escenario inflacionario conducido por un campo escalar con masa ϕ , se puede deducir fácilmente el espectro de potencia de la perturbación de la curvatura $\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \eta)$

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{|v_k|^2}{z^2}, \quad (125)$$

ya que $\hat{v}(\mathbf{x}, \eta) = z\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \eta)$ con $z = a^2\phi'/a'$, donde $(')$ significa derivada con respecto a η .

De hecho, podemos proceder de igual forma para las ondas gravitacionales. Ya que no están acopladas a los modos escalares además de que las dos polarizaciones son independientes, introducimos dos conjuntos de operadores de aniquilación y creación, $\hat{b}_{\mathbf{k},\lambda}$, uno para cada polarización $\lambda = +, \times$. Para escalas super-Hubble, ambos modos pueden ser descritos por dos campos clásicos gaussianos estocásticos e independientes,

$$\tilde{d}_{\mathbf{k},\lambda} = \tilde{d}_{\mathbf{k}} e_{\lambda}(\mathbf{k}) \text{ con} \quad \langle e_{\lambda}(\mathbf{k}) e_{\lambda'}^*(\mathbf{k}') \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (126)$$

Entonces, el espectro de potencia está dado por

$$P_{\lambda}(k) = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\lambda}(k) = \left| \tilde{d}_k \right|^2. \quad (127)$$

La isotropía espacial implica que $P_{+} = P_{\times}$, por lo tanto, el espectro de potencia de los modos tensoriales es

$$P_T(k) = 2 \frac{\kappa}{a^2} P_{+}(k). \quad (128)$$

4.2. Criterios de unicidad para la cuantización de Fock

Como hemos visto, en un espaciotiempo de de Sitter existe un vacío privilegiado. Desafortunadamente, en modelos cosmológicos en general no existe un criterio que permita optar por una elección privilegiada. Para el caso de espaciotiempos con secciones espaciales compactas, uno puede quedarse con una familia de estados que proporcionan una familia de representaciones unitariamente equivalentes: los estados Hadamard [16]. Pero este tipo de criterios están sujetos estructuras de fondo y además no está claro que proporcionen un criterio de unicidad de la cuantización.

Afortunadamente, en los últimos años se han venido desarrollando criterios de unicidad [64–74] que permiten seleccionar una familia de representaciones unitariamente equivalentes si estas son invariantes bajo las simetrías espaciales y admiten una implementación unitaria de la dinámica. Además, estas condiciones son solo compatibles con una parametrización concreta de los campos a cuantizar (salvo transformaciones unitarias). A continuación vamos a explicar cómo estos criterios nos sirven para seleccionar una representación de Fock para nuestras perturbaciones tensoriales. Supondremos que las perturbaciones se propagan por un espaciotiempo homogéneo de fondo que está descrito por variables homogéneas que son únicamente funciones del tiempo. Esto significa que solamente se considerarán las fluctuaciones cuánticas de los grados de libertad locales, pero no las que afectan las variables homogéneas. Este enfoque semiclásico proporciona una buena aproximación al comportamiento del sistema mientras que las correcciones cuánticas que afectan el fondo, así como la reacción de las inhomogeneidades sobre él (*backreaction*), son despreciables.

Lo primero que debemos hacer es considerar el espacio de fases de la teoría, que en adelante denotaremos por Λ , e introduciremos en él una estructura compleja, J , que sea

compatible con la forma simpléctica, Ω . Una estructura compleja J es una aplicación lineal cuyo cuadrado coincide con menos la identidad. El ser compatible con la estructura simpléctica, Ω , significa que debe ser un simplectomorfismo y que la composición $\Omega(J\bullet, \bullet)$, para una entrada arbitraria, debe ser una forma lineal definida positiva. Así, $[\Omega(J\bullet, \bullet) - i\Omega(J\bullet, \bullet)]/2$ define un producto interno en el espacio de fases complejo $\Lambda_{\mathbb{C}}$, mediante el cuál se puede dotar a este espacio complejo con una estructura de espacio de Hilbert, empezando por el de una partícula \mathcal{H}_{part} . Ahora podemos construir el espacio de Fock simétrico, donde se representa el álgebra de observables:

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_S^n \mathcal{H}_{part}, \quad (129)$$

con \otimes_S el producto tensorial simetrizado, ya que estamos considerando el caso bosónico. J descompone $\Lambda_{\mathbb{C}}$ en dos autoespacios ortogonales con autovalores $\pm i$, lo que generaliza el concepto de frecuencias positivas y negativas en espaciotiempos estacionarios.

Ahora es necesario introducir los criterios anteriormente mencionados (simetrías espaciales y unitariedad de la dinámica) para seleccionar una estructura compleja, y así resolver la ambigüedad en la elección de la representación de Fock. Esto no sólo fija la representación de Fock, sino también una parametrización privilegiada del campo. Si se escala el campo con una función del tiempo, alterando su dinámica, resulta imposible encontrar una representación de Fock con vacío invariante bajo las simetrías espaciales en la que la nueva dinámica sea unitariamente implementable [71]. Además, la elección de su momento canónico también queda determinada. Los resultados anteriores pueden también aplicarse a teorías de campo en espaciotiempos no ultraestáticos cuya formulación pueda reducirse a una forma equivalente. Ejemplos de este tipo son el modelo de Gowdy [64] y las perturbaciones tensoriales sobre un Universo FRW.

4.2.1. Cuantización de Fock de las perturbaciones tensoriales

Como vimos en el capítulo anterior, si tratamos el fondo homogéneo del modelo perturbado de forma clásica, las variables escaladas \tilde{d}_n satisfacen las ecuaciones de los modos de un campo de Klein-Gordon (109), donde la cantidad que juega el papel de la masa al cuadrado es una función que depende del tiempo a través de las variables homogéneas. Además, como elegimos los momentos $\pi_{\tilde{d}_n}$ tal que coinciden con las derivadas temporales de sus variables canónicamente conjugadas, podemos aplicar directamente los resultados de unicidad de las Refs. [67–71] a las perturbaciones tensoriales. Entonces existe una clase de representaciones de Fock unitariamente equivalentes para los modos

escalados $\tilde{d}_{\mathbf{n}}$ que poseen un vacío invariante bajo isometrías espaciales del espaciotiempo de fondo, y además permiten una implementación unitaria de la dinámica del campo. Nótese que cualquier otro escalado global⁷ del campo que dependiera del tiempo habría impedido construir una representación con esas dos características.

Una de las representaciones privilegiadas equivalentes es la caracterizada por una estructura compleja J_0 que actúa diagonalmente en la base formada por las variables de aniquilación

$$a_{\tilde{d}_{\mathbf{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{n}}}} \left(\omega_{\mathbf{n}} \tilde{d}_{\mathbf{n}} + i\pi_{\tilde{d}_{\mathbf{n}}} \right), \quad (130)$$

y las correspondientes variables de creación conjugadas. Estas variables serían las naturales si los modos $\tilde{d}_{\mathbf{n}}$ pertenecieran a un campo sin masa. La acción de la estructura compleja J_0 sobre las variables de creación y aniquilación es

$$J_0 \begin{pmatrix} a_{\tilde{d}_{\mathbf{n}}} \\ a_{\tilde{d}_{\mathbf{n}}}^* \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} +i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\tilde{d}_{\mathbf{n}}} \\ a_{\tilde{d}_{\mathbf{n}}}^* \end{pmatrix}. \quad (131)$$

La estructura compleja de la representación del caso sin masa y, en consecuencia, el vacío asociado, son invariantes bajo el grupo de isometrías, \mathcal{G} , de la variedad Σ . Estas transformaciones conmutan con el operador de Laplace-Beltrami, por tanto, no mezclan distintos autoespacios del mismo. Una vez fijado el autovalor $\omega_{\mathbf{n}}$, sustituiremos las etiquetas \mathbf{n} por una etiqueta n para cada autovalor y otra $l = 1, \dots, g_n$ que codifica la degeneración g_n de cada autoespacio. En cada uno de estos subespacios del espacio de fases $\{\tilde{d}_{nl} : n \text{ fijo}\}$ y $\{\pi_{\tilde{d}_{nl}} : n \text{ fijo}\}$ se transforman con la misma representación del grupo de isometrías, y los autoespacios de la estructura compleja son invariantes. Además, esta representación permite implementar la dinámica clásica con un operador unitario en el correspondiente espacio de Fock [71].

4.2.2. Dinámica

Ya que la representación natural en el caso sin masa es invariante bajo las isometrías de fondo. Podemos comprobar que admite una dinámica unitaria, así que definimos las variables de aniquilación y creación de la siguiente manera,

⁷El escalado es el mismo para todos los modos.

$$\begin{pmatrix} a_{\tilde{d}_{nl}} \\ a_{\tilde{d}_{nl}}^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \begin{pmatrix} \omega_n & +i \\ \omega_n & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}_{nl} \\ \pi \tilde{d}_{nl} \end{pmatrix}. \quad (132)$$

Clásicamente, su evolución entre un tiempo inicial η_0 y uno final η está dada por el simplectomorfismo $U(\eta, \eta_0)$, que actúa de forma independiente sobre cada modo,

$$\begin{pmatrix} a_{\tilde{d}_{nl}}(\eta) \\ a_{\tilde{d}_{nl}}^*(\eta) \end{pmatrix} = u_n(\eta, \eta_0) \begin{pmatrix} a_{\tilde{d}_{nl}}(\eta_0) \\ a_{\tilde{d}_{nl}}^*(\eta_0) \end{pmatrix}. \quad (133)$$

Donde u_n es una matriz 2×2 que depende del modo únicamente a través del autovalor asociado, como se puede ver por medio de las ecuaciones dinámicas. Como representa una transformación real, puede escribirse en la forma genérica

$$u_n(\eta, \eta_0) = \begin{pmatrix} \alpha_n(\eta, \eta_0) & \beta_n(\eta, \eta_0) \\ \beta_n^*(\eta, \eta_0) & \alpha_n^*(\eta, \eta_0) \end{pmatrix}. \quad (134)$$

Para que conserve los corchetes de Poisson, se debe satisfacer la relación $|\alpha_n|^2 - |\beta_n|^2 = 1$.

Para pasar a la teoría cuántica, escribimos las variables de creación y aniquilación como operadores. Por tanto, la ecuación (133) pasa a tener la forma

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{\tilde{d}_{nl}}(\eta) \\ \hat{a}_{\tilde{d}_{nl}}^*(\eta) \end{pmatrix} = u_n(\eta, \eta_0) \begin{pmatrix} \hat{a}_{\tilde{d}_{nl}}(\eta_0) \\ \hat{a}_{\tilde{d}_{nl}}^*(\eta_0) \end{pmatrix}. \quad (135)$$

Para que esta transformación sea unitariamente implementable, debe existir un operador unitario \hat{U}_n tal que

$$\hat{a}_{\tilde{d}_{nl}}(\eta) = \hat{U}_n(\eta, \eta_0) \hat{a}_{\tilde{d}_{nl}}(\eta_0) \hat{U}_n^\dagger(\eta, \eta_0) \quad (136)$$

La condición necesaria y suficiente para que esta relación sea válida es que la diferencia $J_0 - U(\eta, \eta_0) J_0 U^{-1}(\eta, \eta_0)$ sea un operador de Hilbert-Schmidt⁸. Esto equivale a pedir que la serie $\sum_{nl} |\beta_n|^2 = \sum_n g_n |\beta_n|^2$ converja, lo que depende de la relación entre el comportamiento asintótico de los coeficientes β_n y el de la degeneración de los autovalores correspondientes, g_n , en el límite $n \rightarrow \infty$. Es sabido que en cualquier variedad riemanniana d -dimensional compacta el número de modos con $\omega_n \leq \omega$, que podemos escribir como $\sum_{\omega_n \leq \omega} g_n$, crece asintóticamente a lo sumo como ω^d [19]. Por lo tanto, en nuestro caso, dicho número no crece más rápido que ω^3 , de lo que puede deducirse que

⁸Un operador O es de Hilbert-Schmidt si la traza $\text{tr}(O^\dagger O)$ es finita.

g_n es, como mucho, del orden de ω_n^2 .

Ahora queremos ver el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon para las perturbaciones

$$\tilde{d}_{nl}'' + (\omega_n^2 + s(\eta))\tilde{d}_{nl} = O(\epsilon), \quad (137)$$

donde hemos definido

$$s(\eta) = \pi_{\tilde{\alpha}}^2 e^{-4\tilde{\alpha}} - 3\tilde{m}^2 \varphi^2 e^{2\tilde{\alpha}}, \quad (138)$$

según (109). Para realizar el estudio, escribimos las soluciones de la forma

$$\tilde{d}_{nl}(\eta) = Z_{nl} e^{\Theta_n(\eta)} + Z_{nl}^* e^{\Theta_n^*(\eta)}, \quad (139)$$

donde Z_{nl} es una constante compleja y Θ_n una función del tiempo conforme. Vamos a fijar los grados de libertad espúreos que acabamos de introducir mediante las condiciones $\Theta_n(\eta_0) = 0$ y $\Theta_n'(\eta_0) = -i\omega_n$. Entonces tendremos que

$$\tilde{d}_{nl}(\eta_0) = 2\Re(Z_{nl}), \quad \tilde{d}_{nl}'(\eta_0) = 2\omega_n \Im(Z_{nl}), \quad (140)$$

siendo $\Re(\cdot)$ y $\Im(\cdot)$ la parte real e imaginaria, respectivamente. Es conveniente extraer de Θ_n su límite ultravioleta:

$$\Theta_n(\eta) =: -i\omega_n(\eta - \eta_0) + \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} W_n(\tilde{\eta}), \quad (141)$$

donde W_n es una nueva función del tiempo que debe satisfacer $W_n(\eta_0) = 0$, y que se introduce para transformar la ecuación de Klein-Gordon en la ecuación de Riccati equivalente

$$\dot{W}_n = -s + 2i\omega_n W_n - W_n^2, \quad (142)$$

(considerando que las partes real e imaginaria de W_n (o Θ_n) son independientes). Para nuestro objetivo, solamente nos interesa estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones en el ultravioleta. Para ello, comenzamos descartando los términos subdominantes de la ecuación de Riccati ($\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 0$), tal que

$$\dot{\tilde{W}}_n = -s + 2i\omega_n \tilde{W}_n, \quad (143)$$

cuya solución con valor inicial $\tilde{W}_n(\eta_0)$ es

$$\tilde{W}_n = -e^{2i\omega_n\eta} \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} e^{-2i\omega_n\tilde{\eta}} s(\tilde{\eta}), \quad (144)$$

o integrando por partes,

$$\tilde{W}_n = \frac{i}{2\omega_n} \left(e^{2i\omega_n(\eta-\eta_0)} s(\eta_0) - s(\eta) + e^{2i\omega_n\eta} \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} e^{-2i\omega_n\tilde{\eta}} \dot{s}(\tilde{\eta}) \right). \quad (145)$$

Si la función s es diferenciable y posee una derivada integrable en cada subintervalo de un cierto dominio temporal (no necesariamente infinito), la integral del miembro derecho de la igualdad anterior siempre converge en dicho dominio, luego \tilde{W}_n decae asintóticamente como ω_n^{-1} . En consecuencia, \tilde{W}_n debe ser el término dominante de las soluciones de la ecuación de Riccati, en la que W_n^2 es claramente despreciable. Por tanto, podemos escribir $W_n = \tilde{W}_n + O(\omega_n^{-2})$.

Partiendo de las ecuaciones (137) y (139), y luego de un cálculo extenso pero directo, se obtienen las expresiones para los coeficientes de Bogoliubov α_n y β_n , que dictan la evolución del campo de acuerdo con las ecuaciones (133) y (134). En concreto,

$$\alpha_n(\eta, \eta_0) = \frac{1}{2} e^{\omega_n \Theta_n(\eta)} \left[1 + i \dot{\Theta}_n(\eta) \right], \quad (146)$$

$$\beta_n(\eta, \eta_0) = \frac{1}{2} e^{\omega_n \Theta_n^*(\eta)} \left[1 + i \dot{\Theta}_n^*(\eta) \right]. \quad (147)$$

Los coeficientes β_n tienden a cero como ω_n^{-2} cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, la dinámica puede implementarse unitariamente, ya que la serie $\sum_n g_n |\beta_n|^2$ converge para una topología espacial de un tres-toro. En realidad lo hace independientemente de la topología de las secciones espaciales (mientras la dimensión de estas no exceda de tres).

El comportamiento asintótico de α_n es muy diferente. En concreto, $\alpha_n = \exp \Theta_n + O(\omega_n^{-2})$. Ahora vamos a probar que cualquier otra representación de Fock que comparta las simetrías del fondo y admita una dinámica unitaria debe ser unitariamente equivalente a la presentada, lo que extiende los resultados de la Ref. [69] a este sistema.

4.2.3. Unicidad de la representación

Ya hemos visto que la estructura compleja es invariante bajo el grupo de isometrías de las secciones espaciales; de ahora en más la calificaremos simplemente de invariante. Existen infinitas estructuras complejas invariantes y todas actúan de forma diagonal por

bloques en la base del espacio de fases compuesta por modos del operador de Laplace-Beltrami. Dado que este operador conmuta, por construcción, con las transformaciones de \mathcal{G} , toda estructura compleja invariante debe respetar sus autoespacios. En realidad, la descomposición se puede afinar aún más. Como las isometrías conservan la métrica, su actuación sobre cada autoespacio es unitaria, lo que permite separarlos como una suma finita de representaciones irreducibles de \mathcal{G} . Supondremos que estas representaciones irreducibles son diferentes (esto se da por ejemplo en la tres-esfera o en el tres-toro). Tal como establece el lema de Schur, para ser invariante, una estructura compleja no puede mezclar distintas representaciones irreducibles [75].

Hemos descompuesto el espacio de fases primero en autoespacios del operador de Laplace-Beltrami, y luego en representaciones irreducibles de \mathcal{G} , que supondremos diferentes. Centrándonos primeramente en el espacio de configuración \mathcal{D} , se tiene que $\mathcal{D} = \oplus_n \mathcal{D}_n$, con

$$\mathcal{D}^n := \left\{ \tilde{d}_{nl} : n \text{ fijo} \right\}, \quad (148)$$

y a su vez $\mathcal{D}^n = \oplus_m \mathcal{D}_m^n$, donde hemos denotado por \mathcal{D}_m^n las distintas representaciones irreducibles. El espacio de momentos \mathcal{P} puede tratarse análogamente, $\mathcal{P} = \oplus_n \mathcal{P}_n$. Es importante destacar que el grupo \mathcal{G} actúa de la misma forma sobre \mathcal{D} y sobre \mathcal{P} , por lo que sus descomposiciones en representaciones irreducibles del mismo son completamente análogas. El espacio de fases completo es, por tanto, $\oplus_{n,m} \mathcal{D}_m^n \oplus \mathcal{P}_m^n$. Según la hipótesis anterior, una estructura compleja invariante J debe ser de la forma $J = \oplus_{n,m} J_m^n$, donde cada J_m^n actúa en el espacio de configuración correspondiente, $\mathcal{D}_m^n \oplus \mathcal{P}_m^n$.

Gracias a la estructura bipartita de $\mathcal{D}_m^n \oplus \mathcal{P}_m^n$, podemos descomponer J_m^n en cuatro componentes que conectan los dos espacios \mathcal{D}_m^n y \mathcal{P}_m^n consigo mismos y entre sí: por ejemplo, si $P_{\mathcal{D}_m^n}$ es el proyector sobre \mathcal{D}_m^n (y análogamente con \mathcal{P}_m^n), entonces $P_{\mathcal{D}_m^n} J_m^n P_{\mathcal{D}_m^n}$ es la componente que conecta \mathcal{D}_m^n con \mathcal{D}_m^n . Ya que J es invariante, cada J_m^n conmuta con todas las transformaciones de \mathcal{G} . Estas actúan idénticamente sobre \mathcal{D}_m^n y \mathcal{P}_m^n , por lo tanto, deben conmutar no sólo con J_m^n , sino también con cada una de sus cuatro componentes. Aplicando nuevamente el lema de Schur se puede concluir que las cuatro componentes tienen que ser múltiplos de la identidad.

Concluimos que una estructura compleja invariante J no puede mezclar los modos del operador de Laplace-Beltrami y actúa de igual forma sobre los modos que pertenecen a la misma representación irreducible del grupo de isometrías. Se debe aclarar que el lema de Schur requiere que las representaciones sean complejas, pero nosotros hemos decidido trabajar con armónicos reales. Los armónicos reales pueden recuperarse me-

diante combinaciones lineales de los complejos (un modo y su complejo conjugado); por la linealidad de la teoría de campos, se puede pasar de unos a otros, siendo a veces necesarias algunas consideraciones adicionales. Por ejemplo, en el tres-toro, las isometrías del espacio (traslaciones espaciales) forman el grupo $U(1) \times U(1) \times U(1)$, cuyas representaciones irreducibles son necesariamente unidimensionales por ser abeliano. Debido a esto, un modo y su complejo conjugado se transforman según diferentes representaciones, por lo que podrían comportarse de forma diferente bajo la acción de la estructura compleja (aunque no independiente, por ser J real). Si así fuese, la estructura compleja combinaría las partes real e imaginaria provenientes de un mismo modo complejo en la base real. La condición de que la composición de la estructura simpléctica y la compleja sea definida positiva implica que J transforma de la misma forma los modos conjugados [72], y por extensión sus partes real e imaginaria, que no se mezclan entre sí. Cuando los modos complejos conjugados se transforman bajo la misma representación irreducible del grupo de isometrías, esta condición no es necesaria. El ejemplo que nos es más familiar es el de la tres-esfera. Aquí cada autoespacio se asocia a una representación irreducible del grupo $SO(4)$, por lo cual sólo debemos sumar en n , y así el análisis se torna más sencillo. Como una estructura compleja invariante J no mezcla modos diferentes del operador de Laplace-Beltrami, podemos elegir una nueva base de variables de destrucción y creación que diagonalicen J . Es claro que el simplectomorfismo K que relacione J con la base asociada a J_0 será diagonal por bloques. Ya que se trata de una transformación real, podemos parametrizar los bloques de la manera:

$$k_{n,m} = \begin{pmatrix} \kappa_{n,m} & \lambda_{n,m} \\ \lambda_{n,m}^* & \kappa_{n,m}^* \end{pmatrix}, \quad (149)$$

con $|\kappa_{n,m}|^2 - |\lambda_{n,m}|^2 = 1$ para que se preserve la estructura simpléctica. La transformación K relaciona la nueva estructura compleja invariante con la del caso sin masa mediante $J = KJ_0K^{-1}$ o, lo que es lo mismo, bloque a bloque, $j_{n,m} = k_{n,m}j_0k_{n,m}^{-1}$.

Ahora vamos a suponer que J admite una implementación unitaria de la dinámica, que denotaremos por el simplectomorfismo U . Para que U sea unitariamente implementable con respecto a la nueva estructura compleja, es condición necesaria y suficiente que la transformación $K^{-1}UK$, obtenida con el cambio de base descrito anteriormente, sea unitariamente implementable con respecto a J_0 [64]. La representación de $K^{-1}UK$

también consta de bloques, en la siguiente forma

$$k_{n,m}^{-1} u_n k_{n,m} = \begin{pmatrix} J\alpha_{n,m} & J\beta_{n,m} \\ J\beta_{n,m}^* & J\alpha_{n,m}^* \end{pmatrix}, \quad (150)$$

con

$$J\alpha_{n,m} := |\kappa_{n,m}|^2 \alpha_n - |\lambda_{n,m}|^2 \alpha_n^* + 2i\mathfrak{F}(\kappa_{n,m}^* \lambda_{n,m}^* \beta_n), \quad (151)$$

$$J\beta_{n,m} := (\kappa_{n,m}^*)^2 \beta_n - |\lambda_{n,m}|^2 \alpha_n^* + 2i\mathfrak{F}(\kappa_{n,m}^* \lambda_{n,m}^* \beta_n), \quad (152)$$

y donde α_n y β_n son los coeficientes de Bogoliubov asociados a la dinámica.

Sólo necesitaremos la expresión (152), ya que la implementabilidad unitaria de $K^{-1}UK$ depende únicamente de la convergencia de la serie $\sum_n |J\beta_{n,m}|^2 = \sum_{n,m} g_{n,m} |J\beta_{n,m}|^2$, donde tenemos que $g_{n,m}$ es la dimensión de la representación irreducible correspondiente ($g_n = \sum_m g_{n,m}$ y, en consecuencia, $g_{n,m} \leq g_n$). Es decir, U será unitariamente implementable en la cuantización determinada por J si y solo si la sucesión⁹ $\{\sqrt{g_{n,m}} J\beta_{n,m}(\eta, \eta_0)\}_{n,m}$ es de cuadrado sumable (para cualquier η en cierto dominio temporal). Claramente, $|\kappa_{n,m}|^2 = 1 + |\lambda_{n,m}|^2 \geq 1$; si ese es el caso, la sucesión $\{\sqrt{g_{n,m}} J\beta_{n,m}(\eta, \eta_0) / (\kappa_{n,m}^*)^2\}_{n,m}$ también debe ser de cuadrado sumable. Dividiendo la ecuación (152) por $(\kappa_{n,m}^*)^2$, concluimos que la segunda sucesión es la suma de otras tres, dos de las cuales son ya de cuadrado sumable (para esto se debe tener en cuenta que $|\lambda_{n,m}/\kappa_{n,m}| < 1$). Por tanto, podemos concentrarnos solamente en la tercera sucesión, que por hipótesis, también debe ser de cuadrado sumable. Esta es, en concreto, $\{\sqrt{g_{n,m}} \lambda_{n,m} \mathfrak{F}(\alpha_n) / \kappa_{n,m}^*\}_{n,m}$ (hemos dividido por el factor $2i$, lo que no genera un cambio relevante). Recordando que $g_{n,m} \leq g_n$, uno se da cuenta de que $\sqrt{g_{n,m}}$ crece asintóticamente a lo sumo como ω_n . Si introducimos el comportamiento asintótico encontrado para α_n en la expresión del término general de la sucesión y restamos las contribuciones cuyo cuadrado es sumable, concluimos que la condición necesaria y suficiente para que se cumpla la unitariedad es que la sucesión formada por los términos de la forma

$$\sqrt{g_{n,m}} \frac{\lambda_{n,m}}{\kappa_{n,m}^*} \exp\left(\int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} \mathfrak{R}(\tilde{W}_n(\tilde{\eta}))\right) \sin\left(\omega_n(\eta - \eta_0) - \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} \mathfrak{I}(\tilde{W}_n(\tilde{\eta}))\right), \quad (153)$$

también sea de cuadrado sumable.

La exponencial en la expresión (153) tiende a uno en el límite ultravioleta, por lo

⁹No confundir la notación de la doble etiqueta en la sucesión. Como el rango de m es finito para cada n , la sumabilidad de la sucesión depende únicamente del comportamiento asintótico del término general para n grande.

tanto, podemos despreciarla. Ahora, si realizamos la integración por partes del miembro derecho de la ecuación (145), se comprueba que, si la segunda derivada temporal de la función s existe y es integrable en cada subintervalo del dominio temporal considerado, su contribución a \tilde{W}_n es del orden de ω_n^{-2} , y puede substraerse. Consideremos, entonces, la sucesión con término general

$$\sqrt{g_{n,m}} \frac{\lambda_{n,m}}{\kappa_{n,m}^*} \sin \left(\omega_n (\eta - \eta_0) + \frac{i}{2\omega_n} \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} s(\tilde{\eta}) \right), \quad (154)$$

que es de cuadrado sumable si se cumple la hipótesis de implementabilidad unitaria. Su suma es una cantidad finita, que denotaremos por $Z(\eta)$. Se puede concluir también que la sucesión $\left\{ \sqrt{g_{n,m}} \lambda_{n,m} / \kappa_{n,m}^* \right\}_{n,m}$ ha de ser de cuadrado sumable, pero para hacerlo se debe eliminar la dependencia en η . Esto se hace integrando sobre el dominio temporal I . Aunque Z podría no ser continua, es medible (ya que es el límite de una sucesión de sumas parciales de funciones medibles). El teorema de Luzin [78] garantiza que, para todo $\delta > 0$, existe un conjunto $I_\delta \subset I$ tal que la medida de la diferencia I_δ/I es menor que δ y la restricción de Z a I_δ es continua. Avalados por esto, Z puede integrarse en I_δ , y se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{I_\delta} d\eta Z(\eta) \\ & \geq \sum_{n_0}^{\infty} \sum_m \left| \frac{\lambda_{n,m}}{\kappa_{n,m}} \right|^2 \int_{I_\delta} d\eta \sin^2 \left(\omega_n (\eta - \eta_0) + \frac{i}{2\omega_n} \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} s(\tilde{\eta}) \right), \end{aligned} \quad (155)$$

siendo n_0 tal que la integral sobre I_δ en el miembro de la derecha está acotada inferiormente por una cantidad positiva. Esto siempre puede hacerse, ya que en el límite ultravioleta la integral toma un valor positivo, si δ es suficientemente pequeño [68]. La existencia de esta cota permite inferir que la sucesión $\left\{ \sqrt{g_{n,m}} \lambda_{n,m} / \kappa_{n,m} \right\}_{n,m}$ es de cuadrado sumable, y tiende a cero. Considerando que $|\kappa_{n,m}|^2 - |\lambda_{n,m}|^2 = 1$, es fácil ver que $\lambda_{n,m} \rightarrow 0$ y $\kappa_{n,m} \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$. En consecuencia, $1/\kappa_{n,m}$ está acotado inferiormente, de lo que se desprende que también $\left\{ \sqrt{g_{n,m}} \lambda_{n,m} \right\}_{n,m}$ es de cuadrado sumable. Esa es precisamente condición suficiente para que la transformación canónica K , que relaciona las dos estructuras complejas invariantes, sea unitariamente implementable en las teorías cuánticas asociadas. En conclusión, todas las estructuras complejas invariantes que admiten una implementación unitaria de la dinámica del campo conducen a cuantizaciones unitariamente equivalentes. Además, existe la posibilidad de que un cambio de descripción conduzca a cuantizaciones inequivalentes con las mismas

propiedades, lo que estudiaremos a continuación.

4.2.4. Unicidad de la descripción del campo

La descripción del campo que venimos estudiando en las secciones previas se alcanzó tras una transformación canónica que incluía el escalado del campo por el factor de escala del fondo homogéneo. Para mantener la condición diagonal de la estructura simpléctica, realizamos el escalado inverso del momento canónico, y añadimos un término lineal en el propio campo, con el objetivo de llevar la parte cuadrática del vínculo a la forma del hamiltoniano de un campo de Klein-Gordon sometido a un potencial cuadrático dependiente de las variables homogéneas con correcciones que se anulan en el límite ultravioleta. Para ello, nos basamos en que esa parametrización concreta permitiría construir una representación de Fock privilegiada. Ahora podemos justificar esa afirmación realizando un escalado global de los modos por una función del tiempo. Es muy fácil convertir este cambio en una transformación canónica de la teoría de campos. Pediremos que la transformación sea local y respete la linealidad de la teoría

$$\bar{d}_{nl}(\eta) := F(\eta) \tilde{d}_{nl}(\eta), \quad (156)$$

$$\pi_{\bar{d}_{nl}}(\eta) := \frac{1}{F(\eta)} \pi_{\tilde{d}_{nl}}(\eta) + G(\eta) \tilde{d}_{nl}, \quad (157)$$

con F y G funciones del tiempo reales, y dos veces diferenciables, para mantener la estructura diferencial de la teoría. Supondremos que F es siempre distinta de cero, pues de otro modo se introducirían singularidades artificiales. La transformación es local porque no mezcla distintos modos y las funciones F y G son las mismas para todos ellos. Obsérvese que si F y G fueran constantes, las nuevas variables serían simplemente los modos de una combinación lineal constante del campo escalado y su momento y podría adoptarse la misma representación para ellas; esto permite fijar las condiciones iniciales $F(\eta_0) = 1$ y $G(\eta_0) = 0$ sin perder generalidad. Como la transformación (156) - (157) depende del tiempo, ésta afecta a la dinámica del campo. En efecto, si se introducen las variables de destrucción y creación

$$\begin{pmatrix} a_{\bar{d}_{nl}} \\ a_{\bar{d}_{nl}}^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \begin{pmatrix} \omega_n & +i \\ \omega_n & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d}_{nl} \\ \pi_{\bar{d}_{nl}} \end{pmatrix}, \quad (158)$$

(sustituyendo rayas por tildes), su evolución todavía puede expresarse de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{\bar{d}_{nl}}(\eta) \\ a_{\bar{d}_{nl}}^*(\eta) \end{pmatrix} = \bar{u}_n(\eta, \eta_0) \begin{pmatrix} a_{\bar{d}_{nl}}(\eta_0) \\ a_{\bar{d}_{nl}}^*(\eta_0) \end{pmatrix}, \quad (159)$$

donde

$$\bar{u}_n(\eta, \eta_0) = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_n(\eta, \eta_0) & \bar{\beta}_n(\eta, \eta_0) \\ \bar{\beta}_n^*(\eta, \eta_0) & \bar{\alpha}_n^*(\eta, \eta_0) \end{pmatrix}, \quad (160)$$

con los nuevos coeficientes de Bogoliubov

$$\bar{\alpha}_n = F_+ \alpha_n + F_- \beta_n^* + \frac{iG}{2\omega_n} (\alpha_n + \beta_n^*), \quad (161)$$

$$\bar{\beta}_n = F_+ \beta_n + F_- \alpha_n^* + \frac{iG}{2\omega_n} (\beta_n + \alpha_n^*), \quad (162)$$

con $2F_{\pm} := F \pm 1/F$. El symplectomorfismo correspondiente, \bar{U} , no es unitariamente implementable respecto a la estructura compleja J_0 (que en el instante η_0 diagonaliza las nuevas variables de destrucción y creación), ni respecto a ninguna estructura compleja invariante, a menos que el escalado sea el trivial $F(\eta) = 1, \forall \eta$.

Para demostrarlo, supongamos que en la cuantización determinada por una estructura compleja invariante J la nueva evolución \bar{U} puede implementarse de forma unitaria. Dicha estructura compleja tiene que estar relacionada con J_0 por medio de un symplectomorfismo K , diagonal por bloques. Entonces, si \bar{U} es unitariamente implementable con respecto a J , la composición $K^{-1}\bar{U}K$ es unitariamente implementable con respecto a J_0 . Entonces, los coeficientes β de la transformación de Bogoliubov $K^{-1}\bar{U}K$,

$${}^J\bar{\beta}_{n,m} := (\kappa_{n,m}^*)^2 \bar{\beta}_n - \lambda_{n,m}^2 \bar{\beta}_n^* + 2i\kappa_{n,m}^* \lambda_{n,m} \mathfrak{F}(\bar{\alpha}_n), \quad (163)$$

multiplicados por el factor de degeneración correspondiente, forman una sucesión de cuadrado sumable, $\{\sqrt{g_{n,m}} {}^J\bar{\beta}_{n,m}\}_{n,m}$. Dado este caso, la sucesión $\left\{\sqrt{g_{n,m}} {}^J\bar{\beta}_{n,m} (\kappa_{n,m}^*)^2\right\}_{n,m}$ también es de cuadrado sumable ($\kappa_{n,m} \geq 1$), por lo que, debe tender a cero en el límite $n \rightarrow \infty$. Entonces, teniendo en cuenta las ecuaciones (161) y (162) y el comportamiento en el límite ultravioleta de los coeficientes α_n y β_n , concluimos que la siguiente cantidad debe anularse asintóticamente cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\left[e^{i\omega_n(\eta-\eta_0)} - \left(\frac{\lambda_n}{\kappa_n^*}\right)^2 e^{-i\omega_n(\eta-\eta_0)} \right] F_-(\eta) - 2i \frac{\lambda_n}{\kappa_n^*} \sin(\omega_n(\eta-\eta_0)) F_+(\eta). \quad (164)$$

Esta es justamente la condición que se utiliza en la Ref. [71] para probar (detalladamente) que esto solo es posible si F_- y, en consecuencia, F toma un valor constante. Por continuidad, $F(\eta) = 1$ en todo el dominio temporal considerado: cualquier otro escalado dependiente del tiempo conduce a una descripción del campo para la que es imposible construir una representación de Fock con las características deseadas.

Sustituyendo $F = 1$ en las ecuaciones (161) y (162), y combinándolas con la ecuación (163), se obtiene una expresión para los coeficientes ${}^J\bar{\beta}_{n,m}$. Como la sucesión $\left\{ \sqrt{g_{n,m}} {}^J\bar{\beta}_{n,m} (\kappa_{n,m}^*)^2 \right\}_{n,m}$ es de cuadrado sumable, podemos eliminar de esa expresión las contribuciones que ya sabemos que lo son (y dividir por el factor irrelevante i), concluyendo que la siguiente sucesión también debe ser de cuadrado sumable

$$\sqrt{g_{n,m}} \left\{ 2 \frac{\lambda_{n,m}}{\kappa_{n,m}^*} \mathfrak{F}(\alpha_n) + \frac{G}{2\omega_n} \left[\alpha_n^* + 2 \frac{\lambda_{n,m}}{\kappa_{n,m}^*} \mathfrak{R}(\alpha_n) + \left(\frac{\lambda_{n,m}}{\kappa_{n,m}^*} \right)^2 \alpha_n \right] \right\}. \quad (165)$$

En la Ref. [71] se demuestra que esa condición conduce a dos situaciones. Si la serie $\sum_{n,m} g_{n,m}/\omega_n^2$ no converge (por ejemplo, los casos del tres-toro y la tres-esfera), necesariamente, G debe anularse idénticamente. En este caso, no existe ninguna redefinición del momento que dependa del tiempo no trivialmente. Si la serie converge, G puede ser distinto de cero, pero si es así, también converge la serie $\sum_{n,m} g_{n,m} |\lambda_n|^2$ para garantizar que la sucesión considerada sea de cuadrado sumable. Por tanto, en este caso el momento puede redefinirse añadiendo una contribución lineal en el campo sin impedir el hecho de encontrar representaciones de Fock del tipo deseado. Estas nuevas representaciones serán unitariamente equivalentes a la obtenida en la descripción original. Como consecuencia de esto, el conjunto de transformaciones canónicas dependientes del tiempo del tipo (156) - (157), lineales y locales, no permiten obtener una descripción alternativa de las perturbaciones en la que puedan construirse nuevas representaciones de Fock con las características buscadas, a menos que sean equivalentes a la representación del caso sin masa. Incluso esto no es posible si se realiza un escalado del campo que dependa del tiempo de forma no trivial. A partir de estos resultados, se justifica la transformación canónica del sistema, el escalado de las perturbaciones tensoriales (96), y la redefinición de sus momentos canónicos, que aseguran la existencia de cuantizaciones privilegiadas sobre el fondo clásico, las cuales poseen las características deseadas, y son únicas salvo equivalencia unitaria.

4.2.5. Discusión

El estudio realizado en esta sección nos ha permitido eliminar la ambigüedad en la elección de una descripción de las inhomogeneidades y su representación de Fock mediante ciertos criterios que son la simetría (el grupo de isometrías de las secciones espaciales del espaciotiempo de fondo) y la unitariedad de la dinámica (clave para la interpretación probabilística habitual de la mecánica cuántica). Esto se realiza generalizando los teoremas de unicidad de la Ref. [71] que establecen que para un campo de Klein-Gordon con masa dependiente del tiempo (o cualquier campo cuyas ecuaciones dinámicas puedan reducirse a esa misma forma), las condiciones para que el estado de vacío sea invariante bajo isometrías espaciales y la dinámica del campo pueda implementarse en la teoría cuántica mediante un operador unitario seleccionan una única clase de representaciones de Fock unitariamente equivalentes. Además, esos requisitos fijan también la descripción del campo, ya que excluyen los escalados globales del mismo que dependan del tiempo de forma no trivial. Así sucede con las perturbaciones tensoriales en el modelo considerado, al escalarlas con el factor de escala de la geometría de fondo, satisfacen ecuaciones dinámicas en las que la dependencia temporal viene dada a través de las variables homogéneas. Entonces, en general, dependiendo de la variedad espacial, se podría admitir una redefinición del momento del campo, añadiendo un término lineal con un coeficiente dependiente del tiempo, y este cambio no es ambiguo ya que las cuantizaciones con las propiedades que buscamos para la nueva descripción son (siempre y cuando existan) unitariamente equivalentes a las encontradas para la descripción original.

Nos gustaría comentar que el escalado de las perturbaciones por el factor de escala de la geometría de fondo es imprescindible para conservar la unitariedad de la dinámica cuántica del campo sobre el fondo clásico. Además, existen cuantizaciones con las propiedades buscadas en términos de los invariantes gauge asociados a las perturbaciones escalares [54–56]. Lo garantiza el hecho de que sus ecuaciones dinámicas son de tipo Klein-Gordon, con una función de las variables homogéneas en el rol de masa. Esto es posible porque las transformaciones canónicas del sector inhomogéneo que relacionan los invariantes con el correspondiente campo escalado y su momento no son locales (dependen del modo), entonces no forman parte de la clase de transformaciones de las que veníamos hablando. Aún así, son unitariamente implementables. Recordemos que requerir una representación de Fock con vacío simétrico y dinámica unitaria permite fijar la descripción del campo frente a transformaciones canónicas lineales y

locales del sector inhomogéneo. Si desde el principio se da cabida a transformaciones no locales, este criterio habría resultado insuficiente para fijar la descripción. Por esa razón es que es preferible, en un principio, partir del campo escalado y luego asegurarse de que la correspondiente cuantización privilegiada es unitariamente equivalente a las que pueden construirse en términos de los invariantes gauge. Ahora sabemos que, si dos descripciones del campo gobernadas por ecuaciones de tipo Klein-Gordon están relacionadas mediante una transformación canónica lineal que depende del modo pero no los entremezcla, dicha descripción es necesariamente implementable de forma unitaria en las representaciones privilegiadas de cualquiera de las dos descripciones [74]. Las transformaciones que llevan de un campo escalado y su momento a los pares de invariantes gauge para los modos escalares pueden considerarse casos particulares de la situación anterior. En nuestro caso, dado que los modos tensoriales son invariantes de gauge, todas estas cuestiones no aparecen y basta con considerar una transformación local no trivial para darse cuenta que solo la parametrización que hemos elegido es la única que proporciona una dinámica unitaria. Una vez que hemos resuelto el problema de la ambigüedad en la representación de Fock del sector inhomogéneo, podemos pasar a cuantizar el sistema completo.

5. Cuantización híbrida y ansatz de Born-Oppenheimer

En resumen, hemos visto cómo la teoría de perturbaciones cosmológicas en inflación, combinada con los principios de la mecánica cuántica, es capaz de predecir de manera satisfactoria buena parte de las propiedades observadas en nuestro Universo actual, en particular las del fondo cósmico de microondas. Uno de los inconvenientes de los modelos inflacionarios tradicionales es que, al estar basados en relatividad general, no pueden determinar cuál es la física en la región de fuerte curvatura cerca del Big Bang, y debe asumir datos iniciales al inicio de inflación (y no cerca del Big Bang). En este caso es esperable que una teoría cuántica de la gravedad sea capaz de dar una respuesta satisfactoria en este tipo de situaciones, en especial en la región donde estaría la singularidad y que creemos que debe ser reemplazada por una región de fuerte curvatura. Además, parecería natural asumir que, en ausencia de una realización completa de una teoría cuántica de la gravedad y con el fin de proporcionar una descripción simple, una cuantización parcial de los grados de libertad homogéneos en este tipo de escenarios (el factor de escala es el responsable de la aparición de la singularidad de Big Bang) sea suficiente y pueda arrojar luz sobre el tipo de física de altas energías del Universo primitivo.

Es en este caso que el modelo ideal que presentamos sobre la cuantización de un espaciotiempo puramente homogéneo pueda ser combinada con una cuantización de las inhomogeneidades para dar una descripción que incorpore toda la física de altas energías posible y al mismo tiempo que sea manejable como para poder realizar predicciones. En este sentido, vamos a proceder a cuantizar toda la variedad simpléctica que describe nuestro modelo cosmológico, e imponer los vínculos clásicos como operadores que aniquilan estados en la teoría cuántica.

En la formulación clásica, dividimos el espacio de fases en un sector homogéneo y otro inhomogéneo, a partir de la expansión en modos dados por los armónicos tensoriales. El sector homogéneo describe los modos cero, y sus grados de libertad se pueden parametrizar por las variables canónicas $\{\tilde{\alpha}, \pi_{\tilde{\alpha}}, \tilde{\varphi}, \pi_{\tilde{\varphi}}\}$. Por otro lado, el sector inhomogéneo describe los modos tensoriales, y se pueden parametrizar por \tilde{d}_n y $\pi_{\tilde{d}_n}$. Adoptamos una cuantización de Fock para estas variables invariantes de gauge y una representación para el sector homogéneo, en principio diferente y que esté basada en una teoría de gravedad cuántica. Merece la pena mencionar que este enfoque híbrido es diferente al de tratar las perturbaciones como un campo de prueba en un fondo cuántico, que es el enfoque adoptado en la propuesta de la métrica vestida presentado en la Ref. [48].

El vínculo hamiltoniano del sistema afecta ambos sectores, el homogéneo y el inhomogéneo. Más precisamente, codifica la forma en que las perturbaciones afectan el fondo homogéneo en la medida en que se mantenga el truncamiento en el orden cuadrático en la acción.

5.1. Estructura cinemática

Supondremos que la cuantización de las variables asociadas a los modos cero proporciona una representación de las relaciones de conmutación canónicas tal que los operadores de la geometría de FRW conmutan con aquellos que representan el sector homogéneo del campo material, y a su vez, todos ellos conmutan con los operadores elementales que representan las variables inhomogéneas. El espacio de Hilbert cinemático es el producto tensorial, $\mathcal{H}_{cin}^{grav} \otimes \mathcal{H}_{cin}^{mat}$, entre \mathcal{H}_{cin}^{mat} , el espacio donde están definidos los operadores del sector homogéneo para el campo material, y \mathcal{H}_{cin}^{grav} , espacio donde están definidos los operadores asociados a la geometría de FRW. Asumiremos, por simplicidad, que los operadores que representan funciones del campo $\tilde{\varphi}$ actúan por multiplicación, mientras que los que representan a $\pi_{\tilde{\varphi}}$ actúan por derivación.

Para los modos no homogéneos que describen los modos tensoriales adoptamos una cuantización de Fock similar a la que mostramos en la sección anterior (ver Refs. [55,56,58] para detalles adicionales). Recordemos que esta cuantización se elige bajo dos criterios, i) la invariancia del vacío bajo isometrías espaciales, ii) la unitariedad de la dinámica en el régimen en el que se recupera una teoría cuántica de campos en un fondo curvo para las perturbaciones tensoriales, en un intervalo de tiempo arbitrario (ver Refs. [69] y [71]). Estos criterios suprimen la ambigüedad frente a un posible reescalado de los modos \tilde{d}_n y $\pi_{\tilde{d}_n}$ por funciones de las variables homogéneas, y aseguran la unitariedad de la evolución y una interpretación estándar de la mecánica cuántica en las regiones donde se recupera la teoría cuántica de campos. De hecho, estos resultados requieren que las secciones espaciales sean compactas, por eso es que decidimos que nuestro modelo plano tenga la topología del tres-toro. Más precisamente, los criterios anteriores no sólo determinan una representación de Fock, sino una familia de representaciones, todas ellas unitariamente equivalentes (ver Ref. [69]). En particular, esta familia contiene la representación en la que las variables de aniquilación, $a_{\tilde{d}_n}$, y las de creación, $a_{\tilde{d}_n}^\dagger$, son aquellas naturalmente asociadas al oscilador armónico de frecuencia, ω_n . En la teoría cuántica, los operadores correspondientes pueden ser representados en un espacio de Fock \mathcal{F} , tal que satisfacen las relaciones de conmutación $[\hat{a}_{\tilde{d}_n}, \hat{a}_{\tilde{d}_{n'}}^\dagger] = \delta$.

Este espacio posee una base de estados $|\aleph\rangle$, donde \aleph indica una serie de números de ocupación (enteros positivos), uno para cada modo. El operador de creación que actúa estos estados excita el modo marcado por \mathbf{n} , aumentando el número de ocupación correspondiente en una unidad, como de costumbre.

En nuestra formulación, vamos a restringir la discusión al espacio de Hilbert cinemático de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{cin}^{grav} \otimes \mathcal{H}_{cin}^{mat} \otimes \mathcal{F}$ para estudiar todos los estados cuánticos físicamente relevantes.

5.2. Representación cuántica de los vínculos

Los estados que codifican la dinámica de nuestro modelo son las soluciones al operador cuántico que corresponden al modo cero del vínculo hamiltoniano. Recordemos que en ausencia de perturbaciones el vínculo hamiltoniano quedaba completamente determinado por los operadores $\hat{\pi}_\varphi^2$ y $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$, de tal modo que

$$\mathcal{H}_0^{(2)} \equiv \pi_\alpha^2 - \tilde{m}^2 \varphi^2 e^{6\tilde{\alpha}}. \quad (166)$$

En este caso H es $e^{3\tilde{\alpha}} H_{|0} = \left(\pi_\varphi^2 - \mathcal{H}_0^{(2)} \right) / 2$.

Pero en presencia de las inhomogeneidades, este involucra una contribución con acoplos altamente no triviales entre el sector homogéneo y el inhomogéneo que solo nos permitirá dar soluciones aproximadas. Clásicamente, el vínculo está dado por

$$H_{|0} + \sum_{\mathbf{n}} {}^T \bar{H}_{|2}^{\mathbf{n}} \equiv e^{-3\alpha} \tilde{H} = 0. \quad (167)$$

De ahora en más, por conveniencia, nos concentraremos en el vínculo hamiltoniano densitizado \tilde{H} .¹⁰ Además, si introducimos las siguientes variables del sector homogéneo,

$$\vartheta_T \equiv e^{2\tilde{\alpha}}, \quad (168)$$

$$\vartheta_T^q \equiv \pi_\alpha^2 e^{-2\tilde{\alpha}} - 3\tilde{m}^2 \varphi^2 e^{4\tilde{\alpha}}, \quad (169)$$

y llamamos

$$\Theta_T^{\mathbf{n}} \equiv - \left[(\vartheta_T \omega_{\mathbf{n}}^2 + \vartheta_T^q) \tilde{d}_{\mathbf{n}}^2 + \vartheta_T \pi_{\tilde{d}_{\mathbf{n}}}^2 \right], \quad (170)$$

¹⁰Este paso es simplemente para no cargar con la densitización en el nivel cuántico, pero puede realizarse de ambas formas.

$$\Theta_T \equiv \sum_n \Theta_T^n. \quad (171)$$

Entonces, $2e^{3\tilde{\alpha}} \sum_n {}^T \bar{H}_{|2}^n = -\Theta_T$. Asumiremos que podemos representar las cantidades (166), (168) y (169) como operadores densamente definidos, $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$, $\hat{\vartheta}_T$ y $\hat{\vartheta}_T^q$, en $\mathcal{H}_{cin}^{grav} \otimes \mathcal{H}_{cin}^{mat}$ (mientras que actúan como la identidad en \mathcal{F}); y los objetos (171) como operadores densamente definidos, $\hat{\Theta}_T$, en $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{cin}^{grav} \otimes \mathcal{H}_{cin}^{mat} \otimes \mathcal{F}$. Finalmente, obtenemos el siguiente operador hamiltoniano en representación de H ,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left[\hat{\pi}_\varphi^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - \hat{\Theta}_T \right]. \quad (172)$$

Como ya mencionamos, las soluciones al operador \hat{H} , aunque pueden ser construidas a partir de datos iniciales en la sección de volumen mínimo [55,56], no han sido estudiadas en profundidad como para poder ser caracterizadas en forma cerrada. Ni siquiera se ha llevado a cabo un estudio numérico para identificar posibles sectores semiclásicos. Así que procederemos con aproximaciones que, aunque no incorporan toda la física del modelo, nos permitirán al menos describir algunos de los aspectos más interesantes y que esperamos codifiquen buena parte de las correcciones semiclásicas de la teoría cuántica.

5.3. Ansatz de Born-Oppenheimer

En esta sección analizaremos las soluciones de modo cero del vínculo hamiltoniano del sistema asumiendo una aproximación para ellas de tipo Born-Oppenheimer. Dentro de esta aproximación asumimos que la parte homogénea e inhomogénea de los estados cuánticos presentan una tasa de variación distinta con respecto al tiempo físico φ (al menos en algunos intervalos de la evolución). En esta situación podemos asumir que los estados físicos del sistema toman la forma aproximada

$$\Psi = \Gamma_\varphi \psi_\varphi, \quad (173)$$

donde Γ_φ es un estado normalizable que atribuimos a sector homogéneo $\mathcal{H}_{cin}^{grav} \otimes \mathcal{H}_{cin}^{mat}$, mientras que ψ_φ es contrapartida de las ondas tensoriales perteneciente a \mathcal{F} . Sobre estos estados, el operador $\hat{\varphi}$ actúa por multiplicación y su momento conjugado $\hat{\pi}_\varphi$ como $(-i)$ veces la derivada con respecto a φ . Para el resto de operadores geométricos, su actuación dependerá de qué representación adoptemos para ellos. Nosotros la dejaremos sin especificar puesto que no será necesaria para nuestros propósitos. En resumen, el

ansatz para los estados cuánticos es que sus funciones de onda Ψ pueden separarse en dos factores, uno que depende de los grados de libertad homogéneos de la geometría de FRW, y el otro depende de los modos tensoriales. Este ansatz permite simplificar el vínculo hamiltoniano, bajo ciertas aproximaciones, como vamos a ver a continuación.

Pensemos por un momento en el modelo no perturbado de FRW. Supongamos que la evolución del estado Γ_φ viene dictada por un operador evolución $\hat{U}(\varphi, \varphi_0)$ desde un tiempo inicial φ_0 a un tiempo final arbitrario. En este caso, tenemos que

$$\Gamma_\varphi = \hat{U}(\varphi, \varphi_0) \Gamma, \quad (174)$$

Esta familia de operadores de evolución $\hat{U}(\varphi, \varphi_0)$ es tal que existe un operador autoadjunto $\hat{\mathcal{H}}_0$ que satisface $[\hat{\pi}_\varphi, \hat{U}] = \hat{\mathcal{H}}_0 \hat{U}$. Los conceptos de autoadjunto y unitario que estamos utilizando son aquellos que corresponden a la parte de la geometría asociada a FRW de nuestro espacio de Hilbert, \mathcal{H}_{cin}^{grav} ¹¹. De hecho, dentro de nuestro marco perturbativo, es natural considerar Γ como una solución aproximada al vínculo hamiltoniano del sector homogéneo, y no necesariamente una solución exacta. Esta solución aproximada Γ_φ se acercará a una solución exacta en la medida en que $\left(\hat{\mathcal{H}}_0\right)^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + [\hat{\pi}_\varphi, \hat{\mathcal{H}}_0]$ evaluado sobre Γ_φ sea cercano a cero.

Si sustituimos el ansatz (173) en la ecuación del vínculo $\hat{H}\Psi = 0$ ¹², y teniendo en cuenta que

$$\hat{\pi}_\varphi \Psi = \Gamma(\hat{\pi}_\varphi \psi) + \left(\hat{\mathcal{H}}_0 \Gamma\right) \psi, \quad (175)$$

$$\hat{\pi}_\varphi^2 \Psi = \Gamma(\hat{\pi}_\varphi^2 \psi) + 2\left(\hat{\mathcal{H}}_0 \Gamma\right)(\hat{\pi}_\varphi \psi) + \left([\hat{\pi}_\varphi, \hat{\mathcal{H}}_0] \Gamma\right) \psi + \left\{\left(\hat{\mathcal{H}}_0\right)^2 \Gamma\right\} \psi, \quad (176)$$

podemos escribir el vínculo $\hat{\mathcal{H}}\Psi = \frac{1}{2} \left[\hat{\pi}_\varphi^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - \hat{\Theta}_T\right] \Psi = 0$ como

$$\left(\left\{\left(\hat{\mathcal{H}}_0\right)^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + [\hat{\pi}_\varphi, \hat{\mathcal{H}}_0]\right\} \Gamma\right) \psi + 2\left(\hat{\mathcal{H}}_0 \Gamma\right)(\hat{\pi}_\varphi \psi) + \Gamma(\hat{\pi}_\varphi^2 \psi) - \hat{\Theta}_T(\Gamma \psi) = 0. \quad (177)$$

¹¹En la representación de Schrödinger convencional, en la cual $\hat{\pi}_\varphi = -i\partial_\varphi$ tenemos la evolución unitaria estándar $\hat{U}(\varphi, \varphi_0) = T \left[\exp\left(i \int_{\varphi_0}^\varphi d\varphi \hat{\mathcal{H}}_0(\varphi)\right)\right]$. El símbolo T denota en tiempo ordenado con respecto a φ . Por simplicidad, hemos fijado $\hbar = 1$.

¹²Como esperamos que las soluciones no pertenezcan al espacio de Hilbert cinemático, deberíamos imponer el vínculo sobre un tipo de estados generalizados $(\Psi|$, tal que $(\Psi|\hat{H}^\dagger = 0$. No vamos a utilizar esta notación ya que complicaría la comprensión de nuestro análisis. Además, vamos a omitir el subíndice φ para simplificar las expresiones.

Dentro de nuestras suposiciones, asumiremos que el operador $[\hat{\pi}_\varphi, \hat{\mathcal{H}}_0]$ depende de φ , pero es independiente de $\hat{\pi}_\varphi$. Nótese que el primer término de la ecuación (177) es la corrección proveniente de la consideración de que las soluciones Γ no son soluciones exactas a los vínculos del sector homogéneo (para comprobar esto, es suficiente hacer ψ constante y $\hat{\Theta}_T$ igual a cero).

Ahora vamos a considerar otra aproximación, en la que (respecto a la geometría homogénea de FRW) sólo los términos correspondientes a los valores esperados sobre Γ son relevantes. Es decir, cuando tomamos el producto interno con Γ a la izquierda de la ecuación (177) con respecto a la geometría FRW (en \mathcal{H}_{cin}^{grav}), despreciamos posibles transiciones cuánticas de Γ a otros estados bajo la acción del vínculo. A partir de la ecuación (177) es fácil ver que para que esta aproximación pueda sostenerse, sólo necesitamos que los siguientes operadores tengan una dispersión relativa pequeña en el estado Γ , para todos los valores de φ : i) $\hat{\mathcal{H}}_0$, ii) $\hat{\nu}_T$, iii) $\hat{\nu}_T^q$, y iv) $-id_\varphi \hat{\mathcal{H}}_0 + \left(\hat{\mathcal{H}}_0\right)^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$, donde hemos definido¹³

$$-id_\varphi \hat{O} \equiv \left[\hat{\pi}_\varphi - \hat{\mathcal{H}}_0, \hat{O} \right], \quad (178)$$

para un operador arbitrario \hat{O} . En principio, la condición sobre el operador iv) puede satisfacerse con una adecuada elección de $\hat{\mathcal{H}}_0$ (o equivalentemente de $\hat{U}(\varphi, \varphi_0)$).

Entonces, asumiendo que la aproximación anterior es válida, tomamos los valores esperados en Γ tal como lo dijimos anteriormente¹⁴, obteniendo

$$\hat{\pi}_\varphi^2 \psi + 2 \left\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \right\rangle_\Gamma \hat{\pi}_\varphi \psi = \left\{ \left\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - \left(\hat{\mathcal{H}}_0\right)^2 \right\rangle_\Gamma + \left\langle \hat{\Theta}_T \right\rangle_\Gamma + i \left\langle d_\varphi \hat{\mathcal{H}}_0 \right\rangle_\Gamma \right\} \psi, \quad (179)$$

El símbolo $\left\langle \hat{O} \right\rangle_\Gamma$ denota el valor esperado del operador \hat{O} en el estado Γ , en el espacio de Hilbert \mathcal{H}_{cin}^{grav} , con respecto al producto interno de la geometría FRW. En general, el resultado es un operador actuando en $\mathcal{H}_{cin}^{mat} \otimes \mathcal{F}$.

La ecuación (179) conduce a una ecuación de Schrödinger generalizada para la evolución en φ de las inhomogeneidades, asumiendo que $\hat{\pi}_\varphi^2 \psi$ es despreciable (algo que vamos a establecer más abajo por medio de aproximaciones concretas), siempre que se cumplan ciertas condiciones (ver Anexo 2). Uno podría requerir, por ejemplo, que

¹³Recordemos que en el caso estándar se define, $\hat{\pi}_\varphi = -i\partial_\varphi$, d_φ es la derivada total (en la representación de Heisenberg) correspondiente a una evolución en φ generada por $\hat{\mathcal{H}}_0$.

¹⁴Para realizar los cálculos hemos tenido en cuenta que Γ está normalizado a la unidad y, además, $-id_\varphi \hat{\mathcal{H}}_0 \equiv [\hat{\pi}_\varphi - \hat{\mathcal{H}}_0, \hat{\mathcal{H}}_0] = [\hat{\pi}_\varphi, \hat{\mathcal{H}}_0] - [\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{\mathcal{H}}_0] = [\hat{\pi}_\varphi, \hat{\mathcal{H}}_0]$

$-id_\varphi \hat{\mathcal{H}}_0 + \left(\hat{\mathcal{H}}_0\right)^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$ sea despreciable. Pero, dado que esperamos que $\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma$ varíe muy despacio con el tiempo, es más natural exigir que

- $i \langle d_\varphi \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma$ sea despreciable frente a $\langle \hat{\Theta}_T \rangle_\Gamma$. Este requerimiento tiene la ventaja de que eliminamos de la ecuación de Schrödinger un término que potencialmente podría romper la unitariedad de la evolución.

Si esta condición se satisface (y despreciando $\hat{\pi}_\varphi^2 \psi$), obtenemos la ecuación de Schrödinger generalizada

$$\hat{\pi}_\varphi \psi = \frac{\left\{ \langle \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - \left(\hat{\mathcal{H}}_0\right)^2 \rangle_\Gamma + \langle \hat{\Theta}_T \rangle_\Gamma \right\} \psi}{2 \langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma}. \quad (180)$$

- Otra condición que asumiremos es que $\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - \left(\hat{\mathcal{H}}_0\right)^2 \rangle_\Gamma$ sea despreciable frente a $\langle \hat{\Theta}_T \rangle_\Gamma$. Esto es natural ya que Γ es solución aproximada del modelo FRW no perturbado.

Concluimos finalmente que dentro de estas condiciones

$$\hat{\pi}_\varphi \psi = \frac{\langle \hat{\Theta}_T \rangle_\Gamma \psi}{2 \langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma}. \quad (181)$$

Haciendo analogía con la ecuación de Schrödinger estándar, el hamiltoniano que genera la dinámica de las perturbaciones en el tiempo interno φ está dado por $\langle \hat{\Theta}_T \rangle_\Gamma / 2 \langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma$. Este hamiltoniano depende de las variables de la geometría homogénea evaluada en los valores esperados correspondientes al estado cuántico Γ , y dividido por el valor esperado de $\hat{\mathcal{H}}_0$ en él.

Concluyendo esta sección, vemos que asumiendo el ansatz de Born-Oppenheimer e introduciendo ciertas aproximaciones podemos recobrar la teoría cuántica de campos estándar para las perturbaciones tensoriales que se propagan en una geometría homogénea (considerada como “*vestida*”). El término *vestida* se refiere al hecho de que esta geometría no es clásica, si no que conserva ciertas correcciones cuánticas (valores esperados y fluctuaciones) del espaciotiempo de FRW que sienten los modos tensoriales al propagarse sobre él (ver Ref. [48]).

5.4. Ecuaciones efectivas para las ondas tensoriales

Empleando el ansatz Born-Oppenheimer y la aproximación de que las transiciones del estado Γ a otros a través de la ligadura escalar sean despreciables (y por lo tanto, sin la necesidad de introducir el resto de aproximaciones que conducen a una ecuación de Schrödinger para la función de onda de los modos tensoriales), se pueden derivar ecuaciones clásicas efectivas para los modos tensoriales. Si tomamos el vínculo definido en la ecuación (177), tomamos valores esperados con respecto al estado Γ de la geometría homogénea y asumimos que las perturbaciones tensoriales son tratadas clásicamente, el vínculo efectivo sería de la forma

$$C_{\Gamma}^{eff} = F_{\Gamma}(\varphi) \hat{\pi}_{\varphi}^2 \psi + G_{\Gamma}(\varphi) \hat{\pi}_{\varphi} \psi - \left\langle \hat{\Theta}_{\Gamma} \right\rangle_{\Gamma} \psi, \quad (182)$$

donde F_{Γ} y G_{Γ} son funciones de φ , que dependen del estado Γ de la geometría homogénea, y que no vamos a especificar ya que no afectan nuestros cálculos ni son relevantes para la interpretación de los mismos.

En esta dinámica semiclassical vamos a tratar a las perturbaciones no como operadores cuánticos sino como variables clásicas cuya evolución está descrita por un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales (más concretamente un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales). En este caso las funciones de onda ψ pueden tomarse como constante. Esta aproximación es aceptable debido a que el modo cero del vínculo hamiltoniano es cuadrático en las perturbaciones.

Teniendo en cuenta la densitización del vínculo (establecido en la ecuación (167)) y la definición de la parte homogénea de la función lapso, se puede comprobar que $C_{\Gamma}^{eff}/2$ genera reparametrizaciones en un tiempo \bar{T}_{Γ} que, en orden dominante, se relaciona con el tiempo efectivo propio según $dt_{\Gamma} = \sigma \langle e^{3\alpha} \rangle_{\Gamma} d\bar{T}_{\Gamma}$.

Por otra parte, podemos cambiar a un tiempo conforme η_{Γ} , adaptado a la geometría FRW vestida asociado con el estado Γ . Si observamos las definiciones (170) y (171), vemos que toda la dependencia de $C_{\Gamma}^{eff}/2$ en los momentos tensoriales, $\pi_{\bar{d}_n}$, está dada por el término $\left\langle \hat{\vartheta}_{\Gamma} \right\rangle_{\Gamma} (\pi_{\bar{d}_n})^2 / 2$ procedente de $\left\langle \hat{\Theta}_{\Gamma} \right\rangle_{\Gamma}$. Entonces, es natural definir $l_0 d\eta_{\Gamma} = \left\langle \hat{\vartheta}_{\Gamma} \right\rangle_{\Gamma} d\bar{T}_{\Gamma}$ ¹⁵. Notemos que esta definición de tiempo conforme se obtiene de forma natural en la teoría efectiva, pero no en el nivel de operadores cuánticos (para ello habría que deparametrizar el vínculo hamiltoniano en términos de este tiempo

¹⁵Con nuestra elección de factores numéricos, esta definición del tiempo conforme no es sensible a la elección de l_0

conforme que resultaría en una función no local de las variables del espacio de fases). Por lo tanto, el valor esperado en Γ es esencial a fin de introducir el cambio de tiempo. También señalamos que el cambio depende del estado, y por lo tanto las propiedades de la evolución en el tiempo \bar{T}_Γ y η_Γ puede ser muy diferente dependiendo del estado cuántico en el que se encuentre el sistema.

La evolución de \tilde{d}_n en el tiempo η_Γ está dada (bajo los corchetes de Poisson de \tilde{d}_n con $C_\Gamma^{eff}/2$) por

$$d_{\eta_\Gamma} \tilde{d}_n = l_0 \pi_{\tilde{d}_n}, \quad (183)$$

donde d_{η_Γ} denota la derivada respecto a η_Γ . Usando este último resultado y tomando nuevamente la derivada respecto al tiempo η_Γ obtenemos la ecuación efectiva

$$d_{\eta_\Gamma}^2 d_n = -d_n \left[\tilde{\omega}_n^2 + \left\langle \hat{\theta}_T^\Gamma \right\rangle_\Gamma \right] \quad (184)$$

donde hemos definido $\tilde{\omega}_n^2 = l_0^2 \omega_n^2$ y $\left\langle \hat{\theta}_T^\Gamma \right\rangle_\Gamma \equiv l_0^2 \frac{\langle \hat{\vartheta}_T^q \rangle_\Gamma}{\langle \hat{\vartheta}_T \rangle_\Gamma}$.

Notemos que el término entre paréntesis rectos en la ecuación (184) es una función que sólo depende de φ , y por lo tanto del tiempo η_Γ , cuando el campo escalar es evaluado sobre las soluciones a las ecuaciones efectivas. Este factor contiene modificaciones cuánticas con respecto a la ecuación estándar para perturbaciones tensoriales en cosmología estándar, la cual codifica los efectos cuánticos más relevantes del fondo homogéneo. Las ecuaciones derivadas son aún de tipo oscilador armónico con frecuencias dependientes del tiempo. Además, no existe un término de disipación y las ecuaciones son hiperbólicas en el régimen ultravioleta, donde $\tilde{\omega}_n^2$ domina en el término mencionado anteriormente.

Si bien en nuestro análisis hemos asumido por simplicidad que el potencial del campo escalar viene dado por una contribución de masa, en realidad podemos fácilmente extender la discusión a un potencial general $W(\varphi)$. Para ello, simplemente tenemos que sustituir en la ecuación (169) el término $\tilde{m}^2 \varphi^2$ por $2W(\varphi)$. De manera que,

$$\bar{\vartheta}_T^q \equiv \pi_{\tilde{\alpha}}^2 e^{-2\tilde{\alpha}} - 6W(\varphi) e^{4\tilde{\alpha}}, \quad (185)$$

y análogamente a los cálculos anteriores,

$$d_{\eta_\Gamma}^2 d_n = -d_n \left[\tilde{\omega}_n^2 + \left\langle \hat{\theta}_T^\Gamma \right\rangle_\Gamma \right] \quad (186)$$

donde $\tilde{\omega}_n^2 = l_0^2 \omega_n^2$ y $\langle \hat{\theta}_T^\Gamma \rangle_\Gamma \equiv l_0^2 \frac{\langle \hat{\psi}_T^q \rangle_\Gamma}{\langle \hat{\theta}_T \rangle_\Gamma}$. También debemos reemplazar $\tilde{m}^2 \varphi^2$ por $2W(\varphi)$ en las ecuaciones que rigen la dinámica del sector homogéneo.

5.5. Discusión

En términos generales, hemos proporcionado un formalismo para cuantizar un espaciotiempo de FRW plano con un campo escalar con masa (escogido especialmente dada su relevancia en cosmología inflacionaria), y con pequeñas perturbaciones tensoriales sobre él. La dinámica del sistema está codificada en el vínculo escalar. Realizamos la cuantización del modelo usando técnicas híbridas, es decir, combinando una cuantización arbitraria de la geometría de fondo, con una teoría cuántica estándar de las perturbaciones. En este marco, demostramos cómo recuperar el formalismo de geometría vestida que ha sido propuesto recientemente y cómo extraer las ecuaciones de campo cuánticas para los modos tensoriales, empleando el ansatz de Born-Oppenheimer y discutiendo la validez de su aplicación. Cabe mencionar que las perturbaciones escalares ya han sido estudiadas siguiendo estas líneas. Este trabajo permite completar la descripción física del modelo homogéneo e isótropo con pequeñas inhomogeneidades para el Universo primitivo. Las ecuaciones de campo pueden ser aplicadas al estudio de fenómenos cuánticos de gravedad dentro del paradigma de la inflación cosmológica. Si todas nuestras hipótesis son válidas en la región de fuerte curvatura, las ecuaciones de movimiento estarían bien definidas y por tanto la evolución de las perturbaciones desde esos instantes hasta el presente. Nuestro trabajo proporciona una vía para comprobar si las predicciones de una teoría cuántica de gravedad concreta son compatibles con los resultados presentes y futuros de las misiones de alta precisión en cosmología.

6. Conclusiones

En este trabajo hemos completado la formulación covariante de un sistema gravitacional que describe un espaciotiempo plano de FRW (homogéneo e isótropo) con una topología compacta (plana) de tres-toro y mínimamente acoplado a un campo escalar con masa y que contiene pequeñas inhomogeneidades. Este tipo de escenarios son de gran relevancia en la cosmología inflacionaria actual dada la gran capacidad de predicción que alcanzan con este conjunto de hipótesis de partida muy reducido. En este modelo truncamos la acción de Hilbert-Einstein a orden cuadrático en las perturbaciones. Adoptamos una descripción para ellos más adecuada expandiendo las inhomogeneidades en modos de Fourier, usando una base de funciones propias del operador de Laplace-Beltrami de las secciones espaciales. El hamiltoniano total del modelo resultante es una suma de vínculos, formado por una combinación lineal del modo cero del vínculo escalar, y de todos los modos inhomogéneos de los dos vínculos locales que son lineales en las perturbaciones. Uno de ellos proviene de las perturbaciones del vínculo hamiltoniano y el otro corresponde al vínculo de difeomorfismos. El modo cero del vínculo hamiltoniano está formado por el vínculo del modelo no perturbado más las contribuciones cuadráticas en las perturbaciones.

Como nuestro propósito es el estudio de perturbaciones tensoriales, y dado que, para este modelo de FRW, el nivel de truncación que hemos considerado proporciona una dinámica que no mezcla perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales, tomamos las perturbaciones escalares y vectoriales como idénticamente nulas. En otras palabras, las ignoramos a todos los efectos. Después, adoptamos una transformación canónica en todo el sistema, es decir, teniendo en cuenta no sólo las inhomogeneidades, sino también el sector homogéneo del modelo (los modos cero que describen los grados de libertad presentes en el modelo no perturbado de FRW). De esta manera mantenemos toda la variedad simpléctica, donde los nuevos modos cero y las inhomogeneidades siguen siendo auténticos grados de libertad. Este es un paso importante hacia la cuantización del sistema, ya que sin esta transformación canónica completa, el sistema habría perdido su estructura simpléctica. Como resultado de esta transformación canónica, el modo cero del lapso se redefine, absorbiendo una contribución cuadrática de las perturbaciones, pero manteniendo la libertad original como un multiplicador de Lagrange no especificado. Es importante mencionar que, en el nivel clásico, la transformación canónica permite simplificar la dinámica clásica. Pero lo más importante es el hecho de que la parametrización elegida para los modos tensoriales es tal que, dentro del tipo de re-

presentaciones cuánticas de Fock que adoptamos, es la única que admite una dinámica unitaria para los campos tensoriales. Esta es en realidad la principal razón por la que adoptamos esta redefinición.

Una vez completa la descripción clásica, procedimos a cuantizar el sistema. Para ello, hemos propuesto un enfoque híbrido que combina una cuantización arbitraria del sector homogéneo del modelo con una descripción de campos más estándar para los grados de libertad no homogéneos. Este enfoque se basa en la suposición de que los efectos cuánticos más relevantes de la geometría son los que afectan a los modos cero del sistema, y por lo tanto pueden requerir un análisis más cuidadoso, mientras que las perturbaciones, aún siendo cuánticas, pueden describirse de una manera más convencional. Es decir, la cuantización híbrida consiste en adoptar una representación para el sector homogéneo del modelo capaz de capturar su naturaleza de gravedad cuántica, mientras que las perturbaciones son tratadas esencialmente en las líneas de la teoría cuántica de campos en espaciotiempos curvos.

Para resolver el vínculo hamiltoniano, hemos adoptado un ansatz del tipo Born-Oppenheimer para los estados cuánticos físicos, y discutimos la validez de esta aproximación. Este ansatz de Born-Oppenheimer está basado en la elección del modo cero del campo escalar como un reloj interno del sistema y asume que los modos tensoriales no afectan demasiado la evolución de los modos cero de la geometría. El ansatz asume una separación de la dependencia cuántica en la geometría de FRW y los modos tensoriales. Esto es válido siempre que las escalas típicas de variación de los modos homogéneos e inhomogéneos sean distintas para dichos estados. Si el estado de la geometría del fondo además tiene transiciones despreciables a otros estados homogéneos a través del vínculo hamiltoniano a medida que evoluciona en el tiempo interno, y esta evolución se ajusta adecuadamente a la del sistema no perturbado, el modo cero del vínculo hamiltoniano proporciona un conjunto de ecuaciones efectivas para la dinámica de los modos tensoriales en términos de este tiempo interno. Además, bajo ciertas condiciones, como por ejemplo que el estado de la geometría del fondo se mantenga picado respecto a los tres operadores $\hat{\mathcal{H}}_0$, $\hat{\vartheta}_T$, $\hat{\vartheta}_T^q$, el ansatz nos permite introducir una serie de aproximaciones adicionales que conducen a una ecuación de Schrödinger para los modos tensoriales, caracterizado por un hamiltoniano corregido por el hecho de que su dependencia de la geometría homogénea se vuelve “*vestida*” con correcciones cuánticas. De esta manera, se recupera una teoría cuántica para las perturbaciones que se propagan en un espaciotiempo fijo (y en general no clásico).

Generalmente, cuando se trata con campos cuánticos en espaciotiempos curvos, hay

ambigüedad tanto en la forma en la que uno parametriza el campo como en la representación de Fock elegida para este. Cabe destacar que, para el sistema que estamos estudiando, existen teoremas de unicidad que priorizan una parametrización (un par canónico para el campo) y una clase de representaciones de Fock unitariamente equivalentes [54,64–71]. Estas opciones son seleccionadas bajo los criterios naturales de tener un vacío invariante bajo simetrías del fondo y una aplicación unitaria de la dinámica. Nuestra parametrización para los modos tensoriales coincide con esta descripción¹⁶. Ningún régimen con una teoría cuántica de campos con dinámica unitaria hubiera sido accesible si hubiéramos elegido una parametrización diferente para los modos tensoriales y sus momentos.

Otro resultado importante de este trabajo es la solidez de las ecuaciones dinámicas que rigen la evolución de los modos tensoriales. Hemos demostrado que la dinámica de estos modos invariantes están dadas siempre por una ecuación correspondiente a un oscilador armónico, con una frecuencia que depende del tiempo interno, siempre y cuando los estados de Born-Oppenheimer tengan transiciones despreciables por medio del modo cero del vínculo hamiltoniano, independientemente de si la ecuación del vínculo se puede aproximar por una de tipo Schrödinger. Para llegar a esta conclusión, nuestra única hipótesis adicional ha sido esencialmente que la dinámica efectiva de los modos tensoriales puedan derivarse con la sustitución de los operadores de aniquilación y creación por sus homólogos como variables clásicas. Las ecuaciones efectivas obtenidas de esta manera contienen modificaciones cuánticas en la parte dependiente del tiempo de la frecuencia, pero la modificación es la misma para todos los modos, y en particular, no afecta el comportamiento ultravioleta de las ecuaciones clásicas de estas perturbaciones en relatividad general. Estas ecuaciones pueden ser utilizadas para evolucionar los modos tensoriales desde las épocas más primitivas del Universo hasta la época post-inflacionaria, donde las observaciones actuales y las predicciones de una teoría cuántica de gravedad (no especificada en nuestro formalismo) pueden ser contrastadas.

Nótese que, con el fin de obtener la evolución cuántica de las perturbaciones, no hemos empleado una aproximación semiclásica para la geometría homogénea. Ni siquiera necesitamos resolver exactamente el modelo no perturbado para determinar el estado cuántico de la geometría de fondo. Dentro de nuestro esquema, es suficiente considerar soluciones aproximadas, cuya diferencia respecto a las soluciones exactas pueda despreciarse en el desarrollo perturbativo.

¹⁶El proceso de la cuantización híbrida puede ser fácilmente adaptado a otras parametrizaciones

Concluimos haciendo hincapié en que es natural pensar que existe un régimen cuántico más profundo, antes de alcanzar una descripción completa de la gravedad cuántica, en la que esta cuantización híbrida tiene sentido. Este enfoque híbrido codifica los principales efectos de la gravedad cuántica y es adecuado para predecir si existen modificaciones de esta naturaleza respecto a los observables cosmológicos, por ejemplo, en el espectro de potencia del fondo cósmico de microondas. Por lo tanto, ofrece un marco para extraer consecuencias físicas de la gravedad cuántica en cosmología.

7. Trabajo a futuro

Como trabajo a futuro inmediato nos planteamos el cálculo del espectro de potencia para las ondas tensoriales y su comparación con formalismos similares (Ashtekar y colaboradores). En este caso ya poseemos unas ecuaciones de movimiento corregidas por la geometría cuántica del fondo, pero es necesario establecer en qué estado inicial se encuentran las perturbaciones. Dentro de los posibles candidatos, será también de interés analizar las posibles predicciones de fenómenos de gravedad cuántica que se podrían observar en las misiones presentes (WMAP, Planck, BICEP, etc) y futuras.

Como trabajo en un futuro a medio plazo nos proponemos estudiar en profundidad la dinámica cuántica mas allá de la aproximación de Born-Oppenheimer. Empezaremos por analizar en detalle la dinámica del modelo no perturbado, puesto que no ha sido entendida en profundidad. Una vez alcanzado este objetivo, el siguiente paso natural es atacar la dinámica incluyendo las inhomogeneidades. También ampliaremos el estudio a modelos anisótropos, como por ejemplo cosmologías de tipo Bianchi I. Estas tienen tres factores de escala independientes, uno para cada dirección espacial. En este caso descartaríamos la hipótesis de isotropía.

8. Anexos

8.1. Anexo I: Teoría clásica de campos y sistemas vinculados

Una teoría gauge es aquella en que las variables dinámicas son especificadas con respecto a un marco referencial cuya elección es arbitraria en cada instante de tiempo. Las variables físicas son aquellas independientes del marco de referencia local. Una transformación de las variables inducida por un cambio en el marco referencial es denominada transformación gauge. Las variables físicas u observables son invariantes de gauge.

En este tipo de teorías, dadas las condiciones iniciales, las ecuaciones de movimiento no determinan las variables dinámicas para todo tiempo, ya que el referencial puede cambiar en cualquier momento. Por tanto, la solución general de las ecuaciones de movimiento contienen funciones del tiempo arbitrarias. El tratamiento más adecuado de sistemas gauge es la formulación hamiltoniana, la que desarrollaremos en detalle más adelante. Una vez entendida ésta se puede retornar a la formulación lagrangiana.

La presencia de funciones del tiempo arbitrarias en la solución general de las ecuaciones de movimiento implica que las variables canónicas no son todas independientes. Las relaciones entre ellas son llamadas vínculos. Un sistema gauge siempre es un sistema hamiltoniano vinculado, no siendo así a la inversa, ya que no todos los vínculos de un sistema hamiltoniano surgen de la invariancia de gauge.

A continuación describiremos los distintos tipos de vínculos que podemos encontrar en este tipo de sistemas.

8.1.1. Vínculos primarios

El punto de partida para discutir los sistemas vinculados es el principio de mínima acción en la formulación lagrangiana.

Las trayectorias clásicas del sistema son aquellas que dejan la acción

$$S_L = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt, \quad (187)$$

estacionaria bajo variaciones $\delta q^n(t)$ de las variables lagrangianas q^n ($n = 1, \dots, N$), y se anula en los extremos t_1, t_2 .

La condición anterior está dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0, \quad (188)$$

en más detalle

$$\ddot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial q^{n'} \partial \dot{q}^n}. \quad (189)$$

Las aceleraciones \ddot{q}^n en un tiempo dado están determinadas únicamente por las posiciones y velocidades en ese instante si, y sólo si, la matriz $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}$ es invertible, es decir, si el determinante $\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} \right)$ es distinto de cero. Si este es cero, las aceleraciones no estarán determinadas únicamente por las posiciones y velocidades, y por tanto, las soluciones de las ecuaciones de movimiento podrán contener funciones del tiempo arbitrarias. Entonces, el caso que nos interesa es el cual $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}$ no es invertible.

Para pasar al formalismo hamiltoniano debemos definir los momentos canónicos

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}, \quad (190)$$

Aquí vemos que la condición para que se anule el determinante anterior es justamente la no invertibilidad de las velocidades como funciones de las coordenadas y los momentos. Es decir, los momentos (190) no son todos independientes en este caso, si no que hay ciertas relaciones que surgen de su definición:

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad m = 1, \dots, M. \quad (191)$$

Cuando los p 's en (191) son reemplazados por su definición (190) en términos de q y \dot{q} , la ecuación (191) se reduce a la identidad. Las condiciones (191) se denominan vínculos primarios, haciendo énfasis en que las ecuaciones de movimiento no son necesarias para obtener estas relaciones (ya que no implican ninguna restricción en las coordenadas y las velocidades).

Asumiremos que el rango de la matriz $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}$ es una constante a lo largo del espacio formado por (q, \dot{q}) y que los vínculos primarios definen una subvariedad suave embebida en el espacio de fases. Esta subvariedad se denomina superficie de vínculos primarios.

Obsérvese que si el rango de $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}$ es $N - M'$, existen M' ecuaciones independientes dadas por (191) y la superficie de vínculos primarios es una subvariedad del espacio de fases con dimensión $2N - M'$.

8.1.2. Teoremas importantes

1. Si una función suave, G , del espacio de fases, se anula sobre la superficie $\phi_m = 0$, entonces $G = g^m \phi_m$ para algunas funciones g^m .
2. Si $\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$ para variaciones arbitrarias $\delta q^n, \delta p_n$ tangentes a la superficie de vínculos, entonces

$$\lambda_n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n}, \quad (192)$$

$$\mu^n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}, \quad (193)$$

para algunos u^m . Estas igualdades se cumplen sobre la superficie de vínculos.

8.1.3. Vínculos secundarios

Introducimos el hamiltoniano canónico

$$H = \dot{q}^n p_n - L. \quad (194)$$

Evaluando el cambio δH inducido por variaciones arbitrarias independientes de las posiciones y las velocidades,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q^n} + \frac{\partial L}{\partial q^n} \right) \delta q^n + \left(\frac{\partial H}{\partial p_n} - \dot{q}^n \right) \delta p_n = 0, \quad (195)$$

podemos concluir que el hamiltoniano canónico está bien definido únicamente en la subvariedad de vínculos primarios y puede ser extendido arbitrariamente fuera de esa variedad. El formalismo debe permanecer invariante bajo el cambio

$$H \rightarrow H + c^m(q, p) \phi_m. \quad (196)$$

De la ecuación (195), y usando el teorema 2, tenemos

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}, \quad (197)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q^n} \Big|_{\dot{q}} = \frac{\partial H}{\partial q^n} \Big|_p + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n}. \quad (198)$$

Estas ecuaciones nos permiten reescribir las ecuaciones en la forma hamiltoniana equivalente,

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}, \quad (199)$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n}, \quad (200)$$

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad (201)$$

que pueden ser derivadas del principio variacional

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^n p_n - H - u^m \phi_m) = 0, \quad (202)$$

para variaciones arbitrarias $\delta q^n, \delta p_n, \delta u_m$, con la restricción $\delta q^n(t_1) = \delta q^n(t_2) = 0$. Las nuevas variables, u^m , introducidas para hacer la transformada de Legendre invertible, aparecen ahora como multiplicadores de Lagrange, reforzando los vínculos primarios.

Las ecuaciones de movimiento que derivan de [202] se escriben

$$\dot{F} = [F, H] + u^m [F, \phi_m], \quad (203)$$

donde $F(q, p)$ es una función arbitraria de las variables canónicas, y los corchetes de Poisson se definen como es usual

$$[F, G] = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i}. \quad (204)$$

Examinemos las consecuencias de las ecuaciones de movimiento. Es un requerimiento que los vínculos primarios se preserven en el tiempo. Entonces, si tomamos F en la ecuación (203) como ϕ_m , tendremos $\dot{\phi}_m = 0$. Esto da lugar a la condición:

$$[\phi_m, H] + u^{m'} [\phi_m, \phi_{m'}] = 0. \quad (205)$$

Si la relación entre los p y los q es independiente de los vínculos primarios, entonces es llamada *vínculo secundario*. Los vínculos secundarios se diferencian de los primarios en que los primarios son mera consecuencia de la ecuación (190) que define las variables momentos, mientras que para los secundarios hay que hacer uso de las ecuaciones de movimiento.

Si existe un vínculo secundario, $X(q, p) = 0$, debemos imponer la siguiente condición,

$$[X, H] + u^m [H, \phi_m] = 0. \quad (206)$$

Luego, se debe verificar si la ecuación (206) implica nuevos vínculos secundarios o sólo restringe las u , y así sucesivamente. Terminado el proceso, tendremos un número k de vínculos secundarios

$$\phi_k = 0, \quad k = M + 1, \dots, M + K. \quad (207)$$

Esta notación nos permite escribir todos los vínculos, primarios y secundarios, como

$$\phi_j = 0, \quad j = 1, \dots, M + K = J \quad (208)$$

Es útil introducir la definición de igualdad débil, con el símbolo \approx , para las ecuaciones de los vínculos. Por tanto, la ecuación (208) puede escribirse como

$$\phi_j \approx 0, \quad (209)$$

haciendo énfasis en que dicha cantidad está restringida a ser cero, pero no es idénticamente nula en todo el espacio de fases. Esto significa que sus corchetes de Poisson con las variables canónicas son distintos de cero.

En general, dos funciones, F, G , que coinciden en la subvariedad definida por los vínculos $\phi_j \approx 0$ son *débilmente iguales*, y se escriben $F \approx G$. De hecho, una ecuación que se sostiene en todo el espacio de fases y no sólo en la subvariedad $\phi_j \approx 0$, se denomina *fuerte*.

8.2. Anexo II: Armónicos

Un espaciotiempo globalmente hiperbólico puede foliarse en hipersuperficies espaciales homeomorfas a cierta variedad Σ . La métrica espaciotemporal induce una métrica riemanniana en cada una de estas superficies. Si consideramos las hipótesis de homogeneidad e isotropía, las secciones espaciales son espacios de curvatura constante y las métricas correspondientes difieren en un factor global. Esto sugiere introducir una métrica fiducial, ${}^0h_{ab}$, para la variedad Σ , que define una derivada covariante compatible ${}^0\nabla_a$. El operador de Laplace-Beltrami en Σ se define entonces como ${}^0h_{ab}{}^0\nabla_a{}^0\nabla_b$ y es autoadjunto en $L^2(\Sigma, \sqrt{{}^0h}d^3x)$ [77]. Por lo tanto, sus autofunciones sirven de base para las funciones de dicho espacio, lo que utilizamos en la sección (3) para expandir

las variables métricas. A continuación, detallaremos las características de esta base en el caso particular del tres-toro.

8.2.1. Armónicos escalares

Estos se pueden elegir de tal modo que sean funciones reales. En el caso en que la variedad espacial es un tres-toro su expresión explícita es

$$\tilde{Q}_{\vec{n},+}(\vec{\theta}) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{2\pi}{l_0} \vec{n} \cdot \vec{\theta}\right), \quad \tilde{Q}_{\vec{n},-}(\vec{\theta}) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{l_0} \vec{n} \cdot \vec{\theta}\right). \quad (210)$$

Aquí $\vec{\theta}$ es el vector de coordenadas espaciales periódicas, con periodo l_0 , y \vec{n} es cualquier tupla de números enteros donde la primera componente no nula es estrictamente positiva (para evitar repeticiones). Además el valor $\vec{n}=0$ está excluido ya que correspondería al sector homogéneo. De ahora en adelante, para los modos escalares usaremos la notación $\tilde{Q}_{\vec{n}}$, con $\vec{n} = (\vec{n}, \epsilon)$ donde $\epsilon = +, -$. Los armónicos escalares satisfacen la ecuación de autovalores (74) para una variedad compacta arbitraria. En el caso del tres-toro se tiene

$${}^0h^{ij}{}^0\nabla_i{}^0\nabla_j Q_{\vec{n}} = -\omega_n^2 Q_{\vec{n}}, \quad (211)$$

donde $\omega_n^2 = 4\pi^2 \vec{n} \cdot \vec{n} / l_0^2$. Estos armónicos además están normalizados según

$$\int_{\Sigma} d^3\theta \sqrt{{}^0h} \tilde{Q}_{\vec{n}}(\vec{\theta}) \tilde{Q}_{\vec{n}'}(\vec{\theta}) = l_0^3 \delta_{\vec{n}\vec{n}'}. \quad (212)$$

8.2.2. Armónicos vectoriales

Definimos los armónicos $\left(\tilde{S}_a\right)_{\vec{n}}$ como las autofunciones vectoriales transversas que satisfacen la ecuación

$${}^0h^{ab}{}^0\nabla_a{}^0\nabla_b \left(\tilde{S}_c\right)_{\vec{n}} = -\omega_n^2 \left(\tilde{S}_c\right)_{\vec{n}}. \quad (213)$$

La condición de transversalidad significa que ${}^0\nabla_a \left(\tilde{S}^a\right)_{\vec{n}} = 0$. Para construir una base explícita de estos armónicos podemos empezar por elegir una base ortonormal de vectores en el fibrado tangente a la variedad espacial. Nosotros elegimos la base dada por

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}, \quad (214)$$

y dos vectores ortonormales $\hat{e}^{1,\vec{n}}$ y $\hat{e}^{2,\vec{n}}$, es decir, tales que $\|\hat{e}^{i,\vec{n}}\| = 1$, $\langle \hat{n} \cdot \hat{e}^{i,\vec{n}} \rangle = 0$ y $\langle \hat{e}^{1,\vec{n}} \cdot \hat{e}^{2,\vec{n}} \rangle = 0$, para $i = 1, 2$. Además hemos definido

$$\langle \hat{u} \cdot \hat{v} \rangle = {}^0 h_{ab} u^a v^b, \quad (215)$$

el producto interno con respecto a la métrica plana ${}^0 h_{ab}$ y $\|\cdot\|$ la norma correspondiente, que se corresponde con $\|v\| = \sqrt{{}^0 h_{ab} v^a v^b}$. Es importante dejar claro que $\hat{e}^{i,\vec{n}}$ dependen del vector \vec{n} . En esta notación los armónicos vectoriales transversos son

$$(\tilde{S}_a)_{\vec{n}_v} = (\tilde{S}_a)_{\vec{n},i} = \hat{e}_a^{i,\vec{n}} \tilde{Q}_{\vec{n}}. \quad (216)$$

Normalizamos estos armónicos de forma que

$$\int_{\Sigma} d^3 \vec{\theta} \sqrt{{}^0 h} (\tilde{S}_a)_{\vec{n}_v}(\vec{\theta}) (\tilde{S}^a)_{\vec{n}'_v}(\vec{\theta}) = l_0^3 \delta_{\vec{n}_v \vec{n}'_v}, \quad (217)$$

Por otro lado, mediante derivación covariante de los armónicos escalares, pueden definirse los campos vectoriales

$$\left(\tilde{P}_a \right)_{\vec{n}} := \frac{1}{\omega_n^2} {}^0 \nabla_a \tilde{Q}_{\vec{n}}, \quad (218)$$

que también son autofunciones del operador de Laplace-Beltrami:

$${}^0 h^{ab0} \nabla_a {}^0 \nabla_b \left(\tilde{P}_c \right)_{\vec{n}} = -\omega_n^2 \left(\tilde{P}_c \right)_{\vec{n}}. \quad (219)$$

A diferencia de los otros armónicos vectoriales, estos no son transversos, pues

$${}^0 \nabla_a \left(\tilde{P}^a \right)_{\vec{n}} = -\tilde{Q}_{\vec{n}}. \quad (220)$$

Su norma está determinada por la de los armónicos escalares:

$$\int_{\Sigma} d^3 \vec{\theta} \sqrt{{}^0 h} \left(\tilde{P}_{\vec{n}} \right)_a(\vec{\theta}) \left(\tilde{P}_{\vec{n}'_v} \right)^a(\vec{\theta}) = \frac{1}{\omega_n^2} l_0^3 \delta_{\vec{n} \vec{n}'_v}. \quad (221)$$

En resumen, $(\tilde{S}_a)_{\vec{n}_v}$ y $(\tilde{S}_a)_{\vec{n}_v}$ proporcionan una base para expandir cualquier función vectorial sobre el tres-toro.

8.2.3. Armónicos tensoriales

Finalmente, los armónicos $(\tilde{G}_{ab})_{\vec{n}}$ son autofunciones tensoriales del operador de Laplace-Beltrami simétricas, transversas y con traza nula. Satisfacen una ecuación de autovalores análoga a las ecuaciones (74) o (213), es decir

$${}^0h^{ab}{}^0\nabla_a{}^0\nabla_b(\tilde{G}_{cd})_{\vec{n}} = -\omega_n^2(\tilde{G}_{cd})_{\vec{n}}. \quad (222)$$

Por ser transversos, se cumple ${}^0\nabla_a(\tilde{G}^a_b)_{\vec{n}} = 0$, y además, su traza es nula, por tanto $(\tilde{G}^a_a)_{\vec{n}} = 0$. Usando la base \hat{n} y $\hat{e}^{i,\vec{n}}$, tenemos que

$$(\tilde{G}_{ab})_{\vec{n},+} = \frac{\hat{e}_a^{1,\vec{n}}\hat{e}_b^{1,\vec{n}} - \hat{e}_a^{2,\vec{n}}\hat{e}_b^{2,\vec{n}}}{\sqrt{2}}\tilde{Q}_{\vec{n}}, \quad (\tilde{G}_{ab})_{\vec{n},\times} = \frac{\hat{e}_a^{1,\vec{n}}\hat{e}_b^{2,\vec{n}} + \hat{e}_a^{2,\vec{n}}\hat{e}_b^{1,\vec{n}}}{\sqrt{2}}\tilde{Q}_{\vec{n}}. \quad (223)$$

Como hicimos con los armónicos vectoriales, definiremos la etiqueta $\vec{n}_t = (\vec{n}, \varepsilon)$ con $\varepsilon = (+, \times)$. Para ellos, adoptamos una normalización semejante a las anteriores:

$$\int_{\Sigma} d\vec{\theta}\sqrt{{}^0h}(\tilde{G}_{ab})_{\vec{n}_t}(\vec{\theta})(\tilde{G}^{ab})_{\vec{n}'_t}(\vec{\theta}) = l_0^3\delta_{\vec{n}_t\vec{n}'_t}. \quad (224)$$

Pueden obtenerse otros armónicos tensoriales a partir de los armónicos escalares, multiplicándolos por la métrica, o bien tomando derivadas covariantes. Así, podemos definir

$$(\tilde{P}_{ab})_{\vec{n}} := \frac{1}{\omega_n^2}{}^0\nabla_a{}^0\nabla_b\tilde{Q}_{\vec{n}} + \frac{1}{3}{}^0h_{ab}\tilde{Q}_{\vec{n}}. \quad (225)$$

Estos tensores también son autofunciones del operador de Laplace-Beltrami, ya que

$${}^0\nabla_a(\tilde{P}^a_b)_{\vec{n}} = -\frac{2}{3}\omega_n^2(\tilde{P}_b)_{\vec{n}}. \quad (226)$$

Además,

$${}^0\nabla_a{}^0\nabla_b(\tilde{P}^{ab})_{\vec{n}} = -\frac{2}{3}\omega_n^2\tilde{Q}_{\vec{n}}. \quad (227)$$

Se puede verificar fácilmente que

$$\int_{\Sigma} d\vec{\theta} \sqrt{0h} \left(\tilde{P}_{ab} \right)_{\vec{n}} \left(\vec{\theta} \right) \left(\tilde{P}^{ab} \right)_{\vec{n}'} \left(\vec{\theta} \right) = \frac{2}{3} l_0^3 \delta_{\vec{n}\vec{n}'}. \quad (228)$$

También pueden construirse tensores simétricos derivando los armónicos vectoriales transversos:

$$\left(\tilde{S}_{ab} \right)_{\vec{n}_v} := {}^0\nabla_a \left(\tilde{S}_b \right)_{\vec{n}_v} + {}^0\nabla_b \left(\tilde{S}_a \right)_{\vec{n}_v}. \quad (229)$$

Estas cantidades también son autofunciones del operador de Laplace-Beltrami

$${}^0\nabla_a \left(\tilde{S}^a{}_b \right)_{\vec{n}_v} = -\frac{2}{3} (V\omega_n^2 - 2k) \left(\tilde{S}_b \right)_{\vec{n}_v}, \quad (230)$$

$${}^0\nabla_a {}^0\nabla_b \left(\tilde{S}^{ab} \right)_{\vec{n}_v} = 0. \quad (231)$$

Finalmente,

$$\int_{\Sigma} d\vec{\theta} \sqrt{0h} \left(\tilde{S}_{ab} \right)_{\vec{n}_v} \left(\vec{\theta} \right) \left(\tilde{S}^{ab} \right)_{\vec{n}'_v} \left(\vec{\theta} \right) = 2l_0^3 \omega_n^2 \delta_{\vec{n}_v \vec{n}'_v} \delta_{ll'}. \quad (232)$$

8.3. Anexo III: Derivadas segundas despreciables (autoconsistencia de la aproximación)

En este anexo estudiaremos la autoconsistencia de despreciar la derivada segunda de la función de onda de los modos tensoriales con respecto a la parte homogénea del campo escalar en la ecuación de vínculos de los estados de Born-Oppenheimer.

Sea la ecuación (179), que por conveniencia reescribimos como

$$\hat{\pi}_\varphi \psi = \frac{1}{2 \langle \hat{H}_0 \rangle_\Gamma} \left\{ \left\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - \left(\hat{\mathcal{H}}_0 \right)^2 \right\rangle_\Gamma + \langle \hat{\Theta}_T \rangle_\Gamma + i \langle d_\varphi \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma \right\} \psi - \frac{1}{2 \langle \hat{H}_0 \rangle_\Gamma} \hat{\pi}_\varphi^2 \psi. \quad (233)$$

Ahora, hacemos actuar $\hat{\pi}_\varphi$ sobre la ecuación anterior y computamos el valor de la derivada segunda de ψ . Considerando que $[\hat{\pi}_\varphi, \langle \hat{O} \rangle_\Gamma] = -i \langle d_\varphi \hat{O} \rangle_\Gamma$ y eliminando los términos que son despreciables perturbativamente tenemos que

$$\left[\frac{3i \langle d_\varphi \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma + \left\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - \left(\hat{\mathcal{H}}_0 \right)^2 \right\rangle_\Gamma}{2 \langle \hat{H}_0 \rangle_\Gamma} + 2 \langle \hat{H}_0 \rangle_\Gamma \right] \hat{\pi}_\varphi^2 \psi = \frac{2i \langle d_\varphi \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma + \left\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - \left(\hat{\mathcal{H}}_0 \right)^2 \right\rangle_\Gamma}{2 \langle \hat{H}_0 \rangle_\Gamma}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[2 \langle \hat{\Theta}_T \rangle_\Gamma + \frac{3i}{2} \langle d_\varphi \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma + \frac{5}{4} \langle \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - (\hat{\mathcal{H}}_0)^2 \rangle_\Gamma \right] \psi \\
& - i \left[\langle d_\varphi \hat{\Theta}_T \rangle_\Gamma + i \langle d_\varphi^2 \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma + \langle d_\varphi \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - d_\varphi (\hat{\mathcal{H}}_0)^2 \rangle_\Gamma \right] \psi \\
& - \frac{1}{8} \frac{\left(\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - (\hat{\mathcal{H}}_0)^2 \rangle_\Gamma \right)^2}{\langle \hat{H}_0 \rangle_\Gamma} \psi - \hat{\pi}_\varphi^3 \psi. \tag{234}
\end{aligned}$$

A partir de esta ecuación y operando por iteración con $\hat{\pi}_\varphi$ se puede ver si es legítimo asumir que la acción de $\hat{\pi}_\varphi^{n+1}$ sobre ψ es despreciable comparada con la acción de $\hat{\pi}_\varphi^n$, y en particular, si se sostiene para $n = 1$. Para determinarlo, es suficiente que $\langle \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - (\hat{\mathcal{H}}_0)^2 \rangle_\Gamma$ sea despreciable comparado con los términos lineales en las perturbaciones, y que $\langle d_\varphi \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - d_\varphi (\hat{\mathcal{H}}_0)^2 \rangle_\Gamma$ también sea despreciable comparado con los términos de orden cuadrático. Todo esto asumiendo que

1. $\langle d_\varphi \hat{\Theta}_T \rangle_\Gamma$ es despreciable respecto a los términos de orden cuadrático en las perturbaciones,
2. $\langle d_\varphi (\hat{\mathcal{H}}_0)^2 \rangle_\Gamma$ es como máximo de orden cuadrático.

Recordemos que $-id_\varphi \hat{O} = [\hat{\pi}_\varphi, \hat{O}] - [\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{O}]$. El primer término es una derivada generalizada con respecto a la dependencia explícita en φ del operador considerado, \hat{O} . Para los operadores relevantes en nuestra discusión, esta dependencia viene exclusivamente del potencial del campo escalar material, el cual consideramos que está dado por un término de masa. Si los posibles valores de masa son considerablemente pequeños, el término $\langle [\hat{\pi}_\varphi, \hat{O}] \rangle_\varphi$ puede ser tratado perturbativamente, por ejemplo, expresando el valor de la masa como cierta potencia del parámetro de amplitud de las inhomogeneidades. Por otro lado, cuando \hat{O} es el operador $\hat{\Theta}_T$, el segundo término $\langle [\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{O}] \rangle_\Gamma$ da una contribución no nula, que dependerá de la representación elegida para la geometría homogénea, y de las propiedades del estado Γ . En consecuencia, si las condiciones mencionadas son verdaderas o falsas, dependerá también de estos dos últimos detalles, que deben ser verificados cuidadosamente.

Referencias

1. R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
2. V. F. Mukhanov, H. A. Feldman y R. H. Brandenberger, *Theory of Cosmological Perturbations*, Phys. Rep. 215, 203 (1992).
3. V. Mukhanov, *Quantum theory of gauge-invariant cosmological perturbations*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 94, 1 (1988); Sov. Phys. JETP 67, 1297 (1988);
4. V. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology*, (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2005).
5. R. Durrer, *Cosmological perturbation theory*, arXiv:astro-ph/0402129.
6. D. Langlois, *Lectures on inflation and cosmological perturbations*, arXiv:1001.5259.
7. A. R. Liddle y D. H. Lyth, *Inflation and Large Scale Universe* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
8. C. L. Bennett et al, *4-Year COBE DMR Cosmic Microwave Background Observations: Maps and Basic Results*, ApJ, 464, L1 (1996).
9. E. Komatsu et al, *Seven-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: cosmological interpretation*, Astrophys. J. Suppl. Ser. 192 18 (2011).
10. P. Bielewicz y A. J. Banday, *Constraints on the topology of the universe derived from the 7-year WMAP data*, Mon. Not. R. Astron. Soc. 412 2104–10 (2011).
11. G. Hinshaw et al, *Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results*, ApJS 208, 19 (2013).
12. O. Lahav y A.R. Liddle, *The Cosmological Parameters 2014*, arXiv.1401.1389.
13. P.A.R. Ade et al, (Planck Collaboration), *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, arXiv:1502.01589 (2015).
14. P.A.R. Ade et al. (Planck Collaboration), *Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation*, arXiv:1502.02114 (2015).
15. P.A.R. Ade et al, (BICEP2 Collaboration), *Detection Of B-mode Polarization at Degree Angular Scales*, Phys. Rev. Lett. 112, 241101 (2014).

16. R. M Wald, *Quantum field theory in curved space-times and black hole thermodynamics* (University of Chicago Press, Chicago, 1994).
17. S. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989/1996).
18. T. S. Bunch y P.C.W. Davies, *Quantum field theory in de Sitter space - Renormalization by point-splitting*, Proc. Roy. Soc. Lond. A360, 117-134 (1978).
19. T. Thiemann, *Introduction to Modern Canonical Quantum General Relativity* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2007).
20. A. Ashtekar y J. Lewandowski, *Background Independent Quantum Gravity: A Status Report*, Class. Quantum Grav. 21, R53 (2004).
21. C. Rovelli, *Quantum Gravity*, (Cambridge University Press, Londres, 2004).
22. P. M. A. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964).
23. Henneaux, Teitelboim, *Quantization of gauge systems*, (Princeton University Press, New Jersey, 1991).
24. M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology*, Living Rev. Rel. 11, 4 (2008).
25. A. Ashtekar, *Introduction to Loop Quantum Gravity and Cosmology*, arXiv:1201.4598.
26. A. Ashtekar y P. Singh, *Loop Quantum Cosmology: A Status Report*, Class. Quant. Grav. 28, 213001 (2011).
27. K. Barnerjee, G. Calcagni, y M. Martin-Benito, *Introduction to Loop Quantum Cosmology*, SIGMA 8, 016 (2012).
28. A. Ashtekar y A. Barrau, *Loop quantum cosmology: From pre-inflationary dynamics to observations*, arXiv:1504.07559.
29. A. Ashtekar, T. Pawłowski and P. Singh, *Quantum Nature of the Big Bang*, Phys. Rev. Lett. 96, 141301 (2006).
30. A. Ashtekar, T. Pawłowski and P. Singh, *Quantum Nature of the Big Bang: An analytical and Numerical Investigation*, Phys. Rev. D 73, 124038 (2006).

31. A. Ashtekar, T. Pawłowski and P. Singh, *Quantum nature of the big bang: Improved dynamics*, Phys. Rev. D 74, 084003 (2006).
32. A. Ashtekar and D. Sloan, *Loop quantum cosmology and slow roll inflation*, Phys. Lett. B 694, 108 (2010).
33. M. Bojowald, G.M. Hossain, M. Kagan, and S. Shankaranarayanan, *Anomaly freedom in perturbative loop quantum gravity*, Phys. Rev. D 78, 063547 (2008).
34. M. Bojowald, G.M. Hossain, M. Kagan, and S. Shankaranarayanan, *Gauge invariant cosmological perturbation equations with corrections from loop quantum gravity*, Phys. Rev. D 79, 043505 (2009).
35. M. Bojowald, G.M. Hossain, M. Kagan, and S. Shankaranarayanan, *Erratum: Gauge invariant cosmological perturbation equations with corrections from loop quantum gravity*, Phys. Rev. D 82, 109903(E) (2010).
36. G. Calcagni and G.M. Hossain, *Loop Quantum Cosmology and Tensor Perturbations in the Early Universe*, Adv. Sci. Lett. 2 184, (2009)
37. J. Grain, T. Cailleteau, A. Barrau, and A. Gorecki, *Fully loop-quantum-cosmology-corrected propagation of gravitational waves during slow-roll inflation*, Phys. Rev. D 81, 024040 (2010).
38. M. Bojowald, G. Calcagni, and S. Tsujikawa, *Observational constraints on loop quantum cosmology*, Phys. Rev. Lett. 107, 211302 (2011).
39. E. Wilson-Ewing, *Holonomy corrections in the effective equations for scalar mode perturbations in loop quantum cosmology*, Class. Quant. Grav. 29, 085005 (2012).
40. J. Mielczarek, T. Cailleteau, A. Barrau, and J. Grain, *Anomaly-free vector perturbations with holonomy corrections in loop quantum cosmology*, Class. Quant. Grav. 29, 085009 (2012).
41. T. Cailleteau, L. Linsefors, and A. Barrau, *Anomaly-free perturbations with inverse-volume and holonomy corrections in loop quantum cosmology*, arXiv:1307.5238.
42. M. Bojowald y G. Calcagni, *Observational test of inflation in loop quantum cosmology*, JCAP 03, 032 (2011).

43. T. Cailleteau y A. Barrau, *Gauge invariance in loop quantum cosmology: Hamilton-Jacobi and Mukhanov-Sasaki equations for scalar perturbations*, Phys. Rev. D 85, 123534 (2012).
44. T. Cailleteau, J. Mielczarek, A. Barrau, y J. Grain, *Anomaly-free scalar perturbations with holonomy corrections in loop quantum cosmology*, Class. Quant. Grav. 29, 095010 (2012).
45. A. Barrau, M. Bojowald, G. Calcagni, J. Grain, yd M. Kagan, *Anomaly-free cosmological perturbations in effective canonical quantum gravity*, arXiv:1404.1018.
46. B. Bolliet, A. Barrau, J. Grain y S. Schander, *Observational Exclusion of a Consistent Quantum Cosmology Scenario*, arXiv:1510.08766.
47. I. Agullo, A. Ashtekar, y W. Nelson, *A Quantum Gravity Extension of the Inflationary Scenario*, Phys. Rev. Lett. 109, 251301 (2012).
48. I. Agullo, A. Ashtekar, y W. Nelson, *Extension of the quantum theory of cosmological perturbations to the Planck era*, Phys. Rev. D 87, 043507 (2013).
49. I. Agullo, A. Ashtekar, y W. Nelson, *The pre-inflationary dynamics of Loop Quantum Cosmology: Confronting quantum gravity with observations*, Class. Quantum Grav. 30, 085014 (2013).
50. I. Agullo and N. A. Morris, *Detailed analysis of the predictions of loop quantum cosmology for the primordial power spectra*, arXiv:1509.05693.
51. R. H. Gowdy, *Vacuum space-times with two parameter spacelike isometry groups and compact invariant hypersurfaces: topologies and boundary conditions*, Ann. Phys. 83, 203 (1974).
52. R. H. Gowdy, *Gravitational waves in closed universes*, Phys. Rev. Lett. 27, 826 (1971).
53. M. Martín-Benito, Luis J. Garay, y G.A. Mena Marugán, *Hybrid Quantum Gowdy Cosmology: Combining Loop and Fock Quantizations*, Phys. Rev. D 78, 083516 (2008).

54. M. Fernández-Méndez, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo, y J.M. Velhinho, *Unique Fock quantization of scalar cosmological perturbations*, Phys. Rev. D 85, 103525 (2012).
55. M. Fernández-Méndez, G.A. Mena Marugán, y J. Olmedo, *Hybrid quantization of an inflationary universe*, Phys. Rev. D 86, 024003 (2012).
56. M. Fernández-Méndez, G.A. Mena Marugán, y J. Olmedo, *Hybrid quantization of an inflationary model: The flat case*, Phys. Rev. D 88, 044013 (2013).
57. M. Fernández-Méndez, G.A. Mena Marugán, y J. Olmedo, *Effective dynamics of scalar perturbations in a flat Friedmann-Robertson-Walker spacetime in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D 89, 044041 (2014).
58. L. Castelló Gomar, M. Fernández-Méndez, G.A. Mena Marugán, y J. Olmedo, *Cosmological perturbations in Hybrid Loop Quantum Cosmology: Mukhanov-Sasaki variables*, Phys. Rev. D 90, 064015 (2014).
59. L. Castelló Gomar, M. Martín-Benito, y G.A. Mena Marugán, *Gauge-Invariant Perturbations in Hybrid Quantum Cosmology*, JCAP 1506 (2015) 06, 045.
60. T. Pereira, C. Pitrou, y J. Uzan, *Theory of cosmological perturbations in an anisotropic universe*, JCAP 2007, 006 (2007).
61. C. Pitrou, T. Pereira, y J. Uzan, *Predictions from an anisotropic inflationary era*, JCAP 2008, 004 (2008).
62. B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. 1. The Canonical Theory*, Phys. Rev. 160, 1113 (1967); J. A. Wheeler, *Superspace and the Nature of Quantum Geometrodynamics*, en Batelle Rencontres (Nueva York, 1972), editado por C. M. DeWitt y J. A. Wheeler.
63. R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner, *Gravitation: An Introduction to Current Research* (Wiley, Nueva York, 1962).
64. A. Corichi, J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Quantum Gowdy T3 Model: A Uniqueness Result*, Class. Quantum Grav. 23, 6301 (2006).

65. J. Cortez, G.A. Mena Marugán, R. Serodio, y J.M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of a free scalar field on S^1 with time dependent mass*, Phys. Rev. D 79, 084040 (2009).
66. M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán, and J. Olmedo, *Further improvements in the understanding of isotropic loop quantum cosmology*, Phys. Rev. D 80, 104015 (2009).
67. J. Cortez, G.A. Mena Marugán, y J.M. Velhinho, *Fock quantization of a scalar field with time dependent mass on the three-sphere: unitarity and uniqueness*, Phys. Rev. D 81, 044037 (2010).
68. J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *A Unique Fock Quantization for Fields in Non-Stationary Spacetimes*, JCAP 10, 030 (2010).
69. J. Cortez, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo, y J.M. Velhinho, *A uniqueness criterion for the Fock quantization of scalar fields with time-dependent mass*, Class. Quantum Grav. 28, 172001 (2011).
70. J. Cortez, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo, y J.M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of fields with unitary dynamics in nonstationary spacetimes*, Phys. Rev. D 83, 025002 (2011).
71. J. Cortez, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo, y J.M. Velhinho, *Criteria for the determination of time dependent scalings in the Fock quantization of scalar fields with a time dependent mass in ultrastatic spacetimes*, Phys. Rev. D 86, 104003 (2012).
72. L. Castelló Gomar, J. Cortez, D. Martín-de Blas, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock Quantization of Scalar Fields in Spatially Flat Cosmological Spacetimes*, JCAP 11, 001 (2012).
73. A. Galindo y P. Pascual, Quantum Mechanics I, (Springer-Verlag, Berlin, 1990).
74. J. Cortez, L. Fonseca, D. Martín-de Blas y G. A. Mena Marugán, *Uniqueness of the Fock Quantization of Scalar Fields under Mode Preserving Canonical Transformations Varying in Time*, Phys. Rev. D 87, 044013 (2013).
75. A. A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations* (Springer- Verlag, Nueva York, EE. UU., 1976).

76. K. Kuchar, *Canonical quantization of gravity*, en Relativity, Astrophysics, and Cosmology. ed. W. Israel (Dordrecht: Reidel, 1973); *Canonical methods of quantization*, en Quantum Gravity 2, ed. C.c.J. Isham, R. Penrose, y D. A. Sciama (Oxford: Clarendon Press).
77. M. E. Taylor, *Partial Differential Equations*, Vol. II (Springer-Verlag, Nueva York, EE.UU., 2003).
78. A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis* (Dover, Nueva York, EE. UU., 1999).