Universidad de la República

Facultad de Ciencias

Grupos de reflexiones y Teoría de invariantes

Diego Silvera

Orientador: Álvaro Rittatore

Monografía de la Licenciatura en Matemática

Septiembre de 2015

Índice general

Introducción

En este trabajo monográfico presentaremos algunos aspectos fundamentales de la teoría de *grupos de reflexiones*, manteniendo dos objetivos principales. El primero de ellos es estudiar las principales características de estos grupos, para luego terminar clasificándolos y el segundo consiste en examinar la acción de estos grupos en el álgebra $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Esta monografía está basado principalmente en [Hum], aunque también se emplearon, y se sugieren, los textos [KN] y [GB].

Con este objetivo en mente, dedicaremos el primer capítulo de este trabajo a presentar aspectos relacionados con la teoría de los grupos de reflexiones, haciendo un fuerte énfasis en el estudio de los *sistemas de raíces*. Además de los sistemas de raíces, emplearemos el concepto de *sistema simple*, el cual nos permitirá obtener generadores minimales de los grupo de reflexiones y mostrar que estos grupos admiten presentaciones finitas. También describiremos un *dominio fundamental* para la acción de estos grupos sobre $\mathbb{R}^n$ y estudiaremos los grupos de isotropía de dicha acción.

En el segundo capítulo clasificaremos los grupos de reflexiones finitos, utilizando como principal herramienta los *diagramas de Dynkin*. Seguidamente obtendremos una caracterización de los *grupos de Weyl* en términos de sus diagramas de Dynkin y hallaremos sistemas de raíces para todos los posibles grupos de reflexiones.

Finalmente en el tercer y último capítulo nos abocaremos al estudio de la *teoría de invariantes* de estos grupos. Esto consistirá en dotar a un subgrupo lineal finito G de acción sobre $S := \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, de la cuál obtendremos el álgebra S^G consistente de los polinomios invariantes por G. Mostraremos que S^G es libre como álgebra si y sólo si G es un grupo de reflexiones, y en este caso veremos que S^G es generado por polinomios homogéneos algebraicamente independientes, cuyos grados tienen importantes propiedades aritméticas.

Capítulo 1

Grupos de reflexiones

El objetivo de este capítulo es introducir los grupos de reflexiones, junto con algunos de los conceptos más importantes asociados con su teoría. Nuestra principal herramienta será una buena elección de vectores ("raíces") ortogonales a los hiperplanos de reflexión (1.2). Un conjunto de raíces simples (1.3) nos proverá de un generador eficiente del grupo (1.5), el cual también nos brindará una presentación bastante simple de los grupos de reflexiones (1.9). La última parte del capítulo estará abocada a un número de tópicos geométricos, todos los cuales involucran los subgrupos parabólicos (1.10), como por ejemplos: el polinomio de Poincaré (1.11), los dominios fundamentales (1.12) y el complejo de Coxeter (1.15).

1.1. Reflexiones

Definición 1.1. Sea V un espacio vectorial real con producto interno. Una *reflexión* sobre V es un operador ortogonal s que mapea un vector no nulo α en su opuesto mientras que fija puntualmente $H_\alpha := \{\alpha\}^\perp$.

Observación 1.2. La reflexión s queda totalmente determinada por α, puesto que $V = \mathbb{R}\alpha \oplus H_\alpha$, y por lo tanto escribiremos s_α en lugar de s para indicarlo. Es claro que $s_\alpha = s_{c\alpha}$ para todo $c \in \mathbb{R}$ no nulo, que $s_\alpha^2 = \mathrm{id}$ (s_α tiene orden 2 en $\mathcal{O}(V)$, los operadores ortogonales de V) y además que

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha.$$

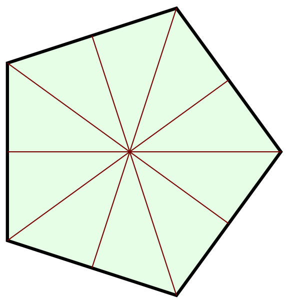
Otra forma de caracterizar a s_α es como el único operador ortogonal cuyo subespacio propio de valor propio 1 es H_α o como el único operador ortogonal diagonalizable cuyo subespacio propio de valor propio -1 es $\mathbb{R}\alpha$.

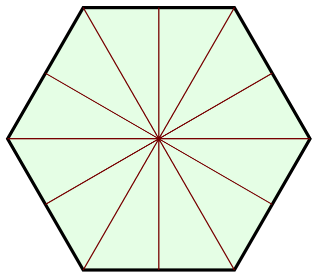
Definición 1.3. Un *grupo de reflexiones finito*, o simplemente *grupo de reflexiones*, es un subgrupo finito W de $\mathcal{O}(V)$ generado por (sus) reflexiones.

El objetivo de este texto es clasificar y describir tales grupos, además de presentar un breve estudio sobre sus polinomios invariantes (véase capítulo 3). Antes de tal tarea presentemos algunos ejemplos:

1. Los grupos diedrales $\mathcal{D}_m$ con $n \geq 3$

   Los movimientos del plano que estabilizan un polígono regular con n arista constan de n rotaciones y n reflexiones por sus ejes de simetría. En cada rotación el centro de la misma coincide con el centro del polígono y su ángulo es un múltiplo de $\frac{2\pi}{n}$. Si n es impar, cada eje de simetría conecta el punto medio de una arista al vértice opuesto. Si n es par, hay $\frac{n}{2}$ ejes de simetría conectando los puntos medios de aristas opuestas y $\frac{n}{2}$ ejes de simetría conectando vértices opuestos.





En cada caso hay n ejes de simetría, siendo un múltiplo de $\frac{\pi}{n}$ el ángulo entre dos ejes consecutivos, y $2n$ movimientos del polígono. Las rotaciones y reflexiones asociadas forman el grupo diedral $\mathcal{D}_n$, que resulta ser un grupo de reflexiones por estar generado por sus reflexiones como veremos ahora.

En efecto, posicionando el centro del polígono en el origen del plano y uno de los vértices en el semieje positivo de Ox, podemos describir matricialmente estos movimientos como:

$$S_k = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right) & -\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \end{pmatrix} \qquad R_k = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \end{pmatrix}$$

donde $k = 0, \ldots, n-1$, S_k es la reflexión a lo largo del eje de simetría que forma un ángulo de $\frac{\pi k}{n}$ con el semieje positivo de Ox y R_k es la rotación antihoraria de ángulo $\frac{2\pi k}{n}$. Para terminar de probar que es un grupo de reflexiones el lector podrá verificar que se cumplen las siguientes relaciones:

$$S_i S_j = R_{i-j}, \qquad R_i^{-1} = R_{n-i}, \qquad R_i S_j = S_{i+j}, \qquad S_i R_j = S_{i-j}, \qquad R_i R_j = R_{i+j}.$$

Veremos en el teorema 1.10 que estos son esencialmente los únicos grupos de reflexiones del plano.

2. El grupo de simetrías A_n con $n \geq 1$

   El grupo de permutaciones S_{n+1} puede ser realizado como un subgrupo de $\mathcal{O}(n+1, \mathbb{R})$, las matrices $(n+1) \times (n+1)$ ortogonales, de la siguiente forma. Hacemos actuar una permutación de S_{n+1} sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ permutando los subíndices de la base canónica $e_1, \ldots, e_{n+1}$, i.e. $\sigma(e_i) = e_{\sigma i}$. Luego una transposión (ij) define una reflexión ya que mapea $e_i - e_j$ en su opuesto y fija su complemento ortogonal. Dado que S_{n+1} es generado por transposiciones, reflexiones bajo este punto de vista, resulta ser un grupo de reflexiones. Considerando S_{n+1} de esta manera como subgrupo de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^{n+1})$, no es difícil de probar, y se deja como ejercicio para el lector, que las únicas reflexiones en S_{n+1} corresponden a transposiciones.

   El grupo S_{n+1} actúa en $\mathbb{R}^{n+1}$ como se describió arriba, pero además es claro que dicha acción deja fijo el subespacio generado por $e_1 + \cdots + e_{n+1}$ y por lo tanto actúa en su complemento ortogonal (de dimensión n) sin dejar puntos fijos salvo el nulo. Llamaremos A_n a S_{n+1} visto como subgrupo de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, bajo la identificación antes establecida. El subíndice n es para indicar que A_n actúa esencialmente sobre un espacio de dimensión n, ver definición 1.4.

3. B_n con $n \geq 2$

   Sea el grupo $B_n := \mathbb{Z}_2^n \rtimes_\varphi S_n, n \geq 2$, donde la acción de S_n sobre $\mathbb{Z}_2^n$ es dado por el mapa $\varphi : S_n \to \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_2^n), \varphi(\sigma)(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_{\sigma(1)}, \ldots, \varepsilon_{\sigma(n)})$. La acción de este grupo sobre $\mathbb{R}^n$ es dada por: S_n permuta las coordenadas, mientras que $\mathbb{Z}_2^n$ les cambia el signo. Luego, B_n resulta ser un grupo de reflexiones, ya que está generado por las transposiciones de S_n y los ε_i de $\mathbb{Z}_2^n$, que resultan ser reflexiones sobre $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto tenemos las reflexiones s_{i-j} de S_n que permutan e_i con e_j, las reflexiones s_i de $\mathbb{Z}_2^n$ que le cambian el signo a e_i y por último aparecen las s_{i+j} que permutan e_i con e_j y además cambian sus signos.

   A diferencia de A_n, es claro que esta acción es esencial sobre $\mathbb{R}^n$.

4. D_n con $n \geq 4$

   Sea $\tau : \mathbb{Z}_2^n \to \{0, 1\}$ el mapa $\tau(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \sum \varepsilon_i$ y $H = \ker(\tau)$. Dado que H tiene índice 2 en $\mathbb{Z}_2^n$, se verifica que $|H| = 2^{n-1}$, además no es díficil de probar que $H \simeq \mathbb{Z}_2^{n-1}$. De manera análoga a B_n, definimos $D_n := H \rtimes_\varphi S_n$, donde la acción de S_n sobre H está dada por el mapa $\varphi : S_n \to \operatorname{Aut}(H), \varphi(\sigma)(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_{\sigma(1)}, \ldots, \varepsilon_{\sigma(n)})$.

Como B_n, el grupo D_n grupo actúa sobre $\mathbb{R}^n$ con S_n permutando las coordenadas mientras que, a diferencia de B_n, H les cambia el signo a una cantidad par de coordenadas. Luego, con las notaciones de B_n, el grupo D_n sólo contiene las reflexiones s_{i-j} y s_{i+j}, ya que s_i sólo le cambia el signo a una coordenada. También como B_n, el grupo D_n es esencial sobre $\mathbb{R}^n$.

El interés geométrico de los grupos de reflexiones es que se presentan frecuentemente como grupos de simetrías de ciertos politopos. Por ejemplo, como observamos $\mathcal{D}_n$ es el grupo de simetrías de un polígono regular de n lados. Si consideramos el n–cubo I^n definido como $I^n = \{\sum_{i=1}^n c_i e_i : |c_i| \leq 1\}$, entonces el grupo de simetrías de I^n es el grupo $B_n = \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$, donde S_n actúa permutando $\{e_1, \ldots, e_n\}$, mientras que $\mathbb{Z}_2^n$ actúa como un cambio de signo sobre $\{e_1, \ldots, e_n\}$. También podemos considerar el n–simplejo $\Delta_n = \{\sum c_i e_i : c_i \geq 0, \sum c_i = 1\}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, resultando entonces que su grupo de simetrías es $A_n = S_{n+1}$.

De ahora en adelante consideraremos la acción de un grupo de reflexiones W sobre V como la acción dada por $w \cdot \lambda := w(\lambda) = w\lambda$. Es claro que esta acción además es una representación de W sobre V.

Definición 1.4. Si W es un grupo de reflexiones que actúa sobre V, decimos que la acción es *esencial* relativa a V si la acción de W en V no deja vectores fijos salvo el nulo; i.e. si $w\lambda = \lambda$ para todo $w \in W$, entonces $\lambda = 0$.

Es claro que si W actúa en V entonces W es esencial en el complemento ortogonal de sus vectores fijos.

1.2. Sistemas de raíces

De ahora en adelante denotaremos por W a un grupo de reflexiones actuando sobre un espacio euclídeo V.

Para entender la estructura interna de W como un grupo abstracto, primero exploraremos la manera en la cual W actúa sobre V. Cada reflexión $s_\alpha \in W$ determina a hiperplano reflectante H_α y una recta $L_\alpha := \mathbb{R}\alpha$ ortogonal a él. El siguiente resultado muestra que W permuta la colección de tales rectas.

Proposición 1.5. *Sea $t \in \mathcal{O}(V)$ y $\alpha \in V$ no nulo, entonces $ts_\alpha t^{-1} = s_{t\alpha}$. En particular, si $w \in W$, entonces $s_{w\alpha} \in W$ si y sólo si $s_\alpha \in W$.*

Demostración. Claramente $ts_\alpha t^{-1}$ mapea $t\alpha$ en su opuesto, por lo tanto sólo resta ver que deja fijo puntualmente $H_{t\alpha}$. Como $\lambda \in H_\alpha$ si y sólo si $t\lambda \in H_{t\alpha}$, ya que $\langle \lambda, \alpha \rangle = \langle t\lambda, t\alpha \rangle$, deducimos que $\left(ts_\alpha t^{-1}\right)(t\lambda) = ts_\alpha\lambda = t\lambda$ si $\lambda \in H_\alpha$. □

Observación 1.6. Nótese que W permuta las rectas L_α, donde s_α varía dentro de W, via $w(L_\alpha) = L_{w\alpha}$. Esta acción no resulta ser transitiva en general: por ejemplo, si consideramos el grupo $\mathcal{D}_4$, entonces las rectas L_α son las rectas generadas por el origen y los puntos $(1,0), (1,1), (0,1), (1,-1)$, y los elementos de $\mathcal{D}_4$ no permutan rectas contiguas.

Por otra parte, observemos que sólo las rectas L_α quedan determinadas por W, y no los propios vectores α. Sin embargo, si consideramos los pares de vectores unitarios de tales rectas, entonces obtenemos un conjunto estable por la acción de W. Además la condición de que los vectores tengan igual longitud no es necesaria, como lo muestran los 4 vectores del ejemplo de arriba junto con sus opuestos. Es este tipo de configuración geométrica es la que nos será de utilidad para la clasificación de los grupos de reflexiones.

Definición 1.7. Decimos que Φ un conjunto finito de elementos no nulos de V es un *sistema de raíces* si satisface:

1. $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$ para todo $\alpha \in \Phi$,

2. $s_\alpha \Phi = \Phi$ para todo $\alpha \in \Phi$.

A los elementos de un tal conjunto los llamaremos *raíces*.

Dado que Φ es finito y s_α es biyectivo para todo $\alpha \in \Phi$, la segunda condición puede ser sustituida por: $s_\alpha(\beta) \in \Phi$ para todo $\alpha, \beta \in \Phi$. Más aún, como $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ tenemos que $\Phi = -\Phi$.

Un sistema de raíces es una reformulación de, en términos de álgebra lineal, del concepto de grupo de reflexiones. Más precisamente, es una traslación al álgebra lineal de la configuración geométrica formada por las hiperplanos asociados con un grupo de reflexiones. Esta traducción es extremadamente importante, ya que el uso de álgebra lineal nos permitirá estudiar los grupos de reflexiones con mucha eficiencia.

Observación 1.8. Dado un grupo de reflexiones W definimos $\Phi_W := \{\alpha : \|\alpha\| = 1, s_\alpha \in W\}$. Es claro que Φ_W es un sistema de raíces y diremos que es el *sistema de raíces asociado a* W. Más en general, diremos que Φ *es un sistema de raíces para* W si: Φ es un sistema de raíces y el grupo W_Φ generado por $\{s_\alpha : \alpha \in \Phi\}$ coincide con W.

El grupo W_Φ resulta ser un grupo de reflexiones ya que está generado por reflexiones y es finito puesto que los s_α, y por lo tanto los elementos de W_Φ, dejan fijos el complemento ortogonal de Φ mientras que permutan los elementos de Φ.

Además, como W y W_{Φ_W} comparten las reflexiones s_α, se concluye que coinciden y por lo tanto cada grupo de reflexiones W puede obtenerse por medio de un sistema de raíces. Observar que todo grupo de reflexiones W puede obtenerse por medio de más de un sistema de raíces. En efecto, si Φ es un sistema de raíces para W, entonces 2Φ también lo es. De hecho, en la observación 1.56 veremos que la principal diferencia entre dos sistemas de raíces de W es la longitud de sus vectores.

Observación 1.9. La definición tradicional de sistema de raíces, procedente de la teoría de álgebras y grupos de Lie, difiere un poco de la definición dada en 1.7. Para evitar confusiones, diremos que un sistema de raíces Φ es *cristalográfico* si satisface la condición adicional:

$$\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle} \in \mathbb{Z}, \quad \text{para todo } \alpha,\beta \in \Phi.$$

Estos enteros son llamados los *enteros de Cartan*. Veremos en la proposición 1.25 que para verificar la condición de cristalografía sobre un sitema de raíces Φ, alcanza con verificarla sobre un conjunto más pequeño. Dado un sistema de raíces cristalográfico Φ, el grupo de reflexiones W generado por las raíces s_α, con $\alpha \in \Phi$, se lo conoce como el *grupo de Weyl* de Φ. Es por este motivo que históricamente se denota a los grupos de reflexiones por la letra W.

El efecto de esta condición adicional sobre Φ, es asegurar que $s_\alpha(\beta)$ se obtiene de β sumando un múltiplo entero de α. Entre otras propiedades, la condición de cristalografía es equivalente a la existencia de un retículo $L \subset \mathbb{R}^n$ tal que $wL = L$ para todo $w \in W$, y en particular podemos ver a W como un subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Durante este texto nos dedicaremos principalmente al estudio general de los grupos de reflexiones, y recién en la sección 2.5 nos centraremos más en los grupos de Weyl.

Cerremos esta sección probando que los únicos grupos de reflexiones esenciales del plano son los diedrales. Este resultado nos será de utilidad dentro del siguiente capítulo, en la clasificación de los grupos de reflexiones.

Teorema 1.10. *Los únicos grupos de reflexiones esenciales sobre* $\mathbb{R}^2$ *son los grupos diedrales.*

Demostración. Es sabido que los operadores ortogonales de $\mathbb{R}^2$ son reflexiones y rotaciones, y que las reflexiones son aquellos operadores de determinante 1 mientras que las reflexiones tienen determinante -1. Supongamos que $W \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ es un grupo de reflexiones y consideremos el mapa $\det_{|W} : W \to \{\pm 1\}$, luego $\ker(\det_{|W})$ consiste en el grupo de las rotaciones de W.

Si W tiene n rotaciones, incluyendo a la identidad, entonces el grupo de las rotaciones en W es un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_n$. En efecto, si consideramos el ángulo de estas rotaciones entre 0 y 2π y una rotación r de ángulo mínimo, entonces r genera las demás rotaciones. Si $r_0 \in W$ una rotación que genera las otras rotaciones, tenemos que r_0 tiene orden n, y por lo tanto el ángulo de esta rotación es $\frac{2k\pi}{n}$ con n y k coprimos. Luego, si tomamos un entero m tal que $mk \equiv 1 \pmod{n}$, se satisface que $r_0^m \in W$ es una rotación de ángulo $\frac{2\pi}{n}$. Como este es el mínimo ángulo que puede tener una rotación en W, podemos deducir que r es una rotación de ángulo $\frac{2\pi}{n}$.

Dado que $\det_{|W}$ es sobreyectivo, puesto que tenemos por lo menos una reflexión en W, entonces el subgrupo de la rotaciones tiene índice 2 en W y tenemos que el orden de W es $2n$, n rotaciones y n reflexiones. Veamos ahora que W consta de los movimientos que estabilizan un polígono regular de n lados, y en particular que es el grupo diedral $\mathcal{D}_n$.

Consideremos $\Phi = \left\{\alpha \in \mathbb{R}^2 : s_\alpha \in W \text{ y } \|\alpha\| = 1\right\}$, es claro que Φ es un sistema de raíces de W y que consta de $2n$ raíces, 2 raíces por cada reflexión de W. Si $\alpha \in \Phi$ es una raíz, entonces $P = \left\{r^k(\alpha)\right\} \subset \Phi$ es un polígono regular de n lados. Es claro que las rotaciones de W y las reflexiones s_γ, con $\gamma \in P$, estabilizan a P. Sea ahora $\beta \in \Phi \setminus \mathbb{P}$. Dado que $\det(s_\beta s_\alpha) = 1$, entonces $s_\beta s_\alpha$ es una rotación y por lo tanto: $s_\beta = s_\alpha r^k$ para algún k. Luego, deducimos que s_β también estabiliza al polígono P, puesto que ya habíamos observado esto para s_α y r. ∎

1.3. Sistemas positivos y simples

Dada la equivalencia entre sistemas de raíces y grupos de reflexiones observada anteriormente, abordaremos el estudio de los grupos de reflexiones por medio de los sistemas de raíces. Para un sistema de raíces $\Phi \subset V$ de W, hemos visto que W es el grupo generado por por todos los s_α con $\alpha \in \Phi$. El principal inconveniente de utilizar los sistemas de raíces como herramienta para la clasificación de los grupos de reflexiones, es que el orden de Φ puede llegar a ser bastante más grande comparado con la dimensión de V. Por ejemplo, cuando W es un grupo diedral, Φ puede tener tantos elementos como W y sin embargo $\dim(V) = 2$.

Para tratar con este problema buscaremos un subconjunto de Φ linealmente independiente, del cual Φ pueda ser reconstruido (ver lema 1.22). A un conjunto con estas características lo llamaremos *sistema simple.*

Definición 1.11. Llamaremos a $\Delta \subset \Phi$ un *sistema simple*, y a sus elementos *raíces simples*, si Δ es una base del subespacio generado por Φ y cada raíz $\alpha \in \Phi$ es una combinación lineal de Δ con coeficientes todos del mismo signo, i.e. todos no negativos o todos no positivos. A las reflexiones s_α con $\alpha \in \Delta$, las llamaremos *reflexiones simples.*

De esta manera cada sistema simple Δ particiona a Φ en dos conjuntos de raíces, aquellos que son combinación lineal positiva de Δ y los otros, que son combinación lineal negativa de Δ. Observar que estos dos conjuntos tienen $\frac{1}{2}\Phi$ elementos, ya que para todo $\alpha \in \Phi$ tenemos $-\alpha \in \Phi$.

Nuestro siguiente objetivo es definir lo que es un *sistema positivo*, lo cual podríamos definirlo como el conjunto de raíces que son combinación lineal positiva de Δ, pero optaremos por definirlo de una manera diferente, aunque, como veremos más adelante, equivalente.

Definición 1.12. Dado un $\mathbb{R}$ espacio vectorial V, diremos que un orden $<$ en V es un *orden total* si es transitivo y satisface

1. Para todo $\lambda, \mu \in V$ sólo una de las premisas $\lambda < \mu, \lambda = \mu, \mu < \lambda$ se satisface,
2. Para todo $\lambda, \mu, \nu \in V : \mu < \nu$ entonces $\mu + \lambda < \nu + \lambda$,
3. Si $\mu < \nu$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $c\mu < c\nu$ si $c > 0$ mientras que $c\mu > c\nu$ si $c < 0$.

Dado un tal orden diremos que $\lambda \in V$ es positivo si $0 < \lambda$, análogamente definimos vectores negativos. Es claro que el conjunto de vectores positivos es cerrado por suma y por multiplicación de escalares positivos.

Tales órdenes además son fáciles de construir puesto que podemos tomar una base ordenada $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ de V y adoptar el correspondiente orden lexicográfico, i.e. $\sum a_i\lambda_i < \sum b_i\lambda_i$ si $a_k < b_k$, con k es el menor índice para el cual $a_i \neq b_i$. Observar que con este orden todos los λ_i resultan positivos.

Definición 1.13. Dado un sistema de raíces Φ, diremos que $\Pi \subset \Phi$ es un *sistema positivo* si consiste de todas aquellas raíces positivas con respecto a algún orden total.

Análogamente definimos sistemas negativos y puesto que las raíces vienen de a pares $\{\alpha, -\alpha\}$, se tiene que todo sistema de raíces se puede escribir como unión disjunta de un sistema positivo y uno negativo. Cuando Π esté fijo, y el correspondiente orden total también, escribiremos $\alpha > 0$ en lugar de $\alpha \in \Pi$.

El siguiente lema es una restricción geométrica que jugará un rol importante en la clasificación de los grupos de reflexiones: si tenemos un sistema simple y α es una de sus raíces, entonces las restantes raíces se hallan dentro del semiespacio opuesto a α determinado por H_α.

Lema 1.14. *Si Δ es un sistema simple en Φ, entonces $\langle\alpha, \beta\rangle \leq 0$ para todo $\alpha \neq \beta$ en Δ.*

Demostración. Si $\langle\alpha, \beta\rangle > 0$, entonces

$$s_\alpha(\beta) = \underbrace{1}_{>0}\beta + \underbrace{\tfrac{-2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}}_{<0}\alpha \in \Phi.$$

Lo que resulta absurdo ya que Δ es un sistema simple y las combinaciones linales son todas con coeficientes del mismo signo. $\square$

De ahora en adelante nos reservaremos las notaciones Δ, Π y Φ para referirnos a sistemas simples, positivos y de raíces respectivamente.

Al contrario de los sistemas positivos, no es evidente la existencia de sistemas simples, pero el siguiente teorema establece una biyección entre estas clases de conjuntos.

Teorema 1.15. *1. Si Δ es un sistema simple en Φ entonces existe un único sistema positivo de Φ que lo contiene, en particular existe un orden total (que no es único en general) para el cual las raíces simples de Δ son positivas.*

2. *Todo sistema positivo* Π *de* Φ *contiene un único sistema simple, en particular los sistemas simples existen.*

Demostración. 1. Si Δ está incluido en un sistema positivo Π, entonces todas las combinaciones lineales no negativas de Δ deben estar en Π y sus opuestas no pueden estar en Π. Por lo tanto podemos caracterizar a Π como las combinaciones no negativas de Δ. Para probar que dicho sistema positivo existe basta con extender Δ a una base ordenada de V y luego definir el orden lexicográfico en esta base como arriba.

2. Probemos primero la unicidad. Supongamos que tenemos un sistema simple Δ en Π, luego podemos caracterizar a Δ como el conjunto de las raíces $\alpha \in \Pi$ que no se pueden escribir como combinación lineal de por lo menos dos raíces de Π con coeficientes estrictamente positivos. En efecto, supongamos que $\alpha \in \Delta$ se escribe como $\alpha = \lambda + \mu$ con $\lambda, \mu \in \Pi$. Luego $\lambda = \sum c_\gamma \gamma$ y $\mu = \sum c'_\gamma \gamma$ con $c_\gamma, c'_\gamma \geq 0$ y $\gamma \in \Delta$, y usando el hecho que Δ es linealmente independiente y que $\mathbb{R}\{\alpha\} \bigcap \Pi = \{\alpha\}$ llegamos a un absurdo.

   Recíprocamente, siempre podemos expresar a α como combinación positiva de Δ y si α no se puede obtener como combinación estrictamente positiva de raíces positivas, deducimos que esta combinación es de una sola raíz. Luego $\alpha \in \Delta$. Esto prueba la unicidad de Δ, ya que hemos caracterizado a Δ como un conjunto de Π.

   Veamos ahora la existencia. Sea $\Delta \subset \Pi$ un conjunto minimal con la propiedad de que cada raíz de Π se obtiene como combinación lineal no negativa de Δ (lo que no quita a que alguna raíz de Π se exprese de otra manera). Claramente dicho conjunto existe, sólo debemos probar que es linealmente independiente. Esto último será una consecuencia de que

$$\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0 \text{ para todo } \alpha \neq \beta \text{ en } \Delta.$$

   Observar que gracias al lema 1.14 esta desigualdad sería una consecuancia inmediata, si supieramos que Δ ya es un sistema simple. Asumiendo la desigualdad anterior, supongamos que $\sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha = 0$ con algún $c_\alpha \neq 0$ y reescribámosla como $\sigma := \sum b_\beta \beta = \sum c_\gamma \gamma$, donde la suma se tomó sobre conjuntos disjuntos de Δ y los coeficientes son positivos. Entonces $\sigma > 0$ y

$$0 \leq \langle \sigma, \sigma \rangle = \left\langle \sum b_\beta \beta, \sum c_\gamma \gamma \right\rangle = \sum b_\beta c_\gamma \langle \beta, \gamma \rangle \leq 0.$$

   Esto fuerza a $\sigma = 0$, lo que es absurdo y por lo tanto Δ debe ser linealmente independiente. Veamos que se verifica la desigualdad. Supongamos por absurdo que fallara para algún par $\alpha, \beta \in \Delta$, luego $s_\alpha(\beta) = \beta - c\alpha$ con $c = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} > 0$. Como $s_\alpha(\beta) \in \Phi$, entonces él o su opuesto debe estar en Π.

   Si $s_\alpha(\beta) \in \Pi$, se tiene que $s_\alpha(\beta) = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma$ con $c_\gamma \geq 0$. Si $1 - c_\beta > 0$ $(c_\beta < 1)$ tenemos que

$$s_\alpha(\beta) = \beta - c\alpha = c_\beta \beta + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma,$$

   por lo tanto $(1 - c_\beta)\beta$, y consecuentemente β, es combinación lineal no negativa de $\Delta \setminus \{\beta\}$, contradiciendo la minimalidad de Δ. Si $c_\beta \geq 1$ tenemos que $0 = (c_\beta - 1)\beta + c\alpha + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma$, lo que resulta absurdo ya que es una combinación lineal no negativa de raíces positivas y por lo tanto resulta ser positiva por la definición de orden total. Luego $s_\alpha(\beta)$ no puede ser positiva.

   Un argumento similar muestra que $s_\alpha(\beta)$ tampoco puede ser negativa, aquí discutiendo si $c + c_\alpha > 0$ o $c + c_\alpha \leq 0$, lo que termina la prueba.

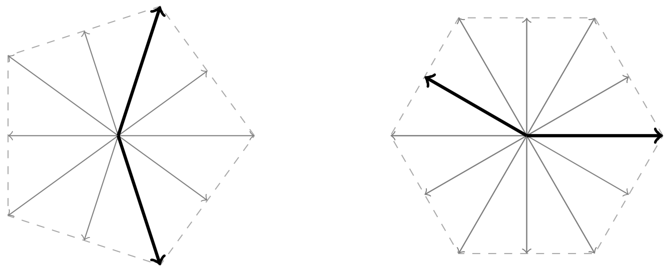
□

El cardinal de cualquier sistema simple es un invariante de Φ, ya que es la dimensión del subespacio que genera en V. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.16. Si W un grupo de reflexiones, llamaremos *rango* de W ($\mathrm{rg}(W)$) al cardinal de cualquiera de sus sistemas de simples.

Resulta entonces que $\mathcal{D}_n$ tiene rango 2 mientras que A_n tiene rango n. Veamos a continuación una manera explícita de construir un sistema simple para estos grupos.

Ejemplo 1.17. En el caso de D_m, el ángulo entre cualquier par de raíces es un múltiplo de $\frac{\pi}{m}$, y podemos con una raíz α cualquiera y una raíz β adyacente a $-\alpha$, como en la figura, formar un sistema simple de raíces. En efecto, este conjunto es linealmente independiente y las demás raíces son combinación lineal positiva o negativa de éstas.



Observemos también que cualquiera que sea la elección de las raíces simples el ángulo entre ellas será de $\pi - \frac{\pi}{n}$. Esta pequeña observación nos será de mucha utilidad próximamente.

Ejemplo 1.18. Las reflexiones de A_n son las reflexiones s_{ij} con respecto a $e_i - e_j$ con $i, j = 1, \ldots, n+1$ e $i \neq j$, como mencionamos cuando definimos A_n. Luego un sistema simple de raíces de A_n es $\Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_n - e_{n+1}\}$, ya que es linealmente independiente y todas las raíces o sus opuestas son combinación lineal positiva de éstas. En efecto, si $i < j$, entonces $e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + \cdots + (e_{j-1} + e_j)$, y si $i > j$ se tiene que $-(e_i - e_j)$ es combinación lineal positiva de Δ.

1.4. Conjugación de sistemas simples y positivos

Dado $w \in W$ y Δ un sistema simple de Φ, con su correspondiente Π sistema positivo, entonces $w\Delta$ es otro sistema simple, con $w\Pi$ como sistema positivo. En efecto, $w\Delta$ sigue siendo una base de $\mathbb{R}\Phi$ y mantiene la condición de que las raíces sean combinación lineal con coeficientes del mismo signo ya que w permuta las raíces. Los siguientes dos resultados probarán además que esta acción es transitiva, i.e. que dados dos sistemas simples Δ y Δ' (resp. sistemas positivos Π y Π'), existe $w \in W : \Delta = w\Delta'$ (resp. $w\Pi = \Pi'$).

Dado que los elementos de W son operadores ortogonales, este resultado además muestra que la "distribución geométrica" de los sistemas simples y positivos es característica del grupo W.

Proposición 1.19. *Sea Δ un sistema simple contenido en el sistema positivo Π. Si $\alpha \in \Delta$, entonces $s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\}) = \Pi \setminus \{\alpha\}$.*

Demostración. Sea $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$, luego $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma$ con $c_\gamma \geq 0$. Dado que $\mathbb{R}\{\alpha\} \bigcap \Pi = \{\alpha\}$, tenemos que $c_{\gamma_0} > 0$ para algún $\gamma_0 \neq \alpha$. Aplicando s_α a ambos lados obtenemos:

$$s_\alpha(\beta) = \beta - c\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma - c\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta \setminus \{\alpha\}} c_\gamma \gamma + (c_\alpha - c)\alpha \in \Phi$$

que es una combinación lineal de Δ con $c_{\gamma_0} > 0$ y como todos los coeficientes tienen el mismo signo, deducimos que $s_\alpha(\beta)$ debe ser positivo. Si $s_\alpha(\beta) = \alpha$, entonces $\beta = s_\alpha s_\alpha(\beta) = s_\alpha(\alpha) = -\alpha \notin \Pi$. Luego s_α mapea $\Pi \setminus \{\alpha\}$ en sí mismo inyectivamente y por lo tanto biyectivamente, dado que $\Pi \setminus \{\alpha\}$ es finito. $\square$

Aunque esta proposición es clave para el siguiente teorema, este resultado será de utilidad en repetidas ocasiones para distinguir cuando una raíz es una raíz simple α dada, ya que α es la única raíz positiva que se hace negativa por s_α.

Teorema 1.20. *Cualquier par de sistemas positivos (resp. simples) en Φ son conjugados por la acción de W, i.e. si $\Pi, \Pi' \subset \Phi$ son dos sistemas positivos (resp. si Δ y Δ' son sistemas simples), entonces existe $w \in W$ tal que $w(\Pi) = \Pi'$ (resp. $w(\Delta) = \Delta'$).*

Demostración. Sean Π y Π' dos sistemas positivos, entonces cada uno tiene la mitad de las raíces de Φ. Procedamos por inducción en $r = |\Pi \cap -\Pi'|$. Si $r = 0$ luego $\Pi = \Pi'$ y basta tomar $w = \mathrm{id} \in W$. Si $r > 0$, entonces Δ, el sistema simple de Π, no puede estar contenido en Π' ya que entonces $\Pi = \Pi'$. Luego como $\Phi = \Pi' \cup -\Pi'$ podemos elegir $\alpha \in \Delta$ con $\alpha \in -\Pi'$. La proposición anterior asegura que

$$|s_\alpha(\Pi) \cap -\Pi'| = |(\{-\alpha\} \cup \Pi \setminus \{\alpha\}) \cap -\Pi'| = r - 1$$

y por hipótesis inductiva aplicada a $s_\alpha\Pi$ y Π' tenemos $w \in W$ para el cual $w(s_\alpha\Pi) = \Pi'$. $\square$

1.5. Generación por reflexiones simples

En la definición original de grupo de reflexiones pedíamos que W fuese generado por el conjunto de reflexiones que contiene. En esta sección probaremos que para generar W alcanza con considerar el conjunto de las reflexiones simples, y que además éste es un generador minimal.

Definición 1.21. Sean Δ un sistema simple de Φ y $\beta \in \Phi$. Si $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \alpha$ definimos la *altura* de β relativa a Δ como $\mathrm{ht}(\beta) = \sum c_\alpha$.

Si bien esta definición depende del sistema simple elegido esto no habrá de causar confusiones posteriores ya que trabajaremos con un sistema simple fijo. Además es claro que $\mathrm{ht}(\beta) = 1$ si $\beta \in \Delta$.

Lema 1.22. *Dado Δ, para todo $\beta \in \Phi$ existe $w \in W : w\beta \in \Delta$, i.e. $\Phi = W\Delta$. Más aún, w es producto de reflexiones simples.*

Demostración. Sea W' el subgrupo de W generado por los s_α, con α una raíz simple. Sea $\beta \in \Pi$ y consideremos $W'\beta \cap \Pi$. Este conjunto es no vacío, ya que contiene a β, y por lo tanto podemos considerar una raíz $\gamma \in W'\beta\cap\Pi$ de altura mínima con respecto a Δ.

Probemos que $\gamma \in \Delta$. Si $\gamma = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\alpha$ con $c_\alpha \geq 0$, entonces $0 < \langle\gamma,\gamma\rangle = \sum c_\alpha \langle\gamma,\alpha\rangle$ y por lo tanto $\langle\gamma,\alpha\rangle > 0$ para algún $\alpha \in \Delta$. Si $\gamma = \alpha$ está y de lo contrario se considera $s_\alpha(\gamma)$ que resulta positiva por la proposición 1.19. Como $s_\alpha(\gamma)$ se obtiene de γ sustrayendo un múltiplo positivo de α, entonces $\mathrm{ht}\,(s_\alpha(\gamma)) < \mathrm{ht}(\gamma)$. Pero $s_\alpha(\gamma) \in W'\beta\cap\Pi$, ya que $s_\alpha \in W'$ y $\gamma = w\beta$ con $w \in W'$, contradiciendo la minimalidad de γ. Luego $\gamma = \alpha$.

Sea ahora $\beta \in -\Pi$, entonces tenemos $w \in W'$ tal que $w(-\beta) = \alpha \in \Delta$ y por lo tanto $s_\alpha(w(\beta)) = s_\alpha(-\alpha) \in \Delta$. $\square$

Teorema 1.23. *Sea Δ un sistema simple de W, entonces W es generado por las reflexiones simples s_α con $\alpha \in \Delta$.*

Demostración. Como en el lema anterior, sea W' el grupo generado por las reflexiones simples. Nótese que en el mismo lema hemos probado que la W'–órbita de una raíz β cualquiera contiene una raíz simple de Δ, y por lo tanto $\Phi = W'\Delta$.

Sabemos que W es generado por los s_β con $\beta \in \Phi$, luego podemos obtener un $w \in W'$ y $\alpha \in \Delta$ tales que $\beta = w\alpha$. Ahora por la proposición 1.5 tenemos que $ws_\alpha w^{-1} = s_{w\alpha} = s_\beta$ y por lo tanto los s_α con $\alpha \in \Delta$ generan W. $\square$

Lema 1.24. *Dado un sistema simple Δ, entonces ningún subconjunto propio de él genera W. Es decir Δ es un generador minimal.*

Demostración. Supongamos que $\alpha \in \Delta$ es tal que $s_\alpha = s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_r}$ con $s_\alpha \neq s_{\alpha_i}$ para todo $i = 1,\dots,r$. Luego tenemos que:

$$\alpha = s_\alpha(-\alpha) = s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_r}(-\alpha).$$

Pero si desarrollamos $\alpha = s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_r}(-\alpha)$ tendremos que es α es $-\alpha$ más una combinación lineal de los $-\alpha_i$, lo que es absurdo ya que $\{\alpha, \alpha_1 \dots \alpha_r\} \subset \Delta$ es linealmente independiente. $\square$

Veamos ahora que para probar la condición de cristalografía (ver observación 1.9) sobre un sistema de raíces Φ, alcanza con verificarla sobre el sistema simple $\Delta \subset \Phi$.

Proposición 1.25. *Sean Φ un sistema de raíces y $\Delta \subset \Phi$ un sistema simple. Si para todo $\alpha,\beta \in \Delta$ se satisface:*

$$\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z},$$

entonces Φ es un sistema de raíces cristalográfico. Más aún, cada raíz de Φ es una $\mathbb{Z}$–combinación lineal de raíces de Δ.

Demostración. Sea $\mu \in \Phi$, del lema 1.22 podemos obtener $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \Delta$ tales que $\mu = s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_r}(\alpha)$. Dado que $\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}$ para todo $\alpha,\beta \in \Delta$, desarrollando la igualdad anterior obtenemos que

$$\mu = s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_r}(\alpha) = s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_{r-1}}(\alpha + z_r\alpha_r) = s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_{r-2}}(\alpha + z_r\alpha_r + z_{r-1}\alpha_{r-1}) = \cdots$$

con $z_i \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, todas las raíces de Φ son $\mathbb{Z}$–combinaciones lineales de Δ.

Sean $\mu, \eta \in \Phi$ y veamos, con tres posibles casos, que $\frac{2\langle\mu,\eta\rangle}{\langle\eta,\eta\rangle} \in \mathbb{Z}$.

1. Supongamos que $\eta = \beta$ es una raíz simple, entonces $\mu = \sum_{\alpha_i \in \Delta} z_i \alpha_i$ con $z_i \in \mathbb{Z}$, de donde deducimos que
$$\frac{2\langle \mu, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = \sum_{\alpha_i \in \Delta} z_i \frac{2\langle \alpha_i, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \in \mathbb{Z}.$$

2. Supongamos ahora que $\mu = \alpha$ es simple. Por el lema 1.22 tenemos $w \in W$ y $\beta \in \Delta$ tales que $\eta = w(\beta)$ y de la proposición 1.5 deducimos que $s_\eta = s_{w\beta} = w s_\beta w^{-1}$. Luego
$$\alpha - \frac{2\langle \alpha, \eta \rangle}{\langle \eta, \eta \rangle}\eta = s_\eta(\alpha) = w s_\beta w^{-1}(\alpha) = w\left(w^{-1}(\alpha) - \frac{2\langle w^{-1}(\alpha), \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle}\beta\right) = \alpha - \frac{2\langle w^{-1}(\alpha), \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle}\eta.$$
Como β es una raíz simple deducimos que $\frac{2\langle w^{-1}(\alpha), \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \in \mathbb{Z}$, además es claro que $\frac{2\langle \alpha, \eta \rangle}{\langle \eta, \eta \rangle} = \frac{2\langle w^{-1}(\alpha), \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle}$.

3. Finalmente, en el caso en que ninguna de las raíces μ y η son simples, podemos proceder de manera análoga al primer caso y concluir, usando el segundo, que $\frac{2\langle \mu, \eta \rangle}{\langle \eta, \eta \rangle} \in \mathbb{Z}$.

□

Proposición 1.26. *Si $\beta \in \Pi \setminus \Delta$ entonces $ht(\beta) > 1$.*

Demostración. Como en la prueba del lema 1.22, tenemos una raíz simple $\gamma \in W\beta \cap \Pi$ de altura mínima. Luego $\mathrm{ht}(\beta) \geq \mathrm{ht}(\gamma) = 1$, por lo tanto para probar la desigualdad estricta alcanza con probar que existe $\alpha \in \Delta$ tal que $\mathrm{ht}(s_\alpha(\beta)) < \mathrm{ht}(\beta)$. Dado que $s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$, es suficiente con ver $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ para algún $\alpha \in \Delta$. Supongamos por absurdo que $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ para todo $\alpha \in \Delta$ y escribamos $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$ con $c_\alpha \geq 0$; luego
$$0 < \langle \beta, \beta \rangle = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \langle \alpha, \beta \rangle \leq 0,$$
por lo que $\beta = 0$, lo que resulta absurdo. □

Observación 1.27. Esta última proposición tiene una interpretación geométrica sencilla, las raíces no simples de Φ (con respecto al sistema simple Δ) quedan fuera de la clausura convexa de $\Delta \cup \{0\}$. En otras palabras, dentro de la clasura convexa de un sistema simple las únicas raíces que pueden hallarse son las simples.

1.6. La función longitud

Habiendo visto que W es generado por alguna de sus reflexiones, probaremos en la sección 1.9 que W, visto como grupo abstracto, se *presenta* usando estos generadores y relaciones adecuadas. Estas relaciones no son más que
$$(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1,$$
para todo $\alpha, \beta \in \Delta$, donde $m(\alpha, \beta)$ denota el orden del $s_\alpha s_\beta$ en W. Por lo tanto estas evidentes relaciones determinan completamente a W.

Recordemos que por *presentación* de un grupo G, se entiende un conjunto S y un subconjunto R del grupo libre F_S generado por S, tal que G es isomorfo a F_S/N, siendo $N \subset F_S$ el grupo normal generado por R. En nuestro caso $S = \Delta$ y $R = \left\{(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} : \alpha, \beta \in \Delta\right\}$.

Antes de obtener esta presentación de W, debemos estudiar más a fondo la manera en la cual un $w \in W$ arbitrario se puede descomponer como producto de reflexiones simples. Este será el contenido de esta sección y la siguiente.

Definición 1.28. Sean $\Delta \subset \Phi$ y $w \in W$, luego $w = s_1 \cdots s_r$ con $s_i = s_{\alpha_i}$ para algún $\alpha_i \in \Delta$. Definimos la *longitud* $l(w)$ de w (relativo a Δ) como el menor de los r para el cual dicha expresión existe, y llamaremos a una de estas expresiones *reducida*. Convendremos que $l(1) = 0$.

Observación 1.29. Claramente $l(w) = 1$ si y sólo si $w = s_\alpha$ para algún $\alpha \in \Delta$ y $l(w) = l\left(w^{-1}\right)$ ya que los s_α tienen orden 2. Otra propiedad sencilla de la función longitud es que $\det(w) = (-1)^{l(w)}$, puesto que el determinante de una reflexión es -1. De esto se sigue que $l(ww')$ y $l(w) + l(w')$ tienen la misma paridad y por lo tanto si $\alpha \in \Delta$, tenemos que $l(s_\alpha w)$ es $l(w) + 1$ o $l(w) - 1$.

Definición 1.30. Dado un sistema positivo Π y $w \in W$, definimos $\Pi(w) = \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$ y $n(w) = |\Pi(w)|$, que no es nada más que la cantidad de raíces positivas hechas negativas por w.

Observar que $n(w) = n\left(w^{-1}\right)$ ya que $\Pi \cap w^{-1}(-\Pi) = w^{-1}\left(w\Pi \cap -\Pi\right) = -w^{-1}\left(\Pi \cap w(-\Pi)\right)$, que tienen la misma cantidad de elementos que $\Pi \cap w(-\Pi)$.

Mostraremos en la siguiente sección que $l(w) = n(w)$, siendo el caso en el que $w = s_\alpha$ con $\alpha \in \Delta$, el contenido de la proposición 1.19.

Lema 1.31. *Sea $\alpha \in \Delta$ y $w \in W$, entonces*

1. $w(\alpha) > 0 \Leftrightarrow n(ws_\alpha) = n(w) + 1$.
2. $w(\alpha) < 0 \Leftrightarrow n(ws_\alpha) = n(w) - 1$.
3. $w^{-1}(\alpha) > 0 \Leftrightarrow n(s_\alpha w) = n(w) + 1$.
4. $w^{-1}(\alpha) < 0 \Leftrightarrow n(s_\alpha w) = n(w) - 1$.

Demostración. Observar que los recíprocos son una consecuencia inmediata de los enunciados directos. Por lo tanto, alcanza sólo con probar las implicancias directas.

Si $w\alpha > 0$, entonces $\Pi(ws_\alpha)$ es la unión disjunta de $s_\alpha\Pi(w)$ y $\{\alpha\}$ gracias a la proposición 1.19. En efecto,

$$\Pi(ws_\alpha) = \Pi \cap s_\alpha w^{-1}(-\Pi) = s_\alpha\left(s_\alpha\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)\right) = s_\alpha\left((\{-\alpha\} \cup \Pi \setminus \{\alpha\}) \cap w^{-1}(-\Pi)\right) = s_\alpha\Pi(w) \cup \{\alpha\}.$$

Si $w\alpha < 0$, el mismo resultado implica que $s_\alpha\Pi(ws_\alpha) = \Pi(w) \setminus \{\alpha\}$, donde $\alpha \notin \Pi(w)$. Esto prueba 1. y 2. y para obtener 3. y 4. basta con reemplazar w por w^{-1} y usar el hecho que $n(w^{-1}s_\alpha) = n(s_\alpha w)$. □

Corolario 1.32. *Si $w \in W$ se escribe como producto de reflexiones simples $w = s_1 \cdots s_r$, entonces $n(w) \leq r$. En particular $n(w) \leq l(w)$.*

Demostración. Como construimos la expresión de w en r pasos, entonces el valor de $n(w)$, inicialmente 0, puede incrementarse a lo sumo de a 1 en cada paso por el lema anterior. □

1.7. Condiciones de eliminación e intercambio

El siguiente resultado muestra como una expresión de w puede reducirse si es que aún no está reducida. Observemos que dada una expresión no reducida de w, de ser posible una reducción de dicha expresión, entonces esta reducción debería darse por una cantidad par de reflexiones, ya que el determinante de una reflexión es -1.

Teorema 1.33. *Fijemos un sistema simple Δ. Sea $w = s_1 \cdots s_r$ una expresión de w como producto de reflexiones simples, con $s_i = s_{\alpha_i}$ y posibles repeticiones. Si $n(w) < r$, entonces existen índices $1 \leq i < j \leq r$ que satisfacen:*

1. $\alpha_i = s_{i+1} \cdots s_{j-1}(\alpha_j)$,
2. $s_{i+1}s_{i+2} \cdots s_j = s_i s_{i+1} \cdots s_{j-1}$. *En particular $w = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots \widehat{s_j} \cdots s_r$, donde $\widehat{\ }$ denota omisión.*

Demostración.

1. Si $s_1 \cdots s_{j-1}(\alpha_j) > 0$ para todo $j \leq r$, entonces aplicando reiteradas veces la parte 1 del lema 1.31 deducimos que $n(w) = r$. Luego existe $j \leq r$ tal que $s_1 \cdots s_{j-1}(\alpha_j) < 0$. Como $\alpha_j > 0$ tenemos que existe $i < j$ tal que $s_i(s_{i+1} \cdots s_{j-1})(\alpha_j) < 0$, mientras que $s_{i+1} \cdots s_{j-1}(\alpha_j) > 0$ (se entiende que $s_{i+1} \cdots s_{j-1} = 1$ si $i = j - 1$). Luego por la proposición 1.19 aplicada a la reflexión s_i tenemos que $\alpha_i = s_{i+1} \cdots s_{j-1}(\alpha_j)$, la única raíz que cambia de signo por $s_i = s_{\alpha_i}$.

2. Tomando $\alpha = \alpha_j$ y $w' = s_{i+1} \cdots s_{j-1}$ y aplicando la proposición 1.5 obtenemos

$$(s_{i+1} \cdots s_{j-1})s_j(s_{j-1} \cdots s_{i+1}) = s_i.$$

Luego, multiplicando a derecha ambas lados por $s_{i+1} \cdots s_{j-1}$ obtenemos la identidad deseada.

□

Corolario 1.34. *Si $w \in W$, entonces $n(w) = l(w)$. En particular $l(w) \leq |\Pi|$.*

Demostración. Del corolario 1.32 sabemos que $n(w) \leq l(w)$. Si $n(w) < l(w) = r$ luego la parte de 3 del teorema anterior permite reescribir a w como producto de $r-2$ reflexiones, contrario a la hipótesis de la minimalidad de r. $\square$

Corolario 1.35. *Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Delta$ son distintas raíces simples, con reflexiones simples $s_1, \ldots, s_r$ respectivamente, entonces $l(s_1 \cdots s_r) = r$.*

Demostración. Por inducción en r. Si $r = 1$ es claro. Si $r > 1$, entonces

$$s_1 \cdots s_r (\alpha_{r+1}) = s_1 \cdots s_{r-1} (\alpha_{r+1} + c_r\alpha_r) = s_1 \cdots s_{r-2} (\alpha_{r+1} + c_r\alpha_r + c_{r-1}\alpha_{r-1}) = \cdots = \alpha_{r+1} + \sum_{i=1}^{r} c_i\alpha_i.$$

es una combinación lineal de $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+1}$. Dado que las raíces α_i son un conjunto linealmente independiente, luego de desarrollar la expresión anterior tenemos que el coeficiente que multiplica a α_{r+1} es 1 y por lo tanto $s_1 \cdots s_r (\alpha_{r+1}) > 0$. Se sigue entonces que por el lema 1.31 y por hipótesis de inducción que $l(s_1 \cdots s_{r+1}) = l(s_1 \cdots s_r) + 1 = r + 1$. $\square$

Sabiendo que las funciones l y n son idénticas podemos reformular el contenido del lema 1.31 como: multiplicar w a derecha por $s_\alpha(\alpha \in \Delta)$ incrementa la longitud en 1 si $w\alpha > 0$ y la disminuye en 1 si $w\alpha < 0$.

Podemos reinterpretar la parte 2. del teorema 1.33 como una *condición de eliminación*: dada una expresión $w = s_1 \cdots s_r$ que no está reducida, entonces existen subíndices $1 \leq i < j \leq r$ tal que $w = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots \widehat{s_j} \cdots s_r$. La sucesiva omisión de pares de factores termina con una expresión reducida.

Observación 1.36. Para entender mejor lo que el corolario 1.34 dice será útil enumerar, para un w dado, el conjunto $\Pi(w)$, ya que $|\Pi(w)| = n(w) = l(w)$ tendría alguna relación con una expresión reducida $w = s_1 \cdots s_r$. De hecho, dada una tal expresión, podemos considerar las raíces

$$\beta_i = s_r s_{r+1} \cdots s_{i+1}(\alpha_i) \text{ con } \beta_r := \alpha_r.$$

Probemos que $\Pi(w) = \{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$ y que los β_i son distintos. Para ver esto, sea $\beta \in \Pi(w)$. Como $\beta > 0$ y $w\beta < 0$, podemos encontrar $i \leq r$ tal que $s_{i+1} \cdots s_r(\beta) > 0$ mientras que $s_i s_{i+1} \cdots s_r(\beta) > 0$, de nuevo, en caso de que $i = r$ se interpreta $s_{i+1} \cdots s_r = 1$. Como $s_{i+1} \cdots s_r(\beta)$ es enviado por s_i a una raíz negativa, esto fuerza que $s_{i+1} \cdots s_r(\beta) = \alpha_i$ y por ende $\beta = \beta_i$. Luego $\Pi(w) \subset \{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$ y como $\Pi(w)$ tiene r elementos, entonces deben ser iguales y por ende los β_i son distintos.

Teorema 1.37 (Condición de intercambio)**.** *Sea $w = s_1 \cdots s_r$ una expresión de w no necesariamente reducida. Si $l(ws) < l(w)$ para alguna reflexión simple $s = s_\alpha$, entonces existe un índice i para el cual $ws = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_r$ y por lo tanto $w = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_r s$. En particular, w tiene una expresión reducida terminada en s si y sólo si $l(ws) < l(w)$.*

Demostración. Por el lema 1.31 la hipótesis $l(ws) < l(w)$ es equivalente a $w\alpha < 0$. Repitiendo la prueba del teorema 1.33 con la expresión $ws = s_1 \cdots s_r s$, podemos tomar $j = r + 1$ como en la parte 1 y concluir como en la parte 2 que

$$ws = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_r,$$

obteniendo la expresión deseada para w. $\square$

1.8. Acción simplemente transitiva y el elemento más largo de W

El teorema 1.20 expresa que W permuta los sistemas positivos (resp. simples) en una acción transitiva. El corolario 1.34 inmediatamente implica el siguiente resultado, el cual muestra que dicha acción de W es simplemente transitiva, i.e. es inyectiva.

Teorema 1.38. *Sea Δ un sistema simple con correspondiente sistema positivo Π. Las siguientes condiciones sobre $w \in W$ son equivalentes:*

1. $w\Pi = \Pi$;
2. $w\Delta = \Delta$;
3. $n(w) = 0$;

4. $l(w) = 0$;

5. $w = 1$. □

Observación 1.39. Una consecuencia del teorema 1.38 es que el orden de W coincide con la cantidad de sus sistemas simples y por lo tanto también con la de sistemas positivos. Es claro que, fijando un sistema simple Δ, tenemos el mapa $w \mapsto w\Delta$, que es sobreyectivo por la transitividad mostrada anteriormente e inyectiva puesto que si $w\Delta = w'\Delta$, luego $w^{-1}w'\Delta = \Delta$ y por ende $w = w'$.

Observación 1.40. Es claro que dado un sistema positivo Π, con un cierto orden total, entonces $-\Pi$ también es un sistema positivo con el orden total opuesto al que define a Π. Luego existe un único $w_0 \in W$ tal que $w_0(\Pi) = -\Pi$. Más aún, $l(w_0) = n(w_0) = |\Pi|$, siendo esta la mayor longitud que puede tener un elemento de W, y w_0 es el único de longitud $|\Pi|$. En particular $w_0^{-1} = w_0$, ya que $l(w_0^{-1}) = l(w_0)$.

Usando el lema 1.31 podemos caracterizar a w_0 como el único $w \in W$ que satisface $l(ws_\alpha) < l(w)$ para todo $\alpha \in \Delta$. Esto tiene la interesante consecuencia que partiendo de cualquier expresión reducida $w = s_1 \cdots s_r$ podemos multiplicar sucesivamente a derecha por reflexiones simples, incrementando de a 1 la longitud, hasta no poderlo aumentar más y por ende obtener w_0. Por lo tanto $w_0 = ww'$ con $l(w_0) = l(w) + l(w')$ para algún $w' \in W$. Esta conclusión también puede reformularse como

$$l(w_0 w) = l(w_0) - l(w) = |\Pi| - l(w) \text{ para todo } w \in W.$$

1.9. Generadores y relaciones

Ya estamos listos para mostrar la presentación de W que adelantamos al inicio de la sección 1.6. Recordar que $m(\alpha, \beta)$ denota el orden del producto $s_\alpha s_\beta$ en W. Observar que para todo $\alpha, \beta \in \Delta$ distintos, tenemos que $m(\alpha, \alpha) = 1$ y que $m(\alpha, \beta) = 2$ si y sólo si s_α y s_β conmutan, si y sólo si α y β son perpendiculares. Esto es consecuencia de que $s_\alpha s_\beta$ es una rotación de dos veces el ángulo entre α y β.

Teorema 1.41. *Fijemos un sistema simple Δ en Φ. Entonces W es isomorfo como grupo al grupo libre generado por el conjunto $S := \{\overline{s}_\alpha : \alpha \in \Delta\}$, sujeto a las relaciones:*

$$(\overline{s}_\alpha \overline{s}_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1 \ (\alpha, \beta \in \Delta).$$

Demostración. Sean T el grupo libre con base S, el conjunto de las relaciones $R = \left\{(\overline{s}_\alpha \overline{s}_\beta)^{m(\alpha,\beta)}\right\}$, N el subgrupo normal de T generado por R y $\varphi : T \to W$ el morfismo de grupo que mapea el elemento $\overline{s}_\alpha \in T$ en su correspondiente $s_\alpha \in W$. Claramente φ es sobreyectivo y por lo tanto sólo debemos probar que su núcleo es N. En consecuencia debemos probar que para toda relación en W del tipo

$$s_1 \cdots s_r = 1 \text{ (donde } s_i = s_{\alpha_i}, \text{ con } \alpha_i \in \Delta), \tag{1.1}$$

se tiene que $\bar{s}_1 \cdots \bar{s}_r \in N$ (donde $\bar{s}_i = \bar{s}_{\alpha_i}$ con $\alpha_i \in \Delta$).

Con el fin de obtener una prueba más clara dividiremos la demostración del teorema en pasos.

1. Notar que r debe ser par ya que $\det(s_i) = -1$. Si $r = 2$, la ecuación nos queda $s_1 s_2 = 1$ y por lo tanto $s_1 = s_2$. Luego la ecuación (1.1) se vuelve $s_1^2 = 1$ en W, que es una de las relaciones dadas.

2. Procedamos ahora por inducción en $r = 2q$ con $q > 1$. Usando que $s_i^2 = 1$, la ecuación (1.1) puede ser reescrita como

$$s_1 \cdots s_{q+1} = s_r \cdots s_{q+2}.$$

Puesto que el largo del lado derecho de la ecuación es a lo sumo $q-1$, el lado izquierdo no puede ser una expresión reducida y aplicando el teorema 1.33 tenemos índices i y j tales que $1 \leq i < j \leq q+1$ y

$$s_{i+1} \cdots s_j = s_i \cdots s_{j-1}, \tag{1.2}$$

lo que equivale a

$$s_i \cdots s_{j-1} s_j \cdots s_{i+1} = 1. \tag{1.3}$$

3. Si la relación (1.3) involucra menos de r reflexiones simples, i.e. si $i \neq 1$ o $j \neq q+1$, por hipótesis de inducción puede ser derivada de las relaciones en R, i.e. $\bar{s}_i \cdots \bar{s}_{j-1}\bar{s}_j \cdots \bar{s}_{i+1} \in N$. Luego $\bar{s}_{i+1} \cdots \bar{s}_j = n\bar{s}_i \cdots \bar{s}_{j-1}$ con $n \in N$ y de la normalidad de N deducimos que:

$$\bar{s}_1 \cdots \bar{s}_i(\bar{s}_{i+1} \cdots \bar{s}_j)\bar{s}_{j+1} \cdots \bar{s}_r \in N \Leftrightarrow \bar{s}_1 \cdots \bar{s}_i(\bar{s}_i \cdots \bar{s}_{j-1})\bar{s}_{j+1} \cdots \bar{s}_r \in N \Leftrightarrow \bar{s}_1 \cdots \widehat{\bar{s}_i} \cdots \widehat{\bar{s}_j} \cdots \bar{s}_r \in N. \tag{1.4}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\bar{s}_1 \cdots \bar{s}_i(\bar{s}_{i+1} \cdots \bar{s}_j)\bar{s}_{j+1} \cdots \bar{s}_r &= \bar{s}_1 \cdots \bar{s}_i(n\bar{s}_i \cdots \bar{s}_{j-1})\bar{s}_{j+1} \cdots \bar{s}_r \\ &= n'\bar{s}_1 \cdots \bar{s}_i(\bar{s}_i \cdots \bar{s}_{j-1})\bar{s}_{j+1} \cdots \bar{s}_r \\ &= n'n''\bar{s}_1 \cdots \widehat{\bar{s}_i} \cdots \widehat{\bar{s}_j} \cdots \bar{s}_r,\end{aligned}$$

donde $n', n'' \in N$ son los elementos que nos permitieron intercambiar $\bar{s}_1 \cdots \bar{s}_i$ con n e intercambiar $\bar{s}_i^2 \in N$ con $\bar{s}_1 \cdots \bar{s}_{i-1}$ respectivamente.

Luego, como el lado derecho de la ecuación (1.4) tiene $r-2$ elementos, por hipótesis de inducción podemos concluir que $\bar{s}_1 \cdots \widehat{\bar{s}_i} \cdots \widehat{\bar{s}_j} \cdots \bar{s}_r \in N$ y por lo tanto $\bar{s}_1 \cdots \bar{s}_r \in N$ también.

4. Como vimos, el paso anterior falla si la relación (1.3) involucra r reflexiones, en tal caso $i = 1$ y $j = q+1$ y la ecuación (1.2) se vuelve

$$s_2 \cdots s_{q+1} = s_1 \cdots s_q. \tag{1.5}$$

5. Para poder evitar este bucle usemos otras versiones de (1.1), como ser

$$s_2 \cdots s_r s_1 = s_3 \cdots s_r s_1 s_2 = \cdots = s_r s_1 \cdots s_{r-1} = 1. \tag{1.6}$$

En efecto, dado que $s_i^2 \in N$ y que N es un subgrupo normal, podemos afirmar que:

$$\bar{s}_1\bar{s}_2 \cdots \bar{s}_r \in N \Leftrightarrow \bar{s}_2 \cdots \bar{s}_r\bar{s}_1 \in N \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \bar{s}_r\bar{s}_1 \cdots \bar{s}_{r-1} \in N. \tag{1.7}$$

Ahora, si sustituidas las $r-1$ igualdades de (1.6) por la ecuación (1.1), y aplicados el paso 2 y 3 a la misma deducimos que alguna de las relaciones se derivan de la correspondiente relaciones en R, habremos terminado la prueba.

6. En caso contrario, el paso 3 siempre termina dando con r reflexiones en (1.3) aplicadas a cada ecuación de (1.6), y por lo tanto, como en el paso 4, deducimos que:

$$\begin{aligned} s_3 \cdots s_{q+2} &= s_2 \cdots s_{q+1}, \qquad (1.8)\\ s_4 \cdots s_{q+3} &= s_3 \cdots s_{q+2}, \qquad (1.9)\\ &\vdots \\ s_r s_1 \cdots s_{q+1} &= s_{r-1} \cdots s_q. \end{aligned}$$

Si reordenamos (1.8) como

$$s_3(s_2 s_3 \cdots s_{q+1})s_{q+2}s_{q+1} \cdots s_2 = 1,$$

y dado que (1.8) falla en el paso 3, podemos probar de nuevo el paso 4 y obtener que

$$s_2 \cdots s_{q+1} = s_3 s_2 s_3 \cdots s_q. \tag{1.10}$$

7. Las relaciones (1.5) y (1.10) fuerzan juntas a que $s_1 = s_3$. Análogamente, podemos manipular a la ecuación (1.9) como en el paso 6 y deducir de esto y (1.8) que $s_2 = s_4$.

Luego iterando de esta manera, obtendíamos $s_1 = s_3 = \cdots = s_{r-1}$ y $s_2 = s_4 = \cdots = s_r$, y por lo tanto la ecuación (1.1) tendría la forma

$$s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta \cdots s_\alpha s_\beta = 1,$$

lo que se deriva de la relación $(\bar{s}_\alpha\bar{s}_\beta)^{m(\alpha,\beta)}$.

□

Con este teorema hemos probado que todo grupo de reflexiones finito W admite una *presentación.* Más generalmente, podemos considerar la siguiente abstracción de los grupos de reflexiones.

Definición 1.42. Un *grupo de Coxeter* C es un grupo que admite una presentación bajo un conjunto finito de generadores $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, con relaciones del tipo $(s_i s_j)^{m(s_i,s_j)} = 1$, donde $m(s_i, s_i) = 1$ y $m(s_i, s_j) \geq 2$ (posiblemente $m(s_i, s_j) = \infty$). Al par (C, S) se le llama *sistema de Coxeter.*

Los grupos de Coxeter están profundamente relacionados con los grupos de reflexiones. En pocas palabras, los grupos de reflexiones son grupos abstractos, dados por presentaciones, generados por involuciones ($m_{ii} = 1$) que surgieron del estudio de los grupos de reflexiones, grupos concretos dados por subgrupos de grupos lineales.

Históricamente, en 1934 (ver [Cox34]), Harold Coxeter probó que todo grupo de reflexiones es un grupo de Coxeter, i.e. probó el teorema 1.41, y de hecho este trabajo introduce la noción de grupo de Coxeter, mientras que en el año 1935 (ver [Cox35]) probó que todo grupo de Coxeter finito tiene una representación como un grupo de reflexiones, y los clasificó.

1.10. Subgrupos parabólicos

En esta sección y las siguientes estudiaremos más a fondo la estructura de los subgupos de W, en conjunto con varias características geométricas de la acción de W en V.

Antes de seguir adelante introduzcamos un poco de notación. Fijemos Δ y notemos S como el conjunto de las reflexiones simples s_α con $\alpha \in \Delta$. Para $I \subset S$, definimos W_I como el grupo de W generado por las reflexiones $s_\alpha \in I$ y $\Delta_I := \{\alpha \in \Delta : s_\alpha \in I\}$. En los extremos, $W_\emptyset = \{1\}, \Delta_\emptyset = \emptyset$ y $W_S = W, \Delta_S = \Delta$. Por la proposición 1.5 tenemos que reemplazando Δ por otro sistema positivo $w\Delta$ obtenemos $W_{wI} = wW_Iw^{-1}$. Todos los subgrupos de W obtenidos de esta manera son llamados los *subgrupos parabólicos.* Estos grupos aparecen constantemente en el estudio más profundo de los grupos de reflexiones y sus aplicaciones, en parte porque ellos facilitan argumentos del tipo inductivo.

Proposición 1.43. *Sean un sistema simple Δ y el correspondiente conjunto S de reflexiones simples. Si $I \subset S$, definimos Φ_I como la intersección de Φ con V_I, el $\mathbb{R}$–subespacio generado por Δ_I en V.*

1. *Φ_I es un sistema de raíces en V, con sistema simple Δ_I y con correspondiente grupo de reflexiones W_I, que actúa en V_I.*

2. *Viendo a $W_I \subset W$ como grupo de reflexiones, con función longitud l_I relativa al sistema simple Δ_I, tenemos que $l_I = l_{|W_I}$, siendo l la función longitud asociada a Δ.*

3. *Definimos $W^I := \{w \in W : l(ws) > l(w), \forall s \in I\}$. Dado $w \in W$, existe un único $u \in W^I$ y un único $v \in W_I$ tal que $w = uv$. Sus longitudes satisfacen que $l(w) = l(u) + l(v)$. Más aún, u es el único elemento de menor longitud en la coclase wW_I.*

Demostración. 1. La demostración de este ítem es trivial.

2. Sea $w \in W_I \subset W$, por el corolario 1.34 $l(w) = n(w)$ es la cantidad de raíces positivas $\alpha \in \Pi$ tales que $w\alpha < 0$. Similarmente, $l_I(w) = n_I(w)$, es la cantidad de raíces $\alpha \in \Pi_I := \Pi \cap \Phi_I$ tales que $w\alpha < 0$. Probemos que $l(w) = l_I(w)$ viendo que las raíces $\alpha \in \Pi \setminus \Phi_I$ satisfacen que $w\alpha > 0$. Si $\alpha \in \Pi \setminus \Phi_I$, entonces $\alpha = \sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma \gamma$ con $c_\gamma \geq 0$. Como $\alpha \notin \Phi_I$ tenemos un $\gamma_0 \notin \Delta_I$ tal que $c_{\gamma_0} > 0$. Luego para todo $\beta \in \Delta_I$ se tiene $s_\beta(\alpha) = \alpha - c\beta > 0$, puesto que el coeficiente en γ_0 resulta ser positivo. Luego tenemos que $s_\beta(\alpha) \in \Pi \setminus \Phi_I$. Utilizando el hecho que $w \in W_I$ se tiene $w = s_1 \cdots s_r$ con $s_i = s_{\beta_i}$ y $\beta_i \in \Delta_I$. Por inducción deducimos que $s_j \cdots s_r(\alpha) \in \Pi \setminus \Phi_I$ para todo $j \leq r$. En particular, $w\alpha \in \Pi \setminus \Phi_I$, de donde se concluye que $l(w) = l_I(w)$.

3. Dado $w \in W$ consideremos $u \in wW_I$ de longitud mínima, luego $w = uv$ para algún $v \in W_I$. Observemos que $us \in wW_I$ para todo $s \in I$ y dado que $l(us) = l(u) \pm 1$ y u es de largo mínimo en wW_I, entonces $l(us) = l(u) + 1$. Luego $u \in W^I$.

   Veamos ahora que $l(w) = l(u) + l(v)$. Escribiendo expresiones reducidas para u y v obtenemos $u = s_1 \cdots s_q$ y $v = s'_1 \cdots s'_r$, con $s_i \in S, s'_i \in I$. Luego, $l(w) = l(uv) \leq l(u) + l(v) = q + r$. Si la desigualdad fuera estricta, la condición de eliminación nos permitiría omitir dos de los factores s_i o s'_i en uv sin cambiar w. Si omitimos algún factor s_i de u esto nos deja con una expresión $w = u'v'$, donde u' y v' se obtienen de u y v omitiendo por lo menos alguna reflexión de u. Como $v' \in W_I$ tenemos que $u' \in wW_I$, teniendo además menor longitud que u, lo que contradice su minimalidad. Por lo tanto, los dos factores corresponde a dos s_i y s_j, lo que nos dice que podemos eliminar estos factores sin alterar v, lo que resulta absurdo puesto que ya teníamos una representación reducida para v. Por lo tanto $l(w) = l(u) + l(v)$.

Para terminar con la demostración sólo resta ver la unicidad de u, lo que además fuerza la de v. Supongamos por absurdo que tenemos $v' \in W_I$ y $u' \in W^I$, con $u \neq u'$ tales que $w = uv = u'v'$. Luego podemos escribir $u' = uv''$ con $v'' \in W_I, l(v'') = r > 0$ y $v'' = s_1 \cdots s_r \in W_I$, donde $s_i \in I$. Pero entonces $l(u's_r) = l(uv''s_r) < l(u')$ contradiciendo el hecho que $u' \in W^I$.

□

1.11. Polinomios de Poincaré

Definición 1.44. Sea Δ un sistema simple del grupo de reflexiones W y definimos el *polinomio de Poincaré* de W (relativo a Δ), como la función generatriz asociada a la función longitud, i.e.:

$$W(t) := \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \sum_{w \in W} t^{l(w)},$$

donde $a_n := |\{w \in W : l(w) = n\}|$.

Más generalmente, para un subconjunto arbitrario $X \subset W$, se define

$$X(t) := \sum_{w \in X} t^{l(w)}.$$

Observación 1.45. Observar que el polinomio de Poincaré de un grupo de reflexiones W no depende del sistema simple elegido. En efecto, si Δ y Δ' son sistemas simples de W, entonces tenemos $v \in W$ tal que $\Delta = w\Delta'$. Denotemos por $W_\Delta(t) = \sum a_n t^n$ y $W_{\Delta'}(t) = \sum a'_n t^n$ a los respectivos polinomios de Poincaré, y por l_Δ y $l_{\Delta'}$ a las funciones longitud relativas a Δ y Δ'.

De la proposición 1.5 deducimos que

$$\{s_\alpha : \alpha \in \Delta\} = \left\{v s_{\alpha'} v^{-1} : \alpha' \in \Delta'\right\},$$

y por lo tanto:

$$a_n = |\{w \in W : l_\Delta(w) = n\}| = \left|v \{w \in W : l_{\Delta'}(w) = n\} v^{-1}\right| = |\{w \in W : l_{\Delta'}(w) = n\}| = a'_n.$$

Luego $W_\Delta(t)$ y $W_{\Delta'}(t)$ coinciden.

Observación 1.46. De la observación 1.40 podemos deducir que el polinomio de Poincaré $W(t)$ tiene grado $|\Pi|$, y tanto su término independiente como su coeficiente en $t^{|\Pi|}$ es 1. Esto es consecuencia de que existe un único elemento en W de longitud maximal, cuya longitud es $|\Pi|$, y un único elemento de longitud 0, la identidad.

Más aún, el polinomio $W(t)$ es un polinomio simétrico. En efecto, si w_0 es el elemento de mayor longitud, tenemos que $l(w_0 w) = |\Pi| - l(w)$ para todo $w \in W$ y por lo tanto

$$a_{|\Pi|-n} = |\{w \in W : l(w) = |\Pi| - n\}| = |w_0\{w \in W : l(w) = n\}| = a_n.$$

Ejemplo 1.47. Cuando $W = S_3 = \{\mathrm{id}, (12), (13), (23), (123), (132)\}$, un sistema simple es $\Delta = \{(12), (23)\}$ y relativo a este sistema tenemos: 1 elemento de longitud 0 (id), 2 de longitud 1 $((12), (23))$, 2 de longitud 2 $((13), (123))$ y 1 de longitud 3 $((132))$. El polinomio de Poincaré es entonces $W(t) = 1 + 2t + 2t^2 + t^3$.

Notar que para $I \subset S$, $W_I(t)$ coincide con el polinomio de Poincaré del grupo W_I relativo a Δ_I, ya que las funciones longitud l y l_I coinciden. Una consecuencia de la proposición 1.43 es que

$$W(t) = W_I(t) W^I(t),$$

ya que

$$W_I(t)W^I(t) = \left(\sum_{w_I\in W_I} t^{l(w_I)}\right)\left(\sum_{w^I\in W^I} t^{l\left(w^I\right)}\right) = \sum_{w_I,w^I} t^{l(w_I)+l\left(w^I\right)} = \sum_{w\in W} t^{l(w)} = W(t).$$

En particular $W_I(t)$ y $W^I(t)$ dividen a $W(t)$ para todo $I \subset S$. Esta última observación puede ser usada para derivar un algoritmo para calcular $W(t)$ por inducción en S.

Proposición 1.48. *Si Δ es un sistema simple de W y consideramos $S = \{s_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ como antes, se tiene que*

$$\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}W^I(t) = \sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}\frac{W(t)}{W_I(t)} = t^{|\Pi|}.$$

Demostración. Sea $K_w := \{s \in S : l(ws) > l(w)\}$, entonces $w \in W^I$ si y sólo si $I \subset K_w$. Luego

$$\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}W^I(t) = \sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}\left(\sum_{w\in W^I} t^{l(w)}\right) = \sum_{w\in W}\left(\sum_{I\subset K_w}(-1)^{|I|}\right)t^{l(w)}.$$

Por el teorema del binomio de Newton, tenemos que $0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k$ si $n > 0$, y por lo tanto si $|K_w| = k_w$ deducimos la siguiente igualdad:

$$\sum_{I\subset K_w}(-1)^{|I|} = \sum_{n=0}^{k_w}\binom{k_w}{n}(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } k_w = 0 \\ 0 & \text{si } k_w > 0 \end{cases}.$$

Ahora, $k_w = 0 \Leftrightarrow K_w = \emptyset \Leftrightarrow w = w_0$ y sabiendo que $l(w_0) = |\Pi|$ tenemos que

$$\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}W^I(t) = \sum_{w\in W}\left(\sum_{I\subset K_w}(-1)^{|I|}\right)t^{l(w)} = t^{|\Pi|}$$

□

Observación 1.49. Notar que cuando t es sustituido por 1 tenemos $W_I(t) = |W_I|$ y por lo tanto

$$\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}\frac{|W|}{|W_I|} = \sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}\left|W^I\right| = 1.$$

Esta fórmula permite obtener $|W|$ en términos de $|W_I|$ cuando $|S|$ es impar. En efecto, manipulando la anterior ecuación obtenemos:

$$\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}\frac{|W|}{|W_I|} = |W|\left(\sum_{I\subsetneq S}(-1)^{|I|}|W_I|^{-1}\right) - 1 = 1,$$

y por lo tanto

$$|W| = 2\left(\sum_{I\subsetneq S}(-1)^{|I|}|W_I|^{-1}\right)^{-1}.$$

En el teorema 3.30 obtendremos una asombrosa factorización del polinomio de Poincaré en términos de los grados de W, véase sección 3.4. En particular, probaremos que todas las raíces ζ del polinomio de Poincaré son raíces de la unidad y que $\zeta^{|W|} = 1$, ver teorema 3.16.

1.12. Dominios fundamentales

El objetivo de esta sección y las siguientes es refinar la descripción de la acción de W en V en términos de órbitas y grupos de isotropía, con énfasis en el rol de los hiperplanos asociados a las reflexiones. En el proceso obtendremos una interpretación de la transitividad simple de la acción de W sobre los sistemas simples, como también más información sobre los subgrupos parabólicos.

Fijemos un sistema positivo Π con respectivo sistema simple Δ. Asociados a cada hiperplano H_α tenemos los semiespacios abiertos H_α^+ y H_α^-, donde

$$H_\alpha^+ := \{\lambda \in V : \langle \lambda, \alpha \rangle > 0\} \quad \text{y} \quad H_\alpha^- := \{\lambda \in V : \langle \lambda, \alpha \rangle < 0\}.$$

Es claro que definido $C := \cap_{\alpha\in\Delta} H_\alpha^+$ resulta ser un cono (cerrado por multiplicación de escalares positivos) abierto y convexo. Si D es la clausura de C es claro también que $D = \{\lambda \in V : \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0 \text{ para todo } \alpha \in \Delta\}$ y que es un cono, cerrado y convexo. Pretendemos probar que D es un *dominio fundamental* para la acción de W sobre V, i.e. cada $\lambda \in V$ es conjugado bajo W a uno y sólo un vector de D.

Lema 1.50. *La W–órbita de cada $\lambda \in V$ ($\mathcal{O}_W(\lambda) = \{w(\lambda) : w \in W\}$) contiene algún $\mu \in D$. Más aún, $\mu - \lambda$ es una combinación lineal no negativa de Δ.*

Demostración. Introduzcamos el siguiente orden parcial en V (no confundir con el orden total mediante el cual se define Π, ver definición 1.12): $\mu \leq \eta$ si y sólo si $\eta - \mu$ es una combinación lineal de Δ no negativa.

Consideremos el conjunto no vacío $X = \{\eta \in \mathcal{O}_W(\lambda) : \lambda \leq \eta\}$ y sea η_0 un elemento maximal de X. Si $\alpha \in \Delta$, sabemos que $s_\alpha(\eta_0) = \eta_0 - 2\frac{\langle \eta_0, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha \in \mathcal{O}_W(\lambda)$, luego la maximalidad de η_0 fuerza que $\langle \eta_0, \alpha \rangle \geq 0$. Dado que esto se satisface para todo $\alpha \in \Delta$, concluimos que $\eta_0 \in D = \{\mu \in V : \langle \mu, \alpha \rangle \geq 0 \ \forall \alpha \in \Delta\}$. ☐

Para ver que cada W–órbita contiene a lo sumo un $\mu \in D$ es suficiente con mostrar que dos elementos distintos de D no pueden compartir una W–órbita. En el curso de la prueba de esta afirmación obtendremos infomación más detallada acerca de los *grupos de isotropía* $W_\mu = \{w \in W : w\mu = \mu\}$ para un $\mu \in V$ arbitrario.

Teorema 1.51. *Dados $\Delta \subset \Pi$ y $D = \{\lambda \in V : \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ para todo $\alpha \in \Delta\}$, tenemos que*

1. *Si $w\lambda = \mu$ para algún par $\lambda, \mu \in D$, entonces $\lambda = \mu$ y w es producto de reflexiones simples s_α que fijan λ. En particular, si $\lambda \in C$, entonces su grupo de isotropía es trivial.*

2. *D es un dominio fundamental para la acción de W.*

3. *Si $\lambda \in V$, entonces su grupo de isotropía W_λ es generado por aquellas reflexiones s_α (no necesariamente simples) que contiene.*

4. *Si $U \subset V$, entonces el subgrupo W_U de W que fija puntualmente a U es generado por aquellas reflexiones s_α (no necesariamente simples) que contiene.*

Ya que los anteriores grupos de isotropía son generados por las reflexiones que contienen, se sigue que son grupos de reflexiones.

Demostración.

1. La prueba será por inducción en la longitud $n(w) = l(w)$. Si $n(w) = 0$, entonces $w = 1$ y no hay nada que probar. Si $n(w) > 0$, entonces existe una raíz simple α tal que $w\alpha < 0$, ya que de lo contrario $w\Delta$ y por lo tanto $w\Pi$ consistirían de raíces positivas. Gracias al lema 1.31 sabemos que $n(ws_\alpha) = n(w) - 1$. Como $\lambda, \mu \in D$, con $w\alpha < 0$, tenemos:

$$0 \geq \langle \mu, w\alpha \rangle = \langle w^{-1}\mu, w^{-1}w\alpha \rangle = \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0,$$

lo cual fuerza $\langle \lambda, \alpha \rangle = 0$ y $s_\alpha(\lambda) = \lambda$. Por lo tanto $ws_\alpha(\lambda) = \mu$. Puesto que $n(ws_\alpha) < n(w)$, por hipótesis de inducción tenemos que $\lambda = \mu$ y ws_α es un producto de reflexiones simples que fijan λ, y por lo tanto w también es un producto de tal forma, ya que $s_\alpha(\lambda) = \lambda$.

2. Esto es consecuencia de la parte anterior del teorema y del lema 1.50.

3. Dado $\lambda \in V$, por el lema 1.50 tenemos $w \in W$ para el cual $\mu := w\lambda \in D$. Por la parte 1. el grupo de isotropía de W_μ es generado por las reflexiones simples que contiene. Es claro que el grupo de isotropía de λ es $W_\lambda = w^{-1}W_\mu w$ y por la proposición 1.5 al conjugar reflexiones simples obtenemos otras reflexiones, se sigue que W_λ es generado por las reflexiones que contiene.

4. Es claro que el subgrupo W_U también fija puntualmente el subespacio generado por U, o una base $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in U$. También es claro que W_U es la intersección de los grupos de isotropía W_{λ_i}. Procedamos por inducción en t para completar la demostración. Si $t = 1$ es el contenido de la parte anterior del teorema. Supongamos entonces que $t > 1$. Por la parte anterior del teorema, el grupo de isotropía W_{λ_1} es generado por las reflexiones s_α que contiene, donde α varía sobre un subconjunto Φ' de Φ que contiene a pares de raíces $\alpha, -\alpha$. La proposición 1.5 implica que W_{λ_1} estabiliza Φ' y por ende Φ' es un sistema de raíces de W_{λ_1}. Dado que $W_{\lambda_1} \lhd W_U$ fija puntualmente $\{\lambda_2, \ldots, \lambda_t\}$, por inducción tenemos que el grupo de W_{λ_1} que fija puntualmente a $\{\lambda_2, \ldots, \lambda_t\}$ es generado por algunas s_α con $\alpha \in \Phi'$. Pero este subgrupo es justamente W_U. □

Observación 1.52. Hemos asociado a cada sistema simple Δ un cono abierto C en V cuyos puntos tienen grupos de isotropía triviales en W. Es sencillo verificar que reemplazar Δ por $w\Delta$ se corresponde a reemplazar C por wC. Por lo tanto, la acción simplemente transitiva de W sobre los sistemas simples (ver teorema 1.38) se traslada a una acción simplemente transitiva en esta familia de conos abiertos, los cuales llamaremos *cámaras*. Las cámaras son caracterizadas topológicamente como las componentes conexas del complemento en V de $\cup_\alpha H_\alpha$. Dada una cámara C con correspondiente sistema simple Δ, sus *muros* son definidos como los hiperplanos H_α con $\alpha \in \Delta$. Cada muro determina un semiespacio "positivo" y uno "negativo", con C estando sobre el lado positivo.

1.13. El retículo de subgrupos parabólicos

Con la siguiente proposición obtendremos una relación biunívoca entre los subconjuntos de $S = \{s_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ y los subgrupos parabólicos de W. Esta biyección además será un isomorfismo de retículos y por lo tanto definiremos los términos necesarios.

Definición 1.53. Un *retículo* es un par $(X, \leq)$ donde X es un conjunto y $\leq$ es un orden parcial sobre X, para el que cualquier par de elementos existe un supremo y un ínfimo.

Un *morfismo* entre los retículos $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ es una función $f : X \to Y$ que satisface:

1. $f(\sup(x, y)) = \sup(f(x), f(y))$,
2. $f(\text{ínf}(x, y)) = \text{ínf}(f(x), f(y))$.

Observar que un morfismo de retículos necesariamente respeta el orden. En efecto, si $x \leq y$ luego $f(x) = f(\text{ínf}(x, y)) = \text{ínf}(f(x), f(y)) \leq f(y)$.

Es claro que dado un conjunto, resp. un grupo, entonces sus subconjuntos, resp. sus subgrupos, forman un retículo con la inclusión. En ambos casos el ínfimo es la intersección, mientras que el supremo en el caso de los subconjuntos es la unión y en los subgrupos es la suma.

Proposición 1.54. *Bajo la correspondencia que mapea subconjuntos I de S en subgrupos parabólicos $I \mapsto W_I$, tenemos un isomorfismo entre el retículo de subconjuntos de S y el retículo de subgrupos parabólicos W_I.*

Demostración. Por definición el mapa es sobreyectivo y se tiene que $W_{I \cup J}$ es el grupo generado por W_I y W_J. La inyectividad se sigue del corolario 1.24, dado que si $W_I = W_J$ entonces podemos hallar $\alpha \in J \setminus I$ (o $\beta \in I \setminus J$) tal que $s_\alpha \in W_I$ ($s_\beta \in W_J$). Por lo tanto sólo resta ver que $W_I \cap W_J = W_{I \cap J}$. La inclusión $W_{I \cap J} \subset W_I \cap W_J$ es clara, para probar la otra inclusión observemos que $V_I \cap V_J = V_{I \cap J}$ y $(V_I \cap V_J)^\perp = V_I^\perp + V_J^\perp$, de lo que se deduce:

$$V_I^\perp + V_J^\perp = (V_I \cap V_J)^\perp = V_{I \cap J}^\perp.$$

Si $w \in W_I \cap W_J$, entonces w fija puntualmente $V_I^\perp + V_J^\perp = (V_I \cap V_J)^\perp$. De acuerdo a la última parte del teorema 1.51, w es producto de reflexiones s_α que fijan puntualmente este subespacio. Luego cada α es perpendicular a dicho subespacio y por lo tanto pertenece a $\Phi \cap V_{I \cap J} = \Phi_{I \cap J}$. Luego se sigue que $w \in W_{I \cap J}$. □

1.14. Reflexiones en W

Recordemos que nuestro estudio de W ha dependido de la elección de un cierto sistema de raíces Φ, con W definido como el grupo generado por la reflexiones s_α con $\alpha \in \Phi$. En la definición de sistemas de raíces (ver 1.7) no era requerido que los s_α debieran agotar todas las reflexiones de W, pero esto se vuelve cierto de todos modos, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.55. *Toda reflexión en W es de la forma s_α para algún $\alpha \in \Phi$.*

Demostración. Sea s una reflexión de W, siendo H el hiperplano fijado por s. Entonces s está en el grupo de isotropía de H, el cual es no trivial y por el teorema 1.51 está generado por algunas reflexiones s_α con $\alpha \in \Phi$. Pero s_α no puede fijar puntualmente H a menos que $H = H_\alpha$ y en tal caso $s = s_\alpha$. □

Observación 1.56. La proposición anterior tiene la consecuencia que dado un grupo de reflexiones W y dos de sus sistemas de raíces Φ y Φ', entonces la única diferencia entre ellos es la longitud de sus vectores. En particular, tienen la misma cantidad de elementos y los mismos ángulos. En efecto, si $\alpha \in \Phi$, entonces $s_\alpha = s_\beta$ para algún $\beta \in \Phi'$, por lo que α y β son colineales. Notar finalmente que el ángulo entre cualquier par de raíces no colineales α y β es un ángulo de la forma $\frac{\pi}{k}$ para un entero $k \geq 2$. Esto se sigue de que el grupo generado por $\{s_\alpha, s_\beta\}$ es un grupo diedral y por lo tanto tiene un sistema de raíces que contiene a las raíces α y β. Luego, con la observación 1.17, deducimos que el ángulo entre α y β es múltiplo de $\frac{\pi}{k}$.

1.15. El complejo de Coxeter

En esta sección daremos un descripción más detallada del dominio fundamental $D = \{\lambda \in V : \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0, \forall \alpha \in \Delta\}$ en términos de los subgrupos parabólicos. Será conveniente asumir que Δ genera V, i.e. la acción de W es esencial (ver definición 1.4). Para cada $I \subset S$, definimos

$$C_I = \{\lambda \in D : \langle \lambda, \alpha \rangle = 0 \ \forall \alpha \in \Delta_I, \langle \lambda, \alpha \rangle > 0 \ \forall \alpha \in \Delta \setminus \Delta_I\}.$$

Observemos que C_I es la intersección de ciertos hiperplanos H_α y ciertos semiespacios A_α. Es claro que los conjuntos C_I particionan a D, con $C_\emptyset = C$ y $C_S = \{0\}$, ya que estamos asumiendo que Δ genera V. Más aún, el subespacio generado por C_I $(\Delta_I^\perp)$ tiene dimensión $n - |I|$, donde $n = \dim V$.

Observación 1.57. Gracias al teorema 1.51, V es particionado por el conjunto $\mathcal{C}$ de todos los conjuntos wC_I con $w \in W$ y $I \subset S$. Más precisamente, para cada $I \subset S$ tenemos que los conjuntos wC_I y $w'C_I$ son disjuntos salvo cuando w y w' están en la misma coclase a izquierda en W/W_I, en cuyo caso $wC_I = w'C_I$ y $w^{-1}w'$ fija puntualmente a la faceta C_I. Además para distintos $I, J \subset S$ los conjuntos wC_I y $w'C_J$ son disjuntos.

Definición 1.58. Llamaremos al conjunto $\mathcal{C}$ el *complejo de Coxeter* de W y cualquier conjunto wC_I de $\mathcal{C}$ una *faceta* de tipo I.

Proposición 1.59. *Para cada $I \subset S$, el grupo de isotropía de la faceta C_I es W_I. Por lo tanto los subgrupos parabólicos de W son los grupos de isotropía de los elementos de C.*

Demostración. Es claro que W_I fija puntualmente a C_I. Si $w \in W$ es tal que $wC_I = C_I$, entonces gracias al teorema 1.51 tenemos que w fija puntualmente C_I.

Por la parte 3. de la proposición 1.43 podemos escribir $w = uv$, donde $v \in W_I$ y u satisface que $l(us_\alpha) > l(u)$ para todo $\alpha \in I$ y esto es equivalente a que $w\Delta_I \subset \Pi$ gracias al lema 1.31. Si $u \neq 1$ entonces debe haber un $\alpha \in \Delta$ tal que $u\alpha < 0$, y como observábamos $\alpha \notin \Delta_I$. Si $\lambda \in C_I$, entonces $w\lambda = u\lambda = \lambda$ y ya que $\alpha \notin \Delta_I$, tenemos que $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$. Por otra parte, $u\alpha < 0$ fuerza que $\langle \lambda, \alpha \rangle = \langle u\lambda, u\alpha \rangle = \langle \lambda, u\alpha \rangle \leq 0$, lo que es absurdo. □

1.16. Una fórmula combinatoria para $\det(w)$

En esta sección obtendremos una fórmula para $\det(w)$ como una suma alternada, la cual involucra contar cuántos elementos de la misma dimensión son fijados por w en el complejo de Coxeter $\mathcal{C}$. Esta fórmula no será de utilidad hasta la sección 3.12 y puede ser omitida hasta entonces, sin embargo se presenta aquí, mientras que las características del complejo de Coxeter están aún frescas en la memoria del lector.

Sean V un espacio euclídeo de dimensión n y $\{H_1, \ldots, H_r\}$ un conjunto de hiperplanos de V. Usando estos hiperplanos, construiremos un complejo $\mathcal{K}$ de la misma manera en la que construimos el complejo de Coxeter. Cada hiperplano $H_i = H_i^0$ determina un semiespacio positivo H_i^+ y otro semiespacio negativo H_i^-, de tal modo que $V = H_i^- \bigsqcup H_i^0 \bigsqcup H_i^+$. Denotaremos por $\mathcal{K}$ al conjunto de las intersecciones no vacías de la siguiente forma:

$$K = \bigcap_{j=1}^{r} H_j^{\varepsilon_j} : \varepsilon_j \in \{0, +, -\}.$$

Observar que $\bigcap_{j=1}^{r} H_j^{\varepsilon_j} = \bigcap_{j=1}^{r} H_j^{\eta_j} \neq \emptyset$ si y sólo si $\varepsilon_j = \eta_j$ para todo j. En efecto, si tomamos $v \in \bigcap_{j=1}^{r} H_j^{\varepsilon_j} = \bigcap_{j=1}^{r} H_j^{\eta_j}$, luego $v \in H_j^{\varepsilon_j} \bigcap H_j^{\eta_j}$ para todo j y como $\left\{H_i^-, H_i^0, H_i^+\right\}$ es una partición de V, concluimos que $\varepsilon_j = \eta_j$ para todo j. Notar además que $\mathcal{K}$ consiste de conjuntos convexos.

Sea $K \in \mathcal{K}$, diremos que $\dim K = d$, si el subespacio L generado por K tiene dimensión d.

Observación 1.60. Observar que L coincide con la intersección de todos los H_j^0 que ocurren en la definición de K. En particular, K es un subconjunto abierto de L obtenido por intersección de varios semiespacios con L.

Lema 1.61. *Si denotamos por n_d el número de elementos de $\mathcal{K}$ que tienen dimensión d, entonces $\sum_d (-1)^d n_d = (-1)^n$.*

Demostración. Probaremos este lema por inducción en el número r de hiperplanos usados en la definición de $\mathcal{K}$. Si $r = 1$ el resultado es claro.

Supongamos que nuestro complejo está constituido con r hiperplanos y agregamos un hiperplano H adicional, entonces los elementos del complejo nuevo se obtiene por intersección de H, H^+ y H^- con los elementos del complejo inicial. Sea K un elemento del complejo inicial de dimensión d, entonces $H \cap K$ puede ser K, un subconjunto propio de K no vacío o el conjunto vacío. Si $H \cap K = \emptyset$, entonces K está incluido en H^+ o en H^- por ser convexo. Por lo tanto si $H \cap K$ es K o el conjunto vacío, entonces la cantidad de elementos de dimensión d se preserva, manteniendo de esta manera la suma alternada sin cambios.

Supongamos ahora que $H \cap K$ es un subconjunto propio de K no vacío y sea L el subespacio de V generado por K. Si $x \in H \cap K$, entonces, por la observación previa, podemos encontrar un entorno abierto U de x en L contenido en K. Dado que $H \cap L$ tiene codimensión 1 en L, es claro que U, y en particular K también, intersecta a H^+ y H^-. Luego, el elemento del complejo inicial K es reemplazado por: dos nuevos elementos $K \cap H^+$ y $K \cap H^-$ de dimensión d, junto con un elemento $K \cap H^0$ de dimensión $d-1$. Esto incrementa el n_d y n_{d-1} en 1, manteniendo de nuevo la suma alternada sin cambios. □

Proposición 1.62. *Sean Δ un sistema simple, $S = \{s_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ y $\mathcal{C}$ el complejo de Coxeter de W. Para cada $I \subset S$ consideremos las facetas vC_I de tipo I, con $v \in W$. Si definimos $f_I(w)$ como el número de facetas de tipo I fijadas puntualmente por $w \in W$, tenemos que:*

$$\det(w) = \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} f_I(w).$$

Demostración. Sea $w \in W$ y consideremos el subespacio V' de V fijado puntualmente por w, i.e. V' es el subespacio propio de w de valor propio 1. Entonces una faceta en $\mathcal{C}$ es estabilizada por w si y sólo si está contenida en V'. Sea $\mathcal{K}$ el complejo obtenido por intersección de elementos de $\mathcal{C}$ con V'. Observar que el número n_d de facetas de dimensión d en $\mathcal{C}$ que están en V' es el número de facetas de dimensión d en $\mathcal{K}$. En efecto, si vC_I es una faceta de dimensión d, entonces, como observamos en 1.57, $w(vC_I) \cap vC_I \in \{vC_I, \emptyset\}$. Pero si $w(vC_I) = vC_I$, entonces w fija puntualmente vC_I y por lo tanto $vC_I \subset V'$. Observar que $\mathcal{K}$ coincide con las facetas de $\mathcal{C}$ que están en V'.

Aplicando el lema anterior al complejo $\mathcal{K}$ podemos deducir que:

$$\sum_d (-1)^d n_d = (-1)^m, \tag{1.11}$$

siendo $m = \dim(V')$. Si $n = \dim(V)$, entonces $\dim(C_I) = n - |I|$ para todo $I \subset S$ y por lo tanto

$$n_d = \sum_{|I| = n-d} f_I(w). \tag{1.12}$$

Combinando las ecuaciones (1.11) y (1.12) obtenemos que

$$(-1)^n \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} f_I(w) = (-1)^m.$$

Dado que W es ortogonal, entonces sus posibles valores propios son 1 (con multiplicidad m), k pares de complejos conjugados de valor absoluto 1 y -1 con multiplicidad $n - m - 2k$, de donde se deduce que

$$\det(w) = (-1)^{n-m-2k} = (-1)^{n-m} = \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} f_I(w).$$

□

Capítulo 2

Clasificación de los grupos de reflexiones

El objetivo de este capítulo es determinar todos los posibles grupos de reflexiones de un modo combinatorio, en términos de sus "grafos de Coxeter"(ver sección 2.1), mientras que en la sección 2.6 mostraremos sistemas de raíces para estos grupos de reflexiones.

A lo largo de este capítulo reservaremos el índice n para indicar el rango de W, siendo W un grupo de reflexiones finito.

2.1. Grafo de Coxeter

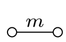
Con el fin de obtener una clasificación de los grupos de reflexiones, generalizaremos algunas ideas para poder trabajar con grupos de Coxeter.

La presentación de W obtenida en el teorema 1.41 muestra que W es determinado, a menos de isomorfismos, por los enteros $m(\alpha, \beta)$ con $\alpha, \beta \in \Delta$. Una forma conveniente de codificar esta información en una imagen es construir un grafo que preserve esta información.

Si el par (C, S) es un sistema de Coxeter (ver definición 1.42), en el caso de tener un grupo de reflexiones W tomaremos S como un conjunto de reflexiones simples, construimos un grafo simple y no dirigido Γ cuyo conjunto de vértices es S, uniendo a cada par de vértices $s \neq s'$ con una arista etiquetada con el entero $m(s, s')$, si este es mayor a 2. Dado que la etiqueta $m(s, s') = 3$ aparecerá con frecuencia, omitiremos dibujarla en el grafo.

Por lo tanto, para aquellos pares de vértices que no están unidos por una arista se sobreentenderá que $m(s, s') = 2$, y para aquellos que estén unidos, pero que la correspondiente arista no esté etiquetada, que $m(s, s') = 3$. A este grafo etiquetado lo llamaremos el *grafo de Coxeter* del sistema (C, S). Observar que el grupo C queda determina completamente a menos de isomorfismos por el grafo Γ. En el caso que (C, S) represente un grupo de reflexiones (W, Δ), entonces el grafo de Coxeter de (W, Δ) no dependerá de la elección del sistema simple Δ, puesto que todos los sistemas simples son conjugados. Llamaremos el *rango* de Γ a la cantidad de vértices que contiene y por ende $\mathrm{rg}(\Gamma) = \mathrm{rg}(W)$ en el caso de grupo de reflexiones.

Ejemplo 2.1. Por ejemplo, el grafo de Coxeter de $\mathcal{D}_3$ y de $\mathcal{D}_m$, con $m > 3$, son respectivamente:



En efecto, como vimos en la observación 1.17 si tomamos un sistema simple de D_m, este consta de dos raíces α y β que se encuentran a un ángulo de $\theta = \pi - \frac{\pi}{m}$. Luego $s_\alpha s_\beta$ es una rotación de $2\theta = -\frac{2\pi}{m}$ y por lo tanto $s_\alpha s_\beta$ tiene orden m, i.e. $m(\alpha, \beta) = m$.

Ejemplo 2.2. El grafo de Coxeter de A_n es el grafo con n vértices que muestra la siguiente figura:

En efecto, por la observación 1.18 sabemos que un sistema simple de A_n es $\{e_1 - e_2, \ldots, e_n - e_{n+1}\}$. Tomemos 2 reflexiones diferentes s_{ij} y s_{kl}; entonces los conjuntos $\{i, j\}$ y $\{k, l\}$ comparten 1 índice o ninguno. Si no comparten índices entonces es claro que $m(s_{ij}, s_{kl}) = 2$; y si los comparten tenemos que $m(s_{ij}, s_{jk}) = 3$, ya que $s_{ij}s_{jk}$ permuta los índices $\{i, j, k\}$ en un 3–ciclo.

La clasificación de los grupos de reflexiones dada en este capítulo dependerá en gran medida del estudio de los posibles grafos de Coxeter.

Lema 2.3. *Sea $\Delta \subset \Phi$ un sistema de simple. Si $\alpha, \beta \in \Delta$, entonces el ángulo entre α y β es $\pi - \frac{\pi}{m(\alpha,\beta)}$.*

Demostración. Si $\alpha = \beta$ el resultado es claro y si $\alpha \neq \beta$ consideremos el plano H generado por estas dos raíces y W el grupo generado por $\{s_\alpha, s_\beta\}$. Es claro que W actúa esencialmente sobre H y por el teorema 1.10 tenemos que $W \simeq \mathcal{D}_m$, para algún entero m. Además resulta que $\{\alpha, \beta\}$ es un sistema simple de W.

Luego como mostramos en la observación 2.1, $m(\alpha, \beta) = m$ y el ángulo entre α y β es $\pi - \frac{\pi}{m} = \pi - \frac{\pi}{m(\alpha,\beta)}$. □

Proposición 2.4. *Para $i = 1, 2$, sean W_i grupos de reflexiones actuando esencialmente en V_i. Si W_1 y W_2 tienen el mismo grafo de Coxeter, entonces existe una isometría entre V_1 y V_2 que induce un isomorfismo de grupos entre W_1 y W_2. En particular si $V = V_1 = V_2$, los subgrupos W_1 y W_2 serán conjugados en $\mathcal{O}(V)$.*

Demostración. Fijemos un par de sistemas simples Δ_i de W_i. Por hipótesis Δ_i es una base de V_i y como vimos previamente en la observación 1.8 podemos asumir que Δ_i consta de vectores unitarios. Sea $\varphi : V_1 \to V_2$ lineal con $\varphi(\Delta_1) = \Delta_2$, compatible con el grafo de Coxeter en común, i.e. que las raíces de Δ_1 y Δ_2 correspondientes en el grafo de Coxeter las mapea una en la otra. Veamos que φ es una isometría.

Si $\alpha \neq \beta$ están en Δ_1, el ángulo θ entre ellas es $\pi - \frac{\pi}{m(\alpha,\beta)}$ y ya que las raíces son unitarias y que $m(\alpha, \beta) = m(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$, tenemos que $\langle \alpha, \beta \rangle = \cos(\theta) = -\cos\left(\frac{\pi}{m(\alpha,\beta)}\right) = \langle \varphi(\alpha), \varphi(\beta) \rangle$. Por lo tanto $\varphi : V_1 \to V_2$ es una isometría, puesto que preserva el producto interno en una base.

Veamos que φ induce un isomorfismo entre los correspondientes grupos de reflexiones. Para ello es suficiente con ver que el mapa $\varphi : \mathcal{O}(V_1) \to \mathcal{O}(V_2)$ definido por $\varphi(T) = \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}$, resulta un isomorfismo entre $\mathcal{O}(V_1)$ y $\mathcal{O}(V_2)$, y como $\varphi(s_\alpha) = s_{\varphi(\alpha)}$, tenemos el isomorfismo buscado. □

Definición 2.5. Diremos que un grupo de reflexiones W es *irreducible* si su grafo de Coxeter es conexo. En tal caso diremos también que Φ es irreducible.

En general, si $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ son las componentes conexas de Γ, tenemos Δ_i y S_i los correspondientes conjuntos de raíces simples y reflexiones simples. Entonces $\alpha \in \Delta_i$ y $\beta \in \Delta_j$, con $i \neq j$, tenemos que $m(\alpha, \beta) = 2$ y por lo tanto $s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha$. La siguiente proposición muestra que el estudio de los grupos de reflexiones puede ser reducido al estudio de los grupos de reflexiones irreducibles.

Proposición 2.6. *Sean Δ un sistema simple de W, S el correspondiente conjunto de raíces simples y Γ el grafo de Coxeter de W. Si $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ son las componentes conexas de Γ y $S_1, \dots, S_r$ los correspondientes subconjuntos de S, entonces W es el producto de los subgrupos parabólicos $W_{S_1}, \dots, W_{S_r}$ y además cada W_{S_i} es irreducible.*

Demostración. El resultado es claro observando que los grupos $\{W_{S_i}\}$ generan W y que los elementos de S_i conmutan con los de S_j si $i \neq j$, por lo tanto los correspondientes subgrupos parabólicos conmutan entre sí. □

Definición 2.7. Dado un grafo de Coxeter Γ con S ($|S| = n$) como conjunto de vértices, definiremos la *matriz asociada a* Γ como la siguiente matriz simétrica de tamaño $n \times n$:

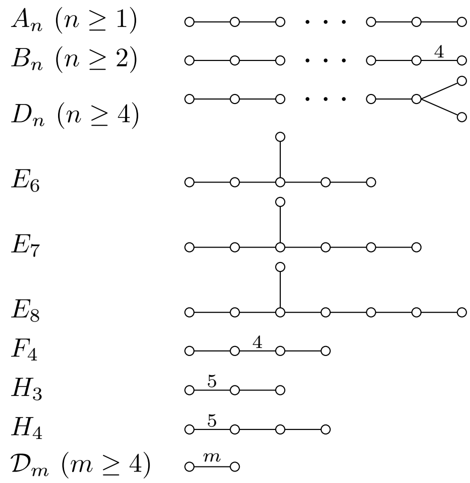
$$a_{s,s'} := -\cos\left(\frac{\pi}{m(s,s')}\right), \text{ para todo } s, s' \in S.$$

Diremos que Γ es *definido positivo* o *semidefinido positivo* cuando su matriz asociada tenga la correspondiente propiedad.

Observación 2.8. Observemos que cuando Γ proviene de un grupo de reflexiones W, entonces la matriz asociada resulta ser definida positiva ya que representa el producto interno relativo a la base Δ de V. Nuestra estrategia para obtener la clasificación de los grupos de reflexiones consistirá en obtener una lista de grafos de Coxeter definidos positivos y conexos, para probar luego que estos son todos los posibles grafos de Coxeter definidos positivos y conexos. Luego mostraremos sistemas de raíces para todos los casos posibles.

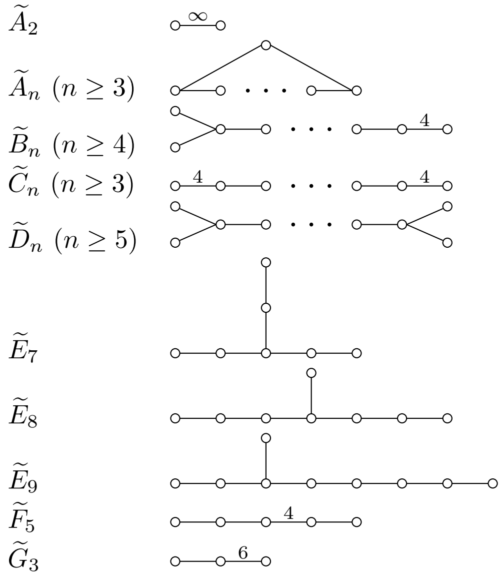
2.2. Algunos grafos definidos y semidefinidos positivos

Los siguientes grafos son definidos positivos, para comprobarlo el lector podrá calcular los menores principales de la matriz correspondiente en cada caso.



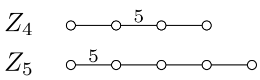
Cuadro 2.1: Algunos grafos definidos positivos.

Probaremos que estos son los únicos grafos de Coxeter conexos y definidos positivos. Como una herramienta en la prueba construiremos los grafos auxiliares del cuadro 2.2: estos grafos auxiliares son semidefinidos positivos, pero no definidos positivos.



Cuadro 2.2: Algunos grafos semidefinidos positivos.

En el transcurso de la prueba del teorema 2.13 serán también de utilidad los siguientes grafos de Coxeter, estos grafos resultan ser indefinidos:



Cuadro 2.3: Algunos grafos indefinidos.

2.3. Subgrafos

En esta sección probaremos un hecho crucial para la clasificación de los grafos de Coxeter: los “subgrafos” propios de un grafo de Coxeter conexo y semidefinido positivo son definidos positivos. Aquí entenderemos por subgrafo lo siguiente:

Definición 2.9. Si Γ es un grafo de Coxeter, diremos que un grafo Γ' es un subgrafo de Γ si es obtenido a partir de este último por medio de omisión de vértices (y las aristas adyacentes a dicho vértice) o disminuyendo las etiquetas de una o más aristas, o ambos métodos.

Necesitaremos además para probar lo que adelantábamos en el primer párrafo de la sección un resultado para matrices indescomponibles.

Definición 2.10. Una matriz A real $n \times n$ es *indescomponible* si no existe una partición del conjunto de índices en un par de conjuntos no vacíos I, J tales que $a_{ij} = 0$ si $i \in I, j \in J$.

Es claro que las matrices asociadas a grafos de Coxeter son indescomponibles precisamente cuando el grafo es conexo.

Proposición 2.11. *Sea A una matriz real simétrica de $n \times n$ semidefinida positiva e indescomponible. Si $a_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$, entonces:*

1. *El núcleo de A coincide con $N := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, Ax\rangle = 0\}$ y tiene dimensión no mayor a 1. Además si $\dim(N) = 1$, entonces N está generado por un vector cuyas coordenadas son todas estrictamente positivas.*

2. *El menor valor propio de A tiene multiplicidad 1, y tiene un vector propio cuyas coordenadas son todas estrictamente positivas.*

Demostración. 1. Es claro que el núcleo de A está contenido en N. Para la otra inclusión, diagonalizemos A. Dado que A es simétrica existe una matriz P ortogonal y una matriz D diagonal tal que $D = P^tAP = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Sean $v \in N$ y $w \in \mathbb{R}^n$ tales que $v = Pw$, luego se tiene que

$$0 = \langle v, Av\rangle = \langle Pw, APw\rangle = \langle w, Dw\rangle = \sum_{i=1}^{n} d_i w_i^2.$$

Dado que los valores propios de A son $d_i \geq 0$ tenemos que $d_i w_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y luego $w \in \ker(D)$ y $v \in \ker(A)$.

Supongamos que $\dim(N) > 0$ y sean $x \in N$ no nulo y z el vector cuyas coordenadas son el valor absoluto de las de x. Dado que $a_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$, tenemos que

$$0 \leq \langle z, Az\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} |x_i|^2 + \sum_{i\neq j} a_{ij} |x_i| |x_j| \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i\neq j} a_{ij} x_i x_j = \langle x, Ax\rangle = 0,$$

donde en la segunda desigualdad utilizamos que $a_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$. Luego $z \in N$. Probemos ahora que las coordenadas de z son todas no nulas. Para ver esto, sea J el conjunto no vacío de índices j para los cuales $z_j > 0$ y sea I su complemento. Puesto que N es el núcleo de A, tenemos que $\sum_{j\in J} a_{ij} z_j = 0$ para todo i. Si I es no vacío, dado que A es indescomponible entonces existen $i_0 \in I$ y $j_0 \in J$ tales que $a_{i_0 j_0} < 0$ y por lo tanto $\sum_{j\in J} a_{i_0 j} z_j < 0$, lo que resulta absurdo. Esto muestra que todo elemento $x \in N$ no nulo tiene todas sus coordenadas no nulas y además del mismo signo, ya que $x + z \in N$ sería no nulo con alguna coordenada nula, si los coordenadas de x no fueran todas del mismo signo. Si $\dim(N) > 1$, entonces tomando una combinación lineal no trivial de dos vectores linealmente independiente de N, podríamos formar uno con al menos una coordenada nula, por lo tanto concluimos que $\dim(N) \leq 1$.

2. Si d el menor de los valores propios de A, entonces la matriz $A - dI$ satisface las hipótesis de la proposición, i.e. es simétrica, semidefinida positiva e indescomponible. Más aún, $A - dI$ tiene núcleo no trivial y aplicando la primer parte de la proposición podemos concluir que su núcleo tiene dimensión 1. Además que es generado por un vector cuyas coordenas son estrictamente positivas. Esto significa que el subespacio propio de valor propio d tiene dimensión 1 y contiene un vector cuyas coordenadas son todas estrictamente positivas. □

Corolario 2.12. *Si Γ es un grafo de Coxeter conexo y semidefinido positivo entonces todo subgrafo propio es definido positivo.*

Demostración. Sea Γ' un subgrafo propio de Γ, y denotemos por $A' \in \mathcal{M}_{m\times m}$ y $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, con $m \leq n$, a sus correspondientes matrices asociadas. Supongamos por comodidad que si al obtener Γ' de Γ se elimina algún vértice, entonces estos son de las últimas $n-m$ coordenadas.

Las etiquetas de las aristas en Γ' satisfacen que $m'_{ij} \leq m_{ij}$, por lo tanto $0 \geq a'_{ij} = -\cos\left(\frac{\pi}{m'_{ij}}\right) \geq -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) = a_{ij}$. Supongamos que A' no es definida positiva, luego existe $x \in \mathbb{R}^m$ no nulo tal que $\langle x, A'x\rangle \leq 0$.

Consideremos el vector en $y \in \mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son $y_i := |x_i|$ si $i \leq m$ e $y_i := |x_i| := 0$ si $m < i \leq n$. Aplicando la forma bilineal asociada a A obtenemos que:

$$0 \leq \langle y, Ay\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,|x_i|\,|x_j| = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\,|x_i|\,|x_j| \overset{(*)}{\leq} \sum_{i,j=1}^{m} a'_{ij}\,|x_i|\,|x_j| \leq \sum_{i,j=1}^{m} a'_{ij}x_ix_j = \langle x, A'x\rangle \leq 0.$$

Se sigue que todas las desigualdades son igualdades y de la primer igualdad junto con la proposición 2.11, tenemos que $y \in \ker(A)$. Esto no puede darse a menos que $m = n$ y las coordenadas de x son todas no nulas. Pero si $m = n$ y las coordenadas de x son no nulas, de la desigualdad $(*)$ y de que $a_{ij} \leq a'_{ij}$, podemos deducir que $a_{ij} = a'_{ij}$. Lo que resulta absurdo ya que entonces Γ' no sería un subgrafo propio de Γ. □

2.4. Clasificación de grafos definidos positivos

Teorema 2.13. *Los grafos en las figuras 2.1 y 2.2 son los únicos grafos de Coxeter conexos y semidefinidos positivos.*

Demostración. Supongamos que tenemos un grafo de Coxeter Γ conexo y semidefinido positivo que no está dentro de las figuras mencionadas. Procederemos con los siguientes 20 pasos para obtener una contradicción, invocando repetidamente el corolario 2.12 para descartar posibles subgrafos. Sean $n = \mathrm{rg}(\Gamma)$ y m el máximo de las etiquetas de las aristas.

1. Todos los grafos de Coxeter de rango 1 o 2 $(A_2, \mathcal{D}_m, \widetilde{A}_2)$ son semidefinidos positivos, por lo tanto tenemos $n \geq 3$.
2. Dado que $\widetilde{A}_2$ no puede ser un subgrafo de Γ, entonces $m < \infty$.
3. Dado que $\widetilde{A}_n$, con $n \geq 3$, no puede ser un subgrafo de Γ, entonces Γ no contiene circuitos.

Supongamos por un momento que $m = 3$.

4. Γ debe tener un vértice de ramificación, dado que $\Gamma \neq A_n$.
5. Dado que Γ no contiene a $\widetilde{D}_n$, con $n \geq 6$ entonces debe contener un único vértice de ramificación.
6. Γ no contiene a $\widetilde{D}_5$, por lo tanto 3 aristas se encuentran en el mismo vértice de ramificación. Con $a \leq b \leq c$ la cantidad de vértices en cada una de estas direcciones.
7. Dado que $\widetilde{E}_7$ no es un subgrafo de Γ tenemos que $a = 1$.
8. Dado que $\widetilde{E}_8$ no es un subgrafo de Γ tenemos que $b \leq 2$.
9. Dado que $\Gamma \neq D_n$, entonces $b = 2$.
10. Dado que $\widetilde{E}_9$ no es un subgrafo de Γ tenemos que $c \leq 4$.
11. Dado que $\Gamma \neq E_6, E_7, E_8$ resulta entonces que el caso $m = 3$ es imposible.

Por lo tanto $m \geq 4$.

11. Γ no contiene a $\widetilde{C}_n$, por lo tanto hay una única arista con una etiqueta mayor a 3.
12. Γ no contiene a $\widetilde{B}_n$, por lo tanto Γ no tiene vértices de bifurcación.

Consideremos ahora el caso $m = 4$.

13. Dado que $\Gamma \neq B_n$, los dos vértices en los extremos de Γ deben estar etiquetados con un 3.

14. Dado Γ no contiene a $\widetilde{F}_5$, n debe ser 4.

15. Pero como $\Gamma \neq F_4$, por lo tanto el caso $m = 4$ es imposible, por lo tanto debemos tener $m \geq 5$.

16. Dado que Γ no contiene a $\widetilde{G}_3$, entonces $m = 5$.

17. Γ no puede contener al grafo Z_4 del cuadro 2.3, por lo tanto el vértice etiquetado con un 5 debe estar en un extremo de Γ.

18. Γ no contiene al grafo Z_5, por lo tanto $n \geq 4$.

19. Por lo tanto Γ debería ser H_3 o H_4, lo cual es absurdo.

Entonces eliminadas todas la posibilidades resulta que los grafos del cuadro 2.1 son los único grafos de Coxeter conexos y definidos positivos. □

Este teorema reduce los posibles grupos de reflexiones que podemos encontrar. Para terminar la clasificación de los grupos de reflexiones, debemos mostrar cuáles de los grafos del cuadro 2.1 se corresponden con sistemas de raíces. Esto será el contenido de la sección 2.6.

2.5. Grupos cristalográficos y grupos de Weyl

En esta sección terminaremos de ver lo que adelantábamos en la observación 1.9, que los grupos de Weyl coinciden con los *grupos cristalográficos*. Un subgrupo G de $\mathrm{GL}(V)$ se dice que es *cristalográfico* si estabiliza un retículo L en V (donde por retículo entendemos un subgrupo abeliano generado por una base de V), i.e. $gL = L$ para todo $g \in G$, o equivalentemente $gL \subset L$ para todo $g \in G$.

Teorema 2.14. *Sea W un grupo de reflexiones finito actuando esencialmente en un espacio vectorial V, entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:*

1. *W es un grupo de Weyl.*

2. *W es un grupo de reflexiones cristalográfico.*

3. *$m(\alpha, \beta)$ es $2, 3, 4$ o 6, para todo $\alpha, \beta \in \Delta$.*

Demostración.

($1 \Rightarrow 2$) Sea W un grupo de Weyl con un sistema de raíces cristalográfico Φ y un sistema simple $\Delta \subset \Phi$. Si $X \subset V$, denotemos por $\mathbb{Z}X$ el conjunto de las $\mathbb{Z}$–combinaciones lineales de X, i.e., $\mathbb{Z}X = \{\sum \alpha_i x_i : \alpha_i \in \mathbb{Z}, x_i \in X\}$. Del proposición 1.25 se deduce que $\Phi \subset \mathbb{Z}\Delta$, y por lo tanto los retículos $\mathbb{Z}\Phi$ y $\mathbb{Z}\Delta$ coinciden. Dado que Φ es W–estable concluimos que el retículo $\mathbb{Z}\Phi$ también lo es.

($2 \Rightarrow 3$) Observemos que si W es un grupo cristalográfico actuando en V y tomamos una base B de V, entonces para todo $w \in W$ la traza de la matriz asociada a w en la base B debe ser un entero, ya que esta traza coincide con la traza relativa a una base del retículo $L \subset V$ que W estabiliza.

Si $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \neq \beta$, sabemos que $s_\alpha s_\beta \neq \mathrm{id}$ actúa en el plano generado por α y β como una rotación de ángulo $\varphi = \frac{2\pi}{m(\alpha,\beta)} = -2\theta$, siendo $\theta = \pi - \frac{\pi}{m(\alpha,\beta)}$ el ángulo entre α y β, mientras que fija puntualmente el complemento ortogonal de este plano. Luego su traza relativa a una base ortogonal que contenga a una base del plano es $(n-2) + 2\cos(\varphi)$, siendo n la dimensión de V. Luego $\cos(\varphi) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, mientras que $0 \leq \varphi \leq \pi$, siendo las únicas posibilidades $\cos(\varphi) = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$, correspondientes a $m(\alpha, \beta) = 2, 3, 4, 6$.

$(3 \Rightarrow 1)$ La idea para esta parte consiste en modificar las longitudes de las raíces de un sistema simple Δ, de forma tal que se satisfaga la condición de cristalografía. Luego, por la proposición 1.25 el sistema de raíces resultante es cristalográfico. Para lograr esto tomaremos una raíz simple $\alpha \in \Delta$ y modificaremos la longitud de las adyacentes a ésta. Iterando este procedimiento, modificando siempre aquellas raíces que no hayamos alterado, terminaremos con un sistema simple que cumple la condición de cristalografía. Observar que este procedimiento está bien definido, puesto que los grafos de Coxeter asociados a grupos de reflexiones son acíclicos (ver cuadro 2.1) y termina en una cantidad finita de pasos, porque los grafos de Coxeter son finitos.

Sean $\alpha, \beta \in \Delta$ y $\theta = \pi - \frac{\pi}{m(\alpha,\beta)}$ el ángulo entre estas raíces. Dado que $\cos(\theta) = \frac{\langle \alpha,\beta \rangle}{\|\alpha\|\|\beta\|}$, tenemos que

$$s_\alpha(\beta) = \beta - 2\cos(\theta)\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}\alpha \quad \text{y} \quad s_\beta(\alpha) = \alpha - 2\cos(\theta)\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\beta.$$

Con tal de tener que $2\cos(\theta)\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}, 2\cos(\theta)\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|} \in \mathbb{Z}$, debemos multiplicar a β por un escalar positivo de modo que satisfaga lo siguiente:

Si $m(\alpha,\beta) = 2$, entonces $\cos(\theta) = 0$ y por lo tanto $2\cos(\theta)\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}, 2\cos(\theta)\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|} \in \mathbb{Z}$. Es este caso, la longitud de β es independiente de α.

Si $m(\alpha,\beta) = 3$, entonces $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ y por lo tanto basta con tener $\|\beta\| = \|\alpha\|$.

Si $m(\alpha,\beta) = 4$, entonces $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y por lo tanto basta con tener $\|\beta\| = \sqrt{2}\|\alpha\|$ o $\|\beta\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|\alpha\|$.

Si $m(\alpha,\beta) = 6$, entonces $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y por lo tanto basta con tener $\|\beta\| = \sqrt{3}\|\alpha\|$ o $\|\beta\| = \frac{1}{\sqrt{3}}\|\alpha\|$.

Dado que hemos modificado las raíces de Δ, y por lo tanto también las de Φ, no tenemos que Φ sea necesariamente un sistema de raíces. Para sortear este problema basta con redefinir Φ como $\Phi := W\Delta$, de esta manera efectivamente Φ es un sistema de raíces y $\Delta \subset \Phi$ es un sistema simple.

□

La conclusión de este teorema es que los grupos de Weyl son precisamente los grupos de reflexiones para los cuales $m(\alpha,\beta) \in \{2,3,4,6\}$, para todo $\alpha \neq \beta$ raíces simples. Este criterio deja fuera de la categoría de grupos cristolográficos a los grupos del tipo H_3 y H_4 así como también a los grupos diedrales excepto para aquellos que tienen orden $2,4,6,8,12$.

Observar que cuando el grafo de Coxeter es irreducible, hay a lo sumo dos posibles longitudes relativas para las raíces cristalográficas, i.e. $\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$ no puede tomar más de 2 posibles valores, habiendo los dos largos sólo si $m(\alpha,\beta) > 3$ para algún $\alpha \neq \beta$. Si hay de ambas longitudes hablaremos de *raíces largas* y *cortas*, observar que en este caso el cociente entre las longitudes de las raíces largas y las cortas sólo puede ser $\sqrt{2}$ o $\sqrt{3}$. Si todas las raíces tienen la misma longitud, diremos que todas las raíces son largas. Esta información se agrega al grafo de Coxeter direccionando las aristas de una raíz corta a una larga. Por convención, las etiquetas 4 y 6 son reemplazadas en cada caso por una arista doble o triple. Cuando todas las raíces tienen el mismo largo, el grafo resulta adireccionado. El grafo resultante se lo conoce por *diagrama de Dynkin*, ya en la siguiente sección los deduciremos.

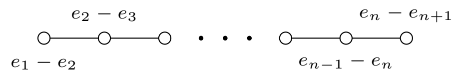
Dado un sistema de raíces Φ, podemos considerar el *sistema de raíces dual* $\Phi^\vee$ de Φ, donde $\Phi^\vee$ consiste de las *coraíces* $\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{\langle \alpha,\alpha \rangle}$, con $\alpha \in \Phi$, con sistema simple $\Delta^\vee := \{\alpha^\vee : v \in \Delta\}$. Es fácil verificar que si Φ es un sistema cristalográfico, entonces $\Phi^\vee$ también lo es, de hecho, si α es una raíz larga en Φ, entonces $\alpha^\vee$ es una raíz corta en $\Phi^\vee$ (y viceversa). Por lo tanto, el diagrama de Dynkin de $\Phi^\vee$ es el mismo que el de Φ, pero con las orientaciones invertidas. Luego, si Φ es irreducible, el lector podrá verificar que todos los diagramas de Dynkin de un sistema Φ coinciden con el de su dual, salvo para el caso de B_n. Para este grupo de Weyl, resulta que existen dos sistemas de raíces B_n y C_n con diferentes diagramas de Dynkin, de hecho, estos sistemas son duales uno del otro.

2.6. Construcción de los sistemas de raíces

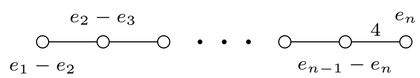
En esta sección esbozaremos brevemente cómo construir sistemas de raíces para los grafos de la tabla 2.1, al igual describiremos algunas de sus principales características. Adicionalmente mostraremos sistemas de raíces cristalográficos para los grupos de Weyl. Con el teorema 2.13 hemos visto que los posibles grupos de reflexiones pueden presentarse en familias de grupos (A_n, B_n, D_n y $\mathcal{D}_m$) o como grupos excepcionales (E_6, E_7, E_8, H_3, H_4 y F_4).

A_n Sea V el hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ perpendicular al vector $(1, \ldots, 1)$, i.e., V es el hiperplano consistente de vectores cuyas coordenadas suman 0. Definamos Φ como el conjunto de vectores de norma $\sqrt{2}$ de la intersección de V con $\mathbb{Z}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}e_{n+1}$. Entonces Φ consiste de los $n(n+1)$ vectores $e_i - e_j$ con $1 \leq i \neq j \leq n+1$, todas teniendo el mismo largo.

Un sistema simple de Φ es $\Delta = \{e_i - e_{i+1} : 1 \leq 1 \leq n\}$, quedando el grafo de Coxeter de la siguiente manera:



B_n Definamos $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ como el conjunto de vectores de norma 1 o $\sqrt{2}$ del retículo $\mathbb{Z}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}e_n$. Luego Φ consiste de las $2n$ raíces cortas $\pm e_i$ y las $2n(n-1)$ raíces largas $\pm e_i \pm e_j$ (con $i < j$), totalizando $2n^2$. Tomemos $\Delta = \{e_i - e_{i+1} : 1 \leq 1 \leq n-1\} \cup \{e_n\}$ como sistema simple de Φ, resultando el grafo de Coxeter de la siguiente manera:

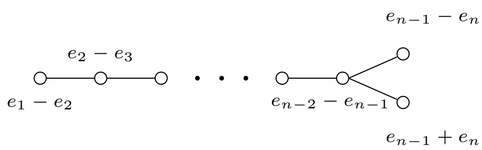


Considerando el dual de este sistema tenemos $\Phi^\vee = \{\pm 2e_i\} \cup \{\pm e_i \pm e_j\}$. Tradicionalmente estos sistemas de raíces se los denota por $B_n = \Phi$ y $C_n = \Phi^\vee$, y sus diagramas de Dynkin son:

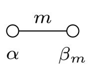
B_n

C_n

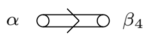
D_n Definamos el $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ como el conjunto de vectores de norma $\sqrt{2}$ de $\mathbb{Z}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}e_n$. Luego Φ consiste de las $2n(n-1)$ raíces $\{\pm e_i \pm e_j\}$, con $1 \leq i < j \leq n$, todas del mismo largo, y podemos tomar $\Delta = \{e_i - e_{i+1} : 1 \leq 1 \leq n-1\} \cup \{e_{n-1} + e_n\}$. En este caso el grafo de Coxeter nos queda:



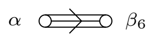
$\mathcal{D}_m$ Para el caso del grupo diedral ya lo hemos tratado anteriormente en el ejemplo 1.17. Resumiendo, podemos considerar como sistema de raíces a $\Phi_m = \left\{\left(\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{m}\right)\right) : 0 \leq k < 2m\right\}$ y como sistema simple a $\Delta_m = \{\alpha, \beta\}$, con $\alpha = (1, 0)$ y $\beta_m = \left(\cos\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right)\right)$. Quedando el grafo de Coxeter:



Como vimos en el teorema 2.14, los grupos $\mathcal{D}_4$ y $\mathcal{D}_6$ son grupos de Weyl, pero los correspondientes sistemas de raíces Φ_4 y Φ_6 no verifican la condición de cristalografía. En su lugar, podemos considerar $\Phi_m = \left\{\left(\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{m}\right)\right) : 0 \leq k < 2m, \text{ con } k \text{ par}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{m}{2}}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{m}\right)\right) : 0 \leq k < 2m, \text{ con } k \text{ impar}\right\}$ y $\Delta_m = \{\alpha, \beta_m\}$ como sistemas de raíces y simple de $\mathcal{D}_m$, siendo $\alpha = (1, 0)$ y $\beta_m = \sqrt{\frac{m}{2}}\left(\cos\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right)\right)$. En estos casos los diagrama de Dynkin que obtenemos son:

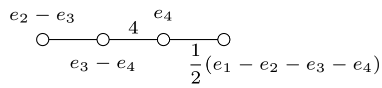


$\mathcal{D}_4$

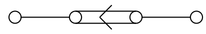


$\mathcal{D}_6$

F_4 Sea $\Phi \subset \mathbb{R}^4$ el conjunto de vectores del retículo $\mathbb{Z}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}e_4 + \mathbb{Z}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} e_i\right)$ de norma 1 o $\sqrt{2}$. Entonces el sistema de raíces Φ consta de las 24 raíces largas $\{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i < j \leq 4\}$ y de las 24 raíces cortas $\{\pm e_i : 1 \leq i \leq 4\} \cup \left\{\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\right\}$. Podemos tomar $\Delta = \left\{e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4, \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)\right\}$, obteniendo el siguiente grafo de Coxeter:



y el diagrama de Dynkin:



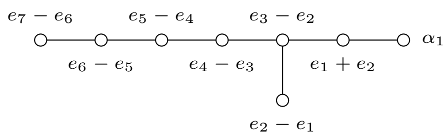
E_8 En este caso la elección del retículo es algo más complejo. Sea L' el retículo consistente de las sumas $\sum_{i=1}^{8} c_i e_i$ con $c_i \in \mathbb{Z}$ y $\sum c_i$ par, y sea $L = L' + \mathbb{Z}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} e_i\right)$. Consideremos $\Phi \subset \mathbb{R}^8$ el conjunto de vectores de L de longitud $\sqrt{2}$, por lo tanto Φ consta de las 240 raíces de igual longitud

$$\pm e_i \pm e_j (i < j),\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \pm e_i \text{ (con una número par de signos +).}$$

Podemos tomar el sistema simple Δ con las siguiente raíces:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),\\
\alpha_2 &= e_1 + e_2,\\
\alpha_i &= e_{i-1} - e_{i-2}\ (3 \leq i \leq 8).
\end{aligned}$$

Luego, el grafo de Coxeter resulta ser:

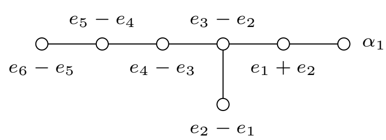


Observar que el sistema de raíces de tipo E_8 contiene una copia de E_7 y de E_6, por lo tanto, nos valdremos de las raíces de E_8 para construir las de E_7 y E_6.

E_7 Utilicemos el sistema de raíces de tipo E_8 ya construido, sea $V \subset \mathbb{R}^8$ el subespacio generado por $\{\alpha_i : 1 \leq i \leq 7\}$ y sea Φ el conjunto de 126 raíces de E_8 que están en V:

$$\pm e_i \pm e_j (1 \leq i < j \leq 6),\ \pm(e_7 - e_8),\ \pm\frac{1}{2}\left(e_7 - e_8 + \sum_{i=1}^{6} \pm e_i\right),$$

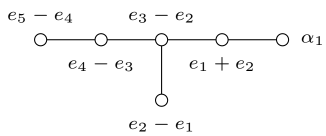
donde el número de signos + en la suma es impar. Un sistema simple es $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_7\}$ y el grafo de Coxeter queda:



E_6 De nuevo utilicemos el sistema de raíces de tipo E_8 ya construido, sea $V \subset \mathbb{R}^8$ el subespacio generado por $\{\alpha_i : 1 \leq i \leq 6\}$ y sea Φ el conjunto de 72 raíces de E_8 que están en V:

$$\pm e_i \pm e_j (1 \leq i < j \leq 6), \ \pm\frac{1}{2}\left(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^{5} \pm e_i\right),$$

donde el número de signos $+$ en la suma es par. Un sistema simple es $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\}$ y el grafo de Coxeter queda:



Consideremos finalmente los grupos no cristalográficos de tipo H_3 y H_4. Ambos grupos aparecen naturalmente como grupos de simetrías de sólidos regulares. El grupo H_3 es el grupo de simetrías del icosaedro y del dodecaedro, tiene orden 120 y contiene 15 reflexiones. El grupo H_4 es el grupo de simetrías de un sólido de 600 caras tetraédricas en $\mathbb{R}^4$.

En estos dos últimos casos tomaremos $\beta = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

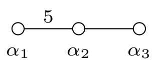
H_3 Para el grupo H_3 podemos considerar el sistema de raíces

$$\Phi = \{\pm e_i : 1 \leq i \leq 3\} \bigcup \left\{\text{permutaciones pares de } \left(\pm(\beta+1), \pm\beta, \pm\frac{1}{2}\right)\right\},$$

con el sistema simple

$$\Delta = \left\{\alpha_1 = \left(\frac{1}{2} + \beta, \beta, -\frac{1}{2}\right), \alpha_2 = \left(-\frac{1}{2} - \beta, \beta, \frac{1}{2}\right), \alpha_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \beta, \beta\right)\right\}.$$

Quedando el grafo de Coxeter



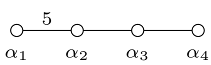
H_4 Finalmente, para el grupo H_4 tenemos el sistema de raíces

$$\Phi = \{\pm e_i : 1 \leq i \leq 4\} \bigcup \left\{\frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)\right\} \bigcup \left\{\text{permutaciones pares de } \left(\pm\left(\beta + \frac{1}{2}\right), \pm\beta, \pm\frac{1}{2}, 0\right)\right\},$$

con el sistema simple

$$\Delta = \left\{\alpha_1 = \left(\frac{1}{2} + \beta, \beta, -\frac{1}{2}, 0\right), \alpha_2 = \left(-\frac{1}{2} - \beta, \beta, \frac{1}{2}, 0\right), \alpha_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \beta, \beta, 0\right), \alpha_4 = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} - \beta, \beta\right)\right\}.$$

Siendo el grafo de Coxeter en este caso:



Capítulo 3

Teoría de invariantes de grupos de reflexiones

Si G es un subgrupo de $\mathrm{GL}(V)$, entonces existe una acción natural de G en el álgebra de funciones polinomiales de V. Este capítulo está dedicado al estudio de dicha acción, enfatizando las características más destacables del álgebra de invariantes, la cual, en el caso de G ser un grupo de reflexiones, resulta ser un anillo de polinomios sobre generadores de grados bien conocidos, cuyo producto es $|G|$.

Luego de algunas generalidades sobre teoría de invariantes de grupos finitos arbitrarios (3.1)–(3.2), probaremos el teorema de Chevalley, dando un conjunto generador algebraicamente independiente para el álgebra de invariantes (3.3)–(3.3) y observando la unicidad de sus grados (3.4). Más aún, la suma y el producto de estos grados tienen interpretaciones naturales (3.6). Un criterio debido a Jacobi para la independencia algebraica de polinomios (3.7) nos permitirá mostrar algunos ejemplos (3.9). A su vez, los grados de W nos mostrarán una sorprendente factorización del polinomio de Poincaré de W (3.12).

3.1. Polinomios invariantes de un grupo finito

Antes de lidiar con grupos de reflexiones, consideremos qué podemos decir del álgebra de polinomios invariantes de un grupo finito de $\mathrm{GL}(V)$ arbitrario, donde V es un espacio vectorial de dimesión n sobre un cuerpo K de característica 0. Sea S el álgebra simétrica $S(V^*)$ del espacio dual V^*, entonces se tiene que V^* es isomorfo, como espacio vectorial, al conjunto de polinomios de grado 1 en n variables sobre el cuerpo K y S es isomorfa al álgebra de funciones polinomiales sobre V, donde por funciones polinomiales sobre V, entenderemos funciones $f : V \to K$ tales que, fijada una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, resulta que el mapa

$$(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mapsto y \in K : y = f\left(\sum x_i v_i\right)$$

es un polinomio en las variables $x_1, \ldots, x_n$. Fijando una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, entonces S puede identificarse con $K[v_1^*, \ldots, v_n^*]$, donde $\{v_i^*\}$ es la base dual de B, i.e. aquella base de V^* que satisface: $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$. Si bien en los capítulos anteriores habíamos reservado la letra S para denotar el conjunto de las reflexiones simples que generan W, en este capítulo la reservaremos (por lo menos hasta la última sección) para indicar el álgebra de polinomios en varias variables sobre un cuerpo K.

Sea G un subgrupo de $\mathrm{GL}(V)$, entonces existe una acción natural de G sobre V^* dada por: $(g \cdot f)(v) = f(g^{-1}(v))$, donde $g \in G, f \in V^*$ y $v \in V$. Esta acción sobre V^* se extiende a una acción sobre $S(V^*)$ por automorfismos de K–álgebras. Esta acción preserva el grado en S, ya que $g \cdot f \in V^*$ para toda $f \in V^*$. Diremos que $f \in S$ es G–invariante si $g \cdot f = f$ para todo $g \in G$ y denotemos por S^G a la subálgebra de S de G–invariantes. Dado que la acción de G preserva el grado en S, entonces S^G es una subálgebra homogénea de S, i.e. si $f \in S^G$, entonces cada una de sus componentes homogéneas están en S^G.

Es claro que S^G contiene a K (las funciones constantes), pero aparte de estos elementos no es claro que S^G posea otros elementos. Veamos ahora que en caso de que G sea un grupo finito, entonces S^G constará con más que sólo constantes. La acción de G en S por automorfismos de álgebras se extiende a su vez a una acción de G en el cuerpo de fracciones L de S por automorfismos de cuerpos. Además L es como cuerpo isomorfo a $K(x_1, \ldots, x_n)$, la que es una extensión trascendente pura sobre K de grado de trascendencia n. Sabemos de teoría de cuerpos que L es una extensión Galois finita del cuerpo fijo L^G, con grupo de Galois G. Se sigue entonces que L^G también tiene grado de trascendencia n sobre K.

Claramente el cuerpo de fracciones de S^G está incluido en L^G, veamos que la otra inclusión también es cierta. Si $p/q \in L^G$ con $p, q \in S$, podemos multiplicar denominador y numerador por $\Pi\,(g \cdot p)$, donde $g \in G$ y $g \neq 1$, y concluir que el numerador es G–invariante forzando al denominador a ser G–invariante también. Luego L^G es precisamente el cuerpo de fracciones de S^G, en particular $S^G = K$ si y sólo si $L^G = K$. Resumiendo:

Proposición 3.1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K de característica 0. Sea G un subgrupo finito de $GL(V)$, actuando de forma canónica sobre el álgebra simétrica S de V^*, y sea S^G la subálgebra de G–invariantes. Entonces el cuerpo de fracciones de S^G coincide con el subcuerpo de G–invariantes en el cuerpo de fracciones de S. En particular, S^G tiene grado de trascendencia n sobre K si $\dim(V) = n$ y por lo tanto $S^G \neq K$ si G es finito.*

Observación 3.2. En el caso que G sea un subgrupo de operadores ortogonales de K^n, por ejemplo cuando G es un grupo de reflexiones W, consideremos a K^n con el producto interno usual. Entonces S^G contiene al polinomio $x_1^2 + \cdots + x_n^2$, ya que este polinomio representa el producto interno usual y los operadores ortogonales lo preservan. En el caso general en que el producto interno no es el usual sobre K^n, de todos modos S^G contendrá al polinomio homogéneo de grado 2 que represente al producto interno de dicho espacio.

Proposición 3.3. *Sea W un grupo de reflexiones actuando en un espacio vectorial V, entonces S^W contiene un polinomio homogéneo de grado 1 si y sólo si la acción de W no es esencial.*

Demostración. Observar que $p \in S^W$ es equivalente a $s_\alpha \cdot p = p$ para todo α en un sistema simple Δ de W. Si tuviéramos un polinomio p homogéneo de grado 1 en S^W, debería verificarse que

$$p(v) = s_\alpha \cdot p(v) = p(s_\alpha(v)) = p\left(v - \frac{2\langle\alpha, v\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha\right) = p(v) - \frac{2\langle\alpha, v\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}p(\alpha),$$

lo que es equivalente a

$$\langle\alpha, v\rangle\, p(\alpha) = 0, \tag{3.1}$$

para todo $\alpha \in \Delta, v \in V$.

Si la acción no es esencial, podemos suponer que Δ está contenido en un hiperplano de V y podemos tomar como p un polinomio lineal que se anula sobre este hiperplano, satisfaciéndose así la ecuación (3.1).

Si la acción es esencial, entonces Δ es una base de V y de satisfacerse la ecuación (3.1) para todo $\alpha \in \Delta$ y $v \in V$, tendríamos $p = 0$. □

Terminemos la sección con un par de ejemplo sencillos, ejemplos que expondremos en más detalle en la sección 3.9.

Observación 3.4. El grupo simétrico S_n actúa sobre $\mathbb{R}^n$ permutando coordenadas. Observemos que S_n actúa en $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ permutando los términos $x_1, \ldots, x_n$. En efecto, si $\sigma \in S_n$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, luego para todo $j = 1, \ldots, n$ tenemos que

$$\sigma \cdot x_i(e_j) = x_i\left(\sigma^{-1}(e_j)\right) = x_i(e_{\sigma^{-1}(j)}) = \delta_{i,\sigma^{-1}(j)} = \delta_{\sigma(i),j} = x_{\sigma(i)}(e_j).$$

Luego se deduce que $\sigma \cdot x_i = x_{\sigma(i)}$ y por lo tanto el álgebra de polinomio invariante por S_n consiste de polinomios simétricos en las variables $x_1, \ldots, x_n$. Esta álgebra es de particular interés en varias áreas de la matemática y más adelante (ver observación 3.22) veremos que cada polinomio simétrico puede expresarse de manera única como un polinomio en los polinomios $\{s_1, \ldots, s_n\}$, donde

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

En particular, el álgebra de polinomios S_n–invariantes es isomorfa al álgebra libre $\mathbb{R}[s_1, \ldots, s_n]$.

Observación 3.5. El grupo $B_n = \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$ actúa esencialmente sobre $\mathbb{R}^n$ permutando coordenadas (por S_n) y cambiando signos (por $\mathbb{Z}_2^n$). De manera análoga al ejemplo anterior podemos concluir que los polinomios B_n–invariantes resultan ser $\mathbb{R}[\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n]$, donde $\bar{s}_k$ se obtiene de s_k remplazando x_i por x_i^2 (debido al cambio de signo generado por $\mathbb{Z}_2^n$), i.e.

$$\bar{s}_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^{2k}.$$

Observar que en ambos casos se tiene que el álgebra de invariantes es un álgebra libre, en el primer caso generada por $\{s_1, \dots, s_n\}$ y en el segundo por $\{\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n\}$. Esto no es casualidad como veremos en el teorema 3.10.

3.2. Generación finita

En esta sección veremos que el álgebra de invariantes S^G es finitamente generada como K–álgebra, usando como herramienta el teorema de la base de Hilbert, que afirma que todo ideal de un anillo de polinomios es finitamente generado como módulo sobre el anillo de polinomios. Además se deduce también del teorema de la base de Hilbert, que de cualquier conjunto generador como módulo, podemos extraer un generador finito. Consideremos el ideal I de S generado por S^{G+}, donde S^{G+} consiste en los polinomios de S^G que tienen término independiente nulo. Probaremos que cualquier generador finito de I como S–módulo consistente de elementos de S^{G+} genera S^G como una K–álgebra.

Para la demostración de esto último, precisaremos un tipo de operador proyección de S en S^G, definido "promediando" sobre G para todo $f \in S$ como

$$f^\sharp := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot f.$$

Es claro que el mapa $f \mapsto f^\sharp$ es un morfismo de K–álgebras entre S y S^G, que preserva grados y que deja los elementos de S^G fijos. En particular, si $p \in S$ y $q \in S^G$ se tiene que

$$(pq)^\sharp = p^\sharp q^\sharp = p^\sharp q.$$

A este mapa lo llamaremos el *operador de Reynolds* por G.

Proposición 3.6. *Sean $f_1, \dots, f_r$ elementos homogéneos de S^{G+} que generan el ideal I de S como S–módulo, entonces S^G es generada como una K–álgebra por estos elementos.*

Demostración. Tenemos que probar que todo elemento $f \in S^G$ es un polinomio en $f_1, \dots, f_r$, i.e. $f \in K[f_1, \dots, f_r]$. Dado que S^G es una K–álgebra graduada es suficiente probar el teorema en el caso que f sea homogéneo. Procederemos por inducción en el grado de f, siendo el caso $\deg(f) = 0$ claro.

Si $\deg(f) > 0$, tenemos que $f \in I$ y por lo tanto

$$f = s_1 f_1 + \cdot + s_r f_r, \text{ donde } s_i \in S.$$

Dado que $f, f_1, \dots, f_r$ son homogéneos, podemos asumir, luego de remover de s_i términos irrelevantes, que cada s_i también es homogéneo, con $\deg(s_i) = \deg(f) - \deg(f_i)$. Luego aplicando el operador de Reynolds tenemos que

$$f = f^\sharp = s_1^\sharp f_1 + \cdots + s_r^\sharp f_r.$$

Dado que los polinomios $s_i^\sharp$ son elementos homogéneos de S^G de grado menor que $\deg(f)$, entonces por hipótesis de inducción tenemos que $s_i \in K[f_1, \dots, f_r]$ y por lo tanto f también. ☐

En el teorema 3.10 refinaremos este resultado probando que podemos elegir a los polinomios $f_1, \dots, f_r$ algebraicamente independientes, en el caso que G sea un grupo de reflexiones.

Observación 3.7. A pesar que en la prueba utilizamos el operador de Reynolds y por lo tanto que la característica del cuerpo K no divide al orden de G, este resultado sigue siendo cierto en tal caso, pero la prueba resulta ser mucho más compleja.

En el resto de este texto será esencial trabajar con derivadas parciales de polinomios. Aunque el cuerpo de base sobre el que estamos trabajando es $\mathbb{R}$, y por lo tanto valen todas las propiedades para derivadas parciales como por ejemplo la regla de la cadena, se puede definir derivadas parciales de manera abstracta y formal sobre cualquier cuerpo, preservando sus propiedades usuales. Por ejemplo, si K es un cuerpo arbitrario y $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ es un polinomio homogéneo, entonces tenemos la siguiente fórmula debida a Euler

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = (\deg f) f. \tag{3.2}$$

Otra propiedad que nos será de utilidad en reiteradas ocasiones es una generalización de la regla de la cadena. Si $f_1, \ldots, f_n$ son polinomios algebraicamente independientes y g pertenece a la K–álgebra generada por estos polinomios, definimos la *derivada parcial* de g con respecto a f_i como

$$\frac{\partial g}{\partial f_i} = \frac{\partial G}{\partial x_i}(f_1, \ldots, f_n),$$

siendo G el polinomio que cumple $g = G(f_1, \ldots, f_n)$.

Con esta definición en mano podemos extender la regla de la cadena usual como

$$\frac{\partial h}{\partial f_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial g_k}\frac{\partial g_k}{\partial f_j},$$

donde $\{f_1, \ldots, f_n\}$ y $\{g_1, \ldots, g_n\}$ son dos conjuntos de polinomios algebraicamente independientes que generan la misma K–álgebra y h pertenece a esta álgebra. En efecto, notar que si $h = H_f(f_1, \ldots, f_n) = H_g(g_1, \ldots, g_n)$, entonces $h = H_g(G_{1,f}(f_1, \ldots, f_n), \ldots, G_{n,f}(f_1, \ldots, f_n)) = H_g \circ G(f_1, \ldots, f_n)$, donde $G = (G_{1,f}, \ldots, G_{n,f})$ y $g_i = G_{i,f}$, y por lo tanto $H_f = H_g \circ G$. Luego, se deduce que

$$\frac{\partial h}{\partial f_i} = \frac{\partial H_f}{\partial f_i}(f_1, \ldots, f_n) = \frac{\partial H_g \circ G}{\partial f_i}(f_1, \ldots, f_n) = \sum \frac{\partial H_g}{\partial x_k} \circ G(f_1, \ldots, f_n)\frac{\partial G_{k,g}}{\partial x_i}(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial g_k}\frac{\partial g_k}{\partial f_j}.$$

3.3. Teorema de Chevalley

Por el resto de este capítulo nos volcaremos al estudio del caso en el que G sea un grupo de reflexiones W actuando esencialmente sobre un espacio vectorial V de dimensión n sobre $\mathbb{R}$, el cual lo identificaremos con $\mathbb{R}^n$. Como en la secciones precedentes, W actúa sobre el anillo S de funciones polinomiales sobre V, el cual identificaremos con el anillo $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

Antes de discutir la prueba del teorema de Chevalley (ver teorema 3.10) probemos un par de resultados que nos serán de utilidad en varias ocasiones. El lector con conocimientos de geometría algebraica, verá el siguiente resultado como un análogo al Nullstellensatz de Hilbert.

Lema 3.8. *Sea $l \in K[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio homogéneo de grado 1 y supongamos que un polinomio f se anula en las raíces de l, entonces l divide a f en el anillo de polinomios $K[x_1, \ldots, x_n]$.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que x_n ocurre en l con coeficiente no nulo. Entonces aplicando el algoritmo de división en la variable x_n, podemos obtener que

$$f = lq + r,$$

donde $q \in K[x_1, \ldots, x_n]$ y r tiene grado 0 en x_n, i.e. $r \in K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$. Luego a menos que $r = 0$ conseguiremos una contradicción como veremos. Sean $a_1, \ldots, a_{n-1}$ en el cuerpo infinito K para el cual $r(a_1, \ldots, a_{n-1}) \neq 0$. Luego, resolviendo una ecuación de primer orden en x_n podemos encontrar a_n tal que $l(a_1, \ldots, a_n) = 0$ y por lo tanto $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, lo que contradice la contrucción de r y q. □

Formularemos como un lema un paso en la demostración del teorema de Chevalley que usa explícitamente el hecho que W sea un grupo de reflexiones.

Lema 3.9. *Sean $f_1, \ldots, f_r \in S^W$, con f_1 no perteneciente al ideal de S^W generado por $f_2, \ldots, f_r$. Si $g_1, \ldots, g_r$ son polinomios homogéneos de S que satisfacen*

$$f_1 g_1 + \cdots + f_r g_r = 0, \tag{3.3}$$

entonces $g_1 \in I$.

Demostración. Observar que f_1 tampoco puede estar en el ideal de S generado por $f_2, \ldots, f_r$, ya que de lo contrario tendríamos

$$f_1 = f_2 h_2 + \cdots + f_r h_r, \text{ para algunos } h_i \in S.$$

Luego aplicando el operador de Reynolds a esta ecuación tenemos que

$$f_1 = f_1^\sharp = f_2 h_2^\sharp + \cdots + f_r h_r^\sharp. \tag{3.4}$$

Dado que $h_i^\sharp \in S^W$, podemos deducir entonces que f_1 pertenece al ideal de S^W generado por $f_2, \ldots, f_r$, lo que contradice nuestra hipótesis.

Para probar $g_1 \in I$ procederemos por inducción sobre $\deg(g_1)$. Si g_1 es una constante, entonces debe ser 0, ya que de lo contrario la ecuación (3.3) contradeciría la hipótesis sobre f_1. Asumamos entonces que $\deg(g_1) > 0$.

Sea $s_\alpha \in W$ y sea l un polinomio homogéneo de grado 1 cuyo conjunto de ceros coincide con H_α en $\mathbb{R}^n$, por ejemplo $l(x) = \langle \alpha, x \rangle$. Dado que $s_\alpha = s_\alpha^{-1}$ fija puntualmente los elementos de H_α, es claro entonces que $s_\alpha \cdot g_i - g_i$ se anula en todos los puntos de H_α, y aplicando el lema 3.8 encontramos polinomios h_i tales que

$$s_\alpha \cdot g_i - g_i = l h_i. \tag{3.5}$$

Ambos $s_\alpha \cdot g_i - g_i$ y l son homogéneos, por lo tanto la ecuación (3.5) muestra que h_i también es homogéneo de grado menor que g_i. Aplicando s_α a la ecuación (3.3) obtenemos

$$f_1(s_\alpha \cdot g_1) + \cdots + f_r(s_\alpha \cdot g_r) = 0. \tag{3.6}$$

Sustrayendo (3.3) a (3.6) y luego sustituyendo por (3.5) obtenemos

$$l(f_1 h_1 + \cdots + f_r h_r) = 0,$$

y puesto que l no es idénticamente nulo, tenemos

$$f_1 h_1 + \cdots + f_r h_r = 0.$$

Por hipótesis, ya que $\deg(h_i) < \deg(g_i)$ tenemos que $h_1 \in I$ y luego por la ecuación (3.5), $s_\alpha \cdot g_1 - g_1 \in I$ o equivalentemente $s_\alpha \cdot g_1 \equiv g_1 \pmod{I}$.

Dado que $W \cdot S^{G+} \subset S^{G+}$, entonces $W \cdot I \subset I$ también y por lo tanto W actúa en el cociente S/I. Como $s_\alpha \cdot g_1 \equiv g_1 \pmod{I}$ para todo $s_\alpha \in W$, tenemos que $w \cdot g_1 \equiv g_1 \pmod{I}$ para todo $w \in W$. Luego, $g_1^\sharp \equiv g_1 \pmod{I}$ y como $g_1^\sharp \in I$, tenemos que $g_1 \in I$. □

Teorema 3.10 (Chevalley)**.** *Sean W un grupo de reflexiones finito y S^W la subálgebra de $S = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ consistente de los polinomios W–invariantes. Entonces S^W es generada como una $\mathbb{R}$–álgebra por n polinomios homogéneos algebraicamente independientes de grado positivo. En particular, S^W es isomorfa como $\mathbb{R}$–álgebra a $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.*

Demostración. Por el teorema de la base de Hilbert, podemos seleccionar un conjunto generador minimal $f_1, \ldots, f_r$ de I, como S–módulo, consistente de polinomios homogéneos invariantes de grado positivo. Probaremos que estos polinomios son algebraicamente independientes y luego aplicando la proposición 3.6 estos elementos generarán S^W como una K–álgebra. Pero entonces de la proposición 3.1 tendremos $r = n$, dado que el cuerpo de fracciones de S^W debe tener grado de trascendencia n sobre $\mathbb{R}$.

Supongamos que los polinomios $f_1, \ldots, f_r$ son algebraicamente dependientes, i.e. existe un polinomio $h \in \mathbb{R}[y_1, \ldots, y_r]$ no nulo para el cual

$$h(f_1, \ldots, f_r) = 0. \tag{3.7}$$

Sea

$$a y_1^{e_1} \cdots y_r^{e_r}$$

un monomio arbitrario de h. Si $d_i = \deg(f_i)$, entonces $d = \sum d_i e_i$ es el grado de

$$a f_1^{e_1} \cdots f_r^{e_r}$$

en $x_1, \ldots, x_n$. Es claro que si de h nos quedamos tan solo con los monomios tales que, luego de sustituir y_i por f_i, tienen grado d, entonces obtenemos también que $h(f_1, \ldots, f_r) = 0$ y $h \neq 0$. Por lo tanto, podemos descartar de h los otros monomios.

Derivando la ecuación (3.7) con respecto a x_k para cada k, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{r} h_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = 0, \text{ donde } h_i = \frac{\partial h}{\partial y_i}(f_1, \ldots, f_r). \tag{3.8}$$

Notar que h_i es un polinomio homogéneo de S^W de grado $d - d_i$ en las variables $x_1, \ldots, x_n$, mientras que $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ son polinomios homogéneos de S de grado $d_i - 1$.

Reenumerando los subíndices podemos asumir que $h_1, \ldots, h_m$ es un generador minimal del ideal de S^W generado por los polinomios h_i, con $i = 1, \ldots, r$. Para cada $i > m$, tenemos

$$h_i = \sum_{j=1}^{m} g_{ij} h_j, \text{ donde } g_{ij} \in S^W. \tag{3.9}$$

Luego de descartar términos reduntantes podemos asumir que cada g_{ij} es homogéneo de grado $\deg(h_i) - \deg(h_j) = (d - d_i) - (d - d_j) = d_j - d_i$. Luego, sustituyendo la ecuación (3.9) en la (3.8) para cada valor de k, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{r} h_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m} h_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{i=m+1}^{r} h_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m} h_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^{r} g_{ji} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right) = 0. \tag{3.10}$$

Abreviemos la expresión entre paréntesis como $p_{i,k}$ con $1 \le i \le m, 1 \le k \le n$ y observemos que $p_{i,k}$ es homogéneo en $x_1, \ldots, x_n$ de grado $d_i - 1$. Ahora, aplicando el lema 3.9 a la ecuación (3.10), deducimos que $p_{1,k} \in I$ para todo $1 \le k \le n$, i.e.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^{r} g_{j1} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{r} f_i q_{i,k}, \tag{3.11}$$

donde $q_{i,k} \in S$.

Podemos multiplicar ambos lados de (3.11) por x_k y sumar sobre k, para luego, usando la fórmula de Euler (3.2), obtener que

$$d_1 f_1 + \sum_{j=m+1}^{r} d_j g_{j1} f_j = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{r} f_i q_{i,k} \right) x_k = \sum_{i=1}^{r} f_i \left(\sum_{k=1}^{n} q_{i,k} x_k \right) = \sum_{i=1}^{r} f_i r_i, \tag{3.12}$$

donde $\deg(r_i) > 0$ o $r_i = 0$. Observar que los términos de la izquierda son homogéneos de grado d_1. Luego si $r_1 = 0$, entonces (3.11) expresa a f_1 como un elemento que está en el ideal de S generado por $f_2, \ldots, f_r$, contradiciendo nuestra hipótesis de minimalidad sobre los polinomios f_i. Si $r_1 \neq 0$, entonces $\deg(r_1) > 0$ y por lo tanto el término $f_1 r_1$ debe cancelarse del lado derecho con algún otro de grado diferente a d_1, obteniendo así una contradicción igual que antes. $\square$

Para abreviar, nos referiremos a un conjunto generador algebraicamente independiente consistente de polinomios homogéneos de S^W (de grado positivo) como un conjunto de *invariantes básicos* de S^W. Más adelante, en el teorema 3.20, veremos que este resultado admite un recíproco.

3.4. Unicidad de los grados

El conjunto de invariantes básicos de S^W hallada en el teorema 3.10 no es necesariamente único, e.g., $\{x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2\}$ y $\{x_1 + x_2, x_1 x_2\}$ generan ambos la subálgebra de polinomio simétricos de $\mathbb{R}[x_1, x_2]$. Sin embargo, los *grados* de estos polinomios si son independientes de la elección del generador.

Proposición 3.11. *Sean $f_1, \ldots, f_n$ y $g_1, \ldots, g_n$ dos conjuntos de polinomios homogéneos algebraicamente independientes que generan el álgebra de polinomios S^W. Si denotamos por d_i y e_i a los respectivos grados de los polinomios f_i y g_i, entonces $d_i = e_i$ para todo i, luego de una reordenación de los índices.*

Demostración. Para cada par de índices i y j, podemos usar la regla de la cadena para calcular la derivada parcial $\frac{\partial f_i}{\partial f_j}$ y deducir que:

$$\delta_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial f_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial f_j}.$$

Esto muestra que las matrices

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial g_j} \right) \text{ y } \left(\frac{\partial g_i}{\partial f_j} \right)$$

son inversas una de la otra, y en particular cada una de ellas tiene determinante no nulo. Si expandimos el primer determinante como

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial g_j}\right) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial g_{\sigma(i)}} \neq 0,$$

obtenemos que $\prod_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial g_{\sigma(i)}} \neq 0$ para alguna permutación σ. Luego de reenumerar los g_i, podemos asumir que σ es la identidad y por lo tanto si escribimos a f_i como un polinomio en $g_1, \dots, g_n$, entonces g_i debe ocurrir en f_i, para todo $i = 1, \dots, n$. Luego de descartar términos redundantes, podemos asumir que cada monomio $g_1^{k_1} \cdots g_n^{k_n}$ ocurrente en f_i satisface: $d_i = \sum e_j k_j$, y ya que $k_i \geq 1$ tenemos que $d_i \geq e_i$ para todo i. Luego $\sum d_i \geq \sum e_i$ e intercambiando los roles de f_i con g_i, el mismo argumento mustra que, $\sum e_i \geq \sum d_i$. Por lo tanto $d_i = e_i$ para todo i, ya que $d_i \geq e_i$. $\square$

Definición 3.12. Sean $\{f_1, \dots, f_n\}$ un conjunto de invariantes básicos de W. Llamaremos a $d_1, \dots, d_n$, los respectivos grados de $f_1, \dots, f_n$, los *grados* de W. Supondremos además que el conjunto $\{d_1, \dots, d_n\}$ está ordenado de forma creciente.

En el resto del capítulo nos concentraremos en el estudio de estos números y sus propiedades. Como notamos en la observación 3.2 un grupo de reflexiones siempre tiene un invariante de orden 2 y un invariante de grado 1 en el caso que la acción no fuese esencial, ver proposición 3.3.

3.5. Valores propios

El estudio de invariantes puede ser visto como el estudio de subespacios propios valor propio 1 de ciertos operadores, pero un estudio más profundo de los grados de W requiere algunas consideraciones de todos los valores propios, junto con las trazas y determinantes asociados.

Mostremos primero una conveniente descripción de la dimensión del espacio de W−invariantes como la traza de un operador lineal.

Lema 3.13. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo de característica 0 que soporta la acción de un grupo finito G. Entonces la dimensión del espacio de G–invariantes en V es dado por la traza del operador*

$$z = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} g.$$

Demostración. Notar que z es idempotente ya que $gz = z$ para todo $g \in G$. Luego z es diagonalizable, con posibles valores propios 0 y 1, dado que su polinomio minimal divide a $x^2 - x$. Es claro que la traza de z es $\dim(E_1)$, siendo E_1 el subespacio propio de valor propio 1 y por lo tanto sólo resta mostrar que E_1 coincide con el espacio de G–invariantes. En efecto, si $p \in E_1$, entonces $g \cdot p = gz \cdot p = z \cdot p = p$ para todo $g \in G$ y por lo tanto p es G–invariante. En la otra dirección, si p es G–invariante, entonces

$$z \cdot p = \frac{1}{|G|} \sum g \cdot p = \frac{1}{|G|} \sum p = p.$$

$\square$

En la siguiente sección (ver teorema 3.16) probaremos una importante relación que vincula los grados de W con algunas propiedades de W. Para ello desarrollaremos en la siguiente proposición una identidad combinatoria empleando series de potencias.

En la transcurso de la demostración de la esta proposicón deberemos extender el cuerpo de base de nuestro espacio vectorial de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Este proceso se conoce como *complejificación* y podemos obtenerlo tensorizando por $\mathbb{C}$, i.e. dado un $\mathbb{R}$ espacio vectorial V consideramos $V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ y la acción de $\mathbb{C}$ en $V^{\mathbb{C}}$ dada por

$$\alpha(v \otimes \beta) = v \otimes (\alpha\beta), \text{ con } v \in V \text{ y } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Para el lector no familiarizado con producto tensoriales podemos proceder de la siguiente manera. Definamos formalmente $V^{\mathbb{C}} = \{v + iu : v, u \in V\}$ y la acción de $\mathbb{C}$ dada por

$$(a + bi) \cdot (v + iu) = (av - bu) + i(bv + au).$$

Luego $V^{\mathbb{C}}$ resulta ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y esta construcción respeta la acción original de $\mathbb{R}$ sobre V . Además si tenemos una $\mathbb{R}$–base de V, luego la misma es una $\mathbb{C}$–base de $V^{\mathbb{C}}$ y si $f : V \to V$ es $\mathbb{R}$ lineal lo podemos extender a un mapa $\mathbb{C}$ lineal $f^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ dado por $f^{\mathbb{C}}(\alpha + i\beta) = f(\alpha) + if(\beta)$. Es claro también que haciendo las matrices asociadas en la misma base sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, entonces la matrices asociadas resultan ser idénticas. Un resultado sencillo que emplearemos es el siguiente isomorfismo: $\left(V^{\mathbb{C}}\right)^* \simeq (V^*)^{\mathbb{C}}$.

Observación 3.14. Con el fin de poder utilizar los resultados de esta sección y la siguiente en la prueba del teorema 3.20, abstraeremos un poco las hipótesis de estos. Por ello en esta sección y la siguiente, consideraremos a W como un grupo finito que satisface que: S^W es un álgebra generada por n polinomios homogéneos algebraicamente independientes. El lector podrá verificar fácilmente que la proposición 3.11 sigue siendo válida bajo estas hipótesis, y por lo tanto podremos hablar de los grados de W, aunque W no sea un grupo de reflexiones.

Dado que W es finito, tenemos que todo $w \in W$ tiene orden finito y por lo tanto es diagonalizable, con raíces de la unidad como valores propios. Además los valores propios de w sobre V^* coinciden con los de w sobre V, ya que son los inversos (conjugados por ser unitarios) a los de w sobre V. En efecto, si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V de vectores propios de w y consideramos la base dual de ésta, i.e. la base $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ de V^* que satisface $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$, tenemos que:

$$w \cdot v_i^*(v_j) = v_i^*(w^{-1}v_j) = \frac{1}{\lambda_j} v_i^*(v_j),$$

donde se deduce que $w \cdot v_i^* = \frac{1}{\lambda_i} v_i^*$.

Del polinomio característico de w obtenemos la siguiente igualdad en $\mathbb{C}[t]$:

$$\det(I - tw) = (1 - \lambda_1 t) \cdots (1 - \lambda_n t),$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de w. Luego considerando el recíproco de esta ecuación tenemos la siguiente serie formal de potencias

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det(I - tw)} &= \frac{1}{1 - \lambda_1 t} \cdots \frac{1}{1 - \lambda_n t} \\ &= (1 + \lambda_1 t + \lambda_1^2 t^2 + \cdots) \cdots (1 + \lambda_n t + \lambda_n^2 t^2 + \cdots) \\ &= \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n} \right) t^k. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Proposición 3.15. *Viendo ambos lados de la ecuación (3.13) como una serie formal de potencias en t, tenemos que:*

$$\frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \frac{1}{\det(1 - tw)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 - t^{d_i})}. \tag{3.14}$$

Más aún, el coeficiente en t^k de ambos lados de la ecuación coincide con $\dim\left(S_k^W\right)$, donde S_k^W es la componente homogénea de grado k de S^W.

Demostración. Sea $w \in W$ con valores propios λ_i como arriba. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de V^*, luego, extendiendo el cuerpo de base a $\mathbb{C}$, podemos trabajar con una base $\{z_1, \ldots, z_n\}$ consistente de vectores propios de w en la complejificación del espacio dual $\left(V^{\mathbb{C}}\right)^*$. Para calcular los valores propios de w sobre las componentes homogéneas S_k de S, podemos usar la base de la complejificación consistente de los monomios

$$z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}, \text{ donde } k_1 + \cdots k_n = k.$$

Estos son vectores propios de w correspondiente a los valores propios $\lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n}$. La suma de estos valores propios es la traza de w sobre S_k y coincide con el coeficiente de t^k en la serie de potencia de la ecuación (3.13).

En vista de la ecuación (3.13), el coeficiente de t^k en el lado izquierdo de (3.14) es la traza del operador lineal

$$\frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} w$$

de S_k. Por el lema 3.13, esto es justamente la dimensión del espacio S_k^W, los polinomios homogéneos W–invariantes de grado k.

Por otra parte, si $f_1, \ldots, f_n$ es un conjunto básico de invariantes, de grado $d_1, \ldots, d_n$, los polinomios

$$f_1^{e_1} \cdots f_n^{e_n} \quad \text{con } \sum d_i e_i = k$$

forman una base de S_k^W. El número de tales n–uplas $(e_1, \ldots, e_n)$ es claramente el coeficiente de t^k in la serie formal de potencias

$$(1 + t^{d_1} + t^{2d_i} + \cdots) \cdots (1 + t^{d_n} + t^{2d_n} + \cdots),$$

el cual es lo mismo que el producto del lado derecho de (3.14). □

3.6. Propiedades aritméticas de los grados

De la identidad (3.14) podemos deducir fácilmente expresiones para la suma y el producto de los grados de W. Dado que la traza de cada $w \in W$ es real y sus valores propios son unitarios, es claro que los únicos elementos de W que tienen $n-1$ valores propios iguales a 1 son la identidad y las $|\Pi|$ reflexiones de W, siendo $|\Pi|$ el número de raíces positivas. Luego el polinomio $\det(1 - tw)$ es $(1-t)^n$ si $w = 1$ o $(1-t)^{n-1}(1+t)$ si w es una reflexión, pero en cualquier otro caso no es divisible por $(1-t)^{n-1}$.

Teorema 3.16. *Sean $d_1, \ldots, d_n$ los grados de W y $|\Pi|$ el número de reflexiones de W. Entonces*

$$d_1 d_2 \cdots d_n = |W| \qquad y \qquad d_1 + d_2 + \cdots + d_n = |\Pi| + n.$$

Demostración. Multiplicando ambos lados de (3.14) por $(1-t)^n$ obtenemos

$$\frac{1}{|W|}\left(1 + |\Pi| \frac{(1-t)}{(1+t)} + (1-t)^2 g(t)\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + t + \cdots + t^{d_i - 1}}, \tag{3.15}$$

donde $g(t)$ es una función racional con denominador no divisible por $1-t$. Tomando $t = 1$ tenemos

$$\frac{1}{|W|} = \frac{1}{d_1 \cdots d_n},$$

o, equivalentemente, $|W| = d_1 \cdots d_n$.

Si en cambio derivamos ambos lados[1] de (3.15), obtenemos

$$-\frac{2\,|\Pi|}{|W|} \frac{1}{(1+t)^2} + h(t) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + t + \cdots + t^{d_i - 1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} -\frac{1 + 2t + \cdots + (d_i - 1)t^{d_i - 2}}{1 + t + \cdots + t^{d_i - 1}}\right), \tag{3.16}$$

donde $h(t)$ es una función racional con numerador divisible por $1-t$, mientras que el denominador no lo es. De nuevo evaluamos (3.16) en $t = 1$, resulta que

$$-\frac{|\Pi|}{2\,|W|} = -\frac{1}{2} \frac{1}{d_1 \cdots d_n} \sum_{i=1}^{n} (d_i - 1).$$

Sustituyendo $|W|$ por el producto de los grados, deducimos la identidad para la suma de los grados. □

Observación 3.17. Cuando W es un grupo diedral $\mathcal{D}_m$, los grados d_1 y d_2 satisfacen $d_1 d_2 = 2m$ y $d_1 + d_2 = m + 2$, forzando $d_1 = 2$ y $d_2 = m$.

Para tratar ejemplos más complicados, desarrollaremos en la siguiente sección un efectivo procedimiento para verificar si un conjunto dado de polinomios es algebraicamente independiente. Esto también nos hará sencillo probar un teorema debido a Shephard y Todd (teorema 3.20), el cual afirma que sólo los grupos de reflexiones pueden tener un anillo de invariantes generado por polinomios homogéneos algebraicamente independientes.

[1] Para derivar la productoria, podemos observar que $\prod f_i = \exp\left(\sum \ln(f_i)\right)$.

3.7. Criterio de Jacobi para la independencia algebraica

Sobre un cuerpo de característica 0, existe un criterio simple para determinar la independencia algebraica de n polinomios $f_1, \ldots, f_n$ en las variables $x_1, \ldots, x_n$, expresada en términos del *Jacobiano*. Definiremos el Jacobiano de $f_1, \ldots, f_n$ como el determinante $J(f_1, \ldots, f_n)$ de la matriz cuya entrada (i, j) es $\partial f_i/\partial x_j$. Observar que $J(f_1, \ldots, f_n)$ es un polinomio en las variables $x_1, \ldots, x_n$.

Proposición 3.18. *Los polinomios $f_1, \ldots, f_n$ en las variables $x_1, \ldots, x_n$ son algebraicamente independientes (sobre un cuerpo K de característica 0) si y sólo si $J(f_1, \ldots, f_n) \neq 0$.*

Demostración. Supongamos que los polinomios son algebraicamente dependientes y sea $h \in K[y_1, \ldots, y_n]$ un polinomio no constante y de grado mínimo para el cual $h(f_1, \ldots f_n) = 0$. Probemos que entonces $J(f_1, \ldots, f_n) = 0$. Derivando la relación anterior en las variables x_j obtenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial y_i}(f_1, \ldots, f_n)\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0. \tag{3.17}$$

Las ecuaciones (3.17) con $0 \leq j \leq n$ forman un sistema lineal de ecuaciones sobre el cuerpo $K(x_1, \ldots, x_n)$ con coeficientes $\partial f_i/\partial x_j$ e indeterminadas

$$\frac{\partial h}{\partial y_i}(f_1, \ldots, f_n). \tag{3.18}$$

Puesto que h no es constante, deducimos que no todas las derivadas $\frac{\partial h}{\partial y_i}$ son nulas y dado que cada una tiene grado menor que h, por la minimalidad de h, tenemos que no todos los polinomios de (3.18) son nulos. Luego este sistema lineal admite una solución no trivial, forzando al determinante de los coeficientes del sistema ser nulo, i.e. $J(f_1, \ldots, f_n) = 0$.

Veamos ahora la otra implicancia. Supongamos ahora que $f_1, \ldots, f_n$ son algebraicamente independientes. Dado que $K(x_1, \ldots, x_n)$ tiene grado de trascendencia n sobre K, entonces los polinomios $x_i, f_1, \ldots, f_n$ son algebraicamente dependientes para cada valor de i. Luego tenemos polinomios $h_i \in K[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ no nulos y de grado mínimo que satisfacen:

$$h_i(x_i, f_1, \ldots, f_n) = 0. \tag{3.19}$$

Derivando las ecuaciones (3.19) con respecto a x_k obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial y_j}(x_i, f_1, \ldots, f_n)\frac{\partial f_j}{\partial x_k} + \frac{\partial h_i}{\partial y_0}(x_i, f_1, \ldots, f_n)\delta_{ik} = 0. \tag{3.20}$$

Luego, como los polinomios $\{f_j\}$ son algebraicamente independientes, tenemos que h_i debe ser de grado positivo en y_0 y por lo tanto $\partial h_i/\partial y_0$ es no nula y de grado menor que h_i, para todo $i : 0 \leq i \leq n$, forzando que $\frac{\partial h_i}{\partial y_0}(x_i, f_1, \ldots, f_n) \neq 0$.

Podemos pasar estos términos a la derecha en la ecuación (3.20) y escribir estas ecuaciones en forma de matriz como

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial y_j}(x_i, f_1, \ldots, f_n)\right)\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_j}\right) = \left(-\delta_{ij}\frac{\partial h_i}{\partial y_0}(x_i, f_1, \ldots, f_n)\right). \tag{3.21}$$

Observar que la matriz del lado derecho es diagonal con coeficientes no nulos y por lo tanto invertible, luego tomando determinante a esta ecuación deducimos que el jacobiano es no nulo. □

Corolario 3.19. *Si $f_1, \ldots, f_n$ son algebraicamente independientes y homogéneos de grados $d_1, \ldots, d_n$ respectivamente. Entonces $J(f_1, \ldots, f_n)$ es homogéneo de grado $\sum(d_i - 1) = |\Pi|$.*

Demostración. Gracias a la proposición anterior sabemos que jacobiano es no nulo. Dado que el jacobiano es el determinante de la matriz cuyas entradas son las derivadas parciales de los polinomios f_i, tenemos que

$$J(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_{\sigma(i)}}.$$

Observar que en cada uno de los productos no nulos de la derecha, se tiene que los factores son polinomios no nulos y homogéneos de grado $d_1 - 1, \ldots, d_n - 1$, respectivamente. Luego, por el teorema 3.16, tenemos que $J(f_1, \ldots, f_n)$ es un polinomio homogéneo de grado $\sum(d_i - 1) = |\Pi|$. □

3.8. Grupos con álgebra de invariantes libre

Como adelantábamos antes, el teorema 3.10 admite un recíproco, probado por Geoffrey Shephard y John Todd en 1954 (ver [ST]). Este resultado no es esencial para el posterior estudio de los grados en este capítulo, pero ayuda a resaltar la importancia de los grupos finitos de reflexiones entre los grupos lineales finitos.

Teorema 3.20. *Sea V un $\mathbb{R}$–espacio vectorial de dimensión n y G un subgrupo finito de $GL(V)$, actuando canónicamente sobre los polinomios $S = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Supongamos que S^G es generado por n polinomios homogéneos algebraicamente independientes $g_1, \ldots, g_n$. Entonces G es generado por las reflexiones que contiene, i.e., G es un grupo de reflexiones.*

Demostración. Sea H el subgrupo de G generado por las reflexiones de G. Por el teorema 3.10 tenemos que S^H es generado por n polinomios $f_1, \ldots, f_n$ algebraicamente independientes y homogéneos. Convengamos que $\deg(f_i) = d_i$ y $\deg(g_i) = e_i$. Claramente $S^G \subset S^H$, y por lo tanto cada polinomio g_i puede ser escrito como un polinomio en $f_1, \ldots, f_n$. Luego de descartar términos redundantes, podemos asumir que cada monomio

$$f_1^{k_1} \cdots f_n^{k_n}$$

que ocurre en g_i satisface: $e_i = \sum d_j k_j$.

Usaremos un argumento similar al de la prueba de la proposición 3.11 para comparar los grados. Aplicando la regla de la cadena tenemos que

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k},$$

lo que de forma matricial podemos escribir como:

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial f_j}\right) \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right).$$

Gracias a la proposición 3.18 sabemos que el determinante jacobiano de $\frac{\partial g_i}{\partial x_k}$ es no nulo, y por lo tanto el determinante de la matriz de entradas $\frac{\partial g_i}{\partial f_j}$ tampoco es nulo. Luego reenumerando los términos, de ser necesario, podemos asumir que un producto de la forma

$$\frac{\partial g_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial g_n}{\partial f_n}$$

es no nulo. Esto fuerza que $e_i \geq d_i$ para todo i. Luego, aplicando el teorema 3.16 tanto a G como a H, que es válido en este contexto como observamos en 3.14, concluimos que:

$$\sum (d_i - 1) = N = \sum (e_i - 1),$$

donde N es el número de reflexiones de H como el de G. Por lo tanto $d_i = e_i$ para todo i y de nuevo, por el teorema 3.16, tenemos que

$$|G| = \prod e_i = \prod d_i = |H|,$$

de donde se deduce que $G = H$. □

3.9. Ejemplos

El siguiente criterio, junto con el criterio de Jacobi (ver proposición 3.18), nos permitirán determinar fácilmente si un conjunto de polinomio homogéneos W–invariante, es un conjunto de invariantes básicos de S^W. En particular, podremos exhibir los grados de algunos grupos de reflexiones.

Proposición 3.21. *Sean $g_1, \ldots, g_n$ polinomios homogéneos W–invariantes, con respectivos grados $e_1, \ldots, e_n$. Si $g_1, \ldots, g_n$ son algebraicamente independientes y $\prod e_i = |W|$, entonces $\{g_i\}$ es un conjunto de invariantes básicos.*

Demostración. Podemos asumir que $e_1 \leq \cdots \leq e_n$. Sean $f_1, \ldots, f_n$ un conjunto de invariantes básicos, con grados $d_1 \leq \cdots \leq d_n$. Dado que g_1 es un polinomio en los f_i, es claro entonces que $e_1 \geq d_1$. Esta desigualdad se satisface para todo valor de i: supongamos por absurdo que no y tomemos el menor valor k para el cual $e_k < d_k$. Luego cada $g_1, \ldots, g_k$ debe ser un polinomio en $f_1, \ldots, f_{k-1}$, lo que es absurdo, porque entonces el cuerpo de funciones racionales generado por $g_1, \ldots, g_k$, que tiene grado de trascendencia k, está contenido en el de $f_1, \ldots, f_{k-1}$, con grado de trascendencia $k-1$.

Gracias al teorema 3.16 y a las hipótesis, tenemos $\prod d_i = |W| = \prod e_i$, forzando que $d_i = e_i$ para todo i. Observar que el conjunto $B = \{f_1^{k_1} \cdots f_n^{k_n} : \sum d_i k_i = k\}$ es una base de S_k^W, y como $d_i = e_i$ para todo i, entonces $\{g_1^{k_1} \cdots g_n^{k_n} : \sum e_i k_i = k\} \subset S_k^W$ es un conjunto linealmente independiente con la misma cantidad de elementos de B. Se deduce entonces que, para todo valor de k no negativo, S_k^W coincide con el espacio de polinomios de grado k generado por $\{g_1, \ldots, g_n\}$, luego $\{g_1, \ldots, g_n\}$ es un conjunto de invariantes básicos de W. □

Apliquemos este criterio a los grupos A_n, B_n, D_n y los grupos diedrales para deducir sus grados y un conjunto básico de invariantes.

Observación 3.22. Consideremos primero el grupo $A_n = S_{n+1}$. El grupo A_n actúa permutando las variables $x_1, \ldots, x_{n+1}$ y dado que requerimos que la acción sea esencial, entonces tenemos la relación $x_{n+1} = -(x_1 + \cdots + x_n)$. Es claro que los polinomios

$$f_i = x_1^{i+1} + \cdots + x_{n+1}^{i+1},$$

con $1 \leq i \leq n$ son invariantes y que el producto de los grados de los f_i es $(n+1)! = |A_n|$, y por lo tanto solo debemos de corroborar, usando el criterio de Jacobi, que los f_i son algebraicamente independientes, para concluir que forman un conjunto básico de invariantes. Para $1 \leq i, j \leq n$ tenemos

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = (i+1)x_j^i - (i+1)x_{n+1}^i.$$

Luego, podemos hallar el Jacobiano $J = J(f_1, \ldots, f_n)$ usando el determinante de la matriz de Vandermonde como sigue

$$J = \begin{vmatrix} 2(x_1 - x_{n+1}) & \cdots & (n+1)(x_n - x_{n+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2(x_1^n - x_{n+1}^n) & \cdots & (n+1)(x_n^n - x_{n+1}^n) \end{vmatrix} = (n+1)! \begin{vmatrix} (x_1 - x_{n+1}) & \cdots & (x_n - x_{n+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_1^n - x_{n+1}^n) & \cdots & (x_n^n - x_{n+1}^n) \end{vmatrix}$$

$$= (n+1)!(-1)^n \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ (x_1 - x_{n+1}) & \cdots & (x_n - x_{n+1}) & x_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x_1^n - x_{n+1}^n) & \cdots & (x_n^n - x_{n+1}^n) & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = (n+1)!(-1)^n \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

$$= (n+1)!(-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) = (n+1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \prod_{i=1}^{n} (x_i + x_{n+1}) \neq 0.$$

Observación 3.23. Para el grupo B_n el razonamiento es similar, en este caso B_n actúa esencialmente sobre $x_1, \ldots, x_n$ permutando los factores y cambiando el signo. Es claro que los polinomios

$$f_i = x_1^{2i} + \cdots + x_n^{2i},$$

con $1 \leq i \leq n$ son invariantes y que el producto de sus grados es $2^n n! = |B_n|$. Además de manera análoga a la observación anterior, podemos verificar que

$$J = 2^n n! x_1 \cdots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j^2 - x_i^2) \neq 0.$$

Observación 3.24. El grupo D_n actúa permutando las variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y cambiándoles el signo a una cantidad par de ellas. Observar que los invariantes básicos de B_n hallados, resultan también ser D_n–invariantes, pero resulta que el producto de los grados de estos no coincide con $|D_n|$. Podemos hallar un conjunto de invariantes básicos de D_n modificando un poco el ejemplo anterior:

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} x_j^{2i} \quad (\text{con } 1 \leq i \leq n-1), \quad f_n = x_1 \cdots x_n.$$

El producto de los grados es $2^{n-1}n! = |D_n|$ y el Jacobiano vale:

$$J = \begin{vmatrix} x_2 \cdots x_n & \cdots & x_1 \cdots x_{n-1} \\ 2x_1 & \cdots & 2x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2(n-1)x_1^{2(n-1)-1} & \cdots & 2(n-1)x_n^{2(n-1)-1} \end{vmatrix} = 2^{n-1}(n-1)! \begin{vmatrix} x_1^{-1}\prod x_i & \cdots & x_n^{-1}\prod x_i \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{2(n-1)-1} & \cdots & x_n^{2(n-1)-1} \end{vmatrix}$$

$$= 2^{n-1}(n-1)! \prod x_i \begin{vmatrix} x_1^{-1} & \cdots & x_n^{-1} \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{2(n-1)-1} & \cdots & x_n^{2(n-1)-1} \end{vmatrix} = 2^{n-1}(n-1)! \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{2(n-1)} & \cdots & x_n^{2(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= 2^{n-1}(n-1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j^2 - x_i^2).$$

Observación 3.25. Finalmente, como habíamos observado en 3.17, los grados del grupo $\mathcal{D}_m$ son 2 y m, y un conjunto de invariantes básicos es el siguiente:

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad h(x_1, x_2) = \prod_{k=1}^{m} \left(x_1 \cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + x_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \right).$$

La siguiente tabla muestra los grados de los grupos de reflexiones irreducibles, algunos de los cuales ya hemos calculado. Notar que cuando n es par, el grado n se repite en la lista para D_n, siendo este el único caso en el cual se repiten.

Tipo	Grados
A_n	$2, 3, \ldots, n+1$
B_n	$2, 4, 6, \ldots, 2n$
D_n	$2, 4, 6, \ldots, 2n-2, n$
E_6	$2, 5, 6, 8, 9, 12$
E_7	$2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$
E_8	$2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$
F_4	$2, 6, 8, 12$
H_3	$2, 6, 10$
H_4	$2, 12, 20, 30$
$\mathcal{D}_m$	$2, m$

Cuadro 3.1: Grados de invariantes básicos.

3.10. Factorización del Jacobiano

Para un estudio más profundo de los grados de W, tenemos que observar en más detalle el determinante Jacobiano

$$J = J(f_1, \ldots, f_n) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right),$$

donde $f_1, \ldots, f_n$ es un conjunto de invariantes básicos. Hasta ahora sólo nos ha sido de relevancia el hecho de que el Jacobiano no sea idénticamente nulo. En la proposición 3.26 describiremos como J se factoriza en S y cuál es su rol.

Sea l_α, con $\alpha \in \Phi$, el polinomio $l_\alpha(x) = \langle \alpha, x \rangle$. Observar que el conjunto de raíces de l_α coincide con el hiperplano $H_\alpha \subset V$ ortogonal a α. Es fácil verificar que para cualquier par de raíces α y β se tiene que $s_\beta \cdot l_\alpha = l_{s_\beta(\alpha)}$ y que $l_{-\alpha} = -l_\alpha$.

Diremos que $f \in S$ es *alternante* si $w \cdot f = \det(w) f$ para todo $w \in W$. Los polinomios alternantes forman un subespacio A de S, el cual es la suma directa de sus componentes homogéneas $A_k := A \cap S_k$.

Proposición 3.26. *Dado un conjunto de invariantes básicos $f_1, \ldots, f_n$ de W, sea J el correspondiente jacobiano. Para cada raíz $\alpha \in \Phi$ definimos l_α como antes, entonces*

1. *$J = k \prod_{\alpha \in \Pi} l_\alpha$ para algún $k \in \mathbb{R}$, dependiendo de la elección de los f_i. En particular, J es un polinomio alternante.*

2. *Un polinomio $f \in S$ es alternante si y sólo es el producto de J y un polinomio invariante.*

3. *Para cada valor de k tenemos que $\dim A_k = \dim S^W_{k-|\Pi|}$.*

Demostración. 1. Sea el mapa $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) = (f_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_n(a_1, \ldots, a_n)).$$

Supongamos que $a \in H_\alpha$ para alguna raíz α. Entonces todo entorno de a contiene un par de puntos distintos b y c tales que $s_\alpha(b) = c$, y por lo tanto $f_i(c) = f_i(s_\alpha(b)) = (s_\alpha \cdot f_i)(b) = f_i(b)$, forzando que $\varphi(b) = \varphi(c)$. De acuerdo al teorema de la función inversa, para todo punto en el cual $\det(D_\varphi) = J$ no se anula, existe un entorno de dicho punto en el cual φ es inyectiva. De donde concluimos que J se anula sobre H_α para todo $\alpha \in \Phi$. Gracias al lema 3.8, l_α divide a J para toda raíz α y ya que los polinomios irreducibles l_α con $\alpha \in \Pi$ no son proporcionales, entonces su producto también divide a J. Pero como $\prod_{\alpha \in \Pi} l_\alpha$ tiene grado N al igual que J, por el corolario 3.19, deducimos que $J = k \prod_{\alpha \in \Pi}$ para algún $k \in \mathbb{R}$.

Dado que $s_\beta \cdot l_\alpha = l_{s_\beta(\alpha)}$ y que si β es simple, entonces s_β mapea β en $-\beta$ y permuta las otras raíces positivas (ver proposición 1.19), tenemos que

$$s_\beta \cdot J = s_\beta \cdot \left(k \prod_{\alpha \in \Pi} l_\alpha \right) = k \prod_{\alpha \in \Pi} (s_\beta \cdot l_\alpha) = -k \prod_{\alpha \in \Pi} l_\alpha.$$

Iterando, tenemos que $w \cdot J = \det(w) J$. Esto muestra que J es alternante.

2. Es claro que el producto de J con cualquier polinomio invariante resulta alternante.

Recíprocamente, si f es alternante entonces $s_\alpha \cdot f = -f$ para toda reflexión $s_\alpha \in W$. Si $a \in H_\alpha$ se sigue que

$$-f(a) = (s_\alpha \cdot f)(a) = f(s_\alpha(a)) = f(a),$$

forzando que $f(a) = 0$. Dado que f se anula sobre H_α, el conjunto de ceros de l_α, por el lema 3.8 tenemos que l_α divide a f para todo α y por lo tanto $f = gJ$ para algún $g \in S$. Veamos que g es W–invariante. Aplicando un $w \in W$ arbitrario a esta última ecuación obtenemos:

$$\det(w) f = w \cdot f = (w \cdot g)(w \cdot J) = \det(w)(w \cdot g) J.$$

Por lo tanto $w \cdot g = g$ para todo $w \in W$, i.e., $g \in S^W$.

3. Esto se sigue de la parte anterior, ya que J tiene grado $|\Pi|$.

□

3.11. Inducción y restricción de funciones clases

Preparándonos para el teorema de la siguiente sección, tenemos que mostrar algunos resultados simples sobre *funciones de clases* en grupos finitos. Una *función de clases* sobre un grupo finito G es una función $\chi : G \to \mathbb{C}$ que es constante en las clases de conjugación de G, i.e. $\chi(g) = \chi\left(hgh^{-1}\right)$ para todo $g, h \in G$. Sea H un subgrupo de G y $\chi : G \to \mathbb{C}$ una función de clases, entonces es claro que la restricción de χ sobre H es una función de clases, que denotaremos por χ_H. En la otra dirección, dada φ una función de clases sobre H, podemos obtener una función de clases inducida φ^G sobre G como

$$\varphi^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\varphi\left(xgx^{-1}\right),$$

donde la suma corre sobre aquellos $x \in G$ para los cuales $xgx^{-1} \in H$.

Observación 3.27. En el caso especial en que $\varphi = 1_H$, 1_H es la función constante 1 sobre H, la función de clases inducida tiene una útil interpretación. La función $1_H^G(g)$ es el producto de $\frac{1}{|H|}$ con el número de $x \in G$ con $xgx^{-1} \in H$, o $gx^{-1} \in x^{-1}H$. Por lo tanto $1_H^G(g)$ es el número de distintas coclases $x^{-1}H$ fijadas por g.

Recordando la notación de la proposición 1.62, podemos describir la función f_I sobre W como la función de clases inducida de 1_{W_I}. Usando este lenguaje, podemos reformular el contenido de la proposición 1.62 como:

$$\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}1_{W_I}^W(w) = \det(w) \quad \text{para todo } w \in W. \tag{3.22}$$

En el primer capítulo habíamos reservado la letra S para indicar el conjunto de las reflexiones simples, mientras que en este representa el álgebra de polinomios en n variables. De aquí en adelante haremos un abuso de notación, permitiendo coincidir ambas notaciones para objetos diferenctes. Esto no será un problema, ya que por el contexto quedará claro a qué se está refiriendo, pero se lo menciona para que el lector lo tenga presente.

En la siguiente sección necesitaremos los siguientes dos observaciones sobre inducciones y restricciones:

Lema 3.28. *1. Si χ es una función de clases sobre G, entonces $\chi \cdot 1_H^G = \chi_H^G$.*

2. Si φ es una función de clases sobre H, entonces

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\varphi(h).$$

Demostración. 1.

$$\begin{aligned}\chi_H^G(g) &= \frac{1}{|H|}\sum \chi_H\left(xgx^{-1}\right)\\ &= \frac{1}{|H|}\sum \chi(g)\\ &= \chi(g)\frac{1}{|H|}\sum 1\\ &= \chi(g)\ 1_H^G(g).\end{aligned}$$

En cada paso la suma se toma sobre aquellos $x \in G$ para los cuales $xgx^{-1} \in H$. En la segunda igualdad se utilizó que χ es una función de clases, mientras que en la última, la definición de inducción.

2. Sea $X = \{(g, x) \in G \times G : xgx^{-1} \in H\}$. Es claro que cada elemento de G, y en particular cada elemento de H, ocurre como xgx^{-1} para $|G|$ distintos pares (g, x). Luego

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi^G(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\varphi\left(xgx^{-1}\right) = \frac{1}{|H|\,|G|}\sum_{(g,x)\in X}\varphi\left(xgx^{-1}\right) = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\varphi(h).$$

□

3.12. Factorización del polinomio de Poincaré

Combinando algunos resultados previos, obtendremos una sorprendente factorización del polinomio de Poincaré $W(t) = \sum_{w\in W} t^{l(w)}$, introducido en la sección 1.11, en términos de los grados de W. Además de estos resultados, precisaremos del siguiente lema.

Lema 3.29. *Sea I un conjunto de raíces simples de W y consideremos S^{W_I} el álgebra graduada de W_I–invariantes. Luego para todo $k \geq 0$ tenemos que*

$$\sum_{I\subset S} (-1)^I \dim\left(S^{W_I}\right)_k = \dim\left(A_k\right).$$

Demostración. Si consideramos la acción de W sobre S_k dada por $p \mapsto \det(w) w_{|_{S_k}} \cdot p$, para todo $p \in S_k$, resulta entonces que A_k son los invariantes de dicha acción. Luego, gracias al lema 3.13 tenemos que:

$$\dim\left(A_k\right) = \frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} \det(w) \mathrm{Tr}\left(w_{|S_k}\right),$$

y por lo tanto, sólo tenemos que probar que

$$\sum_{I\subset S} (-1)^I \dim\left(S^{W_I}\right)_k = \frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} \det(w) \mathrm{Tr}\left(w_{|S_k}\right).$$

Dado que la traza es invariante por conjugaciones, podemos definir una función de clases sobre W como $\chi_k(w) = \mathrm{Tr}(w_{|S_k})$. Luego, si χ_{k,W_I} es la restricción de χ_k a W_I, por la parte 1 del lema 3.28 tenemos que

$$\chi_{k,W_I}^W = \chi_k \cdot 1_{W_I}^W,$$

y de la ecuación (3.22) tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{I\subset S} (-1)^{|I|} \chi_{k,W_I}^W(w) = \sum_{I\subset S} (-1)^{|I|} \chi_k(w) 1_{W_I}^W(w) = \left(\sum_{I\subset S} (-1)^{|I|} 1_{W_I}^W(w)\right) \chi_k(w) &= \det(w)\chi_k(w) \\ &= \det(w)\mathrm{Tr}\left(w_{|S_k}\right),\end{aligned} \tag{3.23}$$

para todo $w \in W$. Aplicando el lema 3.28, deducimos que

$$\frac{1}{|W_I|} \sum_{z\in W_I} \chi_{k,W_I}(z) = \frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} \chi_{k,W_I}^W(w)$$

y sustituyendo la ecuación (3.23) en esta última

$$\begin{aligned}\sum_{I\subset S} (-1)^{|I|} \frac{1}{|W_I|} \sum_{z\in W_I} \chi_{k,W_I}(z) &= \sum_{I\subset S} (-1)^{|I|} \frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} \chi_{k,W_I}^W(w) \\ &= \frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} \sum_{I\subset S} (-1)^{|I|} \chi_{k,W_I}^W(w) \\ &= \frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} \det(w)\chi_k(w) \\ &= \frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} \det(w)\mathrm{Tr}\left(w_{|S_k}\right).\end{aligned} \tag{3.24}$$

Por otra parte, gracias al lema 3.13, tenemos que

$$\dim\left(S^{W_I}\right)_k = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{|W_I|} \sum_{z\in W_I} z_{|S_k}\right) = \frac{1}{|W_I|} \sum_{z\in W_I} \mathrm{Tr}\left(z_{|S_k}\right) = \frac{1}{|W_I|} \sum_{z\in W_I} \chi_{k,W_I}(z), \tag{3.25}$$

y combinando (3.24) con (3.25) resulta que

$$\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}\dim\left(S^{W_I}\right)_k=\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}\frac{1}{|W_I|}\sum_{z\in W_I}\chi_{k,W_I}(z)=\frac{1}{|W|}\sum_{w\in W}\det(w)\chi_k(w)=\frac{1}{|W|}\sum_{w\in W}\det(w)\mathrm{Tr}\left(w_{|S_k}\right).$$

□

Teorema 3.30. *Sean W un grupo de reflexiones finito, $d_1,\ldots,d_n$ sus grados y N el número de reflexiones de W. Entonces tenemos la siguiente descomposición del polinomio de Poincaré de W:*

$$W(t)=\prod_{i=1}^{n}\frac{t^{d_i}-1}{t-1}.$$

Demostración. La prueba es por inducción en el rango de W, tomando ventaja de la proposición 1.48. Definamos el polinomio

$$Q(t):=\prod_{i=1}^{n}\frac{t^{d_i}-1}{t-1},$$

y similarmente definimos $Q_I(t)$ para W_I en términos de sus grados. El problema es probar la siguiente fórmula análoga, a la de la proposición 1.48, para los polinomios Q y Q_I

$$\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}\frac{Q(t)}{Q_I(t)}=t^N,$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|}\frac{1}{(1-t)^nQ_I(t)}=\frac{t^N}{(1-t)^nQ(t)}. \tag{3.26}$$

Ya que entonces, por inducción, para cada subgrupo parabólico propio W_I de W, tendremos que $W_I(t)=Q(t)$ y por ende $W(t)=Q(t)$.

Para probar la identidad en (3.26) comparemos los coeficientes en t^k en el desarrollo en serie de potencias de las funciones racionales de ambos lados de la ecuación. El lado derecho es igual a

$$t^N\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-t^{d_i}}.$$

Por lo tanto, por la proposición 3.15, el coeficiente en t^k es $\dim\left(S^W\right)_{k-N}$, el cual es $\dim(A_k)$ de acuerdo a la parte 3 de la proposición 3.26.

Analicemos ahora el lado izquierdo de la ecuación (3.26). Para cada subconjunto propio $I\subsetneq S$, tenemos por hipótesis de inducción que $W_I(t)=Q_I(t)$ y si $e_1,\ldots,e_{|I|}$ son los grados del grupo de reflexiones W_I, entonces

$$\frac{1}{Q_I(t)}=(1-t)^{|I|}\prod_{i=1}^{|I|}\left(\frac{1}{1-t^{e_i}}\right),$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{(1-t)^nQ_I(t)}=\frac{1}{(1-t)^{n-|I|}}\prod_{i=1}^{|I|}\left(\frac{1}{1-t^{e_i}}\right).$$

Luego el coeficiente en t^k de este polinomio es $\dim\left(S^{W_I}\right)_k$, y finalmente aplicando el lema anterior deducimos la igualdad (3.26). □

Bibliografía

[Hum] J. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 29, Cambridge University Press, 1990.

[KN] R. Kane, *Reflection groups and Invariant theory*, CMS Books in Mathematics, Springer, 2001.

[GB] L. C. Grove; C. T. Benson, *Finite reflection groups*, Graduate texts in mathematics 99, Springer, 1985.

[Cox34] H. S. M. Coxeter, *Discrete groups generated by reflections*, Ann. Of Math., Vol 35, No. 3, Julio 1934, pp. 588–621.

[Cox35] H. S. M. Coxeter, *The complete enumeration of finite groups of the form* $R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1$, J. London Math. Soc.(1935) s1-10 (1): 21-25, disponible en `http://jlms.oxfordjournals.org/content/s1-10/1/21`.

[ST] G. C. Shephard; J. A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math. 6 (1954), 274-304.