Modelo de Black Scholes

Andrés Sosa

Orientador: Dr. Ernesto Mordecki

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Objetivo y un poco de historia

Este trabajo monográfico tiene como propósito hacer una presentación, de un modelo de valoración de derivados financieros, conocido en el ámbito económico-financiero como el modelo de Black-Scholes. Un derivado financiero es un contrato, cuyo valor es función del precio de otro activo financiero, que puede ser un activo. Existe en la actualidad una gran variedad de derivados financieros, pero los derivados básicos, y más conocidos, siguen siendo las opciones, los forwards y los futuros.

Cuando comencemos el estudio de este trabajo, nos iremos dando cuenta que para llegar a la fórmula de Black-Scholes necesitamos varias herramientas matemáticas como es el movimiento browniano (o proceso de Wiener), el cual comenzó a comprenderse en 1827 cuando el botánico inglés Robert Brown analizó el movimiento de partículas de polen en el agua, y lo asoció a las teorías vitalistas de la vida [4]. Sin embargo en sus trabajos finales, él concluye que el movimiento errático observado era de naturaleza mecánica y no dependía del carácter orgánico ni inorgánico de los objetos considerados.

Años más tarde, en 1900, Louis Bachelier en su tesis "Theorie de la Spéculation" [1] construyó una teoría matemática del movimiento browniano la cual tuvo el valor de capturar muchas propiedades esenciales de este proceso. Hasta que en 1923, Norbert Wiener formalizó, con toda rigurosidad matemática, las bases de esta teoría. Otro aporte fundamental de Louis Bachelier en su tesis "Theorie de la Spéculation" [1] fue modelar los precios de los activos con riesgo mediante el movimiento browniano, pero la desventaja que este modelo tuvo, era que los precios podrían asumir valores negativos, la cual no es una buena propiedad para los precios de dichos activos.

En 1960, el economista norteamericano Samuelson (quien recibió el premio Nobel de Economía en 1970) propuso el movimiento browniano geométrico como modelo para los precios que están sujetos a incertidumbre.

Hasta que en 1973, Fisher Black y Myron Scholes publicaron el artículo "The Pricing of Options and Corporate Liabilities"[2], en el cual las ideas principales fueron que el movimiento Browniano geométrico fuera el modelo básico asociado a los movimientos de los precios (como lo había propuesto Samuelson) y además tuvieron en cuenta que el movimiento browniano está asociado con el cálculo de Itô, desarrollado por el matemático japonés Kiyoshi Itô desde 1940. Además en la versión final del modelo, Black y Scholes tuvieron en cuenta los aportes de Robert Merton que realizó en su artículo "Theory of Rational Option Pricing" [6]; los cuales fueron la advertencia de que el equilibrio de mercado no es un requisito para la valuación de la opción; basta con que no exista oportunidad alguna de arbitraje.

El 30 de agosto de 1995 murió Black, y en el año 1997 Merton y Scholes recibieron el Premio Nobel de Economía por su trabajo sobre la valoración.

1.2. Introducción a la fórmula de Black-Scholes

En el modelo Black-Scholes existen dos formas de inversión, la primera es un activo sin riesgo (como una cuenta en el banco) con una tasa de interés constante $r \geq 0$; es tal que una inversión de β_0 en $t = 0$ se convierte en β_s en $t = s$ mediante un proceso determinista y la segunda es un activo con riesgo cuyo precio lo denotaremos como X_s en $t = s$ que va a depender de varias variables y el cual está sometido al azar por lo tanto no conocemos su evolución futura cierta. Este modelo busca tener ciertas cantidades a_t en stock y b_t en cuenta que juntos forman el portafolio.

Nuestro objetivo es estudiar el derivado financiero llamado opción. Este contrato vincula dos instituciones, el beneficiario y el vendedor. Al negociar una opción en tiempo $t = 0$, el beneficiario tiene el derecho a comprar una unidad de stock a un precio prefijado K llamado precio del ejercicio hasta o en un tiempo $t = T$ llamado tiempo de madurez. Si el derecho a compra solo se puede ejercer en $t = T$ se llama opción de compra (call) europea; en cambio si el derecho se puede ejercer en cualquier $t \leq T$ se llama opción de compra americana. Por supuesto también existen los derechos a venta que se llaman opciones de venta (put) y son europeas o americanas dependiendo de las características antes mencionadas. Nosotros vamos a restringir nuestro estudio a las opciones de compra europeas.

Una de las características fundamentales que diferencian las opciones de los futuros es que el beneficiario no está obligado a ejercer su derecho. Entonces puede analizar la situación en $t = T$ y si sucede que $X_t < K$ la opción no se realiza y pierde su validez, en cambio si $K \leq X_t$ la opción se ejecuta y se compra el activo al precio prefijado K.
Por lo tanto, en términos matemáticos, el beneficiario de la opción ganará (por este contrato) la cantidad de dinero

$$(X_T - K)^+ \ = \ \text{máx}(0, X_T - K)$$

El problema que existe es que en el momento que el beneficiario compra la opción en $t = 0$ no conoce el precio X_T del activo, por lo tanto la pregunta que surge es ¿cuál es el precio racional de la opción en $t = 0$?

En su trabajo Black, Scholes y Merton encontraron que el precio es

$$V_0 = X_0 \ \Phi\big(z\big) - K \ e^{-rT} \ \Phi\big(w\big)$$

donde

$$z = \frac{\ln(X_0/K) + (r + 0{,}5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad w = z - \sigma\sqrt{T}$$

y $\Phi(x)$ es la función de distribución de la variable aleatoria normal estándar, donde

- K es el precio del ejercicio,
- T es el tiempo de madurez de la opción,
- r es la tasa de interés del activo sin riesgo,
- σ es la volatilidad del mercado.

1.3. Algunas definiciones que necesitaremos

En el desarrollo de los próximos capítulos, vamos a trabajar en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ y utilizaremos algunas definiciones que enunciaremos en esta sección.

Definición 1. *Un proceso estocástico $X = (X_t, t \in [0, \infty))$ es una función de dos variables tal que*

- *para un instante t fijo, $X_t = X_t(\omega), \omega \in \Omega$ es una variable aleatoria,*
- *para un $\omega \in \Omega$ fijo, $X_t = X_t\ (\omega),\ t \in [0, \infty)$ es una función del tiempo llamada trayectoria.*

Definición 2. *Las distribuciones finito-dimensionales (fidis) de un proceso estocástico $X = (X_t,\ t \in [0, \infty))$ son las distribuciones de los vectores $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}),\ \ t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, \infty)$ para todas las posibles elecciones $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, \infty)$ y para todo $n \geq 1$.*

Definición 3. *Un proceso estocástico $X = (X_t,\ t \in [0, \infty))$ tiene incrementos estacionarios si $X_t - X_s \overset{(d)}{=} X_{t+h} - X_{s+h}$ para todo $h \in \mathbb{R}^+$.*

Definición 4. *Un proceso estocástico $X = (X_t,\ t \in [0, \infty))$ tiene incrementos independientes si $\Big(X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\Big)$ son variables aleatorias independientes para todas las posibles elecciones t_i con $t_1 < \ldots < t_n$ para todo $n \geq 1$.*

Definición 5. *Sea η una variable aleatoria tal que $\mathbf{E}|\eta| < \infty$ y $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. La esperanza condicional $\mathbf{E}\big(\eta|\mathcal{G}\big)$ es una variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible tal que se cumple*

$$\int_B \mathbf{E}\big(\eta|\mathcal{G}\big)\, d\mathrm{P} = \int_B \eta\, d\mathrm{P} \quad \forall\ B \in \mathcal{G}.$$

Definición 6. *Una colección de sub-σ-álgebras $(\mathcal{F}_t,\ t \in [0, \infty))$ es una filtración si $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ para todo $0 \leq s \leq t$.*

Definición 7. *Un proceso estocástico $X = (X_t,\ t \in [0, \infty))$ se dice adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t,\ t \in [0, T])$ si $\sigma(X_t) \subseteq \mathcal{F}_t$ donde $\sigma(X_t)$ es la σ-álgebra generada por la variable aleatoria X.*

Vale la pena destacar que un proceso estocástico X es siempre adaptado a la filtración natural generada por X, la cual es $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

Definición 8. *El proceso estocástico* $X = (X_t,\ t \in [0,\infty))$ *es una martingala de tiempo continuo con respecto a la filtración* $(\mathcal{F}_t,\ t \in [0,\infty))$ *si*

- $\mathbf{E}|X_t| < \infty\ \forall\ t \in [0,\infty)$,
- X *es adaptado a* $(\mathcal{F}_t)$,
- $\mathbf{E}\big(X_t|\mathcal{F}_s\big) = X_s\ \ \forall\ 0 \leq s \leq t.$

Capítulo 2

Cálculo Estocástico

2.1. Movimiento Browniano

En esta sección vamos a introducir un concepto fundamental como lo es el movimiento browniano, enunciaremos sus propiedades y terminaremos dando algunos ejemplos de procesos estocásticos derivados de él.

Definición 9. *Un proceso estocástico $W = (W_t,\ t \in [0, \infty))$ es llamado movimiento browniano o proceso de Wiener si satisface las condiciones*

- *el proceso comienza en cero; $W_0 = 0$,*
- *tiene incrementos independientes y estacionarios,*
- *para cada $t \geq 0$, W_t tiene distribución $\mathcal{N}(0, t)$,*
- *las trayectorias son continuas.*

Vale la pena observar que las variables aleatorias $W_t - W_s$ y W_{t-s} tienen ambas distribución $\mathcal{N}(0, t-s)$ para $s \leq t$. Por lo tanto intuitivamente podemos decir que la varianza de un incremento $W_t - W_s$ es la medida del intervalo $[s, t]$.
Una de las propiedades más importantes del movimiento browniano es la variación cuadrática.

Proposición 1. *Para cualquier sucesión de subdivisiones $s = t_{n,0} < t_{n,1} < \ldots < t_{n,n} = t$ tal que satisface*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq k\leq n-1} |t_{n,k+1} - t_{n,k}| = 0 \tag{2.1}$$

se cumple que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left|W_{t_{n,k+1}}-W_{t_{n,k}}\right|^2 = t-s \quad \textit{en} \;\; \mathrm{L}^2.$$

Demostración. Definimos la variable aleatoria $\mathrm{V}_n := \sum_{k=0}^{n-1}\left|W_{t_{n,k+1}}-W_{t_{n,k}}\right|^2$ y tenemos $\mathbf{E}\mathrm{V}_n = \sum_{k=0}^{n-1}(t_{n,k+1}-t_{n,k}) = t-s$. A partir de que la varianza de la suma de variables independientes es la suma de las varianzas, nosotros obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathrm{V}_n-(t-s))^2 := \; Var\mathrm{V}_n &= \sum_{k=0}^{n-1}Var(\left|W_{t_{n,k+1}}-W_{t_{n,k}}\right|^2)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\left|W_{t_{n,k+1}}-W_{t_{n,k}}\right|^4-(t_{n,k+1}-t_{n,k})^2\\ &= 2\sum_{k=0}^{n-1}(t_{n,k+1}-t_{n,k})^2 \leq 2\max_{0\leq k\leq n-1}\left|t_{n,k+1}-t_{n,k}\right|(t-s),\end{aligned}$$

la cual tiende a cero con $n\to\infty$ a causa de (2.1), por lo tanto cumple lo que queremos. La variable aleatoria V_n es conocida como la variación cuadrática del movimiento browniano. □

Ahora vamos a fijar una trayectoria $W_t(\omega),\;\; t\geq 0$ y vamos a estudiar sus propiedades. Por la definición del movimiento browniano sabemos que las trayectorias son continuas pero a causa de que los incrementos de W son independientes obtenemos que las trayectorias son extremadamente irregulares.

Proposición 2. *El movimiento browniano es 0.5 auto-similar.*
Lo que se traduce en que $\left(\sqrt{T}W_{t_1},\ldots,\sqrt{T}W_{t_n}\right) \overset{(d)}{=} \left(W_{Tt_1},\ldots,W_{Tt_n}\right)$ *para cada* $T\geq 0$ *y cualquier elección de* $t_i\geq 0$ *con* $i=1,\ldots,n$ *y* $n\geq 1$.

Demostración. Para cada $T>0$ fijo, definimos el proceso estocástico $X = (X_t,\; t\in[0,\infty))$ de la forma

$$X_t = \frac{W_{Tt}}{\sqrt{T}}$$

y queremos ver que es un movimiento browniano, por lo tanto tenemos que probar que cumple sus propiedades.
En efecto

$$X_0 = \frac{W_{T0}}{\sqrt{T}} = 0.$$

Como las funciones $t \longmapsto Tt$ y $s \longmapsto \frac{W_s}{\sqrt{T}}$ son funciones continuas entonces la composición es continua y obtenemos que $\forall\, \omega \in \Omega$ se cumple que $X_s(\omega)$ es continua.
Para probar que tiene incrementos independientes tomamos una partición $Tt_1 = s_1 < \ldots < s_n = Tt_n$ de $[Tt_1, Tt_n]$ y sabemos que

$$\Big(W_{s_2} - W_{s_1}, \ldots, W_{s_n} - W_{s_{n-1}}\Big) \; es\ un\ VAI$$

(donde VAI es un vector aleatorio independiente) y en particular tomando la partición $s_1 < \ldots < s_n$ tal que $s_j = Tt_j$,

$$\Big(W_{Tt_2} - W_{Tt_1}, \ldots, W_{Tt_n} - W_{Tt_{n-1}}\Big) \; es\ un\ VAI$$

entonces

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\Big(W_{Tt_2} - W_{Tt_1}, \ldots, W_{Tt_n} - W_{Tt_{n-1}}\Big) \; es\ un\ VAI$$

y por lo tanto obtenemos que

$$\Big(X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\Big) \; es\ un\ VAI.$$

Para probar que tiene incrementos estacionarios tenemos que probar $X_t - X_s \overset{(d)}{=} X_{t+h} - X_{s+h}$ para todo $h \in \mathbb{R}^+$ pero sabemos que $W_{t'} - W_{s'} \overset{(d)}{=} W_{t'+h'} - W_{s'+h'}$ para todo $h' \in \mathbb{R}^+$ por lo tanto tomando $t' = Tt$, $s' = Ts$ y $h' = Th$ obtenemos $W_{Tt} - W_{Ts} \overset{(d)}{=} W_{Tt+Th} - W_{Ts+Th}$ y al multiplicar por $\frac{1}{\sqrt{T}}$ se mantiene la igualdad de distribuciones y obtenemos $X_t - X_s \overset{(d)}{=} X_{t+h} - X_{s+h}$.
Para finalizar tenemos que demostrar que para todo t la variable aleatoria X_t tiene distribución $\mathcal{N}(0,t)$.

$$\begin{aligned} F_X(a) &= \mathrm{P}\bigg(\frac{W_{Tt}}{\sqrt{T}} \leq a\bigg) = \mathrm{P}\Big(W_{Tt} \leq a\sqrt{T}\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a\sqrt{T}} e^{-x^2/2Tt}\, dx. \end{aligned}$$

A esta última ecuación le aplicamos el cambio de variable $x = y\sqrt{T}$ y nos queda

$$
\begin{aligned}
F_X(a) &= \frac{1}{\sqrt{T}\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-y^2T/2Tt}\sqrt{T}\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-y^2/2t}\,dy
\end{aligned}
$$

que es la distribución de la variable aleatoria $\mathcal{N}(0,t)$.
Por lo que acabamos de ver, el proceso X es un movimiento browniano lo que implica que para cualquier partición obtenemos

$$
\begin{aligned}
\Big(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\Big) &\overset{(d)}{=} \Big(W_{t_1},\ldots,W_{t_n}\Big) \\
\Big(\frac{W_{Tt_1}}{\sqrt{T}},\ldots,\frac{W_{Tt_n}}{\sqrt{T}}\Big) &\overset{(d)}{=} \Big(W_{t_1},\ldots,W_{t_n}\Big) \\
\Big(W_{Tt_1},\ldots,W_{Tt_n}\Big) &\overset{(d)}{=} \Big(\sqrt{T}\,W_{t_1},\ldots,\sqrt{T}\,W_{t_n}\Big).
\end{aligned}
$$

□

Proposición 3. *Sea* $W = (W_t,\ t \in [0,\infty))$ *movimiento browniano. Entonces para cada fijo* t_0

$$
\limsup_{t \downarrow t_0} \frac{|W_t - W_{t_0}|}{t - t_0} = \infty.
$$

Lo que se traduce en que en cada $t \geq 0$, *las trayectorias son no diferenciables con probabilidad 1.*

Demostración. Sin perder generalidad elegimos $t_0 = 0$. Sea $\{t_n\}$ una sucesión tal que $t_n \downarrow 0$. Como el movimiento browniano es 0.5 auto-similar podemos concluir

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\Big(\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq s\leq t_n} \left|\frac{W_s}{s}\right| > x\Big) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\Big(\sup_{0\leq s\leq t_n} \left|\frac{W_s}{s}\right| > x\Big) \\
\geq \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}\Big(\left|\frac{W_{t_n}}{t_n}\right| > x\Big) &= \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}\Big(\frac{|W_1|}{t_n}^{1/2} > x\Big) = 1.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, con probabilidad 1, se cumple $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{W_{t_n}}{t_n}\right| = \infty$ para cualquier sucesión $t_n \downarrow 0$. □

Proposición 4. *Para casi toda trayectoria del movimiento browniano*

$$v\big(W(\omega)\big) = \sup_{\tau} \sum_{k=0}^{n-1} \big|W_{t_{k+1}}(\omega) - W_{t_k}(\omega)\big| = \infty \quad \textit{casi seguramente},$$

donde el supremo es tomado sobre todas las particiones $\tau : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ *de* $[0, T]$.

Demostración. Por conveniencia asumimos que $T = 1$. Suponemos que $v\big(W(\omega)\big) < \infty$ para un determinado ω. Definimos la subdivisión T_n del intervalo $[0, 1]$ como $T_n := \Big(0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \ldots < t_{n,n-1} < t_{n,n} = 1\Big)$ y consideramos una sucesión de subdivisiones $\{T_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq k\leq n-1} |t_{n,k+1} - t_{n,k}| = 0. \tag{2.2}$$

Como notación utilizamos $\Delta_{n,k}W = W_{t_{n,k+1}} - W_{t_{n,k}}$.
Se cumple que

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_n(\omega) = \mathrm{V}_n &:= \sum_{k=0}^{n-1} \big|W_{t_{n,k+1}}(\omega) - W_{t_{n,k}}(\omega)\big|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \big(\Delta_{n,k}W(\omega)\big)^2 \\
&\leq \max_{k=0,\ldots,n-1} |\Delta_{n,k}W(\omega)| \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_{n,k}W(\omega)| \\
&= \max_{k=0,\ldots,n-1} |\Delta_{n,k}W(\omega)| \; v\big(W(\omega)\big).
\end{aligned}$$

Dado que W tiene trayectorias continuas entonces $W_t(\omega)$ es una función continua de t. Por lo tanto también es uniformemente continua en $[0, 1]$ y como además se cumple (2.2) entonces

$$\max_{k=0,\ldots,n-1} |\Delta_{n,k}W(\omega)| \to 0.$$

Obtenemos que

$$\mathrm{V}_n(\omega) \to 0.$$

Pero por la propiedad de variación cuadrática del movimiento browniano sabemos que $\mathrm{V}_n \to 1$ en probabilidad, entonces existe una subsucesión $\{n_k\}$ tal que $\mathrm{V}_{n_k} \to 1$ casi seguramente.

Entonces $V_n \to 0$ solo ocurre en un conjunto de probabilidad cero, entonces $P\Big(\omega : v\big(W(\omega)\big) = \infty\Big) = 1.$
$\square$

En lo que resta de la sección veremos dos ejemplos de procesos estocásticos derivados del movimiento browniano que son de gran utilidad en lo que refiere a nuestro problema de valuación de precios de activos.

El primero, es el proceso que propuso Bachelier como modelo, el cual tiene la desventaja de que puede tomar valores negativos, propiedad que no es deseable para modelar precios. Este proceso es denominado movimiento browniano con drift

$$X_t = \mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0,$$

donde las constantes son $\mu > 0$ y σ.
El segundo proceso es el que propusieron Black y Scholes para modelar los precios de los activos, el cual tiene el nombre de movimiento browniano geométrico y es una exponencial de un movimiento browniano con drift

$$X_t = e^{\mu t + \sigma W_t}, \quad t \geq 0.$$

2.2. Integral de Itô

En esta sección vamos a introducir la forma de definir la integral estocástica del tipo $\int\limits_0^t f(s)\, dW_s$ porque es imposible definirla por los enfoques clásicos de la teoría de integración a causa de que el movimiento browniano tiene variación infinita en cualquier intervalo.

Sea $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathrm{P}\big)$ espacio de probabilidad con una filtración.

Definición 10. *La clase de procesos simples es el conjunto de procesos estocásticos de la forma*

$$\bar{f}(s) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \, 1_{[s_k, s_{k+1})}(s), \tag{2.3}$$

donde $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = T$*, las variables aleatorias* f_k *son* $\mathcal{F}_{s_k}-$*medibles y* $\mathbf{E} f_k^2 < \infty$.

Definición 11. *Un proceso estocástico* $X = (X_t,\ t \in [0,T])$ *es medible progresivo si para todo* $t \in [0,T]$ *la función* $(s,\omega) \longmapsto X_s(\omega)$ *es* $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$*-medible.*

Definición 12. *La clase* $\mathcal{H}^2\,[0,T]$ *es el conjunto de procesos estocásticos medibles progresivos* $f(s), s \in [0,T]$ *que satisfacen la condición*

$$\int_0^T \mathbf{E} f^2(s)\, ds < \infty.$$

Mediante una simple observación de las definiciones obtenemos que la clase de los procesos simples está contenida en la clase $\mathcal{H}^2\,[0,T]$.
La ventaja que tienen los procesos simples es que podemos definir la integral de $\bar{f}$ con respecto al movimiento browniano y la llamaremos Integral de Itô.

Definición 13. *La integral de Itô del proceso (2.3) es*

$$\int_0^T \bar{f}(s)\, dW_s := \sum_{k=0}^{m-1} f_k\ \big(W_{s_{k+1}} - W_{s_k}\big).$$

Proposición 5. *En el conjunto de los procesos simples se cumple*

$$\mathbf{E}\Big(\int_0^T \bar{f}(s)\, dW_s\Big)^2 = \int_0^T \mathbf{E}\bar{f}^2(s)\, ds. \tag{2.4}$$

Demostración. Para demostrarlo primero tenemos que observar dos cosas:

- como f_k y $W_{s_{k+1}} - W_{s_k}$ son independientes tenemos

$$\mathbf{E}\big(f_k^2\ (W_{s_{k+1}} - W_{s_k})^2\big) = \mathbf{E} f_k^2\ \mathbf{E}(W_{s_{k+1}} - W_{s_k})^2 = \mathbf{E} f_k^2\ (s_{k+1} - s_k),$$

- para $k < l$ las variables aleatorias $f_k\ (W_{s_{k+1}} - W_{s_k})\ f_l$ son $\mathcal{F}_{s_l}$-medibles y los incrementos $W_{s_{l+1}} - W_{s_l}$ son independientes de $\mathcal{F}_{s_l}$ por lo tanto tenemos

$$\mathbf{E}\Big(f_k\ (W_{s_{k+1}} - W_{s_k})\ f_l\ (W_{s_{l+1}} - W_{s_l})\Big)$$

$$= \mathbf{E}\Big(f_k\ (W_{s_{k+1}} - W_{s_k})\ f_l\Big)\ \mathbf{E}(W_{s_{l+1}} - W_{s_l}) = 0.$$

Con esto observado la demostración resulta ser

$$\mathbf{E}\Big(\int_0^T \bar{f}(s)\,dW_s\Big)^2 = \mathbf{E}\Big(\sum_{k=0}^{m-1} f_k\,(W_{s_{k+1}} - W_{s_k})\Big)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{E}\Big(f_k^2\,(W_{s_{k+1}} - W_{s_k})^2\Big) + 2\sum_{k<l} \mathbf{E}\Big(f_k\,(W_{s_{k+1}} - W_{s_k})\,f_l$$

$$\times (W_{s_{l+1}} - W_{s_l})\Big) = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{E} f_k^2\,(s_{k+1} - s_k) = \int_0^T \mathbf{E}\bar{f}^2(s)\,ds.$$

□

Como sabemos, el espacio $L^2(\mathrm{P})$ (espacio de variables aleatorias de cuadrado integrable) es un espacio de Hilbert con la norma $(\mathbf{E}X^2)^{1/2}$ con $X \in L^2(\mathrm{P})$. Para una función $f \in \mathcal{H}^2\,[0,T]$ la norma es $\big(\int_0^T \mathbf{E}f^2(s)\,ds\big)^{1/2}$. Por lo tanto para un proceso simple $\bar{f} \in \mathcal{H}^2\,[0,T]$, el mapa que manda $\bar{f} \longmapsto \int_0^T \bar{f}(s)\,dW_s$ es una isometría desde un subconjunto de $\mathcal{H}^2\,[0,T]$ en $L^2(\mathrm{P})$.

Proposición 6. *El conjunto de procesos simples es denso en la clase $\mathcal{H}^2\,[0,T]$. Lo que se traduce que para cualquier $f \in \mathcal{H}^2\,[0,T]$ existe una sucesión de procesos simples $\bar{f}_n \in \mathcal{H}^2\,[0,T]$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \mathbf{E}\big(f(s) - \bar{f}_n(s)\big)^2\,ds = 0.$$

Demostración. Sin perder generalidad podemos suponer que la función f es acotada, si no elegimos la función $f_N(t) := f(t)\ 1_{[-N,N]}\ (f(t))$ y utilizamos que se cumple

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^T \mathbf{E}\big(f(s) - f_N(s)\big)^2\,ds = 0.$$

Ahora veremos que para funciones continuas y acotadas se cumple la densidad.

Sea f continua y acotada y nos tomamos el conjunto de funciones $\bar{f}_n(s)$ tales que $\bar{f}_n(s) := f([ns])$ donde $[a]$ denota el entero más grande que no excede a a. Por lo tanto el teorema en este caso, es debido al teorema de convergencia

dominada de Lebesgue.
Para probar la proposición lo único que resta es aproximar un proceso medible f por procesos continuos. Dado f medible los procesos son

$$\hat{f}_n(s) := n \int\limits_{(s-1/n)\vee 0}^{s} f(v)\, dv \quad \text{con} \;\; n = 1, 2, \ldots .$$

Ahora definimos

$$F(s) := \int\limits_{0}^{s} f(v)\, dv.$$

Entonces casi seguramente para casi todo $s \in [0, T]$ existe $F'(s)$ y se cumple $F'(s) = f(s)$. Además tenemos

$$f(s) = F'(s) = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(s).$$

Para culminar aplicamos el teorema de convergencia dominada de Lebesgue y obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{T} \mathbf{E}\big(f(s) - \hat{f}_n(s)\big)^2\, ds = 0.$$

□

Esta proposición nos permite poder definir la integral estocástica en un espacio que contiene al conjunto de los procesos simples.

Definición 14. *Para cualquier función $f \in \mathcal{H}^2[0, T]$ definimos*

$$\int\limits_{0}^{T} f(s)\, dW_s = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{T} \bar{f}_n(s)\, dW_s$$

donde el límite es en L^2 y la sucesión es la que nos da la proposición.

Esta forma de definirla nos asegura poder extender de manera única la isometría lineal (2.4) desde el espacio completo $\mathcal{H}^2[0, T]$ en $L^2(\mathrm{P})$.
La integral estocástica de Itô cumple las siguientes propiedades para todos los procesos del espacio $\mathcal{H}^2[0, T]$. Las demostraciones de estas propiedades las dejamos a cargo del lector.

1. Para cualquier par de constantes α, β

$$\int_0^T \big(\alpha\, f(s) + \beta\, g(s)\big)\, dW_s = \alpha \int_0^T f(s)\, dW_s + \beta \int_0^T g(s)\, dW_s;$$

2.

$$\mathbf{E} \int_0^T f(s)\, dW_s = 0;$$

3. si

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \mathbf{E}\big(f(s) - f_n(s)\big)^2\, ds = 0$$

   entonces

$$\int_0^T f(s)\, dW_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^T f_n(s)\, dW_s\ ;$$

4.

$$\forall\ v < t\ \ \textit{se cumple}\ \ \mathbf{E}\Big(\int_v^t f(s)\, dW_s | \mathcal{F}_v\Big) = 0\ \ \textit{casi seguramente.}$$

Para culminar esta sección enunciaremos y demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea $f \in \mathcal{H}^2\,[0,T]$. Entonces el proceso*

$$I_t := \int_0^T 1_{[0,t)}(s)\ f(s)\, dW_s \overset{Nt.}{=} \int_0^t f(s)\, dW_s$$

con $t \in [0,T]$ es casi seguramente una martingala continua tal que para cualquier $\epsilon > 0$ se cumple

$$\mathrm{P}\Big(\sup_{0\le t\le T} |\int_0^t f(s)\, dW_s| \ge \epsilon\Big) \le \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^T \mathbf{E} f^2(s)\, ds,$$

$$\mathbf{E} \sup_{0\le t\le T} |\int_0^t f(s)\, dW_s|^2 \le 4 \int_0^T \mathbf{E} f^2(s)\, ds.$$

Demostración. Primero vamos a probar el teorema para procesos simples. Sea $t \in [s_l, s_{l+1})$ con $l = 0, \ldots, m-1$ y tenemos

$$I_t = \int_0^T 1_{[0,t)}(s)\ \bar{f}(s)\, dW_s = \sum_{k=0}^{l-1} f_k\ (W_{s_{k+1}} - W_{s_k}) + f_l\ (W_t - W_{s_l}).$$

A causa de la propiedad 4 de la integral de Itô obtenemos que

$$\mathbf{E}\Big(\int_0^t \bar{f}(s)\, dW_s | \mathcal{F}_v \Big) = \int_0^v \bar{f}(s)\, dW_s,$$

lo que implica que para un proceso simple, I_t es una martingala y como el movimiento browniano es continuo entonces I_t es una martingala continua.

Aplicando la primera desigualdad de Doob obtenemos

$$\mathrm{P}\Big(\sup_{0 \le t \le T} | \int_0^t \bar{f}(s)\, dW_s | \ge \epsilon \Big) \le \frac{1}{\epsilon^2}\, \mathbf{E}\Big(\int_0^T \bar{f}(s)\, dW_s \Big)^2 = \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^T \mathbf{E}\bar{f}^2(s)\, ds.$$

Similarmente aplicando la segunda desigualdad de Doob para martingalas obtenemos

$$\mathbf{E} \sup_{0 \le t \le T} | \int_0^t \bar{f}(s)\, dW_s |^2 \le 4\, \mathbf{E}\Big(\int_0^T \bar{f}(s)\, dW_s \Big)^2 = 4 \int_0^T \mathbf{E}\bar{f}^2(s)\, ds.$$

Por lo tanto tenemos demostrado el teorema para procesos simples.

Sea $f \in \mathcal{H}^2\,[0,T]$ y utilizando que los procesos simples son densos en $\mathcal{H}^2\,[0,T]$ podemos escoger una sucesión n_k tal que

$$\int_0^T \mathbf{E}\Big(f(s) - \bar{f}_{n_k}(s) \Big)^2 ds \le \frac{1}{2^k}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbf{E}\Big(\bar{f}_{n_{k+1}}(s) - \bar{f}_{n_k}(s) \Big)^2 ds &\le 2 \int_0^T \mathbf{E}\Big(f(s) - \bar{f}_{n_{k+1}}(s) \Big)^2 ds \\ &\le 2 \int_0^T \mathbf{E}\Big(f(s) - \bar{f}_{n_k}(s) \Big)^2 ds \le \frac{3}{2^k}. \end{aligned}$$

Pero el proceso $\bar{f}_{n_{k+1}}(s) - \bar{f}_{n_k}(s)$ es simple por lo tanto podemos aplicarle este mismo teorema (que ya lo demostramos en este caso) y obtenemos

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\Big(\sup_{0\le t\le T} |\int_0^t \bar{f}_{n_{k+1}}(s)\,dW_s - \int_0^t \bar{f}_{n_k}(s)\,dW_s| \ge \frac{1}{k^2}\Big) \\
&= \mathrm{P}\Big(\sup_{0\le t\le T} |\int_0^t \big(\bar{f}_{n_{k+1}}(s) - \bar{f}_{n_k}(s)\,dW_s| \ge \frac{1}{k^2}\big) \\
&\le k^4 \int_0^T \mathbf{E}\big(\bar{f}_{n_{k+1}}(s) - \bar{f}_{n_k}(s)\big)^2\,ds \le \frac{3k^4}{2^k}.
\end{aligned}$$

Dado que la serie de estas probabilidades converge podemos aplicar el lema de Borel-Cantelli, entonces con probabilidad uno existe un número aleatorio $k_0 = k_0(\omega)$ tal que $\forall k \ge k_0$ se cumple

$$\sup_{0\le t\le T} |\int_0^t \big(\bar{f}_{n_{k+1}}(s)\,dW_s - \int_0^t \bar{f}_{n_k}(s)\,dW_s| < \frac{1}{k^2}.$$

Entonces la sucesión de integrales

$$\int_0^t \bar{f}_{n_m}(s)\,dW_s = \int_0^t \bar{f}_{n_0}(s)\,dW_s + \sum_{k=0}^{m-1}\Big(\bar{f}_{n_{k+1}}(s)\,dW_s - \int_0^t \bar{f}_{n_k}(s)\,dW_s\Big)$$

converge casi seguramente, uniformemente en $[0, T]$ a un límite, que de acuerdo a la definición de integral de Itô es I_t.
Como sabemos, el límite uniforme de funciones continuas es continua por lo tanto obtenemos que el proceso I_t es continuo, además es una martingala, de nuevo por la propiedad 4 de integral de Itô. Las demostraciones de las desigualdades en el caso general, se realizan análogamente al caso de procesos simples y utilizando las aproximaciones por ellas. $\square$

2.3. Lema de Itô

En esta sección vamos a introducir una herramienta fundamental para el cálculo estocástico llamado el Lema de Itô.

Teorema 2 (Lema de Itô)**.** *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, una función continua con derivadas primera y segunda continuas y acotadas. Sea $W = (W_t,\ t \in [0,\infty))$ un movimiento browniano. Entonces se verifica*

$$f(W_t) - f(W_s) = \int_s^t f'(W_x)\, dW_x + \frac{1}{2}\int_s^t f''(W_x)\, dx.$$

Demostración. Hay que demostrar que para todo $t \in [0,T]$

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_v)\, dW_v + \frac{1}{2}\int_s^t f''(W_v)\, dv \quad \textit{casi seguramente.}$$

Asumimos primero que f es tres veces derivable con derivadas acotadas y f''' continua.
Definimos la subdivisión T_n del intervalo $[0,t]$ como $T_n := \Big(0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \ldots < t_{n,n-1} < t_{n,n} = t\Big)$ y consideramos una sucesión de subdivisiones $\{T_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\le k\le n-1} |t_{n,k+1} - t_{n,k}| = 0. \tag{2.5}$$

Para cada partición se cumple

$$f(W_t) - f(W_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[f(W_{t_{n,k+1}}) - f(W_{t_{n,k}})\right].$$

Aplicando la fórmula de Taylor $\forall\ k = 0,\ldots,n-1$ se cumple

$$\begin{aligned}
&f\big(W_{t_{n,k+1}}\big) - f\big(W_{t_{n,k}}\big) = f'\big(W_{t_{n,k}}\big)\left[W_{t_{n,k+1}} - W_{t_{n,k}}\right]\\
&+ \frac{1}{2} f''\big(W_{t_{n,k}}\big)\left[W_{t_{n,k+1}} - W_{t_{n,k+1}}\right]^2\\
&+ \frac{1}{6} f'''\big(W_{s_{n,k}}\big)\left[W_{t_{n,k+1}} - W_{t_{n,k}}\right]^3 \quad \textit{con} \ \ s_{n,k} \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}].
\end{aligned}$$

Sumando las expresiones obtenemos

$$f(W_t) - f(W_0) = \sum_{k=0}^{n-1} f'\big(W_{t_{n,k}}\big)\left[W_{t_{n,k+1}} - W_{t_{n,k}}\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f''\big(W_{t_{n,k}}\big)\left[t_{n,k+1} - t_{n,k}\right] + \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1} f'''\big(W_{s_{n,k}}\big)\left[W_{t_{n,k+1}} - W_{t_{n,k}}\right]^3$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f''\big(W_{t_{n,k}}\big)\Big(\big(W_{t_{n,k+1}} - W_{t_{n,k+1}}\big)^2 - (t_{n,k+1} - t_{n,k})\Big)$$
$$=: I_{n,1} + I_{n,2} + I_{n,3} + I_{n,4}.$$

Definimos

$$t_n(v) := \sum_{k=0}^{n-1} t_{n,k}\ 1_{[t_{n,k},t_{n,k+1})} \quad \forall\ v \in [0,t]$$

y de acuerdo a su definición se cumple que $t_n(v) \to v$ con $n \to \infty$ uniformemente; utilizando además la continuidad de las trayectorias del movimiento browniano y la continuidad de f' obtenemos

$$\int_0^t [f'(W_v) - f'(W_{t_n(v)})]^2\, dW_v \to 0 \ \ \textit{casi seguramente} \ \ n \to \infty.$$

Por lo tanto

$$I_{n,1} = \int_0^t f'(W_{t_n(v)})\, dW_v \to \int_0^t f'(W_v) dW_v \ \ \textit{en probabilidad} \ \ \textit{con } n \to \infty. \tag{2.6}$$

Como es f'' continua

$$I_{n,2} = \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_{t_n(v)})\, dv \to \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_v) dv$$
$$\textit{casi seguramente} \ \ \textit{con } n \to \infty. \tag{2.7}$$

Sabemos $|f'''(x)| \leq C$ para todo $x \in \mathbb{R}$ por lo tanto obtenemos

$$|I_{n,3}| \leq \frac{C}{6}\sum_{k=0}^{n-1} \left|W_{t_{n,k+1}} - W_{t_{n,k}}\right|^3$$
$$\leq \frac{C}{6} \max_{0 \leq k \leq n-1} \left|W_{t_{n,k+1}} - W_{t_{n,k}}\right| \sum_{k=0}^{n-1} \left|W_{t_{n,k+1}} - W_{t_{n,k}}\right|^2.$$

Por la continuidad del movimiento browniano y por (2.5) obtenemos

$$\max_{0\le k\le n-1}\left|W_{t_{n,k+1}}-W_{t_{n,k}}\right|\to 0 \ \ \textit{casi seguramente},$$

además sabemos que el movimiento browniano tiene variación cuadrática finita y tenemos

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|W_{t_{n,k+1}}-W_{t_{n,k}}\right|^2\to t \ \ \textit{en } L^2 \ \ \textit{con } n\to\infty.$$

Por lo tanto $I_{n,3}\to 0$ en probabilidad.

Ahora queremos probar que $I_{n,4}\to 0$ en probabilidad.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}{I_{n,4}}^2 \le \frac{1}{4}\ \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\Bigg(\Big(f''(W_{t_{n,k}})\Big)^2\Big(\left[W_{t_{n,k+1}}-W_{t_{n,k}}\right]^2-[t_{n,k+1}-t_{n,k}]\Big)^2\Bigg)\\ +\frac{1}{2}\ \sum_{k\le l}\mathbf{E}\Bigg(f''(W_{t_{n,k}})\Big(\left[W_{t_{n,k+1}}-W_{t_{n,k}}\right]^2-[t_{n,k+1}-t_{n,k}]\Big)f''(W_{t_{n,l}})\\ \times\Big(\left[W_{t_{n,l+1}}-W_{t_{n,l}}\right]^2-[t_{n,l+1}-t_{n,l}]\Big)\Bigg).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Para $k\le l$ las variables aleatorias

$$f''(W_{t_{n,k}})\ \Big(\left[W_{t_{n,k+1}}-W_{t_{n,k}}\right]^2-[t_{n,k+1}-t_{n,k}]\Big)\ f''(W_{t_{n,l}})\tag{2.9}$$

son $\mathcal{F}_{t_{n,l}}$ - medibles y los incrementos $\left[W_{t_{n,l+1}}-W_{t_{n,l}}\right]$ son independientes de $\mathcal{F}_{t_{n,l}}$.

Por lo tanto la esperanza bajo el signo de $\sum\limits_{k\le l}$ es igual al producto de las esperanzas de las variables aleatorias (2.9) y

$$\mathbf{E}\Big(\left[W_{t_{n,l+1}}-W_{t_{n,l}}\right]^2-[t_{n,l+1}-t_{n,l}]\Big)=0.$$

Entonces la segunda suma en el lado derecho de (2.8) es igual a cero. Dado que $|f''(x)|\le C\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}{I_{n,4}}^2 &\le \frac{C^2}{4}\ \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\Big(\left[W_{t_{n,k+1}}-W_{t_{n,k}}\right]^2-[t_{n,k+1}-t_{n,k}]\Big)^2\\ &=\frac{C^2}{4}\ \sum_{k=0}^{n-1}Var\Big(\left[W_{t_{n,k+1}}-W_{t_{n,k}}\right]^2\Big)\le\frac{C^2}{2}\ \max_{0\le k\le n-1}|t_{n,l+1}-t_{n,l}|\,t.\end{aligned}$$

por lo tanto utilizando la condición (2.5) obtenemos que $I_{n,4} \to 0$ en L^2 y consecuentemente en probabilidad.

Dado que

$$f(W_t) - f(W_0) = I_{n,1} + I_{n,2} + I_{n,3} + I_{n,4},$$

además usando los límites (2.6) y (2.7) y la convergencia de las variables aleatorias $I_{n,3}$ y $I_{n,4}$ a cero en probabilidad obtenemos lo deseado.

Hasta acá, demostramos el lema de Itô bajo las hipótesis de que las derivadas primera, segunda y tercera están acotadas. Con un poco más de esfuerzo se extiende el lema sin asumir que la derivada tercera sea continua. También se demuestra el lema en el caso que no se asume que las derivadas estén acotadas (el lema lo enunciamos de esta forma). Una demostración de ello lo encontramos en [3].

$\square$

Además existen otras versiones del lema de Itô, las cuales las podemos aplicar en otras circunstancias más generales. Vamos a enunciar solamente las que iremos a utilizar a lo largo del trabajo y una demostración de ellas las encontramos en [3].

Lema 1 (Extensión 1)**.** *Sea $f : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y con derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$, $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ y $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x)$ continuas. Sea $W = (W_t,\ t \in [0,\infty))$ un movimiento browniano.*
Entonces se cumple

$$\begin{aligned} f(t,W_t) - f(s,W_s) = &\int_s^t \Big(\frac{\partial}{\partial v} f(v,W_v) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(v,W_v)\Big)\,dv \\ &+ \int_s^t \frac{\partial}{\partial x} f(v,W_v)\,dW_v. \end{aligned}$$

Lema 2 (Extensión 2)**.** *Sea $f : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y con derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$, $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ y $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x)$ continuas. Sea $W = (W_t,\ t \in [0,\infty))$ un movimiento browniano y además el proceso X cumple la ecuación diferencial estocástica (definición que enunciaremos en la próxima sección)*

$$dX_t = a_t\,dt + b_t\,dW_t.$$

Entonces

$$f(t, X_t) - f(s, X_s) = \int_s^t \frac{\partial}{\partial v} f(v, X_v)\, dv + \int_s^t a_v \, \frac{\partial}{\partial x} f(v, X_v)\, dv$$

$$+ \int_s^t b_v \, \frac{\partial}{\partial x} f(v, X_v)\, dW_v + \frac{1}{2} \int_s^t (b_v)^2 \, \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(v, X_v)\, dv.$$

2.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô

En esta sección vamos a dar un enfoque de las ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô y una aplicación que es fundamental para el próximo capítulo.

En este enfoque de las ecuaciones diferenciales estocásticas, lo aleatorio de las ecuaciones es introducido a través de un ruido aleatorio de la siguiente forma

$$dX_t = a(t, X_t)\, dt + b(t, X_t)\, dW_t \tag{2.10}$$

donde la condición inicial es una variable aleatoria ξ, $W = (W_t,\ t \geq 0)$ es un movimiento browniano y las funciones $a(t, x)$ y $b(t, x)$ son funciones deterministas.
La ecuación (2.10) la podemos interpretar como una ecuación integral estocástica de la forma

$$X_t = \xi + \int_0^t a(s, X_s)\, ds + \int_0^t b(s, X_s)\, dW_s$$

donde la primera integral en el lado derecho es la integral de Riemann y la segunda es la integral estocástica de Itô.

Definición 15. *Un proceso estocástico $X = (X_t,\ t \in [0, T])$ es una solución fuerte de la ecuación (2.10) si la verifica, cumple que X_t es un proceso $\mathcal{F}_t$-medible y continuo y las funciones cumplen con probabilidad uno para todo $t \in [0, T]$ que*

$$\int_0^t \Big(|a(s, X_s)| + |b(s, X_s)|^2 \Big)\, ds < \infty.$$

Ahora enunciaremos un teorema que es de gran utilidad en el campo de las ecuaciones diferenciales estocásticas y lo utilizaremos para el ejercicio que veremos de inmediato. Una demostración del teorema la encontramos en [3].

Teorema 3. *Consideramos* $a : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $b : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones que cumplen la condición de Lipschitz: existe una constante* C_T *tal que para todo* $t \in [0,T]$ *y* $x, y \in \mathbb{R}$

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq C_T \ |x - y|$$

y la condición que para todo $t \in [0,T]$ *y* $x \in \mathbb{R}$

$$|a(t,x)| + |b(t,x)| \leq C_T \ (1 + |x|).$$

Además si la variable aleatoria ξ *es independiente de los incrementos* $W_t - W_0$ *para todo* $t \in [0,T]$ *y* $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$.
Se cumple que existe una única solución fuerte de la ecuación (2.10) tal que satisface $\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E}X_t^2 < \infty$.

Con la finalidad de darle un nombre a cierta clase de procesos realizamos la siguiente definición.

Definición 16. *Un proceso estocástico* X *es un Proceso de Itô si cumple que se representa mediante*

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s^{(1)} \, ds + \int_0^t A_s^{(2)} \, dW_s$$

donde los procesos $A_s^{(1)}$ *y* $A_s^{(2)}$ *son adaptados al movimiento browniano.*

En esta clase de procesos existe un teorema que nos dice que los procesos están únicamente determinados por sus integrandos.

Teorema 4. *Si* X *es proceso de Itô que cumple que se puede representar mediante las ecuaciones*

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s^{(1)} \, ds + \int_0^t A_s^{(2)} \, dW_s,$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t B_s^{(1)}\, ds + \int_0^t B_s^{(2)}\, dW_s.$$

Entonces necesariamente los procesos $A^{(1)}$ y $B^{(1)}$ coinciden casi seguramente para cada $t > 0$. Lo mismo ocurre con los procesos $A^{(2)}$ y $B^{(2)}$

Para terminar esta sección, nuestro objetivo es calcular la solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica (2.11) (que es un Proceso de Itô), ecuación que junto con su respectiva solución juegan un rol importantísimo en la fórmula de Black-Scholes.

Consideramos la ecuación diferencial estocástica

$$X_t = X_0 + c \int_0^t X_s\, ds + \sigma \int_0^t X_s\, dW_s \tag{2.11}$$

con $t \in [0, T]$, para las constantes c y $\sigma > 0$.

Para calcular la solución de la ecuación (2.11) lo primero es definir el proceso $X_t = f(t, W_t)$ para alguna función diferenciable $f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, aplicamos la extensión 1 del lema de Itô y obtenemos

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Big(\frac{\partial}{\partial t} f(s, W_s) + \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, W_s)\Big)\, ds$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, W_s)\, dW_s. \tag{2.12}$$

Por lo tanto, por el teorema (4), podemos identificar los integrandos de la integral de Riemann y en la integral de Itô, respectivamente de las ecuaciones (2.11) y (2.12).
Utilizando la identificaciones y además la continuidad de las trayectorias del movimiento browniano obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales que son

$$c\, f(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) + \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, x), \tag{2.13}$$

$$\sigma\, f(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} f(t, x). \tag{2.14}$$

De la ecuación (2.14) obtenemos

$$\sigma^2 \, f(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x).$$

Luego las dos ecuaciones (2.13) y (2.14) podemos simplificarlas

$$(c - 0{,}5\sigma^2) \, f(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} f(t,x), \qquad \sigma \, f(t,x) = \frac{\partial}{\partial x} f(t,x). \tag{2.15}$$

Para poder calcular la solución suponemos (con éxito al final) que la función $f(t,x)$ la podemos escribir como producto de dos funciones tales que $f(t,x) = g(t) \, h(x)$.
Luego las ecuaciones (2.15) se convierten mediante este cambio en

$$(c - 0{,}5\sigma^2) \, g(t) = g'(t), \qquad \sigma \, h(x) = h'(x).$$

El cambio nos permite resolverlas mediante el método de separación de variables y conocemos sus soluciones que son

$$g(t) = g(0) \, e^{(c-0{,}5\sigma^2)t}, \qquad h(x) = h(0) \, e^{\sigma x}.$$

Luego obtenemos

$$f(t,x) = g(0) \, h(0) \, e^{(c-0{,}5\sigma^2)t+\sigma x}.$$

También tenemos que

$$X_0 = f(0, W_0) = f(0,0) = g(0) \, h(0).$$

Por lo tanto obtenemos que la solución de la ecuación (2.11) es

$$X_t = f(t, W_t) = X_0 \, e^{(c-0{,}5\sigma^2)t+\sigma W_t}$$

con $t \in [0,T]$, además como los integrandos $a(t,x) = c \, x$ y $b(t,x) = \sigma \, x$ son funciones lineales, por el teorema (3), concluimos que esta solución es única.
Por lo tanto, el movimiento browniano geométrico, es la única solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica (2.11).

2.5. Teorema de Girsanov

En esta sección introduciremos un teorema famoso que nos permite un cambio de medida en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ el cual nos va a ser de gran utilidad en el próximo capítulo para el segundo método de resolución de la fórmula de Black-Scholes. De este teorema existen muchas versiones pero enunciaremos y demostraremos únicamente la que corresponde a nuestro trabajo.

Lema 3. *Sea $X = \big(X_t,\ t \geq 0\big)$ con $X_0 = 0$ un proceso estocástico adaptado a la filtración $\mathcal{F}_t$. Si X_t cumple que para cualquier $s \leq t$ y $\forall\ \mu \in \mathbb{R}$*

$$\mathbf{E}\bigg(e^{i\mu(X_t - X_s)}|\mathcal{F}_s\bigg) = e^{-\mu^2(t-s)/2} \quad \textit{casi seguramente},$$

entonces X_t es un movimiento browniano.

Demostración. Tomo esperanza en la propiedad que cumple X_t

$$\mathbf{E}\bigg(\mathbf{E}\bigg(e^{i\mu(X_t - X_s)}|\mathcal{F}_s\bigg)\bigg) = \mathbf{E}\bigg(e^{-\mu^2(t-s)/2}\bigg) = e^{-\mu^2(t-s)/2}.$$

Por la unicidad de las funciones características obtenemos que los incrementos $X_t - X_s$ son distribuciones normales con esperanza cero y varianza $(t-s)$. También los momentos de estos incrementos son dados de la siguiente forma

- los momentos impares son iguales a cero,
- los momentos pares son dados por $\mathbf{E}\big(X_t - X_s\big)^{2m} = (2m-1)!!\ (t-s)^m$ para $m = 1, 2, \ldots,$ donde $(2m-1)!!$ es el producto de todos los números impares de 1 a $(2m-1)$.

Por lo anterior y el criterio de continuidad de Kolmogorov (ver en [3]) el proceso X_t es continuo.

Ahora solo nos falta verificar que los incrementos de X son estacionarios. Para cualquier $0 \leq s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_m \leq s_{m+1}$ y $\mu_k \in \mathbb{R}$ $k = 0, 1, \ldots, m$ tenemos que

$$\mathbf{E} \exp\big(i \sum_{k=0}^{m} \mu_k \big(X_{s_{k+1}} - X_{s_k}\big)\big) = \mathbf{E}\bigg(\mathbf{E}\bigg(\exp\big(i \sum_{k=0}^{m} \mu_k \big(X_{s_{k+1}} - X_{s_k}\big)\big)|\mathcal{F}_{s_m}\bigg)\bigg)$$

$$= \mathbf{E}\bigg(\exp\big(i \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k (X_{s_{k+1}} - X_{s_k})\big) \, \mathbf{E}\Big(\exp\big(i \mu_m (X_{s_{m+1}} - X_{s_m})\big) | \mathcal{F}_{s_m} \Big)\bigg)$$

$$= \exp\big(- \mu_m^2 (s_{m+1} - s_m)/2\big) \, \mathbf{E}\Big(\exp\big(i \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k (X_{s_{k+1}} - X_{s_k})\big)\Big) = \ldots$$

$$= \exp\big(- \sum_{k=0}^{m} \mu_k^2 (s_{k+1} - s_k)/2\big) = \prod_{k=0}^{m} \mathbf{E}\Big(\exp\big(i \sum_{k=0}^{m} \mu_k (X_{s_{k+1}} - X_{s_k})\big)\Big).$$

Esto implica la independencia de los incrementos del proceso X y por la definición (9) es un movimiento browniano. $\square$

Ahora vamos a considerar el proceso estocástico

$$M_t = e^{-q \, W_t - \frac{1}{2} \, q^2 \, t}.$$

Lema 4. *El proceso M_t es una martingala no negativa con respecto a la filtración natural browniana bajo la medida de probabilidad* P*.*

Demostración. Aplicamos la extensión 2 del lema de Itô a las funciones $f(t, x) = e^x$ y $X_t = -qW_t - \frac{1}{2}q^2 t$, obtenemos que

$$dM_t = \left(e^{-q \, W_t - \frac{1}{2} \, q^2 \, t}\right) \left[-q \, dW_t - \frac{1}{2} \, q^2 \, dt + \frac{1}{2} \, q^2 \, dt\right] = - \, q \, M_t \, dW_t$$

y al escribirlo en su forma integral

$$M_t = 1 - q \int_0^t M_s \, dW_s$$

concluimos, por el teorema (1), que el proceso M_t es una martingala con respecto a la filtración natural browniana. $\square$

Por lo tanto podemos definir una nueva medida de probabilidad Q que es equivalente a la medida de probabilidad P de la manera

$$\mathrm{Q}(A) = \int_A M_T(\omega) \, d\mathrm{P}(\omega) \ \ \forall \, A \in \mathcal{F}.$$

Teorema 5 (Teorema de Girsanov)**.** *El proceso*

$$\tilde{W}_t := W_t + q \, t$$

es un movimiento browniano con respecto a la medida Q*.*

Demostración. Definimos $\mathbf{E}_{\mathrm{Q}}$ como la esperanza con respecto a la medida Q por lo tanto

$$\mathbf{E}_{\mathrm{Q}}(\eta) := \int_{\Omega} \eta(w)\, \mathrm{Q}(dw) = \int_{\Omega} \eta(w)\, M_T(w)\, \mathrm{P}(dw) = \mathbf{E}(\eta M_T).$$

Por lo tanto si η es una variable aleatoria acotada, $\mathcal{F}_t$-medible entonces se cumple

$$\mathbf{E}_{\mathrm{Q}}(\eta) = \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(\eta\, M_T|\mathcal{F}_t)\big) = \mathbf{E}\big(\eta\, \mathbf{E}(M_T|\mathcal{F}_t)\big) = \mathbf{E}\big(\eta\, M_t\big).$$

Ahora queremos probar que se cumple que si η es una variable aleatoria acotada $\mathcal{F}_s$-medible entonces

$$\mathbf{E}_{\mathrm{Q}}(\eta|F_s) = \frac{1}{M_s}\, \mathbf{E}\big(\eta\, M_t|\mathcal{F}_s\big) \quad \textit{casi seguramente.} \tag{2.16}$$

Sea ξ una variable aleatoria acotada $\mathcal{F}_s$-medible entonces

$$\mathbf{E}_{\mathrm{Q}}(\xi\,\eta) = \mathbf{E}_{\mathrm{Q}}\big(\mathbf{E}_{\mathrm{Q}}(\xi\,\eta|\mathcal{F}_s)\big) = \mathbf{E}_{\mathrm{Q}}\big(\xi\, \mathbf{E}_{\mathrm{Q}}(\eta|\mathcal{F}_s)\big) = \mathbf{E}\big(\xi\, M_s\, \mathbf{E}_{\mathrm{Q}}(\eta|\mathcal{F}_s)\big)$$

y por el otro lado obtenemos

$$\mathbf{E}_{\mathrm{Q}}(\xi\,\eta) = \mathbf{E}(\xi\,\eta\, M_t) = \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(\xi\,\eta\, M_t|\mathcal{F}_s)\big) = \mathbf{E}\big(\xi\, \mathbf{E}(\eta\, M_t|\mathcal{F}_s)\big)$$

y como ξ es una variable $\mathcal{F}_s$-medible arbitraria la igualdad

$$\mathbf{E}_{\mathrm{Q}}(\eta|\mathcal{F}_s) = \frac{1}{M_s}\, \mathbf{E}\big(\eta\, M_t|\mathcal{F}_s\big) \quad \textit{se cumple casi seguramente.}$$

Nuestro objetivo es probar que $\tilde{W}_t = W_t + q\,t$ es un movimiento browniano pero por el lema (3) solo basta demostrar que para cualquier $s \leq t$ y $z \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\mathbf{E}_{\mathrm{Q}}(e^{iz(\tilde{W}_t - \tilde{W}_s)}|\mathcal{F}_s) = e^{-z^2(t-s)/2} \quad \textit{casi seguramente.}$$

Sea s fijo y $s \leq t$; definimos la función $\eta(t)$ como sigue

$$\eta(t) := e^{iz(\tilde{W}_t - \tilde{W}_s)} = e^{iz(W_t - W_s) + izq(t-s)}.$$

También definimos la función $g(t)$ como sigue

$$g(t) := \mathbf{E}_{\mathrm{Q}}\big(\eta(t)|\mathcal{F}_s)\big)$$

y por aplicar la ecuación (2.16) obtenemos que se cumple

$$g(t) = \frac{1}{M_s}\,\mathbf{E}\big(\eta(t)\; M_t|\mathcal{F}_s\big).$$

Aplicamos el lema de Itô para las funciones $f(t,x,y) = e^x y$; $X_t = iz(W_t - W_s) + izq(t-s)$; $Y(t) = M_t$ y obtenemos

$$d\big(\eta(t)\; M_t\big) = \eta(t)\; M_t\;(iz\,dW_t + izq\,dt) - \eta(t)\; M_t\; q\,dW_t$$

$$-\frac{z^2}{2}\,\eta(t)\; M_t\,dt - i\; z\;\eta(t)\; M_t\; q\,dt$$

o en su forma integral

$$\eta(t)\; M_t = M_s + i\; z\int_s^t \eta(u)\; M_u\,dW_u$$

$$-\int_s^t \eta(u)\; M_u\; q\,dW_u - \frac{z^2}{2}\int_s^t \eta(u)\; M_u\,du. \tag{2.17}$$

Al tomar esperanza condicional, obtenemos que los dos primeros integrandos de la ecuación (2.17) dan cero, entonces

$$\mathbf{E}(\eta(t)\; M_t|\mathcal{F}_s) = M_s - \frac{z^2}{2}\int_s^t \mathbf{E}(\eta(u)\; M_u|\mathcal{F}_s)\,du$$

y utilizando la función $g(t)$ obtenemos

$$g(t)\; M_s = M_s - \frac{z^2}{2}\int_s^t g(u)\; M_s\,du.$$

Por lo tanto obtenemos que

$$g(t) = 1 - \frac{z^2}{2}\int_s^t g(u)\,du$$

es una ecuación diferencial ordinaria cuya solución la conocemos y es

$$g(t) = e^{-z^2(t-s)/2}.$$

Entonces obtenemos que se cumple que $\tilde{W}_t = W_t + q\,t$ es un movimiento browniano con respecto a la medida Q. $\square$

Capítulo 3

La fórmula de Black-Scholes

3.1. Formulación matemática del problema

En el modelo Black-Scholes, asumimos que el precio del activo con riesgo es dado a través de un movimiento browniano geométrico de la forma

$$X_t = X_0 \; e^{(c-0{,}5\sigma^2)t+\sigma W_t}$$

donde $W = (W_t, \; t \geq 0)$ es un movimiento browniano, X_0 es independiente de W, $c \geq 0$ es la tasa principal de retorno y $\sigma \geq 0$ es la volatilidad del mercado.

La motivación para esto, es que (como vimos en el capítulo anterior), el movimiento browniano geométrico es la única solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica lineal

$$X_t = X_0 + c \int_0^t X_s \, ds + \sigma \int_0^t X_s \, dW_s.$$

En el modelo también asumimos que el activo sin riesgo tiene una tasa de interés constante $r \geq 0$. Por lo cual una inversión de β_0 en $t = 0$ se transforman en $\beta_s = \beta_0 \; e^{rs}$ en $t = s$. Por lo tanto, matemáticamente β, cumple la ecuación diferencial

$$\beta_t = \beta_0 + r \int_0^t \beta_s \, ds.$$

Nuestro objetivo es encontrar ciertas cantidades a_t en stock y b_t en cuenta, tales que sean procesos estocásticos adaptados al movimiento browniano y al par $\{a_t, b_t\},\ t \in [0,T]$ lo llamaremos estrategia de comercio o portafolio. Por supuesto, se va a buscar una estrategia en la cual no se pierda. También definimos el valor del portafolio en $t = s$ como

$$V_s = a_s\, X_s + b_s\, \beta_s.$$

En el modelo está permitido que a_t y b_t tomen tanto valores positivos como valores negativos, un valor negativo de a_t significa una deuda en stock y un valor negativo de b_t significa el pedido dinero a una tasa de interés constante r. En la realidad existen costos de transacción por las operaciones de compra y venta de stock pero el modelo no los tiene en cuenta. Otras restricciones del modelo son que los valores de a_t como de b_t podrían en principio no estar acotados y que no existen gastos por consumición.

Además asumimos que la estrategia $\{a_t, b_t\}$ es auto-financiante; lo que significa que los incrementos del valor del portafolio resultan a causa de los cambios de X_t y de β_t de los activos. Lo cual se define, en términos matemáticos, como

$$dV_t = \, d\,(a_t\, X_t + b_t\, \beta_t) = a_t\, dX_t + b_t\, d\beta_t$$

cual interpretamos, en el sentido de integrales de Itô, como

$$V_t - V_0 = \int_0^t d(a_s\, X_s + b_s\, \beta_s) = \int_0^t a_s\, dX_s + \int_0^t b_s\, d\beta_s.$$

Con la finalidad de comprender la causa del por que el modelo de Black-Scholes asume estas propiedades incluiremos la próxima sección, la cual tiene el inconveniente que el tiempo es discreto pero tiene la ventaja de darnos una idea general de lo que ocurre en tiempo continuo.

3.2. Modelos en tiempo discreto

El objetivo de esta sección es presentar definiciones y algunos resultados de la teoría de las opciones en modelos de tiempos discretos, los cuales con cierto esfuerzo y un poco más de teoría se generalizan al caso de tiempo continuo (espacio donde se aplica la fórmula de Black-Scholes), en particular, tomando límite cuando $N \to \infty$, con los ajustes necesarios.

Los modelos financieros en tiempo discreto son construidos en un espacio de probabilidad finito $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ con una filtración $\big(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_N\big)$. El tiempo

N corresponde al tiempo de madurez de la opción. Como en el modelo de Black-Scholes, asumimos que el mercado consiste de dos activos, uno con riesgo y el otro sin riesgo (pero se generaliza de forma muy simple al caso de muchos activos con riesgo y uno sin riesgo). Los precios son dados en tiempo n por las variables aleatorias no negativas X_n y Y_n que cumple que son $\mathcal{F}_n$-medible y el vector de precios es dado por

$$S_n = \big(X_n,\, Y_n\big).$$

Definición 17. *Un proceso estocástico* $X = \big(X_n,\ \forall\ n\ \in 0 \leq n \leq N\big)$ *es predecible si cumple que el proceso* X_0 *es* $\mathcal{F}_0$*-medible y los procesos* X_n *son* $\mathcal{F}_{n-1}$*-medibles.*

Definición 18. *Una estrategia de comercio es definida como un proceso estocástico*

$$\phi = \Big(a_n,\, b_n\Big)_{0\leq n\leq N}$$

donde a_n *denota la cantidad de activo con riesgo en tiempo* n*,* b_n *denota la cantidad de activo sin riesgo en tiempo* n *y además el proceso* ϕ *cumple que es predecible.*

Vale aclarar que en el caso de tiempo continuo, cuando la filtración es la natural del movimiento browniano, asumir que la estrategia es predecible no restringe la clase de procesos adaptados a causa de la continuidad de las trayectorias del movimiento browniano.

Definición 19. *El valor del portafolio en tiempo* n *al ejercer la estrategia* ϕ *es*

$$V_n(\phi) = a_n\, X_n + b_n\, Y_n = \phi_n\, S_n.$$

Definición 20. *Una estrategia es auto-financiante si cumple que para todo* $n\ \in\ 0 \leq n \leq N$

$$\phi_n\, S_n = \phi_{n+1}\, S_n.$$

Esta definición la podemos interpretar como que el inversor en tiempo n reajusta su posición de ϕ_n a ϕ_{n+1} sin ingresar ni extraer ninguna riqueza. Por lo tanto, la ganancia neta de esta acción, es a consecuencia solamente de los cambios de precios del tiempo n al tiempo $n+1$.

Definición 21. *Una estrategia* ϕ *es admisible si es auto-financiante y cumple*

$$V_n(\phi) \geq 0 \quad \textit{para todo} \quad n\ \in\ 0 \leq n \leq N.$$

Definición 22. *Una estrategia de arbitraje es una estrategia admisible con valor inicial cero y valor final distinto de cero.*

Muchos de los modelos en matemática financiera excluyen la oportunidad de arbitraje y existen resultados importantes y de gran utilidad que vinculan el arbitraje con las martingalas en el espacio de probabilidad.

Definición 23. *El mercado es viable si no existe oportunidad de arbitraje.*

Teorema 6. *El mercado es viable si y solo si existe una medida de probabilidad* Q *equivalente a* P *tal que el proceso de precios descontados es una* Q*-martingala.*

Una demostración de este teorema la podemos encontrar en [5].

Por otra parte, en una opción de compra europea o más generalmente en un reclamo contingente (contingent claim), en tiempo de madurez N, el pago es una función $h \geq 0$ que es $\mathcal{F}_N$-medible y puede depender del precio del activo solo en el tiempo de madurez (como en el caso Black-Scholes) o puede depender del precio en tiempos intermedios.

Definición 24. *El reclamo contingente definido por la función h es alcanzable (attainable) si existe una estrategia admisible que tiene el valor h en tiempo N.*

Podemos observar que en un mercado viable solo necesitamos encontrar una estrategia auto-financiante tal que tenga el valor h en tiempo de madurez para decir que el reclamo contingente definido por h es alcanzable.

Definición 25. *El mercado es completo si todo reclamo contingente es alcanzable.*

Teorema 7. *El mercado viable es completo si y solo si existe una única medida de probabilidad* Q *equivalente a* P *bajo la cual los precios descontados es una* Q*-martingala.*

Una demostración la podemos encontrar en [5].

3.3. Primer método de solución de la fórmula de Black-Scholes

Nuestro objetivo es encontrar una estrategia $\{a_t, b_t\}$ auto-financiante tal que el valor del portafolio (definido como $V_t = a_t\, X_t + b_t\, \beta_t$) esté asociado a una función diferenciable $u : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante la igualdad

$$V_t = u(T-t, X_t) \quad con \quad t \in [0,T]\,.$$

Entonces estamos suponiendo que el portafolio depende de una forma diferenciable de t y de X_t (es otra restricción del modelo). Dado que nosotros queremos el precio racional de la opción, nos trae aparejado una condición de borde en el valor del portafolio. Lo cual se traduce en

$$V_T = u(0, X_T) = (X_T - K)^+.$$

Por un lado vamos a trabajar con la igualdad $V_t = u(T-t, X_t)$ aplicándole el lema de Itô. Definimos la función $f(t,x) = u(T-t,x)$ y sus respectivas derivadas son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) &= -\frac{\partial}{\partial t} u(T-t,x) \\
\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x} u(T-t,x) \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} f &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(T-t,x).
\end{aligned}$$

También recordamos que el proceso X cumple la ecuación diferencial estocástica de Itô $dX_t = c\, X_t\, dt + \sigma\, X_t\, dW_t$. Le aplicamos la extensión 2 del lema de Itô con los procesos $A^{(1)} = cX$ y $A^{(2)} = \sigma X$ por lo tanto

$$V_t - V_0 = f(t, X_t) - f(0, X_0)$$

$$= \int_0^t \Big(\frac{\partial}{\partial t} f(s, X_s) + c\, X_s\, \frac{\partial}{\partial x} f(s, X_s) + 0{,}5\, \sigma^2\, X_s^2\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, X_s) \Big)\, ds$$

$$+ \int_0^t \Big(\sigma X_s\, \frac{\partial}{\partial x} f(s, X_s) \Big)\, dW_s$$

$$= \int_0^t \Bigg(-\frac{\partial}{\partial t} u(T-s, X_s) \;+\; c\, X_s\, \frac{\partial}{\partial x} u(T-s, X_s)$$

$$+ 0{,}5\, \sigma^2\, X_s^2\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(T-s, X_s) \Bigg)\, ds + \int_0^t \big(\sigma\, X_s\, \frac{\partial}{\partial x} u(T-s, X_s) \big)\, dW_s. \quad (3.1)$$

Por el otro lado vamos a trabajar bajo la hipótesis de que $\{a_t, b_t\}$ es auto-financiante, por lo tanto se cumple la ecuación

$$V_t - V_0 = \int_0^t a_s\, dX_s + \int_0^t b_s\, d\beta_s. \tag{3.2}$$

Además, recordamos que $d\beta_t = r\beta_0 e^{rt}\, dt = r\beta_t\, dt$ y $V_t = a_t X_t + b_t \beta_t$. Combinando estas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} V_t - V_0 &= \int_0^t a_s\, dX_s + \int_0^t \frac{V_s - a_s X_s}{\beta_s} r\beta_s\, ds \\ &= \int_0^t a_s\, dX_s + \int_0^t r(V_s - a_s)\, ds \\ &= \int_0^t c\, a_s\, X_s\, ds + \int_0^t \sigma a_s\, X_s\, dW_s + \int_0^t r\, (V_s - a_s)\, ds \end{aligned}$$

$$= \int_0^t \big((c-r)\, a_s\, X_s + r\, V_s\big)\, ds + \int_0^t \sigma\, a_s\, X_s\, dW_s. \tag{3.3}$$

Por el teorema (4), sabemos que los coeficientes de las funciones de los procesos de Itô coinciden. Por lo tanto podemos igualar los integrandos de la integrales de Riemann y los integrandos de las integrales de Itô en la ecuaciones (3.1)y (3.3) y obtenemos

$$a_t = \frac{\partial}{\partial x} u(T-t, X_t), \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} &(c-r)\, a_t\, X_t + r\, u(T-t, X_t) = (c-r)\, \frac{\partial}{\partial x} u(T-t, X_t)\, X_t + r\, u(T-t, X_t) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} u(T-t, X_t) + c\, X_t \frac{\partial}{\partial x} u(T-t, X_t) + \frac{1}{2}\, \sigma^2\, X_t^2\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(T-t, X_t). \end{aligned}$$

Dado que X_t puede asumir cualquier valor positivo, podemos escribir la última igualdad como la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = 0{,}5\, \sigma^2\, x^2\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) + r\, x\, \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) - r\, u(t,x), \tag{3.5}$$

con $x \geq 0,\ t \in [0,T]$ y la condición terminal $u(0,x) = (x-K)^+$.

Esta ecuación diferencial se caracteriza por tener una solución explícita que es

$$u(t,x) = x\ \Phi\big(g(t,x)\big) - K\ e^{-rt}\ \Phi\big(h(t,x)\big)$$

donde

$$g(t,x) = \frac{\ln(x/K) + (r + 0{,}5\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}, \qquad h(t,x) = g(t,x) - \sigma\sqrt{t},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\,dy \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto volviendo a la ecuación $V_t = u(T-t, X_t)$ el precio racional de la opción de compra europea con precio de ejercicio K es

$$V_0 = u(T, X_0) = X_0\ \Phi\big(g(T,X_0)\big) - K\ e^{-rt}\ \Phi\big(h(T,X_0)\big).$$

Además, mediante la resolución de la ecuación también se conoce la estrategia auto-financiante y es dada mediante los procesos adaptados al movimiento browniano

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{\partial}{\partial x} u(T-t, X_t), \\ b_t &= \frac{u(T-t,X_t)\ - a_t\ X_t}{\beta_t}. \end{aligned}$$

3.4. Segundo método de solución de la fórmula de Black-Scholes

En la sección referente al teorema de Girsanov vimos que si W_t es un movimiento browniano bajo una medida P, el proceso estocástico definido como $\tilde{W}_t = W_t + q\ t$ ($\tilde{W}$ es un movimiento browniano con drift bajo P) es un movimiento browniano bajo una nueva medida Q.

Nuestro objetivo es encontrar una estrategia $\{a_t, b_t\}$ auto-financiante tal que el valor del portafolio en tiempo de madurez sea el reclamo contingente deseado y en los tiempos anteriores esté asociado al cálculo de una esperanza condicional bajo la nueva medida de probabilidad Q obtenida por aplicar el teorema de Girsanov.

Comenzamos el estudio con un nuevo proceso estocástico que llamamos precios descontados y lo definimos como

$$\tilde{X}_t := e^{-rt} X_t.$$

donde X es el proceso considerado al inicio del capítulo.
Sea $f(t,x) = e^{-rt}x$ y le aplicamos el lema de Itô

$$d\tilde{X}_t = -r\, e^{-rt}\, X_t\, dt + e^{-rt}\, dX_t \tag{3.6}$$

$$= -r\, e^{-rt}\, X_t\, dt + e^{-rt}\, X_t\, (c\, dt + \sigma\, dW_t)$$

$$= \sigma\, \tilde{X}_t \left(\frac{c-r}{\sigma}\, dt + \, dW_t \right) := \sigma\, \tilde{X}_t\, d\tilde{W}_t \tag{3.7}$$

con la siguiente definición

$$\tilde{W}_t := W_t + \left(\frac{c-r}{\sigma} \right) t.$$

Entonces nos encontramos bajo las hipótesis del teorema de Girsanov, por lo tanto existe una medida Q bajo la cual $\tilde{W}_t$ es un movimiento browniano y la solución de la ecuación es una martingala respecto a la filtración natural browniana. Mediante el cálculo integral de Itô sabemos que es

$$\tilde{X}_t = \tilde{X}_0\, e^{-0{,}5\sigma^2 t + \sigma \tilde{W}_t}.$$

Por consiguiente obtenemos

$$X_t = X_0\, e^{(r-0{,}5\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}.$$

Teorema 8. *Este cambio de medida nos permite ver el valor del portafolio* $\forall\, t \in [0,T]$ *con condición final* $h(X_T) = V_T$ *donde* $h(x)$ *es un reclamo contingente.*

$$V_t = \mathbf{E}_{\mathrm{Q}}\big(e^{-r(T-t)}\, h(X_T) | \mathcal{F}_t\big).$$

Demostración. Sea el proceso

$$\tilde{V}_t = e^{-rt}\, V_t = e^{-rt}\, (a_t X_t + b_t \beta_t).$$

Aplicamos el lema de Itô a $\tilde{V}_t$ y obtenemos

$$d\tilde{V}_t = -r\, e^{-rt}\, V_t\, dt + e^{-rt}\, dV_t = -r\, \tilde{V}_t\, dt + e^{-rt}\, dV_t.$$

También utilizamos que $\{a_t, b_t\}$ es auto-financiante junto con la ecuación (3.6)

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= -r\, e^{-rt}(a_t X_t + b_t \beta_t)\, dt + e^{-rt}(a_t\, dX_t + b_t\, d\beta_t) \\ &= a_t\, (-r\, e^{-rt}\, X_t\, dt + e^{-rt}\, dX_t) = a_t\, d\tilde{X}_t. \end{aligned} \tag{3.8}$$

De las ecuaciones (3.7), (3.8) y $V_0 = \tilde{V}_0$ obtenemos que

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t a_s\, d\tilde{X}_s = V_0 + \int_0^t \sigma\, a_s\, \tilde{X}_s\, d\tilde{W}_s \tag{3.9}$$

entonces $\tilde{V}_t$ es una martingala con respecto a la filtración $\mathcal{F}_t$, bajo la medida Q y podemos aplicar las propiedades de esperanza condicional. Por lo tanto $\tilde{V}_t = \mathbf{E}_{\mathrm{Q}}\big(\tilde{V}_T|\mathcal{F}_t\big)$ pero también sabemos que $\tilde{V}_T = e^{-rT}V_T = e^{-rt}h(X_T)$. Combinando estas dos ecuaciones obtenemos

$$e^{-rt}\, V_t = \mathbf{E}_{\mathrm{Q}}\big(e^{-rT}\, h(X_T)|\mathcal{F}_t\big)$$

lo que implica

$$V_t = \mathbf{E}_{\mathrm{Q}}\big(e^{-r(T-t)}\, h(X_T)|\mathcal{F}_t\big).$$

$\square$

Queremos aplicar este teorema al precio de una opción de compra europea con el objetivo de obtener la fórmula de Black-Scholes. Por lo tanto nuestro reclamo contingente es $h(x) = (x-K)^+ = \text{máx}(0, x-K)$.

Usaremos la notación $\theta := T - t$ para $t \in [0, T]$. Además sabemos que

$$\begin{aligned} X_T = X_0\, e^{(r-0{,}5\sigma^2)T+\sigma\tilde{W}_T} &= X_0\, e^{\sigma(\tilde{W}_T-\tilde{W}_t)+\sigma\tilde{W}_t}\, e^{(r-0{,}5\sigma^2)(T-t)+(r-0{,}5\sigma^2)t} \\ &= X_0\, e^{(r-0{,}5\sigma^2)t+\sigma\tilde{W}_t}\, e^{\sigma(\tilde{W}_T-\tilde{W}_t)+(r-0{,}5\sigma^2)(T-t)} \\ &= X_t\, e^{\sigma(\tilde{W}_T-\tilde{W}_t)+(r-0{,}5\sigma^2)(T-t)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Observación: usaremos una propiedad de la esperanza condicional que dice que si X es independiente de $\mathcal{F}$ y el proceso estocástico G es adaptado a $\mathcal{F}$ entonces para cualquier función $h(x, y)$ se cumple

$$\mathbf{E}\big(h(X,G)|\mathcal{F}\big) = \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}_{\mathrm{X}}\big(h(X,G)\big)|\mathcal{F}\Big)$$

donde $\mathbf{E}_{\mathrm{X}}\big(h(X,G)\big)$ significa que dejamos fijo G y tomamos la esperanza con respecto a X.

Por el teorema y por la ecuación (3.10) se cumple

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbf{E}_{\mathrm{Q}}\big(e^{-r\theta}\ h(X_T)|\mathcal{F}_t\big) \\ &= \mathbf{E}_{\mathrm{Q}}\Big(e^{-r\theta}\ h\big(X_t\ e^{\sigma(\tilde{W}_T-\tilde{W}_t)+(r-0{,}5\sigma^2)\theta}\big)|\mathcal{F}_t\Big). \end{aligned}$$

Pero X_t es $\mathcal{F}_t$ -medible entonces la podemos tratar como una constante también bajo Q, $\tilde{W}_T - \tilde{W}_t$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ y tiene distibución $\mathcal{N}(0,\theta)$.
Aplicando la observación antes mencionada obtenemos

$$V_t = f(t, X_t) \quad \textit{donde} \;\; f(t,x) = e^{-rt}\int_{-\infty}^{\infty} h\big(x\ e^{(r-0{,}5\sigma^2)\theta+\sigma y\sqrt{\theta}}\big)\,\varphi(y)\,dy$$

y $\varphi(y)$ denota la densidad de la $\mathcal{N}(0,1)$.
Sustituyendo en esta ecuación la defininción de $h(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\Big(x\ e^{-0{,}5\sigma^2\theta+\sigma y\sqrt{\theta}} - K\ e^{-r\theta}\Big)^{+}\varphi(y)\,dy \\ &= \int_{-w}^{\infty}\Big(x\ e^{-0{,}5\sigma^2\theta+\sigma y\sqrt{\theta}} - K\ e^{-r\theta}\Big)\varphi(y)\,dy \\ &= x\ \Phi(z) - K\ e^{-r\theta}\ \Phi(w) \end{aligned}$$

donde

$$z = \frac{\ln(x/K) + (r+0{,}5\sigma^2)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}, \qquad w = z - \sigma\sqrt{\theta}$$

y $\Phi(x),\ x \in \mathbb{R}$ es la distribución de la función normal estándar.

Concluimos que esta ecuación en $t = 0$ es la fórmula de Black-Scholes.

Capítulo 4

Volatilidad Implícita

4.1. Volatilidad

La volatilidad es la desviación estándar de la variación del valor de un activo financiero en un período de tiempo determinado. La utilidad es medir el riesgo que tienen los precios de los activos. Cuando el activo empieza a moverse a gran velocidad, tanto al alza como a la baja, se dice que la volatilidad del mercado de este activo está subiendo, afectando dicha variación a los precios de las opciones tanto de compra como de venta.

Debido a la importancia que la volatilidad tiene en el precio de la opción, lo que al inversor del mercado le interesa conocer es la posible evolución futura de esta variable, pues de su conocimiento dependen la correcta valoración de la opción y las posibles ganancias que se puedan producir derivadas de los errores que existen sobre las expectativas de volatilidad que tengan los demás agentes financieros. Pero la volatilidad futura no la conocemos de antemano, por esta razón es de gran utilidad aproximarla o predecirla a través de la información pasada y presente que se encuentra disponible en el mercado. Existen dos métodos de estimación que se denominan volatilidad histórica y volatilidad implícita.

La volatilidad histórica es una medida estadística que refleja el comportamiento de los movimientos de precios en el pasado. Depende fundamentalmente del período de tiempo y del intervalo de precio elegido para determinarla. En este método se considera que el pasado va a influir determinantemente en el futuro. La volatilidad implícita es el motivo de la próxima sección.

4.2. Volatilidad Implícita

En la fórmula de Black-Scholes la única variable no conocida es la volatilidad. Lo que sucede es que el mercado asume una volatilidad diferente a la volatilidad histórica. La forma de resolver este problema es no utilizar la fórmula de Black-Scholes con el fin de obtener el precio de la opción, sino utilizarla para encontrar la volatilidad del mercado.

Entonces la volatilidad implícita la podemos definir como la volatilidad inferida del precio de las opciones que se negocian en el mercado siendo conocidas el resto de las variables que intervienen en el cálculo del valor teórico de la opción. Una de las características fundamentales de esta volatilidad es que no es única, depende del precio del ejercicio que se elija como también del tipo de opción que sea (compra o venta). Dado que la fórmula de Black-Scholes no se puede invertir con el fin de despejar la volatilidad, el cálculo se realiza mediante una iteración.

En la próxima sección veremos una aplicación de la fórmula de Black-Scholes con el objetivo de calcular la volatilidad implícita en el mercado de opciones del Índice Bovespa. El método de iteración que utilizaremos es Newton-Raphson y lo calcularemos en un programa que elaboramos simulando este método en el software libre R.

4.3. Aplicación al Índice Bovespa

Un índice es un número abstracto que se construye con distintos componentes para seguir la evolución de ellos en su conjunto. Dentro de este índice se pondera la participación de las partes en el mismo según distintos criterios donde la ponderación significa el peso relativo de cada uno de sus componentes. Por lo tanto un índice es un portafolio ficticio compuesto de ciertos activos en determinadas cantidades, de manera tal que, al valuarse sus componentes según el precio del mercado en cada instante de tiempo, el valor de ese portafolio es el valor del índice.

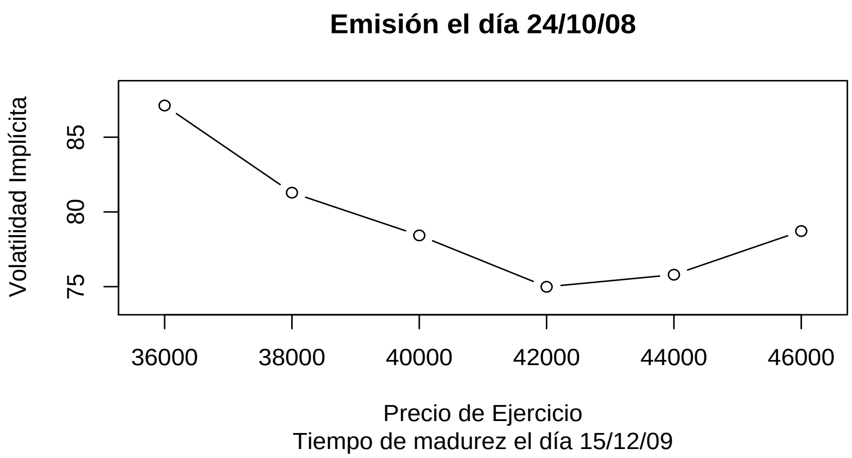
El Índice Bovespa, con el cual trabajaremos, es el más importante indicador del desempeño medio de las cotizaciones del mercado de acciones de Brasil. Las características más importantes de este índice son su confiabilidad, que tiene una metodología de fácil acompañamiento por el mercado y esta no ha sufrido modificaciones desde su implementación en 1968.

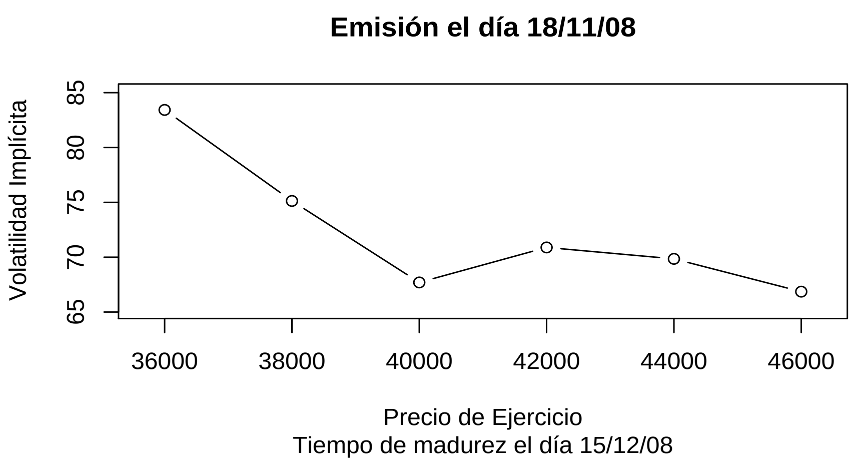
En las siguientes tablas calculamos, mediante el programa elaborado, la volatilidad implícita del Índice Bovespa en cada precio de ejercicio para los días 24/10/08 y 18/11/08 con tiempo de madurez el día 15/12/08, tasa de interés Senit (de referencia) 13.75 % anual y para los días 19/12/08 y 19/01/09 con tiempo de madurez el día 16/02/09, tasa de interés Senit 13.75 % y 13.25 % anual respectivamente; cotizando a 31481.55 el día 24/10/08, 34094.66 el día 18/11/08, 39131.23 el día 19/12/08 y 38828.32 el día 19/01/09.

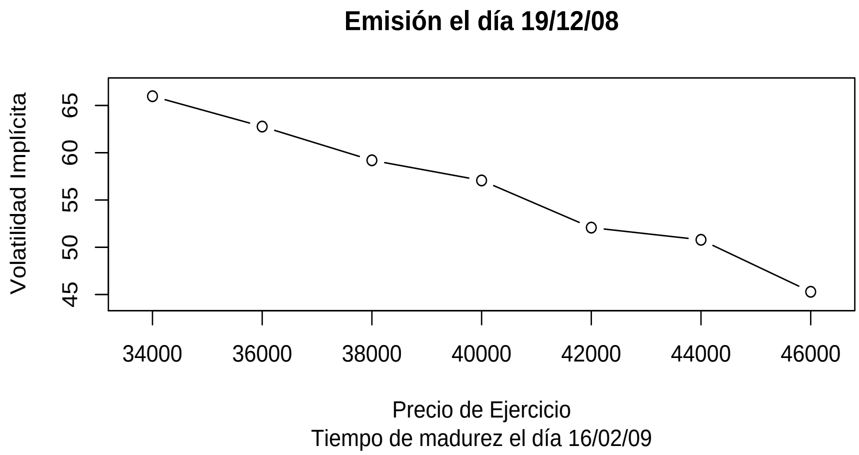
Emisión	**P. del ejercicio**	**P. de la opción**	**Vol. Imp.**
24/10/08	36000	2680	87.12
24/10/08	38000	1885	81.29
24/10/08	40000	1350	78.43
24/10/08	42000	910	74.99
24/10/08	44000	700	75.80
24/10/08	46000	595	78.72
18/11/08	36000	2400	83.43
18/11/08	38000	1455	75.13
18/11/08	40000	770	67.70
18/11/08	42000	550	70.89
18/11/08	44000	325	69.85
18/11/08	46000	160	66.86

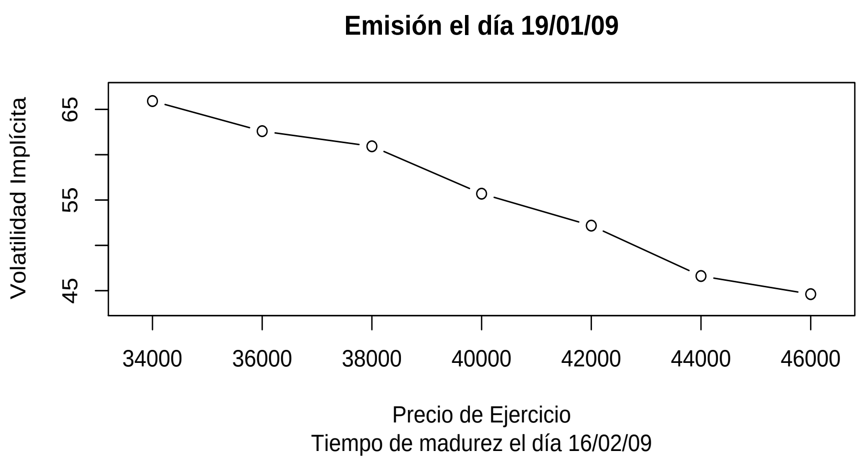
Emisión	**P. del ejercicio**	**P. de la opción**	**Vol. Imp.**
19/12/08	34000	7280	65.98
19/12/08	36000	5835	62.77
19/12/08	38000	4500	59.20
19/12/08	40000	3400	57.07
19/12/08	42000	2300	52.08
19/12/08	44000	1600	50.79
19/12/08	46000	865	45.29
19/01/09	34000	6045	65.92
19/01/09	36000	4540	62.60
19/01/09	38000	3290	60.93
19/01/09	40000	2110	55.70
19/01/09	42000	1250	52.18
19/01/09	44000	580	46.63
19/01/09	46000	265	44.61

Al graficar estos cuatro casos el resultado que obtenemos es:









En este trabajo la volatilidad implícita fue muy alta comparada con otros períodos de tiempo, a causa que en los momentos que tomé los datos para analizar se había declarado una crisis financiera mundial, la cual se refleja en la existencia de mucho riesgo en las inversiones.

Bibliografía

[1] Bachelier, L. (1900) *Théorie de la Spéculation*. Ann. Sci. École Norm. Sup **III-17**, 21-86.

[2] Black, F. and Scholes, M. (1973) *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy **81**, 635-654.

[3] Borodin, A.N. (2005) *Lectures on Stochastic Processes*. Finland.

[4] Brown, R. (1827) *A brief account of microscopical observation on the particles contained in the pollen of plants and on the general existence of actives molecules in organic and inorganic bodies*. Edingburgh new Philosophical Journal. **July-September, 1828**, 358-371.

[5] Lamberton, D. and Lapeyre, B. (1996) *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. France.

[6] Merton, R.C. (1973) *Theory of option pricing*. The Bell Journal of Economics and Mangement Science **4**, 141-183.

[7] Mikosh, T. (1998) *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. Netherlands.