Teoría de inclinación

Índice general

Resumen 5

Abstract 7

Introducción 9

Capítulo 1. Preliminares 11
- Categorías y functores 11
- Exactitud 14
- El Tor y el Ext 15
- Categorías proyectiva e inyectivamente estables 18
- El transpuesto de un módulo 19
- El functor transposición 20
- La dualidad estándar 20
- El functor de Nakayama 21
- La Traslación de Auslander-Reiten 21
- La fórmula de Auslander-Reiten 22
- Sucesiones de Auslander-Reiten 23
- Álgebras de caminos y representaciones 24
- Carcaj de Auslander-Reiten 25

Capítulo 2. Teorías de Torsión 27

Capítulo 3. Módulos inclinantes parciales y módulos inclinantes 43
- *Los módulos APR inclinantes* 56

Capítulo 4. El teorema de inclinación de Brenner-Butler 59

Notaciones 77

Bibliografía 79

Resumen

La idea principal de la *teoría de inclinación* es que, cuando la teoría de representación de un álgebra A es difícil de estudiar, puede ser conveniente reemplazar el álgebra A, por otra álgebra más simple B, y reducir el problema en A a un problema en B. Para eso construimos un A-módulo T, llamado módulo inclinante, tal que si $B = End_A T$, entonces las categorías $modA$ y $modB$ son razonablemente cercanas, pero generalmente no son equivalentes.

El resultado principal de este trabajo, conocido como el teorema de inclinación de Brenner-Butler, muestra que existe una equivalencia entre las subcategorías plenas de los A-módulos de torsión y la de los B-módulos libres de torsión y viceversa.

Palabras claves: teoría de torsión, módulo inclinante, teoría de inclinación.

Abstract

The main idea of tilting theory is that, when the representation theory of an algebra A is difficult to study, it may be convenient to replace A by another simpler algebra B, and to reduce the problem on A to a problem on B. For that we construct an A-module T, called a tilting module, such that if $B = End_A T$, then the categories mod$A$ and mod$B$ are reasonably close to each other, but generally not equivalent.

The main result of this work, known as tilting theorem of Brenner-Butler, shows that an equivalence between the full subcategories of torsion A-modules and free B-modules torsion and viceversa exists.

Key words: torsion theory, tilting module, tilting theory.

Introducción

La teoría de inclinación es una de las principales herramientas de la teoría de representaciones de álgebras. Se originó en 1980 con el estudio de los funtores de reflexión.

Hoy en día juega un importante rol en varias ramas del álgebra moderna como son el álgebra homotópica, la geometría algebraica y la teoría de Lie.

El concepto de módulo inclinante fue introducido por Brenner y Butler en 1980, pero el generalmente aceptado hoy en día fue formulado por Happel y Ringel en 1982.

Este trabajo se basa en unas notas de I. Assem [1] y en el artículo de D. Happel y C. Ringel "*Tilted algebras*"[5].

En el capítulo 1 se introducen las herramientas básicas para el desarrollo de este trabajo, como son los funtores Ext, Tor, Hom y producto tensorial. También se enuncian algunos resultados que ya son conocidos pero que usaremos frecuentemente.

En el capítulo 2 definimos lo que son las teorías de torsión. Estas surgieron como generalización del concepto de grupo abeliano ($\mathbb{Z}$ módulo) de torsión para álgebras arbitrarias.

Una teoría de torsión es un par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de clases de módulos que cumplen que no existen morfismos no nulos entre los objetos de $\mathcal{T}$ y los objetos de $\mathcal{F}$, y además $\mathcal{T}$ y $\mathcal{F}$ son las clases de módulos más grandes con esa propiedad. A $\mathcal{T}$ se le llama clase de torsión y a $\mathcal{F}$ clase libre de torsión.

Vamos a probar que bajo ciertas hipótesis, dado un módulo cualquiera T, el conjunto de los módulos generado por él ($Gen(T)$), forma una clase de torsión y que el conjunto de los módulos cogenerados por él ($Cogen(T)$) forma una clase libre de torsión.

En el capítulo 3 definimos lo que son los módulos inclinantes parciales y los módulos inclinantes. Veremos que cuando T es inclinante las teorías de torsión inducidas por $Gen(T)$ y

$Cogen(\tau T)$ (donde τT es el trasladado de Auslander Reiten de T) coinciden y la llamaremos teoría de torsión inducida por T.

En el capítulo 4 probamos el resultado principal de este trabajo, conocido como el teorema de inclinación de Brenner-Butler. Básicamente lo que dice el teorema es que si consideramos un álgebra A y tomamos el álgebra B de endomorfismos sobre A de un módulo inclinante T_A, entonces “ciertas” subcategorías de las categorías de A módulos y B módulos, que forman teorías de torsión en $modA$ y $modB$, son equivalentes.

A lo largo de este trabajo A será un álgebra de dimensión finita, asociativa, con unidad, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k.

CAPíTULO 1

Preliminares

Categorías y functores

Una **categoría** es una terna $\mathcal{C} = (Ob\,\mathcal{C}, Hom\,\mathcal{C}, \circ)$, donde $Ob\,\mathcal{C}$ se llama la clase de los objetos de $\mathcal{C}$, $Hom\,\mathcal{C}$ es la clase de los morfismos de $\mathcal{C}$ y $\circ$ es una operación sobre los morfismos de $\mathcal{C}$ que satisface las siguientes condiciones:

(a) Para cada par de objetos $X, Y \in Ob\,\mathcal{C}$, asociamos un conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, llamado el conjunto de los morfismos de X a Y, tal que si $(X,Y) \neq (Z,U)$ entonces la intersección de los conjuntos $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ y $Hom_{\mathcal{C}}(Z,U)$ es vacía.

(b) Para cada terna de objetos $X, Y, Z \in Ob\,\mathcal{C}$, está definida la operación composición $\circ : Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X,Z)$, $(g,f) \mapsto g \circ f$, y tiene las siguientes propiedades:

1. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ para toda $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ y $h \in Hom_{\mathcal{C}}(Z,U)$.
2. Para cada $X \in Ob\,\mathcal{C}$, existe un único elemento $1_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$, llamado el morfismo identidad de X, tal que si $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ y $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Z,X)$ entonces $f \circ 1_X = f$ y $1_X \circ g = g$.

Una categoría $\mathcal{C}'$ es una **subcategoría** de $\mathcal{C}$ si cumple:

(a) Los objetos de $\mathcal{C}'$ son una subclase de los objetos de $\mathcal{C}$.

(b) Si $X, Y \in Ob\,\mathcal{C}'$, entonces $Hom_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

(c) La composición de morfismos en $\mathcal{C}'$ es la misma de $\mathcal{C}$.

(d) Para cada objeto X de $\mathcal{C}'$, el morfismo identidad $1'_X$ en $Hom_{\mathcal{C}'}(X,X)$ coincide con el morfismo identidad 1_X en $Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$.

Una subcategoría $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ se dice **plena** si $Hom_{\mathcal{C}'}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ para todo $X, Y \in Ob\,\mathcal{C}'$.

Dada un álgebra A de dimensión finita, asociativa, con unidad, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, nosotros nos interesaremos en la categoría de A-módulos a derecha $ModA$ y la subcategoría plena $modA$ de $ModA$ formada por los A-módulos a derecha finitamente generados.

Dado un A módulo M, denotamos por $addM$ a la subcategoría plena de $modA$ formada por todas las sumas directas de sumandos directos de M.

Un **functor covariante** $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ (donde $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son dos categorías) asigna a cada objeto $X \in Ob\,\mathcal{C}$ un objeto $T(X) \in Ob\,\mathcal{C}'$, y a cada morfismo $h : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ un morfismo $T(h) : T(X) \to T(Y)$ en $\mathcal{C}'$, tal que satisface las siguientes condiciones:

(a) $T(1_X) = 1_{T(X)}$ para todo $X \in Ob\,\mathcal{C}$.
(b) Para cada par de morfismos $X \xrightarrow{f} Y$ y $Y \xrightarrow{g} Z$ en $\mathcal{C}$ se cumple $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.

Un **functor contravariante** $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ (donde $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son dos categorías) asigna a cada objeto $X \in Ob\,\mathcal{C}$ un objeto $T(X) \in Ob\,\mathcal{C}'$, y a cada morfismo $h : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ un morfismo $T(h) : T(Y) \to T(X)$ en $\mathcal{C}'$, tal que satisface las siguientes condiciones:

(a) $T(1_X) = 1_{T(X)}$ para todo $X \in Ob\,\mathcal{C}$.
(b) Para cada par de morfismos $X \xrightarrow{f} Y$ y $Y \xrightarrow{g} Z$ en $\mathcal{C}$ se cumple $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$.

Si $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ y $T' : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ son functores, definimos su composición $T'T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$ como sigue: para cada objeto $X \in Ob\,\mathcal{C}$, $T'T(X) = T'(T(X))$ y para cada morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathcal{C}$, $T'T(f) = T'(T(f))$.

Sean $T, T' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ functores. Un **morfismo functorial** o una transformación natural de functores $\Psi : T \to T'$ es una familia $\Psi = \{\psi_X\}_{X \in Ob\,\mathcal{C}}$ de morfismos $\psi_X : T(X) \to T'(X)$ tal que para cualquier morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathcal{C}$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[d, "T(f)"] & T'(X) \arrow[d, "T'(f)"] \\
T(Y) \arrow[r, "\psi_Y"] & T'(Y)
\end{tikzcd}$$

A Ψ se le llama **isomorfismo functorial** o equivalencia natural de functores si, para cualquier $X \in Ob\,\mathcal{C}$, el morfismo $\psi_X : T(X) \to T'(X)$ es un isomorfismo.

Si existe un isomorfismo functorial $\Psi : T \to T'$, entonces decimos que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son **categorías equivalentes**.

Un functor covariante $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es una **equivalencia de categorías** si existe un functor $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ y dos isomorfismos functoriales $\psi : 1_{\mathcal{C}} \to FT$ y $\phi : 1_{\mathcal{C}'} \to TF$, donde $1_{\mathcal{C}'}$ y $1_{\mathcal{C}}$ son los functores identidad en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ respectivamente.

En este caso el functor F es llamado la **quasi-inversa** de T.

Un functor contravariante $D : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, el cual es una equivalencia de categorías es llamado una **dualidad**.

Los functores Hom. Sea M un $B - A$ bimódulo. Definimos el Hom-functor covariante $\mathrm{Hom_A}({}_BM_A, -) : modA \to modB$ que asocia a cada $X_A \in modA$ el B-módulo a derecha $\mathrm{Hom_A}({}_BM_A, X_A)$, donde la multiplicación $(f, b) \mapsto fb$ esta dada por: $(fb)(m) = f(bm)\ \forall f \in \mathrm{Hom_A}({}_BM_A, X_A), \forall b \in B$ y $\forall m \in M$; y a cada morfismo $\varphi : X_A \to Y_A$ de A-módulos le asocia el morfismo de B módulos a derecha $\mathrm{Hom_A}({}_BM_A, \varphi) : \mathrm{Hom_A}({}_BM_A, X_A) \to \mathrm{Hom_A}({}_BM_A, Y_A)$ tal que $f \mapsto \varphi \circ f$.

Definimos el Hom-functor contravariante $\mathrm{Hom_A}(-, {}_BM_A) : modA \to modB^{op}$ que asocia a cada $X_A \in modA$ el B-módulo a izquierda $\mathrm{Hom_A}(X_A, {}_BM_A)$ y a cada morfismo $\psi : X_A \to Y_A$ en $modA$ el morfismo de A-módulos a izquierda $\mathrm{Hom_A}(\psi, {}_BM_A) : \mathrm{Hom_A}(Y_A, {}_BM_A) \to \mathrm{Hom_A}(X_A, {}_BM_A)$ tal que $f \mapsto f \circ \psi$.

Los functores producto tensorial. Dado un $B - A$ bimódulo ${}_BM_A$ se define el functor covariante $(-) \otimes_B M : ModB \to ModA$, como el que asigna a cada B-módulo a derecha X_B el producto tensorial $X \otimes_B M_A$, con la estructura natural de A-módulo a derecha; y a cada morfismo ψ de B-módulos a derecha, el morfismo de A-módulos a derecha $\psi \otimes_B 1_M$, donde $\psi \otimes_B 1_M(x \otimes m) = \psi(x) \otimes m$.

De forma similar definimos el functor covariante $M \otimes_A (-) : ModA^{op} \to ModB^{op}$, como el que asigna a cada A-módulo a izquierda ${}_AY$ el producto tensorial ${}_BM \otimes_A Y$, con la estructura natural de B-módulo a izquierda; y a cada morfismo ψ de A-módulos a izquierda, el morfismo de B-módulos a izquierda $1_M \otimes_A \psi$, donde $1_M \otimes_A \psi(m \otimes y) = \psi(m) \otimes y$.

Lema de Adjunción.

Lema 1.1. *Sea M un $B-A$ bimódulo, X un B-módulo (a derecha) y Z un A-módulo (a derecha), entonces existe un isomorfismo:*

$$\mathrm{Hom_A}(X \otimes_B M_A, Z_A) \overset{F}{\cong} \mathrm{Hom_B(X_B, Hom_A({}_BM_A, Z_A))}$$

Demostración:

F asigna a cada morfismo de A-módulos $\varphi : X \otimes_B M_A \to Z_A$ el morfismo de B-módulos adjunto $\overline{\varphi} : X_B \to \mathrm{Hom_A}({}_BM_A, Z_A)$ definido por la fórmula $\overline{\varphi}(x)(m) = \varphi(x \otimes m)$ donde $x \in X$ y $m \in M$.

La inversa de $\varphi \overset{F}{\mapsto} \overline{\varphi}$ está definida por: $\varphi \mapsto (x \otimes m \mapsto \varphi(x)(m))$, donde $x \in X$ y $m \in M$.

Se puede ver fácilmente que $F(k\varphi) = kF(\varphi)$, por lo cual F es un isomorfismo de k espacios vectoriales.

$\square$

Exactitud

Un functor covariante F es **exacto a izquierda** si la exactitud de $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ implica la exactitud de $0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C)$; y es **exacto a derecha** si la exactitud de $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ implica la exactitud de $F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C) \longrightarrow 0$.

Existe una definición análoga para functores contravariantes.

Un functor contravariante F es **exacto a izquierda** si la exactitud de $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ implica la exactitud de $0 \longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(\beta)} F(B) \xrightarrow{F(\alpha)} F(A)$; y es **exacto a derecha** si la exactitud de $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ implica la exactitud de $F(C) \xrightarrow{F(\beta)} F(B) \xrightarrow{F(\alpha)} F(A) \longrightarrow 0$.

Un functor es **exacto** si es exacto a izquierda y a derecha.

El Tor y el Ext

Sean k un cuerpo y A una k-álgebra de dimensión finita sobre k.

Observemos que como A es un álgebra de Artin, podemos considerar resoluciones proyectivas y resoluciones inyectivas.

Un **complejo de cadenas** en la categoría $ModA$ es una sucesión

$$C_* : \ \cdots \to C_{n+2} \overset{d_{n+1}}{\to} C_{n+1} \overset{d_n}{\to} C_n \overset{d_{n-1}}{\to} C_{n-1} \to \cdots \overset{d_2}{\to} C_1 \overset{d_1}{\to} C_0 \overset{d_0}{\to} 0$$

de A-módulos a derecha conectados por morfismos de A-módulos d_i tales que $d_n \circ d_{n+1} = 0$ para todo $n \geq 0$.

Para cada $n \geq 0$, el **n-ésimo módulo de homología** de la cadena de complejos C_* es $H_n(C_*) = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$.

Un **complejo de cocadenas** en la categoría $ModA$ es una sucesión

$$C^* : 0 \overset{d^0}{\to} C^0 \overset{d^1}{\to} C^1 \overset{d^2}{\to} \cdots \to C^{n-1} \overset{d^{n-1}}{\to} C^n \overset{d^n}{\to} C^{n+1} \overset{d^{n+1}}{\to} C^{n+2} \to \cdots$$

de A-módulos a derecha conectados por morfismos de A-módulos d^i tales que $d^{n+1} \circ d^n = 0$ para todo $n \geq 0$.

Para cada $n \geq 0$, el **n-ésimo módulo de cohomología** del complejo de cocadenas C^* es $H^n(C^*) = \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}$.

Para cada $m \geq 0$, el **m-ésimo bifunctor de extensión** $\mathrm{Ext}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{A}} : \mathrm{ModA} \times \mathrm{ModA} \to \mathrm{Modk}$ es definido como sigue. Dados dos módulos M y N en $ModA$, tomamos una resolución inyectiva I^* de N.

$$I^* : \ 0 \to N \overset{d^0}{\to} I_0 \overset{d^1}{\to} I_1 \overset{d^2}{\to} I_2 \to \cdots$$

y construimos el complejo de cocadenas inducido:

$$\mathrm{Hom_A}(M, I^*) : \ 0 \to \mathrm{Hom_A}(M, I_0) \overset{d_1^*}{\to} \mathrm{Hom_A}(M, I_1) \overset{d_2^*}{\to} \mathrm{Hom_A}(M, I_2) \overset{d_3^*}{\to} \cdots$$

donde $d_i^* = \mathrm{Hom_A}(M, d^i)$.

Entonces definimos $\mathrm{Ext}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ como el m-ésimo módulo de cohomología del complejo de cocadenas $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M, I^*)$; o sea

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N}) = \mathrm{H}^{\mathrm{m}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{I}^*)) = \frac{\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^*_{\mathrm{m}+1}}{\mathrm{Im}\,\mathrm{d}^*_{\mathrm{m}}}$$

donde fijamos $d^*_0 = 0$.

Teorema 1.2. *Sean M y N dos A-módulos a derecha. Entonces cualquier sucesión exacta corta $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ en $ModA$ induce dos sucesiones exactas largas:*

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(Z,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(Y,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(X,N) \xrightarrow{\delta_0} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(Z,N) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(Y,N) \to \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{m-1}} \mathrm{Ext}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Z},\mathrm{N}) \to \mathrm{Ext}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Y},\mathrm{N}) \to \mathrm{Ext}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X},\mathrm{N}) \xrightarrow{\delta_{\mathrm{m}}} \mathrm{Ext}^{\mathrm{m}+1}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Z},\mathrm{N}) \to \cdots$$

y

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M,Z) \xrightarrow{\delta_0} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(M,X) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(M,Y) \to \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{m-1}} \mathrm{Ext}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{X}) \to \mathrm{Ext}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{Y}) \to \mathrm{Ext}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{Z}) \xrightarrow{\delta_{\mathrm{m}}} \mathrm{Ext}^{\mathrm{m}+1}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{X}) \to \cdots$$

□

Teorema 1.3. *Sea N un A-módulo, entonces son equivalentes:*

1. *N es inyectivo.*
2. $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(-,N) = 0$.
3. $\mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{A}}(-,\mathrm{N}) = 0$*, para todo $n \geq 1$.*

□

Teorema 1.4. *Sea M un A-módulo, entonces son equivalentes:*

1. *M es proyectivo.*
2. $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(M,-) = 0$.
3. $\mathrm{Ext}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},-) = 0$*, para todo $n \geq 1$.*

□

Teorema 1.5. *Sea M un A-módulo y $n \geq 0$, entonces son equivalentes:*

1. *$dpM \leq n$*
2. $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},-) = 0$*, para todo $i > n$.*

□

Para cada $m \geq 0$, el **m-ésimo bifunctor de torsión** $\mathrm{Tor}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{A}} : \mathrm{ModA} \times \mathrm{ModA}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Modk}$ es definido como sigue. Dado M un A-módulo a derecha y N un A-módulo a izquierda, tomamos una resolución proyectiva P_* de M.

$$P_* : \ \cdots \to P_m \stackrel{h_m}{\to} P_{m-1} \to \cdots \to P_2 \stackrel{h_2}{\to} P_1 \stackrel{h_1}{\to} P_0 \stackrel{h_0}{\to} M \to 0$$

y consideramos la cadena de complejos inducida:

$$P_* \otimes_A N : \ \cdots \to P_m \otimes_A N \stackrel{h_m \otimes 1}{\to} P_{m-1} \otimes_A N \to \cdots \to P_1 \otimes_A N \stackrel{h_1 \otimes 1}{\to} P_0 \otimes_A N \to 0.$$

Definimos $\mathrm{Tor}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ como el m-ésimo módulo de homología de la cadena de complejos $P_* \otimes_A N$; esto es

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \mathrm{H}_{\mathrm{m}}(\mathrm{P}_* \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}) = \frac{\mathrm{Ker}\, \mathrm{h}_{\mathrm{m}} \otimes 1}{\mathrm{Im}\, \mathrm{h}_{\mathrm{m}+1} \otimes 1}.$$

Teorema 1.6. *Sea A una k-álgebra, entonces:*

1. *Si M es un A-módulo a derecha, cualquier sucesión exacta corta $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ de A-módulos a derecha induce una sucesión exacta larga*

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_{\mathrm{m}+1}^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{Z}) \to \mathrm{Tor}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{X}) \to \mathrm{Tor}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{Y}) \to \mathrm{Tor}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{Z}) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{X}) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{Y}) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{Z}) \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{X} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{Y} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{Z} \to 0$$

2. *Si N es un A-módulo a izquierda, cualquier sucesión exacta corta $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ de A-módulos a izquierda induce una sucesión exacta larga*

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_{\mathrm{m}+1}^{\mathrm{A}}(\mathrm{Z}, \mathrm{N}) \to \mathrm{Tor}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{X}, \mathrm{N}) \to \mathrm{Tor}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{Y}, \mathrm{N}) \to \mathrm{Tor}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{Z}, \mathrm{N}) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{X}, \mathrm{N}) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{Y}, \mathrm{N}) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{Z}, \mathrm{N}) \to \mathrm{X} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \to \mathrm{Y} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \to \mathrm{Z} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \to 0$$

□

Teorema 1.7. *Sea N un A-módulo a izquierda, entonces son equivalentes:*

1. *N es proyectivo.*
2. $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(-, \mathrm{N}) = 0$.
3. $\mathrm{Tor}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{A}}(-, \mathrm{N}) = 0$, *para todo $n \geq 1$.*

□

Teorema 1.8. *Sea M un A-módulo a derecha, entonces son equivalentes:*

1. *M es proyectivo.*
2. $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, -) = 0$.
3. $\mathrm{Tor}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, -) = 0$, *para todo $n \geq 1$.*

$\square$

Proposición 1.9. *Sean k un cuerpo, A una k-álgebra de dimensión finita, L y M dos módulos finitamente generados. Entonces para todo $n \geq 0$ existen isomorfismos functoriales:*

$$\mathrm{Tor}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{DM}) \cong \mathrm{DExt}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{n}}(\mathrm{L}, \mathrm{M}).$$

$\square$

Categorías proyectiva e inyectivamente estables

Dados dos A-módulos M y N, sea $\mathcal{P}(M, N)$ el subconjunto de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M, N)$ formado por todos los morfimos que se factorizan a través de un A-módulo proyectivo. Veamos que esto define un ideal $\mathcal{P}$ en la categoría $\mathrm{mod}A$, es decir:

- Primero, dados dos módulos M y N, veamos que $\mathcal{P}(M, N)$ es un subespacio del k-espacio vectorial $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M, N)$.
  - Si $f, f' \in \mathcal{P}(M, N)$, entonces f y f' se factorizan a través de un proyectivo P y uno P' respectivamente. O sea que existen morfismos h, g, h', g' de forma que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & N \\ P \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"'] & N \\ P' \arrow[ur, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

    Entonces $f + f' = hg + h'g' = [h, h'][g, g']^t$ se factoriza a través del proyectivo $P \oplus P'$.
  - Si $\lambda \in k$ y $f \in \mathcal{P}(M, N)$, entonces $\lambda f \in \mathcal{P}(M, N)$.
- Si $f \in \mathcal{P}(L, M)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M, N)$, entonces $gf \in \mathcal{P}(L, N)$ y similarmente si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(L, M)$ y $g \in \mathcal{P}(M, N)$, entonces $gf \in \mathcal{P}(L, N)$.

Como $\mathcal{P}$ es un ideal podemos considerar la categoría cociente $\underline{mod}A = \frac{modA}{\mathcal{P}}$ llamada **categoría proyectivamente estable**.

Sus objetos son los mismos objetos de mod$A$, pero el k-espacio vectorial $\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N)$ de los morfismos de M a N en $\underline{mod}A$ está definido por el cociente

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) = \mathrm{Hom_A}(M,N)/\,\mathcal{P}(M,N),$$

con la composición de morfismos inducida por la composición en mod$A$.

Dualmente se puede construir un ideal $\mathcal{I}$ en mod$A$ considerando para cada par (M,N) de A módulos, el k-subespacio $\mathcal{I}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ formado por todos los morfismos que se factorizan a través de un módulo inyectivo. La categoría cociente $\overline{mod}A = modA/\mathcal{I}$ es llamada la **categoría inyectivamente estable**. Sus objetos son los mismos de mod$A$, pero el k-espacio vectorial $\overline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) = \mathrm{Hom_A}(M,N)/\mathcal{I}(M,N)$, con la composición de morfismos inducida por la composición en mod$A$.

El transpuesto de un módulo

Consideremos el functor dual $(-)^t = \mathrm{Hom_A}(-,A) : modA \to modA^{op}$.

Notemos que si P_A es un A-módulo a derecha proyectivo, entonces $P^t = \mathrm{Hom_A}(P,A)$ es un A-módulo a izquierda proyectivo, pues si P_A fuera indescomponible $P_A = eA$ con $e \in A$ idempotente primitivo, con lo cual $P^t = \mathrm{Hom_A}(Ae,A) \cong Ae$; por la aditividad de $(-)^t$ se deduce que se cumple para cualquier proyectivo.

Se puede ver que el morfismo evaluación $\varepsilon_M : M \to M^{tt}$ definido por $\varepsilon_M(z)(f) = f(z)$ $(z \in M,\ f \in M^t)$ es functorial en M y es un isomorfismo cuando M es proyectivo. Entonces el functor $(-)^t$ induce una dualidad, también denotada por $(-)^t$, entre la categoría $proyA$ de los A-módulos a derecha proyectivos , y la categoría $proyA^{op}$ de los A-módulos a izquierda proyectivos.

Usaremos esta dualidad para definir una nueva en $\underline{mod}A$.

Comencemos por aproximar a cada módulo M_A por módulos proyectivos. Sea pues $P_1 \overset{p_1}{\to} P_0 \overset{p_0}{\to} M \to 0$ una presentación proyectiva minimal de M (esto es, una sucesión exacta tal que $p_0 : P_0 \to M$ y $p_1 : P_1 \to \mathrm{Ker}\, p_0$ son coberturas proyectivas).

Aplicándole el functor exacto a izquierda y contravariante $(-)^t$, obtenemos una sucesión exacta de A-módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow M^t \xrightarrow{p_o^t} P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \longrightarrow \mathrm{Coker}\, p_1^t \longrightarrow 0$$

Denotaremos al $\operatorname{Coker} p_1^t$ por TrM y lo llamaremos el **transpuesto de M**.

Observemos que el A-módulo TrM está únicamente determinado salvo isomorfismos porque las coberturas proyectivas (y entonces las presentaciones minimales) lo están.

La siguiente proposición muestra las principales propiedades de Tr. Su demostración, al igual que el resto de las que faltan en este capítulo, se puede encontrar en [3].

Propiedades de Tr.

Proposición 1.10. *Sea M un A-módulo indescomponible. Entonces:*

(a) *El A-módulo a izquierda TrM no tiene sumandos directos proyectivos.*
(b) *M es proyectivo si y sólo si $TrM = 0$.*
(c) *Si M no es proyectivo entonces TrM es indescomponible y $Tr(TrM) \cong M$.*
(d) *Si M y N son indescomponibles no proyectivos, entonces $M \cong N$ si y sólo si $TrM \cong TrN$.*

□

El functor transposición

La correspondencia $M \mapsto TrM$ induce una dualidad k-lineal $Tr : \underline{mod}A \to \underline{mod}A^{op}$.

Ésta dualidad Tr es llamada la **transposición**. Transforma A-módulos a derecha en A-módulos a izquierda y recíprocamente.

La dualidad estándar

Sea A una k-álgebra de dimensión finita. Definimos el functor $D : modA \to modA^{op}$ como el que asigna a cada módulo a derecha M en $\mathrm{mod}A$, el k-espacio vectorial dual $M^* = \mathrm{Hom_k(M, k)}$, con la estructura de A-módulo a izquierda dada por la fórmula $(a\varphi)(m) = \varphi(ma)$ para toda $\varphi \in \mathrm{Hom_k(M, k)}$, $a \in A$, $m \in M$ y asigna a cada morfismo de A-módulos $h : M \to N$ el morfismo dual $D(h) = \mathrm{Hom_k(h, k) : D(N) \to D(M)}$ tal que $\varphi \mapsto \varphi \circ h$, de A-módulos a izquierda.

Se cumple que D es una dualidad de categorías, llamada la k-dualidad estándar. La quasi-inversa de la dualidad D es también denotada por $D : modA^{op} \to modA$ y asigna a cada módulo a izquierda Y en $\mathrm{mod}A$, el k-espacio vectorial dual $Y^* = \mathrm{Hom_k(Y, k)}$, con la estructura de A-módulo a derecha dada por la fórmula $(\varphi a)(y) = \varphi(ay)$ para toda $\varphi \in \mathrm{Hom_k(Y,k)}$, $a \in A$, $y \in Y$.

El functor de Nakayama

La composición $\nu = D(-)^t = D\,\mathrm{Hom_A}(-, A) : modA \to modA$ es llamada **el functor de Nakayama**.

ν induce una equivalencia de categorías entre $proyA$ e $inyA$, donde $\nu^{-1} = \mathrm{Hom_A}(DA, -)$ es su quasi-inversa.

La Traslación de Auslander-Reiten

Definimos la traslación de Auslander-Reiten como la composición $\tau = DTr$ y definimos $\tau^{-1} = TrD$.

Propiedades de τ y τ^{-1}.

Proposición 1.11. *Sean M y N indescomponibles. Entonces:*

(a) $\tau M = 0$ *si y sólo si* M *es proyectivo.*
(a') $\tau^{-1}N = 0$ *si y sólo si* N *es inyectivo.*
(b) *Si* M *no es proyectivo, entonces* τM *es indescomponible no inyectivo y* $\tau^{-1}\tau M \cong M$.
(b') *Si* N *no es inyectivo, entonces* $\tau^{-1}N$ *es indescomponible no proyectivo y* $\tau\tau^{-1}N \cong N$.

El próximo resultado relaciona las dimensiones homológicas de un módulo con su trasladado de Auslander-Reiten.

Proposición 1.12. *Sea M un A-módulo. Entonces:*

(a) $dpM \leq 1$ *si y sólo si* $\mathrm{Hom_A}(DA, \tau M) = 0$.
(b) $diM \leq 1$ *si y sólo si* $\mathrm{Hom_A}(\tau^{-1}M, A) = 0$.

Demostración:

Demostraremos sólo (a) pues la prueba de (b) es similar.

Sea $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \to 0$ una presentación proyectiva minimal de M. Aplicándole sucesivamente los functores $(-)^t$ y D obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow DTrM \longrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu_{p_1}} \nu P_0 \xrightarrow{\nu_{p_o}} \nu M \longrightarrow 0$$

Si le aplicamos el functor, exacto a izquierda, $\nu^{-1} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(DA, -)$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \nu^{-1}\tau M \arrow[r] & \nu^{-1}\nu P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \nu^{-1}\nu P_0 \arrow[d, "\cong"] & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} p_1 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "p_1"] & P_0 \arrow[r, "p_0"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces $kerp_1 \cong \nu^{-1}\tau M = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(DA, \tau M)$. Por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(DA, \tau M) = 0$ si y sólo si $\operatorname{Ker} p_1 = 0$, y el $\operatorname{Ker} p_1 = 0$ si y sólo si $dpM \leq 1$.

$\square$

La fórmula de Auslander-Reiten

El siguiente resultado es conocido como la fórmula de Auslander- Reiten.

Teorema 1.13. *Sea A una k-álgebra y M y N dos A-módulos, entonces existen isomorfismos k-lineales*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(M, N) \cong D\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau^{-1}N, M) \cong D\overline{\mathrm{Hom}}_A(N, \tau M)$$

los cuales son functoriales en ambas variables.

$\square$

Corolario 1.14. *Sea A una k-álgebra y M y N dos módulos en $modA$.*

(a) *Si $dpM \leq 1$ y N es arbitrario, entonces existe un isomorfismo k-lineal* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(M, N) \cong D\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(N, \tau M) = 0$.

(b) *$diN \leq 1$ y M es arbitrario, entonces existe un isomorfismo k-lineal* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(M, N) \cong D\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\tau^{-1}N, M) = 0$.

Demostración:

Probaremos (a) pues la prueba de (b) es similar.

Por la fórmula de Auslander-Reiten tenemos un isomorfismo k-lineal $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(M, N) \cong D\overline{\mathrm{Hom}}_A(N, \tau M)$.

Como $dpM \leq 1$, tenemos por la proposición 1.12, que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(DA, \tau M) = 0$. Entonces $\mathcal{I}(N, \tau M) = 0$, ya que todo módulo inyectivo en $modA$ es un sumando directo de $(DA)^d$ para algún d.

Tenemos entonces que $\overline{\mathrm{Hom}}_A(N, \tau M) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(N, \tau M)$, por lo cual $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(M, N) \cong D\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(N, \tau M) = 0$.

□

Sucesiones de Auslander-Reiten

Sea $M \in indA$, decimos que $f : E \to M$ es un **morfismo pozo** en M si:

1. f no es un epimorfismo que se escinde.
2. Si $g : X \to M$ no es un epimorfismo que se escinde, entonces existe $\overline{g} : X \to E$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & M \\ & X \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "\overline{g}"] \end{tikzcd}$$

3. Si $h : E \to E$ es tal que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & M \\ & E \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "h"] \end{tikzcd}$$

   conmuta, entonces $h \in Aut(E)$.

Sea $M \in indA$, decimos que $f : M \to E$ es un **morfismo fuente** en M si:

1. f no es un monomorfismo que se escinde.
2. Si $g : M \to X$ no es un monomorfismo que se escinde, entonces existe $\overline{g} : E \to X$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & E \arrow[dl, "\overline{g}"] \\ X & \end{tikzcd}$$

3. Si $h : E \to E$ es tal que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[dl, "h"] \\ E & \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $h \in Aut(E)$.

Sea $\delta : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta que no se escinde. Decimos que δ es una **sucesión de Auslander-Reiten** (SAR) si:

- $M, N \in indA$.
- f es morfismo fuente en M.
- g es morfismo pozo en N.

El siguiente teorema garantiza la existencia de sucesiones de Auslander-Reiten.

Teorema 1.15. *Sea $M \in indA$ donde A es un álgebra de Artin.*

1. *Si M no es proyectivo, entonces existe una única SAR* $0 \to \tau M \to E \to M \to 0$.
2. *Si M no es inyectivo, entonces existe una única SAR* $0 \to M \to E \to \tau^{-1} M \to 0$.

□

Álgebras de caminos y representaciones

Un **carcaj** Q es una cuaterna (Q_0, Q_1, s, t) formada por dos conjuntos Q_0 (cuyos elementos se llaman vértices) y Q_1 (cuyos elementos se llaman flechas), y dos aplicaciones $s, t : Q_1 \to Q_0$ que asocian a cada flecha α su origen $s(\alpha)$ y su destino $t(\alpha)$, respectivamente.

Un **camino** en Q de longitud n es una composición de n flechas $\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1$ donde $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para todo $i = 1, \cdots n-1$. Además cada vértice del carcaj tiene asociado un camino trivial (de longitud cero).

Si Q es un carcaj cualquiera el **álgebra de caminos** kQ es el álgebra definida en el espacio vectorial con base el conjunto de todos los caminos en Q definiendo el producto entre dos caminos de la siguiente manera:

$$(\alpha_n \cdots \alpha_1)(\beta_m \cdots \beta_1) = \begin{cases} \alpha_n \cdots \alpha_1 \beta_m \cdots \beta_1 & \text{si } t(\beta_m) = s(\alpha_1) \\ 0 & \text{si } t(\beta_m) \neq s(\alpha_1) \end{cases} .$$

Se cumple que todos los caminos triviales forman un conjunto de idempotentes primitivos para el álgebra kQ.

En la teoría de representaciones de álgebras se utiliza frecuentemente el método de representar sobre carcajes. Daremos como referencia el texto [3].

Carcaj de Auslander-Reiten

Un morfismo $f : M \to N$ es **irreducible** si:

1. f no es un monomorfismo que se escinde.
2. f no es un epimorfismo que se escinde.
3. Para toda factorización de f

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & N \\ & X \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

   se tiene que o g es un monomorfismo que se escinde o h es un epimorfismo que se escinde.

Sea A un álgebra. El **carcaj de Auslander-Reiten** de A es el carcaj Γ_A definido como sigue:

1. sus vértices están en correspondencia biunívoca con las clases de isomorfismos de los A-módulos indescomponibles, esto es a cada indescomponible de M le asociamos un vértice $[M]$ de forma que los vértices $[M]$ y $[M']$ sean los mismos si y solo si $M \cong M'$.
2. existe una flecha $[M] \to [M']$ si y sólo si existe un morfismo irreducible $M \to M'$.

CAPíTULO 2

Teorías de Torsión

Definición 2.1. *Una* ***teoría de torsión*** *en modA es un par* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *de clases de módulos tales que:*

(a) $\mathrm{Hom_A}(M, N) = 0$, $\forall M \in \mathcal{T}$ *y* $\forall N \in \mathcal{F}$.
(b) $\mathrm{Hom_A}(M, -)|_{\mathcal{F}} = 0$, *implica* $M \in \mathcal{T}$.
(c) $\mathrm{Hom_A}(-, N)|_{\mathcal{T}} = 0$, *implica* $N \in \mathcal{F}$.

A $\mathcal{T}$ *se le llama la* ***clase de torsión*** *correspondiente al par* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *y a sus objetos se los llama los objetos de torsión.*

A $\mathcal{F}$ *se le llama la* ***clase libre de torsión*** *correspondiente al par* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *y a sus objetos se los llama los objetos libres de torsión.*

La primera condición de la definición dice que no existen morfismos no nulos entre los objetos de $\mathcal{T}$ y los objetos de $\mathcal{F}$, y las otras dos condiciones dicen que esas dos clases de objetos son maximales para esa propiedad.

Ejemplo 2.2. *En la categoría de los grupos abelianos finitamente generados* (mod$\mathbb{Z}$) *el par* $(G_{\mathcal{T}}, G_{\mathcal{F}})$*, donde* $G_{\mathcal{T}}$ *es la clase de todos los grupos abelianos de torsión* $(\mathbb{Z}_{p_1}^{\alpha_1} \oplus \mathbb{Z}_{p_2}^{\alpha_2} \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k}^{\alpha_k}, p_i$ *primos) y* $G_{\mathcal{F}}$ *es la clase de todos los grupos abelianos libres de torsión* $(\mathbb{Z}^r,\ r \in \mathbb{N})$*, forma una teoría de torsión.*

Si $\varphi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}$ *es un morfismo en mod*$\mathbb{Z}$ *alcanza con saber cuanto vale* $\varphi(1)$*. Entonces, como* $0 = \varphi(0) = \varphi(p) = p\varphi(1)$, $\varphi(1) = 0$.

Sea G *un grupo abeliano tal que* $Hom_{\mathbb{Z}}(G, -)|_{G_{\mathcal{F}}} = 0$*, entonces no hay morfismos no nulos desde* G *a* $\mathbb{Z}$*, por lo cual no puede haber ningún factor* $\mathbb{Z}$ *en la descomposición de* G*, de donde se deduce que* G *es un grupo de torsión.*

Análogamente, si G es un grupo abeliano tal que $Hom_{\mathbb{Z}}(-,G)|_{G_{\mathcal{T}}} = 0$ entonces G es libre de torsión.

Observación 2.3. *$(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión en mod$A$ si y solo si $(\mathcal{DF}, \mathcal{DT})$ es teoría de torsión en modA^{op}, donde $D : modA \to modA^{op}$ es la dualidad estándar.*

Ejemplo 2.4. *Cualquier clase $\mathcal{X}$ de A-módulos induce una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ donde $\mathcal{T}$ es la menor clase de torsión que contiene a $\mathcal{X}$:*

$$\mathcal{F} = \{N_A \ / \ \mathrm{Hom_A}(-,N)|_{\mathcal{X}} = 0\}$$

$$\mathcal{T} = \{M_A \ / \ \mathrm{Hom_A}(M,-)|_{\mathcal{F}} = 0\}.$$

- Veamos que $\mathcal{T} \supset \mathcal{X}$. Si $M \in \mathcal{X}$, por la definición de $\mathcal{F}$, tenemos que $\mathrm{Hom_A}(M,-)|_{\mathcal{F}} = 0$, por lo que $M \in \mathcal{T}$.
- (a) y (b) son obvias por la definición de $\mathcal{T}$.
- (c): $\mathrm{Hom_A}(-,N)|_{\mathcal{T}} = 0$ implica, como $\mathcal{T} \supset \mathcal{X}$, que $\mathrm{Hom_A}(-,N)|_{\mathcal{X}} = 0$ y entonces $N \in \mathcal{F}$.
- Sea $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ otra teoría de torsión tal que $\mathcal{T}' \supset \mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$: si $N \in \mathcal{F}' \Rightarrow \mathrm{Hom_A}(M,N) = 0,\ \forall M \in \mathcal{T}' \overset{\mathcal{T}' \supset \mathcal{X}}{\Longrightarrow} \mathrm{Hom_A}(-,N)|_{\mathcal{X}} = 0 \overset{def\ de\ \mathcal{F}}{\Longrightarrow} N \in \mathcal{F}$. Entonces si $M \in \mathcal{T}$, $\mathrm{Hom_A}(M,-)|_{\mathcal{F}'} = 0$, por lo cual $M \in \mathcal{T}'$.

$\square$

Ejemplo 2.5. *Dualmente $\mathcal{X}$ induce una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ donde $\mathcal{F}$ es la menor clase libre de torsión que contiene a $\mathcal{X}$:*

$$\mathcal{T} = \{M_A \ / \ \mathrm{Hom_A}(M,-)|_{\mathcal{X}} = 0\}$$

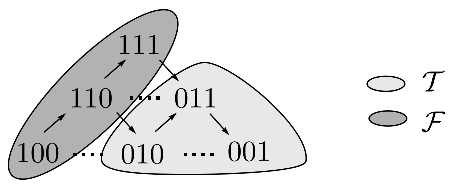
$$\mathcal{F} = \{N_A \ / \ \mathrm{Hom_A}(-,N)|_{\mathcal{T}} = 0\}$$

$\square$

Ejemplo 2.6. *Consideremos A el álgebra dada por el carcaj:*

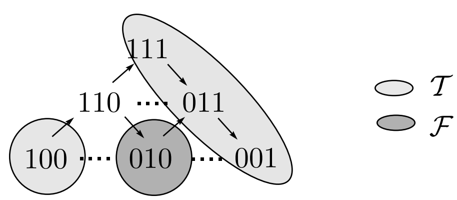
$$\overset{1}{\cdot} \xleftarrow{\beta} \overset{2}{\cdot} \xleftarrow{\alpha} \overset{3}{\cdot}$$

Sea $\mathcal{T} = add(010 \oplus 011 \oplus 001)$ *y* $\mathcal{F} = add(100 \oplus 110 \oplus 111)$*(donde los A-módulos indescomponibles son representados por su vector dimensión). Entonces* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *es una teoría de torsión. Ilustraremos* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *en el carcaj de Auslander-Reiten* Γ_A.



□

Ejemplo 2.7. *Sea A el ágebra del ejemplo anterior, entonces el par* $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ *ilustrado en el carcaj de Auslander-Reiten* Γ_A*, es otra teoría de torsión.*



□

Otro camino para definir una Teoría de Torsión es a través de los idempotentes radicales.

Definición 2.8. *Un* ***pre-radical*** t *es un subfunctor del functor identidad en mod*A*, esto es, asigna a cada módulo* M *un submódulo* tM *tal que cada morfismo* $M \xrightarrow{f} N$ *se restringe a un morfismo* $tM \xrightarrow{f|_{tM}} tN$.
Un pre-radical se dice ***idempotente*** *si* $t^2 = t$ *y se dice* ***radical*** *si* $t(M/tM) = 0$ *para todo módulo* M.

Definición 2.9. *Dado cualquier A-módulo M la* **traza de la clase** $\mathcal{T}$ **en M** *es la suma de las imágenes de todos los morfismos de A-módulos f:* $N \to M$ *con* $N \in \mathcal{T}$.

Las clases de torsión y las clases libres de torsión son caracterizadas como sigue:

Proposición 2.10. *Sea $\mathcal{T}$ una clase de A-módulos. Entonces son equivalentes:*

1. *$\mathcal{T}$ es la clase de torsión de alguna teoría de torsión ($\mathcal{T}$,$\mathcal{F}$) en mod$A$.*
2. *$\mathcal{T}$ es cerrada bajo imágenes, sumas directas y extensiones.*
3. *Existe un idempotente radical t tal que $\mathcal{T} = \{M \text{ tales que } tM = M\}$.*

Demostración:

1⇒2

Cualquier sucesión exacta corta de A-módulos $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ induce una sucesión exacta a izquierda de functores:

$$0 \longrightarrow Hom_A(M'', -)|_{\mathcal{F}} \longrightarrow Hom_A(M, -)|_{\mathcal{F}} \longrightarrow Hom_A(M', -)|_{\mathcal{F}}.$$

Sea $\mathcal{T}$ la clase de torsión de alguna teoría de torsión ($\mathcal{T}$,$\mathcal{F}$). Entonces si $M \in \mathcal{T}$, $Hom_A(M, -)|_{\mathcal{F}} = 0$ por lo que, observando la sucesión de functores, $Hom_A(M'', -)|_{\mathcal{F}} = 0$ y entonces, como ($\mathcal{T}$,$\mathcal{F}$) es una teoría de torsión, $M'' \in \mathcal{T}$. Esto prueba que $\mathcal{T}$ es cerrada por imágenes.

Para ver que es cerrada por extensiones sean $M', M'' \in \mathcal{T}$, entonces $Hom_A(M', -)|_{\mathcal{F}} = 0$ y $Hom_A(M'', -)|_{\mathcal{F}} = 0$ de donde, $Hom_A(M, -)|_{\mathcal{F}} = 0$, por lo que $M \in \mathcal{T}$.

Si $M_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in I$, entonces, como $\mathrm{Hom_A}(\bigoplus_{i \in I} M_i, -)|_{\mathcal{F}} \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom_A}(M_i, -)|_{\mathcal{F}} = 0$, obtenemos $\bigoplus_{i \in I} M_i \in \mathcal{T}$.

2⇒3

Dado M un A-módulo sea tM la traza de $\mathcal{T}$ en M. Es decir:

$$tM = \sum_{f:N \to M,\ N \in \mathcal{T}} \mathrm{Im}\, f$$

Como $\mathcal{T}$ es cerrada por imágenes, $\mathrm{Im}\, f \in \mathcal{T}$ para toda $f : N \to M$ con $N \in \mathcal{T}$ y como también es cerrada por sumas directas tenemos que $\bigoplus_{f:N \to M,\ N \in \mathcal{T}} \mathrm{Im}\, f$ pertenece a $\mathcal{T}$. Entonces si consideramos el morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \bigoplus_{f:N \to M,\ N \in \mathcal{T}} \mathrm{Im}\, f &\to \sum_{f:N \to M,\ N \in \mathcal{T}} \mathrm{Im}\, f \\ (a_f)_{f:N \to M,\ N \in \mathcal{T}} &\mapsto \sum_{f:N \to M,\ N \in \mathcal{T}} a_f \end{aligned}$$

su imagen coincide con tM y como $\mathcal{T}$ es cerrada por imágenes tenemos que $tM \in \mathcal{T}$. Por lo tanto tM es el más grande submódulo de M que pertenece a $\mathcal{T}$ y entonces $M \in \mathcal{T} \Leftrightarrow tM = M$.

Veamos que la traza es un idempotente radical:

- La traza define un subfunctor de la identidad: Si $f : M \to N$ es un morfismo entonces $f(tM) \subseteq tN$ pues si $g : X \to M$ es un morfismo con $X \in \mathcal{T}$ se tiene que $f \circ g : X \to N$ es un morfismo con imagen en tN.
- $t(tM) = tM$: Ya vimos que $M \in \mathcal{T} \Leftrightarrow tM = M$. Entonces como $tM \in \mathcal{T}$, $t(tM) = tM$.
- $t(M/tM) = 0$: Supongamos que $t(M/tM) = M'/tM$ con $tM \subseteq M' \subseteq M$. Consideremos la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow tM \longrightarrow M' \longrightarrow M'/tM \longrightarrow 0$. Entonces como tM y M'/tM pertenecen a $\mathcal{T}$, que es cerrada por extensiones, se tiene que $M' \in \mathcal{T}$ y entonces $M' \subseteq tM$, pues tM es el mayor submódulo de M en $\mathcal{T}$, por lo tanto $t(M/tM) = M'/tM = 0$.

3⇒1

Sea t un idempotente radical tal que $\mathcal{T} = \{M \ / \ tM = M\}$, entonces si definimos $\mathcal{F} = \{N \ / \ tN = 0\}$ se cumple que $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión:

- $Hom_A(M, N) = 0, \forall M \in \mathcal{T}, \forall N \in \mathcal{F}$:

  Sea $f : M \to N$ con $M \in \mathcal{T}$ y $N \in \mathcal{F}$, como $N \in \mathcal{F}$, $tN = 0$ por lo que $0 = f|_{tM} : tM \to tN$. Además como $M \in \mathcal{T}$ se tiene que $M = tM$, por lo tanto $f = 0$.
- $Hom_A(M, -)|_{\mathcal{F}} = 0 \Rightarrow M \in \mathcal{T}$:

  Como t es radical, $t(M/tM) = 0$ por lo que $M/tM \in \mathcal{F}$. Entonces si $\pi : M \twoheadrightarrow M/tM$ es la proyección canónica se tiene que $\pi = 0$, de donde $M/tM = 0$ y entonces $M = tM$, lo que prueba que $M \in \mathcal{T}$.
- $Hom_A(-, N)|_{\mathcal{T}} = 0 \Rightarrow N \in \mathcal{F}$:

  Como t es radical $t(tN) = tN$, por lo que $tN \in \mathcal{T}$. Entonces la inclusión $i : tN \hookrightarrow N$ es el morfismo nulo y entonces $tN = 0$, lo que implica que $N \in \mathcal{F}$.

$\square$

Se tiene un resultado análogo que caracteriza las clases libres de torsión.

Proposición 2.11. *Sea $\mathcal{F}$ una clase de A-módulos. Entonces son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ es la clase libre de torsión de alguna teoría de torsión $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ en modA.*
2. *$\mathcal{F}$ es cerrada bajo submódulos, productos directos y extensiones.*
3. *Existe un idempotente radical t tal que $\mathcal{F} = \{N \text{ tales que } tN = 0\}$.*

Demostración:

Se deduce de la proposición 2.10, de la observación 2.3 y de las propiedades de la dualidad D.

$\square$

Observación 2.12. *Se deduce de las proposiciones anteriores que a cada A-módulo M le corresponde una sucesión exacta corta:*

$$0 \longrightarrow tM \longrightarrow M \longrightarrow M/tM \longrightarrow 0$$

con $tM \in \mathcal{T}$ y $M/tM \in \mathcal{F}$, llamada la ***sucesión canónica de M****. Esta sucesión es única en el sentido de que, si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta con $M' \in \mathcal{T}$ y $M'' \in \mathcal{F}$ se tiene que las dos sucesiones son isomorfas.*

Demostración:

Como M' pertenece a $\mathcal{T}$ y tM es el submódulo de torsión más grande de M existe un diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "i"] & M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "Id"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & tM \arrow[r, "u"] & M \arrow[r, "v"] & M/tM \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión y el epimorfismo φ se obtiene pasando al cociente.

Para ver que φ es inyectivo sea $m'' \in M''$ tal que $\varphi(m'') = 0$. Como μ es un epimorfismo existe $m \in M$ tal que $\mu(m) = m''$, entonces $v(m) = \varphi \circ \mu \circ Id(m) = 0$ por lo que $m \in tM$ y

$\mu \circ Id \circ u(m) = m''$. Además como $M'' \in \mathcal{F}$, $\mu \circ Id \circ u : tM \to M''$ es el morfismo nulo por lo cual $m'' = 0$.

Por lo tanto φ es un isomorfismo y entonces ambas sucesiones son isomorfas.

□

Corolario 2.13. *Todo módulo simple es de torsión o libre de torsión.*

Demostración:

Sea M un módulo simple y $0 \longrightarrow tM \longrightarrow M \longrightarrow M/tM \longrightarrow 0$ su sucesión canónica. Entonces, como M es simple, $tM = M$ o $M/tM = M$ por lo que $M \in \mathcal{T}$ o $M \in \mathcal{F}$.

□

Definición 2.14. *Una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ se dice* ***escindente*** *si para todo A-módulo M la sucesión canónica de M se escinde.*

La siguiente proposición caracteriza a las teorías de torsión escindentes.

Proposición 2.15. *Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión en modA. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *es escindente.*
2. $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(N, M) = 0$ *para todo $M \in \mathcal{T}$ y para todo $N \in \mathcal{F}$.*
3. *Todo A-módulo indescomponible es de torsión o libre de torsión.*

Demostración:

$1 \Rightarrow 2$

Sea $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta con $M \in \mathcal{T}$ y $N \in \mathcal{F}$. Por la observación 2.12 esta sucesión es isomorfa a la sucesión canónica que se escinde porque $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es escindente. Entonces $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$ se escinde.

$2 \Rightarrow 3$

Sea M indescomponible y $0 \longrightarrow tM \longrightarrow M \longrightarrow M/tM \longrightarrow 0$ su sucesión canónica que por (2), como $tM \in \mathcal{T}$ y $M/tM \in \mathcal{F}$, se escinde. Entonces $M \cong tM \oplus M/tM$ por lo que, como M es indescomponible, $M \cong tM$ o $M \cong M/tM$. Por lo tanto M es de torsión o M es libre de torsión.

$3 \Rightarrow 1$

Dado M, un A-módulo cualquiera, sea M' la suma directa de todos los sumandos directos indescomponibles de M que pertenecen a $\mathcal{T}$, y sea M'' la suma directa de todos los sumandos directos indescomponibles de M que pertenecen a $\mathcal{F}$. Tenemos que $M = M' \oplus M''$ entonces la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ se escinde. Además, como $M' \in \mathcal{T}$ y $M'' \in \mathcal{F}$ la sucesión canónica se escinde por ser isomorfa a la anterior.

$\square$

Ejemplo 2.16. *En la categoría de los grupos abelianos finitamente generados la teoría de torsión $(G_{\mathcal{T}}, G_{\mathcal{F}})$, del ejemplo 2.2, es una teoría de torsión escindente.*

$\square$

A continuación fijado un módulo T, definiremos dos clases importantes de A-módulos que, bajo ciertas hipótesis, van a formar teorías de torsión. Estas clases son los módulos generados por T, $(Gen(T))$, y los módulos cogenerados por T $(Cogen(T))$.

Definición 2.17. *Sea T un A-módulo arbitrario, definimos $Gen(T)$ como la clase de todos los módulos M en $modA$ generados por T, esto es, los módulos M tales que existe un natural n y un epimorfismo $T^n \twoheadrightarrow M$ de A-módulos.*

Definimos $Cogen(T)$ como la clase de todos los módulos N en $modA$ cogenerados por T, es decir, los módulos N tales que existe un natural n y un monomorfismo $N \hookrightarrow T^n$ de A-módulos.

Observación 2.18. *$Gen(T)$ es claramente cerrada bajo imágenes y sumas directas, pero generalmente no es cerrada bajo extensiones.*

Demostración:

- $Gen(T)$ es cerrada bajo sumas directas: Observemos que como A es artiniana y estamos trabajando en $modA$ cualquier suma directa infinita la podemos ver como una suma directa finita; entonces alcanza con probar que es cerrada bajo sumas directas finitas.

  Si N y M pertenecen a $Gen(T)$ existen dos epimorfismos $f : T^m \twoheadrightarrow M$ y $g : T^n \twoheadrightarrow N$, entonces $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} : T^m \oplus T^n = T^{n+m} \twoheadrightarrow M \oplus N$ es un epimorfismo, por lo cual $M \oplus N \in Gen(T)$.

- $Gen(T)$ es cerrada bajo imágenes: sea $M \in Gen(T)$ y $h : M \to N$ un morfismo. Entonces existe un epimorfismo:

$$h \circ f : T^m \overset{f}{\twoheadrightarrow} M \overset{h}{\twoheadrightarrow} Imh,$$

por lo que $Imh \in Gen(T)$.

- Veamos un ejemplo en donde $Gen(T)$ no es cerrada bajo extensiones.

Sea A cualquier álgebra que tenga dos módulos simples no isomorfos S_1 y S_2 tales que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(S_1, S_2) \neq 0$. Vamos a probar que $Gen(S_1 \oplus S_2)$ no es cerrada bajo extensiones.

Como $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(S_1, S_2) \neq 0$ existe una sucesión exacta corta $0 \longrightarrow S_2 \longrightarrow M \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0$ que no se escinde. S_1 y S_2 pertenecen a $Gen(S_1 \oplus S_2)$ porque es cerrada por imágenes. Si suponemos que M pertenece a $Gen(S_1 \oplus S_2)$ existe un epimorfismo $(S_1 \oplus S_2)^n \twoheadrightarrow M$, entonces $M = S_1^{n_1} \oplus S_2^{n_2}$ (porque es un cociente del módulo semisimple $(S_1 \oplus S_2)^n$).

Por otro lado como la sucesión es exacta $l(M) = l(S_1) + l(S_2) = 2$ y ambos, S_1 y S_2 son factores de composición de M. Por lo tanto $M = S_1 \oplus S_2$, lo cual es absurdo porque la sucesión no se escinde.

De lo anterior deducimos que M no pertenece a $Gen(S_1 \oplus S_2)$. Entonces $Gen(S_1 \oplus S_2)$ no es cerrada bajo extensiones.

$\square$

La observación anterior nos dice que en general $Gen(T)$ no es una clase de torsión. Uno de los objetivos de este capítulo es determinar cuando es $Gen(T)$ una clase de torsión en $modA$.

Observemos que si T_A es un A-módulo a derecha y tomamos $B = \operatorname{End} T_A$ entonces tenemos que T también puede ser considerado como un B-módulo a izquierda. En lo que sigue B denotará el álgebra $\operatorname{End} T_A$.

Ahora veremos cuando es $Gen(T)$, para algún A-módulo T, la clase de torsión de alguna teoría de torsión en $modA$. Para eso asumimos que T_A es minimal, esto es, si $T = T' \oplus T''$ entonces $T' \notin Gen(T'')$.

Para ello precisaremos del siguiente lema que caracteriza a los módulos que pertenecen a $Gen(T_A)$.

Lema 2.19. *Un módulo M pertenece a $Gen(T_A)$ si y solo si el mapa evaluación $\varepsilon_M : \mathrm{Hom_A}(T, M) \otimes_B T \to M$ definido por: $f \otimes t \mapsto f(t)$ es un epimorfismo.*

Demostración:

$(\Rightarrow)$

Sea M perteneciente a $Gen(T_A)$ y sea $\{f_1, ..., f_d\}$ base del k-espacio vectorial $\mathrm{Hom_A}(T, M)$. Como $M \in Gen(T_A)$ sabemos que existe un epimorfismo $[g_1, ..., g_m] : T^m \twoheadrightarrow M$ donde cada $g_j \in \mathrm{Hom_A}(T, M)$ por lo cual $g_j = \sum_{i=1}^{d} \lambda_j^i f_i$ con $\lambda_j^i \in k$.
Como $[g_1, ..., g_m]$ es un epimorfismo dado $x \in M$, x se puede escribir como: $x = \sum_{j=1}^{m} g_j(t_j)$ con $t_j \in T$. Entonces $x = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{d} \lambda_j^i f_i(t_j) = \varepsilon_M(\sum_{i,j} \lambda_j^i (f_i \otimes t_j))$.

$(\Leftarrow)$

$\mathrm{Hom_A}(T, M)$ es un B-módulo finitamente generado, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ y un epimorfismo $g : B^m \twoheadrightarrow \mathrm{Hom_A}(T, M)$.
Además $T^m \cong B^m \otimes_B T$, entonces la composición:

$$T^m \cong B^m \otimes_B T \stackrel{g\otimes 1}{\to} \mathrm{Hom_A}(T, M) \otimes_B T \stackrel{\varepsilon_M}{\to} M$$

es un epimorfismo como el buscado. Por lo tanto $M \in Gen(T)$.

□

Proposición 2.20. *Sea T_A un A-módulo. Entonces:*

1. *$Gen(T_A)$ es una clase de torsión si y sólo si* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, -)|_{Gen(T_A)} = 0$.
2. *$Cogen(T_A)$ es una clase libre de torsión si y sólo si* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(-, T)|_{Cogen(T_A)} = 0$.

Demostración:

(1) $(\Rightarrow)$

Supongamos que existe $M \in Gen(T)$ indescomponible tal que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M) \neq 0$, entonces existe T_0, sumando directo indescomponible de T, tal que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T_0, M) \neq 0$.

Consideremos una extensión no escindente $0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} T_0 \longrightarrow 0$. Como M y T_0 pertenecen a $Gen(T_A)$ que es cerrada por extensiones, por ser teoría de torsión, tenemos que E pertenece a $Gen(T_A)$. Entonces existe un epimorfismo $p : T^m \twoheadrightarrow E$.

Como T_0 es sumando directo de T, podemos escribir $T^m = R \oplus T_0^m$. Entonces la composición $f = v \circ p : T^m \rightarrow T_0$ puede ser escrita como $f = [g, f_1, ..., f_m]$ con $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(R, T_0)$ y $f_i \in EndT_0$.

Como f es un epimorfismo (ya que v y p lo son) tenemos que $T_0 = g(R) + \sum_{i=1}^{m} f_i(T_0)$.

Como v no es una retracción los f_i no son isomorfismos y como T_0 es indescomponible $End(T_0)$ es local, por lo que $rad(End(T_0)) = \{f \in End(T_0) \ / \ f \ no \ es \ invertible\}$, entonces $f_i(T_0) \subseteq (rad(End(T_0)))(T_0) \ \forall i = 1, ..., m$.

Por lo tanto $T_0 \subseteq g(R) + (rad(End(T_0)))(T_0) \subseteq T_0$ y entonces como T_0 es un $End(T_0)$-módulo a izquierda $T_0 = g(R) + rad(T_0)$ de donde deducimos, aplicando el lema de Nakayama, que $T_0 = g(\overline{R})$ con $\overline{R} = \langle g(R) \rangle_{End(T_0)} = \{\sum_{i=1}^{n} h_i g(R), \ h_i \in End(T_0)\}$. Por lo cual, si $\{h_1, \cdots, h_l\}$ es una base del k-espacio vectorial $End(T_0)$, $h = [h_1 g, \cdots, h_l g] : R^l \rightarrow T_0$ es un epimorfismo.

Como T_0 es un sumando directo indescomponible de T, $T = R' \oplus T_0$. Entonces, como $h : R^l = (R')^{ml} \twoheadrightarrow T_0$ es un epimorfismo, $T_0 \in Gen(R')$ lo cual es absurdo porque T es minimal.

Entonces $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, -)|_{Gen(T_A)} = 0$.

$(\Leftarrow)$

Ya vimos que $Gen(T_A)$ es cerrado bajo imágenes y sumas directas, entonces solo resta ver que es cerrado bajo extensiones.

Sea $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi_1} M \xrightarrow{\varphi_2} M'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta con $M', M'' \in Gen(T_A)$. Aplicando el functor exacto a izquierda $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, -)$ obtenemos la sucesión exacta corta $0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, M') \xrightarrow{\varphi_1^*} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, M) \xrightarrow{\varphi_2^*} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, M'') \rightarrow 0$, donde el último cero se debe a que $M' \in Gen(T_A)$ y entonces $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M') = 0$.

Ahora le aplicamos a la última sucesión el functor exacto a derecha $- \otimes_B T$ con $B = End_A(T)$ obteniendo la sucesión exacta:

$$\cdots \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, M') \otimes_B T \xrightarrow{\varphi_1^* \otimes 1} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, M) \otimes_B T \xrightarrow{\varphi_2^* \otimes 1} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, M'') \otimes_B T \rightarrow 0.$$

Como $\varepsilon_M \circ \varphi_i^* \otimes 1(f \otimes t) = \varepsilon_M(\varphi_i \circ f \otimes t) = \varphi_i \circ f(t) = \varphi_i(f(t)) = \varphi_i \circ \varepsilon_{M'}(f \otimes t)$, para $i = 1, 2$, obtenemos, al comparar con la sucesión original, el siguiente diagrama conmutativo exacto:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom_A}(T, M') \otimes_B T \arrow[r, "\varphi_1^*"] \arrow[d, "\varepsilon_{M'}"] & \mathrm{Hom_A}(T, M) \otimes_B T \arrow[r, "\varphi_2^*"] \arrow[d, "\varepsilon_M"] & \mathrm{Hom_A}(T, M'') \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{M''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi_1"] & M \arrow[r, "\varphi_2"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por el lema 2.19, como M' y M'' pertenecen a $Gen(T_A)$, tenemos que $\varepsilon_{M'}$ y $\varepsilon_{M''}$ son epimorfismos. Aplicando el lema de los cinco deducimos que ε_M también es un epimorfismo, y entonces, por el recíproco del lema 2.19, tenemos que $M \in Gen(T_A)$.

(2)

Veamos primero que $Cogen(T) = D(Gen(DT))$ donde D es la dualidad.(*)

Si $M \in Cogen(T)$ existe un monomorfismo $f : M \hookrightarrow T^m$ por lo que, aplicando la dualidad, existe un epimorfismo $Df : (DT)^m \twoheadrightarrow DM$. Entonces $DM \in Gen(DT)$ y, como $M \cong D(DM)$, tenemos que M pertenece a $D(Gen(DT))$.

Análogamente tenemos la otra inclusión.

De esta manera, $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(-, T)|_{Cogen(T)} = 0$ si y sólo si $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(DT, -)|_{Gen(DT)} = 0$ lo cual, aplicando el resultado de la parte (1), pasa si y sólo si $Gen(DT)$ es una clase de torsión.

Recordemos que por la observación 2.3 el dual de una clase de torsión es una clase libre de torsión y viceversa. Por lo tanto, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(-, T)|_{Cogen(T)} = 0$ si y solo si $D(Gen(DT))$ es una clase libre de torsión. Entonces, por (*), tenemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(-, T)|_{Cogen(T)} = 0$ si y sólo si $Cogen(T)$ es una clase libre de torsión.

□

La proposición anterior motivó la siguiente definición debida a Smalø y Auslander.

Definición 2.21. *Sea $\mathcal{C}$ una subcategoría de modA.*
*Un módulo no nulo M_A en $\mathcal{C}$ es **Ext-proyectivo** en $\mathcal{C}$ si* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(M, -)|_{\mathcal{C}} = 0$.
*Dualmente, M_A es **Ext-inyectivo** en $\mathcal{C}$ si* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(-, M)|_{\mathcal{C}} = 0$.

Observemos que si M es Ext-proyectivo en una clase de torsión $\mathcal{T}$, se cumple que para toda sucesión exacta corta $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ con $N' \in \mathcal{T}$ la sucesión inducida $0 \to \mathrm{Hom_A}(M, N') \to \mathrm{Hom_A}(M, N) \to \mathrm{Hom_A}(M, N'') \to 0$ es exacta.

Se deduce también, a partir de la proposición anterior, que $Gen(T)$ es una clase de torsión sii T es Ext-proyectivo en $Gen(T)$ y dualmente que $Cogen(T)$ es una clase libre de torsión sii T es Ext-inyectivo en $Cogen(T)$.

El siguiente lema, debido a Auslander y Smalø, es una caracterización de los módulos Ext-proyectivos y Ext-inyectivos en clases de torsión y clases libres de torsión.

Lema 2.22. *Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión en modA y sea t su idempotente radical. Entonces:*

(a) *Sea $M \in \mathcal{T}$ indescomponible, entonces:*
   1. *M es Ext-proyectivo en $\mathcal{T}$ si y sólo si $\tau M \in \mathcal{F}$.*
   2. *M es Ext-inyectivo en $\mathcal{T}$ si y sólo si $M \cong tI$ para algún inyectivo $I_A \notin \mathcal{F}$.*

(b) *Sea $N \in \mathcal{F}$ indescomponible, entonces:*
   1. *N es Ext-inyectivo en $\mathcal{F}$ si y sólo si $\tau^{-1} N \in \mathcal{T}$.*
   2. *N es Ext-proyectivo en $\mathcal{F}$ si y sólo si $N \cong P/tP$ para algún proyectivo $P_A \notin \mathcal{T}$.*

Demostración:

Probaremos sólo (a) pues la prueba de (b) es similar.

(a-1) ($\Leftarrow$)

Sean $M \in \mathcal{T}$ indescomponible tal que $\tau M \in \mathcal{F}$ y $X \in \mathcal{T}$ cualquiera. Entonces, como $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión, $\mathrm{Hom_A}(X, \tau M) = 0$.

Por 1.13 tenemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(M, X) \cong D\overline{\mathrm{Hom}}_A(X, \tau M)$. Por lo tanto $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(M, X) = 0$ y entonces M es Ext-proyectivo en $\mathcal{T}$.

($\Rightarrow$)

Sea $M \in \mathcal{T}$ Ext-proyectivo e indescomponible.

Si M es proyectivo entonces $\tau M \in \mathcal{F}$ pues $\tau M = 0$.

Si M no es proyectivo consideremos la sucesión de Auslander-Reiten terminando en M:

$$0 \longrightarrow \tau M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

y sea $0 \longrightarrow t(\tau M) \xrightarrow{u} \tau M \xrightarrow{v} \tau M/t(\tau M) \longrightarrow 0$ la sucesión canónica de τM.

Si suponemos que $\tau M \notin \mathcal{F}$, entonces $t(\tau M) \neq 0$ por lo que v no es monomorfismo. Entonces, como f es un morfismo fuente, existe $h : E \to \tau M/t(\tau M)$ tal que $h \circ f = v$, o sea que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\tau M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v"] & E \arrow[dl, "\exists h"] \\
\tau M/t(\tau M) &
\end{tikzcd}$$

Como v es sobreyectiva, tenemos que h es sobreyectiva.

Entonces, aplicando el lema de la serpiente al diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tau M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & M \arrow[r] & 0 \\
& \tau M/t(\tau M) \arrow[r, "id"] & \tau M/t(\tau M) & &
\end{tikzcd}$$

obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & t(\tau M) \arrow[r, "f \circ u"] \arrow[d, "u"] & \operatorname{Ker} h \arrow[r, "g|_{kerh}"] \arrow[d, "\iota"] & M \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & M \arrow[r] & 0 \\
& \tau M/t(\tau M) \arrow[r, "id"] \arrow[d] & \tau M/t(\tau M) \arrow[d] & & \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Como g es un morfismo pozo no puede ser una retracción, entonces $g|_{\operatorname{Ker} h}$ no es una retracción. Por esta razón la primera fila no se escinde, entonces $\operatorname{Ext}^1_{\mathrm{A}}(M, t(\tau M)) \neq 0$ por lo cual M no es Ext-proyectivo en $\mathcal{T}$.

(a-2) ($\Rightarrow$)

Sea $M \in \mathcal{T}$ Ext-inyectivo e I su envolvente inyectiva. Como M está incluido en I y tI es la suma de todos los submódulos de I que están en $\mathcal{T}$ y M pertenece a $\mathcal{T}$, tenemos que $M \subset tI$.

Consideremos la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow tI \longrightarrow tI/M \longrightarrow 0$$

Como tI pertenece a $\mathcal{T}$, y $\mathcal{T}$ es cerrada por imágenes, tenemos que tI/M también pertenece a $\mathcal{T}$. Entonces, como M es Ext-inyectivo en $\mathcal{T}$, la sucesión se escinde y M es un sumando directo de tI.

Sea $I = \bigoplus I_i$ la descomposición de I en inyectivos indescomponibles, entonces $tI = \bigoplus tI_i$.

Veremos que si I_i es un inyectivo indescomponible entonces tI_i es indescomponible. El zócalo de I_i es un módulo simple S_i. Como tI_i es un submódulo de I_i, el zócalo de tI_i es un submódulo no nulo de S_i, por lo cual coincide con S_i. Entonces tI_i es indescomponible por tener zócalo simple.

Como M es un sumando directo indescomponible de tI y cada tI_i es indescomponible, tenemos que M es isomorfo a tI_i para algún inyectivo I_i. Además I_i no pertenece a $\mathcal{F}$, pues tI_i es no nulo.

($\Leftarrow$)

Sea I un módulo inyectivo que no pertenece a $\mathcal{F}$ y tal que M es isomorfo a tI. Consideremos la sucesión canónica de I:

$$0 \longrightarrow tI \longrightarrow I \longrightarrow I/tI \longrightarrow 0$$

Aplicándole el functor $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(X, -)$ con X perteneciente a $\mathcal{T}$ obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(X,tI) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(X,I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(X,I/tI) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(X,tI) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(X,I) \longrightarrow \cdots$$

Como X pertenece a $\mathcal{T}$ e I/tI pertenece a $\mathcal{F}$ se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(X, I/tI) = 0$. Además, como I es inyectivo, $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(X, I) = 0$. Entonces $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(X, tI) = 0$ por lo cual, como M es isomorfo a tI, M es Ext-inyectivo.

$\square$

CAPíTULO 3

Módulos inclinantes parciales y módulos inclinantes

Definición 3.1. *Un A-módulo T es un módulo* ***inclinante parcial*** *si cumple las siguientes condiciones:*

(T1) $dpT \leq 1$;

(T2) $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, T) = 0$.

Un módulo T inclinante parcial es un módulo ***inclinante*** *si cumple además la siguiente condición:*

(T3) *existe una sucesión exacta corta $0 \to A_A \to T'_A \to T''_A \to 0$ con T' y T'' pertenecientes a $add(T)$.*

Observemos que para que se cumpla la condición $(T3)$ alcanza con que cualquier A-módulo P proyectivo indescomponible, tenga una sucesión exacta corta:

$$0 \to P_A \to T'_A \to T''_A \to 0 \quad con \quad T', T'' \in add(T).$$

Es evidente que cualquier módulo proyectivo es inclinante parcial.

También es fácil ver que cualquier progenerador de Morita es un módulo inclinante. Sea T un progenerador de Morita, como es proyectivo satisface (T1) y (T2). Para ver que cumple (T3) sea P_0 sumando directo indescomponible de A. Como T es progenerador existe un epimorfismo $T^n \twoheadrightarrow P_0$ el cual se escinde porque P_0 es proyectivo. Entonces P_0 es sumando directo de T^n, de donde, por ser indescomponible, es sumando directo de T. De esta forma tenemos un monomorfismo $A \hookrightarrow T$ cuyo conúcleo pertenece a $add(T)$.

Ejemplo 3.2. *Consideremos A el álgebra dada por el carcaj:*

$$\overset{1}{\cdot} \xleftarrow{\beta} \overset{2}{\cdot} \xleftarrow{\alpha} \overset{3}{\cdot}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
&P_1 = 100 = S_1\\
&P_2 = 110\\
&P_3 = 111 = I_1\\
&I_2 = 011\\
&I_3 = 001 = S_3
\end{aligned}$$

Entonces el carcaj de Auslander-Reiten Γ_A es:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & 111 \arrow[dr] & & \\
 & 110 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 011 \arrow[dr] & \\
100 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & 010 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & 001
\end{tikzcd}$$

donde los módulos indescomponibles están representados por su vector dimensión.

Entonces $T_A = 100 \oplus 111 \oplus 001$ es un módulo inclinante:

$(T1)$ *Como A es hereditaria, $dpT \leqslant 1$.*

$(T2)$
$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T,T) &\cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(100 \oplus 111 \oplus 001, 100)\\
&\cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(001, 100) \cong D\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(100, \tau(001))\\
&= D\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(100, 010) = 0;
\end{aligned}$$

donde el primer isomorfismo se debe a que $111 \oplus 001$ es inyectivo, y el segundo a que $100 \oplus 111$ es proyectivo.

$(T3)$ *$P_1, P_3 \in add(T)$ y para P_2 tenemos la resolución proyectiva de $001 \in add(T)$: $0 \to P_2 \to P_3 \to 001 \to 0$.*

$\square$

Recordemos que un módulo (derecho) M es **fiel** si su anulador derecho $Ann(M) = \{a \in A \ / \ \ Ma = 0\} = 0$.

El siguiente lema es una caracterización de los módulos fieles que vamos a necesitar.

Lema 3.3. *Sean A un álgebra y M un A-módulo. Entonces: M_A es fiel si y solo si DA_A es generado por M_A.*

Demostración:

Veremos primero que M_A es fiel si y sólo si A_A es cogenerado por M_A. Sea $\{f_1, f_2, ..., f_d\}$ una base del k-espacio vectorial $\mathrm{Hom_A}(A, M)$. Consideremos $f = [f_1, f_2, ..., f_d]^t : A_A \to M^d$. Se cumple que este morfismo es inyectivo si y sólo si M_A es fiel pues, $f(a) = 0$ con $a \in A$ si y sólo si $g(a) = 0$ para todo $g \in \mathrm{Hom_A}(A, M)$ puesto que $\{f_1, ..., f_d\}$ es una base de $\mathrm{Hom_A}(A, M)$. Entonces, como $M_A \cong \mathrm{Hom_A}(A, M)$, tenemos que $g(a) = 0 \ \forall g \in \mathrm{Hom_A}(A, M)$ si y sólo si $Ma = 0$, lo cual es equivalente a que $a \in Ann(M)$. Concluimos que M es fiel si y sólo si $f : A \hookrightarrow M^d$ es monomorfismo. Observar que el razonamiento anterior es válido para módulos a izquierda o a derecha.

Como el anulador derecho $\{a \in A \ / \ Ma = 0\}$ de M_A coincide con el anulador izquierdo $\{a \in A \ / \ aDM = 0\}$ de ${}_ADM$ tenemos que M_A es fiel si y sólo si ${}_ADM$ es fiel.

Por lo anterior ${}_ADM$ es fiel si y sólo si ${}_AA$ es cogenerado por ${}_ADM$, lo cual es equivalente a que DA_A sea generado por $DDM_A \cong M_A$.

Entonces concluimos que M_A es fiel si y sólo si DA_A es generado por M_A.

$\square$

Si M es un módulo inclinante, por (T3), existe un monomorfismo $A_A \hookrightarrow M'_A$ con $M'_A \in add(M)$; entonces A_A es cogenerado por M_A. Usando el lema anterior tenemos que todo módulo inclinante es fiel.

Proposición 3.4. *Sea T un A-módulo. Entonces:*

(a) *Si T_A es un módulo inclinante parcial entonces $Gen(T_A)$ es una clase de torsión.*
(b) *Si $Gen(T_A)$ es una clase de torsión y T_A es un módulo fiel, entonces T_A es un módulo inclinante parcial.*

Demostración:

(a)

Sea $M \in Gen(T_A)$, entonces existe un epimorfismo $T^m \twoheadrightarrow M$ para algún $m > 0$. Como T es inclinante parcial, por (T1) ($dpT \leq 1 \Rightarrow Ext^2_A(T, -) = 0$), este epimorfismo induce un epimorfismo:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, T^m) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M) \to 0.$$

(T2) implica que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, T^m) = 0$ por lo que tenemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M) = 0$. Entonces T es Ext-proyectivo en $Gen(T_A)$. Por la proposición 2.20, $Gen(T_A)$ es una clase de torsión.

(b)

Si $Gen(T_A)$ es una clase de torsión, por la proposición 2.20, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T,T)=0$.

T_A es fiel, entonces por el lema 3.3, $DA_A \in Gen(T_A)$. Además, como $Gen(T_A)$ es una clase de torsión, T es Ext-proyectivo en $Gen(T_A)$ por lo que, por el lema 2.22, τT es libre de torsión. Esto implica que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(DA, \tau T) = 0$ y usando la proposición 1.12 tenemos que $dpT \leq 1$.

□

Observación 3.5. *En particular probamos que si $M \in Gen(T_A)$ entonces $M \in \{M \ / \ \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M) = 0\}$, siendo T un módulo inclinante parcial.*

Observación 3.6. *Si $Gen(T_A)$ es una clase de torsión pero T_A no es fiel, entonces T generalmente no es un módulo inclinante parcial.*

Sea por ejemplo el álgebra A dada por el carcaj:

$$\overset{1}{\cdot} \xleftarrow{\beta} \overset{2}{\cdot} \xleftarrow{\alpha} \overset{3}{\cdot} \quad \textit{con } \beta\alpha = 0.$$

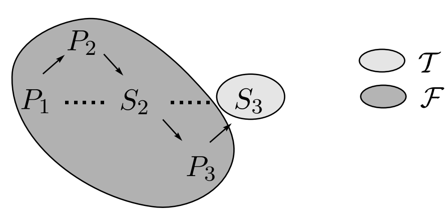
Entonces $P_1 = 100 = S_1$

$P_2 = 110 = I_1$

$P_3 = 011 = I_2$

$I_3 = 001 = S_3$

Representaremos en el carcaj de Auslander-Reiten Γ_A una teoría de torsión en la cual la clase de torsión es generada por S_3.



Entonces el módulo simple S_3 genera una clase de torsión, pero no es un módulo inclinante parcial ya que su dimensión proyectiva vale 2.

□

Lema 3.7. *Sea T un A-módulo.*

(a) *Si $Gen(T_A)$ es una clase de torsión entonces la correspondiente clase libre de torsión es $\mathcal{F}(T) = \{M_A \ / \ \mathrm{Hom_A}(T, M) = 0\}$.*
(b) *Si $Cogen(T_A)$ es una clase libre de torsión entonces la correspondiente clase de torsión es $\{M_A \ / \ \mathrm{Hom_A}(M, T) = 0\}$.*

Demostración:

Demostraremos (a) pues (b) es similar.

Sea M un A-módulo libre de torsión; entonces, como $T \in \mathcal{T} = Gen(T_A)$, $\mathrm{Hom_A}(T, M) = 0$.

Sea M tal que $\mathrm{Hom_A}(T, M) = 0$; entonces $\mathrm{Hom_A}(T^m, M) = 0$ para todo $m > 0$. Consideremos $X \in Gen(T_A)$ cualquiera, entonces existe un epimorfismo $T^m \to X \to 0$ para algún $m > 0$. Aplicándole el functor $\mathrm{Hom_A}(-, M)$ obtenemos: $0 \to \mathrm{Hom_A}(X, M) \to \mathrm{Hom_A}(T^m, M) = 0$, entonces $\mathrm{Hom_A}(X, M) = 0$ lo que implica que $M \in \mathcal{F}$.

□

Dado T_A cualquier A-módulo sea $\mathcal{T}(T) = \{M_A \ / \ \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M) = 0\}$. En los lemas que siguen probaremos que alcanza con que T sea un módulo inclinante parcial para que $\mathcal{T}(T)$ sea una clase de torsión y que si T es un módulo inclinante, entonces $\mathcal{T}(T)$ coincide con $Gen(T_A)$.

Lema 3.8. *Sea T un módulo inclinante parcial, entonces $\mathcal{T}(T) = \{M_A \ / \ \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M) = 0\}$ es una clase de torsión en la cual T es Ext-proyectivo. Además, su correspondiente clase libre de torsión es $Cogen(\tau T)$ y $Gen(T_A) \subseteq \mathcal{T}(T)$.*

Demostración:

Veamos primero que $\mathcal{T}(T)$ es una clase de torsión. Para ello sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta corta. Como $dpT \leq 1$, $Ext^2_A(T, -) = 0$, entonces aplicando el functor $\mathrm{Hom_A}(T, -)$, obtenemos la sucesión exacta a derecha:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M') \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M'') \to 0$$

- si $M', M'' \in \mathcal{T}(T)$ entonces $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M') = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M'') = 0$ por lo que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M) = 0$ y $M \in \mathcal{T}(T)$. Esto prueba que $\mathcal{T}(T)$ es cerrada por extensiones.
- si $M \in \mathcal{T}(T)$ tenemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M) = 0$; entonces $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M'') = 0$ lo que implica que $M'' \in \mathcal{T}(T)$ y prueba que $\mathcal{T}(T)$ es cerrada por imágenes.

- como, por lo visto en la observación 2.18, $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, \oplus M_i) \cong \bigoplus \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M_i)$, $\mathcal{T}(T)$ es cerrada por sumas directas.

Por la observación 3.5 tenemos que $Gen(T_A) \subseteq \mathcal{T}(T)$.

Por definición T es Ext-proyectivo en $\mathcal{T}(T)$. Entonces, por la proposición 2.22, $\tau T \in \mathcal{F}$. Esto implica que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, \tau T) = 0$, porque $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F})$ es una teoría de torsión. Tenemos pues que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, X) = 0$ para todo $X \in Cogen(\tau T)$. Por lo tanto, como

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(X, \tau T) \cong D\overline{Hom}_A(T, X),$$

$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(-, \tau T)|_{Cogen(\tau T)} = 0$. Usando el lema 2.20 deducimos que $Cogen(\tau T)$ es una clase libre de torsión.

Por otro lado tenemos que, como $dpT \leq 1$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M) \cong D\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M, \tau T)$; entonces $\mathcal{T}(T) = \{M \ / \ \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M, \tau T) = 0\}$. Usando el lema anterior tenemos que $\mathcal{T}(T)$ es la clase de torsión correspondiente a la clase libre de torsión $Cogen(\tau T)$.

□

Proposición 3.9. *Sea T_A un módulo inclinante, entonces $Gen(T_A) = \mathcal{T}(T)$.*

Demostración:

Por el lema anterior ya sabemos que $Gen(T_A) \subseteq \mathcal{T}(T)$.

Sea $M \in \mathcal{T}(T)$, por la proposición 2.10 alcanza con probar que $M \cong tM$ donde t es el radical asociado a la teoría de torsión $(Gen(T_A), \mathcal{F}(T_A))$.

Sea $0 \to tM \to M \to M/tM \to 0$ la sucesión canónica de M. Aplicándole $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, -)$ obtenemos un epimorfismo

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M/tM) \to 0$$

(porque $dpT \leq 1$). Como $M \in \mathcal{T}(T)$ tenemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M/tM) = 0$. (1)

Además $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, M/tM) = 0$ ya que $M/tM \in \mathcal{F}(T)$. (2)

Como T es un módulo inclinante existe una sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow T'_A \longrightarrow T''_A \longrightarrow 0 \ con \ \ T', T'' \in add(T).$$

Aplicándole el functor $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(-, M/tM)$ obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T'', M/tM) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T', M/tM) = 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(A, M/tM) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T'', M/tM) = 0,$$

donde los ceros se deben a (2) y (1) respectivamente.

Deducimos entonces que $M/tM \cong \mathrm{Hom_A}(A, M/tM) = 0$ y por lo tanto $M \cong tM$ como queríamos.

$\square$

Como consecuencia de estos últimos resultados tenemos que para un módulo inclinante T, las teorías de torsión $(Gen(T), \mathcal{F}(T))$ y $(\mathcal{T}(T), Cogen(\tau T))$ coinciden. De ahora en más nos referiremos a ellas como la **teoría de torsión inducida por T** en $modA$ y la denotaremos $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$.

Corolario 3.10. *Si T es un módulo inclinante entonces cualquier A-módulo inyectivo pertenece a $\mathcal{T}(T)$.*
En particular los módulos Ext-inyectivos en $\mathcal{T}(T)$ coinciden con los A-módulos inyectivos.

Demostración:

Los módulos inyectivos pertenecen a $\mathcal{T}(T)$ por definición. Ahora sea M Ext-inyectivo en $\mathcal{T}(T)$. Por el lema 2.22, $M \cong tI$ con I inyectivo tal que $I \notin \mathcal{F}(T)$. I es inyectivo, entonces $tI = I$ (porque $I \in \mathcal{T}(T)$). Concluimos que M es inyectivo ($M \cong I$).

$\square$

Corolario 3.11. *Si T es un módulo inclinante entonces cualquier módulo M proyectivo, inyectivo e indescomponible es sumando directo de T.*

Demostración:

Como M es inyectivo, $M \in \mathcal{T}(T) = Gen(T)$, entonces existe un epimorfismo $T^d \twoheadrightarrow M$. Por ser M proyectivo indescomponible tenemos que M es sumando directo de T.

$\square$

Veamos un ejemplo en donde las teorías de torsión $(Gen(T), \mathcal{F}(T))$ y $(\mathcal{T}(T), Cogen(\tau T))$ no coinciden.

Ejemplo 3.12. *Consideremos A el álgebra dada por el carcaj:*

$$\overset{1}{\cdot} \xleftarrow{\beta} \overset{2}{\cdot} \xleftarrow{\alpha} \overset{3}{\cdot}$$

Entonces:

$P_1 = 100 = S_1$
$P_2 = 110$
$P_3 = 111 = I_1$
$I_2 = 011$
$I_3 = 001 = S_3$

(Donde los A-módulos indescomponibles son representados por su vector dimensión).

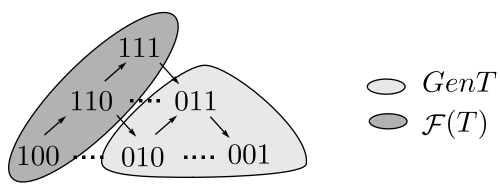
Sea $T = 010 \oplus 011$. Veamos que T es un módulo inclinante parcial.

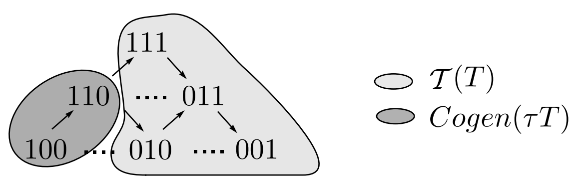
(T1) *$dpT \leq 1$, ya que A es hereditaria.*

(T2) $\operatorname{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T,T) \cong \operatorname{Ext}^1_{\mathrm{A}}(010 \oplus 011, 010) \cong D\operatorname{Hom}_{\mathrm{A}}(010, \tau(010 \oplus 011))$
$\cong D\operatorname{Hom}_{\mathrm{A}}(010, 100 \oplus 110) = 0$

donde el primer isomorfismo se debe a que 011 es inyectivo y el segundo a que $dpT \leq 1$.

Ilustraremos las teorías de torsión $(Gen(T), \mathcal{F}(T))$ y $(\mathcal{T}(T), Cogen(\tau T))$ en el carcaj de Auslander-Reiten Γ_A.





$\square$

El siguiente lema, conocido como lema de Bongartz, justifica el nombre de módulo inclinante parcial, ya que dice que cualquier módulo inclinante parcial se puede completar a un módulo inclinante.

Lema 3.13. *Sea T_A un módulo inclinante parcial. Entonces existe un A-módulo E tal que $T \oplus E$ es un módulo inclinante.*

Demostración:

Sea $\{e_1, ..., e_d\}$ una base del k-espacio vectorial $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, A)$.
Representamos cada e_i por una sucesión exacta corta $0 \to A \xrightarrow{f_i} E_i \xrightarrow{g_i} T \to 0$.

Consideremos la sucesión exacta $e : 0 \to A \xrightarrow{v} E \xrightarrow{w} T^d \to 0$ definida como el pushout entre el mapa codiagonal $K : A^d \to A$ y la sucesión exacta $\oplus e_i : 0 \to A^d \to \oplus E_i \to T^d \to 0$.
Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
\oplus e_i : & 0 \arrow[r] & A^d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K"] & \bigoplus_{i=1}^d E_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] & T^d \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
K. \oplus e_i = e : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "v"] & E \arrow[r, "w"] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $f = \begin{pmatrix} f_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_d \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_d \end{pmatrix}$ y $K = [1, \cdots, 1]$.

Veremos que $E \oplus T$ es un módulo inclinante.
Sea $u_i : T \to T^d$ la inclusión en la i-ésima coordenada.
Veamos que $e_i = eu_i$, $\forall 1 \leq i \leq d$. Para eso consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u_i''"] & E_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "u_i'"] & T \arrow[r] \arrow[d, "u_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K"] & \bigoplus_{i=1}^n E_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] & T^d \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "v"] & E \arrow[r, "w"] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde u_i' y u_i'' son las respectivas inclusiones en la i-ésima coordenada.

Como $Ku_i'' = 1_A$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "1"] & E_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "uu_i'"] & T \arrow[r] \arrow[d, "u_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "v"] & E \arrow[r, "w"] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

entonces tenemos que $e_i = eu_i$.

Aplicando el functor $\mathrm{Hom_A}(T, -)$ a e se obtiene una sucesión exacta:

$$\cdots \to \mathrm{Hom_A}(T, T^d) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_\mathrm{A}(T, A) \to \mathrm{Ext}^1_\mathrm{A}(T, E) \to \mathrm{Ext}^1_\mathrm{A}(T, T^d) = 0$$

donde el último término vale cero porque T es inclinante parcial.

Como $e_i = eu_i = \delta(u_i)$, cada elemento de la base de $\mathrm{Ext}^1_\mathrm{A}(T, A)$ está en la imagen de δ, entonces δ es sobreyectivo y por lo tanto $\mathrm{Ext}^1_\mathrm{A}(T, E) = 0$.

Entonces, aplicando los functores $\mathrm{Hom_A}(-, T)$ y $\mathrm{Hom_A}(-, E)$ a e obtenemos:

$$0 = \mathrm{Ext}^1_\mathrm{A}(T^d, T) \to \mathrm{Ext}^1_\mathrm{A}(E, T) \to \mathrm{Ext}^1_\mathrm{A}(A, T) = 0$$

$$0 = \mathrm{Ext}^1_\mathrm{A}(T^d, E) \to \mathrm{Ext}^1_\mathrm{A}(E, E) \to \mathrm{Ext}^1_\mathrm{A}(A, E) = 0$$

donde los últimos ceros se deben a que A es proyectiva.

Entonces $\mathrm{Ext}^1_\mathrm{A}(E, T) = \mathrm{Ext}^1_\mathrm{A}(E, E) = 0 = \mathrm{Ext}^1_\mathrm{A}(T, E)$ por lo cual $\mathrm{Ext}^1_\mathrm{A}(E \oplus T, E \oplus T) = 0$. Entonces $E \oplus T$ cumple (T2).

Para ver (T1) consideremos la sucesión exacta corta $0 \to A \to E \to T^d \to 0$, entonces $dpE \leq sup\{dpA, dpT^d\} \leq 1$ y como la dimensión proyectiva de una suma directa es menor o igual que el supremo de las dimensiones proyectivas de los sumandos, deducimos que $dp(T \oplus E) \leq 1$. Por lo tanto $T \oplus E$ cumple (T1).

Como $E, T^d \in add(E \oplus T)$ la sucesión exacta corta $0 \to A \to E \to T^d \to 0$ es como la buscada en (T3).

□

Lema 3.14. *Sean T_A un módulo inclinante y $M \in \mathcal{T}(T)$. Entonces existe una sucesión exacta corta $0 \to L \to T_0 \to M \to 0$, con $T_0 \in add(T)$ y $L \in \mathcal{T}(T)$.*

Demostración:

Sea $M \in \mathcal{T}(T)$ y $\{f_1, ..., f_d\}$ una base del k-espacio vectorial $\mathrm{Hom_A}(T, M)$. Consideremos el morfismo $f = [f_1, ..., f_d] : T^d \to M$. Veamos que f es sobreyectivo: como $M \in Gen(T)$ existe un epimorfismo $g : T^m \twoheadrightarrow M$, $g = [g_1, ..., g_m]$ con cada $g_j \in \mathrm{Hom_A}(T, M)$ por lo que $g_j = \sum_{i=1}^{d} \alpha_j^i f_i$, con $\alpha_j^i \in k$.

Dado $x \in M$, como g es epimorfismo, $x = \sum_{j=1}^{m} g_j(t_j)$ con $t_j \in T$. Entonces $x = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{d} \alpha_j^i f_i(t_j) = \sum_{i=1}^{d} f_i(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^i t_j) = f(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^1 t_j, ..., \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^d t_j)$ por lo cual f es un epimorfismo.

Si $L = kerf$ obtenemos la sucesión exacta corta $0 \to L \to T^d \to M \to 0$.

Aplicándole el functor $\mathrm{Hom_A}(T, -)$, como T es inclinante obtenemos la sucesión exacta:

$$\cdots \to \mathrm{Hom_A}(T, T^d) \xrightarrow{\mathrm{Hom_A}(T,f)} \mathrm{Hom_A}(T, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, T^d) = 0 \to \cdots$$

Como por construcción $\mathrm{Hom_A}(T, f)$ es un epimorfismo, $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, L) = 0$ y entonces $L \in \mathcal{T}(T)$.

Sea $T_0 = T^d \in add(T)$, entonces la sucesión exacta corta $0 \to L \to T^d \to M \to 0$ es la buscada.

□

Corolario 3.15. *Sean T_A un módulo inclinante y X_A un A-módulo. Entonces $X \in add(T)$ si y sólo si X es Ext-proyectivo en $\mathcal{T}(T)$.*

Demostración:

($\Rightarrow$)

Si $X \in add(T)$ entonces, como $\mathcal{T}(T) = \{M/\ \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M) = 0\}$ es claro que X es Ext-proyectivo en $\mathcal{T}(T)$.

($\Leftarrow$)

Sea X Ext-proyectivo en $\mathcal{T}(T)$, entonces, por el lema anterior, existe una sucesión exacta corta $0 \to L \to T_0 \to X \to 0$, con $T_0 \in add(T)$ y $L \in \mathcal{T}(T)$.

Como X es Ext-proyectivo en $\mathcal{T}(T)$ la sucesión se escinde y por lo tanto $X \in add(T)$.

□

Corolario 3.16. *Sean T_A un módulo inclinante y $M \in \mathcal{T}(T)$. Entonces existe una sucesión exacta $\cdots \to T_2 \to T_1 \to T_0 \to M \to 0$ con $T_i \in add(T)$ $\forall i$.*

Demostración:

Se prueba por inducción usando el lema anterior.

$\square$

Observación 3.17. *Sean T, T_1, T_2 A-módulos y $B = End_A(T)$. Entonces:*

1. *Podemos identificar el mapa $\varepsilon_{T_1 \oplus T_2} : \mathrm{Hom_A}(T, T_1 \oplus T_2) \otimes_B T \to T_1 \oplus T_2$ con*

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{T_1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{T_2} \end{pmatrix} : \mathrm{Hom_A}(T, T_1) \otimes_B T \oplus \mathrm{Hom_A}(T, T_2) \otimes_B T \to T_1 \oplus T_2.$$

2. *El mapa $\varepsilon_{\widetilde{T}}$ es un isomorfismo para todo $\widetilde{T}$ en $add(T)$.*

Demostración:

(1)

$$\varepsilon_{T_1 \oplus T_2}(f \otimes t) = f(t) = (f_1(t), f_2(t)) = (\varepsilon_{T_1}(f_1 \otimes t), \varepsilon_{T_2}(f_2 \otimes t)) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{T_1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{T_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \otimes t \\ f_2 \otimes t \end{pmatrix}.$$

(2)

Como $\mathrm{Hom_A}(T, T) \otimes_B T \cong B \otimes_B T \cong T$, el mapa ε_T es el isomorfismo canónico.

Si $T = \oplus_{i=1}^n T_i$, entonces $\varepsilon_{\oplus_{i=1}^n T_i} = \varepsilon_T$ es un isomorfismo. Usando la identificación de (1) tenemos que $\begin{pmatrix} \varepsilon_{T_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_{T_n} \end{pmatrix}$ es un isomorfismo y entonces ε_{T_i} es inyectiva $\forall i = 1, ..., n$.

Además T_i es sumando directo de T $\forall i = 1...n$, por lo que $T_i \in Gen(T)$ y ε_{T_i} es un epimorfismo.

Ahora si $\widetilde{T} \in add(T)$, $\widetilde{T} = T_1^{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus T_n^{\alpha_n}$, entonces

$$\varepsilon_{\widetilde{T}} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{T_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_{T_1} \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} \varepsilon_{T_n} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_{T_n} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Como ε_{T_i} es isomorfismo $\forall i$ tenemos que $\varepsilon_{\widetilde{T}}$ es inyectiva, y como $\widetilde{T} \in add(T)$, $\widetilde{T} \in Gen(T)$ y $\varepsilon_{\widetilde{T}}$ es un epimorfismo.

$\square$

Lema 3.18. *Sean T_A un módulo inclinante y $B = End_A(T)$. Entonces $M \in \mathcal{T}(T)$ si y solo si el mapa evaluación $\varepsilon_M : \mathrm{Hom_A}(T, M) \otimes_B T \to M$ es un A-isomorfismo.*

Demostración:

($\Leftarrow$)

Como el mapa ε_M es sobreyectivo, por el lema 2.19, tenemos que $M \in Gen(T)$.

Como T es inclinante, por la proposición 3.9, $Gen(T) = \mathcal{T}(T)$, por lo que $M \in \mathcal{T}(T)$.

($\Rightarrow$)

Como $M \in \mathcal{T}(T)$, por el lema anterior, existe una sucesión exacta corta $0 \to L_0 \to T_0 \to M \to 0$ con $T_0 \in add(T)$ y $L_0 \in \mathcal{T}(T)$.

Aplicando el mismo lema a L_0 obtenemos la sucesión exacta corta $0 \to L_1 \to T_1 \to L_0 \to 0$ con $T_1 \in add(T)$ y $L_1 \in \mathcal{T}(T)$.

Aplicando el functor $\mathrm{Hom_A}(T, -)$ a ambas sucesiones, obtenemos (ya que como $L_0, L_1 \in \mathcal{T}(T) \Rightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, L_0) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, L_1) = 0$), las siguientes sucesiones exactas:

$$0 \to \mathrm{Hom_A}(T, L_0) \to \mathrm{Hom_A}(T, T_0) \to \mathrm{Hom_A}(T, M) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Hom_A}(T, L_1) \to \mathrm{Hom_A}(T, T_1) \to \mathrm{Hom_A}(T, L_0) \to 0;$$

entonces la sucesión: $\mathrm{Hom_A}(T, T_1) \to \mathrm{Hom_A}(T, T_0) \to \mathrm{Hom_A}(T, M) \to 0$ es exacta.

Si le aplicamos el functor exacto a derecha $- \otimes_B T$ y la comparamos con la sucesión exacta $T_1 \to T_0 \to M \to 0$, obtenemos el diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom_A}(T,T_1) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{T_1}"] & \mathrm{Hom_A}(T,T_0) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{T_0}"] & \mathrm{Hom_A}(T,M) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_M"] & 0 \\ T_1 \arrow[r] & T_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por la observación anterior, ε_{T_1} y ε_{T_0} son isomorfismos (ya que $T_0, T_1 \in add(T)$). Por lo tanto ε_M es un isomorfismo.

$\square$

Corolario 3.19. *El submódulo de torsión de un módulo M en la teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es $tM = \mathrm{Hom_A}(T, M) \otimes_B T$.*

Demostración:

Como $tM \in \mathcal{T}(T)$ tenemos $tM \cong \mathrm{Hom_A}(T, tM) \otimes_B T$.

Si aplicamos el functor $\mathrm{Hom_A}(T, -)$ a la sucesión canónica de M:

$$0 \to tM \to M \to M/tM \to 0,$$

obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \to \mathrm{Hom_A}(T, tM) \to \mathrm{Hom_A}(T, M) \to \mathrm{Hom_A}(T, M/tM) = 0;$$

donde el último término vale cero porque $M/tM \in \mathcal{F}(T_A) = \{M_A \ / \ \mathrm{Hom_A}(T, M) = 0\}$, entonces $\mathrm{Hom_A}(T, M) \cong \mathrm{Hom_A}(T, tM)$.

Por lo tanto $tM \cong \mathrm{Hom_A}(T, tM) \otimes_B T \cong \mathrm{Hom_A}(T, M) \otimes_B T$.

$\square$

Observación 3.20. *El functor radical t es $\mathrm{Hom_A}(T, -) \otimes_B T$.*

$\square$

Los módulos APR inclinantes

La siguiente construcción se debe a Auslander, Platzeck y Reiten.

Sea A un álgebra y $S(i)$ un módulo simple proyectivo no inyectivo. Entonces el módulo $T[i] = \tau^{-1}S(i) \oplus (\oplus_{j \neq i} P(j))$ es un módulo inclinante llamado el *módulo APR inclinante* asociado a $S(i)$.

Recordemos que la sucesión de Auslander-Reiten en $modA$ comenzando en un módulo proyectivo simple $P(i) = S(i)$ tiene la forma:

$$0 \to P(i) \to \oplus_{a \neq i} P(a)^{m(a)} \to \tau^{-1}P(i) \to 0,$$

con $m_a = dim_k Irr(S(i), P(a))$.

Esto prueba (T_1) y (T_3).

Para probar (T_2), observemos que, como $dpT \leq 1$ entonces $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T,T) \cong D\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, \tau T) = 0$, ya que τT es el proyectivo simple $S(i)$.

Entonces T es un módulo inclinante.

Se cumple además que:

$$ind\,\mathcal{F}(T_A) = \{S(i)\}$$

$$ind\,\mathcal{T}(T_A) = indA \setminus \{S(i)\},$$

ya que si M es indescomponible, entonces $M \in \mathcal{T}(T)$ si y sólo si $0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T,M) \cong D\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M, \tau T) = D\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M, S(i))$ si y sólo si $M \ncong S(i)$.

En particular $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión escindente.

Ejemplo 3.21. *Sea A el álgebra dada por el carcaj:*

$$\begin{tikzcd}
 & \overset{3}{\cdot} \arrow[dr, "\beta_1"] & \\
\overset{1}{\cdot} \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & & \overset{4}{\cdot} \\
 & \overset{2}{\cdot} \arrow[ur, "\beta_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad \textit{con} \quad \beta_2\alpha_2 = \beta_1\alpha_1.$$

Tenemos que: $P_1 = 1111 = I_4$

$P_2 = 0101$

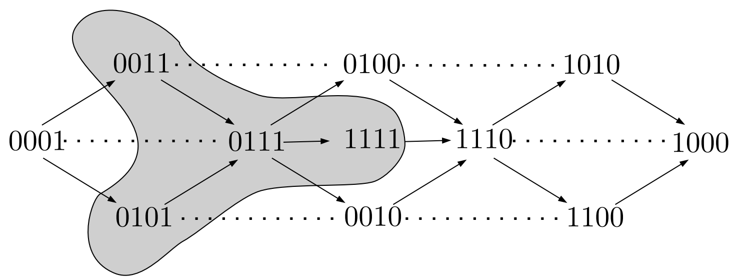
$P_3 = 0011$

$P_4 = 0001 = S_4$

$I_1 = 1000 = S_1$

$$I_2 = 1100$$
$$I_3 = 1010$$

y el carcaj de Auslander-Reiten Γ_A *es:*



donde los módulos indescomponibles están representados por su vector dimensión.

Entonces el módulo $T = 1111 \oplus 0111 \oplus 0011 \oplus 0101$ *es APR inclinante.*

$\square$

CAPíTULO 4

El teorema de inclinación de Brenner-Butler

En este capítulo retomamos nuestro problema original: dada un álgebra A y un módulo inclinante T_A consideramos el álgebra $B = End_A T$ y queremos comparar $modA$ y $modB$.

Lema 4.1. *Si T_A es un módulo inclinante, $B = End_A T$ y $T_0 \in add(T)$, entonces* $\mathrm{Hom_A}(T_0, T)$ *y* $\mathrm{Hom_A}(T, T_0)$ *son B-módulos proyectivos (a izquierda y a derecha respectivamente).*

Demostración:

Si T_0 es sumando directo de T, entonces $\mathrm{Hom_A}(T_0, T)$ es sumando directo de $\mathrm{Hom_A}(T, T) = B$, por lo cual $\mathrm{Hom_A}(T_0, T)$ es proyectivo, por ser sumando directo del álgebra B (que es proyectiva).

Si $T_0 \in add(T)$, entonces $T_0 = \bigoplus_{i=1}^n T_i$ con cada T_i sumando directo de T. Por lo tanto $\mathrm{Hom_A}(T_0, T) = \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Hom_A}(T_i, T)$ es proyectivo, por ser suma directa de proyectivos.

Análogamente tenemos que $\mathrm{Hom_A}(T, T_0)$ es proyectivo.

□

Lema 4.2. *Si T_A es un módulo inclinante, $B = End_A T$ y Q es un B- módulo, entonces $Q \otimes_B T \in \mathcal{T}(T)$.*

Demostración:

Como T es inclinante se tiene que $\mathcal{T}(T) = GenT$ y entonces alcanza con ver que $Q \otimes_B T \in GenT$.

El B-módulo Q es finitamente generado, entonces existe un epimorfismo $f : B^m \twoheadrightarrow Q$, por lo tanto tenemos un epimorfismo $B^m \otimes_B T \overset{f \otimes_B 1_T}{\twoheadrightarrow} Q \otimes_B T$. Como $T^m \cong B^m \otimes_B T$, tenemos un epimorfismo $T^m \twoheadrightarrow Q \otimes_B T$. Entonces $Q \otimes_B T \in GenT$ como queríamos.

□

Lema 4.3. *Sean T_A un módulo inclinante y $B = End_A T$. Si Q es un B-módulo proyectivo, entonces existe un isomorfismo funtorial* $\delta_Q : Q \to \mathrm{Hom_A}(T, Q \otimes_B T)$ *donde* $x \overset{\delta_Q}{\longmapsto} (t \mapsto x \otimes_B t)$.

Demostración:

Sea Q un B-módulo proyectivo indescomponible, entonces Q es sumando directo de $B = \mathrm{Hom_A}(T, T)$.

Usando la descomposición de Pierce (ver en [4]), tenemos que existe T_i, sumando directo (indescomponible) de T, tal que $Q \cong \mathrm{Hom_A}(T, T_i)$.

Como el mapa evaluación es un isomorfismo en $\mathcal{T}(T)$ y $T_i \in add(T) \subseteq Gen(T) = \mathcal{T}(T)$, tenemos que $\mathrm{Hom_A}(T, T_i) \otimes_B T \cong T_i$.

Por lo tanto $\mathrm{Hom_A}(T, Q \otimes_B T) \cong \mathrm{Hom_A}(T, \mathrm{Hom_A}(T, T_i) \otimes_B T) \cong \mathrm{Hom_A}(T, T_i) \cong Q$.

Usando la aditividad del funtor $\mathrm{Hom_A}(T, - \otimes_B T)$ deducimos que se cumple para cualquier proyectivo.

Veamos que el isomorfismo δ_Q es functorial. Para eso tenemos que verificar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\delta_Q"] \arrow[d, "f"'] & FG(Q) \arrow[d, "FG(f)"] \\
Q' \arrow[r, "\delta_{Q'}"] & FG(Q'),
\end{tikzcd}$$

donde $F = \mathrm{Hom_A}(T, -)$ y $G = - \otimes_B T$.

$n \overset{\delta_Q}{\longmapsto} (t \mapsto n \otimes t) \overset{FG(f)}{\longmapsto} (t \mapsto f(n) \otimes t)$

$n \overset{f}{\longmapsto} f(n) \overset{\delta_{Q'}}{\longmapsto} (t \mapsto f(n) \otimes t)$.

Entonces $FG(f) \circ \delta_Q(n) = \delta_{Q'} \circ f(n)$.

$\square$

Lema 4.4. *Sean T_A un módulo inclinante, $B = End_A T$ y N_B un B-módulo tal que $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T) = 0$, entonces $\delta_N : N \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, N \otimes_B T)$ es un isomorfismo functorial.*

Demostración:

Sea $P_B \xrightarrow{\varphi} N_B \to 0$ una cobertura proyectiva de N_B. Consideremos $K = \operatorname{Ker}\varphi$, entonces tenemos la sucesión exacta corta $0 \to K_B \to P_B \to N_B \to 0$ con P proyectivo.

Si le aplicamos el functor $- \otimes_B T$ obtenemos, debido a que $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T) = 0$, la sucesión exacta corta $0 \to K \otimes_B T \to P \otimes_B T \to N \otimes_B T \to 0$.

Como, por el lema 4.2, $K \otimes_B T \in \mathcal{T}(T)$, tenemos que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T, K \otimes_B T) = 0$. Entonces, si aplicamos el functor $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, -)$ a la sucesión anterior, obtenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, K \otimes_B T) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, P \otimes_B T) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, N \otimes_B T) \to 0 \quad (1)$$

Similarmente sea $0 \to K'_B \xrightarrow{h} P'_B \to K_B \to 0$ con P' proyectivo.

Aplicándole el functor $- \otimes_B T$ obtenemos la sucesión exacta

$$K' \otimes_B T \xrightarrow{h \otimes 1} P' \otimes_B T \xrightarrow{\alpha} K \otimes_B T \to 0.$$

Si tomamos $L = \mathrm{Im}(h \otimes 1)$, tenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \to L \to P' \otimes_B T \to K \otimes_B T \to 0 \quad (*)$$

Como $K' \otimes_B T \in \mathcal{T}(T)$ que es cerrada por imágenes, $L \in \mathcal{T}(T)$. Entonces $\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T, L) = 0$, por lo cual, al aplicarle el functor $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, -)$ a la sucesión $(*)$, obtenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, L) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, P' \otimes_B T) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, K \otimes_B T) \to 0 \quad (2).$$

Combinando (1) y (2), obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r] \arrow[d, "\delta_{P'}"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\delta_P"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\delta_N"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, P' \otimes_B T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, P \otimes_B T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, N \otimes_B T) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como P y P' son proyectivos, por 4.3, δ_P y $\delta_{P'}$ son isomorfismos. Entonces δ_N es isomorfismo.

□

Teorema 4.5. *(Brenner-Butler). Sea A una k-álgebra de dimensión finita, T_A un módulo inclinante y $B = End_A T$. Entonces:*

(a) *${}_BT$ es un módulo inclinante y $A \cong End_B T$ canónicamente.*

(b) *Los functores $\mathrm{Hom_A}(T, -)$ y $- \otimes_B T$ inducen equivalencias quasi-inversas entre las subcategorías plenas*

$$\mathcal{T}(T_A) = \{M_A \ / \ \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M) = 0\} \ e \ \mathcal{Y}(T_A) = \{N_B \ / \, \mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_1(N, T) = 0\}.$$

y los functores $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, -)$ y $\mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_1(-, T)$ inducen equivalencias quasi-inversas entre las subcategorías plenas

$$\mathcal{F}(T_A) = \{M_A \ / \ \mathrm{Hom_A}(T, M) = 0\} \ y \ \mathcal{X}(T_A) = \{N_B \ / N \otimes_B T = 0\}.$$

(c) *Tenemos* $\mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_1(-, T)\,\mathrm{Hom_A}(T, -) = 0 = (- \otimes_B T)\,\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, -)$
y $\mathrm{Hom_A}(T, -)\,\mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_1(-, T) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, -)(- \otimes_B T)$.

Demostración:

Dividiremos la prueba en 9 partes.

(i) Para todo módulo M_A tenemos $\mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_1(\mathrm{Hom_A}(T, M), T) = 0$:

Como $\mathrm{Hom_A}(T, M) \cong \mathrm{Hom_A}(T, tM)$, puedo suponer que $M \in \mathcal{T}(T)$ y aplicando el lema 3.14, existe una sucesión exacta corta:

$$0 \to K \to T_0 \to M \to 0$$

con $T_0 \in add(T)$ y $K \in \mathcal{T}(T)$.

Ya que $K \in \mathcal{T}(T)$ sabemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, K) = 0$.

Si le aplicamos el functor $\mathrm{Hom_A}(T, -)$ obtenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \to \mathrm{Hom_A}(T, K) \to \mathrm{Hom_A}(T, T_0) \to \mathrm{Hom_A}(T, M) \to 0.$$

Si ahora le aplicamos el functor exacto a derecha $- \otimes_B T$ obtenemos la sucesión exacta:

$$\cdots \to \mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_1(\mathrm{Hom_A}(T, T_0), T) \to \mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_1(\mathrm{Hom_A}(T, M), T) \to \mathrm{Hom_A}(T, K) \otimes_B T \to \mathrm{Hom_A}(T, T_0) \otimes_B T \to \mathrm{Hom_A}(T, M) \otimes_B T \to 0.$$

Tenemos que $\mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_1(\mathrm{Hom_A}(T, T_0), T)$ vale cero, ya que por el lema 4.1, $\mathrm{Hom_A}(T, T_0)$ es un B-módulo proyectivo.

Comparando la sucesión anterior con la original obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(\mathrm{Hom_A}(T,M),T) \arrow[r] & \mathrm{Hom_A}(T,K)\otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_K"] & \mathrm{Hom_A}(T,T_0)\otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{T_0}"] & \mathrm{Hom_A}(T,M)\otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_M"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & T_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como $M, K \in \mathcal{T}(T)$, entonces, por el lema 3.18, ε_M y ε_K son isomorfismos, y por otro lado $T_0 \in add(T)$, con lo cual, por la observación 3.17, ε_{T_0} es isomorfismo.

Por lo tanto $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(\mathrm{Hom_A}(T,M),T) = 0$.

(ii) $dp_B T \leq 1$:

Por $(T3)$ existe una sucesión exacta corta $0 \to A_A \to T'_A \to T''_A \to 0$ con T' y T'' pertenecientes a $add(T)$. Si le aplicamos el functor $\mathrm{Hom_A}(-, {}_BT_A)$ obtenemos la sucesión exacta corta :

$$0 \to \mathrm{Hom_A}(T'', {}_BT_A) \to \mathrm{Hom_A}(T', {}_BT_A) \to \mathrm{Hom_A}(A, {}_BT_A) \cong {}_BT \to 0.$$

Como, por el lema 4.1, los primeros dos términos son B-módulos proyectivos, tenemos que $dp({}_BT) \leq 1$.

(iii) A cada módulo M_A le corresponde la sucesión

$$0 \to \mathrm{Hom_A}(T,M) \otimes_B T \xrightarrow{\varepsilon_M} M \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T,M),T) \to 0 :$$

Sea $(I^*) : 0 \to M \xrightarrow{d_0} I_0 \xrightarrow{d_1} I_1 \xrightarrow{d_2} I_2 \to \cdots$ resolución inyectiva de M_A
y $0 \to Q_1 \xrightarrow{\alpha} Q_0 \xrightarrow{\beta} {}_BT \to 0$ resolución proyectiva de T $(dp_BT \leq 1)$.

Por (i) para todo módulo M_A tenemos $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(\mathrm{Hom_A}(T,M),T) = 0$. Entonces al aplicar $\mathrm{Hom_A}(T, I^*) \otimes_B -$ a la resolución proyectiva de ${}_BT$, obtenemos la siguiente sucesión exacta de complejos:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,M)\otimes_B Q_1 \arrow[r, "1\otimes\alpha"] \arrow[d, "d_0^*\otimes 1"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,M)\otimes_B Q_0 \arrow[r, "1\otimes\beta"] \arrow[d, "d_0^*\otimes 1"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,M)\otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "d_0^*\otimes 1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,I_0)\otimes_B Q_1 \arrow[r, "1\otimes\alpha"] \arrow[d, "d_1^*\otimes 1"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,I_0)\otimes_B Q_0 \arrow[r, "1\otimes\beta"] \arrow[d, "d_1^*\otimes 1"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,I_0)\otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "d_1^*\otimes 1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,I_1)\otimes_B Q_1 \arrow[r, "1\otimes\alpha"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,I_1)\otimes_B Q_0 \arrow[r, "1\otimes\beta"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,I_1)\otimes_B T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

donde, como los módulos inyectivos pertenecen a $\mathcal{T}(T)$, por el lema 3.18, el último complejo es isomorfo a la resolución inyectiva I^* de M_A vía el mapa evaluación.

Además, como las columnas son complejos, $\mathrm{Im}(d_1^*\otimes 1)\subseteq \mathrm{Ker}(d_2^*\otimes 1)$. Entonces podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,M)\otimes_B Q_1 \arrow[r, "1\otimes\alpha"] \arrow[d, "d_0^*\otimes 1"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,M)\otimes_B Q_0 \arrow[r, "\varepsilon_M\circ 1\otimes\beta"] \arrow[d, "d_0^*\otimes 1"'] & M \arrow[d, "d_0"'] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,I_0)\otimes_B Q_1 \arrow[r, "1\otimes\alpha"] \arrow[d, "d_1^*\otimes 1"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,I_0)\otimes_B Q_0 \arrow[r, "\varepsilon_{I_0}\circ 1\otimes\beta"] \arrow[d, "d_1^*\otimes 1"'] & I_0 \arrow[r] \arrow[d, "d_1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(d_2^*\otimes 1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(d_2^*\otimes 1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\, d_2 = \mathrm{Im}\, d_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{\mathrm{Ker}(d_2^*\otimes 1)}{\mathrm{Im}(d_1^*\otimes 1)} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{\mathrm{Ker}(d_2^*\otimes 1)}{\mathrm{Im}(d_1^*\otimes 1)} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{\mathrm{Ker}\, d_2}{\mathrm{Im}\, d_1} = 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Por el lema de la serpiente existe una sucesión exacta larga:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, M) \otimes_B Q_1 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, M) \otimes_B Q_0 \to M \to \frac{\mathrm{Ker}(d_2^* \otimes 1_{Q_1})}{\mathrm{Im}(d_1^* \otimes 1_{Q_1})} \overset{\overline{1 \otimes \alpha}}{\to} \frac{\mathrm{Ker}(d_2^* \otimes 1_{Q_0})}{\mathrm{Im}(d_1^* \otimes 1_{Q_0})} \to 0.$$

Consideremos la sucesión exacta corta:

$$0 \to \mathrm{Im}\, d_1^* \to \mathrm{Ker}\, d_2^* \to \frac{\mathrm{Ker}\, d_2^*}{Imd_1^*} \to 0$$

aplicándole el functor exacto $- \otimes_B Q_i$ dado que Q_i es proyectivo, obtenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \to \mathrm{Im}\, d_1^* \otimes Q_i \to \mathrm{Ker}\, d_2^* \otimes Q_i \to \frac{\mathrm{Ker}\, d_2^*}{\mathrm{Im}\, d_1^*} \otimes Q_i \to 0.$$

Entonces,

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T, M) \otimes Q_i = \frac{\mathrm{Ker}\, d_2^*}{\mathrm{Im}\, d_1^*} \otimes Q_i \overset{\psi_i}{\cong} \frac{\mathrm{Ker}\, d_2^* \otimes Q_i}{\mathrm{Im}\, d_1^* \otimes Q_i} = \frac{\mathrm{Ker}(d_2^* \otimes 1_{Q_i})}{\mathrm{Im}(d_1^* \otimes 1_{Q_i})} \quad i = 0, 1; \ (1)$$

donde la última igualdad se debe a que:

- $\mathrm{Im}(d_1^* \otimes 1_{Q_i}) = \mathrm{Im}\, d_1^* \otimes Q_i, \quad i = 0, 1.$
- Si le aplicamos el functor exacto $- \otimes_B Q_i$ a la sucesión exacta corta

  $$0 \to \mathrm{Ker}\, d_2^* \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, I_1) \overset{d_2^*}{\to} \mathrm{Im}\, d_2^* \to 0$$

  obtenemos la sucesión exacta corta

  $$0 \to \mathrm{Ker}\, d_2^* \otimes Q_i \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, I_1) \otimes Q_i \overset{d_2^* \otimes 1_{Q_i}}{\to} \mathrm{Im}\, d_2^* \otimes 1 \to 0,$$

  por lo cual $\mathrm{Ker}(d_2^* \otimes 1_{Q_i}) = \mathrm{Ker}\, d_2^* \otimes Q_i, \quad i = 0, 1.$

Usando (1) tenemos el siguiente diagrama conmutativo exacto:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T,M) \otimes_B Q_1 = \frac{\mathrm{Ker}\, d_2^*}{\mathrm{Im}\, d_1^*} \otimes_B Q_1 \arrow[r, "1_{\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T,M)} \otimes_B \alpha"] \arrow[d, "\psi_1"', "\cong"] & \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T,M) \otimes_B Q_0 = \frac{\mathrm{Ker}\, d_2^*}{\mathrm{Im}\, d_1^*} \otimes_B Q_0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T,M) \otimes_B T \arrow[r] & 0 \\
\frac{\mathrm{Ker}\, d_2^* \otimes Q_1}{\mathrm{Im}\, d_1^* \otimes Q_1} = \frac{\mathrm{Ker}(d_2^* \otimes 1_{Q_1})}{\mathrm{Im}(d_1^* \otimes 1_{Q_1})} \arrow[r, "\overline{1 \otimes \alpha}"] & \frac{\mathrm{Ker}\, d_2^* \otimes Q_0}{\mathrm{Im}\, d_1^* \otimes Q_0} = \frac{\mathrm{Ker}(d_2^* \otimes 1_{Q_0})}{\mathrm{Im}(d_1^* \otimes 1_{Q_0})} \arrow[r] \arrow[u, "\cong", "\psi_0^{-1}"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, si $v = \psi_0^{-1} \circ \overline{1 \otimes \alpha} \circ \psi_1$, tenemos la sucesión exacta:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,M)\otimes_B Q_1 \xrightarrow{1\otimes\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,M)\otimes_B Q_0 \xrightarrow{\varepsilon_M \circ 1\otimes\beta} M \xrightarrow{w'} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T,M)\otimes Q_1 \xrightarrow{v} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T,M)\otimes Q_0 \to 0\ (*).$$

Consideremos el epimorfismo $a : \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,M) \otimes_B Q_0 \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}(1 \otimes \alpha)$.

Como la sucesión $(*)$ es exacta la coimagen de $\varepsilon_M \circ 1 \otimes \beta$ coincide con el conúcleo de $1 \otimes \alpha$ que es isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,M) \otimes_B T$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,M) \otimes_B Q_0 \arrow[rr, "\varepsilon_M \circ 1\otimes\beta"] \arrow[dr, "1\otimes\beta"'] & & M \\
& \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,M) \otimes_B T \arrow[ur, hook, "\varepsilon_M"'] &
\end{tikzcd}.$$

Si también consideramos el monomorfismo $b : \mathrm{Ker}\, v \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T,M)\otimes_B Q_1$, como el núcleo del morfismo v coincide con la imagen de w' podemos considerar la factorización de w' por su imagen:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Ker}\, v \arrow[dr, hook, "b"] & \\
M \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "w'"] & & \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T,M) \otimes_B Q_1
\end{tikzcd}.$$

Entonces, como $v = \psi_0^{-1} \circ \overline{(1 \otimes \alpha)} \circ \psi_1 = 1_{\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T,M)} \otimes_B \alpha$, $\mathrm{Ker}\, v \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T,M), T)$.

Por lo tanto tenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T,M) \otimes_B T \xrightarrow{\varepsilon_M} M \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T,M), T) \longrightarrow 0.$$

(iv) $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, M) \otimes_B T = 0$:

Se deduce de la sobreyectividad del morfismo v anterior.

(v) A todo B-módulo N_B le corresponde una sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(T, \mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_1(N, T)) \longrightarrow N_B \xrightarrow{\delta_N} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, N \otimes_B T) \longrightarrow 0,$$

donde $x \overset{\delta_N}{\mapsto} (t \mapsto x \otimes_B t)$:

Sean $\cdots \to Q_1 \overset{d_1}{\to} Q_0 \overset{d_0}{\to} N_B \to 0$ una resolución proyectiva de N_B en $modB$
y $0 \to P_1 \to P_0 \to T_A \to 0$ una resolución proyectiva de T_A en $modA$ ($dpT_A \leq 1$).

Consideremos $R_0 = \mathrm{Ker}\, d_0$, entonces tenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \to R_0 \overset{d}{\to} Q_0 \overset{d_0}{\to} N_B \to 0.$$

Como Q_0 es proyectivo, al aplicarle el functor $- \otimes_B T$, obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \to \mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_1(N, T) \to R_0 \otimes_B T \to Q_0 \otimes_B T \to N \otimes_B T \to 0$$

Si ahora le aplicamos el functor $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_i, -)$ con $i = 0, 1$ (es exacto pues P_i es proyectivo), obtenemos las sucesiones exactas:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_0, \mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_1(N, T)) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_0, R_0 \otimes_B T) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_0, Q_0 \otimes_B T) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_0, N \otimes_B T) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_1, \mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_1(N, T)) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_1, R_0 \otimes_B T) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_1, Q_0 \otimes_B T) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_1, N \otimes_B T) \to 0.$$

Además, si le aplicamos el functor $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, -)$, podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$(**)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & R_0 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_{R_0}"] & Q_0 \arrow[d, "\delta_{Q_0}"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, \mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_1(N, T)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, R_0 \otimes_B T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, Q_0 \otimes_B T)
\end{tikzcd}$$

Veamos que $R_0 \in \mathcal{Y}(T_A)$. Para ello apliquémosle el functor $\mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}(-, \mathrm{T})$ a la sucesión exacta $0 \to R_0 \overset{d}{\to} Q_0 \overset{d_0}{\to} N_B \to 0$. Obtenemos entonces la sucesión exacta:

$$\cdots \to \mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_2(\mathrm{N}, \mathrm{T}) = 0 \to \mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_1(\mathrm{R}_0, \mathrm{T}) \to \mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_1(\mathrm{Q}_0, \mathrm{T}) = 0 \to \mathrm{Tor}^{\mathrm{B}}_1(\mathrm{N}, \mathrm{T}) \to \cdots,$$

donde los ceros se deben a que $dp_B T \leq 1$ y a que Q_0 es proyectivo respectivamente. Entonces $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(R_0, T) = 0$, por lo cual $R_0 \in \mathcal{Y}(T_A)$.

Como $R_0 \in \mathcal{Y}(T_A)$, tenemos, por 4.4, que $R_0 \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, R_0 \otimes_B T)$.

Además, por 4.3, $Q_0 \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, Q_0 \otimes_B T)$.

Entonces, usando el diagrama $(**)$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(\mathrm{N}, \mathrm{T})) = 0$. $(*_1)$

Por lo tanto, usando el lema 4.2, podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$(*_2)$

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_0, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_1, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, R_0 \otimes_B T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_0, R_0 \otimes_B T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_1, R_0 \otimes_B T) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, Q_0 \otimes_B T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_0, Q_0 \otimes_B T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_1, Q_0 \otimes_B T) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(T, N \otimes_B T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_0, N \otimes_B T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(P_1, N \otimes_B T) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Usando los lemas 4.3 y 4.4 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom_A}(P_0, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom_A}(P_1, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom_A}(P_0, R_0 \otimes_B T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom_A}(P_1, R_0 \otimes_B T) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom_A}(P_0, Q_0 \otimes_B T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom_A}(P_1, Q_0 \otimes_B T) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & N \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom_A}(P_0, N \otimes_B T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom_A}(P_1, N \otimes_B T) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Si aplicamos el lema de la serpiente obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \to \mathrm{Hom_A}(P_0, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T)) \xrightarrow{u'} \mathrm{Hom_A}(P_1, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T)) \xrightarrow{w} N \xrightarrow{w'} \mathrm{Hom_A}(P_0, N \otimes_B T) \xrightarrow{v'} \mathrm{Hom_A}(P_1, N \otimes_B T) \to 0.$$

Por el mismo procedimiento de (iii) podemos obtener la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker} u' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} \operatorname{Ker} v' \longrightarrow 0.$$

Veamos que $\operatorname{Coker} u' \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T))$. Si le aplicamos el functor $\mathrm{Hom_A}(-, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T))$ a la sucesión exacta corta $0 \to P_1 \to P_0 \to T_A \to 0$, obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \to \mathrm{Hom_A}(T, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T)) \to \mathrm{Hom_A}(P_0, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T)) \xrightarrow{u'} \mathrm{Hom_A}(P_1, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T)) \xrightarrow{a}$$

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T)) \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(P_0, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T)) = 0,$$

donde el último término vale cero porque P_0 es proyectivo. Deducimos entonces que $\operatorname{Coker} u' \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T))$.

Como, por $(*_2)$, $\operatorname{Ker} v' \cong \mathrm{Hom_A}(T, N \otimes_B T)$ tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T)) \longrightarrow N_B \xrightarrow{\delta_N} \mathrm{Hom_A}(T, N \otimes_B T) \longrightarrow 0.$$

(vi) $\mathrm{Hom_A}(T, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T)) = 0$:

Se deduce de $(*_1)$.

(vii) Prueba de (c):

- $\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T, N \otimes_B T) = 0$ porque $N \otimes_B T \in \mathcal{T}(T)$, por 4.2.
- $\mathrm{Hom_A}(T, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T)) = 0$, $\forall N_B$, por (vi).
- $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(\mathrm{Hom_A}(T,M),T) = 0$, $\forall M_A$, por (i).
- $\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T,M) \otimes_B T = 0$, $\forall M_A$, por (iv).

Entonces $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(-,T)\,\mathrm{Hom_A}(T,-) = 0 = (- \otimes_B T)\,\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T,-)$
y $\mathrm{Hom_A}(T,-)\,\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(-,T) = 0 = \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T,-)(- \otimes_B T)$.

$(viii)$ Prueba de (b):

Consideremos las sucesiones exactas cortas dadas por (v) y (iii):

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T)) \longrightarrow N_B \xrightarrow{\delta_N} \mathrm{Hom_A}(T, N \otimes_B T) \longrightarrow 0 \quad (1)$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom_A}(T,M) \otimes_B T \xrightarrow{\varepsilon_M} M_A \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T,M),T) \longrightarrow 0 \quad (2)$$

- Si $N_B \in \mathcal{X}(T_A)$, $N \otimes_B T = 0$, por lo cual $\mathrm{Hom_A}(T, N \otimes_B T) = 0$. Entonces, por (1), $\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T, \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(N,T)) \cong N$.
- Si $M_A \in \mathcal{F}(T_A)$, $\mathrm{Hom_A}(T,M) = 0$, por lo cual $\mathrm{Hom_A}(T,M) \otimes_B T = 0$. Entonces, por (2), $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T,M),T) \cong M$.
- Si $M_A \in \mathcal{T}(T_A)$, $\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T,M) = 0$, por lo que $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{B}}(\mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^1(T,M),T) = 0$. Entonces, por (2), $\mathrm{Hom_A}(T,M) \otimes_B T \cong M$.
- Si $N_B \in \mathcal{Y}(T_A)$, por 4.4, $\mathrm{Hom_A}(T, N \otimes_B T) \cong N$.

Ya probamos (en el lema 4.3) que δ_N es functorial. De forma análoga se prueba que los otros tres isomorfismos también son functoriales.

(ix) Prueba de (a):

Veamos primero que ${}_BT$ es inclinante.

- por (ii), $dp({}_BT) \leq 1$.
- $dpT_A \leq 1$, entonces si $0 \to P_1 \to P_0 \to T_A \to 0$ es una resolución proyectiva de T_A, aplicando el functor $\mathrm{Hom_A}(-, T)$, obtenemos la sucesión exacta corta:

  $$0 \to \mathrm{Hom_A}(T, T) = B \to \mathrm{Hom_A}(P_0, T) \to \mathrm{Hom_A}(P_1, T) \to 0.$$

  Veamos que $\mathrm{Hom_A}(P_0, T), \mathrm{Hom_A}(P_1, T) \in add({}_BT)$. Como $T \cong \mathrm{Hom_A}(A, T) \cong \mathrm{Hom_A}(\bigoplus_{i=1}^{s} P_i, T) \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{Hom_A}(P_i, T)$ con P_i proyectivos indescomponibles, $\mathrm{Hom_A}(P, T) \in add(T)$, $\forall P$ proyectivo indescomponible. Entonces $\mathrm{Hom_A}(P, T) \in add(T)$, $\forall P$ proyectivo.
- Alcanza con probar que $\mathrm{Ext^1_B(D({}_BT), D({}_BT))} = 0$. Tomemos entonces una sucesión exacta corta:

  $$0 \to D({}_BT) \to N_B \to D({}_BT) \to 0 \quad (1).$$

  $D({}_BT) = \mathrm{Hom_k({}_BT, k) \cong Hom_k(T \otimes_A A, k) \cong Hom_A(T, DA)}$, donde el último isomorfismo se debe a 1.1.

  Como A es proyectivo como módulo, DA es inyectivo, entonces $\mathrm{Ext^1_A}(T, DA) = 0$ y $DA \in \mathcal{T}(T)$. Aplicando (b) tenemos que $D({}_BT) \cong \mathrm{Hom_A}(T, DA) \in \mathcal{Y}(T_A)$.

  Además, aplicando el functor $\mathrm{Tor^B(-, T)}$ a la sucesión:

  $$0 \to D({}_BT) \to N_B \to D({}_BT) \to 0,$$

  deducimos que $N \in \mathcal{Y}(T_A)$.

  Entonces $0 \to D({}_BT) \to N_B \to D({}_BT) \to 0$ es una sucesión exacta en $\mathcal{Y}(T_A)$.

  Si le aplicamos el functor $- \otimes_B T$ obtenemos, por (b), la sucesión exacta

  $$0 \to D({}_BT) \otimes_B T \to N_B \otimes_B T \to D({}_BT) \otimes_B T \to 0 \quad (2),$$

  en $\mathcal{T}(T_A)$.

  $D({}_BT) \otimes_B T \cong \mathrm{Hom_A}(T, DA) \otimes_B T \cong DA$, porque $DA \in \mathcal{T}(T)$. Entonces, como DA es inyectivo, la sucesión (2) se escinde en $\mathcal{T}(T)$.

  Como los functores $\mathrm{Hom_A}(T, -)$ y $- \otimes_B T$ son equivalencias inversas entre $\mathcal{T}(T_A)$ e $\mathcal{Y}(T_A)$, la sucesión exacta corta escindente, que se obtiene al aplicar el functor

$\mathrm{Hom_A}(T, -)$ a la sucesión exacta corta escindente (2), es isomorfa a la sucesión (1). Por lo tanto la sucesión (1) se escinde.

Ahora veamos que $A \cong \mathrm{End}({}_BT)$ canónicamente.

Sea $f : A \to \mathrm{End}({}_BT)$ el morfismo de álgebras canónico dado por: $a \overset{f}{\longmapsto} (t \mapsto ta)$.

Observemos que f es inyectivo, ya que si $a \in \operatorname{Ker} f$, entonces $Ta = 0$, y como todo módulo inclinante es fiel, tenemos que $a = 0$.

Si consideramos los isomorfismos de espacios vectoriales:

$$A \cong \mathrm{End}_A(DA) \cong \mathrm{End}_B(\mathrm{Hom_A}(T, DA)) \cong \mathrm{End}_B(D({}_BT));$$

deducimos que $\dim_{\mathrm{k}}(\mathrm{End}_B({}_BT)) = \dim_{\mathrm{k}}(\mathrm{End}_B(D({}_BT))) = \dim_{\mathrm{k}} A$.

Por lo tanto f es un isomorfismo.

□

Corolario 4.6. *Se cumple que $D\mathcal{X}(T_A) = \mathcal{F}({}_BT)$ y $D\mathcal{Y}(T_A) = \mathcal{T}({}_BT)$. En particular, $(\mathcal{X}(T_A), \mathcal{Y}(T_A))$ es una teoría de torsión en modB.*

Demostración:

Se deduce de los isomorfismos: $\mathrm{Tor_n^B(D(_BN), T) \cong DExt_B^n(T, N)}$, válidos para todo $n \geq 0$.

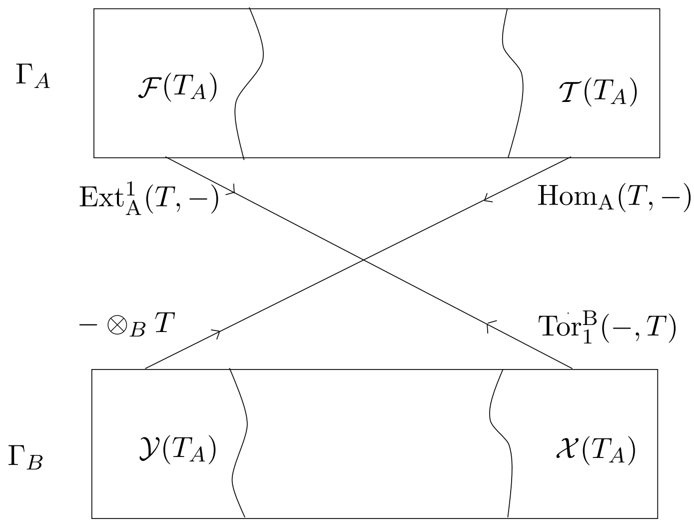
□

Observemos que se puede visualizar la equivalencia del teorema de Brenner-Butler en el carcaj de Auslander-Reiten.

Como $\mathcal{T}(T_A)$ contiene a los A-módulos inyectivos, se encuentra a la "derecha"de Γ_A, mientras que $\mathcal{F}(T_A)$ se encuentra a la "izquierda"de $\mathcal{T}(T_A)$, ya que no existen morfismos de un módulo de torsión a uno libre de torsión.

Similarmente $\mathcal{Y}(T_A)$, como contiene a los B-módulos proyectivos, se encuentra a la "izquierda"de Γ_B, mientras que $\mathcal{X}(T_A)$ se encuentra a la "derecha".

Entonces podemos considerar el siguiente dibujo, que muestra las equivalencias quasi-inversas.

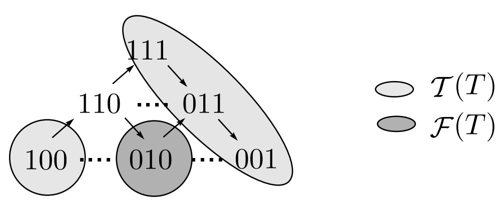


Ejemplo 4.7. *Consideremos el álgebra A dada por el carcaj:*

$$\overset{1}{\cdot} \xleftarrow{\beta} \overset{2}{\cdot} \xleftarrow{\alpha} \overset{3}{\cdot}$$

y el módulo inclinante $T = 100 \oplus 111 \oplus 001$ *del ejemplo* 3,2.

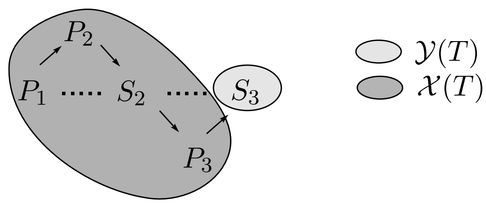
Ilustraremos en el carcaj de Auslander-Reiten Γ_A la teoría de torsión $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ inducida por T en mod$A$.



El álgebra $B = End_A(T)$ está dada por el carcaj:

$$\overset{1}{\cdot} \xleftarrow{\beta} \overset{2}{\cdot} \xleftarrow{\alpha} \overset{3}{\cdot} \quad \textit{con } \beta\alpha = 0.$$

Entonces la teoría de torsión $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ inducida por T en mod$B$ es ilustrada en Γ_B como sigue:

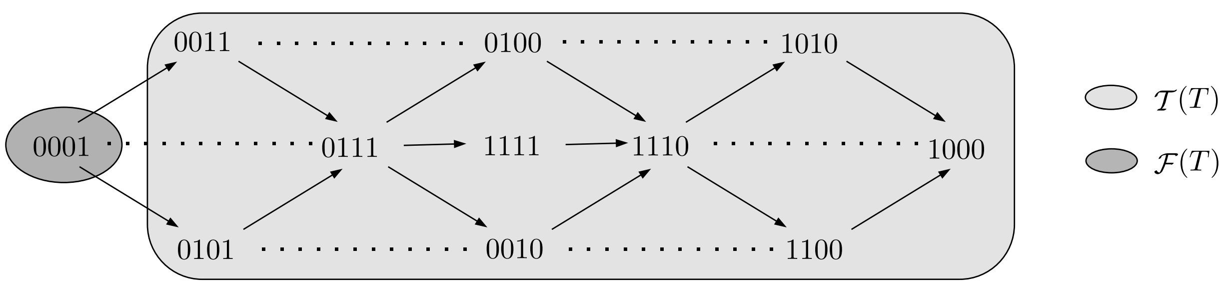


$\square$

Ejemplo 4.8. *Sea A el álgebra dada por el carcaj:*

$$\begin{tikzcd} & \overset{3}{\cdot} \arrow[dr, "\beta_1"] & \\ \overset{1}{\cdot} \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & & \overset{4}{\cdot} \\ & \overset{2}{\cdot} \arrow[ur, "\beta_2"'] & \end{tikzcd} \qquad \textit{con} \quad \beta_2\alpha_2 = \beta_1\alpha_1.$$

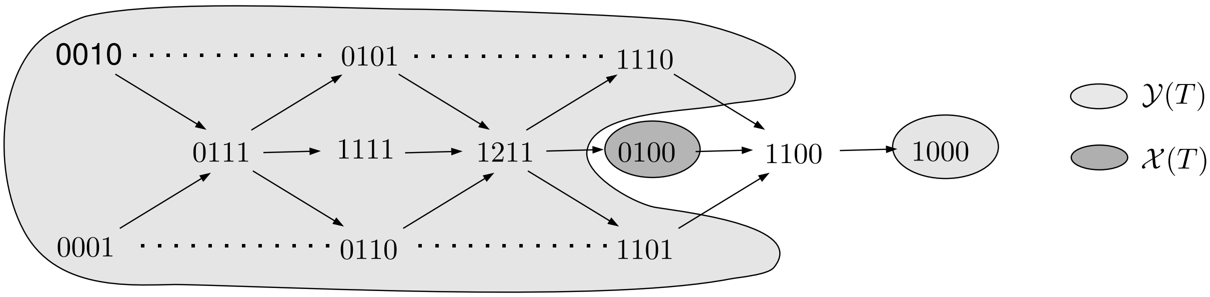
El módulo APR inclinante $T = 1111 \oplus 0111 \oplus 0011 \oplus 0101$ del ejemplo 3,21 *induce una teoría de torsión $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ en mod$A$ ilustrada en Γ_A como sigue:*



El álgebra $B = End_A(T)$ está dada por el carcaj:

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\cdot} \arrow[r] & \overset{2}{\cdot} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{3}{\cdot} \\ & \overset{4}{\cdot} & \end{tikzcd}$$

y la teoría de torsión $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ inducida por T en mod$B$ es ilustrada en Γ_B como sigue:


0010
0101
1110
0111
1111
1211
0100
1100
1000
0001
0110
1101
$\mathcal{Y}(T)$
$\mathcal{X}(T)$

□

Notaciones

Para un álgebra de Artin A y un A-módulo M

$ModA$	categoría de A-módulos a derecha
$modA$	categoría de A-módulos a derecha finitamente generados
$indA$	categoría de A-módulos a derecha finitamente generados e indescomponibles
A^{op}	el álgebra opuesta de A
$D : modA \to mod(A^{op})$	la dualidad estándar para álgebras de Artin
dpM	dimensión proyectiva de M
diM	dimensión inyectiva de M
$l(M)$	longitud de M
$radM$	radical de M
$addM$	categoría formada por todas las sumas directas de sumandos directos de M
TrM	transpuesto de M
$ann_A M$	anulador de M en A
$End_A(M)$	álgebra de endomorfismos de M
$soc(M)$	sócalo de M
$proyA$	categoría de A-módulos a derecha proyectivos
$inyA$	categoría de A-módulos a derecha inyectivos
τ	traslación de Auslander-Reiten
P_i o $P(i)$	proyectivo indescomponible asociado al vértice i del carcaj
S_i o $S(i)$	simple asociado al vértice i del carcaj
$Gen(M)$	clase de todos los A-módulos generados por M
$Cogen(M)$	clase de todos los A-módulos cogenerados por M

Bibliografía

[1] I. Assem: *Tilting Theory - An Introduction*, Rapport no. 47, 1988.

[2] I. Assem: *Algebrès et modules*, Masson, 1997.

[3] I. Assem, D. Simson y A. Skowroński: *Elements of Representation Theory of Assosiative Algebras, Vol 1:Techniques of Representation Theory*, Cambridge University Press, 2005.

[4] Y. A. Drozd y V. V. Kirichenko: *Finite Dimensional Algebras*, Springer-Verlag, 1994.

[5] D. Happel y C. M. Ringel: *Tilted Algebras*, Transactions of the American Mathematical Society, Volumen 274, no. 2 (399-443), 1982.

[6] J. J. Rotman: *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, 1979.