FLUJOS EXPANSIVOS SINGULARES

Alfonso Artigue

Tesis de Maestría en Matemática: Pedeciba - Universidad de la República Oriental del Uruguay. Defendida el 3 de diciembre de 2010.

Orientador: Miguel Paternain.
Tribunal: Miguel Paternain, Martín Sambarino y José Vieitez.

Prólogo

Mi interés en el tema de los flujos expansivos surge a partir del *problema del triángulo*: demostrar que todo billar triangular tiene órbitas periódicas. Hasta el momento nadie lo pudo resolver, por lo menos de acuerdo a mis últimas consultas. En un período de investigación sobre resultados conocidos sobre el problema Pablo Lessa me muestra [2], un artículo que vincula el problema a los sistemas expansivos. Hacía poco que habíamos recibido, junto a Joaquín Brum y Rafael Potrie, un curso de *Dinámica de Homeomorfismos Expansivos*, dictado por Jorge Lewowicz y José Vieitez. Así que naturalmente seguimos esa pista: tratar de resolver el problema del triángulo usando técnicas de homeomorfismos expansivos. Contrariamente a lo que deseaba, no pudimos resolver el problema (aún), pero me permitió descubrir el mundo de los flujos expansivos con puntos singulares. El primer gran desafío fue entender la definición de flujo expansivo, por eso es que escribí un capítulo dedicado a eso exclusivamente. El resto del trabajo es una conjunción entre las ideas de la expansividad en el billar triangular y las técnicas de Jorge Lewowicz para el estudio de los homeomorfismos expansivos en superficies compactas.

Luego de la defensa me dediqué a rescribir esta Tesis. En agosto de 2011 la envié para que se considere su publicación y por la respuesta que obtuve confío en que se publicará en la revista *Discrete and continuous dynamical systems* con el nombre *Expansive flows of surfaces.* Ahí el lector encontrará que, como mi inglés es pésimo, me tuve que concentrar en que el contenido matemático fuera correcto. Así que por un lado lo hallará más preciso en varios aspectos, en parte por las exigencias de los árbitros de la revista. Pero por otro lado lo encontrará más frío, dada las limitaciones que el poco conocimiento del idioma me impone.

Sin embargo el contenido de ambos trabajos es esencialmente el mismo.

Quiero agradecer: a Miguel Paternain por haberme orientado en este trabajo, por su paciencia y sus consejos, a Joaquín Brum, Pablo Lessa y Rafael Potrie por innumerables conversaciones e iluminadoras sugerencias, a Jorge Lewowicz cuyas ideas fueron una guía en esta Tesis, a Roberto Markarián por su apoyo en mi introducción al estudio de la dinámica de Billares, a José Vieitez por su motivación especialmente en el período de finalización, a Mauricio Achigar, Juán Alonso, Matías Carrasco, Matilde Martínez, Zezé Pacífico, Álvaro Rovella, Andrés Sambarino, Martín Sambarino, Mario Shannon y Juliana Xavier con quienes he conversado más de un tema presente en esta exposición y cuyos aportes fueron importantes y finalmente al grupo del Seminario de Sistemas Dinámicos del Imerl por haberme escuchado más de una vez.

Alfonso Artigue
Salto, Uruguay
20 de marzo de 2012

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo surge de vincular estos tres conceptos: sistemas expansivos, billares poligonales planos y flujos singulares. La relación entre los billares y la expansividad es establecida en [2] por G. Galperin, T. Kruger y S. Troubetzkoy. En ese artículo se consideran billares poligonales planos y se demuestra que si se excluyen las órbitas periódicas y las que rebotan en los vértices, el mapa de colisiones es un homeomorfismo expansivo. La idea intuitiva es que dos trayectorias se separan cuando aparece un vértice del polígono entre ellas, obligandolas a rebotar en lados distintos. El vínculo entre los flujos singulares en superficies compactas y los billares es dado por A. Zemlyakov y A. Katok en [15]. Construyen a partir de un billar poligonal plano racional y una dirección fija, un flujo en una superficie compacta que puede presentar singularidades de tipo silla asociadas a los vértices del polígono.

Vinculando las propiedades expansivas que pueden presentar los billares y la construcción de un flujo a partir de un billar, concluimos en este trabajo que si se fija una direccion en el polígono en la que no haya órbitas periódicas, el flujo resultante es expansivo y con singularidades. Este resultado surge como corolario del estudio de los flujos expansivos en superficies.

Descripción del contenido

Capítulo 1. Discutiremos las nociones básicas de los flujos expansivos, examinando posibles definiciones de expansividad. Un objetivo importante es convencer al lector de la necesidad de la definición de M. Komuro.

Capítulo 2. Mostraremos que un flujo en el círculo es expansivo si y solo si tiene una cantidad finita de puntos de equilibrio.

Capítulo 3. Estudiamos flujos expansivos en superficies compactas. En la primera sección se estudian nociones básicas de flujos en superficies: singularidades, separatrices, estabilidad y singularidades evitables. En la siguiente sección se demuestra que la expansividad (en ausencia de singularidades evitables) es equivalente a que las singularidades sean sillas múltiples y que la unión de sus separatrices sea densa en la superficie. Se demuestra también que la expansividad es equivalente a que no haya puntos errantes ni periódicos (que estarán soportados en superficies de género mayor que uno). En la sección 3 se demuestra que los flujos (continuos) expansivos en superficies son topológicamente equivalentes a flujos de clase C^∞ (utilizando los resultados de [3]). La sección 4 presenta una descomposición de la dinámica en piezas cuasiminimales. Finalmente damos un modelo para estas piezas cuasiminimales mediante suspensiones de mapas de intercambio de intervalos.

Capítulo 4. Relacionamos la expansividad en superficies con la existencia de órbitas periódicas en billares poligonales racionales, asociadas a una dirección en el polígono.

Apéndice. Se incluye un breve resumen relativo a secciones transversales para flujos.

Capítulo 2

Flujos expansivos

En este capítulo vamos a estudiar diferentes posibles definiciones de flujo expansivo. Nos interesamos en distinguir la expansividad cinemática, geométrica y singular. El objetivo principal es establecer el concepto de expansividad geométrica singular dada por M. Komuro en [7].

2.1. Estudio de definiciones alternativas

2.1.1. Primer intento

El primer concepto es una traducción directa de la definición en el caso discreto.[1]

Definición 2.1. Diremos que un puntos p es *singular* o de *equilibrio* si para todo $t \in \mathbb{R}$ ocurre que $\phi_t(p) = p$. A los puntos no singulares los llamaremos *regulares.*

Proposición 2.2. *Sea* $\phi\colon \mathbb{R} \times X \to X$ *un flujo continuo en un espacio métrico compacto* X*. Supongamos que existe* $\delta > 0$ *tal que:* $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *implica* $x = y$*. Entonces* X *es un conjunto finito.*

Demostración. Primero vamos a demostrar que no hay puntos regulares. Para eso supongamos por absurdo que existe un punto regular $x \in X$. Luego, como ϕ es continuo y X es compacto, existe $T > 0$ tal que para todo $y \in X$ se cumple que

[1] El resultado que sigue fue observado en [1] antes de dar la definición de flujo expansivo.

$\mathrm{dist}(\phi_t(y), y) < \delta$ si $|t| < T$. Pero como x no es singular existe $s \in (-T, T)$ tal que $\phi_s(x) \neq x$. Si llamamos z a $\phi_s(x)$ tenemos que $\mathrm{dist}(\phi_t(z), \phi_t(x)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ ya que $\phi_s(\phi_t(x)) = \phi_t(z)$ y $|s| < T$. Esto es absurdo porque $z \neq x$.

Ahora solo resta ver que hay una cantidad finita de singularidades. Si hubiese infinitas, por la compacidad de X, existen dos de ellas que distan menos que δ entre si. Estos dos puntos contradicen la hipótesis trivialmente. □

2.1.2. Segundo intento

Analicemos que fue lo que pasó en el caso anterior. La expansividad fue negada por puntos en una misma órbita. Entonces podemos intentar la siguiente definición: un flujo es expansivo si existe $\delta > 0$ tal que si $\mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces x e y están en una misma órbita.[2]

Esta definición tiene un problema. Es posible suspender un homeomorfismo[3] no expansivo y conseguir que el flujo quede expansivo (según la definición dada en el párrafo anterior). Describo un ejemplo a continuación.

Sea $X \subset S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ dado por

$$X = \{\infty\} \cup \{(n, 0) : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{n, \pm 1/m) : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+, |n| \leq m\}.$$

Definimos $f \colon X \to X$ mediante las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} f(\infty) = \infty \\ f(n, 0) = (n+1, 0) \\ f(n, \pm 1/m) = (n+1, \pm 1/m) \text{ si } n < m \text{ y} \\ f(m, \pm 1/m) = (-m, \mp 1/m). \end{cases}$$

Es fácil ver que esto es un homeomorfismo y que no es expansivo ya que los puntos de la forma $(0, 1/m)$ y $(0, -1/m)$ contradicen la expansividad para constantes

[2] En [10] se utiliza esto como definición de flujo inestable.

[3] Dado uno homeomorfismo $f \colon X \to X$ y una función $T \colon X \to \mathbb{R}^+$ definimos el espacio

$$X_T = \bigcup_{0 \leq t \leq T(x)} (x, t) / (x, f(x)) \simeq (f(x), 0)$$

y la *suspensión de f por T* como el flujo $\phi \colon \mathbb{R} \times X_T \to X_T$ que verifica $\phi_t(x, s) = (x, t + s)$ si $0 \leq t + s < T(x)$.

arbitrariamente pequeñas. Por otro lado estos son los únicos puntos que contradicen la expansividad y como están en la misma órbita se verifica que su suspensión (por la función $T = 1$ por ejemplo) es expansiva según la definición que estamos considerando.

2.1.3. Expansividad cinemática

En la definición, en lugar de decir "x está en la órbita e y" debemos decir de alguna manera "x e y están localmente en la misma órbita". A priori, esto se puede hacer de dos maneras: una temporal y otra espacial. Dados dos puntos x e y en una misma órbita, decimos que están *temporalmente próximos* si $y = \phi_t(x)$ para algún valor chico de t. Decimos que están *espacialmente próximos* si hay un segmento de órbita de diámetro chico que contiene a x y a y. Mostraremos que las dos formas de encarar el asunto son la misma (cosa que no ocurrirá en la expansividad geométrica con singularidades, como veremos más adelante).

Proposición 2.3. *Sea $\phi\colon \mathbb{R} \times X \to X$ un flujo continuo en un espacio métrico compacto X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ y $\phi_s(x) = y$.*[4]

2. *Para todo $\beta > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que si $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta'$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces existe un segmento de órbita de diámetro menor que β que contiene a x y a y.*

Demostración. Para ver que la primera implica a la segunda consideremos un valor de $\beta > 0$ dado. Si tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $\beta \geq \text{máx}\{\operatorname{dist}(\phi_t(x), x) : x \in X, t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$ tenemos por 1 que existe δ que verifica 1. Luego tomamos $\delta' = \delta$ y la prueba es trivial.

Para el recíproco hay que tener cuidado porque estar cerca en distancia no implica estar cerca en tiempo ya que puede haber puntos singulares. Antes que nada

[4] En [1] se considera esto como posible definición de flujo expansivo, pero es descartada rápidamente.

fijemos un valor de $\varepsilon > 0$ cualquiera. Tomemos un $\beta_1 > 0$ y por hipótesis, item 2, existe δ_1 correspondiente. Es fácil ver que existe necesariamente una cantidad finita de órbitas de diámetro menor que $\delta_1/2$. Tomo $\beta_2 > 0$ tal que si el diámetro de la órbita de un punto p es menor que β_2 entonces p es una singularidad. Para este β_2 existe un δ_2 por hipótesis. Tomemos $\rho < \delta_2/2$. Es fácil ver que para todo $x \in B_\rho(\text{Sing})$, $x \notin \text{Sing}$, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{t_0}(x) \notin B_\rho(\text{Sing})$. Afirmamos que existe $\beta_3 \in (0, \beta_2)$ tal que si $x \notin B_\rho(\text{Sing})$ y $\text{diam}(\phi_{[0,t]}(x) < \beta_3$ entonces $|t| < \varepsilon$ (el dado al principio). Si no fuera el caso, existiria $x_n \to z$, $x_n \notin B_\rho(\text{Sing})$ y $t_n \to \infty$ tales que $\text{diam}(\phi_{[0,t_n]}(x_n)) \to 0$. Esto implica que $z \in \text{Sing}$ lo cual es absurdo. Finalmente la constante de expansividad asociada a ε es δ_3, la asociada a β_3 por hipótesis. Veamos porqué. Supongamos $\text{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta_3$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego, podemos suponer que x no es singular y por lo tanto existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{t_0}(x) \notin B_\rho(\text{Sing})$. Entonces $\text{dist}(\phi_t(\phi_{t_0}(x)), \phi_t(\phi_{t_0}(y))) < \delta_3$ y por hipótesis existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_s(\phi_{t_0}(x)) = \phi_{t_0}(y)$ y además el diámetro de $\phi_{[0,s]}(\phi_{t_0}(x))$ es menor que β_3. Como $\phi_{t_0} \notin B_\rho(\text{Sing})$ tenemos que $|s| < \varepsilon$ y por lo tanto $\phi_s(x) = y$ con $|s| < \varepsilon$. □

A continuación vamos a ver dos ejemplos de expansividad cinemática en superficies.

Ejemplo 2.4. *Sean f la función identidad en un intervalo y ϕ una suspensión por una función creciente. Todas las órbitas de ϕ son periódicas y los períodos son todos distintos. Este ejemplo es cinemáticamente expansivo y se obtuvo suspendiendo un homeomorfismo no expansivo. Además es cinemáticamente expansivo al futuro*[5].

Se ve también acá que ser cinemáticamente expansivo no es invariante por equivalencia topológica[6]*. Basta reparametrizar todas las órbitas para que tengan el mismo período y conseguir que el flujo no sea expansivo.*

[5]Un flujo es *cinemáticamente expansivo al futuro* si: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\text{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta$ para todo $t \geq 0$ entonces existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ y $\phi_s(x) = y$.

[6]Decimos que dos flujos son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo de X que preserva órbitas y la orientación de cada órbita.

Ejemplo 2.5. *Sean X un campo que genera un flujo irracional en el toro $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ y $f\colon T^2 \to [0,1]$ continua que solo se anula en un punto $p \in T^2$. Definimos el flujo ϕ por el campo fX. Este flujo es cinemáticamente expansivo y tiene la propiedad de que cualquiera de sus topológicamente equivalentes es también cinemáticamente expansivo.*

2.2. Expansividad geométrica o de Komuro

La idea geométrica de la expansión viene asociada a las reparametrizaciones de las órbitas. El concepto, vagamente dicho, es que si dos órbitas se mantienen cerca todo el tiempo, aún reparametrizando alguna de ellas, entonces ambos puntos están localmente en la misma órbita. Esto intenta evitar la separación cinemática que observamos en los ejemplos anteriores. Si queremos darle un papel importante a las singularidades en la teoría debemos evitar la dificultad que presenta el siguiente resultado[7].

Proposición 2.6. *Sea $\phi\colon \mathbb{R} \times X \to X$ un flujo continuo en un espacio métrico compacto X tal que existen $\delta, \varepsilon > 0$ tal que si $\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta$ para algún homeomorfismo creciente de $\mathbb{R}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces existe $s \in R$ tal que $|s| < \varepsilon$ y $\phi_s(x) = y$. Entonces las singularidades de ϕ son puntos aislados de X.*

Demostración.[8] Por absurdo supongamos que existe una singularidad $p \in X$ que no es un punto aislado de X. Por la continuidad de ϕ tenemos que existe $x \in X$, $x \neq p$, tal que $\operatorname{dist}(\phi_t(x), p) \leq \delta/2$ si $|t| < 3\varepsilon$. Defino $y = \phi_\varepsilon(x)$ y $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$h(t) = \begin{cases} t+\varepsilon & t \leq -2\varepsilon \\ t/2 & -2\varepsilon \leq t \leq 0 \\ 2t & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ t+\varepsilon & t \geq \varepsilon \end{cases}$$

[7]En [1] se prueba un resultado análogo a este pero en la definición de expansivo permiten que las reparametrizaciones h sean simplemente funciones continuas, con lo cual la prueba es trivial (ya que se considera la reparametrización constante $h(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$).

[8]Este resultado fue demostrado en [11].

Asi h es un homeomorfismo creciente de $\mathbb{R}$ que fija al cero. Vamos a demostrar que $\operatorname{dist}(\phi_t(y), \phi_{h(t)}(x)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

- Si $t \notin (-2\varepsilon, \varepsilon)$ tenemos que $h(t) = t + \varepsilon$ y por tanto $\phi_{h(t)}(x) = \phi_{t+\varepsilon}(x) = \phi_t(y)$.

- Si $t \in (-2\varepsilon, \varepsilon)$ entonces $|t+\varepsilon| < 2\varepsilon$ y $\operatorname{dist}(\phi_t(y), p) = \operatorname{dist}(\phi_{t+\varepsilon}(x), p) < \delta/2$. Además $|h(t)| < 2\varepsilon$, por lo tanto $\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), p) < \delta/2$. Entonces se concluye por la propiedad triangular.

Si $\phi_t(x) \neq y$ para todo $|t| < \varepsilon$ ya llegamos a una contradicción. Supongamos entonces que existe $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $\phi_s(x) = y$. Además habíamos definido al punto y como $\phi_\varepsilon(x)$, con lo cual $x = \phi_{\varepsilon-s}(x)$ con $0 < |\varepsilon - s| < 2\varepsilon$. Por lo tanto $\operatorname{dist}(\phi_t(x), p) = \operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_t(p)) \leq \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y como p es singular $\phi_t(x) \neq p$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Llegando asi también a una contradicción. □

Con esta definición (la hipótesis de la Proposición anterior) ninguno de los ejemplos anteriores es expansivo. El problema estuvo en cómo decir "están localmente en la misma órbita". Esto fue hecho pidiendo que los puntos estén en un mismo segmento de órbita en un tiempo corto. Como se ve en la prueba anterior, cerca de las singularidades un segmento de órbita puede tener diámetro chico y sin embargo el tiempo que lleva recorrerlo puede ser arbitrariamente grande.

En esta situación hay dos soluciones equivalentes: una temporal y otra espacial. La primera es pedir que esten en la misma órbita en tiempo corto pero en algún momento de la órbita. Esta idea es la que se aplica en la definición de Komuro [7], es la que usaremos en este trabajo y la reproducimos a continuación. La otra solución, que examineramos luego, es pedir que los puntos estén en un segmento de órbita de diámetro chico.

Definición 2.7. (Expansividad de Komuro). Un flujo $\phi\colon \mathbb{R} \times X \to X$ continuo en un espacio métrico compacto X es expansivo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para algún homeomorfismo $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y que fije el cero, entonces existen $s, t_0 \in \mathbb{R}$ tales que $|s| < \varepsilon$ y $\phi_{h(t_0)}(x) = \phi_{t_0+s}(y)$.

La siguiente Proposición muestra que esta definición coincide con la de Bowen y Walters si no hay singularidades[9].

Proposición 2.8. *Sea $\phi\colon \mathbb{R}\times X \to X$ un flujo continuo sin singularidades en un espacio métrico compacto X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *(M. Komuro) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si*

$$\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ siendo $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo creciente que fije el cero, entonces existen $t_0, s \in \mathbb{R}$ tales que $|s| < \varepsilon$ y $\phi_{h(t_0)}(x) = \phi_{t_0+s}(y)$.

2. *(R. Bowen y P. Walters) Para todo $\varepsilon' > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que si*

$$\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta'$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ siendo $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo creciente que fije el cero, entonces existe $s \in \mathbb{R}$ tales que $|s| < \varepsilon'$ y $x = \phi_s(y)$.

Demostración. Para ver que (2) implica (1) hay que tomar $t_0 = 0$. Esto es independiente de que no haya singularidades.

Veamos que (1) implica (2). Observemos primero que, como no hay singularidades, existe $T_0 > 0$ tal que para todo $T \in (0, T_0)$ existe $\rho_T > 0$ tal que para todo $x \in X$, $\operatorname{dist}(x, \phi_T(x)) > \rho_T$. Lo demostraremos por absurdo. Si fijamos $T_0 > 0$ y tomamos $\rho_n \to 0$, existe una sucesión x_n tal que $\operatorname{dist}(x_n, \phi_T(x_n)) \to 0$ para algún $T \in (0, T_0)$. Si suponemos que $x_n \to x$ tenemos que $\phi_T(x) = x$. Si ahora hacemos $T_0 \to 0$ obtenemos y_n y $T_n \to 0$ tales que $\phi_{T_n}(y_n) = y_n$. Supongamos que $y_n \to y$. Como $T_n \to 0$ y $T_n \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ existe $k_n \in \mathbb{Z}$ tal que $k_n T_n \to t$. Observemos que $\phi_{k_n T_n}(y_n) = y_n$. Por la continuidad de ϕ tenemos que $\phi_t(y) = y$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego y es una singularidad, lo cual es absurdo.

Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $T \in (0, \varepsilon)$, $\varepsilon' \in (0, T)$ y $\rho_T > 0$ como en el párrafo anterior. Por hipótesis existe $\delta' > 0$ asociado a ε'. Probaremos que para

[9]Este resultado fue demostrado en [11].

el ε dado, cualquier $\delta \in (0, \rho_T) \cap (0, \delta')$ satisface la tesis. Supongamos que $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por (1) existen $s, t_0 \in \mathbb{R}$ tales que $|s| < \varepsilon'$ y $\phi_{s+t_0}(x) = \phi_{h(t_0)}(y)$. Entonces

$$\phi_{-t+s+t_0+h(t)-h(t_0)}(\phi_t(x)) = \phi_{h(t)}(y) \tag{2.1}$$

Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = |-t + s + t_0 + h(t) - h(t_0)|$ que es continua. Luego $g(t_0) = |s| < \varepsilon' < T$ y además par todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $g(t) \neq T$. Lo que implica que $g(t) \in [0, T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces por la ecuación (2.1), evaluada en $t = 0$, tenemos que $\phi_{s+t_0-h(t_0)}(x) = y$ y $|s + t_0 - h(t_0)| = g(0) < \varepsilon$. Con lo que concluye la prueba. $\square$

Otra manera de abordar el concepto de estar localmente en la misma órbita, es decir que los puntos estén en un mismo segmento de órbita de diámetro chico.

Definición 2.9. Decimos que x e y están *β-conectados* si existen z y t tales que $x, y \in \phi_{[0,t]}(z)$ y el diámetro de $\phi_{[0,t]}(z)$ es menor que β.

Proposición 2.10. *Sean X un espacio métrico compacto, $\phi\colon \mathbb{R}\times X \to X$ un flujo continuo y β_0[10] el ínfimo de los diámetros de las órbitas no singulares. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *ϕ es expansivo Komuro,*
2. *para todo $\beta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para algún homeomorfismo $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y que fije el cero, entonces x e y están β-conectados,*
3. *existen $\beta_1 \in (0, \beta_0)$ y $\delta' > 0$ tales que si $\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta'$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para algún homeomorfismo $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y que fije el cero, entonces x e y están β_1-conectados.*

Observación 2.11. *Si $\beta_0 = 0$, en cualquiera de los tres casos de la Proposición anterior, se concluye que X es un conjunto finito. En ese caso es trivial demostrar la equivalencia. Por tanto en la demostración asumiremos que $\beta_0 > 0$.*

[10] El parámetro β_0 asociado al flujo, será considerado en varias oportunidades sin volver a definirlo.

Antes de la demostración, un comentario y un Lema. Primero quiero explicar porqué existe este resultado. El primer item es la primera definición de flujo expansivo pensada para singularidades. El segundo rescata la noción de estar localmente en la misma órbita. El tercer item responde a la siguiente inquitud: ¿que tan expansivo es algo cuya constante de expansividad depende de un ε o un β? No es difícil ver que si ε o β tienden a cero entonces el valor de δ asociado también tiende a cero. El tercer item muestra que existe una buena constante de expansividad, esto pasa por establecer una noción de "estar localmente en la misma órbita" que sea suficiente.

Lema 2.12. *Si ϕ es un flujo con una cantidad finita de singularidades entonces para todo $\beta \in (0, \beta_0)$ existe $\delta > 0$ tal que si $\operatorname{dist}(\phi_{g(t)}(x), \phi_t(x)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y algúna función continua $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(0) = 0$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$, los puntos $\phi_{g(t)}(x)$ y $\phi_t(x)$ están β-conectados.*

Demostración. Por absurdo supongamos que existe $\beta \in (0, \beta_0)$, $\delta_n \to 0$, x_n y funciones g_n tales que

$$\operatorname{dist}(\phi_{g_n(t)}(x_n), \phi_t(x_n)) < \delta_n \tag{2.2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $g_n(0) = 0$ y además existe t_n tal que $\phi_{g_n(t_n)}(x_n)$ y $\phi_{t_n}(x_n)$ no están β-conectados. Sin perder generalidad podemos suponer que los t_n son positivos y además que son minimales, es decir, para todo $t \in [0, t_n)$ los puntos $\phi_{g_n(t)}(x_n)$ y $\phi_t(x_n)$ están β-conectados. Esto implica que los puntos $a_n = \phi_{g_n(t_n)}(x_n)$ y $b_n = \phi_{t_n}(x_n)$ están conectados por un segmento de órbita de diámetro exactamente β y no por uno de diámetro menor. Por la ecuación (2.2) tenemos que $\operatorname{dist}(a_n, b_n) < \delta_n \to 0$, por lo cual podemos suponer que $a_n, b_n \to c$. Nuevamente podemos suponer que $\phi_{s_n}(a_n) = b_n$ con $s_n > 0$ y $\operatorname{diam}(\phi_{[0,s_n]}(a_n)) = \beta$ (el razonamiento que sigue sería análogo si $s_n < 0$). Si los valores de s_n estuvieran acotados concluimos que c es un punto periódico no singular y que el diámetro de su órbita es β contradiciendo que $\beta < \beta_0$. Si s_n no está acotado podemos suponer que $s_n \to +\infty$. Luego supongamos que $\phi_{[0,s_n]}(a_n)$ converge a K en la topología de Hausdorff[11]

[11] Si $A, B \subset X$ son compactos se define la distancia de Hausdorff entre A y B como $d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \operatorname{dist}(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \operatorname{dist}(a, b)\}$.

de los compactos de X. Es facil ver que K es invariante por el flujo y que su diámetro es β. Luego como en X hay finitas singularidades y K tiene infinitos puntos tenemos que en K hay alguna órbita no singular que tiene diámetro menor o igual a β, llegando asi al mismo absurdo que antes. □

Demostración de la Proposición 2.10. Primero observar que en cualquiera de los tres casos la cantidad de singularidades es finita.

($1 \to 2$) Observemos que si probamos la afirmación para algún valor de β entonces la afirmación queda probada para todo β mayor, simplemente usando el mismo δ. Luego es suficiente suponer un $\beta \in (0, \beta_0)$. Luego aplicamos el Lema anterior para un valor $\beta' \in (0, \beta)$ y nos da un valor $\delta' > 0$. Sea $\delta'' \in (0, \delta')$. Por continuidad existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\text{si } \operatorname{diam}(\phi_{[a,b]}(x)) < \beta' \text{ entonces } \operatorname{diam}(\phi_{[a-\varepsilon,b+\varepsilon]}(x)) < \beta \tag{2.3}$$

Eventualmente achicando ε podemos suponer también que

$$\text{si } \operatorname{dist}(x, y) < \delta'' \text{ entonces } \operatorname{dist}(\phi_s(x), y) < \delta', \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \tag{2.4}$$

Por hipótesis existe una constante de expansividad δ''' asociada al valor de ε fijado. Afirmamos que cualquier valor $\delta < \delta', \delta'', \delta'''$ es una constante de expansividad para β. Veamos porqué. Supongamos que

$$\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta, \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

Entonces por hipótesis existen $s, t_0 \in \mathbb{R}$ tales que $\phi_{h(t_0)}(x) = \phi_{t_0+s}(y)$ y $|s| < \varepsilon$. La idea es aplicarle a $z = \phi_{h(t_0)}(x)$ el Lema anterior con $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $g(t) = h(t_0 + t) - h(t_0)$. Por la ecuación (2.5) tenemos que

$$\operatorname{dist}(\phi_{g(t)}(z), \phi_{t-s}(z)) < \delta$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, ya que

$$\begin{aligned}
&\phi_{g(t)}(z) = \phi_{h(t_0+t)-h(t_0)}(\phi_{h(t_0)}(x)) = \phi_{h(t_0+t)}(x),\\
&\phi_{t-s}(z) = \phi_{t-s}(\phi_{h(t_0)}(x)) = \phi_{t+t_0}(\phi_{h(t_0)-s-t_0}(x)) = \phi_{t+t_0}(y)
\end{aligned}$$

Como $|s| < \varepsilon$, por la ecuación (2.4) tenemos que $\operatorname{dist}(\phi_{g(t)}(z), \phi_t(z)) < \delta'$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ya que $\delta < \delta''$. Luego por el Lema anterior tenemos que los puntos $\phi_{g(-t_0)}(z)$ y $\phi_{-t_0}(z)$ están β'-conectados. Estos puntos son x y $\phi_s(y)$ respectivamente. Finalmente por cómo tomamos ε en función de β' tenemos que x e y están β-conectados.

($2 \to 1$) Primero observemos que existe $\gamma > 0$ tal que para todo $x \notin B_\gamma(\mathrm{Sing})$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_t(x) \notin B_\gamma(\mathrm{Sing})$. Si no fuera el caso se negaría la expansividad.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera y fijemos un valor de γ por lo dicho anteriormente. Entonces lo siguiente es cierto: existe $\beta > 0$ tal que si $\operatorname{dist}(x, \mathrm{Sing}) \geq \gamma$ y $\operatorname{diam}(\phi_{[0,s]}(x)) < \beta$ entonces $|s| < \varepsilon$. La prueba de esto es la siguiente. Por absurdo, supongamos que existen sucesiones $x_n \notin B_\gamma(\mathrm{Sing})$ y $t_n \notin (-\varepsilon, \varepsilon)$ tales que $\operatorname{diam}(\phi_{[0,t_n]}(x_n)) \to 0$. Tomando una subsucesión podemos suponer que x_n converge a $z \notin B_\gamma(\mathrm{Sing})$, con lo cual z no es una singularidad. Luego como z no es singular existe $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ tal que $\phi_{\varepsilon'}(z) \neq z$. Pero por la continuidad de ϕ se tiene que $\phi_{\varepsilon'}(x_n)$ converge a $\phi_{\varepsilon'}(z)$, contradiciendo que $\operatorname{diam}(\phi_{[0,t_n]}(x_n)) \to 0$.

Para el valor de β del párrafo anterior existe una constante de expansividad δ, por hipótesis. Afirmamos que para el ε dado al principio este valor de δ funciona. Para probarlo supongamos que existen $x, y \in X$, un homeomorfismo $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente que fija el cero tales que $\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(y), \phi_t(x)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Observemos que no puede haber dos singularidades a distancia menor que δ por la expansividad. Luego alguno de los dos puntos no es singular, digamos que $x \notin \mathrm{Sing}$. Ya dijimos que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{t_0}(x) \notin B_\gamma(\mathrm{Sing})$. Apliquemos la definición de expansividad a los puntos $\phi_{h(t_0)}(y)$ y $\phi_{t_0}(x)$ con el homeomorfismo $h'(t) = h(t + t_0) - h(t_0)$ que es creciente y fija el cero. Se cumple que

$$\operatorname{dist}(\phi_{h'(t)}(\phi_{h(t_0)}(y)), \phi_t(\phi_{t_0}(x))) = \operatorname{dist}(\phi_{h(t+t_0)-h(t_0)}(\phi_{h(t_0)}(y)), \phi_t(\phi_{t_0}(x))) =$$
$$\operatorname{dist}(\phi_{h(t+t_0)}(y)), \phi_{t+t_0}(x))) < \delta$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego por hipótesis tenemos que $\phi_{h(t_0)}(y)$ y $\phi_{t_0}(x)$ están en un mismo segmento de órbita de diámetro menor que β. Por lo demostrado al principio tenemos que como $\phi_{t_0}(x) \notin B_\gamma(\mathrm{Sing})$, existe $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $\phi_{h(t_0)}(y) = \phi_{t_0+s}(x)$. Con lo que concluye la prueba.

$(2 \to 3)$ Es un caso particular.

$(3 \to 2)$ Dado un valor β mayor o igual a β_1 el asunto es trivial usando el valor de $\delta = \delta'$ de la hipótesis. Supongamos $\beta \in (0, \beta_1)$. Si ningún valor de δ funciona para ese β, entonces existe $\delta_n \to 0$, $x_n, y_n \to z$ y homeomorfismos h_n tales que $\operatorname{dist}(\phi_{h_n(t)}(x_n), \phi_t(y_n)) < \delta_n$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y de forma que x_n e y_n están β_1-conectados pero no β-conectados. Entonces concluimos igual que en la prueba del Lema. Si $\phi_{s_n}(x_n) = y_n$ y $\operatorname{diam}(\phi_{[0,s_n]}(x_n)) \in [\beta, \beta_1]$ entonces un punto de acumulación (en la topología de Hausdorff) de $\phi_{[0,s_n]}(x_n)$ contiene una órbita no singular de diámetro menor que β_0 lo cual es absurdo. $\square$

Capítulo 3

Flujos expansivos en el círculo

En este capítulo estudiaremos la expansividad en el círculo. Además de dar una caracterización muy sencilla, demostraremos que la expansividad cinemática coincide con la geométrica en el caso unidimensional. La demostración del Lema siguiente es válida en espacios métricos compactos.

Lema 3.1. *Si un flujo tiene solo una cantidad finita de órbitas entonces es geométricamente expansivo.*

Demostración. En este párrafo demostraremos que los únicos puntos recurrentes al futuro o al pasado[1] son los periódicos y los singulares. Supongamos por absurdo que existe $x \in X$ recurrente al futuro (al pasado es similar), no periódico ni singular[2]. Sea $l \subset X$ una sección transversal local abierta que contenga a x de tiempo $\tau > 0$ (Proposición A.2). Para cada $y \in l$ tenemos que $\phi_{(-\tau,\tau)}(y) \cap l = \{y\}$, por lo tanto el conjunto $l \cap \phi_{\mathbb{R}}(y)$ es a lo sumo numerable. Como el flujo presenta finitas órbitas concluimos que l es a lo sumo numerable. Por otro lado como x es recurrente, si $y \in \phi_{\mathbb{R}}(x) \cap l$, existe $t_n \to +\infty$ tal que $\phi_{t_n}(x) \to y$. Podemos suponer que $\phi_{t_n}(x) \in l$ y como x no es periódico también suponemos que $\phi_{t_n}(x) \neq y$. Luego $\phi_{\mathbb{R}}(x) \cap l$ no tiene puntos aislados. Sea $\delta > 0$ tal que $\text{clos}(B_\delta(x)) \subset \phi_{(-\tau,\tau)}(l)$ y $A = B_\delta(x) \cap l \cap \phi_{\mathbb{R}}(x)$. Entonces A tampoco tiene puntos aislados. Con lo cual $\text{clos}(A) \subset l$ y $\text{clos}(A)$ no tiene puntos aislados.

[1]Un punto x es recurrente al futuro (pasado) si existe $t_n \to +\infty$ $(-\infty)$ tal que $\phi_{t_n}(x) \to x$.

[2]En general cuando hablemos de puntos peródicos supondremos que no son singulares

Entonces $\text{clos}(A)$ es compacto, no tiene puntos aislados y por estar incluido en l es numerable. Esto contradice directamente el Teorema de Baire: los complementos de los puntos son una cantidad numerable de abiertos densos cuya intersección es vacía.

Como consecuencia tenemos que si $x \notin \phi_{\mathbb{R}}(y)$ entonces

$$\text{clos}(\phi_{\mathbb{R}}(x)) \neq \text{clos}(\phi_{\mathbb{R}}(y)).$$

Demostrémoslo. La afirmación es clara si x o y son periódicos o singulares. Supongamos que no son periódicos ni singulares y razonando por absurdo tenemos que existe $t_n \in \mathbb{R}$ una sucesión divergente tal que $\phi_{t_n}(y) \to x$. A su vez, para cada n existe otra sucesión divergente s_k^n tal que $\phi_{s_k^n}(x) \to \phi_{t_n}(y)$ cuando $k \to \infty$. Podemos suponer que todas las sucesiones s_k^n convergen a $+\infty$. Entonces existe una subsucesión k_n tal que $s_{k_n}^n \to +\infty$ y $\phi_{s_{k_n}^n}(x) \to x$ cuando $n \to +\infty$. Luego x es recurrente al futuro, contradiciendo lo demostrado en el párrafo anterior.

Sean d_H la distancia de Hausdorff en los compactos de X y

$$2\delta' = \inf\{d_H(\text{clos}(\phi_{\mathbb{R}}(x)), \text{clos}(\phi_{\mathbb{R}}(y))) : x \notin \phi_{\mathbb{R}}(y)\}$$

Por lo dicho antes δ' es positivo ya que solo hay una cantidad finita de compactos invariantes. Entonces si $x \notin \phi_{\mathbb{R}}(y)$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\text{dist}((\phi_t(x), \phi_{\mathbb{R}}(y)) > \delta'$. Esto nos da la expansividad para puntos en diferentes órbitas.

Ahora tomo $x_1, \dots, x_j$ un punto en cada órbita y fijo $\varepsilon > 0$. Entonces si x_n es periódico o singular, existe $\delta_n > 0$ tal que si $\text{dist}(\phi_s(x), x) < \delta_x$ entonces existe $s' \in \mathbb{R}$ tal que $|s'| < \varepsilon$ y $\phi_s(x) = \phi_{s'}(x)$. Y si x_n no es periódico ni singular, no es recurrente y existe $\delta_n > 0$ tal que si $\text{dist}(\phi_s(x_n), x_n) < \delta_n$ entonces $|s| < \varepsilon$. Entonces $\delta = \min\{\delta', \delta_1, \dots, \delta_j\}$ es una constante de expansividad. □

Corolario 3.2. *Para un flujo en el círculo son equivalentes: 1) expansividad geométrica, 2) expansividad cinemática y 3) tener finitas singularidades.*

Demostración. En general la expansividad geométrica implica a la cinemática y la expansividad cinemática implica la finitud de la cantidad de puntos singulares. Por otro lado, en el círculo, tener finitas singularidades implica tener finitas órbitas y se concluye por el Lema anterior. □

Capítulo 4

Flujos expansivos en superficies

Las dinámicas expansivas en superficies son bien conocidas en el caso discreto. Estas son conjugadas a difeomorfismos pseudo-anosov ([5, 8]). En el caso continuo es sabido que no hay flujos expansivos sin singularidades en superficies ([9]).

En esta sección vamos a estudiar flujos expansivos-Komuro con singularidades. Estos estarán soportados en superficies de género mayor que uno. La relación que tienen con los homeomorfismos expansivos es grande. Como veremos, las órbitas de los flujos expansivos cuasiminimales lucen esencialmente como las hojas de la foliación estable de un homeomorfismo pseudo-Anosov. Las singularidades (puntos de equilibrio) de los flujos expansivos son sillas múltiples y se parecen a las singularidades de los homeomorfismos pseudo-Anosov.

Primero daremos condiciones necesarias y suficientes para la expansividad. Luego demostraremos que todo flujo expansivo es topológicamente equivalente a uno de clase C^∞. A continuación estudiaremos su estructura, mostrando una descomposición un subsuperficies con borde e invariantes. En cada una de estas piezas la dinámica es cuasiminimal. Finalmente daremos modelos con suspensiones de intercambios de intervalos, para los expansivos cuasiminimales sin conexiones de silla.

Antes de todo esto explicaremos algunas cuestiones básicas de dinámica de superficies, estabilidad y singularidades evitables.

4.1. Nociones preliminares

4.1.1. Separatrices y estabilidad

En toda esta sección S será una superficie compacta, sin borde y orientable. Además $\phi\colon \mathbb{R}\times S \to S$ denotará un flujo continuo.

Definición 4.1. El *conjunto estable* de un punto x es

$$W^s(x) = \{y \in S : \lim_{t\to+\infty} \mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) = 0\}.$$

Análogamente el *conjunto inestable* de x es

$$W^u(x) = \{y \in S : \lim_{t\to-\infty} \mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) = 0\}.$$

En superficies, si p es una singularidad, a cada órbita del conjunto estable o inestable, distinta de $\{p\}$, se le llama *separatriz* de p.

Definición 4.2. Decimos que x es *estable* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\mu > 0$ tal que si $y \in B_\mu(x)$ entonces $\mathrm{dist}(\phi_t(y), \phi_t(x)) < \varepsilon$ para todo $t > 0$. Decimos que un punto es *asintóticamente estable* si es estable e interior a su conjunto estable.

Proposición 4.3. *Si el flujo es expansivo entonces todo punto singular estable es asintóticamente estable.*

Demostración.[1] Sea δ una constante de expansividad. Supongamos por absurdo que p es una singularidad estable pero no asintóticamente estable. Esto es, existen $\mu > 0$ y $x \in B_\mu(p)$ tales que $\phi_{\mathbb{R}^+}(x) \subset B_\mu(p)$, pero $\omega(x) \neq \{p\}$[2]. Luego $\omega(x) \subset \mathrm{clos}(B_\mu(p))$ es invariante y contiene algún punto q distinto de p. Entonces $\mathrm{dist}(\phi_t(q), \phi_t(p)) \leq \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo cual contradice la expansividad ya que p y q están en diferentes órbitas. $\square$

[1]Esta demostración es válida en espacios métricos compactos.

[2]Definimos el conjunto ω-límite de un punto y como el conjunto

$$\omega(y) = \{a \in S : \exists t_n \to +\infty / \phi_{t_n}(x) \to a\}.$$

Definición 4.4. Una singularidad aislada es una *silla múltiple* si tiene una cantidad positiva y finita de separatrices.

Lema 4.5. *Si p es una silla múltiple entonces existe un disco abierto D_p tal que $\overline{D}_p \cap Sing = \{p\}$ y $\partial D_p = \cup_{i=1}^{i=n}(\alpha_i \cup \beta_i \cup \gamma_i^+ \cup \gamma_i^-)$. Donde α_i y β_i son segmentos de óbitas y $\gamma_i^{\pm}$ son segmentos transversales, de forma que existen $x_i \in \gamma_i^+$ y $y_i \in \gamma_i^-$ tales que $W^u(p) = \{p\} \cup \cup_{i=0}^n \operatorname{orb}(x_i)$, $W^s(p) = \{p\} \cup \cup_{i=0}^n \operatorname{orb}(y_i)$, como se muestra en la figura 4.1.*

Demostración. Sean $x'_1, \dots, x'_n$ e $y'_1, \dots, y'_m$ tales que el conjunto estable de p es la unión disjunta de las órbitas de los puntos $x'_1, \dots, x'_n, p$ y el conjunto inestable de p sea la unión disjunta de las órbitas de los puntos $y'_1, \dots, y'_m, p$. Considero un disco D' que contenga a p, que no contenga otras singularidades en su clausura y que no contenga a los x'_i ni a los y'_i. Elijamos otro disco D cuya clausura esté contenida en D' y $p \in D$. Tomemos los tiempos $t(x'_i) > 0$ para los cuales $x_i = \phi_{t(x'_i)}(x'_i) \in \partial D$ y $\phi_{(0,+\infty)}(x_i) \subset D$. Análogamente tomo $t(y_i) < 0$ tal que $y_i = \phi_{t(y'_i)}(y'_i) \in \partial D$ y $\phi_{(-\infty,0)}(y_i) \subset D$. En cada x_i e y_i tomo una sección transversal $\hat{\gamma}_i^+$ y $\hat{\gamma}_i^-$ respectivamente, de tiempo $\tau > 0$ contenida en D'. Si las secciones son suficientemente chicas podemos suponer que $\phi_{\pm\tau}(\hat{\gamma}_i^{\pm}) \subset D$. Sean $W_i^+ = \phi_{\mathbb{R}^+}(x_i)$, $W_i^- = \phi_{\mathbb{R}^-}(y_i)$ y $W = \cup_{i=1}^n W_i^+ \cup \cup_{i=1}^m W_i^- \cup \{p\}$. Entonces $D \setminus W$ es unión de discos abiertos. Afirmación: si $z \in D \setminus W$ entonces existen $t_1 < 0 < t_2$ tales que $\phi_{t_i}(z) \in \partial D$. Si no fuera el caso, por el Teorema de Poincare-Bendixon tenemos que $\omega(z) = p$ (o $\alpha(z) = p$[3]) ya que en D no hay más singularidades que p. Pero entonces z pertenece a algún W_i^+ (o W_i^-), lo cual es absurdo. Fijemos una componente conexa A de $D \setminus W$. Entonces si $z_n \to p$ y $z_n \in A$, existen $t_n < 0 < s_n$ tales que $\phi_{t_n}(z_n), \phi_{s_n}(z_n) \in \partial D$, $t_n \to -\infty$ y $s_n \to +\infty$. Si $\phi_{t_n}(z_n) \to u \in \partial D$ entonces $\omega(u) = p$. Análogamente, si $\phi_{s_n}(z_n) \to v \in \partial D$ entonces $\alpha(v) = p$. Luego u es alguno de los puntos x_i y v es uno de los y_j. Entonces tomo n suficientemente grande de forma tal que la órbita futura de z_n corte a $\hat{\gamma}_i^-$, la órbita pasada corte

[3] Definimos el conjunto α-límite de un punto y como el conjunto

$$\alpha(y) = \{a \in X : \exists t_n \to -\infty / \phi_{t_n}(x) \to a\}.$$

a $\hat{\gamma}_j^+$ y $\phi_{[t_n,s_n]}(z_n) \subset D'$. Estos puntos de corte $\phi_{t_n}(z_n)$ y $\phi_{s_n}(z_n)$ son los que forman los extremos de las subsecciones transversales que definen a $\gamma_i^\pm \subset \hat{\gamma}_i^\pm$. A su vez definimos α_i como $\phi_{[t_n,s_n]}(z_n)$ si $\phi_{t_n}(z_n)$ esta a la izquierda (mirando en la dirección del flujo) de x_i en γ_i^+ y β_i como el mismo segmento de órbita en el caso en que $\phi_{t_n}(z_n)$ esta a la derecha de x_i. Es claro que procediendo de esta manera en cada componente conexa de $D \setminus W$ se concluye que $m = n$. Luego la unión de los segmentos transversales $\gamma_i^\pm$ y los segmentos de órbita α_i y β_i es una curva de Jordan contenida en el disco D'. Por tanto rodea un disco que llamamos D_p con lo cual concluye la prueba. $\square$

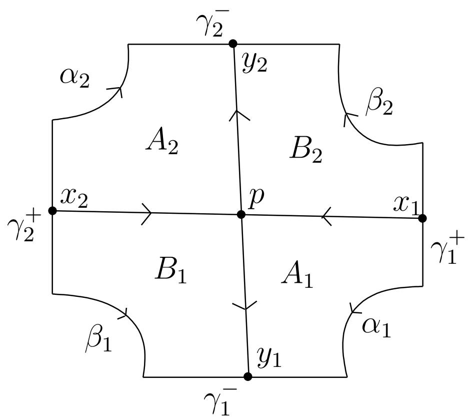

Figura 4.1: Entorno D_p de una silla múltiple p.

4.1.2. Singularidades evitables

Sea ϕ un flujo continuo en un espacio métrico compacto X.

Definición 4.6. Decimos que una singularidad de ϕ, $p \in X$ es *evitable* si existe ψ, otro flujo continuo en X, tal que:

- $\psi_{\mathbb{R}}(p) = \phi_{\mathbb{R}}(a) \cup \phi_{\mathbb{R}}(b) \cup \{p\}$, para $a, b \in X$ distintos de p,
- para todo $x \notin \psi_{\mathbb{R}}(p)$ se cumple que $\phi_{\mathbb{R}}(x) = \psi_{\mathbb{R}}(x)$ y
- coincide el sentido de cada órbita por ambos flujos.

En este caso decimos que ψ *remueve la singularidad* p *de* ϕ.

Lema 4.7. *Sea $p \in X$ una singularidad de ϕ. Supongamos que el conjunto estable y el inestable de p tienen solo dos órbitas (contando la de p) y que existe $\varepsilon > 0$ tal que si* $\operatorname{dist}(x, p) \in (0, \varepsilon)$ *entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que* $\operatorname{dist}(\phi_t(x), p) = \varepsilon$. *Entonces p es evitable.*

Demostración. Sean $a', b' \neq p$ tales que

$$\begin{aligned} W^u(p) &= \{p\} \cup \phi_{\mathbb{R}}(a') \\ W^s(p) &= \{p\} \cup \phi_{\mathbb{R}}(b'). \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} \tau_b &= \text{ínf}\{t \in \mathbb{R} : \phi_{[t,+\infty)}(b') \subset B_{\varepsilon/2}(p)\} \\ \tau_a &= \sup\{t \in \mathbb{R} : \phi_{(-\infty,t]}(a') \subset B_{\varepsilon/2}(p)\}. \end{aligned}$$

Sean $a = \phi_{\tau_a}(a')$ y $b = \phi_{\tau_b}(b')$. Por la Proposición A.2 tomo dos secciones transversales abiertas l_a^* y l_b^* por a y b respectivamente, ambas de tiempo τ^*. Si l_b^* es suficientemente chica podemos suponer que $\phi_{\tau^*}(l_b^*) \subset B_{\varepsilon/2}(p)$ y que la órbita futura de b no corta a l_b^*.

En este párrafo vamos a demostrar que existe $r > 0$ tal que si x está en $B_r(b) \cap l_b^* \setminus \{b\}$ entonces existe $t > 0$ tal que $\phi_t(x) \in l_a^* \setminus \{a\}$ y $\phi_{(0,t)}(x) \cap l_a^* = \emptyset$. Por absurdo supongamos que existe $x_n \to b$, $x_n \in l_b^* \setminus \{b\}$, tal que $\phi_{\mathbb{R}^+}(x_n)$ no corta a l_a^*. Entonces existe $t_n \to +\infty$, $t_n > \tau^*$, tal que $\phi_{t_n}(x_n) \in \partial B_{\varepsilon/2}(p)$, si no el $\omega(x_n)$ estaría contenido en $B_\varepsilon(p)$ y como $x_n \neq b$ tenemos que $\omega(x_n) \neq \{p\}$, luego tomando un punto distinto de p en $\omega(x_n)$ se contradice la hipótesis, su órbita estaría contenida en $B_\varepsilon(p)$. Además podemos suponer que $\phi_{(\tau^*,t_n)}(x) \subset B_{\varepsilon/2}(p)$. Luego, eventualmente tomando una subsucesión, podemos suponer que $\phi_{t_n}(x_n)$ converge a $z \in \partial B_{\varepsilon/2}(p)$. Luego $\alpha(z) = \{p\}$ y $\phi_{(-\infty,0)}(z) \subset B_{\varepsilon/2}(p)$. Entonces $z = a$, lo cual es absurdo.

Tomemos una sección cerrada $l_b \subset l_b^* \cap B_r(b)$. Sea $T\colon l_b \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^+$ tal que $\phi_{T(x)}(x) \in l_a^*$ y $\phi_{[0,T(x))}(x) \cap l_a^* = \emptyset$. Por la continuidad del flujo tenemos que T es continua. Además defino $f\colon l_b \setminus \{b\} \to l_a^*$ como $f(x) = \phi_{T(x)}(x)$. El argumento del párrafo anterior demuestra también que si $x_n \to b$ entonces $f(x_n) \to a$. De esta manera podemos extender f a todo l_b definiendo $f(b) = a$. Llamémosle l_a a la imagen de f. De esta forma $f : l_b \to l_a$ es un homeomorfismo, la biyectividad se concluye trivialmente de la construcción y la continuidad de la inversa se obtiene argumentando igual pero con el flujo opuesto $\phi^{op}_t(x) = \phi_{-t}(x)$.

Sea M el máximo de T en el borde de l_b. Sea $g\colon [0, M) \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente tal que $g(t) = t$ si $t \in [0, M/2]$ y $\lim_{t\to M} g(t) = \infty$. Vamos a definir el flujo ψ. Si $x \in l_b$ y $t \in [0, T(x)/2]$ definimos $\psi_t(x) = \phi_{g(t)}(x)$, $\psi_{-t}(f(x)) = \phi_{-g(t)}(f(x))$ y $\psi_M(b) = \psi_{-M}(a) = p$. Veamos que ambos flujos coinciden en el borde de l_b: si $x \in \partial l_b$ entonces $\psi_t(x) = \phi_{g(t)}(x) = \phi_t(x)$ ya que como $g(t) \in [0, T(x)/2]$ entonces $g(t) = t$. Verifiquemos la continuidad en $x = b$ y $t = M$. Tomemos dos sucesiones $x_n \to b$ y $t_n \to M$ y supongamos que $\psi_{t_n}(x_n) \to z$. Entonces $g(t_n) \to \infty$ y $T(x_n)/2 \to \infty$. Y como $\phi_{[-g(t_n),T(x_n)/2]}(x_n) \subset B_{\varepsilon/2}(p)$ tenemos que $\phi_{\mathbb{R}}(z) \subset B_{\varepsilon/2}(p)$. Con lo que concluimos que $z = p$. En el resto de los puntos ψ lo definimos igual que ϕ. Observese que p es regular para ψ. Por la construcción es claro que ψ remueve la singularidad p. □

Proposición 4.8. *Sea $p \in X$ una singularidad de ϕ expansivo tal que el conjunto estable y el inestable de p tienen solo dos órbitas (contando la de p). Entonces p es evitable.*

Demostración. Para poder aplicar el Lema anterior solo debemos observar que la expansividad implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que si $\mathrm{dist}(x, p) \in (0, \varepsilon)$ entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_t(x) \notin B_\varepsilon(p)$. □

Proposición 4.9. *Si ψ es expansivo y remueve una singularidad evitable de ϕ entonces ϕ es expansivo.*

Demostración. Sea $p \in X$ la singularidad que ψ le remueve a ϕ. Sea $U \subset X$ un entorno tubular de p por el flujo ψ. Supongamos que $\delta, \beta > 0$ son parámetros de la expansividad de ψ (item 2 de la Proposición 2.10) con δ menor que el diámetro de U. Digamos que $\mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para algún homeomorfismo $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que fije el cero. Estudiaremos los tres casos posibles.

- Caso $x, y \notin \psi_{\mathbb{R}}(p)$. Entonces existen g_x y g_y homeomorfismos crecientes de $\mathbb{R}$ que fijan el cero tales que $\phi_t(x) = \psi_{g_x(t)}(x)$ y $\phi_t(y) = \psi_{g_y(t)}(y)$. Entonces dist$(\psi_t(x), \psi_{g_x^{-1}\circ h\circ g_y(t)}(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego x e y están en un segmento de órbita de ψ de diámetro menor que β. Como x e y no están en $\psi_{\mathbb{R}}(p)$, ese mismo segmento es un segmento de ϕ.

- Caso $x \in \psi_{\mathbb{R}}(p)$ e $y \notin \psi_{\mathbb{R}}(p)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\phi_t(x) \to p$ cuando $t \to +\infty$. Luego resta observar que existe t arbitrariamente grande tal que $\phi_t(y) \notin U$. Por lo tanto este caso en realidad no puede suceder.

- Caso $x, y \in \psi_{\mathbb{R}}(p)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que ambos puntos convergen a p, por ϕ, cuando $t \to +\infty$ ya que si no, no podría suceder que dist$(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta$. Y en este caso los puntos x e y están localmente en la misma órbita.

□

4.2. Caracterizaciones

En todo esto S será una superficie compacta, orientable, sin borde y $\phi\colon S \times \mathbb{R} \to S$ un flujo continuo. Por el Teorema 4.21 no perdemos generalidad si suponemos que el flujo no presenta singularidades evitables.

Daremos dos caracterizaciones que presentamos en los siguientes Teoremas.

Teorema 4.10. *Un flujo sin singularidades evitables en una superficie es expansivo si y solo si*

1. *sus singularidades son finitas sillas múltiples y*

2. *la unión de las separatrices es densa.*

Teorema 4.11. *Un flujo sin singularidades evitables en una superficie es expansivo si y solo si*

1. *las singularidades son una cantidad finita y positiva de sillas múltiples,*

2. *no tiene puntos errantes y*

3. no tiene órbitas periódicas.

Desarrollaremos las demostraciones en varios Lemas que además serán útiles más adelante.

Lema 4.12. *Consideremos $l = [a, b]$ y l' dos secciones transversales compactas y $\tau\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\phi_{\tau(x)}(x) \in l'$ para todo $x \in [a, b)$ y $\lim_{x\to b} \tau(x) = +\infty$. Entonces $\omega(b) \subset Sing$.*

Demostración.[4] Supongamos por absurdo que existe $y \in \omega(b) \setminus \mathrm{Sing}$. Supongamos que $y \notin l \cup l'$. Considero una sección transversal compacta j que pase por y que no corte a l ni a l'. Sea $T_x = \{t \in [0, \tau(x)] : \phi_t(x) \in j\}$. Definamos $N\colon [a, b) \to \mathbb{Z}$ como $N(x) = \#T_x$. Es claro que si $\phi_{T_x}(x)$ es interior a j entonces N es continua en x. Como j tiene solo dos extremos, las discontinuidades de N son a lo sumo en dos puntos. Entonces N es acotada. Por otro lado $\#\{t \in \mathbb{R}^+ : \phi_t(b) \in j\} = \infty$ y tenemos que $\lim_{x\to b} N(x) = \infty$, lo cual es absurdo. □

Como veremos más adelante, la hipótesis del Lema que sigue es vacía.

Lema 4.13. *Si un flujo expansivo tiene infinitas separatrices entonces por lo menos una de ellas es asintóticamente estable.*

Demostración. [5] Sean $\delta > 0$ una constante de expansividad y $\phi_{\mathbb{R}}(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, infinitas separatrices distintas. Por la finitud de las singularidades podemos suponer que $\lim_{t\to+\infty} \phi_t(x_n) = p \in \mathrm{Sing}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea D' un disco que contenga a p de diámetro menor que δ. Tomemos otro disco D tal que $\mathrm{clos}(D) \subset \mathrm{int}(D')$ y $D \cap \mathrm{Sing} = \{p\}$. Por la expansividad tenemos que existe $y_n \in \partial D \cap \phi_{\mathbb{R}}(x_n)$ tal que $\phi_{\mathbb{R}^+}(y_n) \subset \mathrm{int}(D)$. Supongamos que y_n converge a $z \in \partial D$. Consideremos una caja de flujo U que contenga a z y tal que $U \subset D'$. Tomemos tres puntos distintos $y_a, y_b, y_c \in U$. Es claro que estos puntos no están en una misma órbita ya que los puntos $\{x_n\}$ no lo estaban. Entonces existe un segmento $l' \subset U$ transversal al flujo que los contiene. Supongamos que y_c está entremedio de y_a e y_b y llamémosle

[4] Esta prueba es esencialmente la del Lema 3 de [12].
[5] Esta demostración es válida si el flujo es cinemáticamente expansivo.

l al segmento de extremos y_a e y_b contenido en l'. Luego

$$l \cup \phi_{\mathbb{R}^+}(y_a) \cup \phi_{\mathbb{R}^+}(y_b) \cup \{p\}$$

es una curva cerrada contenida en D' y por lo tanto rodea un disco D''. Entonces $\phi_{\mathbb{R}^+}(u) \subset D'' \subset D'$ para todo $u \in l$. Luego existe $V \subset U$ un entorno de y_c tal que para todo $u \in V$, $\phi_{\mathbb{R}^+}(u) \subset D'$. Como el diámetro de D' es menor que δ tenemos que para todo $u \in V$, $\omega(u) = \{p\}$. Entonces $\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(\phi_t(u), \phi_t(y_c)) = 0$. La estabilidad es trivial. □

Lema 4.14. *Si ϕ tiene finitas singularidades cada una cubierta por un disco D_p, $p \in Sing$, entonces para todo $r > 0$ y para todo $\varepsilon > 0$ existen cajas de flujo $U_1, \ldots, U_N$ de tiempo menor que ε tales que:*

- *los abiertos D_p y U_i cubre la superficie,*
- *cada caja de flujo tiene diámetro menor que r,*
- *cada U_i es una caja de flujo cuyos bordes son dos segmentos de órbita c_i y d_i y dos secciones transversales a_i (por donde entra el flujo) y b_i (por donde sale el flujo) y*
- *si $i \neq j$ entonces $a_i \cap a_j = b_i \cap b_j = \emptyset$ y para todo $i, j = 1, \ldots, N$ se cumple que $a_i \cap b_j = \emptyset$.*

Ver figura 4.2.

Demostración. Primero tomo entornos de las singularidades D'_p de forma que su clausura esté contenida en D_p. Por [4] (ver ejercicio 2.4.8 parte ii,d en la página 29) considero una foliación de dimensión uno de $S \setminus \text{Sing}$, que llamaremos ψ, que sea transversal al flujo.

Dado un punto regular $x \in S \setminus \cup D'_p$ tomo una caja de flujo $U \ni x$ de tiempo menor que ε. Sea $\mu > 0$ tal que $\phi_{[-3\mu,3\mu]}(x) \subset U$. Considero dos segmentos de hojas de ψ, transversales a ϕ, a' y b' contenidos en U que pasen por $\phi_{-2\mu}(x)$ y $\phi_{2\mu}(x)$ respectivamente. Tomo $a \subset a'$ y $b \subset b'$ de forma que la componente conexa de

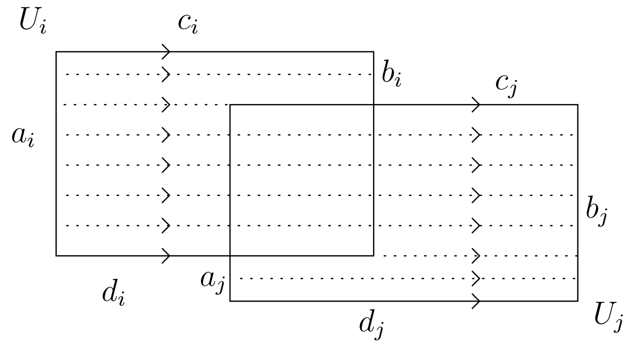

Figura 4.2: Cajas de flujo adecuadas.

$\phi_{\mathbb{R}}(y) \cap U$ que contiene a y corta a a si y solo si corta a b. Si los extremos de a son A_1 y A_2 y los extremos de b son B_1 y B_2, entonces definimos c y d como los segmentos de órbita de ϕ que conectan A_1 con B_1 y A_2 con B_2 respectivamente. Denotaremos $\psi(x)$ a la hoja que contiene a x. Sea a'_t ($t \in [-2\mu, -\mu]$) la componente conexa de $\psi(x) \cap U$ que contiene a $\phi_t(x)$. De forma análoga definimos b'_t para $t \in [\mu, 2\mu]$. Entonces es claro que para todo $t \in [-2\mu, -\mu]$ ($[\mu, 2\mu]$), a'_t (b'_t) corta a c y a d. Llamémosle $a_t \subset a'_t$ ($b_t \subset b'_t$) al segmento limitado por c y d. Sean $c_t \subset c$ y $d_t \subset d$ los segmentos limitados por a_t y b_t. Entonces para todo $t \in [\mu, 2\mu]$ la curva $a_t \cup b_t \cup c_t \cup d_t$ rodea a x y define un entorno U_t alrededor de x.

Ahora, alrededor de cada x que no esté en ningún D'_p considero una caja de flujo $U_{\mu(x)}(x)$ como fue definida recién. Tomo un subcubrimiento finito $U_{\mu(x_i)}(x_i)$, con $i = 1, \ldots, N$. Ahora tomo $t_i \in [\mu(x_i), 2\mu(x_i)]$, $i = 1, ..., N$, tal que todos los segmentos a_{t_i}, b_{t_i} sean disjuntos. $\square$

Definición 4.15. Decimos que un punto $x \in S$ es *errante* si existen un entorno U de x y $\tau > 0$ tales que para todo $t > \tau$ se cumple que $\phi_t(U) \cap U = \emptyset$.

Proposición 4.16. *Los flujos expansivos en superficies compactas no tienen puntos errantes.*

Demostración. Vamos a demostrar que en todo segmento l errante y transversal al flujo, existe un subsegmento l' cuyos puntos contradicen la expansividad al futuro. De esta manera, argumentando de forma análoga al pasado, se concluye la prueba por absurdo. Fijemos una constante de expansividad $\delta > 0$ (el parámetro

β no es necesario ya que los puntos de l están todos en órbitas distintas). Para cada singularidad p definimos el conjunto

$$l_p = \{x \in l : \phi_t(x) \to p \text{ cuando } t \to +\infty\}$$

Estudiaremos los dos casos posibles.

Primer caso. Hay una singularidad $p \in S$ para la cual $\text{int}(\text{clos}(l_p)) \neq \emptyset$. Tenemos que p tiene infinitas separatrices y por el Lema 4.13 alguna de ellas es asintóticamente estable al futuro. Tomemos entonces $x \in l_p$ en una separatriz asintóticamente estable. Luego existe $\mu > 0$ tal que si $\text{dist}(x, y) < \mu$ entonces $\text{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y) < \delta$ para todo $t \geq 0$. Entonces tomo $l' \subset l \cap B_\mu(x)$.

Segundo caso. En este caso supongamos que para todo $p \in \text{Sing}$, $\text{int}(\text{clos}(l_p))$ es vacío. Entonces existe $l' \subset l$ tal que para todo $x \in l'$ se cumple que $\omega(x)$ no es una singularidad, llamémosle (1) a esta condición. Tomemos el cubrimiento (junto con su notación) dado por el Lema 4.14 para $r < \delta/2$. Como l es errante, podemos suponer también que $\phi_{\mathbb{R}}(c_i \cup d_i) \cap l' = \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, N$, llamémosle (2) a esta condición. Es claro que también podemos suponer que l' no corta a ningún a_i.

Fijo $x, y \in l'$ y defino $A = \cup_{i=1}^N a_i$. Es claro que existe dos sucesiones t_n, s_n positivas, crecientes y divergentes tales que $\{t_n : n \in \mathbb{N}\} = \{t \in \mathbb{R}^+ : \phi_t(x) \in A\}$ y $\{s_n : n \in \mathbb{N}\} = \{t \in \mathbb{R}^+ : \phi_t(y) \in A\}$. Sean $I, J \colon \mathbb{N} \to \{1, \ldots, N\}$ las funciones definidas por las ecuaciones: $\phi_{t_n}(x) \in a_{I(n)}$ y $\phi_{s_n}(y) \in a_{J(n)}$.

Afirmación: $I = J$. Demostrémoslo por inducción. *Caso base.* Consideremos $l'' = [x, y] \subset l'$ el segmento de extremos x e y contenido en l' y

$$X = \{z \in l'' : \exists t > 0 / \phi_{[0,t]}(z) \cap a_{J(1)} = \emptyset \text{ y } \phi_t(z) \in a_{I(1)}\}$$

Veremos que y está en X. Tenemos que X es no vacío porque $x \in X$. Además X es abierto en l'' por la condición (2). Sea Y la componente conexa de X que contiene a x. Entonces Y es un intervalo y llamémosle u al extremo de Y que no es x. Mostraremos que u está en Y con lo cual podemos concluir que $u = y$ y por tanto y está en Y. Por la definición de X tenemos que existe $T \colon [x, u) \to \mathbb{R}^+$ continua tal que $\phi_{T(z)}(z) \in a_{I(1)}$ y $\phi_{[0,T(z)]}(z)$ no corta a $a_{J(1)}$. La condición (1) impide que $T(z) \to \infty$ cuando $z \to u$. Esto es directamente por el Lema 4.12. Luego existe

$z_n \in [x, u)$ tal que $z_n \to u$ y $T(z_n) \to T_u$. Entonces $\phi_{T(z_n)}(z_n) \to \phi_{T_u}(u)$. Por otro lado $\phi_{[0,T_u]}(u)$ no puede cortar a $a_{J(1)}$ ya que por la condición (2) se tendría que si n es suficientemente grande $\phi_{[0,T(z_n)]}(z_n)$ también cortaría a $a_{J(1)}$. Luego u está en Y y por lo tanto $I(1) = J(1)$. *Paso inductivo.* Para poder repetir el argumento es suficiente observar que si $I(k) = J(k)$ para todo $k = 1, \dots, K$, si definimos $l_K = [\phi_{t_K}(x), \phi_{s_K(y)}] \subset a_{I(K)}$, entonces l_K también verifica las condiciones (1) y (2).

Sea $h\colon \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^- \to \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^-$ tal que $h(0) = 0$, $h(t_n) = s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y en los demás puntos afín a trozos. De esta manera h es un homeomorfismo. Afirmación: $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta$ para todo $t \geq 0$. La demostración es la siguiente. Fijemos un valor de n. Sea

$$t^* = \sup\{t \geq t_n : \phi_{[t_n,t]}(x) \subset U_i \text{ para algún } i = 1, \dots N\}.$$

Sea i_0 tal que $\phi_{t^*}(x) \in b_{i_0}$. Si $t^* \geq t_{n+1}$ entonces ambos segmentos $\phi_{[t_n,t_{n+1}]}(x)$ y $\phi_{[s_n,s_{n+1}]}(y)$ están contenidos en U_{i_0} y por tanto $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y) < \delta$ para todo $t \in [t_n, t_{n+1}]$, ya que el diámetro de U_{i_0} es menor que $\delta/2$. Veamos que pasa si $t^* < t_{n+1}$. Entonces $x^* = \phi_{t^*}(x) \in D_p$ para alguna singularidad p. Luego existe $s^* \geq s_n$ tal que $y^* = \phi_{s^*}(y) \in b_{i_0}$ y $\phi_{[s_n,s^*)}(y)$ está incluido en U_{i_0}. Entonces $[x^*, y^*]$ el subsegmento de b_i está incluido en D_p. Luego $\phi_{[t^*,t_{n+1}]}(x)$ y $\phi_{[s^*,s_{n+1}]}(y)$ están contenidos en D_p. Luego resta observar que el diámetro de D_p unión U_{i_0} es menor que δ.

De esta manera demostramos que todo transversal errante l contiene un segmento l', también errante, cuyos puntos contradicen la expansividad al futuro. Razonando análogamente pero al pasado, se concluye que en l' hay un segmento cuyos puntos también contradicen la expansividad al pasado. De esta manera se llega a un absurdo al suponer que existe un segmento errante. □

Proposición 4.17. *Los flujos expansivos en superficies no tienen órbitas periódicas.*

Demostración. Ahora por absurdo supongamos que $x \in S$ fuera periódico. Tomemos una sección transversal l por x y considero el mapa de primer retorno $f : l' \subset l \to l$ definido en una sección mas chica l'. Entonces por la expansividad, el mapa f no puede tener puntos fijos, además de x, arbitrariamente cerca de x, ya que se contradiría la expansividad (observar que en superficies, dos puntos periódicos cercanos tienen períodos parecidos). Pero esto implica que los puntos cercanos a x deben ser errantes, contradiciendo la Proposición 4.16. Luego no hay puntos periódicos. □

Proposición 4.18. *Los flujos expansivos en superficies no tienen puntos de equilibrio estables.*

Demostración. Por la Proposición 4.3 tenemos que si p es un punto de equilibrio estable entonces p es asintóticamente estable. Esto implica directamente la existencia de puntos errantes contradicindo la Proposición 4.16. □

Proposición 4.19. *Las singularidades de los flujos expansivos son sillas múltiples.*

Demostración. Veamos primero que $W^u(p) \neq \{p\}$. Fijemos $r \in (0, \delta/2)$ menor que la constante de expansividad δ. Como p no es estable (Proposición 4.18) existen $x_n \in S$ y $t_n > 0$ tales que $x_n \to p$, $y_n = \phi_{t_n}(x_n) \in \partial B_r(p)$ y además $\phi_{[0,t_n)}(x_n) \subset B_r(p)$. Supongamos que $y_n \to y \in \partial B_r(p)$. Obviamente $t_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$. Considero ahora el conjunto $\alpha(y)$. Si este no está contenido en $\text{clos}(B_r(p))$ entonces existe $t' < 0$ tal que $\phi_{t'}(y) \notin B_r(p)$, pero por la continuidad del flujo se contradice que $\phi_{[0,t_n)}(x_n) \in B_r(p)$ tomando y_n suficientemente cerca de y. Luego $\alpha(y) \subset B_r(p)$. Si este fuera distinto de $\{p\}$ existe $q \in \alpha(y)$ distinto de p y por lo tanto los puntos de la órbita de q están a distancia menor que r de p y además las órbitas de p y q son distintas. Esto contradice la expansividad. Luego $\alpha(y) = \{p\}$ e $y \neq p$. Análogamente existe $z \neq p$ tal que $\omega(z) = \{p\}$.

Si hubiese infinitas separatrices, por el Lema 4.13 tenemos que alguna es asintóticamente estable y por lo tanto errante. Esto contradice la Proposición 4.16. Luego cada singularidad tiene una cantidad finita de separatrices. □

Lema 4.20. *Sea p una silla múltiple, D_p un entorno de p dado por el Lema 4.4 y consideremos la notación asociada. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in D_p$ y $\text{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para algún* *homeomorfismo* $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que fije el cero, entonces* $x, y \in A_i$ *o* B_i *para algún* i *o bien existen* $t_0, s \in \mathbb{R}$ *tales que* $|s| < \varepsilon$ *y* $\phi_{s+t_0}(x) = \phi_{h(t_0)}(y)$.

Demostración. Sean $W_i^+ = \phi_{\mathbb{R}^+}(x_i)$, $W_i^- = \phi_{\mathbb{R}^-}(y_i)$ y $W = \cup W_i^+ \cup W_i^- \cup \{p\}$. Ahora voy a definir δ y luego verificar la tesis del Lema. Condición (I): considero $\delta_1 > 0$ tal que $z \in W$ y $z \in B_{\delta_1}(x_i)$ ($z \in B_{\delta_1}(y_i)$) entonces existe $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $\phi_s(z) = x_i$ ($\phi_s(z) = y_i$). Condición (II): considero $\delta_2 > 0$ tal que si $\mathrm{dist}(\gamma_i^\pm, A_j) < \delta_2$ ($\mathrm{dist}(\gamma_i^\pm, B_j) < \delta_2$) entonces $\mathrm{dist}(\gamma_i^\pm, A_j) = 0$ (respectivamente $\mathrm{dist}(\gamma_i^\pm, B_j) = 0$). Ahora defino $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Ahora demostraremos que este valor de δ funciona. Lo haremos por casos.

- Caso $x \in W$, $y \notin W$. Si perder generalidad consideremos que $\phi_t(x)$ converge a p cuando $t \to +\infty$. Como $y \notin W$ existe $t' > 0$ tal que $\phi_{h(t')}(y) \in \gamma_i^+$ para algún i. Luego $\mathrm{dist}(\phi_{h(t')}(y), \phi_{t'}(x)) \geq \delta_1$ por la condición (II).

- Caso $x, y \in W$. Si $x = y = p$ el asunto es trivial. Si $x, y \in W_i^+$ (es análogo en W_i^-) se concluye por la condición (I). Si $x \in W_i^+$ e $y \in W_j^+$ (o cualquier otra combinación de los signos) con $i \neq j$ entonces se concluye por la condición (II).

- Caso $x, y \notin W$ pero no en un mismo A_i o B_i. Se concluye por la condición (II).

Con lo cual termina la prueba. □

Demostración del Teorema 4.10. Directo. La finitud de las singularidades es trivial a partir de la expansividad. El hecho de que sean sillas múltiples se deduce de la Proposición 4.19. Supongamos que la unión de las separatrices no fuera densa. Tomemos una sección transversal l que no corte a ninguna separatriz. Como no hay puntos errantes (Proposición 4.16) podemos concluir que existe $x \in l$ que retorna al futuro a l. Como no hay puntos periódicos (Proposición 4.17) podemos aplicar la Proposición A.4 para concluir que existe un círculo γ transversal al flujo que no corta a ninguna separatriz. Consideremos el conjunto

$$\gamma^* = \{x \in \gamma : \phi_{\mathbb{R}^+}(x) \cap \gamma \neq \emptyset\}.$$

Este conjunto es abierto por la continuidad del flujo, es no vacío porque no hay puntos errantes por la Proposición 4.16 y es cerrado por el Lema 4.12 ya que en γ no hay separatrices. Luego $\gamma^* = \gamma$, con lo cual todo punto de γ retorna en el futuro a γ. Luego el mapa $f\colon \gamma \to \gamma$ de primer retorno esta bien definido y es un homeomorfismo. Por el Teorema 6 de [1] este mapa debería ser expansivo pero no hay homeomorfismos expansivos en el círculo ([6]).

Veamos el recíproco. Considero un valor de $\varepsilon > 0$ dado y lo que haremos es definir una constante de expansividad $\delta > 0$ y luego demostrar la expansividad.

Para cada singularidad p tomemos el entorno D_p (y la notación) dada por la observación 4.5. Tomo el cubrimiento $\mathcal{C}$ dado por el Lema 4.14, asociado a r y $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ suficientemente chicos de forma tal que la intersección de cualesquiera dos abiertos de $\mathcal{C}$ es o bien vacía o conexa. Llamémosle U_i a las cajas de flujo del cubrimiento. Para cada singularidad p tomo el valor δ_p dado por el Lema 4.20. Además tomo δ' tal que si el diámetro de $X \subset S$ es menor que δ' entonces X está contenido en algún abierto de $\mathcal{C}$. Definimos finalmente la constante de expansividad asociada al valor de ε dado como $\delta = \text{mín}\{\delta', \delta_p\}_{p \in \text{Sing}}$.

Para demostrar que esta constante de expansividad funciona supongamos que $\text{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, para algun homeomorfismo $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente que fije el cero. Por absurdo supongamos que $\phi_t(x) \notin \phi_{(h(t-\varepsilon), h(t+\varepsilon))}(y)$. Por el Lema 4.20 es claro que ni x ni y están en separatrices. Luego considero una sucesión t_n creciente y divergente, $t_0 = 0$, tal que para todo n existe $i(n)$ tal que $\phi_{[t_n, t_{n+1}]}(x) \cup \phi_{[h(t_n), h(t_{n+1})]}(y) \subset V_{i(n)} \in \mathcal{C}$. Ahora considero en $V_{i(n)} \cap V_{i(n+1)}$ un segmento transversal l_n que conecte $x_n = \phi_{t_n}(x)$ con $y_n = \phi_{h(t_n)}(y)$. Es claro que esto se puede hacer ya que alguno de los abiertos $V_{i(n)}$ y $V_{i(n+1)}$ es una caja de flujo y si x_n e y_n estuvieran en un mismo segmento de órbita en alguna caja la prueba terminaría. Ahora tomo un punto cualquiera z en l_0. Considero una sucesión $s_n \in \mathbb{R}$ tal que $z_n = \phi_{s_n}(z) \in l_n$ para todo $n \geq 0$. La misma existe ya que si x_n e y_n están en D_p ambos puntos están en la misma componente conexa de $D_p \setminus W$ (ver notación del Lema 4.20 y observación 4.5). Entonces es claro que z_n no puede converger, pero s_n es divergente, luego en l_0 no hay separarices. Lo cual es absurdo. □

Demostración del Teorema 4.11. Veamos el directo. Las singularidades son finitas por la expansividad y son sillas por la Proposición 4.19. Por el Teorema 4.10 sabemos que existe por lo menos una singularidad. Por la Proposición 4.17 no hay puntos periódicos.

El recíproco. Por el Teorema 4.10 solo resta demostrar que la unión de las separatrices es densa. Tomemos una sección transversal l que no corte a ninguna separatriz. Como no hay puntos errantes podemos concluir que existe $x \in l$ que retorna al futuro a l. Como no hay puntos periódicos podemos aplicar la Proposición A.4 para concluir que existe un círculo γ transversal al flujo que no corta a ninguna separatriz. Luego el mapa $f\colon \gamma \to \gamma$ de primer retorno esta bien definido y es un homeomorfismo. Por el Teorema 6 de [1] este mapa debería ser expansivo pero no hay homeomorfismos expansivos en el círculo ([6]). □

Teorema 4.21. *Si ψ remueve una singularidad de ψ entonces ψ es expansivo si y solo si ϕ es expansivo.*

Demostración. Por la Proposición 4.9 solo debemos demostrar el recíproco. Supongamos por absurdo que ϕ es expansivo pero ψ no lo es. Tomo $\beta > 0$, x_n, y_n, h_n y $\delta_n \to 0$ tales que $\text{dist}(\psi_t(x_n), \psi_{h_n(t)}(y_n)) < \delta_n$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y x_n e y_n no están β-conectados. Consideraremos los tres casos posibles (los argumentos dados en los dos primeros items son válidos en espacios métricos, sin embargo el último es específico de superficies).

- Caso $x_n, y_n \notin \psi_{\mathbb{R}}(p)$ para infinitos valores de n. Esto lleva directamente a que ϕ no es expansivo ya que las órbitas de x_n e y_n coinciden en ambos flujos (eventualmente estarán reparametrizadas).

- Caso $x_n \in \psi_{\mathbb{R}}(p)$ y $y_n \notin \psi_{\mathbb{R}}(p)$ para infinitos valores de n. Sea $t_n \in \mathbb{R}$ tal que $\psi_{t_n}(x_n) = p$ y definamos $z_n = \psi_{h_n(t_n)}(y_n)$. Consideremos $s = t - t_n$ y $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido como $g_n(s) = h_n(s + t_n) - h_n(t_n)$. Es fácil verificar que $\text{dist}(\psi_s(p), \psi_{g_n(s)}(z_n)) < \delta_n$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Tomando $s = 0$ vemos que $z_n \to p$ ya que $\delta_n \to 0$. Por lo tanto podemos asumir que $z_n \in U$ para todo n, siendo U una caja de flujo (de ψ) arlededor de p. Por otro lado es fácil ver que, eventualmente tomando una subsucesión z_n, existe $\beta' > 0$ tal que $\text{dist}_\phi(z_{n_1}, z_{n_2}) > \beta'$ si $n_1 \neq n_2$. Entonces $\text{dist}(\psi_{g_{n_1}(s)}(z_{n_1}), \psi_{g_{n_2}(s)}(z_{n_2}))$ es menor que $\delta_{n_1} + \delta_{n_2}$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Ahora esto contradice la expansividad de ϕ ya que z_{n_1} y z_{n_2} no están en $\psi_{\mathbb{R}}(p)$.

- Caso $x_n, y_n \in \psi_{\mathbb{R}}(p)$ para infinitos valores de n. En este caso podemos suponer que $x_n = p$ para todo n. Sea l una sección transversal (de ψ) por p. Sin pérdida de generalidad suponemos que $y_n \in l$ para todo n. Luego podemos argumentar como en el último párrafo de la demostración del Teorema 4.10 para concluir que, si n es suficientemente grande, en el subsegmento $l' \subset l$ limitado por y_n y por p no hay separatrices de sillas no evitables. Sea ψ' un flujo que remueva todas las singularidades evitables de ψ. Luego en l' no hay separatrices de ψ'. Como ϕ es expansivo tenemos que ϕ no tiene puntos errantes y por lo tanto ψ' tampoco los tiene. Luego existe en l' un punto que retorna a l' y consecuentemente existe un círculo $\gamma \subset S$ transversal al flujo ψ' sin separatrices de ψ'. Luego $\psi'_{\mathbb{R}}(\gamma)$ es S (ya que es cerrado y abierto y S es conexa). Luego la superficie es un toro y ψ' es una suspensión de un homeomorfismo de γ. Por [1] ψ' no puede ser expansivo. Por otro lado ϕ se obtiene a partir de ψ' agregando singularidades evitables, es fácil concluir que ϕ no es expansivo.

$\square$

4.3. Modelos diferenciables

Aca vamos a demostrar que los flujos expansivos en superficies son topológicamente equivalentes a flujos de clase C^∞. Por [3] es suficiente mostrar que los únicos conjuntos minimales[6] posibles son: puntos singulares, órbitas periódicas o la superficie entera.

Lema 4.22. *Supongamos que ϕ es expansivo, $x \in S$ tal que $\omega(x) \nsubseteq Sing$ y l es una sección transversal abierta con extremo en x. Entonces existe $t > 0$ tal que $\phi_t(x) \in l$.*

[6] Un compacto invariante es minimal si no contiene compactos invariantes propios

Demostración. Sea $l^* = \{y \in l : \phi_{\mathbb{R}^+}(y) \cap l \neq \emptyset\}$ el conjunto de los puntos de l que retornan al futuro a l. Sea $f : l^* \to l$ el mapa de primer retorno. Llamémosle z al otro extremo de l (el que no es x). Observemos que si $f(y)$ no es ni x ni z entonces y es un punto interior de l^* (considerando la topología de l), esto es simplemente por la continuidad del flujo (observar también que la sección l es abierta, por lo tanto y no es ni x ni z). Por lo tanto l^* tiene a lo sumo dos puntos que no son interiores ya que f es inyectiva. Sea $(a, b) \subset l^*$ un intervalo maximal (o si se quiere, el interior de una componente conexa de l^*). Si $a \notin l^*$ entonces por el Lema 4.12, tenemos que $\omega(a)$ es una singularidad y por lo tanto $a \neq x$. Tomando en cuenta que la expansividad implica que hay finitas separatrices, podemos concluir también que hay solo una cantidad finita de posibilidades para un punto a que converja a una singularidad y que su órbita futura no corte a l. Por otro lado, si $a \in l^*$ entonces o bien $f(a)$ es un extremo de l o bien a es un extremo de l. De nuevo, hay solo una cantidad finita de posibilidades para a. Hacemos las mismas consideraciones para b. Luego solo hay una cantidad finita de intervalos maximales en l^*. Por otro lado la expansividad implica que no hay puntos errantes con lo cual l^* es denso en l y por lo tanto x esta en la clausura de algún intervalo maximal en l^*. Haciendo las mismas consideraciones que antes, aplicando el Lema 4.12, concluimos que x retorna a la clausura de l. Para finalizar, observemos que se excluye el caso en que x retorne al propio x ya que la expansividad implica que no hay órbitas periódicas. Y por otro lado, si x retorna a z, podemos aplicar este Lema a otra sección más chica y concluir que x retorna al interior de l. □

Teorema 4.23. *Todo flujo expansivo en una superficie es topológicamente equivalente a uno de clase C^∞.*

Demostración. Supongamos por absurdo ([3]) que existe un minimal M que no es ni un punto singular, ni una órbita periódica, ni la superficie entera. Como $M \neq S$ tenemos que $\partial M \neq \emptyset$ ya que S es conexa. Además como M es minimal no singular, obtenemos que $M \cap \mathrm{Sing} = \emptyset$. Entonces existe $x' \in \partial M \setminus \mathrm{Sing}$. Tomemos una sección transversal abierta l' que contenga a x. El conjunto $l' \setminus M$ es un conjunto abierto en l' y por lo tanto es una unión de intervalos abiertos. Tomo x en el borde de alguna de esas componentes conexas que llamaremos l. De esta forma $x \in M$ y por tanto $\omega(x)$ no contiene singularidades. Luego podemos aplicar el Lema 4.22 para concluir que x debe retornar al interior de l en el futuro. Esto contradice que M sea invariante ya que por la construcción hecha, el interior de l es disjunto de M. □

4.4. Estructura

Los flujos expansivos en superficies pueden presentar trayectorias que nazcan en puntos singulares y que también mueran en puntos singulares, tal vez en el mismo. Estas trayectorias o una concatenación de las mismas puede separar la dinámica. De esta manera se puede obtener subsuperficies con borde que sean invariantes. En esta sección estudiaremos esta descomposición y obtendremos subdinámicas irreducibles. Comencemos con un ejemplo que ilustra estas ideas.

Ejemplo 4.24. *Consideramos en el toro T^2 un flujo irracional. Tomemos un punto A cualquiera y lo reemplazamos por un círculo con un punto de equilibrio como se ve en la figura 4.3. Obtenemos con esto un toro con un borde.*

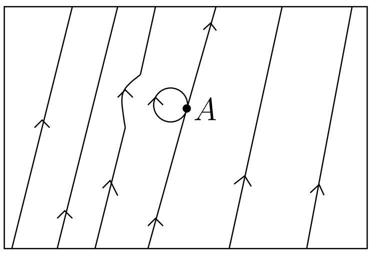

Figura 4.3: Cirugía a un toro.

Tomemos una copia de esta construcción y peguémosla por el borde. Esto genera un flujo en un bitoro. Veamos que este es expansivo. Por un lado la singularidad es una silla múltiple (de seis separatrices). Por otro lado las órbitas del flujo irracional del toro son densas y entonces la unión de las separatrices de las singularidades, es densa. Aplicando el Teorema 4.10 concluimos que el flujo es expansivo. Por la construcción es claro que este bitoro se descompone en dos toros con un borde cada uno, ambos son invariantes y expansivos.

Las definiciones que usaremos son las siguientes.

Definición 4.25. Una separatriz γ que tiene como ω-límite y α-límite singularidades (posiblemente la misma) se llama *conexión de sillas*.

Definición 4.26. Decimos que un flujo es *cuasiminimal* si los únicos posibles ω-límites y α-límites son los puntos singulares y toda la superficie.

El Teorema siguiente es el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.27. *Sea ϕ un flujo expansivo en una superficie compacta S, orientable y sin borde. Entonces ϕ es el cociente de un flujo $\hat{\phi}$ definido en $\hat{S} = \cup_{i=1}^{N} S_i$ donde*

1. *S_i es una superficie compacta, conexa y con borde;*
2. *$\hat{\phi}$ es expansivo y cuasiminimal en cada S_i;*
3. *el borde de $\hat{S}$ es unión de conexiones de sillas y sus límites y son las únicas conexiones de sillas en $\hat{S}$,*

El cociente solo identifica singularidades y conexiones de sillas en los bordes de los S_i.

Demostración. Primero explotemos cada conexión de silla en dos órbitas. Lo que obtenemos es una superficie con borde, con algunos puntos singulares identificados. Luego explotamos cada una de esas singularidades hasta obtener una superficie con borde $\hat{S}$, que puede ser disconexa. Ver figura 4.4.

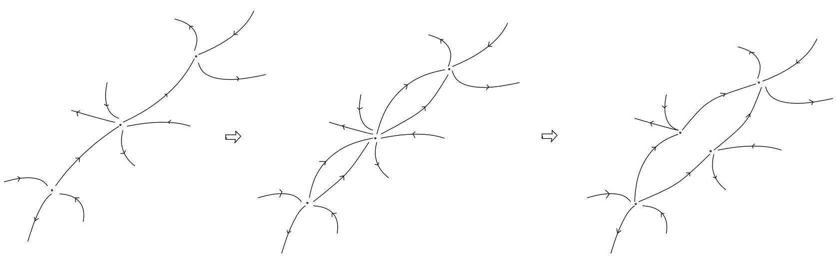

Figura 4.4: Explosión de las conexiones de silla.

Llamémosle $S_1, \ldots, S_N$ a las componentes conexas de $\hat{S}$ y ϕ_i al flujo en S_i asociado a ϕ.

Por cómo definimos a $\hat{S}$ es claro que las únicas conexiones de sillas de S_i son las que están en el borde. Es claro también que el cociente que hay que hacer para obtener ϕ y S es identificar todo lo que explotamos.

Veamos porqué cada S_i es cuasiminimal. Supongamos por absurdo que existe $x \in S$ tal que $\omega(x)$ no es una singularidad ni es toda S_i. Esto último implica que la frontera de $\omega(x)$ es no vacia ya que S_i es conexa. Entonces existe un punto no singular $y \in \partial\omega(x)$ de forma que y no está en una conexión de sillas, es decir, no está en el borde de S_i. Tomemos un entorno tubular U que contenga a y. Como $U \setminus \omega(x)$ es no vacío podemos suponer que y esta en la frontera de una componente conexa de $U \setminus \omega(x)$. Tomando en cuenta que $\omega(x)$ y su complemento en S_i son invariantes, llegamos a que x converge a una singularidad, ya que sino podemos aplicar el Lema 4.22 y concluir que y retorna al complemento de $\omega(x)$ lo cual es absurdo. Argumentando de igual forma se concluye que $\alpha(x) \subset \text{Sing}$, con lo cual tenemos que y está en una conexión de sillas. Esto es absurdo ya que y está en el interior de S_i y las únicas conexiones de silla están en el borde de S_i.

La expansividad en cada S_i es consecuencia directa de la construcción. □

Corolario 4.28. *Si ϕ es expansivo y sin conexiones de silla entonces es cuasi-minimal.*

Demostración. En la demostración del Teorema anterior, vimos que si no hay conexiones de silla en el interior de la superficie entonces el flujo es cuasiminimal. Luego se aplica exactamente ese argumento a este corolario. □

El ejemplo que sigue muestra que S puede no ser orientable.

Ejemplo 4.29. *Dado un flujo expansivo cualquiera, corto un segmento de órbita y pongo un borde con un flujo norte-sur. Hago esto dos veces en segmentos distintos. Luego los pego de forma no orientable.*

La idea de la próxima sección es estudiar la dinámica de cada S_i usando intercambios de intervalos. Por simplicidad supondremos que S_i no tiene borde. Esto lo logramos cocientando cada componente conexa del borde a un punto. De esta forma logramos una superficie sin borde y sin conexiones de sillas. Observemos que el flujo obtenido podría ser, por ejemplo, el flujo irracional en el toro con algunas singularidades evitables. Sobre este cociente podemos decir lo siguiente.

Proposición 4.30. *Todo flujo transitivo en una superficie de género mayor que uno con finitas singularidades es expansivo.*

Demostración. Las singularidades son sillas múltiples por la transitividad (alguna tiene más de dos separatrices porque el género es mayor que uno). La transitividad implica trivialmente dos cosas: no hay puntos errantes y no hay órbitas periódicas. Luego ϕ es expansivo. □

4.5. Modelos con intercambios de intervalos

En esta sección trabajaremos con flujos expansivos cuasiminimales sin conexiones de silla. En este caso utilizaremos la existencia de un círculo encajado en la superficie que es transversal al flujo y corta a todas las órbitas no singulares. El mapa de retorno a ese círculo no estará definido en una cantidad finita de puntos que se enuentran en separatrices estables. Ese mapa de retorno es lo que llamaremos un mapa de intercambio de intervalos. La idea es entonces, recuperar la dinámica del flujo a partir de una suspensión de dicho mapa. Comenzaremos con las definiciones necesarias.

Definición 4.31. Si γ es homeomorfo a un círculo y $A, B \subset \gamma$ son finitos, decimos que $f\colon \gamma \setminus A \to \gamma \setminus B$ es un *mapa de intercambio de intervalos* si es un homeomorfismo.

Una consecuencia directa de la definición es que los conjuntos A y B deben tener la misma cantidad de elementos.

Definición 4.32. Sean γ homeomorfo a un círculo y C el cilindro $\gamma \times [-1, 1]$. Supongamos que en C está definida una relación de equivalencia $\simeq$ cuyas clases denotaremos $[(y, u)]$, si $(y, u) \in C$. Asumamos que esta relación verifica estas dos propiedades:

- si $u \in (-1,1)$ entonces $[(y, u)] = \{(y, u)\}$ y

- existe un mapa de intercambio de intervalos $f\colon \gamma \setminus A \to \gamma \setminus B$ tal que

$$(y, 1) \simeq (f(y), -1)$$

para todo $y \in \gamma \setminus A$.

Decimos que un flujo $\hat{\phi}$, con finitas singularidades, definido en el cociente $C/\simeq$ es una *suspensión* de f si para todo $u \in (-1, 1)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|t| < \varepsilon$ entonces $\hat{\phi}_t([y, u]) = [(y, u')]$ para algún $u' \in (-1, 1)$.

Ejemplo 4.33. *Sea $\gamma = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $A = \{0, 1/3, 2/3\}$, $\theta \in \gamma$ y $B = A + \theta$. En función de θ definiremos en mapa de intercambio de intervalos $f\colon \gamma \setminus A \to \gamma \setminus B$ como*

$$f(x) = \begin{cases} x + \theta & \text{si } x \in (0, 1/3) \\ x + \theta + 1/3 & \text{si } x \in (1/3, 2/3) \\ x + \theta - 1/3 & \text{si } x \in (2/3, 1) \end{cases}$$

Ahora en el cilindro $C = \gamma \times [-1, 1]$ identificamos los puntos $(y, 1) \simeq (f(y), -1)$ si $y \in \gamma \setminus A$; además si denotamos $f(x^+)$ y $f(x^-)$ como los límites laterales (que en todo intercambio de intervalos existen) también identificamos $(a, 1) \simeq (f(a^+), -1) \simeq (f(a^+), -1)$ para todo $a \in A$ y debemos considerar la relación de equivalencia generada por estas condiciones. Cada punto interior a C se identifica solo con si mismo. Observemos entonces que

$$P = \{(1/3, 1), (1/3 + \theta, -1), (2/3, 1), (\theta, -1), (0, 1), (2/3 + \theta, -1)\}$$

es una clase (el lector habrá observado el abuso de notación al considerar por ejemplo $1/3 \in \gamma$). De esta manera el cociente $S = C/\simeq$ es un bitoro. Ahora observemos que $f^k(y)$ es de la forma $x + k\theta + j/3$ para algún $j \in \mathbb{Z}$. Luego tenemos la siguiente conclusión: f tiene puntos periódicos si y solo si $\theta \in \mathbb{Q}$. Ahora consideramos un flujo ϕ que sea vertical y con una única singularidad en P obteniendo una suspensión de f. De esta forma P es una silla múltiple con tres separatrices estables y tres inestables. Como f preserva la medida usual de γ tenemos que f no tiene puntos errantes y por lo tanto ϕ tampoco los tiene. Entonces tenemos que ϕ es expansivo si y solo si $\theta \notin \mathbb{Q}$. Esta conclusión se obtiene directamente del Teorema 4.11.

Teorema 4.34. *Sea ϕ un flujo expansivo y sin conexiones de silla en una superficie compacta y orientable S. Entonces ϕ es conjugado a una suspensión de un mapa de intercambio de intervalos.*

Demostración. Por el corolario 4.28 tenemos que ϕ es cuasiminimal ya que no hay conexiones de silla. Por la Proposición A.4 existe $\gamma \subset S$ homeomorfa a S^1 y transversal al flujo. También tenemos que toda órbita no singular corta a γ, en particular las separatrices. Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \gamma$ los únicos puntos de γ que no retornan a γ en el futuro, es decir, los que verifican: $\phi_{\mathbb{R}^+}(a_i) \cap \gamma = \emptyset$. Análogamente definimos $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subset \gamma$ como el conjunto de los puntos de γ que no retornan a γ en el pasado. Los puntos a_i están en las separatrices estables de las singularidades y los b_i en las inestables.

Sea $T_-\colon \gamma \to \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}$ dada por $T_-(x) = \text{ínf}\{t < 0 : \phi_{(t,0)}(x) \cap \gamma = \emptyset\}$. Con la topología natural de $\mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}$ es claro que T_- es continua. Definimos también $T_+\colon \gamma \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ dada por $T_+(x) = \sup\{t > 0 : \phi_{(0,t)}(x) \cap \beta = \emptyset\}$. Esta función verifica propiedades análogas a T_-.

Definimos $f\colon \gamma \setminus A \to \gamma \setminus B$ como $f(y) = \phi_{T_+(y)}(y)$. Esta f es un intercambio de intervalos y además nos permite escribir la siguiente relación:

$$T_-(f(y)) + T_+(y) = 0 \tag{4.1}$$

Definimos $T_+(A) = +\infty$, $T_-(B) = -\infty$ y $T_0(y) = 0$ para todo $y \in \gamma$. Si $C = \gamma \times [-1, 1]$ definimos $\hat{T}\colon C \to \overline{\mathbb{R}} = \{\pm\infty\} \cup \mathbb{R}$ como

$$\hat{T}(y, u) = \operatorname{tg}(u \operatorname{arc\,tg}(T_{\operatorname{sg}(u)}(y)/2))$$

Utilizamos la función tg por ser un homeomorfismo entre un intervalo acotado y $\mathbb{R}$. Como caso particular definimos $\hat{T}(a_i, 1) = +\infty$ y $\hat{T}(b_i, -1) = -\infty$. Es claro que

$$\hat{T}(y, u) \in (T_-(y)/2, T_+(y)/2) \tag{4.2}$$

si $|u| < 1$. Ahora definimos $h\colon C \to S$ como

$$h(y, u) = \phi_{\hat{T}(y,u)}(y)$$

como casos aparte tenemos: $h(a_i, 1) = p$ si $\omega(a_i) = p \in$ Sing y $h(b_i, -1) = p$ si $\alpha(b_i) = p \in$ Sing. En C hacemos la siguiente relación de equivalencia:

$$(y, u) \simeq (y', u') \text{ sii } h(y, u) = h(y', u').$$

Denotamos $[(y, u)]$ a la clase de (y, u). Observemos que si $|u| < 1$ entonces $[(y, u)] = \{(y, u)\}$ (por la ecuación 4.2) y que $(y, 1) \simeq (f(y), -1)$ (por la ecuación 4.1).

Ahora vamos a demostrar que h es continua. En los puntos (y, u) tales que $h(y, u) \notin$ Sing la continuidad es clara. Supongamos entonces que $u_n \to 1$ y que $y_n \to y \in \gamma$ siendo que $\phi_t(y) \to p \in$ Sing cuando $t \to +\infty$. Supongo por absurdo que $h(y_n, u_n)$ no converge a $h(y, 1) = p$ cuando $n \to \infty$. Si definimos $s_n = \hat{T}(y_n, u_n)$ entonces $h(y_n, u_n) = \phi_{s_n}(y_n)$. Sea $t_n \in (0, T_+(y_n)/2)$ tal que $\phi_{t_n}(y_n) \to p$. Eventualmente tomando una subsucesión podemos suponer que $\phi_{s_n}(y_n) \to q \neq p$. Por otro lado, las sucesiones t_n, $|t_n - s_n|$, $T_+(y_n) - t_n$ y $T_+(y_n) - t_n$ todas son divergentes. Luego es fácil ver que existe r_n entre las sucesiones t_n y s_n tal que $|t_n - r_n|$ y $|s_n - r_n|$ divergen y $\phi_{r_n}(y_n) \to q' \notin$ Sing. Pero entonces la órbita de q' no corta a γ, lo cual es absurdo.

Ahora, de la continuidad de h y la compacidad de C concluimos que h es cerrada. Además h es sobreyectiva, por lo tanto el mapa cociente $\hat{h} \colon C/ \simeq \to S$ definido por $\hat{h}[(y, u)] = h(y, u)$ es un homeomorfismo si $C/ \simeq$ tiene la topología cociente.

Ahora definimos un flujo $\hat{\phi}$ en $C/ \simeq$ como

$$\hat{\phi}_t(x) = \hat{h}^{-1}(\phi_t(\hat{h}(x)))$$

Obviamente ϕ y $\hat{\phi}$ son conjugados. Para demostrar que $\hat{\phi}$ es una suspensión del mapa de intercambio de intervalos f, resta observar que si $u \in (-1, 1)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|t| < \varepsilon$ entonces $\hat{\phi}_t([y, u]) = [(y, u')]$ para algún $u' \in (-1, 1)$. Esto es consecuencia directa de las definiciones hechas y la continuidad de $\hat{T}$. $\square$

Capítulo 5

Aplicación al billar poligonal

Consideremos P un polígono plano cuyos ángulos son todos racionales. Sean $V_1, ..., V_n$ sus vértices y $l_1, ..., l_n$ sus lados. Consideramos $r_1, ..., r_n$ rectas en el plano de forma tal que l_i es paralelo a r_i y $S_1, ..., S_n$ las simetrías axiales asociadas a las rectas r_i. Definimos G el grupo de isometrías del plano generado $\{S_i\}$. En el conjunto $P \times G$ hacemos la relación de equivalencia generada por la siguiente propiedad: si $x \in r_i$ entonces $(x, g) \simeq (x, S_i g)$. Definimos S como el espacio cociente de $P \times G$ por la relación definida. Llamaremos singularidades a los vértices de P en el cociente.

Observaremos algunas propiedades de S. Si le damos la topología cociente, entonces S es una superficie. Además esta es compacta, conexa y sin borde. Si a P lo consideramos con la métrica plana entonces S soporta una métrica plana, inducida por la de P, definida en todos lados salvo en las singularidades. Con esta métrica se tiene que el transporte paralelo no depende de la curva.

Con estas propiedades podemos construir un flujo en S. Fijemos una dirección v cualquiera en un punto de P. Como el transporte paralelo en S no depende del camino, podemos definir un campo Y trasladando la dirección v por S salvo las singularidades. Luego consideramos una función $\phi \colon S \to \mathbb{R}$ diferenciable no negativa que se anule solo en las singularidades. Definimos un campo X en todo S poniendo puntos de equilibrio en las singularidades y si x no es singular entonces $X(x) = \rho(x)Y(x)$. Este campo depende de muchas cosas, pero en particular de v. Llamaremos ϕ_v al flujo asociado al campo X.

Debemos tener una precaución. En el siguiente Teorema no permitiremos que todos los ángulos de P sean de la forma π/n con $n = 2, 3, 4, ...$ Los polígonos que estamos excluyendo son solamente: rectángulos, triángulos equiláteros, triángulos rectángulos isósceles y triángulos rectángulos con un ángulo $\pi/3$. Esto se debe a que en este caso la superficie asociada es el toro. En este caso el flujo nunca es expansivo y sin embargo puede no haber órbitas periódicas.

Teorema 5.1. *Existe una órbita periódica en la dirección v si y solo si ϕ_v no es expansivo.*

Prueba del Teorema 5.1. Observemos que como no todos los ángulos son de la forma π/n entonces existen sillas múltiples de ϕ_v. Además $\Omega(\phi) = S$. Una referencia para ambas cosas es [15]. Luego aplicando el Teorema 4.11 concluimos la prueba. □

Podemos utilizar esto para dar ejemplos de flujos expansivos. Fijemos un polígono P y obserevemos que el conjunto de direcciones v con órbita periódica es numerable. A su vez el conjunto de direcciones no es numerable, por lo tanto existen direcciones sin órbita periódica y por el Teorema anterior estas generan flujos expansivos.

Apéndice A

Secciones transversales

En flujos diferenciables en variedades es estándar la construcción de secciones transversales. En espacios métricos es H. Whitney en [14] quién desarrolla este concepto. Lo que haremos acá es definir y demostrar los resultados que hemos usado a lo largo del trabajo.

Definición A.1. Sea ϕ un flujo continuo en un espacio métrico X. Decimos que $l \subset X$ es una *sección transversal local cerrada de tiempo* $\tau > 0$ *por* $x \in X$ si $x \in l$, l es cerrado, $x \in \operatorname{int}(\phi_{[-\tau,\tau]}(l))$ y $l \cap \phi_{[-\tau,\tau]}(y) = \{y\}$ para todo $y \in l$. A $\phi_{[-\tau,\tau]}(l)$ le llamaremos *entorno tubular*. A $l \cap \operatorname{int}(\phi_{[-\tau,\tau]}(l))$ le llamaremos *sección transversal local abierta*.

Proposición A.2. *Todo punto regular admite una sección transversal.*

Demostración.[1] Sea x un punto regular y $r > 0$ tal que $\phi_r(x) \neq x$. Definimos $V, \dot{V} \colon X \to \mathbb{R}$ como

$$V(y) = \int_0^r \operatorname{dist}(\phi_s(y), x)ds$$

$$\dot{V}(y) = \frac{d}{dt} V(\phi_t(y))\Big|_{t=0} = \operatorname{dist}(\phi_r(y), x) - \operatorname{dist}(y, x)$$

Si $a = \operatorname{dist}(x, \phi_r(x)) > 0$ entonces por la continuidad del flujo, existe $\mu \in (0, a/3)$ tal que si $\operatorname{dist}(y, x) < \mu$ entonces $\operatorname{dist}(\phi_r(y), \phi_r(x)) < a/2$. Entonces

[1] Esta demostración es de [14].

si $\mathrm{dist}(y,x) < \mu$ tenemos que

$$\dot{V}(y) = \mathrm{dist}(\phi_r(y), x) - \mathrm{dist}(y,x) > a/2 - \mu > a/6 > 0$$

Entonces V crece sobre los segmentos de órbita contenidos en $B_\mu(x)$. Queda como ejercicio para el lector demostrar que $l = V^{-1}(V(x)) \cap \mathrm{clos}(B_{\mu/2}(x))$ es una sección transversal de tiempo τ tal que $\phi_{[-\tau,\tau]}(l) \subset B_\mu(x)$. □

En [3] se demuestra que si $\phi\colon \mathbb{R}\times S \to S$ es un flujo continuo en una superficie C^∞ compacta S entonces existe un flujo ψ en S que es C^1 y topológicamente equivalente a ϕ. Esto nos da directamente el siguiente corolario.

Proposición A.3. *En superficies, todo flujo continuo admite secciones transversales que son intervalos.*

Demostración. Utilizando [3] podemos suponer que el flujo es de clase C^1. Luego consideramos una métrica Riemanniana en la superficie y le llamamos X al campo de velocidades del flujo. Usando el producto interno, definimos un campo local, ortogonal Y. Es estándar demostrar que las órbitas definidas por Y contienen secciones transversales para el flujo de X. □

Proposición A.4. *Sea S una superficie orientable y ϕ un flujo continuo. Sea l una sección transversal. Si existe $x \in l$ no periódico tal que $\phi_{\mathbb{R}^+}(x) \cap l \neq \emptyset$ entonces existe un círculo transversal al flujo contenido en $\phi_{\mathbb{R}}(l)$.*

Demostración. Por la continuidad del flujo, si un punto está cerca de x entonces su órbita futura también corta a l. Luego considero $y \in l$ entre x y su primer retorno a l. Sea $T\colon [x,y] \to \mathbb{R}^+$ el tiempo de retorno, siendo $[x,y]$ el segmento incluido en l de extremos x e y. Tenemos entonces que $\phi_{T(z)}(z)$ está en l para todo $z \in [x,y]$ y que y esta entre x y $\phi_{T(x)}(x)$. Considero una función continua $f\colon [x,y] \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = T(x)$, $f(y) = 0$ y $f(z) \geq T(z)$ para todo $z \in [x,y]$. Definimos $\gamma\colon [x, \phi_{T(x)}(x)] \to S$ como

$$\gamma(z) = \begin{cases} \phi_{f(z)}(z) & \text{si } z \in [x,y] \\ z & \text{si } z \in [y, \phi_{T(x)}(x)] \end{cases}$$

Por un lado tenemos γ coincide en los extremos ya que

$$\gamma(x) = \phi_{f(x)}(x) = \phi_{T(x)}(x) = \gamma(\phi_{T(x)}(x).$$

Para demostrar la continuidad de γ resta ver que $\gamma(y) = \phi_{f(y)}(y) = y$. $\square$

Bibliografía

[1] R. Bowen and P. Walters, *Expansive One-Parameter Flows*, J. Diff. Eq. **12** (1972), 180–193.

[2] G. Galperin, T. Kruger, and S. Troubetzkoy, *Local instability of orbits in polygonal and polyhedral billiards*, Comm. Math. Phys. **169** (1995), 463-473.

[3] C. Gutierrez, *Smoothing continuous flous on two-manifolds and recurrences*, Ergod. Th & Dynam. Sys. **6** (1986), 17–14.

[4] G. Hector and U. Hirsch, *Introduction to the Theory of Foliations, Part A*, Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1981.

[5] K. Hiraide, *Expansive Homeomorphisms of Compact Surfaces are Pseudo Anosov*, Osaka Journal of Math. **27** (1990), no. 1, 117–162.

[6] J. F. Jakobsen and W. R. Utz, *The non-existence of expansive homeomorphisms on a closed* 2*-cell*, Pacific J. Math. **10** (1960), no. 4, 1319–1321.

[7] M. Komuro, *Expansive properties of Lorenz attractors*, The Theory of dynamical systems and its applications to nonlinear problems (1984), 4–26.

[8] J. Lewowicz, *Expansive homeomorphisms of surfaces*, Bol. Soc. Bras. Mat. **20** (1989), no. 1, 113–133.

[9] He Lianfa and Shan Guozhuo, *The Nonexistence of Expansive Flow on a Compact 2-Manifold*, Chinese Annals of Mathematics **12** (1991), no. 2, 213-218.

[10] V. Norton and T. O'Brien, *Anosov Flows and Expasiveness*, Proceedings of the American Mathematical Society **40** (1973), no. 2, 625–628.

[11] M. Oka, *Expansiveness of real flows*, Tsukuba J. Math **14** (1990), no. 1, 1–8.

[12] M. M. Peixoto, *Structural stability on two-dimensional manifolds*, Topology **1** (1962), 101–120.

[13] W. R. Utz, *Unstable homeomorphisms*, Procedings of the American Mathematical Society **1** (1950), no. 6, 769–774.

[14] H. Whitney, *Regular Family of Curves*, Annals of Mathematics **34** (1933), no. 2, 244–270.

[15] A. N. Zemlyakov and A. B. Katok, *Topological transitivity of billiards in polygons*, Mat. Zametki **18** (1975), no. 2, 291–300.