



MAESTRÍA EN ECONOMÍA INTERNACIONAL

Tesis

**Caracterización empírica  
del ciclo económico en Uruguay**

**Alejandro Pena Sánchez**

**2004**

## **AGRADECIMIENTOS**

El suscrito agradece especialmente a su tutora, Dra, Adriana Cassoni, por su disposición, sus valiosos comentarios y por la atenta lectura de las versiones preliminares de este trabajo.

Demás esta decir que los errores y omisiones que eventualmente persistan en el mismo son de absoluta responsabilidad del autor.

# INDICE

## CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN .....	1
--------------------	---

## CAPÍTULO II

EL ESTUDIO Y CARACTERIZACION DEL CICLO ECONÓMICO EN EL TIEMPO .....	5
II.1 Período 1940-1980 .....	5
II.2 Los desarrollos posteriores .....	10
II.3 Una síntesis de las dos visiones .....	14
II.3.1 Fundamentación macroeconómica del modelo conjunto .....	14
II.3.2 Formalización del modelo conjunto .....	16

## CAPÍTULO III

TEORÍA DE LOS CAMBIOS DE REGIMEN Y DESARROLLO DEL MODELO ESTADÍSTICO	21
III.1 Modelos en los que la variable que define los cambios de régimen es observable .....	22
III.2 Modelos en los que la variable que define el estado no es observable .....	24
III.2.1 El caso de cambios independientes del pasado .....	25
III.2.2 El caso de cambios gobernados por un proceso de Markov .....	26
Introducción a las cadenas de Markov .....	26
Las cadenas de Markov como un vector auto-regresivo .....	27
Predicción a partir de una cadena de Markov .....	28
Cadenas de Markov reducibles .....	29
Cadenas de Markov irreducibles .....	30

El caso particular de una cadena de Markov de orden 1 con dos estados .....	32
III.3 Un modelo estadístico general con cambios de régimen gobernados por una cadena de Markov .....	35
Planteo del modelo .....	35
Estimación .....	36
Predicción .....	39
La duración de un estado en una cadena de Markov .....	40

## CAPÍTULO IV

CARACTERIZACIÓN DEL CICLO ECONÓMICO EN URUGUAY .....	43
IV.1 Discusión del modelo a estudiar .....	43
Porqué se opta por un modelo de cambio de régimen .....	43
La elección del número de estados .....	44
La elección del número de rezagos y su relación con el número de estados .....	47
IV.2 El modelo estadístico y el algoritmo de resolución .....	49
IV.3 Los resultados del modelo .....	55
Estimación de los parámetros relevantes .....	55
Las probabilidades condicionadas de estar en cada estado – evolución .....	58
IV.4 El ciclo económico uruguayo y los shocks regionales .....	63
IV.5 El ciclo económico uruguayo y el ciclo económico mundial .....	66

## CAPÍTULO V

CONCLUSIONES .....	69
--------------------	----

---

## ANEXOS

Anexo I : Programa utilizado para efectuar la estimación de los modelos para Uruguay y Argentina .....	73
Anexo II: Series utilizadas para los modelos de Uruguay y Argentina.....	81
Anexo III: Resultados de los modelos ARIMA usados para desestacionalizar las series del PIB para Uruguay y Argentina .....	85
Anexo IV : El modelo de cambio de régimen para Estados Unidos y su programación – Kim –Nelson (1999).....	87
Anexo V : Matriz de transición asociada a la variable compuesta St .....	97
 BIBLIOGRAFÍA .....	 99

---

---

# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

La literatura económica ha reconocido desde sus inicios la existencia de ciclos de actividad como una regularidad en el funcionamiento de las diferentes economías. Desde ese momento, se han elaborado diferentes teorías para explicar los mismos. Dichas teorías se pueden agrupar cronológicamente en cuatro grandes grupos que se exponen brevemente a continuación.

Los clásicos confiaban en que los precios y salarios flexibles eran capaces de estabilizar la economía; de esta forma, el desempleo era transitorio y se corregía automáticamente. La revolución keynesiana introduce dos críticas al enfoque anterior: i) desde el lado de la demanda, la denominada trampa de la liquidez, y ii) desde el lado de la oferta, la existencia de salarios rígidos a la baja.

Posteriormente, Friedman (1968) presenta una alternativa a la teoría keynesiana. Si la oferta de trabajo depende del salario real esperado, la información imperfecta que pudieran tener los trabajadores acerca del nivel de precios futuro podría generar los ciclos económicos. Por último, Lucas (1972) introduce las expectativas racionales en la curva de oferta global; de esta forma, los individuos producirán más solamente si el precio de su producto mejora con relación al nivel general de precios, del cual se asume que hay imperfecta información. Entonces, para cada variación del nivel de precios general, el productor deberá inferir si se trata de un shock de precios local o agregado. Las inferencias incorrectas podrían generar los ciclos económicos.

Una caracterización del ciclo económico sería útil en dos aspectos:

- Para determinar los puntos en que se produce el cambio de fase del ciclo económico. Dependiendo de la teoría que se piense que mejor explica los ciclos económicos, surgirá la política económica a aplicar en esos momentos; el objetivo usual de este tipo de políticas desde la revolución keynesiana hasta nuestros días ha sido el de atenuar la duración del ciclo y/o suavizar las fluctuaciones del mismo.
-

- la posibilidad de que los parámetros que definen la reacción de las variables económicas relevantes a las medidas de política económica sean diferentes en cada estado posible del ciclo económico. Conocer la magnitud de estas asimetrías reviste gran importancia para los que deben tomar las medidas de política económica. En particular, se ha observado en Uruguay que es muy diferente la elasticidad de los ingresos fiscales ( recaudación de IVA, Imesi, etc) respecto a las variables macroeconómicas relevantes ( Consumo, PIB, etc) en las diferentes fases del ciclo.

Existen tres métodos básicos para caracterizar el ciclo económico en forma paramétrica:

- i) los métodos basados en la determinación de los co-movimientos de ciertas variables económicas relevantes que definirían el ciclo,
- ii) los métodos de cambios de régimen (Switching Regimes) y
- iii) los métodos “eclecticos” que utilizan conjuntamente los co-movimientos de las variables económicas y los cambios de régimen para caracterizar el ciclo económico.

El presente trabajo tiene como objetivo realizar una caracterización empírica del ciclo económico uruguayo. La metodología que se utilizará es la denominada Cambios de Régimen (Switching Regimes). Este tipo de caracterización paramétrica es la primera vez que se ensaya para el Uruguay y constituye, por tanto, una primera aproximación al tema.

Una de las razones para escoger la metodología de cambios de régimen es que los parámetros que se obtienen a partir de la misma tienen una rica e inmediata interpretación económica: básicamente se estima la tasa de crecimiento del producto en cada fase del ciclo, eventualmente con su correspondiente varianza, así como la matriz de transición, que indica cual es la probabilidad de que la economía pase de un estado a otro, pudiendo ser esos estados básicamente auge y recesión, o eventualmente tres, que son los que se definieron en último término para la economía uruguaya.

La definición de tres estados se adecuó en mejor forma para modelar el caso uruguayo frente a los dos estados tradicionales - auge y recesión; el modelo de tres estados parece funcionar mejor para los países en desarrollo. Véase a esos efectos Johnson (2000), que aplica un modelo de tres estados para la economía chilena.

---

---

La caracterización paramétrica escogida permite definir y evaluar:

- la duración promedio de cada fase del ciclo, con sus correspondientes medidas de error.
- la varianza condicional de la tasa de crecimiento del PIB en el tiempo.
- La consistencia entre las tasas de crecimiento observadas en cada estado y los niveles de riesgo asociados medidos en función de la varianza antes definida.
- la probabilidad de estar en un determinado momento en cada uno de los estados definidos. Estas series pueden ser utilizadas como insumo para estimar como varían ciertos parámetros económicos en cada una de las fases del ciclo.

Por otro lado, la teoría económica, a través del modelo de un bien con mercados completos, predice una alta correlación en la tasa de crecimiento del consumo per cápita entre países; asimismo, los hechos estilizados muestran un alto grado de sincronización en las recesiones y los auges de los diferentes países. Por esos motivos, se decidió explorar la incidencia del ciclo económico regional e internacional sobre el ciclo de la economía uruguaya. A esos efectos, se estimó un modelo de cambio de régimen para Argentina, en el entendido que los shocks al producto de ese país son los que más afectan a la economía uruguaya; para el resto del mundo, se utilizó el ciclo económico estimado para Estados Unidos, asumiendo que es el país que lidera el ciclo económico mundial.

Con relación a los fundamentos teóricos para utilizar la metodología de los cambios de régimen, se remiten a los modelos con efecto derramamiento (“spillover effect”) y los modelos que postulan complementariedades estratégicas. Además, Diamond y Fudenberg (1989), utilizando un modelo con expectativas racionales, demuestran que si los agentes económicos creen en la existencia de ciclos económicos, estos se convierten en una profecía autocumplida. Todos estos modelos dan lugar a múltiples equilibrios, los cuales pueden ser aproximados por modelos estadísticos que involucran cambios de régimen.

La tesis se encuentra organizada de la siguiente manera: en el Capítulo II se expone brevemente el estado del arte con relación a las metodologías que han sido utilizadas para caracterizar el ciclo económico, desde el trabajo seminal de Burns y Mitchell (1946) hasta nuestros días. El Capítulo III contiene la teoría de los cambios de régimen y los

---

principales resultados asociados a un modelo estadístico con cambios de régimen gobernados por una cadena de Markov.

En el capítulo IV se utilizan los resultados de la sección anterior para estimar un modelo de cambios de régimen para el PIB desestacionalizado en la economía uruguaya; además se estiman modelos similares para Argentina y Estados Unidos, a los efectos de relacionar el ciclo de la economía uruguaya con el ciclo regional y el ciclo económico global. Finalmente, el Capítulo V presenta las conclusiones.

---

## **CAPÍTULO II**

### **EL ESTUDIO Y CARACTERIZACION DEL CICLO ECONÓMICO EN EL TIEMPO**

#### **II.1 Período 1940-1980**

En la primera parte del siglo XX se realizaron muchas investigaciones tendientes a caracterizar en forma empírica el ciclo económico. El trabajo más famoso en este orden fue el de Burns y Mitchell (1946), quienes establecieron que el ciclo económico consiste en expansiones que se dan en la mayor parte de las actividades económicas seguidas por contracciones en esas mismas actividades, las que, a su vez, se transforman en nuevas expansiones en el próximo ciclo.

Hay dos conceptos claves en esta definición:

- i) Los co-movimientos entre las variables económicas. Los autores estudiaron la concordancia de cientos de series que medían la producción de bienes y servicios, el ingreso, los precios, las tasas de interés, las transacciones bancarias y los transportes de servicios, entre otras. Luego, utilizando la técnica de los “clusters”, agruparon variables que tuvieran aspectos en común; con base en este conjunto de variables, determinaron el movimiento en común que tenían las mismas.
- ii) La separación del ciclo económico en diferentes fases o regímenes. Para ello estudiaron los puntos de inflexión ó de cambio de tendencia en cada serie.

Juntando ambos aspectos, esto es, el grupo de variables con un comportamiento o co-movimiento conjunto y los puntos de cambio de tendencia de cada serie dentro del grupo definido, los autores llegaron a determinar la evolución del ciclo económico y las fechas de los cambios de fase de dicho ciclo.

---

El énfasis puesto en los co-movimientos propició la temprana aparición de índices que buscaron medir la evolución del ciclo económico, los cuales tomaron fundamentalmente la forma de indicadores contemporáneos, indicadores de avance e indicadores que reflejaban el ciclo con un cierto rezago.

No obstante lo anterior, la mayor parte de los trabajos empíricos en la postguerra estudiaron el ciclo en función de las propiedades de una serie o agregado económico en particular, ignorando los co-movimientos establecidos por Burns y Mitchell. Al estudiar las propiedades de una única serie, generalmente el producto, se corría el riesgo de interpretar como cambios de fase en el ciclo ciertos shocks positivos o negativos que alterarían temporariamente el producto de un sector de actividad pero que no tuvieran mayor incidencia en el resto de los sectores de la actividad económica.

A partir de fines de los 80's, el estudio del ciclo a través de los co-movimientos de las variables vuelve a resurgir, fundamentalmente a través de los trabajos de Stock y Watson (1989, 1991, 1993). En estos trabajos se parte del análisis de un conjunto de variables económicas relevantes y se trata de determinar cuál es la evolución o factor común del movimiento de las mismas.

El modelo básico propuesto por estos autores se puede resumir de la siguiente forma:

$$\Delta X_t = \mathbf{b} + \mathbf{g}(L) \Delta C_t + u_t \quad (1)$$

$$D(L) u_t = \mathbf{e}_t \quad (2)$$

$$\mathbf{f}(L) \Delta C_t = \mathbf{d} + \mathbf{h}_t \quad (3)$$

en donde  $X$  es un vector de  $n$  elementos que contiene los logaritmos de las variables macroeconómicas que se supone tienen co-movimientos en todas las fases del ciclo. La variable no observada  $C$  es la que define los comovimientos de las variables  $X$ . La ecuación (1) tiene dos componentes estocásticos: el denominado factor común no observado  $C$  y un componente  $u_t$  que refleja los movimientos idiosincráticos y los errores de medida de cada variable contenida en  $X$ .

Se asume que cada componente del vector  $(u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_n \ , \ \Delta C)$  no tiene autocorrelación y son además mutuamente incorrelacionados entre si en cada momento del tiempo. Esto se obtiene asumiendo que los términos de error

$(\mathbf{e}_{1t}, \mathbf{e}_{2t}, \mathbf{e}_{3t}, \dots, \mathbf{e}_{nt}, \mathbf{h}_t)$  son mutua y serialmente incorrelacionados y que la matriz  $D(L)$  es diagonal.

A su vez,  $\mathbf{b}$  es un vector de  $n$  elementos correspondientes a la constante del indicador  $X$ , que representa la tasa de crecimiento de cada variable perteneciente a  $X$  que no es común a las otras variables, en tanto que  $\mathbf{d}$  es un parámetro que, en el caso que  $\mathbf{f}(L)=1-L$ , se interpretar como la tasa de crecimiento común del conjunto de indicadores  $X$ . El sistema es estimado por Stock y Watson (1989) por máxima verosimilitud utilizando el filtro de Kalman.

Un ejemplo para poder visualizar mejor lo anterior se expone a continuación:

Supongamos que tenemos dos variables estacionarias  $x_{it}$ , las cuales tienen un componente común que llamaremos  $c_t$ . En estas condiciones, las ecuaciones (1), (2) y (3) se escribirán como:

$$\begin{aligned} x_{1t} &= \mathbf{g}_1 c_t + u_{1t} \\ x_{2t} &= \mathbf{g}_2 c_t + u_{2t} \end{aligned} \quad (1')$$

$$\begin{aligned} u_{1t} &= \mathbf{a}_1 u_{1,t-1} + \mathbf{e}_{1t} \\ u_{2t} &= \mathbf{a}_2 u_{2,t-1} + \mathbf{e}_{2t} \end{aligned} \quad (2')$$

$$c_t = \mathbf{f}_1 c_{t-1} + \mathbf{h}_t \quad (3')$$

En la formulación anterior se ha supuesto que  $\mathbf{b}_i = \mathbf{d} = 0$ . Para los términos de error se hacen los siguientes supuestos:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_t &\approx N.i.i.d [0; 1] \\ \mathbf{e}_{it} &\approx N.i.i.d [0; \mathbf{s}_i^2] \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Tanto el modelo (1') – (2') – (3'), como el modelo (1) – (2) – (3) del cual se derivó el primero, son modelos de estado-espacio, que constan de dos sistemas de ecuaciones:

- Un sistema de ecuaciones de medida, que describe la relación entre la variables observables y las variables de estado no observables (  $x$  por un lado y  $c$  y los términos de error por el otro lado).
- Un sistema de ecuaciones de transición, que describen la dinámica de las variables de estado. Las ecuaciones de transición toman la forma de ecuaciones en primeras diferencias respecto al vector de las variables de estado.

El modelo (1') – (2') – (3') en su representación estado – espacio, tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & 1 & 0 \\ \mathbf{g}_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_t \\ u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad X_t = H \mathbf{x}_t \quad \text{Sistema de ecuaciones de Medida}$$

$$\begin{bmatrix} c_t \\ u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{t-1} \\ u_{1,t-1} \\ u_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_t \\ \mathbf{e}_{1t} \\ \mathbf{e}_{2t} \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \mathbf{x}_t = F \mathbf{x}_{t-1} + V_t \quad \text{Sistema de ecuaciones de Transición}$$

Con base en este modelo y utilizando el filtro de Kalman, se estima la evolución del componente común  $c_t$  - que sería el índice pertinente para caracterizar el ciclo económico-, los parámetros del modelo especificados en las matrices  $H$  y  $F$ , así como las varianzas de los términos de error.

Los trabajos de Stock y Watson (1989,1991,1993) antes comentados ponen énfasis en uno de los aspectos que definían al ciclo económico según Burns y Mitchell (1946), los co-movimientos de las variables.

Poniendo énfasis en la segunda parte de la definición del ciclo económico dada por Burns y Mitchell , esto es, la existencia de diferentes fases o regímenes, aunque descuidando la primera parte de la definición antes citada, esto es , los co-movimientos de las variables al interior del ciclo, se encuentra el trabajo de Hamilton (1989). El citado autor propone un modelo no lineal para estudiar el ciclo a partir de la serie del PBN de

Estados Unidos en el período 1952-1984, el cual incluye cambios discretos de régimen (expansión – recesión).

El modelo propuesto es el siguiente:

$$y_t - \mathbf{m}_{S_t^*} = \mathbf{f}_1(y_t - \mathbf{m}_{S_{t-1}^*}) + \mathbf{f}_2(y_t - \mathbf{m}_{S_{t-2}^*}) + \mathbf{f}_3(y_t - \mathbf{m}_{S_{t-3}^*}) + \mathbf{f}_4(y_t - \mathbf{m}_{S_{t-4}^*}) + \mathbf{e}_t \quad (4)$$

$$\mathbf{e}_t \square N.i.i.d. N(0, \mathbf{S}^2)$$

La variable  $y_t$  representa la tasa de crecimiento del PBN y la variable no observada  $S_t^*$  se modela como una cadena de Markov con 2 estados (auge-recesión), con probabilidades de transición  $p_{ij}$ . El algoritmo para maximizar la función de verosimilitud de forma de estimar los parámetros relevantes del modelo es una variante del desarrollado por Demster, Laird y Rubin en 1977 y es conocido por las siglas EM. Fue desarrollado por Hamilton y consiste en un procedimiento iterativo que parte de asignar ciertos valores iniciales a los parámetros a estimar, en base a los cuales se calcula la probabilidad de estar en cada uno de los 2 estados de la naturaleza, para cada momento  $t$ .

En base a estas probabilidades, se construye la función de verosimilitud, que es una “mixture” o combinación de las funciones de densidad posibles según el estado que se presente, ponderadas cada una de ellas por la probabilidad de que se dé ese estado en particular en cada momento  $t$ . La función de verosimilitud se maximiza, se estima el vector de parámetros y se los compara con el vector que contiene los valores de partida. Si la diferencia entre ambos vectores es mayor que un cierto valor preestablecido, los estimadores se utilizan para recalcular las probabilidades de estar en cada estado y se vuelve a maximizar la función de verosimilitud. El procedimiento iterativo se detiene cuando una medida de la diferencia entre el vector de parámetros inicial y el estimado es menor que el valor que se fija arbitrariamente como criterio de convergencia.

Si bien fue un trabajo seminal para la época – 1989-, a la luz de los desarrollos posteriores se le pueden hacer las siguientes observaciones:

- Hamilton pone énfasis en los cambios de régimen pero al trabajar con una única serie, la serie del PBN de Estados Unidos, omite totalmente el estudio de los comovimientos en la caracterización del ciclo económico.

- Considera que puede variar la media de la serie en los diferentes estados, pero no permite que la varianza pueda ser también diferente en cada fase del ciclo.
- Las probabilidades de transición son consideradas constantes en el tiempo, con lo cual, las duraciones esperadas de cada fase del ciclo son también independientes del tiempo.

## **II.2 Los desarrollos posteriores**

A partir de las dos formas fundamentales de caracterizar el ciclo económico resumidas arriba, se desarrolló una abundante literatura, relacionada con la búsqueda de la forma empírica más adecuada para caracterizar el ciclo económico.

Por ejemplo, Watson (1994) estudia la duración del ciclo económico tratando de explicar por qué la duración de los auge se duplicó en el período de postguerra, en tanto que la duración de los períodos de recesión fue solamente un 50% mayor. Es decir, el autor intenta explicar los motivos por los cuales la economía americana de postguerra es más estable que en el período anterior. Es claro que para contestar esa pregunta se necesita una definición precisa de auge y recesión. Para ello utiliza el algoritmo de Bry-Boschan (1971), que se trata básicamente de una serie de reglas y filtros para determinar los puntos de cambio entre auge y recesión en una serie económica. Inspirado en el planteo de Burns y Mitchell sobre la existencia de los comovimientos, el autor estudia una serie de variables y toma el promedio de ellas para medir las duraciones de cada una de las fases del ciclo.

La conclusión del trabajo anterior es que la economía de postguerra es más estable por un problema de sesgo en la elección de la muestra; las series que utilizaron los investigadores para caracterizar el ciclo económico en los Estados Unidos en el período de preguerra eran sistemáticamente más volátiles que los agregados económicos en el período analizado. Plantean como solución la corrección de la caracterización realizada en el período de preguerra, utilizando series más acordes con el funcionamiento global de la economía.

---

Como observación puede establecerse que la forma de determinar los puntos de inflexión es en base al algoritmo de Bry-Boschan, que además de tener su grado de arbitrariedad no tiene la base teórica de los modelos que determinan los cambios de estado basado en la teoría de los cambios de régimen, la cual se desarrolla en el capítulo tres de esta tesis.

El problema de la estabilización de la economía americana en la postguerra es también analizado por Kim y Nelson (1999) pero a través de un modelo de cambio de régimen, en donde se agrega la posibilidad de que los parámetros del modelo puedan cambiar estructuralmente, pero sin conocer el momento en que esto acontece. La complejidad de este modelo hace que la estimación se realice por un método bayesiano basado en las muestras de Gibbs desarrollado por Shepard (1994) y Carter y Kohn (1994). Los autores llegan a la conclusión que la estabilización de la economía se debe a dos razones:

- i) una menor volatilidad de los shocks
- ii) una menor diferencia entre la tasa de crecimiento en cada momento  $t$  respecto a la tasa de crecimiento de largo plazo, tanto en los auges como en las recesiones.

En referencia a los modelos de cambio de régimen, otro ejemplo es el trabajo de Filardo y Gordon (1993), quienes levantan el supuesto de que las probabilidades de transición y por lo tanto la duración esperada de cada fase del ciclo sean constantes en el tiempo.

Con probabilidades de transición constantes, se puede demostrar que la duración esperada de un cierto estado (auge o recesión, por ejemplo) puede establecerse a partir de la siguiente fórmula:

$$E[\text{duracion estado } j] = \frac{1}{1 - p_j} \quad (5)$$

en donde  $p_j = \Pr[S_t = j / S_{t-1} = j]$

Filardo y Gordon (1993) encontraron poco aplicable el supuesto anterior por resultar contrario a la intuición. Intentan entonces probar la hipótesis de que la probabilidad de continuar en un estado no es independiente del tiempo sino que es decreciente con

relación a la duración que va teniendo dicho estado. Sin embargo, modelar la dinámica de las probabilidades de transición tiene complicaciones por lo cual los autores estiman los parámetros del modelo a través del procedimiento desarrollado por Shepard (1994) y Carter y Kohn (1994) ya oportunamente reseñado.

Los autores prueban que, a medida que una recesión se profundiza, la duración esperada de una expansión tiende a crecer mientras que la duración esperada de una recesión cae fuertemente. Lo opuesto ocurre cuando se prolonga un período de auge.

Como observaciones a este muy buen trabajo, pude establecerse que:

- podría someterse a prueba la posibilidad de que no sólo la media, sino también la varianza cambie de acuerdo a la fase del ciclo.
- Se utiliza únicamente la serie correspondiente al índice de Producción Industrial (base 1987=100); por tanto, no están presentes en esta caracterización los comovimientos de las variables.

Otra posibilidad al estudiar una serie de tiempo en el marco de los modelos de cambio de régimen, es establecer la hipótesis de que no sólo la media de esa serie cambie con el estado, sino también la volatilidad. Este supuesto puede ser muy conveniente en las series de tasas de crecimiento de producto, donde la varianza de dicha variable puede ser diferente según la fase del ciclo en que se encuentre la economía.

McConnel y Perez-Quiros (2000)<sup>1</sup> observaron ese comportamiento de la varianza cuando cotejaron la hipótesis de una caída en la volatilidad de la tasa de crecimiento de los Estados Unidos a partir de los años 80. Su trabajo amplía la contribución inicial de Hamilton (1989) en dos sentidos:

- La media y la varianza siguen modelos de cambios de régimen independientes, considerando los dos estados habituales: auge y recesión.
- Se permite que los dos niveles de media se combinen con los dos niveles de varianza.

---

<sup>1</sup> Una idea similar aplicada para Nueva Zelanda la presentan Bucle, Haugh y Thompson (2002).

---

De esta forma, al combinar los dos diferentes estados para la media y la varianza, los estados posibles de la economía serían cuatro. Se puede resumir el modelo de la siguiente manera:

$$\Delta y_t = \mathbf{m}_{S_t V_t} + \mathbf{f}[\Delta y_{t-1} - \mathbf{m}_{S_{t-1} V_{t-1}}] + \mathbf{e}_t \quad (6)$$

$$\mathbf{e}_t \approx N[0; \mathbf{s}_{V_t}^2]$$

en donde  $\mathbf{m}_{S_t, V_t}$  es la media del proceso, la cual depende del estado de la economía tanto en relación a la media como a la varianza. Esto es, las cadenas de Markov que definen el comportamiento de  $y_t$  son independientes en este caso.

Estos autores explican la menor volatilidad de la economía americana a partir de los años 80 básicamente por una caída en la volatilidad en la producción de bienes durables.

Concluyendo, los trabajos presentados hasta el momento, si bien han ido levantando supuestos y enriqueciendo el análisis y caracterización del ciclo económico, se han desarrollado por dos líneas de trabajo claramente diferenciadas:

- Los trabajos que ponen énfasis en los co-movimientos de las variables a la hora de caracterizar el ciclo económico, y
- Los trabajos que ponen el énfasis en los cambios de régimen.

No se ha presentado hasta ahora ningún trabajo que uniera ambas vertientes, que son las que caracterizan a la definición del ciclo económico que dieran Burns y Mitchell en 1946. En la próxima sección se exponen trabajos que tratan de tomar en cuenta ambas ideas. Es de destacar que estos trabajos son muy recientes ya que se comienzan a plantear a partir de 1996.

### **II.3 Una síntesis de las dos visiones**

Diebold y Rudebusch (1996) revisaron la literatura que se había procesado hasta ese momento y concluyeron que los dos aspectos claves que caracterizan al ciclo económico habían sido tratados por separado, con lo cual los análisis resultaban incompletos o parciales. Por tanto, proponen un modelo de factor dinámico común con cambio de régimen que permite combinar ambos aspectos.

En una primera sección se expondrá la fundamentación teórica que da sustento a un modelo conjunto, siguiendo a Diebold y Rudebusch (1996). Posteriormente, en la siguiente sección, se presentará una formalización del modelo en base a un trabajo de Kim y Nelson (1998).

#### **II.3.1 Fundamentación macroeconómica del modelo conjunto**

Diebold y Rudebusch (1996) presentan la teoría económica que da sustento al modelo de factor dinámico común con cambio de régimen.

Con relación al factor dinámico común, presentan un modelo que se basa en un planteo de Hansen y Sargent (1993), el cual se expone brevemente a continuación.

Este modelo tiene dos propiedades importantes:

- El programa de optimización dinámica asociado al modelo puede ser resuelto en forma fácil y exacta.
- El equilibrio del modelo conduce a un vector autoregresivo, lo cual logra dar sustento teórico a los modelos de factor dinámico común.

El agente representativo debe decidir la cantidad de consumo de servicios -  $s$  y la cantidad de trabajo a realizar-  $l$ , en el siguiente problema de optimización:

---

$$\max -\frac{1}{2} E \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{b}' \left[ (s_t - b_t)^2 + l_t^2 \right] \quad (7) \quad \text{sujeto a}$$

$$\mathbf{a}_1 c_t + \mathbf{a}_2 g_t + \mathbf{a}_3 i_t = \mathbf{a}_4 k_{t-1} + \mathbf{a}_5 l_t + d_t \quad (8)$$

$$k_t = \mathbf{b}_1 k_{t-1} + \mathbf{b}_2 i_t \quad (9)$$

$$h_t = \mathbf{g}_1 h_{t-1} + \mathbf{g}_2 c_t \quad (10)$$

$$s_t = \mathbf{d}_1 h_{t-1} + \mathbf{d}_2 c_t \quad (11)$$

en donde  $c$  es el consumo en bienes finales,  $g$  representan los bienes intermedios,  $\mathbf{b}$  es la tasa de descuento e  $i$  es la inversión. El capital físico  $k$  se acumula a través de la inversión ; el capital humano depende del capital del período anterior y del consumo. La última restricción (11) especifica que el consumo de servicios depende del capital humano del año anterior y del consumo actual. Las variables  $b$  y  $d$  representan shocks en las preferencias y en la tecnología respectivamente.

Estos shocks a su vez se modelan como:

$$b_t = U_b e_t \quad (12)$$

$$d_t = U_d e_t \quad (13)$$

donde  $e_t$  mide la incertidumbre exógena. A su vez, ésta evoluciona de acuerdo a:

$$e_{t+1} = \mathbf{r}_1 e_t + w_{t+1} \quad \text{con } w_t \square N.i.i.d. [0; \mathbf{s}^2] \quad (14)$$

El equilibrio de esta economía es un proceso lineal estocástico cuya representación en la forma estado-espacio esta dada por:

$$\mathbf{a}_{t+1} = \mathbf{A} \mathbf{a}_t + \mathbf{C} w_{t+1} \quad (15)$$

$$o_t = \mathbf{G} \mathbf{a}_t \quad (16)$$

El vector  $\mathbf{a}_t$  es el vector de las variables de estado que contiene a  $h_t$ ,  $k_t$  y  $e_t$ . El vector  $o_t$  contiene cualquier variable que pueda ser expresada como una función lineal de las variables de estado.

Por otro lado, los modelos de cambio de régimen son consistentes con una variedad de modelos macroeconómicos. En particular, los que contemplan fallas de coordinación y

dan lugar a múltiples equilibrios. Estos pueden ser originados por el efecto derramamiento y las complementariedades estratégicas, los cuales pueden ser adecuadamente aproximados por modelos estadísticos que involucran cambios de régimen.

En particular, Diamond and Fudenberg (1989) , en el marco de los modelos de expectativas racionales, demuestran que si los agentes económicos creen en la existencia de los ciclos económicos, éstos luego se convierten en una profecía autocumplida.

### II.3.2 Formalización del modelo conjunto

A partir de la propuesta de Diebold y Rudebusch (1996) se han realizado una serie de trabajos para tratar de conciliar los dos enfoques. Kim y Nelson (1998) proponen un modelo para construir un factor dinámico común con cambio de régimen, el cual puede ser representado de la siguiente manera

$$\Delta Y_{it} = \mathbf{I}_i(L) \Delta C_t + D_i + e_{it} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad t = 1, 2, 3, \dots, T \quad (17)$$

$\Delta Y_{it}$  representa la primer diferencia en logaritmos de la serie  $i$ . En este caso los autores toman cuatro series para construir el factor dinámico común o índice compuesto, de ahí el recorrido de la variable  $i$ .

$\Delta C_t$  es la tasa de crecimiento del índice compuesto,  $D_i$  es una constante asociada a la serie  $i$  y  $e_{it}$  representa un proceso autorregresivo de cierto orden que se puede expresar como:

$$\mathbf{y}_i(L) e_{it} = \mathbf{e}_{it} \quad \mathbf{e}_{it} \approx N.i.i.d.(0, \mathbf{s}^2) \quad (18)$$

Cada una de las series tiene un componente idiosincrático ( $D_i + e_{it}$ ) y una combinación lineal de valores corrientes y pasados del indicador compuesto  $C_t$ . A su vez, este índice compuesto se representa por un proceso autorregresivo del siguiente tipo:

$$f(L)[\Delta C_t - \mathbf{m}_{S_t} - \mathbf{d}] = v_t \quad v_t \approx N.i.i.d. (0, 1) \quad (19)$$

$v_t$  y  $e_{it}$  son procesos independientes para todo  $t, i$ , mientras que la varianza de  $v_t$  se asume 1 para lograr la identificación del problema. La media del índice compuesto tiene un término constante  $\mathbf{d}$  y un componente que varía según la economía se encuentre en auge o recesión  $\mathbf{m}_{S_t}$ . En términos analíticos:

$$\mathbf{m}_{S_t} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 S_t \quad \mathbf{m}_1 > 0, S_t = \{0, 1\} \quad (20)$$

La transición entre los dos estados de la economía está gobernada por un proceso de Markov:

$$\Pr[S_t = 1 | S_{t-1} = 1] = p \quad (21)$$

$$\Pr[S_t = 0 | S_{t-1} = 0] = q \quad (22)$$

La modificación al modelo planteado por Stock y Watson(1994) es que en esta propuesta se permite que el factor dinámico común tenga una media distinta según en qué fase del ciclo se encuentre la economía, con lo cual se están considerando los dos aspectos que definen el ciclo económico de acuerdo a Burns y Mitchell(1946): los co-movimientos de las variables y los cambios de estado.

Las medias de las variables así definidas están sobreidentificadas por lo cual es necesario imponer alguna restricción sobre la variable  $\mathbf{m}_{S_t}$ , como ser que su media sea cero. Lo anterior implica que  $\mathbf{d}$  representa ahora la tasa de crecimiento de largo plazo del índice compuesto. El componente  $\mathbf{m}_{S_t}$  le introduce desvíos a la tasa de crecimiento en el período  $t$  respecto de la tasa de largo plazo, el que a su vez depende de la fase del ciclo en que se encuentre la economía.

El modelo descrito se puede representar bajo la forma estado-espacio de la siguiente manera:

$$\Delta Y_t = H \mathbf{x}_t + \bar{D} \quad (23)$$

$$\mathbf{x}_t = \bar{M} s_t + \bar{\mathbf{d}} + F \mathbf{x}_{t-1} + u_t \quad (24)$$

en donde:

$$\Delta Y_t = [\Delta Y_{1t} \ \Delta Y_{2t} \ \Delta Y_{3t} \ \Delta Y_{4t}] \quad (25)$$

$$\bar{D} = [D_1 \ D_2 \ D_3 \ D_4] \quad (26)$$

y los otros términos están definidos a partir de las especificaciones de  $\mathbf{f}(l)$ ,  $\mathbf{y}_i(L)$  y  $\mathbf{I}_i(L)$ .

Asumiendo procesos autorregresivos de primer orden para el índice compuesto y para cada uno de las series que componen el mismo, y suponiendo además que  $\mathbf{I}_i(L) = \mathbf{I}_i$ ,  $i=1,2,3,4$ , la representación estado-espacio en términos matriciales se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_1 \\ \Delta Y_2 \\ \Delta Y_3 \\ \Delta Y_4 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I}_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{I}_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{I}_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} \quad \text{con } H = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I}_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{I}_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{I}_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta C \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} (1-\mathbf{f}_1 L) \mathbf{m}_{s_t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{y}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{y}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{y}_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{x}_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}_{t-1} + \begin{bmatrix} v \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \end{bmatrix}_t \quad (28)$$

$$\text{con } \bar{M}_{s_t} = \begin{bmatrix} (1-\mathbf{f}_1 L) \mathbf{m}_{s_t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{y}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{y}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{y}_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{x}_{41} \end{bmatrix}$$

Como los parámetros en  $\bar{D}$  y  $\bar{d}$  sobredeterminan la media de los procesos, el modelo hasta ahora no está identificado. Sin embargo, si las variables se expresan como desvíos respecto a sus medias, o sea, definiendo:

$$\Delta y_{it} = \Delta Y_{it} - \Delta \bar{Y}_i \quad (29)$$

$$\Delta c_t = \Delta C_t - \bar{d} \quad (30)$$

el modelo se puede representar en la forma estado espacio de la siguiente forma:

$$\Delta y_t = H \mathbf{x}_t^* \quad (31)$$

$$\mathbf{x}_t^* = \bar{M} \mathbf{x}_{t-1} + F \mathbf{x}_{t-1}^* + u_t \quad (32)$$

en donde el término  $\mathbf{x}^*$  se define a partir de  $\mathbf{x}$  sustituyendo  $\Delta C$  por  $\Delta c$ .

De esta forma quedan fuera los términos en  $\bar{D}$  y  $\bar{d}$  a los efectos de la estimación de la función de verosimilitud.

Si  $S_t$  fuera observable, se trataría de un modelo de Gauss lineal y se podría aplicar el procedimiento propuesto por Stock y Watson (1991), a saber:

- Estimar los parámetros de la representación estado-espacio (ecuaciones 31-32)
- Obtener  $\bar{D}$  y  $\bar{d}$  a partir de las definiciones establecidas en las ecuaciones (24) y (26)
- Calcular el índice compuesto C

Sin embargo, como no se puede observar el régimen en el cual se encuentra la economía, ese procedimiento no se puede aplicar. La explicación intuitiva se relaciona al hecho de que cada iteración en el filtro de Kalman produce un crecimiento considerable

en el número de casos a considerar ( suponiendo que la variable  $S_t$  puede tomar sólo dos valores en cada momento del tiempo, habría que considerar  $2^T$  posibles “camino” a los efectos de estimar la función de verosimilitud), lo cual impone restricciones computacionales insalvables.

De allí que se tenga que volver a emplear el método bayesiano de inferencia basado en las muestras de Gibbs ya expuesto en la sección II.2.

---

## CAPÍTULO III

### TEORÍA DE LOS CAMBIOS DE REGIMEN Y DESARROLLO DEL MODELO ESTADÍSTICO<sup>2</sup>

Si se entiende a la econometría como una disciplina que, en el marco de cierto enfoque de teoría económica, busca reproducir el comportamiento de una cierta realidad temporal y espacial utilizando la información que de dicha realidad se desprende, puede resultar muchas veces que una única ecuación no siempre modela adecuadamente el comportamiento de cierta economía en el tiempo. Una de las razones por las cuales se da esta insuficiencia se asocia a la existencia de cambios en los parámetros relevantes a lo largo del tiempo. Existen múltiples formas de someter a prueba la estabilidad de los parámetros de un modelo. La prueba F propuesta por Chow (1960) es una de ellas, pero requiere información sobre el momento en que efectivamente se produce el cambio estructural.

No obstante, en muchos casos se tiene escasa información acerca de cuándo esos cambios suceden. Algunos autores como Quandt (1958,1960) y Farley y Hinich (1970) consideran modelos en donde se permite hasta un cambio estructural en un punto no conocido. Posteriormente, Quandt (1972) y Brown, Durbin y Evans (1975), entre otros, consideran modelos que permiten más de un cambio estructural.

Finalmente, algunos autores como Wecker (1979) y Neftci (1984) han propuesto modelos en donde el momento del cambio estructural es endógeno, esto es, explicado por el propio modelo. Este tipo de modelos es el que más se adapta a las caracterizaciones del ciclo económico, dado que se pretende que el modelo indique en qué momentos se producen los puntos de inflexión y éstos pueden ser muchos en el período de estudio. Lo que resta de este capítulo se destina a exponer la teoría que se ha desarrollado con relación a este tipo de modelos desde fines de los años 80 hasta nuestros días.

---

<sup>2</sup> Este capítulo se basa principalmente en Hamilton (1994), Capítulo 22 y Chang-Yin Kim y Charles R.Nelson (1999), Capítulo 4.

---

### III.1 Modelos en los que la variable que define los cambios de régimen es observable

Considérese el siguiente modelo, en donde se permite que todos o algunos de los parámetros tomen un conjunto finito de valores; en este caso, dos valores:

$$y_t = x_t \mathbf{b}_{S_t} + e_t \quad t=1,2,3,\dots,T. \quad (1)$$

$$e_t \approx \text{N.i.i.d.} [0, \mathbf{s}^2] \quad (2)$$

$$\mathbf{b}_{S_t} = \mathbf{b}_0 (1 - S_t) + \mathbf{b}_1 S_t \quad (3)$$

$$\mathbf{s}^2_{S_t} = \mathbf{s}_0^2 (1 - S_t) + \mathbf{s}_1^2 S_t \quad (4)$$

$$S_t = 0, 1 \quad (5)$$

Cuando el estado de la naturaleza es 1, entonces los parámetros son  $\mathbf{b}_1$  y  $\mathbf{s}_1^2$ , en tanto, cuando el estado de la naturaleza es 0, los parámetros son  $\mathbf{b}_0$  y  $\mathbf{s}_0^2$ .

Si se conoce el valor de S en cada momento del tiempo, el modelo es del tipo “dummy”, es decir, asociado a una variable observable de estado que toma dos valores. En ese caso, la función de máxima verosimilitud viene dada por la expresión:

$$\ln L = \sum_{t=1}^T \ln [f(y_t / S_t)] \quad (6)$$

donde:

$$f(y_t / S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\mathbf{p}}} \exp \left[ -\frac{(y_t - x_t \mathbf{b}_{S_t})^2}{2\mathbf{s}^2_{S_t}} \right] \quad (7)$$

La función de verosimilitud debe ser maximizada con relación a los cuatro parámetros:

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{s}_1^2, \mathbf{b}_2, \mathbf{s}_2^2$$

y se obtiene el vector de estimadores:

$$\hat{\mathbf{q}} = \left[ \hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{s}}_1^2, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{s}}_2^2 \right]$$

### III.2 Modelos en los que la variable que define el estado no es observable

Considérese la distribución conjunta de la variable observable  $y_t$  y la variable no observable  $S_t$ . Esta distribución conjunta se puede expresar como el producto de una distribución marginal y una condicional de la siguiente manera:

$$f[y_t, S_t / \mathbf{y}_{t-1}] = f[y_t / S_t, \mathbf{y}_{t-1}] f[S_t / \mathbf{y}_{t-1}] \quad (8)$$

donde  $\mathbf{y}_{t-1}$  representa el conjunto de información disponible hasta el momento  $t-1$ .

La distribución marginal de  $y_t$  se obtiene "integrando" en todo el recorrido de la variable  $S_t$ .

De esta forma:

$$f[y_t / \mathbf{y}_{t-1}] = \sum_{S_t=0}^1 f[y_t, S_t / \mathbf{y}_{t-1}] = \sum_{S_t=0}^1 f[y_t / S_t, \mathbf{y}_{t-1}] f[S_t / \mathbf{y}_{t-1}] \quad (9)$$

Esta función de densidad puede interpretarse como una media ponderada de cada una de las dos distribuciones condicionales, dependiendo de la probabilidad con que la variable  $S_t$  tome un valor u otro.

Luego, la función de verosimilitud puede escribirse como:

$$\ln L = \sum_{t=1}^T \ln \sum_{h=0}^1 f[y_t / S_t, \mathbf{y}_{t-1}] \Pr[S_t = h / \mathbf{y}_{t-1}] \quad (10)$$

Sin realizar algún supuesto acerca del comportamiento estocástico de  $S_t$ , no es posible estimar los parámetros del modelo. A continuación se examinarán dos casos:

- a) cuando los valores contemporáneos de la variable  $S_t$  no dependen de sus valores pasados, y
- b) cuando dependen de sus valores pasados, en cuyo caso se dará especial énfasis al caso en que el cambio de régimen venga gobernado por un proceso de Markov.

### III.2.1 El caso de cambios independientes del pasado

Si la variable  $S_t$  evoluciona en forma independiente de su pasado, una de las posibles formas de modelar el cambio de régimen es asumir una función de densidad tipo Bernoulli para la variable  $S_t$ , esto es:

$$\Pr[S_t=1] = p = \frac{\exp(p_0)}{1+\exp(p_0)} \quad (11)$$

$$\Pr[S_t=0] = q = 1 - \frac{\exp(p_0)}{1+\exp(p_0)} \quad (12)$$

El parámetro relevante a estimar es  $p_0$ , cuyo recorrido no está restringido a ningún intervalo en los números reales.

Otra forma más compleja de modelar  $S_t$  es haciendo depender la probabilidad de ocurrencia de cada estado de un vector de variables exógenas al modelo. En términos analíticos:

$$\Pr[S_t=1/\mathbf{y}_{t-1}] = p_t = \frac{\exp(p_0 + \mathbf{Z}'_{t-1} p_1)}{1+\exp(p_0 + \mathbf{Z}'_{t-1} p_1)} \quad (13)$$

$$\Pr[S_t=0/\mathbf{y}_{t-1}] = 1 - p_t = 1 - \frac{\exp(p_0 + \mathbf{Z}'_{t-1} p_1)}{1+\exp(p_0 + \mathbf{Z}'_{t-1} p_1)} \quad (14)$$

Con esta formulación, la función de verosimilitud de la ecuación (10) se maximiza respecto a los siguientes parámetros:  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{s}_0^2, \mathbf{s}_1^2, p_0, p_1$ .

### III.2.2 El caso de cambios gobernados por un proceso de Markov

#### Introducción a las cadenas de Markov

El valor que toma la variable aleatoria no observable  $S$  en el momento  $t$  puede depender del valor que tomó en el pasado:  $\{S_{t-1}, S_{t-2}, S_{t-3}, \dots, S_{t-r}\}$ . En este caso, se dice que existe una *cadena de Markov* de orden  $r$ .

Esta variable aleatoria  $S_t$ , que indica cuál es el estado de la naturaleza, puede tomar valores en el conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ .

Simplificando, se asume aquí que la cadena es de orden 1 ( $r=1$ ). Esto implica que la probabilidad de que  $S_t$  tome algún valor  $j$  en el momento  $t$ , depende únicamente del valor que tomó en el momento anterior,  $t-1$ , o sea:

$$\text{Prob}\{S_t = j / S_{t-1} = i, S_{t-2} = k, \dots\} = \text{Prob}\{S_t = j / S_{t-1} = i\} = p_{ij} \quad (15)$$

Se denomina  $p_{ij}$ , a la *probabilidad de transición*, la cual indica la probabilidad de que el estado  $i$  sea seguido por el estado  $j$ .

Dada la definición anterior, se verifica que:

$$\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (16)$$

Es conveniente ordenar todas las probabilidades de transición entre  $n$  estados en una matriz  $P$ , denominada justamente *matriz de transición*.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{N1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix} \quad (17)$$

### Las cadenas de Markov como un vector auto-regresivo

Es usual representar una cadena de Markov por un vector aleatorio  $\mathbf{x}_t$  de  $N \times 1$ , en el cual el  $j$ -ésimo elemento es 1 si  $S_t = j$  y cero en cualquier otro caso.

El valor esperado de este vector aleatorio en  $t+1$ , dado que en el momento  $t$  se cumple que  $S_t = i$ , está dado por:

$$E[\mathbf{x}_{t+1} / S_t = i] = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iN})' = P\mathbf{x}_t \quad (18)$$

De lo anterior, surge que es posible representar una cadena de Markov de orden 1 como un proceso AR(1) de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_{t+1} = P\mathbf{x}_t + v_{t+1} \quad (19)$$

en donde  $v_{t+1}$  es un proceso de innovación.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> Un proceso de innovación es una martingala en diferencias con sus elementos incorrelacionados en el tiempo y con varianza finita.

---

### Predicción a partir de una cadena de Markov

Considerando (19), esto es:  $\mathbf{x}_{t+1} = P\mathbf{x}_t + v_{t+1}$ , y como a su vez:

$$\mathbf{x}_t = P\mathbf{x}_{t-1} + v_t \quad (20)$$

Reemplazando (20) en (19) se tiene que:

$$\mathbf{x}_{t+1} = P^2 \mathbf{x}_{t-1} + Pv_t + v_{t+1} \quad (21)$$

Los reemplazos sucesivos permiten obtener la siguiente forma final para  $\mathbf{x}_{t+m}$  a partir del valor que toma ese vector en el período t:

$$\mathbf{x}_{t+m} = v_{t+m} + Pv_{t+m-1} + P^2 v_{t+m-2} + \dots + P^{m-1} v_{t+1} + P^m \mathbf{x}_t \quad (22)$$

de donde surge que:

$${}_t E \left[ \mathbf{x}_{t+m} / \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_{t-j} \right] = P^m \mathbf{x}_t \quad (23)$$

De esta forma, la matriz de probabilidades de transición de una cadena de Markov m períodos hacia adelante puede calcularse elevando la matriz de transición original m veces. Si en el período t el estado era i, entonces el valor esperado de las probabilidades de transición está dado por la columna i-ésima de  $P^m$ , denotada por  $P_{.i}^m$ . Esto es:

$${}_t E \left[ \mathbf{x}_{t+m} / \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_{t-j} \right] = P^m w_i \quad (24)$$

Donde  ${}_t E$  indica que es valor esperado con información hasta el momento t y  $w_i$  es la columna i-ésima de la matriz identidad **I**.

De forma general, se tiene que:

$$\Pr[S_{t+m} = j / S_t = i] = [\text{elemento } p_{ij}] \text{ de } P^m \quad (25)$$

Interesa distinguir dentro de las cadenas de Markov las que son reducibles de las que no lo son. Esta tipología es útil para representar y distinguir procesos económicos que tienden a permanecer en un estado particular, una vez que llegan a él, de otros procesos económicos en donde ninguno de los estados es “absorbente”, en el sentido establecido anteriormente.

### Cadenas de Markov reducibles

Si los posibles estados son dos ( $N=2$ ) y considerando la condición establecida en (16),  $P$  queda de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & 1 - p_{22} \\ 1 - p_{11} & p_{22} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Existe un caso de especial interés que es cuando  $p_{11} = 1$ ; en ese caso, la matriz  $P$  queda de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 - p_{22} \\ 0 & p_{22} \end{pmatrix} \quad (27)$$

Es decir,  $P$  es una matriz triangular superior. Si el régimen llega al estado 1, permanece en él. Se dice que el estado 1 es absorbente y que la cadena de Markov es reducible.

En general, una cadena de Markov de  $N$  estados es reducible si la matriz de transición se puede escribir de una forma triangular superior, agrupando adecuadamente a los estados.

Esto es,  $P$  queda de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} B & C \\ \emptyset & D \end{pmatrix} \quad (28)$$

$B$  es una submatriz de  $k \times k$ , con  $1 \leq k < N$ . Si se llega a un estado  $j \leq k$ , ya no es posible volver a los estados  $k+1, k+2, \dots, N$ .

### ***Cadenas de Markov irreducibles***

Las cadenas de Markov irreducibles representan procesos en los cuales no existen estados absorbentes. En el curso del tiempo, siempre es posible que se dé cualquier estado, aunque desde luego con diferentes probabilidad de que ello ocurra.

Interesan en particular ciertos tipos de cadenas de Markov en el conjunto de las cadenas irreducibles.

#### **Definición:**

Consideremos una cadena de N estados de Markov que sea irreducible. Si uno y sólo uno de los valores propios es 1 y todos los demás están dentro del círculo unidad, entonces se dice que la cadena es *ergódica*.

De acuerdo a (17), P en general toma la forma:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{N1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (16), se cumple que:

$$P' \mathbf{i} = \mathbf{i} \quad (29)$$

Donde  $\mathbf{i}$  es un vector de unos de orden N . Por lo tanto, P' tiene también un valor propio igual a la unidad, cuyo vector propio asociado es  $\mathbf{i}$  .

Como una conocida propiedad de álgebra matricial nos dice que P y P' tienen los mismos valores propios, surge que P tendrá siempre un valor propio igual a la unidad. El vector propio de P asociado a ese valor propio unitario se denominará  $\mathbf{p}$  .

Por lo anterior, resulta entonces que:

$$P\mathbf{p} = \mathbf{p} \quad (30)$$

Como  $\mathbf{p}$  es un vector de probabilidades, sus elementos deben pertenecer al intervalo  $[0,1]$  ; por lo tanto, al vector que surge de (30) hay que normalizarlo, en caso que fuera necesario.

**Proposición:**

Si  $P$  es la matriz de transición de una cadena de Markov ergódica, entonces:<sup>4</sup>

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P^m = \mathbf{p} \mathbf{i}' \quad (31)$$

Las columnas de  $P^m$  en el límite son todas iguales entre sí e iguales a  $\mathbf{p}$  . Tomando por ejemplo la fila 1, se tiene la siguiente igualdad:

$$p_{11} = p_{21} = \dots = p_{N1} \quad (32)$$

Lo anterior puede ser interpretado como sigue: estando en cualquier estado  $j = 1,2,3, \dots, N$ , la probabilidad de pasar del estado  $j$  al estado 1 es la misma para todo  $j$ . Por tanto, este valor puede ser interpretado como la probabilidad incondicional de que se dé el estado 1.

Esto es :

$$\Pr[S = 1] = p_{11} \text{ con } p_{11} \in (\mathbf{p} \mathbf{i}')_{1,i} \quad (33)$$

---

<sup>4</sup> Cox y Miller (1965) , páginas 120-123.

### El caso particular de una cadena de Markov de orden 1 con dos estados

Este caso es de interés no sólo por su sencillez, sino porque la mayor parte de los procesos económicos que se modelan con cambios de régimen definen 2 estados. Por ejemplo, Hamilton (1989), Filardo y Gordon (1993).

La matriz de transición queda de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & 1 - p_{22} \\ 1 - p_{11} & p_{22} \end{pmatrix} \quad (34)$$

Para obtener los valores propios de  $P$  con los correspondientes vectores propios asociados, se plantea la ecuación:

$$|P - \lambda I| = 0 \quad (35)$$

en donde  $I$  es la matriz identidad y  $\lambda$  es la raíz genérica que representa las posibles raíces del polinomio característico que surge de (35).

Los valores propios con sus vectores propios asociados responden a:

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \mathbf{p}' = \left[ \frac{1 - p_{22}}{1 - p_{11} - p_{22}}; \frac{1 - p_{11}}{1 - p_{11} - p_{22}} \right] \quad (36)$$

$$\lambda_2 = p_{11} + p_{22} - 1 \rightarrow \mathbf{q} = (-1; 1) \quad (37)$$

Se demuestra fácilmente que la matriz de transición  $m$  períodos hacia delante,  $P^m$ , toma la siguiente forma:

$$P^m = \begin{pmatrix} \frac{1 - p_{22} + I_2^m (1 - p_{11})}{2 - p_{11} - p_{22}} & \frac{1 - p_{22} - I_2^m (1 - p_{22})}{2 - p_{11} - p_{22}} \\ \frac{1 - p_{11} - I_2^m (1 - p_{11})}{2 - p_{11} - p_{22}} & \frac{1 - p_{11} + I_2^m (1 - p_{22})}{2 - p_{11} - p_{22}} \end{pmatrix} \quad (38)$$

De lo anterior surge que la probabilidad de estar en el estado 2 en el momento (t+m) dado que en el momento t se está en el estado 1 es el elemento (2,1) de  $P^m$  :

$$\text{Pr ob}[S_{t+m} = 2 / S_t = 1] = \frac{1 - p_{11} - I_2^m (1 - p_{11})}{2 - p_{11} - p_{22}} \quad (39)$$

Generalizando lo anterior, en una cadena ergódica de N estados, para calcular el vector de probabilidades ergódicas  $\mathbf{p}$  , se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} P\mathbf{p} = \mathbf{p} \\ \mathbf{i}'\mathbf{p} = 1 \end{cases} \quad (\mathbf{p} \text{ normalizado}) \quad (40)$$

Expresado el sistema de ecuaciones anterior en forma matricial, queda:

$$A\mathbf{p} = w_{N+1} \text{ siendo}$$

$$A = \begin{bmatrix} I_N - P \\ \mathbf{i}' \end{bmatrix} \quad w_{N \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Resolviendo el sistema anterior, el vector de probabilidades ergódicas,  $\mathbf{p}$  , se puede calcular como la columna (N+1) de la matriz  $B = (A' A)^{-1} A'$  , o sea que:

$$\mathbf{p} = (A' A)^{-1} A' w_{(N+1)} \quad (42)$$

### **A manera de conclusión**

Dentro de los modelos en los cuales la variable que define el estado no es observable, que son los que se expusieron en la sección III.2, se le ha dado especial énfasis y desarrollo al caso particular en que los cambios de régimen son gobernados por una cadena de Markov ( subsección III.2.2).

La otra forma posible de modelar los cambios de régimen es a partir de un vector de variables exógenas,  $Z$ , tal como se expuso en la subsección III.2.1. En esta forma de modelización,  $Z$  por lo general toma la forma de algún conjunto de variables que permitan definir con anticipación un cambio en la fase del ciclo, como por ejemplo en Filardo y Gordon (1993). Dado que en nuestro país este tipo de indicadores se han desarrollado muy recientemente - Masoller (2002)-, no se cuenta todavía con series lo suficientemente largas como para poder tomar en consideración esta posibilidad.

En la sección que sigue se presenta el modelo estadístico general que servirá de base para la caracterización del ciclo económico en Uruguay que se expondrá en el Capítulo IV. Por las razones antes anotadas, el cambio de régimen en este modelo viene gobernado por una cadena de Markov.

---

### III.3 Un modelo estadístico general con cambios de régimen gobernados por una cadena de Markov

#### Planteo del modelo

Si se supone que interesa analizar el comportamiento de  $h$  variables económicas a partir de otras  $k$  variables que se consideran exógenas, el problema se puede presentar como:

$y_t$  vector de variables endógenas observables de  $h \times 1$ .

$X_t$  vector de variables exógenas de  $k \times 1$  elementos

$Y_t$  es el vector que contiene toda la información hasta el momento  $t$ . Esto es:

$$Y_t = \{y'_t, y'_{t-1}, y'_{t-2}, \dots, y'_{t-m}, X'_t, X'_{t-1}, X'_{t-2}, \dots, X'_{t-m}\} \quad (43)$$

Si el régimen es gobernado por el estado  $S^*_t = j$  en el momento  $t$ , entonces la densidad condicional de  $y_t$  viene dada por:

$$f(y_t / S_t = j, X_t, Y_{t-1}; \mathbf{a}) \quad (44)$$

donde  $\mathbf{a}$  es el vector de parámetros relevantes.

Si hay  $N$  estados, habrá  $N$  diferentes densidades condicionales para cada vector  $y_t$ , que pueden ordenarse en un vector  $\mathbf{h}_t$ .

En la ecuación (44) la función de densidad condicional depende del estado actual del régimen. Si dependiera también del estado del régimen en el momento anterior, tal como estaba planteado en las cadenas de Markov vistas en la subsección III.2.2, se puede hacer un cambio de variable adecuado para representar la función de densidad tal como esta descrita en (44).

Si, por ejemplo,  $y_t$  depende de  $S^*_t$  y  $S^*_{t-1}$ , variable ésta que puede tomar los valores 1 ó 2, se puede definir una variable  $S_t$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
S_t &= 1 \text{ si } S_t^* = 1 \text{ y } S_{t-1}^* = 1 \\
S_t &= 2 \text{ si } S_t^* = 2 \text{ y } S_{t-1}^* = 1 \\
S_t &= 3 \text{ si } S_t^* = 1 \text{ y } S_{t-1}^* = 2 \\
S_t &= 4 \text{ si } S_t^* = 2 \text{ y } S_{t-1}^* = 2
\end{aligned} \quad (45)$$

Si se define  $p_{ij}^* = \text{Prob}[S_t^* = j / S_{t-1}^* = i]$ ,  $S_t$  tiene entonces la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11}^* & 0 & p_{11}^* & 0 \\ p_{12}^* & 0 & p_{12}^* & 0 \\ 0 & p_{21}^* & 0 & p_{21}^* \\ 0 & p_{22}^* & 0 & p_{22}^* \end{bmatrix} \quad (46)$$

El modelo queda por ahora definido por la función de densidad en (44) y con los parámetros poblacionales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
f(y_t / S_t = j, X_t, Y_{t-1}, \mathbf{a}) \\
\mathbf{q} = \{ \mathbf{a}, p_{ij}^* \}
\end{aligned}$$

## Estimación

El algoritmo propuesto por Hamilton (1989) es una variante del desarrollado por Dempster, Laird y Rubin (1977) y es conocido por las siglas EM. Se puede demostrar que en cada iteración aumenta la función de verosimilitud. Si en las iteraciones se llega a que

$$\mathbf{q}^{(m)} = \mathbf{q}^{(m+1)} \quad (47)$$

entonces se ha obtenido el estimador máximo-verosimil,  $\hat{\mathbf{q}}$ .

Supóngase que el valor real de  $\mathbf{q}$  fuera conocido. Aún así no se podría saber en qué estado se encuentra el régimen en el momento  $t$ .

Si se llama  $\mathbf{x}_{t/t}$  al vector de inferencias sobre  $S_t$  con la información recabada hasta el momento  $t$ , se tendrá:

$$\mathbf{x}_{t/t} = \left\{ \begin{array}{l} \Pr[S_t = 1 / Y_t, \mathbf{q}] \\ \Pr[S_t = 2 / Y_t, \mathbf{q}] \\ \dots\dots\dots \\ \Pr[S_t = N / Y_t, \mathbf{q}] \end{array} \right\} \quad (48)$$

De la misma forma,  $\mathbf{x}_{t+1/t}$  son las inferencias para el período  $t+1$ , con la información recabada hasta  $t$ .

Se puede demostrar - Hamilton (1989)- que, para un  $\mathbf{q}$  dado, la inferencia óptima y el pronóstico para cada momento  $t$  surgen del siguiente par de ecuaciones<sup>5</sup>:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t/t} = \frac{\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} \Theta \mathbf{h}_t}{1' \left[ \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} \Theta \mathbf{h}_t \right]} \quad (49)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1/t} = P \hat{\mathbf{x}}_{t/t} \quad (50)$$

$\mathbf{x}_{t/t-1}$  es el valor inicial y se supone dado.

De esa forma, las iteraciones sucesivas permiten calcular  $\mathbf{x}_{t/t}$  para todo  $t$ .

La forma en que opera es la siguiente:

$$\mathbf{x}_{t/t-1} \rightarrow \mathbf{x}_{t/t} \rightarrow \mathbf{x}_{t+1/t} \rightarrow \mathbf{x}_{t+1/t+1} \dots\dots$$

---

<sup>5</sup> El símbolo  $\Theta$  significa que se multiplica elemento por elemento

La función de verosimilitud esta definida por:

$$L(\mathbf{q}) = \sum_{t=1}^T \log [f(y_t / X_t, Y_{t-1}, \mathbf{q})] \quad (51)$$

en donde la función de densidad relevante, dado que no se conoce el estado vigente en el momento  $t$ , es una "mixture" o promedio de las densidades condicionales que estaban consideradas en el vector  $\mathbf{h}_t$  por los pesos correspondientes a la probabilidad de estar en cada estado considerados en  $\mathbf{x}_{t/t}$ .

Expresado de otra forma:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{q}) &= \sum_{t=1}^T \log (f(y_t / X_t, Y_{t-1}, \mathbf{q})) = \sum_{t=1}^T \log [1' (\mathbf{x}_{t/t-1} \Theta \mathbf{h}_t)] = \\ &= \sum_{t=1}^T \log \left\{ \sum_{j=1}^N \text{Prob} [S_t = j / Y_{t-1}, \mathbf{q}] f(y_t / S_t = j, X_t, Y_{t-1}, \mathbf{a}) \right\} = \\ &= \sum_{t=1}^T \log \sum_{j=1}^N f(y_t, S_t = j / X_t, Y_{t-1}, \mathbf{q}) \quad (52) \end{aligned}$$

El algoritmo funciona esquemáticamente de la siguiente manera:

$$\mathbf{q}_0 = \{p_{ij}, \mathbf{a}\} \rightarrow \mathbf{x}_{t/t} \forall t \rightarrow L(\mathbf{q}_0) \rightarrow \mathbf{q}_1 \dots$$

Los pasos del algoritmo se pueden sintetizar de la siguiente forma:

1. Para un valor dado de  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$  se calcula  $\mathbf{x}_{t/t} \forall t$
2. Se maximiza la función de verosimilitud definida en (52) con respecto a  $\mathbf{a}$ .
3. Se calculan los  $p_{ij}$  con base en los  $\mathbf{x}_{t/t} \forall t$  obtenidos previamente, y con esto se termina de obtener  $\mathbf{q}_1$ .

4. Se compara el vector  $\mathbf{q}_0$  de partida con el calculado,  $\mathbf{q}_1$ . Si la diferencia es menor que un cierto  $\epsilon$ , el algoritmo finaliza. En caso contrario, se vuelve a 1 con el nuevo valor de  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1$  calculado.

¿ Cómo se comienza el algoritmo ?

- 1) Para  $\mathbf{x}_{1/0}$  hay varias opciones:
- a) Tomar el vector de probabilidades incondicionales  $\mathbf{p}$ .
  - b) Considerar un vector con todos sus componentes idénticos, igual a su vez a  $1/n$ .
  - c) Considerar el vector que maximiza la función de verosimilitud, dado un cierto valor de  $\mathbf{q}$ , con la restricción de que todos los componentes deben ser positivos y sumados deben dar la unidad.

## Predicción

Dado el vector de variables observables  $y_t$  y un cierto escenario para las  $X_t$ , hay N diferentes pronósticos para cada uno de los N estados.

Si almacenamos esos pronósticos en un vector  $h'_t$ , entonces la predicción para el período  $t+1$  viene dada por:

$$E[y_{t+1} / Y_t, \mathbf{q}] = h'_t \mathbf{x}_{t+1/t} \text{ con}$$

$$\mathbf{x}_{t+1/t} = P \mathbf{x}_{t/t} \quad (53)$$

## La duración de un estado en una cadena de Markov

Una vez estimadas las probabilidades de transición  $p_{ij}$  surge un tema interesante: dado que la duración de un estado es una variable aleatoria, resultaría interesante conocer su media y su varianza.

### Proposición 1 :

Una vez estimados los  $p_{ij}$  , entonces se cumple que la duración esperada del estado  $j$  viene dada por :

$$E(D_j) = \frac{1}{1 - p_{jj}} \quad (54)$$

donde  $D_j$  es la duración del estado  $j$  una vez que se entró en él.

### Demostración:

El valor esperado de la duración de un cierto régimen se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E[D] &= \sum_{j=1}^{\infty} j \Pr[D=j] = 1 * \Pr[S_{t+1} \neq j / S_t = j] + 2 * \Pr[S_{t+1} = j, S_{t+2} \neq j / S_t = j] + \\ & 3 * \Pr[S_{t+1} = j, S_{t+2} = j, S_{t+3} \neq j / S_t = j] + \dots = \\ & = 1(1 - p_{jj}) + 2 p_{jj} (1 - p_{jj}) + 3 p_{jj}^2 (1 - p_{jj}) \dots = \\ & \sum_{i=1}^{\infty} i p_{jj}^{i-1} [1 - p_{jj}] = [1 - p_{jj}] \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dp_{jj}} [p_{jj}]^i = \\ & = [1 - p_{jj}] \frac{d}{dp_{jj}} \left[ \frac{p_{jj}}{1 - p_{jj}} \right] = [1 - p_{jj}] \frac{1}{[1 - p_{jj}]^2} = \frac{1}{[1 - p_{jj}]} \quad L.Q.Q.D. \end{aligned}$$

**Proposición 2:**

La varianza de la variable aleatoria duración viene dada por:

$$V(D) = \frac{p_{jj}}{(1-p_{jj})^2} \quad (55)$$

**Demostración:**

$$V(D) = E[D - E(D)]^2 = E[D^2] - E[D]^2 = E[D^2] - \frac{1}{(1-p_{jj})^2}$$

con lo cual el problema es calcular:  $E[D]^2$

$$\begin{aligned} E[D]^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \Pr[D=j] = \sum_{j=1}^{\infty} j^2 (1-p_{jj}) p_{jj}^{j-1} = (1-p_{jj}) \sum_{j=1}^{\infty} j j p_{jj}^{j-1} = (1-p_{jj}) \sum_{j=1}^{\infty} (j-1+1) j p_{jj}^{j-1} = \\ &= (1-p_{jj}) \sum_{j=2}^{\infty} (j-1) j p_{jj}^{j-1} + (1-p_{jj}) \sum_{j=1}^{\infty} j p_{jj}^{j-1} = (1-p_{jj}) p_{jj} \sum_{j=2}^{\infty} (j-1) j p_{jj}^{j-2} + \frac{1}{(1-p_{jj})} = \end{aligned}$$

$$(1-p_{jj}) p_{jj} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{d^2}{dp_{jj}^2} + \frac{1}{(1-p_{jj})} = (1-p_{jj}) p_{jj} \frac{d^2}{dp_{jj}^2} \left[ \sum_{j=2}^{\infty} p_{jj}^j \right] + \frac{1}{(1-p_{jj})} =$$

$$= (1-p_{jj}) p_{jj} \frac{d^2}{dp_{jj}^2} \left[ \sum_{j=2}^{\infty} p_{jj}^j \right] + \frac{1}{(1-p_{jj})} = (1-p_{jj}) p_{jj} \frac{d^2}{dp_{jj}^2} \left[ \frac{p_{jj}^2}{(1-p_{jj})} \right] + \frac{1}{(1-p_{jj})} =$$

$$= (1-p_{jj}) p_{jj} \frac{2}{(1-p_{jj})^3} + \frac{1}{(1-p_{jj})} = \frac{2p_{jj}}{(1-p_{jj})^2} + \frac{1}{(1-p_{jj})} = \frac{1+p_{jj}}{(1-p_{jj})^2}$$

Finalmente:

$$V(D) = E[D^2] - \frac{1}{(1-p_{jj})^2} = \frac{1+p_{jj}}{(1-p_{jj})^2} - \frac{1}{(1-p_{jj})^2} = \frac{p_{jj}}{(1-p_{jj})^2}$$



---

## CAPÍTULO IV

### CARACTERIZACIÓN DEL CICLO ECONÓMICO EN URUGUAY

#### IV.1 Discusión del modelo a estimar

En esta sección se argumenta el tipo de modelo a estimar, en este caso, un modelo de cambio de régimen, y, a partir de esta definición, se discuten temas por demás relevantes, tales como el número de estados a considerar y la estructura general del modelo, que en principio se puede pensar que es de la forma ARMA (p,q).

#### Por qué se opta por un modelo de cambio de régimen

En función de lo expuesto en el capítulo II, lo ideal sería intentar estimar un modelo de factor dinámico común con cambio de régimen. Este método tiene dos grandes problemas de implementación:

- La elección de las variables que puedan representar adecuadamente el comportamiento de la economía en su conjunto. Esto exige un estudio minucioso de una gran variedad de series económicas, lo cual fue hecho en nuestro país por Masoller( 2002), quien termina seleccionando 4 variables. Si bien el interés de este autor refiere a la búsqueda de series que pudieran predecir con anticipación los movimientos del producto, dado que quería construir un indicador sintético de avance, la metodología de estudio de las series es muy similar, sólo que habría que buscar series que evolucionaran “coincidentemente” con la actividad económica.
- La complejidad de programar y computar este tipo de modelos, los cuales emplean un método bayesiano basado en muestras de Gibbs.

Además, la elaboración de un modelo conjunto exige un cierto dominio de los modelos de factor dinámico común y de los modelos de cambio de régimen, por lo cual se consideró adecuado dejar este paso para más adelante.

---

En la disyuntiva de optar por uno u otro tipo de modelo, se prefirió un modelo de cambios de régimen por las siguientes razones:

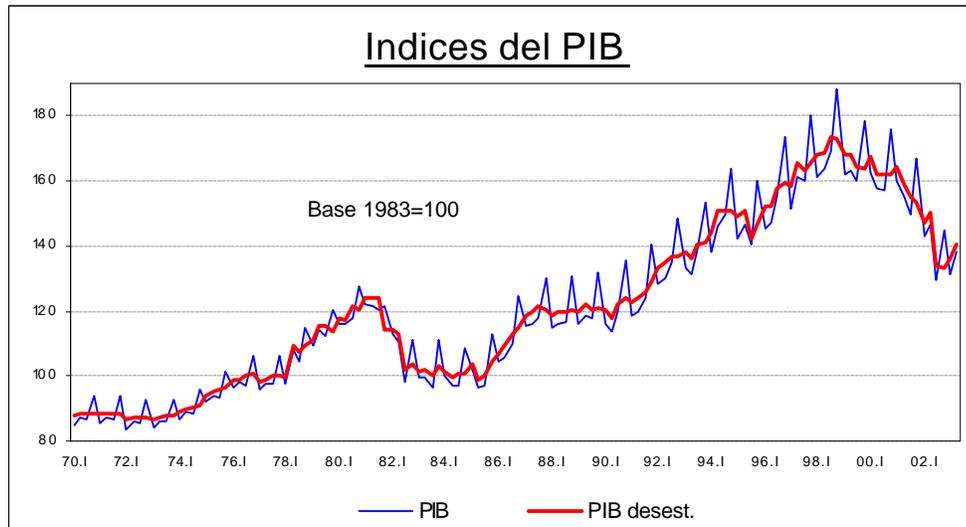
- La riqueza conceptual de los parámetros que se estiman; en particular, la matriz de transición, las medias y las varianzas correspondientes; estas últimas permiten conocer en qué fase de la economía se vuelve más difícil pronosticar la evolución del producto. Además, se pueden estimar las duraciones esperadas de cada estado con sus correspondientes términos de error y el vector de probabilidades ergódicas o probabilidades incondicionales de estar en un cierto estado  $j$ , lo cual sirve para caracterizar a la economía en el período bajo estudio.
- Permite obtener una estimación de la probabilidad de estar en cada momento  $t$  en cierto estado, la cual a su vez se puede proyectar hacia adelante. Esto permite tener indicadores de la coyuntura de la economía así como proyecciones acerca de su desarrollo en el corto plazo. Por otro lado, tal como se indicó en la introducción, estas series pueden utilizarse como herramientas para estimar y estudiar cómo varían los parámetros económicos relevantes en las diferentes fases del ciclo.

### **La elección del número de estados**

Para definir el número de estados, es conveniente tener en mente la evolución de la serie que se va a estudiar. En este caso, la serie del PIB a precios constantes con frecuencia trimestral en el período 1970.I – 2003.II. Se tomó un período lo suficientemente grande como para garantizar un tamaño y una potencia adecuados en las pruebas estadísticas. Si bien los datos trimestrales del producto existen desde 1975, se decidió incluir cinco años más por las razones antes mencionadas, estimándose la evolución trimestral de los datos anuales con base en la estimación del patrón estacional en el período 1975-2003.

En la gráfica N°1 se expone la gráfica del PIB a precios constantes y la misma serie ajustada por estacionalidad.

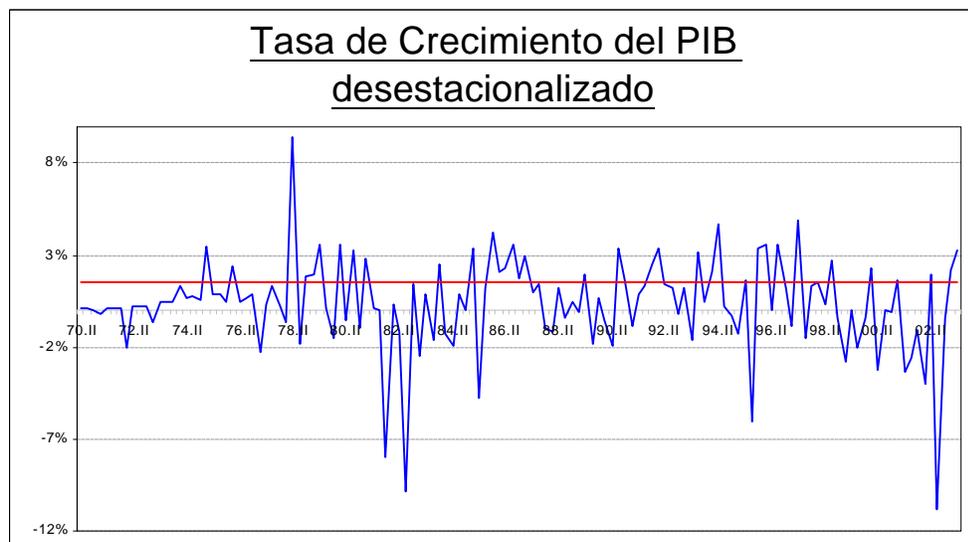
---



Gráfica N°1

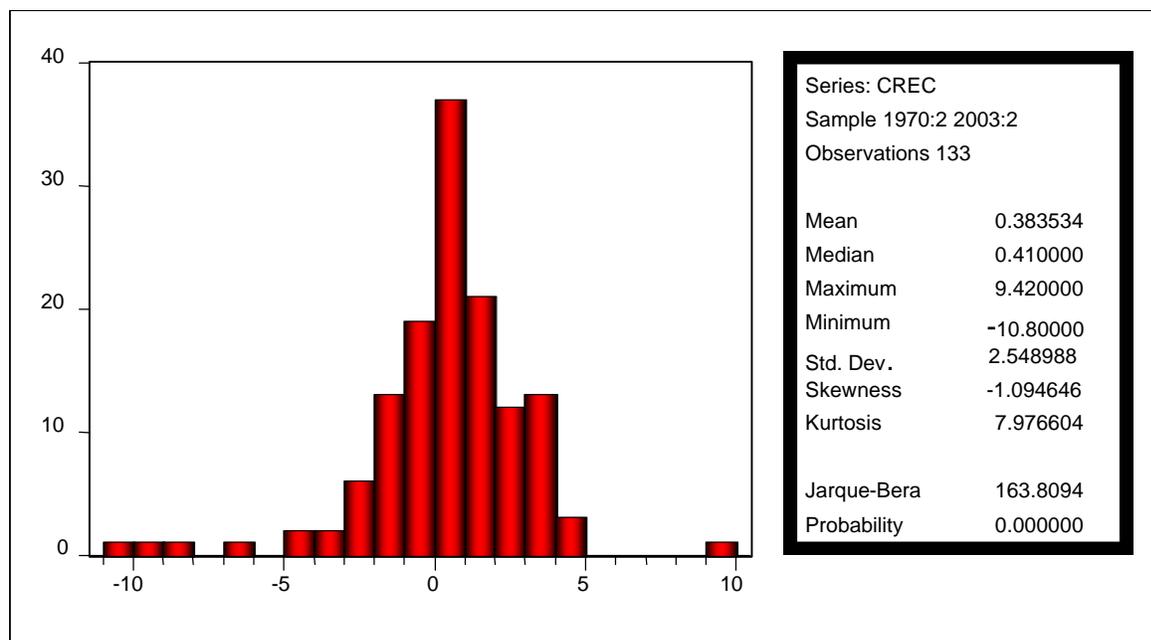
El PIB desestacionalizado se calcula a partir de la estimación de un modelo ARIMA (0,1,1) (0,1,1) para la serie original. Las salidas principales del modelo anterior se reportan en el Anexo III. Para los cálculos mencionados anteriormente, se utilizó el programa Demetra 2.0., opción TRAMO-SEATS.

La tasa de crecimiento del PIB desestacionalizado- $y_t$ , calculada en base al modelo anterior, se muestra en la gráfica N°2 :



Gráfica N°2

El histograma y las principales estadísticas relativas a la serie de la tasa de crecimiento del PIB desestacionalizado se exponen a continuación:



Gráfica N°3

De la observación de los dos gráficos anteriores podemos sacar las siguientes conclusiones:

1. Intuitivamente parece que existieran tres regímenes con relación a la media de la tasa de crecimiento del PIB: i) un régimen que identifica entre otras, las dos grandes recesiones experimentadas por la economía uruguaya, con tasas inferiores a -1.5%; ii) un régimen de crecimiento moderado y iii) un régimen de crecimiento alto, con tasas iguales o superiores al 1.5%, que es lo que indica la línea roja de la gráfica N°2.
2. El exceso de kurtosis y la mayor concentración de observaciones en las colas de la distribución de probabilidad con relación a la distribución normal, dan indicios de la existencia de heteroescadasticidad. De manera que es factible concebir que los estados o regímenes de la economía se caractericen no solamente por una media distinta, sino también por una varianza distinta.

Si dividimos la muestra en las tres submuestras sugeridas en el punto 1), las estadísticas correspondientes refuerzan la idea anterior:

	Estado 1: $y_t < -1.5\%$	Estado 2: $-1.5\% < y_t < 1.5\%$	Estado 3: $y_t > 1.5\%$
Media	-3.63	0.22	2.99
Mediana	-2.41	0.22	2.87
Máximo	-1.53	1.46	9.42
Mínimo	-10.8	-1.48	1.55
Desvío Standard	2.75	0.75	1.39
Simetría	-1.56	-0.27	2.66
Kurtosis	4.20	2.38	13.10
Nº. Observaciones	21	75	37

Cuadro N°1

Estas estadísticas brindan una primera aproximación al tema bajo análisis. El estado 1 - recesivo, es el que presenta mayor volatilidad mientras que el régimen que tiene la volatilidad menor es el estado 2 correspondiente al crecimiento intermedio.

### La elección del número de rezagos y su relación con el número de estados

Si bien podría pensarse en un modelo genérico del tipo ARMA(p,q), en la literatura se estiman modelos puramente autorregresivos, por las complejidades en términos computacionales que implica la introducción de términos de media móvil. Por tanto, en este caso lo que hay que definir es el número de rezagos a tomar en cuenta.

A esos efectos, y considerando el modelo estadístico desarrollado en el capítulo III, la función de densidad relevante es del tipo:

$$f(y_t / S_t = j, X_t, Y_{t-1}, \mathbf{a}) \quad (1)$$

Para el caso en que el valor de la variable S dependa del valor que tomó en el período anterior, como ocurre en las cadenas de Markov de orden 1, se debía definir una nueva variable S\* a efectos de modelar el proceso.

Se puede ver que el número de estados que toma esta variable auxiliar  $S^*$  responde a la siguiente fórmula:

$$NE(S^*) = [NE(S)]^{AR+1} \quad (2)$$

en donde:

$NE(S^*)$  es el número de estados que toma la variable  $S^*$

$AR$  es el orden del proceso autorregresivo que se modela

$NE(S)$  es el número de estados que toma la variable  $S$ .

Como se ha definido que la variable  $S$  toma 3 valores, entonces para la elección de  $AR$  debemos tomar en cuenta que:

$$NE(S^*) = [3]^{AR+1} \quad (3)$$

Así, si se modela un  $AR(2)$ , el número de estados a considerar de la variable  $S^*$  será 27, un  $AR(3)$  implica 81 estados y un  $AR(4)$  243 estados.

Dado que la matriz de transición con la cual se va a trabajar a los efectos de la estimación es cuadrada de orden  $NE(S^*)$ , por razones computacionales se optó por especificar un modelo  $AR(2)$  en principio, el cual será evaluado estadísticamente una vez estimado para verificar que la elección es la correcta.

En función de la discusión anterior, en el apartado siguiente se desarrolla el modelo estadístico con detalle.

---

## IV.2 El modelo estadístico y el algoritmo de resolución

De acuerdo a la discusión anterior, el modelo es un AR(2) en la tasa de crecimiento del producto, que se expresa de la siguiente forma:

$$y_t - \mathbf{m}_{S_t} = \mathbf{f}_1 (y_{t-1} - \mathbf{m}_{S_{t-1}}) + \mathbf{f}_2 (y_{t-2} - \mathbf{m}_{S_{t-2}}) + \mathbf{e}_t \quad (4)$$

$$\mathbf{e}_t \approx N(0, \mathbf{s}_{S_t}^2) \quad (5)$$

La modelización de la media y la varianza se hace bajo el supuesto que la economía se encuentra en uno de tres estados posibles:

$$\mathbf{m}_{S_t} = \mathbf{m}_1 S_{1t} + \mathbf{m}_2 S_{2t} + \mathbf{m}_3 S_{3t} \quad (6)$$

$$\mathbf{s}_{S_t} = \mathbf{s}_1 S_{1t} + \mathbf{s}_2 S_{2t} + \mathbf{s}_3 S_{3t} \quad (7) \text{ en donde:}$$

$$S_{jt} = 1 \text{ si } S_t = j \text{ y } S_{jt} = 0 \text{ en otro caso ; } j=1,2,3 \quad (8)$$

$$p_{ij} = \Pr[S_t = j / S_{t-1} = i], \sum_{j=1}^3 p_{ij} = 1 \quad (9)$$

Se define a  $Y_t$  como el vector que contiene toda la información hasta el momento t.

Si el régimen es gobernado por el estado  $S_t = j$  en el momento t, entonces la densidad condicional de  $y_t$  viene dada por:

$$f(y_t / S_t = j, Y_{t-1}, \mathbf{a}) \quad (10)$$

La matriz de transición relevante es la que nos indica la probabilidad de pasar del estado i al j, con i, j tomando valores 1,2 ó 3. La misma se puede expresar de la siguiente forma:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ 1 - p_{11} - p_{12} & 1 - p_{21} - p_{22} & 1 - p_{31} - p_{32} \end{pmatrix} \quad (11)$$

No obstante, como la variable  $y_t$  depende de  $S_t$ ,  $S_{t-1}$  y  $S_{t-2}$ , y a su vez cada una de estas variables puede tomar los valores  $\{0,1\}$ , es necesario definir una nueva variable  $S_t^*$ , a los efectos que la función de densidad definida en (10) dependa únicamente del valor contemporáneo de la variable no observable  $S_t^*$ . Como se discutió en la sección anterior, esta variable tomará 27 valores posibles, tal como se expone en el Cuadro 2:

$S_t^*$	$S_{1t}$	$S_{2t}$	$S_{3t}$	$S_{1,t-1}$	$S_{2,t-1}$	$S_{3,t-1}$	$S_{1,t-2}$	$S_{2,t-2}$	$S_{3,t-2}$
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
2	1	0	0	1	0	0	0	1	0
3	1	0	0	1	0	0	0	0	1
4	1	0	0	0	1	0	1	0	0
5	1	0	0	0	1	0	0	1	0
6	1	0	0	0	1	0	0	0	1
7	1	0	0	0	0	1	1	0	0
8	1	0	0	0	0	1	0	1	0
9	1	0	0	0	0	1	0	0	1
10	0	1	0	1	0	0	1	0	0
11	0	1	0	1	0	0	0	1	0
12	0	1	0	1	0	0	0	0	1
13	0	1	0	0	1	0	1	0	0
14	0	1	0	0	1	0	0	1	0
15	0	1	0	0	1	0	0	0	1
16	0	1	0	0	0	1	1	0	0
17	0	1	0	0	0	1	0	1	0
18	0	1	0	0	0	1	0	0	1
19	0	0	1	1	0	0	1	0	0
20	0	0	1	1	0	0	0	1	0
21	0	0	1	1	0	0	0	0	1
22	0	0	1	0	1	0	1	0	0
23	0	0	1	0	1	0	0	1	0
24	0	0	1	0	1	0	0	0	1
25	0	0	1	0	0	1	1	0	0
26	0	0	1	0	0	1	0	1	0
27	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Cuadro N°2

Siendo coherente con lo anterior, la matriz de transición para la variable compuesta  $S_t^*$ , denominada  $P^*$ , será de  $27 \times 27$ , la cual es función únicamente de las seis probabilidades que figuran en la matriz de transición original (11).

En el apéndice (6) se presenta la matriz anterior, que es la que se utiliza a los efectos de los cálculos.

Si el régimen es gobernado por el estado  $S_t^* = k$  en el momento  $t$ , entonces la densidad condicional de  $y_t$  viene dada por:

$$f(y_t / S_t^* = k, Y_{t-1}, \mathbf{a}) \quad k = 1, 2, \dots, 27 \quad (12)$$

en donde  $\mathbf{a}$  es el vector de parámetros poblacionales, representado en este caso por:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3 \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_3) \quad (13)$$

En este caso en particular habrá 27 diferentes densidades condicionales, que se agrupan en el vector  $\mathbf{h}_t$ .

Sea  $\mathbf{x}_{t/t}$  el vector de inferencias sobre  $S_t^*$  con la información recabada hasta el momento  $t$ .

De esa forma, tendremos:

$$\mathbf{x}_{t/t} = \left\{ \begin{array}{l} \Pr[S_t^* = 1 / Y_t, \mathbf{q}] \\ \Pr[S_t^* = 2 / Y_t, \mathbf{q}] \\ \dots\dots\dots \\ \Pr[S_t^* = 27 / Y_t, \mathbf{q}] \end{array} \right\} \quad (14)$$

en donde el vector  $\mathbf{q}$  esta definido por:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{a}, p_{ij}) = (\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3 \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_3 p_{11} p_{12} p_{21} p_{22} p_{31} p_{32}) \quad (15)$$

Se usará el resultado expuesto en el capítulo anterior en las ecuaciones (49) y (50), en el sentido de que la inferencia óptima y el pronóstico para  $\mathbf{x}_{t/t}$  en cada momento  $t$  surgen del siguiente par de ecuaciones:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t/t} = \frac{\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} \Theta \mathbf{h}_t}{1' \left[ \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} \Theta \mathbf{h}_t \right]} \quad (16)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1/t} = P \hat{\mathbf{x}}_{t/t} \quad (17)$$

La función de verosimilitud es una “mixture” o promedio ponderado de las densidades condicionales del vector  $\mathbf{h}_t$  por la probabilidad de estar en cada estado, representada en  $\mathbf{x}_{t/t}$ .

$$L(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^T \log \left\{ \sum_{j=1}^{27} \text{Pr ob}[S_i = j / Y_{i-1}, \mathbf{q}] f(y_i / S_i = j, Y_{i-1}, \mathbf{a}) \right\} \quad (18)$$

El algoritmo iterativo para maximizar la función de verosimilitud es tal que el resultado final de cada iteración es un nuevo valor del vector de parámetros  $\mathbf{a}$ ; a su vez, las probabilidades de transición que forman la matriz  $P^*$ , necesarias para empezar la siguiente iteración, se calculan de acuerdo a las siguientes fórmulas:

$$p_{11} = \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^3 \text{Pr ob}[S_t^* = k]}{\sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^3 \text{Pr ob}[S_t^* = k] + \sum_{t=1}^T \sum_{k=10}^{12} \text{Pr ob}[S_t^* = k] + \sum_{t=1}^T \sum_{k=19}^{21} \text{Pr ob}[S_t^* = k]}$$

$$p_{12} = \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{k=10}^{12} \text{Pr ob}[S_t^* = k]}{\sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^3 \text{Pr ob}[S_t^* = k] + \sum_{t=1}^T \sum_{k=10}^{12} \text{Pr ob}[S_t^* = k] + \sum_{t=1}^T \sum_{k=19}^{21} \text{Pr ob}[S_t^* = k]}$$

$$P_{21} = \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{k=4}^6 \text{Pr ob} [S_t^* = k]}{\sum_{t=1}^T \sum_{k=4}^6 \text{Pr ob} [S_t^* = k] + \sum_{t=1}^T \sum_{k=13}^{15} \text{Pr ob} [S_t^* = k] + \sum_{t=1}^T \sum_{k=22}^{24} \text{Pr ob} [S_t^* = k]}$$

$$P_{22} = \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{k=13}^{15} \text{Pr ob} [S_t^* = k]}{\sum_{t=1}^T \sum_{k=4}^6 \text{Pr ob} [S_t^* = k] + \sum_{t=1}^T \sum_{k=13}^{15} \text{Pr ob} [S_t^* = k] + \sum_{t=1}^T \sum_{k=22}^{24} \text{Pr ob} [S_t^* = k]}$$

$$P_{31} = \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{k=4}^6 \text{Pr ob} [S_t^* = k]}{\sum_{t=1}^T \sum_{k=4}^6 \text{Pr ob} [S_t^* = k] + \sum_{t=1}^T \sum_{k=13}^{15} \text{Pr ob} [S_t^* = k] + \sum_{t=1}^T \sum_{k=22}^{24} \text{Pr ob} [S_t^* = k]}$$

$$P_{32} = \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{k=13}^{15} \text{Pr ob} [S_t^* = k]}{\sum_{t=1}^T \sum_{k=4}^6 \text{Pr ob} [S_t^* = k] + \sum_{t=1}^T \sum_{k=13}^{15} \text{Pr ob} [S_t^* = k] + \sum_{t=1}^T \sum_{k=22}^{24} \text{Pr ob} [S_t^* = k]}$$

Al final de cada iteración se puede calcular también la probabilidad de estar en cada momento  $t$  en el estado  $j$ , con  $j= 1,2,3$ .

Esto estará dado por las fórmulas:

$$\begin{aligned} \Pr[S_t = 1 / y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \mathbf{q}] &= \sum_{i=1}^9 \Pr[S_t^* = i] \\ \Pr[S_t = 2 / y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \mathbf{q}] &= \sum_{i=10}^{18} \Pr[S_t^* = i] \\ \Pr[S_t = 3 / y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \mathbf{q}] &= \sum_{i=19}^{27} \Pr[S_t^* = i] \quad (19) \end{aligned}$$

Al finalizar el procedimiento iterativo y con el valor estimado del vector  $\mathbf{q}$ , se obtienen los valores definitivos de dichas probabilidades.

---

### **IV.3 Los resultados del Modelo**

#### **Estimación de los parámetros relevantes**

La estimación del modelo antes reseñado se hizo en base a un programa elaborado por Chang –Jin Kim, al que se le hicieron pequeñas modificaciones para adaptarlo al caso bajo estudio. Dicho programa esta reseñado en Chang – Jin Kim y Charles R.Nelson (1999) y fue corrido en el paquete informático Gauss, Versión 5.0.<sup>6</sup>

Como ya se estableció, para el período 1970-1975 no se disponía de datos trimestrales del PIB, por lo cual se realizó una trimestralización con base a los patrones de estacionalidad del período 1975-2003, con el objetivo de usufructuar la mayor precisión en la estimación asociada a la mayor disponibilidad de información.

No obstante, para verificar que la incorporación del período 1970-1975 no afecta mayormente los resultados, se realizó la estimación para ambos períodos: 1970.I – 2003.II y 1975.I 2003.II.

Los resultados se presentan en el Cuadro N°3 :

---

<sup>6</sup> Puede obtenerse una versión del mismo en la siguiente dirección WEB:  
<http://www.econ.washington.edu/user/cnelson/markov/prgmlist.htm>

---

Parámetro	Período 1975.I – 2003.II		Período 1970.I – 2003.II		
	Estimación	Desvio Standard	Estimación	Desvio Standard	Nivel de Significación <sup>7</sup> %
$P_{11}$	0.632442	0.120404	0.640464	0.124268	0.00
$P_{12}$	0.000002	0.000552	0.000002	0.000226	99.30
$P_{21}$	0.118030	0.056800	0.084304	0.042463	4.98
$P_{22}$	0.881968	0.056790	0.915695	0.042450	0.00
$P_{31}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-----
$P_{32}$	0.279661	0.096814	0.273595	0.097847	0.620
$f_1$	-0.372569	0.068323	-0.339478	0.074010	0.00
$f_2$	-0.157062	0.057111	-0.130977	0.063256	4.097
$s_1^2$	19.177993	6.357374	19.294663	6.387070	0.320
$s_2^2$	2.727368	0.634558	2.390766	0.495626	0.00
$s_3^2$	0.802988	0.305527	0.853703	0.346268	1.539
$m_1$	-2.688490	0.713328	-2.684780	0.804824	0.119
$m_2$	0.319709	0.223052	0.359582	0.186996	5.733
$m_3$	2.348680	0.190557	2.336673	0.200871	0.00

Cuadro N°3

Los parámetros que componen la matriz de transición definida en (11) son estadísticamente significativos salvo  $p_{12}$ , esto es, la probabilidad de pasar del estado 1 al estado 2.

En cuanto a los parámetros del proceso AR(2), ambos parámetros son altamente significativos.

<sup>7</sup> Para hacer exigente la prueba de hipótesis, se calculó el nivel de significación utilizando una distribución t con 100 grados de libertad.

Las varianzas estimadas son también significativas, al igual que las medias; la única salvedad corresponde a la media del estado 2, en donde puede asegurarse que es distinta de cero con un grado de error de 5.73%. En función de la diferencia de tasas de crecimiento entre el estado 2 y el estado 3, al estado 2 se le denominará estado de crecimiento moderado en tanto que al estado tres se le llamará estado de crecimiento fuerte.

Por su parte, la matriz de transición estimada queda entonces de la forma:

$$P = \begin{bmatrix} 0.640464 & 0.084304 & 0.000000 \\ 0.000002 & 0.915695 & 0.273595 \\ 0.359534 & 0.000001 & 0.726405 \end{bmatrix}$$

De acuerdo a esta matriz, las duraciones promedio de cada estado se exponen en el Cuadro N°4:

Estado	Duración Promedio ( en trimestres)	Desvío Standard ( en trimestres)
Recesión	2.78	2.23
Crecimiento Moderado	11.86	11.35
Crecimiento Fuerte	3.66	3.12

Cuadro N°4

Puede sorprender que las recesiones tengan una duración tan escasa; no obstante lo anterior puede deberse a que las recesiones en este modelo son en realidad grandes depresiones, con una caída promedio de 2.7% trimestral equivalente a un 11.2% anual; este tipo de caída anual a dos dígitos se observó solamente en los años 1982 y 2002 en el período seleccionado, lo cual avala la duración aproximada de 9 meses de este tipo de coyuntura.

Asimismo, la duración esperada del período de crecimiento alto no supera el año; también aquí hay que tener en cuenta que la media para este estado es de 2.34%

trimestral – 9.6% anual, registros que se han dado muy esporádicamente. Por ejemplo, el período 1978 - 1980 que precedió al rompimiento de la “tablita”, el período 1986 - 1987 y algunos años en la década del 90.

Por otro lado, la duración promedio del estado 2 es de casi tres años con un desvío standard similar.

Otra característica de la matriz de transición es la fuerte atracción que tiene el estado intermedio; en la medida en que la probabilidad de continuar en el período 2 dado que se está en el período 2 es muy cercana a 1, se está en un caso aproximado a los llamados estados “absorbentes” definidos en el capítulo anterior.

Por otro lado, la probabilidad de pasar del estado de recesión al estado intermedio es estadísticamente cero; esto implicaría que se sale de la recesión con tasas relativamente altas de crecimiento, como las que acontecieron en los tres primeros trimestres de 2003.

El vector de probabilidades incondicionales de estar en un estado dado, definido en la ecuación (36) del Capítulo III resulta ser:

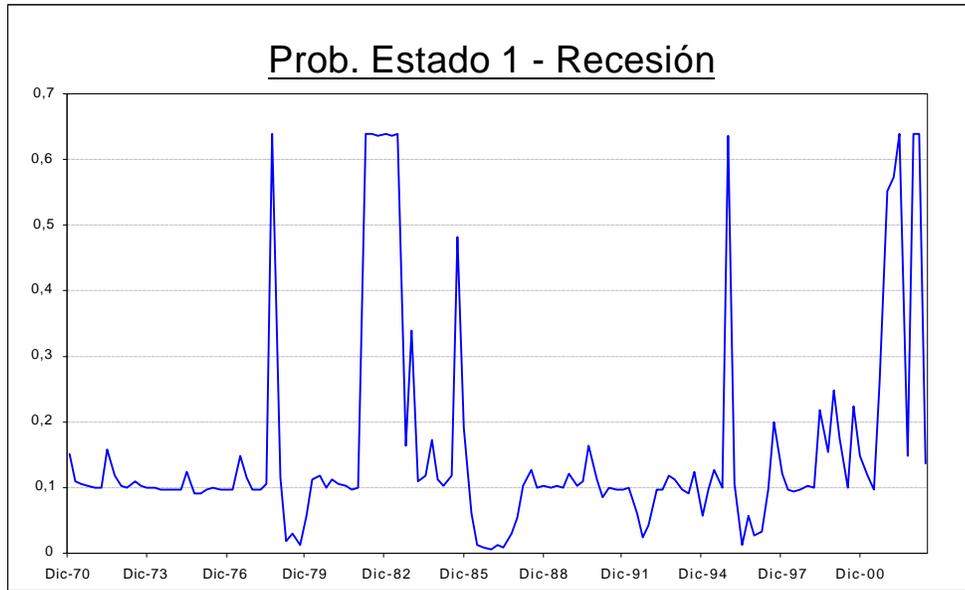
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.15200 \\ 0.64825 \\ 0.19975 \end{bmatrix}$$

Hay una muy alta probabilidad de estar en el estado de crecimiento moderado, en tanto que las probabilidades de estar en recesión o en crecimiento fuerte son del mismo orden, siendo ligeramente mayor la probabilidad de estar en auge.

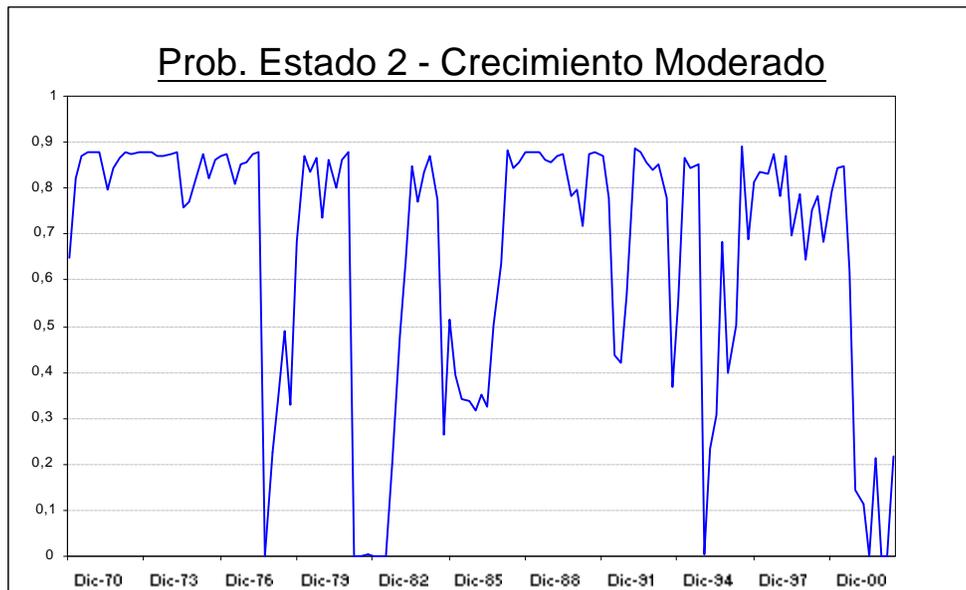
### **Las probabilidades condicionadas de estar en cada estado - evolución**

Otro de los resultados interesantes de este modelo son las probabilidades condicionales, en cada momento del tiempo, de estar en cada uno de los estados. La idea es ver si las mismas reproducen los principales hechos estilizados de la historia del crecimiento del PIB de Uruguay en el período analizado. La evolución de dichas probabilidades se grafica a continuación:

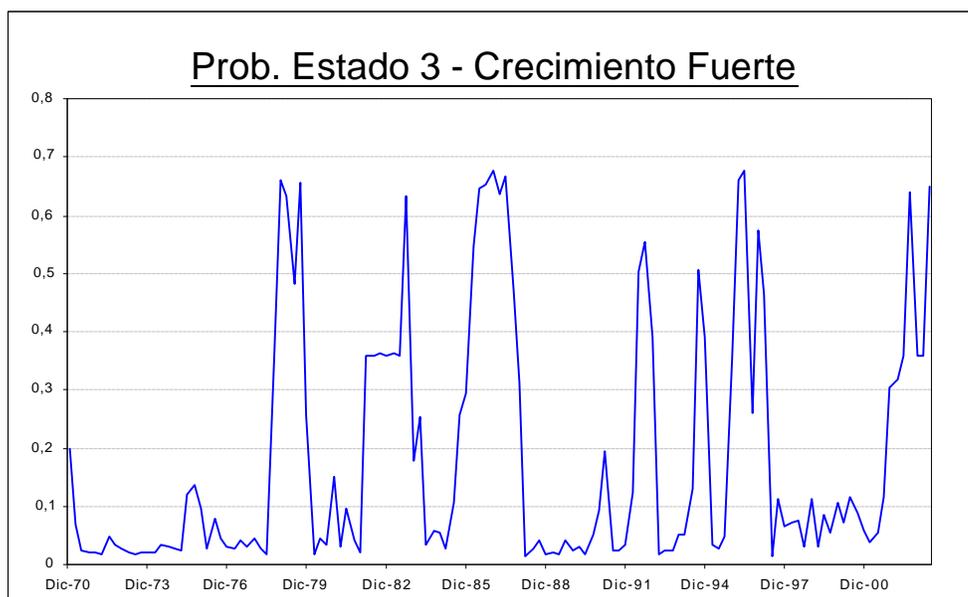
---



Gráfica N°4



Gráfica N°5



Gráfica N° 6

La gráfica correspondiente al estado 1 muestra claramente las recesiones que ocurrieron entre 1982-1984, la crisis puntual del efecto Tequila en 1995 y la última recesión que comienza a partir de 1999 y se hace muy pronunciada en el año 2002. Básicamente, se podría decir que este estado se presenta con alta probabilidad cuando se dan dos o más caídas sucesivas y significativas en el producto ajustado estacionalmente, lo cual avala que la duración promedio de este estado era de 3 trimestres.

Por su lado, el estado 2, que es un estado de crecimiento moderado, se presenta cuando se da una serie importante de trimestres con tasas de crecimiento levemente positivas. A este respecto, pueden citarse como ejemplos el período 1970-1974, el bienio 80-81, que es cuando se desacelera fuertemente el crecimiento previo al rompimiento de la “tablita” y el trienio 1988-1990 marcado por una fuerte inestabilidad regional y condiciones climáticas muy adversas. La duración media de este estado es de casi tres años, con un término de error similar.

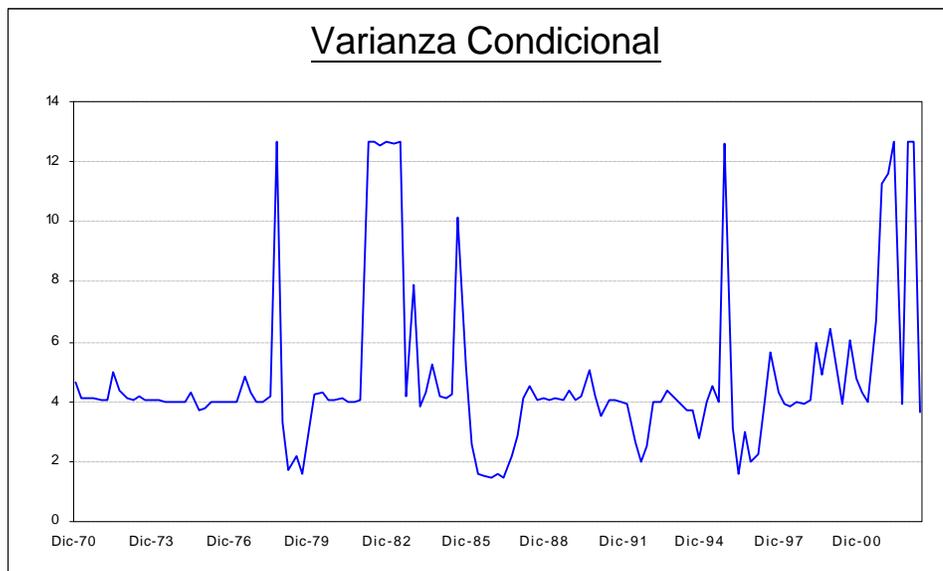
La gráfica correspondiente al estado 3 muestra los principales ciclos de auge: el período 1978-1979, época de gran crecimiento correspondiente a los primeros años del plan de estabilización regido por la “tablita” que colapsara a fines de 1982, el período 1986-1987, donde Uruguay se favoreció por una coyuntura externa muy favorable – caída de las tasas de interés y del precio del petróleo, entre otros, y el período 1991-1994

correspondiente a los primeros años del último plan de estabilización. El modelo indica que a partir del año 2003, sobre todo a partir del segundo trimestre, nos encontraríamos nuevamente con alta probabilidad en este estado.

Por último, resulta interesante ver como fue evolucionando el valor esperado de la varianza, tal como fue definida en la ecuación (7), o sea:

$$E[s_{S_t}] = \Pr[S_t=1]s_1 + \Pr[S_t=2]s_2 + \Pr[S_t=3]s_3 \quad (20)$$

Esa evolución se muestra en la gráfica siguiente:



Gráfica N°7

Se observa claramente la elevada volatilidad de la economía uruguaya, la cual ha sido una de las causas apuntadas por muchos analistas para explicar el bajo nivel de inversión en el país. Dicha volatilidad baja solamente en los ciclos de auge.

Esta elevada volatilidad tiene una base teórica: existen varios modelos que predicen una relación inversa entre el tamaño del país y la volatilidad de los agregados económicos<sup>8</sup>. Supóngase el caso que, en el marco de un shock de productividad, aumenta el producto marginal del capital, lo cual estimula la inversión. No obstante, al mismo tiempo, el incremento de la tasa de interés derivado de lo anterior afecta negativamente la

<sup>8</sup> Ver, por ejemplo, Marianne Baxter (1995)

inversión, siendo este efecto mayor cuanto más grande sea el país. En el caso de un país pequeño, la tasa de interés internacional para el mismo está dada, por lo cual el shock de productividad hace crecer violentamente la inversión, lo cual hace que presente agregados económicos más volátiles.

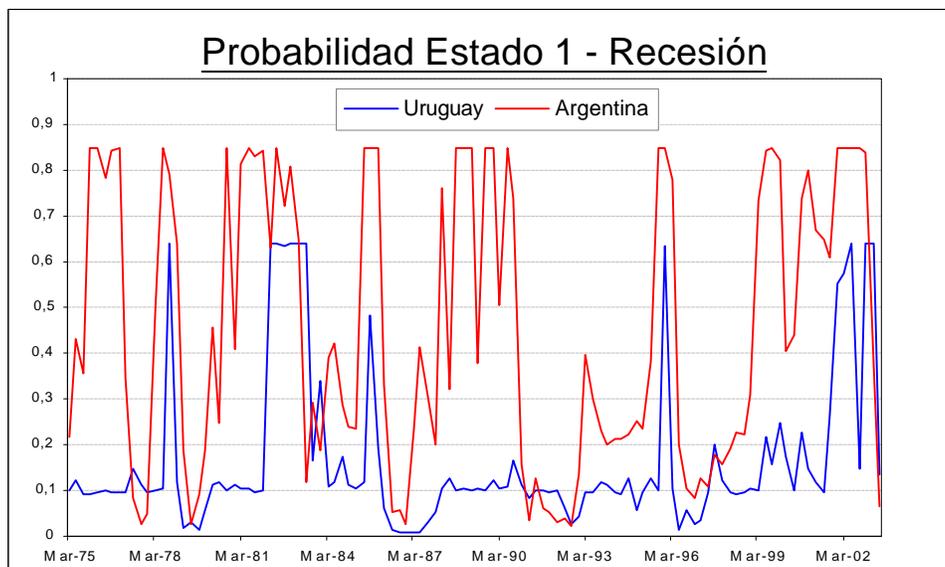
---

#### IV.4 El ciclo económico uruguayo y los shock regionales

En la caracterización del ciclo económico de Uruguay se suele discutir la importancia relativa de los shocks regionales, diferenciando según provengan de Argentina o de Brasil, así como si se trata de shocks de precios relativos o un shock al producto de nuestros vecinos.

En un reciente trabajo monográfico sobre el efecto de los shocks regionales sobre Uruguay, Voelker (2003) llega a la conclusión que, “... dentro de los shocks regionales, los provenientes de Argentina son los que han afectado a la mayor cantidad de sectores, siendo de particular relevancia el efecto de los shocks al PBI argentino”. Para someter a prueba esta afirmación y a efectos de facilitar la comparación, se ha estimado para Argentina el mismo modelo de cambio de régimen utilizado para Uruguay.<sup>9</sup>

En el gráfico N° 8 se compara la evolución de la probabilidad de estar en un estado de recesión para ambos países, en el período 1975-2003.



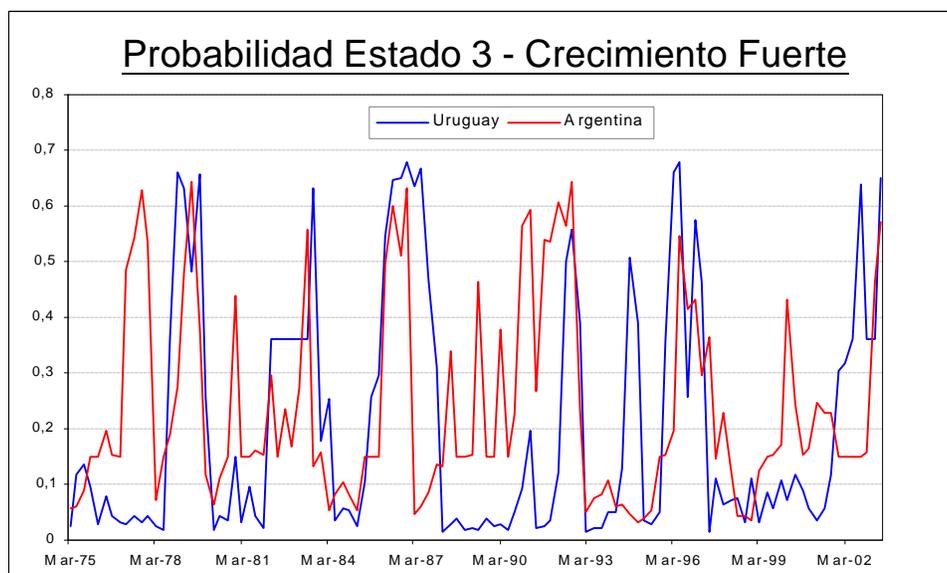
Gráfica N° 8

<sup>9</sup> Obviamente el ciclo económico uruguayo también se encuentra relacionado al ciclo de la economía brasileña; no obstante, en función de las conclusiones del trabajo de Voelker (2003) y sin pretender agotar el tema, se centrará la atención en la relación con el ciclo argentino.

Parece claro que las recesiones argentinas anteceden a las que se producen en Uruguay. El período entre ambas es diverso, según la política tomada por las autoridades uruguayas en el momento. Es casi coincidente en el caso del efecto Tequila de 1995, pero en la crisis de principios de los años 80 y la reciente crisis que comenzó a principios de 1999 con la devaluación del real existe un rezago.

En la crisis de los 80, el hecho se explica porque las autoridades intentaron mantener el régimen de la “tablita” durante el año 1982, cuando Argentina lo había abandonado a fines de 1981. En la crisis actual, Argentina cae en una profunda recesión en el segundo semestre de 2001, al final del cual abandona la paridad 1 a 1 con el dólar, en tanto que Uruguay decide mantener su política cambiaria de bandas de flotación con leves incrementos en la pauta devaluatoria hasta mediados de 2002.

La economía argentina parece tener un cierto arrastre sobre la economía uruguaya también en los períodos de crecimiento. Lo anterior se puede observar en la gráfica siguiente:



Gráfica N°9

Los parámetros que caracterizan el ciclo de cada economía, conjuntamente con sus correspondientes términos de error de esos parámetros se exponen en el siguiente cuadro:

Parámetro	Argentina 1970.I – 2003.II		Uruguay 1970.I – 2003.II	
	Estimación	Desvio Standard	Estimación	Desvio Standard
$P_{11}$	0.849016	0.053914	0.640464	0.124268
$P_{12}$	0.000001	0.000299	0.000002	0.000226
$P_{21}$	0.180864	0.073371	0.084304	0.042463
$P_{22}$	0.819134	0.073731	0.915695	0.042450
$P_{31}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$P_{32}$	0.282930	0.096571	0.273595	0.097847
$f_1$	-0.397914	0.107714	-0.339478	0.074010
$f_2$	-0.333755	0.096899	-0.130977	0.063256
$s_1^2$	7.748371	1.554536	19.294663	6.387070
$s_2^2$	2.467963	0.665019	2.390766	0.495626
$s_3^2$	1.704699	0.597152	0.853703	0.346268
$m_1$	-1.477679	0.294881	-2.684780	0.804824
$m_2$	1.091456	0.201770	0.359582	0.186996
$m_3$	2.658229	0.233291	2.336673	0.200871

Cuadro N°5

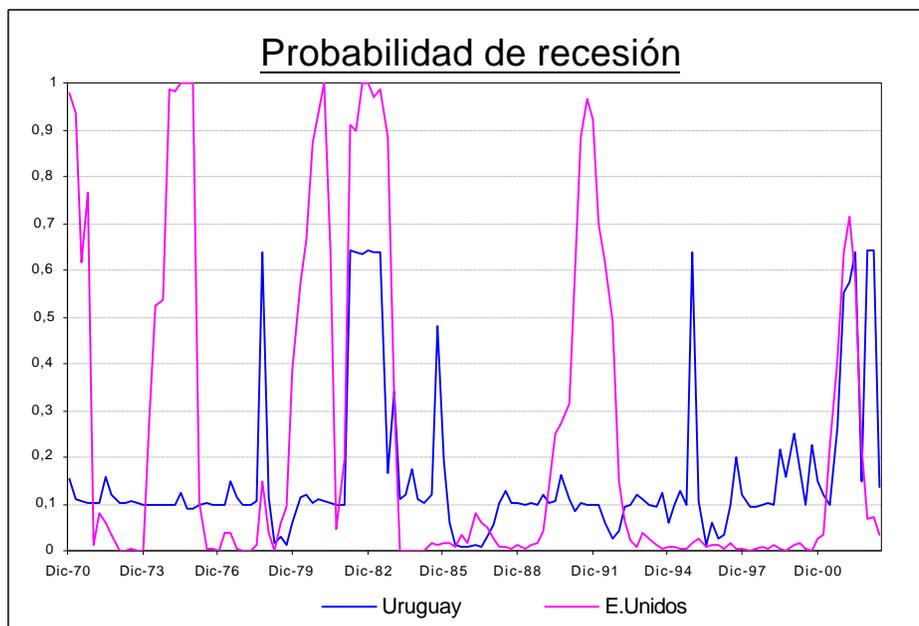
Las tasas de crecimiento son superiores en todos los estados para la economía argentina, mientras que presenta una menor volatilidad en las recesiones, y ligeramente superior en el estado intermedio y en el de crecimiento.

## IV. 5 El ciclo económico uruguayo y el ciclo económico mundial

Usualmente se reconoce que Estados Unidos es la “locomotora” en lo que se refiere al crecimiento de los principales países industrializados, y por ende, de los países en desarrollo que tienen fuerte vinculación con dichos países. Además, los hechos estilizados muestran que existe un alto grado de sincronización en las recesiones, esto es, tienden a darse al mismo tiempo en un conjunto muy grande de países. Los dos hechos antes reseñados muestran que sería interesante una somera exploración del ciclo de la economía americana – representativa de la economía mundial - y el ciclo económico en Uruguay

Para ello se utilizará para Uruguay el modelo desarrollado precedentemente, mientras que para los Estados Unidos se utilizará el modelo que estimaron Kim y Nelson (1999), basado en Hamilton (1989). A grandes rasgos el modelo es un AR(4) con dos posibles estados – recesión y auge -. Ese modelo originalmente fue estimado para el período 1952-II – 1995-III . Con motivos del estudio que se deseaba realizar, se amplió la muestra al período 1952-II – 2003-II. El programa utilizado y los resultados se presentan en el Anexo IV.

En el gráfico No 10 se exponen las gráficas comparativas a los períodos de recesión.



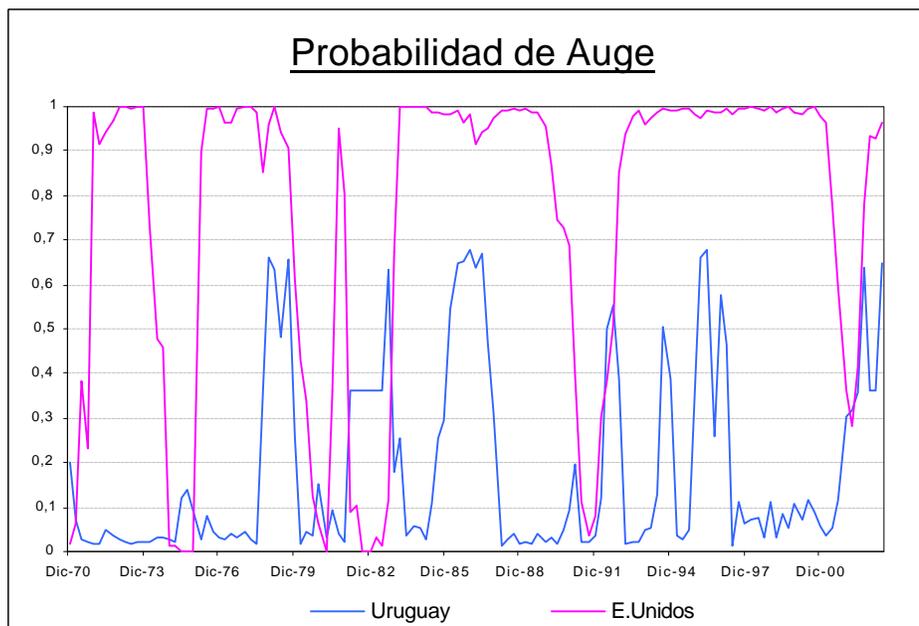
Gráfica 10

La crisis sufrida por Uruguay a principios de los años 80 se da en el marco de la recesión mundial en ese mismo período. El segundo shock en los precios del petróleo y la falta de coordinación de políticas macroeconómicas – los principales países industrializados llevaron a cabo simultáneamente políticas contractivas - fueron las principales causas de dicha recesión mundial. Obviamente que la crisis en Uruguay tiene componentes idiosincrásicos, pero esos componentes no son los que ahora se quieren enfatizar.

Del mismo modo, la crisis que se inicia con la devaluación del real en 1999 es potenciada por la recesión de la economía americana en los años 2001-2002, de la cual todavía se está recuperando.

Es claro que existen recesiones que son totalmente provocadas por el ciclo regional, independientemente del ciclo mundial. Tal es el caso de la crisis del Tequila en 1995, que es un reflejo de la situación argentina, la cual a su vez sufre el contagio derivado de la devaluación del peso mexicano.

Las probabilidades de auge se presentan en el siguiente gráfico.



Gráfica 11

De la gráfica se observa que los períodos de fuerte crecimiento de la economía uruguaya se dan al interior de los períodos de auge de la economía mundial. La duración de estos períodos de auge es notoriamente menor, 3.7 trimestres en el caso uruguayo frente a 13.5 en la economía americana, lo cual refleja que tanto el componente regional como aspectos relacionados estrictamente con el país le impiden aprovechar de mejor forma las fases de crecimiento mundial.

Por otra parte, la incipiente reactivación actual de la economía uruguaya se da también en el marco de la recuperación que viene experimentando la economía americana en el 2003.

Concluyendo, el ciclo internacional tal como se mostró es un elemento importante a la hora de intentar explicar la caracterización del ciclo económico en Uruguay.

---

---

## CAPÍTULO V

### CONCLUSIONES

En este trabajo se ha realizado una caracterización paramétrica del ciclo económico en Uruguay en base a la metodología de cambios de régimen gobernados por cadenas de Markov. Se ha supuesto tres estados de la naturaleza posibles (Estado 1 - Recesión, Estado 2 - Crecimiento Moderado y Estado 3 - Crecimiento Fuerte) en base a los datos históricos de la tasa de crecimiento del PIB desestacionalizado en el período 1970.I-2003.II. Para esos estados se ha estimado la media de crecimiento y la varianza correspondiente. Los seis estimadores antes reseñados han resultado estadísticamente diferentes de cero, siendo la diferencia entre las tasas de crecimiento del estado 2 y del 3 lo que explica los nombres dados a los mismos.

Las varianzas estimadas son estadísticamente diferentes para cada estado, observándose una gran volatilidad en las recesiones, en tanto que la menor volatilidad se encuentra en el estado de crecimiento fuerte - estado 3. La gráfica de la varianza condicional muestra elevados niveles en todo el período analizado (1970.I – 2003.II), lo cual justifica la afirmación de que en Uruguay la inversión es escasa porque la alta volatilidad que presenta el nivel de actividad no es compensada por las tasas medias de crecimiento observadas. Además se verifica que es aplicable en el caso de Uruguay la teoría que establece que los países más pequeños tienen una volatilidad mayor en sus agregados (Ver M Baxter(1995)).

Los coeficientes de la estructura autorregresiva de orden 2 especificada en el modelo tienen ambos signo negativo. El signo negativo de estos coeficientes puede interpretarse como un término de corrección de error aplicable a futuras realizaciones de  $y_t$ ; es decir, si durante los dos últimos períodos el valor observado fue superior al valor esperado de su media, entonces la tasa de crecimiento esperada para el presente período será igual a la media esperada ajustada hacia abajo en proporción a los coeficientes ya mencionados.

---

Con relación a la matriz de transición, se observan los siguientes hechos estilizados:

- La probabilidad de permanecer en el estado 2, dado que la economía se encuentra en el estado 2, es 0.91, un valor muy cercano a 1, lo cual le da a este estado una peligrosa similitud a los llamados estados “absorbentes”, estados que se caracterizan por la propiedad de que, una vez que la economía llega a ellos, permanece en los mismos. El vector de probabilidades incondicionales implica que en Uruguay es más probable observar un crecimiento prácticamente nulo a períodos de fuerte recesión o de crecimiento moderado.
- El elevado nivel de  $p_{22}$  antes reseñado provoca también que la duración esperada del estado 2 resulte sumamente elevada ( casi tres años), con un desvío standard de similar magnitud (11.3 trimestres); en comparación, la duración esperada del estado de crecimiento es de 3.7 trimestres ( casi 1 año), con un desvío standard de 3.1 trimestres.
- La probabilidad de pasar de un estado de recesión a un período de crecimiento nulo es estadísticamente cero, por lo cual, de las recesiones se saldría pasando directamente al estado de crecimiento, que es lo que parece haber acontecido en los tres primeros trimestres de 2003.
- Por otro lado, las probabilidades condicionales de estar en cada momento  $t$  en un cierto estado reproducen adecuadamente la historia del crecimiento económico en Uruguay en el período analizado. Como se sugirió además en la introducción, las probabilidades condicionales antes comentadas podrían servir de insumo para estimar modelos de comportamiento económico con parámetros que varíen dependiendo de la fase del ciclo por el cual esté atravesando la economía.

Con relación a la influencia de la región, parece claro que las recesiones argentinas anteceden a las que se producen en Uruguay; el período entre ambas es diverso, según la política tomada por las autoridades uruguayas en ese momento. La economía argentina parece también tener un cierto arrastre sobre la economía uruguaya en los períodos de crecimiento. Esto confirmaría la conclusión de Voelker (2003) en el sentido que “ ... dentro de los shocks regionales, los provenientes de Argentina son los que han

---

---

afectado a la mayor cantidad de sectores, siendo de particular relevancia el efecto de los shocks al PBI argentino”.

El ciclo económico mundial también tiene su importancia a la hora de explicar el ciclo económico en Uruguay:

1. Los períodos de fuerte crecimiento de la economía uruguaya se dan al interior de los períodos de auge de la economía mundial. La duración de estos períodos de auge es notoriamente menor, 3.7 trimestres en el caso uruguayo frente a 13.5 en la economía americana, lo cual refleja que tanto el componente regional como los aspectos relacionados estrictamente con la estructura productiva y aspectos institucionales del país le impiden aprovechar de mejor forma las fases de crecimiento mundial.
2. Las recesiones mundiales parecen profundizar las recesiones que se producen por factores que están más relacionados con factores propios del país y de su elevada dependencia de la región. Además existen recesiones que son explicadas exclusivamente por la región, como la provocada por el efecto Tequila en 1995.

En futuros análisis sería bueno levantar el supuesto de que las probabilidades de transición son independientes del tiempo. De esa forma se podrían tener estimaciones acerca de la duración esperada de cada estado en función de la coyuntura por la cual esté atravesando la economía, los que se constituirían en indicadores de avance relevantes.

Por otro lado, a partir de las probabilidades de estar en cada momento  $t$  en un cierto estado, se podrían estimar los coeficientes de reacción de ciertas medidas de política económica en las diferentes fases del ciclo. Esto sería de particular importancia para la implementación de las políticas monetarias y fiscales, así como para mejorar las proyecciones de las variables que son influenciadas por dichas políticas.

---



# ANEXO I

## PROGRAMA UTILIZADO PARA EFECTUAR LA ESTIMACIÓN DE LOS MODELOS PARA URUGUAY Y ARGENTINA

### MODELOS AR(2) CON TRES ESTADOS

@WRITTEN BY CHANG-JIN KIM, KOREA UNIVERSITY, DEPT. OF ECON  
 cjkim@korea.ac.kr @  
 \*/

```

new;
library optmum,PGRAPH;
optset;

#lineson;

format /m1 /rd 12,6;
load data[134,1]=C:\tesis\uruguay1\urud2este.prn;
      @1970.1 -- 2003.2, quarterly data of the quarter@

yy_d=(ln(data[2:134,1])-ln(data[1:133,1]))*100; @1970.2 - 2003.2@

t0=rows(yy_d);

LAG_AR=2;
NO_ST=lag_ar+1; @ NUMBER OF STATES TO BE CONSIDERED@
DMNSION=3^NO_ST;

st_mat=zeros(DMNSION,NO_ST);

j=1;
st2=1; do until st2>3;
st1=1; do until st1>3;
st=1; do until st>3;

      st_mat[j,.]=st2~st1~st;

j=j+1;
st=st+1;endo;
st1=st1+1;endo;
st2=st2+1;endo;

s1t_mat=zeros(DMNSION,NO_ST);
s2t_mat=zeros(DMNSION,NO_ST);
s3t_mat=zeros(DMNSION,NO_ST);

```

```

j=1; do until j>dmnsion;
i=1; do until i>no_st;
  if st_mat[j,i]==1; s1t_mat[j,i]=1;endif;
i=i+1;endo;
j=j+1;endo;

```

```

j=1; do until j>dmnsion;
i=1; do until i>no_st;
  if st_mat[j,i]==2; s2t_mat[j,i]=1;endif;
i=i+1;endo;
j=j+1;endo;

```

```

j=1; do until j>dmnsion;
i=1; do until i>no_st;
  if st_mat[j,i]==3; s3t_mat[j,i]=1;endif;
i=i+1;endo;
j=j+1;endo;

```

```
yy=yy_d[lag_ar+1:t0,1];
```

```
x_mat=
yy_d[Lag_ar:T0-1,1]-yy_d[lag_ar-1:T0-2,1];
```

```
T=rows(yy);
```

```
@===== Initialize Global Variables=====1959.1-89.9===== @
```

```
START=1; @1952:4.....@
```

```
PRMTR_IN={
  1.259933 -10.222394 7.695514 14.331286 -22.433174 -4.539383
  0.018705 0.001239 2.151802 1.182220 1.458978 -1.576000
  1.376510 3.992844
}; @converged parameters@
```

```
PRMTR_IN=PRMTR_IN';
```

```
@ Maximum Likelihood Estimation @
```

```
@===== @
```

```
{xout,fout,gout,cout}=optmum(&lik_fcn,PRMTR_in);
```

```
PRM_FNL=TRANS(xout); @ Estimated coefficients, constrained@
```

```
output file=C:\tesis\uruguay1\este.out reset;
```

```

"==FINAL OUTPUT=====";

"initial values of prmtr is";
      trans(prmtr_in)';
"=====";
"code is-----";cout;
"likelihood value is "; -1*fout;
"Estimated parameters are:";
"espacio";
"espacio";
prm_fnl'; " ";
"espacio";
"espacio";
xout';
output off;

"Calculating Hessian..... Please be patient!!!!";
      hout0=hessp(&lik_fcn,xout);
      hout=inv(hout0);

grdn_fnl=gradfd(&TRANS,xout);
Hsn_fnl=grdn_fnl*hout*grdn_fnl';
SD_fnl =sqrt(diag(Hsn_fnl)); @Standard errors of the estimated coefficients@

output on;
"Standard errors of parameters are:"; sd_fnl';
"=====";
output off;

{FILTER_P}=FILTER(XOUT);
FILTER_P=FILTER_P~YY;

format /m1 /rd 8,4;
output file=C:\tesis\uruguay1\este.dta reset; Filter_p; output off;

xy(seqa(1,1,rows(filter_p)),filter_p[.,1]);
xy(seqa(1,1,rows(filter_p)),filter_p[.,2]);
xy(seqa(1,1,rows(filter_p)),filter_p[.,3]);
xy(seqa(1,1,rows(filter_p)),filter_p[.,4]~yy);

end;

@ END OF MAIN PROGRAM @
@=====
@
@=====
@

PROC LIK_FCN(PRMTR1);

```

```

local prmtr, ppr,qpr,prob__0,prob__1,QQ, lik, j_iter, pr__0_l,pr__1_l,
  F_cast, var_L,pr_val,likv,phi,PSIX,
  vecp,st,st1,st2,st3,st4,ST5,ST6,ST7,ST8,ST9,ST10,ST11,ST12,ST13,
  pr_tr,pr_trf1,pr_trf,prob__t,prob__,pro_,pr_vl,j,psi1,psi2,var_c,
  delta0,DELTA1,MU0,MU1,st_k,st_k1,st_k2,st_k3,st_k4,
  f_cast1,f_cast2,PR_VL1,PR_VL2,pr_trf7,pr_trf0,
  PR_TRF2,PR_TRF3,PR_TRF4,PR_TRF5,PR_TRF6,psic,psiL,
  TMPRY1,TMPRY2,SM_PRL,TMP_P0,SM_PR0,JJJ,MU_MAT,D_MAT,FLT_PRN,
  F1,F2,TMP00,TMP0,SM_PR00,prob_dd,VAR,A,EN,MU2,MU3;

PRMTR=TRANS(PRMTR1);

LOCATE 15,1; PRMTR';

PR_TR=(PRMTR[1:2]|1-SUMC(PRMTR[1:2]))~
  (PRMTR[3:4]|1-SUMC(PRMTR[3:4]))~
  (PRMTR[5:6]|1-SUMC(PRMTR[5:6]));

PHI=PRMTR[7:8,1];
VAR=PRMTR[9:11,1];
MU1=PRMTR[12,1]; @ recession, vs. boom@
MU2=PRMTR[13,1]; @ recession, vs. boom@
MU3=PRMTR[14,1];

VAR_L=VAR[1,1]*S1T_MAT[.,COLS(S1T_MAT)] +
  VAR[2,1]*S2T_MAT[.,COLS(S2T_MAT)] +
  VAR[3,1]*S3T_MAT[.,COLS(S3T_MAT)];

MU_MAT= MU1*S1T_MAT+
  (MU2)*S2T_MAT+ (MU3)*S3T_MAT;

/* FOR UNCONDITIONAL PROBABILITIES */

A = (eye(3)-pr_tr)|ones(1,3);
EN=(0|0|0|1);
PROB__T = INV(A'A)*A'EN; @PR[S_t=0]|PR[S_t=1], 3x1 UNCONDITIONAL
  PROBABILITIES@

PR_TRF0=VEC(PR_TR);
PR_TRF =PR_TRF0|PR_TRF0|PR_TRF0;

PROB__T=VECR(PROB__T~PROB__T~PROB__T).*PR_TRF0; @3^2 x 1 @
PROB__=VECR(PROB__T~PROB__T~PROB__T); @3^5 x 1 @

LIKV=0.0;
J_ITER=1;
DO UNTIL J_ITER>T;

F_CAST1=(YY[J_ITER,1]-X_MAT[J_ITER,.]*PHI)*ONES(DMNSION,1)

```

```

-(MU_MAT[.,3] - MU_MAT[.,2]*PHI[1,1]
 - MU_MAT[.,1]*PHI[2,1]);

```

```
PROB_DD=PR_TRF .* PROB__;
```

```
PR_VL=(1./SQRT(2.*PI.*VAR_L)).*EXP(-0.5*F_CAST1.*F_CAST1./VAR_L).*PROB_DD;
```

```
@PR[S_t,S_{T-1},S_{T-2},Y_t|Y_{t-1}]@
```

```
PR_VAL=SUMC(PR_VL);
```

```
LIK=-1*LN(PR_VAL);
```

```
PRO_=PR_VL/PR_VAL; @Pr[S_t, S_{t-1},S_{t-2},S_{t-3},S_{t-4} | Y_t]@
```

```
output file=C:\tesis\uruguay1\vectoreste.dta reset;
```

```
PROB__T=PRO__[1:DMNSION/3,1]+PRO__[DMNSION/3+1:DMNSION*2/3,1]+
PRO__[DMNSION*2/3+1:DMNSION,1];
```

```
@Pr[S_t, S_{t-1},S_{t-2},S_{t-3}| Y_t]@
```

```
PROB__=VECR(PROB__T~PROB__T~PROB__T);
```

```
LIKV = LIKV+LIK;
```

```
J_ITER = J_ITER+1;
```

```
ENDO;
```

```
LOCATE 2,35;"LIKV=";;LIKV;
```

```
RETP(LIKV);
```

```
ENDP;
```

```
@+++++++@
```

```
PROC filter(PRMTR1);
```

```
local prmtr, ppr,qpr,prob__0,prob__1,QQ, lik, j_iter, pr__0_l,pr__1_l,
```

```
F_cast, var_L, pr_val,likv,phi,PSIX,
```

```
vecp,st,st1,st2,st3,st4,ST5,ST6,ST7,ST8,ST9,ST10,ST11,ST12,ST13,
```

```
pr_tr,pr_trf1,pr_trf,prob__t,prob__,pro_,pr_vl,j,psi1,psi2,var_c,
```

```
delta0,DELTA1,MU0,MU1,st_k,st_k1,st_k2,st_k3,st_k4,
```

```
f_cast1,f_cast2,PR_VL1,PR_VL2,pr_trf7,pr_trf0,out_mat,tmp,
```

```
PR_TRF2,PR_TRF3,PR_TRF4,PR_TRF5,PR_TRF6,psic,psiL,
```

```
TMPRY1,TMPRY2,SM_PRL,TMP_P0,SM_PR0,JJJ,MU_MAT,D_MAT,FLT_PRN,
```

```
F1,F2,TMP00,TMP0,SM_PR00,prob_dd,VAR,A,EN,MU2,MU3;
```

```
PRMTR=TRANS(PRMTR1);
```

```
LOCATE 15,1; PRMTR';
```

```
PR_TR=(PRMTR[1:2]|1-SUMC(PRMTR[1:2]))~
(PRMTR[3:4]|1-SUMC(PRMTR[3:4]))~
```

```
(PRMTR[5:6]|1-SUMC(PRMTR[5:6]));
```

```
PHI=PRMTR[7:8,1];
VAR=PRMTR[9:11,1];
MU1=PRMTR[12,1]; @ recession, vs. boom@
MU2=PRMTR[13,1]; @ recession, vs. boom@
MU3=PRMTR[14,1];
```

```
VAR_L=VAR[1,1]*S1T_MAT[:,COLS(S1T_MAT)] +
VAR[2,1]*S2T_MAT[:,COLS(S2T_MAT)] +
VAR[3,1]*S3T_MAT[:,COLS(S3T_MAT)];
```

```
MU_MAT= MU1*S1T_MAT+
(MU2)*S2T_MAT+ (MU3)*S3T_MAT;
```

```
/* FOR UNCONDITIONAL PROBABILITIES */
```

```
A = (eye(3)-pr_tr)|ones(1,3);
EN=(0|0|0|1);
PROB__T = INV(A'A)*A'EN; @PR[S_t=0]|PR[S_t=1], 3x1 UNCONDITIONAL
PROBABILITIES@
```

```
PR_TRF0=VEC(PR_TR);
PR_TRF =PR_TRF0|PR_TRF0|PR_TRF0;
```

```
PROB__T=VECR(PROB__T~PROB__T~PROB__T).*PR_TRF0; @3^2 x 1@
PROB__=VECR(PROB__T~PROB__T~PROB__T); @3^5 x 1@
```

```
out_mat=zeros(t,4);
```

```
LIKV=0.0;
J_ITER=1;
DO UNTIL J_ITER>T;
```

```
F_CAST1=(YY[J_ITER,1]-X_MAT[J_ITER,]*PHI)*ONES(DMNSION,1)
-(MU_MAT[:,3] - MU_MAT[:,2]*PHI[1,1]
- MU_MAT[:,1]*PHI[2,1]);
```

```
PROB_DD=PR_TRF .* PROB__; @Pr[S_t,....S_{t-4}|Y_{t-1}]@
```

```
tmp=prob_dd[1:9]+prob_dd[10:18]+prob_dd[19:27];
tmp=tmp[1:3]+tmp[4:6]+tmp[7:9];
```

```
out_mat[j_iter,]=tmp'~(YY[J_ITER,1]-SUMC(PROB_DD.*F_CAST1));
```

```
@Pr[S_t=1|Y_t],Pr[S_t=2|Y_t],Pr[S_t=2|Y_t]@
```





## ANEXO II

### SERIES UTILIZADAS PARA LOS MODELOS DE URUGUAY Y ARGENTINA

	URUGUAY		AGENTINA	
	PIB desest.	PIB 1983=100	PIB desest.	PIB 1993=100
mar-70	88.22	85.17	69.34	65.66
jun-70	88.33	87.33	69.17	71.04
sep-70	88.43	86.74	69.16	70.16
dic-70	88.50	94.13	67.95	68.78
mar-71	88.32	85.27	70.74	67.03
jun-71	88.43	87.44	71.42	73.29
sep-71	88.55	86.85	73.17	74.17
dic-71	88.65	94.24	73.73	74.62
mar-72	86.85	83.95	74.79	71.04
jun-72	87.04	86.08	73.63	75.50
sep-72	87.26	85.50	75.46	76.42
dic-72	87.46	92.78	75.87	76.84
mar-73	86.89	84.25	78.88	75.04
jun-73	87.27	86.39	78.05	79.96
sep-73	87.71	85.81	78.60	79.55
dic-73	88.07	93.11	80.71	81.76
mar-74	89.27	86.89	82.15	78.17
jun-74	89.91	89.10	84.25	86.22
sep-74	90.60	88.50	84.39	85.34
dic-74	91.09	96.04	86.42	87.56
mar-75	94.26	91.99	85.01	80.88
jun-75	95.12	94.33	85.54	87.56
sep-75	96.00	93.69	81.63	82.63
dic-75	96.45	101.66	80.56	81.76
mar-76	98.80	96.45	81.58	77.29
jun-76	99.22	98.37	79.76	81.76
sep-76	99.88	97.41	77.04	78.17
dic-76	100.73	106.34	81.36	82.63
mar-77	98.49	96.13	82.66	78.17
jun-77	98.80	97.94	85.60	87.56
sep-77	100.15	97.52	87.55	88.89
dic-77	100.44	106.02	84.87	86.22
mar-78	99.81	97.62	80.17	75.50
jun-78	109.21	108.36	82.15	84.01
sep-78	107.22	104.22	82.95	84.43
dic-78	109.20	115.06	83.94	85.34
mar-79	111.34	109.21	89.20	84.43
jun-79	115.39	114.32	89.35	91.14
sep-79	115.60	112.40	89.54	91.14
dic-79	113.89	120.06	88.76	90.27
mar-80	118.06	116.13	91.62	86.68
jun-80	117.51	115.81	86.76	88.47

sep-80	121.40	117.93	89.41	91.14
	<b>URUGUAY</b>		<b>ARGENTINA</b>	
	<b>PIB desest.</b>	<b>PIB 1983=100</b>	<b>PIB desest.</b>	<b>PIB 1993=100</b>
dic-80	120.25	127.40	88.18	89.81
mar-81	123.71	121.87	82.17	77.03
jun-81	123.92	121.55	83.54	85.24
sep-81	123.98	120.06	83.08	84.89
dic-81	114.04	121.76	82.94	84.65
mar-82	114.49	112.72	79.87	74.61
jun-82	113.20	110.60	80.85	82.56
sep-82	102.12	98.58	80.37	82.22
dic-82	103.61	111.45	80.25	81.99
mar-83	101.11	99.43	83.48	78.13
jun-83	102.03	99.43	82.62	84.35
sep-83	100.35	96.68	84.73	86.62
dic-83	102.92	111.13	83.85	85.64
mar-84	101.62	99.94	83.61	78.16
jun-84	99.69	96.99	85.14	86.89
sep-84	100.62	96.99	85.99	87.88
dic-84	100.61	108.69	86.65	88.49
mar-85	104.06	102.18	81.78	76.28
jun-85	99.09	96.38	78.11	79.92
sep-85	100.25	96.89	76.98	78.85
dic-85	104.52	113.07	80.85	82.64
mar-86	106.67	104.32	82.42	76.86
jun-86	109.09	105.94	83.76	85.70
sep-86	113.03	109.71	87.99	89.88
dic-86	114.97	124.57	86.26	87.96
mar-87	118.35	115.21	85.37	79.75
jun-87	119.58	116.02	87.39	89.48
sep-87	121.25	118.16	90.08	91.93
dic-87	120.05	130.37	86.21	87.84
mar-88	118.59	114.90	89.19	83.56
jun-88	120.01	116.30	86.04	88.30
sep-88	119.51	116.70	83.65	85.37
dic-88	120.03	130.70	83.32	84.94
mar-89	119.93	115.90	85.72	80.03
jun-89	122.37	118.30	77.73	80.16
sep-89	120.16	117.60	75.28	76.93
dic-89	121.00	132.10	79.44	81.09
mar-90	120.39	116.20	76.12	70.31
jun-90	118.08	113.70	75.70	78.27
sep-90	122.08	119.80	79.94	81.55
dic-90	124.08	135.60	82.20	83.81
mar-91	123.07	118.70	81.92	76.03
jun-91	124.17	119.50	86.04	88.81
sep-91	125.82	123.70	88.27	89.84
dic-91	128.95	140.60	90.73	92.21
mar-92	133.27	128.40	93.12	87.21
jun-92	135.18	130.30	97.28	100.24
sep-92	136.89	135.00	96.91	98.43
dic-92	136.66	148.70	95.37	96.75

mar-93	138.32	132.90	97.40	91.49
	<b>URUGUAY</b>		<b>ARGENTINA</b>	
	<b>PIB desest.</b>	<b>PIB 1983=100</b>	<b>PIB desest.</b>	<b>PIB 1993=100</b>
jun-93	136.19	131.50	99.20	102.27
sep-93	140.55	138.90	101.15	102.60
dic-93	141.13	153.40	102.30	103.65
mar-94	144.08	137.90	104.38	98.49
jun-94	150.81	146.10	105.71	108.87
sep-94	151.18	149.50	105.81	107.17
dic-94	150.67	163.90	107.48	108.81
mar-95	148.75	142.10	106.49	100.62
jun-95	151.13	146.50	101.63	104.90
sep-95	142.04	140.20	101.12	102.41
dic-95	146.82	159.90	102.11	103.37
mar-96	152.05	145.40	105.96	100.03
jun-96	152.02	147.50	106.81	110.25
sep-96	157.48	155.00	109.56	110.85
dic-96	159.34	173.60	111.69	112.90
mar-97	158.07	151.30	114.47	108.41
jun-97	165.79	161.20	115.51	119.14
sep-97	163.25	160.10	118.84	120.12
dic-97	165.40	180.20	120.40	121.57
mar-98	167.96	161.30	121.09	114.88
jun-98	168.55	163.80	123.52	127.36
sep-98	173.26	169.30	122.76	124.02
dic-98	172.63	188.10	119.90	121.04
mar-99	167.79	162.00	118.40	112.06
jun-99	167.87	163.10	117.09	121.10
sep-99	164.42	159.80	116.54	117.75
dic-99	163.78	178.20	118.79	119.90
mar-00	167.50	162.70	118.30	111.86
jun-00	162.09	157.60	116.40	120.62
sep-00	162.19	157.00	115.85	117.02
dic-00	161.98	176.10	116.55	117.58
mar-01	164.58	160.10	116.17	109.60
jun-01	159.03	155.00	115.98	120.42
sep-01	154.88	149.70	110.05	111.26
dic-01	153.31	166.70	104.26	105.23
mar-02	147.15	142.80	98.41	91.69
jun-02	150.00	146.50	99.59	104.15
sep-02	133.80	129.30	99.17	100.39
dic-02	133.19	144.80	100.70	101.63
mar-03	136.11	131.50	103.42	96.66
jun-03	140.55	138.10	107.43	112.06



## ANEXO III

### RESULTADOS DE LOS MODELOS ARIMA USADOS PARA DESESTACIONALIZAR LAS SERIES DEL PIB PARA URUGUAY Y ARGENTINA

#### 3.1 Uruguay

##### 3.1.1 Información del Modelo

Time Span (n° of obs.) Q1.1970 - Q2.2003 (134)  
 Method Tramo/Seats  
**PRE-ADJUSTMENT**  
 Transformation Logarithm  
 Mean Correction None  
 Correction for Trading Day Effects None  
 Correction for Easter Effect Yes (6 day(s))  
 Easter effect t-value -5.21 [-1.972, 1.972] 5%  
 Correction for Outliers Autom.:AO,LS,TC; 4 Outlier(s) fixed  
 Critical t-value 3.20  
 LS Q3.1982 t-value -5.72 [-1.972, 1.972] 5%  
 LS Q4.1981 t-value -4.72 [-1.972, 1.972] 5%  
 TC Q3.1995 t-value -4.47 [-1.972, 1.972] 5%  
 TC Q3.2002 t-value -4.28 [-1.972, 1.972] 5%  
 Corr. for Missing Obs. None  
 Corr. for Other Regr. Effects None  
 Specif. of the ARIMA model (0 1 1)(0 1 1) (fixed)  
 Non-seas. MA (lag 1) value -0.14  
 Non-seas. MA (lag 1) t-value -1.49 [-1.972, 1.972] 5%  
 Seasonal MA (lag 4) value -0.44  
 Seasonal MA (lag 4) t-value -5.73 [-1.972, 1.972] 5%  
 Method of Estimation Exact Maximum Likelihood  
**DECOMPOSITION**  
 ARIMA Decomposition Exact  
 Seasonality Seasonal model used

##### 3.1.2 Diagnóstico del Modelo

Model 1 (Tramo-Seats)  
 Ljung-Box on residuals 11.34 [0, 18.30] 5%  
 Box-Pierce on residuals 1.89 [0, 5.99] 5%  
 Ljung-Box on squared residuals 18.10 [0, 18.30] 5%  
 Normality 0.67 [0, 5.99] 5%  
 Skewness 0.18 [-0.43, 0.43] 5%  
 Kurtosis 3.02 [2.14, 3.86] 5%  
 Percentage of outliers 2.99% [0%, 5.0%] ad-hoc

## 3.2 Argentina

### 3.2.1 Información del Modelo

Model 1 (Tramo-Seats)  
 Time Span (n° of obs.) Q1.1970 - Q2.2003 (134)  
 Method Tramo/Seats  
**PRE-ADJUSTMENT**  
 Transformation None  
 Mean Correction None  
 Correction for Trading Day Effects None  
 Correction for Easter Effect None  
 Correction for Outliers Autom.:AO,LS,TC; 1 Outlier(s) fixed  
 Critical t-value 3.20  
 LS Q2.1989 t-value -3.19 [-1.972, 1.972] 5%  
 Corr. for Missing Obs. None  
 Corr. for Other Regr. Effects None  
 Specif. of the ARIMA model (0 1 0)(0 1 1) (fixed)  
 Seasonal MA (lag 4) value -0.79  
 Seasonal MA (lag 4) t-value -14.79 [-1.972, 1.972] 5%  
 Method of Estimation Exact Maximum Likelihood  
**DECOMPOSITION**  
 ARIMA Decomposition Exact  
 Seasonality Seasonal model used

### 3.2.2. Diagnóstico del Modelo

nformation on Diagnostics Model 1 (Tramo-Seats)  
 Ljung-Box on residuals 17.10 [0, 19.70] 5%  
 Box-Pierce on residuals 5.73 [0, 5.99] 5%  
 Ljung-Box on squared residuals 11.37 [0, 19.70] 5%  
 Normality 7.28 [0, 5.99] 5%  
 Skewness -0.58 [-0.42, 0.42] 5%  
 Kurtosis 3.09 [2.15, 3.85] 5%  
 Percentage of outliers 0.75% [0%, 5.0%] ad-hoc

## ANEXO IV

### EL MODELO DE CAMBIO DE REGIMEN PARA ESTADOS UNIDOS Y SU PROGRAMACIÓN - KIM-NELSON (1999)

#### 4.1 El modelo y el programa utilizado para la estimación

##### EL MODELO

```
/*
=====
MODEL: HAMILTON'S(1989,ECONOMETRICA) MARKOV-SWITCHING MODEL
```

```
***** THIS PROGRAM CONTAINS KIM'S(1994) SMOOTHING ALGORITHM*****
```

$$(y_t - \mu_{s_t}) = \phi_1(y_{t-1} - \mu_{s_{t-1}}) + \dots + \phi_4(y_{t-4} - \mu_{s_{t-4}}) + e_t$$

```
          e_t -- i.i.d. N(0, sigma^2)
mu_{st} = (1-S_t)*mu_0 + S_t* mu_1
Pr[S_t=1|S_{t-1}=1]=p -----
          Pr[S_t=0|S_{t-1}=0]=q
```

**Nota : 1 : auge -----2 : recesión**

```
WRITTEN BY CHANG-JIN KIM,          based on Hamilton (1989)
          DEPT. OF ECONOMICS
          KOREA UNIVERSITY
          SEOUL, 136-701, KOREA
          cjkim@korea.ac.kr
```

---

##### EL PROGRAMA

```
*/

new;

library optmum,PGRAPH;

format /m1 /rd 9,5;
load data[226,1]=C:\tesis\usa1\gdpusa4703.prn; @Quarter, U.S. real GNP@
          @1947.1 -- 2003.2 @

yy_d=(ln(data[23:226,1])-ln(data[22:225,1]))*100; @1952.I - 2003.2@
t0=rows(yy_d);

LAG_AR=4;
NO_ST=lag_ar+1; @ NUMBER OF STATES TO BE CONSIDERED@
DMNSION=2^NO_ST;

output file=C:\tesis\usa1\finalusa.out reset;          OUTPUT OFF;
```

---

```

st_mat=zeros(DMNSION,NO_ST);

    j=1;
    st4=0;do until st4>1;
    st3=0; do until st3>1;
    st2=0; do until st2>1;
    st1=0; do until st1>1;
    st=0; do until st>1;

    st_mat[j,.] =st4~st3~st2~st1~st;

    j=j+1;
    st=st+1;endo;
    st1=st1+1;endo;
    st2=st2+1;endo;
    st3=st3+1;endo;
    st4=st4+1;endo;

yy=yy_d[lag_ar+1:t0,1];

x_mat=
    yy_d[Lag_ar:T0-1,1] ~ yy_d[lag_ar-1:T0-2,1]~
    yy_d[lag_ar-2:T0-3,1]~ yy_d[lag_ar-3:T0-4,1];

T=rows(yy);

output on;
"=====";
"===== "===== ";
output off;

@===== Initialize Global Variables=====1959.1-89.9=====@

    START=1; @1952:4.....@

PRMTR_IN={
    2.161214    1.574257    0    0    0    0
    0.801232    0    0.8  0 };
PRMTR_IN=PRMTR_IN';

@ Maximum Likelihood Estimation @
@=====@

{xout,fout,gout,cout}=optmum(&lik_fcn,PRMTR_in);

PRM_FNL=TRANS(xout);          @ Estimated coefficients, constrained@
output on;

"==FINAL
OUTPUT===== ";

"initial values of prmtr is";
    trans(prmtr_in)';
"===== ";
"code is-----";;cout;

```

```

"likelihood value is ";; -1*fout;
"Estimated parameters are:";
prm_fnl'; " ";
xout';
output off;

"Calculating Hessian..... Please be patient!!!!";
      hout0=hessp(&lik_fcn,xout);
      hout=inv(hout0);

grdn_fnl=gradfd(&TRANS,xout);
Hsn_fnl=grdn_fnl*hout*grdn_fnl';
SD_fnl =sqrt(diag(Hsn_fnl)); @Standard errors of the estimated
coefficients@

output on;
"Standard errors of parameters are:"; sd_fnl';
"=====";
output off;

{pr_tt0,pr_tl0}=FILTER(XOUT); @Pr[S_t=0|Y_t] and Pr[S_t=0|Y_{t-1}]@
smooth0=SMOOTH(pr_tt0,pr_tl0); @Pr[S_t=0|Y_T], Smoothed probabilities@

FLTR=pr_tt0~pr_tl0~smooth0;
format /ml /rd 8,4;
output file=C:\tesis\usal\finalusa.dta reset; FLTR; output off;

xy(seqa(1,1,rows(pr_tt0)),pr_tt0);
xy(seqa(1,1,rows(smooth0)),smooth0);

end;

@ END OF MAIN PROGRAM @

@=====
=@
@=====
=@
PROC LIK_FCN(PRMTR1);
local prmtr, ppr,qpr,prob__0,prob__1,QQ, lik, j_iter, pr__0_1,pr__1_1,
      F_cast, var_L,pr_vl, pr_val,likv,phi,PSIC,PSIX,
      vecp,st,st1,st2,st3,st4,ST5,ST6,ST7,ST8,ST9,ST10,ST11,ST12,ST13,
      pr_tr,pr_trf1,pr_trf,prob__t,prob__,pro_,pr_vl,j,psil,psi2,var_c,
      delta0,DELTA1,MU0,MU1,st_k,st_k1,st_k2,st_k3,st_k4,
      f_cast1,f_cast2,PR_VL1,PR_VL2,pr_trf7,pr_trf0,
      PR_TRF2,PR_TRF3,PR_TRF4,PR_TRF5,PR_TRF6,psic,psiL,
      TMPRY1,TMPRY2,SM_PRL,TMP_P0,SM_PR0,JJJ,MU_MAT,D_MAT,FLT_PRN,
      F1,F2,TMP00,TMP0,SM_PR0,SM_PR00,prob_dd,VAR,A,EN, dmy;

PRMTR=TRANS(PRMTR1);

```

```

LOCATE 15,1; PRMTR';

/* DEFINE PARAMETERS */

PPR=PRMTR[1,1]; @Pr[St=1/St-1=1]@
QPR=PRMTR[2,1]; @Pr[St=0/St-1=0]@

PHI=PRMTR[3:6,1];
VAR=PRMTR[7,1]^2;

dmy=zeros(t,1); dmy[131:t,1]=ones(t-130,1);

MU0=PRMTR[8,1]; @ recession, vs. boom@
MU1=PRMTR[9,1]; @ recession, vs. boom@

/* A MATRIX OF TRANSITION PROBABILITIES */

PR_TR=(QPR~ (1-PPR)) |
      ((1-QPR)~ PPR);

/* INITIALIZING THE FILTER WITH STEADY-STATE PROBABILITIES */

A = (eye(2)-pr_tr) | ones(1,2);
EN=(0|0|1);
PROB__T = INV(A'A)*A'EN; @PR[S_t=0]|PR[S_t=1],
                        2x1 steady-state PROBABILITIES@

PR_TRF0=VEC(PR_TR);
PR_TRF1=PR_TRF0|PR_TRF0;
PR_TRF2=PR_TRF1|PR_TRF1;
PR_TRF =PR_TRF2|PR_TRF2;

PROB__T=VECR(PROB__T~PROB__T).*PR_TRF0;
/*PR[S_{-2},S_{-3}|I_0) 4x1*/
PROB__T=VECR(PROB__T~PROB__T).*PR_TRF1;
/*PR[S_{-1},S_{-2},S_{-3}|I_0) 8x1*/
PROB__T=VECR(PROB__T~PROB__T).*PR_TRF2;
/*PR[S_{0},S_{-1},S_{-2},S_{-3}|I_0)
16x1 */
PROB__=VECR(PROB__T~PROB__T);
/*2^5 x 1*/

LIKV=0.0;
J_ITER=1;
DO UNTIL J_ITER>T;

MU_MAT=ST_MAT*(MU1+dmy[j_iter,1]*prmtr[10,1]) +
(ONES(DMNSION,NO_ST)-ST_MAT)*(MU0+dmy[j_iter,1]*0);

F_CAST1=(YY[J_ITER,1]-X_MAT[J_ITER,.]*PHI)*ONES(DMNSION,1)
-(MU_MAT[.,5] - MU_MAT[.,4]*PHI[1,1]
- MU_MAT[.,3]*PHI[2,1]
- MU_MAT[.,2]*PHI[3,1]

```

```

- MU_MAT[.,1]*PHI[4,1] ); /*
2^5x1 */

VAR_L=VAR*ONES(DMNSION,1); /*
2^5x1 */

PROB_DD=PR_TRF .* PROB__;
/* Pr[S_t,S_{t-1},S_{t-2},S_{t-3},S_{t-4} | I(t-
1)]*/

PR_VL=(1./SQRT(2.*PI.*VAR_L)).*EXP(-
0.5*F_CAST1.*F_CAST1./VAR_L).*PROB_DD;
/*
2^5x1 */

/* Joint density of y_t,S_t,...,S_{t-4}
given
past information : */

PR_VAL=SUMC(PR_VL); /* f(y_t|I(t-1)), density of y_t given
past
information: This is weighted average
of
2^5 conditional densities */

LIK=-1*LN(PR_VAL);

PRO_=PR_VL/PR_VAL; /* Pr[S_t,S_{t-1},S_{t-2},S_{t-3},S_{t-4} | I(t-
1),Y_t]*/
/* Updating of prob. with new information, y_t
*/

PROB__T=PRO_[1:DMNSION/2,1]+PRO_[DMNSION/2+1:DMNSION,1];
/* Integrate out S_{t-4}: then you get
Pr[S_t, S_{t-1},S_{t-2},S_{t-3}| Y_t] */
/* 2^4x1*/

PROB__=VECR(PROB__T~PROB__T);
/* 2^5x1 */

LIKV = LIKV+LIK;
J_ITER = J_ITER+1;
ENDO;

LOCATE 2,35;"LIKV=";;LIKV;
RETP(LIKV);
ENDP;
@+++++++@

@+++++++@

PROC (2) = FILTER(PRMTR1);
local prmtr, ppr, qpr, prob__0, prob__1, QQ, lik, j_iter, pr__0_1, pr__1_1,
F_cast, var_L, pr_vl, pr_val, likv, phi, PSIC, PSIX,
vecp, st, st1, st2, st3, st4, ST5, ST6, ST7, ST8, ST9, ST10, ST11, ST12, ST13,
pr_tr, pr_trf1, pr_trf, prob__t, prob__, pro_, pr_vl, j, psi1, psi2, var_c,
delta0, DELTA1, MU0, MU1, st_k, st_k1, st_k2, st_k3, st_k4,
f_cast1, f_cast2, PR_VL1, PR_VL2, pr_trf7, pr_trf0,

```

```

PR_TRF2,PR_TRF3,PR_TRF4,PR_TRF5,PR_TRF6,psic,psiL,PR_STL0,PR_STT0,
TMPRY1,TMPRY2,SM_PRL,TMP_P0,SM_PR0,JJJ,MU_MAT,D_MAT,FLT_PRN,
F1,F2,TMP00,TMP0,SM_PR0,SM_PR00,prob_dd,VAR,TMP,OUT_MAT,A,EN,dmy;

PRMTR=TRANS(PRMTR1);

LOCATE 15,1; PRMTR';

      PPR=PRMTR[1,1];      @Pr[St=1/St-1=1]@
      QPR=PRMTR[2,1];      @Pr[St=0/St-1=0]@

      PHI=PRMTR[3:6,1];
      VAR=PRMTR[7,1]^2;

dmy=zeros(t,1);  dmy[131:t,1]=ones(t-130,1);

      MU0=PRMTR[8,1];  @ recession, vs. boom@
      MU1=PRMTR[9,1];  @ recession, vs. boom@

      PR_TR=(QPR~      (1-PPR)) |
              ((1-QPR)~  PPR);

/* FOR UNCONDITIONAL PROBABILITIES */

      A = (eye(2)-pr_tr)|ones(1,2);
      EN=(0|0|1);
      PROB__T = INV(A'A)*A'EN;  @PR[S_t=0]|PR[S_t=1], 2x1
UNCONDITIONAL
                                                                 PROBABILITIES@

      PR_TRF0=VEC(PR_TR);
      PR_TRF1=PR_TRF0|PR_TRF0;
      PR_TRF2=PR_TRF1|PR_TRF1;
      PR_TRF =PR_TRF2|PR_TRF2;

      PROB__T=VECR(PROB__T~PROB__T).*PR_TRF0;      @2^2 x 1@
      PROB__T=VECR(PROB__T~PROB__T).*PR_TRF1;      @2^3 x 1@
      PROB__T=VECR(PROB__T~PROB__T).*PR_TRF2;      @2^4 x 1@
      PROB__ =VECR(PROB__T~PROB__T);                @2^5 x 1@

PR_STT0=ZEROS(T,1);  @WILL SAVE Pr[S_t=0|Y_{t}]@
PR_STL0=ZEROS(T,1);  @WILL SAVE Pr[S_t=0|Y_{t-1}]@

LIKV=0.0;
J_ITER=1;
DO UNTIL J_ITER>T;

      MU_MAT=ST_MAT*(MU1+dmy[j_iter,1]*prmtr[10,1]) +
              (ONES(DMNSION,NO_ST)-ST_MAT)*(MU0+dmy[j_iter,1]*0);

      F_CAST1=(YY[J_ITER,1]-X_MAT[J_ITER,.]*PHI)*ONES(DMNSION,1)
              -(MU_MAT[.,5] - MU_MAT[.,4]*PHI[1,1]
                - MU_MAT[.,3]*PHI[2,1]
                - MU_MAT[.,2]*PHI[3,1]
                - MU_MAT[.,1]*PHI[4,1] );

```

```

VAR_L=VAR*ONES(DMNSION,1);

PROB_DD=PR_TRF .* PROB__;

@-----@
    TMP=PROB_DD;
    TMP=TMP[1:16]+TMP[17:32];
    TMP=TMP[1:8]+TMP[9:16];
    TMP=TMP[1:4]+TMP[5:8];
    TMP=TMP[1:2]+TMP[3:4];

    PR_STL0[J_ITER,1]=TMP[1,1];          @Pr[S_t=0|Y_t]@
@-----@

    PR_VL=(1./SQRT(2.*PI.*VAR_L)).*EXP(-
0.5*F_CAST1.*F_CAST1./VAR_L).*PROB_DD;

                                @Pr[S_t,S_{T-1},S_{T-2},S_{T-3},S_{T-4},Y_t|Y_{t-
1}]@

    PR_VAL=SUMC(PR_VL);    @f(y_t| Y_{t-1})@
    LIK=-1*LN(PR_VAL);

    PRO_=PR_VL/PR_VAL;    @Pr[S_t, S_{t-1},S_{t-2},S_{t-3},S_{t-4} |
Y_t]@

@-----@
    TMP=PRO_;
    TMP=TMP[1:16]+TMP[17:32];
    TMP=TMP[1:8]+TMP[9:16];
    TMP=TMP[1:4]+TMP[5:8];
    TMP=TMP[1:2]+TMP[3:4];

    PR_STT0[J_ITER,1]=TMP[1,1];          @Pr[S_t=0|Y_t]@
@-----@

    PROB__T=PRO_[1:DMNSION/2,1]+PRO_[DMNSION/2+1:DMNSION,1];
                                @Pr[S_t, S_{t-1},S_{t-2},S_{t-3}| Y_t]@

    PROB__=VECR(PROB__T~PROB__T);

J_ITER = J_ITER+1;
ENDO;

RETP(PR_STT0,PR_STL0);
ENDP;
@=====
@=====

PROC SMOOTH(pr_tt0,pr_tl0);

    @pr_TT0 contains Pr[S_t|Y_t]@
    @pr_TL0 contains Pr[S_t|Y_{t-1}]@

local ppr, qpr, pr_sm0,pr_sm1, j_iter,pr_sm00,pr_sm01,pr_sm10,pr_sm11,

```

```

pr_tt1,pr_t11;

PPR=PRM_fnl[1,1];    @Pr[St=1/St-1=1]@
QPR=PRM_fnl[2,1];    @Pr[St=0/St-1=0]@

pr_tt1=1-pr_tt0;
pr_t11=1-pr_t10;

pr_sm0=pr_tt0;      @ pr_sm0 will contain Pr[S_t|Y_T]@
pr_sml=pr_t11;

j_iter=T-1;
do until j_iter < 1;

    @The followings are P[S_t, S_{t+1}|Y_T] @

    pr_sm00=pr_sm0[j_iter+1,1]*qpr*    pr_tt0[j_iter,1]/
pr_t10[j_iter+1,1];

    pr_sm01=pr_sml[j_iter+1,1]*(1-qpr)*pr_tt0[j_iter,1]/
pr_t11[j_iter+1,1];

    pr_sm10=pr_sm0[j_iter+1,1]*(1-ppr)*pr_t11[j_iter,1]/
pr_t10[j_iter+1,1];

    pr_sml1=pr_sml[j_iter+1,1]*ppr*    pr_t11[j_iter,1]/
pr_t11[j_iter+1,1];

    pr_sm0[j_iter,1]=pr_sm00+pr_sm01;
    pr_sml[j_iter,1]=pr_sm10+pr_sml1;

j_iter=j_iter -1;
endo;

RETP(pr_sm0); @This proc returns Pr[S_t=0|Y_T]@
endp;

@+++++@

PROC TRANS(c0); @ constraining values of reg. coeff.@
    local c1,m,u,d1,d2,d3,d4,d5,d6;

    c1=c0;

    c1[1:2,.]=exp(c0[1:2,.]) ./ (1+exp(c0[1:2,.]));

retp(c1);
endp;

```

#### 4.2 Los resultados del modelo anterior – muestra 1952.II – 2003.II

Parámetro	Estimación	Desvío Standard
P	<b>0.92622</b>	<b>0.02717</b>
Q	<b>0.79128</b>	<b>0.07851</b>
$f_1$	<b>0.04959</b>	<b>0.09895</b>
$f_2$	<b>-0.01870</b>	<b>0.08460</b>
$f_3$	<b>-0.16172</b>	<b>0.08921</b>
$f_4$	<b>-0.08771</b>	<b>0.08368</b>
$s^2$	<b>0.66897</b>	<b>0.04043</b>
$m_0$	<b>-0.18168</b>	<b>0.16265</b>
$m_1$	<b>1.14935</b>	<b>0.07868</b>
$m_0^*$	<b>Estadísticamente no significativa</b>	
$m_1^*$	<b>-0.31774</b>	<b>0.11267</b>
Log. Verosimilitud	<b>-238.05807</b>	

**Nota:** En principio, la tasa de crecimiento fue modelada de la siguiente forma:

$$m_{S_t} = [m_0 + m_0^* D_t] (1 - S_t) + [m_1 + m_1^* D_t] (S_t)$$

donde  $D_t$  es una variable dummy que toma el valor 1 en la submuestra 1983.I – 2003.II y cero en la otra submuestra. La idea es captar si la economía americana se ha estabilizado luego de los años 80, y por tanto, las tasas de crecimiento en ambos estados difieren significativamente antes y después de la década del 80.

$m_0^*$  resultó estadísticamente no significativa en una primera estimación del modelo, por lo cual, en la estimación definitiva del modelo se la excluyó, y se trabajó con una ecuación para la tasa de crecimiento de la forma:

$$m_{S_t} = [m_0 + ] (1 - S_t) + [m_1 + m_1^* D_t] (S_t)$$







---

## BIBLIOGRAFÍA

- Baxter, M. "International Trade and Business Cycles" NBER Working Papers 5025.
- Brown R.L. , J. Durbin y M. Evans (1975) " Techniques for Testing the Constancy of Regresión Relationships over Time" *Journal of the Royal Statistical Society*, B37: 149-192.
- Bry, G y Boschan, C. (1971), " Cyclical analysis of time series: Selected procedures and computer program." *New York: Columbia University Press*.
- Buckle, R. A. , Haugh, D. y Thompson, P. (2002) " Growth and volatility regime switching models for New Zealand GDP data", *Nes Zealand Treasury Draft Paper*.
- Burns, A.F. y Mitchell C. (1946), "Measuring Business Cycles", *National Bureau of Economic Research*, New York.
- Carter, C.K. y P. Kohn " (1994) On Gibbs Sampling for State Space Models". *Biométrica* 81: 541- 553.
- Chow, G (1960) "Test of the Equality between Two Sets of Coefficients in Two Linear Regressions". *Econométrica*, 28: 561-605.
- Cox, D.R. y Millar H.D. (1965), *The theory of Stochastic Processes*. *London:Methuen*.
- Dempster, A.P., N.M. Laird y D.B. Rubin. (1977) " Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm. " *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 39: 1-38.
- Diamond, P. A, y Fudenberg, D. (1989) " Rational Expectations Business Cycles in Search Equilibrium" *Journal of political Economy* 97: 606-619.
- Diebold, F.X. y Rudebusch, (1996) G. D. " Measuring Business Cycles: A Modern Perspective ". *Federal reserve Bank of San Francisco*.
-

Farley J. U. y M.J. Hinich, (1970) " A Test for a Shifting Slope Coefficient in a Linear Model" *Journal of the American Statistical Association*, 65: 1320-1329.

Filardo, A.J. y Gordon S., (1993) " Business Cycle Durations". *Working Paper, Federal Reserve Bank, Kansas City, MO*.

Friedman, M (1968) " The rol of Monetary Policy". *American Economic Review* 58 (March): 1-17

Hamilton, J. (1989) " A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycles", *Econometrica* 57:2, 357-384.

Hamilton, J. (1994) "*Time Series Analysis*" *Princeton University Press*.

Hansen, L. P. y Sargent, J. (1993) " *Recursive Linear Models of Dynamic Economies*" *Princeton, Princeton University Press*.

Johnson, C (2000) " Un modelo de Switching para el crecimiento en Chile" – Banco Central de Chile – Working Paper No. 84.

Kim, C. J. y Nelson, C. R. (1998), " Business Cycle Turning Points, a New Coincident Index, and Tests of Duration Dependence Based on a Dynamic Factor model with Regime-Switching". *The Review of Economics and Statistics*, 80:180-201.

Kim, C.J. y Nelson C.R. (1999) " *State-Space Models with Regime Switching*" – *Classical and Gibbs – Sampling Approaches with Applications – Massachusetts Institute of Technology*

Kim, C. J. y Nelson, C. R. (1999), "Has the U.S. Economy Become More Stable ? A Bayesian Approach Based on a Markov-Switching Model of the Business Cycle" *Review of Economics and Statistics*, 8(4): 1-10.

Lucas, R. (1972) "Expectations and the Neutrality of Money". *Journal of Economic Theory* 4 (April):103-124

Masoller, A (2002), " Un indicador sintético de la actividad económica" , *Revista de Economía*, Banco Central del Uruguay.

---

---

McConnel M.M y Perez-Quiros,G. (2000) “ Output Fuctuations in the United States: GAT has changed since the early 1980's ? *The American Economic Review* 90: 1464-1476,.

Neftci, S.N. (1984), “ Are Economic Time Series Asymmetric over the Business Cycle” *Journal of Political Economy*, 92(2): 306-328.

Quandt, R.E. (1958), “ The Estimation of the Parameters of a Linear Regression System Obeying Two Separate regimes” *Journal of the American Statiscal Association*, 53: 873-880.

Quandt, R.E. (1960), “ Test of the Hyphotesis that a Linear Regression System Obey's Two Separate Regimes” *Journal of the American Statiscal Association*, 55: 324-330.

Quandt, R.E. (1972), ” A New Approach to Estimating Switching Regressions “ *Journal of the American Statistical Association*, 67: 306-310.

Shepard, Neil (1994), “ Partial Non Gaussian State Space” *Biométrica* 81: 115-131.

Stock, James H. y Mark W.Watson, (1989) “ New Indexes of Coincident and Leading Economic Indicators” en O.Blanchard y S. Fischer (eds) *NBER Macroeconomics Annual* (Cambridge, MA:MIT Press).

Stock, J. H. y Watson M.W. (1991), “ A Probability Model of the Coincident Economic Indicators” en *K.Lahiri y G.H.Moore (eds)*, *Leading Economics Indicators: New Approaches and Forecasting Records* ( Cambridge:Cambridge University Press).

Stock, J. H. y Watson M.W. (1993), “ A Procedure for Predicting Recessions with Leading Indicators: Econometrics Issues and Recent Experience”, en J.H.Stock y ;.W. Watson (eds), *Business Cycles, Indicators and Forecasting* ( Chicago: University of Chicago Press for NBER): 255-284.

Voelker, Juan, (2003), “Shocks Regionales, dependencia comercial y desempeño sectorial de la economía uruguaya” *Trabajo monográfico de la Licenciatura en Economía*, Mimeo.

---

Watson, M.W. (1994), " Business-Cycle Durations and Postwar Stabilization of the U.S. Economy" *American Economic Review*, 84(1): 24-46.

Wecker, W.E. (1979) " Predicting the Turning Points of a Time Series" *Journal of Business*, 52(1): 35-50.

---