

Tesis de Maestría en Física



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY



ANII
Agencia Nacional de
Investigación e Innovación



PEDECIBA

Cuantización de un agujero negro de Reissner-Nordström

Esteban Mato

Orientador: Dr. Rodolfo Gambini

Instituto de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cuantización de un agujero negro
de Reissner-Nordström

Estudiante: Esteban Mato

Orientador: Dr. Rodolfo Gambini

Tribunal:

Dr. Miguel Campiglia

Dr. Raúl Donangelo

Dr. Miguel Paternain

Dr. Jorge Pullin

Instituto de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Junio 2015

Resumen

En este trabajo cuantizamos el espacio-tiempo de un agujero negro de Reissner-Nordström. Mediante un re-escalado y una combinación lineal con el vínculo de difeomorfismos se logra que el vínculo hamiltoniano tenga un álgebra Abeliana consigo mismo y el álgebra usual con el vínculo de difeomorfismos. El álgebra de los vínculos es entonces una verdadera álgebra de Lie. Completamos la cuantización de Dirac usando técnicas de gravedad cuántica de lazos. Obtenemos el espacio de Hilbert de estados físicos invariantes bajo la acción de todos los vínculos. A nivel cuántico aparecen nuevos observables que no tienen un análogo a nivel clásico y están asociados a la naturaleza discreta del espacio-tiempo. La singularidad presente en la teoría clásica es eliminada tras la cuantización, lo que nos permite extender el espacio-tiempo más allá de donde la singularidad solía estar hacia nuevas regiones. Observamos que la discretización del espacio-tiempo podría en principio jugar un papel en la estabilización de los horizontes de Cauchy.

Presentamos a modo introductorio la reformulación de la Relatividad General en términos de las variables de Ashtekar, seguida de una introducción a la gravedad cuántica de lazos. Algunos temas básicos como teoría de grupos, fibrados, conexiones y dinámica de sistemas vinculados son cubiertos en los apéndices.

Abstract

In this work we quantize spherically symmetric electrovacuum gravity. Via a rescaling and a linear combination with the diffeomorphism constraint, the Hamiltonian constraint can be made to have an Abelian algebra with itself, therefore the constraint algebra is a true Lie algebra. We complete the Dirac quantization using loop quantum gravity techniques. We obtain the Hilbert space of physical states annihilated by all the constraints. New observables appear at the quantum level which have no classical analog and are associated to the discrete nature of spacetime. After quantization, the singularity present in the classical theory is resolved, allowing us to extend the spacetime through where the singularity used to be into new regions. We argue that quantum discreteness of spacetime may play a role in stabilizing the Cauchy horizons.

As an introduction to this work, we present the reformulation of general relativity in terms of Ashtekar's variables, followed by an introduction to loop quantum gravity. Background material (group theory, fibre bundles and dynamics of constrained systems) is provided in the appendices.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi familia por la paciencia y todo el apoyo brindado durante este proceso y en general desde que comencé facultad.

A Lucía Duarte y Rodrigo Eyheralde les agradezco por hacer que el curso que compartimos haya sido más llevadero.

A Javier Olmedo le agradezco haber malgastado horas de su tiempo en ayudarme con innumerables dudas. Agradezco también a Miguel Campiglia por haberme ayudado con dudas, haberme prestado apuntes suyos y por darme una mano con la presentación.

A la Comisión Académica de Posgrado y a la Agencia Nacional de Innovación e Investigación les agradezco la financiación de parte de este trabajo.

Le doy las gracias también a todos los miembros del tribunal por sus correcciones y sugerencias. Agradezco finalmente a Rodolfo, por toda la paciencia que me tuvo durante el proceso, por orientarme cuando me estancué, y por toda su ayuda no sólo en el trabajo sino también en los cursos.

Índice general

1	Introducción	1
1.1	Gravedad cuántica	1
1.2	Formulación ADM de la Relatividad General	2
1.3	Variables de Ashtekar	3
1.4	Simetría esférica	4
1.5	Esquema del trabajo	4
2	Relatividad general clásica	7
2.1	Geometría semi Riemanniana	7
2.1.1	Tensores	7
2.1.2	Conexión de Levi-Civita	9
2.1.3	Tensor de Riemann	10
2.2	Formulación Lagrangeana	12
2.2.1	Acción de Einstein-Hilbert	12
2.2.2	Acción de Palatini	13
2.3	Formulación Hamiltoniana	18
2.3.1	Formulación ADM	18
2.3.2	Formulación de Ashtekar-Barbero	26
3	Simetría esférica	37
3.1	Variables de Ashtekar	37
3.2	Vínculos	39
3.3	Variables polares	41
4	Contribución electromagnética	51
5	Espacio cuántico	53
5.1	Producto escalar en teorías de gauge sobre redes	53
5.1.1	Intertwiners	54
5.2	Espacio cinemático \mathcal{K}	55
5.2.1	Funciones cilíndricas	55
5.2.2	Producto escalar	55
5.2.3	Base ortonormal de \mathcal{K}	56
5.2.4	Invariancias del producto escalar	56
5.3	Estados invariantes gauge e invariantes bajo difeomorfismos	57
5.3.1	Estados invariantes gauge. Espacio \mathcal{K}_0	58
5.3.2	Invariancia bajo difeomorfismos. Espacio $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$	58
5.3.3	Nudos y estados de spin-nudos	59

5.4	Operadores básicos	60
5.5	Simetría esférica	64
5.5.1	Acción de las tríadas	64
6	Abelianización del vínculo hamiltoniano	67
6.1	Caso puramente gravitatorio	67
6.2	Caso electromagnético	73
7	Cuantización	77
7.1	Cinemática	77
7.1.1	Acción de operadores	78
7.2	Dinámica	79
7.3	Observables	81
7.3.1	Singularidades	82
7.4	Extensión analítica de la solución	84
7.4.1	Diagrama de Penrose de la solución extendida	86
8	Conclusiones	93
A	Grupos	95
B	Conexiones en fibrados	101
B.1	Fibrados y conexiones	101
B.2	Holonomías	106
B.3	Curvatura	109
C	Teorías de gauge	111
C.1	Vínculos lagrangeanos	112
C.2	Formulación hamiltoniana	113
C.2.1	Vínculos primarios	113
C.2.2	Hamiltoniano canónico	114
C.2.3	Ecuaciones de Hamilton y vínculos	115
C.2.4	Vínculos secundarios	115
C.2.5	Hamiltoniano total	116
C.2.6	Vínculos de primera y segunda clase	116
C.2.7	Transformaciones de gauge	117
C.2.8	Hamiltoniano extendido	118
C.2.9	Vínculos de segunda clase	118
C.2.10	Fijación de gauge	119
C.3	Sistemas totalmente vinculados	120
C.3.1	Hamiltoniano cero	120
C.4	Cuantización canónica	121
C.4.1	Cuantización de Dirac de los vínculos de primera clase	123
	Bibliografía	125

Capítulo 1

Introducción

1.1 Gravedad cuántica

Los dos pilares de la física moderna son la Relatividad General (GR por sus siglas en inglés) y la Mecánica Cuántica (QM). Por un lado han abierto la puerta a grandes descubrimientos y avances científicos, pero por el otro han destruido la coherencia de la física clásica prerrelativista, ya que los postulados básicos de cada una de las dos teorías contradice a los de la otra. La Mecánica cuántica está formulada usando un espacio-tiempo newtoniano absoluto (fijo, no dinámico). Para la Relatividad General, en cambio, el espacio-tiempo no está fijo sino que es un campo físico que interactúa con la materia (campo gravitatorio); GR describe la dinámica del espacio-tiempo (o campo gravitatorio) en sí, así como la dinámica de los cuerpos sujetos al mismo.

Ambas teorías han sido exitosas en sus respectivos rangos de aplicabilidad. La Mecánica Cuántica describe los fenómenos microscópicos que involucran partículas fundamentales, ignorando completamente la gravedad. Unificando la Mecánica Cuántica con la Relatividad Especial se lograron describir las interacciones electromagnéticas, débiles y fuertes en el lenguaje de la Teoría Cuántica de Campos (QFT). La Relatividad General por su parte describe fenómenos macroscópicos, cuyos efectos cuánticos pueden ser ignorados. Sin embargo, hasta el día de hoy no hay una teoría física que pueda predecir los resultados de medidas en fenómenos en los cuales tanto los efectos cuánticos como los gravitatorios no puedan ser ignorados. Se cree que los efectos cuánticos de la gravedad se vuelven apreciables a energías del orden de la energía de Planck ($E_P \approx 10^{28} eV$), esto es, quince órdenes de magnitud por encima de la máxima energía alcanzable por el LHC. Que los efectos cuánticos de la gravedad no sean apreciables en los experimentos realizables no es en ninguna manera motivo para considerar innecesaria una teoría cuántica de la gravedad (QG). Las motivaciones para seguir buscando esta teoría están conectadas con el hecho de que en la naturaleza existen partículas cuyas energías son mucho mayores a las obtenidas en los aceleradores, además de que el Universo durante su evolución experimentó regímenes en los cuales la energía disponible podría haber sido incluso mayor que la energía de Planck. Aunque las energías que se pueden conseguir en los aceleradores hoy en día son mucho menores que la de Planck, existe la posibilidad de que algunos fenómenos astrofísicos sirvan como “ampli-

ficadores” pudiendo hacer los efectos cuánticos de la gravedad visibles en un futuro cercano (ver [25] y referencias dentro).

Desde el punto de vista teórico también existen razones para intentar cuantizar la gravedad. Para empezar, tanto GR como QFT son incompletas, fallan al llevarlas fuera de los límites de su aplicabilidad. Una serie de teoremas principalmente debidos Hawking y Penrose demuestran que bajo ciertas condiciones la gravitación produce singularidades: Existen geodésicas inextensibles, esto es, que tienen un rango finito de parámetro afín. Si un observador viaja sobre una de estas geodésicas, en un tiempo propio finito encontrará alguna patología en la cual las leyes de la GR fallan. Esto sugiere que una extensión hacia QG es necesaria ya que GR no da una descripción completa y consistente del universo. La aparición de singularidades ocurre tanto en GR como en QFT. Se espera que QG solucione los problemas de estas dos teorías.

Si uno intenta aplicar las prescripciones estándar de QFT a GR, se encontrará con muchas dificultades. Por ejemplo, la condición de microcausalidad dice que si los dominios de dos campos están separados espacialmente, entonces los campos conmutan o anti-conmutan. Físicamente, esta condición asegura que la medida de un campo en una región del espacio-tiempo no puede afectar la medida de otro campo (o el mismo) en una región espacialmente separada. Intentar aplicar este principio al campo gravitatorio no tiene sentido, ya que no podemos darle un significado consistente al requerimiento de que los soportes de los campos estén espacialmente separados a no ser que conozcamos el estado del campo gravitatorio, o sea, de la métrica. Pero la relación de conmutación debe valer independientemente del estado del campo. Esta es sólo una de las dificultades que se encuentran debido a que en GR no existe un espacio-tiempo fijo de fondo, ya que ésta describe la dinámica del espacio-tiempo en sí. Un enfoque perturbativo en el cual se separa la métrica en una parte fija que sirve como espacio-tiempo de fondo y una parte dinámica podría ser la solución, sin embargo la teoría resultante es no renormalizable [25]. Estos y otros problemas dejan en evidencia que GR es incompatible con QFT dada la no existencia de un espacio-tiempo de fondo fijo. Sin embargo, esto no significa que GR sea incompatible con QM. Es importante distinguir QM de QFT [27]. Esta última es una aplicación de la mecánica cuántica a sistemas con infinitos grados de libertad. Entonces, lo que debemos preguntarnos es si podemos construir una teoría cuántica de un sistema con infinitos grados de libertad sin recurrir a una estructura causal fija de fondo. Una de las candidatas a teoría cuántica de la gravedad es la llamada Gravedad Cuántica de Lazos (LQG) sobre la cual hablaremos más adelante.

1.2 Formulación ADM de la Relatividad General

El formalismo ADM (nombrado así por sus autores Arnowitt, Deser y Misner) es una formulación Hamiltoniana de la Relatividad General [1](§ 2.3.1). En él se supone que el espacio-tiempo está foliado en superficies espaciales Σ_t , siendo t una coordenada temporal y con coordenadas x^i en cada una de ellas. La métrica induce una métrica espacial $q^{ab}(t, x^i)$ en cada una de las superficies Σ_t . Esta métrica inducida y sus momentos conjugados $\pi_{ab}(t, x^i)$ son las variables

dinámicas de la teoría. Utilizando estas variables es posible definir un Hamiltoniano y por lo tanto escribir las ecuaciones de movimiento de GR en forma de ecuaciones de Hamilton. No todas las variables dinámicas son independientes sino que existen vínculos en la teoría (los cuales son de primera clase en la terminología de Dirac). El Hamiltoniano resulta ser una combinación lineal de estos vínculos (como es esperable para un sistema generalmente covariante [20]). Uno de ellos genera difeomorfismos espaciales en las superficies Σ_t (de donde obtiene su nombre) y el otro, llamado vínculo Hamiltoniano, genera una evolución en una dirección normal a la foliación. A los multiplicadores de Lagrange de estos vínculos se los llama *lapso* y *shift*. Su evolución es totalmente arbitraria, esta libertad en su evolución corresponde a la libertad que tenemos en elegir la foliación del espacio-tiempo.

Si uno intenta utilizar el procedimiento de cuantización canónica (§ C.4) en este caso, se encontrará con serios obstáculos que impiden completar el proceso de cuantización. Uno de ellos es el hecho de que el álgebra de los vínculos no sólo no es un álgebra de Lie sino que depende de las variables dinámicas en una forma no polinomial, lo cual hace prácticamente imposible encontrar un orden de los operadores con el cual se cumpla la correspondencia entre los corchetes de Poisson de los vínculos y los conmutadores de los operadores asociados a los mismos. Además al intentar usar el método de Dirac para cuantizar sistemas vinculados (§ C.4.1), se llega a la ecuación de Wheeler-DeWitt, resultado de exigir la invariancia de los estados físicos ante la acción del vínculo Hamiltoniano, reemplazando las cantidades clásicas por sus operadores correspondientes. Esta ecuación presenta muchas dificultades y no se ha encontrado forma consistente de completar la cuantización. El proceso de cuantización canónica entonces parecía estar estancado. Sin embargo, en 1986 Ashtekar introdujo variables alternativas a las usadas en la formulación ADM las cuales simplifican notablemente la forma de los vínculos y permitieron avanzar en el programa de cuantización [2].

1.3 Variables de Ashtekar

En el formalismo de Ashtekar uno reescribe las variables métricas en términos de un campo que es una conexión de gauge $SU(2)$ (conexión de Ashtekar-Barbero) y sus momentos conjugados (tríadas) (§ 2.3.2). A esta nueva representación se le llama representación de conexión de la Relatividad General canónica. En términos de estas nuevas variables los vínculos se simplifican notablemente, permitiendo por ejemplo encontrar soluciones a la ecuación de Wheeler-DeWitt. La representación de conexión permite expresar GR en un lenguaje de teorías de gauge y por lo tanto provee nuevas formas de abordar problemas en GR tanto clásicos como cuánticos. Esto dio lugar a la representación de lazos, introducida inicialmente por Gambini y Trias para teorías de gauge [18] y por Rovelli y Smolin [28] para el caso gravitacional. En esta representación las variables dinámicas se obtienen de las holonomías de la conexión de gauge en caminos cerrados (§ B.2). Esta representación es el origen de LQG.

1.4 Simetría esférica

LQG es un candidato a una teoría cuántica de la gravedad. La teoría tiene una base matemática rigurosa para su espacio de estados cinemáticos [3]. Uno de los problemas que impide completar la cuantización es la implementación de la dinámica; ésta está codificada en los vínculos de primera clase con un álgebra que involucra funciones de estructura, lo cual impide completar la cuantización siguiendo el enfoque de Dirac. Este problema está ausente en modelos reducidos por simetría correspondientes a espacios homogéneos, aunque reaparece al considerar modelos con dependencia espacial en las variables. Algunos de los modelos reducidos por simetría más relevantes para ser estudiados son aquellos en los que el espacio-tiempo es esféricamente simétrico. Éstos pueden describir por ejemplo el estado final del colapso gravitatorio de objetos astrofísicos; sin embargo, la descripción clásica de este tipo de geometrías resulta ser incompleta debido a que presentan una singularidad. Estos modelos reducidos son también interesantes dado que tienen un vínculo hamiltoniano que representa la invariancia bajo redefiniciones temporales, y un vínculo de difeomorfismos asociado a la simetría bajo redefiniciones de la coordenada radial.

En un trabajo de Gambini y Pullin [16], aplicando técnicas de LQG se consiguió completar la cuantización de un agujero negro de Schwarzschild (solución esféricamente simétrica a la ecuación de Einstein en el vacío), basándose en trabajos anteriores en los cuales se desarrolló la estructura cinemática para modelos esféricamente simétricos. En [16] se muestra que bajo un re-escalado simple y una combinación lineal con el vínculo de difeomorfismos, se puede obtener un vínculo Hamiltoniano abeliano, y en consecuencia el álgebra de los vínculos obtenida es una verdadera álgebra de Lie; esto permite completar la cuantización de Dirac. Se encontraron los estados físicos invariantes bajo la acción de los vínculos y se vio que la singularidad es eliminada tras la cuantización. Además, se identificaron observables que no poseen un análogo clásico.

En esta tesis, basada en [16] (y también en una versión extendida del mismo [14]), se desean extender los resultados de dicho trabajo al caso de un agujero negro con carga eléctrica, un agujero negro de Reissner-Nordström.

1.5 Esquema del trabajo

Para comenzar, en el capítulo 2 hacemos un repaso de Relatividad General clásica, comenzando con algunos conceptos básicos de geometría semi-Riemanniana, siguiendo con la formulación lagrangiana utilizando variables métricas tradicionales (Acción de Einstein-Hilbert). Se introduce luego la acción de Palatini, la cual es simplemente la acción de Einstein-Hilbert re-escrita de manera tal que no es una función de la métrica, sino de la conexión y un campo llamado tétrada. La principal utilidad del formalismo de Palatini para este trabajo es que sirve como “calentamiento” para la introducción de las variables de Ashtekar que aparecen en la siguiente sección, luego de haber repasado el formalismo ADM. Al cambiar de las variables métricas a las variables de Ashtekar los vínculos se simplifican pero aparece un nuevo vínculo de primera clase asociado a las rotaciones internas, el vínculo de Gauss. La principal fuente de este capítulo es el libro de Baez y Muniain [5].

En el capítulo 3 estudiamos cómo se reduce la teoría cuando hay simetría

esférica. Siguiendo principalmente los artículos de Bojowald [6], Chiou *et. al* [12] y Campiglia *et al.* [9], obtenemos el espacio cinemático para modelos esféricamente simétricos y mostramos cómo se simplifican los vínculos; en particular, se obtiene que el grupo de simetría que en la teoría completa es $SU(2)$, cuando hay simetría esférica pasa a ser $U(1)$. La contribución de un campo electromagnético esféricamente simétrico es estudiada en el capítulo 4, cuya fuente es el artículo de Louko [24]. Son halladas las contribuciones electromagnéticas a los vínculos Hamiltoniano y de difeomorfismos, así como un nuevo vínculo de Gauss de origen electromagnético, asociado a las rotaciones del grupo $U(1)$.

El capítulo 5 está basado principalmente en el libro de Rovelli [27]. En él se construye el espacio cinemático de LQG, utilizando técnicas de teorías de gauge en redes. Las variables dinámicas serán holonomías de la conexión de Ashtekar-Barbero. A las funciones de estas holonomías (las cuales son elementos del grupo $SU(2)$) se las denomina funciones cilíndricas. Una base del espacio de las funciones cilíndricas se obtiene a partir de los elementos de matriz de las representaciones unitarias irreducibles de estas holonomías (teorema de Peter-Weyl). A partir de estos estados y recurriendo al concepto de *intertwiners* se pueden obtener estados invariantes bajo rotaciones internas, conocidos como *redes de spines*. Luego son introducidos los estados de redes de spines que además son invariantes bajo difeomorfismos espaciales (*estados de spin-nudos*).

A partir de las variables básicas de la teoría se definen operadores en el espacio de estados cinemáticos, siendo uno de ellos el operador correspondiente al área de una superficie espacial, del cual los estados de redes de spines son estados propios. El espectro de este operador está discretizado: No se pueden medir superficies más chicas que cierto valor A_0 . Este es un resultado físico importante (el cual además ha sido esperado en QG, ver por ejemplo ([25] pág 18): El espacio en LQG está cuantizado. El capítulo concluye especializando resultados generales al caso esféricamente simétrico

En el capítulo 6 se comienza a tratar el problema de la cuantización del agujero negro de Reissner-Nordström. Mediante un re-escalado de la función lapso y la adición al vínculo hamiltoniano de un término proporcional al vínculo de difeomorfismos, se consigue que este sea abeliano, y por lo tanto que el álgebra de los vínculos sea una verdadera álgebra de Lie.

El resultado obtenido en el capítulo 6 permite a uno completar el procedimiento de cuantización de Dirac. En el capítulo 7 se comienza construyendo el espacio cinemático de la teoría. Luego se da una prescripción para el operador Hamiltoniano, encontrando luego el espacio de Hilbert de los estados físicos aniquilados por todos los vínculos de forma cerrada. Además de la masa y la carga eléctrica, son encontrados nuevos observables que no tienen análogos clásicos. Se discute luego el problema de las singularidades. Se observa que las singularidades de coordenadas son resueltas fácilmente mediante una fijación de gauge apropiada. Por otro lado, la singularidad clásica genuina es eliminada en el tratamiento cuántico, permitiéndonos extender la solución más allá de donde la singularidad solía estar hacia nuevas regiones. Se hace luego una observación de cómo afecta esto al problema de la hiperbolicidad global del espacio-tiempo, teniendo como referencia un artículo de Stoica [30] quien trató este problema en un contexto clásico mediante una extensión analítica de la métrica. El capítulo se cierra con una breve discusión sobre cómo podría afectar la discretización del espacio a la estabilización de los horizontes de Cauchy.

Se presentan en el capítulo 8 las conclusiones del trabajo.

En los apéndices A y B se puede encontrar un resumen de herramientas matemáticas usadas en el trabajo, siendo el libro de Baez y Muniain [5] la principal fuente. El apéndice C trata sobre generalidades de los sistemas hamiltonianos vinculados. También se da un breve resumen sobre cuantización canónica y el método de Dirac para cuantizar sistemas vinculados. Sus principales fuentes son los libros de Baez y Muniain [5] y el libro de Henneaux y Teitelboim [20]. El lector que no esté familiarizado con estos temas debería comenzar leyendo los apéndices ya que su contenido se presupone conocido en la tesis.

Capítulo 2

Relatividad general clásica

2.1 Geometría semi Riemanniana

2.1.1 Tensores

Sea M una variedad de dimensión n . Definimos el fibrado de tensores (r, s) como el producto tensorial:

$$TM \otimes \cdots \otimes TM \otimes T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M \quad (2.1)$$

Siendo TM y T^*M los espacios tangente y co-tangente de M respectivamente. Llamamos tensor de orden (r, s) a una sección de este fibrado. Definimos los tensores de orden $(0, 0)$ como funciones en M . En coordenadas locales, tenemos una base dada por:

$$\partial_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\alpha_n} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\beta_s} \quad (2.2)$$

donde los índices α_i, β_j toman valores desde 1 hasta n . Si tenemos entonces un tensor de orden (r, s) , podemos escribirlo como combinación lineal de la base:

$$X_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \partial_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\alpha_n} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\beta_s} \quad (2.3)$$

donde las funciones

$$X_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \quad (2.4)$$

se denominan componentes del tensor. Un tensor actúa sobre r 1-formas $\omega_1 \dots \omega_r$ y s campos vectoriales $v_1 \dots v_s$ dando un número real como resultado:

$$X(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s) = X_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \omega_{1\alpha_1} \dots \omega_{r\alpha_r} v_1^{\beta_1} \dots v_s^{\beta_s} \quad (2.5)$$

Una métrica semi-Riemanniana g sobre una variedad M en particular puede ser vista como un tensor de orden $(0, 2)$ ya que actúa sobre dos campos vectoriales dando como resultado un número real y es $C^\infty(M)$ -lineal en cada argumento:

$$g(v + v', w) = g(v, w) + g(v', w) \quad (2.6)$$

$$g(v, w + w') = g(v, w) + g(v, w') \quad (2.7)$$

$$g(fv, w) = g(v, fw) = fg(v, w) \quad (2.8)$$

para $v, v', w, w' \in Vect(M)$ y $f \in C^\infty(M)$. En coordenadas locales, tenemos:

$$g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta \quad (2.9)$$

donde $g_{\alpha\beta} = g(\partial_\alpha, \partial_\beta)$. En coordenadas esféricas (ϕ, θ) en la 2-esfera S^2 , la métrica estándar tiene las siguientes componentes:

$$g(\partial_\phi, \partial_\phi) = 1, \quad g(\partial_\theta, \partial_\theta) = \sin^2(\phi), \quad g(\partial_\phi, \partial_\theta) = 0 \quad (2.10)$$

Por lo que podemos expresar la métrica de la siguiente manera:

$$d\phi \otimes d\phi + \sin^2\phi \, d\theta \otimes d\theta \quad (2.11)$$

O de forma abreviada:

$$d\phi^2 + \sin^2\phi \, d\theta^2 \quad (2.12)$$

Así como podemos tomar el producto tensorial de una sección de un fibrado E y una sección de otro fibrado E' para obtener una sección de $E \otimes E'$, también podemos tomar el producto tensorial de campos tensoriales. En particular, el producto tensorial de un tensor X de orden (r, s) y otro tensor Y de orden (r', s') da como resultado un tensor de orden $(r + r', s + s')$ $X \otimes Y$. Las componentes están dadas por:

$$(X \otimes Y)_{\beta_1 \dots \beta_{s+s'}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{r+r'}} = X_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} Y_{\beta_{s+1} \dots \beta_{s+s'}}^{\alpha_{r+1} \dots \alpha_{r+r'}} \quad (2.13)$$

Luego, si tenemos el tensor (r, s)

$$X = v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_s \quad (2.14)$$

Podemos acoplar una 1-forma con un campo vectorial para obtener un tensor de orden $(r - 1, s - 1)$:

$$\omega_j(v_i) v_1 \otimes \dots \otimes \hat{v}_i \dots \otimes v_r \otimes \omega_1 \dots \otimes \hat{\omega}_j \dots \otimes \omega_s \quad (2.15)$$

donde el símbolo $\hat{}$ indica que estos factores no están presentes. En términos de componentes, se puede obtener el nuevo tensor contrayendo un supraindice con un subíndice.

$$Y_{\beta_1 \dots \beta_j \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_r} = X_{\beta_1 \dots \mu \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \mu \dots \alpha_r} \quad (2.16)$$

Por ejemplo, el tensor de Riemann es un tensor de orden $(1, 3)$ de componentes $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$. Este tensor es la curvatura de la conexión de Levi-Civita, la cual introduciremos en la próxima sección. Contrayendo se obtiene un tensor de orden $(0, 2)$ llamado tensor de Ricci.

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^\mu \quad (2.17)$$

Podemos subir y bajar índices de tensores utilizando la métrica y su inversa de componentes $g_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}$ respectivamente, que satisfacen:

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \quad (2.18)$$

Por ejemplo, podemos obtener un tensor $(1, 1)$ a partir del tensor de Ricci:

$$R_\beta^\alpha = g^{\alpha\gamma} R_{\beta\gamma} \quad (2.19)$$

Luego, se pueden contraer ambos índices para obtener el escalar de Ricci:

$$R = R_\alpha^\alpha \quad (2.20)$$

2.1.2 Conexión de Levi-Civita

Una conexión en un fibrado vectorial define el concepto de transporte paralelo. Al estar el fibrado equipado con una conexión, esta permite transportar vectores desde una fibra hasta otra de forma paralela con respecto a dicha conexión (§ B.1). La conexión es especificada de forma equivalente por una derivada covariante, un endomorfismo en el espacio de las secciones del fibrado con el cual se puede diferenciar una sección en la dirección de algún campo vectorial en la variedad.

La métrica induce una conexión llamada *conexión de Levi-Civita*. Esta conexión tiene dos particularidades:

- Es compatible con la métrica: Esto significa simplemente que un vector tangente no cambia su longitud al transportarlo paralelamente.
- Es libre de torsión: El vector tangente no rota al transportarlo paralelamente (ver [5] para una discusión más detallada sobre esta noción).

Sea M una variedad con una métrica semi-Riemanniana g . Sea D una conexión en el fibrado tangente TM . La conexión D permite tomar la derivada de un campo vectorial v (el cual es una sección del fibrado tangente) en la dirección de otro campo vectorial u , obteniendo un nuevo campo vectorial $D_u v$. Decimos que D es compatible con la métrica si para todo $u, v, w \in Vect(M)$ se cumple

$$u(g(v, w)) = g(D_u v, w) + g(v, D_u w) \quad (2.21)$$

Luego, decimos que D es libre de torsión si para todo $v, w \in Vect(M)$ se cumple

$$[v, w] = D_v w - D_w v \quad (2.22)$$

Se puede verificar que para cada métrica g hay sólo una conexión con estas dos características. Esta es la conexión de Levi-Civita y es denotada por ∇ . Supongamos que la conexión ∇ es compatible con la métrica y libre de torsión. En coordenadas locales tenemos una base $\{\partial_\mu\}$. Denotamos la derivada covariante en la dirección de uno de estos vectores de la base de la siguiente manera:

$$\nabla_\mu = \nabla_{\partial_\mu} \quad (2.23)$$

Luego, como g es compatible con la métrica, tenemos:

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \underbrace{g(\nabla_\alpha \partial_\beta, \partial_\gamma)}_a + \underbrace{g(\partial_\beta, \nabla_\alpha \partial_\gamma)}_b \quad (2.24)$$

$$\partial_\beta g_{\gamma\alpha} = \underbrace{g(\nabla_\beta \partial_\gamma, \partial_\alpha)}_c + \underbrace{g(\partial_\gamma, \nabla_\beta \partial_\alpha)}_d \quad (2.25)$$

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \underbrace{g(\nabla_\gamma \partial_\alpha, \partial_\beta)}_e + \underbrace{g(\partial_\alpha, \nabla_\gamma \partial_\beta)}_f \quad (2.26)$$

Los campos vectoriales de la base de coordenadas conmutan entre sí y la conexión es libre de torsión, por lo tanto:

$$\nabla_\alpha \partial_\beta - \nabla_\beta \partial_\alpha = [\partial_\beta, \partial_\alpha] = 0 \quad (2.27)$$

Entonces: $\nabla_\alpha \partial_\beta = \nabla_\beta \partial_\alpha$. Utilizando esto último y la simetría de la métrica tenemos que los términos b y e son iguales entre sí así como los términos c y f . Entonces, sumando las dos primeras ecuaciones y restando la tercera, obtenemos:

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = g(\nabla_\alpha \partial_\beta, \partial_\gamma) + g(\partial_\gamma, \nabla_\beta \partial_\alpha) = 2g(\nabla_\alpha \partial_\beta, \partial_\gamma) \quad (2.28)$$

Dos campos vectoriales sólo pueden tener el mismo producto interno con todos los vectores de la base si son iguales, por lo que ∇ es único. La acción de una conexión D en un elemento e_j de una base de secciones de un fibrado vectorial E se puede expresar en términos del potencial vector A (§ B.1):

$$D_\alpha e_j = A_{\alpha j}^i e_i \quad (2.29)$$

De igual manera, definimos los *símbolos de Christoffel* como las componentes del potencial vector de la conexión de Levi-Civita.

$$\nabla_\alpha \partial_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \quad (2.30)$$

Entonces, la derivada covariante de un campo vectorial w en la dirección de v está dada por:

$$\nabla_v w = v^\alpha (\partial_\alpha w^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta w^\gamma) \partial_\beta \quad (2.31)$$

Reescribiendo la expresión (2.28):

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = 2g(\Gamma_{\alpha\beta}^\delta \partial_\delta, \partial_\gamma) = 2\Gamma_{\alpha\beta}^\delta g(\partial_\delta, \partial_\gamma) = 2g_{\delta\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \quad (2.32)$$

Utilizando la métrica inversa se obtiene la expresión para los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} (\partial_\alpha g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\delta\alpha} - \partial_\delta g_{\alpha\beta}) \quad (2.33)$$

Al tener la conexión de Levi-Civita en el fibrado tangente TM , podemos obtener una conexión análoga en los fibrados tensoriales de orden (r, s) . A esta conexión también la denominaremos ∇ . A modo ilustrativo, dado un tensor X de orden $(2, 2)$, su derivada covariante está dada por:

$$(\nabla_\mu X)_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = \partial_\mu X_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} + \overbrace{\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha X_{\gamma\delta}^{\lambda\beta} + \Gamma_{\mu\lambda}^\beta X_{\gamma\delta}^{\alpha\lambda}}^{\text{índices vectoriales}} - \underbrace{\Gamma_{\mu\gamma}^\lambda X_{\lambda\delta}^{\alpha\beta} - \Gamma_{\mu\delta}^\lambda X_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}}_{\text{índices covectoriales}} \quad (2.34)$$

Se puede obtener una expresión análoga para tensores de orden (r, s) .

2.1.3 Tensor de Riemann

En relatividad general, el espacio-tiempo es una variedad semi-Riemanniana, en particular, una variedad Lorentziana. Una variedad semi-Riemanniana tiene en su fibrado tangente una conexión compatible con la métrica y libre de torsión, la conexión de Levi-Civita que denotamos por ∇ . Definimos el tensor de curvatura de Riemann como la curvatura de esta conexión. Dados $u, v, w \in Vect(M)$, tenemos:

$$R(u, v)w = (\nabla_u \nabla_v - \nabla_v \nabla_u - \nabla_{[u, v]})w \quad (2.35)$$

En una base local de campos vectoriales e_α , las componentes del tensor están dadas por:

$$R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha e_\alpha \quad (2.36)$$

Si elegimos una base de coordenadas, tenemos:

$$R(\partial_\beta, \partial_\gamma)\partial_\delta = (\nabla_\beta \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_\beta)\partial_\delta \quad (2.37)$$

Utilizando la definición $\nabla_\alpha \partial_\beta = \Gamma_{\beta\delta}^\gamma \partial_\gamma$:

$$\begin{aligned} R(\partial_\beta, \partial_\gamma)\partial_\delta &= \nabla_\beta(\Gamma_{\gamma\delta}^\sigma \partial_\sigma) - \nabla_\gamma(\Gamma_{\beta\delta}^\sigma \partial_\sigma) \\ &= (\partial_\beta \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma) \partial_\sigma + \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma \nabla_\beta \partial_\sigma - (\partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\sigma) \partial_\sigma - \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \nabla_\gamma \partial_\sigma \\ &= (\partial_\beta \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma) \partial_\sigma + \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\tau \partial_\tau - (\partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\sigma) \partial_\sigma - \Gamma_{\beta\delta}^\sigma \Gamma_{\gamma\sigma}^\tau \partial_\tau \end{aligned} \quad (2.38)$$

Renombrando índices mudos, obtenemos las componentes del tensor de Riemann en la base de coordenadas:

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \partial_\beta \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha - \partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\alpha + \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\alpha - \Gamma_{\beta\delta}^\sigma \Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \quad (2.39)$$

En la sección anterior se nombraron dos tensores obtenidos a partir del tensor de Riemann, el tensor de Ricci:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\gamma\beta}^\gamma \quad (2.40)$$

Y el escalar de Ricci:

$$R = R_\alpha^\alpha \quad (2.41)$$

El tensor de Riemann tiene tres simetrías básicas:

1. $R_{\beta\gamma\delta}^\lambda = -R_{\gamma\beta\delta}^\lambda$
2. $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\delta\beta\gamma\alpha}$
3. $R_{[\beta\gamma\delta]}^\lambda = 0$

La primer relación es equivalente a

$$R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta = -R(e_\gamma, e_\beta)e_\delta \quad (2.42)$$

Lo cual es una consecuencia de que $R(v.w) = -R(w, v) \quad \forall v, w \in Vect(M)$. La segunda relación es equivalente a

$$g(e_\alpha, R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta) = -g(e_\delta, R(e_\beta, e_\gamma)e_\alpha) \quad (2.43)$$

Lo cual a su vez se puede expresar sin recurrir al uso de una base local

$$g(u, R(v, w)z) = -g(z, R(v, w)u) \quad \forall u, v, w, z \in Vect(M) \quad (2.44)$$

Por linealidad, basta probar la igualdad anterior para campos vectoriales asociados a una base de coordenadas. La conexión es compatible con la métrica, por lo que:

$$\begin{aligned} vw(g(u, z)) &= v(g(\nabla_w u, z) + g(u, \nabla_w z)) \\ &= g(\nabla_v \nabla_w u, z) + g(\nabla_w u, \nabla_v z) + g(\nabla_v u, \nabla_w z) + g(u, \nabla_v \nabla_w z) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Intercambiando v por w se obtiene $wv(g(u, z))$. Restando ambos términos:

$$(vw - wv)(g(u, z)) = g([\nabla_v, \nabla_w]u, z) + g(u, [\nabla_v, \nabla_w]z) \quad (2.46)$$

Utilizando la definición del tensor de Riemann y el hecho de que los campos vectoriales de la base de coordenadas conmutan entre sí:

$$0 = g(R(v, w)u, z) + g(u, R(v, w)z) \quad (2.47)$$

Por lo tanto:

$$g(e_\alpha, R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta) = -g(e_\delta, R(e_\beta, e_\gamma)e_\alpha) \quad (2.48)$$

Utilizando las simetrías anteriores, la tercer propiedad se puede reescribir como

$$R_{\beta\gamma\delta}^\lambda + R_{\gamma\delta\beta}^\lambda + R_{\delta\beta\gamma}^\lambda = 0 \quad (2.49)$$

O equivalentemente:

$$R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta + R(e_\gamma, e_\delta)e_\beta + R(e_\delta, e_\beta)e_\gamma = 0 \quad (2.50)$$

Trabajando con una base de vectores coordenadas y utilizando la definición del tensor de Riemann, el miembro izquierdo de la igualdad anterior se puede escribir:

$$\nabla_\beta \nabla_\gamma e_\delta - \nabla_\gamma \nabla_\beta e_\delta + \nabla_\gamma \nabla_\delta e_\beta - \nabla_\delta \nabla_\gamma e_\beta + \nabla_\delta \nabla_\beta e_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\delta e_\gamma \quad (2.51)$$

Utilizando el hecho de que la métrica es libre de torsión, lo anterior es igual a:

$$\nabla_\beta [e_\gamma, e_\delta] + \nabla_\gamma [e_\delta, e_\beta] + \nabla_\delta [e_\beta, e_\gamma] = 0 \quad (2.52)$$

Es igual a cero ya que el bracket de Lie de dos vectores coordenadas se anula.

2.2 Formulación Lagrangeana

2.2.1 Acción de Einstein-Hilbert

Sea M una variedad orientable de dimensión cuatro con una métrica semi-Riemanniana g . El lagrangeano que da lugar a las ecuaciones de Einstein está dado por

$$R \text{ vol} \quad (2.53)$$

donde R es el escalar de Ricci y vol es la 4-forma de volumen asociada a g . La acción es entonces:

$$S(g) = \int_M R \text{ vol} \quad (2.54)$$

En coordenadas locales:

$$S(g) = \int_M R \sqrt{|\det g|} d^4x \quad (2.55)$$

Tomando las variaciones con respecto a la métrica se obtiene la ecuación de Einstein en el vacío:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.56)$$

2.2.2 Acción de Palatini

En la formulación de la sección anterior la variable dinámica es la métrica. Una formulación alternativa fue introducida por Palatini, en la misma, la métrica y la conexión son tratadas como variables independientes. Al variar la acción con respecto a la métrica se obtienen las ecuaciones de Einstein usuales, mientras que al variarla con respecto a la conexión se llega a que la conexión debe ser la de Levi-Civita. Existe otra formulación llamada *Acción de Palatini tetradica* en la cual las variables dinámicas son la *conexión espinorial* y la *tétrada*, las cuales introduciremos a continuación.

Tétradas

Sea M una variedad difeomorfa a \mathbb{R}^4 . M puede ser vista como un subconjunto abierto del espacio tiempo. El fibrado tangente TM es obviamente trivial. Llamamos e a la trivialización de TM , esto es, al isomorfismo entre fibrados vectoriales

$$e : M \times \mathbb{R}^4 \rightarrow TM \quad (2.57)$$

que envía cada fibra $\{p\} \times \mathbb{R}^4$ al correspondiente espacio tangente $T_p M$. A dicha trivialización la llamaremos *tétrada*. Podemos movernos entre un fibrado y otro utilizando la tétrada y su inversa, llamada *co-tétrada*:

$$e^{-1} : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^4 \quad (2.58)$$

Una sección de $M \times \mathbb{R}^4$ es simplemente una función en M que toma valores en \mathbb{R}^4 . La base canónica se estas secciones es:

$$\xi_0(p) = (1, 0, 0, 0) \quad (2.59)$$

$$\xi_1(p) = (0, 1, 0, 0) \quad (2.60)$$

$$\xi_2(p) = (0, 0, 1, 0) \quad (2.61)$$

$$\xi_3(p) = (0, 0, 0, 1) \quad (2.62)$$

Una sección cualquiera puede ser escrita como

$$s = s^I \xi_I \quad (2.63)$$

donde $s^I \in C^\infty(M)$. A \mathbb{R}^4 se lo denomina *espacio interno*. Aplicando e a la base de secciones del $M \times \mathbb{R}^4$ obtenemos una base de campos vectoriales en M , así como al aplicar la co-tétrada a una base de campos vectoriales en M podemos obtener una base de secciones en $M \times \mathbb{R}^4$:

$$e(\xi_I) = e_I^\alpha \partial_\alpha \quad e^{-1}(\partial_\alpha) = e_\alpha^I \xi_I \quad (2.64)$$

siendo las componentes e_I^α funciones en M . Es habitual llamar tétradas a estas componentes ya que son suficientes para determinar el mapa. La tétrada nos permite trabajar en el fibrado trivial $M \times \mathbb{R}^4$ en vez de en el fibrado tangente TM . En este fibrado trivial tenemos un producto interno canónico: Dadas dos secciones s y s' en $M \times \mathbb{R}^4$ definimos su producto interno como

$$\eta(s, s') = \eta_{IJ} s^I s'^J \quad (2.65)$$

donde η_{IJ} es la métrica interna:

$$\eta_{IJ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

Con la métrica interna y su inversa podemos subir y bajar índices internos, así como podemos subir y bajar índices espacio-temporales con la métrica g . Decimos que las tétradas son ortonormales si los campos vectoriales $e_I = e(\xi_I)$ lo son:

$$g(e_I, e_J) = \eta_{IJ} \quad (2.67)$$

Entonces, si las tétradas son ortonormales, podemos encontrar una relación entre la métrica y las tétradas:

$$g(e_I^\alpha \partial_\alpha, e_J^\beta \partial_\beta) = e_I^\alpha e_J^\beta g_{\alpha\beta} = \eta_{IJ} \quad (2.68)$$

Por otro lado, si s y s' son secciones de $M \times \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} g(e(s), e(s')) &= g(e(s^I \xi_I), e(s^J \xi_J)) = s^I s^J g(e_I, e_J) \\ &= \eta_{IJ} s^I s^J = \eta(s^I \xi_I, s^J \xi_J) = \eta(s, s') \end{aligned} \quad (2.69)$$

Entonces, si $e(s) = \partial_\alpha$ ($\rightarrow s = e^{-1}(\partial_\alpha)$) y $e(s') = \partial_\beta$ ($\rightarrow s' = e^{-1}(\partial_\beta)$) tenemos:

$$g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = \eta(e^{-1}\partial_\alpha, e^{-1}\partial_\beta) = e_\alpha^I e_\beta^J \eta(\xi_I, \xi_J) = e_\alpha^I e_\beta^J \eta_{IJ} \quad (2.70)$$

Por lo tanto, la relación entre las tétradas y las co-tétradas con la métrica:

$$\eta_{IJ} = g_{\alpha\beta} e_I^\alpha e_J^\beta \quad g_{\alpha\beta} = \eta_{IJ} e_\alpha^I e_\beta^J \quad (2.71)$$

De las cuales se puede deducir:

$$\delta_J^I = e_\alpha^I e_J^\alpha \quad \delta_\alpha^\beta = e_\alpha^I e_I^\beta \quad (2.72)$$

Conexión de Lorentz

La otra variable dinámica en la formulación tetrádica de Palatini es una conexión en el fibrado trivial $M \times \mathbb{R}^4$. Decimos que una conexión en este fibrado es una conexión de Lorentz si es compatible con la métrica de Minkowski:

$$v\eta(s, s') = \eta(D_v s, s') + \eta(s, D_v s') \quad (2.73)$$

Un caso particular es la conexión plana estándar, que denotamos por D^0 :

$$D_v^0 s = v(s^I) \xi_I \quad (2.74)$$

Toda conexión D puede ser escrita como $D = D^0 + A$, donde A , el potencial vector es una 1-forma que toma valores en $End(\mathbb{R}^4)$ (§ B.1):

$$D_v s = (v(s^J) + A_{\mu I}^J v^\mu s^I) \xi_J \quad (2.75)$$

Las componentes de la curvatura de D están dadas por:

$$F_{\alpha\beta}^{IJ} = \partial_\alpha A_\beta^{IJ} - \partial_\beta A_\alpha^{IJ} + A_{\alpha K}^I A_\beta^{KI} - A_{\beta K}^I A_\alpha^{KJ} \quad (2.76)$$

Observación: Si D es una conexión de Lorentz, entonces

$$v\eta(s, s') = v(s^I s'^J \eta_{IJ}) = v(s^I) s'^J \eta_{IJ} + s^I v(s'^J) \eta_{IJ} \quad (2.77)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \eta(D_v s, s') &= \eta(v(s^I) \xi_I + A_{\mu J}^I v^\mu s'^J \xi_I, s'^K \xi_K) \\ &= v(s^I) s'^K \eta_{IK} + v^\mu s'^J s'^K A_{\mu J}^I \eta_{IK} \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \eta(s, D_v s') &= \eta(s^I \xi_I, v(s'^K) \xi_K + A_{\mu J}^K v^\mu s'^J \xi_K) \\ &= s^I v(s'^K) \eta_{IK} + v^\mu s^I s'^J A_{\mu J}^K \eta_{IK} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Sumando ambos términos y renombrando índices mudos:

$$\eta(D_v s, s') + \eta(s, D_v s') = (v(s^I) s'^J + s^I v(s'^J)) \eta_{IJ} + v^\mu s_J s'_I (A_\mu^{IJ} + A_\mu^{JI}) \quad (2.80)$$

Vemos entonces que D es una conexión de Lorentz si $A_\mu^{IJ} = -A_\mu^{JI}$. Esto es equivalente a que A_μ viva en el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3, 1)$ [5]. De la expresión para la curvatura también se puede observar que se verifica: $F_{\alpha\beta}^{IJ} = -F_{\beta\alpha}^{IJ}$.

Utilizando la tétrada, podemos obtener, a partir de la conexión de Lorentz, una conexión en el fibrado tangente, definida por:

$$\tilde{\nabla}_\alpha \partial_\beta = e_\beta^I D_\alpha(\xi_I) \quad (2.81)$$

Usando la nomenclatura de [5], llamamos a $\tilde{\nabla}$ *conexión imitación de Levi-Civita*. Definimos ahora los *símbolos imitación de Christoffel*:

$$\tilde{\nabla}_\alpha \partial_\beta = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \quad (2.82)$$

Se puede hallar una expresión para los mismos en función del potencial vector y las tétradas:

$$\tilde{\nabla}_\alpha \partial_\beta = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma = e_\beta^I D_\alpha(\xi_I) = e_\beta^I A_{\alpha I}^J \xi_J = e_\beta^I A_{\alpha I}^J e_J^\gamma \partial_\gamma \quad (2.83)$$

Entonces, tenemos:

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = A_{\alpha I}^J e_\beta^I e_J^\gamma \quad (2.84)$$

Definimos el *tensor imitación de Riemann* como la curvatura de la conexión imitación de Levi-Civita [5].

$$\tilde{R}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = F_{\alpha\beta}^{IJ} e_I^\delta e_J^\gamma \quad (2.85)$$

Definimos también el tensor imitación de Ricci:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{\alpha\gamma\beta}^\gamma \quad (2.86)$$

Y el escalar imitación de Ricci:

$$\tilde{R} = \tilde{R}_\alpha^\alpha \quad (2.87)$$

Acción

La acción de Palatini está dada por:

$$S(A, e) = \int_M \tilde{R} \text{ vol.} \quad (2.88)$$

donde el escalar imitación de Ricci corresponde a la conexión de Levi-Civita imitación, mientras que el escalar de Ricci que aparece en la acción de Einstein-Hilbert es el asociado a la conexión de Levi-Civita del fibrado tangente.

Utilizando la definición (2.85) y las igualdades (2.71) y (2.72):

$$\begin{aligned} \tilde{R}^\gamma_{\alpha\beta}{}^\delta &= F^{IJ} e_I^\delta e_J^\gamma \rightarrow \tilde{R}^\gamma_{\alpha\beta\delta} = \tilde{R}^\gamma_{\alpha\beta}{}^{\delta'} g_{\delta'\delta} = F^{IJ} e_I^{\delta'} e_J^\gamma \eta_{KL} e_{\delta'}^K e_\delta^L \\ &= F^{IJ} e_J^\gamma e_\delta^L \eta_{IL} \end{aligned} \quad (2.89)$$

Entonces, el tensor imitación de Ricci:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \tilde{R}^\gamma_{\alpha\gamma\beta} = F^{IJ} e_J^\gamma e_\beta^L \eta_{IL} \quad (2.90)$$

Luego, usando (2.71):

$$\tilde{R} = \tilde{R}_\alpha^\alpha = \tilde{R}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = F^{IJ} e_J^\gamma e_\beta^L \eta_{IL} e_M^\alpha e_N^\beta \eta^{MN} \quad (2.91)$$

Utilizando (2.72) obtenemos:

$$\tilde{R} = F^{IJ} e_I^\alpha e_J^\beta \quad (2.92)$$

La acción de Palatini entonces se puede expresar:

$$S(A, e) = \int_M e_I^\alpha e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} \text{ vol.} \quad (2.93)$$

Variando con respecto a la tétrada, tenemos en primer lugar, la variación del elemento de volumen [5, 11]:

$$\delta \text{ vol} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\delta g^{\alpha\beta}) \text{ vol.} \quad (2.94)$$

donde ahora

$$\delta g^{\alpha\beta} = \delta(\eta^{IJ} e_I^\alpha e_J^\beta) = \eta^{IJ} ((\delta e_I^\alpha) e_J^\beta + e_I^\alpha (\delta e_J^\beta)) = 2\eta^{IJ} e_J^\beta \delta e_I^\alpha \quad (2.95)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \delta \text{ vol} &= -\eta^{IJ} g_{\alpha\beta} e_J^\beta (\delta e_I^\alpha) \text{ vol} = -\eta^{IJ} e_\alpha^K e_\beta^L \eta_{KL} e_J^\beta (\delta e_I^\alpha) \text{ vol} \\ &= -\eta^{IJ} e_\alpha^K \delta_J^L \eta_{KL} (\delta e_I^\alpha) \text{ vol} = -e_\alpha^I (\delta e_I^\alpha) \text{ vol} \end{aligned} \quad (2.96)$$

La variación de la acción con respecto a la tétrada:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_M \left((\delta e_I^\alpha) e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} + e_I^\alpha (\delta e_J^\beta) F_{\alpha\beta}^{IJ} - e_\gamma^K (\delta e_k^\gamma) e_I^\alpha e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} \right) \text{ vol.} \\ &= 2 \int_M \left(e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} - \frac{1}{2} e_\alpha^I e_L^\gamma e_\delta^L F_{\gamma\delta}^{KL} \right) (\delta e_I^\alpha) \text{ vol.} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Utilizando (2.90) y (2.92):

$$\delta S = 2 \int_M \left(\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\alpha\beta} \right) \eta^{IJ} e_J^\beta (\delta e_I^\alpha) \text{vol}. \quad (2.98)$$

Entonces, $\delta S = 0$ cuando se cumple

$$\left(\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\alpha\beta} \right) = 0 \quad (2.99)$$

Cuando $\tilde{\nabla} = \nabla$, esta es la ecuación de Einstein. Luego, cuando variamos con respecto a la conexión, tenemos

$$\delta S = \int_M (\delta \tilde{R}) \text{vol} = \int_M g^{\alpha\beta} (\delta \tilde{R}_{\alpha\beta}) \text{vol} \quad (2.100)$$

La variación del tensor de Ricci imitación [5]:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = 2 \tilde{\nabla}_{[\alpha} \delta \tilde{\Gamma}_{\gamma]\beta}^\gamma \quad (2.101)$$

Si escribimos

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + C_{\alpha\beta}^\gamma \quad (2.102)$$

Tenemos

$$\tilde{\nabla}_\alpha \partial_\beta = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma + C_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \quad (2.103)$$

Además, al ser $\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = 0$, la variación:

$$\delta \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \delta C_{\alpha\beta}^\gamma \quad (2.104)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \delta \tilde{R}_{\alpha\beta} &= 2 \tilde{\nabla}_{[\alpha} \delta C_{\gamma]\beta}^\gamma = \left[\tilde{\nabla}_\alpha \delta C_{\gamma\beta}^\gamma - \tilde{\nabla}_\gamma \delta C_{\alpha\beta}^\gamma \right] = \left[\nabla_\alpha \delta C_{\gamma\beta}^\gamma - \nabla_\gamma \delta C_{\alpha\beta}^\gamma \right] \\ &+ C_{\alpha\lambda}^\gamma \delta C_{\gamma\beta}^\lambda - C_{\alpha\gamma}^\lambda \delta C_{\lambda\beta}^\gamma - C_{\alpha\beta}^\lambda \delta C_{\gamma\lambda}^\gamma - C_{\gamma\lambda}^\gamma \delta C_{\alpha\beta}^\lambda + C_{\gamma\alpha}^\lambda \delta C_{\lambda\beta}^\gamma + C_{\gamma\beta}^\lambda \delta C_{\alpha\lambda}^\gamma \end{aligned} \quad (2.105)$$

Por lo tanto, la variación del tensor imitación de Ricci:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{R} &= g^{\alpha\beta} \delta \tilde{R}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \left(-C_{\gamma\eta}^\gamma - C_{\alpha\beta}^\lambda \delta C_{\gamma\lambda}^\gamma - C_{\gamma\lambda}^\gamma \delta C_{\alpha\beta}^\lambda + C_{\gamma\alpha}^\lambda \delta C_{\lambda\beta}^\gamma + C_{\gamma\beta}^\lambda \delta C_{\alpha\lambda}^\gamma \right) \\ &= \left(-C_{\gamma\eta}^\gamma \delta C_\alpha^{\eta\alpha} + C_{\eta\gamma}^\alpha \delta C_\alpha^{\eta\gamma} - C_\alpha^{\eta\alpha} \delta C_{\gamma\eta}^\gamma + C_{\gamma\eta}^\alpha \delta C_{\alpha\eta}^\gamma \right) \\ &= 2 C_{\eta\gamma}^\alpha \delta C_\alpha^{\eta\gamma} - 2 C_{\gamma\eta}^\gamma \delta C_\alpha^{\eta\alpha} \end{aligned} \quad (2.106)$$

Para que la variación sea nula, debe ser

$$C_{\eta\gamma}^\alpha = 0 \quad (2.107)$$

Lo que es equivalente a decir que $\tilde{\nabla} = \nabla$, la conexión debe ser la conexión de Levi-Civita, y por lo tanto (2.99) es la ecuación de Einstein en el vacío. La formulación tetradica es por lo tanto completamente equivalente a la formulación de Einstein-Hilbert.

2.3 Formulación Hamiltoniana

2.3.1 Formulación ADM

Mientras que la formulación Lagrangeana es manifiestamente covariante, en la formulación Hamiltoniana es necesario tener una coordenada temporal y separar el espacio-tiempo en espacio y tiempo. El primer paso entonces consiste en especificar la coordenada temporal. Consideraremos el caso de una variedad Lorentziana M difeomorfa a $\mathbb{R} \times S$, donde S representa el espacio y $t \in \mathbb{R}$ representa el tiempo. Con esto, estamos eligiendo una forma particular de dividir el espacio-tiempo en “instantes de tiempo”. Esta elección es arbitraria ya que el espacio-tiempo no viene pre-equipado con una coordenada tiempo y una familia de superficies espaciales en las cuales el mismo está foliado; hay muchas maneras de elegir un difeomorfismo

$$\phi : M \rightarrow \mathbb{R} \times S \quad (2.108)$$

cada una de las cuales define una coordenada tiempo τ distinta. Esta coordenada está dada por el pull-back de la coordenada tiempo en $\mathbb{R} \times S$:

$$\tau = \phi_* t \quad (2.109)$$

Decimos que una subvariedad $\Sigma \in M$ es un instante de M si corresponde a una superficie de τ constante para la coordenada temporal elegida. En esta formulación, las variables dinámicas son las componentes de la métrica restringida a las superficies espaciales Σ (la cual denotaremos por q) y sus momentos conjugados. Si n es un campo vectorial unitario tipo tiempo normal a Σ , las componentes de la métrica espacial están dadas por:

$$q_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta \quad (2.110)$$

Observación 1: El proyector sobre la superficie Σ tiene componentes q_α^β . Si se lo aplicamos a un vector $v \in Vect(M)$, sus nuevas componentes serán

$$q_\alpha^\beta v_\beta \quad (2.111)$$

Si tomamos el producto escalar de este vector con n :

$$n^\alpha q_\alpha^\beta v_\beta = n^\alpha (\delta_\alpha^\beta + n_\alpha n^\beta) v_\beta = (n^\beta - n^\beta) v_\beta = 0 \quad (2.112)$$

Observación 2: Dos elecciones de n son posibles ya que se puede invertir su signo. Estas dos signos corresponden a las direcciones “futuro” y “pasado”, pudiéndose asignar a cada dirección cualquiera de los dos signos de manera arbitraria. Elegimos entonces un sentido, y decimos que nuestro campo vectorial n apunta hacia el futuro.

Curvatura extrínseca

La curvatura extrínseca K dice cómo se curva la superficie Σ con respecto a M ; más adelante se verá que la curvatura extrínseca está relacionada con la derivada temporal de la métrica espacial, por lo que el par (q, K) sirve como condición

inicial para la métrica. Sea Σ una subvariedad tipo espacio representando un instante de tiempo. La métrica restringida a esta subvariedad es Riemanniana:

$$q(v, v) > 0 \quad (2.113)$$

para todo vector $v \in T_p M$ no nulo. Además, tenemos:

$$g(n, n) = -1 \quad g(n, v) = 0 \quad \forall v \in T_p M \quad (2.114)$$

A un vector $v \in T_p M$ lo podemos descomponer en sus componentes normal y tangencial a Σ :

$$v = -g(v, n)n + (v + g(v, n)n) \quad (2.115)$$

En particular, dados dos campos vectoriales u, v en Σ , podemos descomponer $\nabla_u v$:

$$\nabla_u v = -g(\nabla_u v, n)n + (\nabla_u v + g(\nabla_u v, n)n) \quad (2.116)$$

Y definimos:

$$-g(\nabla_u v, n)n = K(u, v)n \quad (2.117)$$

donde K se denomina *curvatura extrínseca*. Esta mide la componente normal de un vector tangente a Σ al transportarlo utilizando la conexión de Levi-Civita de M , en la dirección de otro vector tangente u . En otras palabras, mide cuánto se curva Σ con respecto a M . Se puede comprobar que K es un tensor (depende $C^\infty(\Sigma)$ -linealmente en sus dos argumentos):

$$\begin{aligned} K(fu, v) &= -g(\nabla_{fu} v, n) = -g(f\nabla_u v, n) \\ &= -fg(\nabla_u v, n) = fK(u, v) \quad \forall f \in C^\infty(\Sigma) \end{aligned} \quad (2.118)$$

Por otro lado, para toda función $f \in C^\infty(\Sigma)$:

$$\begin{aligned} K(u, fv) &= -g(\nabla_u fv, n) = -g(u(f)v + f\nabla_u v, n) \\ &= -fg(\nabla_u v, n) = -fK(u, v) \end{aligned} \quad (2.119)$$

La curvatura extrínseca es además simétrica. Usando la linealidad, podemos ver que para que $K(u, v) = u^i v^j K(\partial_i, \partial_j)$ sea igual a $K(v, u)$, basta probar $K(\partial_i, \partial_j) = K(\partial_j, \partial_i)$, lo cual puede probarse utilizando que la conexión ∇ es libre de torsión:

$$\begin{aligned} K(\partial_i, \partial_j) - K(\partial_j, \partial_i) &= -g(\nabla_i \partial_j, n) + g(\nabla_j \partial_i, n) \\ &= -g(\nabla_i \partial_j - \nabla_j \partial_i, n) \\ &= -g([\partial_i, \partial_j], n) = 0 \end{aligned} \quad (2.120)$$

Luego, definimos:

$$D_u v = \nabla_u v + g(\nabla_u v, n)n \quad (2.121)$$

Se puede verificar que D es la conexión de Levi-Civita en Σ asociada a la métrica q .

Primero, para $u, v \in Vect(\Sigma)$ y $f \in C^\infty(\Sigma)$, tenemos:

$$\begin{aligned}
D_u(fv) &= \nabla_u(fv) + g(n, \nabla_u(fv))n \\
&= u(f)v + f\nabla_u v + g(n, u(f)v + f\nabla_u v) \\
&= u(f)v + f\nabla_u v + u(f)g(n, v) + fg(n, \nabla_u v) \\
&= u(f)v + f(\nabla_u v + g(n, \nabla_u v)) = u(f)v + fD_u v
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Luego, para $u, v, w \in Vect(M)$, usando que ∇ es compatible con la métrica:

$$\begin{aligned}
ug(v, w) &= g(\nabla_u v, w) + g(v, \nabla_u w) \\
&= g(K(u, v)n + D_u v, w) + g(v, K(u, w)n, D_u w) \\
&= g(D_u v, w) + g(v, D_u w)
\end{aligned} \tag{2.123}$$

Además:

$$\begin{aligned}
D_u v - D_v u &= \nabla_u v - K(u, v)n - \nabla_v u + K(v, u)n \\
&= \nabla_u v - \nabla_v u = [u, v]
\end{aligned} \tag{2.124}$$

También se puede verificar que D es lineal. Por lo tanto D es una conexión, es compatible con la métrica y es libre de torsión.

Ecuaciones de Gauss-Codazzi

En las ecuaciones de Einstein

$$\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \right) = 0 \tag{2.125}$$

hay en realidad sólo 10 ecuaciones independientes; éstas nos dicen cómo evoluciona la métrica en el tiempo. En términos de las variables ADM, cómo varía la métrica espacial (y la curvatura extrínseca) al moverse entre las distintas superficies Σ de la foliación, las cuales representan cada una un instante distinto de tiempo. La manera de separar el espacio-tiempo no es única, por lo tanto no sabremos cómo evolucionarán las variables hasta que hayamos elegido una foliación. Tal elección se expresa en las funciones *lapso* y *shift* que se definirán a continuación. Al elegir un difeomorfismo

$$\phi : M \rightarrow \mathbb{R} \times S \tag{2.126}$$

esto nos da una coordenada tiempo $\tau = \phi^* t$ en M y por lo tanto una forma particular de foliar el espacio con superficies espaciales. Además, si tomamos el pushforward por ϕ^{-1} del vector ∂_t en $\mathbb{R} \times S$, tendremos un vector ∂_τ en M , el cual apunta hacia el “futuro”, pero no es necesariamente ortogonal a las superficies $\{\tau = s\}$. Podemos descomponer este vector en sus partes normal y tangencial a Σ :

$$\partial_\tau = -g(\partial_\tau, n)n + (\partial_\tau + g(\partial_\tau, n)n) \tag{2.127}$$

Definimos:

$$N = -g(\partial_\tau, n) \tag{2.128}$$

$$\vec{N} = \partial_\tau + g(\partial_\tau, n)n \tag{2.129}$$

A N se le denomina *lapso* y a \vec{N} *shift*. Veremos ahora que cuatro de las diez ecuaciones de Einstein son en realidad vínculos, siendo las restantes seis las ecuaciones de movimiento que describen cómo cambia la métrica espacial en el tiempo. Elegimos coordenadas locales x^0, x^1, x^2, x^3 en un entorno de un punto $p \in \Sigma$ tal que $x^0 = \tau$, $\partial_0 = \partial_\tau$ y los vectores $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ son tangentes a Σ en p . Las componentes del tensor de Riemann:

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \nabla_i \nabla_j \partial_k - \nabla_j \nabla_i \partial_k \quad (2.130)$$

Esto es igual a:

$$R_{ijk}^\alpha \partial_\alpha \quad (2.131)$$

donde los índices en letras griegas van desde 0 hasta 3, mientras que las letras romanas son índices espaciales y van desde 1 hasta 3.

Para calcular el primer término, se usará que $\nabla_i \partial_j = K(i, j)n + {}^3\Gamma_{ij}^m \partial_m$ para campos vectoriales u, v en Σ , donde ${}^3\Gamma_{ij}^m$ son las componentes de la conexión asociada a la derivada covariante espacial. También, a partir de

$$K_{ij} = g((\nabla_i n), \partial_j) = q_{mn} (\nabla_i n)^m \underbrace{(\partial_j)^n}_{\delta_j^n} = q_{mj} (\nabla_i n)^m \quad (2.132)$$

Multiplicando por q^{nj} :

$$q^{nj} K_{ij} = (\nabla_i n)^n \rightarrow (\nabla_i n)^j = K_i^j \rightarrow (\nabla_i n) = K_i^j \partial_j \quad (2.133)$$

Entonces, utilizando estos últimos resultados, el primer sumando en (2.130) toma la forma:

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j \partial_k &= \nabla_i (K_{jk} n + {}^3\Gamma_{jk}^m \partial_m) \\ &= \partial_i (K_{jk}) n + K_{jk} \nabla_i n + \partial_i ({}^3\Gamma_{jk}^m) \partial_m + {}^3\Gamma_{jk}^m \nabla_i \partial_m \\ &= \partial_i (K_{jk}) n + K_{jk} K_i^m \partial_m + \partial_i ({}^3\Gamma_{jk}^m) \partial_m + {}^3\Gamma_{jk}^m (K_{im} n + {}^3\Gamma_{im}^l \partial_l) \\ &= (\partial_i (K_{jk}) + {}^3\Gamma_{jk}^m K_{im}) n + K_{jk} K_i^m \partial_m + (\partial_i ({}^3\Gamma_{jk}^m) \\ &\quad + {}^3\Gamma_{jk}^l {}^3\Gamma_{il}^m) \partial_m \end{aligned} \quad (2.134)$$

Para obtener el segundo sumando en (2.130) intercambiamos $i \leftrightarrow j$, entonces:

$$\begin{aligned} R_{ijk}^\alpha \partial_\alpha &= (\partial_i K_{jk} - \partial_j K_{ik} + {}^3\Gamma_{jk}^m K_{im} - {}^3\Gamma_{ik}^m K_{jm}) n \\ &\quad + (K_{jk} K_i^m - K_{ik} K_j^m) \partial_m + (\partial_i {}^3\Gamma_{jk}^m - \partial_j {}^3\Gamma_{ik}^m + {}^3\Gamma_{jk}^l {}^3\Gamma_{il}^m - {}^3\Gamma_{ik}^l {}^3\Gamma_{jl}^m) \partial_m \end{aligned} \quad (2.135)$$

Utilizando las definiciones de la derivada covariante y el tensor de Riemann, llegamos a las ecuaciones de Gauss-Codazzi:

$$R_{ijk}^\alpha \partial_\alpha = (D_i K_{jk} - D_j K_{ik}) n + ({}^3R_{ijk}^m + K_{jk} K_i^m - K_{ik} K_j^m) \partial_m \quad (2.136)$$

Entonces:

$$R_{ijk}^\alpha = (D_i K_{jk} - D_j K_{ik}) (n)^\alpha + ({}^3R_{ijk}^m + K_{jk} K_i^m - K_{ik} K_j^m) (\partial_m)^\alpha \quad (2.137)$$

Aplicando el proyector en Σ a todos los índices, y notando que el único efecto en el lado derecho de (2.137) es eliminar el primer sumando, obtenemos:

$${}^3R_{abc}^d = q_a^f q_b^g q_c^k q_j^d R_{fjk}^j - K_{ac} K_b^d + K_{bc} K_a^d \quad (2.138)$$

Además, tenemos:

$$\begin{aligned} R_{abcd} q^a c q^b d &= R_{abcd} (g^{ac} + n^a n^c) (g^{bd} + n^b n^c) \\ &= R + 2R_{ac} n^a n^c = 2G_{ac} n^a n^c \end{aligned} \quad (2.139)$$

Entonces, utilizando (2.138):

$$G_{ab} n^a n^b = \frac{1}{2} \{ {}^3R + (K_a^a)^2 - K_{ab} K^{ab} \} \quad (2.140)$$

De manera similar, se obtiene:

$$R_{cd} n^d q_b^c = D_a K_b^a - D_b K_a^a \quad (2.141)$$

De donde

$$G_{bc} q_a^b n^c = q_a^b R_{bc} n^c = D_b K_a^b - D_a K_b^b \quad (2.142)$$

Se puede verificar que tanto (2.140) como (2.142) no tienen derivadas segundas temporales y son por lo tanto vínculos de condiciones iniciales.

Hamiltoniano

En la formulación Lagrangeana, la variable dinámica era la métrica inversa, cuyas componentes son:

$$g^{ab} = q^{ab} - n^a n^b \quad (2.143)$$

Utilizando (2.128) y (2.129) tenemos que:

$$n^a = \frac{1}{N} ((\partial_\tau)^a - N^a) \quad (2.144)$$

Entonces:

$$g^{ab} = q^{ab} - \frac{1}{N^2} ((\partial_\tau)^a - N^a) ((\partial_\tau)^b - N^b) \quad (2.145)$$

La información contenida en g^{ab} es equivalente a la contenida en (q_{ab}, N_a, N) . Para pasar a la formulación Hamiltoniana es conveniente tomar como variables a la métrica espacial inversa, al lapso y al shift.

El escalar de Ricci puede ser escrito como:

$$R = 2 (G_{ab} n^a n^b - R_{ab} n^a n^b) \quad (2.146)$$

Utilizando (2.140) tenemos el primero de los términos. Por otro lado, el segundo sumando resulta ser:

$$\begin{aligned} R_{ab} n^a n^b &= -n^a (\nabla_a \nabla_c - \nabla_c \nabla_a) n^c \\ &= (K_a^a)^2 - K_{ab} K^{ab} - \nabla_a (n^a \nabla_c n^c) + \nabla_c (n^a \nabla_a n^c) \end{aligned} \quad (2.147)$$

Donde se usó

$$K_{ab} = q_a^c \nabla_c n_b \quad (2.148)$$

Lo cual puede obtenerse a partir de (2.132).

Entonces, el escalar de Ricci en términos de las nuevas variables:

$$R = [{}^3R + K_{ab}K^{ab} - (K_a^a)^2] \quad (2.149)$$

Por otro lado:

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{q} \quad (2.150)$$

El lagrangeano entonces toma la forma:

$$\mathfrak{L} = \sqrt{h}N [{}^3R + K_{ab}K^{ab} - (K_a^a)^2] \quad (2.151)$$

Para obtener el hamiltoniano es necesario tener los momentos conjugados a las variables dinámicas definidos por:

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_{ab}} \quad (2.152)$$

La dependencia en \dot{q}_{ab} está en la curvatura extrínseca [34]:

$$\begin{aligned} K_{ab} &= q_a^c \nabla_c n_b = \frac{1}{2} \mathfrak{L}_n q_{ab} = \frac{1}{2} \mathfrak{L}_{\frac{1}{N}(\partial_\tau - \vec{N})} q_{ab} \\ &= \frac{1}{2N} (\mathfrak{L}_{\partial_\tau} q_{ab} - \mathfrak{L}_{\vec{N}} q_{ab}) = \frac{1}{2N} (\dot{q}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a) \end{aligned} \quad (2.153)$$

Volviendo a (2.151), obtenemos el momento conjugado de la métrica espacial:

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_{ab}} = \sqrt{q} (K^{ab} - K q^{ab}) \quad (2.154)$$

Mientras que los momentos conjugados del lapso y del shift se anulan:

$$\pi^N = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{N}} = 0 \quad (2.155)$$

$$\pi^{N^a} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{N}^a} = 0 \quad (2.156)$$

Reconocemos a (2.155) y a (2.156) como vínculos primarios.

Entonces, el Hamiltoniano [5, 34]:

$$\begin{aligned} H &= \pi^{ab} \dot{q}_{ab} - \mathfrak{L} \\ &= \sqrt{q} \left\{ N \left[-{}^3R + q^{-1} \pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} q^{-1} \pi^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2N_b [D_a (q^{-1/2} \pi^{ab})] + 2D_a (q^{-1/2} N_b \pi^{ab}) \right\} \end{aligned} \quad (2.157)$$

El último sumando en (2.157) es una divergencia y puede ser descartado. Hallamos los vínculos secundarios (a los cuales denotaremos por C y C_a) calculando el corchete de Poisson de los vínculos primarios con el Hamiltoniano:

$$C = \{\pi^N, H\} = \sqrt{q} \left[-{}^3R + q^{-1} \pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} q^{-1} \pi^2 \right] \quad (2.158)$$

$$C_a = \{\pi^{N^a}, H\} = -2[D^b (q^{-1/2} \pi_{ab})] \quad (2.159)$$

Se puede verificar que no hay vínculos terciarios. Utilizando (2.154) se puede ver que los vínculos secundarios son iguales a (2.140) y (2.142) y son por lo tanto los vínculos de condiciones iniciales. Las ecuaciones dinámicas están dadas por:

$$\dot{q}_{ab} = \frac{\partial H}{\partial \pi^{ab}} = 2q^{-1/2}N \left(\pi_{ab} - \frac{1}{2}q_{ab}\pi_c^c \right) + D_a N_b + D_b N_a \quad (2.160)$$

$$\begin{aligned} \pi^{\dot{a}b} = -\frac{\partial H}{\partial q_{ab}} = & -Nq^{1/2} \left({}^3R^{ab} - \frac{1}{2}{}^3Rq^{ab} \right) + \frac{1}{2}Nq^{-1/2}q^{ab} \left(\pi_{cd}\pi^{cd} - \frac{1}{2}\pi^2 \right) \\ & -2Nq^{-1/2} \left(\pi^{ac}\pi_{cb} - \frac{1}{2}\pi\pi^{ab} \right) + q^{1/2} (D^a D^b N - q^{ab}D^c D_c N) \\ & + q^{1/2} D_c \left(q^{-1/2}N^c \pi^{ab} \right) - \pi^{ca} D_c N^b + \pi^{cb} D_c N^a \end{aligned} \quad (2.161)$$

Estas ecuaciones junto con los vínculos son completamente equivalentes a las ecuaciones de Einstein.

Acción de los vínculos

La acción de los vínculos en las variables dinámicas puede ser hallada calculando los correspondientes corchetes de Poisson. Para ello introducimos los vínculos suavizados:

$$C(N) = \int_{\Sigma} N C q^{1/2} d^3x \quad (2.162)$$

$$C(\vec{N}) = \int_{\Sigma} N^a C_a q^{1/2} d^3x \quad (2.163)$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \{q_{cd}(y), C(\vec{N})\} &= \left\{ q_{cd}(y), \int_{\Sigma} N^a \left(-2[D^b(q^{-1/2}\pi_{ab})] \right) q^{1/2} d^3x \right\} \\ &= \left\{ q_{cd}(y), \int_{\Sigma} N^a (-2D^b \pi_{ab}) d^3x \right\} \\ &= \left\{ q_{cd}(y), \int_{\Sigma} D_b N_a (2\pi^{ab}) d^3x \right\} \\ &= 2 \int_{\Sigma} D_b N_a(x) (\delta_c^a \delta_d^b + \delta_d^a \delta_c^b) \delta^3(x-y) d^3x \\ &= 2 (D_c N_d(y) + D_d N_c(y)) \\ &= 2 \mathfrak{L}_{\vec{N}} q_{cd}(y) \end{aligned} \quad (2.164)$$

Siendo $\mathfrak{L}_{\vec{N}}q_{cd}$ la derivada de Lie de q_{cd} en la dirección de \vec{N} . Luego, la acción sobre los momentos conjugados:

$$\begin{aligned}
\left\{ \pi^{cd}(y), C(\vec{N}) \right\} &= \left\{ \pi^{cd}(y), \int_{\Sigma} N^a \left(-2[D^b(q^{-1/2}\pi_{ab})] \right) q^{1/2} d^3x \right\} \\
&= \left\{ \pi^{cd}(y), \int_{\Sigma} N^a (-2D^b\pi_{ab}) d^3x \right\} = \left\{ \pi^{cd}(y), \int_{\Sigma} N_a (-2D_b\pi^{ab}) d^3x \right\} \\
&= \left\{ \pi^{cd}(y), \int_{\Sigma} q_{aa'} N^{a'} (-2D_b\pi^{ab}) d^3x \right\} = \left\{ \pi^{cd}(y), \int_{\Sigma} 2q_{aa'} (D_b N^{a'}) \pi^{ab} d^3x \right\} \\
&= \int_{\Sigma} -2 (\delta_a^c \delta_{a'}^d + \delta_a^d \delta_{a'}^c) \delta^3(x-y) (D_b N^{a'}) \pi^{ab} d^3x \\
&= 2 \left(-(D_b N^d) \pi^{cb} + -(D_b N^c) \pi^{db} \right) = 2\mathfrak{L}_{N^a} \pi^{cd}(y)
\end{aligned} \tag{2.165}$$

Reescalando el vínculo por un factor de 1/2, vemos que $C(\vec{N})$ genera un difeomorfismo espacial en las variables dinámicas, por lo que se le denomina vínculo de difeomorfismos. De manera similar se pueden probar que cuando se cumplen las ecuaciones de movimiento, se tienen las siguientes igualdades:

$$\{q_{cd}(y), C(N)\} = \mathfrak{L}_{N\vec{n}}q_{cd}(y) \tag{2.166}$$

$$\{\pi^{cd}(y), C(N)\} = \mathfrak{L}_{N\vec{n}}\pi^{cd}(y) \tag{2.167}$$

Por lo que, en la superficie de vínculos, $C(N)$ genera un difeomorfismo en una dirección normal a Σ . La acción de este vínculo entonces es la de una evolución temporal que corresponde a mover Σ en la dirección normal. Recordando que el Hamiltoniano es el que genera la evolución temporal, si calculamos el corchete de Poisson de una función de las variables dinámicas con el mismo:

$$\{f, H\} = \left\{ f, C(N) + C(\vec{N}) \right\} = \mathfrak{L}_{N\vec{n}}f + \mathfrak{L}_{\vec{N}}f = \mathfrak{L}_{\vec{t}}f \tag{2.168}$$

Podemos observar que la evolución temporal completa consta de dos partes, una evolución temporal normal a Σ y otra “evolución temporal” tangencial que es en realidad un difeomorfismo espacial en Σ . Esta última se debe a que en la foliación elegida, el vector temporal no es puramente normal a las superficies Σ . Si elegimos una foliación tal que el vector shift es nulo, en ese caso $C(N)$ es igual al Hamiltoniano y genera la evolución temporal. A $C(N)$ se lo denomina entonces vínculo Hamiltoniano.

Álgebra de los vínculos

Calculando el corchete de Poisson entre los vínculos, se obtiene:

$$\left\{ C(\vec{N}), C(\vec{N}') \right\} = C([\vec{N}, \vec{N}']) \tag{2.169}$$

$$\left\{ C(\vec{N}), C(N) \right\} = C(\vec{N}(N)) \tag{2.170}$$

$$\left\{ C(N), C(N') \right\} = C((N\partial^i N' - N'\partial^i N)\partial_i) \tag{2.171}$$

Lo primero que notamos es que los vínculos son de primera clase: El corchete de Poisson entre los vínculos da como resultado otro vínculo. Luego, se puede

ver en (2.171) que el corchete de Poisson entre dos vínculos Hamiltonianos da como resultado un vínculo de difeomorfismos con un vector shift que depende de las variables dinámicas (pues $\partial^i = q^{ij}\partial_j$). El álgebra que forman no es un álgebra de Lie.

2.3.2 Formulación de Ashtekar-Barbero

Introducción

La formulación Hamiltoniana ADM de la relatividad general presenta serias dificultades a la hora de intentar cuantizar la teoría, las cuales hasta el día de hoy no han sido resueltas. Existe una formulación Hamiltoniana alternativa la cual consiste en elegir otras variables distintas a las variables ADM, llamadas variables de Ashtekar. Esta elección simplifica notablemente la estructura de la teoría, permitiendo a uno llegar más lejos en el proceso de cuantización. Para introducir estas variables usaremos conceptos introducidos en el apéndice B y en § 2.2.2.

Llamaremos M a la variedad de dimensión 4 equipada con una métrica Lorentziana g que representa el espacio-tiempo. Sobre esta variedad hay un G-fibrado, y un mapa inyectivo $e : M \times \mathbb{R}^4 \rightarrow T_p M$ que envía campos tensoriales en M a campos tensoriales en el espacio tangente $T_p M$ (al cual llamaremos espacio interno) para todo punto $p \in M$. Si $\{\xi_a\}$ es una base de secciones de M , al aplicarle el mapa e obtenemos una sección de $T_p M$, la cual podemos expresar como combinación lineal de una base de secciones de este espacio a la cual denotaremos por $\{\partial_\mu\}$:

$$e(\xi_a) = e_a^\mu \partial_\mu \quad (2.172)$$

Tanto a e como a sus componentes e_a^μ se les denomina tétradas. Al mapa inverso $e^{-1} : T_p M \rightarrow M \times \mathbb{R}^4$ o a sus componentes

$$e^{-1}(\partial_\mu) = e_\mu^a \xi_a \quad (2.173)$$

se les denomina equivalentemente co-tétradas. Las tétradas y co-tétradas satisfacen las siguientes relaciones con la métrica:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b \quad \eta_{ab} = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu \quad (2.174)$$

$$e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a \quad e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu \quad (2.175)$$

donde η_{ab} son las componentes de la métrica de Minkowski. Los índices latinos corresponden al espacio interno y las letras griegas son índices espacio-temporales.

Observación: Toda la información de la métrica está contenida en las tétradas, pero el recíproco no es cierto. En $g_{\mu\nu}$ hay 10 grados de libertad mientras que en e_μ^a hay 16. Estos 6 grados de libertad extra en las tétradas corresponden al número de grados de libertad del grupo $SO(3,1)$, esto es, al número de parámetros independientes de una transformación de Lorentz en el espacio interno. Se puede ver en (2.174) que una transformación de Lorentz en el espacio interno deja invariante la expresión. El grupo $SO(3,1)$ tiene una representación en el espacio interno dada simplemente por la representación fundamental. $SO(3,1)$ es entonces un grupo de gauge y una transformación de Lorentz es a

su vez una transformación de gauge.

En el apéndice B definimos el concepto de derivada covariante; ésta es un operador que permite derivar campos tensoriales en la dirección de algún vector del espacio tangente de una variedad. La derivada covariante puede ser especificada de forma equivalente por su correspondiente potencial vector, como se vio en el apéndice B. Luego, en § 2.1.2 introdujimos un tipo especial de conexión, la conexión de Levi-Civita, la cual actúa sobre los campos tensoriales en el espacio-tiempo. Un campo como e_a^μ tiene por un lado un índice espacio-temporal y un índice interno, por lo que si le aplicamos el operador ∇ definido en la sección 2.1.2, obtendremos:

$$\nabla_\mu e_a^\nu = \partial_\mu e_a^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu e_a^\rho \quad (2.176)$$

Definimos ahora una derivada covariante D que actúa también sobre el índice interno mediante una conexión espinorial ω . Si T es un tensor que toma valores en el grupo de Lorentz, entonces tenemos

$$\begin{aligned} D_\mu T_{a_1 \dots a_m}^{\nu_1 \dots \nu_n} &= \partial_\mu T_{a_1 \dots a_m}^{\nu_1 \dots \nu_n} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu_1} T_{a_1 \dots a_m}^{\rho \dots \nu_n} + \dots - \omega_{a_1\mu}^b T_{b \dots a_m}^{\nu_1 \dots \nu_n} - \dots \\ &= \nabla_\mu T_{a_1 \dots a_m}^{\nu_1 \dots \nu_n} - \omega_{a_1\mu}^b T_{b \dots a_m}^{\nu_1 \dots \nu_n} \end{aligned} \quad (2.177)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ son las componentes de la conexión de Levi-Civita y $\omega_{a\mu}^b$ las componentes de la conexión espinorial. Ambas conexiones actúan sobre los índices duales cambiando de signo el correspondiente sumando. Imponiendo la compatibilidad de la derivada covariante con la tétrada:

$$D_\mu e_\nu^a = 0 \quad (2.178)$$

obtenemos, desarrollando

$$\begin{aligned} D_\mu e_\nu^a &= \nabla_\mu e_\nu^a + \omega_{b\mu}^a e_\nu^b = 0 \\ \rightarrow e_{b'}^\nu \times (\nabla_\mu e_\nu^a) &= -\omega_{b\mu}^a e_\nu^b e_{b'}^\nu \\ \rightarrow \omega_{b\mu}^a &= -e_b^\nu \nabla_\mu e_\nu^a \end{aligned} \quad (2.179)$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\mu (\delta_b^a) = \nabla_\mu (e_\nu^a e_b^\nu) \\ \rightarrow e_b^\nu \nabla_\mu e_\nu^a &= -e_\nu^a \nabla_\mu e_b^\nu \end{aligned} \quad (2.180)$$

Entonces, obtenemos las componentes de la conexión espinorial en función de las tétradas y co-tétradas:

$$\omega_{b\mu}^a = e_\nu^a \nabla_\mu e_b^\nu \quad (2.181)$$

Las tétradas junto con la conexión de Ashtekar-Barbero la cual introduciremos más adelante son las variables fundamentales en esta formulación Hamiltoniana de la relatividad general.

Para construir la teoría canónica, separaremos el espacio-tiempo en espacio y tiempo de la misma manera que lo hicimos en 2.3.1. Suponemos que el espacio tiempo es una variedad globalmente hiperbólica. Podemos entonces encontrar un difeomorfismo

$$\phi : M \rightarrow \Sigma \times \mathbb{R} \quad (2.182)$$

Donde Σ es una variedad tipo espacio y \mathbb{R} representa el tiempo. Llamamos $q_{\mu\nu}$ a las componentes de la métrica inducida por $g_{\mu\nu}$ en Σ , dadas por:

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \quad (2.183)$$

Llamamos además $K_{\mu\nu}$ a las componentes de la curvatura extrínseca, dadas por:

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{\mu\nu} \quad (2.184)$$

Donde n es el vector unitario normal saliente a Σ .

Utilizando (2.174), escribimos:

$$q_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b + n_\mu n_\nu = -e_\mu^0 e_\nu^0 + \delta_{ij} e_\mu^i e_\nu^j + n_\mu n_\nu \quad (2.185)$$

donde los índices i y j van desde 1 hasta 3. La forma de la métrica en (2.185) sugiere una fijación de gauge simple para eliminar algunos grados de libertad. En el llamado gauge temporal, la componente e_μ^0 coincide con el vector normal, eliminando la componente del boost del grupo de Lorentz haciéndola coincidir con el vector normal. El grupo de simetrías de gauge queda reducido al grupo de las rotaciones espaciales. La métrica espacial adquiere la forma:

$$q_{\mu\nu} = \delta_{ij} e_\alpha^i e_\beta^j \quad (2.186)$$

Tomando el pull-back en Σ :

$$q_{\alpha\beta} = \delta_{ij} e_\alpha^i e_\beta^j \quad (2.187)$$

donde los índices α y β van desde 1 hasta 3 y los índices i, j están relacionados con la simetría $SO(3)$ (o equivalentemente, $SU(2)$). Considerando el elemento de línea

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{\alpha\beta} (N^\alpha dt + dx^\alpha)(N^\beta dt + dx^\beta) \quad (2.188)$$

es posible identificar las componentes de las tétradas con las variables ADM:

$$e_\mu^a = \begin{pmatrix} N & N^\alpha e_\alpha^i \\ 0 & e_\alpha^i \end{pmatrix} \quad e_b^\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & 0 \\ -\frac{N^\beta}{N} & e_\beta^j \end{pmatrix} \quad (2.189)$$

Nuevas variables, simetría de gauge

En (2.187) se puede observar que la métrica espacial es invariante bajo transformaciones de gauge en el espacio interno, esto es, rotaciones $SO(3)$. La tétrada proyectada en Σ entonces tiene tres grados de libertad más que la métrica espacial. En consecuencia, deben haber tres vínculos de primera clase más que en la formulación ADM; a estos vínculos relacionados con la simetría de las transformaciones de gauge del grupo $SO(3)$ se les denomina vínculo de Gauss. Para hallar este vínculo, primero definimos la siguiente 1-forma K_α^i en Σ :

$$K_\alpha^i = X_a^i X_\alpha^\mu \omega_\mu^{a0} \quad (2.190)$$

donde X_α^μ son las componentes del proyector de M a Σ . De manera similar, X_a^i son las componentes del mapa inverso al que va desde el espacio interno cuatridimensional al tridimensional. Utilizando (2.181):

$$\begin{aligned} K_\alpha^i &= X_a^i X_\alpha^\mu e^{\nu a} (\nabla_\mu e_\nu^0) = X_a^i X_\alpha^\mu e^{\nu a} (\nabla_\mu n_\nu) \\ &= e_\nu^i X_\alpha^\mu (\nabla_\mu n^\nu) = X_\alpha^\mu X_\nu^\beta e_\beta^i (\nabla_\mu n^\nu) \end{aligned} \quad (2.191)$$

Así como las tétradas proyectadas en Σ (también llamadas tríadas) están relacionadas con la métrica espacial por (2.174), la 1-forma K_α^i está relacionada con la curvatura extrínseca de la siguiente manera. Sea \mathcal{K} una 2-forma en Σ definida por:

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} = \delta_{ij} K_\alpha^i e_\beta^j \quad (2.192)$$

Esto es, la contracción de los índices internos de K y e utilizando la métrica euclídeana. La curvatura extrínseca se encuentra dentro de esta 2-forma, más específicamente, la curvatura extrínseca es la parte simétrica de \mathcal{K} . Para ver esto, primero calculamos la componente $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ utilizando (2.191):

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} = \delta_{ij} X_\alpha^\mu X_\nu^\gamma (\nabla_\mu n^\nu) e_\gamma^i e_\beta^j \quad (2.193)$$

Por otro lado, la curvatura extrínseca:

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \mathfrak{L}_n q_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \mathfrak{L}_n (\delta_{ij} e_\alpha^i e_\beta^j) = \frac{1}{2} \delta_{ij} (e_\beta^j \mathfrak{L}_n e_\alpha^i + e_\alpha^i \mathfrak{L}_n e_\beta^j) \\ &= \frac{1}{2} \delta_{ij} (e_\beta^j e_\nu^i (\nabla_\alpha n^\nu) + e_\nu^j e_\alpha^i (\nabla_\beta n^\nu)) \\ &= \frac{1}{2} \delta_{ij} (e_\beta^j X_\nu^\gamma e_\gamma^i X_\alpha^\mu \nabla_\mu n^\nu + e_\alpha^i X_\nu^\gamma e_\gamma^j X_\alpha^\mu \nabla_\mu n^\nu) \end{aligned} \quad (2.194)$$

Comparando este resultado con (2.193), vemos que

$$K_{\alpha\beta} = \mathcal{K}_{(\alpha\beta)} \quad (2.195)$$

Entonces, la curvatura extrínseca está contenida en la parte simétrica de la 2-forma \mathcal{K} . Las tétradas a su vez contienen la información de la métrica espacial, como puede observarse en (2.174). Más adelante se reemplazará el par de variables ADM (q_{ab}, K_{ab}) y se verá que la dinámica obtenida utilizando la 1-forma K_α^i y las tétradas es equivalente a la obtenida con las variables ADM. Vamos a exigir ahora que \mathcal{K}_{ab} sea igual a la curvatura extrínseca, la cual es simétrica. Entonces, la parte antisimétrica de \mathcal{K} debe satisfacer el siguiente vínculo:

$$\mathcal{K}_{[\alpha\beta]} \approx 0 \quad (2.196)$$

Dicho de otra manera, definimos la 1-forma K_α^i tal que satisface tanto (2.195) como el vínculo (2.196). En (2.196) se tienen tres vínculos ya que la matriz $\mathcal{K}_{[\alpha\beta]}$ es antisimétrica. Estos tres vínculos son los que absorben los tres grados de libertad extras introducidos al elegir las tétradas como variables.

Definimos ahora las tríadas densitizadas:

$$E_i^\alpha = e e_i^\alpha \quad (2.197)$$

Donde $e = \det[e_\alpha^i] = (\det[e_i^\alpha])^{-1}$. La relación entre las variables ADM y las variables (E_i^α, K_α^i) :

$$q_{\alpha\beta} = \delta_{ij} e_\alpha^i e_\beta^j = \delta_{ij} e^2 E_\alpha^i E_\beta^j = \delta_{ij} E E_\alpha^i E_\beta^j \quad (2.198)$$

Donde $E = \det[E_i^\alpha] = \det[ee_i^\alpha] = e^3 \det[e_i^\alpha] = e^3 e^{-1} = e^2$. Luego, utilizando

(2.195) y que $q = \det[E_i^\alpha]^3 \det[E_\alpha^i]^2 = \det[E_i^\alpha] = E$:

$$\begin{aligned} \pi^{\alpha\beta} &= \sqrt{q} (K^{\alpha\beta} - Kq^{\alpha\beta}) = \sqrt{q} \left(K^{i(\alpha} e^{\beta)i} - q^{\alpha\beta} K^{i\gamma} e_{i\gamma} \right) \\ &= \sqrt{E} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{(K^{i\alpha} E_i^\beta + K^{i\beta} E_i^\alpha)}{2} - \frac{1}{E} \delta^{ij} E_i^\alpha E_j^\beta \sqrt{E} K^{i\gamma} E_{i\gamma} \right) \\ &= \frac{(K^{i\alpha} E_i^\beta + K^{i\beta} E_i^\alpha)}{2} - \delta^{ij} E_i^\alpha E_j^\beta K^{i\gamma} E_{i\gamma} \end{aligned} \quad (2.199)$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2\delta_\delta^{(\alpha} E^{\beta)i} E_\gamma^j E_i^{[\gamma} K_j^{\delta]} &= 2 \frac{(\delta_\delta^\alpha E^{\beta i} + \delta_\delta^\beta E^{\alpha i})}{2} E_\gamma^j \frac{(E_i^\gamma K_j^\delta - E_i^\delta K_j^\gamma)}{2} \\ &= \frac{1}{2} (E^{\beta i} E_\gamma^j E_i^\gamma K_j^\alpha - E^{\beta i} E_\gamma^j E_i^\alpha K_j^\gamma \\ &\quad + E^{\alpha i} E_\gamma^j E_i^\gamma K_j^\beta - E^{\alpha i} E_\gamma^j E_i^\beta K_j^\gamma) \\ &= \frac{(K^{i\alpha} E_i^\beta + K^{i\beta} E_i^\alpha)}{2} - E_i^\alpha E^{\beta i} K^{j\gamma} E_{j\gamma} \end{aligned} \quad (2.200)$$

Comparando este resultado con (2.199) vemos que son iguales, entonces:

$$\pi^{\alpha\beta} = 2\delta_\delta^{(\alpha} E^{\beta)i} E_\gamma^j E_i^{[\gamma} K_j^{\delta]} \quad (2.201)$$

En términos de estas nuevas variables, el vínculo (2.196):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ij} &= ee_i^\alpha e_j^\beta \mathcal{K}_{[\alpha\beta]} = ee_i^\alpha e_j^\beta K_{[\alpha}^k e_{\beta]k} = ee_i^\alpha e_j^\beta \frac{1}{2} (K_\alpha^k e_{\beta k} - K_\beta^k e_{\alpha k}) \\ &= e \left(\frac{1}{e} E_i^\alpha \right) \left(\frac{1}{e} E_j^\beta \right) \frac{1}{2} (K_{\alpha k} (eE_\beta^k) - K_{\beta k} (eE_\alpha^k)) \\ &= \frac{1}{2} E_i^\alpha E_j^\beta (E_\beta^k K_{\alpha k} - E_\alpha^k K_{\beta k}) = \frac{1}{2} (E_i^\alpha K_{\alpha j} - E_j^\beta K_{\beta k}) = K_{\alpha[i} E_{j]}^\alpha \approx 0 \end{aligned} \quad (2.202)$$

Sus índices espacio-temporales fueron transformados en índices internos utilizando las tétradas. Luego, el vínculo de difeomorfismos (2.159):

$$C_\alpha = -2D_\beta \pi_\alpha^\beta = -2D_\beta (K_\alpha^i E_i^\beta - \delta_\alpha^\beta K_j^\gamma E_\gamma^j) \quad (2.203)$$

donde se usó que $\delta_\alpha^\beta = \delta_i^j e_\alpha^i e_j^\beta = \delta_i^j E_\alpha^i E_j^\beta = E_\alpha^i E_i^\beta$ y también la igualdad débil $K_{[\alpha}^i e_{\beta]i} \approx 0 \rightarrow K_{[\alpha}^i E_{\beta]i} \approx 0 \rightarrow K_\alpha^i E_i^\beta \approx K_i^\beta E_\alpha^i$. De forma similar se puede probar que el vínculo Hamiltoniano en términos de estas nuevas variables toma la forma:

$$C = \sqrt{E} E_i^\alpha E_j^\beta (K_\alpha^j K_\beta^i - K_\alpha^i K_\beta^j) - \frac{1}{\sqrt{E}} ({}^3R(E)) \quad (2.204)$$

Donde el escalar de Ricci tridimensional se considera una función de las tríadas densitizadas. Si equipamos el nuevo espacio de fases con la siguiente estructura:

$$\{E_\alpha^i(t, x), K_j^\beta(t, y)\} = \delta_j^i \delta_\alpha^\beta \delta(x - y) \quad (2.205)$$

$$\{E_\alpha^i(t, x), E_\beta^j(t, y)\} = \{K_i^\alpha(t, x), K_j^\beta(t, y)\} = 0 \quad (2.206)$$

entonces se puede probar que la dinámica descrita por las variables (E_α^i, K_j^β) es equivalente a la descrita por las variables ADM. Primero, La versión suavizada del vínculo (2.202) se obtiene integrándolo contra una función suave. La denominaremos vínculo rotacional:

$$\mathcal{R}(\alpha) = \int \alpha^{ij} K_{\alpha i} E_j^\alpha d^3x \quad (2.207)$$

Donde α^{ij} es una matriz antisimétrica arbitraria. Calculando el álgebra generada por estos vínculos:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{R}(\alpha), \mathcal{R}(\alpha')\} &= \left\{ \int \alpha^{ij} K_{\alpha i} E_j^\alpha d^3x, \int \alpha'^{kl} K_{\beta k} E_l^\beta d^3y \right\} \\ &= \int d^3x d^3y K_{\alpha i} \{E_j^\alpha, K_{\beta k}\} E_l^\beta \alpha'^{kl} + \int d^3x d^3y \alpha'^{ij} \{K_{\alpha i}, E_l^\beta\} E_j^\alpha K_{\beta k} \alpha'^{kl} \\ &= \int d^3x d^3y \alpha_j^i K_i^\alpha \{E_\alpha^j, K_k^\beta\} E_\beta^l \alpha'^{kl} + \int d^3x d^3y \alpha_j^i \{K_i^\alpha, E_\beta^l\} E_\alpha^j K_k^\beta \alpha'^{kl} \\ &= \int d^3x d^3y \alpha_j^i K_i^\alpha \delta_k^j \delta_\alpha^\beta \delta(x-y) E_\beta^l \alpha'^{kl} - \int d^3x d^3y \alpha_j^i \delta_i^l \delta_\beta^\alpha \delta(x-y) E_\alpha^j K_k^\beta \alpha'^{kl} \\ &= \int d^3x (\alpha \alpha')_i^j K_{\alpha i} E^\alpha - \int d^3x (\alpha' \alpha)_i^k K_{\alpha k} E^{\alpha i} = \int d^3x [\alpha, \alpha']^{ij} K_{\alpha i} E_j^\alpha \\ &= \mathcal{R}([\alpha, \alpha']) \end{aligned} \quad (2.208)$$

Esta es el álgebra de las rotaciones espaciales $SO(3)$. El corchete de Poisson del vínculo rotacional con las variables ADM es cero pues estas últimas son manifiestamente invariantes bajo rotaciones. La métrica espacial, al ser función únicamente de las tríadas, satisface:

$$\{q_{\alpha\beta}(t, x), q_{\gamma\delta}(t, y)\} = 0 \quad (2.209)$$

Por otro lado, los momentos conjugados de la métrica espacial satisfacen [25]:

$$\begin{aligned} \{\pi^{\alpha\beta}(t, x), \pi^{\gamma\delta}(t, y)\} &= -\frac{\sqrt{q}}{8} [q^{\alpha\gamma} \mathcal{R}^{\beta\delta} + q^{\alpha\delta} \mathcal{R}^{\beta\gamma} + q^{\beta\gamma} \mathcal{R}^{\alpha\delta} \\ &\quad + q^{\beta\gamma} \mathcal{R}^{\alpha\gamma}] (t, x) \delta(x-y) \end{aligned} \quad (2.210)$$

Los corchetes anteriores se anulan cuando se satisface el vínculo rotacional. Luego, se puede ver que

$$\{\pi^{\alpha\beta}, q_{\gamma\delta}\} = \delta_{(\gamma}^\alpha \delta_{\delta)}^\beta \delta(x-y) \quad (2.211)$$

Resumiendo, las nuevas variables E_α^i y K_i^α son equivalentes a las variables ADM cuando se satisface el vínculo rotacional.

Variables de Ashtekar

Las transformaciones $E_j^\alpha \rightarrow \frac{E_j^\alpha}{\beta}$ y $K_\alpha^j \rightarrow \beta K_\alpha^j$ son canónicas ya que no alteran la estructura (2.205), (2.206). Al parámetro β se le llama parámetro de Barbero-Immirzi (BI) y es en general un número complejo, aunque nosotros lo tomaremos como real. El vínculo rotacional también permanece invariante bajo este reescalado:

$$\mathcal{R}_k = \varepsilon_{kij} \mathcal{R}^{ij} = \varepsilon_{kij} (\beta K_\alpha^i) (\beta E^{\alpha j}) \approx 0 \quad (2.212)$$

Donde ${}^\beta K_\alpha^i = \beta K_\alpha^i$ y ${}^\beta E_j^\alpha = \frac{E_j^\alpha}{\beta}$. Para obtener (2.212) se definió el vector \mathcal{R}_k , el cual contiene la misma información queda \mathcal{R}_{ij} pues esta última es una matriz 3×3 antisimétrica, luego se utilizó la propiedad de antisimetría del símbolo ε_{kij} , y luego se utilizó (2.202).

Introducimos ahora la conexión asociada con la simetría $SO(3)$, cuyas componentes serán denotadas por Γ_α^{ij} . La derivada covariante de un tensor con índices tanto espaciotemporales como internos:

$$\begin{aligned} D_\beta T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{i_1 \dots i_m} &= \partial_\beta T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{i_1 \dots i_m} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{\beta \alpha_k}^\gamma T_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \gamma \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}^{i_1 \dots i_m} \\ &+ \sum_{l=1}^m \Gamma_{j\beta}^{i_l} T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{i_1 \dots i_{l-1} j i_{l+1} \dots i_m} = \nabla_\beta T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{i_1 \dots i_m} + \sum_{l=1}^m \Gamma_{j\beta}^{i_l} T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{i_1 \dots i_{l-1} j i_{l+1} \dots i_m} \end{aligned} \quad (2.213)$$

De manera completamente análoga al caso cuatridimensional en (2.178), exigimos que esta derivada covariante sea compatible con las tétradas:

$$D_\beta e_\alpha^i = 0 \quad \rightarrow \quad \Gamma_\alpha^{ij} = e^{\beta i} \nabla_\alpha e_\beta^j \quad (2.214)$$

La curvatura es una 2-forma que se obtiene considerando el conmutador de dos derivadas covariantes actuando sobre un vector valuado en $SO(3)$:

$$R_{\alpha\beta}^i = [D_\alpha, D_\beta] v^i \rightarrow R_{\alpha\beta}^{ij} = 2\partial_{[\alpha} \Gamma_{\beta]}^{ij} + \Gamma_{j[\alpha}^i \Gamma_{\beta]}^k j_{\beta]} \quad (2.215)$$

Utilizando (2.214) y que $e = \sqrt{q} \rightarrow \nabla_\alpha e = 0$, tenemos:

$$D_\alpha E_j^\beta = \nabla_\alpha (e e_j^\beta) - \Gamma_{\alpha j}^k e e_k^\beta = e D_\alpha e_j^\beta = 0 \quad (2.216)$$

Entonces:

$$D_\alpha E_j^\alpha = 0 \quad (2.217)$$

Además, utilizando el hecho de que $\partial_\alpha E_j^\alpha = \partial_\alpha (e e_j^\alpha) = \nabla_\alpha E_j^\alpha$ [11], obtenemos:

$$D_\alpha E_j^\alpha = \partial_\alpha E_j^\alpha - \Gamma_{j\alpha}^k E_k^\beta = \partial_\alpha E_j^\alpha + \varepsilon_{jk}^l \Gamma_\alpha^k E_l^\alpha = 0 \quad (2.218)$$

Donde se definió: $\Gamma_\alpha^k := -1/2 \varepsilon_{ij}^k \Gamma_\alpha^{ij}$. En función de las tríadas:

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha^i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{jk}^i E^{\beta k} \left[\partial_\beta E_\alpha^j - \partial_\alpha E_\beta^j + E^{\gamma j} E_{\alpha l} \partial_\beta E_\gamma^l \right] \\ &+ \frac{1}{4} \varepsilon_{jk}^i E^{\beta k} \left[2E_\alpha^j \frac{\partial_\beta (\det[E_\gamma^i])}{\det[E_\gamma^i]} - E_\beta^j \frac{\partial_\alpha (\det[E_\gamma^i])}{\det[E_\gamma^i]} \right] \end{aligned} \quad (2.219)$$

Podemos ver en (2.191) que Γ_α^i no cambia al realizar la transformación $E_j^\alpha \rightarrow {}^\beta E_j^\alpha = E_j^\alpha / \beta$. Utilizando la igualdad fuerte (2.218) podemos modificar el vínculo rotacional:

$$\begin{aligned} G_k &= \partial_\alpha ({}^\beta E_k^\alpha) + \varepsilon_{ki}^j \Gamma_\alpha^i ({}^\beta E_j^\alpha) + \varepsilon_{ki}^j ({}^\beta K_\alpha^i) ({}^\beta E_j^\alpha) \\ &= \partial_\alpha ({}^\beta E_k^\alpha) + \varepsilon_{ki}^j ({}^\beta \mathcal{A}_\alpha^i) ({}^\beta E_j^\alpha) \approx 0 \end{aligned} \quad (2.220)$$

Donde se definió la *conexión de Ashtekar-Barbero* como ${}^\beta \mathcal{A}_\alpha^i = \Gamma_\alpha^i + \beta K_\alpha^i$. A G_k se le denomina vínculo de Gauss. Se puede probar que las variables ${}^\beta E_\alpha^i$, ${}^\beta \mathcal{A}_\alpha^i$ forman un par canónico conjugado pues tienen la siguiente estructura de corchetes de Poisson:

$$\left\{ {}^\beta E_\alpha^i(t, x), {}^\beta \mathcal{A}_j^\beta(t, y) \right\} = \delta_j^i \delta_\alpha^\beta \delta(x, y) \quad (2.221)$$

$$\left\{ {}^\beta E_\alpha^i(t, x), {}^\beta E_\beta^j(t, y) \right\} = \left\{ {}^\beta \mathcal{A}_i^\alpha(t, x), {}^\beta \mathcal{A}_j^\beta(t, y) \right\} = 0 \quad (2.222)$$

La curvatura de la conexión de Ashtekar-Barbero:

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}^k = 2\partial_{[\alpha} {}^\beta \mathcal{A}_{\beta]}^k + \varepsilon_{ij}^k {}^\beta \mathcal{A}_\alpha^i {}^\beta \mathcal{A}_\beta^j \quad (2.223)$$

La cual satisface la siguiente relación

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k &= 2\partial_{[\alpha} {}^\beta \mathcal{A}_{\beta]}^k + \varepsilon_{ij}^k {}^\beta \mathcal{A}_\alpha^i {}^\beta \mathcal{A}_\beta^j \\ &= 2\partial_{[\alpha} \Gamma_{\beta]}^k + 2\partial_{[\alpha} {}^\beta K_{\beta]}^k + \varepsilon_{ij}^k \left(\Gamma_\alpha^i + {}^\beta K_\alpha^i \right) \left(\Gamma_\beta^j + {}^\beta K_\beta^j \right) \\ &= R_{\alpha\beta}^k + \varepsilon_{ij}^k {}^\beta K_\alpha^i {}^\beta K_\beta^j + \varepsilon_{ij}^k \Gamma_\alpha^i {}^\beta K_\beta^j + \varepsilon_{ij}^k {}^\beta K_\alpha^i \Gamma_\beta^j + 2\partial_{[\alpha} {}^\beta K_{\beta]}^k \end{aligned} \quad (2.224)$$

Donde $R_{\alpha\beta}^k = \partial_{[\alpha} \Gamma_{\beta]}^k + \varepsilon_{ij}^k \Gamma_\alpha^i \Gamma_\beta^j$, y está relacionado con la curvatura (2.215) de la siguiente manera:

$$R_{\alpha\beta}^{ij} = \varepsilon_k^{ij} R_{\alpha\beta}^k \quad (2.225)$$

Lo cual puede verificarse fácilmente expresando Γ_α^k en función de Γ_α^{ij} y utilizando la identidad

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} &= \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} \\ &\quad - \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} \end{aligned} \quad (2.226)$$

Por otro lado, tenemos que

$$D_{[\alpha} {}^\beta K_{\beta]}^k = \partial_{[\alpha} {}^\beta K_{\beta]}^k + \left(-\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma K_\gamma^k + \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma K_\gamma^k \right) + \left(\Gamma_{l\alpha}^k K_\beta^l - \Gamma_{l\beta}^k K_\alpha^l \right) \quad (2.227)$$

El segundo sumando en (2.227) es cero ya que los símbolos de Christoffel son simétricos. Luego, tenemos:

$$\Gamma_\alpha^k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^k \Gamma_\alpha^{ij} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \Gamma_{ij\alpha} \quad (2.228)$$

Multiplicando por ε_{kmn} :

$$\varepsilon_{kmn} \Gamma_\alpha^k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kmn} \varepsilon^{kij} \Gamma_{ij\alpha} = -\frac{1}{2} \left(\delta_m^i \delta_n^j - \delta_m^j \delta_n^i \right) \Gamma_{ij\alpha} = \Gamma_{nm\alpha} \quad (2.229)$$

Entonces:

$$\varepsilon_{mkn} \Gamma_\alpha^k = \Gamma_{mn\alpha} \rightarrow \Gamma_{n\alpha}^m = \varepsilon_{kn}^m \Gamma_\alpha^k = \Gamma_{n\alpha}^m \quad (2.230)$$

Renombrando índices mudos y contrayendo índices internos con K_β^j :

$$\varepsilon_{ij}^k \Gamma_\alpha^i K_\beta^j = \Gamma_{j\alpha}^k K_\beta^j \quad (2.231)$$

Usando esta última igualdad, podemos reescribir (2.224) como:

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}^k = R_{\alpha\beta}^k + 2D_{[\alpha}{}^\beta K_{\beta]}^k + \varepsilon_{ij}^k{}^\beta K_\alpha^i{}^\beta K_\beta^j \quad (2.232)$$

Utilizando (2.223), (2.224) y la identidad cíclica de Bianchi tridimensional [33]:

$$R_{\alpha\beta}^j E_j^\beta = 0 \quad (2.233)$$

Se pueden hallar expresiones para los vínculos en función de las nuevas variables. Primero, contrayendo (2.232) con ${}^\beta E_k^\beta$:

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}^k{}^\beta E_k^\beta = R_{\alpha\beta}^k{}^\beta E_j^\beta + 2D_{[\alpha}{}^\beta K_{\beta]}^k E_k^\beta + \varepsilon_{ij}^k{}^\beta K_\alpha^i{}^\beta K_\beta^j{}^\beta E_k^\beta \quad (2.234)$$

El primer sumando es cero por (2.233). Luego, el tercer sumando se puede reescribir utilizando (2.212) y la igualdad fuerte (2.218):

$$\varepsilon_{ij}^k{}^\beta K_\alpha^i{}^\beta K_\beta^j{}^\beta E_k^\beta = {}^\beta K_\alpha^i \mathcal{R}_i = {}^\beta K_\alpha^i G_i \quad (2.235)$$

Luego, comparando el segundo sumando al vínculo de difeomorfismos (2.203) (re-escalado por un factor de -2):

$$2D_{[\alpha}{}^\beta K_{\beta]}^k E_k^\beta = D_\alpha{}^\beta K_\beta^k E_k^\beta - D_\beta{}^\beta K_\alpha^k E_k^\beta = C_\alpha \quad (2.236)$$

Entonces, tenemos:

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}^k E_k^\beta = C_\alpha + {}^\beta K_\alpha^i G_i \rightarrow C_\alpha = \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k E_k^\beta - {}^\beta K_\alpha^i G_i \quad (2.237)$$

De manera similar, se puede probar que el vínculo hamiltoniano toma la siguiente forma en función de las nuevas variables [33]:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\beta^2}{(\det[E_\alpha^i])^{1/2}} {}^\beta E_i^\alpha{}^\beta E_j^\gamma \left[\varepsilon_k^{ij} \mathcal{F}_{\alpha\gamma}^k - 2(\beta^2 + 1) K_{[\alpha}^i K_{\gamma]}^j \right] \\ &+ \frac{\beta^2}{(\det[E_\alpha^i])^{1/2}} {}^\beta E_j^\gamma D_\gamma G^j \end{aligned} \quad (2.238)$$

Los vínculos (2.220), (2.237) y (2.238) son completamente equivalentes a:

$$G_i = \mathcal{D}_\alpha E_i^\alpha := \partial_\alpha E_i^\alpha + \varepsilon_{ij}^k{}^\beta \mathcal{A}_\alpha^j E_k^\alpha \approx 0 \quad (2.239)$$

$$C_\alpha = E_i^\beta \mathcal{F}_{\alpha\beta}^i \approx 0 \quad (2.240)$$

$$C = \frac{1}{(\det[E_\alpha^i])^{1/2}} E_i^\alpha E_j^\gamma \left[\varepsilon_k^{ij} \mathcal{F}_{\alpha\gamma}^k - 2(\beta^2 + 1) K_{[\alpha}^i K_{\gamma]}^j \right] \approx 0 \quad (2.241)$$

Acción de los vínculos

En la sección (2.3.1) vimos que los vínculos (2.159) y (2.158) generan difeomorfismos espaciales y en la dirección normal a la foliación Σ respectivamente. Lo mismo ocurre con los vínculos (2.240) y (2.241), estos generan el mismo tipo de difeomorfismos en las nuevas variables E_i^α y \mathcal{A}_α^i . El vínculo de Gauss (2.239) por su parte genera rotaciones en el espacio interno, esto es, rotaciones correspondientes al grupo $SO(3)$ (o equivalentemente $SU(2)$).

Para calcular los corchetes de Poisson de los vínculos con las variables dinámicas, introducimos las versiones suavizadas de los vínculos. Primero, el vínculo de Gauss suavizado:

$$C_G(\Lambda) := \int_{\Sigma} d^3x \Lambda^i G_i \quad (2.242)$$

donde Λ es un campo suave en Σ valuado en $\mathfrak{so}(3)$. El vínculo de difeomorfismos:

$$C_{\text{Diff}}(\vec{N}) := \int_{\Sigma} d^3x \left(N^\alpha E_i^\beta \mathcal{F}_{\alpha\beta}^i - (N^\alpha A_\alpha^i) G_i \right) \quad (2.243)$$

Con \vec{N} un campo suave en Σ . En esta definición se sumó un término proporcional vínculo de Gauss para obtener el resultado deseado de forma explícita, eliminando una parte del vínculo proporcional al vínculo de Gauss, el cual genera rotaciones internas. Por último, el vínculo Hamiltoniano:

$$C(N) := \int_{\Sigma} d^3x N \frac{1}{(\det[E_\alpha^i])^{1/2}} E_i^\alpha E_j^\beta \left[\varepsilon_k^{ij} \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k - 2(\beta^2 + 1) K_{[\alpha}^i K_{\beta]}^j \right] \quad (2.244)$$

Calculando los corchetes de Poisson de los vínculos con las variables dinámicas, obtenemos:

$$\{A_\alpha^i, C_G(\Lambda)\} = -\mathcal{D}_\alpha \Lambda^i \quad \{E_i^\alpha, C_G(\Lambda)\} = \varepsilon_{ij}^k \Lambda^j E_k^\alpha \quad (2.245)$$

El vínculo de Gauss genera entonces rotaciones en el espacio interno. Por otro lado, el vínculo (2.243):

$$\{A_\alpha^i, C_{\text{Diff}}(\vec{N})\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} A_\alpha^i \quad \{E_i^\alpha, C_{\text{Diff}}(\vec{N})\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} E_i^\alpha \quad (2.246)$$

genera difeomorfismos espaciales en las variables dinámicas en la dirección del vector \vec{N} . El vínculo Hamiltoniano, como es de esperar, genera la evolución temporal, esto es, un difeomorfismo en la dirección perpendicular a Σ :

$$\{A_\alpha^i, C(N)\} \approx \mathcal{L}_{Nn} A_\alpha^i \quad \{E_i^\alpha, C(N)\} \approx \mathcal{L}_{Nn} E_i^\alpha \quad (2.247)$$

Los símbolos de igualdad débil se deben a que los corchetes tienen otros sumandos que se anulan en la superficie de vínculos.

Álgebra de los vínculos

Calculando el corchete de Poisson entre los vínculos, obtenemos [4]:

$$\{C_G(\Lambda), C_G(\Lambda')\} = \{C_G([\Lambda, \Lambda'])\} \quad (2.248)$$

$$\{C_G(\Lambda), C_{\text{Diff}}(\vec{N})\} = -C_G(\mathcal{L}_{\vec{N}} \Lambda) \quad (2.249)$$

$$\{C_{\text{Diff}}(\vec{N}), C_{\text{Diff}}(\vec{N}')\} = C_{\text{Diff}}([\vec{N}, \vec{N}']) \quad (2.250)$$

$$\{C_G(\Lambda), C(N)\} = 0 \quad (2.251)$$

$$\{C_{\text{Diff}}(\vec{N}), C(M)\} = -C(\mathcal{L}_{\vec{N}} M) \quad (2.252)$$

$$\begin{aligned} \{C(N), C(M)\} &= -4 \left(C_{\text{Diff}}(\vec{S}) + C_G(S^\alpha A_\alpha^i) \right) \\ &\quad - 4 \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) C_G \left(\frac{[E_\alpha^i \partial^\alpha N, E_\beta^j \partial^\beta M]}{q} \right) \end{aligned} \quad (2.253)$$

Donde se definió el vector \vec{S} :

$$S^\alpha = (N\partial_\beta M - M\partial_\beta N) \frac{E_i^\beta E^{\alpha i}}{q} \quad (2.254)$$

En resumen, la relatividad general se puede reformular como una teoría dinámica de conexiones con grupos de estructura compactos. El precio a pagar es introducir más grados de libertad, más vínculos y trabajar con una estructura de corchetes de Poisson más complicada.

Capítulo 3

Simetría esférica

En el problema a estudiar en este trabajo, el espaciotiempo en cuestión admite simetría esférica, esto es, hay tres vectores de Killing de S^2 que forman el álgebra $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$.

3.1 Variables de Ashtekar

El formalismo ADM supone que el espaciotiempo M es foliado por una familia de hipersuperficies espaciales Σ_t , siendo t el parámetro correspondiente al tiempo. Supondremos además que cada una de estas hipersuperficies tiene la forma $\Sigma = I \times S$, donde I es una variedad unidimensional caracterizada por un parámetro x al que llamaremos coordenada radial, y S^2 es una 2-esfera descrita por las coordenadas θ y ϕ . Estas son coordenadas adaptadas a la simetría esférica del problema. Cuando la variedad Σ admite simetría esférica, la conexión de Ashtekar-Barbero toma la siguiente forma reducida [6] (de ahora en más se omitirá el β):

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \mathcal{A}_\alpha^i \tau_i dx^\alpha &= A_x(x) \tau_3 dx + (A_1(x) \tau_1 + A_2(x) \tau_2) d\theta \\ &+ [(A_1(x) \tau_2 - A_2(x) \tau_1) \sin \theta + \tau_3 \cos \theta] d\phi \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde A_x , A_1 y A_2 son funciones de x y $\tau_i = -i\sigma_i/2$ son los elementos de una base ortonormal de $SU(2)$, los cuales satisfacen $[\tau_i, \tau_j] = \varepsilon_{ij}^k \tau_k$. Luego, la tríada densitizada toma la forma

$$\begin{aligned} E = E_i^\alpha \tau^i \partial_\alpha &= E^x(x) \tau_3 \sin \theta \partial_x + (E^1(x) \tau_1 + E^2(x) \tau_2) \sin \theta \partial_\theta \\ &+ (E^1(x) \tau_2 - E^2(x) \tau_1) \partial_\phi \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde E^x , E^1 y E^2 son funciones de x . En términos de las variables reducidas por simetría, la 2-forma simpléctica adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{8\pi G\beta} \int_\Sigma d^3x \delta E_i^\alpha \wedge \delta A_\alpha^i \\ &= \frac{1}{8\pi G\beta} \int_I dx \int_{S^2} d\theta d\phi \sin \theta (\delta E^x \wedge \delta A_x + 2(\delta E^1 \wedge \delta A_1 + \delta E^2 \wedge \delta A_2)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Integrando en el ángulo sólido:

$$\Omega = \frac{1}{2G\beta} \int_I dx (\delta E^x \wedge \delta A_x + 2(\delta E^1 \wedge \delta A_1 + \delta E^2 \wedge \delta A_2)) \quad (3.4)$$

Notar que la teoría de dimensión 3 + 1, por la simetría esférica ha sido reducida a una teoría de dimensión 1 + 1. Observando (3.1), vemos que bajo el cambio de coordenadas $x \rightarrow \bar{x}$ la componente A_x transforma como una densidad escalar de peso 1, ya que tenemos

$$\begin{aligned} A_x(x)dx &= \bar{A}_x(\bar{x})d\bar{x}, \quad d\bar{x} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} dx \\ &\rightarrow \bar{A}_x(\bar{x}) = \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} A_x(x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Mientras que las componentes A_1 y A_2 son escalares. Por otro lado, como $E_i^\alpha = e e_i^\alpha$, siendo $e = \sqrt{q}$ es una densidad de peso -1 , y además $\partial_x = \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \partial_{\bar{x}}$, entonces tenemos que E^x transforma como un escalar, mientras que E^1 y E^2 son densidades tensoriales de peso 1.

La nueva estructura simpléctica (3.4) nos da la siguiente estructura de corchetes de Poisson:

$$\{A_x(x), E^x(x')\} = 2G\beta\delta(x - x') \quad (3.6)$$

$$\{A_1(x), E^1(x')\} = G\beta\delta(x - x') \quad (3.7)$$

$$\{A_2(x), E^2(x')\} = G\beta\delta(x - x') \quad (3.8)$$

El resto de los corchetes son nulos. Luego, el tensor curvatura:

$$F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.9)$$

Las componentes están dadas por:

$$F_{\alpha\beta}^i = \partial_{[\alpha} A_{\beta]}^i + \varepsilon_{jk}^i A_\alpha^j A_\beta^k \quad (3.10)$$

Para hallar las componentes en el caso esféricamente simétrico recurrimos a (3.1). Mostramos a continuación el cálculo explícito de una de ellas a modo ilustrativo:

$$\begin{aligned} F_{\theta\phi} &= F_{\theta\phi}^i \tau_i = \tau_i \left(\partial_{[\theta} A_{\phi]}^i + \varepsilon_{jk}^i A_\theta^j A_\phi^k \right) \\ &= \left(\tau_i \partial_\theta A_\phi^i + \varepsilon_{jk}^i A_\theta^j A_\phi^k \right) = \partial_\theta [(A_1 \tau_2 - A_2 \tau_1) \sin \theta + \tau_3 \cos \theta] \\ &\quad + A_2 \cos \theta \tau_1 - A_1 \cos \theta \tau_2 + A_1^2 \sin \theta \tau_3 + A_2^2 \sin \theta \tau_3 \\ &= (A_1 \tau_2 - A_2 \tau_1) \cos \theta - \tau_3 \sin \theta + A_2 \cos \theta \tau_1 - A_1 \cos \theta \tau_2 + A_1^2 \sin \theta \tau_3 \\ &\quad + A_2^2 \sin \theta \tau_3 = (A_2^2 + A_1^2 - 1) \sin \theta \tau_3 \end{aligned} \quad (3.11)$$

El resto de las componentes se puede calcular de forma análoga. Entonces, el tensor curvatura para el caso esféricamente simétrico resulta ser:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = (A_1^2 + A_2^2 - 1) \tau_3 \sin \theta d\theta \wedge d\phi - [(A'_1 \tau_2 - A'_2 \tau_1) \\ &\quad - A_x (A_1 \tau_1 + A_2 \tau_2)] \sin \theta d\phi \wedge dx \\ &\quad + [(A'_1 \tau_1 + A'_2 \tau_2) + A_x (A_1 \tau_2 - A_2 \tau_1)] dx \wedge d\theta \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.2 Vínculos

La dinámica de la teoría está descrita por tres vínculos. Primero, el vínculo de Gauss:

$$C_G[\Lambda^i(\vec{x})] = \frac{1}{8\pi G\beta} \int_{\Sigma} d^3x \Lambda^i G_i \quad (3.13)$$

genera las rotaciones internas, o transformaciones de gauge del grupo $SO(3)$ (o $SU(2)$). G_i está dado por:

$$G_i = \mathcal{D}_\alpha E_i^\alpha = \partial_\alpha E_i^\alpha + \varepsilon_{ij}^k A_\alpha^j E_k^\alpha \quad (3.14)$$

La componente $i = 1$:

$$\begin{aligned} G_1 &= \partial_\alpha E_1^\alpha + A_\alpha^2 E_3^\alpha - A_\alpha^3 E_2^\alpha = \partial_\theta(E^1 \sin \theta) - A_\phi^3 E_2^\phi \\ &= E^1 \cos \theta - \cos \theta E^1 = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

De forma análoga se puede verificar que la componente $i = 2$ también se anula, siendo $i = 3$ la única componente no nula:

$$\begin{aligned} G_3 &= \partial_\alpha E_3^\alpha + A_\alpha^1 E_2^\alpha - A_\alpha^2 E_1^\alpha \\ &= \partial_x E_3^x + A_\theta^1 E_1^\theta + A_\phi^1 E_2^\phi - A_\theta^2 E_1^\theta - A_\phi^2 E_1^\phi \\ &= E^{x'}(x) \sin \theta + A_1 E^2 \sin \theta - A_2 E^1 \sin \theta - A_2 E^1 \sin \theta + A_1 E^2 \sin \theta \\ &= E^{x'}(x) \sin \theta + 2(A_1 E^2 - A_2 E^1) \sin \theta \end{aligned} \quad (3.16)$$

El vínculo de Gauss entonces toma la forma:

$$\begin{aligned} C_G(\lambda(x)) &= \frac{1}{8\pi G\beta} \int_{\Sigma} d^3x \Lambda^3 (E^{x'} + 2A_1 E^2 - 2A_2 E^1) \sin \theta \\ &= \frac{1}{2G\beta} \int dx \lambda(x) (E^{x'} + 2A_1 E^2 - 2A_2 E^1) \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde se definió $\lambda(x) = \frac{1}{4\pi} \int d\theta d\phi \sin \theta \Lambda^3(x, \theta, \phi)$. Es importante destacar la acción vínculo de Gauss reducido por simetría esférica sobre las variables dinámicas. Utilizando (3.6)-(3.8):

$$\begin{aligned} \delta E^1(x) &= \left\{ E^1(x), \frac{1}{2G\beta} \int dx' \lambda(x') (2A_1(x') E^2(x') - 2A_2(x') E^1(x')) \right\} \\ &= \int dx' \lambda(x') (-\delta(x-x')) E^2(x') = -\lambda(x) E^2(x) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\delta E^2(x) = \lambda(x) E^1(x) \quad (3.19)$$

$$\delta A_1(x) = -\lambda(x) A_2(x) \quad (3.20)$$

$$\delta A_2(x) = \lambda(x) A_1(x) \quad (3.21)$$

Mientras que:

$$\begin{aligned}\delta A_x(x) &= \left\{ A_x(x), \frac{1}{2G\gamma} \int dx' \lambda(x') \partial_{x'} E^x(x') \right\} \\ &= \int dx' \lambda(x') \partial_{x'} \delta(x-x') = -\partial_x \lambda(x)\end{aligned}\quad (3.22)$$

$$\delta E^x(x) = 0 \quad (3.23)$$

Por otro lado, la transformación de gauge $e^{\tau_3 \lambda(x)}$ del grupo $U(1)$ tiene por acción rotar los vectores τ_1, τ_2 un ángulo $\lambda(x)$. Su acción sobre E :

$$\begin{aligned}E' &= e^{\tau_3 \lambda(x)} E e^{-\tau_3 \lambda(x)} = (1 + \tau_3 \lambda) E (1 - \tau_3 \lambda(x)) \\ &= E + \lambda(x) E^1 \sin \theta \tau_2 + \lambda(x) E^2 \sin \theta (-\tau_1) + \lambda(x) E^1 (-\tau_2) - \lambda(x) E^2 \tau_2\end{aligned}\quad (3.24)$$

$$\rightarrow \delta E^x = 0, \quad \delta E^1 = -\lambda(x) E^2, \quad \delta E^2 = \lambda(x) E^1 \quad (3.25)$$

Luego, su acción sobre A :

$$\begin{aligned}A' &= e^{\tau_3 \lambda(x)} A e^{-\tau_3 \lambda(x)} + e^{\tau_3 \lambda(x)} d e^{-\tau_3 \lambda(x)} \\ &= (1 + \tau_3 \lambda(x)) A (1 - \tau_3 \lambda(x)) - \partial_x \lambda(x) \tau_3 dx \\ &= A + \lambda(x) A_1 \tau_1 d\theta + \lambda(x) A_2 (-\tau_1) d\theta + \lambda(x) A_1 \tau_1 d\phi - \lambda(x) A_2 \tau_2 d\phi \\ &\quad - \partial_x \lambda(x) \tau_3 dx\end{aligned}\quad (3.26)$$

$$\rightarrow \delta A_x = -\partial_x \lambda(x), \quad \delta A_1 = -\lambda(x) A_2, \quad \delta A_2 = \lambda(x) A_1 \quad (3.27)$$

Vemos entonces que la acción del vínculo de Gauss fue reducida a la acción del grupo de gauge $U(1)$.

Luego, el vínculo de difeomorfismos:

$$C_{\text{Diff}}(\vec{N}) = \frac{1}{8\pi G\beta} \int_{\Sigma} d^3x (N^\alpha E_i^\beta F_{\alpha\beta}^i - N^\alpha A_\alpha^i G_i) \quad (3.28)$$

utilizando las formas reducidas por simetría esférica de la conexión y la curvatura, toma la forma

$$\begin{aligned}C_{\text{Diff}}(\vec{N}) &= \frac{1}{2G\beta} \int \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} d\phi d\theta \sin \theta N^x (2A'_1 E^1 + 2A'_2 E^2 - A_x E^{x'}) \\ &= \frac{1}{2G\beta} \int N^x(x) (2A'_1 E^1 + 2A'_2 E^2 - A_x E^{x'})\end{aligned}\quad (3.29)$$

donde se definió $N^x(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} d\phi d\theta \sin \theta N^x$. Esto genera difeomorfismos en la dirección de x :

$$\begin{aligned} \delta A_1(x) &= \left\{ A_1(x), \frac{1}{2G\beta} \int dx' 2N^x(x') A'_1(x') E^1(x') \right\} = N^x \partial_x A_1(x) \\ &= \mathcal{L}_{N^x} A_1(x) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \delta E^1(x) &= \left\{ E^1(x), \frac{1}{2G\beta} \int dx' 2N^x(x') A'_1(x') E^1(x') \right\} \\ &= \int \delta(x-x') \partial_x (N^x E^1) \\ &= \partial_x N^x E^1 + N^x \partial_x E^1 = \mathcal{L}_{N^x} E^1 \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\delta A_2(x) = \mathcal{L}_{N^x} A_2(x) \quad (3.32)$$

$$\delta E^2(x) = \mathcal{L}_{N^x} E^2(x) \quad (3.33)$$

$$\delta A_x(x) = \mathcal{L}_{N^x} A_x(x) \quad (3.34)$$

$$\delta E^x(x) = \mathcal{L}_{N^x} E^x(x) \quad (3.35)$$

Finalmente, el vínculo Hamiltoniano está dado por:

$$C(N) = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x N(\vec{x}) e^{-1} \left\{ \varepsilon_i^{jk} F_{\alpha\beta}^i E_j^\alpha E_k^\beta - 2(1 + \beta^2) K_{[\alpha}^i K_{\beta]}^j E_i^\alpha E_j^\beta \right\} \quad (3.36)$$

Donde $e = |\det[E_i^\alpha]|^{1/2}$, lo cual utilizando (3.2) se puede reducir a:

$$e = |\det[E_i^\alpha]|^{1/2} = \sqrt{E^x [(E^1)^2 + (E^2)^2] \sin^2 \theta} \quad (3.37)$$

La curvatura extrínseca esféricamente simétrica tiene la forma

$$K = K_\alpha^i \tau_i dx^\alpha = K_x \tau_3 dx + (K_1 \tau_1 + K_2 \tau_2) d\theta + (K_1 \tau_2 - K_2 \tau_1) \sin \theta d\phi \quad (3.38)$$

Siendo K_x, K_1 y K_2 funciones de x que pueden ser escritas en función de A y E recurriendo a su relación con la conexión AB. Con este último resultado, y usando además (3.2) y (3.12), la forma reducida del vínculo Hamiltoniano resulta ser:

$$\begin{aligned} C(N(x)) &= \frac{1}{2G} \int dx \frac{N(x)}{\sqrt{|E^x| [(E^1)^2 + (E^2)^2]}} \\ &\quad \times \left\{ 2E^x (E^1 A'_2 - E^2 A'_1) + 2A_x E^x (A_1 E^1 + A_2 E^2) \right. \\ &\quad \left. + (A_1^2 + A_2^2 - 1) [(E^1)^2 + (E^2)^2] \right. \\ &\quad \left. - (1 + \beta^2) (2K_x E^x (K_1 E^1 + K_2 E^2) \right. \\ &\quad \left. + [(K_1)^2 + (K_2)^2] [(E^1)^2 + (E^2)^2] \right\} \\ &= \int dx N(x) C(x) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Donde se definió $N(x) = \frac{1}{4\pi} \int d\theta d\phi \sin \theta N(x, \theta, \phi)$

3.3 Variables polares

En esta sección introducimos nuevas variables denominadas polares, las cuales están mejor adaptadas a la transformación de gauge del grupo $U(1)$. Primero,

definimos A_φ y E^φ mediante:

$$A_1 = A_\varphi \cos \beta \qquad A_2 = A_\varphi \sin \beta \qquad (3.40)$$

$$E^1 = E^\varphi \cos(\alpha + \beta) \qquad E^2 = E^\varphi \sin(\alpha + \beta) \qquad (3.41)$$

Notar que el producto escalar

$$\begin{aligned} (A_1, A_2) \cdot (E^1, E^2) &= A_\varphi E^\varphi (\cos \beta \cos(\alpha + \beta) + \sin \beta \sin(\alpha + \beta)) \\ &= A_\varphi E^\varphi \cos \alpha \end{aligned} \qquad (3.42)$$

es invariante bajo rotaciones del grupo $U(1)$, como puede comprobarse usando (3.18)-(3.21):

$$\delta(A_1 E^1 + A_2 E^2) = -\lambda A_2 E^1 - A_1 \lambda E^2 + \lambda A_1 E^2 + A_2 \lambda E^1 = 0 \qquad (3.43)$$

Ya que tanto $A_\varphi = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ como $E^\varphi = \sqrt{(E^1)^2 + (E^2)^2}$ son invariantes bajo la acción del grupo $U(1)$, el ángulo α es un invariante gauge, mientras que el ángulo β es puro gauge. Con estas nuevas variables, la forma simpléctica (3.4) adquiere la forma:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2G\beta} \int dx \{ \delta E^x \wedge \delta A_x + 2 [\delta E^\varphi \wedge \delta(A_\varphi \cos \alpha) \\ &\quad + \delta(A_\varphi E^\varphi \sin \alpha) \wedge \delta(\alpha + \beta)] \} \end{aligned} \qquad (3.44)$$

La forma de (3.44) sugiere que podemos elegir un nuevo conjunto de variables canónicas definiendo:

$$\bar{A}_\varphi := 2A_\varphi \cos \theta \qquad (3.45)$$

$$\eta := \alpha + \beta \qquad (3.46)$$

$$P^\eta := 2A_\varphi E^\varphi \sin \alpha = 2A_1 E^2 - 2A_2 E^1 \qquad (3.47)$$

con lo que tenemos la siguiente estructura de corchetes de Poisson:

$$\{A_x(x), E^x(x')\} = 2G\beta\delta(x - x') \qquad (3.48)$$

$$\{\bar{A}_\varphi(x), E^\varphi(x')\} = 2G\beta\delta(x - x') \qquad (3.49)$$

$$\{\eta(x), P^\eta(x')\} = 2G\beta\delta(x - x') \qquad (3.50)$$

En términos de las variables polares, el vínculo de Gauss (3.17) toma la forma:

$$\begin{aligned} G_G(\lambda(x)) &= \frac{1}{2G\beta} \int dx \lambda(x) (E^{x'} + 2A_1 E^2 - 2A_2 E^1) \\ &= \frac{1}{2G\beta} \int dx \lambda(x) (E^{x'} + 2A_\varphi E^\varphi \sin \alpha) \\ &= \frac{1}{2G\beta} \int dx \lambda(x) (E^{x'} + P^\eta) \end{aligned} \qquad (3.51)$$

El vínculo de difeomorfismos:

$$\begin{aligned} C_{\text{Diff}}(\vec{N}) &= \frac{1}{2G\beta} \int dx N^x(x') (2A'_1 E^1 + 2A'_2 E^2 - A_x E^{x'}) \\ &= \frac{1}{2G\beta} \int dx N^x (2(A'_\varphi \cos \beta - \beta' \sin \beta A_\varphi) E^\varphi \cos(\alpha + \beta) \\ &\quad + 2(A'_\varphi \sin \beta + \beta' \cos \beta A_\varphi) E^\varphi \sin(\alpha + \beta) - A_x E^{x'}) \\ &= \frac{1}{2G\beta} \int dx (2A'_\varphi E^\varphi \cos \alpha + 2A_\varphi E^\varphi \beta' \sin \alpha - A_x E^{x'}) \end{aligned} \qquad (3.52)$$

Esto es igual a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2G\beta} \int dx [(2A_\varphi \cos \alpha)' + 2A_\varphi \sin \alpha \alpha'] E^\varphi + 2A_\varphi E^\varphi \sin \alpha \beta' - A_x E^{x'} \\ &= \frac{1}{2G\beta} \int dx [\bar{A}'_\varphi E^\varphi + P^\eta \eta' - A_x E^{x'}] \end{aligned} \quad (3.53)$$

El caso del vínculo Hamiltoniano es un poco más complicado. Para hacer el cálculo más simple, podemos rotar la base ortonormal (τ_1, τ_2, τ_3) de $\mathfrak{su}(2)$ para obtener la nueva base $(\tau_{1'}, \tau_{2'}, \tau_{3'})$ cuyos elementos están dados por:

$$\tau_{1'}(x) := \tau_1 \cos(\alpha + \beta) + \tau_2 \sin(\alpha + \beta) \quad (3.54)$$

$$\tau_{2'}(x) := -\tau_1 \sin(\alpha + \beta) + \tau_2 \cos(\alpha + \beta) \quad (3.55)$$

$$\tau_{3'} := \tau_3 \quad (3.56)$$

En términos de las variables polares y la nueva base de $\mathfrak{su}(2)$, la conexión (3.1) y la tríada (3.2):

$$\begin{aligned} A &= A_\alpha^i \tau_i dx^\alpha = A_x \tau_3 dx + A_\varphi (\cos \alpha \tau_{1'} - \sin \alpha \tau_{2'}) d\theta \\ &\quad + A_\varphi (\sin \alpha \tau_{1'} + \cos \alpha \tau_{2'}) \sin \theta d\phi + \tau_3 \cos \theta d\phi \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$E = E_i^\alpha \tau^i \partial_\alpha = E^x \tau_3 \sin \theta \partial_x + E^\varphi \tau_{1'} \sin \theta \partial_\theta + E^\varphi \tau_{2'} \partial_\phi \quad (3.58)$$

En esta nueva base E es diagonalizado, por lo que tenemos que

$$q = \det[E_i^\alpha] = E^x (E^\varphi)^2 \sin^2 \theta \quad (3.59)$$

Entonces:

$$e = e_\alpha^i \tau_i dx^\alpha = \frac{E^\varphi}{\sqrt{|E^x|}} \tau_3 dx + \sqrt{|E^x|} \tau_{1'} d\theta + \sqrt{|E^x|} \sin \theta \tau_{2'} d\phi \quad (3.60)$$

Tomando la derivada exterior:

$$\begin{aligned} de &= \frac{E^{x'}}{2\sqrt{|E^x|}} \tau_{1'} dx \wedge d\theta + \sqrt{|E^x|} (\alpha + \beta)' \tau_{2'} dx \wedge d\theta \\ &\quad + \frac{E^{x'}}{2\sqrt{|E^x|}} \tau_{2'} \sin \theta dx \wedge d\phi - \sqrt{|E^x|} (\alpha + \beta)' \tau_{1'} \sin \theta dx \wedge d\phi \\ &\quad + \sqrt{|E^x|} \tau_{2'} \cos \theta d\theta \wedge d\phi \end{aligned} \quad (3.61)$$

Donde se usó:

$$\tau_{1'}' = \tau_{2'} (\alpha + \beta)', \quad \tau_{2'}' = -\tau_{1'} (\alpha + \beta)' \quad (3.62)$$

Teniendo (3.2) y (3.61), se pueden obtener las componentes de la conexión Γ compatible con la tríada mediante la ecuación $de + \Gamma \wedge e = 0$:

$$\begin{aligned}
de + \Gamma \wedge e &= \\
&\left(\frac{E^{x'}}{2\sqrt{E^x}} \tau_{1'} + \sqrt{E^x} (\alpha + \beta)' \tau_{2'} \right) dx \wedge d\theta + \frac{E^{x'}}{2\sqrt{E^x}} \sin \theta \tau_{2'} dx \wedge d\phi \\
&- \sqrt{E^x} (\alpha + \beta)' \tau_{1'} \sin \theta dx \wedge d\phi + \sqrt{E^x} \tau_{2'} \cos \theta d\theta \wedge d\phi \\
&(\Gamma_x dx + \Gamma_\theta d\theta + \Gamma_\phi d\phi) \wedge \left(\frac{E^\varphi}{\sqrt{E^x}} \tau_3 dx + \sqrt{E^x} \tau_{1'} d\theta + \sqrt{E^x} \sin \theta \tau_{2'} d\phi \right) \\
&= \left(\frac{E^{x'}}{2\sqrt{E^x}} \tau_{1'} + \sqrt{E^x} (\alpha + \beta)' \tau_{2'} \right) dx \wedge d\theta + \frac{E^{x'}}{2\sqrt{E^x}} \sin \theta \tau_{2'} dx \wedge d\phi \\
&- \sqrt{E^x} (\alpha + \beta)' \tau_{1'} \sin \theta dx \wedge d\phi + \sqrt{E^x} \tau_{2'} \cos \theta d\theta \wedge d\phi \\
&+ \tau_{i'} \Gamma_x^{i'} \sqrt{E^x} \tau_{1'} dx \wedge d\theta + \tau_{i'} \Gamma_x^{i'} \sqrt{E^x} \sin \theta \tau_{2'} dx \wedge d\phi \\
&- \tau_{i'} \Gamma_\theta^{i'} \frac{E^\varphi}{\sqrt{E^x}} \tau_3 dx \wedge d\theta + \tau_{i'} \Gamma_\theta^{i'} \sqrt{E^x} \sin \theta \tau_{2'} d\theta \wedge d\phi \\
&- \tau_{i'} \Gamma_\phi^{i'} \frac{E^\varphi}{\sqrt{E^x}} dx \wedge d\phi - \tau_{i'} \Gamma_\phi^{i'} \sqrt{E^x} \tau_{1'} d\theta \wedge d\phi \tag{3.63}
\end{aligned}$$

Con las definiciones (3.54)-(3.56), se puede verificar fácilmente que:

$$\tau_{1'} \wedge \tau_{2'} = \tau_3 \tag{3.64}$$

$$\tau_{1'} \wedge \tau_{3'} = -\tau_2 \tag{3.65}$$

$$\tau_{2'} \wedge \tau_{3'} = \tau_1 \tag{3.66}$$

Usando esto y desarrollando (3.63) se pueden obtener las componentes de Γ , el resultado es:

$$\Gamma = \Gamma_\alpha^{i'} \tau_{i'} d\alpha = -(\alpha + \beta)' \tau_3 dx + \frac{E^{x'}}{2E^\varphi} \tau_{2'} d\theta - \frac{E^{x'}}{2E^\varphi} \tau_{1'} \sin \theta d\phi + \tau_3 \cos \theta d\phi \tag{3.67}$$

La curvatura extrínseca puede ser hallada ahora mediante la relación $\beta K = A - \Gamma$, y los resultados (3.1) y (3.67):

$$\begin{aligned}
A - \Gamma &= (A_x + (\alpha + \beta)') \tau_3 dx + \left\{ \left[A_\varphi \cos \beta + \frac{E^{x'}}{2E^\varphi} \sin(\alpha + \beta) \right] \tau_1 \right. \\
&+ \left. \left[A_\varphi \sin \beta - \frac{E^{x'}}{2E^\varphi} \cos(\alpha + \beta) \right] \tau_2 \right\} d\theta \\
&+ \left[\left(-A_\varphi \sin \beta \sin \theta + \frac{E^{x'}}{2E^\varphi} \cos(\alpha + \beta) \sin \theta \right) \tau_1 \right. \\
&+ \left. \left(A_\varphi \cos \beta \sin \theta + \frac{E^{x'}}{2E^\varphi} \sin(\alpha + \beta) \sin \theta \right) \tau_2 \right] d\phi \tag{3.68}
\end{aligned}$$

Donde se utilizaron las relaciones (3.54)-(3.56). Comparando con (3.38), obtenemos:

$$\beta K_x = A_x + (\alpha + \beta)' \quad (3.69)$$

$$\beta K_1 = A_\varphi \cos \beta + \frac{E^{x'}}{2E^\varphi} \sin(\alpha + \beta) \quad (3.70)$$

$$\beta K_2 = A_\varphi \sin \beta - \frac{E^{x'}}{2E^\varphi} \cos(\alpha + \beta) \quad (3.71)$$

Podemos además imponer el vínculo de Gauss:

$$E^{x'} + 2A_\varphi E^\varphi \sin \alpha = 0 \rightarrow \frac{E^{x'}}{2E^\varphi} = -A_\varphi \sin \alpha \quad (3.72)$$

y entonces, las ecuaciones (3.69)-(3.71) toman la forma:

$$\beta K_x = A_x + (\alpha + \beta)' \quad (3.73)$$

$$\beta K_1 = A_\varphi \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) \quad (3.74)$$

$$\beta K_2 = A_\varphi \cos \alpha \sin(\alpha + \beta) \quad (3.75)$$

Con estos resultados y las definiciones (3.40),(3.41) podemos calcular el término dentro de los corchetes en (3.39):

$$\begin{aligned} 2\beta\sqrt{q}C(x) &= 2E^x(E^1 A'_2 - E^2 A'_1) + 2A_x E^x (A_1 E^1 + A_2 E^2) \\ &\quad + (A_1^2 + A_2^2 - 1)[(E^1)^2 + (E^2)^2] - (1 + \beta^2)(2K_x E^x (K_1 E^1 + K_2 E^2) \\ &\quad + [(K_1)^2 + (K_2)^2][(E^1)^2 + (E^2)^2]) \\ &= -\frac{1}{4\beta^2} \{4(\beta^2 + A_\varphi^2)(E^\varphi)^2 + (1 + \beta^2)(E^{x'})^2 \\ &\quad + 8\beta^2 E^x E^\varphi A'_\varphi \sin \alpha + 8E^x E^\varphi A_x A_\varphi \cos \alpha \\ &\quad + 8E^x E^\varphi A_\varphi \cos \alpha((1 + \beta^2)\alpha' + \beta') + 4(1 + \beta^2)E^\varphi A_\varphi E^{x'} \sin \alpha\} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Notar que tanto la conexión de Ashtekar-Barbero como la conexión Γ no transforman de manera covariante ante una rotación de $U(1)$, pero su diferencia K sí lo hace. En (3.76) la invariancia del vínculo hamiltoniano ante rotaciones $U(1)$ no es explícita dado que depende de cantidades como A_x y el ángulo β . Para hacer esta invariancia explícita, podemos sumar un múltiplo del vínculo de Gauss:

$$\begin{aligned} 2G\beta E^x \partial_x U &= 2E^x E^\varphi A'_\varphi \sin \alpha + 2E^x E^\varphi A'_\varphi \cos \alpha \alpha' \\ &\quad + 2E^x A_\varphi E^{\varphi'} \sin \alpha + E^x E^{x''} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Sumando este nuevo término, (3.76) se transforma en:

$$\begin{aligned} 2G\sqrt{q}C + 2G\beta E^x \partial_x U &= -\frac{1}{4\beta^2} \{4(\beta^2 + A_\varphi^2)(E^\varphi)^2 + (1 + \beta^2)(E^{x'})^2 \\ &\quad + 8E^x E^\varphi A_\varphi (A_x + (\alpha + \beta)') \cos \alpha \\ &\quad + 4(1 + \beta^2)E^\varphi A_\varphi E^{x'} \sin \alpha\} \\ &\quad + 2E^x A_\varphi E^{\varphi'} \sin \alpha + E^x E^{x''} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Ahora las cantidades A_x y β aparecen sólo a través de la cantidad $\beta K_x = A_x + (\alpha + \beta)'$, la cual se puede verificar que es invariante bajo la acción del grupo $U(1)$ aplicándole una rotación interna a (3.38). Sustituyendo $A_\varphi \sin \alpha$, $A_\varphi \cos \alpha$ con (3.45) y A_φ^2 por

$$A_\varphi^2 = \frac{\bar{A}_\varphi^2}{4} + A_\varphi^2 \sin^2 \alpha = \frac{\bar{A}_\varphi^2}{4} + \left(\frac{P^\eta}{2E^\varphi} \right)^2 \quad (3.79)$$

el vínculo (3.78) queda:

$$\begin{aligned} 2G\sqrt{q}C &= -(E^\varphi)^2 - \frac{\bar{A}_\varphi^2 (E^\varphi)^2}{4\beta^2} - \frac{E^x E^\varphi \bar{A}_\varphi}{\beta^2} (A_x + \alpha' + \beta') + \frac{E^x E^{\varphi'} P^\eta}{E^\varphi} \\ &\quad - \frac{(P^\eta)^2}{4\beta^2} - \frac{1 + \beta^2}{2\beta^2} E^{x'} P^\eta - \frac{1 + \beta^2}{4\beta^2} (E^{x'})^2 + E^x E^{x''} \\ &= -(E^\varphi)^2 - \frac{\bar{A}_\varphi^2 (E^\varphi)^2}{4\beta^2} - \frac{E^x E^\varphi \bar{A}_\varphi}{\beta^2} (A_x + \alpha' + \beta') - \frac{E^x E^{x'} E^{\varphi'}}{E^\varphi} \\ &\quad + \frac{(E^{x'})^2}{4} + E^x E^{x''} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Donde en el último paso se usó el vínculo de Gauss en su forma (3.51). Finalmente, notando que $\sqrt{q} = \sqrt{|E^x| [(E^1)^2 + (E^2)^2]} = \sqrt{|E^x|} E^\varphi$, tenemos

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2G} \left\{ -\frac{E^\varphi}{\sqrt{|E^x|}} - \frac{\bar{A}_\varphi^2 E^\varphi}{4\beta^2 \sqrt{|E^x|}} - \operatorname{sgn}(E^x) \frac{\sqrt{|E^x|} \bar{A}_\varphi}{\beta^2} (A_x + \alpha' + \beta') \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sgn}(E^x) \frac{\sqrt{|E^x|} E^{x'} E^{\varphi'}}{(E^\varphi)^2} + \frac{(E^{x'})^2}{4\sqrt{|E^x|} E^\varphi} + \operatorname{sgn}(E^x) \frac{\sqrt{|E^x|} E^{x''}}{E^\varphi} \right\} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Ahora el vínculo está expresado en función de las cantidades independientes del gauge: E^φ , \bar{A}_φ , E^x , $A_x + \alpha' + \beta'$. Hacemos un último cambio de variable con el que lograremos separar las variables invariantes ante rotaciones $U(1)$ de las dependientes. Integrando por partes, la forma simpléctica (3.44) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2G\beta} \int dx \{ \delta E^x \wedge \delta (A_x + \alpha' + \beta') + \delta E^\varphi \wedge \delta (2A_\varphi \cos \alpha) \\ &\quad + \delta (2A_\varphi E^\varphi \sin \alpha + E^{x'}) \wedge \delta (\alpha + \beta) \} \end{aligned} \quad (3.82)$$

Esta forma sugiere definir las nuevas variables

$$\bar{A}_x = A_x + \eta' = A_x + (\alpha + \beta)' \quad (3.83)$$

$$\bar{P}^\eta = P^\eta + E^{x'} \quad (3.84)$$

las cuales tienen la siguiente estructura de corchetes de Poisson:

$$\{ \bar{A}_x(x), E^x(x') \} = 2G\beta \delta(x - x') \quad (3.85)$$

$$\{ \bar{A}_\varphi(x), E^\varphi(x') \} = 2G\beta \delta(x - x') \quad (3.86)$$

$$\{ \eta(x), \bar{P}^\eta(x') \} = 2G\beta \delta(x - x') \quad (3.87)$$

En términos de estas variables, los vínculos toman la siguiente forma:

$$U = \frac{1}{2G\beta} \bar{P}^\eta \quad (3.88)$$

$$D = \frac{1}{2G\beta} \{ \bar{A}'_\varphi E^\varphi + \eta' \bar{P}^\eta - \bar{A}_x E^{x'} \} \quad (3.89)$$

$$C = \frac{1}{2G} \left\{ -\frac{E^\varphi}{\sqrt{|E^x|}} - \frac{\bar{A}_\varphi^2 E^\varphi}{4\beta^2 \sqrt{|E^x|}} - \text{sgn}(E^x) \frac{\sqrt{|E^x|} \bar{A}_\varphi \bar{A}_x}{\beta^2} \right. \\ \left. - \text{sgn}(E^x) \frac{\sqrt{|E^x|} E^{x'} E^{\varphi'}}{(E^\varphi)^2} + \frac{(E^{x'})^2}{4\sqrt{|E^x|} E^\varphi} + \text{sgn}(E^x) \frac{\sqrt{|E^x|} E^{x'}}{E^\varphi} \right\} \quad (3.90)$$

En términos de la curvatura extrínseca:

$$U = \frac{1}{2G\beta} \bar{P}^\eta \quad (3.91)$$

$$D = \frac{1}{G} \{ K'_\varphi E^\varphi + K_x E^{x'} \} + \frac{1}{2G\beta} \eta' \bar{P}^\eta \quad (3.92)$$

$$C = \frac{1}{2G} \left\{ -\frac{E^\varphi}{\sqrt{|E^x|}} - \frac{K_\varphi^2 E^\varphi}{\sqrt{|E^x|}} - \text{sgn}(E^x) 4\sqrt{|E^x|} K_\varphi K_x \right. \\ \left. - \text{sgn}(E^x) \frac{\sqrt{|E^x|} E^{x'} E^{\varphi'}}{(E^\varphi)^2} + \frac{(E^{x'})^2}{4\sqrt{|E^x|} E^\varphi} + \text{sgn}(E^x) \frac{\sqrt{|E^x|} E^{x'}}{E^\varphi} \right\} \quad (3.93)$$

El álgebra de los vínculos:

$$\{C_G[\lambda], C_G[\lambda]\} = 0 \quad (3.94)$$

$$\{C_G[\lambda], C[N]\} = 0 \quad (3.95)$$

$$\{C_G[\lambda], C_{Diff}[N^x]\} = -C_G[N^x \lambda'] = -C_G[\mathcal{L}_{N^x} \lambda] \quad (3.96)$$

$$\{C_{Diff}[M^x], C_{Diff}[N^x]\} = C_{Diff}[M^x N^{x'} - N^x M^{x'}] = C_{Diff}[[M^x, N^x]] \quad (3.97)$$

$$\{C[N], C[M]\} = C_{Diff} \left[(NM' - MN') \frac{E_x^2}{|q|} \right] - C_G \left[(NM' - MN') \frac{E_x^2}{|q|} \eta' \right] \quad (3.98)$$

Los vínculos son de primera clase. El álgebra es abierta pues los multiplicadores en el corchete entre dos vínculos hamiltonianos depende de las variables dinámicas.

Las variables canónicas evolucionan con respecto al parámetro temporal de acuerdo a las ecuaciones de Hamilton. Calculando los corchetes de las variables con el hamiltoniano, se puede ver que las ecuaciones de movimiento de η y de \bar{P}^η no involucran a las demás variables, y las ecuaciones de movimiento de las otras variables a su vez no involucran a η ni a \bar{P}^η . Sus ecuaciones de movimiento entonces están completamente desacopladas. Las variables η, \bar{P}^η corresponden a los grados de libertad internos correspondientes al grupo $U(1)$, mientras que las demás variables están relacionadas a la geometría del espaciotiempo. Para comprobar esto podemos describir la relación entre las variables de Ashtekar y las variables métricas.

Primero, elegimos coordenadas $x^\alpha = (x, \theta, \phi)$ adaptadas a la simetría esférica.

El elemento de línea está completamente caracterizado por dos funciones $\Lambda(t, x)$ y $R(t, x)$:

$$d\sigma^2(t) = q_{ab}dx^\alpha dx^\beta = \Lambda^2(t, x)dx^2 + R^2(t, x)d\Omega^2 \quad (3.99)$$

Donde $d\Omega^2 = d\theta + \sin^2\theta d\phi^2$ y R es el radio de curvatura. Luego, usando la relación $q^{\alpha\beta} = E_i^\alpha E_j^\beta \delta^{ij}$ y la forma diagonalizada de E :

$$E = E^x \tau_3 \sin\theta \partial_x + E^\varphi \tau_{1'} \sin\theta \partial_\theta + E^\varphi \tau_{2'} \partial_\phi \quad (3.100)$$

podemos obtener, con la componente (1, 1):

$$E(E^\varphi)^2 \sin^2\theta \frac{1}{\Lambda^2} = (E^x)^2 \sin^2\theta \rightarrow \Lambda^2 = \frac{(E^\varphi)^2}{E^x} \quad (3.101)$$

Donde se usó que $q = \det[E_i^\alpha] = E^x (E^\varphi)^2 \sin^2\theta$. Considerando las componentes (2, 2) o equivalentemente la (3, 3), llegamos a

$$E^x = R^2 \quad (3.102)$$

Entonces, de (3.101):

$$E^\varphi = R\Lambda \quad (3.103)$$

Por otro lado, el elemento de línea cuadrimensional está dado por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + q_{\alpha\beta}(dx^\alpha + N^\alpha dt)(dx^\beta + N^\beta dt) \quad (3.104)$$

En términos del lapso y del shift, la curvatura extrínseca:

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2N} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial N_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} - 2\Gamma_{\gamma\alpha\beta} N^\gamma \right) \quad (3.105)$$

Para el elemento de línea (3.99), las componentes de la curvatura extrínseca son [21]:

$$K_{xx} = -N^{-1}\Lambda \left(\dot{\Lambda} - (\Lambda N^x)' \right) \quad (3.106)$$

$$K_{\theta\theta} = -N^{-1}R \left(\dot{R} - R' N^x \right) \quad (3.107)$$

$$K_{\phi\phi} = \sin^2\theta K = K_{\theta\theta} \quad (3.108)$$

Recordar del capítulo anterior la siguiente relación:

$$K_\alpha^i = K_\alpha^\beta e_\beta^i \quad (3.109)$$

Las formas diagonales de K y e son respectivamente:

$$\beta K = \beta K_\alpha^{i'} \tau_{i'} dx^\alpha = [A_x + (\alpha + \beta)'] \tau_3 dx + A_\varphi \cos\alpha \tau_{1'} d\theta + A_\varphi \cos\alpha \tau_{2'} \sin\theta d\phi \quad (3.110)$$

$$e = e_\alpha^{i'} \tau_{i'} dx^\alpha = \frac{E^\varphi}{\sqrt{E^x}} \tau_3 dx + \sqrt{E^x} \tau_{1'} d\theta + \sqrt{E^x} \sin\theta \tau_{2'} d\phi \quad (3.111)$$

Entonces, usando la relación $K_\alpha^i = K_\alpha^\beta e_\beta^i$, tenemos:

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= A_x + (\alpha + \beta)' = \beta K_x^3 = \beta K_x^x e_x^3 = \beta K_{xx} e^{x3} = \beta K_{xx} \frac{\sqrt{E^x}}{E^\varphi} \\ &= \beta K_{xx} \Lambda^{-1} = -\beta N^{-1} \left(\dot{\Lambda} - (\Lambda N^x)' \right)\end{aligned}\quad (3.112)$$

$$\begin{aligned}\bar{A}_\varphi &= 2A_\varphi \cos \alpha = 2\beta K_\theta^{1'} = 2\beta K_{\theta\theta} e^{\theta 1'} = 2\beta K_{\theta\theta} \frac{1}{\sqrt{E^x}} = 2\beta K_{\theta\theta} R^{-1} \\ &= -2\beta N^{-1} \left(\dot{R} - R' N^x \right)\end{aligned}\quad (3.113)$$

Vemos entonces que las componentes de E están relacionadas a la geometría intrínseca de la superficie Σ_t , mientras que las componentes de A están relacionadas con su geometría extrínseca. Por otro lado, las variables η, \bar{P}^η corresponden únicamente a los grados de libertad internos y están completamente desacopladas de los grados de libertad correspondientes a la métrica.

Capítulo 4

Contribución electromagnética

Consideremos ahora la presencia de un campo electromagnético descrito por un potencial vector A . Este potencial vector es descrito por la 1-forma esféricamente simétrica:

$$A = \Gamma dx + \Phi dt \quad (4.1)$$

siendo Γ y Φ funciones de t y x únicamente. La acción de la teoría de Einstein-Maxwell está dada por:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \quad (4.2)$$

donde $F_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor de Maxwell, dadas por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.3)$$

En el caso esféricamente simétrico tenemos que:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2F_{01} F^{01} \quad (4.4)$$

Donde las coordenadas 0 y 1 se refieren a la temporal y radial respectivamente. Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned} F^{01} &= g^{0\mu} g^{1\nu} F_{\mu\nu} = g^{00} g^{11} F_{01} + g^{01} g^{01} F_{10} = g^{tt} g^{xx} F_{tx} + g^{tx} g^{tx} F_{xt} \\ &= \left(-\frac{1}{N^2} \left(-\frac{N^x N^x}{N^2} + q^{xx} \right) \right) F_{tx} - \frac{N^x N^x}{N^4} F_{tx} = -\frac{q^{xx}}{N^2} F_{tx} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Recordando que el elemento de línea toma la siguiente forma cuando hay simetría esférica:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \Lambda^2 (dx + N^x dt)^2 + R^2 d\Omega^2 \quad (4.6)$$

tenemos que las componentes de la métrica forman la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} (-N^2 + \Lambda^2 N^x N^x) & (\Lambda^2 N^x) & 0 & 0 \\ (\Lambda^2 N^x) & \Lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Usando esto podemos calcular la componente q^{xx} :

$$q^{xx} = g^{xx} + \frac{N^x N^x}{N^2} = \frac{(-N^2 + \Lambda^2 N^x N^x)}{\Lambda^2 (-N^2)} + \frac{N^x N^x}{N^2} = \frac{1}{\Lambda^2} \quad (4.8)$$

Entonces, la contribución electromagnética a la acción:

$$\begin{aligned} S_{\text{EM}} &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x N \Lambda R^2 \sin \theta_2 \frac{1}{N^2 \Lambda^2} (\dot{\Gamma} - \Phi')^2 \\ &= \frac{1}{2} \int dt dx \frac{1}{N \Lambda} R^2 (\dot{\Gamma} - \Phi')^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

El momento conjugado de la variable Γ :

$$P_\Gamma = (N\Lambda)^{-1} R^2 (\dot{\Gamma} - \Phi') \quad (4.10)$$

Mientras que el momento conjugado de Φ es cero, por lo que Φ es un multiplicador de Lagrange, no una variable dinámica. A partir de (4.9) y (4.10) podemos hallar el Hamiltoniano mediante una transformación de Legendre:

$$\begin{aligned} H_{\text{EM}} &= \int dt dx \left(P_\Gamma \dot{\Gamma} - \frac{1}{2} (N\Lambda) R^{-2} P_\Gamma^2 \right) \\ &= \int dt dx \left(P_\Gamma (P_\Gamma (N\Lambda R^{-2}) + \Phi') - \frac{1}{2} (N\Lambda) R^{-2} P_\Gamma^2 \right) \\ &= \int dt dx \left(\frac{1}{2} (N\Lambda R^{-2}) P_\Gamma^2 + P_\Gamma \Phi' \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Integrando por partes, el segundo sumando se puede reescribir como:

$$\int dt dx P_\Gamma \Phi' = - \int dt dx \Phi P_\Gamma' = - \int dt dx (\Phi - N^x \Gamma + N^x \Gamma) P_\Gamma' \quad (4.12)$$

Podemos redefinir el multiplicador Φ :

$$\tilde{\Phi} := \Phi - N^x \Gamma \quad (4.13)$$

Entonces, el Hamiltoniano de Maxwell:

$$\begin{aligned} H_{\text{EM}} &= \int dt dx \left[N \left(\frac{1}{2} \Lambda R^{-2} P_\Gamma^2 \right) + N^x (-\Gamma P_\Gamma') + \Phi' (-P_\Gamma') \right] \\ &= C_{\text{EM}}(N) + C_{\text{EM}}^{\text{Diff}}(N^x) + C_{\text{EM}}^G \end{aligned} \quad (4.14)$$

Los vínculos de la teoría de Einstein-Maxwell son:

$$C(N) = C_{\text{Gr}}(N) + C_{\text{EM}}(N) \quad (4.15)$$

$$C_{\text{Diff}}(N^x) = C_{\text{Gr}}^{\text{Diff}}(N^x) + C_{\text{EM}}^{\text{Diff}}(N^x) \quad (4.16)$$

$$C_G(\Lambda) = 0 \quad (4.17)$$

$$C_{\text{EM}}^G = 0 \quad (4.18)$$

Capítulo 5

Espacio cuántico

Este capítulo está dedicado a la construcción del espacio cinemático de LQG. En el capítulo 2 reformulamos la relatividad general como una teoría de conexiones, las cuales sustituyeron a la métrica. Las variables fundamentales son las componentes de la conexión de Ashtekar-Barbero y sus momentos conjugados las tríadas. Los estados de la teoría cuantizada serán entonces función de la conexión. Los estados del espacio cinemático que queremos construir deben ser invariantes ante las transformaciones de gauge, esto es, antes las transformaciones de gauge internas y ante los difeomorfismos espaciales. Para construir el espacio recurriremos primero a conceptos provenientes de teorías de gauge en redes y luego los adaptaremos al contexto de gravedad cuántica. La principal fuente de este capítulo es el libro de Rovelli [27].

5.1 Producto escalar en teorías de gauge sobre redes

A continuación introduciremos la definición de producto escalar en el contexto de una teoría de gauge en una red ya que este es el producto escalar usaremos más adelante para proceder con la cuantización de la formulación canónica de la relatividad general. Consideremos una red Γ en tres dimensiones con L aristas l y N nodos n . Para definir una teoría de Yang-Mills para un grupo compacto G en esta red, asociamos a cada arista l un elemento U_l del grupo. Consideremos el espacio de Hilbert $\tilde{K}_\Gamma = L^2[G^L, dU_l]$, donde G^L es el producto tensorial de L copias del grupo G , y $dU_l = dU_1 \dots dU_L$ es la medida de Haar en G . Los estados cuánticos en \tilde{K}_Γ son funciones $\Psi(U_l)$ de L elementos del grupo. El producto escalar entre dos estados se define como:

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int dU_1 \dots dU_L \overline{\Psi(U_1, \dots, U_L)} \Phi(U_1, \dots, U_L) \quad (5.1)$$

Para encontrar una base del espacio \tilde{K}_Γ , podemos recurrir al teorema de Peter-Weyl, éste dice que una base ortonormal de $L_2[G, dU]$ está dada por los estados $|j, \beta, \alpha\rangle$ definidos por $\langle U | j, \beta, \alpha \rangle = (R^j(U))_\beta^\alpha$, esto es, los elementos de matriz de la representación unitaria irreducible de spin j del grupo G . Entonces,

una base de \tilde{K}_Γ está dada por los estados:

$$|j_l, \beta_l, \alpha_l\rangle = |j_1, \dots, j_L, \beta_1, \dots, \beta_L, \alpha_1, \dots, \alpha_L\rangle \quad (5.2)$$

definidos por

$$\langle U | j_l, \beta_l, \alpha_l \rangle = \prod_l (R^{j_l}(U_l))_{\beta_l}^{\alpha_l} \quad (5.3)$$

Bajo una transformación de gauge, una holonomía transforma (Apéndice B):

$$U_l \rightarrow \lambda_{l_i}^{-1} U_l \lambda_{l_f} \quad (5.4)$$

donde λ es el elemento del grupo de gauge, y l_i, l_f son los nodos en donde la arista l empieza y termina respectivamente. Entonces, los estados invariantes de gauge son los que satisfacen

$$\Psi(U_l) = \Psi(\lambda_{l_i}^{-1} U_l \lambda_{l_f}) \quad (5.5)$$

Estos estados forman un subespacio \tilde{K}_Γ^0 de \tilde{K}_Γ . Para obtener una base de \tilde{K}_Γ^0 definiremos a continuación el concepto de intertwiner.

5.1.1 Intertwiners

Consideremos N representaciones irreducibles $j_1 \dots j_N$ del grupo G . Consideremos ahora el producto tensorial de sus espacios de Hilbert

$$\mathcal{H}_{j_1 \dots j_N} = \mathcal{H}_{j_1} \dots \mathcal{H}_{j_N} \quad (5.6)$$

Sea $\mathcal{H}_{j_1 \dots j_N}^0$ el subespacio formado por vectores invariantes ante la acción del grupo. Sea k la dimensión de este espacio, esto es, la cantidad de veces que la representación trivial aparece en la descomposición. Llamamos *intertwiners* entre las representaciones $j_1 \dots j_N$ a los elementos de la base de este espacio. Los intertwiners son entonces tensores con índices en cada una de las representaciones, los cuales son invariantes ante la acción del grupo G en todos sus índices:

$$R_{\beta_1}^{(j_1)\alpha_1}(U) \dots R_{\beta_N}^{(j_N)\alpha_N}(U) v^{\beta_1 \dots \beta_N} = v^{\alpha_1 \dots \alpha_N} \quad (5.7)$$

Además son ortogonales en el producto escalar de $\mathcal{H}_{j_1 \dots j_N}^0$:

$$\overline{v^{i\alpha_1 \dots \alpha_N}} v_{i'\alpha_1 \dots \alpha_N} = \delta_i^{i'} \quad (5.8)$$

Si un espacio \mathcal{H}_j tiene una representación j , decimos que su espacio dual \mathcal{H}_j^* tiene la representación dual j^* . Un intertwiner entre n representaciones duales $j_1^* \dots j_n^*$ y m representaciones $j_1 \dots j_m$ es un tensor invariante en el espacio $(\otimes_{i=1, n} \mathcal{H}_{j_i}^*) \otimes (\otimes_{k=1, m} \mathcal{H}_{j_k})$. Asociamos entonces a cada arista l una representación j_l , y a cada nodo n un intertwiner i_n en el producto tensorial de las representaciones asociadas a las aristas adyacentes al mismo. Al conjunto $s = (\Gamma, j_l, i_n)$ se le denomina *red de espines*. Una red de espines define un estado $|s\rangle$:

$$\langle U_l | s \rangle = \Psi_s(U_l) = \prod_l R^{j_l}(U_l) \cdot \prod_n i_n \quad (5.9)$$

donde el punto indica contracción en todos los índices. Debido a las propiedades de los intertwiners, estos estados son invariantes de gauge, es decir, verifican (5.5). Estos estados forman una base ortonormal de \tilde{K}_Γ^0 :

$$\langle s|s'\rangle = \delta_{ss'} \quad (5.10)$$

5.2 Espacio cinemático \mathcal{K}

Construimos ahora el espacio cinemático, utilizando los resultados de la sección anterior.

5.2.1 Funciones cilíndricas

Sea \mathcal{G} el espacio de las conexiones A definidas en la superficie Σ . Sea S el espacio de funcionales en \mathcal{G} . Recordar que una conexión $\mathfrak{su}(2)$ se escribe como

$$A = A_\alpha^i \tau_i dx^\alpha \quad (5.11)$$

donde τ_i son los generadores del álgebra de Lie de $\mathfrak{su}(2)$: $\tau_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$ siendo σ_i las matrices de Pauli. Dado un camino γ en Σ , la conexión A determina un elemento del grupo $SU(2)$, la holonomía de A a lo largo del camino γ :

$$U(A, \gamma) = \mathcal{P}exp \int_\gamma A \quad (5.12)$$

Una holonomía es a la vez un funcional de \mathcal{G} . Si consideramos una colección ordenada de caminos Γ en Σ formada por L caminos $\gamma_1 \dots \gamma_L$ (a la cual llamaremos grafo de ahora en adelante) y una función suave $f(U_1, \dots, U_L)$ de L elementos del grupo, entonces podemos definir un funcional de A

$$\Psi_{\Gamma, f}[A] = f(U(A, \gamma_1), \dots, U(A, \gamma_L)) \quad (5.13)$$

Definimos el espacio S como el espacio de todos los funcionales $\Psi_{\Gamma, f}[A]$ para todo Γ y para toda función suave f . Llamamos a estos funcionales *funciones cilíndricas*.

5.2.2 Producto escalar

Una función cilíndrica es una función de un cierto número de elementos del grupo. Para definir un producto escalar entre dos funciones cilíndricas podemos entonces utilizar (5.1). Si dos funcionales de A , $\Psi_{\Gamma, f}[A]$ y $\Psi_{\Gamma, g}$ están definidos en el mismo grafo Γ , definimos su producto escalar:

$$\langle \Psi_{\Gamma, f} | \Psi_{\Gamma, g} \rangle = \int dU_1 \dots dU_L \overline{f(U_1, \dots, U_L)} g(U_1, \dots, U_L) \quad (5.14)$$

Si los funcionales están definidos en grafos diferentes Γ' y Γ'' , entonces la definición anterior se puede extender fácilmente si consideramos la unión Γ de ambos grafos y definimos la función f en Γ :

$$f(U_1, \dots, U_{L'}, U_{L'+1}, \dots, U_{L'+L''}) = f'(U_1, \dots, U_{L'}) \quad (5.15)$$

$$g(U_1, \dots, U_{L''}, U_{L''+1}, \dots, U_{L'+L''}) = g''(U_1, \dots, U_{L''}) \quad (5.16)$$

para toda función f' definida en Γ' y toda función g'' definida en Γ'' . Usando esto, el producto escalar (5.14) es válido para dos funcionales cualesquiera en S :

$$\langle \Psi_{\Gamma', f'} | \Psi_{\Gamma'', g''} \rangle \equiv \langle \Psi_{\Gamma, f} | \Psi_{\Gamma, g} \rangle \quad (5.17)$$

Hay que notar que si bien el producto escalar (5.14) es similar al definido en (5.1), en este caso estamos trabajando con una teoría continua en la cual los estados no viven en una sola red Γ , sino en todas las posibles redes en Σ . Más adelante veremos que este producto escalar es invariante bajo difeomorfismos y transformaciones locales de Gauge, y es tal que los observables clásicos reales se transforman en operadores autoadjuntos al cuantizar. Estas condiciones son las que debe satisfacer el producto escalar para tener una teoría consistente con el límite clásico correcto.

5.2.3 Base ortonormal de \mathcal{K}

Por el teorema de Peter-Weyl, tenemos que una base de $L^2(SU(2))$ está dada por los elementos de matriz de las representaciones irreducibles del grupo. Escribimos los elementos de matriz de la representación de spin j de $SU(2)$ como:

$$R_{\beta}^{(j)\alpha}(U) = \langle U | j, \alpha \beta \rangle \quad (5.18)$$

Eligiendo un orden y una orientación para un grafo Γ , entonces una base de $\tilde{K}_{\Gamma} = L^2[SU(2)^L]$, cuyos elementos denotaremos por

$$|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle \equiv |\Gamma, j_1, \dots, j_L, \alpha_1, \dots, \alpha_L, \beta_1, \dots, \beta_L\rangle \quad (5.19)$$

se obtiene tomando el producto tensorial de elementos del tipo (5.18):

$$\langle A | \Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l \rangle = R_{\beta_1}^{(j_1)\alpha_1}(U(A, \gamma_1)) \dots R_{\beta_L}^{(j_L)\alpha_L}(U(A, \gamma_L)) \quad (5.20)$$

Si el grafo Γ está contenido en el grafo Γ' , entonces los elementos (5.20) aparecen en ambos espacios \tilde{K}_{Γ} y $\tilde{K}_{\Gamma'}$. Para deshacerse de esta redundancia, notemos que los elementos de \tilde{K}_{Γ} pertenecen a la representación trivial de los caminos que están en Γ' pero no en Γ . Por lo tanto, una base ortonormal de \mathcal{K} está dada por los elementos $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$ donde los espines j nunca toman el valor cero.

Para cada grafo Γ definimos el subespacio propio \mathcal{K}_{Γ} como el subconjunto de \tilde{K}_{Γ} generado por los estados (5.19) con $j_l > 0$. Los subespacios propios \mathcal{K}_{Γ} son ortogonales entre sí y generan \mathcal{K} :

$$K \sim \bigoplus_{\Gamma} K_{\Gamma} \quad (5.21)$$

El grafo $\Gamma = \emptyset$ está incluido en la suma, su espacio de Hilbert correspondiente es unidimensional y está generado por el elemento identidad $|\emptyset\rangle$: $\langle A | \emptyset \rangle = 1$

5.2.4 Invariancias del producto escalar

Como fue mencionado anteriormente, el producto escalar (5.14) cumple propiedades necesarias para tener una teoría cuántica consistente. En este apartado estudiaremos dos de ellas: La invariancia bajo transformaciones de gauge, y la

invariancia bajo difeomorfismos espaciales.

Transformaciones de gauge locales. La conexión A transforma de la siguiente manera bajo transformaciones $SU(2)$ locales $\lambda : \Sigma \rightarrow SU(2)$ (Apéndice B):

$$A \rightarrow A_\lambda = \lambda A \lambda^{-1} + \lambda d\lambda^{-1} \quad (5.22)$$

Esta transformación induce una representación de las transformaciones de gauge locales $\Psi(A) \rightarrow \Psi(A_{\lambda^{-1}})$ en \mathcal{K} . La holonomía por otro lado transforma de forma homogénea (Apéndice B):

$$U[A, \gamma] \rightarrow U[A_\lambda, \gamma] = \lambda(x_f^\gamma) U[A, \gamma] \lambda^{-1}(x_i^\gamma) \quad (5.23)$$

Donde $x_i^\gamma, x_f^\gamma \in \Sigma$ son los puntos inicial y final del camino γ . Dado un par (Γ, f) , definimos

$$f_\lambda(U_1, \dots, U_L) = f(\lambda(x_f^{\gamma_1}) U_1 \lambda^{-1}(x_i^{\gamma_1}), \dots, \lambda(x_f^{\gamma_L}) U_L \lambda^{-1}(x_i^{\gamma_L})) \quad (5.24)$$

Entonces, la acción de una transformación de gauge local U_λ sobre los estados cuánticos es:

$$\Psi_{\Gamma, f}(A) \rightarrow [U_\lambda \Psi_{\Gamma, f}](A) = \Psi_{\Gamma, f_{\lambda^{-1}}}(A) \quad (5.25)$$

La medida de Haar es invariante bajo la acción derecha e izquierda del grupo, por lo que el producto escalar (5.14) lo es también.

Difeomorfismos espaciales. Bajo un difeomorfismo, la conexión transforma como una 1-forma

$$A \rightarrow \phi^* A \quad (5.26)$$

S tiene una representación U_ϕ del grupo de difeomorfismos definida por

$$U_\phi \Psi(A) = \Psi((\phi^*)^{-1} A) \quad (5.27)$$

La holonomía transforma entonces de la siguiente manera:

$$U[A, \gamma] \rightarrow U[\phi^* A, \gamma] = U[A, \phi^{-1} \gamma] \quad (5.28)$$

donde $(\phi\gamma)(s) \equiv (\phi(\gamma(s)))$. Entonces, una función cilíndrica $\Psi_{\Gamma, f}[A]$ bajo un difeomorfismo se transforma en otra función cilíndrica $\Psi_{\phi\Gamma, f}[A]$. El producto escalar (5.14) no depende explícitamente del grafo por lo que es invariante bajo difeomorfismos espaciales.

5.3 Estados invariantes gauge e invariantes bajo difeomorfismos

En la sección anterior introdujimos el espacio cinemático \mathcal{K} el cual es el espacio de funcionales de onda arbitrarios de la conexión $\Psi[A]$. Los estados físicos son invariantes ante la acción de todos los vínculos, esto es, deben ser invariantes gauge, invariantes bajo difeomorfismos, y deben ser solución a la ecuación de Wheeler-DeWitt. Llamemos \mathcal{K}_0 al subespacio de \mathcal{K} invariante gauge, $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$ al subespacio invariante gauge y además invariante por difeomorfismos, y \mathcal{H} al subespacio de $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$ cuyos elementos son solución a la ecuación de Wheeler-DeWitt. En las próximas secciones construiremos los espacios \mathcal{K}_0 y $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$.

5.3.1 Estados invariantes gauge. Espacio \mathcal{K}_0

Para obtener una base del espacio \mathcal{K}_0 podemos recurrir al concepto de redes de espines, introducido al comienzo del capítulo en el contexto de teorías de gauge en redes. Las redes de espines en gravedad cuántica son diferentes a las introducidas anteriormente debido a la invariancia por difeomorfismos espaciales.

Redes de espines. Sea Γ un grafo en Σ formado por curvas γ a las que llamaremos aristas y denotamos por l . Llamamos nodos a las intersecciones de dichas curvas y las denotamos por n . Le llamamos m (*multiplicidad*) al número de links que empiezan y terminan en un nodo: $m = m_{in} + m_{out}$, siendo m_{in} el número de links que terminan en el nodo, y m_{out} el número de links que empiezan en él. Una vez elegido un orden y una orientación, asignamos a cada link l una representación irreducible j_l del grupo. A cada nodo n le asignamos un intertwiner i_n entre las representaciones asociadas a los links adyacentes al nodo. A la terna (Γ, j_l, i_n) se la llama *red de espines en Σ* . A la elección j_l y i_n se le llama color de los links y de los intertwiners respectivamente.

Estados de redes de espines. Sea $S = (\Gamma, j_l, i_n)$ una red de espines con L links y N nodos. El estado $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$ definido en (5.20) tiene L índices α_l y L índices β_l . Los intertwiners tienen un conjunto de índices duales a estos, su contracción:

$$\begin{aligned} \Psi_S[A] &= \langle A|S \rangle \equiv \left(\otimes_l R^{j_l}(H[A, \gamma_l]) \right) \cdot \left(\otimes_n i_n \right) \\ &= \langle A|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l \rangle \cdot \left(\otimes_n i_n \right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

El índice α_l del link l se contrae con el índice correspondiente del intertwiner en donde el link empieza, mientras que el índice β_l se contrae con el del intertwiner en donde termina. De (5.25) tenemos que bajo una transformación de gauge U_λ los estados $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$ transforman:

$$\begin{aligned} U_\lambda |\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle &= R_{\alpha'_1}^{j_1 \alpha_1}(\lambda^{-1}(x_{f_1})) R_{\beta_1}^{j_1 \beta'_1}(\lambda(x_{i_1})) \dots \\ &R_{\alpha'_L}^{j_L \alpha_L}(\lambda^{-1}(x_{f_L})) R_{\beta_L}^{j_L \beta'_L}(\lambda(x_{i_L})) |\Gamma, j_l, \alpha'_L, \beta'_L\rangle \end{aligned} \quad (5.30)$$

Teniendo en cuenta esto y la invariancia de los intertwiners (5.7), tenemos que los estados (5.29) son invariantes gauge. Dado que los estados $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$ forman una base de \mathcal{K} y la invariancia de los intertwiners, tenemos que los estados de redes de espines forman una base del espacio \mathcal{K}_0 .

5.3.2 Invariancia bajo difeomorfismos. Espacio $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$

Un difeomorfismo ϕ mueve el grafo en la variedad por lo que los estados de redes de espines no son invariantes bajo difeomorfismos. Sin embargo, un difeomorfismo puede no sólo mover el grafo, sino también cambiar el orden del mismo o la orientación de sus links. Entonces, aún si $\phi\Gamma = \Gamma$, el orden u orientación puede ser cambiado, y por lo tanto el estado obtenido tras la transformación será diferente. Dado un grafo ordenado y orientado Γ , hay un grupo discreto de mapas G_Γ que cambian su orden y orientación. Los elementos de este grupo actúan sobre K_Γ . Para encontrar los estados invariantes por difeomorfismos,

debemos ir al espacio de los funcionales Φ de los estados Ψ . La acción sobre estos funcionales está dada por

$$(U_\phi \Phi)(\Psi) \equiv \Phi(U_{\phi^{-1}} \Psi) \quad (5.31)$$

Entonces, un funcional Φ invariante es aquel que cumple

$$\Phi(U_\phi \Phi) \equiv \Phi(\Psi) \quad (5.32)$$

Definimos ahora un mapa P_{Diff} que actúa en los funcionales $\Psi[A]$ y da como resultado un funcional $\Phi[\Psi]$, su acción está definida por

$$(P_{\text{Diff}} \Psi)(\Psi') = \sum_{\Psi''=U_\phi \Psi} \langle \Psi'', \Psi' \rangle \quad (5.33)$$

donde la suma es sobre todos los estados Ψ'' para los cuales existe un difeomorfismo ϕ tal que $\Psi'' = U_\phi \Psi$. Esta suma es siempre finita, ya que los estados Ψ, Ψ' se pueden escribir como una combinación lineal finita de estados de redes de espines. Si un difeomorfismo sobre Ψ cambia el grafo, entonces lleva el estado a otro ortogonal a sí mismo, mientras que si cambia sólo su orientación y/o su orden, al ser estas operaciones discretas no hacen más que añadir una multiplicidad discreta a la suma. Los estados (5.33) forman el subespacio de \mathcal{K} de estados invariantes gauge e invariantes bajo difeomorfismos. El producto escalar en $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$ está definido por

$$\langle P_{\text{Diff}} \Psi_S, P_{\text{Diff}} \Psi_{S'} \rangle_{\mathcal{K}_{\text{Diff}}} \equiv (P_{\text{Diff}} \Psi_S)(\Psi_{S'}) \quad (5.34)$$

5.3.3 Nudos y estados de spin-nudos

Llamamos *nudo* a una clase de equivalencia K bajo difeomorfismos de grafos Γ no orientados. Sean $|S\rangle$ y $|S'\rangle$ dos estados de redes de espines. Entonces tenemos que su producto escalar en $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$ es cero al menos que sus grafos estén relacionados por un difeomorfismo:

$$\langle S | P_{\text{Diff}} | S' \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \Gamma \neq \phi \Gamma' \\ \sum_k \langle S | g_k | S' \rangle & \text{si } \Gamma \neq \phi \Gamma' \end{cases} \quad (5.35)$$

donde g_k son las operaciones discretas que no cambian el grafo. Entonces, dos estados son ortogonales a menos que estén “anudados” de la misma manera. Se puede entonces agrupar los elementos de una base de $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$ en distintas clases K . Llamamos \mathcal{K}_K al subespacio de $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$ generado por los estados de la base pertenecientes a la clase del nudo K :

$$\mathcal{K}_K = P_{\text{Diff}} K_\Gamma \quad (5.36)$$

para cualquier $\Gamma \in K$.

Los estados en \mathcal{K}_K se distinguen entre sí sólo por el color de sus links y de sus nodos, y no son necesariamente ortonormales. Para obtener una base ortonormal entonces se debe realizar un proceso de ortonormalización a la forma cuadrática en (5.35). Denotamos por $|s\rangle = |K, c\rangle$ a los estados resultantes de esa ortonormalización. Al índice discreto c se le llama *color del nudo*. A

estos estados se les denomina *estados de spin-nudos*. Los nudos forman un conjunto discreto, por lo que el espacio $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$ admite una base ortonormal y es entonces separable. El “tamaño excesivo” del espacio de Hilbert cinemático \mathcal{K} en realidad no era más que gauge. Con esto concluimos la construcción del espacio cinemático cuántico. Los estados de este espacio que sean además solución a la ecuación de Wheeler-DeWitt son los estados físicos.

5.4 Operadores básicos

Las dos variables básicas de la teoría son la conexión A_α^i y su momento conjugado, la tríada E_i^α . Los estados cuánticos son funcionales de la conexión $\Psi[A]$. Siguiendo el procedimiento descrito en (§ C.4.1), definimos los operadores

$$\hat{A}_\alpha^i \Psi[A] = A_\alpha^i \Psi[A] \quad (5.37)$$

$$\hat{E}_i^\alpha \Psi[A] = -i\hbar 8\pi G \frac{\delta}{\delta A_\alpha^i} \Psi[A] \quad (5.38)$$

Estos operadores no están bien definidos en el espacio \mathcal{K} pues envían al estado $\Psi[A]$ fuera del mismo. Por esto, es necesario definir operadores que sean función de los operadores básicos (5.37)-(5.38) y que sí estén bien definidos en el espacio \mathcal{K} .

Un caso simple posible es la holonomía $U(A, \gamma)$. Sean $U_B^A(A, \gamma)$ los elementos de matriz del elemento del grupo $U(A, \gamma)$, entonces

$$(U_B^A(A, \gamma)\Psi)[A] = U_B^A(A, \gamma)[A]\Psi[A] \quad (5.39)$$

Cualquier función cilíndrica de hecho está bien definida como operador multiplicativo. El caso de la tríada es un poco más complicado y nos limitaremos a presentar un resumen de la construcción del operador asociado a la misma. Para más detalles ver [27] o [33]. Primero, tenemos que la derivada funcional de la holonomía $U(A, \gamma)$ está dada por

$$\frac{\delta}{\delta A_\alpha^i(x)} U(A, \gamma) = \int ds \dot{\gamma}(s) \delta^3(\gamma(s), x) [U(A, \gamma_1) \tau_i U(A, \gamma_2)] \quad (5.40)$$

donde $\gamma(s)$ es una parametrización arbitraria de la curva γ , y el punto s la divide en γ_1 y γ_2 . El resultado es una distribución de dos dimensiones, pues la delta de Dirac es tridimensional y está integrada en la curva. Es natural entonces integrar este resultado en una superficie bidimensional dentro de Σ a la que llamaremos \mathcal{S} . Si llamamos $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2)$ a las coordenadas en \mathcal{S} , entonces esta está definida en Σ por $(\sigma^1, \sigma^2) \rightarrow x^\alpha(\sigma^1, \sigma^2)$. Definimos el operador

$$E_i(\mathcal{S}) = -i\hbar 8\pi G \int_{\mathcal{S}} d\sigma^1 d\sigma^2 n_\alpha(\vec{\sigma}) \frac{\delta}{\delta A_\alpha^i(x(\vec{\sigma}))} \quad (5.41)$$

donde

$$n_\alpha(\vec{\sigma}) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^\gamma(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^2} \quad (5.42)$$

Es el vector normal a S .

La acción de este operador en una holonomía $U(A, \gamma)$ está dada por

$$\begin{aligned} E_i(\mathcal{S})U(A, \gamma) &= -i\hbar 8\pi G \int_S d\sigma^1 d\sigma^2 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^\gamma(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^2} \frac{\delta}{\delta A_\gamma^i(\vec{x}(\vec{\sigma}))} U(A, \gamma) \\ &= -i\hbar 8\pi G \int_S \int_\gamma d\sigma^1 d\sigma^2 ds \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^\gamma(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^2} \frac{\partial x^\gamma}{\partial s} \delta^3(\vec{x}(\vec{\sigma}), \vec{x}(s)) \\ &\quad \times U(A, \gamma_1) \tau_i U(A, \gamma_2) \end{aligned} \quad (5.43)$$

donde se supuso que la curva γ interseca a la superficie S en un solo punto P , el cual separa a γ en γ_1 y γ_2 . Si consideramos el siguiente cambio de variable de (σ^1, σ^2, s) a (x^1, x^2, x^3) :

$$x^\alpha(\sigma^1, \sigma^2, s) = x^\alpha(\sigma^1, \sigma^2) + x^\alpha(s) \quad (5.44)$$

cuyo jacobiano es precisamente

$$J = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\sigma^1, \sigma^2, s)} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^\beta}{\partial \sigma^2} \frac{\partial x^\gamma}{\partial s} \quad (5.45)$$

se puede verificar que (5.43) da como resultado:

$$E_i(\mathcal{S})U(A, \gamma) = \pm i\hbar 8\pi G U(A, \gamma_1) \tau_i U(A, \gamma_2) \quad (5.46)$$

La acción del operador (5.41) es introducir la matriz $\pm i\hbar 8\pi G \tau_i$ en el punto de intersección de la curva γ y la superficie S .

Si hay varios puntos P de intersección, el resultado anterior se extiende a

$$E_i(\mathcal{S})U(A, \gamma) = \sum_{P \in (\mathcal{S} \cap \gamma)} \pm i\hbar 8\pi G U(A, \gamma_1^P) \tau_i U(A, \gamma_2^P) \quad (5.47)$$

A partir del operador (5.41), se puede construir un operador que se corresponde con la cantidad clásica:

$$A(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} d^2\sigma E \quad (5.48)$$

Con $E = \sqrt{n_\alpha E_i^\alpha n_\beta E_i^\beta} d\sigma$. (5.48) da como resultado el área de la superficie \mathcal{S} por lo que el operador asociado será el operador área. Los estados de redes de espines resultan ser estados propios de este operador. Sea $|S\rangle$ uno de estos estados correspondiente a un grafo Γ entonces tenemos:

$$A(\mathcal{S}) |S\rangle = \hbar 8\pi G \sum_{P \in (\mathcal{S} \cap \Gamma)} \sqrt{j_P(j_P + 1)} |S\rangle \quad (5.49)$$

Vemos entonces que el área de la superficie \mathcal{S} se obtiene como la suma de las contribuciones de las aristas que intersectan con ella.

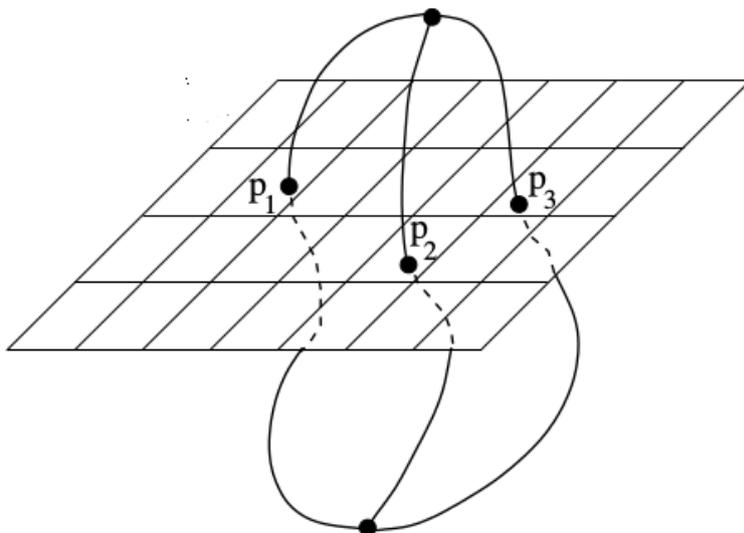


Figura 1: Los links de la red de espines atraviesan la superficie, cada una de estas intersecciones contribuye al área total de la misma. (Extraído de “Quantum Gravity” de Carlo Rovelli)

Un link cuyo spin sea j y que intersekte con la superficie contribuye una cantidad de $\hbar 8\pi G \sqrt{j(j+1)}$ al área total de la misma. Notar que el valor más pequeño posible en (5.49) se da cuando un solo link intersekte la superficie \mathcal{S} y su valencia es $1/2$, en ese caso, el área de la superficie será

$$A_0 = 4\sqrt{3}\hbar\pi G c^{-3} \sim 10^{-66} \text{cm}^2 \quad (5.50)$$

La cantidad A_0 es una especie de cuanto de área. Ningun área puede ser medida que sea más pequeña que esta: El área está discretizada. Esto no fue impuesto a priori sino que es una consecuencia directa de la cuantización de la teoría.

De manera análoga se puede definir un operador asociado al volumen de una cierta región de la variedad tridimensional Σ . Sea \mathcal{R} una región de Σ , entonces, el volumen de \mathcal{R} está dado clásicamente por

$$V(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} d^3x \sqrt{\frac{1}{3!} |\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{ijk} E^{\alpha i} E^{\beta j} E^{\gamma k}|} \quad (5.51)$$

A partir de esta expresión se puede construir el operador cuántico asociado al volumen de una región [27]. Así como cada link que intersectara a una superficie S daba una contribución al área total de la misma, análogamente en este caso, los nodos de la red de espines dan una contribución al volumen de la región \mathcal{R} . Se puede probar que este operador está bien definido, es autoadjunto, definido positivo y que tiene un espectro discreto. Estos son resultados muy importantes en LQG: El espacio físico está discretizado. La interpretación de los estados de redes de espines es la siguiente: Cada nodo de la red representa un cuanto de volumen. Estos cuantos de volumen están separados entre sí por superficies, representadas por los links que unen a los nodos. Cuando consideramos los estados spin-nudos, la ubicación de la red en la variedad tridimensional pasa a ser irrelevante por la invariancia bajo difeomorfismos, sólo importa la ubicación relativa de los elementos de la red.

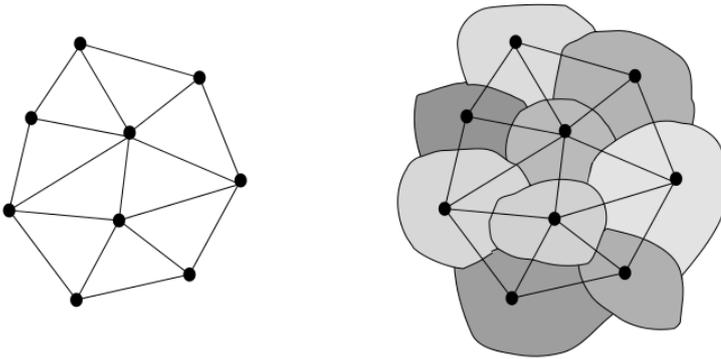


Figura 2: Los nodos de la red representan cuantos de volumen, separados por superficies representadas por los links. (Extraído de “Quantum Gravity” de Carlo Rovelli)

5.5 Simetría esférica

En las secciones anteriores se introdujeron conceptos y técnicas utilizadas en LQG en un contexto general. Esta sección está dedicada a la especialización de algunas de las cosas vistas en las secciones anteriores al caso de simetría esférica. Recordar del capítulo 3 que mediante la reducción por simetría, uno terminaba con tres pares de variables canónicas: $(\bar{A}_\varphi, E^\varphi)$, (\bar{A}_x, E^x) y (η, P^η) . Los estados de redes de espines están dados por el producto de las holonomías de estas variables. Dado un grafo g con aristas e_j y vértices v_j , los estados de redes de espines toman la siguiente forma:

$$T_{g, \vec{k}, \vec{\mu}, \vec{n}} = \prod_{e_j \in g} e^{\frac{i}{2} k_j \int_{e_j} \bar{A}_x(x) dx} \prod_{v_j \in g} e^{i \mu_j \bar{A}_\varphi(v_j)} e^{i n_j \eta(v_j)} \quad (5.52)$$

donde k_j , la valencia de la arista e_j , es la representación del elemento del grupo $U(1)$ obtenido al tomar la holonomía de la conexión \bar{A}_x . El caso de \bar{A}_φ y η es un poco más complicado. Intuitivamente se puede pensar que μ_j y n_j son el resultado de integrar estas variables en una curva angular de radio constante ya que al no haber dependencia angular la integral tendrá un efecto meramente multiplicativo. Sin embargo, ni \bar{A}_φ ni η son conexiones genuinas [6], mientras que para definir una holonomía es necesario tener una conexión. En realidad, si uno comienza con una holonomía en la teoría completa $U(A, \gamma) = e^{\int A_\alpha^i \tau_i dx^\alpha}$, introduciendo la conexión esféricamente simétrica (3.1) y con un poco de trabajo es posible probar que los estados de redes de espines esféricamente simétricos toman la forma (5.52) [6].

5.5.1 Acción de las tríadas

Cerramos este capítulo con la acción de los operadores asociados a las tríadas sobre los estados de redes de espines esféricamente simétricos, las cuales serán usadas al principio del próximo capítulo. Recordar que el operador E_i^α estaba definido como

$$\hat{E}_i^\alpha = -i\hbar 8\pi G \frac{\delta}{\delta A_\alpha^i} \quad (5.53)$$

Entonces, tenemos:

$$\hat{E}^x(x) = -i\hbar 8\pi G \frac{\delta}{\delta \bar{A}_x(x)} \quad (5.54)$$

Actuando sobre el estado (5.52), da como resultado:

$$\hat{E}^x(x) T_{g, \vec{k}, \vec{\mu}, \vec{n}} = \hbar 8\pi G \frac{k_j^+(x) + k_j^-(x)}{2} T_{g, \vec{k}, \vec{\mu}, \vec{n}} \quad (5.55)$$

Siendo $k_j^+(x)$ y $k_j^-(x)$ las valencias de las aristas que se unen en x si este es un vértice, o las valencias de la arista que contiene a x si no lo es. Luego, observemos que el operador

$$\hat{E}^\varphi(x) = -i\hbar 8\pi G \frac{\delta}{\delta \bar{A}_\varphi(x)} \quad (5.56)$$

aplicado sobre los estados (5.52) darán un resultado distribucional ya que \bar{A}_φ no está integrado. Para suavizar el resultado integramos en una región \mathcal{I} :

$$\int_{\mathcal{I}} \hat{E}^\varphi T_{g,\vec{k},\vec{\nu},\vec{n}} = \hbar 8\pi G \sum_{v_j \in \mathcal{I}} \mu_j T_{g,\vec{k},\vec{\nu},\vec{n}} \quad (5.57)$$

De manera análoga:

$$\int_{\mathcal{I}} \hat{P}^\eta T_{g,\vec{k},\vec{\nu},\vec{n}} = \hbar 8\pi G \sum_{v_j \in \mathcal{I}} n_j T_{g,\vec{k},\vec{\nu},\vec{n}} \quad (5.58)$$

Por último, mencionamos la acción de la derivada del operador \hat{E}^x . El mismo puede ser realizado como una diferencia finita [17]. Más adelante veremos que dicho operador aparecerá en expresiones en las que está bajo una integral, por lo que el espaciado de la diferencia finita termina cancelándose. La acción de este operador sobre un estado de redes de espines puede entonces ser realizada como

$$\int_{x^-}^{x^+} (E^x)' dx = E(x^+) - E(x^-) \quad (5.59)$$

Capítulo 6

Abelianización del vínculo hamiltoniano

Uno de las dificultades a la hora de cuantizar la teoría está en que el corchete de Poisson entre dos vínculos hamiltonianos da como resultado un vínculo de difeomorfismos cuyo multiplicador depende de las variables dinámicas, el álgebra de los vínculos no es un álgebra de Lie. Sin embargo, mediante un reescalado de los multiplicadores de Lagrange y una combinación lineal con el vínculo de difeomorfismos, es posible abelianizar el vínculo hamiltoniano, de manera que uno termina teniendo una verdadera álgebra de Lie, y por lo tanto puede aplicar las técnicas estándar de cuantización de Dirac. Empezaremos abelianizando el vínculo hamiltoniano puramente gravitatorio y luego extenderemos el resultado para incluir la contribución electromagnética. En este capítulo se utilizarán unidades en las que $c = G = 1$.

6.1 Caso puramente gravitatorio

El vínculo hamiltoniano esféricamente simétrico en el vacío está dado por:

$$C(N) = \int NCdx \quad (6.1)$$

Con

$$C = \frac{(E^x)'^2}{8\sqrt{E^x}E^\varphi} - \frac{E^\varphi}{2\sqrt{E^x}}(1 + K_\varphi^2) - 2K_\varphi K_x \sqrt{E^x} - \frac{\sqrt{E^x}E^{x'}E^{\varphi'}}{2(E^\varphi)^2} + \frac{\sqrt{E^x}(E^x)''}{2E^\varphi} \quad (6.2)$$

Por otro lado, tenemos

$$\{K_x(x), E^x(y)\} = \delta(x - y) \quad (6.3)$$

$$\{K_\varphi(x), E^\varphi(y)\} = \delta(x - y) \quad (6.4)$$

Mientras que todos los otros corchetes son cero. Entonces, el corchete de Poisson de C con las variables dinámicas:

$$\begin{aligned} \{C, K_\varphi\} &= \left(\frac{1}{(E^\varphi)^2} \right) \frac{((E^x)')^2}{8\sqrt{E^x}} \delta(x-y) + \frac{(1+K_\varphi^2)}{2\sqrt{E^x}} \delta(x-y) \\ &\quad - \frac{\sqrt{E^x}}{(E^\varphi)^3} (E^x)' (E^\varphi)' \delta(x-y) + \frac{\sqrt{E^x} (E^x)''}{2E^\varphi} \delta(x-y) \\ &\quad + \frac{\sqrt{E^x} (E^x)'}{2(E^\varphi)^2} \delta_x(x-y) \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\{C, E^\varphi\} = -\frac{E^\varphi}{\sqrt{E^x}} K_\varphi \delta(x-y) - 2K_x \sqrt{E^x} \delta(x-y) \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \{C, K_x\} &= \frac{1}{4} \frac{(E^x)'}{\sqrt{E^x} E^\varphi} (-\delta_x(x-y)) + \frac{1}{16} \frac{((E^x)')^2}{(\sqrt{E^x})^3 E^\varphi} \delta(x-y) \\ &\quad - \frac{E^\varphi(1+K_\varphi^2)}{4(\sqrt{E^x})^3} \delta(x-y) + \frac{K_\varphi K_x}{\sqrt{E^x}} \delta(x-y) + \frac{1}{4} \frac{(E^x)' (E^\varphi)'}{\sqrt{E^x} (E^\varphi)^2} \delta(x-y) \\ &\quad + \frac{\sqrt{E^x} (E^\varphi)'}{2(E^\varphi)^2} \delta_x(x-y) - \frac{1}{4} \frac{(E^x)''}{\sqrt{E^x} E^\varphi} \delta(x-y) - \frac{\sqrt{E^x}}{2E^\varphi} \delta_{xx}(x-y) \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\{C, E^x\} = -2K_\varphi \sqrt{E^x} \delta(x-y) \quad (6.8)$$

Entonces, el corchete de Poisson de dos vínculos Hamiltonianos:

$$\begin{aligned} \{C(N), C(M)\} &= \left\{ C(N), \int dy M \frac{[(E^x)']^2}{8\sqrt{E^x} E^\varphi} \right\} \\ &\quad + \left\{ C(N), -\int M dy \frac{E^\varphi}{2\sqrt{E^x}} (1+K_\varphi^2) \right\} + \left\{ C(N), -\int M dy 2K_\varphi K_x \sqrt{E^x} \right\} \\ &\quad + \left\{ C(N), -\int M dy \frac{\sqrt{E^x} (E^x)' (E^\varphi)'}{2(E^\varphi)^2} \right\} + \left\{ C(N), \int M dy \frac{\sqrt{E^x} (E^x)''}{2E^\varphi} \right\} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Para realizar este cálculo utilizamos (6.3)-(6.4) y los resultados (6.5)-(6.8). El resultado es:

$$\{C(N), C(M)\} = \int dx \frac{E^x}{(E^\varphi)^2} (MN' - NM') (K_x (E^x)' - (K_\varphi)' E^\varphi) \quad (6.10)$$

Como fue mencionado anteriormente, mediante un reescalado de los multiplicadores de Lagrange y una combinación lineal con el vínculo de difeomorfismos, es posible abelianizar el vínculo hamiltoniano, de manera tal que terminaremos con un álgebra de Lie genuina y se podrán utilizar las técnicas de cuantización

de Dirac estándar. Primero, agregamos a C un término proporcional a C_{Diff} :

$$\begin{aligned}
\bar{C} &:= C - \frac{2\sqrt{E^x}}{(E^x)'} K_\varphi C_{\text{Diff}} = \frac{[(E^x)']^2}{8\sqrt{E^x} E^\varphi} - \frac{E^\varphi}{2\sqrt{E^x}} (1 + K_\varphi^2) - 2K_\varphi K_x \sqrt{E^x} \\
&\quad - \frac{\sqrt{E^x} E^{x'} E^{\varphi'}}{2(E^\varphi)^2} + \frac{\sqrt{E^x} (E^x)''}{2E^\varphi} - \frac{2\sqrt{E^x}}{(E^x)'} K_\varphi (K_\varphi' E^\varphi - K_x (E^x)') \\
&= \frac{[(E^x)']^2}{8\sqrt{E^x} E^\varphi} - \frac{E^\varphi}{2\sqrt{E^x}} (1 + K_\varphi^2) - \frac{2\sqrt{E^x} E^\varphi}{(E^x)'} K_\varphi K_\varphi' - \frac{\sqrt{E^x} (E^x)' (E^\varphi)'}{2(E^\varphi)^2} \\
&\quad + \frac{\sqrt{E^x} (E^x)''}{2E^\varphi} \tag{6.11}
\end{aligned}$$

Luego, introducimos un reescalado $\frac{(E^x)'}{E^\varphi}$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}
C_A &:= \frac{(E^x)'}{E^\varphi} \bar{C} = \frac{[(E^x)']^3}{8\sqrt{E^x} (E^\varphi)^2} - \frac{(E^x)'}{2\sqrt{E^x}} (1 + K_\varphi^2) - 2\sqrt{E^x} K_\varphi K_\varphi' \\
&\quad - \frac{\sqrt{E^x} [(E^x)']^2 (E^\varphi)'}{2(E^\varphi)^3} + \frac{\sqrt{E^x} (E^x)' (E^x)''}{2(E^\varphi)^2} \\
&= - \left(\sqrt{E^x} \left[1 + K_\varphi^2 - \frac{[(E^x)']^2}{4(E^\varphi)^2} \right] \right)' \tag{6.12}
\end{aligned}$$

Mediante esta transformación, el vínculo hamiltoniano se convierte en una derivada total.

El corchete de Poisson del nuevo vínculo hamiltoniano con las variables dinámicas es:

$$\begin{aligned}
\{C_A(x), K_\varphi(y)\} &= \frac{\left([(E^x)']^2 \sqrt{E^x}\right)'}{2(E^\varphi)^3} \{E^\varphi(x), K_\varphi(y)\} \\
&- \frac{3\sqrt{E^x}[(E^x)']^2}{(E^\varphi)^4} (E^\varphi)' \{E^\varphi(x), K_\varphi(y)\} + \frac{\sqrt{E^x}[(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} \{(E^\varphi)', K_\varphi\} \\
&= \left(\frac{[(E^x)']^2 \sqrt{E^x}}{2(E^\varphi)^3}\right)' (-\delta(x-y)) + \frac{\sqrt{E^x}[(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} (-\delta_x(x-y)) \quad (6.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{C_A(x), E^\varphi(y)\} &= \frac{(E^x)'}{\sqrt{E^x}} K_\varphi \{K_\varphi(x), E^\varphi(y)\} + 2\sqrt{E^x} K_\varphi' \{K_\varphi(x), E^\varphi(y)\} \\
&+ 2\sqrt{E^x} K_\varphi \{K_\varphi'(x), E^\varphi(y)\} = (2\sqrt{E^x} K_\varphi)' \delta(x-y) + 2\sqrt{E^x} K_\varphi \delta_x(x-y) \quad (6.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{C_A(x), K_\varphi'(y)\} &= \frac{\left([(E^x)']^2 \sqrt{E^x}\right)^2}{2(E^\varphi)^3} \{E^\varphi(x), K_\varphi'(y)\} \\
&- \frac{3\sqrt{E^x}[(E^x)']^2}{(E^\varphi)^4} (E^\varphi)' \{E^\varphi(x), K_\varphi'(y)\} + \frac{\sqrt{E^x}[(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} \{E^\varphi'(x), K_\varphi'(y)\} \\
&= \left(\frac{[(E^x)']^2 \sqrt{E^x}}{2(E^\varphi)^3}\right)' (-\delta(x-y)) + \frac{\sqrt{E^x}[(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} (-\delta_{xy}(x-y)) \quad (6.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{C_A(x), E'^\varphi(y)\} &= \frac{(E^x)' K_\varphi}{\sqrt{E^x}} \{K_\varphi(x), E'^\varphi(y)\} + 2\sqrt{E^x} K_\varphi' \{K_\varphi(x), E'^\varphi(y)\} \\
&+ \sqrt{E^x} K_\varphi \{K_\varphi'(x), E'^\varphi(y)\} = (2\sqrt{E^x} K_\varphi)' (-\delta_x(x-y)) - 2\sqrt{E^x} K_\varphi \delta_{xy}(x-y) \quad (6.16)
\end{aligned}$$

Mientras que $\{C_A(x), E^x(y)\} = 0$, y $\{C_A(x), K_x(y)\}$ no son necesarios para lo que sigue. Verifiquemos ahora que el nuevo vínculo hamiltoniano es abeliano:

$$\begin{aligned}
\{C_A(N), C_A(M)\} &= \int dx dy N(x) M(y) \left[\frac{(E^x)' K_\varphi}{\sqrt{E^x}} \{C_A(x), K_\varphi(y)\} \right. \\
&+ 2\sqrt{E^x} (\{C_A(x), K_\varphi(y)\} K_\varphi' + \{C_A(x), K_\varphi'(y)\} K_\varphi) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{[(E^x)']^2 \sqrt{E^x}'}{(E^\varphi)^3} \{C_A(x), E^\varphi(y)\} - \frac{3\sqrt{E^x}[(E^x)']^2}{(E^\varphi)^4} (E^\varphi)' \{C_A(x), E^\varphi(y)\} \\
&\left. + \frac{\sqrt{E^x}[(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} \{C_A(x), (E^\varphi)'(y)\} \right] \quad (6.17)
\end{aligned}$$

Utilicemos ahora (6.13)-(6.16). Escribimos primero los términos en $\delta(x-y)$

luego de integrar en y :

$$\begin{aligned}
& \int dx N(x) M(x) \left[-\frac{(E^x)' K_\varphi}{\sqrt{E^x}} \left(\frac{[(E^x)']^2 \sqrt{E^x}}{2(E^\varphi)^3} \right)' - 2\sqrt{E^x} K_\varphi' \left(\frac{[(E^x)']^2 \sqrt{E^x}}{2(E^\varphi)^3} \right)' \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{([(E^x)']^2 \sqrt{E^x})'}{(E^\varphi)^3} (2\sqrt{E^x} K_\varphi)' - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{E^x} [(E^x)']^2}{(E^\varphi)^4} (E^\varphi)' (2\sqrt{E^x} K_\varphi)' \right] \\
& = \int dx N(x) M(x) \left[\left(\frac{[(E^x)']^2 \sqrt{E^x}}{2(E^\varphi)^3} \right)' (-2\sqrt{E^x} K_\varphi)' \right. \\
& \left. + \left(\frac{[(E^x)']^2 \sqrt{E^x}}{2(E^\varphi)^3} \right)' (2\sqrt{E^x} K_\varphi)' \right] = 0 \tag{6.18}
\end{aligned}$$

Luego, los términos en derivadas de $\delta(x - y)$:

$$\begin{aligned}
& \int dx dy N(x) M(y) \left[\overbrace{\left(\frac{(E^x)' K_\varphi}{\sqrt{E^x}} \right) (y) \left(\frac{\sqrt{E^x} [(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} \right) (x) (-\delta_x(x - y))}^1 \right. \\
& \quad + \overbrace{(2\sqrt{E^x} K_\varphi') (y) \left(\frac{\sqrt{E^x} [(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} \right) (x) (-\delta_x(x - y))}^2 \\
& \quad + \overbrace{(2\sqrt{E^x} K_\varphi) (y) \left(\frac{[(E^x)']^2 \sqrt{E^x}}{2(E^\varphi)^3} \right)' (x) \delta_x(x - y)}^3 \\
& \quad + \overbrace{(2\sqrt{E^x} K_\varphi) (y) \left(\frac{\sqrt{E^x} [(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} \right) (x) \delta_{xy}(x - y)}^4 \\
& \quad + \frac{1}{2} \overbrace{\left(\frac{([(E^x)']^2 \sqrt{E^x})'}{(E^\varphi)^3} \right) (y) (2\sqrt{E^x} K_\varphi)' (x) \delta_x(x - y)}^5 \\
& \quad - \frac{3}{2} \overbrace{\left(\frac{\sqrt{E^x} [(E^x)']^2 (E^\varphi)'}{(E^\varphi)^4} \right) (y) (2\sqrt{E^x} K_\varphi)' (x) \delta_x(x - y)}^6 \\
& \quad \left. + \overbrace{\left(\frac{\sqrt{E^x} [(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} \right) (y) (2\sqrt{E^x} K_\varphi)' (x) (-\delta_x(x - y))}^7 \right] \tag{6.19}
\end{aligned}$$

$$\left. - \left(\frac{\sqrt{E^x} [(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} \right) (x) \left(2\sqrt{E^x} K_\varphi \right) (y) \delta_{xy}(x-y) \right] \quad (6.20)$$

Integrando en x , tenemos que la suma de los términos 1 y 2:

$$\begin{aligned} & \int dy \left(\frac{N\sqrt{E^x} [(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} \right)' \left(M \left(\frac{(E^x)' K_\varphi}{\sqrt{E^x}} + 2\sqrt{E^x} K_\varphi' \right) \right) \\ &= \int dy \left(\frac{N\sqrt{E^x} [(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} \right)' M \left(2\sqrt{E^x} K_\varphi \right)' \end{aligned} \quad (6.21)$$

Integrando por partes:

$$- \int dy \left(\frac{N\sqrt{E^x} [(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} \right) \left(2M(\sqrt{E^x} K_\varphi)' \right)' \quad (6.22)$$

Luego, la suma de 3 y 4:

$$\begin{aligned} & - \int dy M 2\sqrt{E^x} K_\varphi \left(N \left(\frac{[(E^x)']^2 \sqrt{E^x}}{2(E^\varphi)^3} \right)' \right)' \\ & - \int dy \left(2M\sqrt{E^x} K_\varphi \right)' \left(\frac{N\sqrt{E^x} [(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} \right)' \end{aligned} \quad (6.23)$$

5 y 6 después de integrar por partes:

$$\int dy \left(\left(\frac{[(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} \right)' M \right)' 2\sqrt{E^x} K_\varphi N \quad (6.24)$$

Y por último, la suma de 7 y 8:

$$\begin{aligned} & \int dy M \frac{\sqrt{E^x} [(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} \left(N \left(2\sqrt{E^x} K_\varphi \right)' \right)' \\ & + \int dy \left(M \frac{\sqrt{E^x} [(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} \right)' \left(N 2\sqrt{E^x} K_\varphi \right)' \end{aligned} \quad (6.25)$$

Introduciendo las siguientes definiciones:

$$A := 2\sqrt{E^x} K_\varphi \quad (6.26)$$

$$B := \frac{\sqrt{E^x} [(E^x)']^2}{2(E^\varphi)^3} \quad (6.27)$$

y sumando todas las contribuciones anteriores, recordando que la contribución de los términos en $\delta(x-y)$ es cero:

$$\begin{aligned} \{C_A(N), C_A(M)\} &= \int dy \left(-(MA)' NB - (MA)' (NB)' - MA(NB)' \right. \\ & \left. + (B'M)' NA + (NA)' BM + (MB)' (NA)' \right) \end{aligned} \quad (6.28)$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} \{C_A(N), C_A(M)\} = & \int dy (-M' A' N B - M A'' N B - M' A N' B - M' A N B' \\ & - M A' N' B - M A' N B' - M A N' B' - M A N B'' + B'' M N A + B' M' N A \\ & N' A' B M + N A'' B M + M' B N' A + M' B N A' + M B' N' A + M B' N A') = 0 \end{aligned} \quad (6.29)$$

Vemos entonces que mediante una combinación lineal con el vínculo de difeomorfismos y un reescalado, pudimos abelianizar el vínculo hamiltoniano, por lo que ahora el álgebra de los vínculos es una verdadera álgebra de Lie.

6.2 Caso electromagnético

A partir de ahora se denotará por H al vínculo hamiltoniano, C al vínculo de difeomorfismos y \mathcal{G} al vínculo de Gauss. Los subíndices G y EM indican si se trata de la parte gravitatoria o electromagnética respectivamente. En el capítulo 4 obtuvimos la contribución electromagnética a los vínculos, en variables métricas, esta es:

$$H(N) = H_G(N) + H_{EM}(N) = \int dx \left(H_G(x) + \frac{1}{2} \Lambda R^{-2} P_\Gamma^2 \right) \quad (6.30)$$

$$C(N^x) = C_G(N^x) + C_{EM}(N^x) = \int dx (C_G(x) - \Gamma P'_\Gamma) \quad (6.31)$$

$$\mathcal{G}_{EM}(\tilde{\Phi}) = \int dx \tilde{\Phi}(-P'_\Gamma) = \int dx (\phi - N^x \Gamma)(-P'_\Gamma) \quad (6.32)$$

Las variables métricas que aparecen en (6.30) están relacionadas a las variables de Ashtekar adaptadas a la simetría esférica de la siguiente manera:

$$\Lambda = \frac{E^\varphi}{\sqrt{|E^x|}} \quad R = \sqrt{|E^x|} \quad (6.33)$$

Entonces, el vínculo hamiltoniano:

$$H(N) = \int dx N \left(H_G(x) + \frac{1}{2} \frac{E^\varphi}{|E^x|^{3/2}} P_\Gamma^2 \right) \quad (6.34)$$

El hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \int dx [N (H_G(x) + H_{EM}(x)) + N^x (C_G(x) + C_{EM}(x)) \\ & + \tilde{\Phi}(-P'_\Gamma)] \end{aligned} \quad (6.35)$$

Realizamos ahora el mismo re-escalado que hicimos para el caso puramente gravitatorio:

$$N^x = \bar{N}^x - 2N \frac{K_\varphi \sqrt{E^x}}{(E^x)'} \quad N = \bar{N} \frac{(E^x)'}{E^\varphi} \quad (6.36)$$

Obteniendo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \int dx \left[\bar{N} \left(H_G + H_{EM} - 2K_\varphi \frac{\sqrt{E^x}}{(E^x)'} (C_G + C_{EM}) \right) + \bar{N}^x (C_G + C_{EM}) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\Phi}(-P'_\Gamma) \right] \\
&= \int dx \left[\bar{N} \left(\tilde{H}_G + \frac{(E^x)'}{E^\varphi} H_{EM} - 2 \frac{K_\varphi}{E^\varphi} \sqrt{E^x} C_{EM} \right) \right. \\
&\quad \left. + \bar{N}^x (C_G + C_{EM}) + \tilde{\Phi}(-P'_\Gamma) \right] \tag{6.37}
\end{aligned}$$

El nuevo vínculo hamiltoniano toma la forma:

$$\tilde{H} = \tilde{H}_G + \frac{1}{2} \frac{(E^x)'}{(E^x)^{3/2}} P_\Gamma^2 + 2 \frac{K_\varphi}{E^\varphi} \sqrt{E^x} \Gamma P'_\Gamma \tag{6.38}$$

Mientras que el vínculo de difeomorfismos y el vínculo de Gauss electromagnético permanecen inalterados. Se puede comprobar que los vínculos siguen siendo de primera clase.

$$\{\mathcal{H}(\bar{N}), \mathcal{H}(\bar{M})\} = \int dx (-\Gamma P'_\Gamma) \frac{E^x [(E^x)']^2}{(E^\varphi)^3} (MN' - M'N) \approx 0 \tag{6.39}$$

$$\{\mathcal{H}(\bar{N}), C(\bar{N}^x)\} = -\mathcal{H}(\bar{N}^x \bar{N}') + \alpha \approx 0 \tag{6.40}$$

$$\{C(\bar{N}^x), C(\bar{M}^x)\} = C((N^x)' M^x - (M^x)' N^x) \approx 0 \tag{6.41}$$

$$\{C(\bar{N}^x), \mathcal{G}(\tilde{\Phi})\} = C(N^x \tilde{\Phi}') \approx 0 \tag{6.42}$$

$$\{\mathcal{G}(\tilde{\Phi}), \mathcal{G}(\tilde{\Psi})\} = 0 \tag{6.43}$$

Siendo α un término proporcional al vínculo de Gauss. Para simplificar los vínculos, sumamos al vínculo hamiltoniano y al vínculo de difeomorfismos un término proporcional al vínculo de Gauss, o equivalentemente, redefinimos el multiplicador $\tilde{\Phi}$:

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \left(\bar{N}^x - 2\bar{N} \frac{K_\varphi}{E^\varphi} \right) \Gamma \tag{6.44}$$

Con lo cual los vínculos toman la forma:

$$\tilde{H} = \tilde{H}_G + \frac{1}{2} \frac{(E^x)'}{(E^x)^{3/2}} P_\Gamma^2 \tag{6.45}$$

$$C = E^\varphi K'_\varphi - (E^x)' K_x \tag{6.46}$$

$$\mathcal{G} = (-P'_\Gamma) \tag{6.47}$$

La nueva forma del vínculo de difeomorfismos parece no ser conveniente pues no tiene la acción usual sobre las variables electromagnéticas. Esto en realidad no es un problema pues el gauge electromagnético será fijado como se suele hacer en electrostática. La condición de gauge $\Gamma = 0$ no tiene corchete de Poisson cero con el vínculo hamiltoniano, el cual queremos conservar. Es necesario entonces hacer una modificación más a los vínculos. Primero, integrando por partes el vínculo de Gauss:

$$\mathcal{G}(\Phi) = \int dx \Phi(-P'_\Gamma) = \int dx \Phi'(P_\Gamma + Q) \tag{6.48}$$

Siendo Q una constante de integración que representa la carga eléctrica del agujero negro, así como la constante de integración M que aparecerá en breve representa la masa [21]. Redefinimos ahora el multiplicador Φ :

$$\Phi' = -\frac{\bar{N}}{2} \frac{(E^x)'}{(E^x)^{3/2}} (P_\Gamma - Q) + \varphi' \quad (6.49)$$

Siendo φ una función arbitraria. Esta modificación es equivalente a sumarle al vínculo hamiltoniano términos proporcionales al vínculo de Gauss y términos de borde. El hamiltoniano ahora resulta ser:

$$\mathcal{H} = \int dx \left[\bar{N} \left(\tilde{H}_G + \frac{1}{2} \frac{(E^x)'}{(E^x)^{3/2}} Q^2 \right) + \bar{N}^x (E^\varphi K'_\varphi - (E^x)' K_x) + \varphi' (P_\Gamma + Q) \right] \quad (6.50)$$

Notar que el vínculo hamiltoniano se puede escribir como una derivada total:

$$H = - \left(\sqrt{E^x} \left[1 + K_\varphi^2 - \frac{[(E^x)']^2}{4(E^\varphi)^2} \right] - 2M + \frac{Q^2}{(E^x)^{1/2}} \right)' \quad (6.51)$$

Siendo M una constante de integración [21]. Ahora, la condición de gauge $\Gamma = 0$ tiene corchete de Poisson cero tanto con el vínculo hamiltoniano como con el vínculo de difeomorfismos, pero no así con el vínculo de Gauss, con el cual forma el conjunto de vínculos de segunda clase de la teoría. La conservación de la condición de gauge implica $\varphi' = 0$, esto es, φ es una función del tiempo únicamente. Por otro lado, el vínculo de Gauss puede ser tomado como una igualdad fuerte: $P_\Gamma = -Q$. El vínculo hamiltoniano y de difeomorfismos tienen el álgebra de Poisson usual, mientras que el vínculo hamiltoniano es ahora abeliano.

Observación

Notar que si fijamos el gauge completamente imponiendo las siguientes condiciones:

$$E^x = x^2 \quad K_\varphi = 0 \quad (6.52)$$

tenemos, en primer lugar, que la conservación de la primer condición de gauge implica:

$$\{E^x, \mathcal{H}\} = \int dx \bar{N}^x (E^x)' = 0 \quad \rightarrow \bar{N}^x = 0 \quad (6.53)$$

Entonces:

$$N^x = \bar{N}^x - 2N \frac{K_\varphi \sqrt{E^x}}{(E^x)'} = -2N \frac{K_\varphi \sqrt{E^x}}{(E^x)'} \quad (6.54)$$

Luego, la conservación de la segunda condición:

$$\left\{ K_\varphi, \mathcal{H} \right\} = \int dx \left\{ K_\varphi, -\bar{N} \left(\sqrt{E^x} \left[1 + K_\varphi^2 - \frac{[(E^x)']^2}{4(E^\varphi)^2} + \frac{Q}{(E^x)^{1/2}} \right] \right)' \right\} = 0 \quad (6.55)$$

Donde $\tilde{N} = \tilde{N}'$. La igualdad anterior implica:

$$\tilde{N}' = 0 \rightarrow \left(\frac{E^\varphi}{(E^x)'} N \right)' = 0 \quad (6.56)$$

Elegimos la constante de integración como 1/2, obteniendo:

$$N = \frac{1}{2} \frac{(E^x)'}{E^\varphi} \quad (6.57)$$

Por otro lado, resolviendo el vínculo de hamiltoniano (su versión integrada por partes):

$$-\sqrt{E^x}(1 + K_\varphi^2) + 2M + \frac{[(E^x)']^2 \sqrt{E^x}}{4(E^\varphi)^2} - \frac{Q^2}{(E^x)^{1/2}} = 0 \quad (6.58)$$

Sustituyendo (6.52):

$$-x + 2M + \frac{4x^2x}{4(E^\varphi)^2} - \frac{Q^2}{x} = 0 \rightarrow (E^\varphi)^2 = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2M}{x^3} + \frac{Q^2}{x^4} \right)^{-1} \quad (6.59)$$

Entonces, el lapso:

$$N = \frac{1}{2} \frac{(E^x)'}{E^\varphi} = \frac{x}{\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{2M}{x} + \frac{Q^2}{x^2}}}} = \sqrt{1 - \frac{2M}{x} + \frac{Q^2}{x^2}} \quad (6.60)$$

Por otro lado, el shift:

$$N^x = 0 \quad (6.61)$$

La métrica entonces es:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(N^2 - gN^x N^x) dt^2 + \frac{(E^\varphi)^2}{E^x} dx^2 + E^x d\Omega^2 \\ &= \left(1 - \frac{2M}{x} + \frac{Q^2}{x^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{x} + \frac{Q^2}{x^2} \right)^{-1} dx^2 + x^2 d\Omega^2 \end{aligned} \quad (6.62)$$

Mediante la fijación completa de gauge hemos recuperado la métrica de Reissner-Nordström en su forma usual.

Capítulo 7

Cuantización

7.1 Cinemática

En el capítulo 3 vimos que cuando hay simetría esférica, uno termina teniendo tres pares de variables canónicas en el caso puramente gravitatorio: (\bar{A}_x, E^x) , $(\bar{A}_\varphi, E^\varphi)$, y (η, P^η) . En nuestro problema tenemos además un grado de libertad correspondiente al campo eléctrico, junto a su momento canónicamente conjugado: (Γ, P^Γ) . Entonces, los estados de redes de spines se pueden escribir de la siguiente manera (ver (5.52)):

$$T_{g, \vec{k}, \vec{\mu}, \vec{q}}(\bar{A}_x, \bar{A}_\varphi, \eta, \Gamma) = \prod_{e_j \in g} e^{\frac{i}{2} k_j \int_{e_j} dx \bar{A}_x(x)} \prod_{v_j \in g} e^{i \mu_j \bar{A}_\varphi(v_j)} \prod_{v_j \in g} e^{i n_j \eta(v_j)} \prod_{e_j \in g} e^{i \int_{e_j} dx q_j \Gamma(x)} \quad (7.1)$$

siendo e_j las aristas del grafo g , y v_j sus vértices. k_j son las valencias asociadas a las aristas y μ_j son las “valencias” asociadas a los vértices. q_j son las valencias asociadas a la variable Γ pero como veremos a continuación en realidad no juegan ningún papel. Primero impongamos el vínculo de Gauss gravitatorio:

$$\mathcal{G}_G = \int dx \lambda (E^{x'} + P^\eta) \quad (7.2)$$

Haciéndolo actuar sobre el estado (7.1), obtenemos:

$$\hat{G}_g(\lambda) T_{g, \vec{k}, \vec{\mu}, \vec{q}} = \frac{\beta l_P^2}{8\pi} \sum_{v_j \in g} \lambda(v_j) (k_{e_j^+} - k_{e_j^-} - 2n_j) T_{g, \vec{k}, \vec{\mu}, \vec{q}} = 0 \quad (7.3)$$

Con solución

$$n_j = \frac{1}{2} (k_{e_j^+} - k_{e_j^-}) \quad (7.4)$$

La holonomía de la variable η entonces será:

$$\prod_{v_j \in g} e^{\frac{i}{2} (k_{e_j^+} - k_{e_j^-}) \eta(v_j)} \quad (7.5)$$

Esto se puede reescribir:

$$\prod_{e_j \in g} e^{\frac{1}{2} \int_{e_j \in g} dx k_j(x) \eta'(x)} \quad (7.6)$$

Combinando este término con la holonomía de la variable \bar{A}_x

$$\prod_{e_j \in g} e^{\frac{1}{2} \int_{e_j \in g} dx (\bar{A}_x + \eta')} = \prod_{e_j \in g} e^{\frac{1}{2} \int_{e_j \in g} dx K_x} \quad (7.7)$$

Por otro lado, el vínculo de Gauss eléctrico toma una forma bastante simple que actúa sólo en los vértices:

$$\mathcal{G}(\Phi) = \int dx \Phi P'_\Gamma \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_{EM}(\Phi) = \sum_{x_i} \Phi(x_i) (P_\Gamma(x_{i+1}) - P_\Gamma(x_i)) \quad (7.8)$$

Su acción en los estados de redes de spines:

$$\hat{\mathcal{G}}(\Phi) T_{g, \vec{k}, \vec{\mu}, \vec{q}} = \sum_{v_j} \Phi(v_j) (q_{j+1} - q_j) T_{g, \vec{k}, \vec{\mu}, \vec{q}} = 0 \quad (7.9)$$

Por lo tanto, en los estados invariantes gauge se verifica

$$q_{j+1} = q_j \quad \forall j \quad (7.10)$$

Recordar que el vínculo de Gauge eléctrico junto con la condición de gauge $\Gamma = 0$ forman un conjunto de vínculos de segunda clase por lo que se convierten en igualdades fuertes. Los estados de redes de spines entonces se reducen a:

$$T_{g, \vec{k}, \vec{\mu}}(K_x, K_\varphi) = \prod_{e_j \in g} e^{\frac{i}{2} k_j \int_{e_j} dx K_x(x)} \prod_{v_j \in g} e^{\frac{i}{2} \mu_j K_\varphi(v_j)} \quad (7.11)$$

Tenemos además dos variables, la masa M [21, 14] y de manera análoga, la carga Q . Ambas están asociadas con un espacio de Hilbert de funciones 2-integrables, esto significa que tendrán un espectro continuo [13]. Entonces, el espacio cinemático completo es:

$$H_{cin} = H_{cin}^M \otimes H_{cin}^Q \left[\bigotimes_{j=1}^V l_j^2 \otimes l_j^2 \right] \quad (7.12)$$

Donde elegimos funciones periódicas en K_φ con período π/ρ , siendo ρ una constante real [14]. El espacio está equipado con el producto interno:

$$\langle g, \vec{k}, \vec{\mu}, M, Q | g', \vec{k}', \vec{\mu}', M', Q' \rangle = \delta_{g, g'} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\vec{\mu}, \vec{\mu}'} \delta_{M, M'} \delta_{Q, Q'} \quad (7.13)$$

7.1.1 Acción de operadores

Los operadores masa y carga actúan de forma multiplicativa.

$$\hat{M} |g, \vec{k}, \vec{\mu}, M, Q\rangle = M |g, \vec{k}, \vec{\mu}, M, Q\rangle \quad (7.14)$$

$$\hat{Q} |g, \vec{k}, \vec{\mu}, M, Q\rangle = Q |g, \vec{k}, \vec{\mu}, M, Q\rangle \quad (7.15)$$

Luego, como vimos en (§ 5.5.1), las tríadas también actúan de forma multiplicativa:

$$\hat{E}^x(x) \left| g, \vec{k}, \vec{\mu}, M, Q \right\rangle = l_p^2 k_j(x) \left| g, \vec{k}, \vec{\mu}, M, Q \right\rangle \quad (7.16)$$

$$\int_I dx \hat{E}^\varphi(x) \left| g, \vec{k}, \vec{\mu}, M, Q \right\rangle = l_p^2 \sum_{v_j \in I} \mu_j \left| g, \vec{k}, \vec{\mu}, M, Q \right\rangle \quad (7.17)$$

Siendo $k_j(x)$ la valencia del link que contiene el punto x . Las holonomías por otro lado actúan de la siguiente manera:

$$e^{n \frac{i}{2} \int_{e_j} dx K_x(x)} \left| g, \vec{k}, \vec{\mu}, M, Q \right\rangle = \left| g, \vec{k} + nx_j, \vec{\mu}, M, Q \right\rangle \quad (7.18)$$

$$e^{n \frac{i}{2} \rho K_\varphi(v_j)} \left| g, \vec{k}, \vec{\mu}, M, Q \right\rangle = \left| g, \vec{k}, \vec{\mu} + nx_j, M, Q \right\rangle \quad (7.19)$$

Siendo x_j cuya componente j es 1 mientras que las demás son cero. La acción de la holonomía puntual fue restringida a los vértices pues de lo contrario también crearían nuevos vértices en la red. La acción de los vínculos no modifica el número de vértices, por lo que estamos interesados solamente en estados con un número fijo de ellos.

7.2 Dinámica

Queremos ahora encontrar los estados físicos, aquellos que son solución al vínculo hamiltoniano. Para empezar, consideramos la expresión (3.93) del vínculo hamiltoniano y la integramos por partes:

$$\mathcal{H}(N) = \int dx N' \left[\sqrt{E^x} \left(1 + K_\varphi^2 + \frac{GQ^2}{E^x} \right) - 2GM - \frac{[(E^x)']^2 \sqrt{E^x}}{4(E^\varphi)^2} \right] \quad (7.20)$$

Factorizamos ahora esta expresión, obteniendo:

$$\mathcal{H}(N) = \int dx N' H_+ H_- \quad (7.21)$$

Siendo

$$H_\pm = \sqrt{\sqrt{E^x} \left(1 + K_\varphi^2 + \frac{GQ^2}{E^x} \right) - 2GM} \pm \frac{(E^x)'(E^x)^{1/4}}{2E^\varphi} \quad (7.22)$$

Al factor H_+ lo absorbemos en el multiplicador, redefiniéndolo. Además, reescalamos por un factor $4(E^\varphi)^2$, obteniendo:

$$\mathcal{H}(\underline{N}) = \int dx \underline{N} \left(2E^\varphi \sqrt{\sqrt{E^x} \left(1 + K_\varphi^2 + \frac{GQ^2}{E^x} \right) - 2GM} - (E^x)'(E^x)^{1/4} \right) \quad (7.23)$$

Eligiendo ahora un orden de factores, promovemos el hamiltoniano a operador cuántico, notando que la expresión K_φ^2 deberá ser “holonomizada” pues

la conexión no está bien definida como operador mientras que la holonomía sí lo está. El operador cuántico toma la forma:

$$\hat{\mathcal{H}}(N) = \int dx \underline{N} \left(2 \left[\sqrt{\hat{E}^x \left(1 + \left(\frac{\sin(\hat{\rho}K_\varphi)}{\rho} \right)^2 + \frac{G\hat{Q}^2}{\hat{E}^x} \right)} - 2GM \right] \hat{E}^\varphi - \frac{(\hat{E}^x)'}{(\hat{E})^{1/4}} \right) \quad (7.24)$$

El siguiente paso sería aplicarle este operador a una combinación lineal de los estados base $|g, \vec{k}, \vec{\mu}, M, Q\rangle$, notando que éste actúa sólo en los vértices de la red. Los coeficientes de dicha expansión serían las incógnitas de la ecuación. Teniendo los coeficientes, tendríamos los estados del espacio físico. Sin embargo, resulta útil hacer un cambio en la base usada, y en vez de usar la representación de holonomías en K_φ , usar la representación de conexiones. La razón de esto es que el operador $\sin(\hat{\rho}K_\varphi)$ actúa cambiando el índice μ y por lo tanto llevando a una ecuación en diferencias finitas que no es fácil de resolver. En cambio, utilizando esta representación mezclada, la acción de dicho operador es meramente multiplicativa, mientras que E^φ actúa como $-il_P^2 \partial / \partial K_\varphi$. Los estados que buscamos entonces son combinación lineal de los vectores base $|g, \vec{k}, \vec{K}_\varphi, M, Q\rangle$, siendo \vec{K}_φ un vector cuya j -ésima componente es $K_\varphi(v_j)$. Dichos estados tienen la forma:

$$|\Psi_g\rangle = \int_0^\infty dM \int_{-\infty}^\infty dQ \prod_{v_j \in g} \int_0^{\pi/\rho} dK_\varphi(v_j) \times \sum_{\vec{k}} |g, \vec{k}, \vec{K}_\varphi, M, Q\rangle \Psi(M, Q, \vec{k}, \vec{K}_\varphi) \quad (7.25)$$

Podemos simplificar los coeficientes de (7.25), notando que el operador hamiltoniano, como observamos en el párrafo anterior, actúa sólo sobre los vértices:

$$\hat{\mathcal{H}}(\underline{N}) = \sum_{v_j \in g} \underline{N}(v_j) H(v_j) \quad (7.26)$$

Entonces, podemos suponer que la función Ψ es factorizable:

$$\Psi(M, Q, \vec{k}, \vec{K}_\varphi) = \prod_j \psi_j(M, Q, k_j, k_{j+1}, K_\varphi(v_j)) \quad (7.27)$$

La ecuación $\hat{H} |\Psi_g\rangle = 0$ toma por lo tanto una forma simple:

$$4(-i)l_P^2 \sqrt{l_P k_j^{1/2} \left(1 + \frac{GQ^2}{l_P^2 k_j} + \frac{\sin^2(\rho K_\varphi)}{\rho^2} \right)} - 2GM \partial_{K_\varphi(v_j)} \psi_j - l_P^2 l_P^{1/2} k_j^{1/4} (k_{j+1} - k_j) \psi_j = 0 \quad (7.28)$$

Dividiendo por $-l_P^2 l_P^{1/2} k_j^{1/4}$:

$$4i \sqrt{\left(1 + \frac{GQ^2}{l_P^2 k_j} + \frac{\sin^2(\rho K_\varphi)}{\rho^2} - \frac{2GM}{l_P k_j^{1/2}} \right)} \partial_{K_\varphi(v_j)} \psi_j + (k_{j+1} - k_j) \psi_j = 0 \quad (7.29)$$

Equivalentemente:

$$4i \left(1 - \frac{2GM}{l_P k_j^{1/2}} + \frac{GQ^2}{l_P^2} \right)^{1/2} \sqrt{1 + \sin^2(\rho K_\varphi) \rho^{-2} \left(1 - \frac{2GM}{l_P k_j^{1/2}} + \frac{GQ^2}{l_P^2} \right)^{-1}} \partial_{K_\varphi(v_j)} \psi_j + (k_{j+1} - k_j) \psi_j = 0 \quad (7.30)$$

Multiplicando y dividiendo el primer sumando por ρ , y definiendo:

$$y_j := \rho K_\varphi(v_j) \quad m_j^2 := \rho^{-2} \left(1 - \frac{2GM}{l_P k_j^{1/2}} + \frac{GQ^2}{l_P^2} \right)^{-1} \quad (7.31)$$

La ecuación anterior toma la forma:

$$4i \frac{1}{m_j} \sqrt{1 + m_j^2 \sin^2 y_j} \partial_{y_j} \psi_j + (k_{j+1} - k_j) \psi_j = 0 \quad (7.32)$$

La solución para ψ_j :

$$\psi_j(M, Q, k_j, k_{j+1}, K_\varphi(v_j)) = \exp \left(\frac{i}{4} m_j (k_{j+1} - k_j) F(\rho K_\varphi(v_j), i m_j) \right) \quad (7.33)$$

Con

$$F(\phi, K) = \int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 t}} \quad (7.34)$$

Estos estados son normalizables con respecto al producto escalar cinemático definido en § 5.1 ([14]). Aplicando el procedimiento descrito en § 5.3.2, obtendremos estados invariantes por difeomorfismos, hallando así el espacio de estados físicos de manera cerrada.

7.3 Observables

Recordar que un observable es una función de las variables canónicas cuyo corchete de Poisson con todos los vínculos es cero. Los observables son por lo tanto cantidades invariantes de gauge. En nuestro caso hay dos observables que podemos reconocer inmediatamente: La masa M y la carga Q . Sin embargo, hay otros observables que no tienen análogo clásico. El primero de ellos es el número de vértices. El vínculo hamiltoniano (7.24) no modifica el número de vértices al actuar sobre los estados cinemáticos. Los estados físicos pueden ser elegidos todos con el mismo número de vértices. Para identificar el próximo observable podemos notar que los difeomorfismos en la dirección radial no alteran el orden de los vértices, por lo que la sucesión de valores k_j es una cantidad invariante bajo difeomorfismos y además invariante bajo la acción del vínculo hamiltoniano. El observable correspondiente a esta propiedad se puede construir de la siguiente manera: Sea z un parámetro en el intervalo $[0, 1]$, definimos

$$\hat{O}(z) |\Psi\rangle_f = l_P^2 k_{Int(Vz)} |\Psi\rangle_f \quad (7.35)$$

Siendo V el número total de vértices. Al variar z entre 0 y 1, el operador dará como resultado las componentes del vector \vec{k} de forma ordenada. Una utilidad

de este observable es que puede ser usado para captar la parte invariante de gauge del operador E^x (el cual no es un observable pues no es invariante bajo difeomorfismos) y por lo tanto tener una representación del mismo en el espacio de estados físicos. Si consideramos una función $z : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, podemos definir

$$\hat{E}^x(x) |\Psi\rangle_f = \hat{O}(z(x)) |\Psi\rangle_f \quad (7.36)$$

El resultado sí es un observable. Su valor está especificado sólo si especifica el parámetro $z(x)$, lo cual equivale a fijar el gauge en la dirección radial [17]. Poder definir \hat{E}^x en el espacio de los estados físicos nos permite definir también la métrica como un operador en dicho espacio. De la descomposición ADM de la métrica tenemos las expresiones clásicas:

$$\begin{aligned} g_{tx} = q_{xx} N^x &= -\frac{2NK_\varphi \sqrt{E^x} (E^\varphi)^2}{(E^x)' E^x} = \sqrt{(1 + K_\varphi^2) - \frac{2GM}{\sqrt{E^x}} + \frac{Q^2}{E^x}} \\ (-2) \frac{K_\varphi}{\sqrt{E^x}} \frac{(E^x)'}{4 \left((1 + K_\varphi^2) - \frac{2GM}{\sqrt{E^x}} + \frac{Q^2}{E^x} \right)} &= -\frac{K_\varphi (E^x)'}{2\sqrt{E^x} \sqrt{(1 + K_\varphi^2) - \frac{2GM}{\sqrt{E^x}} + \frac{Q^2}{E^x}}} \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$g_{xx} = q_{xx} = \frac{[(E^x)']^2}{4E^x \left((1 + K_\varphi^2) - \frac{2GM}{\sqrt{E^x}} + \frac{Q^2}{E^x} \right)} \quad (7.38)$$

$$g_{tt} = \left(-N^2 + q_{xx} (N^x)^2 \right) = \left(1 - \frac{2GM}{\sqrt{E^x}} + \frac{Q^2}{E^x} \right) \quad (7.39)$$

Estas expresiones pueden ser promovidas a operadores, sustituyendo $E^x \rightarrow \hat{E}^x$, $M \rightarrow \hat{M}$, $Q \rightarrow \hat{Q}$. La cantidad K_φ sigue siendo clásica, es un parámetro funcional del cual dependen los observables [15]. Podemos observar en (7.37) que K_φ está relacionado directamente con la foliación. Si elegimos $K_\varphi = 0$, la foliación es manifiestamente estática.

7.3.1 Singularidades

Singularidades de coordenadas: En la sección 6.2 vimos que en el caso clásico, fijando gauge completamente con las siguientes condiciones

$$K_\varphi = 0 \quad E^x = x^2 \quad (7.40)$$

se recupera la métrica usual de Reissner-Nordström. En los siguientes valores de x : $x_\pm = GM \pm \sqrt{(GM)^2 - GQ^2}$ las componentes de la métrica son singulares. Estas singularidades no son genuinas sino que se deben simplemente a una mala elección de coordenadas. Haciendo un cambio de coordenadas apropiado estas singularidades se pueden eliminar [19].

En el caso de los operadores cuánticos correspondientes a las componentes de la métrica, mediante una elección apropiada de coordenadas también se pueden eliminar las singularidades en los horizontes [17]. Primero, los estados sobre los cuales haremos actuar estos operadores serán aquellos que aproximen bien la geometría clásica. En primer lugar, consideraremos sólo estados con valores de \vec{k} definidos pues los observables sólo dependen de $\hat{O}(z)$ y no de su momento

conjugado, por lo que estados de \vec{k} fijo son estados propios de dichos observables. Luego, recordemos que los valores de k_i son los valores propios del operador \hat{E}^x y que clásicamente $E^x = x^2$. Es decir, los valores k_i son proporcionales al área de la esfera de simetría. Por lo tanto, un estado que aproxime bien la geometría clásica sería uno cuyos valores de k_i sean monótonamente crecientes y el espaciado entre dos componentes consecutivas sea pequeño comparado con sus valores. Sin pérdida de generalidad podemos restringirnos a estados de redes de spines con un número fijo de vértices (ver sección anterior). Para simplificar, elijiremos la función $z(x)$ tal que el parámetro x esté asociado a la variable espacial. Notar que la separación mínima entre dos vértices, si la coordenada radial vale x , está dada por $\Delta = l_P^2/2x$. Fuera del horizonte exterior podemos elegir un espaciado uniforme con $\Delta = l_P^2/2x_+$, siendo x_+ el valor de la posición del mismo. La posición del i -ésimo vértice estará en

$$x_i = (i + i_H)\Delta \quad (7.41)$$

Siendo $i_H = \text{Int}(x_+/\Delta)$. Por lo que el vértice correspondiente a $i = 0$ es el más cercano al horizonte exterior. Los autovalores del operador \hat{E}^x

$$\hat{E}^x |\Psi\rangle_f = l_P^2 k_i |\Psi\rangle_f = x_i^2 |\Psi\rangle_f \quad (7.42)$$

Con estas elecciones, tenemos $z_i \equiv z(x_i) = (i + i_H)/V$. Se puede entrar en el agujero negro a través del horizonte exterior considerando valores negativos de i , y permitiendo una curvatura extrínseca no nula desde el horizonte hacia adentro. La elección de curvatura extrínseca (la cual es una elección de foliación) deberá ser tal que los operadores asociados a las componentes de la métrica son autoadjuntos. Estas condiciones implican comparar K_φ , el cual es un parámetro, con E^x el cual es un operador cuántico. Esto se soluciona considerando el valor esperando de E^x [13]. De manera totalmente análoga se puede remover la singularidad de coordenadas en el horizonte interno.

Singularidad en el centro del agujero negro: Mediante una elección apropiada de coordenadas se pueden remover las singularidades en los horizontes, pero este no es el caso para la singularidad en $x = 0$. Se puede verificar que cantidades escalares formadas a partir de la curvatura divergen en este punto, por lo que ningún cambio de coordenadas podrá hacer que esta singularidad desaparezca. Decimos en este caso que se trata de una singularidad genuina, porque es independiente de las coordenadas. Que haya una singularidad de este tipo significa que la teoría ha sido llevada más allá de su dominio. La relatividad general clásica falla en la singularidad. Veamos ahora qué ocurre luego de haber cuantizado la teoría con esta singularidad. En primer lugar tenemos que precisar a qué corresponde el punto $x = 0$. Recordar que los valores propios del operador $\hat{E}^x(x)$ son $l_P^2 k_i(x)$, siendo $k_i(x)$ la valencia del link que contiene al punto x . Estos valores propios son proporcionales a la superficie de la esfera de simetría de radio x . Una esfera de radio $x = 0$ tiene área nula, por lo que el valor $x = 0$ corresponde a un link de valencia $k_i = 0$. La singularidad estaría entonces en el vértice en el cual empieza el primer link de la red, cuya valencia sería $k_1 = 0$. Sin embargo la acción de los vínculos no conecta estados con alguna componente nula de \vec{k} con los demás. Si alguna componente de \vec{k} es nula, los operadores anteriores no están ni siquiera definidos en el correspondiente vértice, por lo que podemos excluir esos estados y los operadores estarán bien definidos. El punto $x = 0$ queda por tanto excluido del tratamiento, eliminando la singularidad.

7.4 Extensión analítica de la solución

El resultado de la última sección sugiere que se puede extender la solución obtenida a valores negativos de x , pasando por el lugar donde estaba antes la singularidad y llegando a una nueva región del espacio-tiempo. En esta sección veremos, siguiendo los pasos de [30, 31], que es posible incluso encontrar un sistema de coordenadas en el cual la métrica clásica no es singular en $x = 0$. Recordar que la métrica de Reissner-Nordström, en el gauge $K_\varphi = 0$, $E^x = x^2$ está dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{x} + \frac{GQ^2}{x^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{x} + \frac{GQ^2}{x^2} \right)^{-1} dx^2 + x^2 d\Omega^2 \quad (7.43)$$

El principal resultado de [30] es que esta métrica admite una extensión analítica en $x = 0$. Para llegar a este resultado, realicemos primero el siguiente cambio de coordenadas, definiendo ρ y τ tales que

$$t = \tau \rho^T \quad (7.44)$$

$$x = \rho^S \quad (7.45)$$

donde los exponentes T y S deberán ser determinados para que la métrica sea analítica en $x = 0$. Con estas definiciones, tenemos

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \rho^T \quad \frac{\partial t}{\partial \rho} = T \tau \rho^{T-1} \quad (7.46)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = 0 \quad \frac{\partial x}{\partial \rho} = S \rho^{S-1} \quad (7.47)$$

Si definimos $\Delta := x^2 - 2GMx + GQ^2$ (y por lo tanto: $\Delta = \rho^{2S} - 2GM\rho^S + GQ^2$) entonces las componentes de la métrica se pueden escribir

$$g_{tt} = -\frac{\Delta}{\rho^{2S}}, \quad g_{xx} = \frac{\rho^{2S}}{\Delta}, \quad g_{tx} = g_{xt} = 0 \quad (7.48)$$

Las componentes de la métrica en las nuevas coordenadas:

$$g_{\tau\tau} = \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \right)^2 g_{xx} + \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right)^2 g_{tt} = 0 - \rho^{2T} \frac{\Delta}{\rho^{2S}} = -\Delta \rho^{2T-2S} \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned} g_{\rho\tau} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \right) g_{xx} + \left(\frac{\partial t}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right) g_{tt} \\ &= 0 - \frac{\Delta}{\rho^{2S}} \rho^T T \tau \rho^{T-1} = -\Delta T \tau \rho^{2T-2S-1} \end{aligned} \quad (7.50)$$

$$\begin{aligned} g_{\rho\rho} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 g_{xx} + \left(\frac{\partial t}{\partial \rho} \right)^2 g_{tt} = (S \rho^{S-1})^2 \frac{\rho^{2S}}{\Delta} - (T \tau \rho^{T-1})^2 \frac{\Delta}{\rho^{2S}} \\ &= S^2 \frac{\rho^{4S-2}}{\Delta} - T^2 \tau^2 \rho^{2T-2} \frac{\Delta}{\rho^{2S}} \end{aligned} \quad (7.51)$$

De las componentes de la métrica en las nuevas coordenadas, se pueden obtener condiciones para los coeficientes tales que las mismas no diverjan en $\rho = 0$. Queremos que los exponentes sean enteros ya que más tarde extenderemos la solución a valores negativos de ρ . Entonces, viendo el primer sumando de $g_{\rho\rho}$, tenemos la primer condición:

$$S \geq 1 \quad (7.52)$$

Luego, del segundo sumando de $g_{\rho\rho}$ obtenemos la segunda condición (las condiciones obtenidas de $g_{\tau\tau}$ y $g_{\tau\rho}$ están comprendidas en ella):

$$2T - 2S - 2 \geq 0 \rightarrow T \geq S + 1 \quad (7.53)$$

La métrica en estas nuevas coordenadas tiene la forma:

$$ds^2 = -\Delta\rho^{2T-2S-2} (\rho d\tau + T\tau d\rho)^2 + \frac{S^2}{\Delta}\rho^{4S-2}d\rho^2 + \rho^{2S}d\sigma^2 \quad (7.54)$$

Si S y T satisfacen las condiciones (7.52)-(7.53), la métrica es analítica en $\rho = 0$.

Campo electromagnético: En las coordenadas x, t , el potencial electromagnético para el agujero de Reissner-Nordström es

$$A = -\frac{Q}{x}dt \quad (7.55)$$

Es singular en $x = 0$. Pero en las nuevas coordenadas, tenemos:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{Q}{x}dt = -q\rho^{-S} (\rho^T d\tau + T\tau\rho^{T-1}d\rho) \\ &= -q\rho^{T-S-1} (\rho d\tau + T\tau d\rho) \end{aligned} \quad (7.56)$$

El campo electromagnético:

$$\begin{aligned} F &= dA = -qd (\rho^{T-S}d\tau + T\tau\rho^{T-S-1}d\rho) \\ &= -q \left(\frac{\partial\rho^{T-S}}{\partial\rho}d\rho \wedge d\tau + \frac{\partial T\tau\rho^{T-S-1}}{\partial\tau}d\tau \wedge d\rho \right) \\ &= -q ((T-S)\rho^{T-S-1}d\rho \wedge d\tau + T\rho^{T-S-1}d\tau \wedge d\rho) \\ &= -qS (\rho^{T-S-1}d\tau \wedge d\rho) \end{aligned} \quad (7.57)$$

Ambas cantidades son analíticas en $\rho = 0$. Hemos encontrado entonces coordenadas en las cuales tanto la métrica como el campo electromagnético son analíticos en $\rho = 0$. La métrica (7.54) se extiende a través de $\rho = 0$ hacia valores negativos de ρ . Si tanto T como S son pares, la métrica y el campo electromagnético son simétricos con respecto a $\rho = 0$. Si bien la métrica es analítica en la singularidad, es degenerada, por lo que la métrica inversa no está bien definida en dicho punto. Esto impide definir la contracción entre índices y por lo tanto operadores como la derivada covariante. Sin embargo, en [29] se mostró que para métricas que verifican ciertas condiciones (llamadas semi-regulares), incluso si estas son degeneradas en algún punto, es posible definir la contracción entre índices y por lo tanto construir derivadas covariantes, el tensor de curvatura, e incluso escribir un análogo de la ecuación de Einstein. En [31] se logró encontrar un cambio de coordenadas tal que la métrica del

agujero negro de Schwarzschild sea analítica y semi-regular en la singularidad. Sin embargo, no hay valores de S y T que hagan semi-regular la métrica de Reissner-Nordström. Esto no significa que no exista un cambio de coordenadas que la haga semi-regular sino más bien que es un problema abierto, ya que la manera de hacer analítica la singularidad no es única. De todas maneras, esto no debería preocuparnos a nosotros pues tras cuantizar, el punto $x = 0$ (que corresponde a $\rho = 0$) queda eliminado del tratamiento gracias a la discretización del espacio; esto último, sumado al resultado de [30] sugiere que se puede pasar a través de la singularidad hacia otro espacio.

7.4.1 Diagrama de Penrose de la solución extendida

Para visualizar mejor la estructura del espacio correspondiente a la extensión analítica de la sección anterior podemos construir el diagrama de Penrose. El procedimiento completo para la construcción del diagrama puede ser encontrado en [19] págs. 157-161. Presentaremos aquí un resumen. Partiendo de las coordenadas x, t , se define x^* tal que:

$$dx = \left(1 - \frac{2GM}{x} + \frac{GQ^2}{x^2}\right) dx^* \quad (7.58)$$

Fuera del horizonte exterior:

$$x^* = x + \frac{x_+^2}{(x_+ - x_-)} \ln(x - x_+) - \frac{x_-^2}{(x_+ - x_-)} \ln(x - x_-) \quad (7.59)$$

siendo x_+ y x_- los horizontes externo e interno respectivamente. Luego, se definen las coordenadas

$$v = t + x^* \quad w = t - x^* \quad (7.60)$$

a partir de las cuales se define

$$v'' = \arctan\left(e^{\frac{x_+ - x_-}{4x_+^2}v}\right) \quad w'' = \arctan\left(-e^{\frac{-x_+ + x_-}{4x_+^2}w}\right) \quad (7.61)$$

En estas coordenadas:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{x} + \frac{GQ^2}{x^2}\right) 64 \frac{x_+^4}{(x_+ - x_-)^2} \csc(2v'') \csc(2w'') dv'' dw'' + x^2 d\Omega^2 \quad (7.62)$$

Donde ahora x está definida de forma implícita por la siguiente relación

$$\tan(v'') \tan(w'') = e^{-\frac{x_+ - x_-}{2x_+^2}x} (x - x_+)^{1/2} (x - x_-)^{-\frac{\alpha}{2}} \quad (7.63)$$

Con $\alpha = x_-^2/x_+^2$.

La métrica es analítica en $x = x_+$ pero en $x = x_-$ es degenerada. Para cubrir esa zona se pueden definir las coordenadas

$$v''' = \arctan\left(e^{\frac{x_+ - x_-}{4x_-^2}v}\right) \quad w''' = \arctan\left(-e^{\frac{-x_+ + x_-}{4x_-^2}w}\right) \quad (7.64)$$

Finalmente, definimos las coordenadas T y X :

$$T = v'' + w'' \quad X = v'' - w'' \quad (7.65)$$

Las cuales son tipo tiempo y tipo espacio respectivamente.

Observar que $dv'' dw'' = (1/2) (dT^2 - dR^2)$, por lo que los conos de luz en estas coordenadas están a $\pi/4$ radianes de los ejes R y T . Estas son las coordenadas utilizadas para representar el espacio en el diagrama de Penrose que presentamos a continuación, luego de identificar algunas de sus regiones:

$$i^+ : t \rightarrow \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} v \rightarrow \infty, v'' \rightarrow \pi/2 \\ w \rightarrow \infty, w'' \rightarrow 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} T = \pi/2 \\ R = \pi/2 \end{array} \quad (7.66)$$

$$i^- : t \rightarrow -\infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} v \rightarrow -\infty, v'' \rightarrow 0 \\ w \rightarrow -\infty, w'' \rightarrow -\pi/2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} T = -\pi/2 \\ R = \pi/2 \end{array} \quad (7.67)$$

$$i^0 : x \rightarrow \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} v \rightarrow \infty, v'' \rightarrow \pi/2 \\ w \rightarrow -\infty, w'' \rightarrow -\pi/2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} T = 0 \\ R = \pi \end{array} \quad (7.68)$$

$$\mathfrak{J}^+ : \left. \begin{array}{l} v \rightarrow \infty \\ w \in (-\infty, \infty) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} v'' = \pi/2 \\ w'' \in (\pi/2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} R+T = \pi \\ R \in [\pi/2, \pi] \end{array} \quad (7.69)$$

$$\mathfrak{J}^- : \left. \begin{array}{l} w \rightarrow -\infty \\ v \in (-\infty, \infty) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} w'' = -\pi/2 \\ v'' \in (0, \pi/2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} R-T = \pi \\ R \in [\pi/2, \pi] \end{array} \quad (7.70)$$

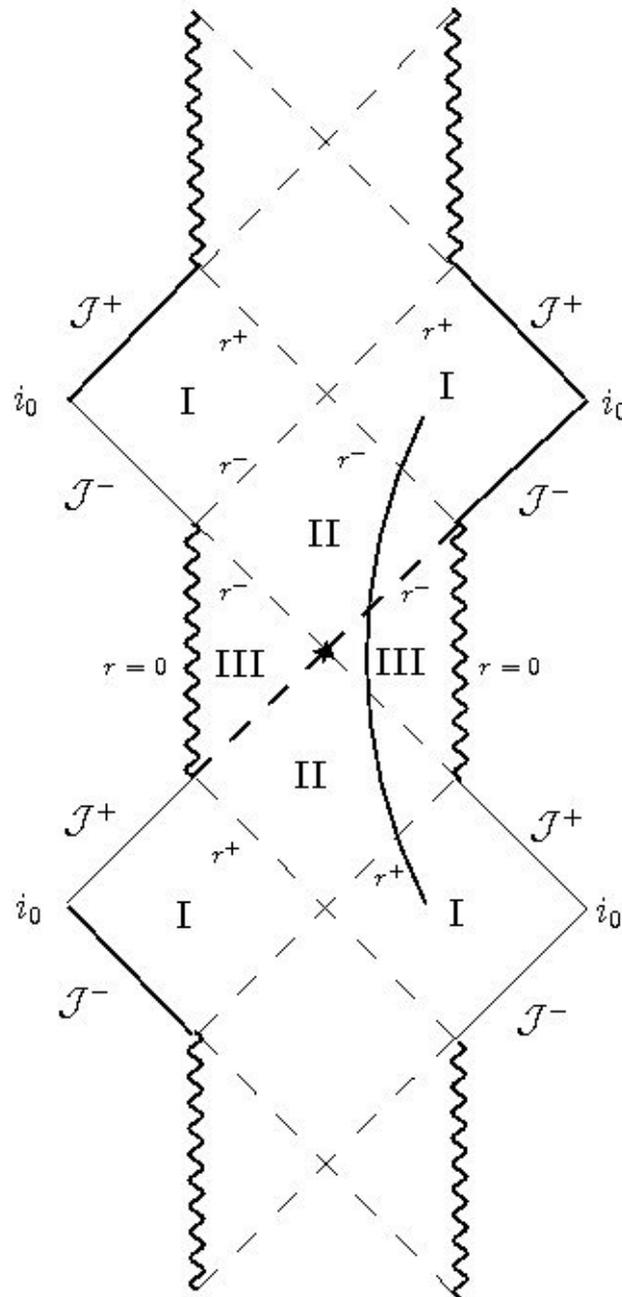


Figura 1: Diagrama de Penrose para el agujero negro de Reissner-Nordström con $GQ^2 < G^2M^2$. (Extraído de “The large scale structure of space-time” de S. Hawking y G. Ellis)

La zona I representa el universo fuera del agujero negro. La zona II es la región entre los horizontes externo e interno. En ella la coordenada R pasa a ser tipo tiempo, por lo que un observador no puede permanecer estático sino que tiene que avanzar necesariamente hacia el horizonte interior. La zona III es una zona

estática en la cual el observador puede moverse hacia la singularidad o bien dirigirse nuevamente a la superficie $x = x_-$, tras la cual la coordenada x vuelva a ser tipo tiempo pero con la orientación cambiada, ahora el observador está forzado a moverse en la dirección de x creciente hasta cruzar la superficie x_+ . Esto es similar a emerger desde un agujero blanco hacia otro universo. A partir de este punto el observador puede ingresar nuevamente en el agujero negro y repetir el mismo recorrido cuantas veces quiera.

En relatividad general clásica, una de las cosas que falla en este espacio es la hiperbolicidad global: La presencia de una superficie de Cauchy sobre la cual dando datos iniciales se pueda determinar la evolución de los mismos de manera única. Consideremos un punto en la zona III, entre el horizonte interno y $x = 0$. Un punto en esta zona no puede ser determinado por datos iniciales fuera del agujero negro. Al horizonte interno se lo denomina entonces *horizonte de Cauchy*, pues es una superficie nula tras la cual el problema de condiciones iniciales deja de estar bien determinado. Para visualizar esto mejor, consideremos las zonas I y II, si las consideramos como el espacio total, entonces podemos encontrar una hipersuperficie espacial que sirve como superficie de Cauchy:

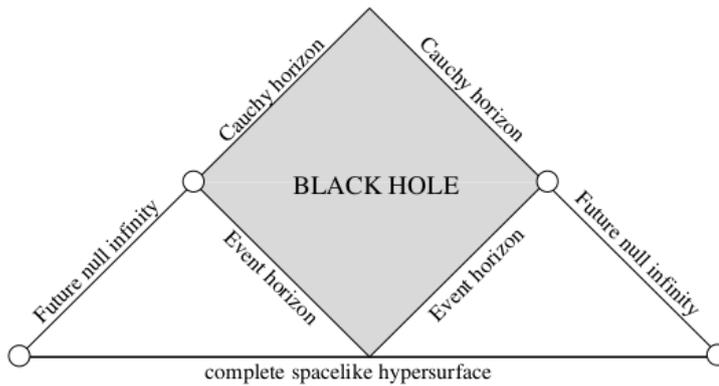


Figura 2: Hipersuperficie de Cauchy para el espacio de Reissner-Nordström. (Extraído de “Stability and Instability of the Reissner-Nordström Cauchy Horizon and the Problem of Uniqueness in General Relativity” de Mihalis Dafermos)

Sin embargo, si consideramos un punto en la zona III, vemos que el mismo no puede estar determinado por la hipersuperficie mostrada en la figura anterior:

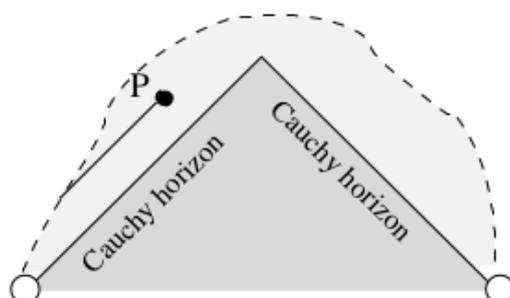


Figura 3: El punto P se encuentra causalmente desconectado de las zonas I y II pues está detrás del horizonte de Cauchy.

(Extraído de “Stability and Instability of the Reissner-Nordström Cauchy Horizon and the Problem of Uniqueness in General Relativity” de Mihalis Dafermos)

El punto P no puede depender de manera única de los datos iniciales dados en la superficie de Cauchy anterior, así como, por ejemplo, una función Ψ , solución a la ecuación diferencial $\square\Psi = 0$, no puede ser determinada de manera única en el punto P con los datos dados en la superficie S :

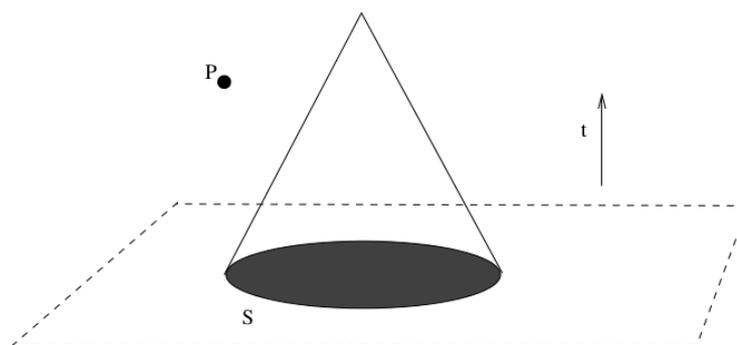


Figura 4: La situación del punto P con respecto a la superficie S es similar a la de los puntos en la zona III del espacio del agujero negro de Reissner-Nordström con respecto a los datos iniciales dados fuera del mismo. (Extraído de “Stability and Instability of the Reissner-Nordstrom Cauchy Horizon and the Problem of Uniqueness in General Relativity” de Mihalis Dafermos)

Este comportamiento es problemático, ya que la hiperbolicidad global es un requerimiento básico para que una teoría física esté bien formulada. Es imposible usar las leyes de la física para describir la estructura del agujero negro más allá del horizonte interno. Este comportamiento llevó a la hipótesis de que una singularidad se debería formar en el horizonte de Cauchy, forzando así a la evolución temporal de los datos iniciales a detenerse en el horizonte de Cauchy. Esto es precisamente el resultado de [26]. En dicho trabajo, se consideran los efectos de un flujo de radiación entrante y otro saliente sobre la estructura del

agujero negro de Reissner-Nordström. Esta radiación es modelada como dos cascarones esféricos moviéndose a la velocidad de la luz, uno contrayéndose y el otro expandiéndose. Estos cascarones dividen el espacio tiempo en cuatro regiones. Una región en la cual no hay radiación, otras dos en las cuales hay sólo radiación entrante y saliente respectivamente, y una última región en la cual ambos flujos están presentes. La masa del agujero negro no es ya una constante sino que pasa a ser una función del espacio tiempo (las variables usadas en [26] son el tiempo avanzado y el tiempo retardado). El resultado de este trabajo es que el parámetro de la masa diverge clásicamente cerca del horizonte de Cauchy, generando así una singularidad cerca del mismo y forzando entonces a la evolución de los datos iniciales a detenerse cerca del mismo. Se dice entonces que el horizonte de Cauchy es inestable, porque ante una perturbación como la radiación descrita anteriormente, se vuelve singular.

¿Cómo se modifican estos resultados tras la cuantización? En la sección anterior vimos que la singularidad es eliminada en el tratamiento cuántico. Una primera consecuencia de esto es que ahora sí se puede predecir la estructura del agujero negro tras el horizonte interior. Observando la figura 3, podemos observar que para poder determinar los puntos más allá del horizonte interior, sería necesario tener datos iniciales en una superficie tipo espacio que pase por la singularidad, algo que no es posible en la teoría clásica. Sin embargo, ahora que la singularidad ha sido removida, uno puede pasar a través de la misma hacia otra región espaciotemporal, por lo que en principio se podrían especificar datos iniciales en una superficie de tales características. Este punto es discutido en [30], aunque en dicho trabajo no se trata la cuantización del agujero negro sino que como se mencionó anteriormente, se encuentran coordenadas en las que la métrica es analítica. El resultado de este análisis es que dado que la singularidad puede ser atravesada, el espacio se puede foliar por hipersuperficies de Cauchy.

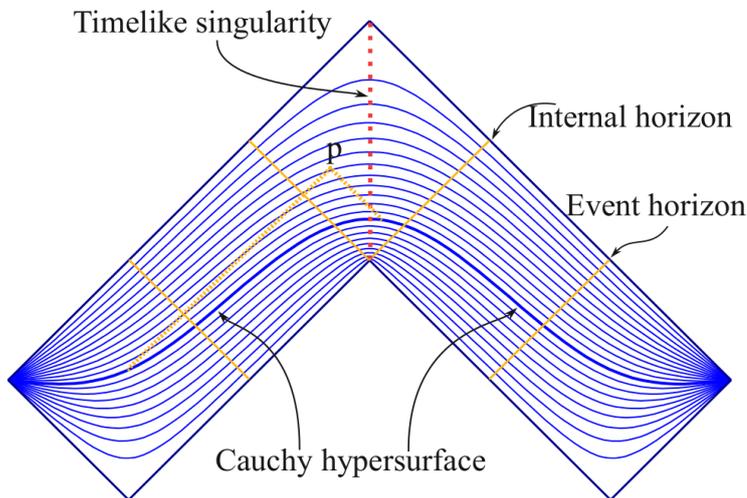


Figura 5: Foliación del espacio por superficies de Cauchy. El mismo fue mapeado a un polígono utilizando el mapeo de Schwarz-Christoffel. (Extraído de “Analytic Reissner-Nordström singularity” de Ovidiu Stoica)

Por otro lado, la discretización del espacio tiene consecuencias en el problema de

la inestabilidad del horizonte de Cauchy. Recordar que $E^x = x^2$, y que los valores propios de E^x son discretos. Esto impone una restricción en el incremento mínimo en x de $l_p^2/(2x)$ al moverse de un vértice de la red hacia el siguiente. La red más “fina” que se puede obtener entonces, es una red no uniforme cuyo espaciado crece a medida que nos acercamos a la singularidad. Esta discretización tiene consecuencias al estudiar la propagación de ondas en el espaciotiempo, pues en la propagación de una onda en una red no uniforme puede presentar fenómenos como atenuación y reflexión. Estos fenómenos podrían en principio evitar la inestabilidad del horizonte de Cauchy, pues no toda la radiación llegará hacia el mismo y por lo tanto la curvatura podría no crecer indefinidamente. Esto no es suficiente para asegurar que el horizonte de Cauchy será estable, pero al menos sugiere que el problema debería re-plantearse a nivel cuántico.

Capítulo 8

Conclusiones

Mostramos que se puede completar la cuantización de Dirac del agujero negro de Reissner-Nordström utilizando técnicas de gravedad cuántica de lazos. Los estados físicos fueron encontrados en forma cerrada. Fueron encontrados nuevos observables además de la masa y la carga eléctrica: El número de vértices y la secuencia ordenada de las valencias de las aristas de la red. Estos observables están asociados a la estructura discreta del espacio-tiempo y no tienen un análogo clásico. Los valores propios de estos observables pueden caracterizar los estados físicos.

La singularidad es eliminada debido a efectos cuánticos al igual que en el caso del agujero negro de Schwarzschild. En el caso clásico, cuando se verifica $GM^2 < Q^2$, no existe el horizonte de eventos y por lo tanto se tiene una singularidad desnuda, este caso es entonces descartado como no físico (conjetura de censura cósmica). Sin embargo, la cuantización elimina la singularidad, por lo que este caso podría ser estudiado a nivel cuántico.

La discretización del espacio-tiempo abre nuevas posibilidades para analizar el problema de la estabilidad de los horizontes de Cauchy en los agujeros negros de Reissner-Nordström.

En este trabajo se verificó que los resultados de [16] se pueden extender para el caso de un agujero negro de Reissner-Nordström, un posible trabajo a futuro es la extensión de [16] a agujeros negros más generales. Además, el estudio del caso extremal y de los casos con singularidades desnudas pueden presentar interesantes propiedades cuánticas con consecuencias en situaciones más realistas como en agujeros negros rotantes de Kerr.

Apéndice A

Grupos

En este apéndice se recopilan algunas definiciones y resultados básicos de teoría de grupos. La principal fuente aquí es el libro de Baez y Muniain [5].

Definimos un grupo G como un conjunto equipado con una operación binaria $\cdot : G \times G \rightarrow G$ (llamada usualmente *producto*), una operación $^{-1} : G \rightarrow G$, llamada inversa, y un elemento $1 \in G$ llamando identidad, tal que $\forall g, h, k \in G$ tenemos:

1. $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$
2. $g \cdot 1 = 1 \cdot g = g$
3. $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1$

Un subgrupo de G es un subconjunto que contiene la identidad y es cerrado bajo producto e inversa.

Algunos ejemplos de grupos son los siguientes:

1. $GL(n, \mathbb{R})$: Matrices reales $n \times n$ invertibles.
2. $GL(n, \mathbb{C})$: Matrices complejas $n \times n$ invertibles.
3. $SL(n, \mathbb{R})$: Matrices reales $n \times n$ invertibles de determinante 1.
4. $SL(n, \mathbb{C})$: Matrices complejas $n \times n$ invertibles de determinante 1.
5. $O(p, q)$: Matrices reales $n \times n$ que preservan el producto interno entre dos vectores en un espacio real equipado con una métrica g con signatura (p, q) , con p y q enteros no negativos tales que $p+q = n$. Es decir, si $T \in O(p, q)$, entonces $g(Tv, Tw) = g(v, w) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$. Si $p = n$, llamamos al grupo simplemente $O(n)$
6. $SO(p, q)$: Matrices de $O(p, q)$ con determinante 1. Si $p = n$, análogamente al caso anterior llamamos al grupo $SO(n)$. Obs: $SO(3, 1)$ es el grupo de matrices de determinante 1 que preservan el producto interno en el espacio de Minkowsky (Grupo de Lorentz).
7. $U(n)$: Matrices complejas unitarias de $n \times n$. Preservan el producto interno usual en \mathbb{C}^n : $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{v}^i w^i$.

8. $SU(n)$: Matrices de $U(n)$ con determinante 1.

Homeomorfismos. Dados dos grupos G y H , decimos que una función $\rho : G \rightarrow H$ es un *homeomorfismo* si

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G \quad (\text{A.1})$$

Esta definición implica

$$\begin{aligned} \rho(1) &= 1 \\ \rho(g^{-1}) &= \rho(g)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Lo cual puede verificarse fácilmente. Primero, en todo grupo el elemento identidad es único. Si suponemos que hay dos elementos e y k en el grupo con la propiedad del elemento identidad, tenemos:

$$e = ek = k \quad (\text{A.3})$$

Entonces, usando la definición de homeomorfismo entre grupos:

$$\rho(g) \rho(1) = \rho(g1) = \rho(g) \quad (\text{A.4})$$

Verificando la primer igualdad. Luego, para cada elemento del grupo hay sólo un elemento del grupo con la propiedad de la inversa. Si suponemos que $g \in G$ tiene dos inversos g^{-1} , \tilde{g}^{-1} en G , entonces:

$$gg^{-1} = g\tilde{g}^{-1} \xrightarrow{\times g^{-1}} g^{-1} = \tilde{g}^{-1} \quad (\text{A.5})$$

Entonces:

$$1 = \rho(gg^{-1}) = \rho(g)\rho(g^{-1}) \quad (\text{A.6})$$

Con lo que se verifica la segunda de las igualdades.

Isomorfismo. Un isomorfismo entre grupos es un homeomorfismo inyectivo y sobreyectivo.

Ejemplo: El grupo $U(1) = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ actúa sobre las matrices 1×1 complejas, esto es, sobre los números complejos. Un elemento $e^{i\theta}$ actúa sobre un número complejo rotándolo un ángulo θ en sentido antihorario. La acción consecutiva de dos elementos de este grupo: $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$ Por otro lado, un elemento del grupo $SO(2)$:

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Actúa en un vector de \mathbb{R}^2 rotándolo un ángulo θ en sentido antihorario. La acción consecutiva de dos elementos de este grupo: $M(\theta)M(\phi) = M(\theta + \phi)$ Se puede verificar fácilmente que:

$$\rho(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Es un isomorfismo entre $U(1)$ y $SO(2)$.

Representaciones. Decimos que un grupo G actúa en un espacio vectorial V si hay un mapa ρ de G a las transformaciones lineales $GL(V)$ de V tal que:

$$\rho(g_1 g_2)v = \rho(g_1)\rho(g_2)v \quad \forall v \in V, \forall g_1, g_2 \in G \quad (\text{A.9})$$

Decimos en este caso que ρ es una **representación** de G en V .

Subespacio invariante. Un subespacio V' de un espacio vectorial V es invariante si $v \in V'$ entonces $\rho(g)v \in V' \quad \forall g \in G$

Representación irreducible. Si una representación ρ tiene como espacios invariantes únicamente al vector nulo y al espacio vectorial, entonces decimos que ρ es irreducible.

Representaciones equivalentes. Si tenemos dos representaciones de un grupo en dos espacios vectoriales:

$$\rho : G \rightarrow GL(V) \quad \rho' : G \rightarrow GL(V') \quad (\text{A.10})$$

Decimos que las representaciones son equivalentes si hay un mapa lineal $T : V \rightarrow V'$ tal que:

$$\rho'(g)T = T\rho(g) \quad (\text{A.11})$$

Suma directa de representaciones. Si tenemos dos representaciones de un grupo $G : \rho : G \rightarrow GL(V), \rho' : G \rightarrow GL(V')$ Definimos $\rho \oplus \rho'$ como la representación en G en el espacio $V \oplus V'$ dada por:

$$(\rho \oplus \rho')(g)(v, v') = (\rho(g)v, \rho'(g)v') \quad \forall v \in V, v' \in V' \quad (\text{A.12})$$

Producto tensorial de representaciones. Sean ρ y ρ' representaciones en V y V' respectivamente. Definimos el producto tensorial de dichas representaciones $\rho \otimes \rho'$ como la representación de G en el espacio $V \otimes V'$ dada por:

$$(\rho \otimes \rho')(g)(v \otimes v') = \rho(g)v \otimes \rho'(g)v' \quad (\text{A.13})$$

Grupo de Lie. Decimos que un grupo G es un *grupo de Lie* si es una variedad, y las operaciones producto e inversa son mapas suaves. Observación: Los grupos matriciales definidos anteriormente son subvariedades del espacio de las matrices $n \times n$ (reales o complejas según corresponda). Usando las fórmulas explícitas se puede ver además que las operaciones producto e inversa son suaves. Los grupos matriciales anteriormente mencionados son entonces grupos de Lie. Ya vimos el caso particular del grupo $U(1)$:

$$U(1) = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$$

Este grupo es equivalente al círculo unidad en el plano complejo. Veamos ahora en detalle el caso del grupo $SU(2)$. Este grupo está formado por las matrices complejas unitarias 2×2 con determinante 1:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \quad (\text{A.14})$$

Los elementos de $SU(2)$ se pueden escribir como combinación lineal de las siguientes matrices:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

O equivalentemente:

$$\mathbb{I}, \quad I = -i\sigma_1, \quad J = -i\sigma_2, \quad K = -i\sigma_3 \quad (\text{A.16})$$

Al álgebra:

$$\mathbb{H} = \{a + bI + cJ + dK : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \quad (\text{A.17})$$

Se la denomina *cuaterniones*. La relación entre los cuaterniones y $SU(2)$ es la siguiente:

$$SU(2) = \{a + bI + cJ + dK : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} \quad (\text{A.18})$$

En otras palabras, el grupo $SU(2)$ corresponde a la esfera S^3 en los cuaterniones.

Representación de $SU(2)$. Para cada número semientero j , el grupo $SU(2)$ tiene una representación de dimensión $2j + 1$ a la cual se la denomina representación de spin j . Definimos la representación de spin j de $SU(2)$ a la cual llamaremos U_j de la siguiente manera: Sea \mathcal{H}_j el espacio de los polinomios de \mathbb{C}^2 homogéneos de grado $2j$, es decir, una combinación lineal de polinomios del tipo:

$$f(x, y) = x^p y^q \quad x, y \in \mathbb{C}, \quad p + q = 2j$$

Observación: \mathcal{H}_j tiene dimensión $2j + 1$ Para un elemento $g \in SU(2)$, sea $U_j(g)$ la transformación lineal de \mathcal{H}_j dada por:

$$(U_j(g)f)(v) = f(g^{-1}v)$$

Puede verificarse que se trata de una representación: $U_j(1)$ es la identidad, y además, para $g, h \in SU(2)$ tenemos

$$\begin{aligned} (U_j(g)U_j(h)f)(v) &= (U_j(h)f)(g^{-1}v) = f(h^{-1}g^{-1}v) = f((gh)^{-1}v) \\ &= (U_j(gh)f)(v) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Álgebras de Lie. Sea G un grupo de Lie. Definimos el álgebra de Lie \mathfrak{g} como el espacio tangente de G en el elemento identidad. Ejemplo: Sea γ un camino en $SO(3)$ tal que $\gamma(t)$ corresponde a una rotación antihoraria de ángulo t alrededor del eje z :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Entonces, el vector tangente a γ en el elemento identidad:

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Podemos recuperar el elemento del grupo a partir de este elemento del álgebra de Lie de la siguiente manera:

$$\exp(t\gamma'(0)) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

De forma más general, se puede probar que para todo grupo de Lie G hay un mapa suave llamado *mapa exponencial*:

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G \quad (\text{A.23})$$

Unívocamente determinado por las siguientes propiedades:

- $\exp(0)$ es el elemento identidad de G
- $\exp(sx)\exp(tx) = \exp((s+t)x) \quad \forall x \in \mathfrak{g}, s, t \in \mathbb{R}$
- $\left. \frac{d}{dt} \exp(tx) \right|_{t=0} = x$

Podemos definir un álgebra de Lie de manera más abstracta como un espacio vectorial \mathfrak{g} equipado con un mapa $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ llamado *bracket de Lie* que verifica las siguientes propiedades:

- $[v, w] = -[w, v] \quad \forall v, w \in \mathfrak{g}$
- $[u, \alpha v + \beta w] = \alpha[u, v] + \beta[u, w] \quad \forall u, v, w \in \mathfrak{g}$ y escalares α, β .
- Identidad de Jacobi: $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0 \quad \forall u, v, w \in \mathfrak{g}$.

Homeomorfismos entre álgebras de Lie. Decimos que f es un homeomorfismo entre dos álgebras de Lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ si es un mapa lineal que verifica:

$$f([v, w]) = [f(v), f(w)] \quad \forall v, w \in \mathfrak{g} \quad (\text{A.24})$$

Si f es biyectiva decimos que es un isomorfismo entre \mathfrak{g} y \mathfrak{h} .

Apéndice B

Conexiones en fibrados

En este apéndice se reúnen definiciones y resultados básicos sobre fibrados, conexiones y curvatura. La principal fuente de este apartado es el libro de Baez y Muniain [5].

B.1 Fibrados y conexiones

Fibrados. Un fibrado es una estructura consistente en una variedad E , una variedad M y un mapa sobreyectivo $\pi : E \rightarrow M$. A la variedad E se la denomina *espacio total*, a la variedad M *espacio base*, y al mapa π *proyección*.

Para cada punto $p \in M$, el espacio

$$E_p = \{q \in E : \pi(q) = p\}$$

se lo denomina *fibra de q sobre p* .

El espacio total se puede escribir como la unión de todas las fibras:

$$E = \bigcup_{p \in M} E_p$$

Por ejemplo, el espacio tangente de una variedad M , denotado por TM se puede escribir como:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

La proyección $\pi : TM \rightarrow M$ envía cada vector tangente $v \in T_p M$ al punto $p \in M$. La fibra sobre el punto $p \in M$ es entonces el espacio tangente $T_p M$. Se puede verificar que TM es efectivamente una variedad. Tanto M como $T_p M$ son una variedad de dimensión n , por lo que localmente, TM “se parece” a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Se pueden definir mapas para TM de la siguiente manera. Si $\{U_\alpha\}$ es una cobertura para M y $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ un atlas, definimos:

$$V_\alpha = \{v \in TM : \pi(v) \in U_\alpha\}$$

Definimos entonces los mapas: $\psi : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$\psi(v) = (\varphi_\alpha(\pi(v)), (\varphi_\alpha)_* v) \tag{B.1}$$

Con esta definición se verifican todas las propiedades que debe cumplir un atlas.

Fibrados triviales. Dadas dos variedades M y F , definimos un *fibrado trivial* sobre M con fibra estándar F al fibrado sobre M con espacio total $E = M \times F$. El mapa de proyección está dado por

$$\pi(p, f) = p \quad \forall (p, f) \in M \times F \quad (\text{B.2})$$

La fibra sobre un punto $p \in M$ es

$$E_p = \{p\} \times F \quad (\text{B.3})$$

Morfismos entre fibrados. Supongamos que tenemos dos fibrados $\pi : E \rightarrow M$, $\pi' : E' \rightarrow M'$, definimos un *morfismo* entre dichos fibrados como un par de mapas $\psi : E \rightarrow E'$, $\phi : M \rightarrow M'$ tal que ψ mapea cada fibra E_p en $E'_{\phi(p)}$. Si tanto ψ como ϕ son difeomorfismos, decimos que este morfismo es un *isomorfismo*.

Restricción de un fibrado. Dado un fibrado $\pi : E \rightarrow M$ y una subvariedad $S \subseteq M$, definimos la restricción de π a S :

$$E|_S = \{q \in E : \pi(q) \in S\} \quad (\text{B.4})$$

Fibrados localmente triviales. Decimos que el fibrado $\pi : E \rightarrow M$ es *localmente trivial* con fibra estándar F si para cada punto $p \in M$ existe un entorno U de p y un isomorfismo

$$\phi : E|_U \rightarrow U \times F \quad (\text{B.5})$$

enviando cada fibra E_p a $\{p\} \times F$. A ϕ se lo denomina una *trivialización local*.

Fibrados vectoriales. Un fibrado vectorial real de dimensión n es un fibrado localmente trivial $\pi : E \rightarrow M$ tal que cada fibra E_p es un espacio vectorial de dimensión n . Además, para cada punto $p \in M$ hay un entorno U de p y una trivialización local

$$\phi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n \quad (\text{B.6})$$

que mapea cada fibra E_q a $\{q\} \times \mathbb{R}^n$ linealmente. Ejemplo: El fibrado tangente TM es el fibrado vectorial cuyo espacio total es la unión de todos los espacios tangentes de una variedad M . $TM = \cup_{p \in M} T_p M$. Se define el fibrado cotangente de manera análoga: $T^*M = \cup_{p \in M} T_p^* M$.

Un morfismo entre dos fibrados vectoriales $\pi : E \rightarrow M$, $\pi' : E' \rightarrow M'$ se define de forma análoga a como se define un morfismo entre fibrados en general, con la condición adicional de que la restricción del morfismo $\psi : E \rightarrow E'$ a la fibra E_p sea lineal.

Secciones. Decimos que s es una sección de un fibrado $\pi : E \rightarrow M$ si es una función $s : M \rightarrow E$ tal que para cada punto $p \in M$ se tiene

$$s(p) \in E_p \quad (\text{B.7})$$

Al conjunto de las secciones de E se le llama $\Gamma(E)$. Ejemplo: Un campo vectorial en una variedad es una sección de su fibrado tangente.

Observación: Si $E = M \times F$ es un fibrado trivial con fibra estándar F y tenemos una sección $s : M \rightarrow E$, entonces hay una función $f : M \rightarrow F$ tal que

$$s(p) = (p, f(p)) \in E_p$$

Si por otro lado tenemos una función $f : M \rightarrow F$, la expresión anterior define una sección.

Si E es un fibrado sobre M y s, s' son secciones en E , definimos entonces las secciones:

$$(s + s')(p) = s(p) + s'(p) \quad p \in M \quad (\text{B.8})$$

$$(fs)(p) = f(p)s(p) \quad p \in M \quad f \in C^\infty(M) \quad (\text{B.9})$$

Decimos que las secciones e_1, \dots, e_n son una base de $\Gamma(E)$ si cualquier sección $s \in \Gamma(E)$ se puede escribir como combinación lineal de las mismas.

$$s = s^i e_i \quad s^i \in C^\infty(M) \quad (\text{B.10})$$

Una base de secciones determina un isomorfismo entre fibrados vectoriales $\psi : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$:

$$\psi(p, v) = v^i e_i(p) \quad p \in M, v \in \mathbb{R}^n \quad (\text{B.11})$$

De manera recíproca, si tenemos un isomorfismo $\psi : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$ podemos usarlo para obtener una base de $\Gamma(E)$ a partir de una base de $\Gamma(M \times \mathbb{R}^n)$.

G-Fibrados. Sea M una variedad de dimensión n y $\{U_\alpha\}$ un conjunto de abiertos que cubren M . Sea V un espacio vectorial y ρ una representación de un grupo G en V . Formaremos un fibrado a partir de la unión de los fibrados triviales $U_\alpha \times V$:

$$\bigcup_\alpha U_\alpha \times V \quad (\text{B.12})$$

Sea $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ una función de transición. Identificamos dos puntos $(p, v) \in U_\alpha \times V$ y $(p, v') \in U_\beta \times V$ si

$$v = \rho(g_{\alpha\beta}(p)) v' \quad (\text{B.13})$$

O de forma abreviada:

$$v = g_{\alpha\beta}(p) v' \quad (\text{B.14})$$

Observación: Las funciones de transición deben verificar ciertas condiciones de consistencia. Al punto $(p, v) \in U_\alpha \times V$ debemos identificarlo con $(p, g_{\alpha\alpha} v) \in U_\alpha \times V$, por lo que la función de transformación debe cumplir: $g_{\alpha\alpha} = 1$ en U_α . Si un punto de la variedad pertenece a la intersección de tres cartas: $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Entonces se puede ver que debe cumplirse $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$ en $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Se puede además obtener una generalización análoga de esta condición para cuando el punto pertenece a la intersección de un número arbitrario de cartas.

Podemos ahora formar el fibrado $\pi : E \rightarrow M$. Denotaremos como $[p, v]_\alpha$ al punto del espacio total E correspondiente a $(p, v) \in U_\alpha \times V$. Definimos la proyección $\pi : E \rightarrow M$ como

$$\pi[p, v]_\alpha = p \quad (\text{B.15})$$

La fibra E_p es el conjunto de todos los puntos de la forma $[p, v]_\alpha$. Definiendo la función $\varphi_\alpha : E \rightarrow U_\alpha \times V$ tal que $\varphi_\alpha([p, v]_\alpha) = (p, v)$ y utilizando las condiciones de consistencia, se puede verificar que este es un fibrado vectorial. A este tipo de fibrados los denominamos *G-fibrados*. Al grupo G se lo denomina *grupo de gauge*.

Transformaciones de gauge. Las fibras de un G -fibrado son un espacio vectorial de dimensión n . Decimos que una transformación lineal $T : E_p \rightarrow E_p$ vive en G si es de la forma $\rho(g)$, es decir:

$$[p, v]_\alpha \rightarrow [p, gv]_\alpha \quad (\text{B.16})$$

Para algún $g \in G$. Esta definición no depende de la carta elegida. Recordemos que identificamos:

$$[p, v]_\alpha = [p, g_{\beta\alpha}v]_\beta \quad (\text{B.17})$$

Entonces, podemos identificar también:

$$[p, gv]_\alpha = [p, g_{\beta\alpha}gv]_\beta \quad (\text{B.18})$$

Por lo que T también en $U_\alpha \cap U_\beta$:

$$[p, g_{\beta\alpha}v]_\beta \rightarrow [p, g_{\beta\alpha}gv]_\beta \quad (\text{B.19})$$

En otras palabras:

$$[p, v']_\beta \rightarrow [p, g'v']_\beta \quad (\text{B.20})$$

Donde llamamos $v' = g_{\beta\alpha}v$ y $g' = g_{\beta\alpha}gg_{\beta\alpha}^{-1}$.

A una transformación lineal $T : E_p \rightarrow E_p$ que vive en G y varía suavemente con el punto $p \in M$ se le llama *transformación de gauge*.

Endomorfismos. Dado un espacio vectorial V , llamamos *endomorfismos* (denotados por $End(V)$) al conjunto de las transformaciones lineales de V en sí mismo. Se puede verificar que $End(V)$ es un espacio vectorial y además un álgebra si definimos:

$$(\alpha T)(v) = \alpha T(v) \quad (\text{B.21})$$

$$(S + T)(v) = S(v) + T(v) \quad (\text{B.22})$$

$$(S \circ T)(v) = S(T(v)) \quad (\text{B.23})$$

Para un escalar α y $S, T \in End(V)$, $v \in V$ Ejemplo: $End(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de las matrices reales $n \times n$.

Se puede verificar que $End(V)$ es isomorfo a $V \otimes V^*$. Tomando el elemento $v \otimes f \in V \otimes V^*$, le asignamos la función dada por:

$$x \rightarrow f(x)v \quad \forall x \in V \quad (\text{B.24})$$

En términos de bases, el isomorfismo está dado por:

$$e^i \otimes e_j \rightarrow e_j^i \quad (\text{B.25})$$

Entonces, dado un fibrado E sobre una variedad M podemos definir el *fibrado de endomorfismos* como el fibrado correspondiente a $End(E)$, o equivalentemente $E \otimes E^*$. Una sección T de este fibrado define un mapa de E en sí mismo, enviando $v \in E_p$ a $T(p)v \in E_p$. Una sección T de $End(E)$ actúa en una sección s de E de la siguiente manera:

$$(Ts)(p) = T(p)s(p) \quad \forall p \in M$$

También se puede verificar que $T : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ es $C^\infty(M)$ – lineal:

$$T(fs) = fT(s)$$

Si $T(p)$ vive en $G \forall p \in M$ decimos que T es una transformación de gauge. El conjunto de las transformaciones de gauge es un grupo, con el producto y la inversa definidos por:

$$(gh)(p) = g(p)h(p) \quad (B.26)$$

$$g^{-1}(p) = g(p)^{-1} \quad (B.27)$$

En teoría de campos gauge, los campos son secciones de G -fibrados, y las leyes de la física son ecuaciones diferenciales tales que si una sección s es solución, también lo es gs para cualquier $g \in G$.

Conexiones. Sea E un fibrado sobre una variedad M . Una conexión D asigna a cada campo vectorial v en M una función $D_v : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ que satisface las siguientes propiedades:

$$D_v(\alpha s) = \alpha D_v s \quad (B.28)$$

$$D_v(s + t) = D_v s + D_v t \quad (B.29)$$

$$D_v(fs) = v(f)s + fD_v s \quad (B.30)$$

$$D_{v+w}s = D_v s + D_w s \quad (B.31)$$

$$D_f v s = fD_v s \quad (B.32)$$

para todo $v, w \in Vect(M)$, $s, t \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$, α escalar. Llamamos a $D_v s$ *derivada covariante de s en la dirección de v*

Si tenemos una base $\{\partial_\mu\}$ de $Vect(M)$ y una base de secciones $\{e_j\}$, podemos expresar $D_\mu e_j$ como una combinación lineal de secciones:

$$D_\mu e_j = A_{\mu j}^i e_i$$

Las funciones $A_{\mu j}^i$ se denominan componentes del *vector potencial*. Podemos expresar la derivada covariante de una sección s de un fibrado E sobre una variedad U en la dirección de un campo vectorial v .

$$D_v s = D_{v^\mu \partial_\mu} s = v^\mu D_\mu s = v^\mu D_\mu (s^i e_i) \quad (B.33)$$

$$= v^\mu \left((\partial_\mu s^i) e_i + A_{\mu i}^j s^i e_j \right) = v^\mu (\partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j) e_i \quad (B.34)$$

El vector potencial es una 1-forma en U que toma valores en $End(E)$, esto es, una sección del fibrado

$$End\left(E\Big|_U\right) \otimes T^*U \quad (B.35)$$

En términos de coordenadas:

$$A = A_{\mu i}^j e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu \quad (\text{B.36})$$

A cualquier conexión D se la puede escribir como $D = D_0 + A$, siendo D_0 la conexión:

$$D_v^0 s = v(s^j) e_j$$

Entonces:

$$D_v s = v^\mu (\partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j) e_i = (v(s^i) + A_{\mu j}^i v^\mu s^j) e_i \quad (\text{B.37})$$

$$= D_v^0 s + A(v) s \quad (\text{B.38})$$

Decimos de D es una G -conexión si en coordenadas locales, las componentes $A_\mu \in \text{End}(E)$ viven en el álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo G del G -fibrado.

Así como se le puede aplicar una transformación de Gauge a una sección de un G -fibrado, también se le puede aplicar a una G -conexión. Sea D una G -conexión en E y g una transformación de Gauge. La conexión transformada está dada por:

$$D'_v(s) = g D_v(g^{-1} s) \quad (\text{B.39})$$

Utilizando esta expresión se pueden obtener las componentes transformadas del potencial vector. Recordemos que g es una forma abreviada de referirse a la representación del elemento g del grupo G en el espacio vectorial correspondiente a la fibra de E sobre el cual actúa:

$$g \rightarrow \rho(g)_k^j e_j \otimes e^k \in \text{End}(E) \quad (\text{B.40})$$

Entonces:

$$\begin{aligned} D'_\mu(s) &= g \left(D_\mu^0 \left(\rho(g^{-1})_k^j s^k e_j \right) \right) + g A_\mu(g^{-1} s) \\ &= D_\mu^0(s) + g \left[\left(\partial_\mu \rho(g^{-1})_k^j \right) s^k e_j \right] + g A_\mu(g^{-1} s) \\ &= D_\mu^0(s) + g \left[\left(\partial_\mu \rho(g^{-1})_k^j \right) e^k \otimes e_j \right] (s^l e_l) + g A_\mu(g^{-1} s) \\ &= D_\mu^0(s) + g (\partial_\mu g^{-1})(s) + (g A_\mu g^{-1})(s) \\ &= D_\mu^0(s) + A'_\mu(s) \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Con:

$$A'_\mu = g (\partial_\mu g^{-1}) + g A_\mu g^{-1} \quad (\text{B.42})$$

B.2 Holonomías

Transporte paralelo. Sea E un fibrado vectorial sobre M equipado con una conexión D . Sea $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ un camino diferenciable desde p hasta q . Sea $u(t)$, un vector en la fibra de E sobre $\gamma(t)$. En una trivialización local $E|_U \cong U \otimes V$, podemos pensar en las secciones s de E como funciones valuadas

en V . Decimos que $u(t)$ es *transportado paralelamente* en la dirección de $\gamma(t)$ si:

$$D_{\gamma'(t)}u(t) = 0 \quad \forall t \quad (\text{B.43})$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt}u(t) + A(\gamma'(t))u(t) = 0 \quad (\text{B.44})$$

$$\frac{d}{dt}u(t) = -A(\gamma'(t))u(t) \quad (\text{B.45})$$

La solución entonces satisface:

$$u(t) = u - \int_0^t A(\gamma'(t_1))u(t_1)dt_1 \quad (\text{B.46})$$

Sustituyendo esta expresión en sí misma, podemos obtener de forma recursiva:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \int_{t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} A(\gamma'(t_1)) \dots A(\gamma'(t_n)) dt_1 \dots dt_n \right) u \quad (\text{B.47})$$

Se puede probar que esta suma converge a la solución.

La integral:

$$\int_{t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} A(\gamma'(t_1)) \dots A(\gamma'(t_n)) dt_1 \dots dt_n \quad (\text{B.48})$$

se puede reescribir si definimos el producto ordenado:

$$PA(\gamma'(t_1)) \dots A(\gamma'(t_n)) \quad (\text{B.49})$$

Entonces, la integral anterior es igual a:

$$\frac{1}{n!} \int_{t_i \in [0, t]} PA(\gamma'(t_1)) \dots A(\gamma'(t_n)) dt_1 \dots dt_n \quad (\text{B.50})$$

O de forma abreviada:

$$\frac{1}{n!} P \left(\int_0^t A(\gamma'(s)) ds \right)^n \quad (\text{B.51})$$

Si definimos la exponencial ordenada:

$$Pe^{-\int_0^t A(\gamma'(s)) ds} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} P \left(\int_0^t A(\gamma'(s)) ds \right)^n \quad (\text{B.52})$$

Tenemos:

$$u(t) = Pe^{-\int_0^t A(\gamma'(s)) ds} u \quad (\text{B.53})$$

Holonomía. Sea $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ un camino diferenciable de p a q en la variedad M , sobre la cual hay un fibrado E con conexión D . Dado $u \in E_p$, denotamos por $H(\gamma, D)u$ al resultado de transportar el vector u paralelamente hasta q a través del camino γ . Al mapa lineal

$$H(\gamma, D) : E_p \rightarrow E_q \quad (\text{B.54})$$

se le llama *holonomía* a lo largo del camino γ .

Propiedades:

- Sea $\alpha : [0, T] \rightarrow M$ un camino diferenciable, y sea $f : [0, S] \rightarrow [0, T]$ una función suave con $f(0), f(S) = T$. Sea β el camino reparametrizado dado por $\beta(t) = \alpha(f(t))$. Se puede probar que para cualquier conexión D en el fibrado $\pi : E \rightarrow M$ se cumple $H(\alpha, D) = H(\beta, D)$.
- Sean α y β dos caminos componibles en la variedad M , entonces se tiene que

$$H(\beta\alpha, D) = H(\beta, D)H(\alpha, D) \quad (\text{B.55})$$

- Dado un camino $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ de p a q , el camino inverso γ^{-1} de q a p está dado por:

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(T - t) \quad (\text{B.56})$$

Entonces, se puede probar:

$$H(\gamma^{-1}, D) = H(\gamma, D)^{-1} \quad (\text{B.57})$$

- Para cualquier punto p , se puede definir el camino $1_p : [0, 1] \rightarrow M$ dado por

$$1_p(t) = p \quad (\text{B.58})$$

Se tiene entonces:

$$H(1_q\gamma, D) = H(\gamma, D) \quad (\text{B.59})$$

$$H(\gamma 1_p, D) = H(\gamma, D) \quad (\text{B.60})$$

$$H(1_p, D) = 1 \quad (\text{B.61})$$

Transformaciones de gauge. Sea E un G -fibrado sobre M y γ un camino diferenciable en M . Supongamos que $u(t) \in E_{\gamma(t)}$ satisface la ecuación de transporte paralelo

$$D_{\gamma'(t)}u(t) = 0 \quad (\text{B.62})$$

Si A es el potencial vector de A , entonces se cumple:

$$\frac{d}{dt}u(t) = -\gamma'^\mu(t)A_\mu(\gamma(t))u(t) \quad (\text{B.63})$$

donde se utilizaron coordenadas de una trivialización local. Aplicando una transformación de gauge a $u(t)$, obtenemos otro vector $w(t) = g(\gamma(t))u(t)$, el cual podemos diferenciar para obtener:

$$\frac{d}{dt}w(t) = \left(\frac{d}{dt}g(\gamma(t)) \right) u(t) + g(\gamma(t)) \frac{d}{dt}u(t) \quad (\text{B.64})$$

En función de coordenadas locales:

$$\gamma'^\nu(t)(\partial_\nu g)u(t) - g\gamma'^\mu(t)A_\mu u(t) = \gamma'^\mu(t)(\partial_\mu g)g^{-1}w(t) - \gamma'^\mu(t)gA_\mu g^{-1}w(t) \quad (\text{B.65})$$

Sustituyendo:

$$(\partial_\mu g)g^{-1} = -g\partial_\mu g^{-1} \quad (\text{B.66})$$

se obtiene:

$$\frac{d}{dt}w(t) = -\gamma'\mu(t)A'_\mu w(t) \quad (\text{B.67})$$

con:

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1} \quad (\text{B.68})$$

El vector $w(t)$ satisface entonces la ecuación de transporte paralelo

$$D'_{\gamma'(t)}w(t) = 0 \quad (\text{B.69})$$

donde D' es el resultado de aplicarle la transformación de gauge g a D .

La holonomía $H(\gamma, D)$ es el mapa lineal que envía $u(0)$ a $u(T)$, mientras que $H(\gamma, D')$ envía $w(0) = g(\gamma(0))u(0)$ a $w(T) = g(\gamma(T))w(T)$, por lo tanto, tenemos que bajo una transformación de gauge:

$$H(\gamma, D') = g(\gamma(T))H(\gamma, D)g(\gamma(0))^{-1} \quad (\text{B.70})$$

B.3 Curvatura

Sea E un fibrado vectorial sobre M con una conexión D . Dados dos campos vectoriales v, w en M , definimos la curvatura $F(v, w)$ de D como el operador en ΓE dado por:

$$F(v, w)s = D_v D_w s - D_w D_v s - D_{[v, w]}s \quad (\text{B.71})$$

Propiedades:

- Antisimetría

$$F(v, w) = -F(w, v) \quad (\text{B.72})$$

- Linealidad

$$F(fv, w) = fF(v, w) \quad (\text{B.73})$$

$$F(v, fw) = fF(v, w) \quad \forall f \in C^\infty(M) \quad (\text{B.74})$$

$$F(v, w)(fs) = fF(v, w)(s) \quad (\text{B.75})$$

Si $\{x^\mu\}$ son coordenadas locales en un abierto $U \subset M$, definimos $F_{\mu\nu}$ como la sección de $\text{End}(E)$ dada por:

$$F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu) \quad (\text{B.76})$$

Aplicándolo a un elemento de una base de secciones:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}e_i &= D_\mu D_\nu e_i - D_\nu D_\mu e_i \\ &= D_\mu (A_{\nu i}^j e_j) - D_\nu (A_{\mu i}^j e_j) \\ &= \left((\partial_\mu A_{\nu i}^j) + A_{\mu k}^j A_{\nu i}^k - (\partial_\nu A_{\mu i}^j) - A_{\nu j}^k A_{\mu i}^k \right) e_j \end{aligned} \quad (\text{B.77})$$

Como las secciones $e_j \otimes e^i$ forman una base local de las secciones de $End(E)$, podemos escribir:

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^j e_j \otimes e^i \quad (\text{B.78})$$

Las componentes $F_{\mu\nu}^j$ están dadas entonces por:

$$F_{\mu\nu}^j = \partial_\mu A_{\nu}^j - \partial_\nu A_{\mu}^j + A_{\mu k}^j A_{\nu}^k - A_{\nu k}^j A_{\mu}^k \quad (\text{B.79})$$

Apéndice C

Teorías de gauge

En una teoría de gauge, el sistema físico en cuestión (llamado sistema gauge) es descrito por más variables que el número de grados de libertad físicos independientes. Estas teorías están además caracterizadas por la existencia de transformaciones que no afectan a las cantidades con significado físico real, tales transformaciones se denominan *transformaciones de gauge*. Las cantidades físicas entonces son aquellas que son invariantes gauge. Un ejemplo de teoría de gauge es el electromagnetismo; éste está descrito por el potencial vector electromagnético $A(t, \vec{x}) = (\phi, \vec{A})$ el cual tiene cuatro componentes, siendo cada una de ellas una función del tiempo t y la posición \vec{x} . Sin embargo, no todos los grados de libertad son físicos. Recordar que los campos eléctrico y magnético se obtienen a partir de A mediante las siguientes igualdades

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (\text{C.1})$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{C.2})$$

Podemos observar que las siguientes modificaciones

$$\phi \rightarrow \phi + f(t) \quad (\text{C.3})$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\lambda(\vec{x}) \quad (\text{C.4})$$

dejan tanto el campo eléctrico como el campo magnético invariantes. Las transformaciones (C.3)-(C.4) dejan las cantidades físicas observables invariantes por lo que son transformaciones de gauge. Otro ejemplo de una teoría de gauge es la relatividad general, en la cual hay grados de libertad no físicos correspondientes a la libertad gauge presente en los difeomorfismos espaciales y transformaciones de gauge internas.

Un sistema de gauge puede ser pensado como uno en el que las variables están especificadas con respecto a un cierto marco de referencia, el cual puede ser elegido arbitrariamente a cualquier tiempo. Un cambio en este marco de referencia es una transformación que no afecta a las variables físicas, una transformación de gauge. Ya que este marco de referencia puede ser cambiado en todo tiempo, es esperable dadas condiciones iniciales, las ecuaciones de movimiento no determinen completamente la evolución del sistema, sino que la solución general contendrá funciones arbitrarias del tiempo, consecuencia de la libertad de gauge.

Más adelante veremos que la presencia de funciones arbitrarias en la solución general de las ecuaciones de movimiento implica que las variables canónicas no son todas independientes sino que existen vínculos entre ellas. Comenzamos el apéndice analizando la acción de un sistema de gauge y definiendo el conjunto de vínculos primarios del mismo.

C.1 Vínculos lagrangeanos

Dado un sistema con N grados de libertad, las ecuaciones de movimiento clásicas son aquellas que hacen que la acción

$$S_L = \int_{t_1}^{t_2} L(q^n, \dot{q}^n) dt \quad (\text{C.5})$$

sea estacionaria ante variaciones arbitrarias $\delta q^n(t)$ de las variables q^n tales que $\delta q^n(t_1) = \delta q^n(t_2) = 0$. Para que (C.5) sea estacionaria, deben cumplirse las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0 \quad n = 1, \dots, N. \quad (\text{C.6})$$

Desarrollando la derivada temporal utilizando regla de la cadena:

$$\ddot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^{n'} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{n'} \dot{q}^n} \quad (\text{C.7})$$

De (C.7), podemos en principio despejar las aceleraciones:

$$\ddot{q}^m = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n \dot{q}^{n'}} \right) \quad (\text{C.8})$$

Para esto es necesario que la matriz

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}} \quad (\text{C.9})$$

sea invertible. Por otro lado, si

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}} \right) = 0 \quad (\text{C.10})$$

las aceleraciones no están unívocamente determinadas por las coordenadas y las velocidades. Una misma condición inicial puede entonces dar lugar a distintas evoluciones temporales. Sea R , el rango de la matriz $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^m}$ (por lo tanto $R < N$), entonces existen $M = N - R$ vectores propios nulos $Y_m^{n'}$ $m = 1, \dots, M$ $i = 1, \dots, N$:

$$Y_m^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}} = 0 \quad (\text{C.11})$$

Definimos

$$\phi_m(q^n, \dot{q}^n) := Y_m^n \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0 \quad (\text{C.12})$$

A las k funciones independientes ϕ_k (con $k \leq M$) se las denomina vínculos lagrangeanos. Vemos entonces que al no estar las soluciones de las ecuaciones de movimiento completamente determinadas por las condiciones iniciales, los grados de libertad no son independientes sino que existen relaciones entre ellos: las igualdades $\phi_k = 0$. Desde aquí se podría seguir desarrollando el análisis de los sistemas de gauge desde el punto de vista lagrangeano, pero vamos a optar por cambiar a la formulación hamiltoniana.

C.2 Formulación hamiltoniana

C.2.1 Vínculos primarios

Recordar que para realizar la transformación de Legendre que nos lleva del lagrangeano al hamiltoniano, definimos el momento canónico conjugado de la variable q^n como

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \quad (\text{C.13})$$

Entonces, vemos que la condición de no invertibilidad de la matriz hessiana (C.10), se traduce en la formulación hamiltoniana como la no invertibilidad de los momentos conjugados en función de las velocidades, el mapa $(q^n, \dot{q}^m) \rightarrow (q^n, p_m)$ no es inyectivo, por lo que para obtener un mapa inyectivo entre estos espacios es necesario incluir parámetros adicionales, como se verá más adelante en esta sección. Los momentos conjugados entonces no son independientes sino que cumplen ciertas relaciones (vínculos)

$$\phi_m(q^n, p_n) = 0 \quad m = 1, \dots, M. \quad (\text{C.14})$$

Cuando los momentos conjugados son expresados en función de las posiciones y las velocidades mediante (C.13), las relaciones (C.14) se transforman en identidades. A las relaciones (C.14) se las denomina *vínculos primarios*. Las ecuaciones de movimiento no son utilizadas para obtener los vínculos primarios y estos no imponen ninguna restricción en las coordenadas (q^n, \dot{q}^n) . A la superficie del espacio de fases en la que se cumplen las relaciones (C.14) se la denomina superficie de vínculos primarios, la misma tiene una dimensión $2N - M'$, siendo M' el número de vínculos independientes. Dadas ciertas condiciones de regularidad ([20] pág. 7), se puede probar que se cumplen las siguientes propiedades

- Si F es una función en el espacio de fases que se anula en la superficie de vínculos ($F \approx 0$), entonces

$$F = f^m \phi_m \quad (\text{C.15})$$

para algunas funciones f^m .

- Si $\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$ para variaciones arbitrarias $\delta q^n, \delta p_n$, entonces se cumple

$$\lambda_n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n} \quad (\text{C.16})$$

$$\mu^n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \quad (\text{C.17})$$

para algunas funciones u^m .

C.2.2 Hamiltoniano canónico

El hamiltoniano canónico se obtiene a partir del lagrangeano L mediante una transformación de Legendre:

$$H = p_n \dot{q}^n - L \quad (\text{C.18})$$

H es una función de las posiciones y las velocidades si usamos las definiciones (C.13), pero gracias a la propiedad de la transformada de Legendre, depende de las velocidades sólo a través de los momentos conjugados $p(q, \dot{q})$, por lo que el hamiltoniano es una función de las coordenadas y de sus momentos conjugados. Para ver esto, tomamos variaciones en (C.18):

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta p_n \dot{q}^n + p_n \delta \dot{q}^n - \delta L \\ &= \delta p_n \dot{q}^n + p_n \delta \dot{q}^n - \delta \dot{q}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} - \delta q^n \frac{\partial L}{\partial q^n} \\ &= \dot{q}^n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q^n} \delta q^n \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Donde se usó la definición (C.13).

Sin embargo, el hamiltoniano no está unívocamente determinado como función de las coordenadas y sus momentos, pues estos últimos no son independientes entre sí sino que verifican ciertas igualdades llamadas vínculos (ver sección anterior). Por lo tanto, las variaciones δp_n no son todas independientes sino que deben verificar los vínculos $\phi_m \approx 0$. El hamiltoniano canónico está entonces bien definido sólo en la superficie de vínculos primarios, y puede ser extendido arbitrariamente fuera de la misma. El formalismo no debería cambiar bajo transformaciones del tipo $H \rightarrow H + c^m \phi_m$. Utilizando la ecuación (C.19), tenemos:

$$\begin{aligned} \delta H &= \dot{q}^n \delta p_n - \delta q^n \frac{\partial L}{\partial q^n} = \frac{\partial H}{\partial q^n} \delta q^n + \frac{\partial H}{\partial p_n} \delta p_n \\ \rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial q^n} + \frac{\partial L}{\partial q^n} \right) \delta q^n + \left(\frac{\partial H}{\partial p_n} - \dot{q}^n \right) \delta p_n &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Utilizando entonces la segunda de las propiedades vistas en la página 113, tenemos que

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \quad (\text{C.21})$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^n} = -\frac{\partial H}{\partial q^n} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n} \quad (\text{C.22})$$

Si los vínculos son independientes, la primera de estas relaciones permite expresar, en principio, los parámetros u como funciones de las coordenadas y los momentos conjugados, resolviendo las ecuaciones

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n}(q, \dot{q}) + u^m(q, \dot{q}) \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}(q, p(q, \dot{q})) \quad (\text{C.23})$$

Si los vínculos son independientes (lo cual se asumirá por el resto del apéndice), los vectores $\frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}$ también lo son, por lo que dos conjuntos distintos de parámetros

u^m no pueden dar las mismas velocidades en (C.21). Estos parámetros son justamente los que necesitamos para hacer que el mapa que va desde el espacio (q^n, \dot{q}^n) a la superficie de vínculos primarios. Si definimos la transformada de Legendre desde el espacio (q^n, \dot{q}^n) al espacio (q^n, p_n, u^m) de la superficie de vínculos de la siguiente manera

$$q^n = q^n \quad (\text{C.24})$$

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}(q, \dot{q}) \quad (\text{C.25})$$

$$u^m = u^m(q, \dot{q}) \quad (\text{C.26})$$

entonces vemos que la transformación es invertible, pues tenemos también

$$q^n = q^n \quad (\text{C.27})$$

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \quad (\text{C.28})$$

$$\phi_m(q, p) = 0 \quad (\text{C.29})$$

C.2.3 Ecuaciones de Hamilton y vínculos

Las relaciones (C.24)-(C.29) permiten reescribir las ecuaciones de movimiento (C.6) en su forma hamiltoniana equivalente

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \quad (\text{C.30})$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n} \quad (\text{C.31})$$

$$\phi_m(q, p) = 0 \quad (\text{C.32})$$

Estas ecuaciones pueden ser obtenidas a partir de tomar variaciones en la acción del sistema:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^n p_n - H - u^m \phi_m) = 0 \quad (\text{C.33})$$

para variaciones arbitrarias $\delta q^n, \delta p_n, \delta u^m$. Las variables extras que tuvimos que introducir para que la transformada de Legendre sea invertible son multiplicadores de Lagrange, mientras que sus variaciones dan lugar a los vínculos primarios. La derivada temporal de una función $F(q, p)$ se escribe como

$$\dot{F} = [F, H] + u^m [F, \phi_m] \quad (\text{C.34})$$

C.2.4 Vínculos secundarios

Además de imponer los vínculos primarios ϕ_m a las variables canónicas, uno debe también exigir que estos vínculos se conserven en el tiempo. Utilizando (C.34), esto último se escribe como

$$\dot{\phi}_m \approx 0 \rightarrow \dot{\phi}_m = [\phi_m, H] + u^{m'} [\phi_m, \phi_{m'}] \approx 0 \quad (\text{C.35})$$

Las condiciones de consistencia (C.35) pueden imponer alguna restricción en los u , o bien ser no involucrarlos y ser una relación únicamente entre coordenadas

y momentos; si estas relaciones son independientes de los vínculos primarios se tratan de nuevos vínculos, denominados vínculos secundarios. Uno debe además imponer la conservación de estos vínculos secundarios utilizando el mismo algoritmo de consistencia que se utilizó para imponer la conservación de los vínculos primarios, obteniendo posiblemente vínculos terciarios. Imponiendo la conservación de los vínculos terciarios se pueden obtener vínculos cuaternarios, y así sucesivamente. A los vínculos secundarios, terciarios, cuaternarios, etc. usualmente se los llama simplemente vínculos secundarios. Al terminar de imponer las condiciones de consistencia uno terminará con $M + K$ vínculos, siendo K el número de vínculos secundarios.

C.2.5 Hamiltoniano total

Al imponer la conservación de los vínculos se obtienen, además de vínculos nuevos, restricciones en los multiplicadores de Lagrange:

$$[\phi_j, H] + u^m [\phi_j, \phi_m] \approx 0 \quad (\text{C.36})$$

La solución más general a (C.36) se puede escribir como

$$u^m = U^m + V^m \quad (\text{C.37})$$

siendo U^m una solución particular a (C.36), y V^m la solución general a la ecuación homogénea

$$V^m [\phi_j, \phi_m] \approx 0 \quad (\text{C.38})$$

la cual se puede escribir como suma de soluciones linealmente independientes

$$V^m = v^a V_a^m \quad a = 1, \dots, A. \quad (\text{C.39})$$

donde los coeficientes v^a son totalmente arbitrarios (se asumirá que el rango de la matriz es constante en la superficie de vínculos). Definimos ahora el hamiltoniano total como

$$H_T = H + u^m \phi_m \quad (\text{C.40})$$

Utilizando (C.37) y (C.39), se puede reescribir como

$$H_T = H + U^m \phi_m + v^a V_a^m \phi_m = H' + v^a \phi_a \quad (\text{C.41})$$

donde se definió $H' = H + U^m \phi_m$, $\phi_a = V_a^m \phi_m$. En términos del hamiltoniano total, la evolución temporal (C.34) toma la forma

$$\dot{F} = [F, H_T] \quad (\text{C.42})$$

C.2.6 Vínculos de primera y segunda clase

La distinción entre vínculos primarios y secundarios resulta ser de poca importancia. Una distinción mucho más importante es la de vínculos de primera y segunda clase. Decimos que un vínculo es de primera clase, y lo denotamos por γ , si su corchete de Poisson con el resto de los vínculos se anula débilmente.

$$[\gamma, \phi_j] \approx 0 \quad \forall j \quad (\text{C.43})$$

Por otro lado, un vínculo de segunda clase (los cuales serán denotados por χ) es aquel cuyo corchete de Poisson con al menos uno de los otros vínculos no se anula débilmente. Se pueden definir funciones en general de primera y segunda clase utilizando la misma definición. Observando (C.36) y (C.38), vemos que H' y los vínculos ϕ_a definidos como $\phi_a = V_a^m \phi_m$ son de primera clase. Además, cualquier vínculo de primera clase se puede escribir como combinación lineal de los ϕ_a , pues estos son la solución más general a (C.38). Entonces, el hamiltoniano total H_T se puede escribir como la suma del hamiltoniano de primera clase H' y una combinación lineal de los vínculos de primera clase primarios ϕ_a .

C.2.7 Transformaciones de gauge

La presencia de las funciones arbitrarias del tiempo v^a en el hamiltoniano total introduce una ambigüedad en la evolución de las variables canónicas. Dos elecciones diferentes de las funciones v^a darán como resultado una evolución temporal distinta. Dadas las condiciones iniciales, las ecuaciones de movimiento deben determinar completamente la evolución de los estados físicos. La ambigüedad introducida por las funciones v^a entonces no puede ser físicamente relevante. Supongamos que conocemos el estado de una variable dinámica F en el tiempo t , y queremos evaluarla en un tiempo $t + \delta t$, con δt infinitesimal. El estado de F en $t + \delta t$ dependerá de la elección de las funciones v^a que hayamos hecho. La diferencia de los valores de F en $t + \delta t$ correspondientes a dos elecciones diferentes v^a y \tilde{v}^a está dada por:

$$\begin{aligned} \delta F &= ([F, H'] + v^a [F, \phi_a] - [F, H'] - \tilde{v}^a [F, \phi_a]) \delta t \\ &= \delta v^a [F, \phi_a] \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

con $\delta v^a = (v^a - \tilde{v}^a) \delta t$. Los vínculos primarios de primera clase generan transformaciones que no afectan el estado físico, a las cuales llamamos *transformaciones de gauge*. Se puede probar que tanto el corchete de Poisson de dos de estos vínculos así como entre uno de ellos y el hamiltoniano de primera clase también generan una transformación de gauge ([20] pág. 17). No existe ninguna razón para pensar que al tomar los corchetes de Poisson anteriores, el resultado contenga únicamente vínculos primarios, por lo que es esperable que vínculos secundarios de primera clase también generen transformaciones de gauge. Este es precisamente lo que dice la conjetura de Dirac, que todos los vínculos de primera clase (primarios y secundarios) generan transformaciones de gauge. Si bien no puede ser probada, existen buenas razones para pensar que todos los vínculos de primera clase generan transformaciones de gauge, siendo la observación anterior una de ellas. La conjetura es válida en prácticamente todas las aplicaciones físicas conocidas por lo que se suele tomar como válida. Para más detalles sobre esto, ver [20].

C.2.8 Hamiltoniano extendido

Definimos el hamiltoniano extendido añadiendo al hamiltoniano total los vínculos de primera clase secundarios:

$$H_E = H' + u^a \gamma_a \quad (\text{C.45})$$

Donde ahora γ_a incluye a todos los vínculos de primera clase. La evolución temporal generada por el hamiltoniano extendido tiene en cuenta toda la libertad gauge, ya que incluye todos los vínculos de primera clase mientras que el hamiltoniano total sólo los primarios.

C.2.9 Vínculos de segunda clase

A diferencia de los vínculos de primera clase, los de segunda clase no generan ninguna transformación de gauge. ¿Cómo deberían ser tratados? El siguiente ejemplo simple es bastante ilustrativo del caso general. Supongamos que tenemos un sistema con N grados de libertad descrito por las coordenadas q^1, \dots, q^n y los siguientes vínculos

$$q^1 \approx 0 \quad (\text{C.46})$$

$$p_1 \approx 0 \quad (\text{C.47})$$

los cuales son de segunda clase pues $[q^1, p_1] = 1$. En este caso es bastante claro cómo tratar los vínculos; éstos nos dicen que el grado de libertad q^1 es totalmente irrelevante y puede ser descartado junto con su momento, modificando así el corchete de Poisson:

$$[F, G]^* = \sum_{n=2}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q^n} \frac{\partial G}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial G}{\partial q^n} \right) \quad (\text{C.48})$$

El corchete (C.48) de una función cualquiera con ambos vínculos es idénticamente cero, por lo que estos se pueden imponer como igualdades fuertes.

Corchete de Dirac

La generalización de (C.48) para un conjunto cualquiera de vínculos de segunda clase se denomina corchete de Dirac.

Sea C la matriz cuyas componentes $C_{\alpha\beta}$ están dadas por $[\chi_\alpha, \chi_\beta]$. Se puede verificar que el determinante de C es distinto de cero [20], por lo que esta matriz posee inversa:

$$C_{\alpha\gamma} C^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta \quad (\text{C.49})$$

El corchete de Dirac se define como

$$[F, G]^* = [F, G] - [F, \chi_\alpha] C^{\alpha\beta} [\chi_\beta, G] \quad (\text{C.50})$$

Se puede verificar que cumple las siguientes propiedades

- $[F, G] = -[G, F]^*$
- $[F, GR]^* = [F, G]^* R + G [F, R]^*$

- $[\chi_\alpha, F]^* = 0$ para cualquier función F .
- $[F, G]^* \approx [F, G]$ para G primera clase y F arbitraria.
- $[R, [F, G]^*]^* \approx [R, [F, G]]$ para F y G primera clase y R arbitraria.
- $[[F, G]^*, R]^* + [[R, F]^*, G]^* + [[G, R]^*, F]^* = 0$

De la tercera de estas propiedades tenemos que los vínculos de segunda clase se pueden imponer como igualdades fuertes; por otro lado, de la cuarta propiedad tenemos que el corchete de Dirac genera la evolución temporal correcta, pues al ser el hamiltoniano extendido de primera clase, se cumple

$$\dot{F} \approx [F, H_E] \approx [F, H_E]^* \quad (\text{C.51})$$

Además, el efecto de una transformación de gauge puede ser evaluado con el corchete de Dirac:

$$[F, \gamma_a] \approx [F, \gamma_a]^* \quad \text{para cualquier } F \quad (\text{C.52})$$

Entonces, el tratamiento de los vínculos de segunda clase consiste en reemplazar el corchete de Poisson por el corchete de Dirac, e imponer estos vínculos como igualdades fuertes.

C.2.10 Fijación de gauge

La presencia de vínculos de primera clase quiere decir que hay una cierta libertad de gauge en el sistema, por lo que distintos valores de las variables canónicas pueden corresponder al mismo estado físico. Uno puede querer eliminar esa ambigüedad para que haya una correspondencia uno a uno entre los valores de las variables canónicas y los estados físicos; esto se consigue imponiendo relaciones (condiciones de gauge canónicas) entre las variables canónicas que notaremos por $C_b(q, p) \approx 0$ las cuales deben cumplir las siguientes propiedades:

- Ser accesibles: Dado un conjunto cualquiera de variables canónicas, debe existir una transformación de gauge que mapee dicho conjunto en uno que verifique las condiciones de gauge.
- Fijar el gauge completamente. Dado un conjunto de condiciones de gauge, no debe existir ninguna otra transformación además de la identidad que preserve estas condiciones. Entonces, las ecuaciones

$$\delta u^a [C_b(q, p), \gamma_a] \approx 0 \quad (\text{C.53})$$

deben implicar $\delta u^a = 0$. Esto quiere decir que la matriz $[C_b(q, p), \gamma_a]$ es invertible, por lo que las condiciones de gauge C_b forman junto con los vínculos γ_a un conjunto de vínculos de segunda clase.

El número de condiciones necesarias para fijar gauge completamente es igual al número de vínculos de primera clase independientes. Una vez fijamos el gauge, no quedan vínculos de primera clase y por lo tanto no queda ninguna libertad gauge en el sistema. Uno puede también fijar el gauge parcialmente, imponiendo un número de condiciones menor al número de vínculos de primera clase independientes, quedándose aún con cierta libertad gauge en el sistema.

C.3 Sistemas totalmente vinculados

Usualmente se describe la evolución de un sistema dando las variables dinámicas en función del tiempo. El tiempo tiene un significado físico directo y no es una variable dinámica. Existe una formulación diferente en la cual el tiempo es tratado como una variable canónica más. La evolución de todas las variables es descrita en función de un parámetro externo el cual no tiene ningún significado físico. La teoría es invariante bajo reparametrizaciones de este parámetro; el sistema se dice entonces que es generalmente covariante. Un sistema puede ya ser generalmente covariante, o puede ser que inicialmente el tiempo no sea originalmente una variable canónica, pero se transforme al parametrizar el sistema. Esto último siempre puede ser hecho, aunque no se ha tenido mucho éxito intentando “deparametrizando” teorías que inicialmente son generalmente covariantes.

C.3.1 Hamiltoniano cero

Consideremos un sistema con variables canónicas q^i, p_i descrito por la siguiente acción:

$$S[q^i(t), p_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \frac{dq^i}{dt} - H_0 \right) dt \quad (\text{C.54})$$

donde se asumió por simplicidad que no hay ningún vínculo. Si introducimos ahora la variable canónica $t \equiv q^0$ y su momento conjugado p_0 , reemplazamos la acción (C.54) por

$$S[q^0(\tau), q^i(\tau), p_0(\tau), p_i(\tau), u^0(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[p_0 \frac{dq^0}{d\tau} + p_i \frac{dq^i}{d\tau} - u^0 (p_0 + H_0) \right] d\tau \quad (\text{C.55})$$

La evolución obtenida por extremizar (C.55) es equivalente a la obtenida de (C.54). Las ecuaciones obtenidas al variar (C.55) con respecto a u^0 y p_0 son respectivamente:

$$\gamma_0 \equiv p_0 + H_0 = 0 \quad (\text{C.56})$$

$$\dot{t} - u^0 = 0 \quad (\text{C.57})$$

Utilizando estas relaciones es posible reducir la acción, sustituyendo:

$$P_0 \rightarrow -H_0 \quad (\text{C.58})$$

$$u_0 \rightarrow \dot{t} \quad (\text{C.59})$$

obteniendo así:

$$\begin{aligned} S[q^0(\tau), q^i(\tau), p_i(\tau), u^0(\tau)] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(p_i \frac{dq^i}{d\tau} - H_0 \dot{t} \right) d\tau \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \frac{dq^i}{dt} - H_0 \right) dt \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

La acción (C.55) contiene un par más de variables canónicas, pero también tiene un vínculo más: $\gamma_0 \approx 0$, el cual al ser el único, es de primera clase. El

número de grados de libertad es por lo tanto el mismo. Es importante notar que en la acción (C.55) no hay hamiltoniano de primera clase H' ; el hamiltoniano extendido contiene tan sólo un vínculo. Si existen más vínculos, el hamiltoniano extendido es la suma de todos ellos:

$$H_E = u^a \gamma_a + u^\alpha \chi_\alpha \quad (\text{C.61})$$

donde el vínculo γ_0 está incluido en (C.61). Vemos entonces que la evolución del sistema es el desarrollo de una transformación de gauge.

¿Es el hamiltoniano de un sistema generalmente covariante necesariamente cero? Esta discusión puede ser encontrada en [20] pág. 105. En ella se llega a la conclusión de que si las variables canónicas transforman como escalares bajo una reparametrización, entonces el hamiltoniano de un sistema generalmente covariante debe ser débilmente cero. Si observamos la acción (C.55), podemos ver que si hubiera un hamiltoniano de primera clase $H'(q^i, p_i)$, el mismo no transformaría como una densidad escalar por lo que dicho término no puede estar presente. El hamiltoniano extendido entonces es una suma de vínculos; por esta razón, a estos sistemas se les llama también sistemas totalmente vinculados. Una de las ventajas de incorporar al tiempo como variable canónica, además de dar lugar a un tratamiento más simétrico de las variables, es que en los problemas en los cuales hay una dependencia explícita del tiempo, las ecuaciones que expresan la conservación en el tiempo de los vínculos involucran derivadas explícitas con respecto al tiempo, las cuales no son formuladas en términos de los corchetes de Poisson. Esta dificultad es eliminada cuando uno incluye al tiempo como variable canónica y trabaja en el espacio de fases extendido. Un vínculo se dice que es de primera clase si se anula su corchete de Poisson con todos los demás vínculos, incluyendo a γ_0 .

La relatividad general es el ejemplo más importante de un sistema totalmente vinculado. En el capítulo 2 vimos que el hamiltoniano en relatividad general es una suma de vínculos. Esto es por supuesto esperable, ya que en relatividad general no existe la noción de tiempo absoluto, sino que el tiempo y el espacio son tratados de forma totalmente simétrica.

C.4 Cuantización canónica

La cuantización canónica es un procedimiento para cuantizar una teoría clásica en el que se intenta preservar lo mejor posible la estructura formal de la teoría, como los corchetes de Poisson y las simetrías de la misma. Recordar que si tenemos un sistema clásico descrito por los pares de coordenadas canónicas q^n, p_n y el hamiltoniano H , las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \quad (\text{C.62})$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n} \quad (\text{C.63})$$

éstas se pueden escribir en términos del corchete de Poisson:

$$\dot{q}^n = \{q^n, H\} \quad (\text{C.64})$$

$$\dot{p}_n = \{p_n, H\} \quad (\text{C.65})$$

y en general, si f es un observable, su evolución temporal está dada por

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial q^n} \dot{q}^n + \frac{\partial f}{\partial p_n} \dot{p}_n = \frac{\partial f}{\partial q^n} \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial q^n} = \{f, H\} \quad (\text{C.66})$$

Para cuantizar, se reemplazan los observables que son función de las variables canónicas por operadores autoadjuntos en el espacio de Hilbert correspondiente; por ejemplo, si estamos cuantizando una partícula libre que vive en \mathbb{R}^n , el espacio de Hilbert es el de las funciones 2-integrables en \mathbb{R}^n , denotado por $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dicho reemplazo debe ser tal que se tenga la siguiente correspondencia entre los corchetes de Poisson entre las cantidades clásicas y los conmutadores de los operadores cuánticos:

$$\{f, g\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}] \quad (\text{C.67})$$

En general es imposible asignar un operador a todos los observables tal que (C.67) se cumpla, por lo que esta no debe tomarse como una regla sino como un ideal a seguir. Una vez se asignaron operadores a los observables, la evolución de dichos operadores está dada por

$$\hat{f}(t) = U \hat{f} U^\dagger \quad (\text{C.68})$$

Donde U es el operador evolución temporal. (C.68) no es más que el operador \hat{f} en la representación de Heisenberg. Cuando H es independiente del tiempo, el operador evolución:

$$U = e^{iHt} \quad (\text{C.69})$$

Por lo que (C.68) toma la forma:

$$\hat{f}(t) = e^{iHt} \hat{f} e^{-iHt} \quad (\text{C.70})$$

Luego, si derivamos (C.70) con respecto al tiempo, obtenemos, en analogía con el caso clásico:

$$\frac{d\hat{f}}{dt}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{H}] \quad (\text{C.71})$$

Un caso simple e ilustrativo es el de la ya mencionada partícula libre que vive en \mathbb{R}^n . Para simplificar aún más supongamos que se mueve en una única dimensión, $n = 1$. Las variables fundamentales son la posición q y el momento p . El corchete de Poisson entre estas:

$$\{q, p\} = 1 \quad (\text{C.72})$$

Y además:

$$\{q, q\} = 0 \quad \{p, p\} = 0 \quad (\text{C.73})$$

El espacio de Hilbert es $L^2(\mathbb{R})$, y los operadores posición y momento están definidos por:

$$\langle q | \hat{q} | \psi \rangle = q \langle q | \psi \rangle = q\psi(q) \quad (\text{C.74})$$

$$\langle q | \hat{p} | \psi \rangle = -i\hbar \partial_q \langle q | \psi \rangle = -i\hbar \partial_q \psi(q) \quad (\text{C.75})$$

Las relaciones de conmutación entre estos operadores:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = -i\hbar \mathbb{I} \quad (\text{C.76})$$

Luego,

$$[\hat{q}, \hat{q}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0 \quad (\text{C.77})$$

El hamiltoniano clásico:

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (\text{C.78})$$

siendo m la masa de la partícula. El operador hamiltoniano es entonces:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (\text{C.79})$$

y este operador es usado para definir la dinámica de la teoría.

C.4.1 Cuantización de Dirac de los vínculos de primera clase

La situación es más complicada si hay vínculos en la teoría. Existen varias maneras de tratar a los vínculos para incorporarlos en la cuantización. En esta subsección describimos la que es de interés para este trabajo, la cuantización de Dirac. Este método es para vínculos de primera clase, por lo que supondremos que no hay vínculos de segunda clase, o que estos fueron eliminados, ya sea imponiéndolos como igualdades fuertes y reemplazando el corchete de Poisson por el de Dirac, o agrandando el espacio de fases de manera tal que todos los vínculos resultantes sean de primera clase ([20]). Mientras que en otros métodos de cuantización los vínculos de primera clase son eliminados mediante la fijación de gauge, en el método de Dirac no se elimina ningún grado de libertad sino que se conservan todos. Todas las variables dinámicas son promovidas a operadores en el espacio de Hilbert correspondiente. Al no fijar el gauge, se acarrea información no física al cuantizar. Esta información no física es eliminada imponiendo condiciones que seleccionan los “estados físicos”. Estas condiciones deben seleccionar aquellos estados que sean invariantes gauge. Se puede comprobar que el corchete de Poisson verifica todas las propiedades de un corchete de Lie por lo que se puede definir un álgebra de Lie con las funciones del espacio de fases y el corchete de Poisson como operación de multiplicación. En el capítulo 6 vimos que con la abelianización del vínculo hamiltoniano, logramos que los vínculos formen un álgebra de Lie bajo el corchete de Poisson. Un elemento del grupo de Lie se obtiene exponenciando los elementos del álgebra de Lie, por lo que una transformación de gauge en los estados tendría la forma

$$|\psi\rangle \rightarrow e^{i\varepsilon^a \hat{G}_a} |\psi\rangle \quad (\text{C.80})$$

siendo ε_a parámetros infinitesimales y \hat{G}_a las versiones operatoriales de los vínculos de primera clase.

En (C.80) podemos ver que para que un estado sea invariante ante una transformación de gauge, debe cumplir

$$\hat{G}_a |\psi\rangle = 0 \quad (\text{C.81})$$

para todos los operadores \hat{G}_a . La condición (C.81) es lineal, por lo que cualquier combinación lineal de estados físicos seguirá siendo física. Por ejemplo, si nuestro espacio de fases consta de n pares de variables canónicas conjugadas $q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n$ y tenemos sólo un vínculo $p_1 \approx 0$, la condición (C.81) para este sistema en la representación de Schrödinger es la siguiente:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial q^1} |\psi\rangle = 0 \quad (\text{C.82})$$

Esto nos dice que el vínculo $p_1 \approx 0$ tiene como consecuencia que los estados físicos no dependen de la variable q^1 .

Bibliografía

- [1] Richard L. Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. The Dynamics of general relativity. *Gen.Rel.Grav.*, 40:1997–2027, 2008.
- [2] Abhay Ashtekar. New variables for classical and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2244–2247, Nov 1986.
- [3] Abhay Ashtekar and C.J. Isham. Representations of the holonomy algebras of gravity and nonAbelian gauge theories. *Class.Quant.Grav.*, 9:1433–1468, 1992.
- [4] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Background independent quantum gravity: A Status report. *Class.Quant.Grav.*, 21:R53, 2004.
- [5] John Baez and Javier Muniain. *Gauge Fields, Knots and Gravity*. World Scientific, 1994.
- [6] Martin Bojowald. Spherically symmetric quantum geometry: States and basic operators. *Class.Quant.Grav.*, 21:3733–3753, 2004.
- [7] Martin Bojowald. *Canonical Gravity and Applications*. Cambridge University Press, 2011.
- [8] Martin Bojowald and Rafal Swiderski. Spherically symmetric quantum geometry: Hamiltonian constraint. *Class.Quant.Grav.*, 23:2129–2154, 2006.
- [9] Miguel Campiglia, Rodolfo Gambini, and Jorge Pullin. Loop quantization of spherically symmetric midi-superspaces. *Class.Quant.Grav.*, 24:3649–3672, 2007.
- [10] Miguel Campiglia, Rodolfo Gambini, and Jorge Pullin. Loop quantization of spherically symmetric midi-superspaces : The Interior problem. *AIP Conf.Proc.*, 977:52–63, 2008.
- [11] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry*. Addison-Wesley, 2004.
- [12] Dah-Wei Chiou, Wei-Tou Ni, and Alf Tang. Loop quantization of spherically symmetric midisuperspaces and loop quantum geometry of the maximally extended Schwarzschild spacetime. 2012.
- [13] Rodolfo Gambini, Esteban Mato, and Jorge Pullin. Quantum spacetime of a charged black hole. *Phys.Rev.*, D91(8):084006, 2015.
- [14] Rodolfo Gambini, Javier Olmedo, and Jorge Pullin. Quantum black holes in Loop Quantum Gravity. *Class.Quant.Grav.*, 31:095009, 2014.

- [15] Rodolfo Gambini and Rafael A. Porto. Relational time in generally covariant quantum systems: Four models. *Phys.Rev.*, D63:105014, 2001.
- [16] Rodolfo Gambini and Jorge Pullin. Loop quantization of the Schwarzschild black hole. *Phys.Rev.Lett.*, 110(21):211301, 2013.
- [17] Rodolfo Gambini and Jorge Pullin. Hawking radiation from a spherical loop quantum gravity black hole. *Class.Quant.Grav.*, 31:115003, 2014.
- [18] Gambini, R. and Trias, A. Geometrical origin of gauge theories. *Phys. Rev. D*, 23:553–555, 1981.
- [19] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1975.
- [20] Marc Henneaux and Claudio Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1992.
- [21] Karel V. Kuchar. Geometrodynamics of Schwarzschild black holes. *Phys.Rev.*, D50:3961–3981, 1994.
- [22] Eugene Lerman. Notes on lie groups, 2012.
- [23] Jorma Louko and Bernard F. Whiting. Hamiltonian thermodynamics of the Schwarzschild black hole. *Phys.Rev.*, D51:5583–5599, 1995.
- [24] Jorma Louko and Stephen N. Winters-Hilt. Hamiltonian thermodynamics of the Reissner-Nordstrom anti-de Sitter black hole. *Phys.Rev.*, D54:2647–2663, 1996.
- [25] Simone Mercuri. Introduction to Loop Quantum Gravity. *PoS*, ISFTG:016, 2009.
- [26] Eric Poisson and W. Israel. Internal structure of black holes. *Phys.Rev.*, D41:1796–1809, 1990.
- [27] Carlo Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2004.
- [28] Carlo Rovelli and Lee Smolin. Loop space representation of quantum general relativity. *Nuclear Physics B*, 331(1):80 – 152, 1990.
- [29] O. Cristinel Stoica. On singular semi-riemannian manifolds. *ArXiv e-prints*, 2011.
- [30] O. Cristinel Stoica. Analytic Reissner-Nordstrom Singularity. *Phys.Scripta*, 85:055004, 2012.
- [31] O. Cristinel Stoica. Schwarzschild’s Singularity is Semi-Regularizable. *Eur.Phys.J.Plus*, 127:83, 2012.
- [32] Mojatba Taslimitehrami. Singularity avoidance of schwarzschild and reissner-nordström black holes in loop quantum gravity. Master’s thesis, 2012.

- [33] Thomas Thiemann. *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2007.
- [34] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, 1989.