

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA, URUGUAY  
Instituto de Física



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY



PEDECIBA

# ESTRUCTURAS LAGRANGIANAS COHERENTES EN FLUJOS NO ESTACIONARIOS

TESIS

Maestría en Física

*Autor:*

Lic. Nicasio Barrere

*Directores*

Dra. Cecilia Cabeza

Dr. Alberto Pérez-Muñuzuri

IGUÁ 4225, FACULTAD DE CIENCIAS, MONTEVIDEO, URUGUAY.

*A mis viejos, Lourdes y Nicasio*

*Juancho y Maru*

# Resumen

El estudio de transporte en flujos caóticos es un área en constante evolución dentro de la mecánica de fluidos e ingeniería. Recientemente, la utilización de campos de Exponentes de Lyapunov a tiempos finitos (FTLE) ha servido de herramienta para detectar Estructuras Lagrangianas Coherentes (LCS) en flujos no estacionarios y analizar los fenómenos de transporte y mezcla que se desarrollan en el seno de un fluido. Hasta el momento, los datos experimentales obtenidos en nuestro laboratorio eran analizados utilizando una descripción Euleriana para estudiar la dinámica del flujo, permitiendo obtener campos de velocidades, vorticidad, líneas de corriente, perfiles de velocidad, etc. Sin embargo este enfoque no aporta información sobre procesos de transporte y mezcla como tampoco sobre la organización del flujo. El nuevo enfoque Lagrangiano desarrollado en este trabajo de tesis permite a partir de los campos de velocidades complementar el estudio de la dinámica de flujos no estacionarios, mediante el cálculo de los Exponentes de Lyapunov a Tiempo Finito y las Estructuras Lagrangianas Coherentes, que como se muestra en este trabajo, actúan como barreras materiales y cumplen un rol fundamental en la organización del flujo. Los algoritmos desarrollados en esta tesis son aplicados a dos experiencias de laboratorio, microburst y fuentes en un medio estratificado, y a una serie de medidas de velocidad en la superficie del océano Atlántico Sur obtenidas de un modelo de asimilación oceánico. Los resultados obtenidos en las dos primeras experiencias aportan información sobre la generación de estructuras coherentes que organizan el flujo, los procesos de mezcla involucrados y el transporte de fluido hacia la atmósfera. En el caso de los datos oceanográficos, los resultados obtenidos son preliminares y se discuten las posibles estrategias para mejorarlos.

# Agradecimientos

Este trabajo ha sido resultado de un gran esfuerzo, el mismo no hubiese sido posible sin la ayuda y dedicación de muchas personas. En primer lugar quiero agradecer profundamente a mi tutora, también compañera de trabajo y amiga, Cecilia Cabeza, por su constante apoyo, preocupación e infinita paciencia que me ha brindado durante todo el proceso de la maestría, llegando a corregir incluso durante sus vacaciones. Debido a mi interés en mecánica de fluidos y gracias a su motivación tuve la oportunidad de comenzar a trabajar en dicha rama desde antes de finalizar la licenciatura. Desde entonces ha depositado una gran confianza en mi, de la que no puedo estar más agradecido y se ha vuelto referente en lo académico y en lo personal.

Agradezco a los otros responsables del grupo de Mecánica Estadística y Física no Lineal: Arturo Martí, Gustavo Sarasúa, Italo Bove, Sandra Kahan que hacen de este el lugar más cálido y humano para trabajar. Gracias a trabajar en este equipo, han surgido posibilidades de colaborar con grupos del extranjero. Por ejemplo con el grupo de micrometeorología de la Universidad Federal de Santa María (UFMS), en Brasil, con quien compartimos el estudio de un microburst, sobre el cuál hace una gran referencia esta tesis. A Gervásio Annes Degrazia y principalmente a mi amigo Giuliano Demarco por la gran ayuda e inmejorable ámbito para trabajar y discutir resultados que me otorgó durante mi estadía en Brasil.

De la misma forma, surgió la posibilidad de hacer esta tesis con mi cotutor, Alberto Pérez Muñuzuri a quien agradezco por darme la oportunidad de estudiar sobre las estructuras lagrangianas coherentes (LCS) y sus métodos de detección en la Universidad de Santiago de Compostela (USC), en España. Durante este tiempo, los consejos de Florian Huhn fueron de gran ayuda para el desarrollo de algoritmos que obtuvieran las LCS. Alexandra von Kameke también resultó un apoyo invaluable al estar todos los días a disposición para consultar ya sea sobre las LCS como otra experiencia llevada a cabo en un sistema reacción-difusión-advección. A los compañeros

de oficina en Santiago, entre los que contaban grandes anfitriones que enseñaron la ciudad, costumbres, etc: Alberto, Daniel, Alberto, Darío, Carlos, Milo, Jorge, Xaco y por supuesto Gonzalo de Polsi amigo desde la licenciatura con quien compartimos la estadía.

Dentro de las instituciones que tuvieron que ver con mi posibilidad de escribir este trabajo, cabe mencionar a la ANII y PEDECIBA-Física. En esta última especialmente a las secretarias Jimena Rodríguez y Ana Zambrana quienes soportan mi bombardeo continuo de dudas burocráticas.

En el Instituto de Física de Facultad de Ciencias (IFFC), son muchos que directa o indirectamente han colaborado en este trabajo. Aparte de los que ya han sido nombrados, agradezco a Marcelo Barreiro, que amablemente me brindó datos oceanográficos para poder aplicar los algoritmos desarrollados en busca de LCS y que también dispuso parte de su tiempo para discutir estos resultados. Haber terminado este trabajo también es fruto del proceso de formación que se remonta a los inicios de la licenciatura, en el cual se incluyen todos los docentes y compañeros de estudio que he tenido. Entre estos últimos, muchos hoy son colegas, amigos y han sido parte de ese proceso: Andrés Melo, Daniel Freire, Luis Pedro García Pintos, Sofía Favre, Gonzalo de Polsi, Gabriel Soufer, Nicolás Rubido, César Voulgaris, Rodrigo García, Federico Abellá, Pablo Amil, Carlos Briozzo, Nicolás Díaz.

A aquellos amigos de la vida, de círculos extra académicos que siempre me apoyaron en mi labor, incluso sin saber o preguntar de que trata. No preciso nombrarlos, ustedes saben quienes son.

A Maru, compañera de ruta, por todo el cariño, el apoyo incondicional día tras día y por soportar la luz hasta altas horas de la noche mientras escribía la tesis.

Por último a mi familia, en especial a mis padres Nicasio y Lourdes y a mi hermano Juan, a quienes les debo todo lo que soy. Este trabajo está dedicado a ellos, fuente constante de inspiración, de apoyo y guías en todo momento.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>15</b>
2.1. Fundamentos básicos de transporte y mezcla en fluidos . . . . .	15
2.1.1. Advección . . . . .	16
2.1.2. Difusión . . . . .	17
2.1.3. Advección caótica y procesos de mezcla . . . . .	18
2.2. Barreras materiales en flujos independientes del tiempo . . . . .	19
2.2.1. Flujo independiente del tiempo en 2D . . . . .	19
2.2.2. Linealización en torno a un punto fijo . . . . .	20
2.3. Barreras materiales en flujos dependientes del tiempo . . . . .	22
2.3.1. Linealización en torno a una trayectoria: Matriz principal . . .	23
2.3.2. Exponentes de Lyapunov . . . . .	24
2.3.3. Dicotomías exponenciales . . . . .	26
2.3.4. Trayectorias hiperbólicas y variedades materiales . . . . .	28
2.4. Criterio de Okubo-Weiss . . . . .	30
<b>3. Exponentes de Lyapunov a tiempos finitos y Estructuras Lagrangianas coherentes</b>	<b>33</b>
3.1. Exponentes de Lyapunov a Tiempos Finitos . . . . .	34
3.2. Estructuras lagrangianas coherentes y crestas de exponentes de Lyapunov a tiempos finitos . . . . .	39

3.3. Cálculo de variedades materiales estables e inestables a partir de ex- ponentes de Lyapunov a tiempos finitos . . . . .	41
<b>4. Dispositivos experimentales y resultados previos</b>	<b>43</b>
4.1. Nociones de DPIV . . . . .	43
4.1.1. Descripción de la técnica . . . . .	45
4.1.2. Partículas . . . . .	46
4.1.3. Iluminación . . . . .	47
4.1.4. Adquisición de imágenes . . . . .	48
4.1.5. Procesamiento de imágenes . . . . .	49
4.2. Microburst . . . . .	50
4.2.1. Montaje Experimental . . . . .	51
4.2.2. Resultados previos . . . . .	53
4.3. Fuente en un medio estratificado . . . . .	57
4.3.1. Montaje experimental . . . . .	59
4.3.2. Resultados Previos . . . . .	60
<b>5. Resultados y discusión</b>	<b>63</b>
5.1. Microburst . . . . .	63
5.1.1. Propiedades de FTLE y LCS . . . . .	63
5.1.2. Detección de frentes . . . . .	78
5.2. Fuente en un medio estratificado . . . . .	84
5.2.1. Propiedades de FTLE y LCS . . . . .	84
5.2.2. Advección de partículas y organización del fluido . . . . .	91
<b>6. Análisis de datos oceanográficos: resultados preliminares</b>	<b>99</b>
<b>7. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>107</b>
<b>A. Algoritmos para el cálculo de los exponentes de Lyapunov a tiempos finitos</b>	<b>115</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Los fenómenos de transporte ocurren en las más diversas áreas de la naturaleza y actividades del hombre: agricultura, ingeniería, biología, meteorología, entre otros. Si nos referimos exclusivamente al transporte de partículas de cierto material en un fluido, es necesario estudiar el intercambio de masa, energía y momento entre los sistemas involucrados.

Un ejemplo del fenómeno de transporte ocurrido en la naturaleza en Junio de 2011, es el proceso de erupción ocurrido en el volcán Puyehue en Chile, el más intenso que se haya registrado. En cuestión de pocas horas la nube cubrió las ciudades más cercanas del lado Chileno y Argentino. Tres días más tarde las imágenes satelitales registraban que la nube ya había atravesado el territorio Argentino e ingresado en los territorios de Uruguay, Paraguay y el sur de Brasil.

Otro ejemplo de este fenómeno ocurre en las costas de Madagascar: el “bloom” o florecimiento de algas. Las zonas donde se concentran estos blooms de algas, claramente visibles a simple vista, presentan una gran variabilidad espacio-temporal y se puede apreciar como cambian su forma, extensión y concentración de manera impredecible. Los ejemplos anteriores se repiten en todo el mundo y tienen análogos en los más diversos escenarios. Si bien parecen distintos al principio, tienen en común que son eventos controlados por advección caótica. El término advección caótica fue introducido por Aref en 1984 [1] y se utiliza para referirse al transporte desordenado e irregular de partículas en un fluido. Aref estableció que no es necesario que el fluido

esté en régimen turbulento para que se observe la advección caótica. Si en un fluido en reposo se lanzan partículas con una cierta velocidad inicial, estas se transportarán formando un patrón regular cuya evolución es posible de determinar. Entre tanto, en un flujo laminar donde el movimiento es ordenado y las fluctuaciones de velocidad son suaves, se puede apreciar advección caótica, en tal caso el patrón sería irregular y predecible si se conoce la dependencia del flujo con el tiempo. En el caso del flujo turbulento, donde el movimiento es impredecible y caótico, el patrón se vuelve irregular e impredecible. En los dos ejemplos mencionados al comienzo, el material es introducido y transportado por el flujo de la atmósfera (en el caso de las cenizas del volcán) o el flujo del océano (para el caso de los blooms de algas). Ambos flujos son claramente no estacionarios y en cualquiera de los casos resulta de gran importancia predecir como afectará al transporte del material.

Para predecir el transporte, se utilizan programas específicos que simulan el movimiento del flujo (CAFFA, CFD, OpenFOAM, etc) los cuales permiten obtener el campo de velocidad y a partir de ellos las trayectorias del material. Si estos flujos son turbulentos, entonces debido a la dependencia en las condiciones iniciales, se requiere relizar un gran número de simulaciones para estudiar dicha dependencia. Como resultado se obtiene una gran cantidad de datos que representan las posibles múltiples trayectorias del material transportado y la visualización de estas trayectorias suele ser difícil de interpretar por lo cual se torna necesario contar con otros métodos para describir el comportamiento del fluido.

Existen dos maneras de describir un fluido, estas son la descripción *euleriana* y la *lagrangiana*. En el enfoque euleriano, se estudia la evolución de las magnitudes involucradas para un punto dado del espacio. Por ejemplo, se analiza la velocidad en un punto del espacio para un determinado tiempo. A la colección de puntos en los cuales se analiza la velocidad para un determinado tiempo, se le denomina campo de velocidad. En esta descripción, los campos de velocidad o las líneas de corriente (las curvas que para cada instante de tiempo son las envolventes del campo de velocidad) no cumplen con la propiedad de *objetividad*, que especifica la invarianza ante rotaciones y traslaciones dependientes del tiempo del sistema de referencia. Es decir los

campos de velocidad serán distintos en distintos sistemas de referencia. Debido a que en esta tesis queremos estudiar el transporte en flujos no estacionarios, los cuales no presentan un sistema de referencia preferencial, una descripción euleriana no resulta adecuado para describir el transporte. La formulación lagrangiana por el contrario sigue la evolución de cada partícula individualmente, la trayectoria y los cambios de velocidad que le imprime el flujo en el que se encuentran inmersas. Esta descripción es la más adecuada para el estudio de transporte en flujos no estacionarios.

En los fluidos bidimensionales, las trayectorias de las partículas se pueden representar en un espacio de coordenadas  $(x, y)$  equivalente al espacio de fases y a partir de allí se identificarán puntos hiperbólicos y sus correspondientes variedades estables e inestables en un intervalo de tiempo finito. Estas variedades o estructuras del flujo se denominan *Estructuras Lagrangianas Coherentes* (LCS por su sigla en inglés) que actúan como barreras materiales ya que las partículas no atraviesan dichas estructuras. Las LCS organizan el flujo en regiones cuyas trayectorias poseen una dinámica distinta. Más específicamente, estas estructuras son aquellas donde localmente las partículas presentan una máxima convergencia o divergencia exponencial entre si. Para cuantificar la divergencia y convergencia entre partículas en un intervalo de tiempo finito en este trabajo, se utilizaron los exponentes de Lyapunov a tiempos finitos (FTLE por su sigla en inglés). Los extremos locales del campo FTLE se corresponderán entonces con las LCS y dado que el campo de FTLE se obtiene a partir de las trayectorias queda clara la conveniencia de una descripción lagrangiana.

De esta manera las LCS resultan una herramienta muy potente para describir el flujo y el transporte de problemas como los mencionados inicialmente. Dado que las LCS organizan el fluido, al ubicar las regiones desde donde divergen o convergen las trayectorias de las partículas, la visualización e interpretación de estas estructuras permite comprender el transporte y la mezcla en el flujo de una manera más sencilla que recurriendo a gráficas de, por ejemplo, trayectorias de centenares o miles de partículas. En esta tesis se trabajó con dos flujos experimentales obtenidos en el laboratorio, a partir de los cuales se obtuvieron campos de velocidad utilizando la técnica Digital Particle Image Velocimetry (DPIV) y una serie de datos oceanográficos en la zona

del océano atlántico de la confluencia Brasil-Malvinas. Se desarrollaron los algoritmos para calcular los campos de FTLE, a partir de los cuales se identificaron las estructuras que organizan el flujo y permiten entender el comportamiento de los procesos de transporte y mezcla en los sistemas analizados.

La presente tesis está organizada de la siguiente forma: en el capítulo 2 se presenta un breve fundamento de los conceptos de transporte y mezcla en fluidos, definiendo advección, advección caótica, difusión y como intervienen en los procesos de mezcla. En la sección 2.2, se plantea un enfoque desde el punto de vista de los sistemas dinámicos para obtener las variedades estables e inestables en torno a un punto hiperbólico que representan las LCS. Esto se plantea para un sistema que representa un flujo bidimensional estacionario. En la sección 2.3, se definen los conceptos necesarios para obtener las variedades materiales que representa a las LCS en un flujo bidimensional no estacionario, introduciendo el concepto de exponente de Lyapunov.

En el capítulo 3 se introduce la definición de los exponentes de Lyapunov a tiempos finitos (FTLE) y se presenta la propiedad de objetividad de los mismos. Luego se define LCS formalmente y se vincula con el campo de FTLE.

En el capítulo 4 se introducen nociones de DPIV, la técnica experimental para obtener campos de velocidad en un flujo. Esta técnica fue utilizada en los dos experimentos que se analizan: una simulación a escala de un microburst y una fuente en un medio estratificado. En este capítulo se detallan también los montajes experimentales para ambos experimentos y se resumen algunos resultados previos a tener en cuenta.

En el capítulo 5 se discuten los resultados de los campos de FTLE calculados en ambos experimentos y se obtienen las LCS. También se detallan los aportes que esta técnica brindó a la comprensión de la dinámica de ambos flujos estudiados.

En el capítulo 6 se aplican las técnicas desarrolladas al problema del frente de la convergencia de las corrientes de Brasil y Malvinas. Se discuten los resultados y por qué son considerados como preliminares.

Por último en el capítulo 7 se resumen los resultados obtenidos y la importancia

de los mismos resaltando el aporte a la comprensión de la dinámica de los sistemas estudiados.



# Capítulo 2

## Preliminares

En el presente capítulo se presentarán los conceptos básicos relacionados al transporte y mezcla de fluidos, [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Debido a que se trabajó con flujos bidimensionales, los conceptos serán desarrollados para este tipo de flujos pudiéndose generalizar también para flujos tridimensionales. Antes de comenzar es necesario definir la descripciones euleriana y lagrangiana de un fluido. En el enfoque euleriano se describen las magnitudes en puntos fijos del espacio y el tiempo. Típicamente se utilizan campos, por ejemplo de velocidad, vorticidad, esfuerzos, etc. En la descripción lagrangiana se estudia la evolución de cada partícula en el flujo, en especial la trayectoria y los cambios de velocidad que experimentan.

En las siguientes secciones se presentan los fundamentos básicos de transporte y mezcla de fluidos y posteriormente una formalización matemática para encontrar barreras materiales en flujos independientes y dependientes del tiempo.

### **2.1. Fundamentos básicos de transporte y mezcla en fluidos**

Una posible descripción del movimiento de un fluido es considerar el movimiento de cada partícula que lo constituye. Este enfoque resulta complejo o incluso inabordable debido al gran número de partículas involucradas. Por ello, una descripción

alternativa es considerar al fluido como un continuo compuesto por *parcelas* o *elemento de fluido*, cuya escala es mucho menor que la escala macroscópica del fluido total pero aún mucho más grande que la escala microscópica de las partículas que lo componen. Estas parcelas de fluido, pueden trasladarse, rotar y sufrir deformaciones, estas últimas debido al desplazamiento relativo de las partículas que lo componen. A lo largo de todo este trabajo se considerarán ambos enfoques dependiendo del concepto que se quiera desarrollar.

También se utilizará en esta tesis el concepto de *trazadores*, los cuales consideraremos como puntuales, indeformables, no invasivos (no perturban el flujo) y pasivos (no reaccionan o decaen en el medio). Estos trazadores no representen necesariamente una partícula material constitutiva del fluido, pero su movimiento puede ser asociado al movimiento del mismo; la evolución de una parcela de fluido vendrá dada por la evolución del conjunto de trazadores que la componen.

### 2.1.1. Advección

Comunmente se denomina *advección* al movimiento de fluido de un punto a otro. Este movimiento es determinado a partir del campo de velocidades  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  del fluido, el cual depende de la posición  $\mathbf{x}$  y el tiempo  $t$ . Si  $\alpha(\mathbf{x}, t)$  es el campo que representa la concentración de trazadores, entonces el movimiento de estos trazadores vendrá dado por

$$\frac{\partial \alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \alpha(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

La ecuación 2.1 se puede interpretar como que la tasa con la que varía localmente  $\alpha(\mathbf{x}, t)$  es igual al cambio de  $\alpha(\mathbf{x}, t)$  debido al movimiento, o advección, de partículas dado por  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Esta ecuación se suele escribir como,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (2.2)$$

conocida como *derivada material*, donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad, el primer término repre-

representa la tasa local de cambio y el segundo el cambio debido a la advección. También se puede interpretar este operador como una combinación de las dos concepciones en el tratamiento de fluidos: euleriana y lagrangiana. El primer término es euleriano por la localidad y el segundo es lagrangiano y surge debido al movimiento de partículas. Usualmente se dice que la derivada material es una derivada de la partícula en una descripción de campo. La ecuación 2.1 escrita en función de la derivada material queda

$$\frac{D\alpha(\mathbf{x}, t)}{Dt} = 0 \quad (2.3)$$

Lo que significa que la concentración en una parcela de fluido es constante en el tiempo.

### 2.1.2. Difusión

En la difusión molecular el movimiento térmico de moléculas o átomos en un medio es determinista pero debido al gran número de colisiones que sufre con el medio se puede describir estadísticamente como una caminata al azar. Este tipo de movimiento se conoce como movimiento Browniano. Por lo tanto las magnitudes que describen los desplazamientos son estocásticas y siguen una determinada distribución de probabilidad. Si se considera una concentración no homogénea, es decir un gradiente de concentración no nulo, se generará entonces un flujo difusivo dado por  $\mathbf{J}$  el cual es positivo al ir de regiones de mayor concentración a regiones de menor concentración, representado por la ley de Fick

$$\mathbf{J} = -D\nabla\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

El parámetro  $D$  se conoce como coeficiente de difusión molecular y depende de la temperatura.

Si se supone que no hay fuentes o sumideros para la concentración se puede escribir una ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.5)$$

combinando ambas ecuaciones, se obtiene la segunda ley de Fick

$$\frac{\partial \alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 \alpha(\mathbf{x}, t) \quad (2.6)$$

En los casos que presentaremos en esta tesis, el transporte debido a difusión es despreciable respecto al transporte debido a advección. Eso se puede ver, calculando el número de Péclet dado por

$$Pe = \frac{UL}{D} \quad (2.7)$$

donde  $U$  es una velocidad característica y  $L$  una longitud característica. El número de Péclet compara el transporte por advección ( $UL$ ), con el transporte por difusión ( $D$ ). En los casos estudiados  $D$  es el coeficiente de difusión del agua ( $D \sim 10^{-9} m^2 s^{-1}$ ) mientras que  $UL \sim 10^{-4} m^2 s^{-1}$ , dejando en claro una predominancia en el transporte por advección pudiendo así despreciar los efectos de difusión.

### 2.1.3. Advección caótica y procesos de mezcla

Cuando una partícula se mueve con el fluido se dice que es advectada por este. Incluso se ha llegado a llamar *advección pasiva* para remarcar cuando una partícula es tan liviana que no puede hacer otra cosa que seguir el flujo como si fuera parte del mismo. En un flujo laminar es de esperar que ocurra dicho comportamiento. A mediados de la década de los 80, H. Aref [1] introdujo el término advección caótica para referirse al movimiento irregular de partículas dado por un campo de velocidades dependiente del tiempo. Esto significa que, debido a que el campo de velocidades es determinista y las trayectorias se obtienen a partir de la integración del mismo, estas también serán deterministas. Este tipo de movimiento se puede dar también en flujos laminares como se muestra en trabajos posteriores [7, 9].

Aref utilizó el hecho de que un flujo bidimensional, incompresible y dependiente del tiempo puede ser expresado como un sistema hamiltoniano con un grado de libertad no autónomo, donde el hamiltoniano representa la función de corriente del flujo. En estos sistemas hamiltonianos las trayectorias en el espacio de fases son caóticas de-

terministas. Así, Aref propuso un modelo en el cual se comprueban las trayectorias caóticas para las partículas de fluido. En ese modelo, que es una idealización de un mezclador, se tienen dos vórtices puntuales y el flujo permanece regular y predecible. Si los vórtices dejan de actuar alternadamente las trayectorias de las partículas se vuelven caóticas y se produce la mezcla. Las técnicas que se usan a lo largo de este trabajo derivan de estudiar la geometría de la mezcla, es decir la distribución espacial de volúmenes de fluidos, deformados, separados y fusionados que sufren una reorganización a causa del propio flujo. Para obtener una descripción más detallada de advección caótica y mezcla referirse a [7, 9, 10, 11].

## 2.2. Barreras materiales en flujos independientes del tiempo

### 2.2.1. Flujo independiente del tiempo en 2D

Como se vió en la sección 2.1.3, la mezcla consta esencialmente de una reorganización de materia. Nos interesa entonces encontrar una descripción matemática de flujos que puedan presentar mezcla. La descripción más sencilla de un flujo 2D es la que se corresponde con la de un sistema dinámico autónomo, del tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \tag{2.8}$$

donde el campo de velocidades no dependa del tiempo. En estos casos decimos que el flujo es *independiente del tiempo* o *estacionario* [12, 13], ya que las trayectorias no varían en el tiempo. Como veremos más adelante en esta misma sección, en estos sistemas no se produce mezcla, no obstante servirán como punto de partida para describir un flujo no estacionario en el cual se puede observar mezcla.

Llamaremos *sistema autónomo* o *sistema independiente del tiempo* indistintamente a aquellos sistemas dinámicos que representen un flujo estacionario. Escrito en función

de sus componentes, la ecuación 2.8 queda

$$\begin{cases} \dot{x} = u(x, y) \\ \dot{y} = v(x, y) \end{cases} \quad (2.9)$$

Donde  $u(x, y)$  representa la velocidad en  $x$  y  $v(x, y)$  representa la velocidad en  $y$ . Las soluciones de este tipo de sistemas no se atraviesan entre sí, por lo tanto las trayectorias de partículas de fluido tampoco y no habrá mezcla. Otra forma de demostrar esto es considerar que el flujo es incompresible, entonces este puede ser escrito en términos de una función de corriente  $\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(x, y)$ , donde

$$u(x, y) = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v(x, y) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.10)$$

La función de corriente  $\Psi(x, y)$  define las líneas de corriente y en un flujo estacionario, el fluido se mueve a lo largo de ellas. Estas líneas de corriente son curvas de nivel de la función  $\Psi(x, y)$ , por lo tanto no se intersectan. Cada línea de corriente separa el dominio del flujo en 2 regiones entre las que no hay intercambio de materia y por lo tanto, no hay mezcla.

### 2.2.2. Linealización en torno a un punto fijo

A continuación se definirá *punto de estancamiento* en un flujo estacionario y se verá un modo de identificar las barreras materiales que surgen en torno a los mismos. Identificar un *punto de estancamiento* en un sistema dinámico como 2.8, es hallar los puntos  $\mathbf{x}_0$  tal que

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (2.11)$$

Se define  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$  como un *punto de estancamiento* o *punto fijo* en un lenguaje más habitual de sistemas dinámicos. Consideremos un flujo estacionario o laminar. Si observamos dos líneas de corriente próximas, para que exista un punto de estancamiento deberán tener sentidos opuestos. Es decir alejándose y acercándose al punto

de estancamiento.

La linealización a primer orden en torno al punto fijo viene dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = u(x, y) &= \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) \\ \dot{y} = v(x, y) &= \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) \end{cases} \quad (2.12)$$

O en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

De los autovalores que surgen de la linealización nos interesa solamente el caso en que el punto fijo es un *punto silla* o *punto hiperbólico*, debido a que los autovectores generan los subespacios que se corresponden con las líneas de corriente en las cercanías de un punto de estancamiento. Un *punto silla* o *hiperbólico* en un sistema de dimensión 2 se obtiene cuando los autovalores son reales y de signo opuesto (el otro caso que mencionaremos más adelante en este trabajo es el punto fijo *elíptico* que ocurre cuando los autovalores son imaginarios puros y opuestos). Los autovectores correspondientes a dichos autovalores generan dos subespacios: uno en el cual el punto de fijo es estable y el otro en el cual el punto fijo es inestable, como se ve en la figura 2-1. Más aún, si el flujo es incompresible,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , lo que significa que la traza de la matriz en la ecuación 2.13 debe ser cero. Luego los autovalores son iguales y opuestos, es decir  $\pm\lambda$ . Definiendo las coordenadas

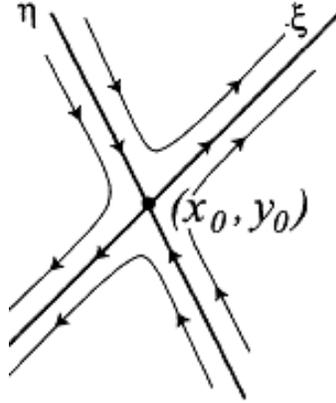
$$\begin{aligned} \xi &= x - x_0 \\ \eta &= y - y_0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Podemos reescribir el sistema en los subespacios propios

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \lambda\xi \\ \dot{\eta} &= -\lambda\eta \end{aligned} \quad (2.15)$$

Cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0 e^{\lambda t} \\ \eta(t) &= \eta_0 e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (2.16)$$



**Figura 2-1:** La linealización en torno al punto  $(x_0, y_0)$  genera los subespacios estable,  $\eta$  e inestable,  $\xi$ . Las trayectorias sobre estos subespacios no son atravesadas por trayectorias vecinas y definen las separatrices del fluido.[4]

Estas trayectorias son invariantes en el tiempo, invariantes ante rotaciones, y definen una barrera material ya que separan el fluido en cuatro regiones entre las que no habrá intercambio de materia.

### 2.3. Barreras materiales en flujos dependientes del tiempo

Vimos anteriormente que en un flujo estacionario, los subespacios propios que surgen de la linealización en torno a un punto silla, son una formalización matemática de lo que físicamente serían barreras materiales. En el comienzo de esta sección generalizaremos el concepto matemático que representa las barreras materiales para sistemas dependientes del tiempo. Sobre el final de esta sección y recurriendo a los conceptos de advección caótica y flujo bidimensional, dependiente del tiempo e incompresible, se contará con las herramientas suficientes para describir el surgimiento de barreras materiales y las regiones en las que queda dividido el flujo. Un análisis posterior a estos resultados permitiría cuantificar la mezcla [4, 6, 7].

### 2.3.1. Linealización en torno a una trayectoria: Matriz principal

Un sistema dependiente del tiempo puede no tener puntos de estancamiento. Entonces, para estos sistemas, la detección de trayectorias ya sean elípticas o hiperbólicas proviene del estudio de la linealización en torno a una trayectoria, en lugar de un punto de estancamiento como se hacía con los sistemas autónomos.

Consideremos entonces, una trayectoria  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t)$  y una trayectoria cercana  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{x}'(t)$ , sustituyendo  $\tilde{\mathbf{x}}$  en  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  y haciendo una expansión de Taylor a primer orden en  $\mathbf{x}'$ , los términos con  $\mathbf{x}_0(t)$  a ambos lados de la ecuación se eliminan quedando así:

$$\dot{\mathbf{x}}' = D\mathbf{v}(\mathbf{x}', t) \mathbf{x}' \quad (2.17)$$

Donde  $D\mathbf{v}(\mathbf{x}', t)$  representa el Jacobiano. Al escribir la ecuación 2.17 en forma matricial queda

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}[\mathbf{x}_0(t)] & \frac{\partial u}{\partial y}[\mathbf{x}_0(t)] \\ \frac{\partial v}{\partial x}[\mathbf{x}_0(t)] & \frac{\partial v}{\partial y}[\mathbf{x}_0(t)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Una solución general del sistema anterior viene dada por la *matriz fundamental*,  $\Phi(t)$  que cumple

$$\dot{\Phi}(t) = A(t) \Phi(t) \quad (2.19)$$

La cual no considera explícitamente las condiciones iniciales. En general, para considerar las condiciones iniciales en la solución, se define la *Matriz principal* que cumple

$$X(t, t_1) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_1) \quad (2.20)$$

Donde  $\Phi(t)^{-1}$  es la matriz inversa de  $\Phi(t)$ . La ventaja de considerar la *Matriz principal*, es que permite obtener la solución en el tiempo  $t$  ponderada por la condición inicial en un tiempo arbitrario  $t_1$ . En otras palabras, como la variable del sistema

es  $\mathbf{x}'$  (la separación entre trayectorias cercanas) se puede decir que  $X(t, t_1)$  es una medida de la separación de las trayectorias en un tiempo  $t$  escaladas según la separación en el tiempo inicial  $t_1$ . Esta cantidad será muy importante cuando definamos los exponentes de Lyapunov en la próxima subsección. La solución para condiciones iniciales arbitrarias  $\mathbf{x}'(0) = (\xi_0, \eta_0)$  viene dada por

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

considerando un tiempo arbitrario  $t_1$ , la perturbación en dicho tiempo estará dada por

$$\begin{pmatrix} \xi(t_1) \\ \eta(t_1) \end{pmatrix} = \Phi(t_1) \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Aplicando la inversa de la matriz fundamental a ambos lados de la ecuación 2.22 se tiene

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(t_1) \begin{pmatrix} \xi(t_1) \\ \eta(t_1) \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Entonces la perturbación en el tiempo  $t$  en función de la perturbación en el tiempo  $t_1$  viene dada por

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_1) \begin{pmatrix} \xi(t_1) \\ \eta(t_1) \end{pmatrix} = X(t, t_1) \begin{pmatrix} \xi(t_1) \\ \eta(t_1) \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

La ecuación 2.24 muestra que la trayectoria linealizada que representa la *Matriz principal*,  $X(t, t_1)$ , es la aproximación lineal a la trayectoria que pasa por el punto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t_1) + (\xi_1, \eta_1)$  en  $t = t_1$ .

### 2.3.2. Exponentes de Lyapunov

Consideremos ahora la trayectoria  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0(t_1)$  y la perturbación  $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}'(t_1)$  en un tiempo arbitrario  $t_1$ . Por lo visto en la sección anterior, la solución a la evolución de la linealización en torno a esa trayectoria viene dada por  $X(t, t_1) \mathbf{x}'_1$ , donde  $X(t, t_1) \mathbf{x}'_1$

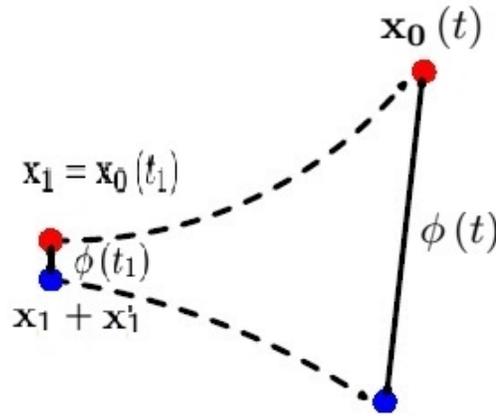
es la trayectoria linealizada en torno a  $\mathbf{x}_1$ .

Se define el *Exponente de Lyapunov* como

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_1, t_1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_1} \ln \|X(t, t_1) \mathbf{x}'_1\| \quad (2.25)$$

Donde  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$  es la magnitud de  $\mathbf{x}$ . El *Exponente de Lyapunov* mide la tasa del crecimiento exponencial promedio de la distancia de  $\mathbf{x}_0(t)$  a  $\mathbf{x}_0(t) + X(t, t_1) \mathbf{x}'_1$  siendo esta última, la aproximación lineal a la trayectoria que pasa por  $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}'_1$  en  $t = t_1$ .

En la figura 2-2 se ilustra el concepto de Exponente de Lyapunov. En el instante inicial  $t_1$  se tiene la trayectoria  $\mathbf{x}_1$  y la trayectoria cercana  $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}'_1$  a una “distancia”  $\Phi(t_1)$ . La solución  $\Phi(t_1)$  surge de la linealización en torno a  $\mathbf{x}_1$ . Para un tiempo posterior  $t$ , la separación entre trayectorias viene dado por  $\Phi(t)$  y la relación entre las separaciones final e inicial por  $X(t, t_1) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_1)$ . Despejando  $\|X(t, t_1) \mathbf{x}'_1\|$  de la definición se ve que la separación entre trayectorias que caracteriza este exponente es estrictamente de tipo exponencial. Esto será algo a tener en cuenta a la hora de implementar algoritmos que calculen los exponentes de Lyapunov para evitar resultados espurios que no representen divergencia exponencial entre trayectorias. La introducción de los exponentes de Lyapunov es el primer paso para cuantificar el comportamiento de trayectorias Lagrangianas en sistemas dependientes del tiempo. Por eso, resulta de suma importancia que una magnitud de este tipo no sea dependiente del tiempo. Como estamos viendo un crecimiento exponencial de la separación entre trayectorias interesa ver que este comportamiento se mantenga a medida que avanza el tiempo, es por eso que nos centraremos en el comportamiento asintótico tomando el límite en  $t \rightarrow \infty$ . En síntesis, se puede decir que el exponente de Lyapunov representa el valor asintótico en la tasa de la separación exponencial promedio entre trayectorias.



**Figura 2-2:** En el instante inicial  $t_1$  la separación entre trayectorias queda ubicada en el plano de fases por el vector  $\mathbf{x}'_1$  y la distancia entre ellas por  $\Phi(t_1)$ . Al evolucionar hasta  $t$ , la separación evolucionó según  $\Phi(t)$ .

### 2.3.3. Dicotomías exponenciales

La introducción del concepto de exponentes de Lyapunov es el primer paso para cuantificar el comportamiento de trayectorias Lagrangianas en sistemas dependientes del tiempo. Esto es equivalente al análisis realizado para un sistema estacionario para el cual los autovalores identifican las trayectorias que convergen y divergen desde y hacia un punto silla. El exponente de Lyapunov cumple la misma función para la linealización en torno a una trayectoria pero esta vez de un sistema dependiente del tiempo, por eso introduce el límite en  $t \rightarrow \infty$  para obtener el comportamiento asintótico. No obstante, una rápida inspección de la definición del exponente de Lyapunov deja en claro que identifica solamente las trayectorias que divergen exponencialmente de  $\mathbf{x}_0(t)$ .

Para completar la analogía con el estudio de los autovalores en el caso estacionario, debemos poder identificar las soluciones que convergen exponencialmente a  $\mathbf{x}_0(t)$ . Para ello, se utiliza el artificio de identificar las trayectorias que divergen de  $\mathbf{x}_0(t)$  en el sentido temporal opuesto, entonces el cálculo de exponentes de Lyapunov en el límite temporal opuesto,  $t \rightarrow -\infty$ , determina las soluciones que convergen exponencialmente a  $\mathbf{x}_0(t)$ . Luego, los conjuntos de trayectorias determinados por

▪

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_1, t_1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_1} \ln \|X(t, t_1) \mathbf{x}'_1\|$$

▪

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_1, t_1) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t - t_1} \ln \|X(t, t_1) \mathbf{x}'_1\|$$

constituyen lo que se conoce como *Dicotomía Exponencial*

Para fijar ideas, consideremos un ejemplo básico de un flujo estacionario (se puede generalizar en forma sencilla a flujos no estacionarios)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda x \\ \dot{y} &= \lambda y \end{aligned} \tag{2.26}$$

con  $\lambda > 0$ , la *matriz fundamental*, con  $t_1 = 0$  será

$$X(t, t_1) = X(t, 0) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Entonces, podemos definir un operador  $P$  que proyecte sobre una de las componentes linealmente independiente de la solución, en  $x$ ,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Análogamente, se puede definir el operador que proyecta sobre la otra componente linealmente independiente de la solución,  $y$ :

$$I - P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

La intersección de las soluciones,  $(0, 0)$ , tiene una estabilidad tipo *punto silla*. Por lo tanto las proyecciones anteriormente definidas, son proyecciones sobre la solución que convergen al punto de silla ( $P$  proyecta sobre  $x$ ) y que divergen del mismo ( $I -$

$P$  proyecta sobre  $y$ ). Entonces, siguiendo el criterio anterior de los exponentes de Lyapunov, si se compara la proyección sobre  $x$  en un tiempo  $\tau$  con la proyección sobre  $x$  en un tiempo  $t \geq \tau$

$$X(t, 0) P X^{-1}(\tau, 0) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda(t-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Se observa que la proyección converge a  $(0, 0)$  cuanto mayor sea la diferencia entre  $t$  y  $\tau$ . Análogamente para las trayectorias proyectadas sobre  $y$  se puede ver la divergencia desde el punto silla si tomamos  $t \geq \tau$  (o de manera equivalente, la convergencia al punto silla si tomamos  $t \leq \tau$ )

$$X(t, 0) (I - P) X^{-1}(\tau, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda(t-\tau)} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

A partir del ejemplo anterior podemos formalizar la definición para dicotomía exponencial como sigue:

Dada la matriz fundamental,  $X(t, t_1)$ , existe una *dicotomía exponencial* si se puede definir un *operador de proyección*  $P$  y constantes arbitrarias,  $K_1, K_2, \alpha, \beta > 0$  tal que

$$\|X(t, t_1) P X^{-1}(\tau, t_1)\| \leq K_1 e^{-\alpha(t-\tau)}, \quad t \geq \tau$$

$$\|X(t, t_1) (I - P) X^{-1}(\tau, t_1)\| \leq K_2 e^{\beta(t-\tau)}, \quad t \leq \tau$$

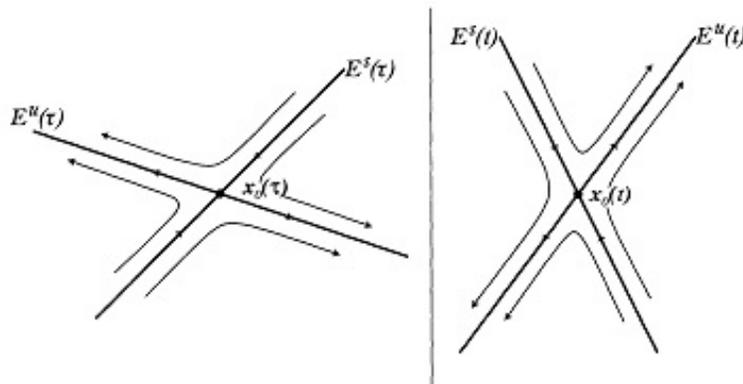
En el ejemplo anterior:  $K_1 = K_2 = 1, \quad \alpha = \beta = \lambda$

### 2.3.4. Trayectorias hiperbólicas y variedades materiales

Se dice que  $\mathbf{x}_0(t)$  es una *trayectoria hiperbólica* si la linealización en torno a  $\mathbf{x}_0(t)$  presenta una dicotomía exponencial

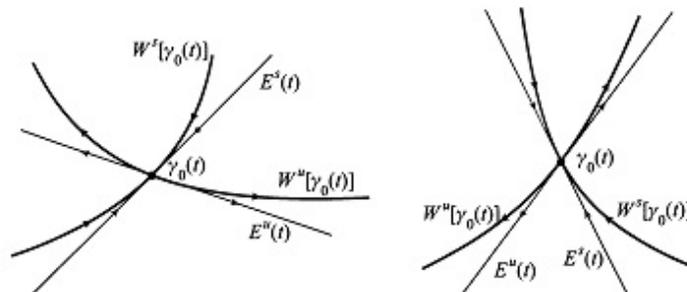
Las propiedades de las trayectorias vecinas a  $\mathbf{x}_0(t)$ , obtenidas de la linealización, son las responsables de que una determinada trayectoria sea hiperbólica. Desde una inter-

pretación física, las trayectorias que componen la dicotomía exponencial son barreras materiales. Podemos interpretarlo de esa manera porque las trayectorias vecinas a las hiperbólicas se aproximan o alejan exponencialmente a estas pero no las atraviesan. Desde un punto de vista matemático, las trayectorias que componen la dicotomía exponencial son subespacios del plano, determinados a partir de la respectiva solución del flujo. Se suele llamar  $E^s(t)$  al subespacio correspondiente a las soluciones convergentes a  $\mathbf{x}_0(t)$  y  $E^u(t)$  al subespacio correspondiente a las soluciones divergentes de  $\mathbf{x}_0(t)$ .



**Figura 2-3:** Trayectoria hiperbólica  $\mathbf{x}_0(t)$ . Se puede ver como  $E^s(t)$  y  $E^u(t)$  pueden rotar y trasladarse a medida que avanza  $t$  [4].

Las *variedades materiales de la trayectoria hiperbólica*  $\mathbf{x}_0(t)$ , son los subespacios  $W^s(t)$  y  $W^u(t)$  que para todo tiempo  $t$  son tangentes a  $E^s(t)$  y  $E^u(t)$  respectivamente.



**Figura 2-4:** Variedades materiales de la trayectoria hiperbólica  $\mathbf{x}_0(t)$ . Se puede ver como las variedades  $W^s(t)$  y  $W^u(t)$  pueden rotar y trasladarse a medida que avanza  $t$  [4].

Para concluir esta sección resumiremos las definiciones dadas y su análogo en

sistemas autónomos. En un sistema autónomo, partimos el análisis desde un punto hiperbólico en torno al cual se hace la linealización. Como estos puntos no siempre son localizables en un sistema no autónomo, se busca una trayectoria hiperbólica en torno a la cual linealizar. En el sistema autónomo, la linealización en torno al punto silla da los autovalores, su correspondiente de comportamiento asintótico para un sistema no autónomo son los exponentes de Lyapunov. Por último las barreras materiales que representan los subespacios propios en los sistemas autónomos, tienen su equivalente en las variedades materiales de trayectorias hiperbólicas para sistemas no autónomos.

## 2.4. Criterio de Okubo-Weiss

El criterio de Okubo-Weiss permite separar las regiones donde domina la vorticidad de las regiones donde domina el strain. Para poder comparar entre los módulos de vorticidad y strain instantáneo, se define el tensor de Okubo-Weiss como sigue

$$OW(\mathbf{x}, t) = s^2(\mathbf{x}, t) - \omega^2(\mathbf{x}, t) \quad (2.32)$$

donde

$$\omega^2(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2.33)$$

es la vorticidad cuadrática y

$$s^2(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2.34)$$

el strain cuadrático. El tensor  $OW(\mathbf{x}, t)$  surge del tensor gradiente del campo de velocidades  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , es decir

$$\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Según lo visto en la sección 2.2.2, la linealización de este tensor en torno a un punto de estancamiento nos da la caracterización de dicho punto, es decir si se trata de un

punto hiperbólico o elíptico. El autovalor entonces queda

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}} \quad (2.36)$$

la cual puede reescribirse como

$$2\lambda_{1,2} = \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \pm \sqrt{S^2 - \omega^2} \quad (2.37)$$

Si el fluido es incompresible,  $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0$ , entonces al reescribir 2.37 se obtiene

$$2\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{S^2 - \omega^2} = \pm \sqrt{OW(\mathbf{x}, t)} \quad (2.38)$$

Por lo tanto, se deduce que si  $OW > 0$ ,  $\lambda_{1,2}$  son reales y el punto es hiperbólico. Si  $OW < 0$ ,  $\lambda_{1,2}$  son complejos y el punto es elíptico. Podemos decir entonces que aquellos puntos en el flujo donde  $OW > 0$  domina el strain y para aquellos donde  $OW < 0$ , domina la vorticidad. De la definición del tensor de Okubo-Weiss se puede delimitar por completo las regiones donde domina vorticidad o strain sin limitarse únicamente a los puntos de estancamiento. El vínculo entre strain (vorticidad) y comportamiento hiperbólico (elíptico) de un punto fijo que aparece en la ecuación 2.38 representa la conexión matemática entre zonas de strain (vorticidad) y trayectorias hiperbólicas (elípticas) de las partículas.

El tensor de Okubo-Weiss representa una cantidad euleriana e instantánea por definirse a partir de los campos de velocidad evaluados en un tiempo específico. Por lo tanto definiremos el criterio de Okubo-Weiss para determinar regiones donde instantáneamente domina el strain ( $OW > 0$ ) vinculándolo con la condición para autovalores reales:

$$OW(\mathbf{x}, t) > 0 \Leftrightarrow \det \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) < 0 \quad (2.39)$$



## Capítulo 3

# Exponentes de Lyapunov a tiempos finitos y Estructuras Lagrangianas coherentes

En el capítulo anterior, se definieron las herramientas necesarias para detectar barreras materiales tanto en sistemas autónomos como no autónomos. Si bien las definiciones son válidas independientemente de como se exprese el sistema, las formas que vimos para hallar estas barreras materiales se limitan a los casos en que se cuenta con una expresión analítica del sistema.

En este capítulo se desarrollarán herramientas que permitan encontrar las barreras materiales en un flujo dependiente del tiempo para el cual no se tiene una expresión analítica pero sí se cuenta con una serie temporal de datos experimentales, por ejemplo de campos de velocidad o de posición de partículas de fluido. De acuerdo a las definiciones del capítulo anterior, es posible observar el comportamiento en cualquier tiempo  $t$  y el comportamiento asintótico. No obstante, surgen algunas limitaciones si se quiere aplicar estas definiciones a una serie de datos experimentales: la resolución temporal y la duración total del experimento la cual corresponde a un tiempo finito.

Este hecho generó la necesidad de definir barreras materiales para intervalos de tiempo finitos en un flujo dependiente del tiempo. En definitiva nos centraremos en la búsqueda de barreras materiales que permanezcan coherentes en un intervalo de

tiempo finito pero que puedan cambiar a lo largo de todo el tiempo que dure el experimento. Estas barreras materiales son dadas por variedades materiales hiperbólicas como las definidas en la sección 2.3.4 pero a tiempo finito. Los primeros acercamientos a una definición de barreras materiales a tiempos finitos fueron presentados por G. Haller [14], más tarde se propone por primera vez la definición de Estructuras Lagrangianas Coherentes y de algoritmos para localizarlas también por G. Haller [15, 16] y la posterior mejora en los algoritmos para su detección por parte de G. Haller [17], J. Lipinski [18], F. Okushima [19] y S.C. Shadden [20]. Para fijar ideas, en función de los conceptos vistos hasta el momento, veamos una primera definición de las estructuras Lagrangianas Coherentes (Coherent Lagrangian Structures o LCS por su sigla en inglés) que no son otra cosa que barreras materiales coherentes en un intervalo de tiempo finito.

Formalmente se definen las *Estructuras Lagrangianas Coherentes (LCS)* como variedades materiales de trayectorias hiperbólicas a tiempos finitos.

El problema en el que nos centraremos ahora es la forma de localizarlas. Las variedades materiales de trayectorias hiperbólicas quedan caracterizadas por los Exponentes de Lyapunov, por ello si se quiere encontrar variedades materiales a tiempos finitos habrá que restringir los Exponentes de Lyapunov para un intervalo de tiempo finito. A continuación definiremos los exponentes de Lyapunov a tiempos finitos partiendo de un sistema dinámico que describe un flujo dependiente del tiempo, no obstante la definición final a la que llegaremos será totalmente aplicable tanto a datos experimentales o de simulación como a un sistema analítico.

### 3.1. Exponentes de Lyapunov a Tiempos Finitos

Consideremos un flujo bidimensional restringido a moverse en el conjunto abierto  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Si se tiene un campo de velocidades dependiente del tiempo dado por  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , entonces la trayectoria de una partícula en el tiempo  $t$  representada por  $\mathbf{x}(t)$  con condiciones iniciales  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  vendrá dado por la solución del sistema dinámico

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Como lo que se pretende ver es que las trayectorias del sistema dinámico 3.1 representen trayectorias de partículas en un flujo, definiremos la función  $\varphi_{t_0}^t$ , llamada *Mapa de flujo*, que mapea un punto desde la posición inicial  $\mathbf{x}_0$  un tiempo inicial  $t_0$ , hasta la posición final en el tiempo  $t$  como sigue:

$$\begin{aligned} \varphi_{t_0}^t &: D \rightarrow D \\ \varphi_{t_0}^t &: \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

En la definición de exponente de Lyapunov tradicional como la que se dio en la sección 2.25, se calcula la divergencia exponencial entre trayectorias para un tiempo infinito. Por lo explicado al comienzo de esta sección, nos interesa una definición análoga a la de exponente de Lyapunov que sea aplicable para datos experimentales en los que se cuenta con tiempos finitos. Es decir, una medida de la divergencia exponencial entre trayectorias pero esta vez como promedio en un intervalo de tiempo acotado. Para lograr este objetivo, estudiemos la advección de partículas inicialmente cercanas en un intervalo de tiempo de duración  $\tau$  que va desde el tiempo inicial  $t_0$  hasta  $t_0 + \tau$ . Consideremos la trayectoria de una partícula que en  $t_0$  se halla en  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ , denotaremos una partícula inicialmente próxima a esta como  $\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}(t_0)$ , donde  $\delta\mathbf{x}(t_0)$  es infinitesimal y orientado arbitrariamente. Al cabo del intervalo de tiempo  $\tau$ , la evolución de la separación entre trayectorias vendrá dado por  $\delta\mathbf{x}(t_0 + \tau)$  y se puede escribir como la diferencia de los mapas de flujo para cada partícula.

$$\delta\mathbf{x}(t_0 + \tau) = \varphi_{t_0}^{t_0 + \tau}(\mathbf{x}(t_0) + \delta\mathbf{x}(t_0)) - \varphi_{t_0}^{t_0 + \tau}(\mathbf{x}(t_0)). \quad (3.3)$$

Haciendo una expansión en torno a  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$  y despreciando los términos de orden mayor o igual a 2, se tiene

$$\delta\mathbf{x}(t_0 + \tau) \approx \frac{d\varphi_{t_0}^{t_0 + \tau}(\mathbf{x}(t_0))}{d\mathbf{x}} \delta\mathbf{x}(t_0). \quad (3.4)$$

Para obtener la magnitud de la separación de la trayectoria en el tiempo final  $t_0 + \tau$  dada por  $\delta \mathbf{x}(t_0 + \tau)$  se usa la norma euclidiana convencional

$$\|\delta \mathbf{x}(t_0 + \tau)\| = \sqrt{\left\langle \frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+\tau}(\mathbf{x}(t_0))}{d\mathbf{x}} \delta \mathbf{x}(t_0), \frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+\tau}(\mathbf{x}(t_0))}{d\mathbf{x}} \delta \mathbf{x}(t_0) \right\rangle} \quad (3.5)$$

$$= \sqrt{\left\langle \delta \mathbf{x}(t_0), \frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+\tau}(\mathbf{x}(t_0))^*}{d\mathbf{x}} \frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+\tau}(\mathbf{x}(t_0))}{d\mathbf{x}} \delta \mathbf{x}(t_0) \right\rangle} \quad (3.6)$$

Donde  $\frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+\tau}(\mathbf{x}(t_0))^*}{d\mathbf{x}}$  representa la matriz adjunta de  $\frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+\tau}(\mathbf{x}(t_0))}{d\mathbf{x}}$ . La magnitud de  $\delta \mathbf{x}(t_0 + \tau)$  queda definido entonces por el tensor

$$C = \frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+\tau}(\mathbf{x}(t_0))^*}{d\mathbf{x}} \frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+\tau}(\mathbf{x}(t_0))}{d\mathbf{x}} \quad (3.7)$$

que equivale a una versión para tiempo finito del Tensor de deformación de Cauchy. Si bien el desarrollo realizado hasta aquí se obtuvo a partir de partículas individuales de fluido, la equivalencia entre el tensor  $C$  definido en la ecuación 3.7 y el tensor de Cauchy permite aplicarlo a una parcela de fluido. Al considerar la parcela de fluido y ver su deformación, se toma dicha parcela como constituida por una gran cantidad de partículas que idealmente consideraremos puntuales. La deformación de esta parcela surge a partir de los desplazamientos relativos entre las partículas puntuales que la conforman. De ahora en más nos referiremos a la *dirección de mayor divergencia* o *dirección de mayor deformación* indistintamente.

En un tensor de deformación, las direcciones principales son los subespacios generados por los autovalores que surgen de la linealización. Al autovalor más grande lo llamaremos  $\lambda_M$  y al autovalor más pequeño  $\lambda_m$ . El tensor  $C$  expresado en las coordenadas de los ejes principales es una matriz diagonal, por lo cual si se aplica una rotación aparecerán términos fuera de la diagonal lo que corresponde con otras direcciones de deformación. Estos términos deberán ser mayores que  $\lambda_m$  y menores que  $\lambda_M$  [3] ya que la deformación total es invariante respecto a cambio de coordenadas. Por lo tanto la dirección de mayor deformación se corresponde con la dirección principal

generada por  $\lambda_M$ . Si alineamos  $\delta\mathbf{x}(t_0)$  con el subespacio generado por  $\lambda_M$ , lo pasamos a llamar  $\delta\mathbf{x}_{\lambda_M}(t_0)$  y se observa su evolución hasta  $t_0 + \tau$  se obtiene

$$\max \|\delta\mathbf{x}(t_0 + \tau)\| = \sqrt{\lambda_M(C)} \|\delta\mathbf{x}_{\lambda_M}(t_0)\| \quad (3.8)$$

Si se define  $\Lambda_{t_0}^{t_0+\tau}$  como la cantidad que represente la tasa de máximo crecimiento exponencial entre trayectorias (o deformación exponencial de una parcela) en el intervalo  $\tau$ , podemos reescribir la ecuación 3.8 como

$$\max \|\delta\mathbf{x}(t_0 + \tau)\| = e^{|\tau|\Lambda_{t_0}^{t_0+\tau}} \|\delta\mathbf{x}_{\lambda_M}(t_0)\| \quad (3.9)$$

También se puede reescribir la ecuación 3.8 de una forma que facilite el cálculo de  $\Lambda_{t_0}^{t_0+\tau}$ ,

$$\sqrt{\lambda_M(C)} = e^{|\tau|\Lambda_{t_0}^{t_0+\tau}} \quad (3.10)$$

A partir de la ecuación 3.10 se obtiene la definición de exponente de Lyapunov  $\Lambda_{t_0}^{t_0+\tau}$  a tiempo finito (FTLE por su sigla en inglés):

$$\Lambda_{t_0}^{t_0+\tau} = \frac{1}{|\tau|} \ln \sqrt{\lambda_M(C)} \quad (3.11)$$

El Exponente de Lyapunov a tiempo finito representa la tasa del máximo crecimiento exponencial entre trayectorias. Esta cantidad depende de las condiciones iniciales  $t_0$  y la posición en ese instante  $\mathbf{x}_0$ .

Antes de pasar a la interpretación de los campos de FTLE u obtener una definición más precisa de las LCS a partir de estos mismos, es necesario considerar otras restricciones a la hora de asignar los valores de FTLE a un conjunto de trayectorias.

La primera restricción a considerar se puede plantear de la manera siguiente:

Existe una constante  $k$  tal que se cumple

$$\left\| \frac{d\varphi_{t_0}^t(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right\| \leq e^{k|t-t_0|} \quad \forall t/t_0 < t < t_0 + \tau \quad (3.12)$$

De esta forma se garantiza que la divergencia sea efectivamente exponencial para todo tiempo en el intervalo  $[t_0, t_0 + \tau]$ . De no considerar tal restricción, se podrían encontrar trayectorias para las cuales existe una constante  $k$  tal que  $\left\| \frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+\tau}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right\| \leq e^{k|\tau|}$  pero no necesariamente se haya mantenido la divergencia exponencial a lo largo de todo el intervalo de tiempo  $\tau$ .

La otra restricción que consideraremos es la que asegure que las trayectorias se comporten como las trayectorias hiperbólicas definidas en la sección 2.3.4 pero esta vez para un intervalo de tiempo finito  $\tau$ . Se debe cumplir que en una de las direcciones principales haya una expansión de la parcela de fluido y en otra dirección principal una compresión. En otras palabras, que las trayectorias se alejen en una de las direcciones principales y se acerquen en la otra. En función de los autovalores de  $C$ , este tipo de trayectoria debe cumplir la condición

$$\ln \lambda_m(C) < 0 < \ln \lambda_M(C) \quad (3.13)$$

Lo que significa que se expande en la dirección de  $\lambda_M$  y se comprime en la dirección de  $\lambda_m$ . A estas, se les denomina trayectorias hiperbólicas a tiempo finito.

Finalmente haremos notar que los FTLE cumplen con la propiedad de objetividad. Una magnitud se dice que es *objetiva* si permanece invariante ante una transformación del tipo

$$\mathbf{x}' = Q(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (3.14)$$

Donde  $Q(t)$  es una matriz ortogonal dependiente del tiempo y  $\mathbf{b}(t)$  representa una traslación temporal. El hecho de que  $Q(t)$  sea ortogonal significa que la transformación que representa es una isometría, es decir, conserva la norma de  $\mathbf{x}$ . Escribamos la trayectoria  $\mathbf{x}(t)$  con condiciones iniciales  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  como  $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$  de manera

de considerar explícitamente las condiciones iniciales en la definición. Luego consideremos un  $\delta \mathbf{x}_0$  y su evolución en el tiempo hasta  $\delta \mathbf{x}(t)$ , entonces

$$\delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \quad (3.15)$$

si se aplica la transformación 3.14 se tiene

$$\delta \mathbf{x}'(t) = Q(t) \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}_0) - Q(t) \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \quad (3.16)$$

$$= Q(t) \delta \mathbf{x}(t) \quad (3.17)$$

Recordando que

$$\max \|\delta \mathbf{x}(t_0 + t)\| = e^{|t-t_0|\Lambda_{t_0}^{t_0+t}} \|\delta \mathbf{x}_{\lambda_M}(t_0)\| \quad (3.18)$$

y que  $Q(t)$  es una isometría, se tiene la igualdad entre las normas

$$\|\delta \mathbf{x}'(t)\| = \|\delta \mathbf{x}(t)\| \forall t \quad (3.19)$$

Por lo tanto se concluye que los FTLE son una magnitud objetiva.

## 3.2. Estructuras lagrangianas coherentes y crestas de exponentes de Lyapunov a tiempos finitos

Una vez obtenido el campo de FTLE,  $\Lambda_{t_0}^{t_0+\tau}$ , este se puede representar en un mapa de colores que represente las superficies de nivel o como una superficie 3D que revele la topografía de este campo. Los valores más altos aparecen en áreas y a veces en líneas fáciles de distinguir, obviamente en estas regiones partieron las trayectorias con mayor divergencia exponencial relativa en el intervalo  $\tau$  y por ende en estas regiones se encuentran las barreras materiales. No obstante, si bien estas curvas se pueden encontrar mediante simple observación de los campos FTLE, hace falta una definición matemática formal para las curvas que determinen las LCS.

Habíamos dicho que las LCS eran variedades materiales de trayectorias hiperbólicas a tiempos finitos. Ahora nos disponemos a definirla en función del campo de FTLE. Si consideramos la topografía del campo de FTLE, los máximos relativos se encontrarán a lo largo de una cresta que conforma una curva en dicha topografía. Sin perder generalidad estas crestas son máximos relativos del campo de FTLE. Definiremos a las LCS como las mencionadas crestas del campo de FTLE, pero veamos primero formalmente una forma de hallar esas crestas.

La definición que se dará de cresta del campo FTLE debe contemplar las siguientes ideas intuitivas sobre las mismas. Por un lado, deberá estar representado por una curva de dimensión 1 en la topografía del campo FTLE tal que si nos movemos en la dirección de esa curva debemos estar en un máximo local en todo momento. Si nos desplazamos hacia los costados de esa dirección en la que nos movemos, es decir en dirección transversal a la misma, solo se podrá ir hacia abajo y más aún, esa dirección será la de menor curvatura. Por lo tanto, si en la topografía consideramos los vectores que representan esas dos direcciones y proyectamos sobre el dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$ , dichas proyecciones deben ser vectores ortogonales. Definamos a continuación las crestas del campo de FTLE:

Sea  $G \subset \mathbb{R}^3$  la gráfica de la función  $\Lambda_{t_0}^{t_0+\tau} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , una *Cresta* de la gráfica  $G$  es una curva inyectiva  $\mathbf{c} : (a, b) \rightarrow D$  que cumple las siguientes condiciones para todo  $s$  en  $(a, b)$

- Los vectores  $\mathbf{c}'(s) = \frac{d\mathbf{c}}{ds}$  y  $\nabla \Lambda_{t_0}^{t_0+\tau}(\mathbf{c}(s))$  son paralelos
- $H(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \min H(\mathbf{u}, \mathbf{u}) < 0$  donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario normal a  $\mathbf{c}(s)$ ,  $\|\mathbf{u}\| = 1$  y  $H(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  es la forma bilineal de la matriz Hessiana,  $H = \frac{d^2 \Lambda_{t_0}^{t_0+\tau}}{d\mathbf{x}^2}$

Analicemos la definición anterior. El primer punto establece que nos movemos sobre la dirección de la cresta. Para el segundo punto, recordemos que la forma bilineal de la Hessiana es simétrica por lo tanto evaluado en el máximo relativo de una función, esta forma bilineal debe dar negativo. Además si la dirección de  $\mathbf{n}$  es la equivalente a la dirección del mínimo de la forma bilineal para la Hessiana, entonces esa dirección es la de curvatura mínima. Ahora sí estamos en condiciones de definir las LCS en

función del campo de FTLE.

Para todo tiempo  $t$ , una *Estructura Lagrangiana Coherente*(LCS) es una cresta del campo de FTLE  $\Lambda_{t_0}^{t+\tau}$ .

Las LCS claramente definen las regiones que dividen al flujo. Lo cual es de mayor importancia para el objetivo de este trabajo. De todos modos es de notar que como se explica en [20, 21, 22], por más que se cuente con una definición precisa para las LCS, lo que se está hallando no son exactamente trayectorias de partículas por lo tanto no es del todo correcto decir que son líneas materiales y su advección no será necesariamente dada por el flujo. Por lo tanto diremos de ahora en más que las crestas del campo de FTLE son LCS y actúan como barreras materiales dividiendo las regiones en las que se organiza el fluido, y aunque veremos la advección de estas estructuras, no entraremos en detalle de como se genera esta advección. Por último mencionaremos dos propiedades interesantes de las LCS las cuales no demostraremos. Un estudio más detallado de las mismas se da en [20, 23].

- Los FTLE se vuelven constante a lo largo de las trayectorias para tiempos de integración  $\tau$  muy grandes.
- El flujo a través de una LCS es despreciable.

### **3.3. Cálculo de variedades materiales estables e inestables a partir de exponentes de Lyapunov a tiempos finitos**

Para terminar, comentaremos brevemente que siguiendo los mismos principios que se utilizaron para definir la dicotomía exponencial en la sección 2.3.3, la integración de  $t_0$  a  $t_0 + \tau$  definirá las variedades materiales inestables a las cuales llamaremos también repelores y denominaremos a ese campo de FTLE como  $\Lambda_{t_0, \tau}^+$ . Por otro lado la integración de  $t_0$  hasta  $t_0 - \tau$  definirá las variedades materiales estables a las cuales también llamaremos atractores y denominaremos a ese campo de FTLE  $\Lambda_{t_0, \tau}^-$ . Otro

campo de FTLE que resulta interesante ver es la comparación relativa entre estos dos últimos campos,

$$\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm} = \Lambda_{t_0, \tau}^{+} - \Lambda_{t_0, \tau}^{-} \quad (3.20)$$

Este campo resaltará las LCS dominantes de  $\Lambda_{t_0, \tau}^{+}$  y  $\Lambda_{t_0, \tau}^{-}$  y resulta conveniente para visualizar variedades estables e inestables en una misma gráfica.

# Capítulo 4

## Dispositivos experimentales y resultados previos

En el presente capítulo se describe el montaje experimental y algunos resultados de los dos experimentos realizados. En ambos casos, se partió de datos de velocidad para luego obtener campos de FTLE y las LCS. La técnica experimental utilizada que permite visualizar el fluido y obtener campos de velocidad se denomina *DPIV* (*Digital Particle Image Velocimetry*) y será el primer punto a describir en este capítulo. Luego describiremos los dos montajes experimentales, el fenómeno a escala que representan cada uno y los resultados relevantes para el presente trabajo.

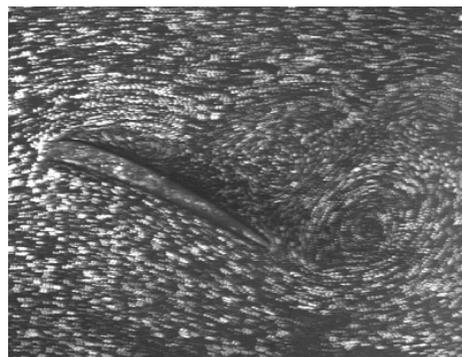
### 4.1. Nociones de DPIV

Es conocido el hecho de que la resolución analítica de los problemas en mecánica de fluidos son, en la mayoría de los casos, imposibles de obtener. El abordaje experimental a estos problemas fue la única opción durante mucho tiempo y en este enfoque, la visualización de un fluido en movimiento fue clave para entender qué estaba sucediendo. Incluso Ludwig Prandtl, referente en el desarrollo de la mecánica de fluidos, fue precursor en la visualización de fluidos a principios del siglo XX. Prandtl diseñó un canal que le permitía estudiar flujos en regímenes estacionarios y no estacionarios y su interacción con perfiles de alas y otros obstáculos. Dispersó pequeñas partículas de

mica que se movían con el fluido, (a este proceso se lo se conoce como *sembrado* de partículas) y obtuvo así una manera de visualizar el movimiento del fluido y las estructuras que se formaban. Incluso estudió con este dispositivo que sucedía al cambiar ciertos parámetros como velocidad del fluido, ángulo de incidencia con el obstáculo, presión etc. De todos modos, esta técnica de visualización permitía obtener solamente una descripción cualitativa del fluido. Hoy en día se puede obtener una descripción cuantitativa a partir de montajes experimentales similares al de Prandtl. En la figura 4-1 se muestra el flujo alrededor de un perfil de ala obtenido en una replica del canal de Prandtl.

La idea básica de la técnica conocida como *DPIV*, *Digital Particle Image Velocimetry*, es a partir de dos imágenes consecutivas, como la que se muestra en la figura 4-1, correlacionarlas para calcular el desplazamiento de las partículas en el intervalo de tiempo entre imágenes y finalmente obtener un campo de velocidad.

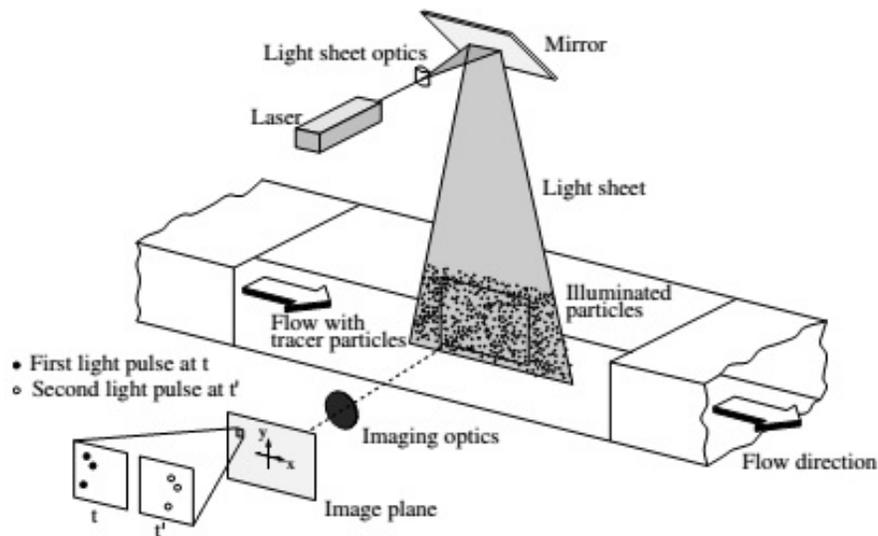
En las dos experiencias en las que se basa este trabajo, los flujos fueron tratados con la técnica de DPIV lo que permitió obtener campos de velocidad, campos de vorticidad, turbulencia, etc. A partir de estos campos de velocidad se integró para obtener la trayectoria de partículas, necesaria para calcular campos de FTLE y por lo tanto obtener las LCS. A lo largo de esta sección describiremos brevemente la técnica DPIV con el fin de conocer los conceptos básicos que permitieron utilizarla en las experiencias que fueron usadas en este trabajo. Para un análisis más detallado sobre DPIV se recomienda consultar [24, 25].



**Figura 4-1:** Imagen obtenida de una replica del canal de Prandtl [24]

### 4.1.1. Descripción de la técnica

Un arreglo experimental que utiliza la técnica DPIV (fig 4-2) para medir campos de velocidad, consta de diversos subarreglos experimentales para realizar cada una de las tareas involucradas. Podemos decir que los componentes principales en un arreglo DPIV son 1) *las partículas*, 2) *la iluminación*, 3) *el proceso de adquisición de imágenes* y 4) *el procesamiento de imágenes*



**Figura 4-2:** Arreglo experimental típico de DPIV en un túnel [24]

En primer lugar se siembra el fluido con partículas que siguen el movimiento del fluido, a las que llamaremos *trazadores* y cumplen la función de “hacer visible” el fluido, como ocurría con las partículas de mica de Prandtl. Se hace incidir un plano de luz láser en el fluido determinando la región bidimensional de la que obtendremos los campos de velocidad. La luz del plano láser es dispersada por las partículas y una cámara se encarga de grabar imágenes cada un intervalo de tiempo especificado  $\Delta t$ . Dos instantes consecutivos pueden ser guardados en una única imagen la cual llamaremos *frame* o *cuadro* o en dos cuadros por separado. Una vez digitalizados los cuadros en una computadora, se aplica un algoritmo que esencialmente los divide en pequeñas subregiones llamadas *áreas de interrogación* (por su nombre en inglés *interrogation areas*). El vector desplazamiento para cada partícula en cada área de interrogación se obtiene a partir de métodos estadísticos que vinculan los dos cuadros

(por ejemplo: autocorrelación o correlación cruzada). Estos algoritmos consideran el caso de una partícula que abandona un área de interrogación en el tiempo entre los dos cuadros, calculando también la correlación en las regiones solapadas entre áreas de interrogación contiguas.

Notemos que por lo general esta técnica se aplica fluidos netamente bidimensionales o con simetría de revolución. En las siguientes subsecciones se verán algunas características de los cuatro componentes fundamentales de la técnica así como también las soluciones a aspectos técnicos que surgen.

### 4.1.2. Partículas

En las experiencias realizadas en este trabajo se usaron microesferas de poliamida de  $50\mu m$  de diámetro. El sembrado de partículas le otorga las siguientes características a la técnica DPIV

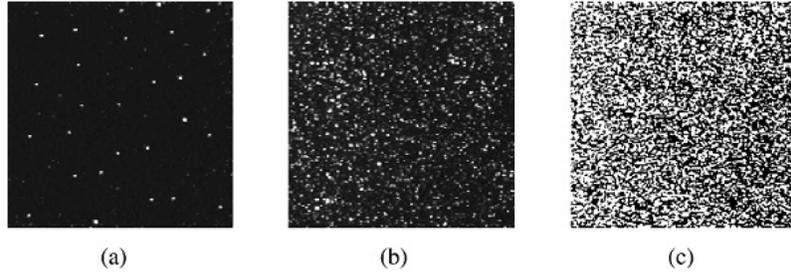
- **No intrusiva:** En comparación con otras técnicas para medir velocidad como tubo de Pitot o anemometría de filamento caliente donde se debe introducir un dispositivo en el flujo.
- **Indirecta:** Porque mide la velocidad del fluido a partir de la medida de un trazador que se mueve con el fluido.
- **Medida de campo completo:** A diferencia de las técnicas mencionadas arriba o incluso otras como DGV (Doppler Global Velocimetry), obtiene un campo de velocidad y no la velocidad en un único punto o una pequeña región del fluido.
- **Retraso de velocidades:** El hecho de usar trazadores, requiere chequear previamente que estos se muevan adecuadamente junto al fluido. Esto depende de las densidades relativas entre fluido y trazadores. Ocurre aunque sea en los primeros instantes, una diferencia de velocidades entre partículas trazadoras y fluido a lo que llamaremos retraso de velocidades. A partir de la ley de Stokes de arrastre para la fuerza gravitacional se puede estimar el *tiempo de retraso*,  $\tau_s$ , que le toma a las partículas alcanzar la velocidad del fluido. Para estas

partículas, el tiempo de retraso es muy pequeño y los datos utilizados fueron a partir de varios segundos superada esta cota, por lo que podemos asegurar que la velocidad de las partículas se corresponde con la del fluido.

### 4.1.3. Iluminación

El arreglo típico de la iluminación se muestra en la figura 4-2. La luz emitida desde una fuente, ingresa en un arreglo de lentes cilíndricas que genere el plano sobre el cual se iluminará el fluido. En nuestro caso la iluminación constaba de un láser continuo de Nd:YAG de longitud de onda 532 nm, potencia 500 mW y una lente cilíndrica que convierte el haz en un plano de 2mm de espesor. El láser mencionado es de estado sólido de *Nd:YAG*, (Neodymium doped-Yttrium-aluminium-garnet) lo cual significa que el material encargado de la emisión está compuesto por cristales de *Yag* y el haz es generado por iones de  $Nd^{+3}$ . Si bien no entraremos en detalles sobre su funcionamiento, presenta varios aspectos que lo hacen muy adecuado en la técnica DPIV. El primero de todos es que emite luz monocromática lo cual facilita el contraste y el procesamiento de imágenes. Además cuenta con una densidad de energía mucho mayor que otras fuentes de luz más habituales y es muy fácil de convertir el haz en un plano delgado a partir de un arreglo adecuado de lentes. Otra ventaja es que, al ser el láser monocromático, el uso de la lente no trae el problema de la aberración cromática. Mas aún, en nuestro arreglo solo fue necesario una lente cilíndrica para generar el plano de luz de 2mm y con una intensidad suficiente para ver el movimiento de los trazadores.

La distribución de partículas trazadoras en el plano iluminado debe ser homogéneo de manera que el procesamiento de imágenes pueda dar una descripción homogénea en todas las regiones del plano. Recordemos que el procesamiento de imágenes consta de dividir la región en áreas de interrogación y ver como se movieron los trazadores en estas áreas de interrogación. Por eso es que se debe tener una densidad adecuada de trazadores en cada área de interrogación. En la figura 4-3 se observan tres posibles configuraciones de densidad.



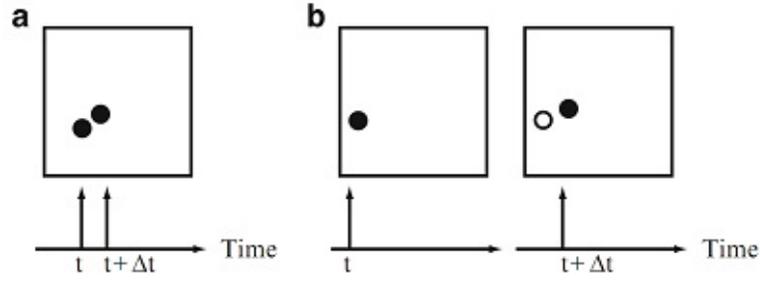
**Figura 4-3:** En (a) hay una baja densidad de trazadores y esto trae dificultades al correlacionar pares de trazadores con la imagen subsiguiente. En (b) hay una densidad adecuada de trazadores para realizar PIV. En (c) la densidad es tan alta que ni siquiera se pueden identificar partículas puntuales [24]

En las experiencias con DPIV que se usaron para este trabajo, se trabajó en el régimen de densidad de partículas correspondiente a la figura 4-3-b. Cabe mencionar que se puede trabajar con densidades distintas de partículas pero estas requieren algoritmos distintos a los aquí presentados.

#### 4.1.4. Adquisición de imágenes

En nuestro caso, usamos una cámara CMOS cuyo software permite obtener las componentes de colores por separado, como se trabajó con un láser verde, se usó solo la componente verde (G) de la grabación de imágenes.

La resolución temporal vendrá limitado por la capacidad de la cámara en conjunto con la capacidad de memoria que tenga la computadora para guardar imágenes. Por último, existen dos formas de grabar las imágenes: de cuadro simple con exposición doble, *CS-ED* y de doble cuadro con exposición simple *DC-ES* como se pueden diferenciar en la figura 4-4. En el caso *CS-ED*, se requiere de lentes de muy buena calidad dado que se tienen dos imágenes superpuestas y generalmente se graban en cámaras digitales o cámaras de cinta. En cambio el almacenamiento *DC-ES* es el de mayor aplicación hoy en día y se usa satisfactoriamente con cámaras digitales. Además, el problema del método *CS-ED* es que no identifica la correcta secuencia temporal de par de trazadores en una misma imagen o cuadro. En el método *DC-ES* no ocurre esta ambigüedad y fue el que usamos en todas las experiencias.



**Figura 4-4:** Método de grabación CS-ED en (a) y DC-ES en (b) [26]

#### 4.1.5. Procesamiento de imágenes

Una vez obtenidas las imágenes, el algoritmo que calcula los campos de velocidades básicamente se desarrolla de la siguiente forma. Se divide cada cuadro en una grilla de puntos, centrado en el punto designado por  $P(i, j)$ , se toma un área de interrogación de tamaño  $A_1$  y se identificarán las partículas que contenga a partir de un patrón de intensidades  $G_1(i, j)$ . En la imagen o cuadro siguiente, que corresponde a un intervalo de tiempo  $\Delta t$  posterior, se designa un área  $S$  mayor que  $A_1$  y que contenga a  $P(i, j)$ . En  $S$  se busca un área de interrogación  $A_2$  del mismo tamaño que  $A_1$  y que tenga el mismo patrón que  $A_1$ . La manera que el algoritmo tiene para decidir si se corresponde  $A_1$  con  $A_2$  es desplazar a un punto  $P(i + x, j + y)$ , centrada en este punto establecer el área de interrogación  $A_2$  y buscar el máximo de correlación cruzada para todos los puntos desplazados permitidos en  $S$ . La correlación cruzada la calculamos como

$$C(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m (G_1(i, j) - \mu_1) (G_2(i + x, j + y) - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}} \quad (4.1)$$

Donde  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son respectivamente los promedios y las desviaciones estándar de las intensidades en las áreas de interrogación  $A_1$  y  $A_2$  y  $l, m$  especifica los puntos permitidos dentro de la región  $S$ . El algoritmo busca los puntos  $(x, y)$  tal que  $C(x, y)$  sea un máximo. A partir de ahí se obtiene el desplazamiento  $\Delta \mathbf{r}$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  y con ello la velocidad según

$$\mathbf{v} = h \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (4.2)$$

Donde  $h$  es un factor de escala que convierte de píxeles a unidades de longitud. La calidad de los resultados y el costo computacional depende de la elección del tamaño en las áreas de interrogación, de las áreas de búsqueda, del espaciamiento entre puntos y del tiempo entre cuadros  $\Delta t$ , para un estudio más profundo en este y otros tópicos de DPIV se sugiere ver [24, 25, 26].

## 4.2. Microburst

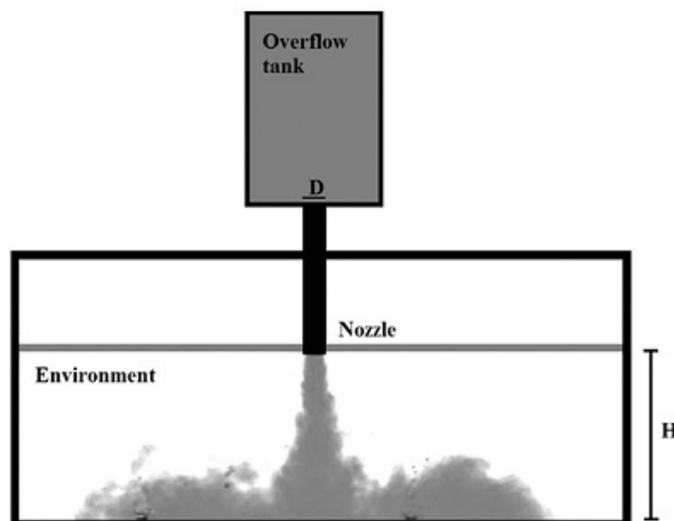
Un microburst es un fenómeno atmosférico que consta de una ráfaga descendente de aire frío (microburst seco) o aire frío acompañado de precipitaciones (microburst húmedo). Estas ráfagas tienen una densidad mayor que la atmósfera proveniente de una perturbación que genera el enfriamiento localizado en una región de la atmósfera, este aire más frío y por ende más denso adquiere una flotabilidad negativa desembocando en el movimiento descendente. Estas ráfagas descendentes muy intensas luego de impactar sobre el suelo, generan un patrón divergente de vientos horizontales sobre el mismo, formando un resalto hidráulico. Los vientos horizontales suelen ser muy intensos alcanzando velocidades de hasta 30 m/s.

Fujita [27] fue quien propuso la idea de una ráfaga descendente al observar que el patrón que dejaba en los campos de forma divergente no se correspondía con los de un tornado como se sospechaba. De ahí en más, el microburst cobró gran interés de estudio principalmente en meteorología, ya que era necesario detectarlos y entender su surgimiento y evolución [27, 28, 29], así como también en ingeniería o aviación por los riesgos que representa, habiéndose reportado daños en estructuras civiles y accidentes aeronáuticos en aterrizajes y despegues[27, 30, 31, 32].

A continuación resumiremos el montaje experimental que usamos para la simulación de un microburst a escala de laboratorio así como también los resultados relevantes para este trabajo. Para más detalles sobre este arreglo experimental y los resultados de la investigación ver [33].

### 4.2.1. Montaje Experimental

Existen varias alternativas para generar la ráfaga descendente experimentalmente y varios trabajos previos han demostrado equivalencia entre estas técnicas al reproducir las principales características de un microburst. En nuestro caso, se usaron corrientes de densidad para simular experimentalmente un microburst. Esto fue logrado inyectando continuamente desde arriba y hacia abajo un chorro de fluido más denso en una atmósfera de fluido menos denso. Las diferencias de densidades fueron generadas usando agua para la atmósfera y agua con sal en distintas concentraciones para el chorro descendente. Para mantener continua la inyección de fluido en la atmósfera se dejó caer el fluido más denso por gravedad desde un tanque de descarga. Un caudalímetro digital con un error de 1% se usó para medir el caudal del fluido que entra en la atmósfera a través de una válvula de diámetro  $d = 6mm$ . Una cuba de acrílico sirvió de contenedor para la atmósfera cuyo tamaño es de  $40 \times 40 \times 10cm^3$  siendo la altura  $H = 10cm$ . Dado que los caudales que se usaron fueron 300ml/min y 500 ml/min y los experimentos duraban entre 15 y 20 segundos, se puede asumir que  $H$  permanece constante con un error relativo entre 0.5-1.0%. Un esquema del arreglo experimental se muestra en la figura 4-5.



**Figura 4-5:** Esquema del arreglo experimental para la simulación de laboratorio de un microburst[33]

Un láser de Nd:YAG de 500mW de potencia se usó junto a una lente cilíndrica para crear un plano de luz de 2mm de espesor que pasara por el eje del microburst. Se sembró el fluido (atmósfera y chorro) con partículas de poliamida de 50  $\mu\text{m}$  de diámetro para poder aplicar la técnica DPIV explicada en la sección 4.1 y obtener campos de velocidad. Los videos se tomaron con una cámara CMOS a 50 cuadros por segundo (fps). Denominando a la dirección horizontal  $x$  y a la vertical  $y$ , el procesamiento se hizo sobre la mitad de la región en la dirección horizontal: desde el centro del chorro hasta un extremo lateral de la cuba. Las ventanas de interrogación utilizadas fueron de  $64 \times 64$  píxeles y 50 % de superposición, por lo cual se obtuvieron campos de velocidad de 108 puntos en  $x$ , por 49 puntos en  $y$ .

Los parámetros que definen los experimentos fueron el caudal y la diferencia de densidad  $\Delta\rho$ , los distintos valores usados se muestran en la figura 4-6. Los números adimensionados relevantes, ya que fueron los números que caracterizaron al sistema, son el número de Reynolds

$$Re = \frac{Ud}{\nu} \quad (4.3)$$

y el número de Froude

$$F = \frac{U}{\sqrt{g'H}} \quad (4.4)$$

Donde  $U$  es la velocidad descendente del chorro obtenida de la relación con el caudal  $Q = \pi U (d/2)^2$ ,  $d$  es el diámetro de la válvula por la que descarga el chorro descendente,  $\nu$  es la viscosidad cinemática y  $g' = g\Delta\rho/\rho$  la gravedad reducida siendo  $\rho$  la densidad de la atmósfera.

Flow rate (ml/min)	$\Delta\rho$ (%)
300	0.5
500	0.5
300	1.0
500	1.0

**Figura 4-6:** Parámetros que definen los distintos experimentos realizados [33]

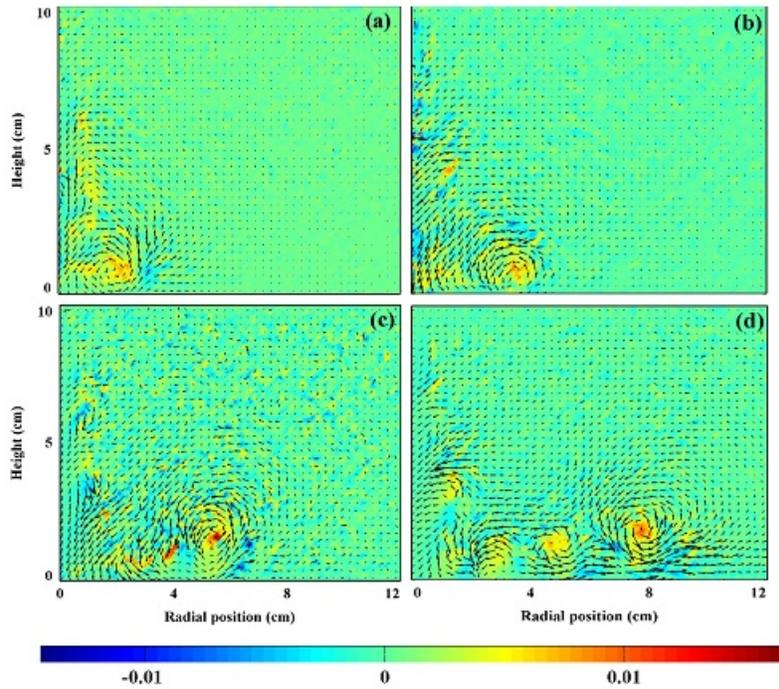
Los valores para el número de Reynolds en esta experiencia fueron  $Re_1 = 1 \times 10^3$

y  $Re_2 = 1,5 \times 10^3$ , mientras que el valor del número de Froude fue  $F \approx 6$ , dando buena concordancia con un microburst de escala natural.

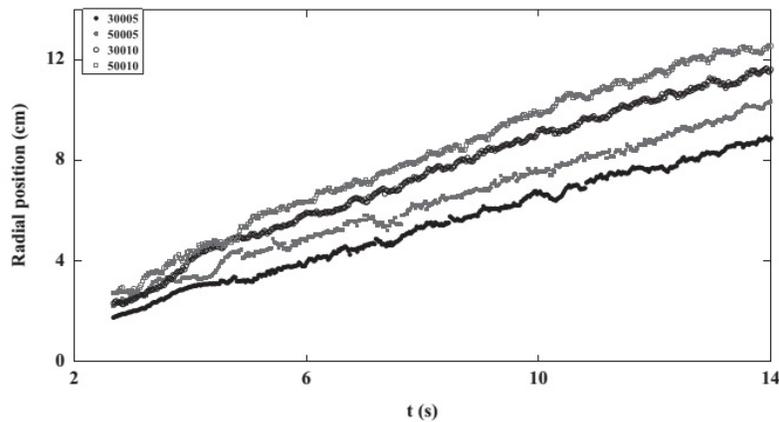
La principal característica de microburst estudiada con este arreglo experimental es la formación de un anillo de vórtices que se propaga radialmente sobre la superficie del suelo. Esta propagación, sus tiempos característicos y qué tan bien definidos quedan los vórtices dependen fuertemente de  $F$  y  $Re$ . Los resultados que serán de interés para este trabajo se resumen en la siguiente subsección.

#### 4.2.2. Resultados previos

En la figura 4-7 se muestran los mapas de velocidad superpuestos con vorticidad obtenidos a partir de la técnica DPIV para distintos instantes de tiempo. La región considerada en dichos campos se extiende desde el centro del jet descendente, lo cual denominaremos *eje del microburst*, hasta el extremo derecho de la cuba. En esta figura se observa el avance radial del anillo de vórtices. El avance del vórtice se puede apreciar en la figura 4-8 que indica la posición en función del tiempo. Las distintas condiciones del experimento vienen dadas por el caudal  $Q$  y diferencia de densidad  $\Delta\rho$  y son representadas por un código de cinco números donde las tres primeras cifras representan el caudal en  $ml/min$  y las últimas dos el porcentaje en la diferencia de densidad. Para todas las condiciones del experimento se observa una velocidad constante. El intervalo de tiempo fue considerado tal que el vórtice no se acercara demasiado al extremo de la cuba como para que influya las condiciones de frontera.



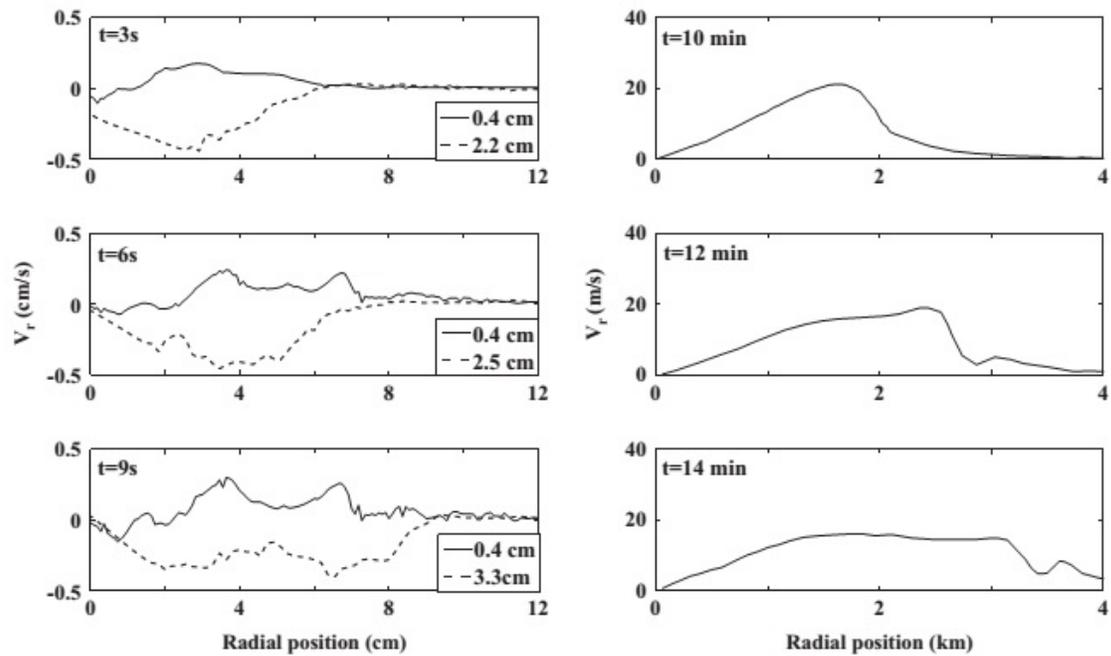
**Figura 4-7:** Campo de velocidad (flechas) superpuesto a campo de vórticidad (colores) del microburst en (a)  $t = 3s$ , (b)  $t = 6s$ , (c)  $t = 9s$  y (d)  $t = 13,9s$ . [33]



**Figura 4-8:** Posición del vórtice en función del tiempo para diferentes condiciones del experimento. [33]

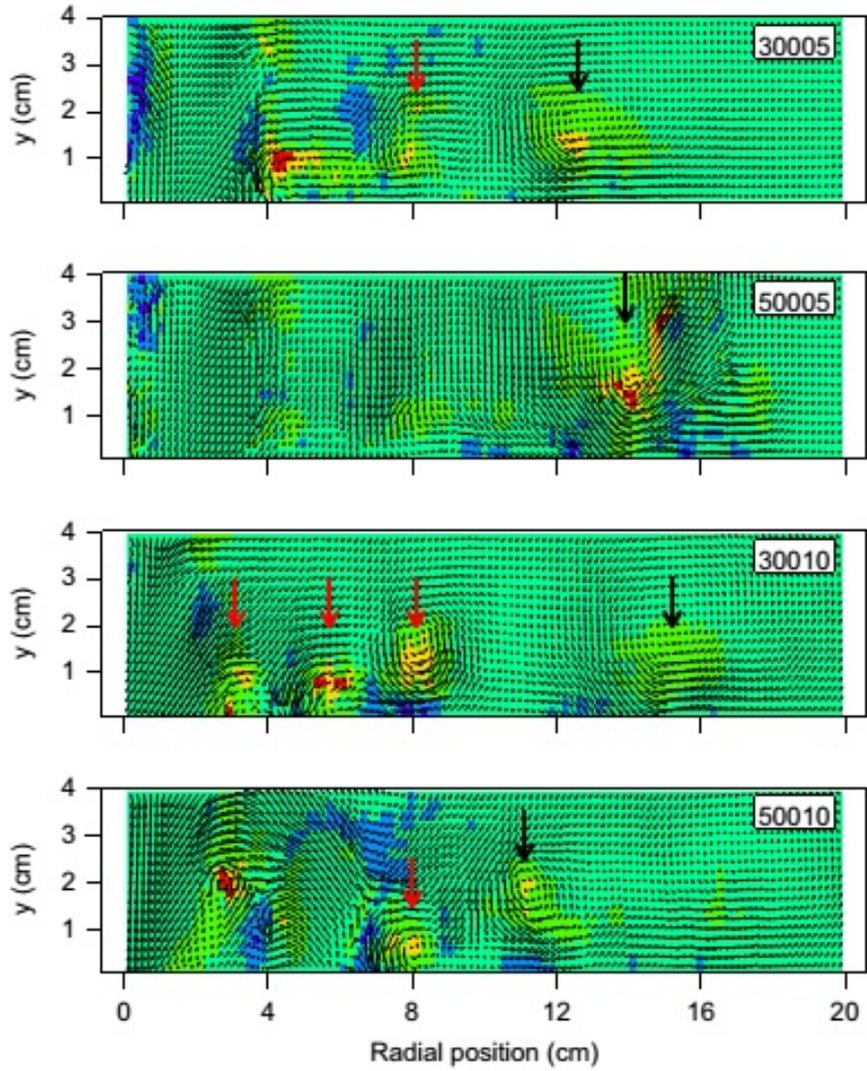
En la figura 4-9 se muestra los perfiles de velocidad radial en función de la distancia para distintos tiempos y tanto por debajo del vórtice (línea sólida) como por encima del mismo (línea punteada). En dicha figura también se muestra la comparación con los resultados de simulación de un trabajo de Proctor [28] y se puede apreciar la

similitud entre ambos perfiles.

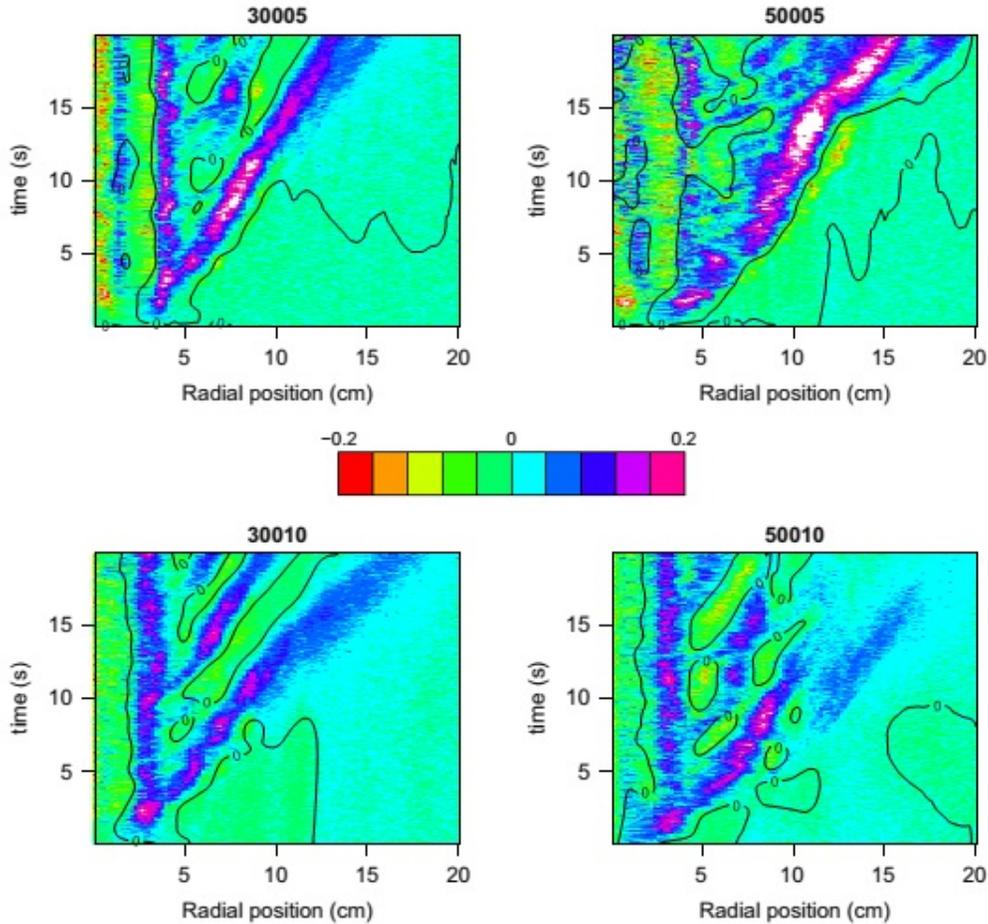


**Figura 4-9:** Perfiles de velocidad radial en función de la distancia medida desde el eje de microburst para distintos tiempos. A la izquierda se muestra los resultados del experimento [33]. A la derecha se muestran los resultados de simulación de un trabajo previo[28].

En esta experiencia se encontraron no solamente el vórtice primario si no también una serie de vórtices secundarios, estos se pueden apreciar en la figura 4-10. Dichos vórtices secundarios se vuelven más definidos para valores bajos de  $Q$  (i.e. bajos  $Re$ ) y altos  $\Delta\rho$ . A su vez al aumentar  $Q$ , se pierde definición en los vórtices secundarios, esto se puede apreciar en la figura 4-11.



**Figura 4-10:** Campo de velocidad (flechas) superpuesto con campo de vorticidad (colores) para todos los experimentos en  $t = 18$ s. Con flechas negras se ubican los vórtices primarios y con flechas rojas los vórtices secundarios [33].



**Figura 4-11:** En colores, la vorticidad promediada en función del tiempo y la posición radial para los distintos experimentos [33].

### 4.3. Fuente en un medio estratificado

Un área de gran aplicación en la mecánica de fluidos es la que concierne a flujos estratificados. Un flujo estratificado es aquel que posee una variación de la densidad en función de la altura. Existen distintos tipos de estratificación, la más conocida y utilizada en este trabajo, se denomina *estratificación por capas* y consta de dos o más capas distintas que son dispuestas de modo que la capa más pesada se ubica en el fondo y las capas subsiguientes son cada vez más livianas. El estudio de los flujos estratificados tuvo origen en el afán de comprender la dinámica de fluidos en la atmósfera y los océanos y se extiende hasta diversas aplicaciones de ingeniería.

Consideremos ahora que se tiene un flujo en reposo estratificado, al cual llamaremos indistintamente atmósfera estratificada, en la cual ingresa otro flujo en dirección vertical ascendente. Las diferencias de densidad entre ellos se traduce en la flotabilidad. Si el flujo que ingresa posee una velocidad en el mismo sentido de la flotabilidad, este se verá favorecido por la misma y se dice que estamos ante una *pluma* [34]. Si, por el contrario, la velocidad del flujo que ingresa y la flotabilidad son opuestas, entonces decimos que estamos ante una *fuelle*. La flotabilidad y la advección caótica que genera los procesos de mezcla son los principales responsables de la evolución de la fuente.

Un ejemplo emblemático de la interacción entre una fuente y un flujo estratificado es el S.I.S. (Sumidero Invertido Selectivo) usado para la mitigación de las heladas de radiación en cultivos, entre otras aplicaciones [35]. Las heladas de radiación surgen en las noches de cielo despejado, con ausencia de brisa y de niebla. En estas condiciones la radiación infrarroja de la superficie hace que se enfríe el suelo, causando además que se enfríe el aire cercano siendo más abrupto el enfriamiento en los primeros metros desde el suelo. Esto resulta en una estratificación estable y capaz de permanecer toda la noche hasta que el sol de la mañana comienza a calentar la superficie. Las heladas de radiación pueden hechar a perder cultivos enteros debido a la baja temperatura de la capa inferior de la atmósfera estratificada. En Uruguay donde ocurre del orden de algunas decenas de heladas de radiación anuales, ha significado grandes pérdidas especialmente en cultivos de viñedos y cítricos.

La implementación del S.I.S. consta de un dispositivo ubicado a la altura del suelo que succiona fluido de las capas más bajas, o sea el aire más denso y frío, para lanzarlo a la atmósfera en dirección vertical ascendente. El fenómeno que se observa es una fuente, como la explicada anteriormente, donde el aire más denso de la capa inferior se mezcla con aire menos denso de capas superiores. El beneficio que el S.I.S. brinda a los cultivos es que al remover el aire más denso de la capa inferior, pasa a ocupar su lugar aire menos denso, es decir más caliente.

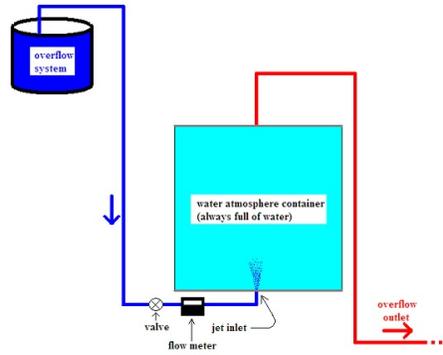
En esta experiencia estamos interesados en una atmósfera estratificada por capas donde la capa inferior es la más densa y las capas subsiguientes van disminuyendo

la densidad en forma lineal con la altura. Se inyecta un fluido con la densidad de la capa inferior y se estudia la evolución de la fuente.

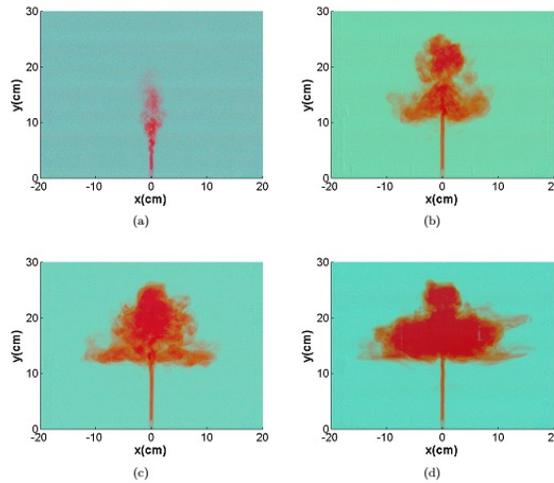
A continuación se mostrará el arreglo experimental para simular la fuente generada por un S.I.S. en una atmósfera estratificada a escala de laboratorio. Para obtener un análisis detallado sobre este arreglo y los resultados consultar [35].

### 4.3.1. Montaje experimental

El arreglo experimental se ve en la figura 4-12 y constaba de una cuba de  $40 \times 40 \times 50\text{cm}^3$  llena de agua estratificada. En el medio de la base inferior se tenía una válvula de 8mm de diámetro por donde se le inyectaba agua a  $15^\circ\text{C}$  de forma continua a  $300\text{ml}/\text{min}$ , medido con un caudalímetro digital con error de 1%. Para mantener constante el nivel de agua en la atmósfera, se tenía un desagüe en la tapa superior. La estratificación se realizó calentando por capas con una resistencia que se delizaba en la altura. Otro método que también se empleó para estratificar fue preparar el agua con la temperatura adecuada de cada capa por separado e ir inyectando lentamente a través de la válvula inferior hasta completar cada una de las capas comenzando por la más caliente. La temperatura en la capa inferior era de  $15^\circ\text{C}$  y en la superior  $27.5^\circ\text{C}$ . Los campos de velocidad se obtuvieron mediante la técnica DPIV, al igual que en el montaje experimental del microburst, con un láser de Nd:YAG de 500 mW de potencia, una lente cilíndrica para generar un plano de luz de 2 mm de espesor que pasaba por el centro de la cuba y el eje de la válvula. Dada la simetría de la fuente, se usó la mitad de la región de las imágenes: desde el centro de la válvula hasta el extremo derecho de la cuba. Las imágenes fueron tomadas con una cámara CMOS a 4 cuadros por segundo (fps) y en el procesamiento de imágenes se usaron ventanas de interrogación de  $64 \text{ píxeles} \times 64 \text{ píxeles}$  con solapamiento de 8 píxeles.



**Figura 4-12:** Esquema del arreglo experimental[36].

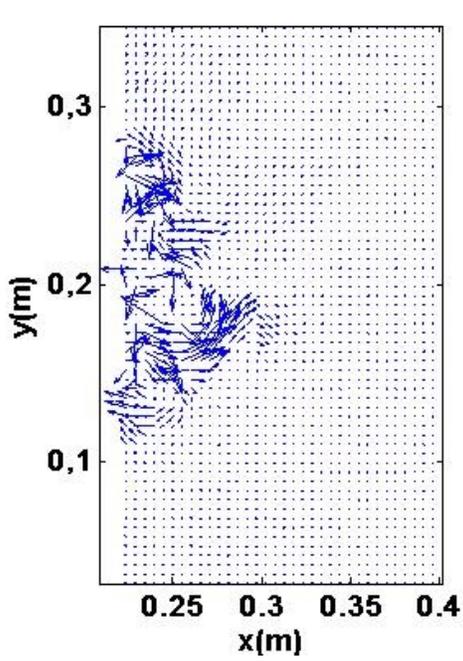


**Figura 4-13:** Evolución de la fuente: (a)  $t = 3s$ , (b)  $t = 26s$ , (c)  $t = 38s$ , (d)  $t = 70s$ . Figura obtenida de [36].

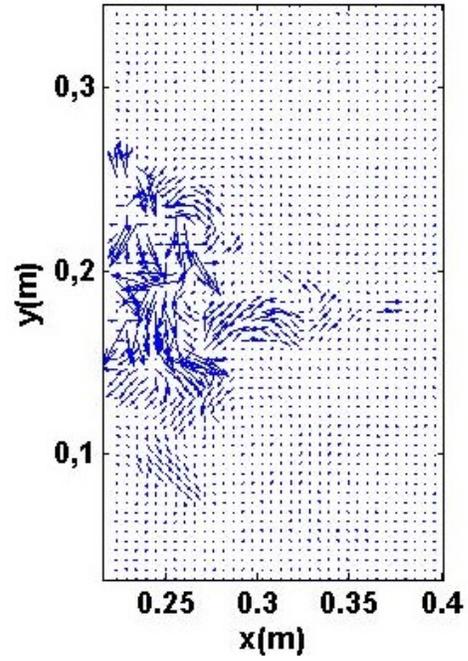
### 4.3.2. Resultados Previos

En esta sección veremos algunos resultados de los campos de velocidad obtenidos a partir de la técnica DPIV. En la figura 4-14 se muestra la evolución de la mitad derecha del experimento (desde el centro del chorro hasta el extremo derecho de la cuba) para tres instantes distintos de tiempo. En este se aprecia como el fluido inicialmente ascendente, se va introduciendo horizontalmente a una altura aproximadamente sobre la mitad de la cuba. Esto comprueba que la mezcla del chorro con fluido de la atmósfera estratificada, desemboca en un cambio en la temperatura y por ende en la densidad que hacen que este fluido se equilibre a una altura, permaneciendo allí por

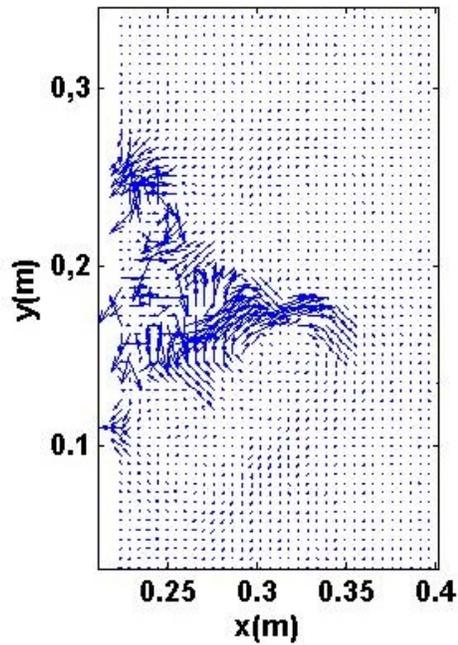
tiempos prolongados.



(a)



(b)



(c)

**Figura 4-14:** Campos de velocidad de la mitad derecha del SIS en  $t = 36,25s$  en (a),  $t = 88,5s$  en (b) y  $t = 100,75s$  en (c).



# Capítulo 5

## Resultados y discusión

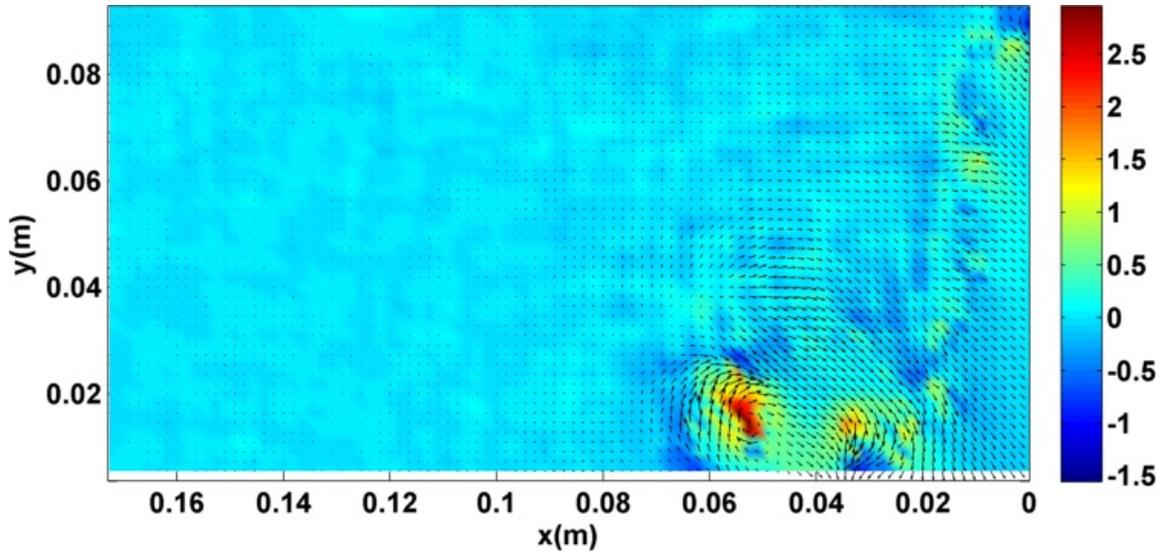
En este capítulo se presentan los resultados obtenidos mediante la utilización de las técnicas desarrolladas en esta tesis. Así mismo, se discute la importancia de los mismos y los aportes novedosos realizados a la comprensión de los fenómenos físicos involucrados en las experiencias realizadas.

### 5.1. Microburst

#### 5.1.1. Propiedades de FTLE y LCS

De la definición y propiedades de los exponentes de Lyapunov a tiempos finitos (FTLE), surgen características que este campo va a cumplir a medida que cambiamos sus dos parámetros fundamentales: el intervalo de integración  $\tau$  y el tiempo inicial  $t_0$ . El tiempo  $t_0$  se refiere al instante inicial en el que se calculan los FTLE. Es usual en la literatura asociada a este tema, denominar al parámetro  $\tau$  como tiempo de advección o tiempo de integración; por eso de aquí en adelante se usarán indistintamente ambas expresiones para referirnos a  $\tau$ .

Veremos primero que sucede si se mantiene el tiempo inicial  $t_0$  fijo y se varía el tiempo de advección  $\tau$ . Luego se muestran los resultados cuando el tiempo de advección  $\tau$  permanece constante pero se cambian las condiciones iniciales, es decir  $t_0$ .

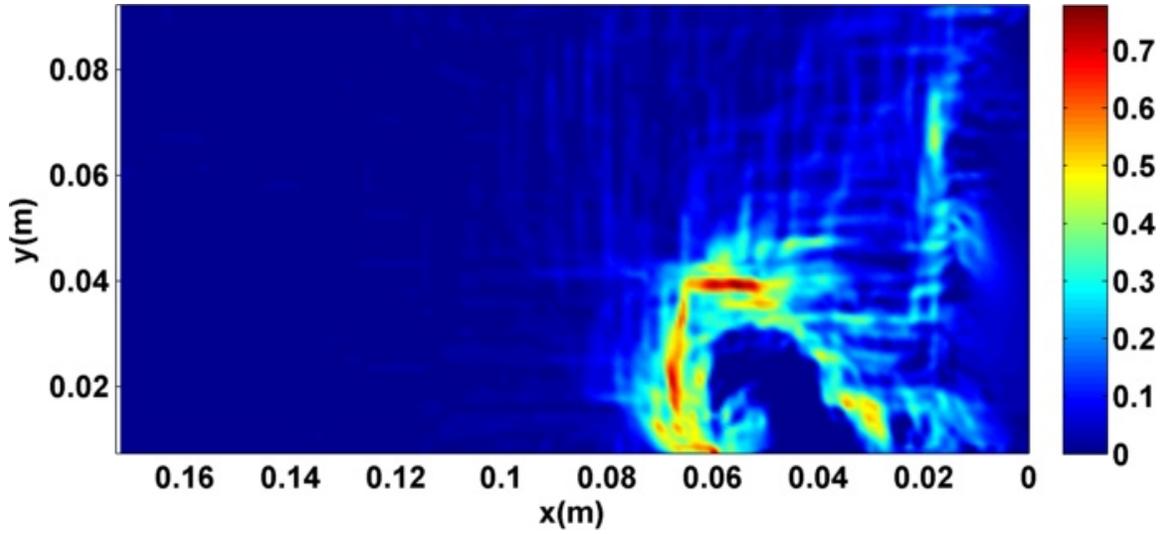


**Figura 5-1:** Campo de velocidades y de vorticidad para  $t = 6,0s$  donde  $t = 0,0s$  se corresponde con el instante en el que el chorro toca el suelo.

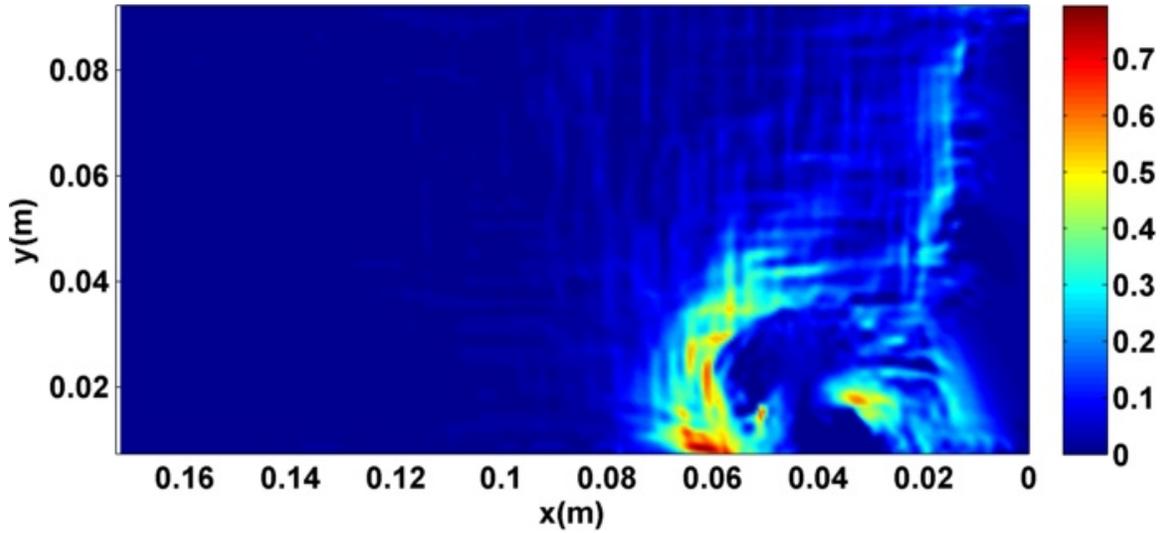
Antes de mostrar y analizar los resultados de los campos de FTLE para el microburst, veremos los campos de velocidad desde los que se calcularon los FTLE. En la figura 5-1 se muestra el campo de velocidades instantáneo superpuesto al campo de vorticidad instantánea, en colores, para el tiempo  $6,0s$ . La región en la que se muestran los resultados es el plano vertical que pasa por el centro de la cuba paralelo a una de las paredes y se extiende desde el eje del microburst hasta el extremo izquierdo de la cuba. Las cantidades que aparecen en esta figura son eulerianas y describen el estado del fluido para un instante de tiempo. Un análisis a partir de los campos de velocidad y vorticidad instantánea permite obtener una vasta información del flujo, la que fue resumida en la sección 4.2.2 y para más detalle se recomienda referirse a [33]. No obstante, este enfoque euleriano no brinda información sobre la mezcla ni permite localizar de manera clara el frente que avanza sobre la superficie. Como veremos en este capítulo, esta información se puede obtener a partir de los campos FTLE. Existen dos diferencias generales que tiene la información que se da a partir de campos de la figura 5-1 con los campos de FTLE: por un lado estos últimos provienen de una cantidad lagrangiana, la trayectoria de partículas de fluido, y este tipo de enfoque suele ser más adecuado para describir la mezcla. Por otro lado, las estructuras que revelen los campos de FTLE no son instantáneas si no que son fruto

de observar el flujo durante un intervalo de tiempo  $\tau$ .

En la figura 5-2 se ven los campos  $\Lambda_{t_0,\tau}^+$  en (a) y  $\Lambda_{t_0,\tau}^-$  en (b). Los datos del experimento al que corresponden estos campos de FTLE son  $Q = 500ml/min$  y  $\Delta\rho = 0,5\%$ . Recordemos que los campos  $\Lambda_{t_0,\tau}^+$  y  $\Lambda_{t_0,\tau}^-$  representa los campos de FTLE con tiempo inicial  $t_0$  y tiempo de integración  $\tau$ , integrado hacia adelante y hacia atrás respectivamente. Las crestas de los campos  $\Lambda_{t_0,\tau}^+$  y  $\Lambda_{t_0,\tau}^-$  representan respectivamente las LCS repeloras y atractoras. Por lo tanto de la figura 5-2(a) se obtienen las LCS repeloras mientras que de la figura 5-2(b) se obtienen las LCS atractoras. En la figura 5-2(a) se observa la cresta que delimita el resalto. La misma se extiende desde el eje del microburst, aproximadamente  $x = 2cm$  a la altura del suelo, bordea la zona del vórtice (ver figura 5-1), hasta el frente del microburst aproximadamente en  $x = 8cm$ . En la figura 5-2(b) la cresta no llega hasta el eje del microburst y en la zona más cercana al frente se puede apreciar que queda delimitado en una región que sería interior a su correspondiente de la figura 5-2(a) ya que se extiende aproximadamente hasta  $x = 7cm, y = 4cm$ .



(a)

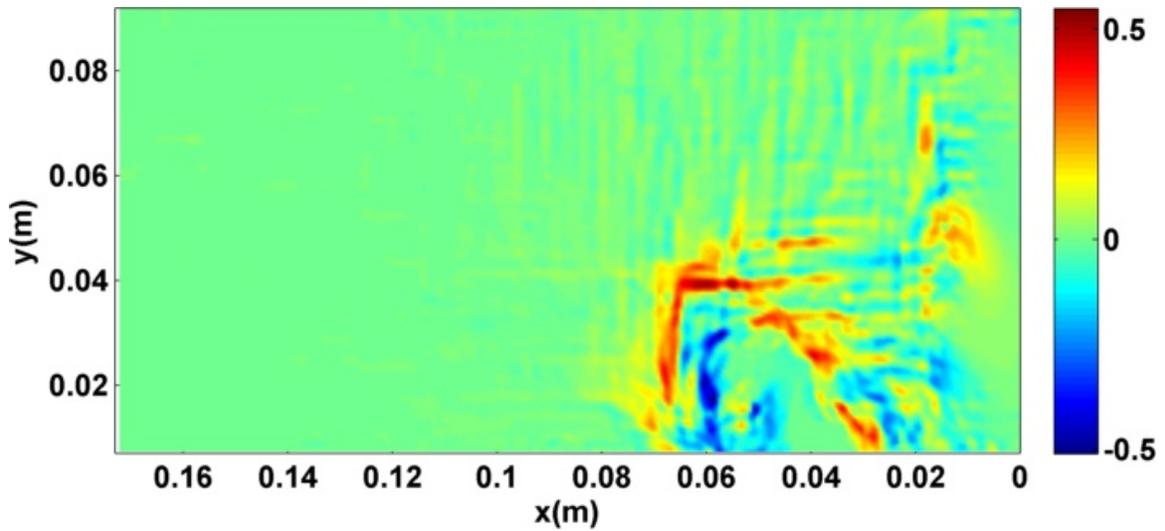


(b)

**Figura 5-2:** Campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^+$  en (a) y  $\Lambda_{t_0, \tau}^-$  en (b) con  $t_0 = 6,0s$  y  $\tau = 0,8s$  en ambos casos.

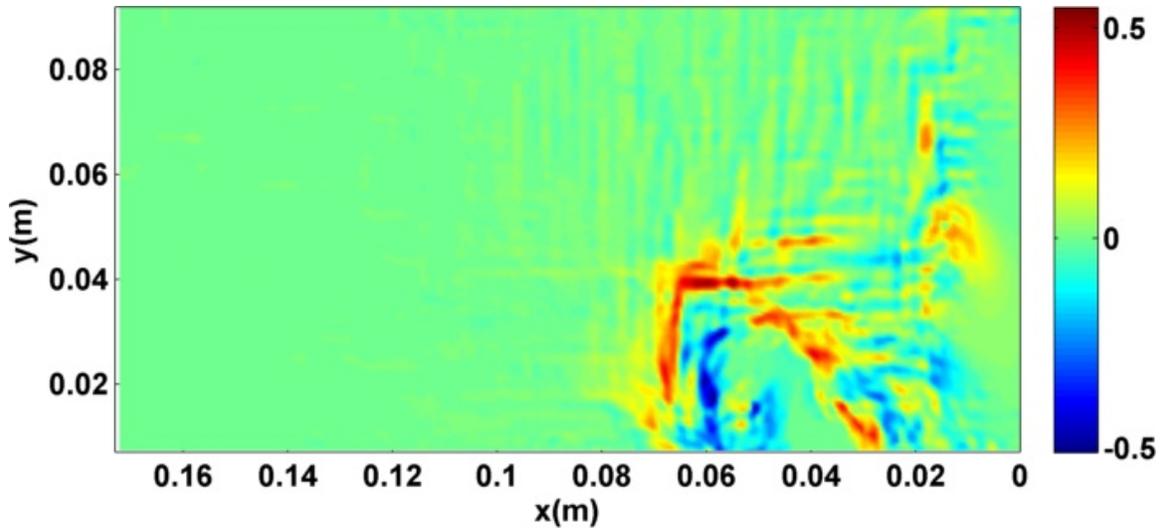
Resulta útil poder visualizar qué tan próximas se encuentran las variedades repeloras y atractoras. Para visualizar ambos campos en una misma figura, se suele graficar el campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm} = \Lambda_{t_0, \tau}^+ - \Lambda_{t_0, \tau}^-$  que se aprecia en la figura 5-3. En estos campos sobresalen las variedades más intensas que son las que nos interesan, por eso de ahora en más mostraremos principalmente estos campos salvo que se indique lo contrario. Tal como se explicó en la figura 5-2, se puede apreciar más fácilmente el frente delimitado como una variedad repelora y en su interior una variedad atractora en la

figura 5-3. En definitiva, esta figura muestra las regiones que quedan delimitadas en la dinámica del fluido durante ese intervalo de tiempo. La variedad repelora delimita las regiones entre las que no habrá intercambio, la variedad atractora cerca del frente y dentro del resalto especifica la zona en la que hay mayor convergencia del fluido. Es decir, el frente frío (más denso) que se propaga en forma de anillo desplazará al fluido más caliente (menos denso) a la derecha de la variedad repelora y por lo tanto no habrá mezcla.

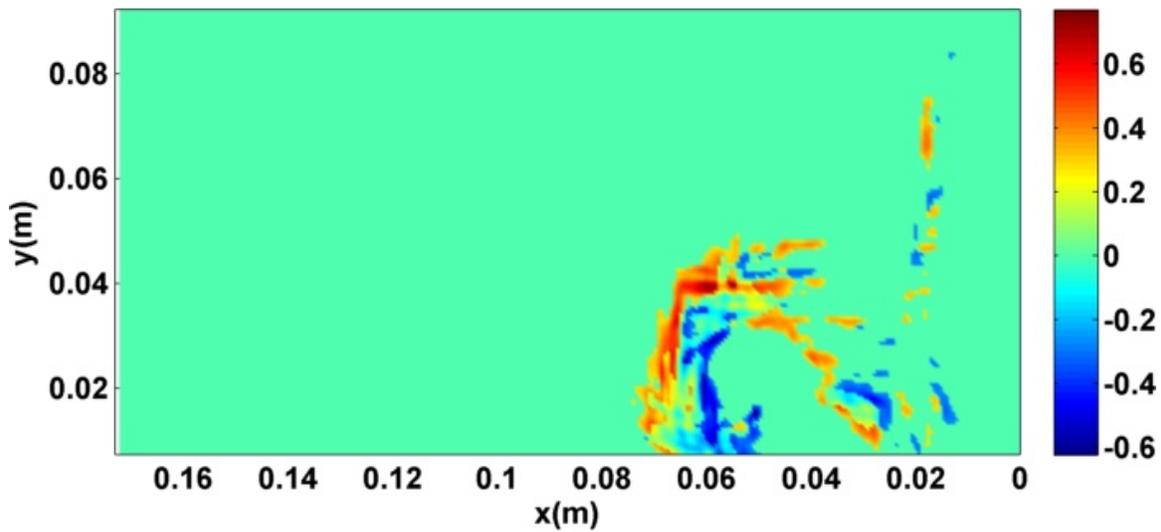


**Figura 5-3:** Campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm} = \Lambda_{t_0, \tau}^{+} - \Lambda_{t_0, \tau}^{-}$  con  $t_0 = 6,0s$  y  $\tau = 0,8s$ .

En los algoritmos que generan las gráficas de los campos de FTLE se suele filtrar sus valores para mostrar solamente las regiones por encima o debajo de una cierta cota. Definamos la cota como  $C = p * \text{máx} |\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}|$  donde  $p$  representa un porcentaje a elegir. Por lo tanto si se parte desde  $C = 0$  (donde se tendrían los datos sin filtro alguno) y se va aumentando gradualmente  $C$ , los campos de FTLE con valores por encima de  $C$  dejarán a la vista las regiones más intensas (ver figura 5-4). El motivo para realizar este filtrado es simplemente para favorecer la visualización de las estructuras en el campo de FTLE. La cota que tomaremos por defecto en todos los resultados será  $C = 0,01 * \text{máx} |\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}|$ , salvo que se especifique lo contrario.



(a)



(b)

**Figura 5-4:** Campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  con filtro  $p = 0,01$  en (a) y  $p = 0,25$  en (b). En ambos casos  $t_0 = 6,0s$  y  $\tau = 0,8s$ . A medida que se aumenta el filtro se resaltan las regiones con valores más intensos de FTLE y por lo tanto las LCS predominantes.

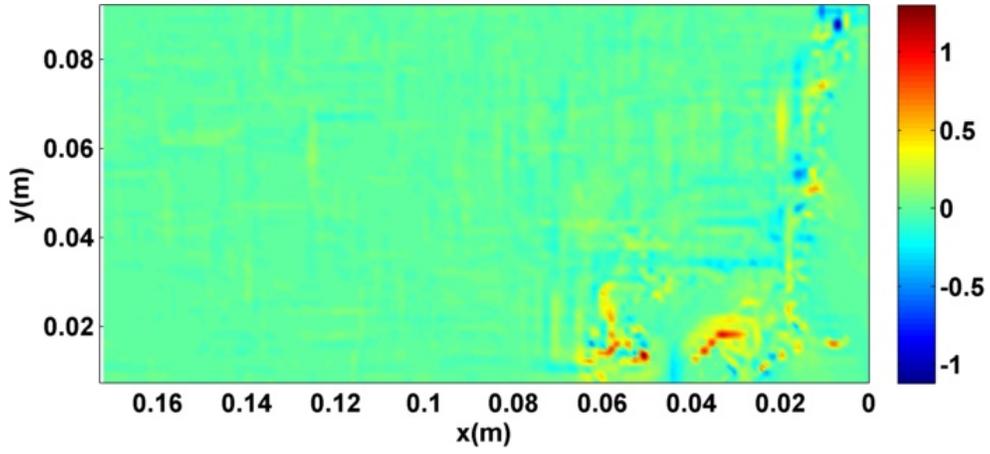
#### 5.1.1.1. Dependencia de LCS en el tiempo de advección

Ahora veamos las características propias de los FTLE a medida que cambia el tiempo de advección  $\tau$  y se mantiene la condición inicial  $t_0$  constante. Como se observa en la figura 5-5, existen regiones con valor absoluto de FTLE más alto a medida que el tiempo de advección es más cercano a cero. Este resultado se corresponde con el hecho

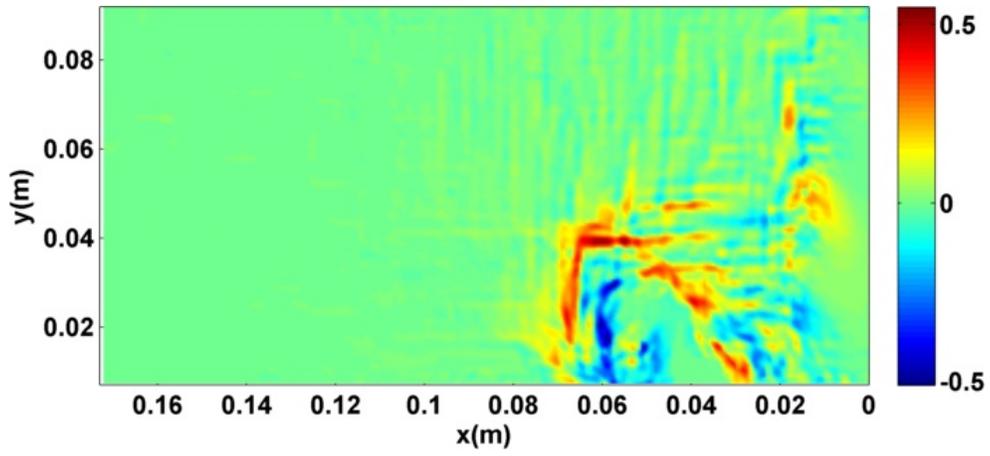
que los valores de FTLE al principio disminuyen con el aumento de  $\tau$  y luego se hacen constantes para tiempos de advección muy grandes ( $\tau \rightarrow \infty$ ) como fue planteado al final de la sección 3.2. En otras palabras, significa que para flujos ergódicos cerrados, el campo FTLE por completo converge al mismo valor llamemosle  $\lambda_\infty$  correspondiente a  $\tau \rightarrow \infty$  [37].

Si se comparan las figuras de 5-5(a), 5-5(b) y 5-5(c) se observa que las zonas de extremos locales de FTLE pasan de ser pequeñas, difusas y con valores altos (en valor absoluto) de FTLE a estar más conexas, bien definidas y con valores menores (en valor absoluto) de FTLE. Claramente, esto es consecuencia de la elección de  $\tau$ . Para valores muy pequeños, cercanos a cero, sobresalen las regiones que actúan como repelidor o atractor en forma casi instantánea, mientras que en el resto del dominio no se presenta una divergencia exponencial significativa entre partículas. A medida que aumenta  $\tau$ , cada vez más regiones del dominio presentarán valores altos de FTLE (en términos relativos a los valores FTLE de ese  $\tau$ ) llegando al caso extremo, cuando  $\tau$  es suficientemente grande, en que la divergencia exponencial entre partículas puede ser los propios límites del dominio, entonces todo el dominio o su mayor parte presenta valores de FTLE similares.

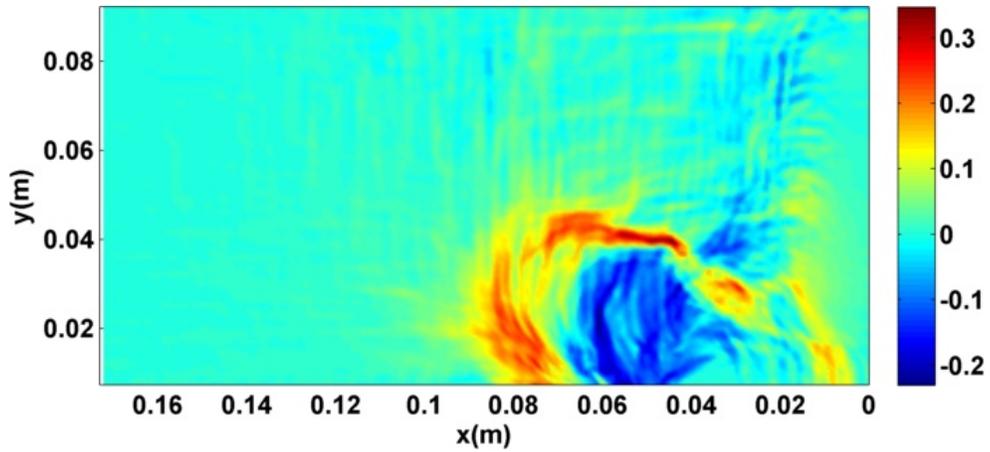
Se puede apreciar el comportamiento de los valores de FTLE para distintos valores de  $\tau$  en la figura 5-6. Aquí se ve la función de distribución del campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^+$  para distintos valores de  $\tau$  y el mismo  $t_0 = 6,0s$ . Lo que representa cada una de las curvas en la figura 5-6 es la densidad de regiones en función de los valores de FTLE. Se observa que para valores de  $\tau$  más pequeños aparecen más regiones con altos valores de FTLE y a medida que aumenta  $\tau$  la distribución se vuelve un pico cada vez más agudo lo cual evidencia que la mayor parte del dominio adquiere valores en un rango pequeño de FTLE. La densidad de regiones graficadas en el eje vertical de la figura 5-6 es conocida como *función de distribución de probabilidad* [38] y sirve para localizar tiempos de advección  $\tau$  con una determinada distribución de valores de FTLE y cuantificar los casos extremos no deseados:  $\tau$  pequeños o  $\tau$  grandes.



(a)

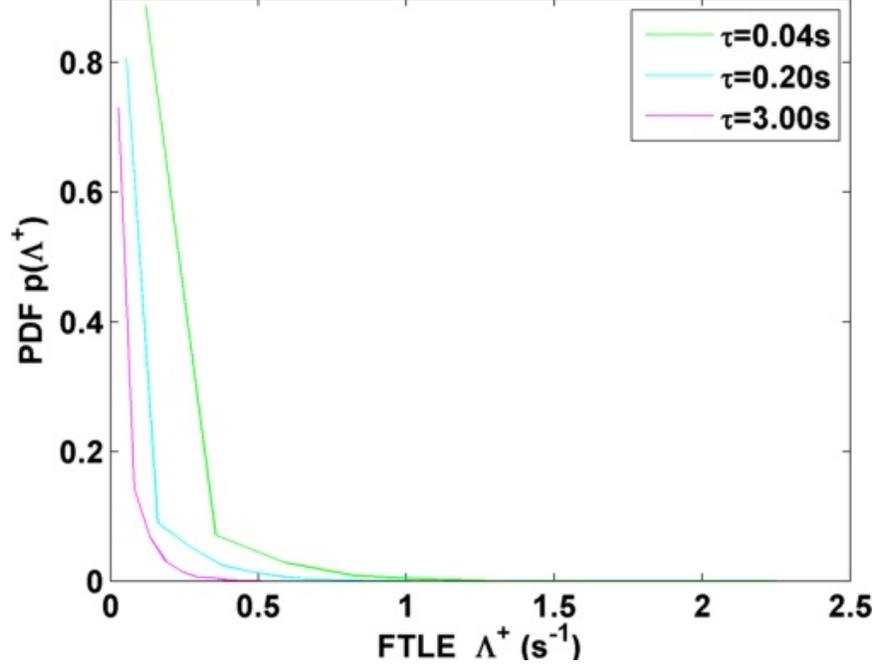


(b)



(c)

**Figura 5-5:** Campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm} = \Lambda_{t_0, \tau}^{+} - \Lambda_{t_0, \tau}^{-}$  con  $t_0 = 6,0s$  en los 3 casos y  $\tau = 0,04s$  en (a),  $\tau = 0,8s$  en (b) y  $\tau = 5,0s$  en (c). Por tratarse de distintos valores de  $\tau$ , se tienen estructuras y valores de FTLE distintos. Eso se evidencia en la diferencia de valores entre los mapas de colores.

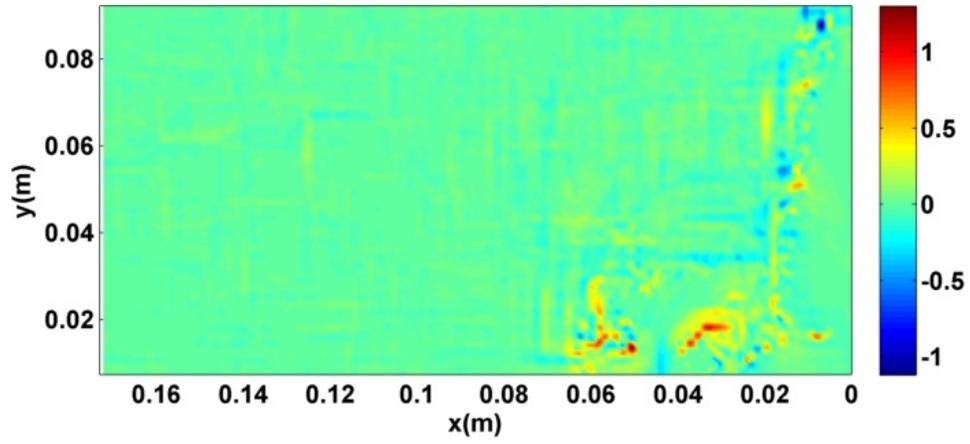


**Figura 5-6:** Función de distribución de probabilidad para el campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^+$  con  $t_0 = 6,0s$  y distintos valores de  $\tau$

La dependencia de los valores de FTLE con  $\tau$  se ve reflejada en la deformación o *strain* de las parcelas de fluido. Cuando  $\tau$  tiende a cero podemos decir que se está observando las regiones hiperbólicas aproximadamente instantáneas. Como la hiperbolicidad se corresponde con la deformación, entonces estaremos observando las regiones de deformación aproximadamente instantánea. En contrapartida, para  $\tau$  finito, distinto de cero, los FTLE ubicarán las regiones hiperbólicas coherentes, es decir las regiones que mantuvieron ese nivel de deformación en todo el intervalo  $\tau$ . Esto sugeriría que si se tiene como medir la deformación instantánea, los máximos deberían ubicarse aproximadamente en los extremos locales del campo FTLE con  $\tau \rightarrow 0$ .

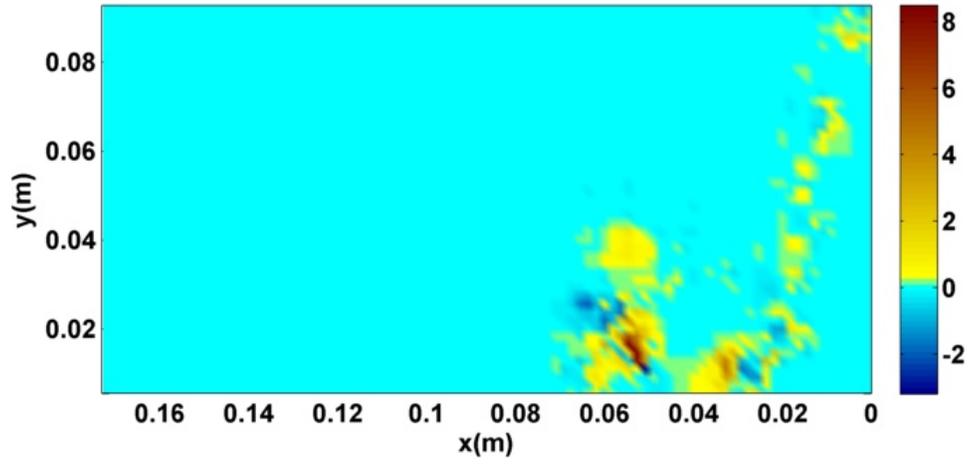
El criterio de Okubo-Weiss es la herramienta utilizada en este trabajo para comparar el strain cuadrático instantáneo con la vorticidad cuadrática instantánea. Luego, las regiones donde  $Q > 0$  (ver ecuación 2.32) predomina la deformación y por lo tanto la hiperbolicidad frente a la vorticidad. Por lo tanto los extremos locales del campo FTLE con  $\tau \rightarrow 0$  deberían ubicarse donde  $Q > 0$  en el campo de Okubo-Weiss. En la figura 5-7(b) se ve el campo  $Q$  de Okubo-Weiss para  $t = 6,0s$ .

Ahora comparemos el campo  $Q$  ( $t = 6,0s$ ) de la figura 5-7(b) con campos de FTLE para distintos  $\tau$  y el mismo tiempo inicial  $t_0 = 6,0s$  como el de la figura 5-7(a). Se puede observar la coincidencia de las regiones donde domina el strain instantáneo, los máximos de  $Q$ , con aquellas donde el campo FTLE está en un máximo local para  $\tau = 0,04s$  y como se deja de percibir la correspondencia a medida que aumenta  $\tau$ . La figura 5-7(c) muestra el campo de Okubo-Weiss como un mapa de dos colores con la partición de  $Q < 0$  en azul y  $Q > 0$  en rojo, se puede decir que los campos de FTLE emergen de la figura 5-7(c) a partir de una pérdida gradual de hiperbolicidad a medida que aumenta  $\tau$ . Es decir todas las variedades hiperbólicas que aparecen de los FTLE, están en la región  $Q > 0$  de la figura 5-7(c). A medida que aumenta el tiempo de advección  $\tau$  permanecen las regiones hiperbólicas coherentes mientras que las regiones hiperbólicas instantáneas (en el sentido de Okubo-Weiss) desaparecen. En otras palabras, se puede decir que los campos FTLE tienden al campo  $Q$  (como el de la figura 5-7(b)) en el límite  $\tau \rightarrow 0$ .

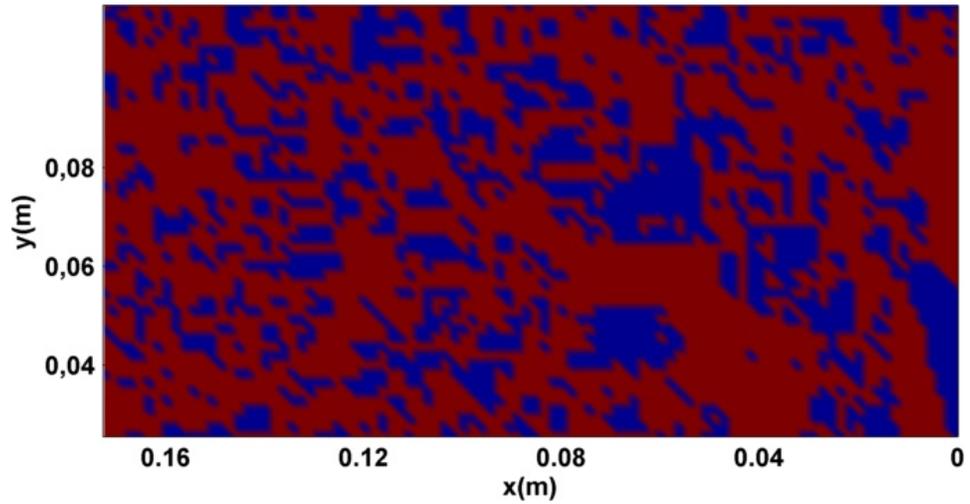


(a)

Okubo-Weiss ( $s^{-2}$ ),  $t_0 = 6.0s$



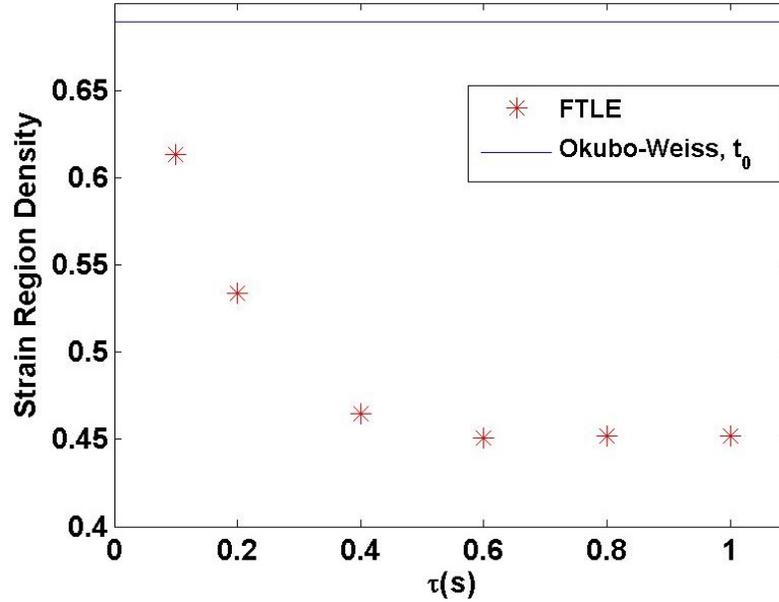
(b)



(c)

**Figura 5-7:** En (a) Campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm} = \Lambda_{t_0, \tau}^{+} - \Lambda_{t_0, \tau}^{-}$  con  $t_0 = 6,0s$  y  $\tau = 0,04s$ . (b) Campo  $Q$  de Okubo-Weiss para  $t = 6,0s$ . (c) Partición del dominio entre  $Q > 0$  y  $Q < 0$  para  $t = 6,0s$ .

En la figura 5-8 se puede ver la densidad de regiones hiperbólicas de los campos de FTLE para distintos valores de  $\tau$  y la densidad instantánea de regiones hiperbólicas tomada a partir del campo  $Q$  ( $t = 6,0s$ ). Aunque no nos brinde información sobre la ubicación de las regiones hiperbólicas, claramente se puede ver que la densidad de regiones hiperbólicas se acerca al valor instantáneo a medida que  $\tau$  disminuye.

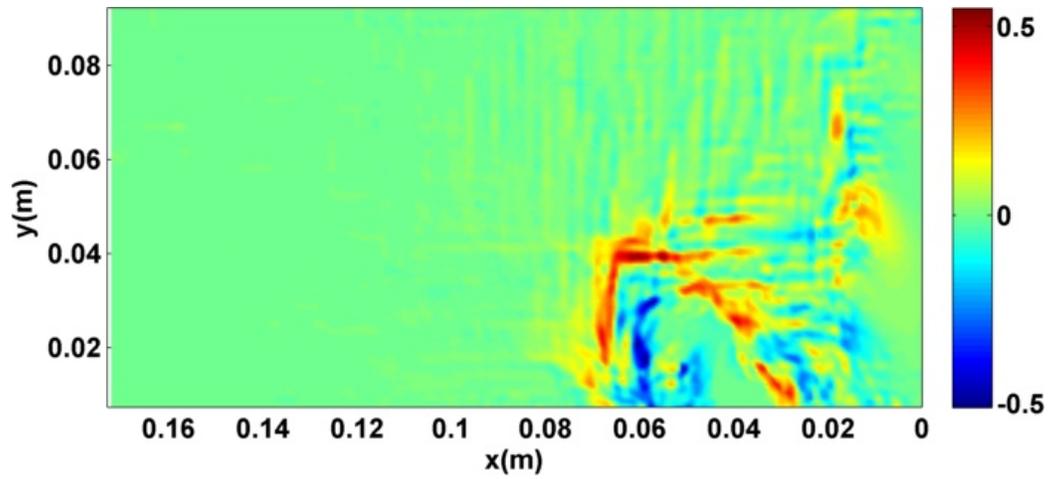


**Figura 5-8:** Densidad de regiones hiperbólicas del campo  $Q$  ( $t = 6,0s$ ) y del campo de  $\Lambda_{t_0,\tau}^\pm$  para  $t_0 = 6,0s$  distintos valores de  $\tau$

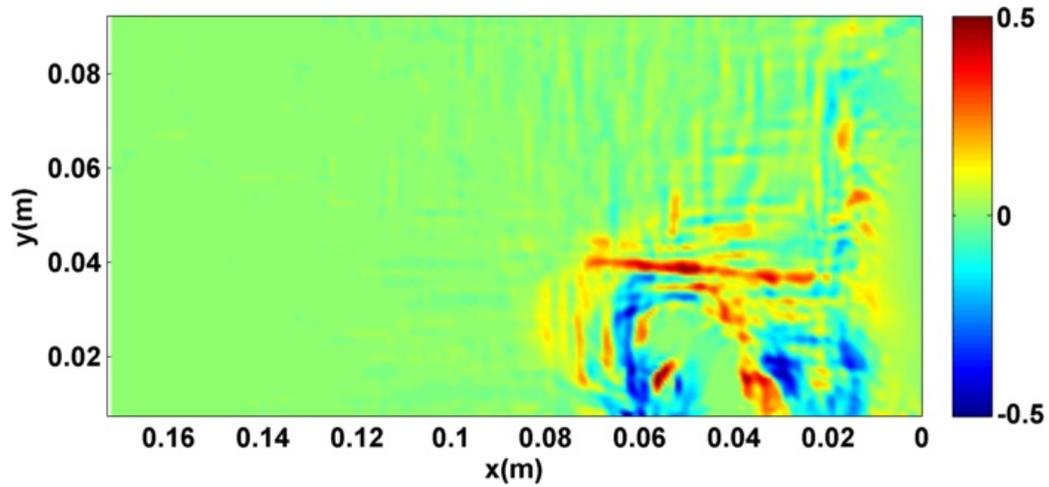
### 5.1.1.2. Dependencia de LCS en la condición inicial

En esta sección analizaremos el comportamiento de los campos de FTLE para  $\tau$  fijo y  $t_0$  variable de la figura 5-9.

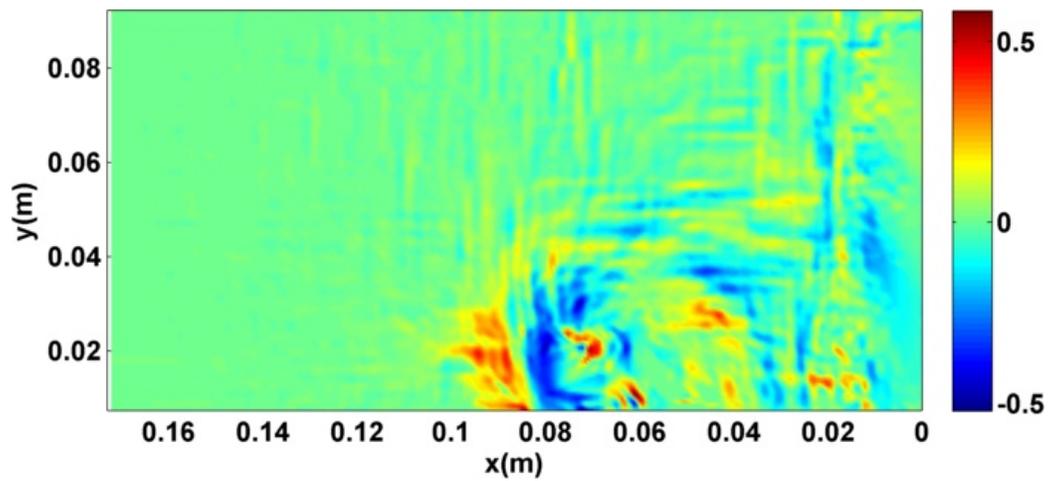
Si se comparan las figuras 5-9(a) y 5-9(b) con la figura 5-9(c), claramente se nota la localización y avance del frente del microburst. En la siguiente sección ampliaremos sobre el avance del mismo, por ahora vamos a centrarnos en la densidad de regiones hiperbólicas. En la figura 5-10 se ve la densidad de regiones hiperbólicas por encima de  $p = 0,01$ . Como las condiciones iniciales son distintas y a medida que estas evidencian el avance del frente es de esperar entonces una mayor proporción de regiones hiperbólicas.



(a)

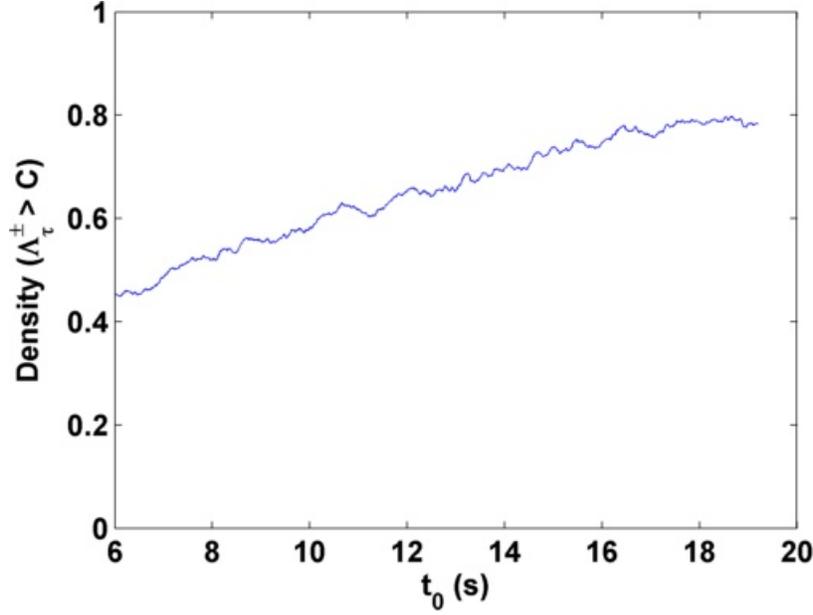


(b)



(c)

**Figura 5-9:** Campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^\pm = \Lambda_{t_0, \tau}^+ - \Lambda_{t_0, \tau}^-$  con  $\tau = 0,8s$  en los 3 casos y  $t_0 = 6,0s$  en (a),  $t_0 = 6,8s$  en (b) y  $t_0 = 10,0s$  en (c).



**Figura 5-10:** Densidad de regiones hiperbólicas para distintas condiciones iniciales,  $t_0$ , y el mismo tiempo de advección  $\tau = 0,08s$ . Se tomaron los valores de FTLE tal que  $\Lambda_\tau^\pm > C$ , donde  $C = 0,01 * \max(|\Lambda_\tau^\pm|)s^{-1}$ .

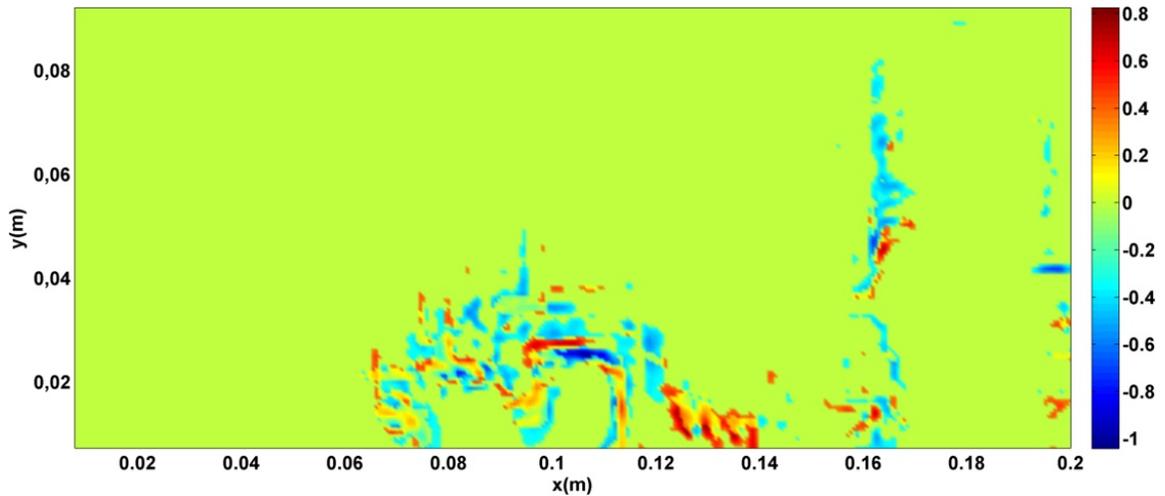
Ahora bien, si el tiempo inicial es aproximadamente  $t_0 = 16s$  o superior el frente ya está lo suficientemente avanzado, es decir cercano a la frontera, la velocidad con la que avanza el frente deja de ser constante <sup>1</sup> y con ella el posible aumento de zonas hiperbólicas (la región que quedaría dentro de la zona del frente). Al contrario de lo que sucede cuando se varía  $\tau$  (ver figura 5-5), la proporción de crestas de FTLE, no parece variar, al menos de una forma tan notoria. Además no se observa una variación importante en los valores máximos, en valor absoluto, de FTLE si no que estos se mantienen aproximadamente constantes. Escencialmente, si el microburst se encuentra completamente desarrollado, a medida que cambia  $t_0$  las LCS aparecen en otras posiciones pero no aumenta su proporción. En otras palabras las estructuras LCS permanecen invariantes.

Acerca de esta invarianza de las LCS, podemos decir que las mismas para un  $\tau$  dado, dependen del tiempo de advección considerado. Por lo tanto, si se varía la condición inicial de  $t_0$  a  $t_0 + \delta t_0$  donde  $\delta t_0 < \tau$ , parte de los datos de velocidades para obtener ambos campos de FTLE,  $\Lambda_{t_0, \tau}^\pm$  y  $\Lambda_{t_0 + \delta t_0, \tau}^\pm$  serán iguales. Mientras la mayoría de estos

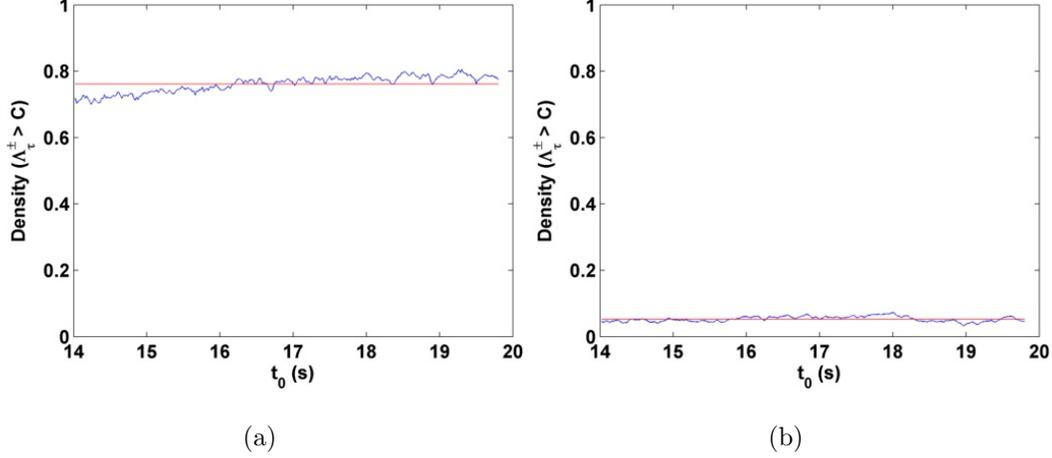
<sup>1</sup>Para tiempos menores a  $t = 16s$  el avance del frente es lineal en una buena aproximación, ver figura 4-8 y referencia [33]

datos de velocidad sean iguales, es de esperar entonces que no cambie sustancialmente las regiones de máxima divergencia exponencial ni sus valores.

Las LCS, dadas por las crestas de los campos de FTLE, mantienen su proporción a medida que cambia  $t_0$  pero pueden ubicarse en posiciones ligeramente distintas. Si se observa un video (ver video en [fisicanolineal.fisica.edu.uy/?page\\_id=254](http://fisicanolineal.fisica.edu.uy/?page_id=254)) formado por imágenes de los campos FTLE, con el mismo  $\tau$  y distintos  $t_0$ , con un cambio pequeño de  $t_0$  entre cuadro y cuadro, se vería esencialmente las mismas crestas del campo FTLE que se mueven en el dominio pero no aparece generación de estructuras nuevas. Para cuantificar este efecto, se calculó la densidad de regiones cuyo valor absoluto de FTLE permanece por encima de una cierta cota  $C$  para distintos tiempos iniciales  $t_0$ . Vemos en la figura 5-12(a) que para una cota  $C = 0,01 \text{ máx} |\Lambda_{t_0,\tau}^{\pm}|$  la función permanece constante para distintos  $t_0$  en una muy buena aproximación, con un valor medio  $\langle D \rangle = 0,7611$  y desviación estándar  $\sigma_D = 0,0245$ . Dado que para este  $\tau$  las crestas de FTLE se encuentran aproximadamente para valores superiores a  $C = 0,2 \text{ máx} |\Lambda_{t_0,\tau}^{\pm}|$ , en la figura 5-12(a) se ve la función  $D$  para esa misma cota con un valor medio  $\langle D \rangle = 0,0528$  y desviación estándar  $\sigma_D = 0,0080$ . Podemos concluir entonces que las LCS serán características del tiempo de advección  $\tau$  y que un cambio en las condiciones iniciales no generará nuevas LCS si no que evidencian el “movimiento” de las mismas.



**Figura 5-11:** Campo  $\Lambda_{t_0,\tau}^{\pm}$  filtrado para valores  $\Lambda_{t_0,\tau}^{\pm} > C$  donde  $C = 0,2 \text{ máx} (|\Lambda_{\tau}^{\pm}|)s^{-1}$ ,  $\tau = 0,2s$  y  $t_0 = 16,0s$ .



**Figura 5-12:** Densidad de regiones  $|\Lambda_{t_0, \tau}^\pm| > C$  para distintos valores de  $C$  y  $\tau$ . En (a)  $C = 0,01 * \max(|\Lambda_\tau^\pm|)s^{-1}$  y  $\tau = 0,2s$ ,  $\langle D \rangle = 0.7611$  y  $\sigma_D = 0.0245$ . En (b)  $C = 0,2 * \max(|\Lambda_\tau^\pm|) s^{-1}$  y  $\tau = 0,2s$ ,  $\langle D \rangle = 0.0528$  y  $\sigma_D = 0.0080$ .

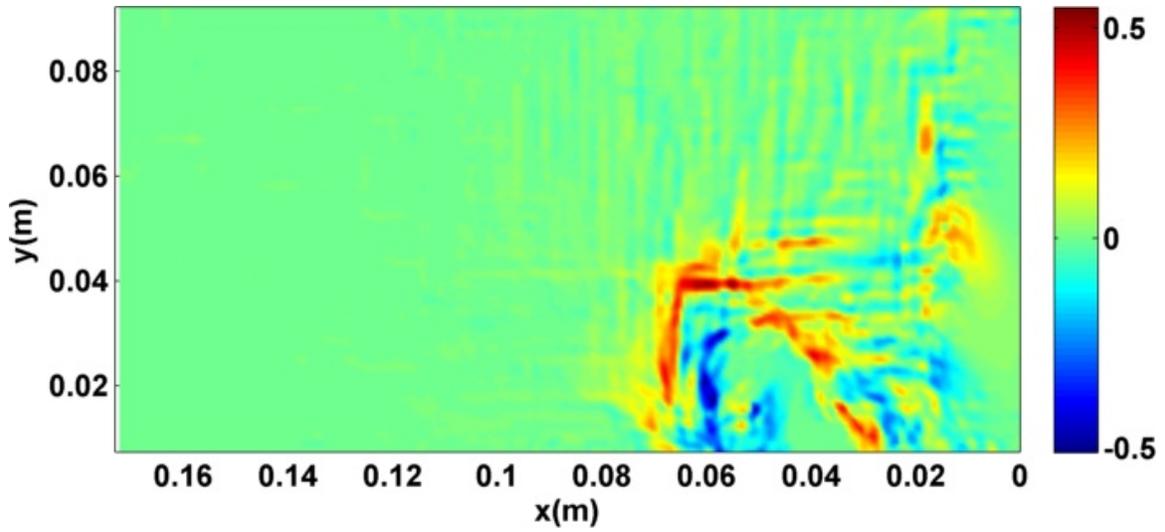
### 5.1.2. Detección de frentes

En un microburst, luego que la ráfaga descendente impacta en el suelo, se forma un resalto el cual se expande sobre la superficie, como ya se disutió en la sección 5.1.1. Si denominamos *frente* a la frontera de este resalto, la detección del frente es primordial para entender el desarrollo del microburst y las consecuencias que puede implicar [27, 30, 31, 33]. En la mayoría de los casos reportados en la literatura y especialmente en los experimentos realizados en [33], sobre los que se basa este trabajo, el frente consta de un anillo de vórtices bien definido que van aumentando su radio. Las figuras mostradas en esta tesis, por ejemplo 4-7, son un corte sobre el plano vertical que pasa por uno de los diámetros del anillo de vórtices y el centro del vórtice se corresponde con los máximos de vorticidad. El avance de estos máximos a medida que transcurre el tiempo da una buena idea del avance del frente, pero no son el frente. El frente es el límite en la expansión del microburst y se encuentra a una distancia a priori desconocida del máximo de vorticidad. Es por eso que con este tipo de figuras no se puede obtener una buena determinación del mismo.

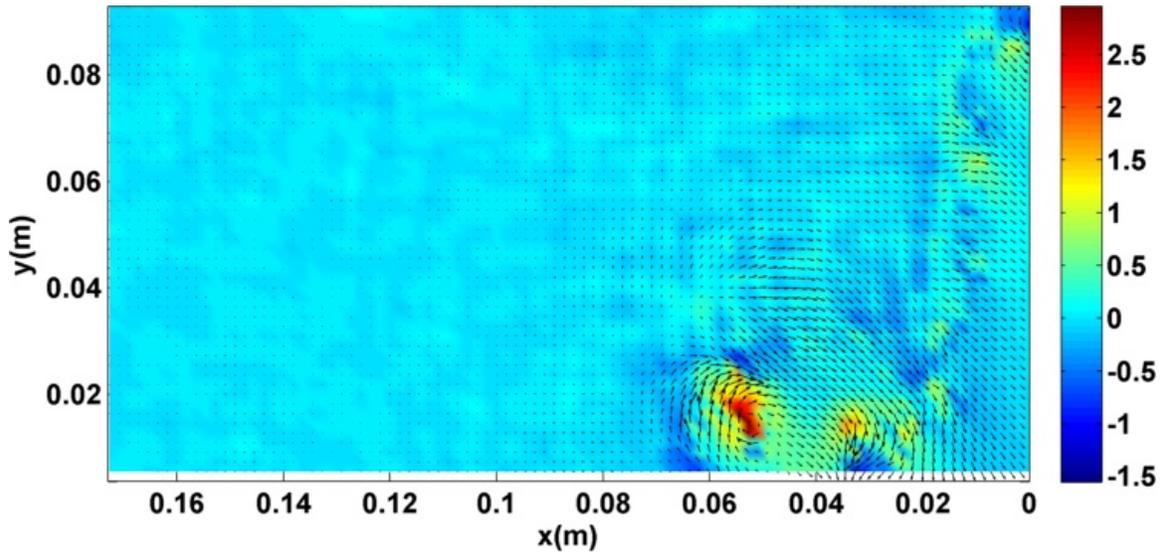
Si observamos el comportamiento de las partículas de fluido en un intervalo de tiempo, sobre el frente tendremos una trayectoria que tiende a cerrarse bordeando la zona del máximo de vorticidad. El movimiento sobre el frente es tal que ascienden las partículas

de las capas más bajas y se mueven concéntricamente en el mismo sentido que marca el campo de velocidad en el pico de vórticidad, determinando así la frontera del vórtice. Sobre esta frontera o frente, el estiramiento o *stretching* que sufren las parcelas de fluido será muy alto. Las partículas inicialmente fuera de los límites del microburst no se verán afectadas por este stretching y cuando mucho pueden tender hacia el frente como si fuera un ciclo límite (ver [13]) pero no atraviesan el frente hacia la región del vórtice. A su vez las partículas que inicialmente se encontraban dentro de los límites del resalto, no cruzarán el frente hacia el exterior. Esto da la pauta que el frente se comportará como una LCS ya que consta de una región de máximo stretching local. Más aún, este frente sería una LCS repelora. En la figura 5-13(a) se muestra el campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  con  $t_0 = 6,0s$  y  $\tau = 0,8s$ . En la misma se puede ver claramente una LCS, que se localiza en la cresta de dicho campo, y que se corresponde con el frente. Queda claro que la posición del frente a partir de los FTLE no será la instantánea. Necesitamos de un intervalo de tiempo en el que ocurre la advección como fue descrita en el párrafo anterior, de ese modo los FTLE recogen indirectamente la localización del frente al tratarse de una región de máxima deformación. De todos modos, aunque la posición del frente no sea la instantánea, este método permite la localización del mismo con una claridad que no brindan los campos de velocidad y vorticidad como los de la figura 5-13(b).

Las dos figuras en 5-13 dan información complementaria: la ubicación del máximo de vorticidad y la del frente, delimitando una región que contiene al máximo de vorticidad y que se corresponde también con un atractor. Lo último confirma que las partículas inicialmente dentro de los límites del microburst, permanecen en esta zona (existencia de atractor) y entonces no habrá mezcla (durante ese  $\tau$ ) entre zonas a cada lado de la LCS. También se puede seguir el desplazamiento del frente si se toma un  $\tau$  pequeño y se va cambiando el tiempo inicial  $t_0$ , como se aprecia en 5-14.

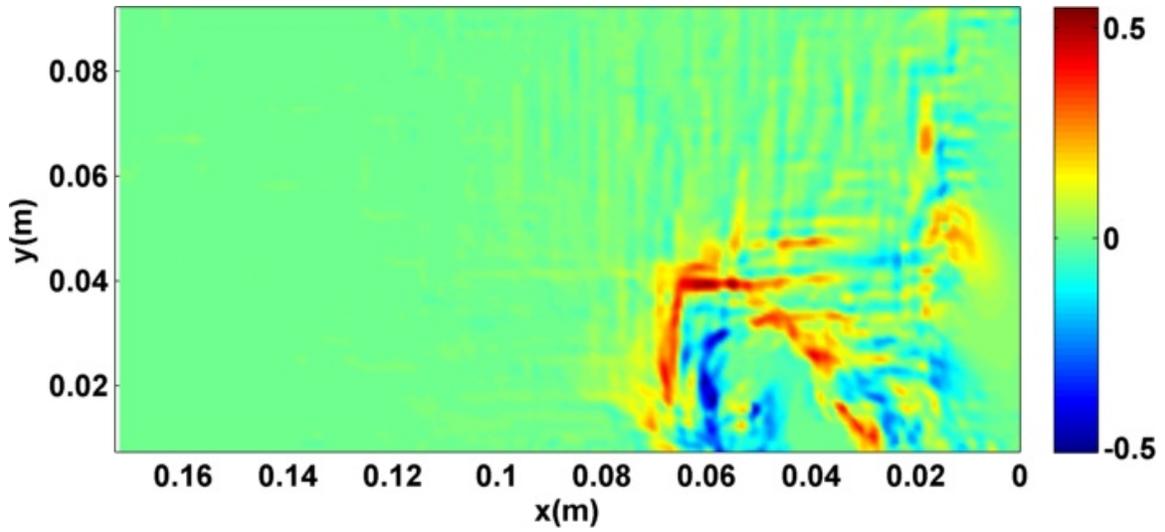


(a)

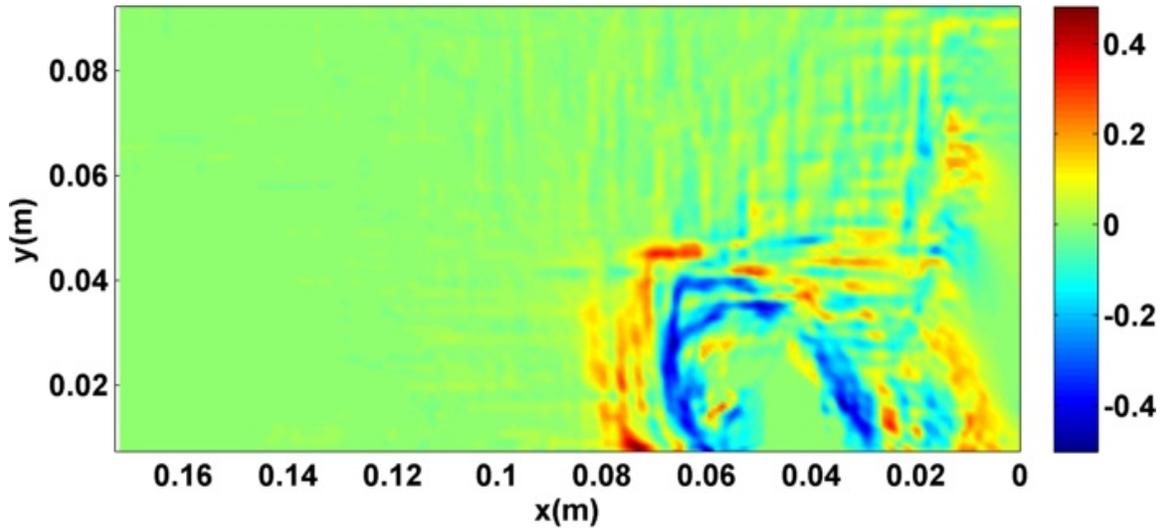


(b)

**Figura 5-13:** Campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  con  $\tau = 0,8s$  y  $t_0 = 6,0s$  en (a) y campo de velocidad (flechas) superpuesto al campo de vorticidad (color) para  $t_0 = 6,0s$  en (b). Ambos campos dan información complementaria para la ubicación del frente.



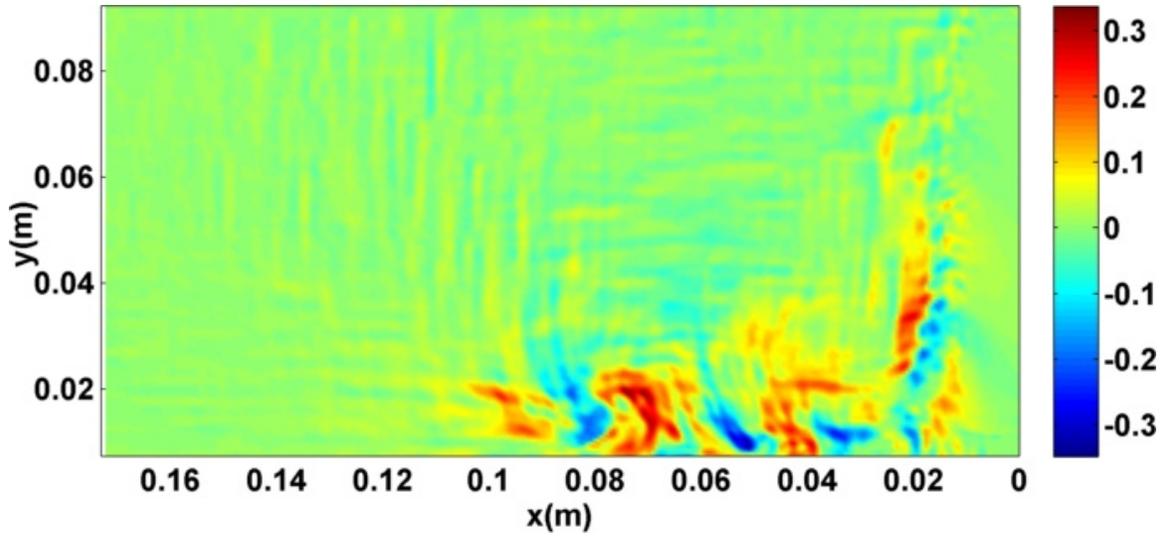
(a)



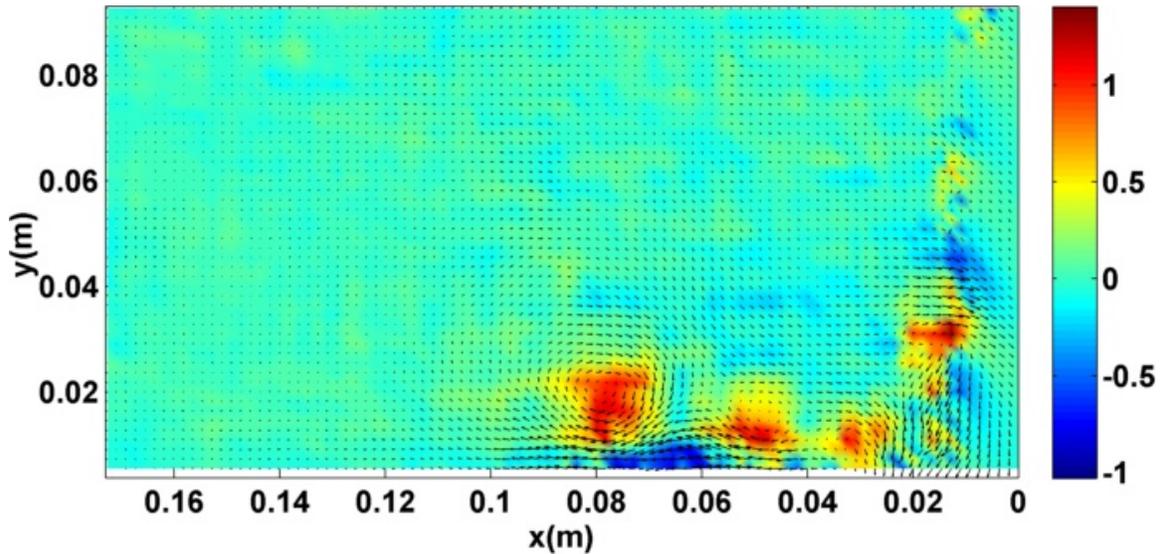
(b)

**Figura 5-14:** Campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  con  $\tau = 0,8s$  y  $t_0 = 6,0s$  en (a) y  $t_0 = 7,0s$  en (b). Se puede apreciar el vance del frente.

La localización del frente de microburst también se puede aplicar en la fase de un microburst en la que aparecen múltiples vórtices. En la figura 5-15 se aprecia cada uno de los vórtices (5-15(b)) en una zona atractores y encerrada por una zona de repelores (5-15(a)).



(a)



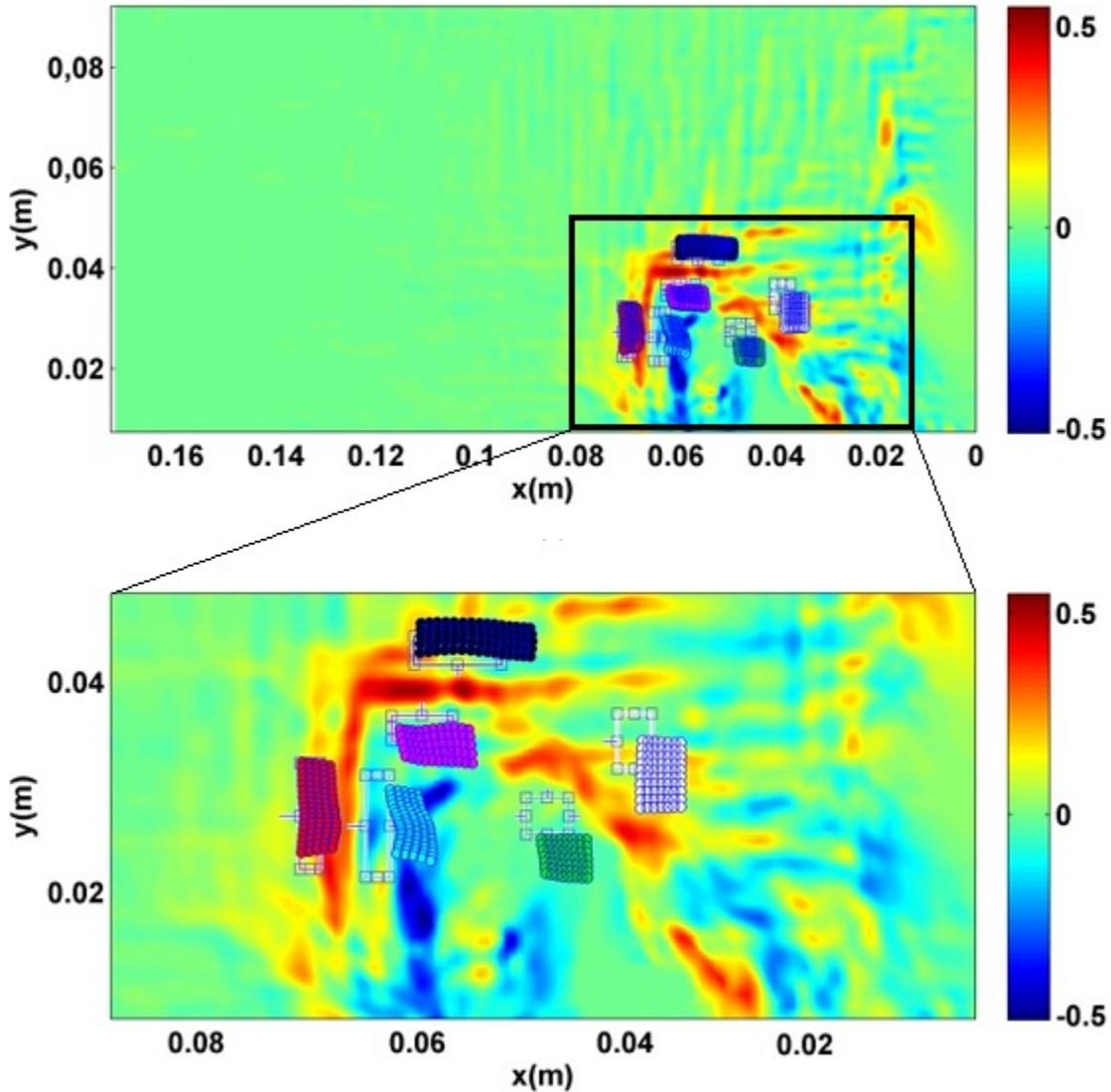
(b)

**Figura 5-15:** (a) campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  con  $t_0 = 14,0s$  y  $\tau = 2,0s$ . (b) Campos de velocidad y vorticidad superpuestos para  $t = 14,0s$

Por último veamos la advección de partículas en algunas zonas. En la figura 5-16 se recuadra una zona del microburst donde se realiza un zoom. En este, figura 5-16, se muestra la posición inicial de las partículas (ordenadas equiespaciadas dentro de cada rectángulos de color) y la posición final de las mismas (en el mismo color de la posición inicial).

En todas las zonas seleccionadas se puede apreciar el hecho que no hay mezcla de

materia inicialmente a cada lado del frente. En las zonas interiores y más altas, podemos observar la convergencia hacia el atractor. Finalmente paralelo al frente, sin importar de que lado se esté inicialmente, la advección corre en la dirección del frente, justificando entonces que se trata de una LCS.



**Figura 5-16:** Advección de partículas en torno a LCS para el campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  con  $t_0 = 6,0s$  y  $\tau = 0,8s$

Para finalizar la discusión de los resultados del microburst, es de destacar que con este método se puede localizar satisfactoriamente el frente y delimitar las zonas de mezcla. Además recordemos que no es posible obtener esta información directamente

de los campos de DPIV.

## 5.2. Fuente en un medio estratificado

En esta sección se verán los resultados obtenidos para la fuente en la atmósfera estratificada. En primer lugar se comentan las propiedades de los FTLE y las LCS en función de los parámetros  $t_0$  y  $\tau$ . Luego, se usan los campos de FTLE hallados junto con las trayectorias de las partículas para caracterizar LCS que son responsables de controlar el movimiento del fluido principalmente en la intrusión.

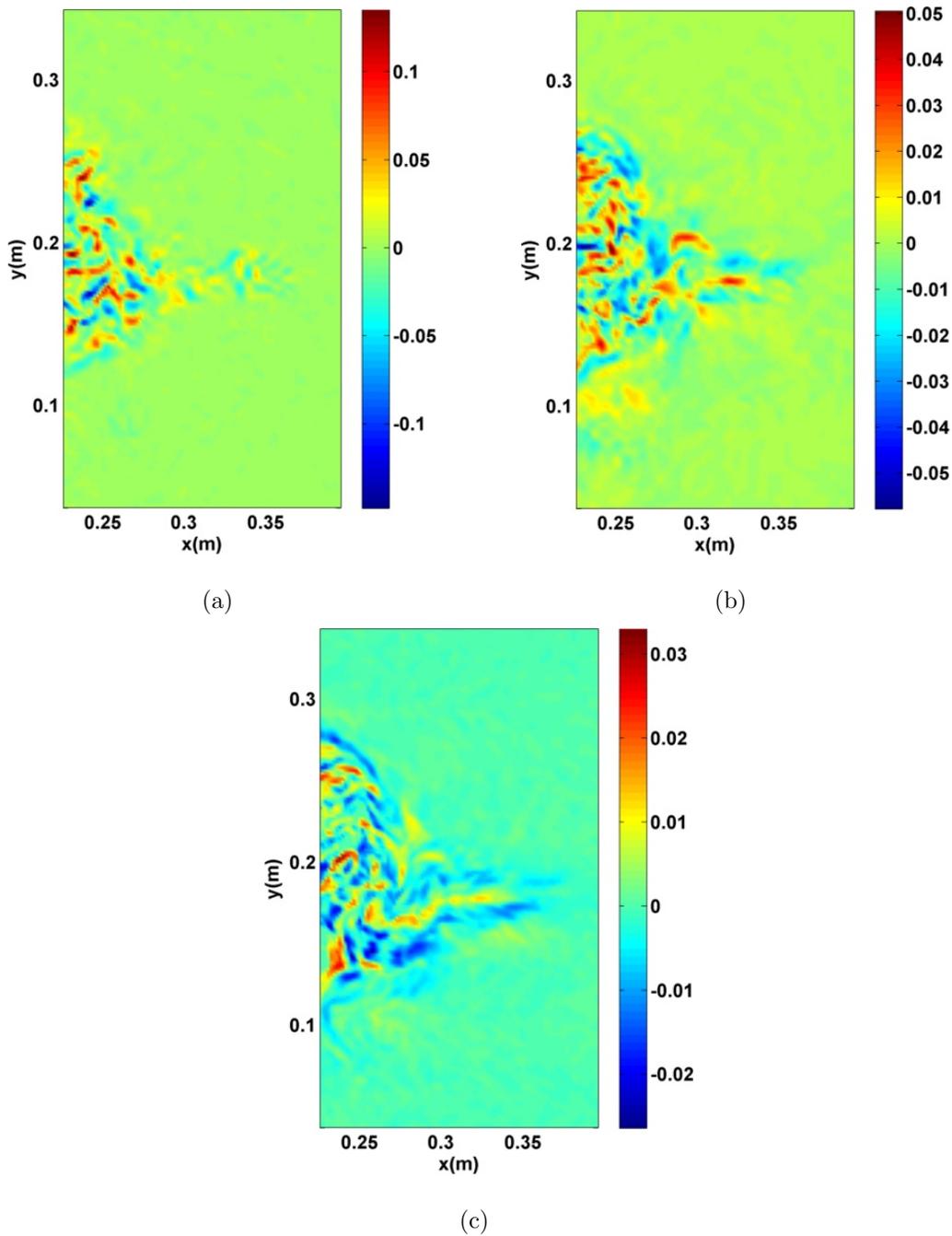
### 5.2.1. Propiedades de FTLE y LCS

A continuación mostraremos las propiedades de las FTLE y LCS que claramente se han podido comprobar en este experimento. Dado que la discusión sería la misma que la llevada a cabo en la sección 5.1.1, se comentarán los resultados remitiendo la discusión a dicha sección.

#### 5.2.1.1. Dependencia de LCS en el tiempo de advección

Al igual que en los resultados presentados para el microburst, analizaremos primero que sucede con los campos de FTLE si se mantiene  $t_0$  fijo y  $\tau$  variable. En la figura 5-17 se muestra  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  para  $\tau = 1,75s$  en 5-17(a),  $\tau = 12,5s$  en 5-17(b),  $\tau = 49,75s$  en 5-17(c) y  $t_0 = 112,5s$  en todos los casos. Para tiempos de advección pequeños, se pueden ver los extremos locales del campo FTLE más bien difusos, localizados en zonas pequeñas, y con valores altos (en valor absoluto).

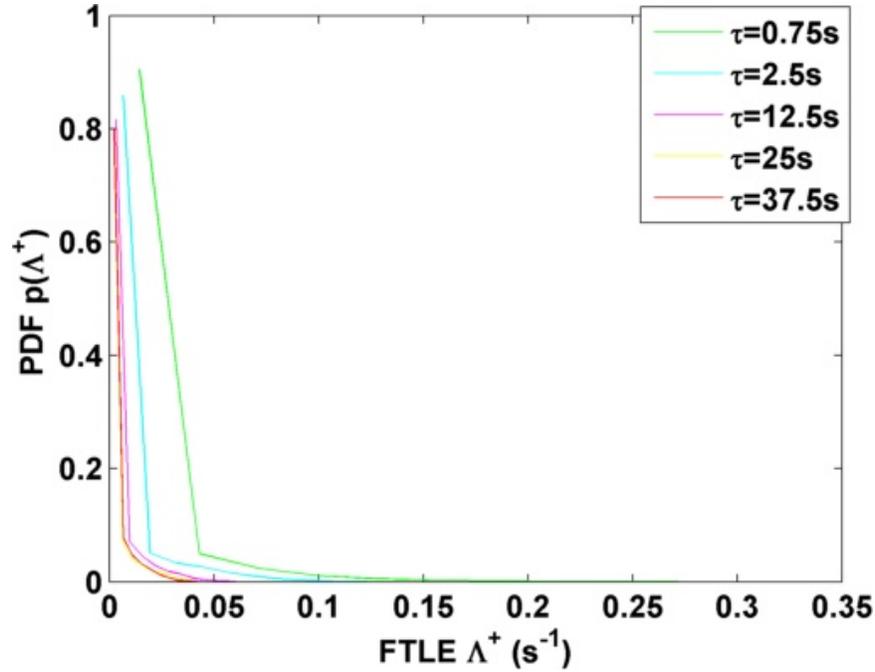
A medida que aumenta  $\tau$ , los extremos locales se vuelven más conexos, ya no localizados en pequeñas regiones si no que cubren una porción mayor del dominio y los valores de FTLE disminuyen en valor absoluto. Este comportamiento comprobado en esta experiencia, fue discutido en la sección 3.2 y es característico de los FTLE.



**Figura 5-17:** Campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm} = \Lambda_{t_0, \tau}^{+} - \Lambda_{t_0, \tau}^{-}$  con  $t_0 = 112,5s$  en los 3 casos y  $\tau = 1,75s$  en (a),  $\tau = 12,5s$  en (b) y  $\tau = 49,75s$  en (c).

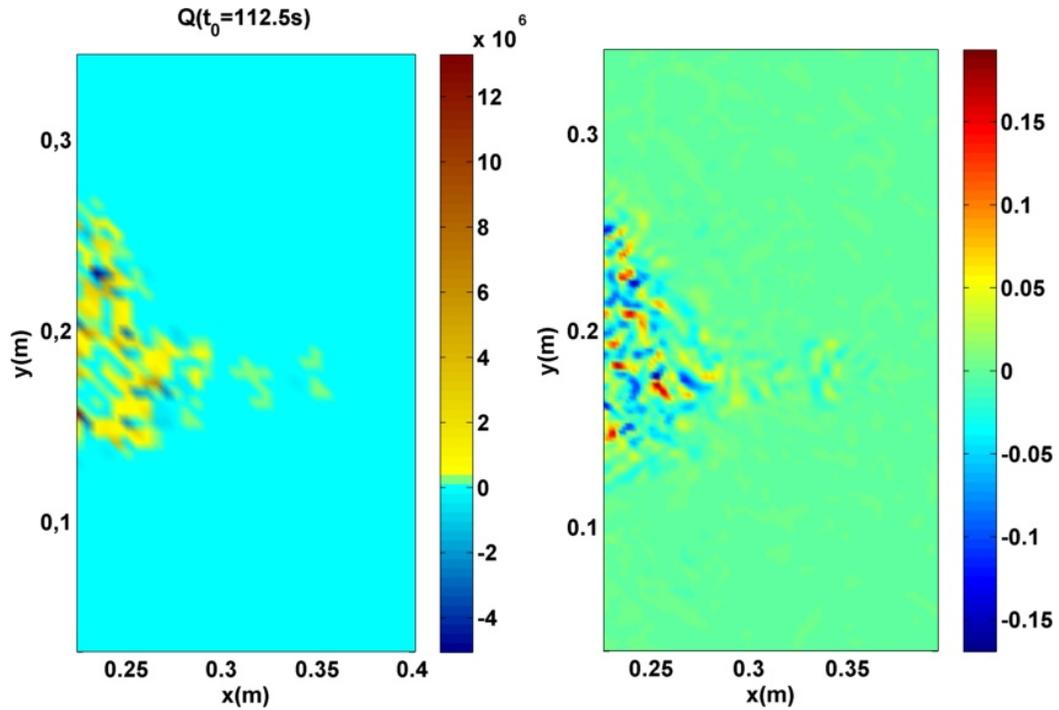
En la figura 5-18 se muestra la función de densidad de probabilidad para el campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{+}$ . La distribución de valores de FTLE se concentra sobre los valores más pequeños de FTLE a medida que aumenta  $\tau$  al punto que el pico se hace muy agudo para  $\tau$  grande. La función de distribución de probabilidad facilita la elección de tiempo de

advección  $\tau$  adecuado para observar las estructuras. Es decir  $\tau$  no puede ser tan pequeño que se aproxime al comportamiento instantáneo en el que hay estructuras difusas y de poca extensión espacial ni tan grande de manera que el campo por completo tienda al valor asintótico  $\lambda_\infty$ .



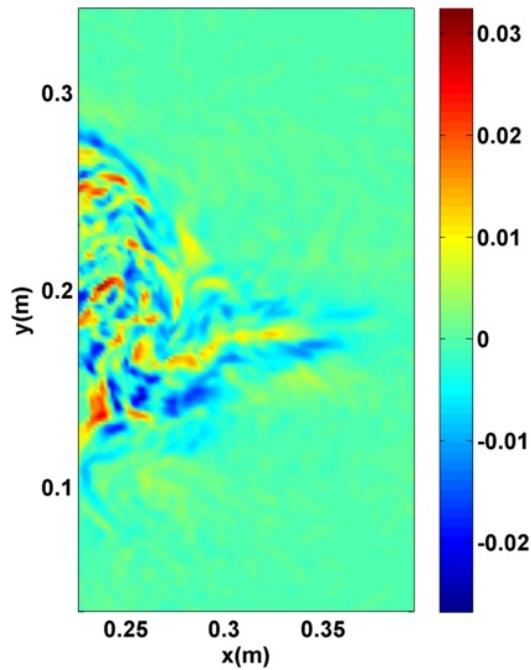
**Figura 5-18:** Función de distribución de probabilidad para el campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^+$  con  $t_0 = 112,5s$  y distintos valores de  $\tau$

En esta experiencia también se comprobó que los campos de FTLE tienden al campo de Okubo-Weiss cuando  $\tau \rightarrow 0$ . Una vez más, las regiones hiperbólicas instantáneas van perdiendo hiperbolicidad a medida que aumenta  $\tau$  y permanecen las regiones hiperbólicas coherentes. En la figura 5-19 se compara el campo de Okubo-Weiss  $Q(t = 112,5s)$  con los de  $\Lambda_{t_0, \tau}^\pm$  para  $t_0 = 112,5s$  y distintos valores de  $\tau$  comprobando la similitud en las regiones entre  $Q$  y  $\Lambda_{t_0, \tau}^\pm$  con  $\tau = 0,25s$ . En la figura 5-20 se ve que a medida que  $\tau$  decrece, la densidad de regiones hiperbólicas se aproxima hacia el valor de densidad instantáneo dado por  $Q$ .



(a)

(b)



(c)

**Figura 5-19:** Comparación del campo de Okubo-Weiss  $Q$  en  $t = 112,5s$  (a) con campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  con condiciones iniciales  $t_0 = 6,0s$  y tiempos de advección  $\tau = 0,5s$  (b) y  $\tau = 50,0s$  (c)

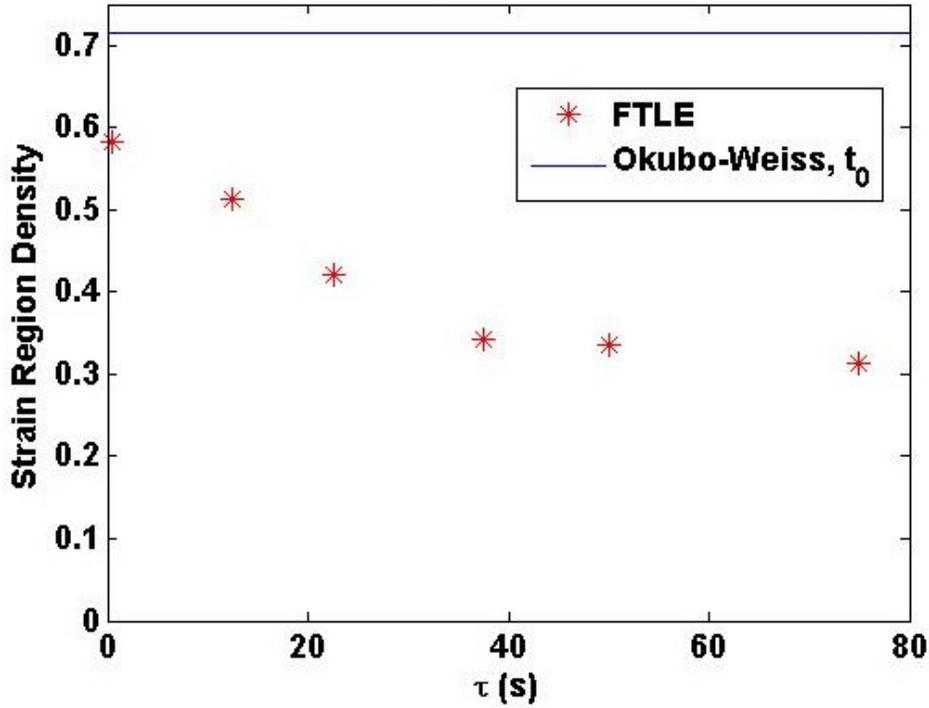
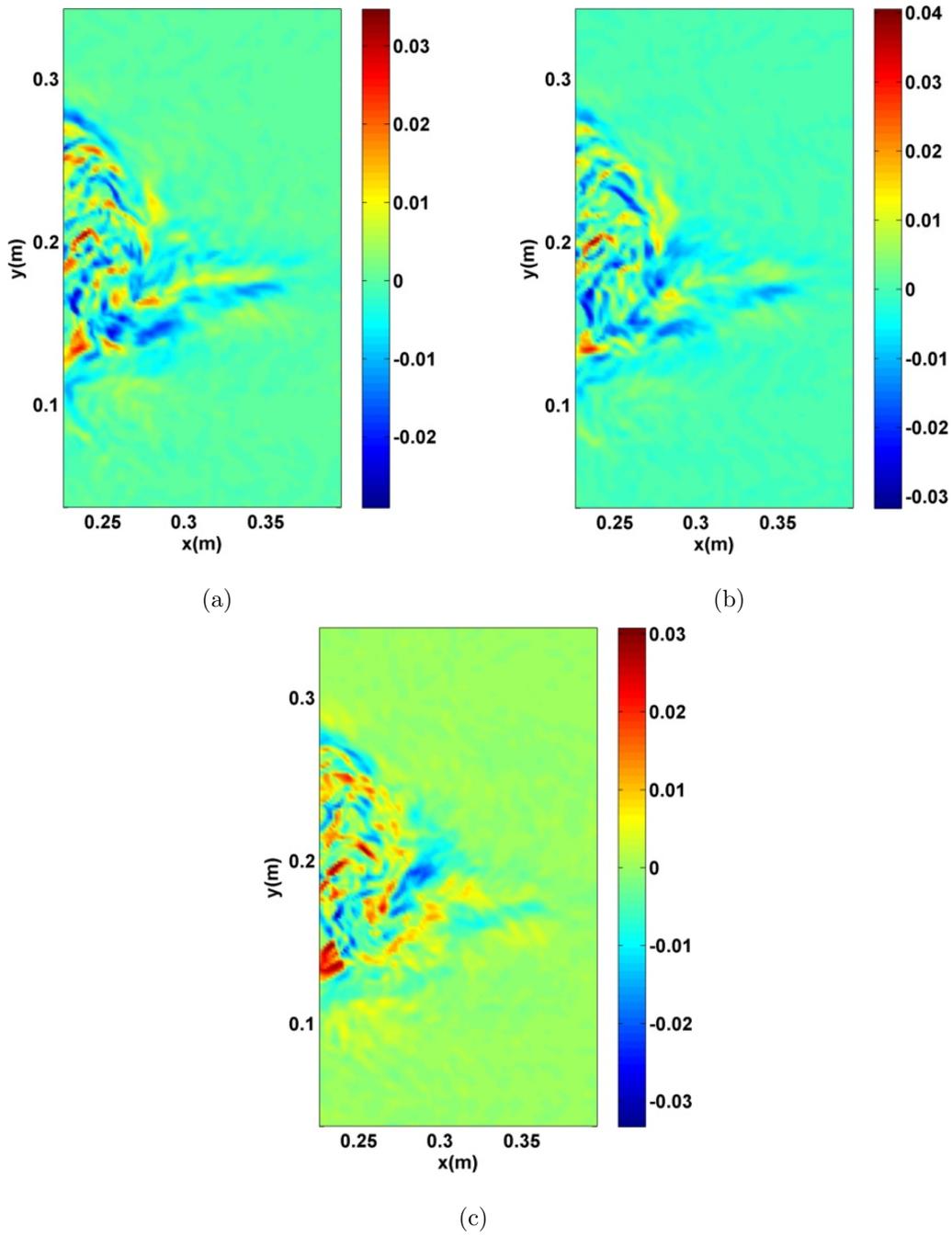


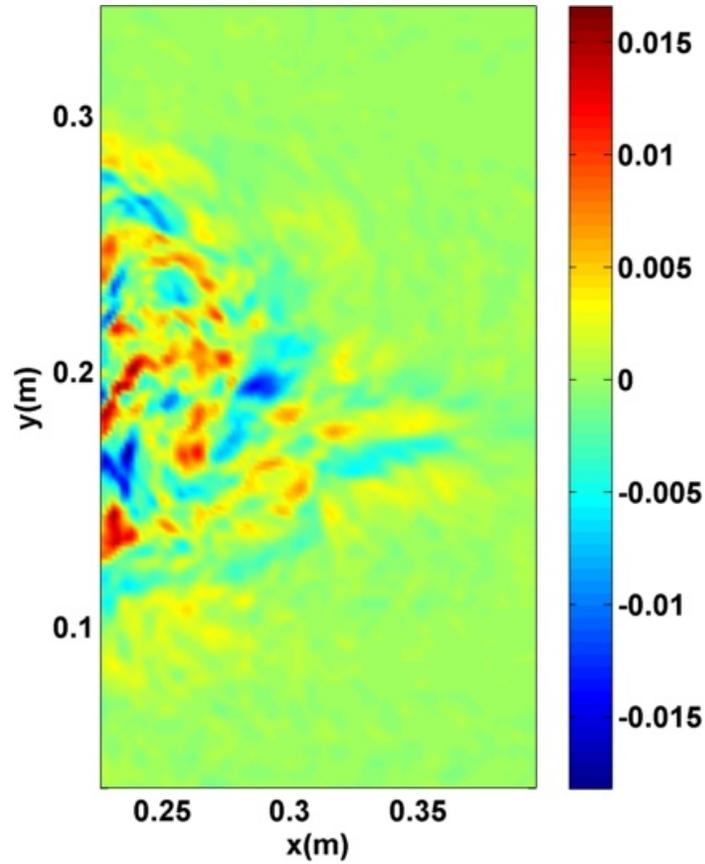
Figura 5-20: Densidad de regiones hiperbólicas del campo  $Q$  en  $t = 112,5s$ , y del campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  para distintos valores de  $\tau$ .

### 5.2.1.2. Dependencia de LCS en la condición inicial

Veamos ahora los resultados cuando  $\tau$  es fijo y  $t_0$  variable. En 5-21 se ven los campos de FTLE  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  con  $\tau =$  fijo y  $t_0 = 117,5s$  en 5-21(a),  $t_0 = 125s$  en 5-21(b) y  $t_0 = 140s$  en 5-21(c). Se puede apreciar que no cambia la amplitud del valor de FTLE ni la generación de nuevas estructuras. A diferencia de la etapa del microburst en la que aumentaba rápidamente la expansión del frente, aquí los procesos se dan más lentos y además estamos observando un intervalo de tiempo en el que la intrusión ya se formó y no hay una expansión. Eso explica que no haya generación de nuevas estructuras y esencialmente al variar  $t_0$  con un tiempo de advección  $\tau$  fijo, dará el movimiento de las estructuras. Una manera de verlo es la desviación de estos campos respecto al campo promediado en todas las condiciones iniciales  $t_0$  como se muestra en la figura 5-22.

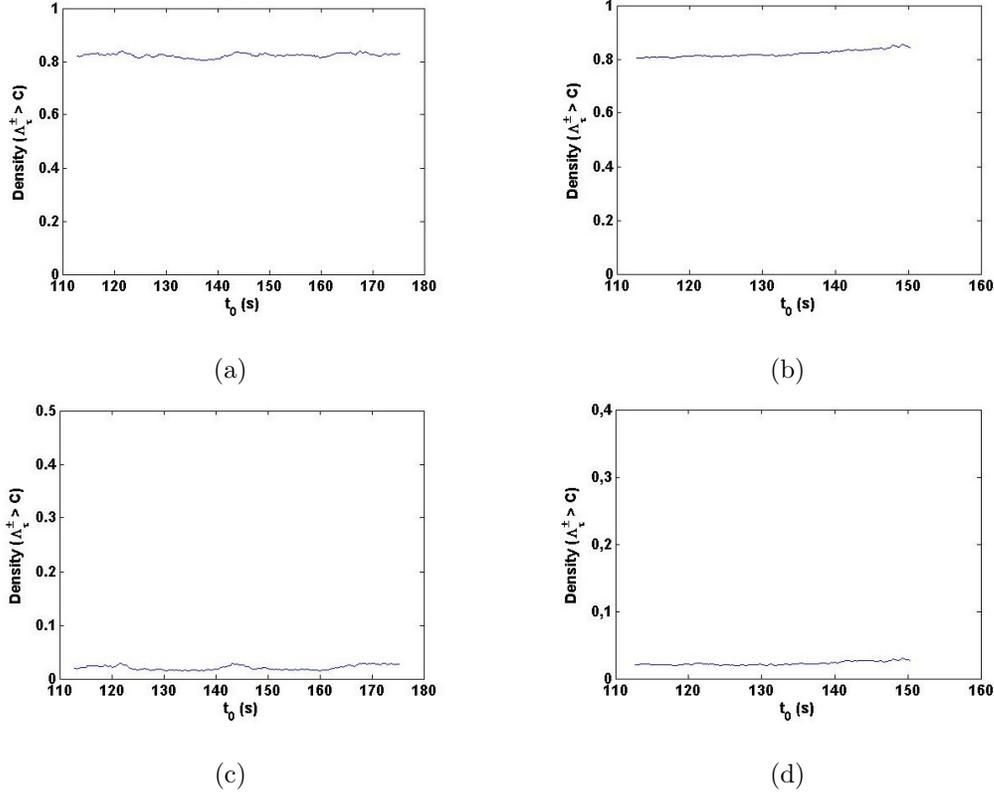


**Figura 5-21:** Campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm} = \Lambda_{t_0, \tau}^{+} - \Lambda_{t_0, \tau}^{-}$  con  $\tau = 50,0s$  en los 3 casos y  $t_0 = 117,5s$  en (a),  $t_0 = 125,0s$  en (b) y  $t_0 = 140,0s$  en (c)



**Figura 5-22:** Campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  promediado en todos los tiempos iniciales para el tiempo de advección  $\tau$ .

Una forma alternativa de analizar la conservación de las estructuras para un  $\tau$  fijo, es verificar la densidad de regiones hiperbólicas con valores de FTLE mayores a  $C = 0,01 \max |\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}|$  (en 5-23(a), 5-23(b)) y mayores a  $C = 0,6 \max |\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}|$  (en 5-23(c), 5-23(d)) para dos tiempos de advección:  $\tau = 50s$  y  $\tau = 75s$ .

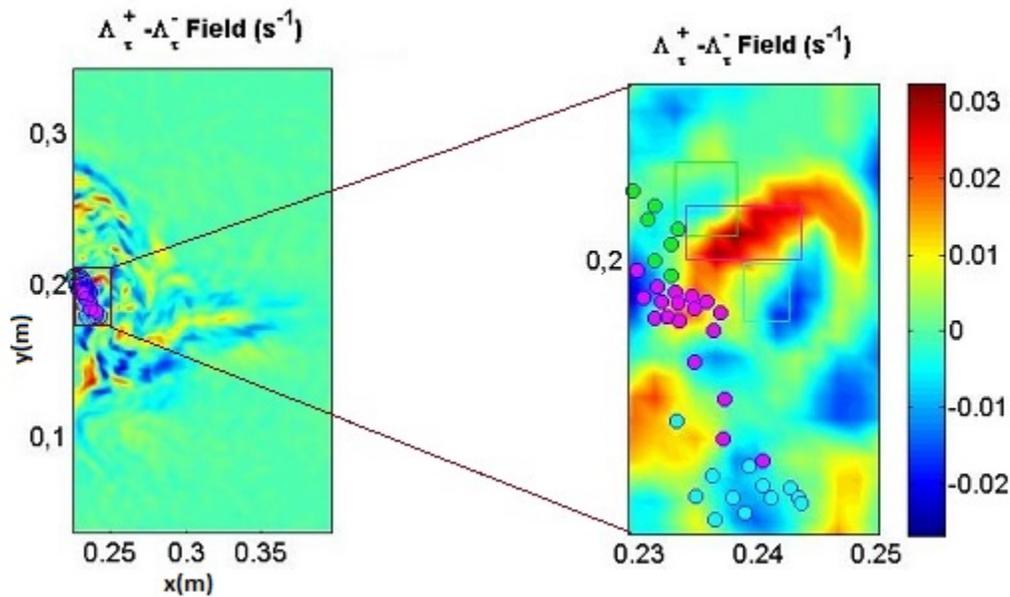


**Figura 5-23:** Densidad de regiones  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm} > C$  para distintos valores de  $C$  y  $\tau$ . En (a)  $C = 0,01 * \max(|\Lambda_{\tau}^{\pm}|) s^{-1}$  y  $\tau = 50s$ ,  $\langle D \rangle = 0.8234$  y  $\sigma_D = 0.0077$ . En (b)  $C = 0,01 * \max(|\Lambda_{\tau}^{\pm}|) s^{-1}$  y  $\tau = 75s$ ,  $\langle D \rangle = 0.8206$  y  $\sigma_D = 0.0130$ . En (c)  $C = 0,6 * \max(|\Lambda_{\tau}^{\pm}|) s^{-1}$  y  $\tau = 50s$ ,  $\langle D \rangle = 0.0206$ ,  $\sigma_D = 0.0044$  y en (d)  $C = 0,6 * \max(|\Lambda_{\tau}^{\pm}|) s^{-1}$  y  $\tau = 75s$ ,  $\langle D \rangle = 0.0226$  y  $\sigma_D = 0.0027$ .

### 5.2.2. Advección de partículas y organización del fluido

La aplicación de los FTLE a este experimento ha resultado una valiosa herramienta en la comprensión de la intrusión del fluido en la atmósfera. Esto queda claro al observar la advección de partículas de fluido desde ciertos lugares que son clave ya que, por ejemplo, en la figura 5-24 se ve el campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  para  $t_0 = 112,5s$  y  $\tau = 50s$  y las posiciones iniciales y finales en ese intervalo de tiempo para partículas en ciertas regiones. A la izquierda podemos observar el dominio completo mientras que a la derecha vemos un zoom en una de las regiones seleccionadas. Lo primero que notaremos en la figura 5-24 es la constatación de ciertas propiedades de las LCS. Los recuadros representan la posición inicial de partículas, como una grilla equiespaciada con un número de partículas en su interior. La posición final de las partículas está indicada

por círculos que representan cada partícula individualmente en el mismo color del recuadro de la posición inicial. Se prefirió no incluir las partículas individualmente en la posición inicial ni sus trayectorias para facilitar la visualización. En la figura ampliada, se ve un grupo de partículas inicialmente sobre la cresta (fucsia), y a cada lado de la misma (verde y celeste). Aquí se observa que aquellas partículas inicialmente sobre las LCS se mueven paralelo a las mismas y partículas inicialmente a cada lado de las mismas no cruzan la LCS. Esta es una característica de las LCS, tal como se remarcó en la sección 3.2. Por lo tanto se puede afirmar que, para ese intervalo de tiempo, dichas LCS actúan como una barrera material.

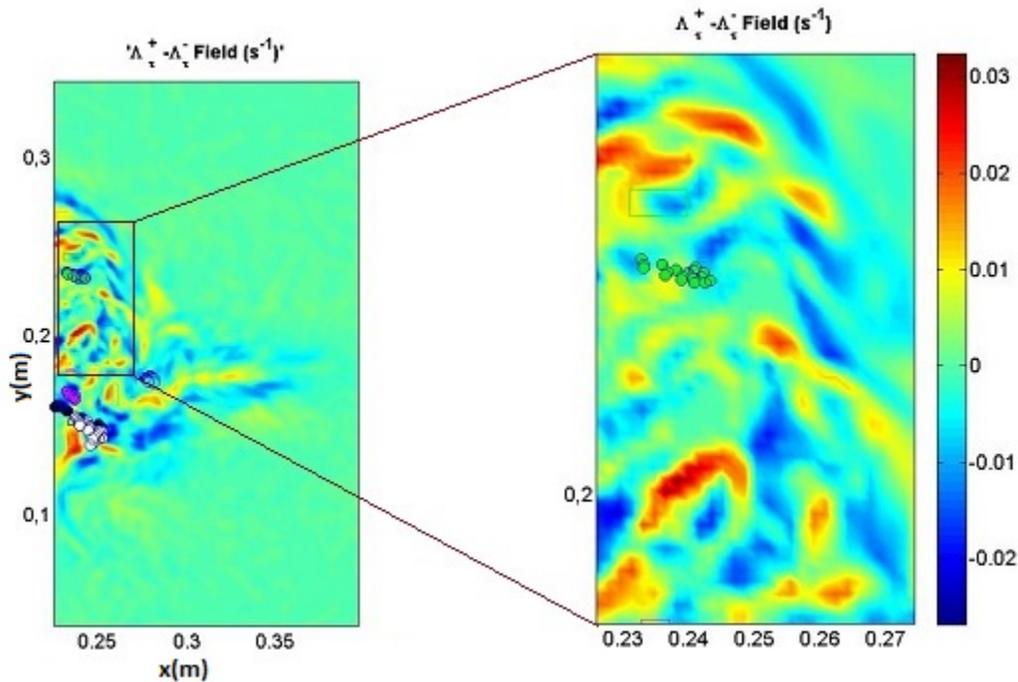


**Figura 5-24:** Advección de partículas en torno a LCS para el campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  con  $t_0 = 112,5s$  y  $\tau = 50s$

Ahora veremos algunas características del fluido en la intrusión que si bien se mostrarán para un único conjunto de valores de  $t_0$  y  $\tau$ , permanecen para todos los  $t_0$  y  $\tau$  una vez que se empezó a formar la intrusión. Se encuentran ciertas LCS que son responsables de organizar el fluido. En la figura 5-25 se observa un atractor (en azul) que se encuentra a la altura máxima que llega la fuente. El chorro ascendente, debido a su densidad se comporta como una fuente y al irse mezclando y adquiriendo mayor temperatura, encontrará una altura en la que se estabiliza y comienza a expandirse

horizontalmente. No obstante en el centro del chorro es donde tiene mayor momento lineal y por eso es en el centro donde llegará a una altura mayor que en las zonas radialmente más alejadas del mismo. En la zona de altura máxima se encuentra una LCS atractora que delimita la fuente con la atmósfera. Estos resultados son coherentes con los observados a simple vista en la experiencia ya que en esa región el fluido del chorro comienza su descenso y el fluido de la atmósfera en la zona superior desciende.

Un poco por debajo de este atractor se encuentra un repelor (en rojo) en el que las partículas que inicialmente se encuentran debajo y encima del mismo, son advectadas hacia abajo y hacia el atractor respectivamente. Estas dos estructuras aparecen independientemente de  $t_0$  y  $\tau$  y son dominantes en su región, es decir, siempre son extremos relativos.

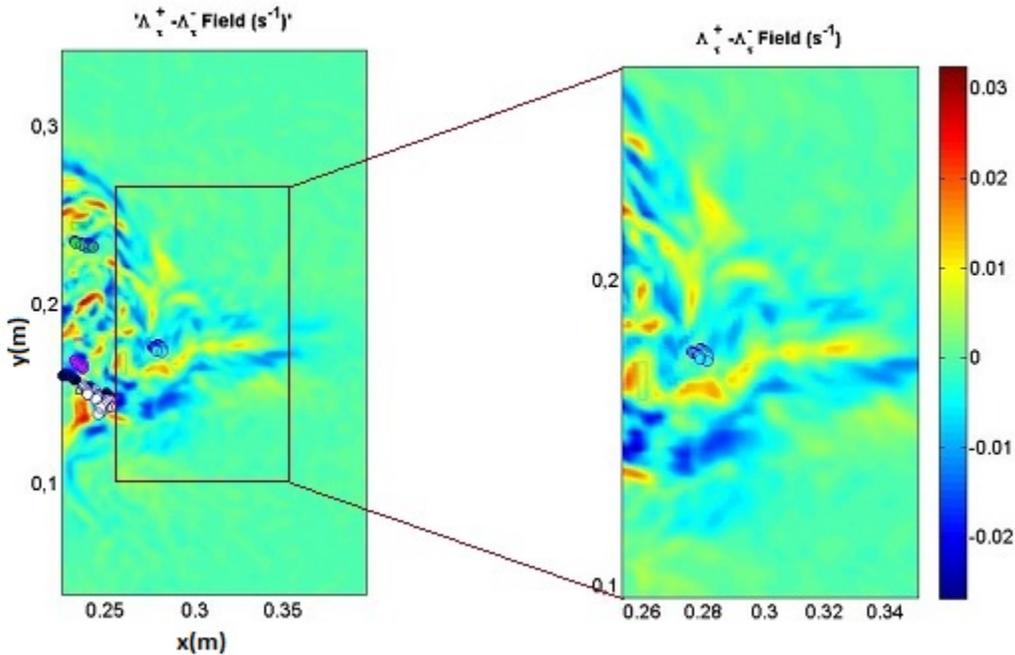


**Figura 5-25:** Advección de partículas en torno a LCS para el campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  con  $t_0 = 112,5s$  y  $\tau = 50s$

Otra región de interés es la que aparece en la figura 5-26. En verde se ve el paralelogramo que determina la posición inicial de las partículas. En la localización de  $(x, y) = (0,26, 0,16)m$  se centra un repelor desde el que las partículas son transporta-

das hacia la intrusión.

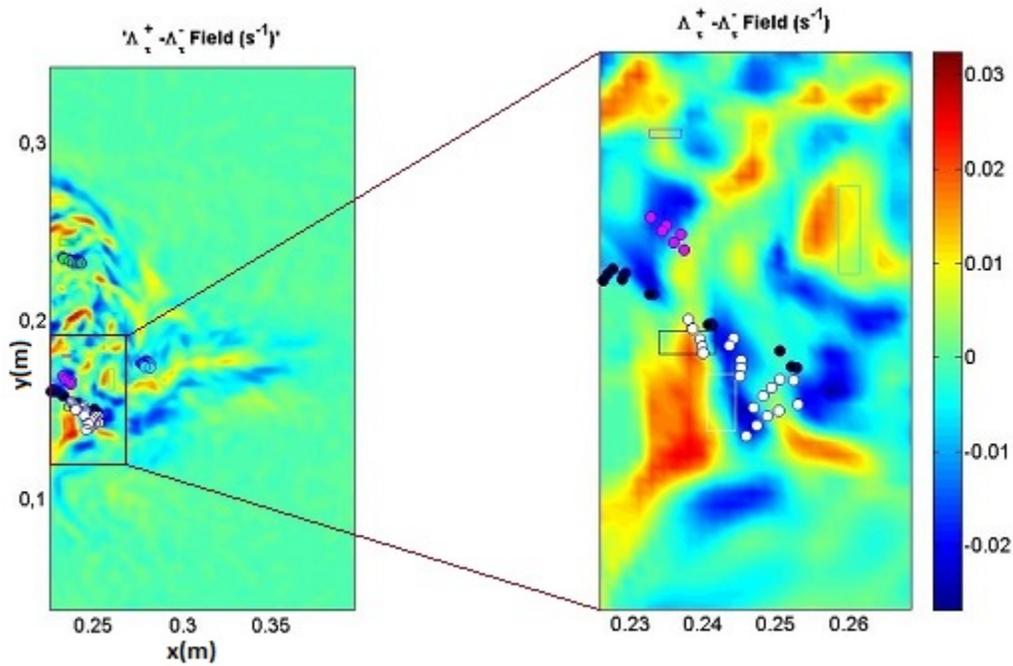
La última región que veremos es la que se muestra en la figura 5-27, sobre la figura ampliada se ven varias zonas desde donde se vio la advección. En colores blanco y negro, se ubican la localización inicial a la derecha y arriba respectivamente de un repelor. Este repelor es, independientemente de  $t_0$  y  $\tau$ , de los más intensos y se encuentra a la altura que comienza la intrusión y sobre el borde del chorro, es decir a la altura donde el fluido comienza a desplazarse horizontalmente. El comportamiento de este repelor es tal que partículas inicialmente a su derecha divergen rápidamente hacia la intrusión (blanco) y aquellas inicialmente sobre el repelor irán hacia arriba. El otro repelor que aparece en la figura se centra (para estas condiciones de  $t_0$  y  $\tau$ ) aproximadamente en  $(x, y) = (0,23, 0,19)m$  y de la misma manera que el de la figura 5-25 se encarga de repeler partículas hacia abajo.



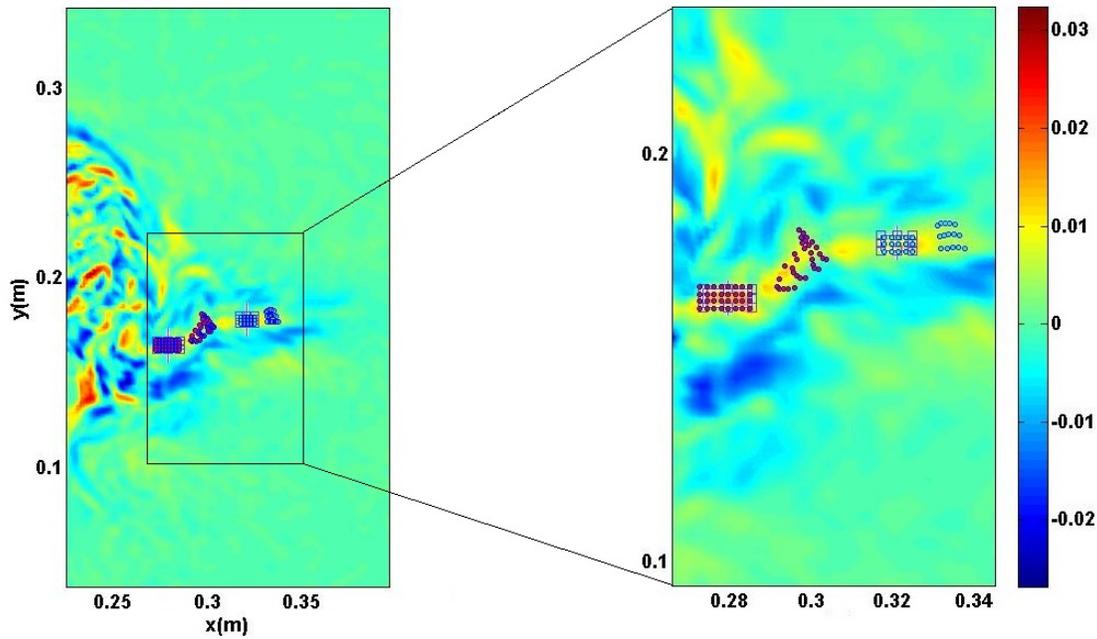
**Figura 5-26:** Advección de partículas en torno a LCS para el campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  con  $t_0 = 112,5s$  y  $\tau = 50s$

Por último, las variedades repeloras horizontales más bien estrechas y largas que aparecen en la figura 5-28 determinan la zona por donde se produce con mayor inten-

alidad la intrusión. Si vemos la advección en esta zona, observamos que corre paralelo al repelotaje lo cual tiene sentido ya que es una cresta del campo FTLE. Las variedades atractoras por encima y debajo de esta última establecen los límites en altura de la intrusión.

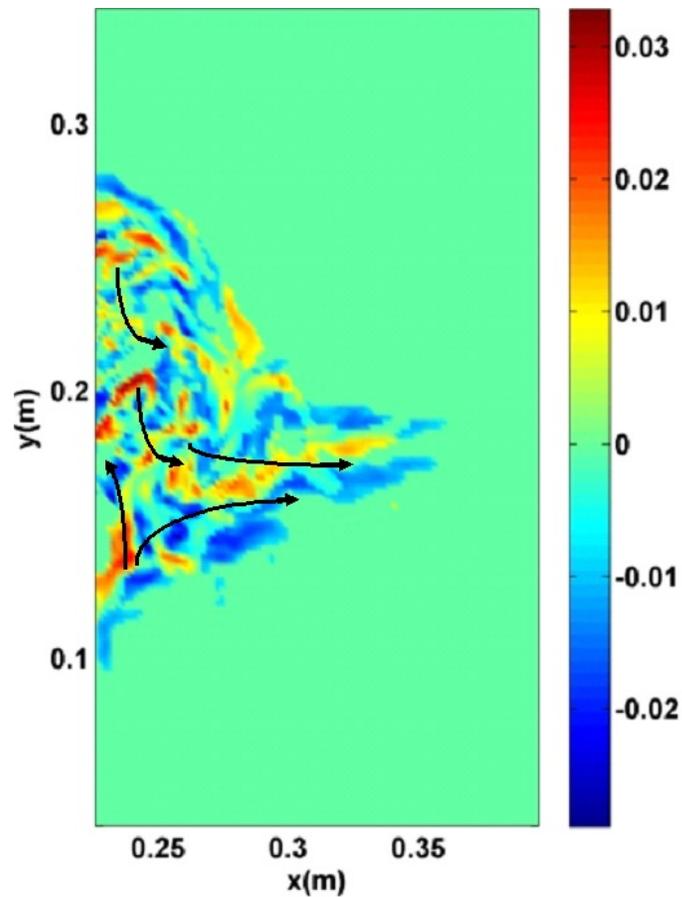


**Figura 5-27:** Advección de partículas en torno a LCS para el campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  con  $t_0 = 112,5s$  y  $\tau = 50s$



**Figura 5-28:** Advección de partículas en torno a LCS para el campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  con  $t_0 = 112,5s$  y  $\tau = 50s$

El conjunto de las variedades sobre las que nos enfocamos en las figuras anteriores, sean atractoras o repeloras, podrán moverse o cambiar su tamaño conforme se varíe  $t_0$  y  $\tau$ , no obstante siempre se encuentran presente y además son dominantes localmente, es decir son extremos locales. Este conjunto además siempre se comporta de la misma manera respecto a la advección de partículas y por eso decimos que esas estructuras se encargan de organizar el fluido. En la figura 5-29, se representa esquemáticamente la ubicación y comportamiento de estas variedades. De esta forma, los campos de FTLE son una herramienta que brindan un nuevo entendimiento sobre el proceso que conduce a la mezcla e intrusión en el experimento que modela el SIS. Estos procesos que se dan en la intrusión no son observables a partir de cantidades eulerianas como campo de velocidad (como en la figura 4-14), vorticidad, etc.



**Figura 5-29:** esquema con la organizacion del fluido

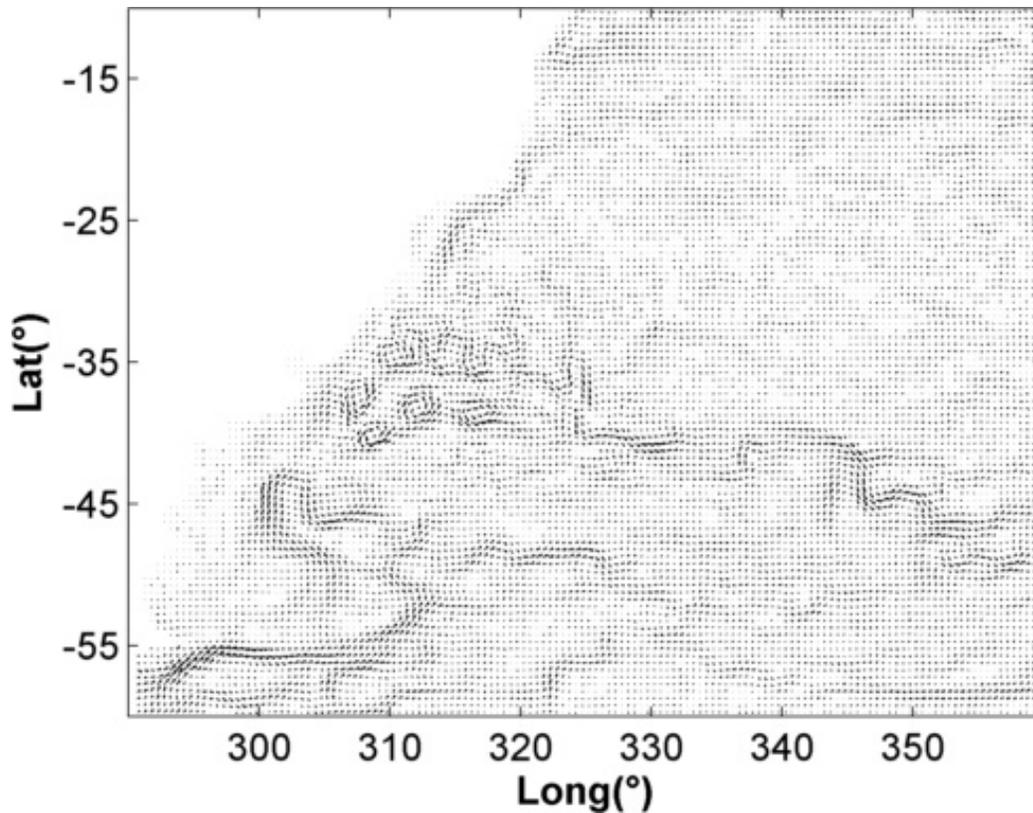
En trabajos previos, se estudiaba la fuente a partir de campos de velocidad obtenidos por DPIV [36], como también con la técnica Proper Orthogonal Decomposition (POD) [39]. Con dichas técnicas no es posible describir el fluido dentro de la intrusión. La aplicación de los FTLE sirvió para arrojar luz en este aspecto al localizar, por primera vez, las estructuras que organizan el fluido.



# Capítulo 6

## Análisis de datos oceanográficos: resultados preliminares

En este último capítulo se mostrará la aplicación de los campos de FTLE para buscar LCS en una serie de datos oceanográficos. Los datos cubren la región del océano atlántico entre los  $290.75^\circ$  y  $359.75^\circ$  de longitud este y entre  $-60.25^\circ$  y  $-10.25^\circ$  de latitud sur. La grilla espacial es de  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$  y se trabajaron con datos promediados cada un mes y durante 30 años desde 1978 a 2008. Estos datos utilizados provienen de la base de datos Simple Ocean Data Assimilation (SODA) y en el caso del campo de velocidades se tienen datos para 40 niveles de profundidad, en los resultados aquí mostrados se utiliza solo los datos de la capa superficial.



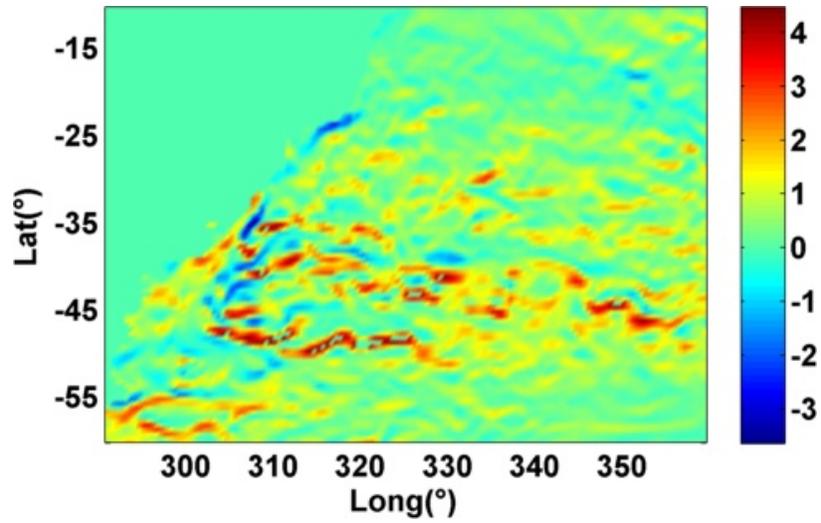
**Figura 6-1:** Campo de velocidades correspondiente al mes de junio de 1993. En blanco se aprecia el continente y la región de las Islas Malvinas. Los datos originales poseen 40 capas correspondientes a los niveles de profundidad, en este y en todos los casos tomados se utilizó solamente la capa superficial

En la figura 6-1 se muestra el campo de velocidades para el mes de Junio de 1993. A partir de estos campos de velocidad, se calcularon las trayectorias de las partículas integrando los datos mediante un esquema Runge-Kutta de cuarto orden e interpolación cúbica en el espacio. La región que abarca estos datos incluye la zona de confluencia Brasil-Malvinas que adquiere su nombre debido a la convergencia entre las corrientes de Brasil, que es una corriente cálida cercana a la costa del continente, y la corriente de Malvinas, la cual es una corriente fría ya que se identifica como una rama de la corriente circumpolar antártica. La corriente de Brasil tiene en promedio  $22^{\circ}C$  mientras que la corriente de Malvinas posee una temperatura promedio en el entorno de  $6^{\circ}C$ . Las diferencias de temperatura hacen que en la zona de confluencia, que abarca la zona frente a los territorios de Uruguay y Argentina, se produzcan intensos gradientes de temperatura y por lo tanto de densidad. En esta región se en-

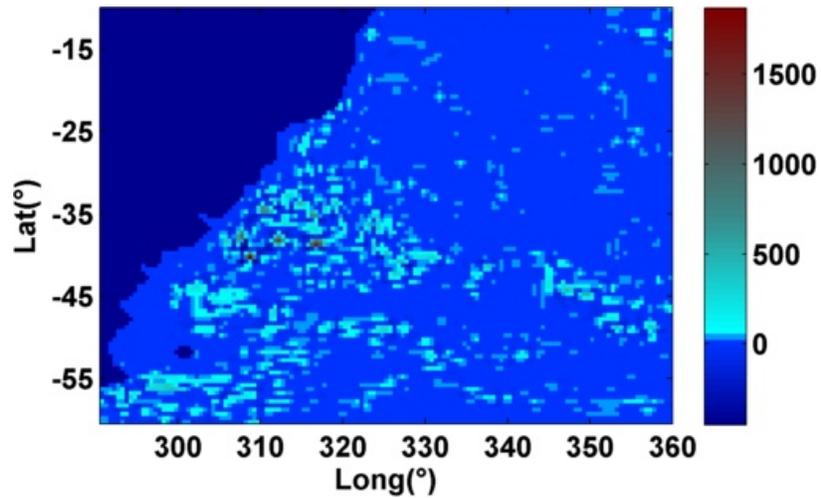
cuentran gran cantidad de torbellinos y vórtices de alta energía los cuales favoreceran la mezcla.

Con el objetivo de encontrar las regiones hiperbólicas del flujo, veremos el tensor de Okubo-Weiss para ver strain instantáneo y los campos de FTLE para obtener posibles LCS. Estas serán comparadas con el frente que se obtiene del gradiente de temperatura.

En la figura 6-2(a) se observa el gradiente de temperaturas en  $^{\circ}C/\text{grados}$ , en la dirección de la longitud para el mes de Junio de 1993. En la figura 6-2(b) se muestra el tensor de Okubo-Weiss para el mes de Junio de 1993 en  $\text{meses}^{-1}$ . Se puede ver que las regiones de alto strain presentan una buena coincidencia con las zonas donde son extremos los cambios de temperatura. De esta forma podemos decir que en esas regiones donde son altos los cambios de temperatura, domina el strain (aunque existan grandes valores de vorticidad) y por ende la deformación de las parcelas de fluido lo cual favorece a la mezcla.



(a)

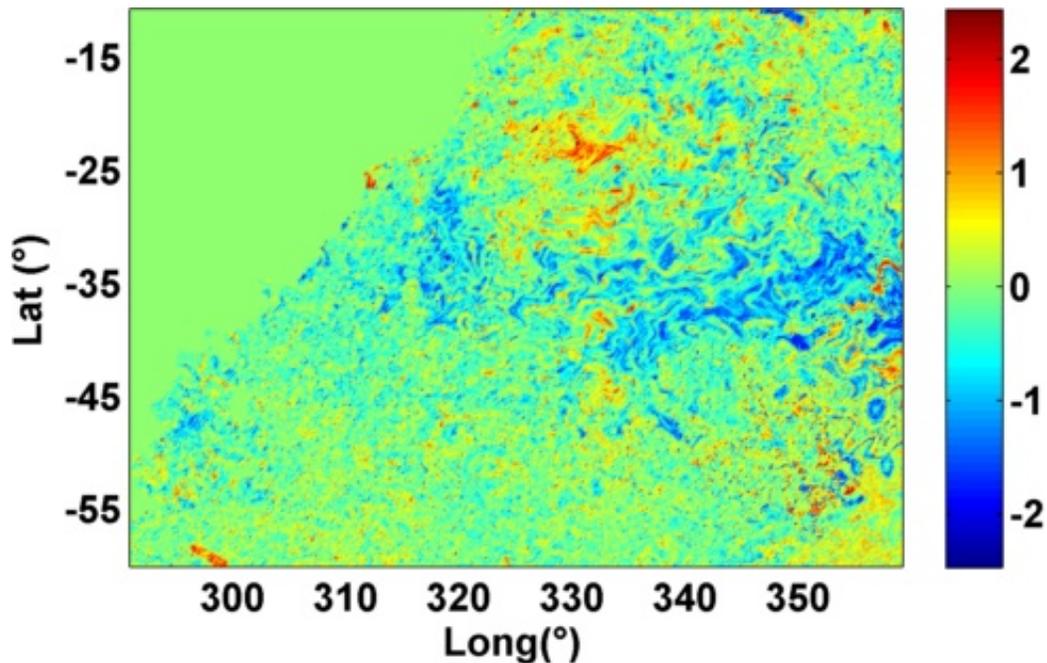


(b)

**Figura 6-2:** Mapa de colores que representa la dirección paralela a la longitud del gradiente de temperaturas para el mes de Junio de 1993 en  $^{\circ}C/\text{grados}$  en (a). Campo de Okubo-Weiss en  $\text{meses}^{-1}$ , para el mes 186 en (b).

Con el objetivo de identificar dichos frentes con los campos de FTLE, se calcularon campos de FTLE para distintos valores de  $t_0$  y  $\tau$ . En la figura 6-3 se muestra el campo de FTLE  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  para  $t_0 = 31$  meses, correspondiente al mes de Julio de 1980 y  $\tau = 7$  meses. Se calcularon los campos para distintas condiciones de  $t_0$  y  $\tau$ , obteniéndose resultados muy similares en un amplio espectro de valores para  $t_0$  y  $\tau$ . Lo que se puede ver para estos valores de  $t_0$  y  $\tau$ , representados en la figura 6-3, es que la zona

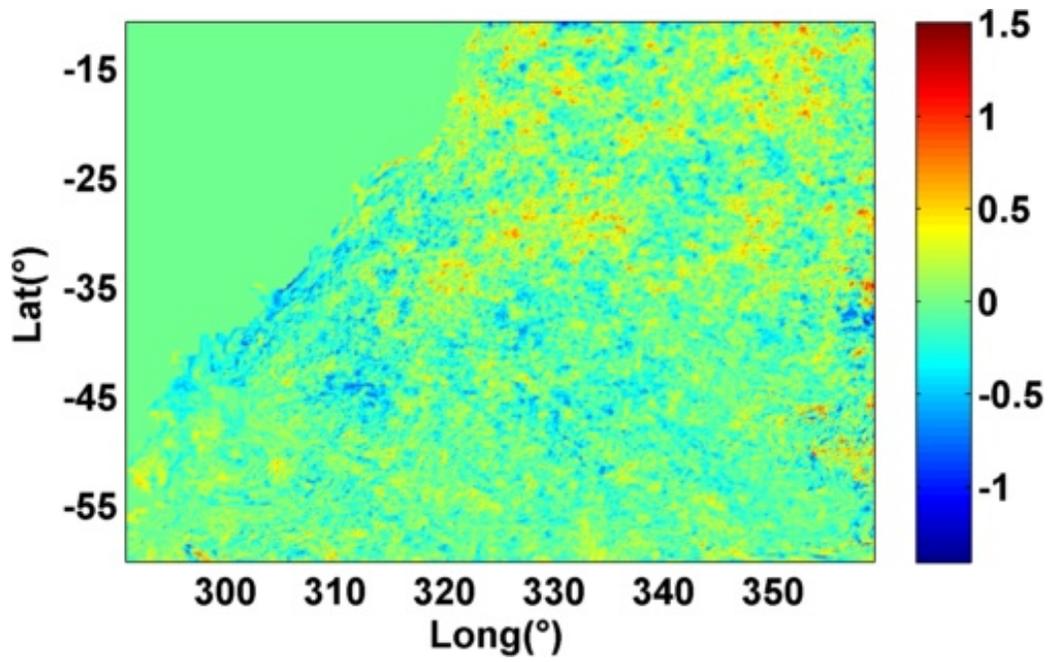
de confluencia presenta valores de FTLE más bien uniformes y cercanos a cero. En una región donde domina el strain instantáneo para todo tiempo, debe existir un valor mínimo de  $\tau$  en el que la hiperbolicidad permanezca en ese intervalo  $\tau$ . Se probaron para distintos tiempos iniciales  $t_0$  y tiempos de advección  $\tau$ , también se probó en aumentar la resolución de trazadores por unidad de grilla, sin embargo los campos de  $\Lambda_{t_0,\tau}^{\pm}$  no difieren demasiado del que se muestra en la figura 6-3 y no fue posible localizar la región del frente.



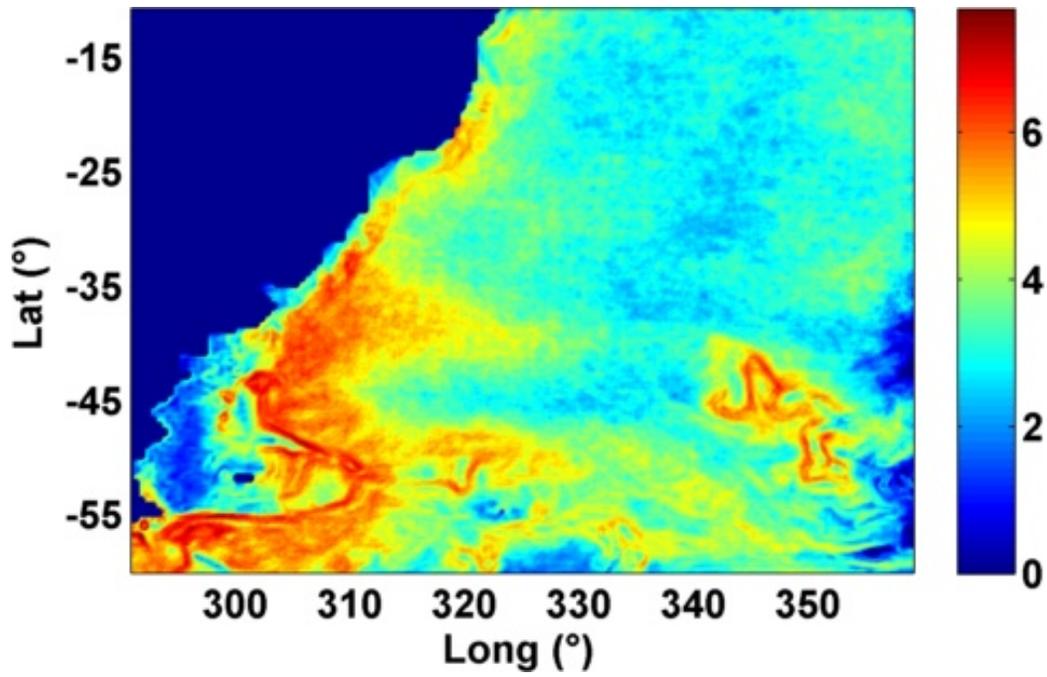
**Figura 6-3:** Campo  $\Lambda_{t_0,\tau}^{\pm}$  en  $\text{meses}^{-1}$  con  $t_0=31$  meses y  $\tau=7$  meses.

Para evitar posibles anomalías al tomar un mes y tiempo de advección aleatorio, se estudiaron los datos promediando cada uno de los meses en todos los años. Así se tienen el promedio de todos los meses de enero, febrero, etc. En la figura 6-4 se muestra el campo  $\Lambda_{t_0,\tau}^{\pm}$  para el mes promediado de julio, ya que tanto enero como julio son los meses que se presenta mayor actividad y  $\tau=2$  meses. En este caso, dicho campo tampoco mostró las regiones de la confluencia. Si en cambio se muestran los campos forward,  $\Lambda_{t_0,\tau}^+$  y backward,  $\Lambda_{t_0,\tau}^-$  por separado como en la figura 6-5 se pueden apreciar estructuras que sobresalen en la región de la confluencia Brasil-Malvinas. Claramente estos campos por separado presentan LCS en la zona de interés, principalmente frente

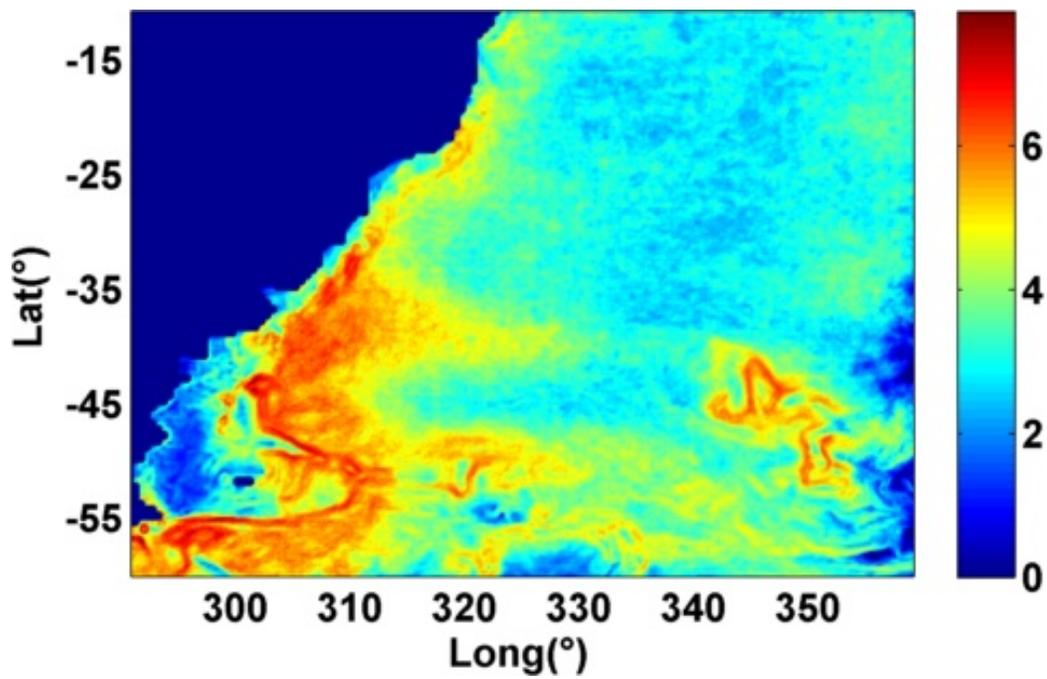
a las costas del continente entre Brasil y Argentina y al este de las islas Malvinas. El inconveniente surge en que la localización y valores de FTLE de las variedades estables (dadas por  $\Lambda_{t_0, \tau}^-$ ) e inestables dadas por ( $\Lambda_{t_0, \tau}^+$ ) son prácticamente idénticos y al calcular el campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^\pm = \Lambda_{t_0, \tau}^+ - \Lambda_{t_0, \tau}^-$  los valores de FTLE se anulan y desaparecen las estructuras. No tiene sentido que las variedades estables e inestables coincidan, de todos modos se propondrá por qué sucede en los campos hallados. Como fue visto al comienzo de este capítulo, el problema no radica en la resolución de partículas por grilla ni las condiciones  $t_0$  y  $\tau$ . A medida que se aumenta  $\tau$  las partículas son advectadas por distancias comparables al tamaño de la región o incluso escapaban del dominio. Con valores de  $\tau$  mayores o iguales a los 10 meses ya se puede observar este comportamiento, en tal caso las estructuras del campo FTLE son cada vez más difusas y toda la región tiende a volverse uniforme. En el caso límite en que  $\tau = 1$  mes, el valor más pequeño permitido por nuestros datos, se tienen campos como los de 6-4 y 6-5. Para este valor de  $\tau$  podemos sugerir que se está por encima del límite en el que se mantiene la coherencia de las zonas hiperbólicas. Para ser más específicos, sigue habiendo hiperbolicidad (queda claro en la figura 6-5), pero es tal que no se diferencian las variedades estables de las inestables y una misma región actúa como repelora y como atractor. Lo que hace falta entonces, es observar los procesos en intervalos más pequeños de tiempo, en el cual posiblemente se diferencien las cualidades atractoras y repeloras de una misma región con valores distintos de FTLE.



**Figura 6-4:** Campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^{\pm}$  en  $\text{meses}^{-1}$ . En este caso la condición inicial,  $t_0$ , es el campo promediado de todos los meses de julio y  $\tau = 2$  meses.



(a)



(b)

**Figura 6-5:** (a) Campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^+$  y (b) campo  $\Lambda_{t_0, \tau}^-$ . En ambos casos, en  $\text{meses}^{-1}$  y la condición inicial,  $t_0$ , es el campo promediado de todos los meses de julio y  $\tau = 2$  meses.

# Capítulo 7

## Conclusiones y perspectivas

En esta tesis se han mostrado los resultados al aplicar la técnica de exponentes de Lyapunov a tiempos finitos (FTLE) en diversos flujos no estacionarios. Se desarrollaron los algoritmos para calcular los campos de FTLE y al aplicarlos a los flujos tratados, revelaron las estructuras responsables de organizar el fluido. A estas estructuras las denominamos Estructuras lagrangianas coherentes (LCS).

La visualización de los campos de FTLE permitió obtener fácilmente una vasta información de los flujos aquí tratados. Por ejemplo, se pudo delimitar regiones entre las que no se produce mezcla, es decir, encontrar barreras materiales y permitió localizar zonas de convergencia o divergencia entre partículas de fluido. Esta información es de suma importancia para la comprensión de flujos no estacionarios y cabe destacar que no es posible obtenerla directamente con la visualización de campos de velocidad o trayectorias de partículas.

Se comprobaron propiedades de los FTLE y las LCS. Por ejemplo, se comprobó que los valores de FTLE se hacen constantes para  $\tau \rightarrow \infty$  y el valor de FTLE en este límite es el exponente de Lyapunov tradicional. También se verificó el comportamiento del flujo en torno a las LCS. Estas se identificaron como separatrices del fluido al no verse un flujo neto que las atravesase. Mientras tanto en la dirección transversal a las LCS, las partículas divergen (si son variedades repeloras) o convergen (si son variedades atractoras) y aquellas que inicialmente se encuentran sobre la LCS se moverán paralelas a la misma. Esto determina la deformación de las parcelas de fluido, por

lo tanto concluimos que las LCS revelan la estructura geométrica que domina dichos procesos que además, son la base de la advección caótica y mezcla.

También se observó en todas las fuentes de datos utilizadas que a medida que,  $\tau \rightarrow 0$ , las regiones hiperbólicas obtenidas de los campos de FTLE tienden a las regiones donde domina el strain instantáneo según el criterio de Okubo-Weiss. Las regiones donde domina el strain instantáneo, son hiperbólicas y se comprobó que la coherencia de la hiperbolicidad dada por los campos de FTLE a medida que aumenta  $\tau$  permanece en las regiones que instantáneamente eran hiperbólicas. De esta manera se puede concluir que la pérdida gradual de hiperbolicidad en todo el dominio, permite la visualización de las LCS, localizadas donde subsiste la hiperbolicidad.

Por otro lado, si se varía el tiempo inicial  $t_0$  en una fase en la que el flujo ya se encuentra completamente desarrollado, se puede observar la advección de las LCS y que no se generan nuevas estructuras. Esto nos permite decir la proporción de regiones hiperbólicas dominantes localmente y por ende de LCS para flujos que ya se desarrollaron depende del parámetro  $\tau$ .

En particular para el microburst, la aplicación de los métodos aquí desarrollados permitieron localizar el frente del mismo. De esta forma, los campos de FTLE complementan la información obtenida de los campos de velocidad y vorticidad. Por ejemplo, en los trabajos previos a esta tesis, los campos de velocidad y vorticidad permiten seguir la evolución del vórtice pero no del frente.

El seguimiento del mismo se llevó a cabo al variar el tiempo inicial  $t_0$  y manteniendo un  $\tau$  pequeño, por ejemplo  $\tau = 0,8s$ . De esta forma nos aseguramos un intervalo de tiempo entre  $t_0$  y  $t_0 + \tau$  en el cual sobresale la variedad repelora que caracteriza el frente del microburst. Además, la localización del frente delimita la zona del resalto hidráulico, lo cual separa la región donde ocurre la mezcla (el resalto) de la región donde no hay mezcla.

También permitió estudiar la evolución del microburst en las etapas de múltiples vórtices, localizando el frente y delimitando la frontera entre cada vórtice como una variedad repelora.

Para la fuente en un medio estratificado, los campos de FTLE muestran un conjunto de LCS que se encargan de organizar el flujo. Dichas estructuras son responsables de delimitar la intrusión (representado por variedades estables) y de especificar la zona donde la velocidad de las partículas es mayor (representado por variedades inestables).

Estas estructuras pueden variar en extensión e intensidad según los parámetros  $t_0$  y  $\tau$ . No obstante, se ubican aproximadamente en la misma zona, independientemente de  $t_0$  y  $\tau$ , y son siempre estructuras localmente dominantes del campo de FTLE. Además, por ser LCS, tienen bien definida la dirección y sentido en que se advectan las partículas inicialmente próximas. Es por eso que resulta sencillo predecir el movimiento del fluido en torno a dichas LCS y por lo tanto estas estructuras organizan el flujo.

Se destaca el hecho que es la primera vez que se logra observar las estructuras que organizan el flujo. Esto se debe a que las técnicas con las que se había estudiado previamente, no permiten obtener este tipo de información.

Para los datos oceanográficos, los campos  $\Lambda_{t_0,\tau}^+$  y  $\Lambda_{t_0,\tau}^-$  por separado representaron de buena manera las estructuras buscadas que se corresponden con los frentes del gradiente de temperatura en la zona de confluencia Brasil-Malvinas. La mezcla en esta región resulta de particular interés y lo que también se observó es que el campo de Okubo-Weiss ubica las zonas de mayor strain en donde se encuentran los frentes. No obstante, debido a que los campos  $\Lambda_{t_0,\tau}^+$  y  $\Lambda_{t_0,\tau}^-$  dieron muy similares, el campo  $\Lambda_{t_0,\tau}^\pm$  no permitió localizar los frentes satisfactoriamente. En la discusión se propuso como posible explicación que los procesos en el que se revelan variedades atractoras y repeloras de intensidad y localización distinta, si es que ocurren, lo hagan en tiempos de advección menores al intervalo de tiempo más pequeño con el que contamos, el cual es de 1 mes.

Los resultados de esta tesis implican el haber creado los algoritmos para calcular FTLE y haber obtenido nuevos aportes en la comprensión de los experimentos realizados. Estos algoritmos son de suma importancia ya que se vuelven una valiosa herramienta para el estudio de flujos no estacionarios con un gran potencial de apli-

cación en problemas de las más diversas áreas.

## **Perspectivas**

El estudio de flujos no estacionarios también se puede complementar con otras herramientas del tipo de los FTLE. Por ejemplo, Exponentes de Lyapunov a tamaños finitos (FSLE) que también permiten localizar barreras materiales. Otra herramienta de este tipo son los Mapas lagrangianos sinópticos (LSM) que muestra el tiempo de permanencia del fluido en una región delimitada y las fronteras por las que ingresa o sale de dicha región. Para las LSM ya se cuenta con el algoritmo desarrollado y se espera aplicarlo en conjunto con los FTLE en una serie de datos.

Dada la importancia del frente que se presenta en la zona de la confluencia de las corrientes de Brasil y Malvinas, se espera poder contar con datos cuya resolución temporal sea menor a un mes para profundizar el estudio de las estructuras que se generan en dicha zona. Por último, las técnicas desarrolladas en esta tesis abren un vasto campo de aplicaciones fuera del ámbito académico. Por ejemplo pueden aplicarse al estudio de propagación de contaminantes en cauces de agua y procesos de mezcla de agua dulce con agua salada en la desembocadura de los ríos en el mar.

# Bibliografía

- [1] H. Aref. Stirring by chaotic advection. *Journal of fluid mechanics*, 143:1–21, 1984.
- [2] G.K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1973.
- [3] P.K. Kundu and I.M. Cohen. *Fluid Mechanics*. Academic Press, second edition, 2002.
- [4] R.M. Samelson and S. Wiggins. *Lagrangian transport in geophysical jets and waves*. Springer, 2006.
- [5] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Statistical Physics*. Butterworth-Heinemann, 1975.
- [6] O.G. Bakunin. *Chaotic Flows: correlation effects, transport, and structures*. Springer, 2011.
- [7] J.M. Ottino. Mixing, chaotic advection and turbulence. *Annual Review Fluid Mechanics*, 22:207–53, 1990.
- [8] E. Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, 1993.
- [9] H. Aref. The development of chaotic advection. *Physics of fluids*, 14:1315–1325, 2002.
- [10] J.H.E. Cartwright, M. Feingold, and O. Piro. *Mixing: Chaos and Turbulence*, chapter An introduction to Chaotic advection. Kluwer, 1999.
- [11] N.T. Ouellette and J.P. Gollub. Detecting topological features of chaotic fluid flow. *AIP Chaos*, 18, 2008.
- [12] O. Gil. *Curso Introductorio a las ecuaciones diferenciales*.
- [13] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering*. Westview Press, 2001.
- [14] G. Haller and A.C. Poje. Finite time transport in aperiodic flows. *Physica D*, 119:352–380, 1998.

- [15] G. Haller and G. Yuan. Lagrangian coherent structures and mixing in two-dimensional turbulence. *Physica D*, 147:352–370, 2000.
- [16] G. Haller. Finding finite-time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields. *Chaos*, 10:1–10, 2000.
- [17] G. Haller. Lagrangian coherent structures from approximate velocity data. *Physics of fluids*, 14:1851–1861, 2002.
- [18] J. Lipinski. *Efficient ridge tracking algorithms for computing Lagrangian coherent structures in fluid dynamics applications*. PhD thesis, University of Wisconsin, 2007.
- [19] F. Okushima. New method for computing finite time lyapunov exponents. *Physical Review Letters*, 91:1–4, 2003.
- [20] S.C. Shadden. *A dynamical systems approach to unsteady systems*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2006.
- [21] J. Kansten, I. Hotz, and H.C. Hege. *Topological methods in data analysis and visualization II*, chapter 4: On the elusive concept of Lagrangian Coherent Structures, pages 207–221. Springer, 2012. On the elusive concepts of Lagrangian Coherent Structures.
- [22] S.C. Shadden, J.O. Dabiri, and J.E. Marsden. Lagrangian analysis of fluid transport in empirical vortex ring flows. *Physics of fluids*, 2006.
- [23] S.C. Shadden, F. Leiken, and J.E. Marsden. Definition and properties of lagrangian coherent structures from finite-time lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows. *Physica D*, 212:271–304, 2005.
- [24] M. Raffel, C. Willert, S. Wereley, and J. Kompenhans. *Particle image velocimetry, a practical guide*. Springer, 2 edition, 2007.
- [25] J. Westerweel. Fundamentals of digital particle velocimetry. *Measurement science and technology*, 8:1379–1392, 1997.
- [26] P. Rowinski. *Experimental methods in hydraulic research*. Springer, 2011.
- [27] T. Fujita. The downburst, microburst and macroburst, satellite and mesometereology research (smrp). *Department of geophysical science*, (36):75–86, 1985.
- [28] F.H Proctor. Numerical simulation of an isolated microburst part i:dynamics and structure. *Journal of Atmospheric Sciences*, 45:3137–3160, 1988.
- [29] F.H Proctor. Numerical simulation of an isolated microburst part ii:sensitivity experiments. *Journal of Atmospheric Sciences*, 46:2143–2165, 1989.
- [30] T. Fujita. Downbursts: metereological features and wind field characteristics. *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics*, 1990.

- [31] J. Holmes and S. Oliver. An empirical model of a downburst. *Engineering structures*, (22):1167–1172, 2000.
- [32] T. Lundgren, J. Yao, and N. Mansour. Microburst modelling and scalling. *Journal of Fluid Mechanics*, (239):461–488, 2007.
- [33] G. Demarco, N. Barrere, G. Sarasúa, A.C. Martí, O.C. Acevedo, E. Nascimento, and C. Cabeza. Combined effect of jet impingement and density perturbation forcing on the evolution of laboratory-simulated microbursts. *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics*, (123):69–76, 2013.
- [34] B. Morton, G. Taylor, and J. Turner. Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 234:1–23, 1956.
- [35] D. Freire. Dinámica de fuentes turbulentas en medios estratificados. Master’s thesis, Facultad de Ciencias, Universidad de la República, 2011.
- [36] D. Freire, C. Cabeza, S. Pauletti, G. Sarasúa, I. Bove, G. Usera, and A.C. Martí. Effect of turbulent fluctuations on the behaviour of fountains in stratified media. *Journal of physics: Conference series*, 246:1–10, 2010.
- [37] G. Lapeyre. Characterization of finite-time lyapunov exponents and vectors in two-dimendional turbulence. *Chaos*, 12:688–698, 2002.
- [38] F. Huhn, A. Von Kameke, S. Allen-Perkins, P. Montero, A. Venancio, and V.Pérez-Muñuzuri. Horizontal lagrangian transport in a tidal-driven estuary-transport barriers attached to prominent coastal boundaries. *Continental Shelf Research*, 39-40:1–13, 2012.
- [39] D. Freire, S. Kahan, C. Cabeza, G. Sarasúa, and A.C. Martí. The formation of coherent structures within turbulent fountains in stratified media. *European Journal of Mechanics -B/ Fluids*, 50:89–97, 2015.
- [40] F. Sadlo and R. Peikert. *Visualizing Lagrangian Coherent Structures and comparison to vector field topology*, chapter 2, pages 15–30. Springer-Verlag, 2009.
- [41] F. Sadlo and R. Peikert. Efficient visualization of lagrangian coherent structures by filtered amr ridge extraction. *IEEE Transactions on visualization and computer graphics*, 13:1456–1463, 2006.



# Apéndice A

## Algoritmos para el cálculo de los exponentes de Lyapunov a tiempos finitos

En el presente apéndice se describen los pasos fundamentales en el algoritmo para calcular los campos de FTLE a partir de los datos de campos de velocidad obtenidos con DPIV.

### 1. Trayectorias de las partículas

Los datos de DPIV arrojan campos de velocidad como los que se muestran en las figuras 4-7, 4-14 o 6-1. En dichos campos, se representa la velocidad en puntos de una grilla espacial que no varía con el tiempo. Para obtener la trayectoria de las partículas se parte de una grilla regular de puntos que representa la posición inicial de las mismas, denominada por  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  donde  $t_0$  especifica el instante inicial. En todos los casos usados en este trabajo, la densidad de partículas fue mayor que la densidad de puntos en la grilla de campos de velocidad. Para obtener la posición de las partículas en un tiempo posterior  $t$ , se integró la ecuación

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

siguiendo un esquema Runge-Kutta de cuarto orden con interpolación cúbica en el espacio y el tiempo. De esta manera se obtienen las posiciones iniciales de las partículas,  $\mathbf{x}_0$ , y las posiciones finales de las mismas,  $\mathbf{x}(t_0 + \tau)$ , necesarias para el cálculo de los FTLE.

## 2. Cálculo de FTLE

El cálculo numérico de los exponentes de Lyapunov a tiempos finitos requiere del tensor de deformación:

$$C = \frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+\tau}(\mathbf{x}(t_0))}{d\mathbf{x}} \frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+\tau}(\mathbf{x}(t_0))}{d\mathbf{x}} \quad (\text{A.2})$$

Dicho tensor, definido en el capítulo 3, se obtiene a partir de las matrices  $\mathbf{x}(t_0 + \tau)$  y  $\mathbf{x}_0$ . Si nombramos con  $i, j$  a cada partícula y designamos sus posiciones iniciales y finales como  $\mathbf{x}_0 = (x_0(i, j), y_0(i, j))$  y  $\mathbf{x}(t_0 + \tau) = (x(i, j), y(i, j))$  respectivamente, es posible escribir la el tensor de deformación a partir de

$$\frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+\tau}(\mathbf{x}(t_0))}{d\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{x(i+1,j)-x(i-1,j)}{x_0(i+1,j)-x_0(i-1,j)} & \frac{x(i,j+1)-x(i,j-1)}{y_0(i,j+1)-y_0(i,j-1)} \\ \frac{y(i+1,j)-y(i-1,j)}{x_0(i+1,j)-x_0(i-1,j)} & \frac{y(i,j+1)-y(i,j-1)}{y_0(i,j+1)-y_0(i,j-1)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Una vez obtenido el tensor  $C$ , se diagonaliza y de su autovalor máximo,  $\lambda_M(C)$ , se obtiene el exponente de Lyapunov según

$$\Lambda_{t_0}^{t_0+\tau} = \frac{1}{|\tau|} \ln \sqrt{\lambda_M(C)} \quad (\text{A.4})$$

## 3. Filtrado del campo de FTLE

Para visualizar las crestas del campo  $\Lambda_{t_0}^{t_0+\tau}$ , se filtran los valores de FTLE dejando solamente aquellos por encima de una cierta cota mínima  $\Lambda_{min}$ . Este proceso descarta estructuras que no sean relevantes, resalta las crestas de mayor valor y que se corresponden con las LCS.

Otra forma de estimar LCS es a partir de la condición que involucra el gradiente y la matriz Hessiana del campo FTLE. Según este criterio (ver sección 3.2 y referencias [40, 41]), las crestas del campo de FTLE cumplen con dos condiciones: en primer lugar la curva que representa la cresta es paralela al gradiente del campo de FTLE. En segundo lugar, dicha curva posee curvatura negativa y alta, lo que significa que tiene autovalor negativo,  $\epsilon_{min}$ , de la matriz Hessiana. Estas condiciones resultan en que el autovector  $\epsilon_{min}$  sea perpendicular al gradiente del campo de FTLE, de aquí se obtiene la condición para localizar las LCS:

$$\epsilon_{min} \cdot \nabla \Lambda_{t_0}^{t_0+\tau} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Esta forma de calcular las LCS requiere de condiciones de continuidad en los campos de FTLE que se logra a partir de interpolaciones cúbicas, como las realizadas en este trabajo, para garantizar la existencia de la derivada segunda.

En el presente trabajo se combinaron ambas condiciones para obtener LCS, no obstante cabe resaltar que para valores adecuados de  $\Lambda_{min}$ , es suficiente solo con la primera condición de filtrado.