TRABAJO MONOGRÁFICO

El Laplaciano en Variedades Riemannianas

Janine Bachrachas

Orientador: Federico Rodríguez Hertz

20 de Noviembre, 2008
Montevideo
Uruguay

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Resumen

En estas notas estudiamos el Operador Laplaciano en ciertas variedades Riemannianas, para lo cual será necesario encontrar una adecuada definición que generalize la noción usual en $\mathbb{R}^n$. Probaremos que el Laplaciano es un operador diagonalizable y que sus autofunciones constituyen una base ortonormal de las funciones de cuadrado integrable en la variedad. Por último nos centraremos en el ejemplo de la esfera S^n, calculando sus autovalores y autofunciones. Además, probaremos una condición suficiente para que una variedad sea isométrica a la esfera S^n.

Palabras clave: Variedad Riemanniana, El operador Laplaciano, Transformada de Fourier, Espacios de Sobolev, Teorema Espectral, Espectro del Laplaciano, Campos de Jacobi.

Abstract

In these notes we study the Laplace Operator defined on certain Riemannian manifolds. With this in mind, we will have to reach for an accurate definition, generalizing the usual notion in $\mathbb{R}^n$. We will prove that the Laplacian is a diagonal operator, and its eigenfunctions form an orthonormal basis of the square-integrable functions on the manifold. At the end, we will focus on the case our manifold is the sphere S^n, computing its eigenvalues and eigenfunctions. Moreover, we will prove a sufficient condition for a manifold to be isometric to the sphere S^n.

Keywords: Riemannian Manifold, Laplacian, Fourier Transform, Sobolev Spaces, Spectral Theorem, Spectrum of the Laplacian, Jacobi Fields.

A mis guías:
Federico y Luciana.

A mis hermanos:
Javier, Juan Pablo, Yaiza y Nicolás.

Índice general

Capítulo 1

Panorámica

En este trabajo (M, g) denotará una variedad Riemanniana M de dimensión n, compacta, conexa, sin borde, orientable y g será una métrica Riemanniana. Asumimos que una orientación ha sido asignada.

En este capítulo introduciremos las primeras definiciones y propiedades que nos acompañarán a lo largo de todo el trabajo.

Notación 1.1
Sea $x \in M$, $U \subset M$ abierto con $x \in U$ y $\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ una parametrización. Notaremos $X_i = d_x\varphi(e_i)$ siendo $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. También es usual notar $\frac{\partial}{\partial x_i}$ a los $d_x\varphi(e_i)$, pero nosotros adoptaremos la notación introducida previamente. La matriz de la métrica G será $G = G(x) = (g_{ij})_{ij}$ con $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle_x$.

Definición 1.1 (Forma de volumen canónica)
Dados $x \in M$ y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ base ortonormal directa de T_xM, existe una única $\omega_x^g\colon T_xM \times ... \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ n-forma multilineal alternada tal que $\omega_x(v_1, ..., v_n) = 1$. Explícitamente,

$$\omega_x^g = dv_1 \wedge ... \wedge dv_n$$

donde $\{dv_1, ..., dv_n\}$ es la base dual de $\{v_1, ..., v_n\}$.
Observamos que si $\mathcal{C} = \{w_1, ..., w_n\}$ es otra base de T_xM entonces

$$dw_1 \wedge ... \wedge dw_n = det\, P \cdot dv_1 \wedge ... \wedge dv_n$$

con $P = {}_{\mathcal{B}}[id]_{\mathcal{C}}$ la matriz de cambio de base. Esto implica que si $\mathcal{C}$ también es ortonormal y directa entonces $det\, P = 1$ y por tanto $dw_1 \wedge ... \wedge dw_n = dv_1 \wedge ... \wedge dv_n$, por lo que ω_x^g está bien definida.

Diremos que $\omega_g = \{\omega_x^g\}_{x\in M}$ es la *forma de volumen canónica* de la variedad (M, g).

Observación 1.1
Si $x \in M$ entonces $\omega_x^g(X_1, ..., X_n) = \sqrt{det(g_{ij})}$ con X_i como antes.

Demostración:
Consideremos $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ortonormal de T_xM. $X_i = \sum_j \langle X_i, v_j\rangle_x v_j$ por lo que $\langle X_i, X_j\rangle_x = \sum_k \langle X_i, v_k\rangle_x \langle X_j, v_k\rangle_x$. Si llamamos P a la matriz de cambio de base ${}_{\mathcal{B}}[id]_{\mathcal{C}}$ entonces $p_{ij} = \langle X_i, v_j\rangle_x$ y obtenemos que $G = P^tP$ y por tanto $det\, G = (det\, P)^2$ y $\omega(X_1, ..., X_n) = det\, P = \sqrt{det\, G}$.

Observación 1.2 (Correspondencia $TM \Leftrightarrow T^*M$)
Dado $x \in M$, si $v \in T_xM$ entonces $v = \sum_i a_i X_i$. Sabemos que existe un único funcional $\xi \in (T_xM)^*$ tal que $\xi(w) = \langle w, v\rangle_x, \forall w \in T_xM$. Si escribimos $\xi = \sum_i a^i dx_i$, siendo $\{dx_1, ..., dx_n\}$ la base dual de $\{X_1, ..., X_n\}$, observamos que

$$a^i = \xi(X_i) = \langle X_i, v\rangle_x = \sum_{j=1}^n a_j \langle X_i, X_j\rangle_x = \sum_{j=1}^n a_j g_{ij}$$

y por lo tanto también obtenemos que

$$a_i = \sum_{j=1}^n a^i g^{ij}$$

siendo g^{ij} las entradas de la matriz inversa de $G = (g_{ij})_{ij}$

Definición 1.2 (Gradiente)
Dada $u \in C^\infty(M)$, sea $du : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ la derivada exterior. Para cada $x \in M$, $d_xu : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional lineal, por lo que el Teorema de *Riesz* nos asegura que existe un único vector $\nabla_g u(x)$ en T_xM tal que $d_xu(v) = \langle v, \nabla_g u(x)\rangle_x, \forall v \in T_xM$.

Cálculo explícito del gradiente en coordenadas locales.

Si $u \in C^\infty(M)$ entonces

$$du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial\, x_i} dx_i$$

Por lo tanto vía la observación 1.2 obtenemos que

$$\nabla_g u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} g^{ij} X_i$$

Observación 1.3
De la expresión en coordenadas locales y la observación 1.2 tenemos que $\forall\, u \in C^{\infty}(M)$

$$\nabla_g u = G^{-1} \nabla u$$

.

Definición 1.3 (Divergencia de un campo de vectores)
Dada ω forma de volumen, definimos la *divergencia* de un campo X respecto a ω de la siguiente manera:
Sea $i_X\omega$ la $(n-1)$-forma definida por

$$i_X\omega(X_1, ..., X_{n-1}) = \omega(X(x), X_1, ..., X_{n-1})$$

$\forall\, X_1, ..., X_{n-1} \in T_xM,\, \forall\, x \in M.$
Luego $d(i_X\omega)$ es una n-forma, por lo que existe un único número real $div_\omega X$ de manera que

$$d(i_X\omega) = div_\omega X \cdot \omega$$

Cálculo explícito de la divergencia en coordenadas locales.

Consideremos una forma de volumen $\omega = \theta dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ con $\theta = \sqrt{det(g_{ij})}$ y X un campo. Entonces

$$\begin{aligned} i_X\omega(X_1, ..., \hat{X}_i, ..., X_n) &= \omega(X, X_1, ..., \hat{X}_i, ..., X_n) \\ &= (-1)^{i-1}\omega(X_1, ..., X, ..., X_n) \\ &= (-1)^{i-1}X^i\omega(X_1, ..., X_n) \\ &= (-1)^{i-1}X^i\theta \end{aligned}$$

Donde X^i denota la i-ésima componente del campo X y $\hat{X}_1$ indica que la componente X_i está omitida. Luego

$$\begin{aligned} d(i_x\omega) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial(\theta X^i)}{\partial\, x_i}dx_i\wedge dx_1\wedge ...\wedge d\hat{x}_i\wedge ...\wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\theta X^i)}{\partial\, x_i}dx_1\wedge ...\wedge dx_n \\ &= \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\theta X^i)}{\partial\, x_i}\omega \end{aligned}$$

Por lo que la divergencia del campo resulta

$$div_\omega X = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\theta X^i)}{\partial\, x_i}$$

Observación 1.4
Para toda $u\in C^\infty(M)$ y todo campo X

$$div(u\,X) = u\cdot divX\ +\ \langle\nabla_g u, X\rangle$$

Demostración:

$$div(uX)\omega = d(i_{uX}\omega) = du\wedge\omega + u\cdot d(i_X\omega) = du(X)\omega + u\, divX\omega$$

□

Definición 1.4 (Laplaciano)
Si $u\in C^\infty(M)$, definimos el *Laplaciano* de u por

$$\Delta_g u = -div_\omega(\nabla_g u)$$

Cálculo explícito del Laplaciano en coordenadas locales.

$$\begin{aligned} \Delta_g u &= -div(\nabla_g u) = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\theta\,(\nabla_g u)_i)}{\partial\, x_i} \\ &= -\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\, x_i}\left(\theta g^{ij}\sum_j\frac{\partial u}{\partial\, x_j}\right) = -\frac{1}{\theta}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\, x_i}\left(\theta g^{ij}\frac{\partial u}{\partial\, x_j}\right) \end{aligned}$$

Consideramos el caso en que $M = \mathbb{R}^n$ con la métrica Euclídea, es decir que $g_{ij} = \delta_{ij}$. El Laplaciano de una función $u \in C^\infty(M)$ resulta

$$\Delta_g u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Esta conocida fórmula es la opuesta a la del Laplaciano usual en $\mathbb{R}^n$. El signo de menos fue puesto pon una cuestión de practicidad, pero es claro que no altera el comportamiento del Laplaciano como operador.

Observamos también que si en una variedad (M, g) consideramos $\{X_1, ..., X_n\}$ una base ortonormal de $T_x M$ respecto de la métrica g, obtenemos también $g_{ij} = \delta_{ij}$ por lo que arribamos a la misma fórmula.

A continuación veremos las primeras propiedades del Laplaciano, que se desprenden directamente de la definición.

Proposición 1.1
Para todas $u,v \in C^\infty(M)$ se tiene que

$$\int_M u\, \Delta_g v\, d\omega_g = \int_M \langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle d\omega_g$$

Demostración:
Sabemos que

$$div(u\, \nabla_g v) = u \cdot div(\nabla_g v) \, + \, \langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle = -u \cdot \Delta_g v \, + \, \langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle$$

Integrando

$$\int_M div(u\, \nabla_g v) d\omega_g = -\int_M u\, \Delta_g v\, d\omega_g + \int_M \langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle d\omega_g$$

Reescribiendo el término de la izquierda y utilizando el teorema de *Stokes* tenemos que

$$\int_M div(u\, \nabla v) d\omega_g = \int_M d\, i_{u\, \nabla v} \omega = \int_{\partial M} i_{u\, \nabla v} \omega = 0$$

ya que ∂M es vacío.

$\square$

Corolario 1.2
El Laplaciano $\Delta_g \colon C^\infty(M) \longrightarrow L^2(M)$ *es un operador simétrico.*

Demostración:
Dadas u, $v \in C^\infty(M)$ tenemos que

$$\langle \Delta_g u, v \rangle = \int_M \Delta u \cdot v \, d\omega_g = \int_M \langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle d\omega_g = \int_M u \cdot \Delta_g v \, d\omega_g = \langle u, \Delta_g v \rangle$$

$\square$

Corolario 1.3
El laplaciano $\Delta_g \colon C^\infty(M) \longrightarrow L^2(M)$ *es un operador "positivo":*

$$\langle \Delta_g u, u \rangle = \int_M \Delta_g u \cdot u \, d\omega_g = \int_M \langle \nabla_g u, \nabla_g u \rangle d\omega_g = \| |\nabla_g u| \|^2 \geq 0$$

$\forall u \in C^\infty(M)$.

$\square$

Invariancia por Isometrías del Laplaciano.

Definición 1.5
Sean (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas. Diremos que un difeomorfismo $\varphi \colon M \longrightarrow N$ es una *isometría* si $\forall\, x \in M$ se verifica

$$\langle v, w \rangle_x = \langle d_x\varphi(v), d_x\varphi(w) \rangle_{\varphi(x)}$$

$\forall\, v,\ w \in T_x M$.

Una propiedad fundamental del Laplaciano es la *invariancia por isometrías*, que puede describirse de la siguiente manera:

Proposición 1.4
Sean $f \colon N \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable y* $\varphi \colon M \longrightarrow N$ *una isometría. Entonces*

$$\Delta^M (f \circ \varphi) = \Delta^N f \circ \varphi$$

Demostración:
Dado $x \in M$, tomemos $\{X_1, ..., X_n\}$ una base ortonormal de T_xM. Sean $\{\gamma_i\}$ las geodésicas que en tiempo $t = 0$ pasan por x con velocidad X_i. Como $d_x\varphi$ preserva el producto interno $\{d_x\varphi(X_1), ..., d_x\varphi(X_n)\}$ es una base ortonormal de $T_{\varphi(x)}N$. Si llamamos $\delta_i = \varphi(\gamma_i)$ entonces $\{\delta_i\}$ son curvas que en tiempo $t = 0$ pasan por $\varphi(x)$ con velocidad $d_x\varphi(X_i)$.

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\Delta^M(f \circ \varphi)(x) &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2}((f \circ \phi) \circ \gamma_i)(0) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2}(f \circ (\delta_i))(0) = [(\Delta^N f) \circ \varphi](x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in M$, por lo que obtenemos el resultado.

$\square$

Capítulo 2

Herramientas del Análisis Funcional

Gran parte de nuestro trabajo se centrará en el estudio del Laplaciano como operador, para lo cual necesitaremos introducir algunos conceptos de Análisis de Fourier y de Análisis Funcional para operadores no acotados.

2.1. Distribuciones y derivadas débiles

¿Qué es derivar débilmente y porqué queremos hacerlo?
Nuestra primera motivación es que nuestro protagonista, el Laplaciano, es un operador que actúa derivando. Muchas veces trabajamos con objetos que, o bien no son diferenciables, o bien no controlamos que lo sean o no. La noción de derivada débil será una asignación que verifique algunas propiedades básicas de la derivada convencional, y nos permita trabajar "sin preocuparnos" de la verdadera naturaleza de los objetos.

Consideremos un subconjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y comencemos trabajando en $C_0^\infty(\Omega)$, las funciones de Ω en $\mathbb{R}$ de clase C^∞ y soporte compacto. Consideremos la siguiente noción de convergencia en $C_0^\infty(\Omega)$:

Diremos que $\phi_n \longrightarrow \phi$ *en el sentido del espacio* $\mathcal{D}(\Omega)$ si

1. $\exists\, K \subset \Omega$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $sop(\phi_n - \phi) \subset K$.
2. $D^\alpha \phi_n \longrightarrow D^\alpha \phi$ uniformemente en K, $\forall\, \alpha$ multiíndice.

Llamemos $\mathcal{C}$ al conjunto de las funcionales lineales continuas respecto a esta convergencia. Observamos que $\mathcal{C}$ no es vacía: la función *evaluación* i_x es lineal y como la convergencia en el sentido de $\mathcal{D}(\Omega)$ implica la convergencia puntual, i_x está en $\mathcal{C}$. Consideramos entonces la topología débil respecto de la familia $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es un espacio vectorial, sus elementos son **todas** las funcionales continuas. Llamaremos $\mathcal{D}'(\Omega)$ al dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ con la topología débil-$*$, y *Distribuciones* a sus elementos.

Definición 2.1
Diremos que una función u, definida a menos de conjuntos de medida nula en Ω, es *localmente integrable* si para todo conjunto compacto $A \subset \Omega$ se cumple que $u \in L^1(A)$.
$L^1_{loc}(\Omega)$ denotará al conjunto de las funciones localmente integrables en Ω.

Trabajemos entonces en este espacio. Dada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, hagamos una asignación análoga a la que haríamos vía Riesz, si u estuviera en $L^2(\Omega)$, para obtener un funcional lineal. Explícitamente, le asociaremos la función T_u definida por

$$T_u(\phi) = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx \qquad\qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Observamos que esta expresión tiene sentido pues $u\phi \in L^1(\Omega)$. La linealidad de la integral asegura que T_u será lineal.

Para ver la continuidad, tomemos $\{\phi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ convergiendo a $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ en el sentido de $\mathcal{D}(\Omega)$. Sabemos entonces que existe un compacto K tal que $sop(\phi_n - \phi) \subset K$, y por lo tanto

$$|T_u\phi_n - T_u\phi| \leq \sup_{x\in K} |\phi_n(x) - \phi(x)| \int_K |u(x)|dx \longrightarrow 0$$

Es importante remarcar que el mapa $u \rightsquigarrow T_u$ no es en general sobreyectivo, es decir, existen distribuciones que no son de la forma T_u para ningún $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Por ejemplo, dado $x_0 \in \Omega$ consideremos la distribución

$$\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0) \qquad\qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Como la medida $d\delta_{x_0}$ está soportada en el punto x_0, es singular respecto a la medida de Lebesgue y por tanto no puede ser de la forma T_u para ninguna $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Si ahora consideramos una función u de clase C^1, utilizando el teorema de Stokes y el hecho de que ϕ se anula fuera de un abierto, es inmediata una fórmula de "integración por partes". Luego, si u es lo suficientemente diferenciable tememos que

$$\int_\Omega (D^\alpha u)(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^\alpha\phi(x)dx$$

Esto motiva una definición de "derivada" de una distribución:
Si T es de la forma T_u es natural definir $D^\alpha T_u = (-1)^{|\alpha|}T_{D^\alpha u}$ para tener la integración por partes.

Generalizando esta fórmula, dada una distribución T y un multiíndice α, definimos

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\phi) \tag{2.1}$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}$.

Veamos que así definida $D^\alpha T$ es de hecho una distribución. Si miramos el miembro derecho de la ecuación 2.1, la linealidad es inmediata de la linealidad de la derivada convencional y de T. Para ver que es continuo, tomemos $\{\phi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ convergiendo a $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ en el sentido de $\mathcal{D}(\Omega)$. Sabemos entonces que existe un compacto K tal que $sop(\phi_n - \phi) \subset \Omega$ y por tanto

$$sop(D^\alpha\phi_n - D^\alpha\phi) = sop(D^\alpha(\phi_n - \phi)) \subseteq sop(\phi_n - \phi) \subset K$$

Además,

$$D^\beta(D^\alpha(\phi_n - \phi)) = D^{\alpha+\beta}(\phi_n - \phi) \longrightarrow 0$$

uniformemente en K. Así, obtuvimos que $D^\alpha\phi_n \longrightarrow D^\alpha\phi$ en el sentido de $\mathcal{D}$. Como T es *continua en el sentido de las distribuciones*, $T(D^\alpha\phi_n) \longrightarrow T(D^\alpha\phi)$, y por 2.1 vemos que esto es equivalente a que $D^\alpha T(\phi_n) \longrightarrow D^\alpha T(\phi)$.

Terminando...
Estamos ahora en condiciones de definir la derivada débil de una función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Tomemos un multiíndice α. Si existe $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $T_{v_\alpha} = D^\alpha(T_u)$, entonces v_α será único a menos de conjuntos de medida nula. A este elemento lo llamaremos α-ésima *derivada débil* de u, y notaremos $D^\alpha u$. Como adelantábamos, en caso de que exista la derivada en el sentido convencional, la derivada débil coincide con ésta.

Observación 2.1 (Derivadas débiles en variedades)
Si (M, g) es una variedad compacta y sin borde, podemos derivar débilmente haciendo todo el trabajo análogo a lo realizado en esta sección. De hecho este contexto es aún más simple pues al ser M compacta $C_0^\infty(M) = C^\infty(M)$ y $L^1_{loc}(M) = L^1(M)$.

2.2. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier resultará un elemento crucial en nuestro trabajo. Las buenas propiedades y la regularidad de este operador nos ofrecerán técnicas que facilitarán enormemente el desarrollo de nuestra teoría.

2.2.1. Transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$

Definición 2.2
La *Transformada de Fourier* es el operador $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ definido como $\mathcal{F}f = \hat{f}$ con

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i\langle \xi, x\rangle} dx \tag{2.2}$$

$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$

La ecuación 2.2 tiene sentido pues

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_{L^1}$$

$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$

La linealidad de $\mathcal{F}$ es inmediata y también se tiene que

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_{L^1}$$

por lo que $\mathcal{F}$ es un operador continuo.

También es posible definir la llamada *Transformada de Fourier Inversa* de la siguiente manera

$$\check{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{i\langle \xi, x\rangle} dx \tag{2.3}$$

Una cuenta análoga a la que realizamos para $\mathcal{F}$ muestra que la transformada inversa es también un operador continuo.

Introduciremos ahora los Espacios de Schwartz ya que son un "buen" contexto para trabajar con la transformada $\mathcal{F}$.

Definición 2.3 (Espacio de Schwartz)

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \colon \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty \ \forall\, \alpha, \beta \ \text{ multiíndices } \}$$

Es fácil ver que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con la topología inducida por la norma L^2.

Una de las buenas propiedades que mencionábamos es el hecho de que si restringimos $\mathcal{F}$ a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la transformada inversa resulta ser efectivamente la inversa de la transformada de Fourier $\mathcal{F}$. Demostraremos este resultado en breve.

Proposición 2.1
Se cumple que $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y valen las siguientes fórmulas

$$(-i)^{|\alpha|}\widehat{(D^\alpha f)}(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \tag{2.4}$$

$$(-i)^{|\alpha|}\widehat{(x^\alpha f)}(\xi) = (D^\alpha \hat{f})(\xi) \tag{2.5}$$

Demostración:
La primera afirmación se deduce de las fórmulas ya que para cualquier α, β multiíndices

$$\begin{aligned} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta \hat{u}(\xi)| &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \widehat{x^\beta u}(\xi)| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\widehat{D^\alpha(x^\beta u)}(\xi)| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|D^\alpha(x^\beta u)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty \end{aligned}$$

ya que si una función está en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces es absolutamente integrable y sus derivadas también están en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Para verificar las fórmulas observemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi}_i(\xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i\langle \xi, x\rangle} dx\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left[e^{-i\langle \xi, x\rangle}\right] dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (-i) x_i f(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle} dx = (-i)\widehat{(x_i f)}(\xi) \end{aligned}$$

Derivando sucesivas veces obtenemos la fórmula 2.5. Para demostrar 2.4, observemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx \\
&= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\partial B(0,R)} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx + i \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_i f(x) dx \\
&= i\hat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

ya que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\partial B(0,R)} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx = 0$$

Nuevamente, derivando sucesivas veces, obtenemos el resultado.

□

Proposición 2.2

1. *Si* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $\mathcal{F}$ *es una isometría, i.e.*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)|^2 dx$$

2. *Si* ϕ, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}\psi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\hat{\psi} \, dx$$

   y consecuentemente

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}\overline{\hat{\psi}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\overline{\psi} dx$$

3. *La Transformada Inversa es el operador inverso de la Transformada de Fourier.*

Demostración:
(1) Llamemos $C_\varepsilon = [-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]^n \subset \mathbb{R}^n$ el cubo de volumen $(2/\varepsilon)^n$ centrado en el origen de $\mathbb{R}^n$. Dada $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $sop(f) \subset C_\varepsilon$. Definamos también el conjunto

$$K_\varepsilon = \{k \in \mathbb{R} \colon \frac{k}{(\pi\varepsilon)} \in \mathbb{Z}\}$$

Ahora, $\{(\frac{1}{2}\varepsilon)^{n/2}e^{i\langle k,x\rangle}\}_{k\in K_\varepsilon}$ es una base ortonormal de $L^2(C_\varepsilon)$, por lo que

$$f(x)=\sum_{k\in K_\varepsilon}\langle(\frac{1}{2}\varepsilon)^{n/2}e^{i\langle k,x\rangle},f(x)\rangle(\frac{1}{2}\varepsilon)^{n/2}e^{i\langle k,x\rangle}$$

Además sabemos que

$$f(x)=\sum_{k\in K_\varepsilon}\frac{\hat{f}(k)e^{i\langle k,x\rangle}}{(2\pi)^{n/2}}(\pi\varepsilon)^n$$

Luego

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2dx &= \int_{C_\varepsilon}|f(x)|^2dx=\sum_{k\in K_\varepsilon}|\langle(\frac{1}{2}\varepsilon)^{n/2}e^{i\langle k,x\rangle},f(x)\rangle|^2\\
&= \sum_{k\in K_\varepsilon}\left|\int_{C_\varepsilon}\sum_{j\in K_\varepsilon}(\frac{1}{2}\varepsilon)^{n/2}e^{i\langle k,x\rangle}\frac{\overline{\hat{f}(j)}}{(2\pi)^{n/2}}e^{i\langle j,x\rangle}dx\right|^2\\
&= \sum_{k\in K_\varepsilon}\left|\int_{C_\varepsilon}(\frac{1}{2}\varepsilon)^{n/2}\frac{\overline{\hat{f}(k)}}{(2\pi)^{n/2}}(\pi\varepsilon)^n dx\right|^2\\
&= \sum_{k\in K_\varepsilon}(\frac{2}{\varepsilon})^{2n}(\frac{1}{2}\varepsilon)^n\frac{|\hat{f}(k)|^2}{(2\pi)^n}(\pi\varepsilon)^{2n}\\
&= \sum_{k\in K_\varepsilon}|\hat{f}(k)|^2(\pi\varepsilon)^n\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{f}(x)|^2dx\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\phi}\psi\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}d\xi\right]\psi(x)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\psi(\xi)e^{-i\langle\xi,x\rangle}dx\right]\phi(\xi)d\xi \qquad (2.6)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\phi\hat{\psi}\,d\xi\end{aligned}$$

Análogamente, se prueba que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\check{\phi}\psi\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\phi\check{\psi}\,dx$$

Utilizando la fórmula 2.6, si tomamos ϕ y $\overline{\hat{\psi}}$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\phi}\overline{\hat{\psi}}\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\phi\hat{\overline{\hat{\psi}}}\,d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\phi\overline{\psi}d\xi$$

(3) Observemos primero que $\overline{\mathcal{F}\phi} = \mathcal{F}^{-1}\phi$. Luego

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}\phi\mathcal{F}^{-1}\phi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\phi dx$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\phi\mathcal{F}\phi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\phi dx$$

Por lo que $\phi = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\phi = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\phi$ en casi todo punto, y como es continua, en todo punto.

□

Corolario 2.3
La transformada de Fourier $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ *es un operador unitario.*

Demostración:
De la proposición anterior es inmediato que $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un operador unitario. Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ obtenemos el resultado.

□

Corolario 2.4
Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *tenemos que* $\Delta f = (|\xi|^2 \hat{f})\check{}$

Demostración:
Por la proposición anterior sabemos que

$$\widehat{\Delta f}(\xi) = (|\xi|^2 \hat{f})(\xi)$$

Tomando la transformada inversa a ambos lados obtenemos el resultado.

□

Una operación en $\mathcal{S}$ que resultará muy útil es la *convolución*

Definición 2.4
Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se define la *convolución* de f y g por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \tag{2.7}$$

La expresión 2.7 tiene sentido pues si definimos $h(x, y) = f(x-y)g(y)$ entonces $h \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y por el teorema de Fubini la función $x \rightsquigarrow f(x-y)g(y)$ también está en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

2.2.2. Transformada de Fourier para distribuciones.

Sea $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ el dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con la topología débil-$*$. A los elementos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ los llamaremos *Distribuciones Temperadas*.

Observemos lo siguiente: podemos pensar a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ "dentro" de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ya que dada una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y α multiíndice, podemos asociarle una distribución $T_{f,\alpha}$ mediante

$$T_{f,\alpha}(\phi) = \langle D^\alpha f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(x)\phi(x)dx$$

$\forall\, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

El hecho de que $T_{f,\alpha}$ resulta efectivamente una distribución se prueba de manera análoga a las pruebas realizadas en la sección de derivadas débiles. También derivaremos distribuciones temperadas en el sentido introducido en esa sección.

2.3. Análisis Funcional con operadores no acotados

Introduciremos algunos conceptos básicos de esta teoría. En esta sección, H denotará un espacio de Hilbert y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su producto interno.

2.3.1. Definiciones básicas

Definición 2.5
Un *operador* T en H es un mapa lineal de un subconjunto de H que llamaremos *dominio de* T en H. Notaremos $dom(T)$ al dominio de T y **asumiremos que** $dom(T)$ **es denso en** H**.**

Definición 2.6
Si $T\colon dom(T) \longrightarrow H$ es un operador, el *gráfico de* T es el conjunto

$$G(T) = \{(x, Tx) \in H \times H : \, x \in H\}$$

Definición 2.7
Un operador T se dice *cerrado* si su gráfico es un subconjunto cerrado de $H \times H$.

Definición 2.8
Sean T_0 y T_1 dos operadores en H. Diremos que T_1 es una *extensión* de T_0 si $dom(T_1) \supset dom(T_0)$ y $T_0x = T_1x \ \forall x \in dom(T_0)$. En este caso escribiremos $T_1 \supset T_0$.

Definición 2.9
Un operador T es *cerrable* si admite una extensión cerrada. Si T es cerrable a su extensión más pequeña (que existe por el lema de Zorn) la llamaremos la *clausura* de T y la notaremos $\overline{T}$.

Observación 2.2
Una manera constructiva de obtener $\overline{T}$ es la siguiente:
Consideremos el gráfico de T, su clausura $\overline{G(T)} \subset H \times H$ y sea $\pi_i \colon H \times H \longrightarrow H$ la proyección canónica sobre la i-ésima coordenada para $i = 1, 2$. Llamemos $dom(\overline{T}) := \pi_1(\overline{G(T)})$. Es claro que $dom(\overline{T}) \supset dom(T)$. Definimos entonces $\overline{T} \colon dom(\overline{T}) \longrightarrow H$ de la siguiente manera:
Si $\{v_n\} \subset H$ tal que $\{(v_n, Tv_n)\}$ es convergente, entonces $\overline{T}v := \pi_2(\text{lím}_n Tv_n)$. Es claro que así definido $\overline{T}$ es un operador y que extiende a T. A su vez debe ser la clausura pues tomamos su dominio más pequeño.

Observación 2.3
Con la construcción anterior, la norma natural en $dom(\overline{T})$ viene dada por

$$\|v\|_{dom(\overline{T})} = \sqrt{\|v\|\|_H^2 + \|\overline{T}v\|_H^2}$$

Esta norma proviene del producto interno

$$\langle v, w\rangle_{dom(\overline{T})} = \langle v, w\rangle_H + \langle \overline{T}v, \overline{T}w\rangle_H$$

Y por tanto $dom(\overline{T})$ es de hecho un Hilbert pues la completitud es asegurada por a misma definición de $\overline{T}$.

Definición 2.10 (Adjunto de un operador)
Si $T \colon dom(T) \longrightarrow H$ es un operador, consideremos el conjunto

$$dom(T^*) = \{\psi \in H : \exists\, \eta \in H \text{ tal que } \langle T\phi, \psi\rangle = \langle \phi, \eta\rangle \ \forall \phi \in dom(T)\}$$

Para todo $\psi \in D(T^*)$, definimos

$$T^*\psi = \eta$$

La bilinealidad del producto interno asegura la linealidad de T^*. Luego T^* es un operador y es llamado el *adjunto* de T.

Observación 2.4
El conjunto $dom(T^*)$ puede no ser denso en H.

Definición 2.11 (Operador simétrico)
Un operador T se dice *simétrico* si $T^* \supset T$. Equivalentemente, T es simétrico si y sólo si $\forall\, \phi, \psi \in dom(T)$

$$\langle T\phi, \psi \rangle = \langle \phi, T\psi \rangle$$

Definición 2.12 (Operador autoadjunto)
Al igual que en la teoría de operadores acotados, diremos que un operador T es *autoadjunto* si $T = T^*$. En nuestro contexto esto significa que T es simétrico y que $dom(T) = dom(T^*)$.

Definición 2.13
Un operador T se dice *esencialmente autoadjunto* si su clausura es autoadjunta.

Si bien estas definiciones fueron enunciadas en general, en lo que sigue del trabajo nuestro espacio de Hilbert será $L^2(\mathbb{R}^n)$ ($L^2(\Omega)$, $L^2(M)$) y, a menos que especifiquemos lo contrario, estaremos trabajando con la norma natural allí.

2.3.2. El Laplaciano usual en $\mathbb{R}^n$ como operador

Definición 2.14
Una función $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice de *crecimiento polinomial* si existe $C > 0$ y $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$|f(x)| \leq C[1 + |x|]^m$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Borel-medible de crecimiento polinomial, y definamos el operador

$$f(D) = f(D_{e_1}, ..., D_{e_n})$$

donde D_{e_i} es el operador que actúa derivando respecto a la variable i-ésima. Consideramos como dominio de $f(D)$ el conjunto $dom\, f(D) = \mathcal{F}^{-1}[dom\, M_f]$, donde M_f denota al operador de multiplicación, es decir, $dom(M_f) = \{h \in L^2(\mathbb{R}^n) \colon fh \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ y $M_f h = f\, h$.

Entonces, si $\psi \in dom\, f(D)$

$$f(D)\psi = \mathcal{F}^{-1} M_f \mathcal{F}\psi$$

Probaremos que así definido $f(D)$ resulta autoadjunto. Si ψ, $\varphi \in dom\, f(D)$ entonces

$$\begin{aligned} \langle f(D)\psi, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (f\hat{\psi})\check{}\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{\psi}\hat{\varphi} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}(f\hat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(f\hat{\varphi})\check{} = \langle \psi, f(D)\varphi\rangle \end{aligned}$$

de donde $f(D)$ es simétrico.

Teorema 2.5
Si $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de crecimiento polinomial entonces M_g es esencialmente autoadjunto.

Este teorema permite probar el siguiente, de donde se deduce el resultado que buscamos.

Teorema 2.6
Si $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función Borel medible de crecimiento polinomial, entonces:

1. *$dom\, f(D) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.*
2. *$f(D)|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}$ es esencialmente autoadjunto.*

Consideremos ahora la función $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, y el operador $f(D)$, *i.e.*

$$f(D)\psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\, \psi$$

Observamos que como f es continua M_f es cerrado por lo que $f(D)$ también es cerrado. Además f es un polinomio y por tanto de crecimiento polinomial. Luego, $f(D) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f(D)|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}$ es esencialmente autoadjunto y su clausura $f(D)$ resulta autoadjunta.

El Laplaciano usual Δ se define como $f(D)$ y es por tanto un operador autoadjunto.

2.4. Espacios de Sobolev

2.4.1. Espacios de Sobolev en $\mathbb{R}^n$

Dado $s \in \mathbb{R}$ definimos el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ como

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \colon (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

$H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int \hat{f}(\xi)\overline{g(\xi)}(1 + |\xi|^2)^s d\xi$$

Y por tanto la norma inducida es

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Observación 2.5
Por la proposición 2.2 es inmediato que $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 2.7

1. *Si* s, $s' \in \mathbb{R}$ con $s' > s$ *entonces* $H^{s'}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$. *Además, la inclusión* $i \colon H^{s'}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$ *es continua.*

2. $\mathcal{F}[H^s(\mathbb{R}^n)] = L^2(\mathbb{R}^n, (1 + |\xi|^2)^s d\xi)$.

3. $[H^s(\mathbb{R}^n)]^*$ *es isométricamente isomorfo a* $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración:
La afirmación *2* es evidente. Demostraremos *1* y *3*:

(1) Si $s > s'$ entonces $(1+|\xi|^2)^{s'/2} \leq (1+|\xi|^2)^{s/2}$, por lo que si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{s'}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s'/2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s/2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|f\|_s^2 < \infty$$

y por tanto $f \in H^{s'}(\mathbb{R}^n)$. Además, la inclusión $i\colon H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ resulta continua pues

$$\|i(f)\|_{s'} = \|f\|_{s'} \leq \|f\|_s$$

(3) Dadas $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y $g \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{s/2} |\hat{g}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{-s/2} d\xi \\ &\leq \|f\|_s \|g\|_{-s} < \infty \end{aligned}$$

donde utilizamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Si definimos $\psi_g\colon H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$\psi_g(f) = \int_{R^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} d\xi$$

entonces ψ_g resulta un funcional continuo. Recíprocamente, dado $\psi \in [H^s(\mathbb{R}^n)]^*$ existe, por el teorema de Riesz, un único elemento $h \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $\forall f \in H^s(\mathbb{R}^n)$

$$\psi(f) = \langle f, h\rangle = \int_{R^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{h}(\xi)} d\xi$$

Tomemos g como la función cuya trasformada de Fourier resulta $\hat{g}(\xi) = (1+|\xi|^2)^s \hat{h}(\xi)$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-s} |\hat{g}|^2(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-s}(1+|\xi|^2)^s |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

por lo que $g \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Luego, $\forall\, f \in H^s(\mathbb{R}^n)$

$$\psi(f) = \int_{R^n} \hat{f(\xi)}\overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = \psi_g(f)$$

Obtuvimos entonces un isomorfismo lineal entre $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ y $[H^s(\mathbb{R}^n)]^*$. Además observemos que

$$\|\psi_g\|^2 = \|h\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-s} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \|g\|_{-s}^2$$

por lo que la correspondencia es una isometría.

$\square$

Observación 2.6
El teorema anterior implica que los elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$, para $s > 0$, pueden ser vistos como elementos de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.8
Si $m \in \mathbb{N}$ *entonces*
$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \colon D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \forall\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

Corolario 2.9
Si $m \in \mathbb{N}$ *entonces*
$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \colon D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \forall\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

Definición 2.15
Dado $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$, definimos los Espacios de Sobolev $H^s_R(\mathbb{R}^n)$ como los conjuntos
$$H^s_R(\mathbb{R}^n) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) \colon sop\,(u) \subset B(0,R)\}$$
con la norma heredada de $H^s(\mathbb{R}^n)$. Como $H^s_R(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio cerrado de $H^s(\mathbb{R}^n)$ es también un espacio de Hilbert.

2.4.2. Espacios de Sobolev: construcción general

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Consideremos la función $\|\cdot\|_k : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por
$$\|u\|_k = \sqrt{\Big(\sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^2\Big)}$$
En el conjunto $\{u \in C^k(\Omega) : \|u\|_k < +\infty\} \subset L^2(\Omega)$ la función $\|\cdot\|_k$ es una norma, y llamaremos $H^k(\Omega)$ a su completación respecto a esta norma.

Con esta construcción no es evidente qué tipo de objetos conforman $H^k(\Omega)$. Veremos más adelante que $H^k(\Omega)$ es de hecho un subconjunto de $L^2(\Omega)$.

Consideremos, para $k \in \mathbb{N}$, los conjuntos
$$W^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \colon D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \text{ tal que } 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

Donde $D^\alpha u$ es la derivada débil. Observamos que como $L^2(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, existe la derivada débil para toda $u \in L^2(\Omega)$. Equipemos entonces $W^k(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_k$. Notaremos $W^k_0(\Omega)$ a la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^k(\Omega)$.

Teorema 2.10
$W^k(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración:
Tomemos $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en $W^k(\Omega)$. $\{D^\alpha u_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)\,\forall\, 0 \leq |\alpha| \leq k$ y como L^2 es completo existen vectores $u_\alpha \in L^2(\Omega)$ tal que $D^\alpha u_n \longrightarrow u_\alpha$. Como $L^2(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ consideremos las distribuciones $T_{D^\alpha u_n}$ y T_{u_α}. Luego si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$|T_{D^\alpha u_n}\phi - T_{u_\alpha}\phi| \leq \int_M |D^\alpha u_n(x) - u_\alpha(x)||\phi(x)|dx \leq ||\phi||_{L^2}||D^\alpha u_n - u_\alpha||_{L^2}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, por lo que $T_{D^\alpha u_n}\phi \longrightarrow T_{u_\alpha}\phi$, $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Luego

$$T_{u_\alpha}\phi = \lim_n T_{D^\alpha u_n}\phi = \lim_n (-1)^{|\alpha|} T_{u_n}(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} T_{u_0}(D^\alpha \phi)$$

$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $u_\alpha = D^\alpha u_0$ en el sentido de las distribuciones, y esto implica que que $u \in W^k(\Omega)$. Luego tenemos que $\lim_n ||u_n - u_0||_k = 0$ de donde $\{u_n\}$ es convergente y por tanto $W^k(\Omega)$ es completo.

□

Observación 2.7
El conjunto $\mathcal{B} = \{u \in C^k(\Omega) : \|u\|_k < +\infty\}$ está contenido en $W^k(\Omega)$. Esto implica que la identidad $i\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \subset W^k(\Omega)$ se extiende a un isomorfismo isométrico entre $H^k(\Omega)$ y la clausura de $\mathcal{B}$ en $W^k(\Omega)$. Identificando $H^k(\Omega)$ con su imagen por este isomorfismo obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.11
Para todo $k \in \mathbb{Z}$, $H^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$.

Concluimos así que podemos pensar a los objetos de $H^k(\Omega)$ como funciones de $L^2(\Omega)$ que poseen derivadas débiles hasta "orden α".

2.4.3. $H^s(\mathbb{R}^n)$ como el dominio del Laplaciano.

Otra manera equivalente de ver los Espacios de Sobolev es la siguiente: Definamos

$$H^s(\mathbb{R}^n) := dom[(I+\Delta)^{s/2}]$$

equipado con la norma

$$\|f\|_{H^s(\Delta)} = \|(I+\Delta)^{s/2} f\|$$

Observemos que coincide, como conjunto, con la definición dada al comienzo de la sección

$$\begin{aligned} dom[(I+\Delta)^{s/2}] &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \colon \widehat{(I+\Delta)^{s/2}} f \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \\ &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \colon (1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\} = H^s(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

A su vez

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{H^s(\Delta)} = \|(I+\Delta)^{s/2} f\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |(I+\Delta)^{s/2} f|^2(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{f}^2|(\xi) d\xi = \|f\|^2_s \end{aligned}$$

por lo que las normas son las mismas y por tanto las definiciones equivalentes.

2.4.4. Equivalencias y conclusiones.

A continuación mostraremos que, a nuestros efectos, los distintos espacios de Sobolev son esencialmente los mismos.

Teorema 2.12
(I) Las normas $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ y $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\, d\omega_g)}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ son equivalentes.

(II) Las siguientes normas en $H^2(\mathbb{R}^n)$ son equivalentes

1. $\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$

2. $\|u\|_2 = \left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/2}$

3. $\|u\|_{2,\,g} = \left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n, d\omega_g)} + \|\nabla_g u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,\, d\omega_g)} \right)^{1/2}$

Demostración:
(I) Consideremos la identidad $id\colon (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_g) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ preservando orientación, y siendo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$. Sea $\{v_1, ..., v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ respecto de $\langle\cdot,\cdot\rangle_g$ y $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Por la observación 1.1 sabemos que si $P = {}_{\mathcal{B}}[id]_{\mathcal{C}}$ entonces $G = P^tP$ y $det\, P = \sqrt{det\, G}$. Como G es una matriz simétrica real definida positiva, $|det\, G| < \infty$, $|det\, G^{-1}| < \infty$, $\|G\| < \infty$ y $\|G^{-1}\| < \infty$, por lo que existen c_1, c_2, C_1 y $C_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\frac{1}{c_1} \leq |det\, P| \leq C_1 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{c_2} \leq \|P\| \leq C_2$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,\, d\omega_g)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 d\omega_g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} id^*(|u(x)|^2 d\omega_g(x)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 |det\, P| dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx = C_1 \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

Una cuenta análoga muestra que

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c_1 \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,\, d\omega_g)}$$

(II) Las normas 1 y 2 son equivalentes ya que

$$\|u\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

Observemos que el último término se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n |\xi_i \hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \left| \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_i}}(\xi) \right|^2 d\xi \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_i}}(\xi) \right|^2 d\xi = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\|u\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|^2_2$$

Para ver que 2 y 3 son equivalentes, recordemos que $\nabla_g = G^{-1}\nabla$. Entonces,

$$|\nabla_g u| \leq \|G^{-1}\|\, |\nabla u|$$

Luego

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,g}^2 &= \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\, d\omega_g)}^2 + \|\nabla_g u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\, d\omega_g)}^2 \\
&\leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\, d\omega_g)}^2 + \|G^{-1}\|^2 \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\, d\omega_g)}^2 \\
&\leq C_1 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + C_1 \|G^{-1}\|^2 \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&\leq C \|u\|_2^2
\end{aligned}$$

y análogamente

$$\|u\|_2^2 \leq C' \|u\|_{2,g}^2$$

$\square$

Observación 2.8
Para $H^k(\mathbb{R}^n)$ con $k \in \mathbb{Z}^+$, vale un resultado análogo a lo demostrado en la parte (II) de el teorema. De hecho, la demostración del mismo también es análoga.

En lo que resta de la sección probaremos el siguiente teorema, que resultará clave para nuestro trabajo.

Teorema 2.13
La inclusión $i \colon H_R^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_R^0(\mathbb{R}^n)$ *es compacta.*

Para demostrar este resultado nos auxiliaremos del siguiente lema.

Lema 2.14
Si $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *con* $\|u\|_1 \leq 1$*, entonces existe* $C > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h) - u(x)|^2 dx \leq C|h|^2$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h)-u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(x+h)-\hat{u}(x)|^2 dx \\
= \; & \int_{\mathbb{R}^n} |e^{i\langle x,h\rangle}\hat{u}(x)-\hat{u}(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |e^{i\langle x,h\rangle}-1|^2|\hat{u}(x)|^2 dx \\
= \; & \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{e^{i\langle x,h\rangle}-1}{\langle x,h\rangle}\right|^2 |\langle x,h\rangle|^2|\hat{u}(x)|^2 dx \le |h|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{e^{i\langle x,h\rangle}-1}{\langle x,h\rangle}\right|^2 \|x\|^2|\hat{u}(x)|^2 dx \\
\le \; & C|h|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^2|\hat{u}(x)|^2 dx = C|h|^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\nabla u}(x)|^2 dx \\
= \; & C|h|^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx \le C|h|^2\|u\|_1^2
\end{aligned}$$

□

Una segunda demostración sin utilizar transformada de Fourier:

Observemos primero que

$$u(x+h)-u(x) = h\int_0^1 \nabla u(x+th)dt$$

Luego

$$|u(x+h)-u(x)|^2 \;\le\; |h|^2\left|\int_0^1 \nabla u(x+th)dt\right|^2 \le |h|^2\int_0^1 |\nabla u(x+th)|^2 dt$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h)-u(x)|^2 dx \;&\le\; |h|^2 \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 |\nabla u(x+th)|^2 dt\, dx \\
&=\; |h|^2 \int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x+th)|^2 dx\, dt \\
&\le\; |h|^2\|u\|_1^2 \le C|h|^2
\end{aligned}$$

□

<u>*Demostración del teorema:*</u>
Sea $B = \{u \in H_R^1(\mathbb{R}^n) \colon \|u\|_1 \le 1\}$ la bola unidad en $H_R^1(\mathbb{R}^n)$. Queremos probar que $i(B) \subset H_R^0(\mathbb{R}^n)$ es precompacta, para lo cual utilizaremos el siguiente criterio:

Un conjunto K en un espacio métrico es precompacto si y sólo si admite una ε-red para todo $\varepsilon > 0$.

Consideremos la familia $\{J_\eta * u\colon u \in H^1_R(\mathbb{R}^n),\ \eta > 0\}$, donde $J_\eta\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones positivas de clase C^∞ que se anulan fuera de la bola $B(0,\eta)$ y $\int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(x)dx = 1$. Por las propiedades de la convolución, sabemos que las funciones de esta familia son de clase C^∞.

Parte I:
Para cada $\eta > 0$ fijo, la familia $K_\eta = \{J_\eta * u\colon u \in B\}$ es precompacta en $(C^0(B(0,R)), \|\cdot\|_\infty)$

Para demostrar esto utilizaremos el teorema de *Ascoli-Arzela*; vamos a verificar que estamos en hipótesis.

Veamos la continuidad. Tomemos $\varepsilon > 0$ y $u \in H^1_R(\mathbb{R}^n)$.

$$
\begin{aligned}
|J_\eta * u(x) - u(x)|^2 &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(y)u(x-y)dy - u(x)\right|^2 \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(y)u(x-y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(y)u(x)dy\right|^2 \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(y)[u(x-y)-u(x)]dy\right|^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(y)|u(x-y)-u(x)|^2 dy
\end{aligned}
$$

Para ver última desigualdad, consideremos la medida μ_η definida por

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)d\mu_\eta(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)J_\eta(y)dy$$

Como la función $|\cdot|^2$ es convexa y μ_η es una medida de probabilidad, vale la desigualdad de Jensen y por tanto

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(y)[u(x-y)-u(x)]dy\right|^2 = \left|\int_{\mathbb{R}^n} [u(x-y)-u(x)]d\mu_\eta(y)\right|^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y)-u(x)|^2 d\mu_\eta(y) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(y)|u(x-y)-u(x)|^2 dy
\end{aligned}
$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |J_\eta * u(x) - u(x)|^2 dx &\le \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(y) |u(x-y) - u(x)|^2 dy \right] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y) - u(x)|^2 dx \right] dy \\
&\le C^2 \int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(y) |y|^2 dy \\
&\le C^2 \int_{B(0,\eta)} J_\eta(y) |y|^2 dy \\
&\le C^2 |\eta|^2 \int_{B(0,\eta)} J_\eta(y) dy \ = \ C^2 |\eta|^2
\end{aligned}$$

lo que implica

$$\|J_\eta * u - u\| \le C|\eta| \tag{2.8}$$

Adoptemos la notación $u_\eta = J_\eta * u$. Luego,

$$\begin{aligned}
|u_\eta(x+h) &- u_\eta(x)| = \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(y)[u(x+h-y) - u(x-y)] dy \right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(y) |u(x+h-y) - u(x-y)| dy \\
&\le \left[\int_{\mathbb{R}^n} J_\eta^2(y) dy \right]^{1/2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h-y) - u(x-y)|^2 dy \right]^{1/2} \\
&\le C_\eta \left[\int_{\mathbb{R}^n} |u(z+h) - u(z)|^2 dz \right]^{1/2} \\
&\le C_\eta |h|^2 \|u\|_1^2 \le C'_\eta |h|^2
\end{aligned}$$

Por lo que si $\delta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{C'_\eta}}$, entonces $|u_\eta(x+h) - u_\eta(x)| < \varepsilon$. Observemos que δ no depende de u, por lo que a su vez obtenemos la equicontinuidad.

La acotación puntual es inmediata ya que

$$|J_\eta * u(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(y) u(x-y) dy \right| \le \|J_\eta\|_0 \|u\|_0 C_\eta$$

Parte II:

Por la ecuación 2.8 existe η_0 tal que para toda $u \in H_R^1(\mathbb{R}^n)$

$$\|J_{\eta_0} * u - u\|_0 < \frac{\varepsilon}{2}$$

.

Como por la parte *(I)* K_{η_0} es precompacto, existe una $(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\nu}})$-red $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$, con $\nu = vol[B(0,R)]$. Luego, para toda $u_{\eta_0} \in K_{\eta_0}$ existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que

$$\|u_{\eta_0} - \psi_i\|_\infty < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\nu}}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|u_{\eta_0} - \psi_i\|_0^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |u_{\eta_0}(x) - \psi_i(x)|^2 dx = \int_{B(0,R)} |u_{\eta_0}(x) - \psi_i(x)|^2 dx \\ &\leq \nu \|u_{\eta_0} - \psi_i\|_\infty^2 < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Ahora, si tomamos $u \in K$

$$\|u - \psi_i\|_0 \leq \|u - u_{\eta_0}\|_0 + \|u_{\eta_0} - \psi_i\|_0 < \varepsilon$$

y obtenemos que $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ es una ε-red para K.

$\square$

Corolario 2.15
Para todo $k \in \mathbb{N}$ la inclusión $i\colon H^k_R(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^0_R(\mathbb{R}^n)$ es compacta.

Demostración:
Este resultado es inmediato del hecho que $i\colon H^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ es continua y por tanto $i\colon H^k_R(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{k-1}_R(\mathbb{R}^n)$ también lo es.

$\square$

2.4.5. Espacios de Sobolev en Variedades

Consideremos ahora una variedad (M, g) compacta, conexa, sin borde de dimensión n. Como sabemos derivar débilmente, podemos definir al igual que en la sección 2.4.2

$$H^k(M) = W^k(M)$$

para $k \in \mathbb{Z}$, con la identificación correspondiente.

Teorema 2.16
Para todo $k \in \mathbb{N}$ la inclusión $i\colon H^k(M) \longrightarrow H^0(M)$ es compacta.

Esquema de la demostración:
La prueba es esencialmente la misma que la realizada en el teorema 2.13. La diferencia radica en la demostración del lema 2.14 previo al teorema. La segunda prueba que realizamos del mismo se adapta sin mayores dificultades al caso de variedades compactas. Luego se concluye la tesis al igual que en 2.15.

□

Capítulo 3

Primeros Resultados en $\mathbb{R}^n$

Teorema 3.1
El Laplaciano $\Delta_g \colon H^k(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_k) \longrightarrow H^{k-2}(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{k-2})$ *es un operador continuo* $\forall\, k \geq 2,\ k \in \mathbb{Z}$.

Demostración:
Consideremos primero $\Delta_g \colon (C^\infty(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (C^\infty(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$. Es claro que este operador es continuo ya que si $\{f_n\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es una sucesión convergente

$$f_n \rightrightarrows f \quad \Longrightarrow \quad \Delta_g f_n \rightrightarrows \Delta_g f$$

Luego, como $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^k(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_k)$, existe una única extensión continua $\Delta_g \colon H^k(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_k) \longrightarrow (C^\infty(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$. Además, sabemos que si $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ entonces $\Delta_g u \in H^{k-2}(\mathbb{R}^n)$, por lo que obtenemos el resultado.

$\square$

Teorema 3.2
El Laplaciano $\Delta_g \colon H^2(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *es un operador simétrico.*

Demostración:
Sean $u,\ v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si llamamos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a un abierto que contenga a los soportes de u y v, por 1.2 sabemos que vale

$$\langle \Delta_g u, v \rangle = \langle u, \Delta_g v \rangle$$

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^2(\mathbb{R}^n)$ y $\Delta_g \colon H^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ es continuo, este último resulta simétrico.

$\square$

Teorema 3.3
El Laplaciano $\Delta_g\colon H^2(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *es un operador "positivo".*

Demostración:
Tomemos $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto que contenga al soporte de u. Luego, por el teorema 1.3 sabemos que $\langle \Delta_g u, u\rangle \geq 0$. Como $\Delta_g\colon H^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ es continuo y $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^2(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $\Delta_g\colon H^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ también es positivo.

$\square$

Lema 3.4
Si $r,\, s \in \mathbb{R}$ *entonces* $(\Delta + I)^r\colon H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-2r}(\mathbb{R}^n)$ *es un operador unitario.*

Demostración:

$$\begin{aligned}
\|(\Delta + I)^r u\|_{s-2r}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s-2r} |\widehat{(\Delta + I)^r u}|^2(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s-2r} (1+|\xi|^2)^{2r} |\hat{u}|^2(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s} |\hat{u}|^2(\xi) d\xi = \|u\|_s^2
\end{aligned}$$

$\square$

Definición 3.1
Un operador $P\colon H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ se dice *coercitivo* si es continuo y existen números reales $\gamma_0,\, \gamma_1 > 0$ tal que

$$Re\langle Pu, u\rangle \geq \gamma_1 \|u\|_1 - \gamma_0 \|u\|_0$$

$\forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3.5
Si $P\colon H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ *es un operador coercitivo y* $Q\colon H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^n)$ *es un operador continuo, entonces la suma* $P + Q\colon H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ *es también un operador coercitivo.*

Demostración:
Sabemos que existen γ_0, γ_1 y $K \in \mathbb{R}^+$ tal que si $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$

$$Re\langle Pu, u\rangle \geq \gamma_1 \|u\|_1 - \gamma_0 \|u\|_0 \qquad \text{y}$$

$$|\langle Qu,u\rangle| \leq \|Qu\|_0\|u\|_0 \leq K\|u\|_1\|u\|_0 \leq \frac{\gamma_1}{2}\|u\|_1^2 + \frac{2}{\gamma_1}K^2\|u\|_0^2$$

donde la última desigualdad se debe a que

$$0 \leq (\sqrt{\frac{\gamma_1}{2}}\|u\|_1 - \sqrt{\frac{2}{\gamma_1}}K\|u\|_0)^2 \leq \frac{\gamma_1}{2}\|u\|_1^2 - K\|u\|_1\|u\|_0 + \frac{2}{\gamma_1}K^2\|u\|_0^2$$

Luego tenemos que

$$Re\langle (P+Q)u,u\rangle \geq \frac{\gamma_1}{2}\|u\|_1^2 - \left[\gamma_0 + \frac{2}{\gamma_1}K^2\right]\|u\|_0^2$$

y por tanto $P+Q$ es coercitivo.

$\square$

Lema 3.6
El Laplaciano $\Delta_g\colon H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ es un operador coercitivo.

Demostración:
Veamos primero la continuidad. Tomemos $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Luego

$$\begin{aligned}\|\Delta_g u\|_{-1} &= \sup_{\|v\|_1=1}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_g u\cdot v\,d\omega_g \leq \sup_{\|v\|_1=1}\int_{\mathbb{R}^n}\nabla_g u\,\nabla_g v\,d\omega_g \\ &\leq \|\nabla_g u\|_0\|\nabla_g v\|_0 \leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \leq \gamma_0\|u\|_1\|v\|_1 = \gamma_0\|u\|_1\end{aligned}$$

Donde el número γ_0 proviene de que las normas en $H^1(\mathbb{R}^n)$ son equivalentes y por tanto $\exists\,\gamma_0,\,\gamma_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\sqrt{\gamma_1}\|u\|_1 \leq \|u\|_{H^1} \leq \sqrt{\gamma_0}\|u\|_1\ \forall u \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Luego $\|\Delta_g u\|_{-1} \leq \gamma_0\|u\|_1$ y $\Delta_g\colon C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ es continuo. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^n)$, hay una única extensión continua a todo $H^1(\mathbb{R}^n)$. Vale la pena notar que existen funciones en $H^1(\mathbb{R}^n)$ que no poseen derivadas segundas por lo que pensamos que el operador Δ_g actúa derivando débilmente.

Vimos previamente que si $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\langle \Delta_g u,u\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\Delta_g u\cdot u\,d\omega_g = \||\nabla_g u|\|_0^2$$

por lo que

$$\langle \Delta_g u,u\rangle = \||\nabla_g u|\|_0^2 + \|u\|_0^2 - \|u\|_0^2 = \|u\|_{H^1}^2 - \|u\|_0^2 \geq \gamma_1\|u\|_1^2 - \|u\|_0^2$$

Sea $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u_n - u\|_1 \longrightarrow 0$. Tenemos por un lado que

$$\gamma_1\|u_n\|_1^2 - \|u_n\|_0^2 \longrightarrow \gamma_1\|u\|_1^2 - \|u\|_0^2$$

Además, $\exists K \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\langle \Delta_g u_n, u_n\rangle = \||\nabla_g u_n|\|_0^2 \leq K\||\nabla_g u|\|_0^2$$

Luego, por el teorema de convergencia dominada tenemos que

$$\lim_n \langle \Delta_g u_n, u_n\rangle = \lim_n \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_g u_n \cdot u_n = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_n \Delta_g u_n \cdot u_n = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_g u \cdot u = \langle \Delta_g u, u\rangle$$

Observamos que utilizamos la convergencia en $H^1(\mathbb{R}^n)$ para intercambiar el límite con el operador Δ_g, ya que este último es continuo allí.
Así, obtuvimos que $\forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \Delta_g u, u\rangle \geq \gamma_1\|u\|_1^2 - \|u\|_0^2$$

$\square$

Teorema 3.7 (Interpolación)
Si $T\colon H^{s_0}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{t_0}(\mathbb{R}^n)$ es un operador continuo tal que $T[H^{s_1}(\mathbb{R}^n)] \subset H^{t_1}(\mathbb{R}^n)$ para $s_1 > s_0$ y $t_1 > t_0$ entonces si $s_\theta = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$ y $t_\theta = (1-\theta)t_0 + \theta t_1$ para algún $\theta \in [0,1]$ entonces $T\colon H^{s_\theta}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{t_\theta}(\mathbb{R}^n)$ es continuo.

Corolario 3.8
Si $T\colon H^{s_0}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{t_0}(\mathbb{R}^n)$ y $T\colon H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{t_1}(\mathbb{R}^n)$ son biyectivas entonces $H^{s_\theta}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{t_\theta}(\mathbb{R}^n)$ es un homeomorfismo $\forall\theta \in [0,1]$.

A continuación demostraremos uno de los teoremas más importantes de estas notas.

Teorema 3.9
Sea g una métrica Riemanniana en $\mathbb{R}^n$ tal que g coincide con la métrica Euclídea en $B(0,2)^c$. Entonces, el Laplaciano $\Delta_g\colon H^2_R(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^2_R(\mathbb{R}^n)$ es diagonalizable y existe una base ortonormal de $L^2_R(\mathbb{R}^n)$ formada por funciones propias de Δ_g.

Demostración:
<u>Parte I:</u> Si $P\colon H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ *es un operador coercitivo entonces* $\exists\, \gamma_0$ *tal que el operador* $P+\gamma I\colon H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ *es biyectivo* $\forall \gamma \geq \gamma_0$.

Observemos que

$$Re\langle (P+\gamma I)u, u\rangle = Re\langle Pu, u\rangle + \gamma\|u\|_0^2 \geq \gamma_1\|u\|_1^2 - \|u\|_0^2 + \gamma\|u\|_0^2 \geq \gamma_1\|u\|_1^2$$

de donde $P+\gamma I$ es inyectivo. Además,

$$\|(P+\gamma I)u\|_{-1} \geq \frac{1}{\|u\|_1}|\langle (P+\gamma I)u, u\rangle| \geq \frac{1}{\|u\|_1}\left[\gamma_1\|u\|_1^2 - \|u\|_0^2 + \gamma\|u\|_0^2\right] \geq \|u\|_1$$

Por lo que $Im(P+\gamma I)$ es un subespacio cerrado de $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$.

Veamos ahora que es sobreyectivo. Supongamos que no lo es, entonces por *Hahn-Banach* existe $F \in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ tal que $F \neq 0$ y $F|_{Im(P+\gamma I)} = 0$. Como $(H^{-1}(\mathbb{R}^n))^* \simeq H^1(\mathbb{R}^n)$, esto es equivalente a decir que existe $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $u \neq 0$, tal que $\phi(u) = 0\ \forall \phi \in Im(P+\gamma I)$. En otras palabras

$$\langle (P+\gamma I)v, u\rangle = 0 \qquad\qquad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

En particular

$$0 = \langle (P+\gamma I)u, u\rangle \geq \|u\|_1$$

por lo que $u=0$ contradiciendo lo afirmado.

<u>Parte II:</u> Para todo $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$, *el operador* $(\Delta_g + \gamma I)\colon H^{r+2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^r(\mathbb{R}^n)$ *es continuo y biyectivo* $\forall\, \gamma \geq \sigma(r)$.

Definamos para todo $r \in \mathbb{Z}$ el operador $P_1^{(r)}\colon H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ por

$$P_1^{(r)}u = (\Delta + I)^r \Delta_g (\Delta + I)^{-r} u$$

$\forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Llamemos T al operador $T = (\Delta+I)^r\Delta_g - \Delta_g(\Delta+I)^r$. Luego T es un operador diferencial de orden $\leq 2r+1$, es decir que no aparecen derivadas de orden $2r+2$. Observemos eso:

Supongamos primero que $r=1$. Entonces,

$$\begin{aligned} T &= (\Delta+I)\Delta_g - \Delta_g(\Delta+I) = \Delta\Delta_g + \Delta_g - \Delta_g\Delta - \Delta_g \\ &= \Delta\Delta_g - \Delta_g\Delta \end{aligned}$$

y consideremos $T = \Delta\Delta_g - \Delta_g\Delta \colon H^3(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n)$.

El operador T es continuo pues los mapas

$$\Delta \colon H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n) \qquad \Delta \colon H^3(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\Delta_g \colon H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n) \qquad \Delta_g \colon H^3(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$$

lo son.

Para simplificar notación escribiremos

$$\Delta = \sum_k \partial_k^2 \qquad\qquad \Delta_g = a\sum_{ij} \partial_i a_{ij} \partial_j$$

Calculemos $\Delta\Delta_g = \sum_k \partial_k^2 \Delta_g$:

$$\partial_k^2 \Delta_g = \partial_k^2 \left[a \sum_{ij} \partial_i a_{ij} \partial_j \right]$$

$$= \partial_k^2 a \sum_{ij} \partial_i a_{ij} \partial_j + 2\partial_k a \sum_{ij} \partial_k \partial_i a_{ij} \partial_j + a \sum_{ij} \partial_k^2 \partial_i a_{ij} \partial_j$$

Observamos que el único término que podría involucrar derivadas de orden 4 es el último sumando del miembro de la derecha, por lo que lo desarrollaremos un poco más.

$$a \sum_{ij} \partial_k^2 \partial_i a_{ij} \partial_j = a \sum_{ij} \partial_k^2 [\partial_i a_{ij} \partial_j + a_{ij} \partial_i \partial_j]$$

$$= a \sum_{ij} \partial_k^2 [\partial_i a_{ij} \partial_j] + a \sum_{ij} [\partial_k^2 a_{ij} \partial_i \partial_j + 2\partial_k a_{ij} \partial_i \partial_j + a_{ij} \partial_k^2 \partial_i \partial_j]$$

De donde $\Delta\Delta_g$ se escribe como

$$\Delta\Delta_g = T_3 + a \sum_{ijk} a_{ij} \partial_k^2 \partial_i \partial_j$$

con T_3 un operador que involucra derivadas hasta orden 3. Por otro lado,

$$\Delta_g \Delta = a \sum_{ij} \partial_i \left[a_{ij} \partial_j \left(\sum_k \partial_k^2 \right) \right]$$

$$= a \sum_{ij} \left[\partial_i a_{ij} \sum_k \partial_j \partial_k^2 + a_{ij} \sum_k \partial_i \partial_j \partial_k^2 \right]$$

$$= a\sum_{ij}\left[\partial_i a_{ij}\sum_k \partial_j\partial_k^2\right] + a\sum_{ijk} a_{ij}\partial_i\partial_j\partial_k^2$$

por lo que $\Delta_g\Delta$ se escribe como

$$\Delta_g\Delta = T_3' + a\sum_{ijk} a_{ij}\partial_i\partial_j\partial_k^2$$

con T_3' un operador que involucra derivadas hasta orden 3.

Luego podemos escribir $T = T_3 - T_3' + R$, donde R resulta

$$R = \sum_{ijk} a_{ij}\partial_k^2\partial_i\partial_j - \sum_{ijk} a_{ij}\partial_i\partial_j\partial_k^2$$

Si tomamos $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces, por los teoremas de intercambio de derivadas de Schwartz, $Ru = 0$ y por tanto $T[C^\infty(\mathbb{R}^n)] \subseteq H^0(\mathbb{R}^n)$. Luego, como T es continua y $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^3(\mathbb{R}^n)$ resulta

$$T\colon H^3(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^n)$$

lo que implica que $R = 0$, pues de lo contrario existiría $v \in H^{-1}(\mathbb{R}^n) \cap Im\, T$.

Concluimos entonces que

$$\Delta\Delta_g - \Delta_g\Delta = T_3 - T_3'$$

por lo que **no** se involucran derivadas cuartas.

Para otro entero $r > 1$ puede probarse por inducción completa, utilizando la fórmula del *binomio de Newton* para desarrollar la expresión $(\Delta + I)^r$.

Luego, escribiendo $(\Delta + I)^r\Delta_g = \Delta_g(\Delta + I)^r + T$ tenemos que

$$P_1^{(r)} = (\Delta + I)^r\Delta_g(\Delta + I)^{-r} = \Delta_g + T(\Delta + I)^{-r}$$

Observamos que $T(\Delta + I)^{-r}\colon H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^n)$ es un operador continuo pues $(\Delta + I)^{-r}\colon H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{2r+1}(\mathbb{R}^n)$ y $T\colon H^{2r+1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^n)$ lo son.

Como además por el lema 3.6 Δ_g es coercitivo, el lema 3.5 implica que $P_1^{(r)}$ también es coercitivo y por tanto está en las hipótesis de la Parte *I*. Por ende, $\forall\,\gamma \geq \sigma(r)$, $P_1^{(r)} + \gamma I\colon H^{2r+1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{2r-1}(\mathbb{R}^n)$ es biyectivo. Ahora, como

$$P_1^{(r)} + \gamma I = (\Delta + I)^r[\Delta_g + \gamma I](\Delta + I)^{-r}$$

el operador $\Delta_g + \gamma I \colon H^{2r+1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{2r-1}(\mathbb{R}^n)$ también es biyectivo y continuo $\forall\, \gamma \geq \sigma(r)$.

Utilizando el teorema de interpolación se deduce el resultado de esta etapa. Observemos de qué manera:
Dado $r \in \mathbb{Z}$ sabemos que existen $\sigma(r)$ y $\sigma(r)'$ de manera que

$$(\Delta_g + \gamma I) \colon H^{2r+1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{2r-1}(\mathbb{R}^n)$$

es biyectivo y continuo $\forall\, \gamma \geq \sigma(r)$ y

$$(\Delta_g + \gamma I) \colon H^{2r+3}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{2r+1}(\mathbb{R}^n)$$

es biyectivo y continuo $\forall\, \gamma \geq \sigma(r)'$. Luego, si tomamos $\tilde{\sigma}(r) = \text{máx}\{\sigma(r), \sigma(r)'\}$ obtenemos que ambos son biyectivos y continuos $\forall\, \gamma \geq \tilde{\sigma}(r)$.

Luego, por el teorema de interpolación concluimos que

$$(\Delta_g + \gamma I) \colon H^{2r}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{2r-2}(\mathbb{R}^n)$$

también es biyectivo y continuo $\forall\, \gamma \geq \tilde{\sigma}(r)$.

Observación: Las partes *1* y *2* de este teorema valen en particular cuando los operadores tienen dominio $H^s_R(\mathbb{R}^n)$ en lugar de todo $H^s(\mathbb{R}^n)$.

<u>*Parte III:*</u> $(\Delta_g + \gamma I)^{-1} \colon H^0_R(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^0_R(\mathbb{R}^n)$ *es un operador compacto y autoadjunto.*

Observamos que, por el teorema de la aplicación abierta, el operador

$$(\Delta_g + \gamma I)^{-1} \colon H^0_R(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^2_R(\mathbb{R}^n)$$

es también es continuo $\forall\, \gamma \geq \sigma$ con $\sigma = \tilde{\sigma}(0)$. A su vez, por el teorema 2.15, la inclusión $i \colon H^2_R(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^0_R(\mathbb{R}^n)$ es compacta, por lo que considerando $(\Delta_g + \gamma I)^{-1} \colon H^0_R(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^0_R(\mathbb{R}^n)$ como

$$H^0_R(\mathbb{R}^n) \xrightarrow[(\Delta_g+\gamma I)^{-1}]{} H^2_R(\mathbb{R}^n) \xrightarrow[i]{} H^0_R(\mathbb{R}^n)$$

éste resulta un operador compacto, por ser composición de un continuo con un compacto.

Veamos ahora que $(\Delta_g + \gamma I)^{-1} \colon H_R^0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_R^0(\mathbb{R}^n)$ es autoadjunto:

Como $C_R^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H_R^2(\mathbb{R}^n)$, $D = (\Delta_g + \gamma I)[C_R^\infty(\mathbb{R}^n)]$ es denso en $H_R^0(\mathbb{R}^n)$. Tomemos u_0 y v_0 en D. Luego existen u, $v \in C_R^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = (\Delta_g + \gamma I)u_0$ y $v = (\Delta_g + \gamma I)v_0$. Ahora,

$$\langle(\Delta_g + \gamma I)^{-1}u, v\rangle = \langle u_0, (\Delta_g + \gamma I)v_0\rangle = \langle(\Delta_g + \gamma I)u_0, v_0\rangle = \langle u, (\Delta_g + \gamma I)^{-1}v\rangle$$

por lo que $(\Delta_g + \gamma I)^{-1}|_D$ es simétrico y por tanto $(\Delta_g + \gamma I)^{-1} \colon H_R^0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_R^0(\mathbb{R}^n)$ también lo es. Como además es continuo resulta autoadjunto.
Luego, por el *Teorema Espectral* para operadores compactos y autoadjuntos, $(\Delta_g + \gamma I)^{-1}$ es diagonalizable en una base ortonormal de $H_R^0(\mathbb{R}^n) = L_R^2(\mathbb{R}^n)$.

Conclusión:
Observamos que si λ es un valor propio de $(\Delta_g + \gamma I)^{-1}$ y u una función propia asociada a λ, tenemos que

$$(\Delta_g + \gamma I)^{-1}u = \lambda u \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}u = (\Delta_g + \gamma I)u \Leftrightarrow \Delta_g u = [\frac{1}{\lambda} - \gamma]u$$

Por tanto u es una función propia para $(\Delta_g + \gamma I)^{-1}$ si y sólo si es función propia para Δ_g. De aquí obtenemos **que existe una base ortonormal de $L_R^2(\mathbb{R}^n)$ formada por funciones propias de** Δ_g. De hecho obtenemos también que estas funciones están en $H_R^2(\mathbb{R}^n)$.

□

Corolario 3.10
Las funciones propias del Laplaciano Δ_g son de clase C^∞.

Demostración:
Vimos que u es una función propia de Δ_g si y sólo si es función propia de $(\Delta_g + \gamma I)^{-1}$. La imagen de $(\Delta_g + \gamma I)^{-1}$ es de hecho $H_R^2(\mathbb{R}^n)$ y por tanto $u \in H_R^2(\mathbb{R}^n)$. Ahora consideramos $(\Delta_g + \gamma I)^{-1} \colon H_R^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_R^2(\mathbb{R}^n)$. La función u será también propia para este operador, que de hecho tiene imagen $H_R^4(\mathbb{R}^n)$ y por tanto $u \in H_R^4(\mathbb{R}^n)$. Siguiendo esta razonamiento inductivamente, vemos que $u \in H_R^{2k}(\mathbb{R}^n)$ para todo k lo que implica que u tiene derivadas de todos los órdenes.

□

Corolario 3.11
Todos los valores propios de Δ_g son reales no negativos y tienen multiplicidad finita.

Demostración:
Ya sabemos por 3.3 que los valores propios de Δ_g son reales no negativos. Como $(\Delta_g + \gamma I)^{-1}$ es compacto y autoadjunto, todos sus valores propios no nulos tienen multiplicidad finita y por tanto los de Δ_g también. Sabemos además que el valor propio 0 de Δ_g tiene multiplicidad 1 ya que si $\Delta_g u = 0$ tenemos que $u \in C_R^\infty(\mathbb{R}^n))$ y por tanto

$$0 = \langle \Delta_g u, u \rangle = \langle \nabla_g u, \nabla_g u \rangle = |||\nabla_g u|||^2$$

de donde u es constante, *i.e.*, el subespacio propio asociado a 0 es el conjunto de las funciones constantes en $C_R^\infty(\mathbb{R}^n)$.

□

Corolario 3.12
El espectro Spec(Δ_g) es un conjunto discreto tendiendo a infinito.

Demostración:
Sabemos que los valores propios de $(\Delta_g + \gamma I)^{-1}$ son un conjunto infinito, discreto, acotado y acumulando en el 0. Por ende, como los valores propios de Δ_g vienen dados por $\frac{1}{\lambda} - \gamma$, con λ valor propio de $(\Delta_g + \gamma I)^{-1}$, el espectro de Δ_g es un conjunto infinito, discreto y no acotado superiormente.

□

Capítulo 4

El Laplaciano en variedades

4.1. Localización

En el capítulo 1 hicimos un estudio profundo del Laplaciano en el caso $M = \mathbb{R}^n$ equipada con una métrica Riemanniana g. Queremos obtener ahora resultados similares definiendo el Laplaciano sobre una variedad Riemanniana M con métrica g. Fundamentalmente, **probar la existencia de una base ortonormal de $L^2(M)$ formada por funciones propias del Laplaciano Δ_g**. Para esto, es crucial la hipótesis de que la variedad M sea compacta. De lo contrario, el resultado es en general falso. Por cuestiones técnicas, pediremos además que M sea orientable y no tenga borde. Pedimos también la hipótesis de conexión, que no genera restricciones de ningún tipo, reduciéndose el caso no conexo a estudiar cada componente conexa.

Teorema 4.1
Sea (M, g) variedad Riemanniana compacta, conexa, sin borde y orientada. Entonces existe una base ortonormal de $L^2(M)$ formada por funciones propias del Laplaciano Δ_g.

Demostración:
Utilizaremos varias ideas del teorema 3.9 junto con la técnica clásica de localización para utilizar los resultados obtenidos en el caso $M = \mathbb{R}^n$.

Comencemos considerando $\{(U_1, h_1), ..., (U_n, h_n)\}$ un atlas finito de M con $h_i \colon U_i \longrightarrow B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$, $\forall\, i \in \{1, ..., n\}$.

Sea $p_1, ..., p_n$ una **partición de la unidad** C^∞ subordinada al cubrimiento $\{U_1, ..., U_n\}$, es decir:

1. $p_i \colon U_i \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞ con soporte compacto $\forall\, i \in \{1, ...n\}$.
2. $p_i \geq 0 \;\; \forall\, i \in \{1, ...n\}$.
3. $\sum_i p_i(x) = 1 \;\; \forall\, x \in M$.

<u>Parte I:</u> *Existe* $\overline{\gamma} \in \mathbb{R}$ *tal que* $\Delta_g + \gamma I : H^2(M) \longrightarrow H^0(M)$ *es biyectivo* $\forall \gamma \geq \overline{\gamma}$.

Definamos Δ_i en $(\mathbb{R}^n, g_i)$ con g_i una métrica Riemanniana tal que coincide con la métrica Euclídea en $B(0,2)^c$ y en $B(0,1)$ la definimos de la siguiente manera: Dado $z \in B(0,1)$ y v, $w \in \mathbb{R}^n$

$$\langle v, w \rangle_z = \langle (d_z h_i^{-1})v, (d_z h_i^{-1})w \rangle_{h_i^{-1}(z)}$$

Observación: Definidas las métricas de esta manera, los mapas $d_x h_i : T_x M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ resultan isometrías $\forall\, x \in U_i$.

Sabemos por el teorema 3.9 que $\Delta_i + \gamma I \colon H^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^n)$ es biyectivo $\forall\, \gamma \geq \gamma_i$. Llamemos $\overline{\gamma} = \max\{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$. Luego, para todo $i \in \{1, ..., n\}$

$$\Delta_i + \gamma I \colon H^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^n)$$

es biyectivo $\forall\, \gamma \geq \overline{\gamma}$.

Tomemos $\gamma \geq \overline{\gamma}$ y $v \in H^0(M)$ y definamos

$$v_i := p_i v$$

para todo $i \in \{1, ..., n\}$, y luego

$$\hat{v}_i(z) = \begin{cases} (p_i v \circ h_i^{-1})(z) & z \in B(0,1) \\ 0 & z \in B(0,1)^c \end{cases}$$

De esta manera, $v_i \in H^0(\mathbb{R}^n) \; \forall\, i \in \{1, ..., n\}$. Luego sabemos que para cada i existe $\hat{u}_i \in H^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(\Delta_i + \gamma I)\hat{u}_i = \hat{v}_i$$

Para cada i existe $V_i \subset M$ abierto tal que $\overline{U}_i \subset V_i$. Consideremos $\tilde{h}_i \colon V_i \longrightarrow B(0,2)$ una extensión de h_i de manera que $\tilde{h}_i \in H^2(M)$ y sea biyectiva. Definimos entonces $u_i \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$u_i(x) = \begin{cases} (\hat{u}_i \circ \tilde{h}_i)(x) & x \in V_i \\ 0 & x \in (V_i)^c \end{cases}$$

de donde $u_i \in H^2(V_i)$.

Sabemos que $u_i|_{U_i^c} = 0$ pues $\hat{u}_i$ es nula en la bola $B(0,1)$ dado que $\hat{v}_i$ lo es. Entonces, si consideramos la restricción $u_i|_{U_i}$, tenemos que $u_i|_{U_i} \in H^2(U_i)$ valiendo 0 en $V_i \backslash U_i$. Como además u_i es nula en $(V_i)^c$, obtenemos que $u_i \in H^2(M)$, y su fórmula explícita viene dada por

$$u_i(x) = \begin{cases} (\hat{u}_i \circ h_i)(x) & x \in U_i \\ 0 & x \in (U_i)^c \end{cases}$$

Tenemos entonces que para cada i, en U_i vale

$$\gamma \hat{u}_i + \Delta_i \hat{u}_i = \hat{v}_i$$

$$\Leftrightarrow \gamma \hat{u}_i \circ h_i + \Delta_i \hat{u}_i \circ h_i = \hat{v}_i \circ h_i$$

$$\Leftrightarrow \gamma u_i + \Delta_i \hat{u}_i \circ h_i = v_i$$

Como las h_i son isometrías tenemos que

$$\Delta_g u_i = \Delta_g(\hat{u}_i \circ h_i) = \Delta_i \hat{u}_i \circ h_i$$

y por tanto en U_i

$$(\gamma + \Delta_g) u_i = v_i$$

Si definimos $u \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ como $u := \sum_{i=1}^n u_i$, entonces $u \in H^2(M)$ y verifica

$$\begin{aligned} (\gamma + \Delta_g) u &= \gamma u + \Delta_g u = \gamma \sum_{i=1}^n u_i + \Delta_g \sum_{i=1}^n u_i \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma u_i + \Delta_g u_i = \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n p_i v = v \end{aligned}$$

Por lo que el operador $\Delta_g + \gamma I : H^2(M) \longrightarrow H^0(M)$ es sobreyectivo.
Como por el teorema 3.3 $\Delta_g \colon H^2(M) \longrightarrow H^0(M)$ es positivo, tenemos que

$$\|(\Delta_g + \gamma I)u\|^2 = \|\Delta_g u\|^2 + 2\gamma \langle \Delta_g u, u \rangle + |\gamma|^2 \|u\|^2 \geq |\gamma|^2 \|u\|^2$$

de donde el operador $\Delta_g + \gamma I : H^2(M) \longrightarrow H^0(M)$ es inyectivo.

<u>Parte II:</u> *El operador $\Delta_g + \gamma I\colon H^2(M) \longrightarrow H^0(M)$ es continuo.*

$$\begin{aligned}
\|(\Delta_g + \gamma I)u\|^2 &= \|\sum_i (\Delta_g + \gamma I)u_i\|^2 \leq \sum_i \|(\Delta_g + \gamma I)u_i\|^2 \\
&= \sum_i \|(\Delta_g + \gamma I)(\hat{u}_i \circ h_i)\|^2 \leq \sum_i \alpha_i \|u_i\|^2 \\
&\leq (\max_i \alpha_i) \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 \leq \max_i \alpha_i \|u\|^2
\end{aligned}$$

Donde los α_i se obtienen de la siguiente manera:

$$\|(\Delta_g + \gamma I)u_i\|^2 = \|(\Delta_g + \gamma I)(\hat{u}_i \circ h_i)\|^2 = \|\Delta_i \hat{u}_i + \gamma\, u_i\|^2$$

$$= \|\Delta_i \hat{u}_i + \gamma\, \hat{u}_i - \gamma\, \hat{u}_i + \gamma\, u_i\|^2 \leq \|(\Delta_i + \gamma I)\hat{u}_i\|^2 + |\gamma|^2 \|\hat{u}_i\|^2 + |\gamma|^2 \|u_i\|^2$$

$$\leq (K + |\gamma|^2)\|\hat{u}_i\|^2 + |\gamma|^2 \|u_i\|^2 \leq (K + |\gamma|^2)\|u_i\|^2 \|h_i^{-1}\|^2 + |\gamma|^2 \|u_i\|^2$$

$$\leq \{[\,(K + |\gamma|^2)\|h_i^{-1}\|^2\,] + |\gamma|^2\}\|u_i\|^2$$

<u>Parte III:</u> *El operador $(\Delta_g + \gamma I)^{-1}\colon H^0(M) \longrightarrow H^0(M)$ es compacto y autoadjunto $\forall\, \gamma \geq \overline{\gamma}$.*

Probemos primero que es compacto. Por el teorema 2.16 la inclusión $i\colon H^k(M) \longrightarrow H^0(M)$ es compacta. Por la parte *II* sabemos que $(\Delta_g + \gamma I)^{-1}\colon H^0(M) \longrightarrow H^2(M)$ es continuo y, al igual que en la prueba de 3.9, $(\Delta_g + \gamma I)^{-1}\colon H^0(M) \longrightarrow H^0(M)$ es compacto.

Veamos ahora que es autoadjunto. Como $C^\infty(M)$ es denso en $H^0(M)$, $D = (\Delta_g + \gamma I)[C^\infty(M)]$ es denso en $H^0(M)$. Tomemos u_0 y v_0 en D. Luego existen u, $v \in C^\infty(M)$ tal que $u_0 = (\Delta_g + \gamma I)u$ y $v_0 = (\Delta_g + \gamma I)v$.

Ahora,

$$\langle (\Delta_g + \gamma I)^{-1} u_0, v_0 \rangle = \langle u, (\Delta_g + \gamma I)v \rangle = \langle \sum_i u^i, (\Delta_g + \gamma I)(\sum_j v^j) \rangle$$

$$= \langle \sum_i u^i, \sum_j (\Delta_g + \gamma I)v^j \rangle = \langle \sum_i u^i, \sum_j ((\Delta_g + \gamma I)v)^j \rangle$$

$$= \sum_{ij} \langle u^i, ((\Delta_g + \gamma I)v)^j \rangle = \sum_{i} \langle u^i, ((\Delta_g + \gamma I)v)^i \rangle$$

Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\langle u^i, ((\Delta_g + \gamma I)v)^i \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} u^i(x)((\Delta_g + \gamma I)v)^i(x)dx \\
&= \int_M \hat{u}^i(h_i(x))((\Delta_g + \gamma I)\hat{v}(h_i(x)))^i d\omega_g(x) \\
&= \int_M \hat{u}^i(h_i(x))((\Delta_i + \gamma I)\hat{v})^i(h_i(x))d\omega_g(x) \qquad (4.1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}^i(x)((\Delta_i + \gamma I)\hat{v})^i(x)dx \\
&= \langle \hat{u}^i, ((\Delta_i + \gamma I)\hat{v})^i \rangle
\end{aligned}$$

Aquí utilizamos la fórmula de cambio de variable y el hecho de que las h_i son isometrías, implicando esto último que $|detJh_i(x)| = 1 \ \forall x \in M$.
Una cuenta análoga muestra que

$$\langle ((\Delta_g + \gamma I)u)^i, v^i \rangle = \langle ((\Delta_i + \gamma I)\hat{u})^i, \hat{v}^i \rangle$$

De la prueba de 3.9 sabemos que $(\Delta_i + \gamma I)^{-1}$ es autoadjunto, por lo que

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta_g + \gamma I)^{-1} u_0^i, v_0^i \rangle &= \langle u^i, (\Delta_g + \gamma I)v^i \rangle \\
&= \langle ((\Delta_g + \gamma I)u)^i, v^i \rangle = \langle u_0^i, (\Delta_g + \gamma I)^{-1} v_0^i \rangle
\end{aligned}$$

y por ende

$$\langle (\Delta_g + \gamma I)^{-1} u_0, v_0 \rangle = \langle u_0, (\Delta_g + \gamma I)^{-1} v_0 \rangle$$

Tenemos entonces que $(\Delta_g + \gamma I)^{-1}|_D$ es autoadjunto, lo que implica que $(\Delta_g + \gamma I)^{-1} \colon H^0(M) \longrightarrow H^0(M)$ también lo es.

De esta manera concluimos que **existe una base ortonormal de $L^2(M)$ formada por funciones propias de Δ_g.**

□

Obtenemos también los corolarios

Corolario 4.2
Las funciones propias del Laplaciano Δ_g son de clase C^∞.

Corolario 4.3
Todos los valores propios de Δ_g tienen multiplicidad finita.

Corolario 4.4
El espectro $Spec(\Delta_g)$ es discreto.

Teorema 4.5
Para todo $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 1$, el operador $(\Delta_g + \gamma I)\colon H^{s+2}(M) \longrightarrow H^s(M)$ es continuo y biyectivo $\forall\, \gamma \geq \sigma(s)$.

4.2. El Laplaciano en la esfera S^n

Adoptemos la siguiente notación:
Si $p \in M$ notaremos $B(p,\varepsilon)$ la bola geodésica centro p y radio ε, *i.e.* $B(p,\varepsilon) = exp_p[B(0,\varepsilon)]$ y el mapa exponencial $exp_p\colon B(0,\varepsilon) \subset T_pM \longrightarrow B(p,\varepsilon) \subset M$ es un difeomorfismo.

Si $f\colon B(p,\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $q \in M$ entonces el valor de $f(q)$ sólo depende de la distancia de q a p, por tanto f se puede escribir como

$$f(q) = (\varphi \circ r)(q)$$

Donde $r(q) = d(p,q)$ y φ es una cierta función $\varphi\colon [0,\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Proposición 4.6 (El Laplaciano en coordenadas Polares)

$$\Delta f = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(\frac{\theta'}{\theta} + \frac{n-1}{r}\right)$$

Donde $\theta = \sqrt{det(g_{ij})}$ *al igual que antes.*

Proposición 4.7
Consideramos la esfera (S^n, g_0) *dentro de* $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$*, siendo* g_0 *la métrica Euclídea de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *y para el caso de la esfera la métrica heredada. Entonces, si* $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función de clase* C^∞ *se verifica que*

$$(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f)|_{S^n} = \Delta^{S^n}(f|_{S^n}) - \left.\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right|_{S^n} - n\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{S^n}$$

Demostración:
Sea $x_0 \in S^n$ y consideremos $x_1, ..., x_n$ tal que el conjunto $\{x_o, x_1, ..., x_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$. A su vez, el conjunto $\{x_1, ..., x_n\}$ es una base ortonormal de $T_{x_0}M$. Consideremos, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, las geodésicas de la esfera que pasan por x_0 con velocidad x_i, es decir

$$\gamma_i(t) = \cos t \cdot x_0 + \sin t \cdot x_i$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2(f\circ\gamma_i)}{dt^2}(t) = -\cos t\frac{\partial f}{\partial x_0}(\gamma_i(0)) \quad &- \quad \sin t\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}(\gamma_i(0)) \\ &- \quad \sin t\frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_i(0)) + \cos t\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\gamma_i(0))\end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{d^2(f\circ\gamma_i)}{dt^2}(0) = -\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)$$

Luego

$$\begin{aligned}\Delta^{S^n}(f|_{S^n})(x_0) &= -\sum_{i=0}^n \frac{\partial^2(f\circ\gamma_i)}{dt^2}(0) = -\sum_{i=0}^n + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) - \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0)\right] \\ &= -\sum_{i=0}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) + n\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0)\end{aligned}$$

Sabemos que el Laplaciano usual en $\mathbb{R}^{n+1}$ viene dado por

$$(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f)(x) = -\sum_{i=0}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}(x)$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, la restricción viene dada por la misma fórmula y tenemos que

$$
\begin{aligned}
(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f)|_{S^n}(x_0) &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}(x_0) \\
&= \Delta^{S^n}(f|_{S^n})(x_0) - n\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}(x_0)
\end{aligned}
$$

$\square$

Aplicación 1.
Notemos por $r : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función distancia al origen y consideremos para $\alpha \in \mathbb{R}$ la función $r^{2\alpha}$. Observamos que esta función es de clase C^2 y que su restricción a la esfera S^n es la función constante 1. Por esto, su Laplaciano en la esfera es cero y por la proposición anterior tenemos que

$$
(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} r^{2\alpha})|_{S^n} = -\left.\frac{\partial^2 r^{2\alpha}}{\partial r^2}\right|_{S^n} - n\left.\frac{\partial r^{2\alpha}}{\partial r}\right|_{S^n} = -2\alpha(2\alpha - 1) - n\,2\alpha
$$

Observamos además que

$$
\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}}(r^{2\alpha}) = -2\alpha(2\alpha + n - 1)r^{2(\alpha-1)}
$$

por lo que el Laplaciano de un polinomio homogéneo de grado 2α es un polinomio homogéneo de grado $2\alpha - 2$.

Aplicación 2.
Consideremos P un polinomio en $\mathbb{R}^{n+1}$ homogéneo, de grado k, que además sea armónico, es decir que verifica $\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} P = 0$. Entonces tenemos que

$$
0 = \Delta^{S^n}(P|_{S^n}) - k(k-1)\,P|_{S^n} - n\,k\,P|_{S^n}
$$

si y sólo si

$$
\Delta^{S^n}(P|_{S^n}) = k(k+n-1)P|_{S^n}
$$

Por lo que los polinomios homogéneos armónicos en la esfera son funciones propias del Laplaciano Δ^{S^n} para cualquier $k \geq 1$.

Más interesante aún es el hecho de que estos polinomios constituyen **todas** las funciones propias del Laplaciano y forman por tanto una base ortonormal de $L^2(S^n)$. Probaremos esto a continuación.

Notación 4.1
Notaremos por $\mathcal{P}_k$ al subespacio de los polinomios en $\mathbb{R}^{n+1}$ homogéneos de grado k. Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $\tilde{f}$ denotará su restricción a la esfera S^n.
El conjunto $\bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{P}_k$ puede ser equipado con el producto interno dado por

$$\langle p, q\rangle = \int_{S^n} \tilde{p}\,\tilde{q}\,d\omega_{g_0}$$

donde g_0 es la métrica heredada de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Notación 4.2
Notaremos por $\mathcal{H}_k$ al subespacio de los polinomios en $\mathbb{R}^{n+1}$ homogéneos y armónicos, de grado k. Si consideramos la restricción $R\colon \mathcal{H}_k \longrightarrow C^\infty(S^n)$ con $R(p) = p|_{S^n}$, R es un mapa inyectivo: la homogeneidad asegura que si dos polinomios coinciden en la esfera S^n entonces coinciden en cualquier esfera $\partial\overline{B(0,r)}$, y por ende en todo $\mathbb{R}^{n+1}$. Por lo tanto, R es un isomorfismo sobre su imagen, la cual notaremos $\tilde{\mathcal{H}}_k$.

Teorema 4.8
El espectro del Laplaciano en la esfera (S^n, g_0) es el conjunto

$$Spec(\Delta_{g_0}) = \{\lambda_k = k(n+k-1) \colon k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$$

Además, los subespacios propios E_k asociados a cada valor propio λ_k son exactamente los conjuntos $\tilde{\mathcal{H}}_k$.

Lema 4.9
Para todo $k \geq 0$

$$\mathcal{P}_{2k} = \mathcal{H}_{2k} \oplus r^2\mathcal{H}_{2k-2} \oplus \cdots \oplus r^{2k}\mathcal{H}_0$$

$$\mathcal{P}_{2k+1} = \mathcal{H}_{2k+1} \oplus r^2\mathcal{H}_{2k-1} \oplus \cdots \oplus r^{2k}\mathcal{H}_1$$

donde además los subespacios en cada descomposición son ortogonales dos a dos.

Demostración:
Haremos esta prueba por inducción completa.
Para $k = 0$ y $k = 1$ se verifica trivialmente ya que $\mathcal{H}_0 = \mathcal{P}_0$, las funciones constantes, y $\mathcal{H}_1 = \mathcal{P}_1$, las funcionales lineales. Supongamos que para algún $k \geq 2$ vale la descomposición $\mathcal{P}_k = \mathcal{H}_k \oplus r^2\mathcal{P}_{k-2}$ y probemos que vale $\mathcal{P}_{k+2} = \mathcal{H}_{k+2} \oplus r^2\mathcal{P}_k$.

Veamos que la suma $\mathcal{H}_{k+2} + r^2\mathcal{P}_k \subset \mathcal{P}_{k+2}$ es directa y que los factores son ortogonales:
(1) $\tilde{\mathcal{H}}_{k+2}$ y $\tilde{\mathcal{P}}_k$ en $C^\infty(S^n)$ son ortogonales:
Sabemos, por la aplicación 2 de la proposición 4.7 que $\tilde{\mathcal{H}}_{k+2} \subset E_{k+2}$. Tenemos entonces, utilizando la hipótesis inductiva, que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_k \subset \tilde{\mathcal{H}}_k \oplus \tilde{\mathcal{P}}_{k-2} &\subset E_k \oplus \tilde{\mathcal{P}}_{k-2} = E_k \oplus \tilde{\mathcal{H}}_{k-2} \oplus \tilde{\mathcal{P}}_{k-4} \\ &\subset E_k \oplus E_{k-2} \oplus \tilde{\mathcal{P}}_{k-4} \subset \cdots \end{aligned}$$

por lo que $\tilde{\mathcal{P}}_k$ está contenido en la suma de subespacios propios asociados a valores propios distintos de $(k+2)(n+k+1)$. Como los subespacios propios son ortogonales dos a dos, tenemos que $\tilde{\mathcal{H}}_{k+2}$ y $\tilde{\mathcal{P}}_k$ son ortogonales.

(2) Si $p \in \mathcal{P}_{k+2}$ es ortogonal a $\mathcal{P}_k$ entonces $p \in \mathcal{H}_{k+2}$
Dado $p \in \mathcal{P}_{k+2}$, $\Delta p \in \mathcal{P}_k$. Por el lema 4.9 sabemos que $\mathcal{P}_k$ se escribe como suma de $r^{2l}\mathcal{H}_{k-2l}$ con $0 \leq 2l \leq k$, por lo que $\Delta p = 0$ si y sólo si es ortogonal a a todos los $r^{2l}\mathcal{H}_{k-2l}$. Equivalentemente, $\Delta p = 0$ si y sólo si Δp es ortogonal a $\tilde{\mathcal{H}}_{k-2l}$, $\forall\, 0 \leq 2l \leq k$.

Sean $p \in \mathcal{P}_{k+2}$ y $h \in \mathcal{H}_{k-2l}$. Sabemos que

$$\Delta \widetilde{p\, h} = \Delta \tilde{p}\, \tilde{h} + 2\langle \nabla \tilde{p}, \nabla \tilde{h} \rangle + \tilde{p} \Delta \tilde{h}$$

Integrando

$$0 = \int_{S^n} \Delta \widetilde{p\, h} = \int_{S^n} \Delta \tilde{p}\, \tilde{h} + 2 \int_{S^n} \langle \nabla \tilde{p}, \nabla \tilde{h} \rangle + \int_{S^n} \tilde{p}\, \Delta \tilde{h} \tag{4.2}$$

Como $\tilde{h}$ es un polinomio armónico de grado $k-2l$ sabemos que $\Delta \tilde{h} = (k-2l)(n+k-2l-1)\tilde{h}$. Por tanto

$$\int_{S^n} \tilde{p}\, \Delta \tilde{h} = (k-2l)(n+k-2l-1) \int_{S^n} \tilde{p}\, \tilde{h} = 0$$

ya que $\tilde{p}$ es ortogonal a $\tilde{\mathcal{P}}_k$.

Ahora, por la proposición 4.7 sabemos que

$$\Delta\tilde{p} = \widetilde{\Delta p} + \widetilde{\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}} + n\widetilde{\frac{\partial p}{\partial r}} = \widetilde{\Delta p} + (k+2)(n+k+1)\tilde{p}$$

Entonces

$$\int_{S^n} \Delta\tilde{p}\,\tilde{h} = \int_{S^n} \widetilde{\Delta p}\,\tilde{h} + (k+2)(n+k+1)\int_{S^n} \tilde{p}\,\tilde{h} = \int_{S^n} \widetilde{\Delta p}\,\tilde{h}$$

Reemplazando en la ecuación 4.2

$$\begin{aligned}\int_{S^n} \widetilde{\Delta p}\,\tilde{h} &= -2\int_{S^n} \langle \nabla\tilde{p}, \nabla\tilde{h}\rangle = -2\langle \nabla\tilde{p}, \nabla\tilde{h}\rangle \\ &= -2\langle \tilde{p}, \Delta\tilde{h}\rangle = -2(k-2l)(n+k-2l-1)\langle \tilde{p}, \tilde{h}\rangle = 0\end{aligned}$$

Finalmente, Δp es ortogonal a $\mathcal{P}_k$ y por lo tanto $\Delta p = 0$.

□

Lema 4.10
Sea (M, g) variedad Riemanniana y $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(M)$ subespacios vectoriales tal que se verifica

1. *Para todo $i \in \mathbb{N}$ existe un subespacio propio S_{λ_i} del Laplaciano Δ_g tal que $W_i \subset S_{\lambda_i}$.*
2. *$\sum_{i\in\mathbb{N}} W_i$ es densa en $C^\infty(M)$ con la norma L^2.*

Entonces para todo $i \in \mathbb{N}$, $W_i = S_{\lambda_i}$ y el espectro de Δ_g es exactamente el conjunto $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Demostración:
Primero observemos que los subespacios W_i deben ser de dimensión finita pues los S_{λ_i} lo son. Supongamos que existe i tal que $W_i \subsetneq S_{\lambda_i}$. Entonces existe $f \in S_{\lambda_i}$ que es ortogonal a W_i. A su vez, f debe ser ortogonal a W_j para todo $j \neq i$ por la descomposición en subespacios ortogonales que nos da el Teorema Espectral. Luego f es ortogonal a $\sum_{i\in\mathbb{N}} W_i$ y por tanto a $C^\infty(M)$ de donde $f = 0$, lo que es una contradicción.

Con respecto a la afirmación sobre el espectro, es claro que $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset Spec(\Delta_g)$. Si existiese otro valor propio λ distinto de los $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, entonces el subespacio propio S_λ es no trivial y es ortogonal a todos los W_i. Luego es ortogonal a la $\sum_{i\in\mathbb{N}} W_i$ y por densidad a todo $C^\infty(M)$, resultando entonces trivial, lo que es también una contradicción.

$\square$

Demostración del Teorema:
Por el teorema de *Stone-Weierstrass*, el conjunto $\widetilde{\oplus_{k\geq 0}\mathcal{P}_k}$ es denso en $C^\infty(S^n)$ con la topología uniforme y, como S^n tiene medida finita, también es denso en $L^2(S^n)$. Por el lema 4.9 tenemos que cada $\tilde{\mathcal{P}}_k$ se escribe como suma de ciertos $\tilde{\mathcal{H}}_l$ con $l \leq k$. Además obtenemos que

$$\bigoplus_{k\geq 0}\mathcal{H}_k = \bigoplus_{k\geq 0}\mathcal{P}_k$$

y por tanto $\oplus_{k\geq 0}\mathcal{H}_k$ también es denso en $C^\infty(S^n)$ con la norma L^2. Luego, por el lema 4.10 $\mathcal{H}_k = E_k$ para todo $k \geq 0$.

$\square$

4.3. El Laplaciano como fuente de información geométrica.

Toda un área de la matemática se ocupa de estudiar la relación existente entre el espectro del Laplaciano en una variedad y la geometría de ésta. Al estar intrínsecamente relacionado con la métrica, el espectro del Laplaciano "codifica" de alguna manera la información geométrica de la variedad. "Lamentablemente", esta codificación no es lo suficientemente buena, en el siguiente sentido: **el espectro del Laplaciano no caracteriza, en general, la geometría de la variedad**. Al final de la sección probaremos sin embargo un resultado en el cual, bajo ciertas hipótesis, sí hay caracterización.

Proposición 4.11 (Principio del mínimo para λ_1)
El primer valor propio no nulo, λ_1, de una variedad (M, g) viene dado por

$$\lambda_1 = \inf_{f\in H^1(M)} \frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2}$$

Demostración:
Por un lado, si f es una función propia asociada a λ_1 entonces tenemos que

$$\int_M \langle \nabla_g f, \nabla_g f \rangle d\omega_g = \int_M \Delta_g f\, f d\omega_g = \lambda_1 \int_M f^2 d\omega_g$$

y por lo tanto

$$\lambda_1 \geq \inf_{f \in H^1(M)} \frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2}$$

Tomemos ahora $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$. f se escribe de manera única como $f = \sum_i \alpha_i u_i$ siendo $\{u_i\}$ las autofunciones del Laplaciano. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla_g f|^2 d\omega_g &= \int_M \langle \nabla_g f, \nabla_g f \rangle d\omega_g = \int_M \langle \Delta_g f, f \rangle d\omega_g \\
&= \int_M \langle \sum_i \alpha_i \lambda_i u_i, \sum_j \alpha_j u_j \rangle d\omega_g = \int_M \sum_i \alpha_i^2 \lambda_i |u_i|^2 \\
&\geq \lambda_1 \int_M \sum_i \alpha_i^2 = \lambda_1 \|f\|^2
\end{aligned}$$

por lo que,

$$\lambda_1 \leq \inf_{f \in H^1(M)} \frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2}$$

□

Definición 4.1 (Campos de Jacobi)
Sean $f \in C^\infty(M)$ y $\gamma \colon [0, a] \longrightarrow M$ una curva geodésica. Un campo a lo largo de γ se dice de *Jacobi* si satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{D^2 J}{dt^2}(t) + R(\dot\gamma(t), J(t))\dot\gamma(t)$$

$\forall\, t \in [0, a]$ y donde R denota al tensor de curvatura.

Observación 4.1
Un campo de Jacobi queda determinado por las condiciones iniciales $J(0)$ y $\frac{DJ}{dt}(0)$.

Campos de Jacobi en la esfera S^n

Sea $\gamma\colon [0,\pi] \longrightarrow S^n$ una geodésica de velocidad 1 uniendo los puntos antípodas $\gamma(0)$ y $\gamma(\pi)$. Tomemos $w_0 \in T_{\gamma(0)}M$ tal que $|w| = 1$ y $\langle w, \dot\gamma(0)\rangle_{\gamma(0)} = 0$, y consideremos $w(t)$ el campo paralelo con $w = w(0)$ a lo largo de la curva $\gamma(t)$. Veamos que $J(t) = \sin t\, w(t)$ es un campo de Jacobi. Sabemos que la curvatura $K = 1$ y que $|\dot\gamma(0)| = 1$. Tenemos entonces que

$$\langle R(\dot\gamma, J)\dot\gamma, J\rangle = |J|^2$$

lo que implica que

$$R(\dot\gamma, J)\dot\gamma = J$$

Por otra parte, utilizando que $w(t)$ es un campo paralelo obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}\left(\frac{D}{dt}\sin t w(t)\right) &= \frac{D}{dt}(\cos t\, w(t)) + \frac{D}{dt}\left(\sin t \frac{D}{dt} w(t)\right) \\ &= -\sin w(t) + \cos t\, \frac{D}{dt} w(t) = -\operatorname{sen} t\, w(t) = -J \end{aligned}$$

Proposición 4.12 (Caracterización de los Campos de Jacobi)
Sea $x \in M$, $v \in T_xM$ y $w \in T_vT_xM$. Entonces

1. *El campo $J(t) = (d\,exp_x)_{tv}(tw)$ a lo largo de una geodésica $\gamma(t)$ es un campo de Jacobi*

2. *Todo campo de Jacobi a lo largo de una geodésica γ es de la forma $J(t) = (d\,exp_x)_{tv}(tw)$*

Definición 4.2 (Variaciones de curvas)
Sea $c\colon [0,1] \longrightarrow M$ una curva parametrizada. Una *Variación diferenciable* de c en una función diferenciable $K\colon [0,1]\times(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$ tal que $K(t,0) = c(t)$, $\forall\, t \in [0,1]$. Para cada $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, la función $K_s\colon [0,1] \longrightarrow M$ definida por $K_s(t) = K(t,s)$ es una curva parametrizada, y la llamaremos *curva de variación.*

Diremos que una variación es *geodésica* si la curva inicial c es una geodésica y todas las curvas $\{K_s\}_{s\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ también lo son.

Teorema 4.13
Sea $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$ una geodésica y $K\colon [0,1]\times(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$ una variación geodésica. Entonces $J(t) = \frac{\partial K}{\partial s}(t,0)$ es un campo de Jacobi. Recíprocamente, todo campo de Jacobi a lo largo de γ es de esa forma para alguna variación K.

Fórmula de la primera Variación de la Longitud.
Sea $c\colon [0,1] \longrightarrow M$ una curva parametrizada y X un campo de vectores a lo largo de c. Sea $K\colon [0,1]\times(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$ una variación diferenciable de tal manera que todas las curvas $c_s(t) = K(t,s)$ tienen velocidad constante. Entonces

$$\frac{d}{ds} l(c_s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{r}\int_0^1 \langle X, \frac{D}{dt}\frac{dc}{dt}\rangle dt$$

donde $r = |\dot{c}(t)|$.

Fórmula de la segunda Variación de la Longitud para campos de Jacobi.
Sea $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$ una curva geodésica y J un campo de Jacobi a lo largo de γ. Entonces

$$\frac{d^2}{ds^2} l(c_s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|}[\langle J(1), J'(1)\rangle - \langle J(0), J'(0)\rangle]$$

Definición 4.3
Dada una función $f \in H^2(M)$ y $x \in M$, llamaremos *matriz Hessiana de f en x* a la matriz asociada a la forma cuadrática $Hess_x f$ en T_xM definida por

$$Hess_x f(v) = \frac{d^2(f\circ\gamma)}{dt^2}(t)\Big|_{t=t_0}$$

donde γ es una curva tal que $\gamma(t_0) = x$ y $\dot{\gamma}(t_0) = v \in T_xM$. Observamos que para el caso de $\mathbb{R}^n$ con la métrica Euclídea, la Hessiana de f es la matriz de las derivadas segundas, es decir, tal que la entrada a_{ij}-ésima es $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.
Notaremos indistintamente $Hess\, f$ a la matriz y a la forma cuadrática.

Proposición 4.14 (Fórmula de Bochner - Lichnerowicz)
Para toda $f \in C^\infty(M)$

$$-\frac{1}{2}\Delta_g(|\nabla_g f|^2) = |Hess\, f|^2 - |\Delta_g f|^2 + \rho(\nabla_g f, \nabla_g f)$$

Donde ρ *es el tensor de curvatura de Ricci.* $|Hess\, f|$ *denota la norma de la matriz Hessiana,* i.e., $|Hess(f)|^2 = \sum_{ij} a_{ij}^2$.

Teorema 4.15 (Lichnerowicz)
Si existe un número $K > 0$ *tal que* $\rho \geq K\, g$ *entonces*

$$\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1} K$$

Donde λ_1 *es el primer valor propio no nulo del Laplaciano* Δ_g

Demostración:
Sea f una función propia del Laplaciano Δ_g de valor propio λ. De la fórmula de *Bochner - Lichnerowicz* obtenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\Delta_g(|\nabla_g f|^2) &= |Hess\, f|^2 - \langle \nabla_g f, \nabla_g \Delta_g f\rangle + \rho(\nabla_g f, \nabla_g f) \\ &= |Hess\, f|^2 - \lambda\langle \nabla_g f, \nabla_g f\rangle + \rho(\nabla_g f, \nabla_g f) \end{aligned}$$

Integrando

$$0 = \|Hess\, f\|^2 - \lambda\|\nabla_g f\|^2 + \int_M \rho(\nabla_g f, \nabla_g f) d\omega_g$$

por lo que

$$0 \geq \|Hess\, f\|^2 - \lambda\|\nabla_g f\|^2 + K\|\nabla_g f\|^2$$

Observemos que si f es como antes

$$\|\Delta_g f\|^2 = \langle \Delta_g f, \Delta_g f\rangle = \lambda\langle f, \Delta_g\rangle = \lambda\langle \nabla_g f, \nabla_g f\rangle = \lambda\|\nabla_g f\|^2$$

Por lo tanto obtuvimos que si $\lambda \neq 0$

$$0 \geq \|Hess\, f\|^2 - \|\Delta_g f\|^2 + \frac{K}{\lambda}\|\Delta_g f\|^2$$

Consideremos $\mathcal{B}$ una base ortonormal de T_xM y sean H y I las matrices asociadas a la Hessiana de f y a la métrica en la base $\mathcal{B}$, respectivamente. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}(\Delta_g f)^2 = (tr\, H)^2 = (tr\, I^t H)^2 &= |\langle H, I\rangle|^2 \leq |H|^2|I|^2 \\ &= |Hess\, f|^2\, tr\, I = |Hess\, f|^2\, n\end{aligned}$$

Luego

$$|Hess(f)|^2 \geq \frac{1}{n}(\Delta_g f)^2 \Rightarrow \|Hess(f)\|^2 \geq \frac{1}{n}\|\Delta_g f\|^2$$

y concluimos que

$$0 \geq \left[\frac{1}{n} - 1 + \frac{K}{\lambda}\right]\|\Delta_g f\|^2 \geq -\frac{n-1}{n} + \frac{K}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \geq K\frac{n}{n-1}$$

En particular

$$\lambda_1 \geq K\frac{n}{n-1}$$

□

Teorema 4.16 (Obata)
Sea (M, g) una variedad Riemanniana y λ_1 el primer valor propio no nulo del Laplaciano Δ_g. Si $K \in \mathbb{R}$ verifica que $\rho \geq Kg$ y

$$\lambda_1 = K\frac{n}{n-1}$$

entonces (M, g) es isométrica a (S^n, g_0).

Demostración:
<u>Parte I:</u> Existe un mapa diferenciable $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$Hess\, f = -f\, g$$

Sabemos de la prueba del teorema de Lichnerowicz que el hecho de que se dé el igual en la fórmula $\lambda_1 = K\frac{n}{n-1}$ implica que las formas cuadráticas g y $Hess\, f$ son colineales, donde f es una función propia asociada a λ_1. Luego, para cada

$x \in M$ existe $\alpha(x)$ tal que

$$Hess_x f = \alpha(x) g_x$$

La función $\alpha\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ así definida resulta diferenciable ya que en particular tenemos que

$$\alpha(x) = \frac{1}{g_{11}(x)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$$

$\forall\, x \in M$, de donde $Hess\, f = \alpha\, g$. Luego considerando las matrices asociadas a g y a $Hess$ en una base ortonormal de $T_x M$ y tomando trazas obtenemos que

$$-\Delta_g f = tr[Hess\, f] = n\, \alpha$$

Si tomamos f una función propia asociada a λ_1

$$n\, \alpha = -\lambda_1\, f = \frac{n}{n-1} K\, f$$

Consideremos entonces una métrica $g' = \frac{n-1}{K} g$. De esta manera tenemos que $\rho_{g'} = \rho_g$ y además $\Delta_{g'} = \frac{K}{n-1} \Delta_g$, por lo que los dos operadores tienen las mismas autofunciones con λ valor propio de Δ_g si y sólo si $\lambda \frac{n-1}{K}$ es valor propio de $\Delta_{g'}$. Luego el primer valor propio no nulo de $\Delta_{g'}$ es n y por tanto

$$n\, \alpha = -\lambda_1\, f = -n\, f$$

de donde $\alpha = -f$ y obtenemos el resultado.

Consecuencia: Si consideramos una geodésica γ con $|\dot{\gamma}(0)| = 1$ entonces tenemos que

$$\frac{d^2 (f \circ \gamma)}{dt^2}(t) = [Hess_{\gamma(t)} f](\dot{\gamma}(t)) = -(f \circ \gamma)(t) \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_{\gamma(t)} = -(f \circ \gamma)(t)$$

de donde $(f \circ \gamma)(t) = A \cos t + B \sin t$

Parte II:

Como M es compacta, f alcanza un máximo en un punto que llamamos N, y podemos suponer que este máximo es 1. Tomemos $\gamma\colon [0, a] \longrightarrow M$ una geodésica parametrizada por longitud de arco partiendo de N.
Sabemos que $(f \circ \gamma)(0) = 1$ por lo que $1 = A \cos 0 + B \sin 0$ de donde $A = 1$.

Como $f \circ \gamma$ alcanza un máximo en $t = 0$ su derivada se anula en este instante. Por tanto $0 = -\sin 0 + B \cos 0$ de donde $B = 0$. Concluimos entonces que

$$(f \circ \gamma)(t) = \cos t$$

Ahora, si tomamos un punto $x \in M$, como M es compacta sabemos que existe una geodésica γ que une x con N y que realiza la distancia. Tenemos entonces que

$$f(x) = \cos d(x, N)$$

Llamando $r(x) = d(x, N)$, $f = \cos r$ y $\nabla f = -\dot{\gamma}(r) \sin r \neq 0$. Esto implica que el mapa exponencial restricto a la bola $B(0, \pi) \subset T_x M$ es inyectivo.

Fijemos un tiempo t y un vector w tal que $w \perp v$ y $|tw| = 1$. Consideremos $\delta(s)$ la geodésica que en tiempo $s = 0$ pasa por $\gamma(t)$ con velocidad 1. Consideremos el campo de Jacobi a lo largo de γ dado por

$$J(t) = d_{tv}(exp)(tw)$$

Con $0 \leq t \leq 1$.

Consideramos una variación geodésica $K\colon [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ con $K(t, s) = c_s(t)$ de manera que $c_s(0) = N$ para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $c_s(t) = \delta(s)$. Notemos por $l(s) = \left(\left|\frac{dc_s}{dt}(0)\right| t\right)$ a la longitud de c_s entre N y $c_s(t)$.

Sabemos que, como δ es una geodésica con $|\dot{\delta}(0)| = 1$, $(f \circ \delta)(s) = A \cos s + B \sin s$. Al igual que antes, $A = (f \circ \delta)(0) = (f \circ c_0)(t) = \cos t$ y $B = \frac{d(f \circ \delta)}{dt}(t) = \langle \nabla_g f, \dot{\delta}(0) \rangle = 0$ ya que $\dot{\delta}(0) \perp v$ y $\nabla_g f$ es paralelo a v. Luego tenemos que

$$(f \circ \delta)(s) = \cos t \cos s$$

Como además $(f \circ \delta)(s) = (f \circ c_s)(t) = \cos[l(s)]$ obtenemos

$$\cos[l(s)] = \cos t \cos s$$

Ahora, derivaremos dos veces respecto a s a ambos lados. Del miembro izquierdo obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}\cos[l(s)]\Big|_{s=0} &= \frac{d}{ds}\left[\sin[l(s)]\frac{dl}{ds}(s)\right]\Big|_{s=0} \\
= -\cos[l(s)]\left(\frac{dl}{ds}(s)\right)^2\Big|_{s=0} &- \sin[l(s)]\frac{d^2l}{ds^2}(s)\Big|_{s=0} \\
&= -\sin t\langle J(t), J'(t)\rangle
\end{aligned}$$

donde utilizamos que $\frac{dl}{ds}(0) = 0$ y $\frac{d^2l}{ds^2}(0) = \langle J(t), J'(t)\rangle$. Por su parte, el miembro derecho resulta

$$\frac{d^2}{ds^2}[\cos t\cos s]\Big|_{s=0} = -\cos^2 t\cos s\big|_{s=0} = -\cos^2 t = -|J(t)|^2$$

de donde

$$|J(t)|^2\cos t = \sin t\langle J(t), J'(t)\rangle$$

por lo que si llamamos $U(t) = |J(t)|^2$ tenemos que

$$U(t)\cos t = \sin t\frac{U'(t)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{U'(t)}{U(t)} = 2\frac{\cos t}{\sin t}$$

Integrando

$$\begin{aligned}
\log|U(t)| = 2\log[\sin t] + c_0 \quad &\Leftrightarrow \quad |U(t)| = c_1\sin^2 t \\
&\Leftrightarrow |J(t)| = c\sin t
\end{aligned}$$

Luego

$$|J(t)| = |J'(0)|\sin t$$

Parte III: *Existe una isometría h entre $exp_N[B(0,\pi)] \subset M$ y $\overline{exp_x}[B(0,\pi)] \subset S^n$.*

Notaremos $exp\colon T_NM \longrightarrow M$ y $\overline{exp}\colon T_xS^n \longrightarrow S^n$ a los mapas exponenciales de M y S^n en N y x, respectivamente. De aquí en más identificaremos los planos tangentes T_NM y T_xS^n.

Definamos $h\colon exp[B(0,\pi)] \longrightarrow \overline{exp}[B(0,\pi)]$ como $h(y) = [\overline{exp} \circ exp^{-1}](y)$ $\forall\, y \in exp[B(0,\pi)]$.

Llamemos $tv = exp^{-1}(x)$, con $v = \frac{exp^{-1}(x)}{|exp^{-1}(x)|}$ y $t = |exp^{-1}(x)|$ por lo que $|v| = 1$. Ahora,

$$d_x h = d_{exp^{-1}(x)}\overline{exp} \circ d_x exp^{-1} = d_{exp^{-1}(x)}\overline{exp} \circ \big(d_{exp^{-1}(x)} exp\big)^{-1}$$

por lo que podemos escribir

$$d_x h = d_{tv}\overline{exp} \circ (d_{tv} exp)^{-1}$$

Para ver que h es isometría, primero analicemos qué pasa en el subespacio generado por v. Observemos que $exp(tv) = \gamma(t)$ es la geodésica parametrizada por longitud de arco que en tiempo $t = 0$ pasa por x con velocidad v. Luego,

$$|d_{tv} exp(tv)| = |\dot{\gamma}(t)| = 1 = |v|$$

por lo que $d_{tv} exp$ preserva la norma en este subespacio. Una cuenta análoga muestra que $d_{tv}\overline{exp}$ también preserva la norma allí, y por tanto h también.

Consideremos ahora $w \in [v]^{\perp}$ de manera que $|tw| = 1$. Tomemos $u = d_{tv} exp(tw)$ y por tanto, por la parte *II*

$$|u| = |d_{tv} exp(tw)| = |w| \sin t$$

Como conocemos cómo son los campos de Jacobi en la esfera también sabemos que

$$|d_x h(u)| = |d_{tv}\overline{exp}(tw)| = |w| \sin t$$

de donde

$$|d_x h(u)| = |u|$$

si $u = (d_{tv} exp)(tw)$. Ahora, por el *Lema de Gauss* sabemos que

$$\langle d_{tv} exp(tv), d_{tv} exp(tw)\rangle = \langle tv, tw\rangle$$

por lo que

$$\langle d_{tv}exp(tv), u\rangle = \langle d_{tv}exp(tv), d_{tv}exp(tw)\rangle = \langle tv, tw\rangle = 0$$

De aquí que $v \perp w$ si y sólo si $u \perp \dot{\gamma}(t)$. Notar que aquí también estamos identificando los planos tangentes $T_vT_xS^n$ y T_xS^n. Tenemos entonces la ecuación

$$|d_xh(u)| = |u|$$

siempre que $u \perp v$.

Probamos entonces que:

$\star$ $|d_{tv}exp(tv)| = 1 = |d_{tv}\overline{exp}(tv)|$

$\star$ $|d_{tv}exp(tw)| = |w| \sin t = |d_{tv}\overline{exp}(tw)|$

$\star$ $\langle d_{tv}exp(tv), d_{tv}exp(tw)\rangle = 0 = \langle d_{tv}\overline{exp}(tv), d_{tv}\overline{exp}(tw)\rangle$

De aquí concluimos

$$|d_{tv}exp(u)| = |d_{tv}\overline{exp}(u)|$$

$\forall\, u \in T_xS^n$, por lo que si z de la forma $z = (d_{tv}exp)^{-1}(u)$

$$|z| = |d_{tv}\overline{exp} \circ (d_{tv}exp)^{-1}(z)| = |d_xh(z)|$$

Como exp es inyectivo, $d_{tv}exp$ es biyectivo y por tanto

$$|d_xh(z)| = |z|$$

$\forall\, z \in T_xS^n$. Luego h es isometría local. Además, h es inyectiva pues los mapas exponenciales lo son en los entornos considerados.

<u>*Parte IV:*</u> *El mapa* $h\colon exp[B(0,\pi)] \longrightarrow \overline{exp}[B(0,\pi)]$ *se extiende a una isometría sobreyectiva* $h\colon M \longrightarrow S^n$.

Veamos que $exp[B(0,\pi)]$ cubre todo M salvo un punto. Supongamos que existen dos puntos S_0 y S_1 que no están en $exp[B(0,\pi)]$. Sean γ_0 y γ_1 las geodésicas parametrizadas por longitud de arco que unen N con S_0 y S_1 respectivamente.

Consideremos la variación geodésica $K\colon [0,\pi]\times[0,1] \longrightarrow M$ definida por

$$K(t,s) = exp(t\cos s\,\dot{\gamma}_0(0) + t\sin s\,\dot{\gamma}_1(0)) = exp(tv_s)$$

notando $v_s = \cos s\,\dot{\gamma}_0(0) + \sin s\,\dot{\gamma}_1(0)$.
La variación determina una curva $c(s) = K(\pi, s)$ donde el vector tangente en $c(s)$ es el vector del campo de Jacobi $J(\pi)$ asociado a la variación. Pero, por la parte II, sabemos que todo campo de Jacobi en M verifica $|J(t)| = |J'(t)|\sin t$, por lo que $J = 0$. Luego la curva c consiste en un sólo punto por lo que $S_0 = S_1$.

Luego extendemos por continuidad h a una isometría inyectiva $h\colon M \longrightarrow S^n$. Esta extensión debe ser además sobreyectiva ya que sabemos que $\overline{exp}[\overline{B(0,\pi)}] = S^n$.

$\square$

Bibliografía

[1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, London, 1975.

[2] M. Berger, P. Gauduchon, and E. Mazet. *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*, volume 194 of *Lecture notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[3] M. P. Do Carmo. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides. Brasília, 1979.

[4] G. B. Folland. *Real analysis.* Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1984.

[5] R. Iório Jr. and V. De Magalhães Iório. *Ecuações diferenciais parciais: uma introdução.* Projeto Euclides. Brasília, 1988.

[6] Kobayashi and Nomizu. *Foundations of Differential Geometry, Vol. 1.*

[7] M. Reed and B. Simon. *Fourier Analysis, Self-Adjointness*, volume II of *Methods of modern mathematical phisics.* Academic Press, London, 1975.

[8] M. Reed and B. Simon. *Functional Analysis*, volume I of *Methods of modern mathematical phisics.* Academic Press, London, 1975.

[9] J. Thayer. *Operadores auto-adjuntos e equações diferenciais parciais.* Projeto Euclides. Brasília, 1987.