Trabajo Monográfico

Soluciones Distribucionales de las Ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes

Juan Pablo Borthagaray
Orientador: Dr. Heber Enrich

26 de febrero de 2010
Montevideo
Uruguay

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La dinámica de un fluido incompresible puede ser descrita por dos principios básicos: la ley de conservación de masa y la segunda ley de Newton. La primera implica que la divergencia del campo de velocidades del fluido es nula, mientras que de la segunda se deduce una ecuación diferencial no lineal, conocida como ecuación de Navier-Stokes. Si consideramos el fluido en cuestión como no viscoso, entonces el término de segundo orden de esta ecuación se anula y obtenemos la llamada ecuación de Euler.
En el siguiente trabajo se presentan las soluciones débiles (o de Leray-Hopf) de las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes para un fluido incompresible. Las mismas no son soluciones clásicas en el sentido de que no tienen por qué ser funciones derivables; están dadas por una función v de cuadrado localmente integrable, cuyas derivadas se entienden en el sentido de las distribuciones. Con el objetivo de obtener estas soluciones, en el capítulo 3 se introducen las distribuciones, tanto escalares como vectoriales y tensoriales, y se definen los operadores diferenciales sobre las mismas.
Luego, en el capítulo 4 se definen soluciones débiles para ecuaciones en derivadas parciales lineales, así como también la topología del espacio de distribuciones $\mathcal{D}'$, y se obtiene un resultado deseable: el límite débil de una sucesión de soluciones débiles de una ecuación en derivadas parciales lineal también es solución débil. Se presentan ejemplos de procesos de traslación, oscilación y concentración en $\mathcal{D}'$, y se muestra -a través del ejemplo concreto de la energía cinética- que el comportamiento de los mismos ante un funcional no lineal puede presentar problemas de continuidad: la energía cinética del límite es estrictamente menor que el límite de la energía cinética.
Este comportamiento poco deseable es también presentado por los límites débiles de sucesiones de soluciones de la ecuación de Euler. A pesar de que exista el límite débil y de que éste sea diferenciable, no tiene por qué ser solución, ni clásica ni de Leray-Hopf, o incluso en el caso de que la sucesión converja a una solución, se puede tener una pérdida de energía cinética en el límite. En el capítulo 5 se presentan ejemplos de estos dos fenómenos.

Además, en este capítulo se obtienen algunos resultados de regularidad, como el hecho de que el límite uniforme de soluciones clásicas de la ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible sea solución débil.
Finalmente, en el capítulo 6 se definen las soluciones generalizadas de DiPerna-Majda de la ecuación de Euler para un fluido incompresible, que permiten resolver los problemas presentados anteriormente: sucesiones de soluciones débiles de la ecuación de Euler con una cierta condición de acotación uniforme de energía cinética tienen una subsucesión convergiendo a una solución generalizada de DiPerna-Majda.

Capítulo 2

Ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes

En este capítulo presentaremos las ecuaciones fundamentales de la mecánica de los fluidos. En primer lugar, daremos una breve descripción de la cinemática de los mismos; a partir de ésta y de dos principios básicos -que la masa no se genera ni se destruye y la segunda ley de Newton-, obtendremos las formulaciones de conservación de masa y del momento. Luego, combinando estos resultados con una hipótesis adicional de incompresibilidad derivaremos las ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes. Finalizaremos el capítulo introduciendo el concepto de vorticidad y mostrando un ejemplo de solución de la ecuación de Euler en dos dimensiones.

2.1. Cinemática de fluidos

Sea Ω_0 una región de $\mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{R}^2$) llena de un fluido en un instante t_0. Nuestro objetivo es describir el movimiento de este fluido. Supongamos que existe una función $\phi : \Omega_0 \times [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{R}^2$) diferenciable, a la que llamaremos flujo, de forma tal que para todo $t \geq t_0$, $\phi_t = \phi(\cdot\,, t)$ sea un difeomorfismo. Entonces, dado un instante t y un punto $x \in \Omega_t = \phi_t(\Omega_0)$, tendremos dos formas de describir su posición:

1. Considerando el punto $x_0 \in \Omega_0$ tal que $x = \phi_t(x_0)$. Aquí tendremos la ventaja de que para cada punto $x_0 \in \Omega_0$, la correspondencia $t \mapsto \phi_t(x_0)$ describe la trayectoria de la partícula material que en el instante t_0 ocupa la posición x_0.
Esta descripción es llamada lagrangiana, y las coordenadas (x_0, t) se denominan coordenadas de Lagrange.

2. Considerando el punto x como un punto fijo del espacio y no asociándolo a ninguna partícula del fluido. Esta descripción se llama euleriana y las

coordenadas $(x,\, t)$ reciben el nombre de coordenadas de Euler.

A partir de estas definiciones, se deduce que la velocidad del fluido en un punto $(x,\, t)$, con $x = \phi_t(x_0)$, $x_0 \in \Omega_0$ es la derivada de la posición respecto del tiempo en coordenadas de Lagrange, es decir,

$$v(x,\, t) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\phi(x_0,\, t).$$

Definición 2.1 (Derivada material)
Dada una función escalar $f(x,\, t)$, con $x \in \Omega_t$, llamaremos derivada material (o derivada total) de la función f a la derivada de f respecto del tiempo a lo largo de la trayectoria de la partícula que en el instante t ocupa el punto x. Notaremos esta derivada como $\frac{df}{dt}$.
Entonces, tenemos:

$$\frac{df}{dt}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(f(\phi(x_0,t),t)\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,\frac{\partial \phi_i}{\partial t}(x_0,t) \;+\; \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) =$$

$$= \left(\nabla f\,.\,v \;+\; \frac{\partial f}{\partial t}\right)(x,t). \tag{2.1}$$

Definición 2.2 (Derivada local)
En las mismas condiciones que en la definición anterior, llamaremos derivada local de f en $(x,\, t)$ a la derivada parcial de f respecto del tiempo en dicho punto, y la notaremos mediante $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Observación 2.3
La ecuación (2.1) nos brinda una relación entre la derivada material y la derivada local de una función escalar f.

Para cada instante t, suponemos que existe una función densidad de masa $\rho : \Omega_t \to \mathbb{R}_+$. La hipótesis de que exista tal función representando la densidad del fluido no sería adecuada si vamos a tener en cuenta la estructura molecular del mismo, aunque resulta muy apropiada para trabajar con la mayoría de los fenómenos macroscópicos que ocurren en la naturaleza.
En adelante asumiremos que v y ρ son suficientemente regulares como para aplicarles los operadores diferenciales clásicos. Culminaremos la sección presentando un importante resultado técnico.

Teorema 2.4 (Teorema de transporte)
Si la función flujo ϕ satisface las hipótesis descritas anteriormente y si Ω_t es una región cuyo borde es una superficie regular a trozos, entonces dada una función f de clase C^1, vale:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(x,\,t)\,dx \;=\; \int_{\Omega_t}\left(\frac{df}{dt} \,+\, f\ div\, v\right)(x,\,t)\,dx. \tag{2.2}$$

Demostración.
Haciendo en la integral del lado izquierdo de (2.2) el cambio de variable $y \,=\, \phi_t^{-1}(x)$, obtenemos

$$\int_{\Omega_t} f(x,\,t)\,dx = \int_{\Omega_0} f(\phi_t(y),\,t)\,|\mathrm{J}(y,\,t)|\,dy,$$

donde $\mathrm{J}(y,\,t) = \det\left(\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\right)\right)_{1\le i,j\le 3}$. Además, por hipótesis $\mathrm{J}(y,\,t)$ nunca se anula y el jacobiano es continuo, y como $\mathrm{J}(y,\,0) \,=\, 1$ para todo $y \,\in\, \Omega_0$, el determinante de arriba es siempre positivo. Así, podemos quitar el valor absoluto del jacobiano.
La integral que obtuvimos al hacer el cambio de variable tiene dominio independiente del tiempo, por lo que podemos intercambiar el orden de derivación e integración:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(x,\,t)\,dx = \int_{\Omega_0}\frac{\partial f}{\partial t}(\phi_t(y),\,t)\,\mathrm{J}(y,\,t)\,dy + \int_{\Omega_0} f(\phi_t(y),\,t)\,\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial t}(y,\,t)\,dy.$$

Observemos que $\frac{\partial f}{\partial t}(\phi_t(y),\,t)$ es la derivada de f calculada a lo largo de una trayectoria, es decir, la derivada material de f. Haciendo nuevamente el cambio de variable $x \,=\, \phi_t(y)$, tenemos

$$\int_{\Omega_0}\frac{\partial f}{\partial t}(\phi_t(y),\,t)\,\mathrm{J}(y,\,t)\,dy \;=\; \int_{\Omega_0}\frac{df}{dt}(\phi_t(y),\,t)\,\mathrm{J}(y,\,t)\,dy \;=\; \int_{\Omega_t}\frac{df}{dt}(x,\,t)\,dx.$$

Calculemos la derivada del jacobiano:

$$\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial t}(y,\,t) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}(y,\,t).$$

Conmutando derivadas, usando que $v(\phi(y,\,t),\,t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(y,\,t)$ para todo $y \in \Omega_0$, y la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi_i}{\partial y_j}(y,\,t) \;=\; \frac{\partial}{\partial y_j}\frac{\partial\phi_i}{\partial t}(y,\,t) \;=\; \frac{\partial}{\partial y_j}\left[v_i(\phi_t(y),\,t)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\phi(y,\,t),t)\,\frac{\partial \phi_k}{\partial y_j}(y,\,t).$$

Luego,

$$\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3} \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial y_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^{3} \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial y_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{3} \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial y_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \mathrm{J}\; div\, v.$$

Entonces, aplicando nuevamente el cambio de variable $x = \phi_t(y)$,

$$\int_{\Omega_0} f(\phi(y,\,t),\,t)\,\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial t}\,(y,\,t)\,dy =$$

$$= \int_{\Omega_0} f(\phi(y,\,t),\,t)\,(div\, v\,(\phi(y,\,t),\,t))\,\mathrm{J}(y,\,t)\,dy \;=\; \int_{\Omega_t} f(x,\,t)\;div\, v\,(x,\,t)\,dx.$$

De esta forma,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(x,\,t)\,dx \;=\; \int_{\Omega_t} \frac{df}{dt}\,(x,\,t)\,dx \;+\; \int_{\Omega_t} f(x,\,t)\;div\, v(x,\,t)\,dx \;=$$

$$= \int_{\Omega_t} \left(\frac{df}{dt} \;+\; f\;\; div\, v\right)(x,\,t)\,dx.$$

$\square$

2.2. Conservación de masa

Recordemos que notamos mediante $\rho = \rho(x,\,t)$ a la densidad de masa de un fluido, de forma tal que la masa del mismo que ocupa una región Ω en el instante t está dada por $\int_\Omega \rho(x,\,t)\,dx$. El principio físico de conservación de masa se puede formular de la siguiente forma: dados $t \geq 0$, Ω_0 un conjunto medible arbitrario y $\Omega_t = \phi_t(\Omega_0)$,

$$\int_{\Omega_0} \rho(x,\,0)\,dx \;=\; \int_{\Omega_t} \rho(x,\,t)\,dx. \tag{2.3}$$

Si asumimos que ρ es de clase C^1, podemos aplicar el teorema de transporte:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(x,\, t)\, dx = \int_{\Omega_t} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\; div\, v\right)(x,\, t)\, dx. \tag{2.4}$$

Observemos que esta igualdad vale para cualquier subconjunto Ω_t abierto: si Ω_t es abierto, entonces $\Omega_0 = \phi_t^{-1}(\Omega_t)$ también lo es por la continuidad de ϕ_t, de forma tal que podemos aplicar el principio de conservación de masa (2.3). Entonces, como el integrando en (2.4) es una función continua cuya integral sobre cualquier conjunto abierto es nula, sólo puede ser la función idénticamente nula. De este modo, obtenemos una ecuación puntual de balance de masa:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\; div\, v = 0. \tag{2.5}$$

La condición de que el volumen de cualquier porción de fluido sea preservado por el flujo puede ser planteada como

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} dx = 0 \tag{2.6}$$

para todo Ω_t medible. Si esto se cumple, podemos aplicar el teorema de transporte a la función constante 1: $\int_{\Omega_0} div\, v = 0$ para todo Ω_0 abierto. Luego,

$$div\, v = 0. \tag{2.7}$$

El recíproco de esto es trivialmente cierto: si $div\, v = 0$, aplicando el teorema de transporte a la función $f \equiv 1$ se tiene (2.6).

Si un fluido tiene densidad constante, independientemente del tiempo y del espacio, se tiene $\frac{d\rho}{dt} \equiv 0$, por lo que (2.5) implica que el fluido verifica (2.7) y por lo tanto también la condición de incompresibilidad (2.6). Diremos que un fluido es incompresible si ρ es constante.

2.3. Conservación del momento

Definiremos la cantidad de movimiento de una porción de fluido que ocupa en el instante t una región Ω_t como:

$$\int_{\Omega_t} \rho(x,\, t)\, v(x,\, t)\, dx.$$

La segunda ley de Newton afirma que la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento de una porción de fluido es igual a la suma de las fuerzas actuando en la misma. Asumiremos que las fuerzas actuando sobre los fluidos son o bien fuerzas de volumen o fuerzas de contacto.

Las primeras están dadas por un campo vectorial conocido $F(x,\, t)$, es decir, la suma de las fuerzas de volumen sobre una porción de fluido que en el instante t ocupa una región Ω_t está dada por:

$$\int_{\Omega_t} \rho(x,\, t)\, F(x,\, t)\, dx.$$

Supondremos la existencia de un campo de tensiones $f(x,\, t,\, n)$ que da la fuerza de contacto por unidad de área actuando en una superficie normal a n en el punto x y en el instante t. De esta forma, la fuerza de contacto actuando sobre una porción de fluido que en el instante t ocupa la región Ω_t es:

$$\int_{\partial\Omega_t} f(x,\, t,\, n(x,\, t))\, dS,$$

donde $n(x,\, t)$ es el vector unitario normal a $\partial\Omega_t$ apuntando hacia el exterior de Ω_t.

Un resultado conocido como Teorema de Cauchy asegura que el campo de tensiones f es lineal en n, esto es, para todos t y $x \in \Omega_t$ existe una transformación lineal $T(x,\, t)$ tal que $f(x,\, t,\, n) \;=\; T(x,\, t)\,(n)$. Así, la segunda ley de Newton queda expresada:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho v\, dx \;=\; \int_{\Omega_t} \rho F\, dx \;+\; \int_{\partial\Omega_t} T(n)\, dS.$$

Aplicamos el teorema de transporte a la integral del lado izquierdo de la igualdad anterior y el teorema de la divergencia a la integral de superficie:

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{d}{dt}(\rho v) \;+\; \rho v\; div\, v \;-\; \rho F \;-\; Div\, T \right) dx = 0, \tag{2.8}$$

donde $Div\, T$ es el vector cuya entrada i-ésima es la divergencia de la i-ésima fila del tensor T. Por (2.5) se tiene $\frac{d}{dt}(\rho v) \;+\; \rho v\; div\, v \;=\; \rho \frac{dv}{dt}$, por lo que la ecuación (2.8) puede ser reducida a la ecuación puntual:

$$\rho \frac{dv}{dt} \;=\; \rho F \;+\; Div\, T, \tag{2.9}$$

ya que el integrando es continuo y Ω_t arbitrario. Esta ecuación es conocida como la ecuación de conservación del momento.

2.4. Ecuaciones de Euler

Las ecuaciones de conservación de masa (2.5) y de conservación del momento (2.9) no son suficientes para describir completamente el movimiento de un fluido: es necesario vincular el tensor T con las otras magnitudes.

Si suponemos que las fuerzas de contacto sobre una región Ω_t sólo actuan en la dirección normal a $\partial\Omega_t$ en cada punto, entonces Tn debe ser paralelo a n, esto es, debe existir una función escalar $p(x,\, t)$ tal que $T(x,\, t) \,=\, -p(x,\, t)I$, donde I denota a la matriz identidad. A esta función p la llamaremos presión, y en estas condiciones se cumple que $Div\, T \,=\, -\nabla p$. Así, tenemos que los campos de velocidades, densidades y presiones del fluido deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho\; div\, v \,=\, 0 \\ \rho\frac{dv}{dt} \,=\, \rho F \,-\, \nabla p \end{array} \right. .$$

Observemos que tenemos cuatro funciones escalares para cinco incógnitas: $v_1,\ v_2,\ v_3,\ \rho,\ p$. Todavía no podemos resolver completamente el movimiento del fluido. Si suponemos además que el fluido es incompresible de densidad ρ constante conocida, tenemos una salida para esta situación, obteniendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} div\, v \,=\, 0 \\ \rho\frac{dv}{dt} \,=\, \rho F \,-\, \nabla p \end{array} \right. .$$

A partir de la definición de derivada material, llegamos a las ecuaciones de Euler para un fluido incompresible:

$$\left\{ \begin{array}{l} div\, v \,=\, 0 \\ \rho\frac{\partial v}{\partial t} \,+\, \rho(v\,.\,\nabla)\, v \,=\, \rho F \,-\, \nabla p \end{array} \right. ,$$

donde $(v\,.\,\nabla)\, v \,:=\, \nabla v\,(v)$.

2.5. Ecuaciones de Navier-Stokes

Cuando buscamos formas para la matriz T de la ecuación de conservación del momento (2.9) que incluyan formas de viscosidad, bajo la suposición adicional de que el fluido en cuestión sea newtoniano[1], se tiene $T = -pI \,+\, \lambda(div\, v)I \,+\, \mu(\mathbb{L} + \mathbb{L}^\top)$, donde λ, μ son constantes y

$$\mathbb{L} \,=\, \nabla v \,=\, \left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right)_{1\le i,j\le 3} .$$

Nuevamente, nos enfrentamos a que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho\; div\, v \,=\, 0 \\ \rho\frac{dv}{dt} \,=\, \rho F \,+ Div\, T \\ T \,=\, -pI \,+\, \lambda(div\, v)I \,+\, \mu(\mathbb{L} + \mathbb{L}^\top) \end{array} \right.$$

presenta más incógnitas que ecuaciones. Una salida es nuevamente suponer que el fluido es incompresible, lo que implica $div\, v \,=\, 0$.

[1]Se denomina *newtoniano* a todo fluido en el que el campo de tensiones depende linealmente del de deformaciones.

Observación 2.5
En este contexto, se cumple que $Div\,(\mathbb{L}+\mathbb{L}^\top) \,=\, \Delta v$.
Demostración.
Calculando directamente la i-ésima componente de $Div\,(\mathbb{L}+\mathbb{L}^\top)$:

$$(Div\,(\mathbb{L}+\mathbb{L}^\top))_i \,=\, \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j\,\partial x_i}.$$

Entonces,

$$(Div\,(\mathbb{L}+\mathbb{L}^\top))_i \,=\, \Delta(v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \,=\, \Delta(v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(div\,v),$$

es decir, $Div\,(\mathbb{L}+\mathbb{L}^\top) \,=\, \Delta v \,+\, \nabla(div\,v)$. Ahora, como $div\,v = 0$, se tiene el resultado buscado.

$\square$

Mediante esta observación, obtenemos que para un fluido incompresible viscoso, $Div\,T \,=\, -\nabla p \,+\, \mu\Delta\,v$, y la ecuación de conservación del momento puede ser reformulada como

$$\rho\frac{dv}{dt} \,=\, \rho F \,-\, \nabla p \,+\, \mu\Delta\,v, \tag{2.10}$$

conocida como ecuación de Navier-Stokes.

Lema 2.6
Un par $(v,\,p)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} \rho\frac{dv}{dt} \,=\, -\nabla p \,+\, \mu\,\Delta v \\ div\,v \,=\, 0 \end{cases}$$

si y sólo si el par $(v,\,\hat{p})$ es solución de

$$\begin{cases} \rho\frac{dv}{dt} \,=\, \rho F_0 \,-\, \nabla p \,+\, \mu\,\Delta v \\ div\,v \,=\, 0 \end{cases},$$

donde $F_0 \in \mathbb{R}^3$ es una constante y $\widehat{p}\,(x,\,t) \,=\, p(x,\,t) + \rho F_0\,.\,x$.

Demostración.
Observemos que $\nabla\widehat{p} = \nabla p + \nabla(\rho F_0\,.\,x) = \nabla p + \rho F_0$, por lo tanto si (v,p) es solución del primer sistema, se verifica $\rho\frac{dv}{dt} = -\nabla p \,+\, \mu\Delta v \,=\, \rho F_0 \,-\, \nabla\widehat{p} \,+\, \mu\Delta v$.

El recíproco es análogo.

□

Gracias a este lema, estudiar las ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes sin fuerzas de masa es equivalente a hacerlo con fuerzas de masa constantes. Las ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes para un fluido incompresible, son, en ausencia de fuerzas de masa,

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho (v \,.\, \nabla)\, v = -\nabla p \quad \text{(Euler)}, \tag{2.11}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho (v \,.\, \nabla)\, v = -\nabla p + \mu \Delta v \quad \text{(Navier-Stokes)}. \tag{2.12}$$

2.6. Vorticidad

Consideremos un campo de velocidades de un fluido, un instante t, y un punto $x \in \Omega_t$, entonces la matriz $\mathbb{L}(x,\, t) = \nabla v(x,\, t)$ tiene una parte simétrica $\mathbb{D}$ y una parte antisimétrica $\mathbb{W}$,

$$\mathbb{D}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\nabla v + \nabla v^{\top}\right)(x,t), \tag{2.13}$$

$$\mathbb{W}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\nabla v - \nabla v^{\top}\right)(x,t). \tag{2.14}$$

Definición 2.7
A la matriz $\mathbb{D}$ definida en (2.13) la llamaremos tensor de velocidades de deformación en (x,t), y a la matriz $\mathbb{W}$ dada por (2.14) la llamaremos tensor de velocidades de rotación en (x,t).
Como $\mathbb{W}$ es antisimétrica, existe un único vector $\omega(x,t)$ tal que para todo $u \in \mathbb{R}^3$, $\frac{1}{2}\,\omega(x,\, t) \times u = \mathbb{W}(x,\, t)\, u$. A este vector $\omega(x,t)$ lo llamaremos vorticidad del campo v en (x,t).

Observación 2.8
Se cumple la igualdad $\omega(x,\, t) = rot\, v\, (x,\, t)$ para todo $(x,\, t)$.

Ahora, buscamos obtener una ecuación para la evolución de la vorticidad de un campo de velocidades solución de la ecuación de Euler para un fluido incompresible (2.11). Derivando respecto de x_j la i-ésima componente de esta ecuación,

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i},$$

y usando que las derivadas conmutan, tenemos:

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,+\,\rho\sum_{k=1}^{3}v_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,+\,\rho\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\,=\,-\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_j}\,.$$

Esta última igualdad puede ser reescrita en forma matricial:

$$\rho\frac{d}{dt}\mathbb{L}\,+\,\rho\mathbb{L}^2\,=\,-P, \tag{2.15}$$

donde P denota la matriz hessiana de la presión. Planteamos igualdades en las partes simétricas y antisimétricas de (2.15):

$$\rho\frac{d}{dt}\mathbb{D}\,+\,\rho\left(\mathbb{D}^2\,+\mathbb{W}^2\right)\,=\,-P, \tag{2.16}$$

$$\rho\frac{d}{dt}\mathbb{W}\,+\,\rho\left(\mathbb{W}\mathbb{D}\,+\mathbb{D}\mathbb{W}\right)\,=\,0. \tag{2.17}$$

Observemos que dado $u\in\mathbb{R}^3$, $\left(\frac{d}{dt}\mathbb{W}\right)u\,=\,\frac{d}{dt}\omega\times u$, y $\left(\mathbb{W}\mathbb{D}\,+\mathbb{D}\mathbb{W}\right)u\,=\,\omega\times\mathbb{D}u+\mathbb{D}(\omega\times u)=-(\mathbb{D}\omega)\times u$. Como $\rho\neq 0$, la ecuación (2.17) es equivalente a la ecuación de evolución de la vorticidad

$$\frac{d}{dt}\omega\,=\,\mathbb{D}\omega. \tag{2.18}$$

De esta forma, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} div\, v\,=\,0\\ rot\, v\,=\,\omega\\ \frac{d\omega}{dt}\,=\,\mathbb{D}\omega \end{cases} \tag{2.19}$$

debe ser necesariamente satisfecho por un campo de velocidades solución de las ecuaciones de Euler para un fluido incompresible.

Recíprocamente, si un campo v es solución de este sistema y si la región ocupada por el fluido es simplemente conexa, entonces existe una función p tal que (2.11) es satisfecha: en primer lugar, intercambiando el orden de derivación y teniendo en cuenta que si $div\, v\,=\,0$ se tiene $rot\,[(v\,.\,\nabla)\,v]\,=\,-\mathbb{D}(rot\, v)+(v\,.\,\nabla)(rot\, v)$, tenemos

$$rot\,\left[\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho(v\,.\,\nabla)v\right]=\rho\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}+rot[(v\,.\,\nabla)v]\right)=$$

$$=\,\rho\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}-\mathbb{D}\omega+(v\,.\,\nabla)\omega\right)\,=\,\rho\left(\frac{d\omega}{dt}-\mathbb{D}\omega\right)\,=\,0,$$

en virtud de la igualdad (2.18).

Luego, podemos definir la presión en un punto x como el opuesto de la integral de línea de $\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho(v\,.\,\nabla)v$ a partir de un punto fijo y hasta x por un camino arbitrario:

$$p(x) \;=\; -\int_\gamma \rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho(v\,.\,\nabla)v\; d\ell,$$

donde $\gamma\,:\,[a,\,b] \to \mathbb{R}^3$ es una curva continua, diferenciable a trozos, con $\gamma(a) \;=\; x_0,\, \gamma(b) = x.$

Así, si un campo de velocidades v es solución del sistema (2.19), entonces existe un campo p de presiones tal que $(v,\,p)$ es solución de la ecuación de Euler para un fluido incompresible.

Ejemplo 2.9
Diremos que un campo de velocidades v es bidimensional si es de la forma

$$v(x,\,t) \;=\; (v_1(x_1,\,x_2,\,t),\,v_2(x_1,\,x_2,\,t),\,0)^\top,$$

donde $x = (x_1,\,x_2,\,x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$. La vorticidad ω correspondiente a este campo de velocidades es

$$\vec{\omega}(x,\,t) = (0,\,0\,\omega(x_1,\,x_2,\,t))^\top,$$

donde

$$\omega = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\,.$$

De este modo, el término $\mathbb{D}\omega$ de la ecuación (2.18) es nulo, por lo que ésta se reduce a la ecuación escalar:

$$0 = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla\omega\,.\,v = \frac{\partial \omega}{\partial t} + v_1\frac{\partial \omega}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial \omega}{\partial x_2}. \tag{2.20}$$

Las otras ecuaciones del sistema (2.19) quedan dadas por:

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & = 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & = \omega \end{array}\right. . \tag{2.21}$$

Dada una función ω radial, $\omega = \omega(r,\,t)$, el sistema (2.21) tiene por solución:

$$v(x,\,t) \;=\; \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \frac{1}{r^2}\int_0^r s\omega(s,\,t)\,ds. \tag{2.22}$$

Utilicemos esto junto con (2.20) para ver qué condiciones debe verificar ω. Observemos que $v(x,\,t)$ es perpendicular a (x_1, x_2) en todos los puntos, lo que significa que las trayectorias de las partículas son círculos con centro en el eje x_3. Como la función ω es radial, $\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}, \frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)$ es paralelo a (x_1, x_2) en todos los puntos, por lo que

$$v_1 \frac{\partial\omega}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial\omega}{\partial x_2} = 0.$$

La ecuación (2.20) se simplifica:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = 0.$$

Por lo tanto, es necesario y suficiente que la vorticidad sea independiente del tiempo, $\omega = \omega(r)$, para tener una familia de soluciones estacionarias de la ecuación de Euler. Retomaremos este ejemplo en el capítulo 5 cuando presentemos el fenómeno de desarrollo de concentraciones.

Capítulo 3

Distribuciones

Vamos a dejar temporalmente de lado el estudio de las ecuaciones que rigen el movimiento de fluidos incompresibles para introducir la noción de distribución, o función generalizada. Este nuevo conjunto de funciones generalizadas contendrá a las funciones localmente integrables y a las medidas regulares. Definiremos la derivada débil de una distribución como una nueva distribución, de forma tal que en el caso en que la primera sea una función derivable, la derivada débil coincida con la clásica. Como corolario tendremos que toda distribución es infinitamente derivable. Finalmente, se presentarán las distribuciones vectoriales y tensoriales, y se definirán los operadores diferenciales clásicos (gradiente, divergencia, rotacional, laplaciano) en este contexto.

3.1. Funciones Test

En primer lugar, vamos a precisar algunas notaciones y términos. Llamaremos multiíndice a toda n-upla ordenada de números naturales

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

y llamaremos orden del multiíndice α al número natural $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. A cada multiíndice α le asociamos un operador diferencial D^α tal que si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $f : U \to \mathbb{R}$, entonces para cada $x \in U$,

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definición 3.1 (Funciones test)
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío, llamaremos funciones test a las funciones en $C_c^\infty(\Omega)$, es decir, a las funciones infinitamente diferenciables y con soporte compacto contenido en Ω.
Notaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$ al conjunto de las funciones test.

Observación 3.2
Claramente, con las operaciones de suma de funciones y multiplicación por escalares punto a punto, tenemos que $\mathcal{D}(\Omega)$ tiene estructura de espacio vectorial. De hecho es un álgebra, ya que si $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces $\phi_1\phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$. Más en general, si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y ψ es una función de clase C^∞ cuyo soporte no es necesariamente acotado, se tiene que $\phi\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Proposición 3.3
Sea f una función continua con soporte $K \subset \Omega$ compacto. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\sup\{|f(x) - \phi(x)| \,/\, x \in K\} < \varepsilon$ *y ϕ puede tener soporte contenido en un entorno arbitrario de K.*

Demostración.
Sea $\delta > 0$, definimos $K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, y \in K \,/\, d(x, y) < \delta\}$. Queremos probar que existe ϕ con soporte contenido en K_δ que verifica

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x) - \phi(x)| < \varepsilon.$$

Dado $a > 0$, sea θ una función no negativa, de clase C^∞, que cumpla $sop\,(\theta) = B(0, a)$ y $\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x)\, dx = 1$. Definimos ϕ mediante:

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\xi)\,\theta(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\,\theta(x-\xi)\,d\xi = \int_K f(\xi)\,\theta(x-\xi)\,d\xi. \tag{3.1}$$

Vamos a probar que eligiendo a suficientemente pequeño, ϕ tendrá las propiedades buscadas.
Primero, si $x \notin K_a$ se tiene que $\phi(x) = 0$ porque $\theta(x-\xi) = 0$ para todo $\xi \in K$. Luego, $sop\,(\phi) \subset K_a \subset K_\delta$ si $a \leq \delta$.
Por otra parte, ϕ es de clase C^∞ porque podemos derivar indefinidamente la expresión en la integral de la derecha en (3.1).
Finalmente, como $\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x)\, dx = 1$, dado $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$f(x) - \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-\xi))\,\theta(\xi)\,d\xi = \int_{B(0,\,a)} (f(x) - f(x-\xi))\,\theta(\xi)\,d\xi.$$

Al ser f continua y de soporte compacto, es uniformemente continua, de donde dado $\varepsilon > 0$, existe $\rho > 0$ tal que si $|\xi| < \rho$, se tiene $|f(x) - f(x-\xi)| < \varepsilon$.
Si $a < \rho$, tenemos:

$$|f(x) - \phi(x)| \leq \int_{B(0,\,a)} |f(x) - f(x-\xi)|\,\theta(\xi)\,d\xi < \varepsilon \int_{B(0,\,a)} \theta(\xi)\,d\xi = \varepsilon.$$

Tomando $a < \text{mín}\{\delta,\, \rho\}$, se tiene que ϕ cumple las propiedades deseadas. $\square$

Daremos ahora la noción de convergencia en $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definición 3.4
Una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si y sólo si se verifican las siguientes dos condiciones:
i) existe $K \subset \Omega$ compacto tal que $sop\,(\varphi_n) \subset K\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $sop\,(\varphi) \subset K$.
ii) la sucesión de derivadas parciales de cualquier orden de las φ_n converge uniformemente a la correspondiente derivada parcial de φ, esto es, dado un multiíndice α, $D^\alpha\varphi_n \rightrightarrows D^\alpha\varphi$.
Notaremos esta convergencia mediante: $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$.

Observación 3.5
La noción anterior de convergencia es la correspondiente a la de una topología τ en $\mathcal{D}(\Omega)$ (ver [9]). El conjunto de las funciones test, dotado de dicha topología τ y de las operaciones descritas en la observación 3.2 tiene estructura de espacio vectorial topológico localmente convexo.

3.2. Distribuciones

Definición 3.6 (Distribución)
Llamaremos distribución (o función generalizada) a todo funcional lineal continuo $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$. Notaremos por $\langle T,\, \phi\rangle := T(\phi)$.
El conjunto de las distribuciones en Ω será notado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Observación 3.7
Un funcional lineal T es continuo si y sólo si dada $(\psi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi$ se cumple que $\langle T,\, \psi_n\rangle \xrightarrow{n} \langle T,\, \psi\rangle$.
Además, por la linealidad de T, es suficiente verificar lo anterior para toda sucesión de funciones test que converge a la función nula. Tenemos, por lo tanto, que un funcional lineal $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ es una distribución si y sólo si $\langle T,\, \psi_n\rangle \xrightarrow{n} \langle T,\, 0\rangle$ para toda $(\psi_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$.

Más adelante dotaremos al espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ de la topología débil como espacio dual de $\mathcal{D}(\Omega)$. Ahora justificaremos la denominación de “funciones generalizadas” empleado. En este capítulo, Ω será un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$

y consideraremos en dicho espacio la medida de Lebesgue a menos que se especifique lo contrario.

Diremos que una función medible $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es localmente integrable si

$$\int_K |f(x)|\, dx < \infty \ \forall\, K \subset \Omega \text{ compacto.}$$

Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ al conjunto de funciones localmente integrables.

De forma análoga, diremos que una función es de cuadrado localmente integrable si

$$\int_K |f(x)|^2\, dx < \infty \quad \forall K \subset \Omega \text{ compacto,}$$

y notaremos mediante $L^2_{loc}(\Omega)$ al espacio de funciones de cuadrado localmente integrable.

La importancia de las funciones de cuadrado localmente integrable será clara más adelante en el trabajo. Por el momento, podemos decir que si una función $v : \Omega \times (0,\, t_0) \to \mathbb{R}^3$ representa el campo de velocidades de un fluido de densidad constante ρ, entonces $\int_K \frac{\rho}{2}|v(x,t)|^2\, dx$ representa la energía cinética de la porción de fluido que en el instante t ocupa la región K.

Lema 3.8
Se cumple que $C^0(\Omega) \subset L^2_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$. *Además, si* $f \in L^2_{loc}(\Omega)$, *entonces* $f^2 \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Demostración.
Sea $\phi \in C^0(\Omega)$, dado $K \subset \Omega$ compacto, se tiene que

$$\exists\, M = \text{máx}\{|\phi(x)| \,/\, x \in K\} < \infty.$$

Entonces, como $m(K) < \infty$, se tiene

$$\int_K |\phi(x)|^2\, dx \leq M^2\, m(K) < \infty,$$

de donde $\phi \in L^2_{loc}(\Omega)$.
Si $\psi \in L^2_{loc}(\Omega)$, y si $K \subset \Omega$ es compacto, entonces χ_k, $|\psi|\chi_k \in L^2(\Omega)$, por lo que podemos aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left(\int_K |\psi|\right)^2 = |\langle \chi_k,\, |\psi|\chi_k \rangle|^2 \leq m(K) \int_K |\psi|^2 < \infty.$$

De esta forma, se tiene que $\psi \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Finalmente, si $f \in L^2_{loc}(\Omega)$ se tiene $|f|^2 \in L^1_{loc}(\Omega)$, pero $|f|^2 = \left|f^2\right|$, por lo que se cumple $f^2 \in L^1_{loc}(\Omega)$.

$\square$

Proposición 3.9
Dada $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces el mapa $i_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\langle i_f,\, \phi \rangle \,=\, \int_\Omega f(x)\,\phi(x)\,dx$$

es una distribución.

Demostración.
La linealidad del mapa i_f es trivial: sean $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ y $\phi,\, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$i_f(\alpha\phi + \beta\psi) \,=\, \int_\Omega f(x)\,(\alpha\phi(x) + \beta\psi(x))\,dx \,=\, \alpha\, i_f(\phi) + \beta i_f(\psi).$$

Sea ahora $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ y sea $K \subset \Omega$ compacto tal que *sop* $(\phi_n) \subset K$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Consideremos $M_n = \text{máx}\{|\phi_n(x)| \;/\; x \in K\}$. Entonces,

$$|\langle i_f,\, \phi_n \rangle| \,=\, \left|\int_\Omega f(x)\phi_n(x)\,dx\right| \,=\, \left|\int_K f(x)\phi_n(x)\,dx\right| \leq M_n \int_K |f(x)|\,dx.$$

Como $f \in L^1_{loc}$, se tiene que $\int_K |f(x)|\,dx \,=\, \alpha \,<\, \infty$; además, $M_n \xrightarrow{n} 0$ porque $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$. De esta forma,

$$|\langle i_f,\, \phi_n \rangle| \xrightarrow{n} 0,$$

por lo que i_f es continuo.

$\square$

La proposición anterior nos induce a considerar un mapa $L^1_{loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $f \mapsto i_f$.

Proposición 3.10
Dadas $f,\, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tales que $i_f \,=\, i_g$, entonces $f(x) \,=\, g(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$.

Demostración.
Como la correspondencia $f \mapsto i_f$ es lineal, alcanza con probar que si $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ cumple $\langle h,\, \phi \rangle \,=\, 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces $h \,=\, 0$ c.t.p.

En primer lugar, veamos que se cumple $\int_\Omega h\psi = 0$ para toda función ψ continua con soporte compacto: sea $sop\,\psi = K$, por la observación 3.3 tenemos que dados $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$sop\,\varphi \subset K_\delta = \{x \in \Omega \,/\, d(x,\, K) < \delta\} \;\text{ y }\; \max_{x\in K} |\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon.$$

Entonces,

$$\left| \int_\Omega (\varphi(x) - \psi(x))\, h(x)\, dx \right| < \varepsilon \int_{K_\delta} |h(x)|\, dx.$$

Como $\int_\Omega \varphi(x)h(x)\,dx = 0$ por hipótesis, se deduce que

$$\left| \int_\Omega \psi(x)\, h(x)\, dx \right| < \varepsilon \int_{K_\delta} |h(x)|\, dx.$$

Dejando δ fijo y haciendo $\varepsilon \to 0$, se tiene que $\int_\Omega h\psi = 0$.
Ahora, sea α una función medible acotada, con soporte compacto. Veamos que $\int_\Omega h\,\alpha = 0$: sabemos que existe $(\alpha_n) \subset C^0(\Omega)$ sucesión de funciones continuas tal que $\alpha_n(x) \to \alpha(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$. Podemos suponer $sop\,(\alpha_n) \subset K$ $\forall n$, con K compacto. Esto implica que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n(x)| = M(x) < \infty \;\text{ c.t.p. } x \in \Omega.$$

Aplicando el teorema de convergencia dominada, tenemos:

$$\lim_n \int_\Omega \alpha_n(x)h(x)\,dx = \lim_n \int_K \alpha_n(x)h(x)\,dx = \int_K \lim_n \alpha_n(x)h(x)\,dx =$$
$$= \int_\Omega \alpha(x)h(x)\,dx.$$

Por lo ya visto, $\int_\Omega \alpha_n(x)h(x)\,dx = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\int_\Omega h\,\alpha = 0$.
Finalmente, dado $r > 0$, consideremos la función α_r definida por:

$$\alpha_r(x) = \begin{cases} 0, \;\text{ si } |x| > r \text{ o } h(x) = 0 \\ e^{-i\omega(x)}, \;\text{ si } |x| \le r \text{ y } h(x) = |h(x)|\, e^{i\omega(x)} \end{cases}$$

Claramente α_r es una función medible, acotada, y $sop\,(\alpha_r) \subset \overline{B}(0, r)$. Por lo tanto,

$$0 = \int_\Omega \alpha_r(x)\, h(x)\, dx = \int_{\overline{B}(0,r)} |h(x)|\, dx.$$

Como $|h|$ es una función en L^+ con integral sobre $\overline{B}(0, r)$ nula para todo $r > 0$, se tiene que $|h(x)| = 0$ c.t.p. $x \in \Omega$, es decir, $h = 0$ c.t.p.

□

Abusando de notación, siempre que sea claro notaremos por f a la distribución i_f definida por la función f.

Observación 3.11
Por el teorema de Riesz-Markov, tenemos que si μ es una medida regular definida sobre los borelianos de Ω, entonces el mapa $F_\mu : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que $F_\mu(\phi) = \int_\Omega \phi \, d\mu$ es una distribución.

Ejemplo 3.12 (Distribuciones delta de Dirac)
En este contexto, dado $x \in \Omega$, consideramos la medida de Dirac con soporte en x, δ_x. La distribución F_{δ_x} que induce verifica:

$$\langle F_{\delta_x}, \phi \rangle = \int_\Omega \phi(y) \, d\delta_x = \phi(x).$$

A esta distribución la llamaremos delta de Dirac centrada en x. Para simplificar la notación, utilizaremos δ_x para referirnos tanto a la medida como a la distribución delta de Dirac; en el caso particular en que $x = 0$, nos referiremos a esta distribución simplemente mediante δ.

3.3. Derivadas distribucionales

En esta sección nos ocuparemos de definir la derivada de una distribución. Sabemos que si f es una función derivable, entonces f define una distribución; naturalmente, es deseable que en este caso la derivada distribucional de f coincida con la derivada en el sentido clásico.
Sean $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $f \in C^1(\Omega)$, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f \, \phi) = \frac{\partial f}{\partial x_j} \phi + f \frac{\partial \phi}{\partial x_j}, \; j = 1, \dots, n. \tag{3.2}$$

Si consideramos el campo de vectores Ψ en Ω, $\Psi(x) = f(x) \, \phi(x) e_j$, donde e_j es el vector j-ésimo de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, tenemos:

$$(div \, \Psi)(x) = \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f \, \phi)(x).$$

Integrando esta última igualdad en Ω, y considerando una variedad diferenciable con borde M de dimensión n y tal que $sop(\phi) \subsetneq M \subset \Omega$, obtenemos

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(f \, \phi)(x) \, dx = \int_M (div\Psi)(x) \, dx = \int_{\partial M} (\phi(x) \, f(x) \, e_j) \, . \, n(x) \, dx,$$

donde $n(x)$ denota el vector unitario normal a ∂M en x.
Como $sop(\phi) \subsetneq M$, tenemos que $\phi(x) = 0 \; \forall x \in \partial M$. De esta forma,

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(f \, \phi) = 0.$$

Luego, en virtud de la igualdad (3.2), obtenemos

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\phi \;=\; -\int_\Omega f\,\frac{\partial \phi}{\partial x_j},$$

lo que nos permite formular una definición de derivada distribucional.

Definición 3.13 (Derivada distribucional)
Dada $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos la derivada parcial de T respecto a x_j como la distribución $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ dada por:

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j},\, \phi \right\rangle \;=\; -\left\langle T,\, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Verifiquemos que efectivamente la derivada parcial de una distribución respecto a x_j es una distribución: dados α, $\beta \in \mathbb{R}$ y ϕ, $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j},\, \alpha\phi + \beta\psi \right\rangle \;=\; -\left\langle T,\, \frac{\partial}{\partial x_j}\,(\alpha\phi + \beta\psi) \right\rangle \;=\; -\left\langle T,\, \alpha\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \;+\; \beta\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right\rangle \;=$$

$$=\; -\alpha\left\langle T,\, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle \;-\; \beta\left\langle T,\, \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right\rangle \;=\; \alpha\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j},\, \phi \right\rangle \;+\; \beta\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j},\, \psi \right\rangle.$$

Por otra parte, si $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ es una sucesión tal que $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, se tiene que $\frac{\partial \phi_n}{\partial x_j} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ para todo j. Entonces,

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j},\, \phi_n \right\rangle \;=\; -\left\langle T,\, \frac{\partial \phi_n}{\partial x_j} \right\rangle \xrightarrow{\;n\;} 0,$$

pues T es continua.

Observación 3.14
Esta definición generaliza la de derivada clásica de una función.

Observación 3.15
Aplicando esta definición sucesivamente, se pueden definir las derivadas parciales de cualquier orden de una distribución.
Como corolario de esto, se tiene que toda distribución admite derivadas parciales de cualquier orden, esto es, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ entonces $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para todo multiíndice α.

Ejemplo 3.16 (Distribución de Heaviside)
Sea $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $H(x) = \chi_{[0,\infty)}(x)$. A esta función H se la conoce como función de Heaviside.
Como $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, H define una distribución (llamada también distribución de Heaviside) mediante:

$$\langle H, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)\, \phi(x)\, dx = \int_0^{\infty} \phi(x)\, dx \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Calculemos la derivada de H en el sentido de las distribuciones:

$$\left\langle H', \phi \right\rangle = -\left\langle H, \phi' \right\rangle = -\int_0^{\infty} \phi'(x)\, dx = \phi(0) - \lim_{x\to\infty} \phi(x) \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Al ser $sop\,(\phi)$ compacto, se tiene que $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0$, de donde

$$\left\langle H', \phi \right\rangle = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La derivada débil de la distribución de Heaviside es la distribución delta de Dirac.

3.4. Distribuciones vectoriales y tensoriales

La modelación de varios fenómenos físicos -entre ellos las ecuaciones de Navier-Stokes- requiere utilizar magnitudes no sólo escalares, sino también vectoriales y tensoriales. Luego, resulta natural la necesidad de definir funciones generalizadas que tomen valores en $\mathbb{R}^n$ o en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y extender los operadores diferenciales de forma adecuada.

3.4.1. Distribuciones vectoriales

Definición 3.17 (Funciones test vectoriales)
Definimos el conjunto de las funciones test vectoriales en Ω como

$$\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^m) := [\mathcal{D}(\Omega)]^m = \{\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)^t \,/\, \phi_i \in \mathcal{D}(\Omega)\ \forall\, i = 1, \ldots, m\}.$$

Podemos identificar los elementos de $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ con funciones en $C_c^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Diremos que una sucesión $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ converge a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ si y sólo si converge coordenada a coordenada, es decir: $(\varphi_i)_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$. Notaremos esto mediante $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$.

Definición 3.18 (Distribuciones vectoriales)
Definimos el conjunto de las distribuciones vectoriales en Ω mediante

$$\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^m) = \{T = (T_1, \ldots, T_m)^t \,/\, T_i \in \mathcal{D}'(\Omega)\ \forall\, i = 1, \ldots, m\}.$$

Dada una distribución vectorial T, llamaremos componentes de T a cada una de las distribuciones T_i.

Observación 3.19
Cada distribución vectorial T induce un funcional lineal continuo sobre $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ a través de

$$\langle T,\, \phi \rangle \,:=\, T(\phi) \,=\, \sum_{j=1}^{m} \langle T_j,\, \phi_j \rangle \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Análogamente a como hicimos antes, podemos definir el espacio

$$L^1_{loc}(\Omega,\, \mathbb{R}^m) \,:=\, \left[L^1_{loc}(\Omega)\right]^m \,=$$

$$=\, \{f = (f_1, \ldots, f_m) \,/\, f_i \in L^1_{loc}(\Omega)\ \forall\, i = 1, \ldots, m\}.$$

De la misma forma, si $f \in L^1_{loc}(\Omega,\, \mathbb{R}^m)$, se tiene que induce $i_f \in \mathcal{D}'(\Omega,\, \mathbb{R}^m)$ definida por:

$$\langle i_f,\, \phi \rangle \,=\, \sum_{j=1}^{m} \left\langle i_{f_j},\, \phi_j \right\rangle \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega,\, \mathbb{R}^m).$$

Considerando también

$$L^2_{loc}(\Omega,\, \mathbb{R}^m) \,:=\, \left[L^2_{loc}(\Omega)\right]^m \,=$$

$$=\, \{f = (f_1, \ldots, f_m) \,/\, f_i \in L^2_{loc}(\Omega)\ \forall\, i = 1, \ldots, m\},$$

tendremos que $C^0(\Omega,\, \mathbb{R}^m) \,\subset\, L^2_{loc}(\Omega,\, \mathbb{R}^m) \,\subset\, L^1_{loc}(\Omega,\, \mathbb{R}^m)$, en forma análoga al lema 3.8.

Veamos ahora cómo actúan los operadores diferenciales clásicos en $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Definición 3.20
Dados $\Omega \,\subset \mathbb{R}^3$ abierto, $T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$ y $v \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^3)$, definimos:

- el gradiente de T,

$$\nabla T \,=\, \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2}, \frac{\partial T}{\partial x_3}\right)^t \,\in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^3);$$

- el rotacional de v,

$$rot\, v \,=\, ((rot\, v)_1, (rot\, v)_2, (rot\, v)_3)^t \,\in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^3),\ \text{donde}$$

$$(rot\, v)_i \;=\; \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \;\in \mathcal{D}'(\Omega,\, \mathbb{R})$$

y ϵ_{ijk} es el pseudo-tensor antisimétrico de Levi-Civita:

$$\epsilon_{ijk} \;=\; \begin{cases} 0, \;\text{ si } i=j,\, i=k \text{ o } j=k \\ 1, \;\text{ si } (i,\, j,\, k) \in \{(1,\, 2,\, 3),\; (2,\, 3,\, 1),\; (3,\, 1,\, 2)\} \\ -1, \;\text{ si } (i,\, j,\, k) \in \{(2,\, 1,\, 3),\; (3,\, 2,\, 1),\; (1,\, 3,\, 2)\} \end{cases} \quad ;$$

- la divergencia de v,

$$div\, v \;=\; \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \;+\; \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \;+\; \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \;\in \mathcal{D}'(\Omega,\, \mathbb{R});$$

- el laplaciano de T,

$$\Delta T \;=\; \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} \;+\; \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \;+\; \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \;\in \mathcal{D}'(\Omega,\, \mathbb{R}).$$

Lema 3.21
Sean $T \in \mathcal{D}'(\Omega,\, \mathbb{R})$, $v \in \mathcal{D}'(\Omega,\, \mathbb{R}^3)$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega,\, \mathbb{R}^3)$ y $\psi \in \mathcal{D}(\Omega,\, \mathbb{R})$. Entonces valen:
i- $\langle \nabla T,\, \phi \rangle \;=\; -\,\langle T,\, div\, \phi \rangle$;
ii- $\langle rot\, v,\, \phi \rangle \;=\; \langle v,\, rot\, \phi \rangle$;
iii- $\langle div\, v,\, \psi \rangle \;=\; -\,\langle v,\, \nabla \psi \rangle$;
iv- $rot\,(\nabla T) \;=\; 0$;
v- $div\,(\nabla T) \;=\; \Delta T$;
vi- $div\,(rot\, v) \;=\; 0$.

Demostración.
i- Calculando directamente,

$$\langle \nabla T,\, \phi \rangle \;=\; \sum_{j=1}^{3} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j},\, \phi_j \right\rangle \;=\; -\left\langle T,\, \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_j} \right\rangle \;=\; -\,\langle T,\, div\, \phi \rangle\,.$$

ii- Por una parte,

$$\langle rot\, v,\, \phi \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{3} \langle (rot\, v)_i,\, \phi_i \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{3} \left\langle \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \frac{\partial v_k}{\partial x_j},\, \phi_i \right\rangle \;=$$

$$=\; \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \left\langle \frac{\partial v_k}{\partial x_j},\, \phi_i \right\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} -\epsilon_{ijk} \left\langle v_k,\, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Observemos que $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{kji} \quad \forall\, i,\, j,\, k$, lo que implica que

$$\langle rot\, v,\, \phi \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{kji} \left\langle v_k,\, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right\rangle .$$

Por otra parte, $(rot\, \phi)_k \;=\; \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \epsilon_{kji} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$, de donde se deduce:

$$\langle v,\, rot\, \phi \rangle \;=\; \sum_{k=1}^{3} \langle v_k,\, (rot\, \phi)_k \rangle \;=\; \sum_{k=1}^{3} \left\langle v_k,\, \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \epsilon_{kji} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right\rangle \;=$$

$$=\; \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{kji} \left\langle v_k,\, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right\rangle \;=\; \langle rot\, v,\, \phi \rangle .$$

iii- Tenemos

$$\langle div\, v,\, \psi \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{3} \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_i},\, \psi \right\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{3} - \left\langle v_i,\, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle \;=$$

$$=\; - \sum_{i=1}^{3} \langle v_i,\, (\nabla \psi)_i \rangle \;=\; - \langle v,\, \nabla \psi \rangle .$$

iv- Sea $i \in \{1,\, 2,\, 3\}$, calculando la i-ésima componente de $rot(\nabla T)$,

$$(rot(\nabla T))_i \;=\; \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial (\nabla T)_k}{\partial x_j} \;=\; \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 T}{\partial x_k\, \partial x_j} \;=\; 0,$$

pues $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} \;\forall\, j,\, k$.

v- Se tiene que:

$$div\, (\nabla T) \;=\; \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial (\nabla T)_i}{\partial x_i} \;=\; \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \;=\; \Delta T.$$

vi- Observemos que

$$div\, (rot\, v) \;=\; \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial (rot\, v)_i}{\partial x_i} \;=\; \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j\, \partial x_i} .$$

Como $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \quad \forall\, i,\, j,\, k$, se tiene el resultado buscado.

$\square$

3.4.2. Distribuciones tensoriales

Comenzamos esta sección definiendo el producto tensorial entre dos vectores de $\mathbb{R}^k$ mediante $\otimes : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, de forma que $\otimes(u,\, v) := u \otimes v$ es la matriz $(u \otimes v)_{ij} \,=\, u_i\, v_j, \;\; 1 \leq\, i,\, j\, \leq k$.
En $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ definimos el producto interno de la siguiente forma: dadas $A,\, B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$,

$$A : B \,:= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} A_{ij}\, B_{ij}.$$

Llamaremos funciones test matriciales a los elementos del conjunto

$$\mathcal{D}(\Omega,\, \mathcal{M}_k(\mathbb{R})) \,=\, \{A : \Omega \to \mathcal{M}_k(\mathbb{R}) \,/\, A_{ij} \in \mathcal{D}(\Omega)\}.$$

La convergencia en $\mathcal{D}(\Omega,\, \mathcal{M}_k(\mathbb{R}))$ está dada por la convergencia coordenada a coordenada en $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir, $A_n \to A$ en $\mathcal{D}(\Omega,\, \mathcal{M}_k(\mathbb{R}))$ si y sólo si $(A_n)_{ij} \xrightarrow{\mathcal{D}} A_{ij}\; \forall\, 1 \leq\, i,\, j\, \leq k$.
Notaremos por $\mathcal{D}'(\Omega,\, \mathcal{M}_k(\mathbb{R}))$ al conjunto de las matrices cuadradas $k \times k$ cuyas entradas son distribuciones, y lo llamaremos espacio de distribuciones tensoriales.
Claramente, dada una distribución tensorial T, ésta induce una transformación lineal continua $\mathcal{D}(\Omega,\, \mathcal{M}_k(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}$ mediante

$$\langle T,\, \Phi\rangle \,:=\, T(\Phi) \,=\, \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \langle T_{ij},\, \Phi_{ij}\rangle\, .$$

Definición 3.22

Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega,\, \mathcal{M}_k(\mathbb{R}))$, $T \,=\, \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_k \end{pmatrix}$, donde T_i es la distribución vectorial dada por la i-ésima fila de T, definimos la divergencia de T como

$$Div\,(T) \,=\, \begin{pmatrix} div\, T_1 \\ \vdots \\ div\, T_k \end{pmatrix} \in \mathcal{D}'(\Omega,\, \mathbb{R}^k).$$

Por otra parte, dada $v \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ definimos la distribución tensorial $\nabla v \in \mathcal{D}'(\Omega,\, \mathcal{M}_k(\mathbb{R}))$ mediante

$$\nabla v \,:=\, \left((\nabla v)\right)_{ij}, \;\; \text{con} \;\; (\nabla v)_{ij} \,=\, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Lema 3.23
Sean $T \in \mathcal{D}'(\Omega,\, \mathcal{M}_k(\mathbb{R}))$ *y* $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^k)$. *Entonces,*

$$\langle Div\, T,\, \phi \rangle \;=\; -\, \langle T,\, \nabla\phi \rangle\,.$$

Demostración.
Por un lado,

$$\langle Div\, T,\, \phi \rangle \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} div\, T_1 \\ \vdots \\ div\, T_k \end{pmatrix},\, \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_k \end{pmatrix} \right\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{k} \langle div\, T_j,\, \phi_j \rangle \;=$$

$$=\; \sum_{i,\,j\,=1}^{k} \left\langle \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_i},\, \phi_j \right\rangle \;=\; \sum_{i,\,j\,=1}^{k} -\left\langle T_{ij},\, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Por otra parte, tenemos

$$\langle T,\, \nabla\phi \rangle \;=\; \sum_{i,\,j\,=1}^{k} \langle T_{ij},\, (\nabla\phi)_{ij} \rangle \;=\; \sum_{i,\,j\,=1}^{k} \left\langle T_{ij},\, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right\rangle,$$

lo que implica el resultado buscado. $\square$

Capítulo 4

Soluciones débiles de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Una solución clásica de una ecuación diferencial es una función que sustituida en la ecuación resulta en una identidad válida en cada punto de su dominio de definición. Esto exige que esta función sea diferenciable. Sin embargo, en ciertas ocasiones resulta conveniente considerar funciones que sean solamente continuas, o incluso discontinuas, como soluciones. De esta forma, podemos buscar soluciones distribucionales, considerando la noción de derivada presentada en el capítulo anterior.

En este capítulo definiremos soluciones débiles de ecuaciones en derivadas parciales lineales y presentaremos, mediante un ejemplo, una idea de cómo se puede extender esta definición para ciertas ecuaciones no lineales. Daremos una noción de convergencia en $\mathcal{D}'$, y con ella estudiaremos procesos de traslación, oscilación y concentración.

4.1. Ecuaciones en derivadas parciales

Comenzamos este capítulo definiendo las ecuaciones en derivadas parciales (EDP's), que son ecuaciones que involucran una función de dos o más variables con alguna de sus derivadas parciales.

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y $k > 0$. Dado $x \in \Omega$, notaremos al conjunto de derivadas parciales de orden k de f en x por

$$D^k f(x) := \{D^\alpha f(x) \,/\, |\alpha| = k\}.$$

Definición 4.1
Una expresión de la forma

$$F(D^k f(x), \ldots, Df(x),\ f(x),\ x) \;=\; 0, \tag{4.1}$$

se llama ecuación en derivadas parciales (EDP) de orden k, donde

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$$

está dada y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es la incógnita.

Resolvemos la EDP si encontramos todas las funciones que verifican (4.1), posiblemente entre aquellas que satisfacen ciertas condiciones de borde en un subconjunto $\Gamma \subset \partial\Omega$.

Definición 4.2 (EDP lineal)
La EDP (4.1) es lineal si es de la forma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x)\, D^\alpha f(x) \;=\; \varphi(x), \tag{4.2}$$

para ciertas funciones dadas a_α ($|\alpha| \leq k$), φ de clase C^∞.

Observación 4.3
Para que una distribución pueda ser solución de una EDP, es necesario tener bien definido el producto entre una función y una distribución. Dadas $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$, y $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, por la observación 3.2, $f\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, de donde se podría definir fT a través de: $fT\,(\phi) \;=\; \langle T,\, f\phi \rangle$.
De hecho, se tiene que esta fT es una distribución: la linealidad es trivial. En cuanto a la continuidad, si $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$, $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, entonces basta verificar que $f\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$. Como existe K compacto tal que $sop\,(\phi_n) \subset K$ para todo n, el propio conjunto K verifica $sop\,(f\phi_n) \subset K$ para todo n. Por otra parte, dado un multiíndice α,

$$|D^\alpha(f\phi_n)| \;=\; \left| \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} \left(D^\beta f\right)(D^\gamma \phi_n) \right| \;\leq\; C \left| \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|} D^\gamma \phi_n \right|,$$

pues para todo multiíndice β, existe $c_\beta > 0$ tal que $\sup_{x\in K} \left|D^\beta f(x)\right| \leq c_\beta$.
Como $D^\gamma \phi_n \rightrightarrows 0$ para todo multiíndice γ, obtenemos $D^\alpha(f\phi_n) \rightrightarrows 0$.

Definición 4.4 (Producto de una función por una distribución)
Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$, el producto de f por T es la distribución fT tal que $\langle fT,\, \phi\rangle \,=\, \langle T,\, f\phi\rangle$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definición 4.5 (Solución débil de una EDP lineal)
Diremos que una distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es solución débil de la EDP lineal (4.2) si satisface la igualdad en el sentido de las distribuciones.

Observación 4.6
Esta definición generaliza la de solución clásica, ya que sabemos que la noción de derivada distribucional generaliza a la de derivada clásica.

4.2. Topología de $\mathcal{D}'(\Omega)$

La principal razón para incorporar la topología de $\mathcal{D}'(\Omega)$ a este trabajo es estudiar qué ocurre al considerar una sucesión de soluciones débiles de una EDP. En particular, se tendrá que el límite de dicha sucesión será una solución débil si la ecuación es lineal; si la EDP no lo fuera, no podremos asegurar este resultado.

Recordemos que teníamos definido

$$\mathcal{D}'(\Omega) \,=\, \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \,/\, T \text{ lineal y continuo}\} \,=\, [\mathcal{D}(\Omega)]^* \,.$$

Es natural dotar a este espacio con la topología débil-$*$ como espacio dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, por lo que la noción de convergencia de sucesiones en $\mathcal{D}'(\Omega)$ quedará definida como a continuación.

Definición 4.7 (Convergencia débil)
Diremos que una red de distribuciones $(T_i)_{i\in I}$ converge débilmente a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se tiene que $\langle T_i,\, \phi\rangle \to \langle T,\, \phi\rangle$.
Notaremos este hecho mediante $T_i \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} T$.

Observación 4.8
La noción de convergencia débil puede extenderse fácilmente a $\mathcal{D}'(\Omega,\, \mathbb{R}^m)$ y a $\mathcal{D}'(\Omega,\, \mathcal{M}_k(\mathbb{R}))$: sucesiones en estos espacios convergen débilmente si y sólo si lo hacen coordenada a coordenada en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Proposición 4.9
Dada la EDP lineal $\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha\, D^\alpha f \;=\; \varphi$*, si* $(T_n)\;\subset \mathcal{D}'(\Omega)$ *es una sucesión de soluciones débiles de la misma tal que* $T_n \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} T$*, entonces* T *también es solución débil.*

Demostración.
Como para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha\, D^\alpha T_n \;=\; \varphi$, tenemos que, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle \varphi,\, \phi\rangle \;=\; \left\langle \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha\, D^\alpha T_n,\, \phi \right\rangle \;=\; \sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{|\alpha|}\; \langle T_n,\, D^\alpha\,(a_\alpha\, \phi)\rangle \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Al ser $T_n \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} T$, se tiene que para toda $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T_n,\, \psi\rangle \;\to\; \langle T,\, \psi\rangle$; en particular, $\langle T_n,\, D^\alpha\,(a_\alpha\,\phi)\rangle \to \langle T,\, D^\alpha\,(a_\alpha\,\phi)\rangle$ para todo multiíndice α.
Entonces,

$$\langle \varphi,\, \phi\rangle \;=\; \sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{|\alpha|}\; \langle T_n,\, D^\alpha\,(a_\alpha\,\phi)\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{\alpha}\; \langle T,\, D^\alpha\,(a_\alpha\,\phi)\rangle \;=$$

$$=\; \left\langle \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha\, D^\alpha T,\, \phi \right\rangle, \quad \text{es decir,} \;\; \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha\, D^\alpha T \;=\; \varphi.$$

□

En general, no podemos definir el producto entre dos distribuciones, lo cual podría ser un obstáculo para estudiar ecuaciones no lineales. Sin embargo, si nos restringimos a ciertas clases de ecuaciones no lineales, aún podremos dar una noción de solución débil para las mismas. De todas formas, la propiedad deseable de que una sucesión de soluciones débiles converja a una solución débil no se cumplirá.

4.3. Un ejemplo no lineal

En esta sección veremos a través de un ejemplo cómo podrían definirse soluciones débiles para ciertas EDP's no lineales.

Definición 4.10 (Ecuación de Burgers sin viscosidad)
La ecuación diferencial no lineal $u_t + u\, u_x \;=\; 0$ se llama ecuación de Burgers sin viscosidad.

Observación 4.11
La ecuación de Burgers sin viscosidad puede ser reescrita en forma de diver-

gencia, es decir, a través de la aplicación del operador divergencia a ciertas funciones dadas:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(u) + \frac{\partial}{\partial x} g(u) = 0,$$

con f y g tales que $f'(u) = u\, g'(u)$. En este caso, podríamos elegir $f(u) = u$ y $g(u) = \frac{u^2}{2}$.

La nueva forma de la ecuación sí tiene sentido en $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, lo que nos permite introducir la noción de solución débil para la misma.

Definición 4.12
Una función $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ es solución débil de la ecuación de Burgers sin viscosidad si se satisface la identidad en $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0.$$

Observación 4.13
Ya sabemos que si $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, entonces u y u^2 definen distribuciones, por lo que la definición anterior tiene sentido.

Además, dada $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$,

$$0 = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right), \phi \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \left(u\, \phi_t + \frac{u^2}{2}\, \phi_x \right) dt\, dx.$$

Entonces, u es solución débil de la ecuación de Burgers sin viscosidad si y sólo si

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \left(u\, \phi_t + \frac{u^2}{2}\, \phi_x \right) dt\, dx = 0 \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+).$$

4.4. Ejemplos de procesos en $\mathcal{D}'$

Consideraremos tres procesos básicos que tomarán particular relevancia en el estudio de la convergencia de sucesiones de soluciones débiles de las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes.

4.4.1. Traslaciones

Sea $\psi \in C^0_c(\mathbb{R})$ una función continua con soporte compacto, consideremos la sucesión de funciones $(\psi_t)_{t>0}$ definida por

$$\psi_t(x) = \psi(x - t).$$

Si ψ representara una magnitud física, la sucesión (ψ_t) representaría a la magnitud ψ escapando de cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ en tiempo finito.

Proposición 4.14
En las condiciones enunciadas, $\psi_t \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$*, cuando* $t \to \infty$*.*

Demostración.
En primer lugar,

$$\psi_t(x) = \psi(x-t) = \psi(x-t)\,\chi_{sop\,\psi}(x-t) = \psi(x-t)\,\chi_{sop\,\psi+t}(x),$$

con

$$sop\,\psi + t = \{y+t \,/\, y \in sop\,\psi\}.$$

Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, entonces:

$$|\langle \psi_t,\, \phi\rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} \psi(x-t)\,\chi_{sop\,\psi+t}(x)\,\phi(x)\,dx \right| \leq k \int_{\mathbb{R}} \chi_{(sop\,\psi+t)\cap sop\,\phi}(x)\,dx,$$

donde $k = \text{máx}\{|\psi(x)| \,/\, x \in \mathbb{R}\}\,.\,\text{máx}\{|\phi(x)| \,/\, x \in \mathbb{R}\} < \infty$.
Ahora, $|\chi_{(sop\,\psi+t)\cap sop\,\phi}(x)| \leq \chi_{sop\,\phi}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y $\chi_{sop\,\phi} \in L^1(\mathbb{R})$. Por otra parte, como $sop\,\psi \subset \mathbb{R}$ es compacto, tiene mínimo (m), y como $sop\,\phi \subset \mathbb{R}$ es compacto, tiene máximo (M). Basta tomar t_0 tal que $M < m + t_0$ para afirmar que para todo $t > t_0$,

$$(sop\,\psi + t) \cap sop\,\phi = \emptyset \implies \chi_{(sop\,\psi+t)\cap sop\,\phi} \equiv 0 \quad \forall\, t > t_0.$$

Entonces, se cumple que $\langle \psi_t,\, \phi\rangle \to 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, es decir, $\psi_t \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$.
□

4.4.2. Oscilaciones

Sea $p \in C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ una función continua y periódica de período T respecto a la segunda variable. Consideremos la sucesión de funciones $(p^\varepsilon) \subset C^0(\mathbb{R}^m)$, con $p^\varepsilon(x) = p(x,\, x_1/\varepsilon)$. Definimos la función media de p en $x \in \mathbb{R}^m$ como:

$$\tilde{p}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T p(x,\, z)\,dz.$$

Vamos a probar que en estas condiciones se tiene $p^\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \tilde{p}$ con $\varepsilon \to 0$, lo que generaliza el Lema de Riemann-Lebesgue clásico (ver [5], página 249).

Lema 4.15
Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, periódica de período T y $E = [a, b] \times \Lambda \subset \mathbb{R}^m$ medible y acotado. Entonces,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^m} g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \chi_E(x)\, dx = \frac{1}{T}\left(\int_0^T g(z)\, dz\right) m(E).$$

Demostración.
Se tiene que

$$\int_E g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) dx = \int_\Lambda \left(\int_a^b g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) dx_1\right) dx_2 \dots dx_m.$$

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n\,\varepsilon\,T \leq b - a \leq (n+1)\,\varepsilon\,T. \tag{4.3}$$

Entonces,

$$\int_a^b g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) dx_1 = \int_a^{a+n\varepsilon T} g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) dx_1 + \int_{a+n\varepsilon T}^b g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) dx_1.$$

Ahora,

$$\int_a^{a+n\varepsilon T} g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) dx_1 = n\int_0^{\varepsilon T} g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) dx_1 = n\varepsilon \int_0^T g(z)\, dz,$$

mientras que si M es una mayorante para g,

$$\left|\int_{a+n\varepsilon T}^b g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) dx_1\right| \leq \int_{a+n\varepsilon T}^b \left|g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\right| dx_1 \leq M\varepsilon T \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

De esta forma,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_E g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Lambda n\varepsilon \left(\int_0^T g(z)\, dz\right) dx_2 \dots dx_m.$$

Las desigualdades (4.3) implican $n\,\varepsilon\,T \to b - a$, por lo que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Lambda n\varepsilon \left(\int_0^T g(z)\, dz\right) dx_2 \dots dx_m =$$

$$= \int_\Lambda \frac{(b-a)}{T}\left(\int_0^T g(z)\, dz\right) dx_2 \dots dx_m =$$

$$\left(\frac{1}{T}\int_0^T g(z)\, dz\right)\int_\Lambda \int_a^b dx_1 \dots dx_m = \frac{1}{T}\left(\int_0^T g(z)\, dz\right) m(E).$$

□

Lema 4.16
Sean g como antes y $F \subset \mathbb{R}^m$ medible y acotado. Entonces

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^m} g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \chi_F(x)\, dx = \frac{1}{T}\left(\int_0^T g(z)\, dz\right) m(F).$$

Demostración.
Dado $\delta > 0$, existen $E_1, \ldots, E_n \subset \mathbb{R}^m$ medibles y disjuntos dos a dos tales que $E_n = [a_n, b_n] \times \Lambda_n$, con Λ_n medibles y acotados, que cumplen

$$\bigcup_{i=1}^n E_i \subset F, \quad m\left(F \setminus \bigcup_{i=1}^n E_i\right) < \delta.$$

Observemos que $\chi_{\cup E_i}(x) = \sum \chi_{E_i}(x)$, y por el lema anterior, se tiene

$$\int_{E_i} g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) dx \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{T}\left(\int_0^T g(z)\, dz\right) m(E_i),$$

de donde

$$\sum_{i=1}^n \int_{E_i} g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) dx \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^n \frac{1}{T}\left(\int_0^T g(z)\, dz\right) m(E_i) =$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^T g(z)\, dz\right) m\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right).$$

Además, si M es una mayorante para g,

$$\left|\int_{F \setminus \cup E_i} g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) dx\right| < M\delta \quad \text{y} \quad \left|\frac{1}{T}\int_{F\setminus \cup E_i}\int_0^T g(z)\, dz\right| < M\delta.$$

Entonces,

$$\left|\int_F \left[g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{T}\int_0^T g(z)\, dz\right] dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{i=1}^n \int_{E_i} \left[g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{T}\int_0^T g(z)\, dz\right] dx\right| +$$

$$+ \left|\int_{F\setminus \cup E_i} \left[g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{T}\int_0^T g(z)\, dz\right] dx\right|,$$

y tomando límite con $\varepsilon \to 0$, el primer sumando tiende a cero, mientras que el segundo está acotado por $2M\delta$. De este modo, dado $\delta > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left|\int_F \left[g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{T}\int_0^T g(z)\, dz\right] dx\right| < 2M\delta,$$

lo que implica

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_F g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\,dx \;=\; \int_F \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(z)\,dz\right)dx \;=\; \frac{1}{T}\left(\int_0^T g(z)\,dz\right)m(F).$$

□

Observación 4.17
Como el lema anterior es válido para funciones características de conjuntos medibles y acotados, también lo será para funciones simples: dada $\{F_i\}$, familia finita de conjuntos medibles, acotados, disjuntos dos a dos y $\lambda_i \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^m} g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_{F_i}(x)\right)dx = \frac{1}{T}\left(\int_0^T g(z)\,dz\right)\int_{\mathbb{R}^m}\sum_{i=1}^k \lambda_i\chi_{F_i}(x)\,dx.$$

En efecto,

$$\int_{\mathbb{R}^m} g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_{F_i}(x)\right)dx = \sum_{i=1}^k \lambda_i \int_{\mathbb{R}^m} g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\chi_{F_i}(x)\,dx.$$

Aplicando el lema anterior,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_i\int_{\mathbb{R}^m} g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\chi_{F_i}(x)\,dx \;=\; \lambda_i\,\frac{1}{T}\left(\int_0^T g(z)\,dz\right)m(F_i),$$

por lo que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^m} g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_{F_i}(x)\right)dx = \sum_{i=1}^k \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lambda_i\int_{\mathbb{R}^m} g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\chi_{F_i}(x)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^T g(z)\,dz\right)\int_{\mathbb{R}^m}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\chi_{F_i}(x)\,dx\right).$$

Lema 4.18
Sea $p:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $p(x,\,z) \;=\; f(x)\,g(z)$, donde $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son funciones continuas, f acotada y g periódica de período T. Sean $\widetilde{p}$, $p^\varepsilon:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ definidas por:

$$\widetilde{p}(x) \;=\; \frac{1}{T}\,f(x)\int_0^T g(z)\,dz \quad y \quad p^\varepsilon(x) \;=\; f(x)\,g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right). \tag{4.4}$$

Entonces, $p^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} \widetilde{p}$, esto es, dada $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^m} p^\varepsilon(x)\,\phi(x)\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^m}\widetilde{p}(x)\,\phi(x)\,dx.$$

Demostración.
En primer lugar, tenemos que dados $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ y $\delta > 0$, existe una función ψ simple,

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_{F_i}(x), \quad \text{con} \quad \bigcup_{i=1}^{k} F_i \subset sop\,\phi, \quad F_i \cap F_j = \emptyset \ \text{ si } i \neq j,$$

tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} |f(x)\,\phi(x) \,-\, \psi(x)| < \delta,$$

pues $f\phi$ es acotada y de soporte compacto.

Entonces,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} (p^\varepsilon - \widetilde{p})\,\phi \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^m} \left(g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{T}\int_0^T g(z)\,dz \right) f(x)\,\phi(x)\,dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{\mathbb{R}^m} \left(g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{T}\int_0^T g(z)\,dz \right) \psi(x)\,dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{\mathbb{R}^m} \left(g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{T}\int_0^T g(z)\,dz \right) [f(x)\phi(x) - \psi(x)]\,dx \right|.$$

Por la observación anterior, el primero de los sumandos tiende a cero cuando $\varepsilon \to 0$, mientras que el segundo está acotado por $2M\delta\, m(sop\,\phi)$, con M mayorante para g, de donde se deduce que para todo $\delta > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| \int_{\mathbb{R}^m} (p^\varepsilon(x) - \widetilde{p}(x))\,\phi(x) \right| \leq 2M\delta\, m(sop\,\phi),$$

es decir,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^m} p^\varepsilon(x)\,\phi(x)\,dx \,=\, \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{p}(x)\,\phi(x)\,dx.$$

$\square$

Observación 4.19
El resultado sigue siendo válido para combinaciones lineales finitas de funciones de este tipo, es decir, si $p(x,z) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x)\,g_i(z)$, entonces $p^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} \widetilde{p}$, donde p^ε y $\widetilde{p}$ están definidos como en (4.4).

Lema 4.20
Sea $p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, periódica de período T con respecto a la segunda variable, entonces dados $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto, y $\delta > 0$, existen

$f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas, acotadas, con g_i periódica de período T para todo i tales que

$$\max_{x\in K,\ z\in\mathbb{R}} \left| p(x, z) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, g_i(z) \right| < \delta.$$

Demostración.
Como $K \times [0, T]$ es compacto, se tiene que p es uniformemente continua en $K \times [0, T]$. Entonces, dado $\delta > 0$, existe $\sigma > 0$ tal que $\|(x_1, z_1) - (x_2, z_2)\| < \sigma$ implica $|p(x_1, z_1) - p(x_2, z_2)| < \delta$.

Dado $x \in K$, sea $B_x = B(x, \sigma)$, entonces $K \subset \cup_{x\in K} B_x$, y tomemos un subcubrimiento finito $\{B_{x_1}, \ldots, B_{x_n}\}$. Consideremos $\{f_1, \ldots, f_n\}$ partición de la unidad subordinada a este subcubrimiento, es decir, $f_i : K \to \mathbb{R}$ es diferenciable, *sop* $f_i \subset B_{x_i}$, $0 \leq f_i \leq 1$ y $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$. Definimos la familia de funciones $\{g_1, \ldots, g_n\}$ mediante $g_i(z) = p(x_i, z)$.
Dado $(x, z) \in K \times \mathbb{R}$, sea $I_x = \{j \in \{1, \ldots, n\} \ / \ x \in B_{x_j}\}$, de forma tal que

$$\sum_{j\in I_x} f_j(x) = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, g_i(z) = \sum_{j\in I_x} f_j(x)\, g_j(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Observemos además que dado $(x, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$,

$$\min_{j\in I_x} p(x_j, z) \leq \sum_{j\in I_x} f_j(x)\, g_j(z) \leq \max_{j\in I_x} p(x_j, z)$$

y además

$$\min_{j\in I_x} p(x_j, z) - p(x, z) > -\delta, \quad \text{pues } x \in B_{x_j}\ \forall j \in I_x,$$

$$\max_{j\in I_x} p(x_j, z) - p(x, z) < \delta, \quad \text{pues } x \in B_{x_j}\ \forall j \in I_x.$$

Entonces,

$$\left| p(x, z) - \sum_{j\in I_x} f_j(x)\, g_j(z) \right| < \delta \quad \forall\, (x, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}.$$

□

Ahora sí estamos en condiciones de probar el resultado previamente enunciado.

Teorema 4.21 (Lema de Riemann-Lebesgue)
Sea $p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, periódica de período T con respecto a la segunda variable. Sean $\widetilde{p} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida por

$$\widetilde{p}(x) \,=\, \frac{1}{T} \int_0^T p(x,\, z)\, dz$$

y la sucesión de funciones (p^ε), con $p^\varepsilon(x) \,=\, p\,(x,\, x_1/\varepsilon)$.
Entonces, se tiene que $p^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} \widetilde{p}$, es decir, dada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_{\mathbb{R}^m} p^\varepsilon\, \phi \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{p}\, \phi.$$

Demostración.
Dados $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\delta > 0$, consideramos $q : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q = \sum_{i=1}^n f_i\, g_i$ que aproxima uniformemente a p en $sop\,\phi$ (que es compacto). Sea $\alpha > 0$ una mayorante para ϕ.
Entonces,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} (p^\varepsilon - \widetilde{p})\, \phi \right| \le \left| \int_{\mathbb{R}^m} (p^\varepsilon - q^\varepsilon)\, \phi \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^m} (q^\varepsilon - \widetilde{q})\, \phi \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^m} (\widetilde{q} - \widetilde{p})\, \phi \right|.$$

Se tiene

$$|p^\varepsilon(x) - q^\varepsilon(x)| = \left| p\left(x,\, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) - q\left(x,\, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) \right| < \delta \;\forall x \in \mathbb{R}^m$$

y

$$|\widetilde{q}(x) - \widetilde{p}(x)| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T (q(x,\, z) - p(x,\, z))\, dz \right| < \delta \;\forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Luego,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} (p^\varepsilon - q^\varepsilon)\, \phi \right| \le \alpha\, m(sop\,\phi)\, \delta;$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} (q^\varepsilon - \widetilde{q})\, \phi \right| \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0;$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} (\widetilde{q} - \widetilde{p})\, \phi \right| \le \alpha\, m(sop\,\phi)\, \delta.$$

De este modo,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left| \int_{\mathbb{R}^m} (p^\varepsilon - \widetilde{p})\, \phi \right| \le 2\alpha\, m(sop\,\phi)\, \delta,$$

por lo que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^m} p^\varepsilon\, \phi \,=\, \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{p}\, \phi.$$

□

4.4.3. Concentraciones

Con "masa" finita

Sea $\rho \in C^0(\mathbb{R}^n)$ una función continua y no negativa, con $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$. Consideramos la familia de funciones $(\rho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dada por $\rho^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$. Vamos a probar que $\rho^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} \delta$ con $\varepsilon \to 0$, es decir, $\langle \rho^\varepsilon, \phi \rangle \to \phi(0)$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Definición 4.22
Una sucesión de funciones $(\psi^\varepsilon) \subset C^0(\mathbb{R}^n)$ es una identidad aproximada si verifica:

- $\psi^\varepsilon(x) \geq 0 \;\; \forall\, x, \; \forall\, \varepsilon,$
- $\int_{\mathbb{R}^n} \psi^\varepsilon(x)\, dx = 1 \;\; \forall\, \varepsilon,$
- $\forall\, \lambda, \;\; \forall\, \gamma > 0, \;\; \exists\, \varepsilon_0 \,/\, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \; \int_{B\,(0,\,\gamma)^c} \psi^\varepsilon(x)\, dx < \lambda.$

Observación 4.23
La familia de funciones definida anteriormente es una identidad aproximada: la positividad y el hecho de que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho^\varepsilon = 1$ son triviales. Ahora, dado $\lambda > 0$, existe R_0 tal que $\int_{B(0,\,R)^c} \rho < \lambda$ para todo $R > R_0$. Luego, dados $\lambda > 0, \;\; \gamma > 0$, tomamos $\varepsilon_0 = \gamma/R_0$ y tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\gamma)} \rho^\varepsilon(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\gamma/\varepsilon)} \rho(y)\, dy < \lambda \;\; \forall \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Proposición 4.24
Toda identidad aproximada converge débilmente a la distribución delta de Dirac.

Demostración.
Sea (ψ^ε) una identidad aproximada, queremos probar que para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi^\varepsilon(x)\, \phi(x)\, dx \to \phi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi^\varepsilon(x)\, \phi(0)\, dx.$$

Luego, es suficiente probar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \psi^\varepsilon(x)\, (\phi(x) - \phi(0))\, dx = 0.$$

Ahora, si $B_\gamma = B(0, \gamma)$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi^\varepsilon(x)\, (\phi(x) - \phi(0))\, dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{B_\gamma^c} \psi^\varepsilon(x)\,(\phi(x) - \phi(0))\,dx \right| + \left| \int_{B_\gamma} \psi^\varepsilon(x)\,(\phi(x) - \phi(0))\,dx \right|.$$

Sea M una mayorante de ϕ, como esta función es uniformemente continua, dado $\lambda > 0$, existe $\gamma > 0$ tal que $|\phi(x) - \phi(0)| < \lambda/2$ para todo $x \in B_\gamma$. Como (ψ^ε) es de Dirac , tenemos que $\exists\, \varepsilon_0 \;/ \forall\, \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\left| \int_{B_\gamma^c} \psi^\varepsilon(x)\,dx \right| \leq \frac{\lambda}{4M}; \quad \text{y además } |\phi(x) - \phi(0)| \leq 2M \;\forall x \in \mathbb{R}^n.$$

De esta forma, si $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi^\varepsilon(x)\,(\phi(x) - \phi(0))\,dx \right| \leq 2M \int_{B_\gamma^c} \psi^\varepsilon(x)\,dx + \frac{\lambda}{2} \int_{B_\gamma} \psi^\varepsilon(x)\,dx < \lambda.$$

Luego, $\psi^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} \delta$.

$\square$

Con "masa" infinita

En este ejemplo veremos qué ocurre en un proceso de concentración que no se produce mediante una identidad aproximada.

Teorema 4.25
Sea $W \in C^1([0,\,\infty))$ tal que:

a) $|W(r)| \leq kr^2$ *para algún* $k > 0$ *y para todo* $|r| \leq 1$,

b) $\lim_{r \to \infty} W(r) = \lambda/2\pi \neq 0$,

c) $\displaystyle\int_0^\infty |(\ln s)\; W'(s)|\,ds = \gamma < \infty.$

Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = |x|^{-2}\,W(|x|)$ *y* $\psi^\varepsilon(x) = (\ln 1/\varepsilon)^{-1}\,\varepsilon^{-2}\,\psi(x/\varepsilon)$. *Entonces* $\psi^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} \lambda\delta$, *con* $\varepsilon \to 0$.

Demostración.
Dada $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, definimos la media de ϕ en r,

$$\overline{\phi}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi\,(r\cos\theta,\; r\,\mathrm{sen}\,\theta)\; d\theta.$$

Por la definición de ψ, aplicando un cambio a coordenadas polares e integrando por partes, se obtiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x)\,\psi^\varepsilon(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x) \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \frac{1}{|x|^2}\, W\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty 2\pi\, \overline{\phi}(r) \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \frac{1}{r}\, W\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\, dr \;= \tag{4.5}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon \;+\; B_\varepsilon \;+\; C_\varepsilon, \quad \text{donde} \quad A_\varepsilon \;=\; 2\pi\, \overline{\phi}(r) \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \ln r\, W\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \Big|_0^\infty ,$$

$$B_\varepsilon \;=\; -\int_0^\infty 2\pi\, \overline{\phi}\,'(r) \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \ln r\;W\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\, dr \quad \text{y}$$

$$C_\varepsilon \;=\; -\int_0^\infty 2\pi\, \overline{\phi}(r) \frac{1}{\varepsilon} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \ln r\, W'\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\, dr.$$

Calculemos el límite cuando $\varepsilon \to 0$ de cada uno de estos sumandos.

- Como $sop\,\overline{\phi}$ es compacto, $\overline{\phi}(r) = 0$ para todo r mayor que un cierto r_0. Observemos que $\lim_{r\to 0} \overline{\phi}(r) = \phi(0)$, por la continuidad de ϕ. Fijado $\varepsilon > 0$, la condición a) implica $\lim_{r\to 0} |\ln r\, W(r/\varepsilon)| = 0$.

  Luego, $A_\varepsilon = 0 \;\; \forall\, \varepsilon > 0$.

- Dado que W es continua y tiene límite finito en el infinito, tenemos que W está acotada, digamos, por α. Sean $R > 0$ tal que $sop\,\overline{\phi}\,' \subset B(0,\, R)$ y L una mayorante de $\overline{\phi}\,'$. Tenemos:

$$|B_\varepsilon| = \left| \int_0^\infty 2\pi\, \overline{\phi}\,'(r) \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \ln r\, W\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\, dr \right| \le$$

$$\le 2\pi \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \int_0^R \left| \overline{\phi}\,'(r) \ln r\, W\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \right| dr \le$$

$$\le 2\pi \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} L\, \alpha \int_0^R |\ln r|\; dr \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \quad \Longrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} B_\varepsilon \;=\; 0.$$

- Hagamos el cambio de variable $z \;=\; R/\varepsilon$ en la integral de C_ε:

$$C_\varepsilon \;=\; -\int_0^\infty 2\pi\, \overline{\phi}(r)\, \frac{1}{\varepsilon} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \ln r\;W'\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\, dr \;=$$

$$= \int_0^\infty 2\pi\, \overline{\phi}(\varepsilon z)\, W'\,(z)\; dz \;+\; \int_0^\infty 2\pi\, \overline{\phi}(\varepsilon z) \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \ln z\;W'\,(z)\; dz.$$

  Sea M una mayorante de $\overline{\phi}$, entonces $|\overline{\phi}(\varepsilon z)\, W'(z)| \le M\, |W'(z)| \in L^1(\mathbb{R})$, por la hipótesis c). Aplicamos el teorema de convergencia dominada:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty 2\pi\, \overline{\phi}(\varepsilon z)\, W'\,(z)\; dz \;=\; 2\pi\, \overline{\phi}(0) \lim_{z\to\infty} (W(z) \,-\, W(0)) \;=\; \lambda\, \phi(0).$$

Para el otro término, aplicamos la condición c):

$$\left|\int_0^\infty 2\pi\,\overline{\phi}(\varepsilon z)\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}\ln z\; W'(z)\;dz\right| \leq 2\pi M\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}\gamma \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Entonces $\lim_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon \;=\; \lambda\,\phi(0)$.

De esta forma,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^2}\phi(x)\,\psi^\varepsilon(x)\,dx \;=\; \lambda\,\phi(0)\quad \forall\,\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

□

Observación 4.26
La condición b) que se le impuso a la función W implica que ψ decae a 0 lentamente, de forma tal que $\int_{\mathbb{R}^2}\psi = +\infty$. Es por esto que no estamos ante una identidad aproximada, ya que la "masa" total es infinita y el cambio de escala $\varepsilon^{-2}\,\psi(x/\varepsilon)$ que se hizo anteriormente no funciona y debe ser sustituido por el presentado en el enunciado del teorema.

4.5. Problemas de continuidad

En los ejemplos presentados en la sección anterior se mostró diferentes sucesiones de campos en $\mathbb{R}^n$; en ésta mostraremos qué comportamiento pueden presentar ante un funcional no lineal.

Dado un campo u definido en una región Ω y una constante positiva ρ, denotaremos por

$$E(\Omega, u) \;=\; \int_\Omega \rho\frac{u^2}{2}$$

a la energía cinética asociada a dicho campo.

4.5.1. Pérdida de energía cinética en un proceso de oscilación

Sea la familia $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $u^\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $u^\varepsilon(x) \;=\; \mathrm{sen}(x/\varepsilon)$, entonces por el Lema de Riemann-Lebesgue, tenemos que $u^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} 0$ si $\varepsilon\to 0$.
Por otra parte,

$$E([-\pi,\,\pi],\,u^\varepsilon) \;=\; \frac{\rho}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx;$$

y aplicando nuevamente dicho resultado,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E([-\pi,\, \pi],\, u^\varepsilon) \;=\; \frac{\pi\rho}{2}.$$

De esta forma,

$$0 \;=\; E([-\pi,\, \pi],\, \lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon) \;\neq\; \lim_{\varepsilon \to 0} E([-\pi,\, \pi],\, u^\varepsilon) \;=\; \frac{\pi\rho}{2}.$$

Como la energía cinética del límite es menor que el límite de la energía cinética, diremos que hay una pérdida de energía cinética en el límite. Esto significa que la función $E : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es discontinua con respecto a la convergencia débil.

4.5.2. Pérdida de energía cinética en un proceso de concentración

Sea $u \in C^0(\mathbb{R}^2)$ una función no negativa tal que $\int_{\mathbb{R}^2} u < \infty$ y $\int_{\mathbb{R}^2} u^2 \;=\; 1$. Consideremos la sucesión $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ tal que $u^\varepsilon(x) \;=\; \varepsilon^{-1}\, u(x/\varepsilon)$.
Por un lado, dada $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} u^\varepsilon(x)\, \phi(x)\, dx \right| \;\leq\; k \int_{\mathbb{R}^2} u^\varepsilon(x)\, dx \;=\; k\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} u(y)\, dy \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

de donde $u^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} 0$.
Sin embargo, $(u^\varepsilon)^2$ es una identidad aproximada, por lo que converge débilmente a la distribución delta de Dirac. Además,

$$E(\mathbb{R}^2,\, u^\varepsilon) \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\rho}{2}\, (u^\varepsilon)^2\, (x)\, dx \;=\; \frac{\rho}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{u^2(x/\varepsilon)}{\varepsilon^2}\, dx \;=\; \frac{\rho}{2} \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Entonces,

$$0 \;=\; E(\mathbb{R}^2, \lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon) \neq \lim_{\varepsilon \to 0} E(\mathbb{R}^2,\, u^\varepsilon) \;=\; \frac{\rho}{2}.$$

Nuevamente tenemos una pérdida de energía cinética en el límite.

Capítulo 5

Soluciones débiles de Euler y Navier-Stokes

En el capítulo anterior se presentó la noción de soluciones débiles de ecuaciones en derivadas parciales lineales, y vimos cómo se las podía definir para ecuaciones no lineales que fuesen escritas en forma de divergencia. Aquí nos ocuparemos de reformular las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes para un fluido incompresible, para luego definir las soluciones débiles de dichas ecuaciones. Se estudiarán sucesiones de soluciones débiles de las mismas, y se mostrará que el límite débil de dichas sucesiones no tiene por qué ser solución mediante dos ejemplos: uno presentando persistencia de oscilaciones y otro en el que se produce un desarrollo de concentraciones alrededor del origen.

5.1. Forma débil de las ecuaciones

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $t_0 \in (0, +\infty]$, y recordemos la formulación obtenida en el capítulo 2 de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible en ausencia de fuerzas externas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\,\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\,(v.\nabla)\,v = -\nabla p + \mu\Delta v \\ div\, v = 0 \end{array} \right. . \tag{5.1}$$

Nuestro objetivo es formular estas ecuaciones en forma de divergencia. En primer lugar, como ρ es constante,

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\rho v) = \rho\,\frac{\partial v}{\partial t},$$

y por otra parte,

$$\rho\,[(v.\nabla)\,v]_i = \sum_{j=1}^{3} \rho\, v_j\, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Consideremos el tensor $\rho v \otimes v \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, con $(\rho v \otimes v)_{ij} = \rho v_i v_j$, entonces

$$Div\,(\rho v \otimes v) = \begin{pmatrix} div\,([\rho v \otimes v]_1) \\ div\,([\rho v \otimes v]_2) \\ div\,([\rho v \otimes v]_3) \end{pmatrix}, \quad \text{con } [\rho v \otimes v]_i = \begin{pmatrix} \rho v_i v_1 \\ \rho v_i v_2 \\ \rho v_i v_3 \end{pmatrix} \; \forall\, i \in \{1,\, 2,\, 3\}.$$

De este modo,

$$[Div(\rho v \otimes v)]_i \,=\, div\,([\rho v \otimes v]_i) \,=\, \frac{\partial(\rho v_i v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_i v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_i v_3)}{\partial x_3} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \rho\, v_j\, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \,+\, \rho\, v_i\, div\, v \,=\, \sum_{j=1}^{3} \rho\, v_j\, \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

pues $div\, v = 0$.

Entonces, para todo $i \in \{1,\, 2,\, 3\}$, $\rho\, [(v.\nabla)\, v]_i \,=\, [Div(\rho v \otimes v)]_i$, por lo que $\rho\,(v.\nabla)\, v \,=\, Div(\rho v \otimes v)$.
Las ecuaciones del sistema (5.1) pueden ser formuladas como:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\,(\rho v) \,+\, Div\,(\rho v \otimes v) \,=\, -\nabla p \,+\, \mu \Delta v \\ div\, v \,=\, 0 \end{cases} \quad \text{en } \Omega \times (0,\, t_0) \tag{5.2}$$

Sea $\phi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$. Haciendo producto escalar:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\,(\rho v) \,+\, Div\,(\rho v \otimes v) \,+\, \nabla p \,-\, \mu \Delta v\right).\, \phi \,=\, 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^{t_0} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial t}\,(\rho v) \,+\, Div\,(\rho v \otimes v) \,+\, \nabla p \,-\, \mu \Delta v\right).\, \phi \,=\, 0. \tag{5.3}$$

Observación 5.1
Podemos trabajar separadamente con cada uno de los sumandos de la integral anterior:

- Como $\frac{\partial}{\partial t}(\rho v \,.\, \phi) \,=\, \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) \,.\, \phi \,+\, \rho v \,.\, \frac{\partial \phi}{\partial t}$, y

$$\int_0^{t_0} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\,(\rho v \,.\, \phi) \,=\, \int_\Omega \left(\rho v \,.\, \phi\big|_0^{t_0}\right) \,=\, 0, \quad \text{se tiene que}$$

$$\int_0^{t_0} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) \,.\, \phi \,=\, -\int_0^{t_0} \int_\Omega \rho v \,.\, \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

- Se tiene que

$$div\,((\rho v\otimes v)\,\phi) \;=\; \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\,((\rho v \otimes v)\,\phi)_j \;=\; \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{3} \rho\, v_i\, v_j\;\phi_i \right) =$$

$$= \sum_{i,j\,=1}^{3} \frac{\partial(\rho\, v_i\, v_j)}{\partial x_j}\,\phi_i + \rho\, v_i\, v_j\, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \;=\; Div\,(\rho v\otimes v)\,.\,\phi + (\rho v\otimes v) : (\nabla\phi)^{\top}.$$

Tomemos $k > 0$ tal que $sop\,\phi \subsetneq B(0,\,k) \times (0,\,t_0)$ y sea $n(x)$ la normal saliente a $B(0,\,k)$ en el punto x; por el teorema de Gauss tenemos

$$\int_0^{t_0}\!\int_\Omega Div\,(\rho v\otimes v)\,.\,\phi + (\rho v\otimes v) : (\nabla\phi)^{\top} \;=\; \int_0^{t_0}\!\int_\Omega div\,(\rho(v\otimes v)\,\phi) \;=$$

$$= \int_0^{t_0}\!\int_{\partial B(0,\,k)} (\rho v \otimes v)\phi\,.\;n \;=\; 0.$$

Además,

$$(\rho v\otimes v) : (\nabla\phi)^{\top} = \sum_{i,\,j\,=1}^{3} \rho\, v_i\, v_j\, \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} = \sum_{i,\,j\,=1}^{3} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\, \rho\, v_j\, v_i = \nabla\phi : (\rho v\otimes v).$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{t_0}\!\int_\Omega Div\,(\rho v \otimes v)\,.\,\phi \;=\; -\int_0^{t_0}\!\int_\Omega \nabla\phi : (\rho v \otimes v).$$

- Como $div\,(p\phi) \;=\; \nabla p\,.\,\phi \,+ p\;div\,\phi$, tomando k igual que antes,

$$\int_0^{t_0}\!\int_\Omega \nabla p\,.\,\phi + p\;div\,\phi \;=\; \int_0^{t_0}\!\int_\Omega div\,(p\phi) \;=\; \int_0^{t_0}\!\int_{\partial B(0,\,k)} p\,\phi\,.\;n \;=\; 0.$$

Luego,

$$\int_0^{t_0}\!\int_\Omega \nabla p\,.\,\phi \;=\; -\int_0^{t_0}\!\int_\Omega p\;div\,\phi.$$

- Observemos que

$$div\,(\nabla\phi\;v) \,-\, div\,(\nabla v\;\phi) \;=$$

$$= \sum_{i,j\,=1}^{3} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\,\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} + v_j\,\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_j^2} \right) \,-\, \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \phi_j\,\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right) \;=$$

$$= \sum_{i,\,j\,=1}^{3} \left(v_j\,\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_j^2} \,-\, \phi_j\,\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right) \;=\; v\,.\,\Delta\phi \,-\, \phi\,.\,\Delta v.$$

Además, considerando el mismo k que antes,

$$\int_0^{t_0}\int_\Omega div\,(\nabla\phi\, v) - div\,(\nabla v\,\phi) \;=\; \int_0^{t_0}\int_{\partial B(0,k)} (\nabla\phi\, v - \nabla v\,\phi)\,.\,n \;=\; 0,$$

por lo que

$$\int_0^{t_0}\int_\Omega v\,.\,\Delta\phi \;=\; \int_0^{t_0}\int_\Omega \phi\,.\,\Delta v.$$

Combinando estas observaciones con la ecuación (5.3), obtenemos la igualdad:

$$\int_0^{t_0}\int_\Omega \left(\rho v\,.\,\frac{\partial\phi}{\partial t} \;+\; \nabla\phi : (\rho v\otimes v) \;+ p\; div\,\phi \;+\; \mu v\,.\,\Delta\phi\right) \;=\; 0.$$

Por otra parte, como $div\, v = 0$, tenemos que para toda $\psi \in \mathcal{D}(\Omega\times(0,\, t_0),\, \mathbb{R})$, $\psi\,.\,div\, v = 0$.
Pero $div\,(\psi v) = \nabla\psi\,.\,v \;+\; \psi\; div\, v = \nabla\psi\,.\,v$, por lo que

$$\int_0^{t_0}\int_\Omega \nabla\psi\,.\,v \;=\; \int_0^{t_0}\int_\Omega div\,(\psi v) \;=\; \int_0^{t_0}\int_{B(0,\,k)} div\,(\psi v) \;=\; 0.$$

De esta forma, probamos que si $v \in C^2(\Omega\times(0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$ y $p \in C^1(\Omega\times(0,\, t_0),\, \mathbb{R})$ verifican (5.2), entonces dadas $\phi \in \mathcal{D}(\Omega\times(0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$ y $\psi \in \mathcal{D}(\Omega\times(0,\, t_0),\, \mathbb{R}$, se satisface:

$$\begin{cases} \int_0^{t_0}\int_\Omega \left(\rho v\,.\,\frac{\partial\phi}{\partial t} \;+\; \nabla\phi : (\rho v\otimes v) \;+ p\; div\,\phi \;+\; \mu v\,.\,\Delta\phi\right) dx\, dt \;=\; 0 \\ \int_0^{t_0}\int_\Omega \nabla\psi\,.\,v\; dx\, dt \;=\; 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

El recíproco de esta afirmación también es verdadero, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 5.2
Dadas $v \in C^2(\Omega\times(0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$ y $p \in C^1(\Omega\times(0,\, t_0),\, \mathbb{R})$ que satisfacen las ecuaciones (5.4) para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega\times(0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$ y $\psi \in \mathcal{D}(\Omega\times(0,\, t_0),\, \mathbb{R})$, entonces $(v,\, p)$ es solución del sistema (5.2).

Demostración.

A partir de la observación 5.1, dada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_0} \int_\Omega \rho v \,.\, \phi_t \, dx\, dt \;&=\; -\int_0^{t_0} \int_\Omega \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \,.\, \phi \, dx\, dt; \\
\int_0^{t_0} \int_\Omega \nabla\phi : (\rho v \otimes v)\, dx\, dt \;&=\; -\int_0^{t_0} \int_\Omega Div\,(\rho v \otimes v) \,.\, \phi \, dx\, dt; \\
\int_0^{t_0} \int_\Omega p \; div\, \phi \, dx\, dt \;&=\; -\int_0^{t_0} \int_\Omega \nabla p \,.\, \phi \, dx\, dt; \\
\int_0^{t_0} \int_\Omega \mu\Delta\phi \,.\, v \, dx\, dt \;&=\; \int_0^{t_0} \int_\Omega \mu\Delta v \,.\, \phi \, dx\, dt.
\end{aligned}$$

Entonces, para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$, v y p verifican:

$$\int_0^{t_0} \int_\Omega \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \,+\, Div\,(\rho v \otimes v) \,+\, \nabla p \,-\, \mu\Delta v \right) .\, \phi \; dx\, dt \;=\; 0.$$

En particular, dada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R})$, consideremos $\phi \;=\; \varphi\, e_i$, donde $i \in \{1,\, 2,\, 3\}$ y $\{e_1,\, e_2,\, e_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Se verifica que:

$$\int_0^{t_0} \int_\Omega \varphi \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \,+\, Div\,(\rho v \otimes v) \,+\, \nabla p \,-\, \mu\Delta v \right)_i dx\, dt \;=\; 0, \quad \forall\, i.$$

Como para todo i se tiene $\left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \,+\, Div\,(\rho v \otimes v) \,+\, \nabla p \,-\, \mu\Delta v \right)_i \in C^0(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ y la igualdad anterior vale para toda función test φ, podemos aplicar la proposición 3.10 para obtener que

$$\left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + Div\,(\rho v \otimes v) + \nabla p - \mu\Delta v \right)_i (x,\, t) = 0,\; \forall (x,\, t) \in \Omega \times (0,\, t_0),\; \forall\, i.$$

Entonces se satisface la primera de las igualdades del sistema (5.2), esto es,

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \,+\, Div\,(\rho v \otimes v) \,+\, \nabla p \,-\, \mu\Delta v \;=\; 0.$$

Por otra parte, dada $\psi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R})$, tomando $k > 0$ tal que $sop\,\psi \subset B(0,\, k)$, se tiene que

$$\int_0^{t_0} \int_\Omega div\,(\psi v)\, dx\, dt \;=\; \int_0^{t_0} \int_{\partial B(0,k)} \psi v \,.\, n \; dx\, dt \;=\; 0.$$

Entonces, como $\nabla\psi \,.\, v \;=\; div\,(\psi v) \,-\, \psi\; div\, v$ y

$$\int_0^{t_0} \int_\Omega \nabla\psi \,.\, v \; dx\, dt \;=\; 0 \;\; \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}),$$

se cumple que

$$\int_0^{t_0} \int_\Omega \psi \; div\, v \; dx\, dt \;=\; 0 \;\; \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}).$$

Aplicando nuevamente la proposición 3.10, ya que $div\, v \in C^1(\Omega \times (0,\, t_0))$, se deduce que $div\, v\,(x,\, t) \,=\, 0 \;\forall\,(x,\, t) \in \Omega \times (0,\, t_0)$.

□

La forma débil de la ecuación de Navier-Stokes excluirá la presión. En esta dirección, tenemos el siguiente resultado.

Lema 5.3
Sea $\Omega \,\subset\, \mathbb{R}^n$ abierto y $u \,\in\, \mathcal{D}'(\Omega,\, \mathbb{R}^k)$. Si existe $f \,\in\, D'(\Omega,\, \mathbb{R})$ solución de $\nabla f \,=\, u$, entonces $\langle u,\, \phi\rangle \,=\, 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ con $div\, \phi \,=\, 0$.

Demostración.
Dada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ con $div\, \phi \,=\, 0$, verificamos directamente:

$$\langle u,\, \phi\rangle \;=\; \langle \nabla f,\, \phi\rangle \;=\; -\,\langle f,\, div\, \phi\rangle \;=\; 0.$$

□

Observación 5.4
El recíproco de este lema también es válido: dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $u \in \mathcal{D}'(\Omega,\, \mathbb{R}^k)$, si $\langle u,\, \phi\rangle = 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $div\, \phi = 0$, entonces existe $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que $\nabla f = u$.

Además, valen los siguientes resultados de regularidad:
1) si $u \in L^2_{loc}(\Omega,\, \mathbb{R}^3)$, entonces $f \in L^2_{loc}(\Omega)$,
2) si $u \in C^0(\Omega,\, \mathbb{R}^3)$, entonces $f \in C^1(\Omega)$.

De este modo podemos excluir la presión de la formulación débil, ya que si $u \in \mathcal{D}'(\Omega,\, \mathbb{R}^3)$ verifica $\langle u,\, \phi\rangle \,=\, 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ con $div\, \phi \,=\, 0$, entonces tendremos asegurada la existencia de un campo de presiones p tal que $u \,=\, \nabla p$.

Definición 5.5 (Solución débil de la ecuación de Navier-Stokes)
Una función $v \in L^2_{loc}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$ es solución débil (o de Leray-Hopf) de la ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\,(\rho v) \,+\, Div\,(\rho v \otimes v) \,=\, -\nabla p \,+\, \mu \Delta v \\ div\, v \,=\, 0 \end{cases} \quad \text{en } \Omega \times (0,\, t_0)$$

si satisface las siguientes condiciones:

- (Conservación del momento) dada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega\times(0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$ con $div\,\phi\, =\, 0$,

$$\int_0^{t_0}\int_\Omega [\phi_t\,.\,\rho v\, +\, \nabla\phi : (\rho v \otimes v)\, +\, \mu\Delta\phi\,.\,v]\; dx\,dt\, =\, 0. \tag{5.5}$$

- (Incompresibilidad) dada $\psi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R})$,

$$\int_0^{t_0}\int_\Omega \nabla\psi\,.\,v\;dx\,dt\, =\, 0. \tag{5.6}$$

Observación 5.6
La definición de solución débil de la ecuación de Euler para un fluido incompresible es obtenida a partir de la definición anterior, tomando $\mu = 0$. En particular, la ley débil de conservación del momento que debe verificar dicha solución es

$$\int_0^{t_0}\int_\Omega [\phi_t\,.\,\rho v\, +\, \nabla\phi : (\rho v \otimes v)]\; dx\,dt\, =\, 0, \tag{5.7}$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$ con $div\,\phi\, =\, 0$.

Observación 5.7
Si (v, p) es solución clásica de las ecuaciones de Euler o de Navier-Stokes, entonces v es solución débil.

Observación 5.8
Como $v \in L^2_{loc}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$, induce una distribución vectorial en $(\Omega \times (0,\, t_0))$. Además, el funcional lineal $i_{v\otimes v} : \mathcal{D}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathcal{M}_3(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\langle i_{v\otimes v},\, \Phi\rangle\, =\, \sum_{j,\,k\,=\,1}^{3} \langle v_j\, v_k,\, \Phi_{jk}\rangle\, =\, \sum_{j,\,k\,=\,1}^{3} \int_0^{t_0}\int_\Omega v_j\, v_k\, \Phi_{jk}\; dx\,dt$$

es una distribución, ya que $v_j\, v_k \in L^1_{loc}(\Omega \times (0,\, t_0))\ \forall\, j,\, k \in \{1,\, 2,\, 3\}$: sea $K \subset \Omega \times (0,\, t_0)$ compacto; se tiene

$$\int_K |v_j\, v_k| \le \left(\int_K |v_j|^2\right)^{1/2} \left(\int_K |v_k|^2\right)^{1/2} < \infty,$$

pues $v_j,\, v_k \in L^2_{loc}(\Omega\times(0,\, t_0))$. A la distribución $i_{v\otimes v}$ la notaremos mediante $v \otimes v$.

5.2. Primeros resultados de regularidad

Observación 5.9
Una función $v \in L^2_{loc}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$ satisface la condición de conservación del momento (5.5) si y sólo si la distribución $J = (\rho v)_t + Div\,(\rho\, v \otimes v) - \mu\, \Delta v$ satisface

$$\langle J,\, \phi \rangle \;=\; 0 \;\; \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3) \;\; \text{con} \;\; div\, \phi \;=\; 0.$$

Luego, por la observación 5.4 , existe $p \in \mathcal{D}'(\Omega,\, \mathbb{R})$ tal que $J \;=\; -\nabla p$. Por otra parte, si $v \in C^2(\Omega \times (0,\, t_0))$, entonces las derivadas distribucionales de primer y segundo orden de v coinciden con las clásicas, de donde $J \in C^0(\Omega \times (0,\, t_0))$. Aplicando la segunda condición de regularidad de la observación 5.4, se tiene que $p \in C^1$ satisface $J = -\nabla p$ en el sentido clásico.

Tenemos entonces demostrada la siguiente proposición, que asegura que toda solución débil suficientemente regular es solución clásica.

Proposición 5.10
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $v \in C^2(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$ solución débil de la ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible. Entonces, existe una función $p \in C^1(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R})$, única a menos de una constante aditiva tal que $(v,\, p)$ es solución clásica de la ecuación de Navier-Stokes.

Observación 5.11
Argumentando de forma análoga, se puede demostrar que si $v \in C^1(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$ es solución débil de la ecuación de Euler para un fluido incompresible, entonces existe $p \in C^1(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R})$ tal que $(v,\, p)$ es solución clásica de la ecuación de Euler.

Dada una sucesión de funciones (f_n), notaremos mediante $f_n \rightrightarrows f_\infty$ a la convergencia uniforme de la misma a una función f_∞.

Observación 5.12
Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto acotado y $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Si $(u_n),\ (v_n) \subset C^0(\overline{\Omega})$ son tales que $u_n \rightrightarrows u_\infty$ y $v_n \rightrightarrows v_\infty$, entonces:

- $u_n\, \psi \rightrightarrows u_\infty\, \psi$: sea $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $M > 0$ tal que $|\psi(x)| < M$ para todo $x \in \overline{\Omega}$; tomamos $N_0(\varepsilon/M)$ para (u_n), es decir, $|u_\infty(x) - u_n(x)| < \varepsilon/M$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ y $n > N_0(\varepsilon/M)$.

Luego, dados $x \in \overline{\Omega}$ y $n > N_0(\varepsilon/M)$,

$$|u_\infty \psi\,(x)\;-\;u_n \psi\,(x)|\;=\;|\psi(x)|\,|u_\infty(x)\;-\;u_n(x)| < \varepsilon.$$

- $u_n\, v_n \rightrightarrows u_\infty\, v_\infty$: sea $x \in \overline{\Omega}$,

$$|u_\infty\, v_\infty(x) - u_n\, v_n(x)| \leq |u_\infty\, v_\infty(x) - u_\infty\, v_n(x)| + |u_\infty v_n(x) - u_n\, v_n(x)| \leq$$

$$\leq |u_\infty(x)|\,|v_\infty(x) - v_n(x)|\;+\;|u_\infty(x) - u_n(x)|\,|v_n(x) - v_\infty(x)| +$$

$$+\,|u_\infty(x) - u_n(x)|\,|v_\infty(x)|.$$

Como $u_\infty,\, v_\infty \in C^0(\overline{\Omega})$, y $\overline{\Omega}$ es compacto, se tiene el resultado buscado.

Proposición 5.13
Sean $(v_n) \subset C^2(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$, $(p_n) \subset C^1(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R})$ tales que $(v_n,\, p_n)$ es una sucesión de soluciones clásicas de la ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible y $v_n \rightrightarrows v_\infty$, $p_n \rightrightarrows p_\infty$.
Entonces, v_∞ es solución débil de la ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible.

Demostración.
En primer lugar, como $(v_n) \subset C^2(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$ y $v_n \rightrightarrows v_\infty$, tenemos que $v_\infty \in C^0(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$, y por la observación 3.19, tenemos que $v_\infty \in L^2_{loc}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$.
Como $(v_n,\, p_n)$ son soluciones clásicas, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$, $\psi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0,\, t_0))$, se verifican:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{t_0} \int_\Omega (\rho v_n \,.\, \phi_t \;+\; \nabla\phi : (\rho v_n \otimes v_n) \;+ p_n\; div\,\phi \;+\; \mu v_n \,.\, \Delta\phi)\; dx\, dt \;=\; 0 \\ \int_0^{t_0} \int_\Omega \nabla\psi \,.\, v_n\; dx\, dt \;=\; 0 \end{array} \right. .$$

Ahora, como $v_n \rightrightarrows v_\infty$ y $p_n \rightrightarrows p_\infty$, por la observación anterior tenemos

$$\rho v_n \,.\, \phi_t \;+\; \nabla\phi : (\rho v_n \otimes v_n) \;+ p_n\; div\,\phi \;+\; \mu v_n \,.\, \Delta\phi \;=$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \left(\rho (v_n)_j\, (\phi_t)_j + \rho \sum_{k=1}^{3} (\nabla\phi)_{jk}\, (v_n)_j\, (v_n)_k \right) + p_n\, div\,\phi + \mu\, (v_n)_j\, (\Delta\phi)_j \rightrightarrows$$

$$\rightrightarrows \rho v_\infty \,.\, \phi_t \;+\; \nabla\phi : (\rho v_\infty \otimes v_\infty) \;+ p_\infty\; div\,\phi \;+\; \mu v_\infty \,.\, \Delta\phi.$$

Entonces,

$$0 \;=\; \int_0^{t_0} \int_\Omega (\rho v_n \,.\, \phi_t \;+\; \nabla\phi : (\rho v_n \otimes v_n) \;+ p_n\; div\,\phi \;+\; \mu v_n \,.\, \Delta\phi)\; dx\, dt \rightarrow$$

$$\to \int_0^{t_0} \int_\Omega (\rho v_\infty \,.\, \phi_t \,+\, \nabla\phi : (\rho v_\infty \otimes v_\infty) \,+ p_\infty \; div\, \phi \,+\, \mu v_\infty \,.\, \Delta\phi) \; dx\, dt.$$

Tomando ϕ con $div\,\phi \,=\, 0$, tenemos que v_∞ cumple la ley de conservación del momento.
Análogamente, se tiene que $\nabla\psi \,.\, v_n \rightrightarrows \nabla\psi \,.\, v_\infty$, de donde v_∞ también satisface la condición de incompresibilidad.

$\square$

5.3. Nuevos fenómenos

A continuación presentaremos dos clases de sucesiones de soluciones diferenciables de la ecuación de Euler que motivan la introducción de la noción de solución generalizada de DiPerna-Majda de la misma.

Una característica en común entre los ejemplos a ser presentados es la acotación local uniforme de la energía cinética:

$$\forall\, R > 0,\ t_1 < t_2,\ \exists\, C < \infty \;/\; \int_{t_1}^{t_2} \int_{B(0,\,R)} \frac{\rho}{2}\, |v^\varepsilon(x,t)|^2 \; dx\, dt < C,\ \ \forall\, \varepsilon. \quad (5.8)$$

Esta condición impide que para una solución de las ecuaciones del movimiento de un fluido corresponda una cantidad infinita de energía cinética en una región acotada del espacio-tiempo. Además, una sucesión (v^ε) de soluciones débiles de la ecuación de Euler que cumpla (5.8) tendrá siempre una subsucesión convergiendo débilmente en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R},\, \mathbb{R}^3)$, aunque no necesariamente el límite será solución débil de dicha ecuación; incluso cuando sí lo sea, puede haber pérdida de energía cinética en el límite.

Las sucesiones de funciones que satisfacen (5.8) nos permiten definir una nueva forma de expresar la conservación del momento.

5.3.1. Persistencia de oscilaciones

Sea $v \,=\, v(x,z)$ una función diferenciable y periódica de período 1 en z y con media 0 para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^1 v(x,\, z)\, dz \,=\, 0.$$

Recordemos que la ecuación de Euler en dos dimensiones es:

$$\rho\, \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \,+\, \rho \left(v_1\, \frac{\partial}{\partial x_1} \,+\, v_2\, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \,=\, -\nabla p.$$

Observemos que la sucesión (v_*^ε) tal que $v_*^\varepsilon(x_1,\, x_2,\, t) = (v(x_2,\, \frac{x_2}{\varepsilon}),\, 0)^\top$ es una familia de soluciones estacionarias de la ecuación de Euler en dos dimensiones con presión constante.

Observación 5.14
Un campo de velocidades independiente de la coordenada x_3, $v(x_1,\, x_2,\, t) = (v_1(x_1,\, x_2,\, t),\, v_2(x_1,\, x_2,\, t),\, v_3(x_1,\, x_2,\, t))^\top$ es solución de la ecuación de Euler para un fluido incompresible con presión constante si y sólo si $(v_1,\, v_2)$ es solución de la ecuación de Euler en dos dimensiones para un fluido incompresible con presión constante y v_3 es solución de la ecuación

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1\, \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2\, \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = 0.$$

Demostración.
Para el directo, como v es solución de la ecuación de Euler, $v_t + (v\,.\,\nabla)\, v = 0$, y coordenada a coordenada esto es

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j\, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0.$$

Al ser $\frac{\partial v_i}{\partial x_3} = 0 \;\; \forall\, i$, se tiene lo buscado.
Para el recíproco, basta observar que $\frac{\partial v_i}{\partial x_3} = 0$ para todo i. $\square$

De esta forma podemos construir, a partir de (v_*^ε), una familia de soluciones de la ecuación de Euler en tres dimensiones, $v^\varepsilon = (v_1^\varepsilon,\, v_2^\varepsilon,\, v_3^\varepsilon)^\top$, independiente de x_3. Definiendo $(v_1^\varepsilon,\, v_2^\varepsilon) := v_*^\varepsilon$, tenemos que v_3^ε deberá satisfacer la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial v_3^\varepsilon}{\partial t} + v\left(x_2,\, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \frac{\partial v_3^\varepsilon}{\partial x_1} = 0.$$

Sea $\omega = \omega(x_1,\, x_2,\, z)$ una función diferenciable y periódica en z de período 1; elegimos la condición inicial $v_3^\varepsilon(x_1,\, x_2,\, 0) = \omega(x_1,\, x_2,\, x_2/\varepsilon)$.

Tenemos entonces el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{\partial v_3^\varepsilon}{\partial t} + v\left(x_2,\, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \frac{\partial v_3^\varepsilon}{\partial x_1} = 0 \\ v_3^\varepsilon(x_1,\, x_2,\, 0) = \omega(x_1,\, x_2,\, x_2/\varepsilon) \end{cases}$$

Este PVI tiene por solución $v_3^\varepsilon(x_1,\, x_2,\, t) = \omega\left(x_1 - v(x_2,\, \frac{x_2}{\varepsilon})\, t,\; x_2,\; \frac{x_2}{\varepsilon}\right)$ (ver [8], pág. 109).

Así, tenemos construida la sucesión de soluciones de la ecuación de Euler en tres dimensiones, $v^\varepsilon(x_1,\, x_2,\, x_3,\, t) \;=\; \begin{pmatrix} v\left(x_2,\, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \\ 0 \\ \omega\left(x_1 - v(x_2,\, \frac{x_2}{\varepsilon})\, t,\, x_2,\, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}$.

Observemos que $v^\varepsilon(x_1,\, x_2,\, x_3,\, t) = u(x_1,\, x_2,\, x_2/\varepsilon,\, t)$, donde

$$u(x_1,\, x_2,\, z,\, t) = \left(v(x_2,\, z),\, 0,\, \omega\,(x_1 - v(x_2,\, z)\, t,\; x_2,\; z)\right)^\top . \tag{5.9}$$

Aplicando el lema de Riemann-Lebesgue coordenada a coordenada, tenemos que $v^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} v^0$, con

$$v^0(x_1,\, x_2,\, t) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_0^1 \omega\,(x_1 - v(x_2,\, z)\, t,\; x_2,\; z)\; dz \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Aplicando nuevamente el lema de Riemann-Lebesgue en cada coordenada, obtenemos $v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} T$, donde el tensor simétrico $T \;=\; T\,(x_1,\, x_2,\, t)$ es

$$T = \begin{pmatrix} \int_0^1 v^2(x_2,\, z)\, dz & 0 & \int_0^1 \omega\,(x_1 - v(x_2,\, z)\, t,\, x_2,\, z)\;\, v(x_2,\, z)\, dz \\ \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \int_0^1 \omega^2\,(x_1 - v(x_2,\, z)\, t,\; x_2,\; z)\; dz \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Por otra parte, la densidad de energía cinética $\frac{1}{2}\,\rho\,|v^\varepsilon|^2$ es igual a $\frac{\rho}{2}\,Tr(v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon)$, por lo que $\frac{1}{2}\,\rho\,|v^\varepsilon|^2 \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} \frac{1}{2}\,\rho\, e_0$, donde

$$e_0\,(x,\, t) \;=\; \int_0^1 v^2(x_2,\, z) \;+\; \omega^2\,(x_1 - v(x_2,\, z)\, t,\; x_2,\; z)\; dz. \tag{5.12}$$

Como $\left(\int_0^1 \omega\right)^2 \leq \int_0^1 \omega^2$, la densidad de energía cinética del límite es $\frac{\rho}{2}\,|v^0|^2 = \frac{\rho}{2}\left(\int_0^1 \omega\right)^2$ y v es no nula, se tiene que $\frac{\rho}{2}\,|v^0|^2 \;<\; \frac{\rho}{2}\, e_0$, lo que implica que tenemos una pérdida de energía cinética en el límite.

La función definida v^0 es diferenciable, y por la observación 5.14, será solución de la ecuación de Euler si y sólo si v_3^0 es solución de la ecuación $\frac{\partial}{\partial t} v_3^0 \;=\; 0$.
Esto ocurrirá si y sólo si

$$\int_0^1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1}\,(x_1 - v(x_2,\, z)\, t,\; x_2,\; z)\;\, v\,(x_2,\, z)\, dz \;=\; 0.$$

En general, esta integral no tiene por qué ser nula. En este caso, a pesar de que v^0 es diferenciable y es límite débil de una sucesión de soluciones, no podemos garantizar que v^0 sea solución clásica de la ecuación de Euler.

5.3.2. Una nueva ley de conservación del momento

En el ejemplo anterior, acabamos de verificar que v^0 no es solución clásica, y como es de clase C^1 tampoco puede ser solución débil, en virtud de la observación 5.11. Sin embargo, la ley de conservación del momento puede ser extendida de forma tal que esta función v^0 la satisfaga.

La ley de conservación del momento (5.7) puede ser reescrita en la forma:

$$\langle \mathfrak{p},\, \phi_t \rangle \;=\; \langle T_{in},\, \nabla\phi \rangle \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3) \;\text{ con }\; div\,\phi \;=\; 0, \tag{5.13}$$

donde $\mathfrak{p} \in \mathcal{D}'(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$ y $T_{in} \in \mathcal{D}'(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$.
Aceptamos que $\mathfrak{p} = \rho\, v$ y $T_{in} = -\rho\, v \otimes v$ son distribuciones cualesquiera.

Definición 5.15
Diremos que la ley generalizada de conservación del momento es satisfecha por $(\mathfrak{p},\, T_{in})$ si se satisface la igualdad (5.13).

Observación 5.16
En el ejemplo anterior, como $\forall\, \varepsilon > 0$ se tiene que v^ε es solución clásica, resulta claro que la ley generalizada de conservación del momento es válida tomando $\mathfrak{p} = \rho v^\varepsilon$ y $T_{in} = -\rho v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon$.
Por la definición de límite débil se deduce que la ley generalizada de conservación del momento se verifica con $\mathfrak{p}$ igual al límite débil de (ρv^ε) y T_{in} el de $(-\rho v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon)$, es decir:

$$\int_0^\infty \int_\Omega \rho v^0 \,.\, \phi_t \, dx\, dt \;=\; \int_0^\infty \int_\Omega -\rho T : \nabla\phi \, dx\, dt$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0,\, t_0),\, \mathbb{R}^3)$ con $div\,\phi \;=\; 0$, donde v^0 y T son los definidos en el ejemplo anterior.

5.3.3. Desarrollo de concentraciones

Sabemos -por el ejemplo 2.9- que dada $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$v(x) \;=\; \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \frac{1}{|x|^2} \int_0^{|x|} s\omega(s)\, ds \tag{5.14}$$

es una solución estacionaria de la ecuación de Euler en dos dimensiones. A partir de ella, construimos la sucesión de soluciones de esta ecuación

$$v^\varepsilon(x) \;=\; \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/2} \varepsilon^{-1}\, v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{5.15}$$

Consideramos $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $W(r) = \left(\int_0^r s\,\omega(s)\,ds\right)^2$.

Proposición 5.17
Sea $\omega \in C^1([0, \infty))$ tal que:

$$
\begin{aligned}
&a)\ \lim_{r\to\infty} W(r) = \frac{\lambda}{2\pi} \neq 0,\\
&b)\ \int_0^\infty |s\,\omega(s)|\,ds = \alpha < \infty,\\
&c)\ \int_0^\infty |s\,\omega(s)\,\ln s\,|\,ds = \beta < \infty.
\end{aligned}
$$

En estas condiciones, la sucesión (v^ε) de soluciones de la ecuación de Euler dada por (5.14) y (5.15) satisface $v^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} 0$ y la sucesión correspondiente a la energía cinética verifica $\frac{\rho}{2}|v^\varepsilon|^2 \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} \frac{\rho\lambda}{2}\delta$.

Demostración.
Tenemos que

$$
v^\varepsilon(x) = \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} |x|^{-2}\, W\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)^{1/2}.
$$

Sean $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $R > 0$ tal que *sop* $\phi \subset B(0, R)$ y $k > 0$ una mayorante de $|\phi|$, entonces

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x)\,.\,v^\varepsilon(x)\,dx\right| &\le \int_{B(0,R)} |\phi(x)|\;|v^\varepsilon(x)|\;dx \le \\
&\le k\int_{B(0,R)} \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/2} |x|^{-1}\, W\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)^{1/2} dx = \\
&= k\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/2} 2\pi \int_0^R W\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{1/2} dr.
\end{aligned}
$$

Como $\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/2} = 0$ y como $W^{1/2} \ge 0$ está acotada por $\alpha < \infty$, se cumple que

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x)\,.\,v^\varepsilon(x)\,dx\right| = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2).
$$

Veamos la convergencia de la sucesión de densidades de energía cinética. En primer lugar, observemos que $W'(r) = 2r\,\omega(r)\left(\int_0^r s\,\omega(s)\,ds\right)$ y que W es de clase C^2, por lo que existe $c > 0$ tal que $|W(h)| \le ch^2$ para toda $|h| \le 1$.

Además,

$$\left|\int_0^\infty W'(y)\,\ln y\,dy\right| \le 2\int_0^\infty \left|\int_0^y s\,\omega(s)\,ds\right|\,|y\,\omega(y)\,\ln y|\,dy \le$$
$$\le 2\left(\int_0^\infty |s\,\omega(s)|\,ds\right)\left(\int_0^\infty |y\,\omega(y)\,\ln y|\,dy\right) \;=\; 2\alpha\beta.$$

De esta forma, estamos en condiciones del teorema 4.25, de donde se concluye que $|v^\varepsilon|^2 \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} \lambda\delta$.

□

En este ejemplo tenemos nuevamente pérdida de energía cinética en el paso al límite, puesto que $v^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} 0$ mientras que $\frac{\rho}{2}|v^\varepsilon|^2 \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} \frac{\rho\,\lambda}{2}\delta$, esto es, la energía cinética del límite (que es cero) es menor que el límite de las energías cinéticas (que es $\frac{\rho\lambda}{2}$).

Proposición 5.18
En las mismas condiciones que en la proposición anterior, se tiene que $v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} \frac{\lambda}{2}I\delta$, donde $I \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es la matriz identidad. Es decir, dada $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2,\, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^2} (v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon) : \Phi \;=\; \frac{\lambda}{2}\left(\Phi_{11}(0) \;+\; \Phi_{22}(0)\right).$$

Demostración.
En los puntos $x \in \mathbb{R}^2$ en los que $|v^\varepsilon|^2(x) \neq 0$ se verifica que $v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon\,(x) = \frac{v^\varepsilon}{|v^\varepsilon|} \otimes \frac{v^\varepsilon}{|v^\varepsilon|}\;|v^\varepsilon|^2$.

Como

$$\frac{v^\varepsilon}{|v^\varepsilon|}(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}\frac{1}{|x|}, \quad \text{tenemos que}$$

$$v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon\,(x) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{x_2^2}{|x|^2} & \frac{-x_1\,x_2}{|x|^2} \\ \frac{-x_1\,x_2}{|x|^2} & \frac{x_1^2}{|x|^2} \end{pmatrix} |v^\varepsilon(x)|^2 \;\; \text{si } x \neq 0, \quad \text{y } v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon\,(0) \;=\; 0.$$

Sea $g_H \in C^0(S^1,\, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ la matriz que aparece del lado derecho de esta última ecuación, entonces

$$g_H(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta) \;=\; \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2\theta & -\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix}.$$

Sea $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2,\, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, usando (5.15), obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon : \Phi\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} |v^\varepsilon(x)|^2\, g_H\left(\frac{x}{|x|}\right) : \Phi(x)\,dx \;=$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} |x|^{-2}\, W\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)\, g_H\left(\frac{x}{|x|}\right) : \Phi(x)\, dx \;=$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} r^{-1}\, W\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\, g_H\,(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta) : \Phi(r,\,\theta)\, d\theta\, dr \;=$$

$$\int_0^\infty 2\pi \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} r^{-1}\, W\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \overline{g_H : \Phi}(r)\, dr, \qquad (5.16)$$

donde $\overline{g_H : \Phi}$ denota la media en θ,

$$\overline{g_H : \Phi}(r) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_H\,(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta) : \Phi(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)\, d\theta.$$

Notemos que la integral a resolver es análoga a la de (4.5) -aunque la función en este caso será en general discontinua en $x = 0$, pero esto no afecta el desarrollo presentado-. Sea (r_n) una sucesión arbitraria verificando $r_n \to 0$; observando que estamos en condiciones del teorema de convergencia dominada, tenemos:

$$\lim_{r_n\to 0} \overline{g_H : \Phi}(r) \;=$$

$$= \lim_{r_n\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2\theta\, \Phi_{11} \,-\, \operatorname{sen}\theta\cos\theta(\Phi_{12}+\Phi_{21}) \,+\, \cos^2\theta\, \Phi_{22})\, d\theta \;=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{r_n\to 0}\, (\operatorname{sen}^2\theta\, \Phi_{11} \,-\, \operatorname{sen}\theta\cos\theta(\Phi_{12}+\Phi_{21}) \,+\, \cos^2\theta\, \Phi_{22})\, d\theta \;=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, \Phi_{11}(0) \,-\, \operatorname{sen}\theta\cos\theta(\Phi_{12}(0)+\Phi_{21}(0)) \,+\, \cos^2\theta\, \Phi_{22}(0)\, d\theta \;=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_H(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta) : \Phi(0)\, d\theta \;=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2\theta & -\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix} d\theta\right) : \Phi(0) \;=\; \frac{1}{2} I : \Phi(0).$$

Como este límite es el mismo para toda subsucesión (r_n) tendiendo a 0, tenemos $\overline{g_H : \Phi}(r) \to \frac{1}{2} I : \Phi(0)$, si $r \to 0$. Notando la similitud entre las ecuaciones (5.16) y (4.5), podemos usar la misma demostración que en el teorema 4.25 para concluir que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^2} (v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon) : \Phi \;=\; \lambda(g_H : \Phi)(0) \;=\; \frac{\lambda}{2}\,(\Phi_{11}(0) \,+\, \Phi_{22}(0))\,.$$

□

En este ejemplo, a pesar de que el límite débil de la sucesión (v^ε) (que es cero) es solución, no es la que a priori parecería deseable, ya que ni $\rho v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon$ ni $\frac{\rho}{2}|v^\varepsilon|^2$ tienden a cero. La ley generalizada de conservación del momento (5.13) es válida para cada $\varepsilon > 0$ tomando $\mathfrak{p} = \rho v^\varepsilon$ y $T_{in} = -\rho v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon$, y tomando límite con $\varepsilon \to 0$, también lo será tomando $\mathfrak{p} = 0$ y $T_{in} = -\frac{\rho\lambda}{2} I\, \delta$.

Capítulo 6

Soluciones de DiPerna-Majda

En este capítulo definiremos las soluciones generalizadas de DiPerna-Majda de la ecuación de Euler para un fluido incompresible. Mostraremos algunos resultados en cuanto a la estructura de estas soluciones generalizadas y, en particular, la obtendremos para los ejemplos de persistencia de oscilaciones y desarrollo de concentraciones del capítulo anterior. A lo largo de este capítulo consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$ abierto y acotado.

6.1. Algunos resultados previos

En primer lugar, vamos a enunciar tres importantes teoremas que van a ser aplicados en este capítulo.

Definición 6.1 (Medida de Radon)
Sea μ una medida definida sobre la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$. Diremos que μ es de Radon si $\mu(K)$ es finito para todo K compacto, y si dados $U \subset \Omega$ abierto, $C \subset \Omega$ cerrado,

$$\begin{aligned} \mu(U) &= \sup \{\mu(K) \ / \ K \subset U,\ K \text{ compacto}\} \\ \mu(C) &= \text{ínf} \{\mu(V) \ / \ C \subset V,\ V \text{ abierto}\}. \end{aligned}$$

Consideremos los siguientes conjuntos de restricciones de medidas de Radon a Ω:

$$M(\Omega) = \left\{ \mu\big|_{\Omega} \ / \ \mu \text{ es una medida de Radon } \right\},$$

$$M^{+}(\Omega) = \left\{ \mu\big|_{\Omega} \ / \ \mu \text{ es una medida de Radon positiva}\right\}.$$

En estos conjuntos, tomamos la norma

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega).$$

Sea $E \subset \mathbb{R}^3$ medible, dada $f \in C^0(E)$, diremos que se anula en el infinito si dado $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ es compacto. Notaremos:

$$C_0^0(E) = \{f \in C^0(E) \ / \ f \text{ se anula en el infinito}\}.$$

Una prueba del siguiente teorema puede ser encontrada en [5]:

Teorema 6.2 (Riesz-Markov)
Dadas $\mu \in M(E)$ y $f \in C_0^0(E)$, sea $I_\mu(f) = \int f \, d\mu$. Entonces el mapa $\mu \longmapsto I_\mu$ es un isomorfismo isométrico entre $M(E)$ y $[C_0^0(E)]^*$.

Otros dos resultados previos necesarios son los siguientes, y sus demostraciones pueden ser encontradas en [2].

Teorema 6.3 (de representación de Riesz)
Sea H un espacio de Hilbert. Dado $h \in H$, el mapa $\varphi_h : H \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi_h(x) = \langle x, h\rangle$ es un funcional lineal continuo.
Además, el mapa $\varphi : H \to H^*$, $\varphi(h) = \varphi_h$ es un isomorfismo antilineal isométrico.

Teorema 6.4 (Alaoglu)
Si X es un espacio vectorial normado, entonces el conjunto $\overline{B_{X^*}(0, 1)} = \{\varphi \in X^* \ / \ \|\varphi\| \leq 1\}$ es ω^*-compacto.

Nuestro interés será aplicar el teorema anterior al espacio dual de $L^2(\Omega)$. En el caso en que tratemos con espacios duales de espacios separables, tenemos el siguiente resultado en [9]:

Teorema 6.5
Sea X un espacio vectorial topológico separable. Si $K \subset X^*$ y si K es un subconjunto débilmente-$*$ compacto de X^*, entonces K dotado de la topología débil-$*$ es metrizable.

Observación 6.6
Como corolario de esto, si K es una bola cerrada en el espacio dual de $L^2(\Omega)$, tenemos que toda red en K tiene una subsucesión convergente en K.

6.2. Soluciones de DiPerna-Majda

En esta sección se introducirán las soluciones generalizadas de DiPerna-Majda, se mostrará que toda familia de soluciones débiles de la ecuación de Euler que cumple la condición de acotación uniforme de energía cinética tiene una subsucesión que converge débilmente a una de estas soluciones generalizadas, y veremos cómo estas soluciones pueden ser caracterizadas por una medida vectorial $\nu \in M(\Omega) \times M^+(\Omega) \times ProbM(S^2)$.

Proposición 6.7
Sea (v^ε) una familia de funciones en Ω que satisfacen la condición de acotación uniforme de energía cinética (5.8):

$$\forall\, R > 0,\ t_1 < t_2,\ \exists\, C < \infty\ /\ \int_{t_1}^{t_2} \int_{B(0,\,R)} \frac{\rho}{2} \left|v^\varepsilon(x,t)\right|^2\, dx\, dt < C, \quad \forall\, \varepsilon.$$

Entonces, existen una subsucesión de (v^ε), que por practicidad también llamaremos (v^ε), una función $v^0 \in L^2_{loc}(\Omega)$ y $T \in \mathcal{D}'(\Omega,\, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$ tales que

$$v^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} v^0 \tag{6.1}$$

y

$$v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} T. \tag{6.2}$$

Demostración.
Tenemos definido $\mathcal{D}'(\Omega)$ como $[\mathcal{D}(\Omega)]^*$. Observemos que la familia (v^ε) está contenida en $L^2(\Omega)$, pues Ω está acotado. Además, sabemos que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, y por el teorema de representación de Riesz tenemos un isomorfismo isométrico entre $L^2(\Omega)$ y su espacio dual. Abusando de notación, nos referiremos al elemento del espacio dual $\varphi_{v^\varepsilon} \in \left[L^2(\Omega)\right]^*$ como v^ε. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, $\|v^\varepsilon\|_{[L^2(\Omega)]^*} = \|v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$.

Por la condición de acotación uniforme de energía cinética,

$$\|v^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |v^\varepsilon\,(x,\,t)|^2\, dx\, dt < C^2 \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Entonces, la familia de distribuciones (v^ε) está contenida en $B_{[L^2(\Omega)]^*}(0, C)$. Ahora, aplicando la observación 6.6, obtenemos que (v^ε) contiene una subsucesión (v^σ) convergente a, digamos, v^0. Como $\|v^0\| \leq C$, si $K \subset \Omega$ es compacto,

$$\int_K |v^0(x, t)|^2 \, dx \, dt \ \leq \ \int_\Omega |v^0(x, t)|^2 \, dx \, dt \ = \ \|v^0\|^2 \leq C^2.$$

Entonces, $v^0 \in L^2_{loc}(\Omega)$.
Trabajando coordenada a coordenada de forma análoga se tiene que existe una subsucesión de (v^σ), digamos (v^α), tal que $v^\alpha \otimes v^\alpha \stackrel{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} T$.

□

De esta forma, podemos dar una primera definición de solución generalizada.

Definición 6.8 (Solución generalizada de DiPerna-Majda)
Consideremos una familia de funciones (v^ε) satisfaciendo la condición de acotación uniforme de energía cinética (5.8). La función v^0 definida a partir de esta familia como en (6.1) es solución generalizada de DiPerna-Majda de la ecuación de Euler para un fluido incompresible si satisface la ley generalizada de conservación del momento, es decir, si

$$\left\langle v^0, \, \phi_t \right\rangle \, + \, \langle T, \, \nabla\phi \rangle \, = \, 0 \ \ \forall \, \phi \in \mathcal{D}(\Omega, \, \mathbb{R}^3) \ \ \text{con } div \, \phi \, = \, 0,$$

donde T es la distribución tensorial definida en (6.2), y si v^0 es incompresible en el sentido de las distribuciones.

Tenemos entonces un primer resultado.

Proposición 6.9
Sea (v^ε) una familia de soluciones débiles de la ecuación de Euler para un fluido incompresible que verifican también (5.8). Entonces, el campo de velocidades definido en (6.1) es solución generalizada de DiPerna-Majda de la ecuación de Euler.

Demostración.
Como para todo $\varepsilon > 0$, v^ε es solución débil de la ecuación de Euler, tomando una subsucesión como en la proposición 6.7, se tiene:

$$\int_\Omega \phi_t \, . \, v^\varepsilon + \nabla\phi : v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon \, = \, \sum_{j=1}^{3} \left(\langle (v^\varepsilon)_j, \, (\phi_t)_j \rangle + \sum_{k=1}^{3} \langle (v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon)_{jk}, \, \nabla\phi_{jk} \rangle \right) \to$$

$$\to \sum_{j=1}^{3} \left(\left\langle (v^0)_j,\, (\phi_t)_j \right\rangle + \sum_{k=1}^{3} \langle T_{jk},\, \nabla \phi_{jk} \rangle \right) = \left\langle v^0,\, \phi_t \right\rangle + \langle T,\, \nabla \phi \rangle$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega,\, \mathbb{R}^3)$ con $div\, \phi = 0$, y como la primera integral es igual a 0 para todo ε, pues v^ε es solución débil, se tiene que se satisface la ley generalizada de conservación del momento.

Por otra parte, como $div\, v^\varepsilon = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_i}$ y

$$\left\langle \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_i},\, \psi \right\rangle = -\left\langle v^\varepsilon,\, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle \to -\left\langle v^0,\, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial v^0}{\partial x_i},\, \psi \right\rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

se tiene $0 = div\, v^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} div\, v^0$. Así, $div\, v^0 = 0$ y se cumple la condición de incompresibilidad.

□

Observación 6.10
Como casos particulares de la proposición anterior tenemos las sucesiones de soluciones del capítulo 5 que presentaban persistencia de oscilaciones y desarrollo de concentraciones.
Además, el campo límite del ejemplo de persistencia de oscilaciones es diferenciable y solución generalizada, pero no es solución débil ni clásica de la ecuación de Euler.

Proposición 6.11
Dada una familia de funciones (v^ε) que satisface (5.8), existe una subsucesión que además de satisfacer (6.1) y (6.2), cumple que $|v^\varepsilon|^2 \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} \mu$, con $\mu \in M^+(\Omega)$.

Demostración.
Consideremos (v^ε) que cumple (6.1) y (6.2), y veamos que tiene una subsucesión que verifica lo pedido.
Por ser $\overline{\Omega}$ compacto, la condición de acotación uniforme de energía cinética implica que existe $C > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\int_\Omega |v^\varepsilon(x,\, t)|^2 \, dx\, dt \, < \, C^2.$$

Sea $\varphi \in C_0^0(\Omega)$, entonces dado $\varepsilon > 0$, el mapa $\varphi \mapsto \int_\Omega \varphi |v^\varepsilon|^2 \, dx\, dt$ es trivialmente lineal; además es continuo, ya que

$$\left| \int_\Omega \varphi \, |v^\varepsilon|^2 \, dx\, dt \right| \leq \|\varphi\| \left| \int_\Omega |v^\varepsilon|^2 \, dx\, dt \right| < \|\varphi\| \, C^2.$$

Por el teorema de Riesz-Markov, existe $\mu_\varepsilon \in M(\Omega)$ tal que para toda $\varphi \in C_0^0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \varphi\, |v^\varepsilon|^2\, dx\, dt \;=\; \int_\Omega \varphi\, d\mu_\varepsilon.$$

En particular, como $\mathcal{D}(\Omega) \subset C_0^0(\Omega)$, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, la distribución definida por la función $|v^\varepsilon| \in L^2_{loc}(\Omega)$ coincide con la que define la medida de Radon positiva μ_ε.
Sabemos que $\mu_\varepsilon(\Omega) = \sup\{\mu_\varepsilon(K) \;/\; K \subset \Omega \;\text{ compacto }\}$. Sea $K \subset \Omega$ compacto, consideramos $\varphi \in C^0(\Omega)$ tal que $\varphi\big|_K \equiv 1$ y $0 \le \varphi(x) \le 1$ para todo $x \in \Omega$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$,

$$\mu_\varepsilon(K) = \int_K d\mu_\varepsilon = \int_K \varphi\, d\mu_\varepsilon \le \int_\Omega \varphi\, d\mu_\varepsilon = \int_\Omega \varphi\, |v^\varepsilon|^2\, dx\, dt < C^2.$$

Tomando supremo entre los subconjuntos compactos de Ω, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, $\mu_\varepsilon(\Omega) \le C^2$. Luego, $(\mu_\varepsilon) \subset \overline{B_{(C^0(\Omega))^*}(0, C^2)}$, que es compacto por el teorema de Alaoglu. Entonces, existe una subsucesión de (μ_ε) que converge débilmente a $\mu \in M^+(\Omega)$.
Como las distribuciones inducidas por la familia $(|v^\varepsilon|^2)$ coinciden con las definidas por la familia (μ_ε), se tiene el resultado buscado.

$\square$

Sean $E \subset \mathbb{R}^n$, $H \in C^0(E, \mathbb{R})$. Si Γ es una medida en E, notaremos

$$\langle \Gamma,\, H \rangle = \int_E H(x)\, d\Gamma(x).$$

Notaremos análogamente si H toma valores en $\mathbb{R}^m$ o en $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.

Tenemos el siguiente resultado ([3], Teorema 1), que es válido aún sin la restricción de que Ω sea acotado:

Teorema 6.12
Si (v^ε) es una familia de funciones cuya norma en L^2 está uniformemente acotada, entonces (v^ε) tiene una subsucesión que cumple:

- *existe $\mu \in M(\Omega)$ tal que $|v^\varepsilon|^2 \xrightarrow{\mathcal{D}'} \mu$;*
- *existe un mapa medible $\Omega \mapsto M^+(\mathbb{R}^n) \oplus ProbM(S^{n-1})$, $(x,\, t) \mapsto \{\nu^1_{(x,\,t)},\, \nu^2_{(x,\,t)}\}$ tal que para toda g de la forma*

$$g(v) = g_0(v)\,(1 + |v|^2) + g_H\left(\frac{v}{|v|}\right) |v|^2, \tag{6.3}$$

donde $g_0 \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ *y* $g_H \in C^0(S^{n-1})$*, se cumple que*

$$g \circ v^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} \left\langle \nu^1,\, g_0 \right\rangle (1+f)\, dx\, dt \,+\, \left\langle \nu^2,\, g_H \right\rangle d\mu,$$

donde f *es la derivada de Radon-Nikodym de* μ *respecto a la medida de Lebesgue, esto es:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega (g \circ v^\varepsilon)\, \phi\, dx\, dt =$$

$$\int_\Omega \left\langle \nu^1_{(x,\,t)},\, g_0 \right\rangle\, (1+f)\, \phi\, dx\, dt + \int_\Omega \left\langle \nu^2_{(x,\,t)},\, g_H \right\rangle\, \phi\, d\mu \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observación 6.13

Las funciones v y $v \otimes v$ en la ecuación de Euler se pueden descomponer como en (6.3), tomando para la primera de ellas $g_0(v) = \frac{v}{1+|v|^2}$, $g_H = 0$, y para la segunda, $g_0 = 0$, $g_H(\theta) = \theta \otimes \theta$.

En particular, si tomamos para $i,\, j \in \{1,\, 2,\, 3\}$,

$$g_{ij}(v^\varepsilon) \;=\; (v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon)_{ij} \;=\; \frac{v_i^\varepsilon}{|v^\varepsilon|}\, \frac{v_j^\varepsilon}{|v^\varepsilon|}\, |v^\varepsilon|^2 \;=\; g_{H_{ij}}\left(\frac{v^\varepsilon}{|v^\varepsilon|}\right) |v^\varepsilon|^2,$$

que es de esta clase, tenemos que existe $\Lambda_{ij_{(x,\,t)}} \in ProbM(S^2)$ tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega (v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon)_{ij}\;\phi\, dx\, dt \;=\; \int_\Omega \langle \Lambda_{ij},\, g_H \rangle\, \phi\, d\mu =$$

$$= \int_\Omega \left(\int_{S^2} \frac{v_i\, v_j}{|v|^2}\, d\Lambda_{ij_{(x,\,t)}}(v) \right) \phi(x,\, t)\, d\mu, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Entonces, como $v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} T$, tenemos

$$\langle T,\, \Phi \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega (v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon) : \Phi\, dx\, dt \;=\; \sum_{i,\,j\,=\,1}^{3} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega (v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon)_{ij}\, \Phi_{ij}\, dx\, dt \;=$$

$$= \sum_{i,\,j\,=\,1}^{3} \int_\Omega \left(\int_{S^2} \frac{v_i\, v_j}{|v|^2}\, d\Lambda_{ij_{(x,\,t)}}(v) \right) \Phi_{ij}(x,\, t)\, d\mu \;=$$

$$= \int_\Omega \left(\int_{S^2} \frac{v}{|v|} \otimes \frac{v}{|v|}\, d\Lambda_{(x,\,t)}(v) \right) : \Phi(x,\, t)\, d\mu(x,\, t),$$

para cierta familia de medidas $\Lambda_{(x,\,t)} \in ProbM(S^2)$.

Así, si consideramos $\Lambda := \{\Lambda_{(x,\,t)} \;/\; (x,\, t) \in \Omega\}$, entonces tenemos $T = \left\langle \Lambda_{(\;,\;)},\, H \right\rangle d\mu$, con

$$H(v) = \frac{v}{|v|} \otimes \frac{v}{|v|}. \tag{6.4}$$

Observación 6.14
Si para alguna distribución $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se cumple

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} v^0 \; + \; \rho \, Div \left(\langle \Lambda, \, H \rangle \, d\mu \right) \, + \nabla p \; = \; 0,$$

entonces v^0 satisface la ley débil de conservación del momento (5.13).
Demostración.
Dada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, \, \mathbb{R}^3)$ con $div \, \phi = 0$,

- por el lema 5.3, $\langle \nabla p \, , \, \phi \rangle \; = \; 0$;
- por la definición de derivada débil, $\left\langle \frac{\partial}{\partial t} v^0, \, \phi \right\rangle \; = \; - \left\langle v^0, \, \phi_t \right\rangle$;
- $\langle Div \left(\langle \Lambda, \, H \rangle \, d\mu \right), \, \phi \rangle \; = \; - \left\langle \left(\langle \Lambda, \, H \rangle \, d\mu \right), \, \nabla \phi \right\rangle$, por el lema 3.23.

Entonces, dada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, \, \mathbb{R}^3)$ con $div \, \phi = 0$,

$$0 = \left\langle \rho \frac{\partial}{\partial t} v^0 \; + \; \rho \, Div \left(\langle \Lambda, \, H \rangle \, d\mu \right) \, + \nabla p, \, \phi \right\rangle =$$

$$= -\rho \left(\left\langle v^0, \, \phi_t \right\rangle + \left\langle \langle \Lambda, \, H \rangle \, d\mu, \, \nabla \phi \right\rangle \right).$$

□

Observación 6.15
Identificando $v^0 \; \in \; L^2_{loc}(\Omega)$ con una medida de Radon en Ω, la terna $(v^0, \, \mu, \, \Lambda)$ nos da una descomposición de una medida ν que toma valores vectoriales. Dada una familia (v^ε) de soluciones débiles de la ecuación de Euler, esta medida verifica $g \circ v^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} \langle \nu, \, g \rangle$ para toda g del tipo (6.3), donde

$$\langle \nu, \, g \rangle \; = \; \left\langle v^0, \, g \right\rangle \left(dx \, dt \; + \; d\mu \right) \; + \; \langle \Lambda, \, g \rangle \, d\mu.$$

6.3. Ejemplos

Finalmente, daremos una descripción de soluciones de DiPerna-Majda para tres casos: en el primero de ellos se caracteriza a las soluciones débiles presentadas en el capítulo 5 dentro de las soluciones generalizadas; los dos restantes corresponden a los ejemplos exhibiendo persistencia de oscilaciones y desarrollo de concentraciones del mismo capítulo.

1. Soluciones débiles.- Si v es solución débil (de Leray-Hopf) de la ecuación de Euler, se tiene

$$v^o = v, \quad d\mu(x,\, t) = |v(x,\, t)|^2\, dx\, dt, \quad \Lambda_{(x,\, t)} = \delta_{\frac{v(x,\, t)}{|v(x,\, t)|}} :$$

dada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega,\, \mathbb{R}^3)$ con $div\, \phi = 0$,

$$\int_\Omega (\phi_t \,.\, v \,+\, \nabla\phi : v \otimes v)\, dx\, dt = 0.$$

Entonces,

$$\langle \phi_t,\, v\rangle \,+\, \langle \nabla\phi,\, \langle \Lambda,\, H\rangle\, d\mu\rangle =$$

$$= \int_\Omega \phi_t \,.\, v\, dx\, dt \,+\, \int_\Omega \nabla\phi : \left(\int_{S^2} \frac{v}{|v|} \otimes \frac{v}{|v|}\, d\delta_{\frac{v(x,\, t)}{|v(x,\, t)|}} \right) |v(x,\, t)|^2\, dx\, dt,$$

y se tiene

$$\int_{S^2} \frac{v}{|v|} \otimes \frac{v}{|v|}\, d\delta_{\frac{v(x,\, t)}{|v(x,\, t)|}} \;=\; \frac{v(x,\, t) \otimes v(x,\, t)}{|v(x,\, t)|^2}\,,$$

de donde

$$\langle \phi_t,\, v\rangle \,+\, \langle \nabla\phi,\, \langle \Lambda,\, H\rangle\, d\mu\rangle = \int_\Omega (\phi_t \,.\, v \,+\, \nabla\phi : v \otimes v)\, dx\, dt \;=\; 0.$$

2. Persistencia de oscilaciones.- En este ejmplo, teníamos que $v^\varepsilon \stackrel{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} v^0$, con v^0 dada por (5.10) y que $|v^\varepsilon|^2 \stackrel{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} e_0$, donde e_0 está dada por (5.12). Aplicando la proposición 6.11 y el Teorema de Riesz-Markov, se tiene $d\mu = e_0(x,\, t)\, dx\, dt$. Además, $v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon \stackrel{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} T$, con T definido por (5.11).

Lema 6.16
Sean $a \in C^0([0,\, 1])$, $c : [0,\, 1] \to S^2$ inyectiva, diferenciable y sea $C = Im(c)$. Definimos un mapa $N : C^0(S^2) \to \mathbb{R}$ tal que $N(g) = \int_C g\big|_C\, a\, d\ell$. Entonces N es un funcional lineal continuo.

Demostración.
La linealidad de N es trivial. Dados $g \in C^0(S^2)$ y $\varepsilon > 0$, consideremos $f \in C^0(S^2)$ tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon/M$ para todo $x \in S^2$, donde $M \geq a(z)\, \|c'(z)\|$ para todo $z \in [0,\, 1]$.
Entonces,

$$|N(f) - N(g)| \;=\; \left| \int_C (f-g)\Big|_C\, a\, d\ell \right| \;=$$

$$= \left| \int_0^1 [f(c(z)) - g(c(z))]\; a(z)\, \|c'(z)\|\, dz \right| < \varepsilon,$$

por lo que N es continuo.

$\square$

En las condiciones de este lema, el teorema de Riesz-Markov nos asegura que existe $\Lambda \in M(S^2)$ tal que para toda $g \in C^0(S^2)$,

$$\int_{S^2} g\, d\Lambda \;=\; \int_C g\Big|_C\, a\, d\ell \;=\; \int_0^1 g(c(z))\, a(z)\, \|c'(z)\|\, dz.$$

Para este ejemplo, consideramos $\Lambda_{(x,\,t)} \in ProbM(S^2)$ definida por el lema anterior, tomando

$$c(z) \;=\; \frac{u(x,\,z,\,t)}{|u(x,\,z,\,t)|} \quad \text{y} \quad a(z) \;=\; \frac{|u(x,\,z,\,t)|^2}{\|c'(z)\|\, e_0(x,\,t)}\,,$$

con u definido como en (5.9), es decir,

$$\int_{S^2} g(u)\, d\Lambda_{(x,\,t)}(u) \;=\; \int_0^1 g\left(\frac{u(x,\,z,\,t)}{|u(x,\,z,\,t)|}\right) \frac{|u(x,\,z,\,t)|^2}{e_0(x,\,t)}\, dz.$$

Veamos que $T \;=\; \langle \Lambda,\, H\rangle\, d\mu$, con H dada por (6.4): sea $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3,\, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$,

$$\langle\langle \Lambda,\, H\rangle\, d\mu,\, \Phi\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}}^3 \left(\int_{S^2} H(u)\, d\Lambda_{(x,\,t)}(u)\right) : \Phi(x,\,t)\, e_0(x,\,t)\, dx\, dt \;=$$

$$=\int_\Omega \left(\int_0^1 u(x,\,z,\,t)\otimes u(x,\,z,\,t)\, dz\right) : \Phi(x,\,t)\, dx\, dt \;=\; \langle T,\, \Phi\rangle\,.$$

Entonces, $\langle \Lambda,\, H\rangle\, d\mu = T$ y tenemos la descomposición de la solución generalizada de DiPerna-Majda para este ejemplo.

3. Desarrollo de concentraciones.- En este caso, se tiene

$$v^0 = 0, \quad \mu = \lambda\delta, \quad \Lambda_{(x,\,t)} = \frac{d\theta}{2\pi},$$

es decir, $\Lambda_{(x,\,t)}$ es la medida de probabilidad uniformemente distribuida en S^1.

Ya sabemos que $v^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} 0$, $|v^\varepsilon|^2 \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} \lambda\delta$ y $v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon \overset{\mathcal{D}'}{\rightharpoonup} \frac{\lambda}{2} I\delta$, por lo que resta verificar $\frac{\lambda}{2}I\delta = \big\langle \Lambda_{(x,\,t)},\, H\big\rangle\, d\mu$. Sea $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$,

$$\Big\langle\big\langle \Lambda_{(x,\,t)},\, H\big\rangle\, d\mu,\, \Phi\Big\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{S^1} \frac{v}{|v|}\otimes\frac{v}{|v|}\frac{d\theta(v)}{2\pi}\right) : \Phi(x,\,t)\, d(\lambda\delta) \;=$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi}\left(\int_{S^1}\frac{v}{|v|}\otimes\frac{v}{|v|}\, d\theta\right) : \int_{\mathbb{R}^2}\Phi(x,\,t)\, d\delta = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\pi I\, :\, \Phi(0)\right) = \left\langle \frac{\lambda}{2} I\delta,\, \Phi\right\rangle,$$

pues

$$\int_{S^1}\frac{v}{|v|}\otimes\frac{v}{|v|}\, d\theta(v) \;=\; \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta & \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta \\ \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta & \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta\end{pmatrix} = \pi I.$$

De esta forma, $\big\langle \Lambda_{(x,\,t)},\, H\big\rangle\, d\mu = \frac{\lambda}{2} I\delta$.

Bibliografía

[1] Chorin, A., Marsden, J., *A mathematical introduction to fluid mechanics*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[2] Conway, J., *A course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[3] DiPerna, R., Majda, A., *Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations*, Comm. Math. Phys. **108**, 667-689 (1987).

[4] Evans, L., *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, 1998.

[5] Folland, G., *Real Analysis*, John Wyley & sons inc., New York, 1999.

[6] Friedlander, G., Joshi, M., *Introduction to the theory of distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[7] Majda, A., Bertozzi, A., *Vorticity and the incompressible flow*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[8] Melo, S., Moura Neto, F., *Mecânica dos fluidos e equações diferenciais*, CNPq - IMPA, Río de Janeiro, 1991.

[9] Rudin, W., *Análisis funcional*, Reverté, Barcelona, 1979.