

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

PUBLICACIONES DIDÁCTICAS

MEDIDA DE TENSIONES ELÁSTICAS

PARTE III: FOTOELASTICIDAD

PROF. ING. JULIO RICALDONI

DIRECTOR DEL INSTITUTO DE ESTÁTICA

MONTEVIDEO

1947

Prof. Ing. JULIO RICALDONI

**DIRECTOR DEL INSTITUTO DE ESTÁTICA DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA**

MEDIDA DE TENSIONES ELÁSTICAS

PARTE III: FOTOELASTICIDAD

**MONTEVIDEO
R. O. DEL URUGUAY**

Prefacio

Estos apuntes de fotoelasticidad, que estudian uno de los temas de un conjunto que comprenderá la medida de tensiones en general, son destinados exclusivamente a servir de texto para la parte correspondiente del cursillo que se dicta dentro del curso de Ensayo de Materiales, con carácter general y obligatorio para los estudiantes de ingeniería de nuestra Facultad.

Este cursillo pues,—que en total absorbe unas 12 o 14 horas teóricas y de demostración,—no tiene carácter de especialización, sino que su único objeto es que los nuevos ingenieros conozcan la existencia de estos métodos experimentales y tengan nociones de sus bases teóricas, el alcance y campo de utilización de cada uno y la forma de interpretar sus resultados.

*Ha movido a las autoridades de la Facultad de Ingeniería a incluir la medida de tensiones o elasticidad experimental en los cursos normales, la doble consideración de que, por una parte, la literatura técnica muestra con gran frecuencia la utilización de estos métodos para resolver o comprobar problemas de elasticidad teórica o aplicada, y por otra parte, los libros destinados a la enseñanza de la Resistencia de Materiales empiezan a utilizarlos para ayudar a visualizar los conceptos, como ya lo han hecho,—por ejemplo,—Southwell (*Theory of Elasticity*), Colonnetti (*Statica delle Costruzioni*) y especialmente Riggs y Frocht (*Strength of Materials*).*

*Esa condición de simple texto de carácter general ha conducido a eliminar totalmente las citas bibliográficas y a dejar de lado muchos detalles interesantes exclusivamente para aquellos que trabajan personalmente con la fotoelasticidad; también se ha tratado de no repetir conocimientos adquiridos en los cursos de Física y Resistencia de Materiales, incluyendo solamente los desarrollos y fórmulas directamente aplicables, con el objeto de facilitar su lectura. Si se deseara profundizar el tema, están el “*Treatise on Photoelasticity*” de Coker y Filon y el “*Photoelasticity*” de Frocht, obras que pueden considerarse, la primera desde el punto de vista teórico y científico y la segunda desde el punto de vista práctico y técnico, como lo más completo que se ha escrito.*

I. Introducción

1. *Historia.* Aunque la utilización de la doble refracción accidental producida en los cuerpos isótropos transparentes por la acción de fuerzas exteriores es relativamente reciente, sus bases científicas teórico-experimentales, datan de principios del siglo XIX: en efecto, en su comunicación del 9 de febrero de 1816, Sir David Brewster hace notar la relación que existe entre los fenómenos mecánicos y ópticos que tienen lugar en una chapa de material transparente e isótropo como el vidrio.

Esta relación básica de la fotoelasticidad fué vista por Brewster, lógicamente, desde el punto de vista físico, interesándose exclusivamente en su aspecto óptico y no formulando nada más que relaciones cualitativas referentes a estados elásticos simples, criterio que aparece también en los estudios de Biot y Fresnel que estos investigadores realizan entre 1820 y 1825 en base a lo indicado por Brewster. Las primeras leyes cuantitativas de los fenómenos óptico-elásticos son enunciadas por Neumann en 1841, estableciendo la proporcionalidad entre las *deformaciones* y las velocidades de propagación para los estados elásticos complejos; Maxwell en 1852 establece relaciones análogas pero, a la inversa de Neumann, se refiere a las *tensiones* en cambio de las deformaciones.

Finalmente Wertheim en 1854 dió la forma definitiva a la segunda ley de la doble refracción accidental y consiguió realizar las primeras experiencias con compresión y tracción pura, determinando por vez primera el coeficiente óptico-elástico de una serie de materiales utilizando el método del compensador, que mucho después reviviera Coker. Simultáneamente, alrededor de 1853, Maxwell publicaba su estudio teórico de los campos de tensiones, en el cual planteaba las características de las curvas fundamentales en fotoelasticidad,—isoclinas, isostáticas e isocromáticas,—e in-

dicaba también, ya en esa época, un método gráfico-analítico para separar las tensiones principales en base a los datos fotoelásticos, utilizando las ecuaciones de equilibrio de un elemento limitado por isostáticas. Este método, del cual no daba detalles en cuanto a su aplicación práctica, fué tomado más tarde por Filon para dar uno de los métodos más convenientes y más usados actualmente. (artículo 33).

Las primeras aplicaciones prácticas de esta nueva ciencia a la resolución de problemas elásticos parecen ser el estudio hecho en 1891 por Carus Wilson, sobre las tensiones producidas en vigas muy altas y el efecto de cargas concentradas, así como también un artículo de A. Marston (1893) sobre las tensiones en los rodillos de dilatación. Pero sin embargo, desde el punto de vista del ingeniero es más cierto y más justo decir que la fotoelasticidad nació en 1901 con las célebres memorias de A. Mesnager: "Mésures des efforts intérieurs dans les solides et ses applications" en el Congreso I. de Ensayo de Materiales de Budapest y "Contribution à l'étude de la déformation élastique des solides".

En estas memorias Mesnager hace notar, basándose en estudios de Maurice Levy publicados en 1898, la *generalidad* de los resultados obtenidos con el vidrio ⁽¹⁾ y además describe la utilización de su latómetro interferencial para medir la suma de tensiones o sea completar la resolución del problema. Finalmente realiza la verificación experimental de las piezas flexadas (reproduce los resultados de C. Wilson), de la carga concentrada en una placa indefinida y de un cilindro bajo cargas diametrales.

Aunque a partir de esta fecha existe ya un aumento sustancial en las contribuciones al progreso de la fotoelasticidad, entre las que merecen destacarse las de L. N. G. Filon sobre las características de los materiales, efectos ópticos iniciales y métodos de medida, las primeras aplicaciones prácticas a la técnica de la ingeniería se producen entre 1910 y 1915 con los estudios de E. G. Coker sobre problemas aislados (tensiones en placas y barras de sección variable o con discontinuidades, análisis de ejemplares de ensayo de materiales, resortes, etc.) y especialmente con la me-

(1) En realidad en esta primera memoria Mesnager no aclara bien la influencia que tienen las condiciones en los límites sobre la generalidad de los resultados y es solamente en 1913 cuando diferencia entre condiciones de fuerzas o de desplazamientos y la forma de independizarse en algunos casos.

moria de Mesnager (1913) sobre la determinación completa de las tensiones producidas en un modelo de un puente sobre el Ródano, que es el primer caso de estudio de un problema concreto de estabilidad por medio de fotoelasticidad. Este tipo de experiencia le exige el estudio de la similitud rigurosa y también el de las estructuras de barras.

Entre 1920 y 1925 comienza a notarse cierta evolución en el tipo de estudios referentes a fotoelasticidad, puesto que sus temas son cada vez más de índole práctica como lo revelan claramente las revistas en donde se publican, que dejan de ser poco a poco las revistas de física o ciencias puras, para pasar a revistas de ingeniería o ciencias aplicadas y también la fotoelasticidad comienza a entrar en la industria en forma cada vez más general: comienza en esa época pues el período moderno de la fotoelasticidad, caracterizado por su utilización corriente en la resolución de problemas tanto teóricos como prácticos de la resistencia de materiales, en estrecha colaboración con el análisis y con otros métodos experimentales.

Su importancia real queda de manifiesto con solo mencionar algunas de las organizaciones industriales más importantes que poseen su laboratorio propio de fotoelasticidad: General Electric, Westinghouse, Metropolitan-Vickers, General Motors, etc.

Actualmente esa tendencia es cada vez más pronunciada, agregándose continuamente nuevos perfeccionamientos a los aparatos y a la técnica, así como alcanzándose nuevos horizontes como la fotoelasticidad tridimensional, pero quizás puede decirse que los hechos que permitieron este intenso desarrollo técnico e industrial, más bien que científico y físico, fueron la introducción de un material fotoelástico sensible y fácil de trabajar como la bakelita y la invención del "polaroid" que permitió sustituir los prismas de Nicol por elementos polarizantes de gran campo, mucho más luminosos y que no necesitan la interposición de ningún elemento cristalino dentro del haz de rayos polarizados.

2. *Campos de utilización y exactitud probable.* Como todo método experimental, — y aún desde el punto de vista práctico como todo método analítico, — la fotoelasticidad tiene sus limitaciones en la aplicación, no solamente desde el punto de vista teórico, sino también considerando su conveniencia práctica.

Desde el punto de vista estrictamente teórico puede decirse

que actualmente no existe limitación en cuanto al estado elástico del prototipo a estudiar, puesto que ya existen diversos métodos de fotoelasticidad tridimensional (modelo congelado, luz convergente, luz difusa, etc.), aunque aparece en este tipo una dependencia total de los coeficientes de elasticidad de los materiales, que impide siempre la generalización rigurosa de los resultados. El aspecto técnico-práctico de estas determinaciones todavía no está totalmente resuelto sin embargo, ya que exigen, estos métodos, trabajos difíciles y engorrosos y utilaje más delicado.

Se puede pues establecer que el campo más interesante de la fotoelasticidad es el de la elasticidad bidimensional: es a este tipo, por otra parte, al que se refieren exclusivamente estos apuntes de carácter didáctico.

Las características principales o determinantes de la fotoelasticidad podríamos reducirlas a tres: costo elevado de las experiencias, delicadeza de las medidas, gran exactitud de las observaciones. Esta precisión excepcional de la fotoelasticidad explica y justifica su uso extensivo a pesar de la existencia de las dos primeras características, ya que, en efecto, esta ciencia es la única que permite la auscultación total y simultánea de las tensiones individualizadas, — casi podríamos decir, — en cada punto geométrico de la pieza, con un error probable muy pequeño.

Es así, por ejemplo, que con buenos materiales y aparatos se puede llegar a distinguir tensiones en puntos distantes alrededor de 0.015 mm (como por ejemplo en la figura 35, representativa de un modelo cuyo ancho es de 6,3 mm). Por otra parte ese error probable puede establecerse que no excederá del 10 % como estima Brahtz (Director del Laboratorio de Fotoelasticidad del "U. S. Bureau of Reclamation"), aunque Coker baja al 2 o 3 %, pero debe recordarse que el tipo de investigaciones es diferente en uno y otro caso, y que las de Brahtz caen precisamente en el caso más interesante para nosotros, de las aplicaciones técnicas. La experiencia personal se acerca más a Brahtz que a Coker, efectivamente: en los últimos trabajos realizados, el error total (que incluye la escala, la constante óptico-elástica, la medida y el dispositivo de carga y los errores de observación y de cálculo gráfico-analíticos posteriores) tuvo un valor medio de 4 % y un máximo de 7 %, obtenidos por comprobación del equilibrio estático en una serie de secciones.

Tales errores pueden considerarse especialmente bajos ya que además se refieren a valores de las *tensiones* y no de las sollicitaciones, es decir a los errores últimos.

Es fácil ver que esas tres características excluirán a la fotoelasticidad de la categoría de los métodos experimentales destinados al estudio de rutina, tal como sucede con los influenciógrafos por ejemplo y en cambio la llevan al estudio de cuerpos o estructuras que, a causa de su forma o de su sollicitación, no es posible calcularlas teóricamente o bien a la comprobación de fórmulas obtenidas por cálculo aproximado como muchas de la Resistencia de Materiales.

Luego pues, desde el punto de vista del interés general o científico se ha aplicado intensamente la fotoelasticidad para la realización de estudios de elasticidad plana como extensión de la teoría matemática de la elasticidad, para comprobar fórmulas existentes o para deducir o fundamentar otras y también para mejorar o simplemente conocer mejor los ejemplares de ensayo de materiales, campos en los cuales la obra de Coker y sus colaboradores ha sido enorme.

En cuanto a su interés práctico o técnico-industrial es diferente de acuerdo al tipo de estructura, — definida en su sentido más amplio, — que se considere. La mayor cantidad de estudios fotoelásticos realizados es sobre partes o elementos de máquinas, hecho fácilmente explicable debido a tres causas fundamentalmente:

- a) La reproducción idéntica, de una parte dada, en gran número de ejemplares significa que una pequeña economía por unidad se multiplica extraordinariamente.
- b) La influencia del peso propio es de primaria importancia, de manera que una pequeña reducción en su magnitud tiene nuevas repercusiones y efectos favorables.
- c) La sollicitación variable generalmente existente enfoca la atención sobre las concentraciones de tensiones o tensiones localizadas como causa determinante de la rotura, y esas tensiones localizadas en formas generalmente complicadas sólo pueden evaluarse con estos métodos experimentales.

En ingeniería civil, — a pesar de que se vió ya que el primer trabajo fundamental en fotoelasticidad fué precisamente sobre un puente, — su interés es, *en general*, más reducido, como se puede comprender aplicando negativamente las tres consideraciones an-

teriores, pero sin embargo no es despreciable ni mucho menos y su tendencia actual es aumentar, dividiéndose en dos campos diferentes.

Por una parte se puede utilizar la fotoelasticidad para el cálculo de *solicitaciones* en estructuras complejas altamente hiperestáticas o bien en estructuras en que, aunque puedan considerarse de barras, la influencia de los nudos o acordamientos es fundamental en la distribución de aquellas: desde este punto de vista se pueden recordar en la época actual los estudios de Baes sobre el cálculo de vigas Vierendeel.

Y por otra parte, y más extensa, se ha utilizado para profundizar el conocimiento de la repartición cualitativa y cuantitativa de tensiones en partes localizadas o detalles de las estructuras. En este sentido pueden mencionarse los nudos de estructuras continuas, apoyos, articulaciones y efecto de discontinuidades en paredes o vigas, tanto para acero como para hormigón armado, pero donde se ha hecho un empleo extenso y sistemático de la fotoelasticidad semejante al de máquinas, es en el estudio de las uniones soldadas para estructuras de acero y en el cual puede afirmarse que este estudio ha sido preponderante en conducir a los perfeccionamientos en su resistencia a la fatiga indispensable para los puentes.

Para terminar quizás convenga decir alguna palabra sobre la utilización de la fotoelasticidad al hormigón armado ya que, a primera vista, parecería que para que los resultados fueran de algún valor el modelo debiera ser un modelo armado como el prototipo, lo que estrictamente no es así. La fabricación de modelos de bakelita armados con varillas de aluminio fué intentada por Beyer y Solakian en 1933 pero las dificultades de construcción y manipulación no permitieron su utilización posterior, de manera que se debe contar únicamente con modelos simples.

Tal circunstancia no disminuye el interés ni el mérito de la investigación puesto que, precisamente, las armaduras deben disponerse teóricamente según las tensiones principales, generalmente de tracción, que se producen en el cuerpo homogéneo, o sea según sus isostáticas, curvas perfectamente determinables fotoelasticamente. Pero además, sus datos permiten proyectar muchas veces las armaduras necesarias para obtener determinada seguridad a la fisuración y aún a la rotura, como sucede por ejemplo con la armadura transversal de las péndolas en hormigón armado.

II. Óptica Cristalina

CAPÍTULO I. DEFINICIONES Y NOTACIÓN

3. *Generalidades.* A los efectos de este estudio no interesa entrar a definir la naturaleza de la vibración luminosa, sino que nos es suficiente establecer que es una perturbación periódica que puede representarse por un *vector luminoso*, — desplazamiento según la teoría clásica o fuerza eléctrica o magnética según la teoría electromagnética, — normal a la dirección de propagación pero en general variable en magnitud y azimut.

Como se consideran haces luminosos de pequeño diámetro se estudiarán ondas planas normales desde luego a la dirección de propagación, que tomaremos siempre como eje z ; para caracterizar esa perturbación o vector luminoso que designaremos en general con la letra u se utilizará la forma:

$$u = a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z) \quad (a)$$

designando con a la *amplitud* de la vibración, con λ su longitud de onda, con v la velocidad de propagación y con t y z los parámetros tiempo y distancia, cuando se eligen convenientemente los orígenes de ambos.

También, introduciendo el período T de la vibración:

$$T = \frac{\lambda}{v}, \quad (b)$$

se puede poner la ecuación (a) en la forma:

$$u = a \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \quad (c)$$

o en forma sumaria:

$$\left. \begin{aligned} u &= a \operatorname{sen} \varphi \\ \text{con} \quad \varphi &= 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

cuando se indica con φ la *fase* del movimiento.

Como no interesan los valores absolutos de la *intensidad* de las diversas radiaciones luminosas sino valores relativos, dejaremos de lado las constantes correspondientes, variables según el significado físico que se le atribuya al vector luminoso, y tomaremos siempre al cuadrado de la amplitud como expresión de esa intensidad I :

$$I = a^2$$

El proceso fotoelástico se basa en esencia en el estudio de la interferencia de varias radiaciones luminosas provenientes de una misma fuente luminosa, por cuya razón serán todas de un mismo período T (o frecuencia $\nu = \frac{1}{T}$).

Este período T es la única característica intrínseca de cada radiación, ya que se mantiene invariable en todo su recorrido a través de diversos medios; en cambio la velocidad v y por lo tanto su longitud de onda λ ($\lambda = vT$) son funciones no solamente de la radiación sino también del medio en que se toman. Precisamente es la relación de esas velocidades v_1 y v_2 para dos medios (1) y (2) lo que caracteriza las propiedades ópticas relativas de los dos medios:

$$n_{1,2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (2)$$

siendo $n_{1,2}$ el *índice de refracción relativo* del medio (1) con respecto al (2).

Además si el primer medio es el vacío, el *índice de refracción absoluto* de un medio cualquiera será, si indicamos con c la velocidad de propagación en el vacío común a todas las radiaciones,

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \quad (d)$$

de donde

$$n_{1,2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (e)$$

Para los materiales utilizados en fotoelasticidad (cristal corriente, celuloide, bakelita, etc.) se tiene siempre $n_1 > 1.0$.

4. *Polarización.* En la luz común el vector luminoso está variando de azimut continuamente y sin ley ninguna, pero si por cualquier medio adecuado disciplinamos ese vector obligándolo a que su *dirección* obedezca a una ley definida se dice que la luz está *polarizada*. Por ejemplo si el vector permanece sobre un plano dado de los que contienen al eje z se dice que la vibración está polarizada en un plano o que es luz polarizada rectilínea; si su extremo describe una hélice circular es una luz polarizada circular, etc.

El *plano de polarización* de una vibración rectilínea es el plano normal al plano determinado por el vector luminoso y la normal a la superficie de onda

5. *Fase y recorrido.* Cuando se estudia la interferencia o combinación de varias radiaciones que se propagan según un mismo eje z , interesa conocer, además de sus amplitudes, las *diferencias de marcha* o camino relativo, es decir la distancia δ (fig. 1) que separa dos puntos correspondientes de las dos vibraciones, — por ejemplo los máximos, — en un instante dado.

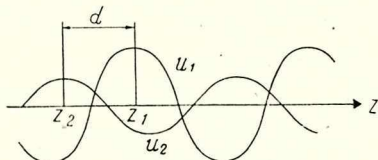


Fig. 1

Ahora bien, si se elige siempre los orígenes de t y z de manera de tener para una de las vibraciones la expresión (1) del art 3, o sea que $u_1 = 0$ para $z = 0 = t$, la otra, — que en general no estará en fase, — tendrá una diferencia de fase $\Delta\varphi$ con la primera, es decir que será de ecuación

$$u_2 = a_2 \operatorname{sen} (\varphi - \Delta\varphi) \quad \text{con} \quad u_1 = a_1 \operatorname{sen} \varphi.$$

La diferencia de marcha δ que interesa será igual a la diferencia $(z_1 - z_2)$ de las distancias a esos máximos para un instante dado con $u_1 = a_1$ y $u_2 = a_2$ o sea

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z_1}{\lambda} \right) = \pi/2 \quad \text{y} \quad 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z_2}{\lambda} \right) - \Delta\varphi = \pi/2$$

de donde tomando t/T de la primera y sustituyendo en la segunda:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \quad (3)$$

que es la relación que se buscaba.

CAPÍTULO II. COMPOSICIÓN DE VIBRACIONES

6. *Vibraciones rectilíneas coplanares.* Sean dos movimientos vibratorios de igual período que se propagan según un mismo eje z y cuyos vectores descansan en un mismo plano zy , es decir dos vibraciones polarizadas rectilíneas coplanares, de diferente amplitud y con una diferencia de fase $\Delta\varphi$ (fig. 2)

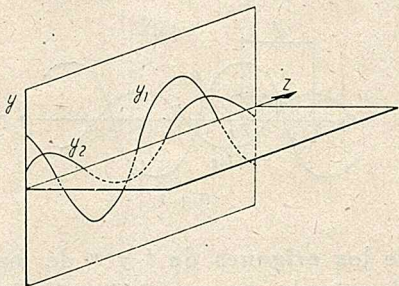


Fig. 2

$$y_1 = a_1 \operatorname{sen} \varphi$$

$$y_2 = a_2 \operatorname{sen} (\varphi - \Delta\varphi).$$

El resultado de su composición será desde luego otra vibración coplanar Y de igual período que designaremos con

$$Y = A \operatorname{sen} (\varphi - \Delta\psi)$$

siendo $\Delta\psi$ la diferencia de fase con y_1 . Para hallar sus magnitudes características A y $\Delta\psi$, establecida la condición

$$y_1 + y_2 = Y$$

o sea

$$\begin{aligned} a_1 \operatorname{sen} \varphi + a_2 [\operatorname{sen} \varphi \cos \Delta\varphi - \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta\varphi] = \\ = A [\operatorname{sen} \varphi \cos \Delta\psi - \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta\psi] \end{aligned}$$

e igualando los coeficientes de las variables $\operatorname{sen} \varphi$ y $\cos \varphi$ tenemos:

$$a_1 + a_2 \cos \Delta\varphi = A \cos \Delta\psi,$$

$$-a_2 \operatorname{sen} \Delta\varphi = -A \operatorname{sen} \Delta\psi$$

de donde

$$\operatorname{tg} \Delta\psi = \frac{a_2 \operatorname{sen} \Delta\varphi}{a_1 + a_2 \cos \Delta\varphi} \quad (4)$$

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos \Delta \varphi. \quad (5)$$

Esta última expresión puede ponerse en otra forma más conveniente agregando $\pm 2 a_1 a_2$ y reagrupando:

$$A^2 = (a_1 + a_2)^2 - 4 a_1 a_2 \sin^2 \frac{\Delta \varphi}{2} \quad (5')$$

7. *Vibraciones rectilíneas situadas en planos ortogonales.* Sean nuevamente dos movimientos vibratorios que se propagan según

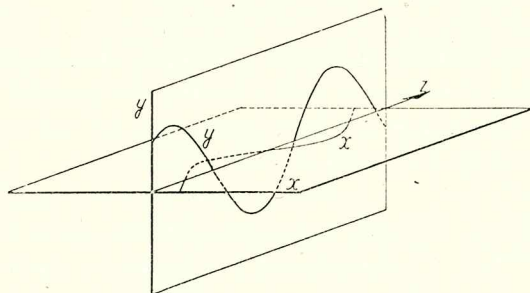


Fig. 3a

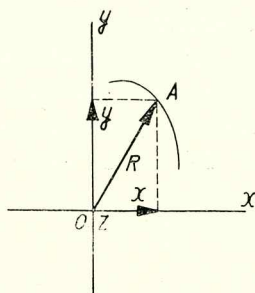


Fig. 3b

el eje z pero cuyos vectores descansan respectivamente en dos planos ortogonales que tomaremos como xz e yz , con amplitudes diferentes y una diferencia de fase $\Delta \varphi$, cuyas expresiones serán por lo tanto:

$$x = a_1 \sin \varphi \quad (a)$$

$$y = a_2 \sin (\varphi - \Delta \varphi).$$

El extremo A del vector resultante R de la composición (fig. 3b) describirá pues una curva que descansa en el plano Oxy normal también al eje z , cuya ecuación se halla eliminando el parámetro φ en las ecuaciones anteriores; en efecto despejando $\sin \varphi$, y de allí $\cos \varphi$, en la primera de las (a):

$$\sin \varphi = x/a_1, \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_1}\right)^2}$$

y sustituyendo en la segunda desarrollada:

$$y/a_2 = (\sin \varphi \cos \Delta \varphi - \cos \varphi \sin \Delta \varphi)$$

queda

$$y/a_2 = x/a_1 \cos \Delta \varphi - \sin \Delta \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_1}\right)^2}$$

o sea

$$\frac{x}{a_1} \cos \Delta \varphi - \frac{y}{a_2} = \sin \Delta \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_1}\right)^2},$$

de donde elevando al cuadrado y ordenando, tenemos finalmente:

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_2}\right)^2 - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos \Delta \varphi = \sin^2 \Delta \varphi \quad (6)$$

que es, en general, la ecuación de una elipse referida a su centro, o sea que la vibración resultante es una vibración polarizada elíptica.

Para ver el *sentido* en que es recorrida tomemos nuevamente las ecuaciones iniciales (a) y tomemos como punto de partida el instante para el cual $\varphi = 0$, o sea que las coordenadas del extremo A del vector serán: $x = 0$, $y = a_2 \sin(-\Delta \varphi)$.

Vemos por lo tanto que si $\Delta \varphi$ está comprendido entre 0 y π se tendrá $y = a_2 \sin(-\Delta \varphi) < 0$ y el extremo A tomará una posición tal como la A', por cuya razón al considerar un instante posterior, para el que $\varphi > 0$, se tendrá $x > 0$ a sea que el extremo del vector girará en sentido inverso (fig. 4a).

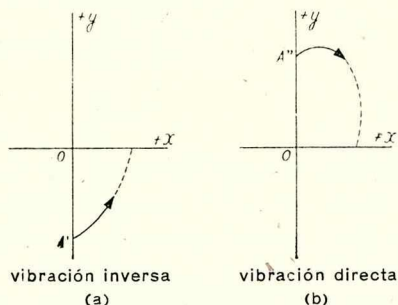


Fig. 4

Haciendo el mismo razonamiento para $\Delta \varphi$ comprendido entre π y 2π se tendrá el punto A'' y por lo tanto una vibración directa.

Por otra parte, interesan las formas particulares que toma esa elipse para determinados valores de las amplitudes y de la diferencia de fase:

a) $\Delta \varphi = n \cdot 2\pi$. (fig. 5a)

De la ecuación (6) se tiene:

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_2}\right)^2 - \frac{2xy}{a_1 a_2} = 0 \quad \text{o sea} \quad \left(\frac{x}{a_1} - \frac{y}{a_2}\right)^2 = 0$$

que es la ecuación de una doble recta colocada en el primer cuadrante y que forma un ángulo α con el eje x tal que $\operatorname{tg} \alpha = a_2/a_1$. Debemos notar que aquí, — como en todos los otros casos, — los valores máximos que pueden alcanzar las coordenadas x e y del punto A son $\pm a_1$ y $\pm a_2$ respectivamente.

b) $\Delta \varphi = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ (fig. 5b).

De la ecuación (6):

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_2}\right)^2 = 1$$

que es la ecuación de una elipse referida a sus ejes; además por lo visto más arriba (fig. 4a) el sentido de recorrido es "inverso".

c) $\Delta \varphi = (2n+1)\pi$ (fig. 5c).

Se tiene como ecuación:

$$\left(\frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2}\right)^2 = 0$$

que en la ecuación de una doble recta ubicada en el segundo cuadrante y con

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a_2}{a_1}$$

d) $\Delta \varphi = 3\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (fig. 5d).

De la ecuación (6):

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_2}\right)^2 = 1$$

que es otra vez una elipse referida a sus ejes, pero recorrida en sentido "directo".

También es de mucha importancia el caso particular en que

$$a_1 = a_2 = a \quad \text{y} \quad \Delta \varphi = (2n+1)\pi/2$$

para cuyos valores la ecuación (3) se transforma en

$$x^2 + y^2 = a^2$$

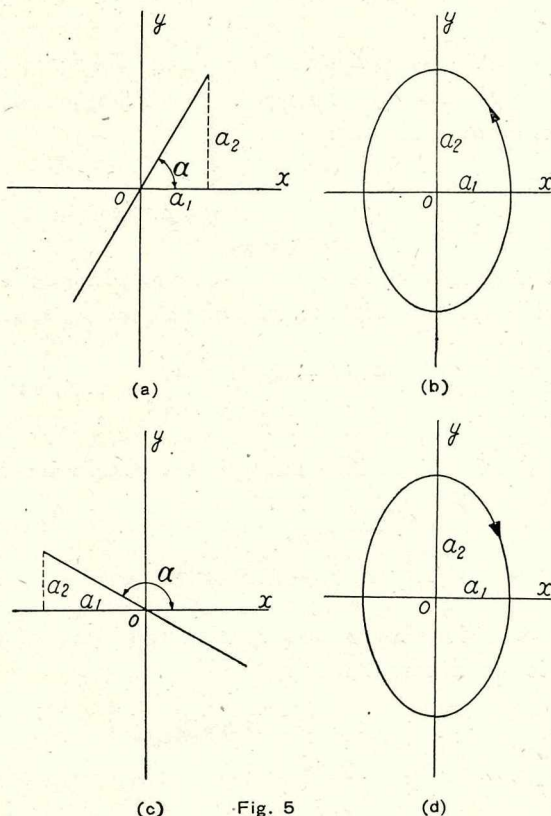


Fig. 5

que es la ecuación de una circunferencia. Además sustituyendo estos valores también en las ecuaciones originales (a), tenemos en resúmen de (4b) y (4d):

$$\Delta \varphi = \pi/2 : \text{vibración circular inversa} \quad \begin{cases} x = a \operatorname{sen} \varphi \\ y = -a \cos \varphi \end{cases} \quad (7)$$

$$\Delta \varphi = 3\pi/2 : \text{vibración circular directa} \quad \begin{cases} x = a \operatorname{sen} \varphi \\ y = a \cos \varphi \end{cases}$$

8. *Descomposición de una vibración elíptica en dos vibraciones circulares.* Tomando la vibración elíptica en sus vibraciones componentes (a):

$$x = a_1 \operatorname{sen} \varphi$$

$$y = a_2 \operatorname{sen} (\varphi - \Delta \varphi)$$

vemos que para que esta vibración pueda ser expresada en función de dos vibraciones circulares de sentido contrario dadas por:

$$\begin{aligned} v. c. directa \quad & \begin{cases} x_1 = A \operatorname{sen} (\varphi + \alpha) \\ y_1 = A \cos (\varphi + \alpha) \end{cases} & v. c. inversa \quad & \begin{cases} x_2 = B \operatorname{sen} (\varphi + \beta) \\ y_2 = -B \cos (\varphi + \beta) \end{cases} \end{aligned}$$

deberá ser posible cumplir las siguientes igualdades:

$$a_1 \operatorname{sen} \varphi = A \operatorname{sen} (\varphi + \alpha) + B \operatorname{sen} (\varphi + \beta)$$

$$a_2 \operatorname{sen} (\varphi - \Delta \varphi) = A \cos (\varphi + \alpha) - B \cos (\varphi + \beta)$$

o sea igualando los coeficientes de $\operatorname{sen} \varphi$ y $\cos \varphi$ en las expresiones desarrolladas:

$$a_1 = A \cos \alpha + B \cos \beta$$

$$0 = A \operatorname{sen} \alpha + B \operatorname{sen} \beta$$

$$a_2 \cos \Delta \varphi = -A \operatorname{sen} \alpha + B \operatorname{sen} \beta \quad -a_2 \operatorname{sen} \Delta \varphi = A \cos \alpha - B \cos \beta$$

De este sistema de cuatro ecuaciones se pueden deducir de inmediato las cuatro incógnitas A y B (amplitudes) y α y β (diferencias de fase de x_1 , y_1 y x_2 , y_2 con x , y), llegando a

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a_2 \cos \Delta \varphi}{a_1 - a_2 \operatorname{sen} \Delta \varphi} \quad A^2 = \frac{1}{4} (a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \operatorname{sen} \Delta \varphi) \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_2 \cos \Delta \varphi}{a_1 + a_2 \operatorname{sen} \Delta \varphi} \quad B^2 = \frac{1}{4} (a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \operatorname{sen} \Delta \varphi) \quad (8')$$

En el caso particular en que la vibración elíptica original tenga $a_1 = a_2 = a$ estas expresiones se transforman a

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\cos \Delta \varphi}{1 - \operatorname{sen} \Delta \varphi} = -\operatorname{tg} \left(45 + \frac{\Delta \varphi}{2} \right), \quad A^2 = \frac{a^2}{2} (1 - \operatorname{sen} \Delta \varphi) \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos \Delta \varphi}{1 + \operatorname{sen} \Delta \varphi} = \operatorname{tg} \left(45 - \frac{\Delta \varphi}{2} \right), \quad B^2 = \frac{a^2}{2} (1 + \operatorname{sen} \Delta \varphi) \quad (9')$$

CAPÍTULO III. PROPAGACIÓN EN MEDIOS CRISTALINOS.

9. *Condiciones generales.* Sabemos que en los medios homogéneos la vibración luminosa se propaga en línea recta con velocidades características de cada medio y que esta velocidad es única en los medios isótropos, mientras que en los cuerpos anisótropos adquiere valores diferentes de acuerdo con su azimut, o sea que en estos medios la velocidad de propagación es función de la dirección del frente de onda que se considera.

Tomando en cuenta la *velocidad normal* v de la onda plana (velocidad medida según la normal $\bar{N}$ al plano o frente de onda) y designando, por generalización de los medios isótropos, con el nombre de índice de refracción de la onda estudiada a la relación $n = \frac{c}{v}$ de la velocidad de propagación c en el vacío a la

velocidad antedicha, la *superficie de los índices*, o sea aquella superficie cuyo radio vector tiene por longitud el índice n correspondiente al plano de onda normal a dicho radio, será para los medios isótropos una esfera y para los medios cristalinos una superficie de 2 hojas correspondiente a una ecuación de 4° grado.

Tal circunstancia indica pues, que para cada plano de onda P , —o normal $\bar{N}$,— existen dos índices diferentes n' o n'' , o sea que según dicha dirección se propagarán dos vibraciones con velocidades normales diferentes:

$$v' = \frac{c}{n'} \quad \text{y} \quad v'' = \frac{c}{n''} .$$

Si se toman como ejes coordenados los ejes de simetría óptica, la intersección de dicha superficie con uno cualquiera de dichos ejes determina, sobre éste, segmentos iguales a los *índices*

principales correspondientes a los otros dos ejes (fig. 6). Las direcciones determinadas por los puntos de intersección I y su simétrico I' respecto al eje z (si se eligen los ejes de manera que los tres índices principales estén ordenados según $n_1 > n_2 > n_3$), fijan las direcciones de los *ejes ópticos* OI y OI', que corresponden pues a la normal de los planos de onda para los cuales los dos índices n' y n'' son iguales entre sí e iguales al índice intermedio n_2 .

Además cada una de esas dos ondas correspondientes a un determinado plano de onda, tiene una dirección de vibración (tomada como tal la inducción eléctrica) perfectamente definida; estas dos vibraciones son normales entre sí y normales al *plano de polarización* respectivo.

La *superficie de onda*, de acuerdo con la expresión $n \cdot v = c$, es enteramente análoga a la superficie de índices, deduciéndose de ésta mediante una polaridad.

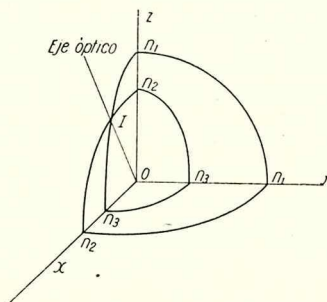


Fig. 6

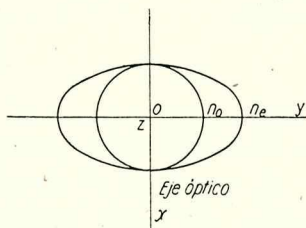
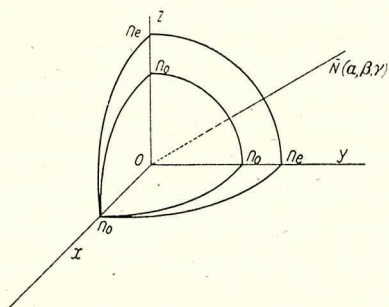


Fig. 7

Este tipo general de estructura cristalina, el de los cristales biáxicos o con dos ejes ópticos, se simplifica notablemente cuando dos de los índices principales se hacen iguales: son los *cristales uniaxiales*. En este caso tendremos pues, por ejemplo, $n_2 = n_3 = n_0$ y llamando $n_e = n_1$, vemos que la superficie de los índices de 2 hojas se desdobra en dos superficies de 2.º grado de revolución alrededor del eje x (fig. 7) y los dos ejes ópticos OI y OI' de la figura 6 se confunden en uno sólo dirigido según el

eje x , que pasa a ser el único eje óptico pero dotado de la simetría de revolución.

De los dos índices correspondientes a cada plano de onda definido por una normal determinada $\bar{N}$, uno es independiente de la orientación de $\bar{N}$ y constantemente igual a n_0 y se le llama *índice ordinario*, mientras que el otro es función de $\bar{N}(\alpha, \beta, \gamma)$ y su valor está comprendido entre el índice ordinario n_0 y el n_e llamado *índice extraordinario principal*.

Cuando $\bar{N}$ coincide con el eje óptico, o sea para planos de onda normales a éste, no existe nada más que una onda de velocidad $v_0 = c/n_0$, es decir que no existe birefringencia y la vibración correspondiente viaja sin deformarse ni dividirse, cualquiera

que sea su plano de polarización: el cristal se comporta como si fuera un medio isótropo.

En el caso más simple en el que el plano de onda es paralelo al eje óptico, que es el caso único que se presenta en fotoelasticidad bidimensional, la normal $\bar{N}$ queda en el plano (z, y) , — (fig. 7 y 8) y la vibración V_e correspondiente al índice n_e (vibración extraordinaria) resulta paralela al eje x o sea al eje óptico y la V_0 correspon-

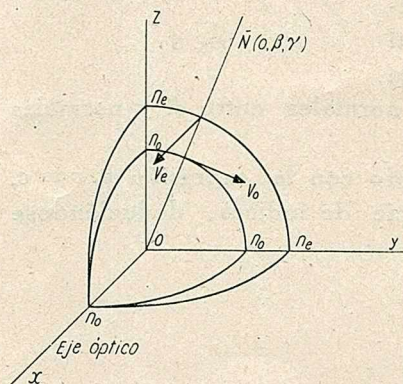


Fig. 8

diente al n_0 (vibración ordinaria), resulta normal a $\bar{N}$ también y a V_e : V_e estará en el plano $(\bar{N}$ —eje óptico) y V_0 será normal a este plano, quedando además V_0 y V_e en el plano de onda normal a $\bar{N}$.

10. *Efecto de una lámina cristalina.* Consideremos una lámina cristalina de caras paralelas orientadas de manera que sean también paralelas al eje óptico, sobre la cual incide normalmente un haz luminoso (fig. 9). La construcción de Huyghens nos indica que las dos ondas planas originadas por la birefringencia serán también paralelas a las caras, así como también seguirán de ese modo después de salir de la lámina: los dos rayos luminosos según los cuales se divide el rayo incidente no se desplazan ni alteran su dirección de propagación al atravesar la lámina, o sea que estas direcciones coinciden a la salida.

Además, si la onda incidente era una vibración polarizada plana $u = a \cdot \sin \varphi$, en la incidencia se desdoblará en (fig. 9):

$$V_0 = u \cdot \cos \Theta = a \cos \Theta \cdot \sin \varphi$$

$$V_e = u \cdot \sin \Theta = a \sin \Theta \sin \varphi$$

ondas que viajarán con sus velocidades correspondientes v_0 y v_e ,

por cuya razón a la salida presentarán una cierta diferencia de fase.

Para hallar esta diferencia de fase consideremos primero su valor cuando

una onda plana (fig. 10) llega a una lámina paralela de índice absoluto n' y de espesor d de manera que una parte (vibración v') la atraviese y otra parte (vibración v_0) siga su camino en el vacío ($n_0 = 1$). Si φ_i es la fase de la onda incidente, al llegar a la cara $O.O$, tendremos llamando φ' y φ_0 a las expresiones de la fase de v' y v_0 , según ecuación (1) del artículo (3)

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi_i + 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda'} \right) \\ \varphi_0 &= \varphi_i + 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda_0} \right) \end{aligned} \quad (a)$$

$$\text{con} \quad n' = \frac{c}{v'} = \frac{\lambda_0}{\lambda'}$$

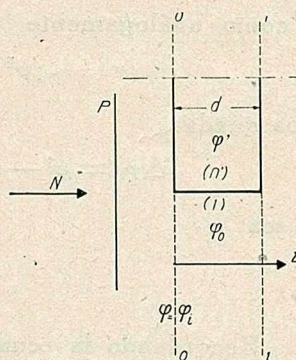


Fig. 10

tomando para origen de z y t el momento en que la onda P llega al plano $O.O$. Luego pues al llegar al plano 1.1 de salida, o sea para $z = d$, las expresiones de dichas fases en un instante dado t serán:

$$\varphi' = \varphi_i + 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda'} \right) ; \quad \varphi_0 = \varphi_i + 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda_0} \right)$$

y su diferencia de fase o sea la *diferencia de fase absoluta* de la vibración v^1 será:

$$\Delta \varphi^1_a = \varphi^1 - \varphi_0 = 2\pi \frac{d}{\lambda_0} - 2\pi \frac{d}{\lambda^1} = 2\pi d \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda^1} \right) \quad (b)$$

o sea

$$\Delta \varphi^1_a = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (1 - n^1) \quad (10)$$

Análogamente, en el caso de que esa onda incidente dé origen en el cristal a otra vibración v'' , por lo tanto de igual T o λ_0 , a la cual le corresponda allí otro índice n'' , su *diferencia de fase absoluta* (respecto por lo tanto a la que se propagó en el vacío) será:

$$\Delta \varphi''_a = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (1 - n'') \quad (11)$$

Finalmente, la diferencia de fase producida entre las dos vibraciones v^1 y v'' o *diferencia de fase relativa* de la vibración v^1 con respecto a la v'' la tendremos notando de (10) y (b) que:

$$\varphi^1 - \frac{2\pi d}{\lambda_0} (1 - n^1) = \varphi_0$$

y como análogamente

$$\varphi'' - \frac{2\pi d}{\lambda_0} (1 - n'') = \varphi_0$$

nos queda

$$\Delta \varphi_r = \varphi^1 - \varphi'' = \frac{2\pi d}{\lambda_0} [(1 - n^1) - (1 - n'')]$$

o sea

$$\Delta \varphi_r = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (n'' - n^1) \quad (12)$$

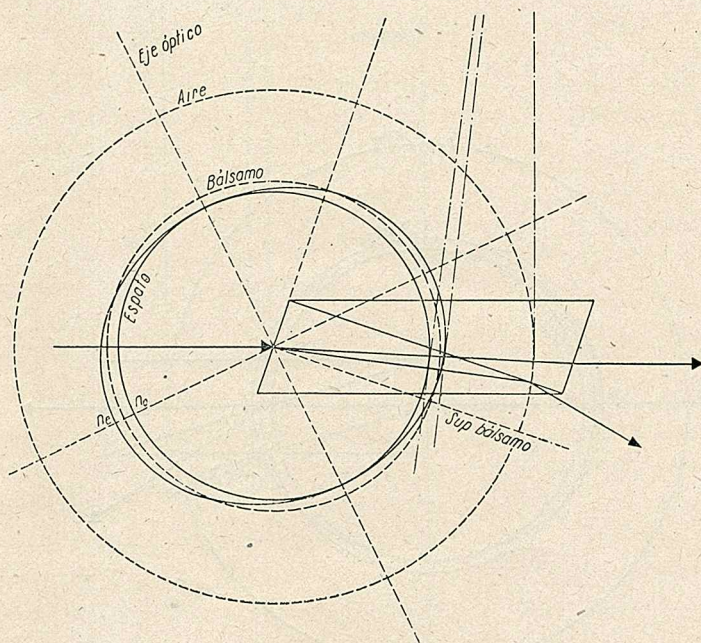
Recordando la ecuación (3) del artículo (5) tendremos como diferencias de marcha absoluta y relativa:

$$\begin{aligned} \delta^1_a &= d (1 - n^1) & \delta''_a &= d (1 - n'') \\ \delta_r &= d (n'' - n^1) . \end{aligned} \quad (12')$$

11. *Polarizadores.* Para obtener la luz polarizada rectilínea que se necesita para las experiencias fotoelásticas se puede utilizar, desde luego, cualquier dispositivo polarizante, aunque puede

haber preferencias para uno u otro tipo según la clase de aplicaciones que se tenga en vista.

Los primeros fotoelasticímetros y aún algunos fabricados actualmente, utilizaron la polarización por doble refracción mediante prismas de Nicol o de Ahrens, basados ambos en el principio de hacer pasar el rayo de luz natural por un medio cristalino y eliminar una de las dos vibraciones polarizadas rectilíneas así produ-



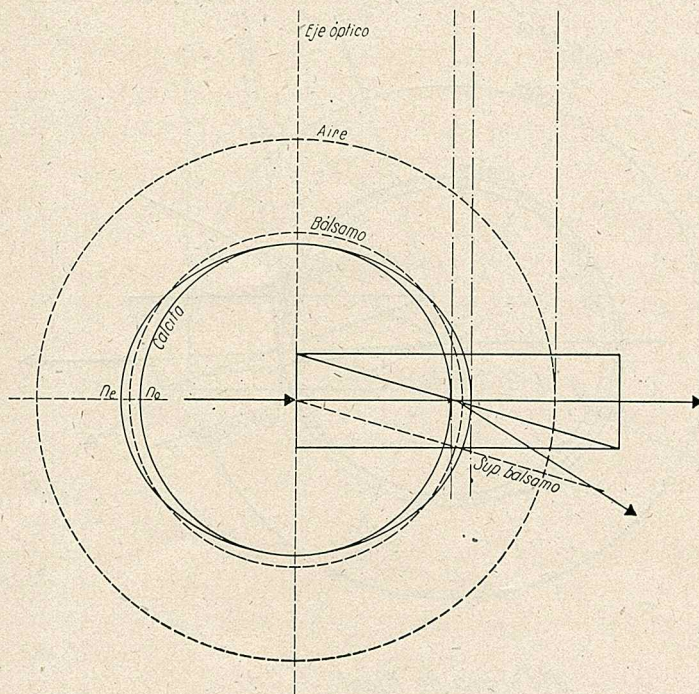
a) Prisma de Nicol

Fig. 11a

cidas, mediante desviación lateral y absorción en la montura, obtenida por un juego adecuado de los índices de refracción de los diversos medios atravesados (fig. 11). Este sistema tiene el inconveniente de su pequeño rendimiento luminoso debido a sus reducidas dimensiones transversales, así como también el de necesitar un mayor número de lentes para formar el haz paralelo (ver la figura 21a del artículo 18); por otra parte es cada día más difícil obtener cristales de espato de calidad y dimensiones convenientes.

Otros dispositivos polarizantes ya utilizados en varios casos son los dispositivos por reflexión o refracción. En efecto, cuando

un rayo de luz natural sufre una reflexión, el rayo reflejado queda parcialmente polarizado en el plano de incidencia, en una magnitud variable con el ángulo de incidencia y esa polarización se hace total para la incidencia de Brewster ($\operatorname{tg} i = n$). Por otra parte cuando un rayo de luz natural sufre refracciones y concretamente cuando atraviesa una lámina transparente de caras paralelas, el rayo emergente está parcialmente polarizado en el plano normal al



b) Prisma de Ahrens

Fig. 11b

plano de incidencia, con un valor máximo de polarización para la misma incidencia de Brewster, pero sin llegar nunca a ser total. Para el vidrio común ese máximo, — expresado el grado de polarización por la relación de la intensidad de la componente normal al plano de incidencia con respecto a la componente en dicho plano, — es de 0.73 aproximadamente; este grado puede mejorarse superponiendo varias láminas, es decir haciendo atravesar a la luz una *pila de vidrios*, siempre con la incidencia de Brewster, ya que

esa relación baja a 0.40 para 4 láminas y a 0.25 para 8, en condiciones perfectas.

En cambio la utilización de pilas de vidrios como polarizador por reflexión no es conveniente, puesto que si bien la intensidad de la componente normal al plano de incidencia aumenta, el aumento es mayor para la intensidad de la otra componente y el valor relativo de la polarización disminuye.

En resumen puede decirse que con estos tipos de polarizadores los mejores resultados se obtienen con una superficie reflectora única (lámina de vidrio negro pulido) o bien por transmisión a través de una pila de vidrios, aunque de cualquiera manera, — y

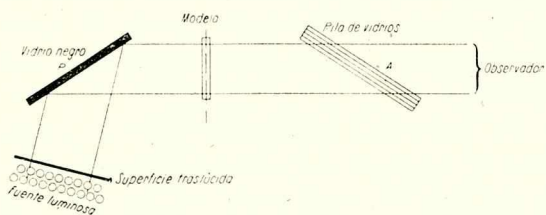


Fig. 12

especialmente en este último caso, — la calidad polarizante no es muy buena, pero en cambio permite obtener campos de observación de dimensiones importantes, podríamos decir tan grandes como se quiera, con los cuales efectuar observaciones cualitativas y aún cuantitativas no muy exactas.

En la (fig. 12) se reproduce un polariscopio de gran campo de este tipo fabricado por Coker para estudiar modelos de puentes, que utiliza un polarizador por reflexión y un analizador por refracción, disposición más conveniente para la composición del conjunto. Dado que tanto uno como el otro tienen rendimiento luminoso más bien bajo, se necesita una fuente luminosa de una gran intensidad y suficientemente extensa, lo que se obtiene con un número importante de lámparas de incandescencia.

El tercer tipo de polarizador es de utilización muy reciente aunque el más conveniente, ya que reúne las ventajas de los dos tipos expuestos, sin tener sus inconvenientes: las láminas de "Polaroid" y afines, constituídas por una suspensión de cristales de hepatita en celuloide, orientados por un proceso mecánico o electromagnético. Estos cristales presentan la propiedad del "dicroismo", o sea de absorber una de las vibraciones producidas por la doble refracción en una proporción mucho mayor que la otra, de manera que un rayo de luz natural que incida sobre dicho cristal queda transformado a la salida en un rayo polarizado rectilíneo.

Esa orientación uniforme de los cristales en toda la superficie de la lámina de celuloide permite obtener en toda ésta una luz de idénticas características e intensidad cuando se hace incidir un haz de rayos paralelos y obtener así un campo de luz polarizada rectilínea de superficie excepcionalmente grande como en el caso de la polarización por reflexión (las láminas se fabrican normalmente con un ancho de 30 o 40 cms pudiéndose componer discos con diámetros de 60 o más) pero en cambio de mejor calidad y rendimiento.

En efecto, en la región del espectro visible para el ojo humano, el porcentaje de luz polarizada rectilínea contenida en la luz emergente llega a 98 y el porcentaje de transmisión,—relación de la intensidad emergente a la intensidad incidente es de 37 aproximadamente en el mismo campo de visibilidad, a comparar con 46 para un polarizador perfecto.

El empleo de discos de "Polaroid" como polarizadores o analizadores permite simplificar el conjunto del polariscopio como puede verse en la figura 21b del art. 18, mejorando el rendimiento luminoso y aún permitiendo la eliminación de uno de los lentes dentro del campo de luz polarizada, que es una causa de alteración de la calidad de la polarización debido a las reflexiones y refracciones oblicuas. Todas las fotografías reproducidas en este trabajo han sido tomadas en el fotoelasticómetro de Polaroid.

Finalmente recordemos que las condiciones óptimas de polarización de estos sistemas son función de la frecuencia de las radiaciones, de manera que los mejores resultados se obtendrán con luz monocromática.

CAPÍTULO IV. POLARISCOPIOS.

12. *Polariscopio plano.* El *polariscopio plano* es un sistema óptico compuesto por dos dispositivos o aparatos polarizadores colocados a continuación uno del otro con sus ejes según la dirección de un haz de rayos paralelos (fig. 13a): el primero de esos

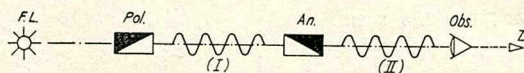


Fig. 13a

prismas (a partir de la fuente luminosa) es el *polarizador* y el segundo (sobre el ob-

servador) es el *analizador*. Ambos están colocados en monturas giratorias acotadas que permiten girar alrededor de sus ejes y por lo tanto colocar sus *ejes de polarización* en cualquier azimut deseado.

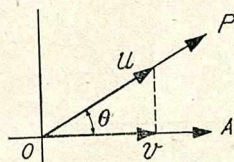


Fig. 13b

Luego pues si designamos con $u = a \sin \varphi$ la vibración plana (I) que sale del polarizador según la dirección P del eje de polarización (fig. 13b), el segundo prisma A no dejará pasar nada más que la componente de ese vector dirigida según su propio eje, o sea que la vibración (II) será otra vibración rectilínea de ecuación:

$$v = u \cos \Theta = a \cos \Theta \sin \varphi$$

con una amplitud $a' = a \cos \Theta$ de donde la intensidad I de la luz que llega al observador será, si indicamos con $I_0 \equiv a^2$ la intensidad a la luz (I):

$$I = a^2 \cos^2 \Theta = I_0 \cos^2 \Theta \quad (a)$$

y la intensidad relativa $q = I/I_0$:

$$q = \cos^2 \Theta \quad (b)$$

que será nula para prismas cruzados e igual a 1 para prismas paralelos.

13. *Interposición de una lámina cristalina en un polariscopio plano.* Si en el dispositivo anterior se intercala, normalmente a los rayos, una lámina cristalina con su eje óptico paralelo a las caras y cuyos ejes de polarización designaremos con x, y (fig. 14a), la vibración (II) que llega al analizador A ya no será una vibración rectilínea sino elíptica. En efecto (fig. 14b), indicando con $u = a \sin \varphi$

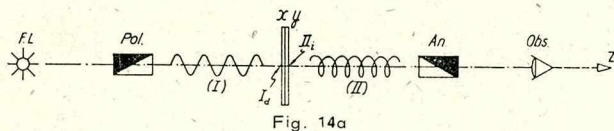


Fig. 14a

la vibración (I) emergente del analizador, al incidir en la lámina se descom-

pondrá según dos vibraciones w y v polarizadas respectivamente según los ejes x e y de la lámina de manera que sus ecuaciones al iniciar el pasaje a través de la lámina, — en (I_d), — serán:

$$w = a \cos \alpha \sin \varphi \quad (a)$$

$$v = a \sin \alpha \sin \varphi.$$

A la salida de la lámina, — en (II_i), — el recorrido en su espesor t habrá introducido entre las dos vibraciones v y w , que se propagan según la misma recta, una diferencia de fase $\Delta \varphi$ cuyo valor se vió en el art. 10; luego pues las ecuaciones de las vibraciones v y w que ahora llamaremos v' y w' serán:

$$w' = a \cos \alpha \cdot \sin(\varphi - \Delta \varphi) \quad (b)$$

$$v' = a \sin \alpha \sin \varphi$$

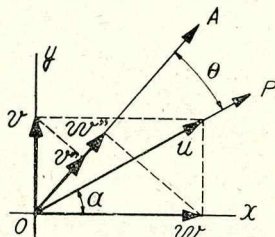


Fig. 14b

o sea que la vibración (II) es una vibración elíptica como se deduce del artículo 7.

Al llegar estas dos vibraciones componentes, cuyo resultado es una vibración elíptica, al analizador A , se tendrá análogamente al caso del artículo anterior, que sólo podrán pasar a través de dicho prisma las proyecciones de los vectores según su eje, de manera que según el eje A tendremos dos vibraciones coplanares w'' y v'' con las ecuaciones siguientes (indicando con $\beta = \theta + \alpha$ el ángulo de A con x)

$$w'' = w' \cos \beta = a \cos \alpha \cos \beta \cdot \sin(\varphi - \Delta \varphi) \quad (c)$$

$$v'' = v' \sin \beta = a \sin \alpha \sin \beta \cdot \sin \varphi$$

$$\text{o sea} \quad w'' = a_1 \operatorname{sen} (\varphi - \Delta \varphi) \quad (c')$$

$$v'' = a_2 \operatorname{sen} \varphi$$

con

$$a_1 = a \cos \alpha \cos \beta, \quad a_2 = a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

De acuerdo con lo deducido en el art. 6, la composición de dos vibraciones rectilíneas coplanares dá origen a otra vibración rectilínea con su vector descansando en el mismo plano, cuya amplitud A y su diferencia de fase $\Delta \psi$ respecto a la vibración original v están dadas por la ecuación (4) y (5'). La amplitud A será pues en este caso:

$$A^2 = a^2 \left[(\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta)^2 - 4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha \cos \beta \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta \varphi}{2} \right]$$

o sea

$$A^2 = a^2 \left[\cos^2 (\beta - \alpha) - \operatorname{sen} 2 \alpha \cdot \operatorname{sen} 2 \beta \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta \varphi}{2} \right] \quad (d)$$

o sea la intensidad relativa en (III) será, con $\Theta = \beta - \alpha$ (ángulo relativo de los prismas):

$$\varrho = \cos^2 \Theta - \operatorname{sen} 2 \alpha \cdot \operatorname{sen} 2 (\alpha + \Theta) \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta \varphi}{2} \quad (13)$$

En esta expresión pueden distinguirse dos términos con influencias netamente diferentes: el primero es únicamente función de Θ es decir que depende solamente de la posición relativa del polarizador y analizador mientras que en la magnitud del segundo influyen no solamente esa posición a través del ángulo Θ , sino también los datos referentes a la lámina cristalina interpuesta. A su vez ésta influye en dos formas: Por una parte hay un efecto direccional que aparece por el ángulo α que forma el eje x de la lámina con el eje del polarizador, es decir que depende de la posición relativa de estos dos elementos pero no de las características ópticas de la lámina y por otra parte hay un efecto que depende de las características intrínsecas de la lámina en forma de la diferencia de fase $\Delta \varphi$ introducida por la lámina a las dos vibraciones polarizadas, que a su vez, como ya se vió, depende de los índices de refracción, del espesor y de la luz, según la expresión del art. 10:

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi \delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0} t (n_1 - n_2)$$

Luego pues la intensidad relativa q tendrá,—para una lámina dada,—un valor diferente según sea la longitud de onda de la vibración luminosa utilizada, o sea para cada radiación. De aquí que si se trabaja con luz blanca el resultado final se obtendrá aplicando la expresión (13) a cada una y todas las radiaciones monocromáticas de que está compuesta. Concretando, si llamamos $i_0 (= a^2)$ la intensidad incidente de cada radiación e $i (= A^2)$ la intensidad final (a menos de una constante naturalmente) tendremos análogamente que, para luz blanca, la intensidad incidente será $I_0 = \Sigma a^2$ y la final será $I = \Sigma A^2$ o sea

$$I = \Sigma a^2 \left[\cos^2 (\beta - \alpha) - \text{sen } 2\alpha \cdot \text{sen } 2\beta \text{sen}^2 \frac{\Delta \varphi}{2} \right] \quad (e)$$

y la intensidad relativa q :

$$q = \frac{I}{I_0} = \frac{\Sigma a^2 \left[\cos^2 (\beta - \alpha) - \text{sen } 2\alpha \text{sen } 2\beta \text{sen}^2 \frac{\Delta \varphi}{2} \right]}{\Sigma a^2}$$

o sea sacando fuera de la sumatoria los términos que no varían con las diversas radiaciones:

$$q = \cos^2 \Theta - \text{sen } 2\alpha \cdot \text{sen } 2(\alpha + \Theta) \frac{\Sigma (a^2 \text{sen}^2 \frac{\Delta \varphi}{2})}{\Sigma a^2} \quad (14)$$

El primer término representa una luz blanca debilitada en la relación de $\cos^2 \Theta$ a 1 y el segundo es una luz en que entran cada una de las radiaciones con un valor relativo proporcional a $\text{sen}^2 \frac{\Delta \varphi}{2} = \text{sen}^2 \frac{\pi \delta}{\lambda_0}$ o sea con un valor tanto menor cuanto más se aproxime el valor de la diferencia de marcha introducida δ a un número entero de longitudes de onda λ_0 , puesto que para aquella radiación para la cual se cumpla exactamente la relación $\delta = n \lambda$ siendo n un número entero ese término se anulará; la luz observada será del color complementario de la radiación extinguida.

14. *Polariscopio circular*. Hemos visto que un polarizador común (prisma de Nicol, Polaroid, etc.) produce luz polarizada rectilineamente; veamos ahora un dispositivo que en cambio produce luz polarizada circular cuando incide sobre el mismo un haz de luz común. Este dispositivo, conocido con el nombre de *polarizador circular* se compone de un polarizador corriente y a con-

tinuación una lámina cristalina, colocada normalmente al haz de rayos con sus ejes de polarización x , y a 45° del eje del prisma polarizador y de características tales que produzca, — sobre determinada radiación des-
de luego, — una diferencia de marcha igual a un cuarto de longitud de onda o sea una diferencia de fase igual a $\pi/2$. Una lámina tal como ésta se designa con el nombre de *lámina cuarto de onda*.

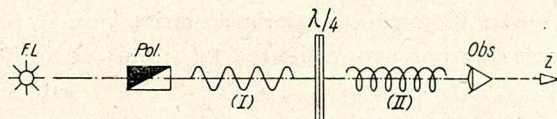


Fig 15

En efecto, (fig. 15), análogamente al artículo anterior tendremos en (II) una radiación que en general tendrá sus componentes dadas por las ecuaciones (b) :

$$w' = a \cos \alpha \sin (\varphi - \Delta \varphi)$$

$$v' = a \sin \alpha \cdot \sin \varphi$$

pero en este caso precisamente, según lo dicho recién, se tendrá:

$$\alpha = 45^\circ, \quad \Delta \varphi = \pi/2$$

de donde las expresiones anteriores quedan :

$$w' = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin (\varphi - \pi/2) \quad \text{y} \quad v' = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \varphi \quad (a)$$

o sea

$$w' = -\frac{a}{\sqrt{2}} \cos \varphi \quad (b)$$

$$v' = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \varphi$$

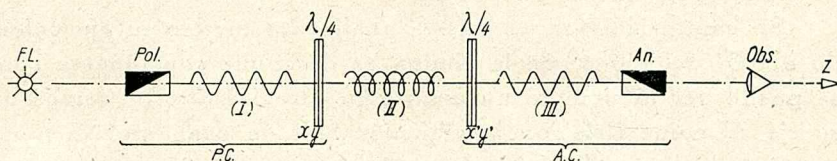


Fig. 16a

componentes que forman, según lo visto en el art. 7-d, una vibración circular inversa como se había dicho. Se trata pues de un *polarizador circular inverso*.

A partir de dos polarizadores circulares se puede formar un *polariscopio circular* de manera semejante al polariscopio plano como se ve en la (fig. 16a) Supondremos primero que los dos sistemas son del mismo nombre, es decir que los ejes x , y y x' e y' tienen la misma posición relativa con referencia a los ejes de los prismas correspondientes tal como se indicó en la (fig. 16b); — en

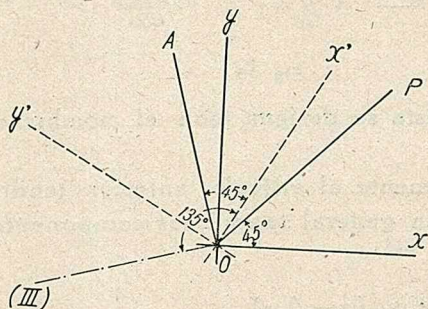


Fig. 16b

este caso serán, concretamente, un polarizador y un analizador circular inverso

La vibración (II) está dada por las ecuaciones (a); al llegar a la 2.^a lámina, por simetría de la vibración circular, podemos admitir que w' y v' están dirigidos según los mismos ejes x' e y' de la segunda lámina $\lambda/4$ de manera que no habrá nueva descomposición de vectores sino que mantendrán un plano de polarización invariable. La única influencia de esta lámina será pues introducir una nueva diferencia de marcha $\lambda/4$ o de fase $\pi/2$, de manera que a la salida, — vibración (III), — las ecuaciones serán :

$$w' = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\varphi - \pi) \quad \text{y} \quad v' = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \varphi \quad (c)$$

lo que representa, de acuerdo con los resultados del art. 7-c, una doble recta en el segundo cuadrante es decir que forma un ángulo de 135° con el eje x' . De la figura se desprende que esta vibración III es normal al eje A del analizador y que por lo tanto no pasará ninguna luz al observador.

Si contrariamente, el prisma analizador tuviera su eje colocado a 135° del eje x' de la lámina es decir que constituyera como se puede ver fácilmente un analizador circular *directo*, vemos que su eje A' coincidiría con la vibración (III), la cual, por lo tanto, pasaría al observador sin alteración ninguna.

En consecuencia puede establecerse finalmente que un analizador circular deja pasar íntegramente a una vibración circular de nombre contrario y elimina, en cambio, a la luz circular del mismo nombre.

15. *Interposición de una lámina cristalina en un polariscopio circular.* Cuando en un polariscopio circular con luz monocromática se introduce una lámina cristalina normalmente a los rayos, en el espacio comprendido entre las dos láminas cuarto de onda, es decir entre el polarizador y el analizador, al llegar a dicha lámina la vibración circular (II), (fig. 17) por las razones de simetría que ya se mencionaron, puede considerarse formada por las componentes

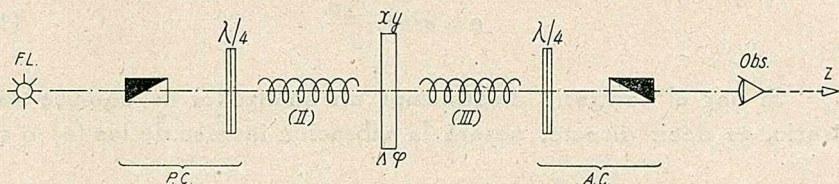


Fig. 17

w^1 y v^1 de la ecuación (a), dirigidas según los ejes x e y de la lámina. Luego pues la vibración (III) a la salida, después de sufrir un nuevo retardo relativo $\Delta\varphi$ introducido por la lámina, de acuerdo con las ecuaciones (a) responderá a las siguientes componentes:

$$w^1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} [\varphi - (\pi/2 + \Delta\varphi)]$$

$$v^1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \varphi.$$

Estas componentes según el artículo 8 dan lugar a una vibración elíptica que puede descomponerse en dos vibraciones circulares de sentido contrario; precisamente para este caso en que las amplitudes de w^1 y v^1 son iguales entre sí, las ecuaciones (9) y (9') de aquel artículo nos dan como valor de las amplitudes A y B de esas dos componentes, ya que la diferencia de fase entre ambas es $(\pi/2 + \Delta\varphi)$:

vibración circular directa:

$$A^2 = \frac{a^2}{4} [1 - \operatorname{sen} (\Delta\varphi + \pi/2)] = \frac{a^2}{4} (1 - \cos \Delta\varphi)$$

vibración circular inversa:

$$B^2 = \frac{a^2}{4} (1 + \cos \Delta\varphi).$$

(a)

Ahora bien, por tratarse de un polariscopio circular inverso se tiene, según lo expuesto en el artículo anterior, que el analiza-

dor no dejará pasar nada más que la luz directa, de manera que la vibración que llega al observador será una vibración rectilínea de amplitud

$$A^2 = \frac{a^2}{4} (1 - \cos \Delta \varphi) = \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta \varphi}{2}$$

o sea que la intensidad relativa será:

$$\varrho = \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta \varphi}{2} \quad (15)$$

Si por el contrario disponemos un analizador de nombre contrario, es decir directo, pasará la vibración inversa de las (a) o sea

$$B^2 = \frac{a^2}{4} (1 + \cos \Delta \varphi) = a^2 \cos^2 \frac{\Delta \varphi}{2}$$

de donde la intensidad relativa será

$$\varrho = \cos^2 \frac{\Delta \varphi}{2} \quad (16)$$

Vemos que en el primer caso a los lugares que no hay lámina ($\Delta \varphi = 0$) corresponde $\varrho = 0$, mientras que a los mismos corresponde en el segundo un valor $\varrho = 1$: cuando se utiliza pues polarizador y analizador de igual nombre se tendrá un campo de observación a *fondo oscuro* y cuando se utilizan polarizador y analizador de nombre contrario será a *fondo claro*

Si la observación se hubiera efectuado en luz blanca las ecuaciones (15) y (16) se transformarán analógicamente a la (4) en la siguientes:

$$\varrho = \frac{\sum a^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta \varphi}{2}}{\sum a^2} \quad (15')$$

y

$$\varrho = \frac{\sum a^2 \cos^2 \frac{\Delta \varphi}{2}}{\sum a^2} \quad (16')$$

es decir que, como ya se vió allí, la luz que llega al observador es una luz en la que cada radiación entra con un valor relativo igual a $\operatorname{sen}^2 \frac{\pi \delta}{\lambda_0}$ o $\cos^2 \frac{\pi \delta}{\lambda_0}$ respectivamente o sea tanto menor cuanto

más se acerque el valor de su longitud de onda λ_0 al de $\left(\frac{\delta}{n}\right)$

o $\left(\frac{\delta}{n + 1/2} \right)$ respectivamente siendo n un entero cualquiera; aquella radiación que cumpla estrictamente la igualdad $\lambda_0 = \frac{\delta}{n}$, — para el polariscopio a fondo oscuro, — o $\lambda_0 = \frac{\delta}{n + 1/2}$, — para el de fondo claro, — desaparecerá totalmente.

III. Doble refracción accidental

CAPÍTULO I. LEYES FUNDAMENTALES

16. *Observaciones de Brewster y Wertheim.* Las primeras leyes referentes a la fotoelasticidad, deducidas por Brewster en 1815 en base a las observaciones realizadas sobre láminas de vidrio, pueden expresarse con la nomenclatura actual en la forma siguiente:

Si se somete una lámina de material transparente y naturalmente isótropo, — como el vidrio, celuloide, bakelita, etc., — a una fuerza colocada en el plano de la lámina y se observa bajo luz polarizada normal a ese mismo plano, la lámina de referencia se transforma, desde el punto de vista óptico, en un cristal uniáxico cuyos ejes de polarización son respectivamente paralelo y normal a la fuerza aplicada. Si la fuerza es de compresión la estructura responde a la de los cristales negativos (espato) y si es de tracción a la de los cristales positivos (cuarzo); por simetría el eje óptico coincide con la dirección de la fuerza.

Luego pues, recordando lo expuesto en los artículos 9 y 10, se obtiene la superficie de onda indicadas en la (fig. 18). Debido a que el rayo luminoso es normal a las caras de la lámina y al eje óptico, los rayos luminosos no sufren ninguna desviación por refracción en las caras, ni interiormente por la birefringencia, de manera que a la salida siguen propagándose según la misma recta, aunque con una diferencia de fase relativa.

También, de acuerdo con el tipo de cristal vemos que:

. En compresión: $v_0 < v_e$; $n_0 > n_e$

. En tracción : $v_0 > v_e$; $n_e > n_0$

Aunque en su tratado de óptica de 1835, Brewster menciona que en una pieza flexada el número de franjas (positivas o nega-

tivas) aumenta cuando aumenta la carga y que las tintas varían con sus distancias al eje neutro, no llegó a establecer relaciones cuantitativas entre los fenómenos ópticos y elásticos, correspondiendo recién a Wertheim en 1854 exponer claramente esas relaciones, así como extender el campo de observaciones a los estados elásticos dobles.

Es así que dicho físico establece las dos leyes siguientes, consideradas como las leyes fundamentales de la fotoelasticidad, leyes

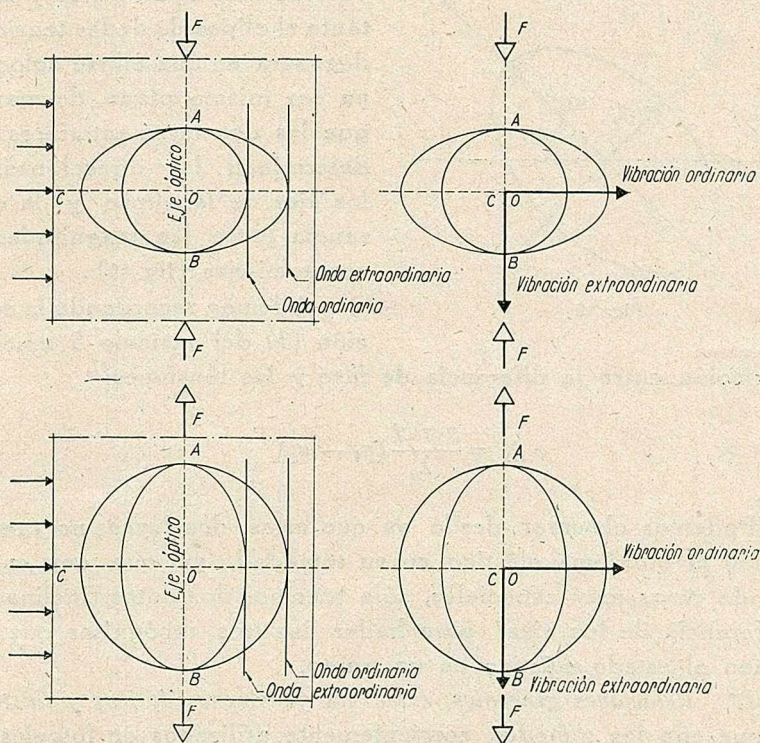


Fig. 18

que definen las relaciones que existen en todos los puntos de un modelo bidimensional, — desde el punto de vista elástico, — entre las tensiones principales que caracterizan su estado elástico y la birefringencia accidental provocada:

a) *Los ejes de polarización coinciden con las direcciones de las tensiones principales.*

b) *La diferencia de marcha relativa δ introducida entre los dos*

rayos polarizados es proporcional al espesor t del modelo y a la diferencia de las tensiones principales σ_1 y σ_2 , o sea que

$$\delta = ct (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (17)$$

siendo c una constante que depende del material del modelo y de la luz utilizada y que es llamada "constante óptica-elástica relativa" ⁽¹⁾.

Ahora bien, en un estado plano de tensiones la tensión principal normal al plano de la lámina se hace igual a cero y por lo tanto el elipsoide de las tensiones degenera en una elipse colocada en ese mismo plano, de manera que las dos leyes anteriores nos determinan las direcciones de los ejes de la elipse y la diferencia entre las magnitudes de sus semi-ejes (fig. 19).

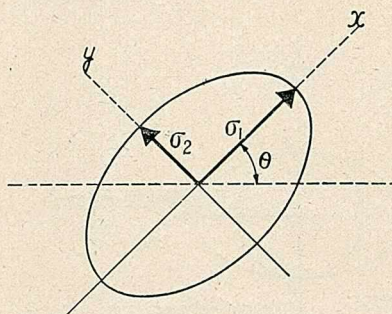


Fig. 19

Además, recordando la ecuación (3) del artículo 5 tenemos

la relación entre la diferencia de fase y las tensiones:

$$\varphi \triangleq \frac{2 \pi ct}{\lambda_0} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (18)$$

Podemos observar desde ya que estas dos leyes no nos resuelven el problema elástico en su totalidad, ya que con excepción de casos muy especiales, sólo tenemos dos datos (inclinación y diferencia de los ejes) para hallar las tres incógnitas que nos definen el estado elástico en un punto.

17. *Relaciones generales entre los fenómenos ópticos y elásticos.*
Aunque con los métodos corrientemente utilizados en fotoelasticidad es suficiente disponer de las expresiones (17) o (18), es conveniente establecer relaciones más generales entre los fenómenos elásticos y sus efectos ópticos con discriminación de las tensiones principales.

(1) Se utilizará la notación σ_1 y σ_2 para designar las tensiones principales con carácter general dejando la notación p y q para designarlas cuando se quiere distinguir las que corresponden a cada familia de isostáticas, e indicando siempre con p la tensión principal algebráicamente mayor.

Supongamos que hacemos incidir sobre el modelo una vibración rectilínea u orientada sobre uno de los ejes principales, σ_1 por ejemplo, para que al cargar el modelo esta u no sufra ninguna descomposición y mantenga su dirección (fig. 20). Cuando se carga el modelo, el camino óptico dentro del mismo ($z = n \cdot l$) sufre un cambio motivado por dos causas, ya que no solamente se produce la variación en el índice de refracción debido a la birefringencia accidental propiamente dicha, sino que también varía el camino geométrico l debido a la variación en el espesor del modelo que produce el estado de tensiones.

Si designamos con n y t el índice de refracción y el espesor del modelo sin carga (fig. 20a) y con $n_1 = n + \Delta n$ y $t_1 = t(1 + \epsilon)$

esos valores una vez producida la carga (fig. 20b), los caminos ópticos respectivos serán

$$z = n \cdot t \quad \text{y} \quad z_1 = n_1 \cdot t_1 = n_1 t (1 + \epsilon)$$

y además la "diferencia de marcha absoluta" correspondiente a la tensión σ_1 , definida como el atraso o adelanto que sufre la vibración orientada según σ_1 cuando se carga el modelo, respecto a la misma vibración antes de cargarlo, representada con δ_1 será:

$$\delta_1 = z_1 - z = t \{ n_1 (1 + \epsilon) - n \} \quad (a)$$

Ahora bien, para una determinada experiencia, en la cual la luz y el material son constantes en todos los puntos del modelo así como en los ejemplares de tarado, tanto la variación de espesor ϵ como el índice de refracción n_1 son funciones exclusivas de σ_1 y σ_2 , de manera que podremos poner brevemente:

$$\delta_1 = t f_1 (\sigma_1, \sigma_2) \quad (b)$$

siendo f_1 una función continua y derivable. Ahora bien, si desarrollamos esta función en serie y nos limitamos a los términos

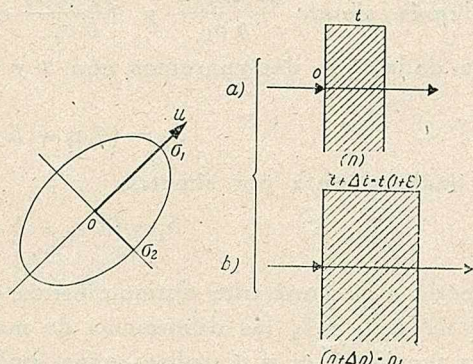


Fig. 2:

de primer grado, admitiendo la validez de esta simplificación basados en los resultados experimentales, se tiene:

$$\frac{\delta_1}{t} = f_1(\sigma_1, \sigma_2) = f_1(0, 0) + \frac{1}{t} \left\{ \frac{\partial f_1(0, 0)}{\partial \sigma_1} \sigma_1 + \frac{\partial f_1(0, 0)}{\partial \sigma_2} \sigma_2 \right\}$$

Pero por la misma definición (a) se tiene que $f_1(0, 0) = 0$ y además siendo $\frac{\partial f_1(0, 0)}{\partial \sigma_1}$ y $\frac{\partial f_1(0, 0)}{\partial \sigma_2}$ constantes para una experiencia dada, que designaremos con a y b podremos poner:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= (a \sigma_1 + b \sigma_2) t \\ \text{y análogamente por simetría} \\ \delta_2 &= (a \sigma_2 + b \sigma_1) t \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

siendo a la constante óptico-elástica absoluta *directa* y b la *transversal* y δ_1 y δ_2 las diferencias de marcha absoluta que producen las tensiones σ_1 y σ_2 sobre rayos polarizados según las direcciones de σ_1 o de σ_2 respectivamente. Estas constantes a y b son pues funciones de la luz y del material del modelo.

Con estas expresiones llegamos de inmediato a la ley de Wertheim si restamos miembro a miembro

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = (a - b) (\sigma_1 - \sigma_2) t$$

o sea que

$$c = a - b \quad (c)$$

CAPITULO II. CURVAS FOTOELÁSTICAS

18. *Fotoelasticímetro.* El fotoelasticímetro, es decir el aparato donde se efectúan las medidas de la doble refracción accidental, no es en principio otra cosa que un polariscopio de tipo especial. En términos generales se compone de una fuente luminosa que pueda emitir tanto luz blanca como monocromática, un grupo polarizador y otro analizador planos o circulares, un sistema óptico que produzca un haz de rayos paralelos en un campo

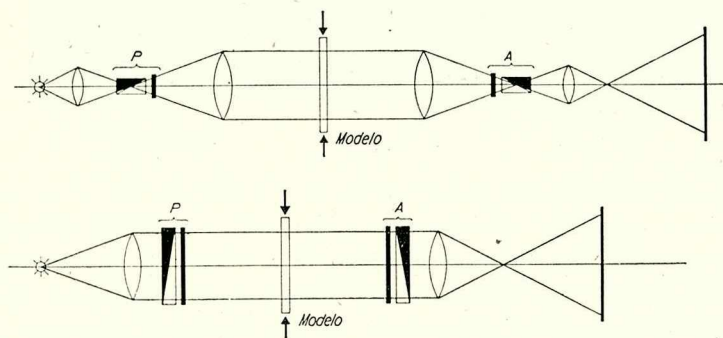


Fig. 21

comprendido entre los grupos polarizador-analizador destinado a la colocación,— normalmente al haz,— del modelo a estudio y finalmente una pantalla para observación visual o fotografía.

En la (fig. 21a) se indica el esquema correspondiente cuando se utilizan prismas de Nicol y en la (fig. 21b) cuando se utilizan sistemas polarizantes de gran campo, como las láminas de "Polaroid"; tanto el grupo polarizador como el analizador se componen, naturalmente, del dispositivo polarizante y de una lámina cuarto de onda escamoteable, que permita utilizar luz polarizada plana o circular a voluntad.

Además esos grupos deben estar colocados en monturas giratorias, — alrededor del eje longitudinal del fotoelasticímetro, — que permitan colocar los ejes de polarización en un azimut cualquiera del plano del modelo. En la (fig. 22) se ven los fotoelasticímetros que posee el Instituto: a la izquierda el que utiliza Polaroid, sin conexión rígida entre los dos grupos, — y a la derecha otro con prisma de Nicol montado sobre un banco óptico con árbol de conexión central.

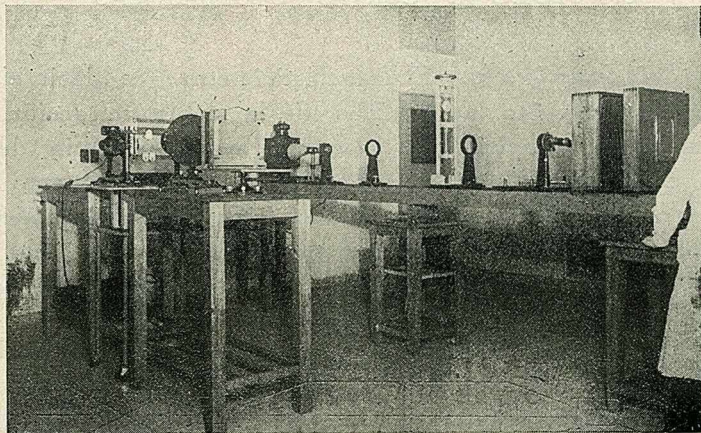


Fig. 22

19. *Franjas en luz monocromática.* Conocido ya el efecto de una lámina cristalina sobre la luz polarizada y también la relación que existe entre las constantes ópticas y elásticas se puede empezar a estudiar directamente los fenómenos producidos por las tensiones existentes en el modelo en los diversos tipos de polariscopios analizados, transformados ahora en fotoelasticímetros.

Supongamos primero el modelo colocado en un *fotoelasticímetro circular con luz monocromática*. Según la ecuación (15) la intensidad relativa final está dada por:

$$Q = \sin^2 \Delta \varphi / 2 \quad \text{con} \quad \Delta \varphi = \frac{2 \pi \delta}{\lambda_0} \quad (a)$$

cuando se utiliza a *fondo oscuro*.

Por otra parte, según la ley de Wertheim:

$$\delta = ct (\sigma_1 - \sigma_2),$$

de donde, combinando ambas ecuaciones tenemos directamente la influencia de las tensiones:

$$\varrho = \text{sen}^2 \frac{\pi ct}{\lambda_0} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{a}')$$

Se ve pues que se producirá oscuridad en aquellos puntos del modelo en los cuales $(\sigma_1 - \sigma_2)$ tenga un valor tal que cumpla la condición:

$$\frac{\pi ct}{\lambda_0} (\sigma_1 - \sigma_2) = n\pi$$

o sea

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = n \frac{\lambda_0}{ct} \quad (n = 0, 1, 2 \dots) \quad (20)$$

o también, como λ_0 , c y t tienen un valor único para cada experiencia podremos poner $\frac{\lambda_0}{ct} = K$, siendo t una constante para cada experiencia y por lo tanto quedará la condición:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = nK \quad (n = 0, 1, 2 \dots) \quad (21)$$

Es así que, observando un modelo cargado, aparecen una serie de bandas o *franj*as oscuras (fig. 23) que son el lugar de los puntos para los cuales se cumple la condición (21) para un valor determinado de n o sea el lugar de los puntos de $(\sigma_1 - \sigma_2) = \text{constante}$.

Estas *franj*as son precisamente un caso particular de las *isocromáticas*, cuyo nombre se adapta mejor a la observación en luz blanca como se verá a continuación.

El valor particular de n correspondiente a cada curva es la *cota* de la franja o isocromática y por lo tanto la diferencia de tensiones $(\sigma_1 - \sigma_2)$ en un punto de una isocromática será proporcional a la cota de ésta; además la cota n se expresa en *longitudes de onda* ya que de las ecuaciones anteriores se deduce que

$$\delta = n\lambda_0$$

o sea que n es el número de longitudes de onda a que alcanza la birefringencia accidental que existe en un punto de la isocromática. Los números indicados en la fotografía sobre cada isocromática son precisamente los valores de n correspondientes.

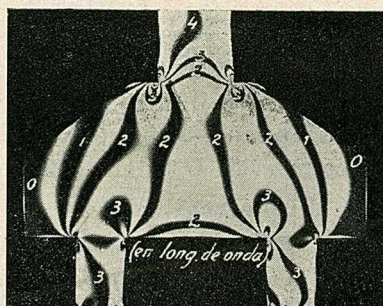


Fig. 23

Si en cambio de considerar el conjunto del modelo para una carga final dada, tomamos un punto determinado de aquél y lo observamos a lo largo del proceso de carga del modelo, se tendrá lo siguiente:

Cuando el modelo está descargado se tiene $\delta = 0$ en todos los puntos y habrá oscuridad completa, teóricamente por lo menos, (fig. 24). Si se empieza a aplicar la carga, el argumento $\frac{\pi ct}{\lambda_0} (\sigma_1 - \sigma_2)$

que figura en la ecuación (a') y que era nulo a modelo descargado, comienza a aumentar y por lo tanto a producir una iluminación relativa Q que varía como $\sin^2 \pi \delta / \lambda_0$, llegando al máximo para $(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2} K$ (fig. 24) y anulándose cuando $\delta = \lambda_0$ o sea $(\sigma_1 - \sigma_2) = K$ y así sucesivamente.

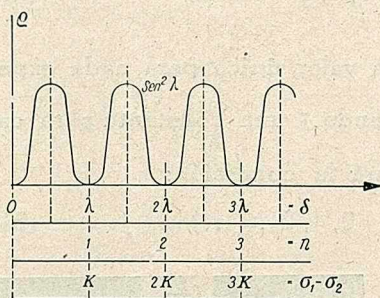


Fig. 24

Vemos pues entonces, que la cota n es también el número de veces que se anula la luz en, — o sea el número de isocromáticas que pasan por, — el punto dado, cuando se aumenta gradualmente la carga desde O al valor final (fig. 25).

Finalmente, vemos que K es la diferencia de tensiones correspondiente a la isocromática de cota 1 o sea la diferencia de tensiones que, — con determinado material y luz, — produce un retardo igual a una longitud de onda y se expresará por lo tanto en $\frac{\text{Kg/cm}^2}{\text{lon de onda}}$.

20. *Luz blanca: Isocromáticas.* Cuando, por el contrario, se utiliza el *fotoelasticímetro circular con luz blanca* el fenómeno se complica y se hace menos preciso que en el caso anterior puesto que en la luz blanca existen una infinita variedad de radiaciones con diferente longitud de onda. Los lugares de puntos correspondientes a un determinado valor de $(\sigma_1 - \sigma_2)$ tendrán pues un color constante que ha resultado de la eliminación total o parcial de las diversas radiaciones: los puntos oscuros corresponderán aquí únicamente a los puntos de $(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$ es decir a los *puntos neutros* o *isótropos*. En todo lugar que no sean estos habrá luz coloreada.

Para ver la relación entre las tensiones y los colores produ-

Valores de la carga P en kgs.

0

16.65

33.30

49.95

66.60

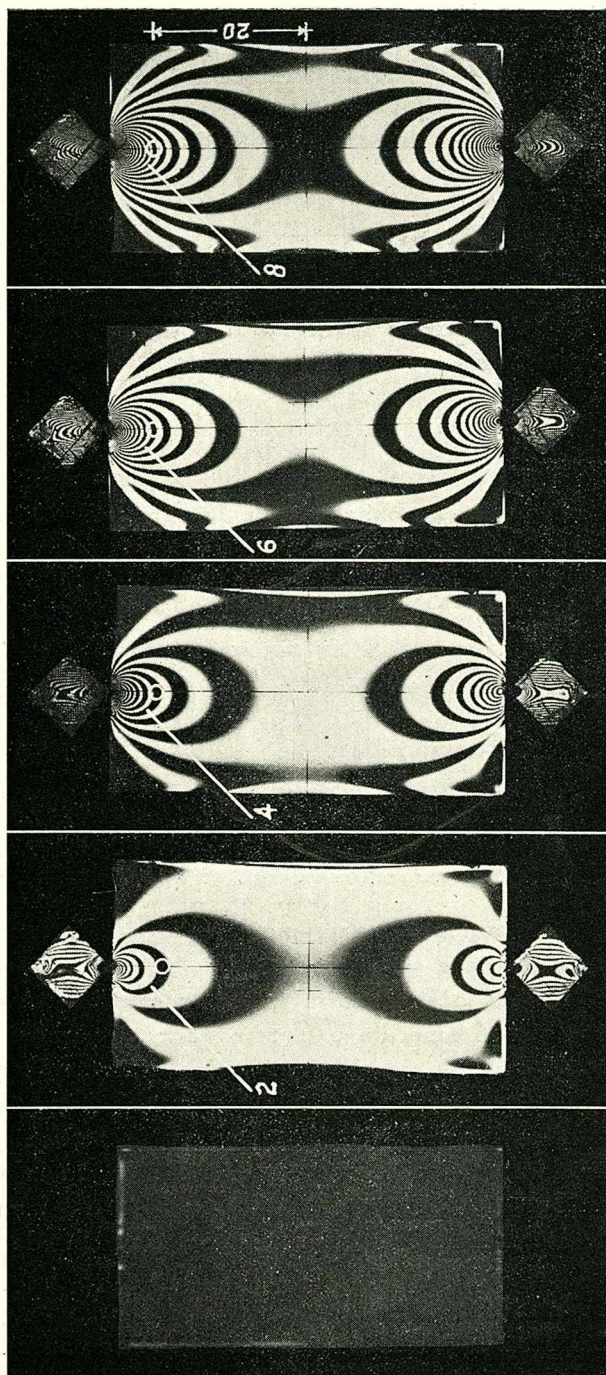


Fig. 25

cidos, lo más conveniente es estudiar un punto dado bajo cargas crecientes. Con el polariscopio normal a fondo oscuro, la intensidad observada tiene la siguiente expresión, obtenida combinando la ecuación (15') y la ley de Wertheim :

$$Q = \frac{\sum a^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi ct}{\lambda_0} (\sigma_1 - \sigma_2)}{\sum a^2} \quad (b)$$

como efecto general, y además la extinción de *cada una* de las radiaciones se regirá por la misma ecuación (20) del artículo anterior derivada para luz monocromática :

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = n \frac{\lambda_0}{ct} \quad (n = 0, 1, 2 \dots) \quad (c)$$

Por otra parte, el espectro visible lo podemos esquematizar tomando los valores aproximados de los grupos de radiaciones correspondientes a los colores principales, en la siguiente forma :

violeta	—	$\lambda_0 = 4000 \times 10^{-10}$ mts.
azul	—	4500
verde	—	5400
amarillo del sodio		5900
naranja	—	6500
rojo extremo		7700

Vemos pues según la ecuación (b) que para el modelo descargado se tiene $Q = 0$ o sea la oscuridad completa; si comenzamos a aumentar ligeramente la carga, el argumento $\frac{\pi ct}{\lambda_0} (\sigma_1 - \sigma_2)$ toma valores diferentes de cero para todas las radiaciones pero, desde luego, su valor será mayor para las radiaciones de menor longitud de onda o sea que el violeta y el azul tomarán mayor incremento que el amarillo o el rojo aunque rápidamente el mayor brillo del amarillo equilibra el conjunto para volver a un color blancuzco. Pero aumentando más las cargas llega un momento en que la birefringencia producida alcanza a producir efectos de interferencia en alguna de las radiaciones: según la ecuación (c) se ve que la primera en desaparecer será la de menor longitud de onda y luego irán desapareciendo en el orden de las longitudes crecientes.

De acuerdo con la tabla precedente la primera radiación en desaparecer será el violeta, apareciendo pues como color complementario el naranja; luego desaparecerá el azul y el verde, dando

lugar a la producción de un rojo intenso o *rojo de primer orden*. Luego cuando $(\sigma_1 - \sigma_2)$ es suficiente para cumplir la igualdad (c) para $\lambda = 5900$ u.A. correspondiente al amarillo del sodio, — que es la radiación más brillante del espectro, — aparece un color complementario muy característico y de mucha importancia que es un color púrpura profundo o morado oscuro, llamado *tinta de pasaje*, que forma una línea muy bien delineada y nítida.

Siguiendo el aumento de $(\sigma_1 - \sigma_2)$ desaparecen el naranja y el rojo provocando la aparición del azul profundo o *azul de primer orden* y luego un tinte verdoso y finalmente vuelve un blanco lechoso cuando no hay extinción total de ninguna radiación.

Sin embargo siguiendo adelante llega en seguida a extinguirse nuevamente el violeta ($\delta = 2 \times 4000 = 8000$ uA) y aún el rojo extremo no ha sido totalmente restituído ($\lambda_0 = 7700$ uA) dando origen al primer color de la segunda serie o sea un rosado llamado *rojo de segundo orden*, el cual deja su lugar a una nueva tinta de pasaje cuando $\delta = 2 \times \text{long. de onda del amarillo} = 11800$ y luego a un verde azulado o *azul de segundo orden* cuando $\delta \cong 13000$ que equivale a la segunda extinción del naranja y la tercera del azul.

Esta sucesión de los tres colores, — rosado, tinta de pasaje y verde, — separados por un blanco amarillento, es un ciclo que se repite varias veces al seguir el aumento de la carga, hasta que después de 5 o 6 ciclos la superposición de las diversas radiaciones es tan grande que se tiene prácticamente una luz blancuzca únicamente. Resumiendo podemos indicar el cuadro siguiente:

δ	Radiación extinguida	Color observado	
0	ninguna	negro	} 1 ^{er.} orden
4000	violeta	naranja	
	azul	rojo	
	verde	tinta de pasaje	
5900	amarillo	azul	
	naranja		} 2 ^o orden
7700	rojo		
8000	2° violeta + 1 ^{er.} rojo (parcial)	rojo	
11800	2° amarillo	tinta de pasaje	
13000	2° naranja + 3 ^{er.} azul	verde	
	blanco lechoso.	etc.	

La utilización de luz blanca actualmente se limita para observaciones de orden cualitativo ya que la luz monocromática y los materiales con mayor coeficiente óptico-elástico dan una precisión muchísimo mayor. Su interés sin embargo es muy grande ya que permite individualizar los puntos isótropos ($\sigma_1 - \sigma_2 = 0$) por ser los únicos puntos negros y además indica el sentido de crecimiento de $|\sigma_1 - \sigma_2|$ ya que vemos de la tabla anterior que este se produce en el sentido de pasaje del rojo al verde a través de la tinta

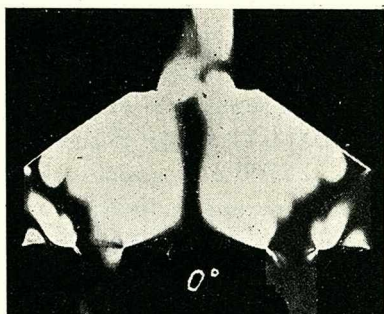


Fig. 26

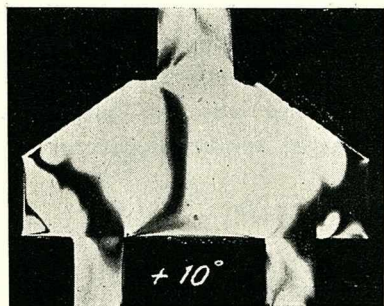


Fig. 27

de pasaje. Ninguno de estos dos resultados puede obtenerse en luz monocromática.

21. *Isoclinas.* Si en cambio de utilizar un fotoelasticímetro circular se coloca el modelo en un fotoelasticímetro plano, aparecerá, además del efecto cuantitativo estudiado recién, el efecto direccional de las tensiones principales regido por la primera ley de Wertheim. Se definirá al fotoelasticímetro plano como un polariscopio plano con prismas cruzados ($\theta = 90^\circ$); en esas condiciones la ecuación (13) queda:

$$Q = \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \Delta \varphi / 2 \quad (22)$$

en donde vemos que el segundo factor es el mismo de la ecuación (a) del artículo 19, relativa al fotoelasticímetro circular, de donde se deduce que el efecto de $(\sigma_1 - \sigma_2)$ para todos los puntos en que el

primer factor no es nulo, es el mismo que en aquel o sea que aquí aparecerán también las isocromáticas.

Ahora bien, dejando de lado este efecto ya estudiado, se ve que la intensidad relativa Q es también función de la posición respectiva de los ejes del fotoelasticímetro y de las tensiones principales y que esa iluminación será máxima para $\alpha = \pm 45^\circ$, — e igual a la del fotoelasticímetro circular, — y se anulará para $\alpha = 0$, o sea que habrá oscuridad completa allí donde los ejes principa-

es de tensiones coincidan con los ejes del fotoelasticímetro.

Luego pues si se observa un modelo en estas condiciones se verá surcado (fig. 26) por una o varias bandas oscuras que son el lugar de los puntos en los cuales las tensiones principales son paralelas a los ejes ópticos del fotoelasticímetro y que se designan con el nombre de *isoclinas* o bandas de igual inclinación. En esta forma, haciendo tomar a los ejes del fotoelasticímetro una serie de posiciones comprendidas entre 0° y 90° se obtendrá la posición de las tensiones principales en todos los puntos del modelo (figs. 26 a 29). Naturalmente en cada observación o fotografía todas las bandas tienen la misma cota θ , que será el ángulo formado por uno de los ejes ópticos con un eje de referencia generalmente vertical.

La observación de las isoclinas se hace más favorablemente en luz blanca,—forma en que han sido tomadas las fotografías anteriores,—puesto que se destacan en forma más clara sobre un fondo coloreado en el cual, salvo las raras excepciones de los puntos neutros, son las únicas bandas oscuras, que en luz monocromática para la cual todas las isocromáticas son también oscuras, como se puede comprobar comparando aquellas con la (fig. 30), obtenida en luz monocromática.

Ya sea en luz blanca o monocromática, las isocromáticas significan los lugares de igual diferencia de tensiones, de manera que

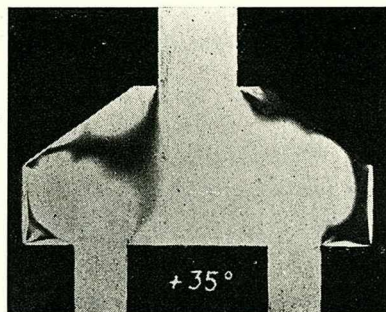


Fig. 28

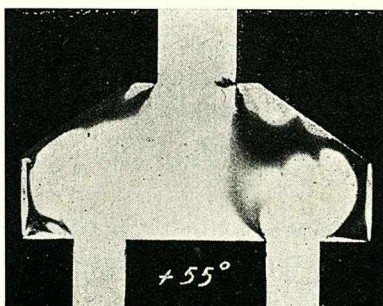


Fig. 29



Fig. 30

si designamos con Δ esta diferencia característica de cada curva, o parámetro, y puesto que las tensiones principales están dadas por

$$\sigma_{1,2} = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

tenemos como ecuación de las isocromáticas :

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = \Delta^2 \quad (23)$$

Por otra parte para los puntos singulares con $\sigma_1 - \sigma_2 = \Delta = 0$, se tendrá como ecuación

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = 0 \quad (24)$$

ecuación verificada solamente cuando se tiene simultáneamente

$$(\sigma_x - \sigma_y) = 0 \quad \tau = 0 \quad (24')$$

es decir que estos puntos serán la intersección de esos dos lugares geométricos o sea que, en general, no formarán líneas sino que constituirán puntos aislados.

En cuanto a las isoclinas su ecuación será :

$$2\tau - (\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{tg} 2\theta = 0 \quad (25)$$

y para los puntos neutros, según (24') se obtiene una expresión indeterminada, o sea que por allí pasan todas las isoclinas, cosa completamente lógica ya que siendo $\sigma_1 = \sigma_2$ la elipse de tensiones se reduce a una circunferencia.

CAPÍTULO III. MÉTODO DE ESTUDIO

22. *Método de la retícula.* El objeto del estudio en el fotoelastómetro es en definitiva poder establecer para todos los puntos del modelo los dos datos fundamentales, — inclinación y diferencia de tensiones principales, — para proceder, generalmente, a su separación posterior con vistas a obtener el campo de tensiones completo, o sea para resolver el problema fotoelástico.

El procedimiento práctico a utilizar para ello depende fundamentalmente del material disponible para el modelo y de su forma y cargas a aplicarle, puesto que de todo ello dependerá la intensidad y nitidez del efecto óptico a medir.

Cuando se dispone de material poco sensible, como por ejemplo el celuloide, o bien se trata de modelos macizos con producción de tensiones pequeñas, es necesario apreciar la birefringencia en fracciones de longitud de onda para obtener una exactitud suficiente, de manera que no es posible basarse únicamente en las isocromáticas como se hace en el método de las franjas. Es así, entonces, que debe recurrirse a la medida de la birefringencia punto por punto por medio de compensadores o con el método goniométrico.

En lo que se refiere a las isoclinas éstas se pueden obtener generalmente con suficiente nitidez directamente por fotografía como en el método de las franjas, ya que la birefringencia necesaria para destacarlas lo suficiente es relativamente pequeña, pero aún así a veces conviene complementarla por observación directa, utilizando la retícula para replantear los puntos de cruce.

Para la medida de la birefringencia o diferencia de marcha en puntos determinados la forma más conveniente es dibujar en el mismo modelo con una punta muy afilada una retícula de re-

ferencia (fig. 31 a y 31 b) ya que la utilización de mascarillas con pequeños orificios u otras formas análogas tienen el inconveniente de la deformación del modelo, a veces bastante apreciable. Una vez fijados los puntos se debe proceder pues a la medida de δ ⁽¹⁾

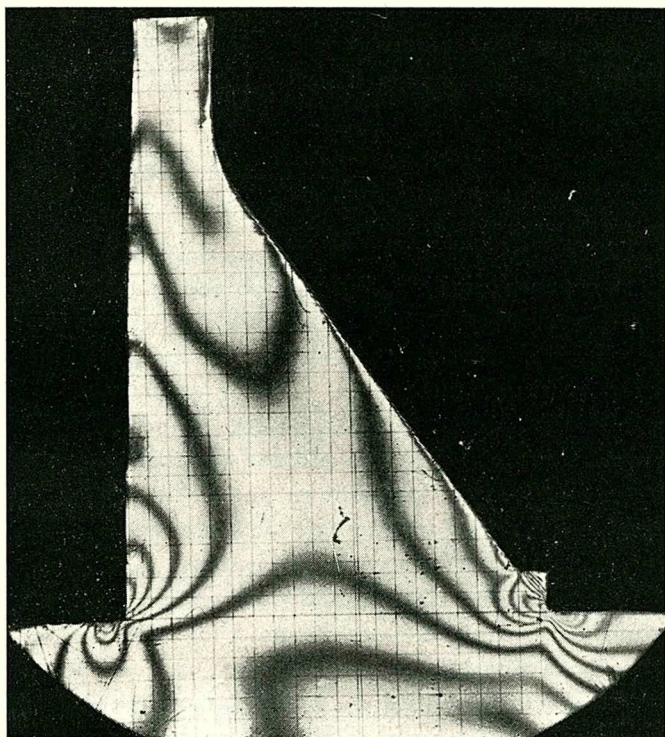


Fig. 31a

23. *Compensadores.* El método más simple y más común es el de medir la diferencia de marcha δ producida en cada punto por compensación, o sea disponer a continuación del modelo un dispositivo regulable con el cual se pueda producir una diferencia de marcha igual y de signo contrario a la del modelo, para anular todo efecto óptico sobre el observador.

- (1) En la figura 31b se puede observar el dispositivo utilizado en el modelo de la figura 31a para realizar una carga repartida triangular en forma aproximada, así como la base solidaria del muro en el mismo material de este para cumplir mejor con las condiciones de similitud en el contorno.

Para obtener esa birefringencia regulable y medible se pueden utilizar compensadores ópticos o elásticos indiferentemente.

Entre los compensadores ópticos se tiene por ejemplo el *compensador Soleil-Babinet* que consiste (fig. 32) en dos láminas de cuarzo, una de espesor variable y otra de espesor fijo, colocadas

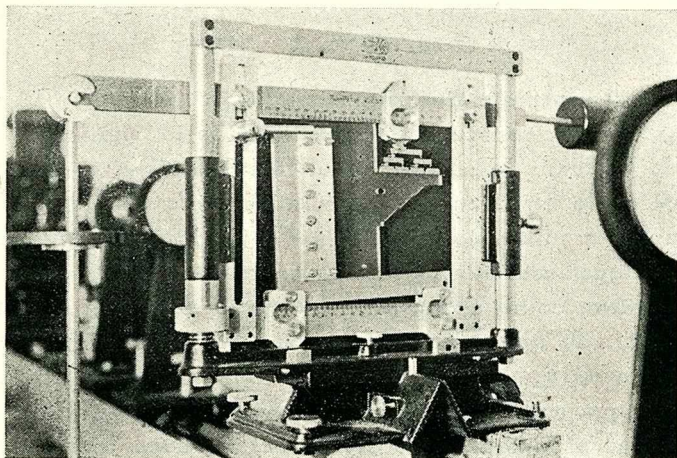


Fig. 31b

a continuación una de otra en el paso del rayo luminoso y dirigidas en forma tal que tengan sus ejes ópticos respectivos colocados a 90° uno del otro, por ejemplo el eje de la lámina *A* según el eje *y* y el de la *B* según el eje *x*, de manera que a una vibración polarizada según uno

cualquiera de los ejes *x* o *y* que atravesase los dos cristales corresponderán en uno y otro, índices de refracción diferentes. Si por ejemplo es una vibración polarizada según el eje *y* tenemos

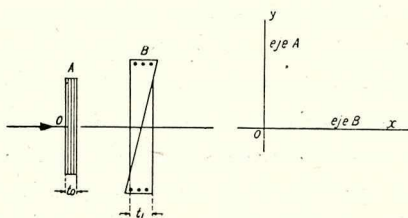


Fig. 32

de la (fig. 32) y de lo expuesto en el artículo 16 que le corresponderá en el cristal *A* una onda ordinaria y en el *B* una extraordinaria, por cuya razón el camino óptico dentro de las dos láminas será:

$$l' = n_0 t_0 + n_e t_1$$

y si la vibración incidente estuviera polarizada según el eje x sería análogamente

$$l'' = n_e t_0 + n_o t_1$$

Luego pues si, en cambio, incide una vibración elíptica o circular, el pasaje por el compensador introducirá una diferencia de marcha $\delta = l'' - l'$ o sea

$$\delta = (n_e - n_o) (t_0 - t_1) = r (t_0 - t_1) \quad (a)$$

siendo r una constante del compensador.

Luego pues el proceso de la medida es el siguiente: se determina la posición de los ejes, en el fotoelastómetro plano y luego transformado en circular se introduce el compensador a continuación del modelo con sus ejes (A, B) coincidiendo con los (σ_1, σ_2); si aquel está en su posición neutra se tiene $t_0 = t_1$ y el modelo se observa como antes, pero haciendo desplazar las cuñas se va introduciendo una nueva diferencia de marcha entre las vibraciones según σ_1, σ_2 , que se busca de signo contrario a la del modelo, hasta que se anule la birefringencia accidental (obteniendo en luz blanca el retorno a la oscuridad) en cuyo momento:

$$ct (\sigma_1 - \sigma_2) + r (t_0 - t_1) = 0$$

o sea

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = - \frac{r (t_0 - t_1)}{ct} \quad (b)$$

ecuación en la cual todas son magnitudes conocidas o determinables.

El *compensador elástico*, introducido por Coker, es de manejo aún más simple y directo y consiste en un ejemplar de tracción pura fabricado con el mismo material del modelo (cortado de la misma hoja e inmediato a aquel) montado con su dinamómetro en una montura giratoria que se coloca también a continuación del modelo y se orienta con el eje de la barra,— o sea la dirección de su única tensión principal σ_0 , — paralelamente a la *menor* de las tensiones σ_1 o σ_2 .

Aplicando luego una tensión creciente al compensador, cuando σ_0 llegue a ser igual a la diferencia entre σ_1 y σ_2 se tendrá restituida la oscuridad en el punto observado puesto que el efecto total será

$$ct [\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_0] = 0 \quad (c)$$

si $\sigma_0 = \sigma_1 - \sigma_2$, ya que c y t son los mismos en el modelo $\bar{y}$ el compensador. Desde luego que la determinación de la dirección de la menor tensión principal se hace probando con el mismo compensador y observando el desplazamiento de las isocromáticas.

24. *Medida goniométrica.* Aunque de mucho menor utilización que el anterior nos referiremos brevemente a este método por ser utilizado en nuestro laboratorio y por ser de aplicación más sencilla que cualquiera.

Si se coloca el fotoelasticímetro *circular* con los ejes de los prismas paralelos a las tensiones principales, — o sea en la posición de fotoelasticímetro plano cuando pasa la isoclina por el punto considerado, — y desplazamos el *prisma analizador solamente* un ángulo Θ con respecto a su posición normal, la iluminación relativa ϱ estará dada por la expresión

$$\varrho = \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} - \Theta \right)$$

como se demuestra fácilmente aunque con desarrollos sumamente fastidiosos. Luego pues, si colocado el fotoelasticímetro en la forma descrita, giramos el prisma analizador hasta que se obtenga oscuridad en el punto considerado tendremos que el ángulo Θ de giro y la birefringencia $\Delta\varphi$ cumplirán la condición

$$\Delta\varphi/2 - \Theta = n\pi \quad \text{o sea} \quad \Delta\varphi = 2n\pi + 2\Theta$$

de donde

$$\delta = \left(n + \frac{\Theta}{\pi} \right) \lambda_0 \quad \text{con} \quad n = 0, 1, \dots \quad (d)$$

Es decir que si el giro Θ se refiere a un círculo graduado en que se toma a 180° como unidad y se divide por ejemplo en 100 partes, cada una de éstas nos dará en $\frac{1}{100}$ de longitud de onda la fracción de birefringencia a agregar a la cota de isocromática cercana al punto, cota que corresponde precisamente al valor n de la ecuación anterior.

Con los valores de $(\sigma_1 - \sigma_2)$ conocidos en los puntos de la retícula podemos trazar las isocromáticas de cota fraccionaria por interpolación entre aquellos valores o bien, si interesa posteriormente a los efectos de la separación de tensiones por medio de integración gráfica a lo largo de isostáticas, limitarse a hallar los valores correspondientes a puntos de esa isostática. Para el tra-

zado de éstas conviene tener la red de isoclinas obtenida directamente por fotografía o trazada por interpolación entre los puntos de la retícula.

25. *Método de las franjas.* Cuando, por el contrario, puede obtenerse una red de isocromáticas lo suficientemente cerrada como para que la interpolación para puntos intermedios sea suficientemente aproximada, no es entonces necesario hacer la medida de la birefringencia punto por punto y el proceso se hace más simple y rápido. Este proceso pudo ser llevado a la práctica por la utilización de la bakelita y análogos con un coeficiente óptico-elástico mucho mayor que el celuloide y también gracias a dispo-

sitivos (polarizadores y láminas cuarto de onda) de alta calidad polarizante que permitan la observación clara de franjas con cota superior a 15 o 20.

Cuando se utiliza este método de estudio las isoclinas también se determinan por fotografía o dibujo directo, aunque no habría inconveniente en utilizar si es necesario, la verifi-

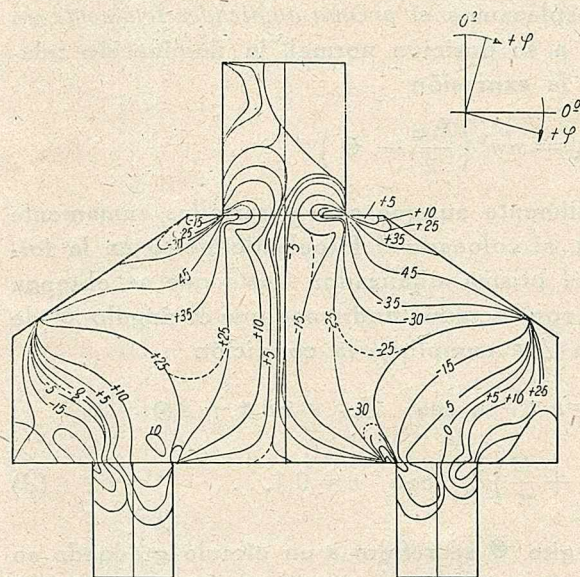


Fig. 33

cación por puntos: se toman una serie de fotografías para cotas variables tales como las reproducidas en las figuras 26 a 29 y después de indicar en las mismas ampliaciones los ejes de las bandas se superponen en un diagrama que nos dá el campo total de isoclinas (fig. 33).

En lo que se refiere a las isocromáticas, para aumentar la exactitud de los trazados se puede proceder de dos maneras diferentes:

a) Obtener isocromáticas para la carga de estudio y además para cargas menores elegidas en forma tal que estas nuevas isocromáticas dividan las diferencias de cota de las curvas básicas

en partes iguales. Para ello si P es la carga básica o de cálculo y ΔP es la carga correspondiente al aumento de la cota en la unidad en el punto considerado, obtendremos los resultados deseados si estudiamos las isocromáticas de $(P - \Delta P)$, $(P - 2\Delta P)$, ... $(P - r \cdot \Delta P)$, si r es el número de curvas intermedias. Este sistema puede tener el inconveniente de que las deformaciones variables del modelo hacen difícil luego la superposición

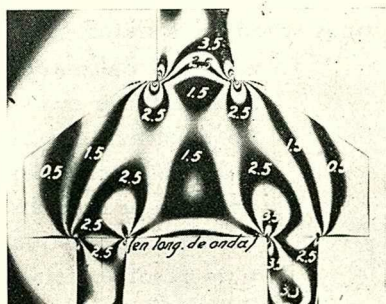


Fig. 34

ciendo las isocromáticas a fondo oscuro y a fondo claro. En efecto vimos en el art 15 que trabajando a fondo claro, o sea con polarizador y analizador de nombre contrario, hay extinción para el caso que se cumpla $\delta = \lambda_0 (n + 1/2)$ o sea para

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{\lambda_0}{ct} (n + 1/2) = K \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (26)$$

es decir que las cotas de las isocromáticas así obtenidas serán las intermedias de las de fondo oscuro (0,5, 1,5, 2,5, etc.) como se vé en la (fig. 34) y en las dos fotografías de la (fig. 35) correspondientes a un rodillo de dilatación en hormigón armado.

En definitiva se superponen los diversos sistemas de isocromáticas,—en el caso general los dos sistemas a fondo claro

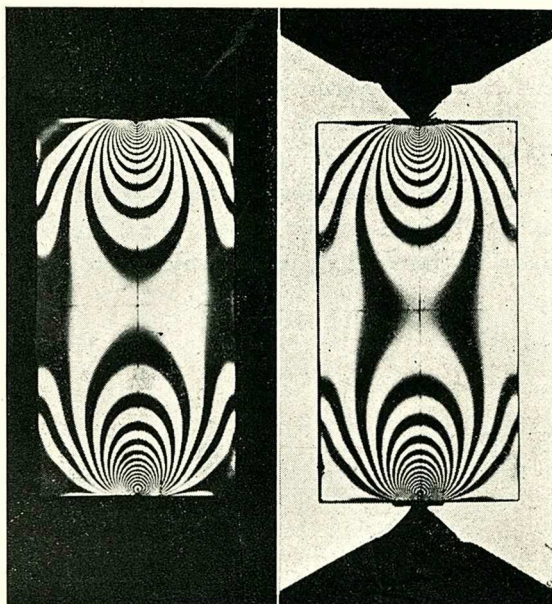


Fig. 35

y oscuro tal como los de figuras 23 y 34, — para obtener el diagrama final de isocromáticas reproducido en la (fig.36), en el cual las cotas son indicadas en longitudes de onda.

Las figuras 33 y 36 nos resumen pues todos los datos foto-

elásticos del modelo en estudio cuando se utiliza el método de las franjas: de ellos se sacarán los datos necesarios para resolver totalmente el problema de la determinación de tensiones en todos los puntos del cuerpo.

El acotado de las isocromáticas se hace con la ayuda de la observación en luz blanca, ya que en esta forma

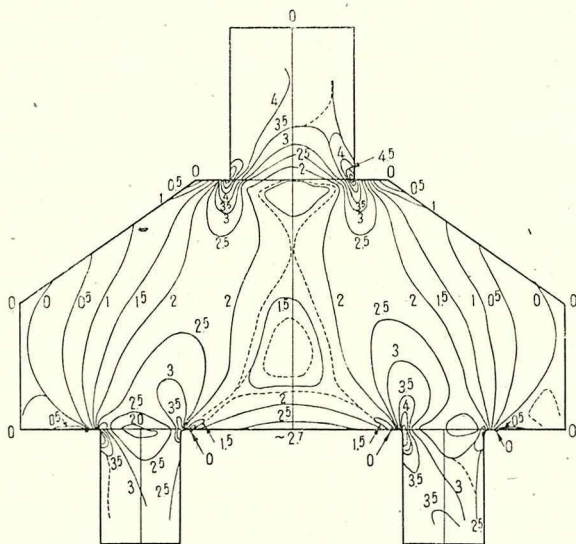


Fig 36

se pueden individualizar las bandas de orden cero por ser las únicas bandas oscuras y además el sentido de crecimiento mediante la disposición de los colores rojo y verde con respecto a la tinta de pasaje como ya se dijo. Por otra parte se pueden fijar como comprobación la cota de algunos puntos aislados contando el número de bandas que pasan, — en luz monocromática, — cuando se lleva la carga de cero al valor final.

CAPÍTULO IV. CARACTERÍSTICAS DE LOS MATERIALES

26. *Determinación de las constantes.* La relación entre el estado elástico y el efecto óptico correlativo depende como se ha visto, del material del modelo y de la luz utilizada, a través de la constante óptico-elástica c , que es la constante intrínseca del material al que permite definirlo científicamente y se mide tomando como unidad al *Brewster* que es igual a 10^{-13} cm²/dina o sea que trabajando las magnitudes observables en las unidades corrientes se tendrá:

$$c_{Br} = \frac{1,02 \delta_{U.A.}}{(\sigma_1 - \sigma_2) \text{ kg/cm}^2 \times t_{mm}} \quad (27)$$

si indicamos con $\delta_{U.A.}$ a la diferencia de marcha expresada en *Augströms* (10^{-10} mts). Esta constante nos permite comparar la sensibilidad óptica de los diversos materiales.

Sin embargo, en la utilización técnica de la fotoelasticidad, o mejor expresado, en la resolución práctica de determinado estudio, más conveniente que la constante c es la constante K definida en el artículo 19, puesto que en ella se engloba no solamente el material sino que también la longitud de onda de la luz y el espesor del modelo $\left(K = \frac{\lambda_0}{ct}\right)$, permitiéndonos traducir directamente el retraso medido en longitudes de onda $\delta\lambda$ a tensiones, de acuerdo con

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = K n$$

o sea

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = K \cdot \delta\lambda \quad (a)$$

y por lo tanto K se expresará en kg/cm² por longitud de onda.

La determinación de la constante, de cualquiera de ellas, debe hacerse sometiendo un ejemplar del material considerado a un estado elástico calculable exactamente y lo más simple posible y midiéndole la birefringencia producida. Los tipos de utilización

más corriente han sido para los materiales poco sensibles un ejemplar de compresión pura (vidrio) o de tracción pura (celuloid) y para materiales de mayor sensibilidad como la bakelita, marblette, etc. un ejemplar en flexión pura.

En el primer caso debe irse naturalmente a la observación visual bajo cargas variables y construcción del diagrama (tensiones-diferencia de marcha), mientras que en el segundo la fotografía de un solo estado de carga permite la medida de la constante (fig. 37).

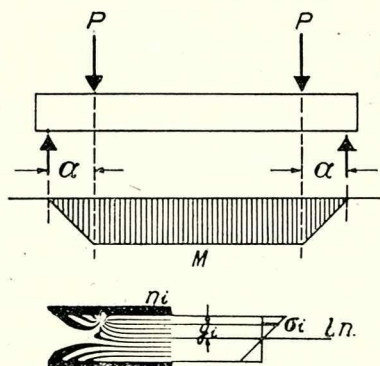


Fig. 37

La figura representa un pequeño prisma de bakelita sometido a flexión pura en su parte central; en la parte inferior a la izquierda de la figura se reproduce la fotografía de las isocromáticas correspondientes y a la derecha el diagrama

teórico de la distribución de tensiones, entre los cuales puede advertirse la perfecta coincidencia.

De acuerdo con dicha notación, si n_i es el orden de la franja considerada, se tiene

$$\sigma_i = \frac{M}{I} \cdot y_i \quad \text{y de la ecuación (21) también}$$

$$\sigma_i = K n_i$$

de donde:

$$K = \frac{M}{I} \cdot \frac{y_i}{n_i} \quad (b)$$

que es la expresión utilizada para hallar K .

27. *Valores relativos. Creep.* La elección del material para modelos fotoelásticos debe hacerse teniendo en cuenta una serie de factores, puesto que aunque como ya se dijo es deseable que tenga un coeficiente óptico-elástico lo mayor posible para permitir la utilización del método de las franjas y para aumentar la exactitud de los resultados, por otra parte esa condición va muchas veces acompañada de birefringencia inicial muy elevada y de mayor "creep" óptico. Además hay otras propiedades de mucho interés práctico como la facilidad de pulido y corte del mo-

delo, rigidez, etc., que pueden influir la elección en forma categórica pero cuyo estudio no corresponde aquí y solamente diremos que actualmente en este laboratorio se trabaja casi exclusivamente con la Bakelita BT 61-893 de fabricación norteamericana, que es el material generalmente utilizado en las experiencias fotelásticas de todo el mundo.

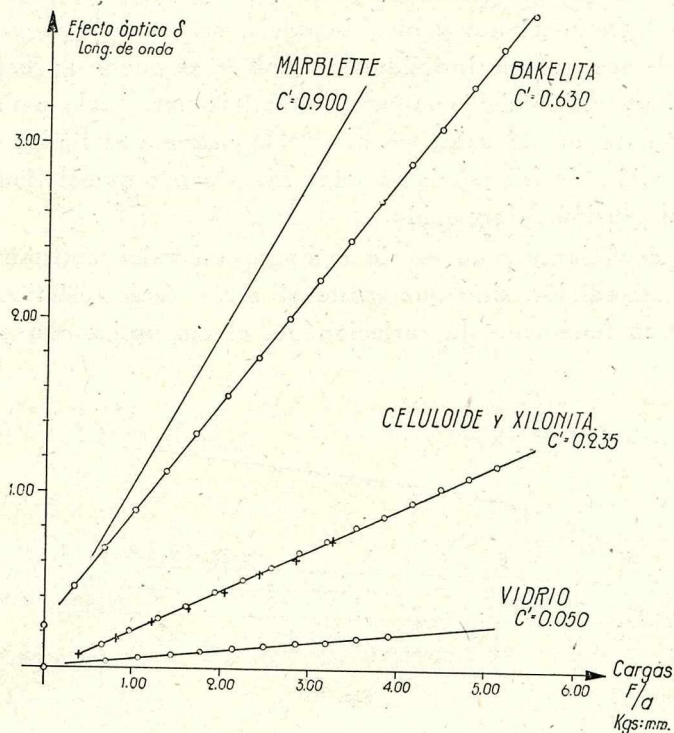


Fig. 38

Como ejemplo de la magnitud relativa de la sensibilidad de varios materiales se reproducen en la (fig. 38), los diagramas correspondientes a la determinación de la constante óptico-elástica c efectuada en ejemplares sometidos a tracción pura en diversos materiales utilizados aquí ⁽¹⁾, donde podemos observar que el ce-

- (1) Los valores de c' indicados en la figura no son, como puede verse por las unidades utilizadas, los valores reales en Brewster sino valores proporcionales expresados simplemente en longitud de onda por kg: mm, debido a que la longitud de onda de la luz utilizada en esas experiencias no se conocía exactamente; de acuerdo con la expresión (27) se tendrá:
- $$c_{Br} = 0.0102 \lambda_{U.A.} \times c'.$$

luloide es casi 5 veces más sensible que el vidrio, por cuya razón su utilización iniciada especialmente por Coker fué ya una gran ventaja y que el material de uso universal, la bakelita, llega a 13 veces.

Esos gráficos sirven también de comprobación a la ley de Wertheim ya que se puede observar la perfecta proporcionalidad que hay entre tensiones y birefringencia, así como la pequeña dispersión de los valores individuales; también se puede apreciar que la birefringencia inicial o latente, prácticamente nula para el vidrio, aumenta con el valor de c . En la bakelita el límite proporcional tensión-birefringencia es aún más elevado que el límite proporcional tensión-deformación.

Ese coeficiente c no es sin embargo un valor constante bajo cualquier condición sino que existe el *creep* óptico-elástico o sea que hay un fenómeno de variación del efecto óptico con el tiempo.

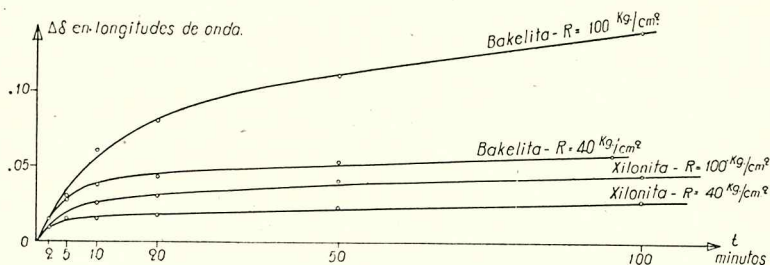


Fig. 39

po bajo carga constante, análogo al que existe en las deformaciones; esa variación de δ (o de c) que se observa cuando se mantiene un ejemplar sometido a una carga constante tiende a estabilizarse con el tiempo y es variable según los materiales, como puede observarse en el diagrama de la (fig. 39), aumentando rápidamente con las tensiones. Estos diagramas fueron obtenidos en ejemplares sometidos a tracción pura.

Este fenómeno del *creep* hace más conveniente aún la utilización del método de las franjas, pues entonces todos los datos necesarios para el estudio se obtienen en pocos minutos.

En la tabla siguiente se resumen algunas características de los principales materiales utilizados :

Material	$\sigma_k \text{ kg/cm}^2$	$\sigma_e \text{ kg/cm}^2$	$E \text{ kg/cm}^2$	$\frac{m}{m+1}$	c^1
Vidrio	700	300	600.000	0.80	0.050
Celuloide	400/600	150	20.000	0.75	0.230
Bakelita	1000	400	40.000	0.75	0.630
Hormigón			$0.15/0.20 \times 10^6$	~ 0.90	—
Acero			2.1×10^6	0.77	—

IV. Similitud

28. *Influencia del material.* Dado que la fotoelasticidad significa la medida de tensiones en un modelo fabricado con un material totalmente diferente de los materiales de construcción, se plantea el problema de saber si el material de que está constituido un cuerpo no tiene influencia sobre la *distribución* de las tensiones en ese cuerpo. Expresado en otra forma: el problema consiste en conocer si en dos cuerpos de idéntica forma y dimensiones sometidos a idénticas cargas pero de distinto material, las tensiones que existen son iguales.

El estudio completo de este problema excede de los límites de estos apuntes, de manera que sólo se hará un resumen de las conclusiones.

En los estados elásticos bidimensionales el estudio de la distribución de las tensiones y de las deformaciones nos dan respectivamente, — cuando no existen fuerzas de masa, — las ecuaciones de equilibrio indefinido

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0\end{aligned}\tag{a}$$

y la ecuación de compatibilidad

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y}\tag{b}$$

Si utilizando la ley de Hooke $E \epsilon_x = \sigma_x - \eta \sigma_y$ y análogas, sustituimos en (b) los valores de (a) se llega de inmediato a :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (28)$$

y también derivando las (a) a:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0 \quad (28')$$

Ahora bien, cuando el cuerpo considerado es a conexión simple o isostático las condiciones en los límites son simples condiciones de equilibrio entre las fuerzas aplicadas (conocidas todas de antemano por esa misma condición) y las tensiones internas y por lo tanto como ni en estas ni en las ecuaciones (28) y (28') que son suficientes para determinar las tensiones en todos los puntos del cuerpo, aparece ninguna constante elástica, podemos deducir de inmediato que para tales cuerpos a conexión simple las tensiones son independientes del material.

En este caso entonces los resultados fotoelásticos pueden transferirse inmediata y exactamente al prototipo cualquiera que sea su material de constitución.

Por el contrario, si las condiciones en los límites involucran deformaciones o sea que imponen determinadas compatibilidades ya sea con los vínculos o bien en determinadas regiones a las que se puede llegar por circuitos diferentes, es decir, cuando se trata de estructuras hiperestáticas o a conexión multiple, no se puede establecer esa independencia de los cuerpos isostáticos, puesto que en esas condiciones de de-

formación intervienen desde luego ciertos coeficientes de elasticidad.

Las condiciones de dependencia en este caso están definidas en el siguiente teorema debido a Mitchell:

"Las tensiones en un cuerpo de cualquier forma, perforado por cualquier número de orificios y sometido a fuerzas cualesquiera en sus contornos, son independientes de las constantes elásticas en el caso, y solamente en ese caso, que sea nula cada resultante de las fuerzas exteriores que obran en cada contorno".

En la (fig. 40) se indican dos ejemplos en estructuras análogas en las cuales en un caso (a) hay independencia y en el otro (b) dependencia de las constantes elásticas.

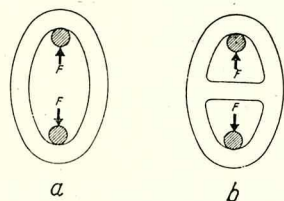


Fig. 40

Felizmente para la utilización universal de la fotoelasticidad, esa dependencia, — en el caso que exista, — es de pequeña importancia y en general despreciable. En efecto, según el mismo estudio de Mitchell las características del material solamente influyen en la distribución de las tensiones, a través de la constante

$$\frac{m}{m+1} = \frac{2G}{E}, \text{ o sea que son función de una constante que varía}$$

relativamente poco entre los materiales de estructuras y los materiales para modelos, como se puede observar en la tabla de la página 65. Por esta razón, y aunque hay un método indicado por Filon para la resolución exacta de este problema, es unánime la práctica de admitir la validez completa de los resultados fotoelásticos en su transferencia a las estructuras reales.

Para fijar un poco mejor los conceptos anteriores se puede analizar, desde ese punto de vista, las estructuras a fibra media planas consideradas en la resistencia de materiales. En las estructuras isostáticas externa e internamente, trianguladas o flexadas se sabe que las solicitaciones (y por lo tanto las tensiones) son independientes de toda constante elástica. En el caso de estructuras hiperestáticas de cualquier tipo, las magnitudes o solicitaciones hiperestáticas se pueden calcular utilizando la energía de deformación π mediante la expresión conocida:

$$\frac{\partial \pi}{\partial X} = \sum_1^n \int_s \left(\frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} + \frac{N}{EA} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} + \frac{T}{tGA} \cdot \frac{\partial T}{\partial X} \right) ds = \begin{cases} 0 \\ \delta_x \end{cases}$$

en la cual el segundo miembro es nulo cuando la incógnita X es una solicitación de vínculo indeformable o una solicitación interna, o bien es igual a δ_x cuando X es una solicitación correspondiente a un vínculo deformable en esa magnitud.

Sustituyendo G por su valor en función de E queda la expresión anterior ⁽¹⁾

$$\sum_1^n \int_s \left(\frac{M}{I} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} + \frac{N}{A} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} + \frac{2(m+1)}{m} \frac{T}{tA} \frac{\partial T}{\partial X} \right) ds = \begin{cases} 0 \\ E \delta_x \end{cases} \quad (29)$$

(1) Se supone allí que E es constante en toda la estructura; si así no fuera, la única diferencia sería que los diversos términos estarían afectados por la relación $\gamma = \frac{E_0}{E}$

Vemos pues que en general las tensiones dependen únicamente de $\frac{m}{m+1}$ y que esa influencia es, aparte de la pequeña diferencia entre los diversos valores de ese coeficiente, también muy pequeña en general debido a que la influencia del término en T es despreciable, como se acepta con rarísimas excepciones al no considerarlo en los cálculos teóricos. Es pues un caso enteramente análogo al de los cuerpos de forma cualquiera.

29. *Escalas. Similitud rigurosa.* El caso de similitud geométrica rigurosa es el más común en fotoelasticidad ya que en la mayoría de los casos lo que se desea investigar es precisamente la repartición real de tensiones en el cuerpo provocado por formas no asimilables a las formas simples que puede estudiar la resistencia de materiales o aún la teoría de la elasticidad, por lo menos con respecto a un prototipo que a veces debe simplificarse algo o esquematizarse para llevarlo a dos dimensiones.

De manera pues que en elevación, o sea en el plano de las fuerzas y plano medio del cuerpo, sus dimensiones serán las del prototipo reducidas en la escala α o escala de distancias; en cambio el espesor, o sentido normal al plano medio no puede ser tomado a escala porque las chapas de material vienen con un espesor determinado que llamaremos t_m , de manera que, procediendo en forma inversa, calcularemos un espesor de prototipo correspondiente

$$t_p = \frac{t_m}{\alpha} \quad (a)$$

a cuyo espesor reduciremos la fuerzas reales F_r admitiendo que se reparten uniformemente en el espesor del cuerpo como se supone en los casos de elasticidad plana. Es decir que tomaremos como cargas del prototipo F_p a

$$F_p = F_r \frac{t_p}{t_r} \quad (b)$$

si t_r es el espesor real de la estructura en consideración.

Aplicando ahora a estas fuerzas del prototipo F_p una escala β para llevarlas al modelo y recordando que podemos poner simbólicamente que $\sigma = \frac{\text{fuerza}}{\text{superficie}}$ se tendrá:

$$\sigma_p = \frac{F_p}{A_p} = \frac{F_m}{\beta} \frac{\alpha^2}{A_m} = \sigma_m \frac{\alpha^2}{\beta}$$

o sea, indicando con c la escala de tensiones :

$$c = \frac{\sigma_m}{\sigma_p} = \frac{\beta}{\alpha^2} \quad (30)$$

30. *Estructuras a fibra media.* Si la estructura a estudio es una estructura a fibra media en la cual interesan las *solicitaciones*,— se trataría en ese caso de utilizar la fotoelasticidad como sustituto de los elastómetros o influenciómetros, — salvo raras excepciones constituidas por estructuras de láminas (losas, bóvedas, etc. en hormigón armado), no es posible una similitud rigurosa puesto que las barras tienen sección transversal a tres dimensiones, pero tampoco es necesario.

En efecto, según la ecuación (29), vemos que la sección transversal no interviene con sus dimensiones reales sino solamente,— dejando de lado desde ya la influencia del cortante,— a través de dos características geométricas: el área A y su momento de inercia baricéntrico I ; esto permitiría, utilizando material de diversos espesores, construir un modelo con barras de sección rectangular que cumplieran con las condiciones establecidas, hallando primero un prototipo ideal de sección rectangular.

Sin embargo en la generalidad de los casos intervienen en forma fundamental a los efectos de la determinación de las *solicitaciones*, únicamente una u otra de ellas, esfuerzo normal o momento flector, de manera que entonces se puede utilizar una chapa de un espesor único puesto que sólo se necesita variar una dimensión de la sección transversal para obtener similitud en una de las características geométricas mencionadas. Sin entrar a profundizar esas escalas se puede ver de inmediato que cuando el esfuerzo normal N es el fundamental deberá buscarse

$$h_m = j A_p$$

siendo h_m la altura de la sección del modelo y j una constante cualquiera; cuando lo fundamental es el flector será

$$h_m = j \sqrt[3]{I_p}$$

Por otra parte las escalas interesantes son las de *solicitaciones* y en ese sentido, con la notación del artículo anterior se tendrá:

Escala de Esfuerzos Normales	$n = \beta$
Escala de Esfuerzos Tangenciales	$t = \beta$
Escala de Momentos Flectores	$m = \alpha \beta$

V. Fotoelasticidad

CAPÍTULO I. ISOSTÁTICAS.

31. *Características y trazado.* En este capítulo se tratará de la resolución completa del problema elástico, o sea de los procedimientos que permiten separar las dos tensiones principales, — de las cuales la doble refracción accidental nos dá directamente nada más que su diferencia, — obteniendo entonces la magnitud y

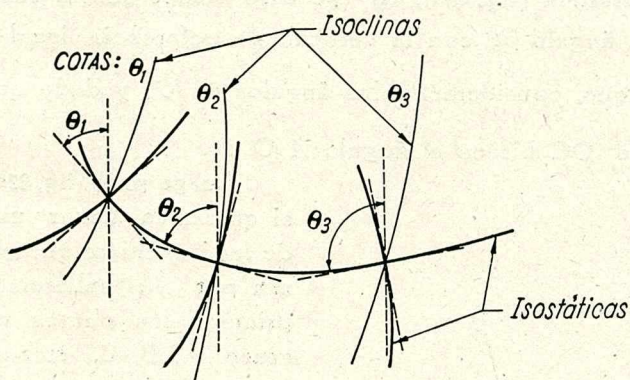


Fig. 41

dirección de los ejes de la elipse de tensiones, pero basándonos únicamente en los datos recogidos en el fotoelasticómetro. La otra forma de hacer la separación de tensiones, mediante la realización de otras ex-

periencias, totalmente diferentes de la fotoelasticidad se verán en el capítulo siguiente referente a "Métodos complementarios".

Aunque no indispensables para la resolución del problema, pues se verá que uno de los métodos que expondremos no las utiliza para nada, las *isostáticas* o curvas cuyas tangentes coinciden con la dirección de las tensiones principales en el punto de tangencia correspondiente, son de un gran interés directo para el estudio cualitativo de la distribución de tensiones y se deducen fácil y directamente de las isoclinas.

Desde luego que, de acuerdo con su definición, habrá dos familias de isostáticas respectivamente ortogonales, correspondientes a las dos tensiones principales en cada punto y se deduce también de inmediato que la inclinación de su tangente en cualquier punto será precisamente el parámetro de la isoclina que pase por el mismo (fig 41).

El trazado de las isostáticas a partir de las isoclinas se hace gráficamente con suma facilidad si admitimos que el trozo de isostática comprendido entre dos isoclinas sucesivas, se puede asimilar al arco de círculo que posee en los puntos de cruce con las isoclinas las mismas tangentes que la isostática (fig. 42a); en ese caso vemos que la cuerda $\overline{AB}$ hace un ángulo α con la vertical de referencia igual a $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ puesto que, considerando los ángulos en O , y dado que $\overline{AC} = \overline{CB}$ la recta OC biseca el ángulo $A O B$.

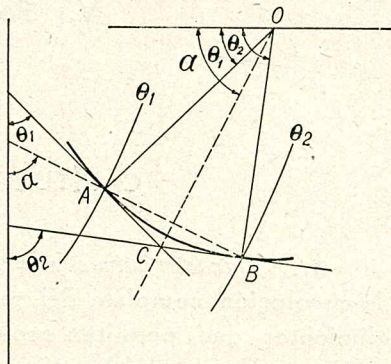


Fig. 42a

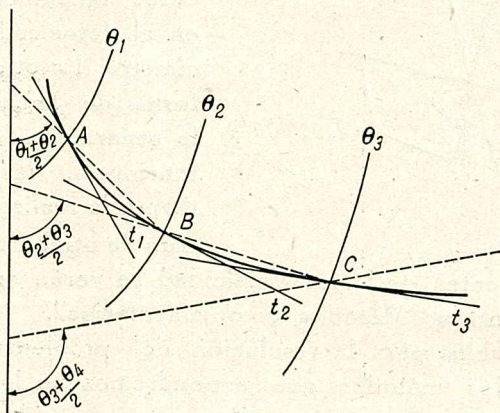


Fig 42b

Luego pues (fig. 42b) si queremos trazar una de las isostáticas que pasan por A , hallaremos primero los puntos de cruce A, B, C , etc. en las isoclinas, trazando las rectas que forman sucesivamente los ángulos $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$, $\frac{\theta_2 + \theta_3}{2}$, etc., con la vertical de referencia y luego en esos puntos trazaremos las

tangentes $t_1, t_2, t_3, \dots$ inclinadas los ángulos $\theta_1, \theta_2, \dots$. La isostática nos queda definida así por una serie de puntos con sus tangentes, lo cual basta, si la red de isoclinas es lo suficientemente cerrada, para definir clara y exactamente a la isostática

aunque no se suavice en nada la poligonal, como puede verse en la (fig. 43), que es el trazado de isostáticas correspondiente a las isoclinas de la figura 33.

32. *Teorema de Lamé-Maxwell.* Análogamente a las ecuaciones de equilibrio indefinidas (a) del artículo 28 obtenidas estudiando un paralelepipedo cuya base es un rectángulo construido sobre los

ejes x, y con orientación arbitraria, pueden establecerse las ecuaciones de equilibrio de un paralelepipedo cuya base sobre el plano x, y está limitada por arcos de isostáticas, por cuya razón en cambio de aparecer las tensiones generales σ_x, σ_y, τ , aparecerán las tensiones principales σ_1 y σ_2 .

Sea pues el elemento de superficie ABCD sobre el plano x, y o plano medio del cuerpo, la base de un paralelepipedo de altura $z = 1$ (fig. 44) en la cual los lados $\overline{AB} = ds_1$ y $\overline{CD} = ds_1^I$ pertenecen a la familia de isostáticas s_1 y $\overline{AC} = ds_2$ y $\overline{BD} = ds_2^I$ a la de la s_2 cuyos sentidos positivos se indican en la figura, y a las cuales corresponden las tensiones σ_1 y σ_2 respectivamente

Ahora bien, des-

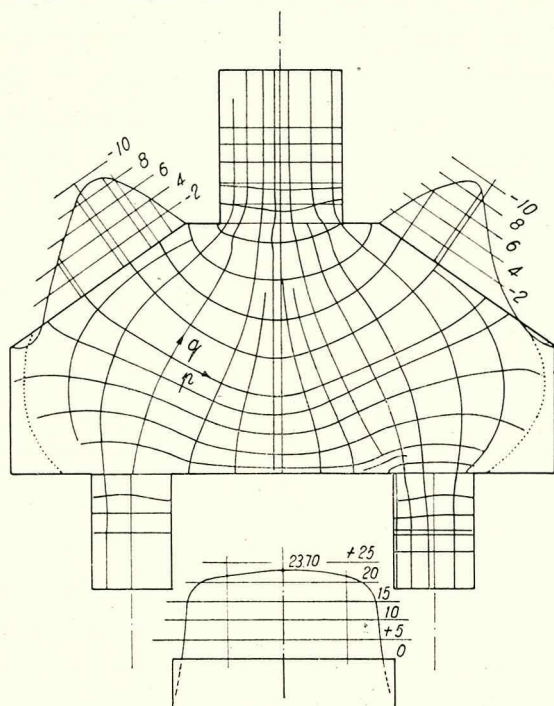


Fig. 43

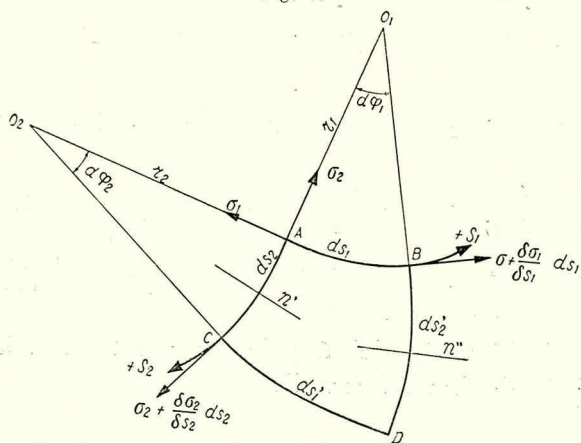


Fig. 44

preciando infinitésimos de orden superior, se puede suponer que las resultantes de las tensiones sobre cada cara del elemento pasan por su centro de gravedad y por lo tanto proyectando sobre la bisectriz n' del ángulo $d\varphi_2$ obtendremos como ecuación de equilibrio en esa dirección :

$$-\sigma_1 ds_2 + \left(\sigma_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} ds_1 \right) d's_2 - \left[\sigma_2 ds_1 + \left(\sigma_2 + \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} ds_2 \right) d's_1 \right] \frac{d\varphi_2}{2} = 0$$

pero se tiene $ds_1 = r_1 d\varphi_1$ $ds_2 = r_2 d\varphi_2$

y también con aproximación de orden superior

$$ds'_1 = (r_1 + ds_2) d\varphi_1 \quad \text{y} \quad ds'_2 = (r_2 + ds_1) d\varphi_2$$

de donde, sustituyendo arriba :

$$\begin{aligned} & -\sigma_1 r_2 d\varphi_2 + \left(\sigma_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} ds_1 \right) (r_2 + ds_1) d\varphi_2 - \\ & - \left[\sigma_2 r_1 d\varphi_1 + \left(\sigma_2 + \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} ds_2 \right) (r_1 + ds_2) d\varphi_1 \right] \frac{d\varphi_2}{2} = 0 \end{aligned}$$

Dividiendo por $d\varphi_2$ y desarrollando

$$\begin{aligned} & -\sigma_1 r_2 + \sigma_1 r_2 + \sigma_1 ds_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} r_2 ds_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} (ds_1)^2 - \\ & - \frac{1}{2} \left[\sigma_2 ds_1 + \sigma_2 ds_1 + \sigma_2 ds_2 d\varphi_1 + \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} r_1 ds_2 d\varphi_1 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} (ds_2)^2 d\varphi_1 \right] = 0 \end{aligned}$$

y simplificando y despreciando los infinitésimos de 2° y 3° orden nos queda

$$\sigma_1 ds_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} r_2 ds_1 - \sigma_2 ds_1 = 0 \quad \text{o sea finalmente}$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} = - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_2} \quad (31)$$

$$\text{y análogamente} \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} = - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{r_1} \quad (31')$$

si proyectamos sobre la bisectriz del ángulo $d\varphi_1$; estas son las ecuaciones de equilibrio de Lamé-Maxwell.

CAPÍTULO II. SEPARACIÓN DE LAS TENSIONES PRINCIPALES

33. *Integración a lo largo de isostáticas.* Las ecuaciones anteriores nos indican de inmediato la posibilidad de resolver el problema propuesto de separar las tensiones principales, puesto que las variables que figuran en ella son, ambas, dadas por las observaciones fotoelásticas: $(\sigma_1 - \sigma_2)$ por las isocromáticas y r del trazado de isostáticas obtenido a partir de las isoclinas. En efecto si nos desplazamos, por ejemplo, sobre la isostática s_1 podemos integrar la ecuación (31):

$$(\sigma_1)_s = (\sigma_1)_0 - \int_0^s \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_2} ds_1 \quad (33)$$

en donde $(\sigma_1)_0$ y $(\sigma_1)_s$ son respectivamente la tensión (σ_1) en el origen de integración y en el punto distante s ; por lo tanto si tomamos como punto de partida O un punto en que se conozca σ_1 , — como por ejemplo un punto del contorno libre en el cual la tensión normal al mismo es igual a 0 y la isocromática nos dá directamente la tensión principal no nula, — y a lo largo de la isostática que por allí pasa determinamos los valores $(\sigma_1 - \sigma_2)$ y r_2 , podemos realizar gráfica o analíticamente dicha integración, sustituida naturalmente por una sumatoria.

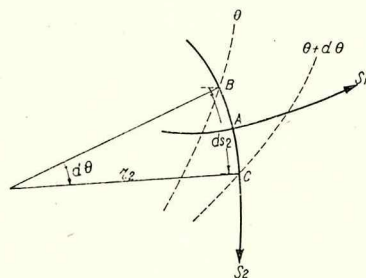


Fig 45

Estas ecuaciones no pudieron, sin embargo, ser utilizadas prácticamente hasta que Filon halló la manera de determinar los radios de curvatura r ya que su medida directa es muy difícil e inexacta; para realizar ese propósito se dispone de los dos métodos siguientes:

Sea s_1 (fig. 45) la isostática de integración, A el punto donde deseamos hallar r_2 y Θ y $(\Theta + d\Theta)$ las isoclinas próximas a ese punto; de inmediato tenemos $r_2 = \frac{ds_2}{d\varphi_2}$ o sea prácticamente

$$r_2 = \frac{\Delta y}{\Delta \Theta} \quad (34)$$

si indicamos con Δy el segmento interceptado sobre la normal a la isostática s_1 levantada en el punto A , por dos isoclinas próximas (a uno y otro lado) cuyos parámetros difieren en $\Delta \Theta$.

En las regiones donde s_1 es casi normal a la dirección de las isoclinas este método es muy inexacto pues Δy se hace muy difícil de medir y entonces se recurre al método siguiente (fig. 46) en el que designamos con ds_1 y ds_2 los segmentos de las dos isostáticas ortogonales interceptados por las isoclinas Θ y $(\Theta + d\Theta)$, o sea que al recorrer $\overline{AB} = ds_1$ o $\overline{AC} = ds_2$ el ángulo girado es el mismo ángulo $d\Theta$; luego pues

$$r_2 = \frac{ds_2}{d\Theta} = \frac{ds_2}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{d\Theta} = \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{ds_1}{d\Theta}$$

o sea prácticamente:

$$r_2 = \frac{\Delta s_1}{\Delta \Theta} \cdot \operatorname{tg} \beta \quad (35)$$

siendo Δs_1 el segmento de isostática s_1 interceptado en el punto A por dos isoclinas sucesivas cuyo parámetro difiere en $\Delta \Theta$ y $\operatorname{tg} \beta$ el ángulo que forma la isostática con la isoclina. También podríamos decir comparando las ecuaciones (34) y (35) que cuando la medida directa de Δy es difícil, la sustituimos por la indirecta por medio de $\Delta y = \Delta s_1 \cdot \operatorname{tg} \beta$.

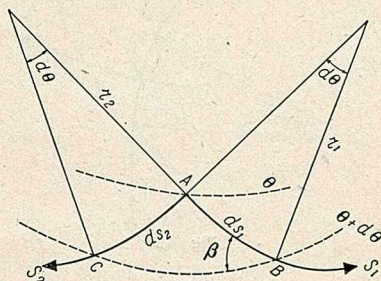


Fig. 46

Se dijo que la integración de (33) se puede hacer analítica o gráficamente y dado que el proceso analítico es obvio se indicará el gráfico que es mucho más conveniente para revelar errores y para determinar inequívocamente el signo. Como ejemplo se procederá a efectuar la integración a lo largo de la isostática $M-N$ de la figura 43:

Como primer paso se desarrolla y rectifica la isostática y tomándola como eje de abscisas (fig. 47) se trazan los diagramas de los ángulos de inclinación de las tensiones con respecto a la vertical, cotas φ , y de la diferencia de tensiones ($p \cdot q$), obtenidas exactamente en los puntos de intersección de la isostática con las isoclímas e isocromáticas respectivamente.

Por otra parte se determina r_2 , por medio de las ecuaciones (34) o (35), en diversos puntos de la isostática y sus valores, o mejor aún su inverso $\Theta = \frac{100}{r}$, se replantean también sobre la isostática rectificada, estando entonces en condiciones de efectuar la integración gráfica.

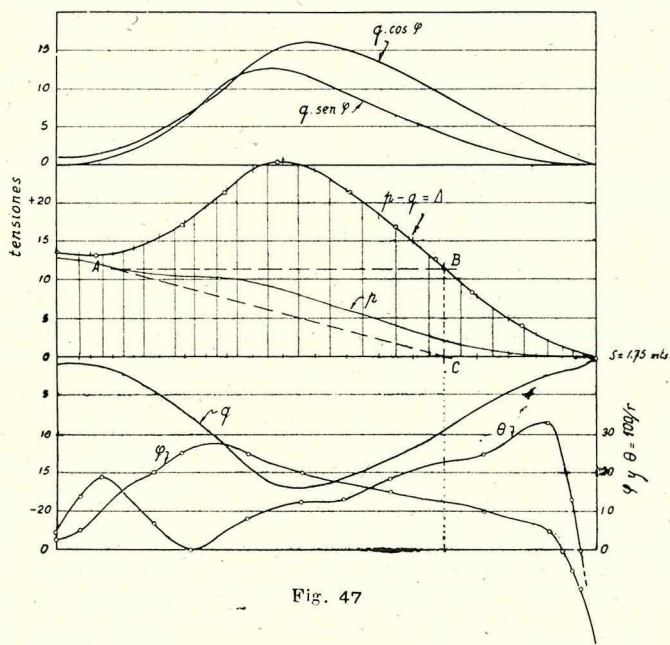


Fig. 47

Se divide el eje x en segmentos Δx convenientemente elegidos de acuerdo con las variaciones más o menos rápidas de las variables y en el centro de cada una se determina,—por intersección con el diagrama correspondiente,—una vertical igual al valor de ($p \cdot q$) y desde su extremo B se toma horizontalmente el segmento $\overline{AB}$ igual al radio de curvatura r_2 en ese punto, tomado del diagrama de $\Theta = \frac{100}{r}$, dirigido en el sentido de la concavidad;

uniendo el punto A con el punto C o centro del segmento, la recta $\overline{AC}$ nos dá la inclinación del diagrama integral en el segmento Δx considerado.

En efecto, de la semejanza del triángulo ABC con el pequeño triángulo formado por el trozo de diagrama de p así obtenido (marcado con trozo más grueso en la figura) y lados vertical dy y horizontal dx , se tiene

$$\frac{AB}{BC} = \frac{dx}{dy} \quad \text{y como}$$

$$AB = r_2 \quad ; \quad \overline{BC} = (p - q) \quad \text{y} \quad dx = ds \quad \text{queda:}$$

$$dy = \frac{(p - q)}{r_2} ds = dp \quad \text{de acuerdo con la (33)}$$

De manera que si empezamos esa integración desde un punto,

en que se conozca p , el diagrama integral trazado nos dá el diagrama de p como se ve en la figura.

El diagrama de q se obtiene desde luego por diferencia del diagrama p con el de $(p - q)$.

Este proceso de integración es especialmente indicado con cuerpos de forma irregular y especialmente para estructuras de hormigón armado.

34. Integración según secciones rectas.

Las ecuaciones de equilibrio indefinido referidas a un par de ejes ortogonales, ecuaciones (a) del artículo 28, — permiten también la solución del problema propuesto, dado que, como se vé de inmediato con el círculo de Mohr (fig. 48)

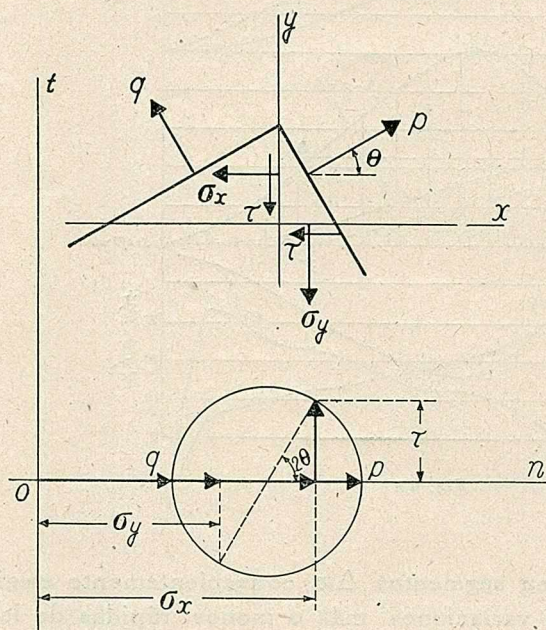


Fig. 48

$$\tau = \frac{p-q}{2} \operatorname{sen} 2\Theta \quad (36)$$

en donde Θ es el parámetro de la isoclina que pasa por el punto y $(p-q)$ la cota de la isocromática: los datos fotoelásticos permiten entonces el cálculo de τ .

Luego pues la integración de aquellas ecuaciones respecto a x o a y nos dan

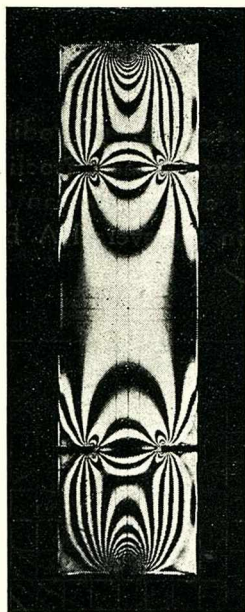


Fig. 49 a

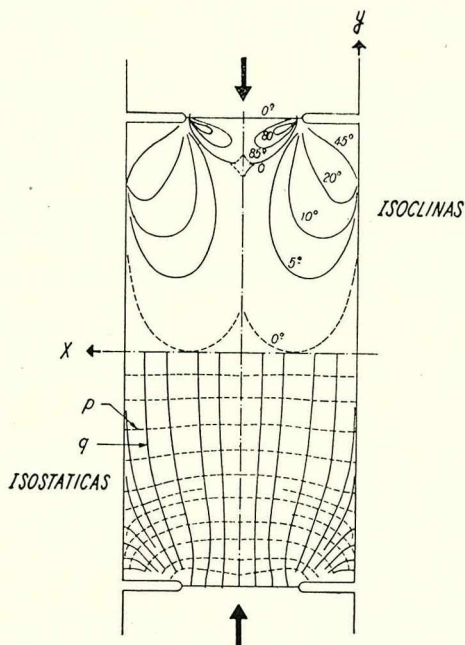


Fig. 49 b

$$(\sigma_x)_a = (\sigma_x)_0 - \int_0^a \frac{\partial \tau}{\partial y} dx \quad (37)$$

o bien

$$(\sigma_y)_b = (\sigma_y)_0 - \int_0^b \frac{\partial \tau}{\partial x} dy \quad (37')$$

en donde, si partimos de puntos de tensiones conocidas, todos los términos son conocidos.

Determinado por ejemplo σ_x si hemos seguido el eje x , se tiene (figura 48) también :

$$\sigma_y = \sigma_x - (p - q) \cos 2\Theta \quad (38)$$

y finalmente como la suma de tensiones normales es un invariante se obtiene $(p + q)$:

$$(p + q) = (\sigma_x + \sigma_y) = S$$

que junto con $D = (p - q)$ nos dá

$$p = \frac{S+D}{2}$$

$$q = \frac{S-D}{2} \quad (39)$$

Como ejemplo de aplicación sea el modelo de un rodillo de dilatación en hormigón armado cuyas isocromáticas, isoclinas e isostáticas se indican en la (fig. 49), en el cual se desean determinar las tensiones a lo largo de la sección transversal A. B.

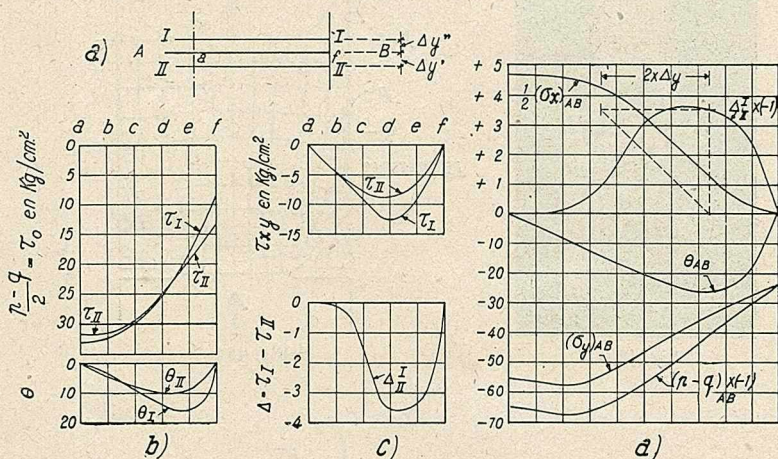


Fig. 50

Puesto que según la ecuación (37) lo que interesa es el incremento $\Delta\tau$ del tangencial τ en dirección normal al eje de integración se debe calcular τ por la (36) en dos secciones I.I y II.II paralelas a la de integración AB y a distancias $\Delta y'$ y $\Delta y''$ (fig. 50a) suficientemente pequeñas para que

$$\frac{\tau_I - \tau_{II}}{\Delta y' + \Delta y''} \text{ sea un valor suficientemente aproximado de } \frac{\partial \tau}{\partial y}.$$

En la (fig. 50b) están indicados los diagramas de $(p - q)$ y Θ

para esas dos secciones II y II.II tomados de los trazados de la (fig. 49) y en la (fig. 50c) los valores de τ calculados con la ecuación (36) y también el $\Delta\tau$ correspondiente.

Finalmente en la (fig. 50d) el cálculo de la integral $\Sigma \frac{\Delta\tau}{\Delta y} \Delta x$ realizado en forma análoga a la integración según isostáticas, con la cual se obtiene el diagrama de σ_x indicado; con éste y con los diagramas de $(p-q)$ y Θ_{AB} allí reproducidos se calcula σ_y aplicando la expresión (38). El cálculo de p y q se haría posteriormente según la (39).

35. *Solución numérica de la ecuación de Laplace.* La resolución del problema de hallar las tensiones principales σ_1 y σ_2 puede obtenerse también resolviendo la ecuación (28) que define la suma de dichas tensiones

$$\Delta^2 (\sigma_1 + \sigma_2) = 0 \quad (40)$$

cuando se le agregan las condiciones del contorno particulares a cada problema.

Aunque desde luego que en los casos de interés de esta ecuación no es posible obtener su solución analítica, últimamente se ha propuesto utilizar su resolución numérica por un proceso de iteración. Para iniciar el proceso debe disponerse de los valores exactos en el contorno de la región a estudiar, lo que se produce exactamente en los bordes libres del ejemplar; en el resto del ejemplar o bien se puede llegar a regiones en que existan estados simples y conocidos de antemano (como piezas extendidas con discontinuidades en los puntos lejanos de éstas) o bien se determinan con algún otro método de los expuestos, a lo largo de una sección arbitraria conveniente para delimitar perfectamente la región a estudiar,—o aún,—si no interesa la región inmediata de la aplicación de la carga se sustituye ésta por una distribución aproximada, etc.

Luego el proceso es cubrir la región a estudio con una red de malla cuadrada y atribuir valores supuestos,—más o menos racionalmente tomados,—para esa suma $(\sigma_1 + \sigma_2)$ en los puntos de intersección, ajustándolos después sucesivamente de acuerdo con un proceso debido a Liebmann y mejorado por Shortley y Weller y también por Frocht y Leven.

VI. Métodos complementarios

36. *Latómetros de Mesnager y Coker.* Se ha visto ya que con los datos que dá el fotoelasticímetro es posible resolver totalmente el problema elástico a dos dimensiones, puesto que obtenidas directamente isoclinas e isocromáticas,— es decir Θ y $(\sigma_1 - \sigma_2)$,— es posible deducir por integración de tal o cual ecuación diferencial en las tensiones, el valor por separado de cada una de las tensiones principales σ_1 y σ_2 .

Cualquiera de estos sistemas tiene, desde luego, el inconveniente de necesitar cálculos gráficos o numéricos algo largos y fastidiosos y también, con excepción del último expuesto,— el de basarse en las isoclinas, curvas poco nítidas en general y que pueden por ello provocar errores. En cambio tiene la ventaja, muchas veces económicamente decisiva,— de no necesitar ningún otro dispositivo experimental. Sin embargo ha sido y es muy común el empleo de tales métodos en la práctica corriente de la fotoelasticidad.

Los primeros de estos dispositivos que se utilizaron fueron los *latómetros*, es decir aparatos destinados a medir la variación de espesor del modelo como base para obtener la suma de tensiones principales $(\sigma_1 + \sigma_2)$. En efecto, en una lámina plana (fig. 51) de espesor t sometida a un estado elástico plano, la deformación en el sentido transversal z es igual a

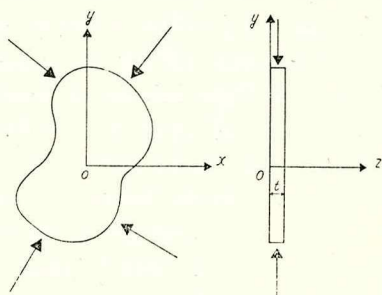


Fig. 51

Los primeros de estos dispositivos que se utilizaron fueron los *latómetros*, es decir aparatos destinados a medir la variación de espesor del modelo como base para obtener la suma de tensiones principales $(\sigma_1 + \sigma_2)$. En efecto, en una lámina plana (fig. 51) de espesor t sometida a un estado elástico plano, la deformación en el sentido transversal z es igual a

$$E \varepsilon_z = -\frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{m} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

de donde la variación de espesor Δt será :

$$\Delta t = \varepsilon_z t = -\frac{1}{mE} (\sigma_1 + \sigma_2) t$$

y

$$(\sigma_1 + \sigma_2) = -\frac{mE \Delta t}{t} = -k \Delta t \quad (41)$$

siendo k una constante que depende exclusivamente del material y espesor del modelo y que por lo tanto es único para todos los puntos, constante que se determina midiendo Δt en un ejemplar de tracción pura, por ejemplo, cortado en la misma lámina del modelo.

Conocida así la suma $S = (p + q)$ y con $D = (p - q)$ obtenida de las isocromáticas tenemos de inmediato

$$p = \frac{S+D}{2} \quad y \quad q = \frac{S-D}{2} \quad (42)$$

El problema pues es medir Δt con una aproximación análoga a la de las isocromáticas, lo que no es problema fácil indudablemente. En efecto, admitiendo que, con el método de las franjas, se pueda apreciar la birefringencia con una aproximación de $\pm \frac{\lambda}{5}$ y tomando para la bakelita un valor medio de la constante óptico-elástica $K = 0.250 \frac{\text{kg/mm}^2}{\text{long. onda}}$, vemos que con las isocromáticas podemos apreciar las tensiones con una aproximación de $\frac{26.0}{5} = 5.2 \text{ kg/cm}^2$.

Por otra parte, tomando también para la bakelita como constantes elásticas los valores $m = 3.0$ y $E = 40.000 \text{ kg/cm}^2$, tendremos para un espesor del modelo $t = 0.6 \text{ cm}$, según la expresión (41) de más arriba :

$$(p + q) = \frac{mE}{t} \Delta t = \frac{3.0 \times 40.000}{0.6} \Delta t = 200.000 \Delta t$$

de donde, para tener la apreciación de tensiones recién mencionada deberemos poder medir :

$$\Delta t = \frac{5.2}{200.000} = 0.000026 \text{ cm} = 2.6 \times 10^{-4} \text{ mm.}$$

Para medir estas pequeñísimas deformaciones se han propuesto dos tipos de aparatos. En uno de ellos (Coker) se utiliza un principio idéntico al del conocido extensímetro de Martens: el modelo M se coloca entre dos puntas de las cuales una A es fija (fig. 52) y la otra B puede desplazarse relativamente a la primera. El movimiento del punto B es entonces amplificado primero mecánicamente por medio de dos palancas O_1 y O_2 hasta un espejo E cuyo giro y por lo tanto el desplazamiento de B es medido con el anteojito C y la escala graduada R .

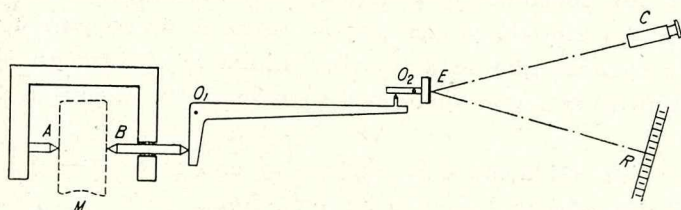


Fig. 52

E cuyo giro y por lo tanto el desplazamiento de B es medido con el anteojito C y la escala graduada R .

En esta forma se llega a apreciar, según los fabricantes, fácilmente, hasta $2,5 \times 10^{-5}$ mm.

En el otro tipo (Mesnager) la medición del desplazamiento se hace utilizando las franjas de interferencia: al movimiento del punto B (fig. 53), corresponde un desplazamiento relativo de dos cristales C y D de un sistema óptico

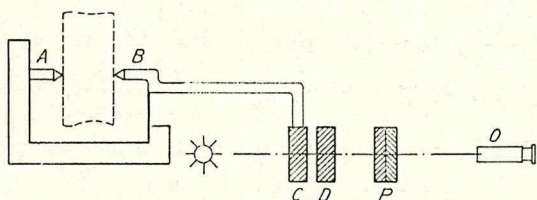


Fig. 53

que contiene además un "étalon" delgado de Perot y Fabry conjugado ópticamente con el primero. Luego pues la observación por un anteojito O hace aparecer, cuando el intervalo entre C y D es igual al espesor de la cuña de aire de P , unas franjas de interferencia que se desplazan cuando cambia el espesor del modelo. Anulando ese desplazamiento mediante modificación de la cuña del "étalon" P se obtiene, mediante tarado previo de éste, la medida que se busca.

37. *Analogía de la membrana.* Otra forma de resolver el problema, usada con relativa frecuencia, se basa en el hecho de que la ecuación (40)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_1 + \sigma_2) = 0$$

es válida también para las ordenadas z de una membrana delgada sometida a una tensión uniforme según su superficie, sin diferencia de presión entre sus dos caras, mientras z o preferentemente su pendiente se mantenga relativamente pequeña. Luego pues si alrededor de una abertura recortada en una chapa que tomamos como plano (x, y) , con forma idéntica al modelo en estudio, colocamos una pared vertical cuyas ordenadas z sean proporcionales a los valores de $(\sigma_1 + \sigma_2)$ en esos mismos puntos, y sobre la curva gausa así obtenida colocamos una membrana en las condiciones definidas más arriba, entonces, ya que los valores de las funciones $(\sigma_1 + \sigma_2)$ y z son proporcionales, también lo serán los valores interiores; las ordenadas z de la membrana se pueden medir con un micrómetro de profundidad.

Los valores de $(\sigma_1 + \sigma_2)$ en el contorno se obtienen directamente de las isocromáticas en las partes de ese contorno que no tengan fuerzas aplicadas y en el resto, o bien se calculan teóricamente si existe algún campo de tensiones que lo permita o bien se calculan a lo largo de secciones convenientemente elegidas con los métodos de integración recién expuestos.

Para la membrana se ha propuesto utilizar una membrana de caucho sometidas con pesos o resortes a una tensión uniforme, pero en general se ha utilizado mejor una membrana de jabón.

El diseño del aparato y proceso de medidas se dá con más detalles en la parte IV (Analogías) de este cursillo.

INDICE

I. Introducción

	<u>Págs.</u>
1. Historia	5
2. Campos de utilización y exactitud probable	7

II. Optica cristalina

CAPÍTULO I. DEFINICIONES Y NOTACIÓN.

3. Generalidades	11
4. Polarización.	13
5. Fase y recorrido.	13

CAPÍTULO II. COMPOSICIÓN DE VIBRACIONES.

6. Vibraciones rectilíneas coplanares	14
7. Vibraciones rectilíneas situadas en planos ortogonales	15
8. Descomposición de una vibración elíptica en dos vibraciones circulares.	18

CAPÍTULO III. PROPAGACIÓN EN MEDIOS CRISTALINOS.

9. Condiciones generales.	20
10. Efecto de una lámina cristalina	22
11. Polarizadores	24

CAPÍTULO IV. POLARISCOPIOS.

12. Polariscopio plano	29
13. Interposición de una lámina cristalina en un polariscopio plano	30
14. Polariscopio circular	32
15. Interposición de una lámina cristalina en un polariscopio circular.	35

III. Doble refracción accidental

CAPÍTULO I. LEYES FUNDAMENTALES.

16. Observaciones de Brewster y Wertheim	38
17. Relaciones generales entre los fenómenos ópticos y elásticos.	40

CAPÍTULO II. CURVAS FOTOELÁSTICAS.

18. Fotoelasticómetro.	43
19. Franjas en luz monocromática	44
20. Luz blanca: Isocromáticas	46
21. Isoclinas	50

CAPÍTULO III. MÉTODO DE ESTUDIO.

22. Método de la retícula	53
23. Compensadores	54
24. Medida goniométrica	57
25. Método de las franjas.	58

CAPÍTULO IV. CARACTERÍSTICAS DE LOS MATERIALES

26. Determinación de las constantes.	61
27. Valores relativos. Creep.	62

IV. Similitud

28. Influencia del material.	66
29. Escalas. Similitud rigurosa	69
30. Estructuras a fibra media	70

V. Fotoelasticidad

CAPÍTULO I. ISOSTÁTICAS.

31. Características y trazado	71
32. Teorema de Lamé - Maxwell	73

CAPÍTULO II. SEPARACIÓN DE LAS TENSIONES PRINCIPALES.

33. Integración a lo largo de isostáticas	75
34. Integración según secciones rectas	78
35. Solución numérica de la ecuación de Laplace.	81

VI. Métodos complementarios.

36. Latómetros de Mesnager y Coker	82
37. Analogía de la membrana	84

