

Módulo de Taller

Grafos uniformemente más confiables y Grafos Fuertes

Estudiante: Agustín Cabrera

Orientador: Pablo Romero

27 de julio de 2026

Resumen

Sea $\mathcal{C}_{n,m}$ la clase de grafos conexos y simples con n vértices y m aristas. El co-rango de $\mathcal{C}_{n,m}$ y de cada uno de sus grafos es igual a $m - n + 1$. Sea G en $\mathcal{C}_{n,m}$. Para cada ρ en $[0, 1]$, se define la *confiabilidad de G en ρ* como la probabilidad de que el subgrafo obtenido de remover cada arista de G independientemente con probabilidad ρ sea conexo. Decimos que G es *uniformemente más confiable* si para cada H en $\mathcal{C}_{n,m}$ y cada ρ en $[0, 1]$ se cumple que $R_G(\rho) \geq R_H(\rho)$. Decimos que un *corte de G* es un subconjunto de aristas U de G que cumple que $G - U$ no es conexo. El número de cortes de G con k elementos se denota $\mu_k(G)$. Decimos que G es *fuerte* si para cada H en $\mathcal{C}_{n,m}$ y cada k en $\{0, \dots, m\}$ se cumple que $\mu_k(G) \leq \mu_k(H)$. Es cierto que todo grafo fuerte es uniformemente más confiable. Boesch [J. Graph Theory 10 (1986), 339–352] conjeturó que todo grafo uniforme más confiable es fuerte. Se sabe que en cada una de las clases $\mathcal{C}_{n,m}$ cuyo co-rango es 4 o menor existe al menos un grafo uniformemente más confiable, y además cada grafo uniformemente más confiable es fuerte. Si bien existen infinitas clases $\mathcal{C}_{n,m}$ cuyo co-rango es igual a 5, se demostró recientemente que hay tan solo una cantidad finita de dichas clases que tienen un grafo que es uniformemente más confiable.

Un proyecto ambicioso consiste en buscar una clase $\mathcal{C}_{n,m}$ que posea un grafo uniformemente más confiable que no sea fuerte. Dicha clase, en caso de existir, refutaría a la conjetura de Boesch. En este proyecto se realiza un estudio computacional relativo a la existencia o inexistencia de grafos uniformemente más confiables y de grafos fuertes dentro de clases $\mathcal{C}_{n,m}$ de co-rango 5.

1. Introducción

La confiabilidad de redes es estudia la capacidad de una red para mantenerse operativa en un contexto donde sus componentes están sujetos a fallas aleatorias. Un posible modelo supone una red representada mediante un grafo G en donde cada vértice no falla y cada arista, que representa la conectividad entre dos vértices, puede fallar con una cierta probabilidad fija ρ de manera independiente. El modelo anterior da lugar al denominado polinomio de confiabilidad de la red, $R_G(\rho)$, que a grandes rasgos describe la probabilidad de que la red G permanezca conexa.

Un problema que emerge naturalmente es diseñar, dentro de una clase de redes con igual cantidad de vértices y aristas, cuáles de todas las redes presentan la mayor confiabilidad. En particular, un grafo se dice uniformemente más confiable cuando maximiza dicha probabilidad para toda elección posible de la probabilidad de falla ρ para cada una de sus aristas. Diversas propiedades de la red se vuelven relevantes en esta búsqueda: conectividad por aristas, número de cortes de ciertos tamaños, número de árboles recubridores. En [4] se presenta un relevamiento sobre modelos de confiabilidad ante fallas en vértices o en aristas, y parámetros fundamentales de diseño.

La minimización simultánea del número de cortes de cada tamaño introduce la noción de grafo fuerte, cuya relación con la confiabilidad uniforme constituye uno de los principales problemas abiertos del área. En 1986, Boesch [1] introdujo formalmente estos conceptos y planteó una serie de conjeturas que dieron origen al área de grafos uniformemente más confiables. Entre ellas destaca la conjetura de que todo grafo uniformemente más confiable es también un grafo fuerte, cuestión que continúa abierta.

A partir de trabajos en la literatura especializada es sabido que en cada una de las clases de grafos conexos y simples $\mathcal{C}_{n,m}$ cuyo co-rango es menor que 5 existe un grafo que es uniformemente

más confiable. En este trabajo se realiza un estudio experimental sobre clases de grafos de co-rango 5. El principal objetivo consiste en analizar la existencia de grafos uniformemente más confiables y de grafos fuertes en dichas clases. Como consecuencia, se desarrollan herramientas computacionales que permiten validar resultados obtenidos en la literatura.

Este informe se organiza de la siguiente manera. La Sección 2 presenta los conceptos fundamentales de confiabilidad uniforme y conceptos afines. La Sección 3 incluye una lista de resultados teóricos que serán necesarios para desarrollar el estudio. Los algoritmos que fueron desarrollados durante este proyecto se describen en la Sección 4. Los resultados obtenidos tras la ejecución de dichos algoritmos se presentan en la Sección 5. Por último, las principales conclusiones de este informe se presentan en la Sección 6.

2. Conceptos preliminares

A continuación se presentan las definiciones básicas para el desarrollo de este trabajo.

2.1. Conceptos de Teoría de Grafos

Definición 1. Sea $\mathcal{C}_{n,m}$ la clase de grafos conexos con n vértices y m aristas. Diremos que el co-rango de $\mathcal{C}_{n,m}$ y de cada uno de sus grafo es igual a $m - n + 1$

Definición 2. Un grafo $T = (V, E)$ se denomina árbol si T es conexo y acíclico.

Definición 3. Un árbol recubridor de un grafo conexo $G = (V, E)$ es un subgrafo $T = (V, E')$ con $E' \subseteq E$ tal que T es un árbol.

Definición 4. El número de árboles recubridores de un grafo G , denotado $t(G)$, es la cantidad total de árboles recubridores distintos contenidos en G .

Definición 5. Un grafo $G \in \mathcal{C}_{n,m}$ es t -óptimo si $\forall H \in \mathcal{C}_{n,m} : t(G) \geq t(H)$

Definición 6. Sea $G = (V, E)$ un grafo con matriz de adyacencia A y matriz diagonal de grados D . La matriz Laplaciana de G se define como $L(G) = A - D$.

Definición 7. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. La conectividad por aristas de G , denotada $\lambda(G)$, es el número mínimo de aristas cuya eliminación desconecta a G . Es decir $\lambda(G) = \min\{|F| : F \subseteq E, G - F \text{ es desconexo}\}$.

Definición 8. Un grafo $G \in \mathcal{C}_{n,m}$ es λ -óptimo si $\forall H \in \mathcal{C}_{n,m} : \lambda(G) \geq \lambda(H)$

Definición 9. Dado un grafo $G \in \mathcal{C}_{n,m}$, llamamos cadena γ a un subconjunto de aristas de un camino P en G donde todos los vértices internos de P (si los hay) tienen grado 2 en G y P tiene extremos de grado mayor que 2 en G . El conjunto que consiste en todas las cadenas de un grafo G se denota como $\Gamma(G)$.

Definición 10. Dado un grado $G \in \mathcal{C}_{n,m}$, denotamos como $\Gamma^{(k)}(G) = \binom{\Gamma(G)}{k}$ todos los subconjuntos de cadenas de cardinalidad k

Definición 11. Dado un grafo $G \in \mathcal{C}_{n,m}$, definimos $\Gamma_-^{(k)}(G) = \{H \in \Gamma^{(k)}(G) : G \ominus H \text{ es desconexo}\}$.

Definición 12. (Romero, Safe [7]) La destilación de un grafo G , que denotamos $D(G)$, es el grafo que se origina tras colapsar todas las cadenas de G , donde colapsar una cadena implica eliminar todas sus aristas, nodos internos y añadir una arista nueva uniendo los anteriores extremos de la cadena.

Notemos que tras realizar una subdivisión de arista sobre un grafo cualquiera $G \in \mathcal{C}_{n,m}$ se obtiene un nuevo grafo $G' \in \mathcal{C}_{n+1,m+1}$, por lo que el co-rango de ambos es el mismo. Por un razonamiento similar tenemos que un grafo G y su destilación $D(G)$ también poseen el mismo co-rango, ya que la eliminación de i aristas e $i - 1$ nodos internos junto a la posterior generación de una arista genera un co-rango invariante.

Definición 13. Sea H un grafo simple cúbico 2-conexo y sea $Y \subseteq E(H)$. Denotamos $H \odot_s Y$ al grafo que se obtiene de H tras subdividir s veces cada arista en Y y $s - 1$ veces cada arista en $E(H) - Y$.

2.2. Conceptos básicos de Confiabilidad

Sea G en $\mathcal{C}_{n,m}$ y sea ρ un número real en $[0, 1]$. El *polinomio confiabilidad de G en ρ* , que denotamos $R_G(\rho)$, es la probabilidad de que el subgrafo generador de G sea conexo luego de que cada arista de G sea removida de manera independiente con probabilidad ρ . Veremos a continuación que es posible determinar el polinomio confiabilidad de G en ρ mediante conteo.

Decimos que un *corte* de G es un subconjunto de aristas F de G tal que $G - F$ no es conexo. Sea k en $\{0, \dots, m\}$. La *cantidad de k -cortes* G , que denotamos $\mu_k(G)$, es igual a la cantidad de cortes de G de tamaño k . La probabilidad de ocurrencia de cada subgrafo generador de G con exactamente $m - k$ aristas es igual a $\rho^k(1 - \rho)^{m-k}$. Debido a la aditividad de la medida de probabilidad se sigue que

$$R_G(\rho) = 1 - \sum_{k=0}^m \mu_k(G) \rho^k (1 - \rho)^{m-k}. \quad (1)$$

Como $\mathcal{C}_{n,m}$ consta de una cantidad finita de grafos, si fijamos un número real ρ_0 en $(0, 1)$ entonces existe al menos un grafo G en $\mathcal{C}_{n,m}$ que maximiza $R_G(\rho_0)$ dentro de todos los grafos en $\mathcal{C}_{n,m}$. La pregunta que formula Boesch [1] es si existe algún grafo $G_{n,m}$ en cada clase no vacía $\mathcal{C}_{n,m}$ que maximiza $R_{G_{n,m}}(\rho)$ para cualquier elección de ρ en $[0, 1]$ y dentro de todos los grafos G en $\mathcal{C}_{n,m}$.

El siguiente concepto es clave para formalizar la pregunta de Boesch que da origen al área de confiabilidad uniforme.

Definición 14 (Boesch [1]). *Un grafo G en $\mathcal{C}_{n,m}$ es uniformemente más confiable si para cada H en $\mathcal{C}_{n,m}$ y cada ρ en $[0, 1]$ se cumple que $R_G(\rho) \geq R_H(\rho)$.*

Boesch formaliza la anterior pregunta mediante la Conjetura 1.

Conjetura 1 (Boesch [1]). *Si $\mathcal{C}_{n,m}$ es una clase no vacía entonces $\mathcal{C}_{n,m}$ contiene al menos un grafo uniformemente más confiable.*

Dicha conjetura resulta no ser cierta; en la Sección 3 se presentan resultados teóricos que la refutan. Así mismo, dichos resultados con validados empíricamente en la Sección 5. Aunque la existencia de un grafo uniformemente más confiable no está garantizada, es natural preguntarse si pueden identificarse grafos con máxima confiabilidad en regiones particulares del intervalo $[0, 1]$. De dicha pregunta emerge la siguiente definición.

Definición 15. *Un grafo G en $\mathcal{C}_{n,m}$ es localmente más confiable cerca de 0 (resp. cerca de 1) si para cada H en $\mathcal{C}_{n,m}$ existe $\delta > 0$ tal que para cada ρ en $(0, \delta)$ (resp. ρ en $(1 - \delta, 1)$) se cumple que $R_G(\rho) \geq R_H(\rho)$.*

Sea $\mathcal{C}_{n,m}$ una clase no vacía cualquiera y sea G en $\mathcal{C}_{n,m}$. Boesch observa que si $\mu_k(G) \leq \mu_k(H)$ para cualquier elección de k en $\{0, \dots, m\}$ y cualquier grafo H en $\mathcal{C}_{n,m}$ entonces G es uniformemente más confiable, puesto que en tal situación tendríamos que

$$R_G(\rho) = 1 - \sum_{k=0}^m \mu_k(G) \rho^k (1 - \rho)^{m-k} \geq 1 - \sum_{k=0}^m \mu_k(H) \rho^k (1 - \rho)^{m-k} = R_H(\rho)$$

para cualquier elección de ρ en $[0, 1]$. Esto motiva a presentar el concepto de grafo fuerte.

Definición 16 (Boesch [1]). *Un grafo G en $\mathcal{C}_{n,m}$ es fuerte si para cada k en $\{0, \dots, m\}$ y cada H en $\mathcal{C}_{n,m}$ se cumple que $\mu_k(G) \leq \mu_k(H)$.*

Ya hemos observado que todo grafo fuerte es uniformemente más confiable. Aún se desconoce si todo grafo uniformemente más confiable es fuerte.

La Definición 17 serán utilizada para obtener grafos uniformemente más confiables.

Definición 17. *Sean G y H en $\mathcal{C}_{n,m}$. Diremos que G es más fuerte que H cuando $\mu_k(G) \leq \mu_k(H)$ para todo $k \in \{0, \dots, m\}$ y además existe algún i en $\{0, \dots, m\}$ tal que $\mu_i(G) < \mu_i(H)$.*

3. Resultados preliminares

Lema 1. (Boesch [1]) Si G es uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,m}$ entonces G es t -óptimo y λ -óptimo.

El resultado anterior es vital para el desarrollo de este trabajo. Por el contrarrecíproco, cualquier grafo que no sea t -óptimo no es uniformemente más confiable. Nótese que el resultado no depende del co-rango de $\mathcal{C}_{n,m}$. Para el cómputo de la cantidad de árboles recubridores de un grafo, disponemos de los siguientes resultados auxiliares

Teorema 1. (Kirchhoff [2]) El número de árboles recubridores de un grafo G coincide con cualquier cofactor de su matriz Laplaciana.

El siguiente resultado se obtiene a partir de la regla de la suma.

Lema 2. Sea G un grafo y e una arista que no es lazo ni puente. Entonces $t(G) = t(G - e) + t(G/e)$ donde $G - e$ denota el grafo obtenido eliminando e y G/e el obtenido contrayendo e .

Los coeficientes $\mu_i(G)$ de un grafo G brindan información sobre su estructura y confiabilidad. El Lema 3 permite obtener la cantidad $\mu_i(G)$ a partir de las cadenas de G .

Lema 3. (Romero, Safe [7]) Para cada grafo simple 2-conexo G con n vértices y m aristas tal que $m > n$ y cada $k \in \{0, 1, \dots, m\}$,

$$\mu_k(G) = \binom{m}{k} - \sum_{H \in \Gamma^{(k)}(G)} \prod_{\gamma \in H} l(\gamma) + \sum_{H \in \Gamma_-^{(k)}(G)} \prod_{\gamma \in H} l(\gamma)$$

Finalmente, presentamos algunos resultados de inexistencia para sobre clases en el co-rango $c = 5$.

Lema 4. (Condición suficiente para confiabilidad uniforme, Boesch [1]) $G \in \mathcal{C}_{n,m}$ es uniformemente más confiable en su clase si cumple $\mu_i(G) \leq \mu_i(H)$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ y para todo $H \in \mathcal{C}_{n,m}$

No se conoce la veracidad del recíproco. El propósito de este trabajo es estudiar si dicho contrarrecíproco es cierto o no dentro de clases $\mathcal{C}_{n,m}$ cuyo co-rango es igual a 5.

Obsérvese que cada grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,m}$ es simultáneamente localmente más confiable cerca de 0 y cerca de 1. El Teorema 2 determina el único grafo que es localmente más confiable cerca de 0 en clases $\mathcal{C}_{n,m}$ de co-rango 5 y con al menos 9 vértices. Dicho grafo será denotado como G_n , y su definición se brinda a continuación.

Definición 18. (Romero [5]) Definamos para cada entero n tal que $n \geq 9$ el grafo G_n como sigue, usando el grafo W de la Figura 1 con la provista numeración de sus aristas. Sean r y s los únicos enteros tales que $r \in \{0, \dots, 11\}$ y $n + 4 = 12s + r$. Si $r = 0$, sea $X_0 = \emptyset$; si $r = 8$, sea $X_8 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_8, e_{10}, e_{12}\}$; en otro caso, $X_r = \{e_1, \dots, e_r\}$. Entonces G_n se define como $W \odot_s X_r$.

Teorema 2. (Romero [5]) Para cada entero n tal que $n \geq 9$, el grafo $G_n \in \mathcal{C}_{n,n+4}$ es el único localmente más confiable cerca de 0.

Sea n un entero cualquiera tal que $n \geq 9$. En cada clase $\mathcal{C}_{n,n+4}$ nos enfrentamos a la siguiente dicotomía: G_n es uniformemente más confiable o bien no existe grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,n+4}$. Dicha dicotomía fue resuelta en todas aquellas clases $\mathcal{C}_{n,n+4}$ tales que $n \geq 167$. según se describe en el Teorema 3.

Teorema 3. (Romero [5]) Para cada entero n tal que $n \geq 167$, no existe grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,n+4}$

El resultado anterior muestra que solo existe una cantidad finita de clases de co-rango $c = 5$ en donde puede existir grafo uniformemente más confiable; particularmente aquellas cuya cantidad de vértices es menor que 167. Los siguientes resultados nos permiten refinar aún más el número máximo de clases que pueden contener un grafo uniformemente más confiable en dicho co-rango.

Teorema 4. (Romero, Safe [6]) Para cada entero positivo s , no existe grafo uniformemente más confiable en la clase $\mathcal{C}_{12s+4, 12s+8}$

Teorema 5. (Landgren, Steif [3]) Para cada entero positivo s tal que $s \geq 8$, no existe grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{12s-4, 12s}$.

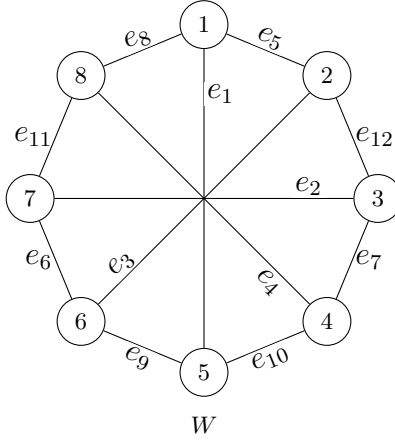


Figura 1: Numeración $e_1, e_2, \dots, e_{12}$ sobre las aristas de W .

4. Algoritmos desarrollados

Por el Teorema 2 sabemos que en cada clase de grafos $\mathcal{C}_{n,n+4}$ ocurre una dicotomía: G_n es el único grafo uniformemente más confiable o bien no existe ningún grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,n+4}$. Además, por el Lema 2, si G_n es uniformemente más confiable entonces debe ser t -óptimo.

Por un lado, el Algoritmo *Mejorable*(n) realiza una búsqueda de grafos que poseen más árboles que G_n . Cuando dicha búsqueda es exitosa, tenemos como consecuencia del Lema 2 que no existe ningún grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,n+4}$, resolviendo la dicotomía de existencia previamente descrita. En aquellas clases de grafos $\mathcal{C}_{n,n+4}$ para las cuales aún se desconoce la existencia de grafos uniformemente más confiables es conveniente realizar una minimización de cortes en busca de grafos fuertes. Con el Algoritmo *MuMin*($k, \mathcal{L}$) se determina la subclase de grafos de una clase $\mathcal{L}$ que minimizan la cantidad de k -cortes. En los apartados siguientes vamos a describir ambos algoritmos.

4.1. Superación del número de árboles de G_n

El Algoritmo *Mejorable*(n) recibe como entrada un entero n tal que $n \geq 8$ y retorna un booleano indicando si es posible, mediante la aplicación de una subdivisión en una cadena G_n y la inserción de un vértice en otra cadena de G_n , incrementar la cantidad de árboles recubridores. En la línea 1 se construye el candidato G_n de la clase $\mathcal{C}_{n,n+4}$. En la línea 2 se recorre de manera exhaustiva todas las parejas de cadenas (γ_1, γ_2) de $\Gamma(G_n)$. En la línea 3 se construye un grafo H_n obtenido de G_n tras insertar un vértice a γ_1 y contraer una arista de γ_2 . En la línea 4 se verifica que H_n no sean isomorfo a G_n y que la cantidad de árboles recubridores de H_n supere a la cantidad de árboles recubridores de G_n . Si ambas condiciones se cumplen, en la línea 5 se retorna el valor Verdadero, finalizando la ejecución del algoritmo. Si no fue detectada una mejora en el ciclo, la línea 8 retorna el valor Falso.

Algoritmo 1 *Mejorable*(n)

```

1:  $G_n \leftarrow \text{ConstruirOptimoCorango5}(n)$ 
2: for all  $(\gamma_1, \gamma_2) : \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(G_n)$  do
3:    $H_n = \text{MoverSubdivision}(G_n, \gamma_1, \gamma_2)$ 
4:   if  $H_n \not\cong G_n$  and  $t(H_n) > t(G_n)$  then
5:     return Verdadero
6:   end if
7: end for
8: return Falso

```

4.2. Minimización de cortes

El siguiente algoritmo nos permitirá computar el valor de $\mu_k(G)$ por medio de una aplicación directa del Lema 3. Este algoritmo utiliza los algoritmos previamente descritos para el cómputo de conjuntos

de interés sobre un grafo.

Algoritmo 2 *ComputarMu(G, k)*

```

1:  $A \leftarrow \binom{|E(G)|}{k}$ 
2:  $\Gamma^{(k)} \leftarrow \text{ComputarGamma}(G, k)$ 
3:  $B \leftarrow 0$ 
4: for  $S \in \Gamma^{(k)}$  do
5:    $B \leftarrow B + \prod_{\gamma \in S} l(\gamma)$ 
6: end for
7:  $\Gamma_-^{(k)} \leftarrow \text{ComputarGammaDisconexo}(G, k)$ 
8:  $C \leftarrow 0$ 
9: for  $S \in \Gamma_-^{(k)}$  do
10:   $C \leftarrow C + \prod_{\gamma \in S} l(\gamma)$ 
11: end for
12: return  $A - B + C$ 

```

El algoritmo 2 recibe como entrada un grafo G y un entero k , y retorna el valor $\mu_k(G)$, correspondiente al número de cortes de tamaño k en G . En la línea 1 se calcula $A \leftarrow \binom{|E(G)|}{k}$, correspondiente a la cantidad total de subconjuntos de k aristas de G . En la línea 2 se calcula $\Gamma^{(k)}$ mediante la función *ComputarGamma*(G, k), es decir, las familias de k cadenas de G . En el bloque constituido por las líneas 3-6 se recorre cada familia $S \in \Gamma^{(k)}$, acumulando en B el producto de las longitudes $l(\gamma)$ de las cadenas γ que pertenecen al conjunto S . En la línea 7 se calcula $\Gamma_-^{(k)}$ mediante la función *ComputarGammaDisconexo*(G, k), es decir, las familias de k cadenas cuya eliminación desconecta a G . En el bloque constituido por las líneas 8-11 se recorre cada familia $S \in \Gamma_-^{(k)}$, acumulando en C el producto de las longitudes $l(\gamma)$ de las cadenas $\gamma \in S$. Finalmente, en la línea 12 se retorna $A - B + C$, valor correspondiente a $\mu(G, k)$. Por el Lema 3 resulta que el valor retornado es precisamente $\mu_k(G)$.

El cómputo de cortes en grafos permite realizar una búsqueda de grafos G en un conjunto de grafos $\mathcal{L}$ que minice $\mu_k(G)$. El algoritmo 3 recibe como entrada a un entero n , a un entero k y una colección de grafos $\mathcal{L}$ no isomorfos, y retorna el par $(\text{Minimo}, \text{Minimales})$ formado por el valor mínimo de μ_k sobre dicha colección y la lista de todos los grafos que alcanzan dicho mínimo. En la línea 1 se inicializa *Valores* como una lista vacía, sobre la cual se irán agregando los valores de μ_k calculados para cada grafo de $\mathcal{L}$. En el bloque constituido por las líneas 2-4 se realiza, en un ciclo *for*, un recorrido sobre todos los grafos $G \in \mathcal{L}$. Para cada uno, se calcula $\mu_k(G)$ mediante el algoritmo 2 presentado en la sección anterior, y se agrega dicho valor a la lista *Valores*. En la línea 5 se calcula *Minimo* como el valor mínimo de la lista *Valores*. En la línea 6 se construye *Minimales* como el conjunto de todos los grafos $G \in \text{Grafos}_n$ tales que $\mu(G, k)$ coincide con *Minimo*. Finalmente, en la línea 7 se retorna el par $(\text{Minimo}, \text{Minimales})$.

Algoritmo 3 $(\text{Minimo}, \text{Minimales}) = \text{ComputeMuMin}(n, k, \mathcal{L})$

```

1:  $\text{Valores} \leftarrow \emptyset$ 
2: for all  $G \in \mathcal{L}$  do
3:    $\text{Valores} \leftarrow \text{Valores} \cup \{\mu_k(G)\}$ 
4: end for
5:  $\text{Minimo} \leftarrow \min(\text{Valores})$ 
6:  $\text{Minimales} \leftarrow \{G \in \mathcal{L} : \mu_k(G) = \text{Minimo}\}$ 
7: return  $(\text{Minimo}, \text{Minimales})$ 

```

Es pertinente realizar dos observaciones. En primer lugar, la colección $\mathcal{L}$ es libre, el algoritmo anterior no impone restricción alguna sobre la estructura de dicha colección. Por ende, aprovechando los resultados teóricos expuestos en este documento, podemos limitarnos a realizar la búsqueda sobre colecciones de grafos de co-rango 5 que son 2-conexos o con otras restricciones estructurales.

En segundo lugar, si resulta de interés considerar simultáneamente los grafos que minimizan múltiples coeficientes μ_k , es posible iterar sobre el conjunto de grafos minimizando un coeficiente en

concreto, para luego repetir el procedimiento sobre otro coeficiente, restringiendo la búsqueda a los minimizantes obtenidos en el paso anterior. Esta estrategia mejora notoriamente la eficiencia del algoritmo bajo estas condiciones, en especial ante colecciones de gran tamaño.

5. Resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos mediante la implementación de los algoritmos desarrollados. Los experimentos realizados persiguen dos objetivos principales. Por un lado, estudiar computacionalmente diversas propiedades de los grafos pertenecientes a las clases $\mathcal{C}_{n,n+4}$: número de árboles recubridores de ciertas familias, número de cortes y grafos minimizantes de dichas cantidades. Por otro lado, validar mediante cómputo los resultados teóricos mostrados en secciones previas y verificar la consistencia de las herramientas implementadas.

5.1. Medio y entorno de ejecución:

Para la realización de los programas se utilizó Python 3.12.3 y el entorno de desarrollo Sage 10.8, así como numpy/sympy para operatoria y librerías nativas para acceso a diversas opciones: time, os, etc. La plataforma de cómputo utilizada para las ejecuciones contaba con: procesador AMD Ryzen 7 5800H (16 Cores, 4.465GHz), 16GB RAM en memoria y un sistema operativo Pop!_OS - Ubuntu 24.04.3 LTS. La biblioteca realizada se encuentra accesible en un repositorio en GitLab de la Facultad de Ingeniería.¹

5.2. Búsqueda de aumento de árboles recubridores

Tras ejecutar el algoritmo $Mejorable(n)$ para aquellos valores enteros n tales que $20 \leq n \leq 179$ se obtienen los resultados que se describen en el Recuadro con colores. Los resultados brindan una validación computacional de los Teoremas 3, 4 y 5, los cuales identifican familias de valores de n para las que G_n no es uniformemente más confiable. Además, en rosado y en rojo se colorean aquellos enteros n que no cumplen con las hipótesis de los teoremas anteriores para los cuales se obtiene algún grafo H_n en $\mathcal{C}_{n,n+4}$ tal que $t(H_n) > t(G_n)$. Se señala con color verde aquellos enteros n en los que no fue detectado un grafo H_n en $\mathcal{C}_{n,m}$ tal que $t(H_n) > t(G_n)$.

En los registros impresos en tiempo de ejecución se detalla los movimientos de subdivisiones usados para aumentar el número de árboles recubridores para cada valor de n . Por ejemplo, en $n = 55$ se tiene que tomando $G' = G_{\{(4,5) \rightarrow (1,5)\}}$, se logra que $t(G') > t(G)$. Que denota el movimiento de una subdivisión cualquiera perteneciente a la única cadena de extremos $(u, v) = (4, 5)$ hacia la cadena identificada por sus extremos $(u', v') = (1, 5)$.

¹Enlace al repositorio: <https://gitlab.fing.edu.uy/agustin.cabrera.bertucci/modulo-taller>

								8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107
108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131
132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143
144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155
156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167
168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179

	Clases donde el único candidato se mantiene
	Clases donde el desplazamiento de una subdivisión logra aumentar árboles recubridores
	Clases donde el desplazamiento de dos subdivisiones logra aumentar árboles recubridores
	Clases descartadas por Teorema 5 o desplazamiento de una subdivisión
	Clases descartadas por Teorema 4 o desplazamiento de una subdivisión
	Clases descartadas por Teorema 3 o desplazamiento de una subdivisión

5.3. Cómputo de número de cortes y grafos minimizantes

Los algoritmos desarrollados en las secciones anteriores, junto con los resultados teóricos obtenidos para el polinomio de confiabilidad, permiten computar de forma exacta el número de conjuntos desconectores de tamaño $k \in \{3, 4, 5\}$ para grafos de tamaño moderado. A continuación se presentan los valores mínimos de μ_k para $3 \leq k \leq 5$ en las clases $\mathcal{C}_{n,n+4}$ con $8 \leq n \leq 15$, así como la cantidad de grafos que alcanzan cada uno de estos mínimos. Estos resultados permiten identificar los candidatos a grafos fuertes y constituyen un insumo fundamental para las comparaciones realizadas en las secciones posteriores.

Los coeficientes mínimos μ_k y sus respectivos minimizantes en las clases $\mathcal{C}_{n,n+4}$ fueron precomputados y dejados a disposición en la librería publicada.

5.4. Comparación de candidato a URMG con grafos fuertes

Para todos los valores de $n \in \{8, 9, \dots, 15\}$ se observó que el único grafo minimizante de μ_5 también minimiza los coeficientes μ_3 y μ_4 . Posteriormente, se verificó si estos grafos fuertes son isomorfos al candidato G_n . Puesto que G_n también minimiza μ_k cuando $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, se concluye que G_n es el único grafo fuerte en $\mathcal{C}_{n,n+4}$ cuando $n \in \{8, 9, \dots, 15\}$.

	μ_3		μ_4		μ_5	
	min- μ_3	$\#\mathcal{C}_{n,n+4}^{\text{min-}\mu_3}$	min- μ_4	$\#\mathcal{C}_{n,n+4}^{\text{min-}\mu_4}$	min- μ_5	$\#\mathcal{C}_{n,n+4}^{\text{min-}\mu_5}$
$n = 8$	8	2	86	1	400	1
$n = 9$	21	3	169	1	727	1
$n = 10$	36	9	277	1	1202	1
$n = 11$	53	9	417	1	1883	1
$n = 12$	72	5	588	1	2800	1
$n = 13$	95	16	816	2	4088	1
$n = 14$	120	29	1086	1	5760	1
$n = 15$	147	16	1045	1	7905	1

6. Conclusiones

Las clases $\mathcal{C}_{n,m}$ de mínimo co-rango en las que no existe grafo uniformemente más confiable tienen co-rango igual a 5. A partir de la teoría de confiabilidad uniforme se desprende que no existe grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,m}$ en cualquiera de las 3 siguientes condiciones:

- Cuando $n \geq 167$
- Cuando $n = 12s + 4$ donde s es un entero mayor que 1
- Cuando $n = 12s - 4$ donde s es un entero mayor o igual a 8

Además, si existe un grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,n+4}$ entonces es único, y es el grafo G_n definido en la Sección 3.

En este trabajo se desarrolló un estudio computacional que apunta a responder la dicotomía de existencia o inexistencia de grafo uniformemente más confiable en las clases de co-rango 5 que no fueron estudiadas en la literatura. Se logró determinar, para cada entero n que no es múltiplo de 12 tal que $75 \leq n \leq 166$, un grafo H_n tal que $t(H_n) > t(G_n)$. Puesto que todo grafo uniformemente más confiable debe ser t -óptimo, se sigue que en dichos enteros n no existe ningún grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,n+4}$.

Puesto que la cantidad de grafos en la clase $\mathcal{C}_{n,n+4}$ crece de manera exponencial con n , la determinación exhaustiva de un grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,n+4}$ es viable únicamente para reducidos valores de n . Se logró establecer que G_n es fuerte cuando $8 \leq n \leq 15$, y es por tanto uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,n+4}$. El estudio desarrollado deja abierta la conjetura de Boesch sobre grafos fuertes, que es una pregunta central en la teoría de grafos uniformemente más confiables.

Referencias

- [1] F. T. Boesch. On unreliability polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis. *J. Graph Theory*, 10(3):339–352, 1986.
- [2] G. Kirchhoff. Ueber die auflösung der gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen vertheilung galvanischer ströme geführt wird. *Annalen der Physik*, 148:497–508, 1847.
- [3] Lorents F. Landgren and Jeffrey E. Steif. A new framework for identifying most reliable graphs and a correction to the $k_{3,3}$ -theorem, 2024.
- [4] Pablo Romero. Uniformly optimally reliable graphs: A survey. *Networks*, 80(4):466–481, 2022.

- [5] Pablo Romero. Most reliable graphs with reduced corank. *Discrete Applied Mathematics*, 379:855–871, 2026.
- [6] Pablo Romero and Martín D. Safe. Least corank for the nonexistence of uniformly most reliable graphs. *Procedia Computer Science*, 223:88–95, 2023.
- [7] Pablo Romero and Martín D. Safe. Nonexistence of uniformly most reliable graphs of least corank. *Discrete Applied Mathematics*, 380:407–419, 2026.