



Decaimientos de mesones no relativistas

Lucía Manuela Germán Pijuan

Tesis de maestría presentada al Programa de Posgrado en Física PEDECIBA-UdelaR como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Física.

Orientadoras:

Dra. Lucía Duarte y Dra. Marcela Peláez

Integrantes del tribunal:

Dr. Miguel Campiglia (UdelaR)

Dr. Bruno Mintz (UERJ)

Dra. Patrícia Magalhães (UNICAMP)

Dr. Nahuel Barrios (UdelaR)

Dra. Lucía Amy (UdelaR)

Suplente:

Dr. Carlos Sánchez (UdelaR)

Montevideo – Uruguay

Junio de 2026

para julieta-

Agradecimientos

Quiero agradecer a toda la gente que me acompañó durante este proceso:

En primer lugar a mis orientadoras, Lucía y Marcela, por compartir estos años conmigo. Aprendí mucho de las dos. A mi hermana, mi madre, mi padre y el resto de la familia, por apoyarme aunque no entiendan muy bien qué es lo que estoy estudiando. A mi abuela Martha, por inspirarme siempre.

A mis amigas y amigos de facultad; Mathías, Agustín, Roberto, Lucía, Sofía, por ser el mejor grupo de estudios, viajes, bailes, meriendas y otros planes. En particular a Agustín y Sofía por su ayuda con todos los programas que no me salían. A mis compañeras, compañeros, colegas y docentes de Facultad. A la gente de Río, por recibirme, ayudarme y motivarme.

A Lidia, por estar conmigo desde que no sabía a qué carrera anotarme y escuchar todas mis quejas. A Agus, por acompañarme todos estos años, motivarme y hacer mi vida más linda. A Kai, por estar acá desde el primer año de carrera y darme alegría cada vez que llego a casa.

A la Universidad de la República, por permitirme estudiar la mejor carrera del mundo. Y por último, a PEDECIBA (y Jimena) por el apoyo y a la ANII por la beca de financiación de esta maestría.

RESUMEN

En este trabajo, calculamos el espectro de energía y las tasas y constantes de decaimiento de mesones no relativistas en un modelo con gluones masivos. Nuestro objetivo es entender el efecto que tiene dicha masa en los observables mencionados. Trabajamos con un potencial de interacción que contiene un término de Yukawa que sale de la amplitud de interacción de dos quarks mediante el intercambio de un gluon, y un término lineal que agregamos para modelar el confinamiento.

Para hallar el espectro y las funciones de onda de los mesones, resolvemos las ecuaciones de Dirac y Schrödinger numéricamente. En el caso de Schrödinger, agregamos correcciones al potencial y mediante la teoría de perturbaciones, calculamos las correcciones al espectro de energía. Utilizamos la ecuación de van Royen-Weisskopf y sus correcciones para hallar las tasas y constantes de decaimiento.

Ajustamos nuestros resultados con datos experimentales y numéricos, hallando los mejores valores para los parámetros de nuestro modelo. Encontramos un mejor ajuste para el caso en que solo consideramos mesones pesados: los observables reproducen correctamente los valores de la literatura. Además obtenemos un valor no nulo para la masa del gluon. En el caso de los mesones más livianos, no hallamos un buen ajuste para los datos experimentales. Concluimos que para obtener mejores resultados, debemos añadir correcciones relativistas de mayor orden a nuestro modelo.

ABSTRACT

In this study, we calculate the energy spectrum and decay constants and widths of non-relativistic mesons in a model with massive gluons. Our goal is to assess the effect of a nonzero gluon mass on those observables. The interaction potential contains a Yukawa-type term which comes from the scattering amplitude of the tree level one gluon exchange, and a linear term which we add to model confinement.

To find the energy spectrum and wave functions of mesons, we solve the Dirac and Schrödinger equations numerically. In the Schrödinger case, we include corrections to the interaction potential and we calculate corrections to the energy spectrum with perturbation theory. We use the van Royen-Weisskopf and its corrections to find the decay constants and widths.

We fit our results to experimental and numerical data, finding the best values for our model parameters. We find a better fit for the case of heavy mesons: the values of the calculated observables are in agreement with the ones found in the literature. We also find a nonzero value for the gluon mass. In the case of lighter mesons, we do not find a good fit for the experimental data. We conclude that we must include higher order relativistic corrections to our model to obtain better results.

Tabla de contenidos

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introducción | 1 |
| 2 | Modelo estándar | 4 |
| 2.1 | Electrodinámica cuántica | 7 |
| 2.1.1 | Diagramas de Feynman | 9 |
| 2.2 | Cromodinámica cuántica y gluones masivos | 11 |
| 2.2.1 | Reglas de Feynman | 13 |
| 2.2.2 | Gluones masivos | 14 |
| 2.3 | Mesones | 16 |
| 2.4 | Cálculo del potencial de interacción | 17 |
| 2.5 | Interacción débil | 19 |
| 3 | Decaimientos | 22 |
| 3.1 | Ancho de decaimiento | 23 |
| 3.1.1 | Mediciones experimentales | 24 |
| 3.1.2 | Regla de oro de Fermi | 26 |
| 3.2 | Decaimientos de mesones | 29 |
| 3.3 | Cálculo de decaimientos | 31 |
| 3.4 | Constantes de decaimiento | 36 |
| 3.4.1 | Valores numéricos y experimentales | 36 |
| 3.5 | Fórmula de van Royen-Weisskopf | 39 |
| 3.5.1 | Deducción de la fórmula | 40 |
| 3.5.2 | Correcciones a la fórmula | 44 |
| 4 | Átomo de hidrógeno | 49 |
| 4.1 | Ecuación de Schrödinger | 49 |
| 4.2 | Correcciones al potencial de Coulomb | 51 |
| 4.2.1 | A primer orden | 52 |
| 4.2.2 | A orden mayor | 52 |
| 4.3 | Ecuación de Dirac | 54 |
| 4.3.1 | Funciones propias | 55 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.3.2 | Paridad | 56 |
| 4.3.3 | Operador K | 57 |
| 4.3.4 | Ecuación radial | 58 |
| 4.3.5 | Potencial de Coulomb | 59 |
| 5 | Espectro y decaimientos con el formalismo de Dirac | 61 |
| 5.1 | Resolución numérica | 62 |
| 5.2 | Constantes de decaimiento | 65 |
| 5.3 | Resultados | 66 |
| 6 | Espectro y decaimientos con el formalismo de Schrödinger | 72 |
| 6.1 | Correcciones al potencial | 74 |
| 6.2 | Resolución numérica | 74 |
| 6.3 | Resultados | 76 |
| 7 | Conclusiones y perspectivas | 85 |
| A | Cálculo de correcciones al potencial de Coulomb | 87 |
| | Referencias | 93 |

Capítulo 1

Introducción

La cromodinámica cuántica (QCD, por su sigla en inglés) es la teoría cuántica de campos que describe la acción de la fuerza nuclear fuerte: una de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza y la responsable de que las partículas se mantengan unidas dentro del átomo. Esta teoría fue desarrollada en los años 70 por Fritzsche y Gell-Mann [1], y desde entonces se ha avanzado enormemente en su estudio y comprensión de sus propiedades. Sin embargo, aún quedan muchos aspectos por entender. Esta tesis apunta a estudiar algunos de ellos.

Las partículas que experimentan esta fuerza se llaman quarks, y sus mediadores son los gluones. Los quarks componen partículas como los protones y neutrones, y otro tipo de partículas llamadas mesones, con las que trabajaremos en esta tesis.

Una de las principales razones por las que la QCD es difícil de estudiar analíticamente es que, a bajas energías, se vuelve no perturbativa. La razón es que la constante de acoplamiento, que describe qué tan intensa es la interacción entre las partículas, es del orden de la unidad en este régimen por lo que la teoría de perturbaciones falla [2, 3]. Ligado a este fenómeno está el problema del confinamiento: en la naturaleza no observamos quarks libres, sino que siempre están agrupados formando partículas compuestas. Se cree que este fenómeno se debe a que, al ser tan intensa la interacción a distancias largas, es muy difícil separar a los quarks y resulta ser más favorable energéticamente crear nuevas partículas. Sin embargo, aunque tengamos evidencia experimental del confinamiento, no se sabe probar su existencia a partir de la teoría.

Debido a las dificultades para estudiar esta teoría de forma perturbativa, se utilizan métodos alternativos. Por ejemplo, métodos no perturbativos basados en las ecuaciones de Schwinger-Dyson [4] o diferentes métodos numéricos o semi-analíticos [5, 6]. Dentro de los métodos numéricos se encuentra QCD en la red (LQCD), que consiste en la discretización del espacio-tiempo en una grilla [7]. En los últimos años se ha avanzado

con las capacidades computacionales que permiten obtener resultados cada vez más precisos [8].

En particular, nos interesa un resultado obtenido en recientes simulaciones de LQCD [9–11] donde se calcula el propagador del gluon. En este trabajo, se halla que el gluon se comporta como una partícula masiva, a diferencia de la QCD convencional donde no tiene masa. A partir de estos resultados, se ha avanzado en la construcción de modelos y teorías que buscan explicar la aparición de esta masa [12–17].

En este trabajo nos basaremos en el modelo de Curci-Ferrari de los años 70 [18], que fue retomado por Tissier y Wschebor en la década del 2010 [19, 20]. Con este modelo se ha avanzado en cálculos de propagadores y vértices de la teoría [21–25] y se ha aplicado al cálculo de espectros en [26].

Nuestro objetivo es continuar por este camino, calculando observables relacionados con los decaimientos de mesones. Calcularemos el potencial de interacción entre quarks a partir de las reglas de Feynman que se obtienen del modelo con gluon masivo, y ajustaremos los espectros y decaimientos de mesones en el límite no relativista. De esta forma, obtendremos los mejores valores para los parámetros del modelo, en particular para la masa del gluon.

En un principio, optamos por utilizar la ecuación de Dirac para nuestros cálculos, ya que permite obtener resultados que contemplan el momento angular de las partículas incluso a primer orden en el potencial de interacción. Sin embargo, al encontrarnos con dificultades computacionales y técnicas optamos por continuar con la ecuación de Schrödinger, que es más estándar en este tipo de problemas, y comparar los resultados obtenidos mediante ambos enfoques. En el caso de Schrödinger, utilizaremos las correcciones al potencial de interacción y calcularemos las correcciones al espectro mediante teoría de perturbaciones.

Esta tesis se organiza de la siguiente manera: en el capítulo 2 repasaremos las ideas principales del Modelo Estándar y las características de las teorías cuánticas de campos que describen las distintas interacciones fundamentales. En el capítulo 3 definimos los decaimientos de partículas y los observables con los que trabajaremos. Veremos cómo calcular estos observables numéricamente y discutiremos los resultados presentes en la literatura. En el capítulo 4, repasamos la resolución del problema del átomo de hidrógeno utilizando tanto la ecuación de Schrödinger como la de Dirac, lo cual nos servirá como punto de partida para analizar las interacciones entre quarks. En el capítulo 5 vemos cómo resolver estas ecuaciones para los mesones utilizando la ecuación

de Dirac, y presentaremos los resultados obtenidos. En el capítulo 6 seguimos el proceso análogo con la ecuación de Schrödinger. Por último, en el capítulo 7 comentamos las conclusiones y perspectivas de este trabajo.

Capítulo 2

Modelo estándar

De acuerdo con las observaciones realizadas por la humanidad a lo largo del tiempo, todo lo que conocemos está formado por un conjunto relativamente pequeño de partículas. Por ejemplo, los átomos están formados por electrones, protones y neutrones, que en su momento se pensaba que eran partículas elementales (es decir, que no están formadas por nada más fundamental). En la década de 1960 se confirmó (algo que se sospechaba desde los años 30s) que en realidad, los protones y neutrones están formados por otras partículas llamadas quarks [27], y que existen también otras partículas aunque no las observemos en la vida cotidiana [28]. Además, se comenzaron a construir teorías donde las interacciones entre estas partículas (por ejemplo, la interacción electromagnética) también se explican mediante el intercambio de otro tipo de partículas llamadas mediadores. El resultado de este conjunto de investigaciones y desarrollos teóricos y experimentales es el Modelo Estándar.

El Modelo Estándar (SM, por su sigla en inglés) es una teoría cuántica de campos que describe tres de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza: el electromagnetismo, la fuerza nuclear fuerte y la fuerza nuclear débil. El electromagnetismo es una fuerza atractiva entre partículas con distinta carga eléctrica, como el protón y el electrón que componen el átomo de hidrógeno. La fuerza nuclear fuerte es la responsable de que los núcleos atómicos se mantengan unidos, e involucra partículas con otro tipo de carga, llamada carga de color. Por último, la fuerza débil se relaciona con los decaimientos o desintegraciones de las partículas. La interacción gravitatoria no forma parte del SM, sino que se describe utilizando la Relatividad General. La fuerza gravitatoria entre dos partículas elementales es despreciable en comparación con las otras tres fuerzas debido a su pequeña masa, por lo que no la consideramos en este trabajo. Actualmente, el Modelo Estándar es la teoría más aceptada para describir estas interacciones fundamentales aunque tiene problemas sin resolver. Por ejemplo, cómo incluir a la interacción gravitatoria dentro del modelo o cómo incluir la masa de los neutrinos (partículas elementales del modelo). En este trabajo de tesis abordaremos el estudio de

los decaimientos de partículas compuestas, donde tanto la interacción fuerte como débil y electromagnética juegan un papel fundamental. En particular, analizando distintos observables abordaremos el problema de entender mejor el régimen de bajas energías de la interacción fuerte y la existencia de una masa para la partícula mediadora de la interacción.

Según el SM [28, 29], las partículas elementales se dividen en dos grupos: fermiones y bosones. Los fermiones componen toda la materia que existe en el universo, mientras que los bosones son los mediadores de las fuerzas o interacciones, y son los responsables de que los fermiones interactúen entre sí. Dentro de los fermiones, encontramos a los quarks y los leptones. Existen 6 tipos de quarks, divididos en 3 familias o generaciones: up y down, charm y strange, top y bottom. En general, se les llama simplemente quarks u , d , c , s , t , b , y al tipo de quark se le llama *sabor*. Estas partículas son las que, por ejemplo, forman el protón y el neutrón que componen los átomos. Los quarks tienen carga eléctrica y también carga de color. Esto significa que sienten la interacción electromagnética y la fuerte, además de la débil. Los leptones también son 6 y se dividen en dos grupos: 3 partículas cargadas (entre ellas el electrón) que sienten tanto la fuerza débil como la electromagnética, y 3 partículas neutras, llamadas neutrinos, que solo sienten la fuerza débil. Ningún leptón tiene carga de color por lo que no experimentan la fuerza fuerte. Cada una de estas partículas tiene además su correspondiente anti-partícula (con la misma masa pero carga opuesta), completando así un total de 24 fermiones. La dinámica relativista de estas partículas se describe utilizando la ecuación de Dirac, en la que profundizaremos más adelante.

El otro tipo de partículas que conocemos son los bosones. El más familiar de los bosones fundamentales es el fotón, el mediador de la interacción electromagnética. El fotón no tiene masa ni carga eléctrica y puede interactuar con cualquier partícula cargada eléctricamente. Para la interacción débil tenemos dos tipos de bosones: el W que tiene carga eléctrica y el Z que es neutro. Pueden interactuar con cualquier partícula, y tienen masas muy grandes si comparamos con los quarks ($M_W = 80.4 \text{ GeV}$ ¹, $M_Z = 91.2 \text{ GeV}$ [28]). A excepción del quark t , los demás tienen masas en un rango de pocos MeV a pocos GeV). Por último, el mediador que más nos va a interesar en este trabajo es el gluon, responsable de la interacción fuerte. No tiene carga eléctrica pero sí carga de color. El gluon solo puede interactuar con partículas que tengan color, es decir los quarks y él mismo. En el Modelo Estándar perturbativo, el gluon no tiene masa. Sin embargo en esta tesis vamos a considerarlo una partícula masiva, basándonos

¹A lo largo de este trabajo utilizaremos unidades naturales donde $c = 1$ y $\hbar = 1$, excepto cuando se indique lo contrario. Por esta razón, en ocasiones usaremos los términos de masa y energía indistintamente.

Modelo estándar de física de partículas

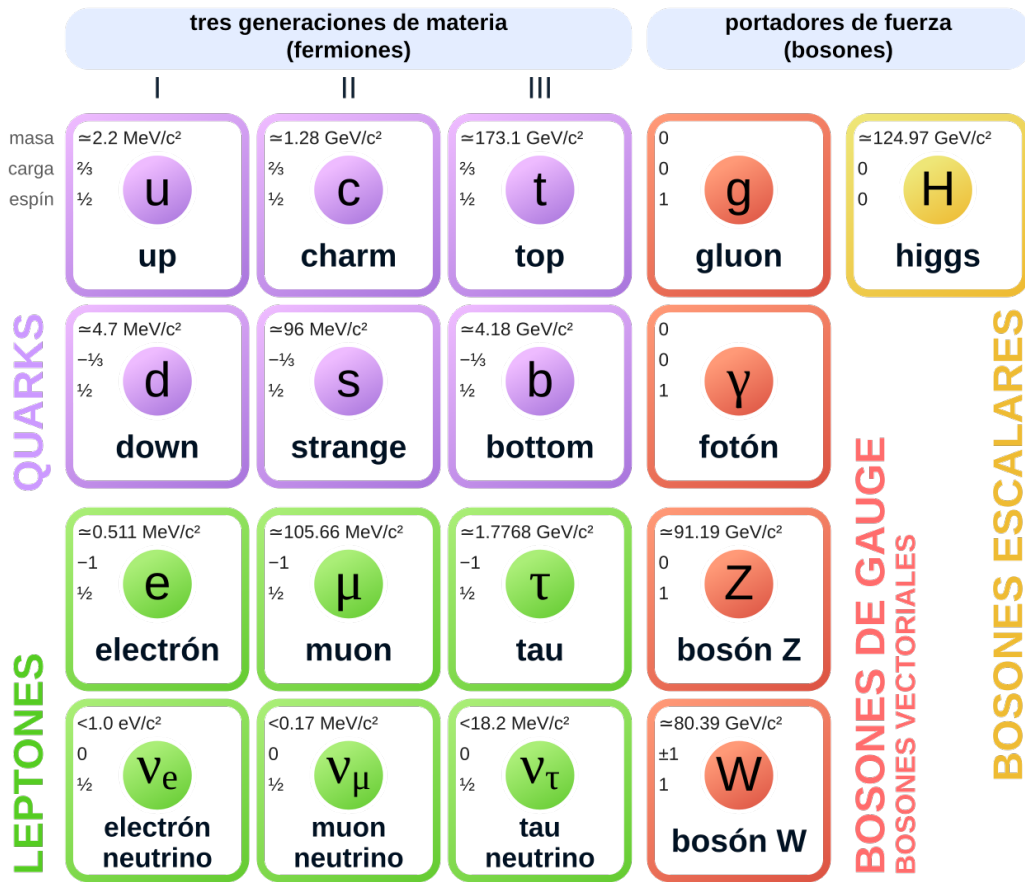


Figura 2.1: Modelo Estándar de física de partículas. Imagen tomada de [32]

en investigaciones recientes que sugieren que se comporta como si tuviera masa. En la sección 2.2 profundizaremos al respecto.

En el SM hay otra partícula, el bosón de Higgs [28], que es el responsable de generar el mecanismo por el cual las demás partículas elementales adquieren su masa. Esta partícula tiene una masa de unos 125 GeV y fue descubierta experimentalmente en 2012 en los experimentos ATLAS y CMS [30, 31]. Es la única partícula escalar (bosón con espín cero) del Modelo Estándar. Los mediadores de las tres interacciones que describimos tienen espín 1, y todos los quarks y leptones tienen espín 1/2. En la figura 2.1 vemos un resumen de todas las partículas, su carga, su masa y su espín.

Más en general, todas las partículas con espín semientero son fermiones y las que tienen espín entero son bosones, aunque no sean partículas elementales [33]. Por ejemplo, el protón es una partícula compuesta con espín 1/2. Por otro lado, en sistemas de partículas idénticas e indistinguibles las funciones de onda de los fermiones son anti-

simétricas bajo el intercambio de dos partículas, mientras que las de los bosones son simétricas. Una consecuencia de este hecho es el principio de exclusión de Pauli, que dice que un estado cuántico puede estar ocupado por, como máximo, un único fermión. Estas propiedades de las partículas se explican mediante el teorema espín-estadística [34].

Casi todos los fenómenos no gravitacionales que observamos en nuestra vida cotidiana podrían explicarse únicamente utilizando los bosones mediadores, los quarks up y down (que son los más livianos y componen la materia que vemos a nuestro alrededor), además del electrón y el neutrino del electrón. Por esta razón, a estos cuatro fermiones se los conoce como la primera generación de la materia. Sin embargo, a otras escalas de energía, por ejemplo las que podemos alcanzar en los colisionadores de partículas, se observan las demás partículas que conforman el Modelo Estándar. Por esta razón a veces se conoce a la segunda y tercera generación de fermiones como *materia exótica*. Esto nos da una pista de que la física que observamos depende mucho de la escala de energía a la que nos encontremos [35]. A continuación haremos un breve repaso de cómo construimos las teorías que describen las interacciones fundamentales.

2.1. Electrodinámica cuántica

Comenzaremos describiendo la más simple de las fuerzas fundamentales: el electromagnetismo [33]. La descripción clásica de esta interacción se conoce desde la época de Maxwell, cuando formuló las ecuaciones que describen las interacciones entre cargas, campos eléctricos y magnéticos, además de su relación con las ondas electromagnéticas. La teoría cuántica de campos que describe el electromagnetismo es la electrodinámica cuántica (QED, por su sigla en inglés). Si consideramos la teoría sin interacciones, podemos describir la dinámica de las partículas cargadas de espín 1/2 (por ejemplo, electrones) usando el lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi. \quad (2.1)$$

En esta expresión, m es la masa de la partícula y ψ es un campo espinorial de cuatro componentes: dos de sus componentes corresponden a los dos grados de libertad de espín de la partícula, y las otras dos a la anti-partícula. Al campo $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ se le llama el adjunto de ψ . Por otro lado, γ^μ son las matrices gamma de Dirac, donde el índice μ toma los valores $\mu = 0, 1, 2, 3$. Son matrices de dimensión 4 que cumplen el álgebra de Dirac $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. En este trabajo utilizaremos la métrica $(+ - - -)$ donde la primera componente es la temporal.

Observamos que este lagrangiano es invariante bajo la transformación $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$, con α constante. A este tipo de transformación se le llama transformación global, ya que α no depende de la posición en el espacio-tiempo. También podemos considerar transformaciones locales o de gauge, donde α ya no es constante sino que depende de la posición: $\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi$. A este tipo de transformación se le llama transformación de gauge $U(1)$, donde $U(1)$ es el grupo que describe la simetría. En este caso, $U = e^{i\alpha(x)}$ pertenece a dicho grupo y si pensamos a U como matriz, es unitaria y de dimensión 1 (es un escalar complejo de módulo uno). Conviene pensar a las transformaciones desde este punto de vista, ya que veremos en las próximas secciones generalizaciones donde ya no tratamos con escalares sino con matrices. El lagrangiano no es invariante bajo la transformación local sino que transforma como

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - (\partial_\mu \alpha) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (2.2)$$

donde $\partial_\mu \alpha \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu}$. Queremos lograr que el lagrangiano sea invariante bajo la nueva transformación (para que sea efectivamente una transformación de gauge). Con este fin, en vez de la derivada común ∂_μ definimos una nueva derivada, llamada derivada covariante D_μ . Ésta debe transformar como $D_\mu \psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi$ para garantizar la invariancia. Para construir esta derivada, tomamos $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x)$, donde e es una constante y $A_\mu(x)$ es un campo vectorial. Si A_μ cambia bajo una transformación de gauge como $A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu$ se puede probar que, para que el lagrangiano sea invariante, se debe cumplir que $\delta A_\mu = -\frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$.

Ahora queremos construir un lagrangiano que describa tanto al campo ψ como a A^μ y la interacción entre ambos. Es conveniente definir el tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Se puede probar que este tensor es invariante bajo las transformaciones de gauge vistas anteriormente; decimos que es invariante de gauge. Para construir un término cinético que pueda incluirse en el lagrangiano, tomamos el producto $-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, que es un escalar de Lorentz. Este es un término cinético ya que es cuadrático en el campo A_μ y contiene derivadas, además de ser invariante de gauge. De esta forma, construimos el lagrangiano de QED agregando el término nuevo y reemplazando en el de Dirac la derivada común por la covariante:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi. \quad (2.3)$$

Este lagrangiano describe la dinámica y la interacción de los campos ψ y A_μ . Hallando las ecuaciones de movimiento para el campo A_μ , llegamos a las ecuaciones de Maxwell [33]. Por lo tanto, podemos concluir que A_μ corresponde al potencial electromagnético con el que interactúa el campo ψ de la partícula cargada. Al tensor $F_{\mu\nu}$ se le llama tensor de campo electromagnético, y sus componentes están relacionadas

con las componentes de los campos eléctrico y magnético. Por ejemplo, tenemos que $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{E^2}{2} - \frac{c^2B^2}{2}$. El término de interacción entre el fermión y el fotón aparece al escribir explícitamente la derivada covariante y es de la forma $e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$.

El punto clave de esta sección es cómo llegamos a construir la invariancia de gauge de la teoría. La electrodinámica cuántica es una teoría invariante bajo transformaciones de grupo $U(1)$, pero el razonamiento será muy similar cuando pasemos a teorías donde aparecen grupos más complejos, como la cromodinámica cuántica (que tiene simetría de grupo $SU(3)$). A las teorías con invariancia de gauge se las conoce simplemente como teorías de gauge. La transformación de gauge correspondiente a cada una y el grupo de simetría asociado a una interacción en particular están determinados por las cantidades conservadas en los diferentes procesos mediados por dicha interacción. A su vez, estas cantidades conservadas se determinan experimentalmente y son esenciales a la hora de determinar qué tipos de interacciones pueden ocurrir y cuales no. Por ejemplo, en cualquier proceso siempre se deben conservar la carga eléctrica y la carga de color. En la siguiente sección veremos una forma útil de representar distintos procesos, donde también tendremos que tener en cuenta las cantidades conservadas.

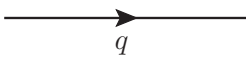
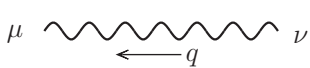
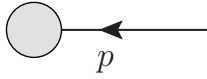
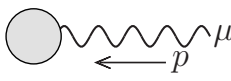
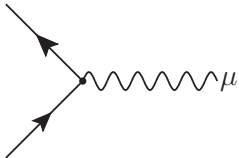
2.1.1. Diagramas de Feynman

Si queremos describir un proceso donde pasamos de un estado inicial $|i\rangle$ a un estado final $|f\rangle$, utilizamos la matriz S , donde

$$S_{fi} = \langle f|i\rangle = \delta_{fi} + i(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i)\mathcal{M}. \quad (2.4)$$

En esta expresión, P_i y P_f son los momentos totales inicial y final respectivamente, y a \mathcal{M} se le llama *amplitud de scattering*.

Para calcular la amplitud \mathcal{M} para un cierto proceso podemos utilizar los diagramas de Feynman, que son una representación diagramática del cálculo perturbativo que se hace para obtener la amplitud del proceso. Escribimos las partículas iniciales y finales, dibujamos todos los diagramas posibles que las conectan (para cierto orden de la teoría de perturbaciones), y escribimos la fórmula que corresponde a cada diagrama. Las líneas internas de un diagrama corresponden a los estados virtuales, mientras que las líneas externas corresponden a las partículas iniciales y finales, y son estados físicos. Para pasar del dibujo a la ecuación, se siguen una serie de reglas que dependen de la teoría. Para el electromagnetismo, tenemos las siguientes reglas (para más detalles y ejemplos, ver [33]):

| | | |
|-----------------------|--|--|
| Fermión interno |  | $= \frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2+i\epsilon}$ |
| Fotón interno |  | $= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon}$ |
| Fermión entrante |  | $= u(p)$ |
| Fotón entrante |  | $= \epsilon_\mu(p)$ |
| Vértice fermión-fotón |  | $= -iQ e \gamma^\mu$ |

En estas expresiones, los q, p son momentos, m es la masa del fermión y Q su carga en unidades de e , la carga del electrón. La métrica es $g_{\mu\nu}$. Para caracterizar a los fermiones, usamos los espinores de Dirac $u(p)$ [33]. La regla correspondiente debe sustituirse por: $\bar{u}(p)$ para un fermión saliente, $\bar{v}(p)$ para un anti-fermión entrante y $v(p)$ para un anti-fermión saliente. Al fotón lo caracterizamos usando el vector de polarización $\epsilon_\mu(p)$. Para un fotón saliente, la regla es $\epsilon_\mu^*(p)$. A la hora de escribir las reglas de Feynman, debemos fijar un gauge. Las expresiones que mencionamos son las correspondientes al gauge de Feynman, que es el más convencional.

Luego de dibujar todos los diagramas posibles, imponemos la conservación del momento en cada vértice. Luego integramos en todos los momentos internos, agregando un factor $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ por cada uno. Finalmente, debemos dividir entre el factor de simetría que cuenta diagramas equivalentes.

Utilizando estas reglas, podemos calcular las contribuciones a la amplitud de probabilidad de que ocurra un cierto proceso. En principio, para cada proceso tenemos infinitos diagramas; los más sencillos son los diagramas nivel *árbol* (sin bucles). Pero también podemos construir diagramas con tantos bucles como queramos. Sin embargo, notamos que el vértice de interacción incluye un factor e . A esta constante se le llama *constante de acoplamiento* de la teoría, y para QED a bajas energías es pequeña. Esto significa que cuantos más bucles tenga un diagrama, más potencias de e contiene y por lo tanto su contribución numérica al cálculo de la amplitud es menor: decimos que está suprimido. Más precisamente, en QED el desarrollo perturbativa se organiza en potencias de la constante de estructura fina ($\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$), que es el parámetro físicamente relevante. Por esta razón, considerando únicamente diagramas con pocos bucles normalmente ya se alcanza la precisión deseada en los cálculos. Como veremos a continuación, en otras teorías como la que describe la interacción fuerte pasa lo contrario:

los diagramas con más bucles aportan contribuciones mayores a la amplitud.

2.2. Cromodinámica cuántica y gluones masivos

La cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría cuántica de campos que describe las interacciones fuertes. Como ya mencionamos, esta interacción es la responsable de que protones y neutrones se mantengan unidos dentro del átomo. De la misma forma, es la responsable de que los quarks se mantengan unidos dentro de un protón o neutrón. Una de las características distintivas de la interacción fuerte es que al contrario de los leptones, que pueden observarse libremente (por ejemplo, encontramos electrones libres en la naturaleza), los quarks y gluones siempre están agrupados. A esta propiedad se le llama *confinamiento* y es algo que se observa experimentalmente pero aún no se sabe explicar completamente desde primeros principios.

A la carga de la interacción fuerte se la conoce como carga de color. Existen tres tipos de color, que a menudo se asocian con los colores rojo, azul y verde. Cada quark tiene un determinado color y cada anti-quark, un anti-color. Todas las partículas que observamos en la naturaleza son sin color, lo cual significa que están formadas por: tres quarks (o anti-quarks) de colores distintos, o un quark de algún color y un anti-quark con su correspondiente anti-color. En el primer caso, se llaman bariones (por ejemplo, el protón y el neutrón) y en el segundo, mesones. Al conjunto de mesones y bariones se le llama hadrones. El hecho de que solo observemos partículas sin color se relaciona con el confinamiento: nunca vemos a los quarks libres sino que están agrupados de forma tal que el color resultante de la partícula es neutro. La interacción fuerte es la única que puede cambiar el color de un quark.

Si queremos escribir el campo de los quarks de forma similar a lo que hicimos con los electrones, tenemos que tener en cuenta el color: el campo será ψ_i , donde i es un índice de color (puede tomar tres valores). Como son fermiones, este campo también será un espinor. De la misma forma que antes, queremos que ψ_i sea invariante de gauge. Tomamos una transformación de la forma $\psi_i \rightarrow U_{ij}\psi_j$. Escribiendo la transformación U como matriz de dimensión 3, se llega a que las condiciones para la invariancia de gauge son que U sea unitaria ($U^{-1} = U^\dagger$) y que su determinante sea 1 [36]. Al grupo de matrices que cumplen estas propiedades, para dimensión 3, se le llama $SU(3)$. La dimensión² del grupo $SU(3)$ es 8. Cada elemento U de un grupo se puede escribir en función de generadores \mathbf{T}^a , de la forma $U = \exp[i\theta^a\mathbf{T}^a]$. La cantidad de generadores es igual a la dimensión del grupo. Por ejemplo, el grupo $U(1)$, que tiene dimensión 1, está

²La dimensión de un grupo es el número de coordenadas necesario para caracterizar un elemento del mismo.

formado por elementos $e^{i\alpha}$ por lo que $\theta^1 = \alpha$ y $\mathbf{T}^1 = 1$. Para $SU(3)$ hay 8 generadores, que corresponden a las matrices de Gell-Mann [33].

Para un grupo de Lie (grupos continuos y diferenciables), los generadores de su álgebra satisfacen relaciones de conmutación de la forma $[\mathbf{T}^a, \mathbf{T}^b] = if^{abc}\mathbf{T}^c$, donde las f^{abc} se llaman constantes de estructura. Estas relaciones definen el álgebra de Lie del grupo. Si las constantes de estructura son todas cero (este es el caso del grupo $U(1)$), se dice que el grupo es abeliano. Es decir, todos sus elementos conmutan. Si no son todas cero, el grupo es no abeliano. El hecho de que $SU(3)$ sea no abeliano es la razón principal por la que QCD es más complicada de estudiar que QED.

Para construir el lagrangiano de QCD, seguimos un proceso similar al de QED pero ahora teniendo en cuenta la estructura de $SU(3)$. Comenzamos escribiendo el lagrangiano de un quark como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi. \quad (2.5)$$

Al igual que antes, vamos a reemplazar la derivada común por una derivada covariante de forma que el lagrangiano sea invariante de gauge. Se prueba que la derivada covariante debe tener la forma

$$\mathbf{D}_\mu = \partial_\mu + ig\mathbf{A}_\mu \quad (2.6)$$

con $\mathbf{A}_\mu = A_\mu^a\mathbf{T}^a$. Análogamente a la e en QED, g es la constante de acoplamiento fuerte. De forma similar a como hallamos el campo del fotón, ahora \mathbf{A}_μ es el campo del gluon. Tenemos un índice extra respecto al fotón, que recorre la dimensión del grupo $SU(3)$: $a = 1, \dots, 8$. Por esta razón en QCD hay 8 gluones distintos. Para completar el lagrangiano, añadimos un término cinético. Finalmente, el resultado es

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}\text{tr}[\mathbf{F}^{\mu\nu}\mathbf{F}_{\mu\nu}] + \sum_{\mathfrak{f}} \bar{\psi}_{\mathfrak{f}}(i\gamma^\mu D_\mu - m_{\mathfrak{f}})\psi_{\mathfrak{f}}. \quad (2.7)$$

En esta expresión, definimos $\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu + ig[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu]$. Una definición equivalente, usando los generadores, es $\mathbf{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a\mathbf{T}^a$, con $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$. El índice \mathfrak{f} en la sumatoria representa a los distintos sabores de los quarks. Si escribimos explícitamente los términos que aparecen en el lagrangiano, vemos que hay dos términos de auto-interacción de los gluones, con la forma $gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \partial^\mu A^{\nu a}$ y $g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e}$. El primero corresponde a un vértice de tres gluones y el segundo a un vértice de cuatro gluones. Estos términos son una consecuencia de que la teoría es no abeliana, ya que en la teoría abeliana las constantes de estructura son cero: los fotones no pueden interactuar entre ellos, pero los gluones sí.

Para las teorías con simetrías de grupos no abelianos, como QCD, los campos no están totalmente determinados: tenemos la libertad de fijar el gauge, de forma similar a lo que ocurre en el electromagnetismo. Es decir, imponemos restricciones extra sobre los campos, que no afectan su física pero sí los determinan matemáticamente. El procedimiento de fijado de gauge en teoría cuántica de campos se llama procedimiento de Faddeev-Popov [34].

Al seguir este procedimiento, se introducen dos nuevos campos c^a, \bar{c}^a llamados *ghosts* (fantasmas) de Faddeev-Popov. Estos son campos no físicos, no existen en la naturaleza sino que son un artefacto matemático de la teoría. La razón de que no sean físicos es que son escalares (espín cero) de Lorentz pero anticonmutan: no cumplen el teorema espín-estadística.

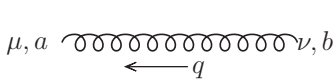
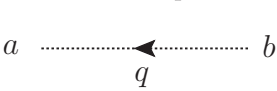
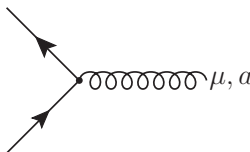
Fijando el gauge de Landau $\partial_\mu A_\mu^a = 0$ y añadiendo los ghost, el lagrangiano de QCD queda

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a + ih^a \partial_\mu A_\mu^a + \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) \psi_f, \quad (2.8)$$

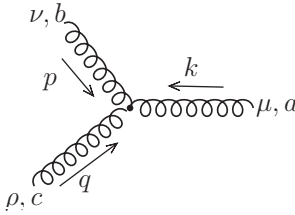
donde h^a se llama campo de Nakanishi-Lautrup, que es un campo auxiliar que resulta de fijar el gauge de Landau [22]. A partir de este lagrangiano se deducen las reglas de Feynman que veremos a continuación.

2.2.1. Reglas de Feynman

Al igual que en QED, podemos escribir las reglas de Feynman para esta teoría. Se mantienen los comentarios sobre conservación del momento, integración en los estados virtuales y factores de simetría. Las reglas para los fermiones no cambian por lo que no las volveremos a escribir. La única diferencia es que ahora llevan un índice de color.

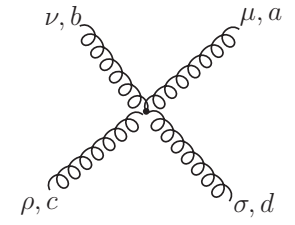
| | | |
|-----------------------|---|--|
| Gluon interno |  | = $\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon} \delta^{ab}$ |
| Ghost interno |  | = $\frac{i\delta^{ab}}{q^2+i\epsilon}$ |
| Vértice fermión-gluon |  | = $ig\gamma^{\mu t a}$ |

Vértice de 3 gluones



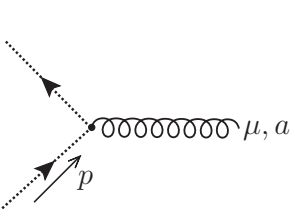
$$= g f^{abc} \left[g^{\mu\nu} (k - p)^\rho + g^{\nu\rho} (p - q)^\mu + g^{\rho\mu} (q - k)^\nu \right]$$

Vértice de 4 gluones



$$= -i g^2 \left[f^{eab} f^{ecd} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{eac} f^{ebd} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ead} f^{ebc} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \right]$$

Vértice gluon-ghost



$$= -g f^{abc} p^\mu$$

En QCD, el factor de desarrollo perturbativo es $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$, y a diferencia de lo que pasa en QED, en el infrarrojo (a energías bajas) se vuelve cercano a 1 por lo que es incompatible con utilizar métodos perturbativos. Este es uno de los motivos por los que es tan difícil el estudio de la cromodinámica cuántica: debemos utilizar métodos alternativos.

2.2.2. Gluones masivos

Simulaciones numéricas de QCD en la red [9–11] muestran que el propagador del gluon se comporta como el de una partícula masiva en el infrarrojo (ver figura 2.2), a diferencia de lo que propone el Modelo Estándar. Por esta razón, en los últimos años se han propuesto distintos modelos que contemplan esta masa de manera efectiva, como el modelo de Curci-Ferrari [18–20] o el Refined Gribov-Zwanziger [12, 13]. Otros métodos no perturbativos basados en la ecuación de Schwinger-Dyson y en el grupo de renormalización funcional también obtienen un gluon masivo [14–17].

En este trabajo trabajaremos con el modelo de Curci-Ferrari y utilizaremos las reglas de Feynman que se obtienen en este modelo en el gauge de Landau. El lagrangiano es igual al de QCD con la excepción de que se agrega un término de masa para el gluon [22]:

$$\mathcal{L}_{\text{CF}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a + i h^a \partial_\mu A_\mu^a + \frac{1}{2} \mu^2 A_\mu^a A_\mu^a + \sum_{\text{f}} \bar{\psi}_{\text{f}} (i \gamma^\mu D_\mu - m_{\text{f}}) \psi_{\text{f}}. \quad (2.9)$$

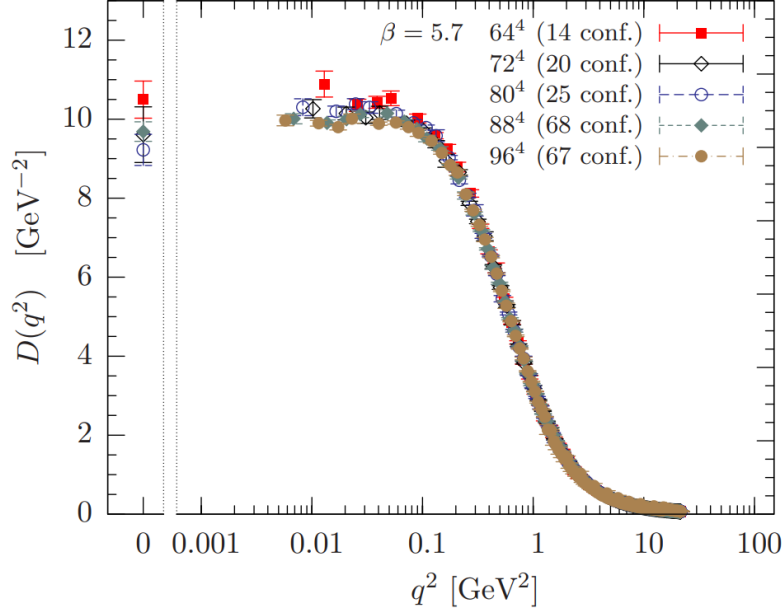


Figura 2.2: Propagador del gluon calculado en la red. A momentos pequeños, vemos que el propagador se acerca a un valor finito en lugar de diverger. Figura tomada de [11].

En esta ecuación, μ es la masa del gluon a nivel árbol. Tomando $\mu = 0$ se recupera el lagrangiano de QCD.

El modelo de Curci-Ferrari ha resultado exitoso en los últimos años para calcular funciones de correlación y compararlas con los resultados de las simulaciones numéricas [21, 23, 24]. Recientemente se ha avanzado en el cálculo de observables: en [25] se calcula la constante de decaimiento del pion y en [26], el espectro de mesones con un potencial obtenido en este modelo. El objetivo de este trabajo es continuar por este camino, calculando tanto el espectro como las tasas y constantes de decaimiento³ de distintos mesones en el límite no relativista.

El estudio de espectros y decaimientos ha sido analizado en el contexto de las ecuaciones de Schwinger-Dyson con soluciones de gluon masivo en [37–40]. A su vez, se han realizado estudios para encontrar un vínculo entre los decaimientos y la masa del gluon usando otros modelos efectivos [41–43]. En particular, en [40], se calculan los elementos de matriz S de interacción entre quarks para un modelo con gluon masivo llamado modelo de Yang-Mills masivo (MYM). La diferencia con nuestro modelo es que MYM no es renormalizable pero sí unitario. Por el contrario, el modelo de Curci-Ferrari es renormalizable pero no unitario [44].

³Parámetros que caracterizan los decaimientos de los mesones. Ver sección 3.3.

2.3. Mesones

En este trabajo nos centraremos en estudiar a los mesones, que son estados ligados compuestos por un quark y un anti-quark. Como ya mencionamos, las partículas que observamos en la naturaleza no tienen carga de color por lo que un mesón debe llevar un color y su correspondiente anti-color. Estudiaremos dos tipos de mesones: por un lado los *heavy-light* que son mesones compuestos por un quark liviano y uno pesado, y por otro lado los *quarkonium*, que están compuestos por un quark y su correspondiente anti-quark (ambos pesados). En la tabla 2.3 vemos un resumen de los mesones con los que trabajaremos. Para cada mesón, existen estados excitados con los que también trabajaremos: en la tabla se muestra solamente el estado base por simplicidad. A los mesones con espín $s = 0$ y paridad impar se les llama pseudoescalares, mientras que a los que tienen $s = 1$ y paridad par se les llama vectoriales.

| Nombre | Composición | Masa en reposo (GeV) | Carga |
|----------|-------------|----------------------|-------|
| B_c^+ | $c\bar{b}$ | 6.27 | +1 |
| B_s^0 | $s\bar{b}$ | 5.37 | 0 |
| B^+ | $u\bar{b}$ | 5.28 | +1 |
| B^0 | $d\bar{b}$ | 5.28 | 0 |
| D_s^+ | $c\bar{s}$ | 1.97 | +1 |
| D^+ | $c\bar{d}$ | 1.87 | +1 |
| D^0 | $c\bar{u}$ | 1.86 | 0 |
| η_c | $c\bar{c}$ | 2.98 | 0 |
| η_b | $b\bar{b}$ | 9.40 | 0 |

Tabla 2.3: Mesones con los que trabajaremos, donde los valores de las masas [28] corresponden al estado base. La carga eléctrica está expresada en unidades de carga del electrón. Los tipo B y D son heavy-light y los η son quarkonium. Para los B , el quark pesado es el b mientras que para los D , el quark pesado es el c .

En primera instancia, estudiaremos a los mesones utilizando la ecuación relativista de Dirac con un potencial de interacción quark-antiquark obtenido a nivel árbol de la teoría de perturbaciones. Luego utilizaremos la ecuación no relativista de Schrödinger pero con correcciones relativistas al potencial. Finalmente compararemos ambos enfoques, y las ventajas y desventajas de cada uno.

El sistema ligado más conocido es el átomo de hidrógeno: lo analizaremos en detalle en el capítulo 4. Este consiste, en su modelo más simple, en un electrón y un protón interactuando mediante el potencial de Coulomb. Analizando su solución analítica se puede obtener el espectro de energías en función de los números cuánticos. Nos vamos a basar en este sistema para estudiar el problema de los mesones, analizando la interacción entre un quark y un anti-quark. En este caso, las ecuaciones no se pueden

resolver analíticamente por lo que vamos a recurrir a una solución numérica. De esta forma podremos obtener el espectro de energía de los mesones, además de la información necesaria para estudiar los decaimientos.

Para un mesón, la masa total está dada por $M = m_1 + m_2 + E$ donde m_i son las masas de los quarks que lo componen, y E es la energía de ligadura: estas son las energías que queremos hallar. Una diferencia importante con el caso del hidrógeno es que para los mesones, las energías de ligadura son positivas, por lo que la masa del estado ligado muchas veces es bastante mayor a la suma de las masas de sus componentes. En la próxima sección vamos a deducir la expresión perturbativa para el potencial de interacción entre los quarks.

2.4. Cálculo del potencial de interacción

Para hallar el potencial, vamos a utilizar la interacción de intercambio de un gluon entre un quark y un anti-quark a nivel árbol (figura 2.3). Calcularemos la amplitud de scattering y usando la aproximación de Born obtenemos el potencial. Esta aproximación consiste en obtener el potencial de interacción entre dos partículas a partir de la transformada de Fourier de la amplitud de scattering de los diagramas de Feynman a nivel árbol [45].

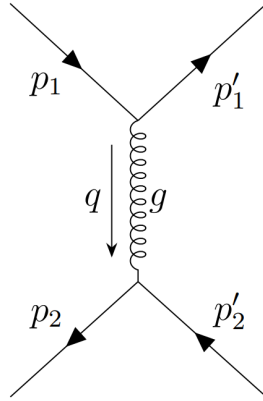


Figura 2.3: Interacción entre un quark y un anti-quark mediante el intercambio de un gluon, a nivel árbol.

Consideramos el scattering de un quark y un anti-quark con masa m . Si las partículas tienen momentos iniciales p_1, p_2 y finales p'_1, p'_2 y el gluon tiene un momento q , la amplitud de scattering es

$$i\mathcal{M} = [\bar{u}'_1 c_1^\dagger (ig\gamma^\mu T^a) c_1 u_1] D_{\mu\nu}^{ab}(q) [\bar{v}'_2 c_2^\dagger (ig\gamma^\nu T^b) c_2 v_2]$$

donde $D_{\mu\nu}^{ab}$ es el propagador del mediador, que en nuestro caso va a ser el gluon. En el modelo de Curci-Ferrari en el gauge de Landau, este propagador a nivel árbol es [22]

$$D_{\mu\nu}^{ab}(q) = \delta^{ab} \frac{i}{q^2 - \mu^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)$$

donde μ es la masa del gluon. Sustituimos este propagador en la amplitud de scattering y podemos juntar los factores de color, obteniendo [46]

$$(c_1^\dagger T^a c_1) \delta^{ab} (c_2^\dagger T^b c_2) = \frac{4}{3}. \quad (2.10)$$

De forma que la amplitud queda

$$i\mathcal{M} = -\frac{4}{3} g^2 [\bar{u}'_1 \gamma^\mu u_1] \frac{i}{q^2 - \mu^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) [\bar{v}'_2 \gamma^\nu v_2]. \quad (2.11)$$

Para realizar el cálculo, vamos a tomar las matrices gamma en la representación de Dirac, donde

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

con I_2 la matriz identidad de dimensión 2, y σ^i las matrices de Pauli. Escribimos los espinores a primer orden del límite no relativista de la forma:

- $u(p) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\bar{u}(p) = u^\dagger(p) \gamma^0 = \sqrt{2m} (\xi^\dagger, 0)$
- $v(p) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix}$
- $\bar{v}(p) = v^\dagger(p) \gamma^0 = \sqrt{2m} (0, -\xi^\dagger)$

donde ξ es el estado de espín del fermión, que tiene dos componentes y cumple $\xi^\dagger \xi = 1$. El factor $\sqrt{2m}$ sale de la normalización de los espinores. Utilizando estos espinores, llegamos a una amplitud

$$i\mathcal{M} = -\frac{16}{3} i m^2 g^2 \frac{1}{\mathbf{q}^2 + \mu^2}. \quad (2.12)$$

Para usar la aproximación de Born, debemos tomar la transformada de Fourier de la amplitud. Calculamos la integral utilizando el teorema de los residuos y obtenemos el potencial

$$V_v(r) = -\frac{g^2 e^{-\mu r}}{3\pi r} \quad (2.13)$$

Este es un potencial vectorial de estilo Yukawa. Es vectorial porque, al igual que el potencial de Colulomb, se puede pensar como la primera componente de un poten-

cial vectorial A^μ . La dependencia en la masa del gluon aparece en la exponencial. Sin embargo, este potencial por sí solo no es suficiente para reproducir el espectro de los mesones, ya que decrece con la distancia. Por esta razón, vamos a agregar un potencial atractivo que nos permita modelar el confinamiento [47].

El otro término en el potencial es de tipo escalar y tiene la forma

$$V_s(r) = br. \quad (2.14)$$

Este término se agrega para modelar el confinamiento, ya que a medida que la distancia entre las partículas crece, también crece el potencial atractivo entre ellas. Al parámetro b se le llama tensión de la cuerda. Nuestros parámetros a ajustar serán la tensión de la cuerda b , la masa del gluon μ y la constante de acoplamiento fuerte g . Este es el potencial a primer orden, que utilizaremos en la resolución de la ecuación de Dirac. Cuando pasemos a resolver Schrödinger tendremos que hallar las correcciones relativistas al mismo.

El último ingrediente que nos falta para poder estudiar los decaimientos de mesones es la interacción débil: en la siguiente sección introduciremos sus características más importantes.

2.5. Interacción débil

La interacción débil [36] es la principal responsable de los decaimientos de partículas: procesos en los que una partícula se convierte en otras. La razón es que es la única fuerza que puede cambiar el sabor de un quark. Esto se debe a que el bosón W es el único de los mediadores que tiene carga eléctrica, por lo que para garantizar la conservación de la carga en el vértice, debe acoplarse a dos partículas con distinta carga. Por ejemplo, un bosón W se puede acoplar a un quark c (con carga $+2/3$) y un anti-quark b (con carga $-1/3$).

Cualquier quark con carga $+2/3$ (u, c, t) se podría acoplar a cualquier antiquark con carga $-1/3$ (d, s, b) mediante un bosón W . Sin embargo, la interacción es más intensa cuando juntamos quarks de la misma generación. Esta propiedad está descrita por la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM), también llamada matriz de mezcla de quarks. Los valores más actualizados son [28]:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.974 & 0.225 & 0.004 \\ 0.225 & 0.973 & 0.042 \\ 0.009 & 0.041 & 0.999 \end{pmatrix}.$$

Cada elemento V_{ij} da la amplitud de probabilidad de que un quark tipo i se convierta en un quark tipo j . Notamos que los elementos de la diagonal son muy cercanos a la unidad, lo cual habla de la tendencia de que las interacciones se mantengan dentro de la misma generación.

Para describir correctamente de forma teórica esta interacción se debe combinar con la electromagnética, formando la teoría electrodébil. El grupo de simetría que la caracteriza es $SU(2) \times U(1)$. El álgebra de Lie de $SU(2)$ son las matrices de Pauli: $[\sigma_i, \sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\sigma_k$. Se puede construir un lagrangiano de esta teoría (ver, por ejemplo, [34]), pero es complicado y no lo necesitamos para nuestros propósitos. Las reglas de Feynman para la interacción débil (en el gauge unitario [48]) son:

| | | |
|----------------------------|--|---|
| Fermión interno | | $= \frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2+i\epsilon}$ |
| Bosón W/Z interno | | $= \frac{-i}{q^2-M^2+i\epsilon} (g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{M^2})$ |
| Vértice cargado leptónico | | $= \frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$ |
| Vértice cargado con quarks | | $= \frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{ij}$ |
| Vértice neutro fermiónico | | $= \frac{-ig_W}{2} \gamma^\mu (c_V^f - c_A^f \gamma^5)$ |

La masa M es la del bosón W o Z , dependiendo de con cuál estemos trabajando. La matriz γ^5 se define como $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ en la base de Dirac. En el último vértice, f es cualquier fermión, y los factores c_V, c_A dependen del tipo de fermión.

| f | c_V | c_A |
|----------------------------|--|----------------|
| ν_e, ν_μ, ν_τ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| e^-, μ^-, τ^- | $-\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_w$ | $-\frac{1}{2}$ |
| u, c, t | $\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_w$ | $\frac{1}{2}$ |
| d, s, b | $-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\theta_w$ | $-\frac{1}{2}$ |

El ángulo θ_w se llama ángulo de mezcla débil, y no se calcula a partir del Modelo Estándar sino que se mide experimentalmente. Tiene un valor de $\theta_w = 28.76^\circ$. En las reglas de Feynman, también hay vértices de interacción de varios bosones W, Z entre

sí y con fotones (ver [49]).

La constante de acoplamiento débil es mucho menor que la de la fuerza fuerte (comparativamente, si $g \approx 1$, $g_{W/Z} \approx 1/30$). Por lo que en este caso no tenemos problema en usar la teoría de perturbaciones ya que los términos de mayor orden rápidamente se vuelven despreciables.

Lo que nos interesa recalcar de los vértices de interacción con fermiones es que la interacción débil permite el cambio de sabor entre quarks. Esta propiedad es fundamental a la hora de analizar los decaimientos de mesones. En el próximo capítulo nos centraremos en los decaimientos y el rol que juega la interacción débil en ellos.

Capítulo 3

Decaimientos

Los decaimientos o desintegraciones ocurren cuando una partícula (elemental o compuesta) que se halla en un estado inestable transiciona hacia otro estado de mayor estabilidad, es decir, de menor energía. Un estado estable es aquel que puede existir indefinidamente sin sufrir ningún decaimiento, ya que no existe otro estado de menor energía al que pueda transicionar cumpliendo con todas las reglas de conservación pertinentes. En mecánica cuántica no relativista, los únicos decaimientos que pueden ocurrir son los electromagnéticos, donde una partícula transiciona a un estado de energía menor de la misma partícula: por ejemplo, un átomo de hidrógeno en un estado excitado que emite un fotón y pasa al estado base de energía. Sin embargo, en teoría cuántica de campos aparecen muchas más posibilidades de decaimientos: las partículas no solo pueden decaer mediante la interacción electromagnética sino también mediante la fuerte o débil. Esto implica que una partícula se puede convertir en otras, siempre de forma tal que la energía final sea menor que la inicial. Por ejemplo, un mesón puede decaer a otros mesones. En general, la energía restante al ocurrir el decaimiento aparece en forma de energía cinética de las partículas producidas durante el mismo.

Estos procesos son muy importantes, ya que son una de las formas en que podemos estudiar las propiedades de las partículas elementales. En los colisionadores de partículas (por ejemplo, LHC en el CERN y Tevatron en Fermilab) se observan los decaimientos de partículas, midiendo cantidades que nos permiten entender mejor su comportamiento. Este es un fenómeno que no observamos tan comúnmente en la vida cotidiana, ya que el protón y el electrón (que componen los átomos con los que está formada la materia que nos rodea) no decaen. En realidad, estas son excepciones, ya que todas las partículas (elementales o compuestas) decaen, a menos que alguna regla de conservación lo impida. Profundizaremos en este aspecto en la sección 3.2 pero, por ejemplo, el protón no decae porque es el barión más liviano y el electrón porque es el leptón más liviano. Las otras partículas que no decaen son el fotón y el neutrino.

Un ejemplo conocido de decaimiento es la desintegración alfa, en la que un núcleo atómico emite una partícula alfa (núcleos ionizados de helio) y se convierte en otro núcleo. Este tipo de desintegración tiene aplicaciones, por ejemplo, en tratamientos médicos y generación de energía nuclear. Ya sea por sus numerosas aplicaciones como para entender mejor las propiedades de las partículas y sus interacciones, el estudio de los decaimientos es de gran interés.

La cantidad que describe qué tanto tiempo debemos esperar, en promedio, hasta que se desintegre una partícula se llama *vida media* (medimos el tiempo en el referencial de reposo de la partícula). La mayoría de las partículas decaen muy rápidamente: por el ejemplo, la vida media del kaón (mesón formado por un quark up y un strange) es de $\tau_K = 1.238 \times 10^{-8}$ s y la del mesón B_c (quarks charm y bottom) es de $\tau_{B_c} = 0.518 \times 10^{-12}$ s [28]. La vida media de las partículas depende de cuáles son las interacciones que intervienen en sus decaimientos. Un decaimiento mediado por la fuerza fuerte tiene un tiempo medio del orden de 10^{-23} s, para la fuerza electromagnética es del orden de 10^{-16} s y para la fuerza débil puede estar entre 10^{-13} s y unos 15 minutos [49]. En general, cuanto mayor es la diferencia de masa entre la partícula inicial y las finales, más rápido ocurre el decaimiento.

En esta tesis estudiaremos los decaimientos de dos tipos de mesones: los compuestos por un quark ligero y un anti-quark pesado (o viceversa), y los compuestos por un quark pesado y su correspondiente anti-quark. Repasaremos los distintos tipos de decaimientos que pueden sufrir estos mesones, para luego centrarnos en los decaimientos de tipo leptónico. Estos corresponden a situaciones donde el mesón decae a un leptón y su correspondiente neutrino (por ejemplo, electrón y neutrino del electrón), sin que aparezcan otros quarks en el proceso.

3.1. Ancho de decaimiento

Consideremos N partículas de un mismo tipo a que pueden decaer por un cierto proceso $a \rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots$ donde $1, 2, 3, \dots$ son las partículas en el estado final. A la probabilidad por unidad de tiempo de que una partícula decaiga se le llama ancho o tasa de decaimiento Γ . De esta forma, tenemos que la vida media es el inverso de la tasa de decaimiento $\tau = \frac{1}{\Gamma}$. Sea $N(t)$ el número de partículas de tipo a en un instante t , una cantidad $\Gamma N(t)dt$ decaerán en un intervalo dt . Entonces, el diferencial del número de partículas es $dN = -\Gamma N dt$.

Integrando la ecuación anterior, podemos calcular el número de partículas de tipo a en un instante t como $N(t) = N(0) e^{-\Gamma t}$. En general, cada partícula puede decaer

de maneras diferentes (por ejemplo, los mesones pueden sufrir decaimientos leptónicos o a otros mesones, entre otros). A cada tipo de decaimiento posible se le llama canal de decaimiento. Entonces, para el cálculo del ancho total se tiene en cuenta la suma de todas las tasas de decaimiento: $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$, donde el índice i corresponde a cada posible canal. Cuantos más posibles decaimientos tiene una partícula, más corta es su vida media.

Otra cantidad de interés es el *branching ratio* $\frac{\Gamma_i}{\sum_i \Gamma_i}$. Nos da la probabilidad de que una partícula decaiga por el canal i , y se puede medir viendo la fracción de veces del total que un tipo de partícula decae a cierto estado final. Por ejemplo, el branching ratio para el decaimiento de un mesón B_s a mesones D_s y ρ ($B_s \rightarrow D_s^- + \rho^+$) es 6.8×10^{-3} [28] lo que significa que, en promedio, este proceso ocurre el 0.68% de las veces que el mesón B_s decae. Por definición, la suma de todos los branching ratios para una partícula determinada es 1.

En la próxima sección, describiremos brevemente cómo se mide el ancho de decaimiento experimentalmente. Luego estudiaremos cómo calcular estas cantidades analíticamente para los mesones que nos interesan.

3.1.1. Mediciones experimentales

La herramienta principal que tenemos para estudiar las interacciones fundamentales en el régimen de altas energías son los colisionadores de partículas. En estos experimentos, se aceleran haces de partículas y se hacen chocar entre sí. Luego de la colisión hay distintos tipos de detectores que analizan los productos de estos choques. En los colisionadores, muchas veces se analizan procesos de *scattering*: choques donde hay varias partículas en el estado inicial, a diferencia de los decaimientos. El cálculo de sus propiedades es un poco diferente así que no nos vamos a ocupar de ellos.

Analicemos el proceso de decaimiento. Consideramos una partícula inestable a con masa M_0 que decae de la forma $a \rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots$ con momentos p_a, p_1, p_2, \dots . Por el principio de incertidumbre de energía y tiempo ($\Delta t \Delta E \approx 1$), cuanto menos tiempo vive una partícula, su energía (y por lo tanto su masa) tendrán una mayor incertidumbre. Por esta razón, al observar partículas inestables, éstas no tienen un valor definido de masa sino que siguen una distribución centrada en el valor teórico.

La masa invariante de las partículas finales, que definimos como $m^2 \equiv (p_1 + p_2 + p_3 + \dots)^2$, está distribuida alrededor de M_0 con un ancho característico $\Delta E \approx \Gamma$. Este

ancho está relacionado con la vida media por $\Gamma = 1/\tau$. Entonces, la distribución $P(m)$ para la producción de las partículas finales ¹ tendrá un pico de ancho Γ alrededor de $m = M_0$. Su forma está dada por la distribución de Breit-Wigner [50]:

$$P(m) \approx \frac{1}{(m - M_0)^2 + \Gamma^2/4} \quad (3.1)$$

Es decir, la suma de las masas finales será M_0 o un poco mayor o menor. En la figura 3.1 vemos la forma de esta función. Cuanto más pequeño es el ancho, más estrecho es el pico.

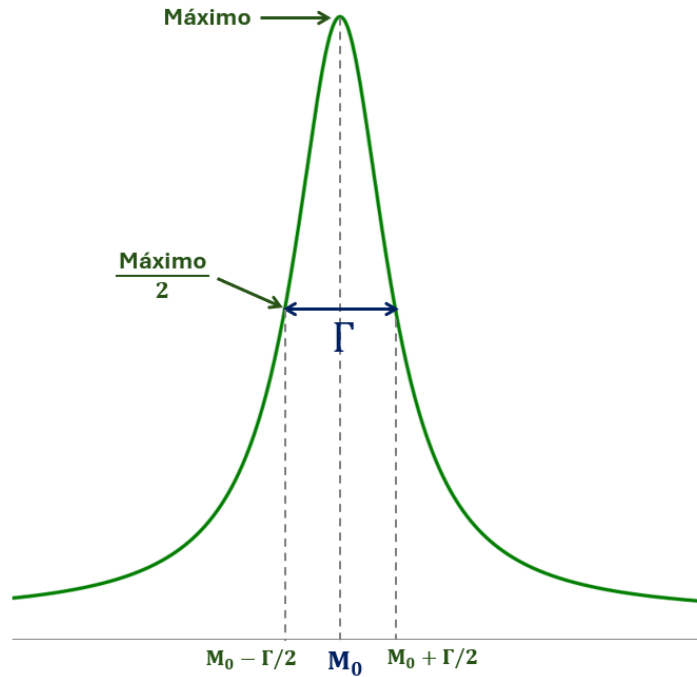


Figura 3.1: Distribución de Breit-Wigner en función de la masa invariante. Observamos que tiene un ancho Γ y un pico en M_0 .

Como ejemplo, consideremos el proceso de decaimiento de un bosón Z a un par muón y anti-muón: $Z^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$. En la figura 3.2, vemos la distribución de masa invariante en función de la masa del par $\mu^+\mu^-$. Vemos que tiene un pico cerca de 91 GeV, que es la masa del bosón Z^0 . Los datos experimentales indican que el ancho de decaimiento es de $\Gamma = 2.495$ GeV.

En algunos casos, como el mencionado del bosón Z^0 , se puede medir directamente el ancho de decaimiento a partir de figuras como 3.2. Si usamos la fórmula de Breit-Wigner 3.1, el ancho se mide a la mitad de la altura total. Si consideramos el caso relativista, la fórmula es un poco diferente pero la forma del gráfico es similar y también

¹Densidad de probabilidad de que la masa invariante esté entre m y $m + \delta m$.

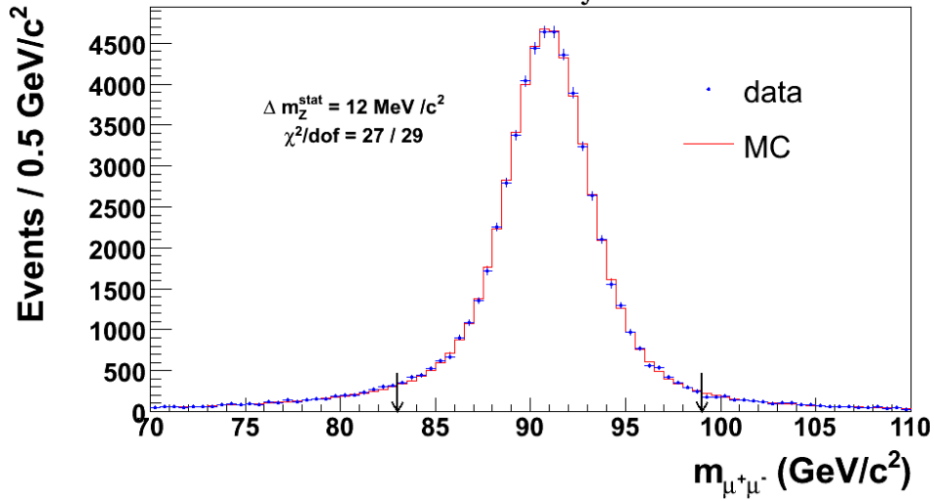


Figura 3.2: Distribución de masa invariante para el proceso $Z^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$. Imagen tomada de [51].

se puede extrapolar el ancho. En otros casos, es difícil medir directamente el ancho de decaimiento ya que es muy pequeño comparado con las resoluciones de los instrumentos. Lo que se hace es medir la vida media y a partir de allí deducir el ancho como $\Gamma = 1/\tau$ [51].

3.1.2. Regla de oro de Fermi

En mecánica cuántica no relativista, los decaimientos se entienden como transiciones entre distintos estados de una misma partícula. Como mencionamos antes, se transiciona de un estado inestable a otro con menos energía. Estos procesos se describen usando la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo, donde pensamos a la dependencia temporal del hamiltoniano como una perturbación respecto al hamiltoniano independiente del tiempo [45].

Para calcular los anchos de decaimiento, se introduce la regla de oro de Fermi. La regla de oro se obtiene considerando un hamiltoniano $H(\mathbf{x}, t) = H_0 + H'(\mathbf{x}, t)$ donde H_0 es el hamiltoniano sin perturbar (para una teoría sin interacciones) y H' es el hamiltoniano de interacción. Este último hamiltoniano es el responsable de las transiciones entre estados y es el que introduce la dependencia temporal. La ecuación de Schrödinger es [35]

$$i \frac{d\psi}{dt} = [H_0 + H'(\mathbf{x}, t)]\psi. \quad (3.2)$$

Escribimos la solución a esta ecuación, separando la parte espacial de la temporal, como [45]

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_k c_k(t) \phi_k(\mathbf{x}) e^{-iE_k t}$$

donde ϕ_k son las funciones propias del hamiltoniano sin perturbar, y E_k los correspondientes valores propios. Los c_k son funciones que describen cómo cambia el estado del sistema en el tiempo. Sustituyendo esta solución en la ecuación (3.2), hallamos las ecuaciones diferenciales para los coeficientes c_k :

$$i \sum_k \frac{dc_k}{dt} \phi_k e^{-iE_k t} = \sum_k H' c_k(t) \phi_k e^{-iE_k t}.$$

Ahora tomamos un estado inicial $|i\rangle = \phi_i$ y coeficientes $c_k(0) = \delta_{ik}$. Asumiendo que la perturbación es pequeña de modo que $|c_i(t)| \approx 1$ y $c_{k \neq i}(t) \approx 0$ para todo tiempo,

$$\sum_k H' c_k(t) \phi_k e^{-iE_k t} \approx H' \phi_i e^{-iE_i t}.$$

Si el estado final es $|f\rangle = \phi_f$, tomando el producto interno con este estado de la ecuación anterior nos queda

$$\frac{dc_f}{dt} = -i \langle f | H' | i \rangle e^{i(E_f - E_i)t}$$

donde definimos $T_{fi} \equiv \langle f | H' | i \rangle$ como el elemento de matriz de transición. Esta ecuación nos da el coeficiente correspondiente a una transición hacia un estado final particular. Para un tiempo $t = \tau$, suponiendo que el hamiltoniano de interacción es independiente del tiempo obtenemos $c_f(\tau) = -iT_{fi} \int_0^\tau e^{i(E_f - E_i)t} dt$.

La probabilidad de que ocurra la transición hacia un estado final dado es $P_{fi} = c_f(\tau) c_i^*(\tau)$, y la tasa de transición $d\Gamma_{fi} = \frac{P_{fi}}{\tau}$. Sustituyendo la expresión para los coeficientes y calculando la integral, se obtiene que

$$\Gamma_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_i). \quad (3.3)$$

Esta es la regla de oro de Fermi [35]. La cantidad $\rho(E_i) \equiv \left| \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_i}$ (donde dn son los estados finales accesibles) se llama densidad de estados, y corresponde a la densidad de estados finales con energía cercana a la inicial. Una observación importante es que la tasa de transición solo da resultados no despreciables si la energía del estado final es similar a la del estado inicial. Esto se puede ver a la hora de realizar la integral, donde la solución tiene un pico para $E_i \approx E_f$.

A primer orden, obtuvimos que podemos escribir al elemento de matriz de transición como el elemento de matriz del hamiltoniano de interacción entre los estados inicial y

final: $T_{fi} = \langle f|H'|i\rangle$. La aproximación se podría mejorar tomando los sucesivos órdenes en teoría de perturbaciones. Por ejemplo, el término de segundo orden corresponde a transiciones donde aparece un estado intermedio $|k\rangle$.

Otra forma de escribir la regla de oro es

$$\Gamma_{fi} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \delta(E_i - E) dn \quad (3.4)$$

donde aparece explícitamente la conservación de la energía. Ahora E es la energía del estado final, e integramos en dn que es el número de estados accesibles por el sistema con energías entre E y $E + \delta E$. Esta formulación nos será más útil a la hora de calcular los anchos de decaimiento. Notamos que la tasa de transición depende del proceso que consideramos, mientras que la densidad de estados está relacionada con la cinemática.

Aunque obtuvimos la regla de oro en un contexto no relativista, podemos construir una formulación donde tenemos en cuenta la cinemática relativista a la hora realizar los cálculos. Con este objetivo, tenemos que construir una formulación que sea invariante de Lorentz. En el caso no relativista, se utiliza la normalización de la función de onda $\int_V \psi^* \psi dV = 1$, y a la hora de calcular la densidad de estados consideramos $V = 1$ (hay una partícula por unidad de volumen) [35]. Esta normalización no es invariante de Lorentz, ya que en otro referencial el volumen se contrae por un factor $1/\gamma$ con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. Por lo tanto, la normalización de una partícula por unidad de volumen corresponde a $\gamma = E/m$ partículas por unidad de volumen en el referencial en movimiento (m es la masa de la partícula). Para tener este efecto en cuenta, se normaliza la función de onda con un factor $2E$. De esta forma, tenemos $\int_V \psi'^* \psi' dV = 2E$, por lo que $\psi' = \sqrt{2E} \psi$.

Para un decaimiento de la forma $a \rightarrow 1 + 2 + \dots + N$, definimos el elemento de matriz invariante de Lorentz como

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \psi'_1 \psi'_2 \dots \psi'_N | H' | \psi'_a \rangle = \sqrt{2E_a 2E_1 2E_2 \dots 2E_N} T_{fi} \quad (3.5)$$

de forma que es la versión relativista de la matriz de transición. Este es el mismo elemento de matriz de scattering con el que trabajamos en el capítulo anterior.

Para terminar de escribir la versión relativista de la regla de oro de Fermi, precisamos definir el espacio de fases. Tomando condiciones de borde periódicas para el volumen, obtenemos que las componentes del momento están cuantizadas de la forma $\mathbf{p} = 2\pi \mathbf{n}$ donde los n_i son números enteros. Esto implica que podemos escribir el número de estados como $dn = \prod_i^{N-1} dn_i = \prod_i^{N-1} \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{(2\pi)^3}$ para un decaimiento donde hay N partículas en el estado final [35]. Otra forma de expresarlo es

$$dn = (2\pi)^3 \prod_i^N \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{(2\pi)^3} \delta^3 \left(\mathbf{p}_a - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \right), \quad (3.6)$$

donde \mathbf{p}_a es el momento de la partícula inicial.

Escribiendo la regla de oro (3.4) en términos de la matriz invariante (3.5) y utilizando el espacio de fases (3.6), obtenemos

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{2E_a} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta(E_a - \sum_{i=1}^N E_i) \delta^3(\mathbf{p}_a - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i) \prod_i^N \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \quad (3.7)$$

Esta es la forma invariante de Lorentz de la regla de oro de Fermi que vamos a utilizar para calcular las tasas de decaimiento a partir de su relación con la matriz \mathcal{M} , como veremos a continuación.

3.2. Decaimientos de mesones

Para calcular explícitamente los anchos de decaimiento, precisamos conocer la forma de la matriz \mathcal{M} . Como mencionamos, está relacionada con el proceso particular que consideremos. Por lo tanto, vamos a analizar qué tipos de decaimientos pueden sufrir los mesones que nos interesan.

Vamos a estudiar mesones compuestos por un quark pesado y uno liviano, o por un quark y su correspondiente anti-quark (tabla 2.3). Todos los mesones tienen espín 0 o 1, por tratarse de una combinación de dos quarks con espín 1/2. El estado fundamental es pseudoescalar: tiene espín cero y paridad impar. Los mesones B_c , D_s , D y B tienen carga ± 1 ya que están compuestos por un (anti)quark con carga $\pm 1/3$ y un (anti)quark con carga $\pm 2/3$. Por el contrario, los mesones η_c , η_b , B_s , B^0 y D^0 están formados por dos quarks con carga opuesta, por lo que su carga total es cero. En los decaimientos se conserva la carga por lo que esta propiedad nos restringe el tipo de decaimiento que puede tener cada mesón. El espín no se conserva necesariamente, pero sí el momento angular total (suma del momento angular orbital y el espín).

También se conserva el número bariónico, que mide la cantidad de bariones que tenemos en el sistema. Un barión tiene número bariónico +1, un anti-barión -1, los quarks +1/3 y los anti-quarks -1/3. Por lo tanto los mesones tienen número bariónico 0. Otra cantidad conservada es el número leptónico, que es similar al bariónico pero con la diferencia de que se conserva dentro de cada familia (electrón, muon, tau). Los mesones también tienen número leptónico 0. El número leptónico no se conserva si estudiamos fenómenos con oscilaciones de neutrinos [49], pero no consideraremos ese

tipo de procesos.

Además de estas cantidades conservadas, a la hora de verificar si un decaimiento es posible debemos tener en cuenta que se conserve el cuadrimomento (momento lineal y energía). Por último, si la suma de las masas en reposo de las partículas “hijas” es mayor que la de la partícula original, el decaimiento no puede ocurrir. Todas estas reglas explican por qué algunas partículas son estables. Por ejemplo, el electrón no puede decaer porque es la partícula cargada más liviana y el protón tampoco porque es el barión más liviano (y se tiene que conservar el número bariónico).

Los decaimientos pueden ocurrir gracias a la acción de cualquiera de las tres interacciones que analizamos en el capítulo anterior. Aquellos mediados por la fuerza débil son especialmente interesantes, ya que esta es la única interacción que permite el cambio de sabor. De modo que, por ejemplo, si consideramos decaimientos de mesones a otros mesones, necesariamente va a intervenir la fuerza débil. Experimentalmente, se observa que un proceso de decaimiento mediado por la fuerza débil da lugar a un ancho de decaimiento más chico que los mediados por la fuerza fuerte o eléctrica: las partículas que solo decaen débilmente tienen mayor vida media.

Los decaimientos más comunes para los mesones son [52]:

- Decaimiento hadrónico, donde en el estado final aparecen uno o más hadrones. Pueden estar mediados por cualquiera de las tres interacciones. Por ejemplo, $B^+ \rightarrow \bar{D}^0 + \pi^+$ donde un mesón se transforma en otros dos mesones. En este ejemplo, se trata un decaimiento mediado por la fuerza débil, ya que cambia el sabor de los quarks: el B^+ está formado por $u\bar{b}$, el D^0 por $c\bar{u}$ y el π^+ por $u\bar{d}$.
- Decaimiento radiativo. Es un caso particular de los decaimientos hadrónicos, que ocurre cuando se emite un fotón en el decaimiento. Se da mediante la fuerza electromagnética o la débil. Por ejemplo, $D^{*0} \rightarrow D^0 + \gamma$, donde el * denota un estado excitado. En este ejemplo, en el estado final aparece la misma partícula inicial pero en un estado de menor energía, además del fotón.
- Decaimiento leptónico a un leptón y su correspondiente neutrino. Están mediados por la interacción débil. Por ejemplo, $D_s^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$.
- Decaimiento semileptónico, que resulta en otro hadrón, un leptón y su neutrino correspondiente. Están mediados por la interacción débil. Por ejemplo, $D^0 \rightarrow K^- + e^+ + \nu_e$.

De estos decaimientos, los únicos que podemos calcular sencillamente de forma analítica son los leptónicos. El resto dependen de *form factors* (factores de forma),

funciones que contienen la estructura no perturbativa de QCD y que deben ser calculados por otros métodos, como QCD en la red o modelos fenomenológicos. Por esta razón, en la siguiente sección vamos a centrarnos en el cálculo de un decaimiento leptónico para entender el procedimiento.

Por conservación de la carga, solo los mesones con carga ± 1 pueden experimentar este tipo de decaimiento: en nuestro caso, son los mesones B_c , D_s , D y B . De estos, el que está medido con más precisión es el decaimiento de D_s . Esto se debe, principalmente, a que el factor CKM $|V_{cs}| \approx 0.97$ es grande. Por otro lado, los factores $|V_{cd}| \approx 0.22$ y $|V_{ub}| \approx 3.6 \times 10^{-3}$ son mas pequeños por lo que los decaimientos leptónicos de D y B son menos probables. Por último, el decaimiento leptónico del B_c nunca se ha medido experimentalmente. Esto se debe a que sus decaimientos hadrónicos son mucho más probables. De todas formas, teóricamente no hay nada que impida que ocurra dicho proceso.

3.3. Cálculo de decaimientos

Para comenzar con el cálculo de los anchos de decaimiento, en primer lugar debemos ocuparnos de la parte cinemática del proceso. Tomemos el caso más simple: el decaimiento a dos partículas de la forma $a \rightarrow 1 + 2$. La regla de oro de Fermi (3.7) queda

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{2E_a} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta(E_a - E_1 - E_2) \delta^3(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \quad (3.8)$$

En esta fórmula, los factores correspondientes al espacio de fases dependen únicamente de la cinemática del problema y el número de partículas final. Como la expresión es invariante de Lorentz, elegimos trabajar en el referencial del centro de masas (ver figura 3.3). Como la partícula que decae está en reposo, $E_a = m_a$ y $\mathbf{p}_a = \mathbf{0}$. Por conservación del momento, $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$. Entonces,

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{8\pi^2 m_a} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta(m_a - E_1 - E_2) \frac{d^3\mathbf{p}}{4E_1 E_2}$$

Pasando a coordenadas polares y reescribiendo las energías en términos de las masas y momentos ($E_i = \sqrt{m_i^2 + p^2}$):

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{8\pi^2 m_a} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta(m_a - \sqrt{m_1^2 + p^2} - \sqrt{m_2^2 + p^2}) \frac{p^2}{4\sqrt{m_1^2 + p^2} \sqrt{m_2^2 + p^2}} dp d\Omega.$$

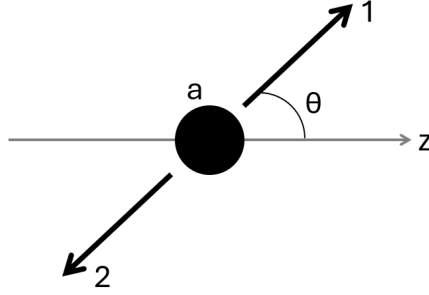


Figura 3.3: Decaimiento a dos partículas visto desde el referencial del centro de masa. La partícula inicial tiene momento nulo, y las finales salen con momentos de igual módulo y dirección opuesta.

La amplitud es independiente de los ángulos así que realizamos esas integrales directamente obteniendo un factor 4π . Para la integral en el momento usamos la delta de Dirac y obtenemos:

$$\Gamma_{fi} = \frac{p}{8\pi m_a^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (3.9)$$

En esta expresión, p es el valor del momento final que es compatible con la conservación de la energía: $p = \frac{1}{2m_a} \sqrt{m_a^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2m_a^2 m_1^2 - 2m_a^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2}$ [49]. La ecuación (3.9) es válida para cualquier decaimiento a dos partículas. La información sobre el proceso particular que consideremos está contenida en el elemento de matriz.

Para calcular el elemento de matriz \mathcal{M} , dibujamos los diagramas de Feynman correspondientes al proceso que estamos estudiando y calculamos la amplitud utilizando las reglas de Feynman.

Decaimiento leptónico del mesón B_s : Como ejemplo de decaimiento leptónico, vamos a calcular la tasa de decaimiento para el decaimiento leptónico del mesón B_s : $B_s^+ \rightarrow l^+ + \nu_l$ donde l es cualquier leptón y ν_l es su neutrino asociado. El procedimiento es el mismo para cualquier mesón en el estado inicial. Utilizaremos las reglas de Feynman para la interacción débil detalladas en la sección 2.5.

A nivel árbol, el diagrama para este decaimiento es el que se muestra en la figura 3.4. Tenemos al mesón acoplado al bosón W , y éste dando lugar a un leptón y un neutrino. El problema es que no conocemos cómo se acopla el mesón al W . Podríamos simplemente tomar el vértice entre dos quarks (b y s , en este caso) y el bosón, pero esto no tiene en cuenta la estructura interna del mesón. La teoría débil no predice cómo es este acoplamiento, por lo que debemos recurrir a otras estrategias.

Recordando que los vértices entre un W y dos fermiones son proporcionales a γ^μ

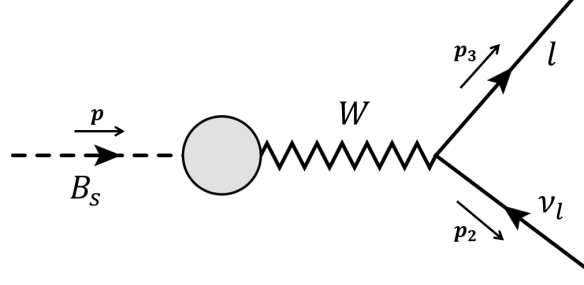


Figura 3.4: Decaimiento del mesón B_s a un leptón y su correspondiente neutrino, mediado por un bosón W .

(ver sección 2.5), vamos a construir un acoplamiento entre el mesón y el W que también sea un cuadvivector. Precisamos que sea de esta forma porque el propagador del bosón es proporcional a $g_{\mu\nu}$, y la amplitud debe ser un escalar. A este factor lo escribimos de la forma $\frac{-ig_W}{2\sqrt{2}}F^\mu$, utilizando el mismo prefactor que para el resto de los vértices.

Definición de la constante de decaimiento: Como el mesón tiene espín cero, no trae un factor asociado a la polarización de la forma ϵ^μ . Por lo tanto, la única posibilidad que tenemos para formar un cuadvivector es utilizar su momento p^μ . Entonces, escribimos $F^\mu = f_{B_s}p^\mu$, donde f_{B_s} se llama constante de decaimiento del mesón. La constante de decaimiento de un mesón es el parámetro que mide la amplitud de probabilidad de que el mesón se acople a la corriente (débil en este caso, pero también podría ser electromagnética) que gobierna su desintegración. Esta constante está dada por la amplitud de probabilidad de crear el mesón B_s a partir del vacío, mediante la corriente débil: $\langle 0|J^\mu|B_s(p)\rangle = if_{B_s}p^\mu$, donde $J^\mu = \bar{s}\gamma^\mu\gamma^5b$ es la corriente axial débil. En este decaimiento estamos considerando un mesón pseudoescalar; también se puede definir para mesones vectoriales.

Estas constantes han sido estudiadas para distintos mesones, tanto por métodos experimentales como cálculos numéricos utilizando distintos métodos (ver sección 3.4.1). Vamos a calcular el ancho de decaimiento para entender cómo aparecen estas constantes en la expresión final.

Además del momento p del mesón, tomamos p_3 y p_2 como los momentos del leptón y del neutrino respectivamente. Usando las reglas de Feynman, la amplitud del decaimiento es

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= i\bar{u}(3) \left(\frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \right) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v(2) F^\nu \frac{ig_{\mu\nu}}{M_W^2} \left(\frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \right) V_{sb} \\ &= \frac{g_W^2 V_{sb}}{8M_W^2} (\bar{u}(3)\gamma_\mu(1 - \gamma^5)v(2)) F^\mu \end{aligned}$$

$$= \frac{g_W^2 V_{sb} f_{B_s}}{8M_W^2} (\bar{u}(3)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(2)) p^\mu.$$

Para calcular la tasa de decaimiento precisaríamos tomar el cuadrado de la amplitud $|\mathcal{M}|^2$. Sin embargo, en la mayoría de los experimentos no tenemos control sobre los espines de las partículas iniciales ni finales. Por esta razón, en vez de la amplitud al cuadrado se suele calcular la suma en los espines finales y el promedio en los espines iniciales. A esta cantidad la denotamos $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$.

En primer lugar, calculamos la amplitud al cuadrado

$$|\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{g_W^2 V_{sb} f_{B_s}}{8M_W^2} \right)^2 (\bar{u}(3)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(2)) p^\mu (\bar{u}(3)\gamma_\nu(1-\gamma^5)v(2))^* p^\nu$$

donde el asterisco denota el conjugado. Para realizar este tipo de cálculos, utilizamos la propiedad (ver demostración en [49])

$$\sum_{\text{espines finales}} (\bar{u}(a)\Gamma_1 v(b)) (\bar{u}(a)\Gamma_2 v(b))^* = \text{Tr}(\Gamma_1(\not{p}_b - m_b)\bar{\Gamma}_2(\not{p}_a + m_a)).$$

En esta expresión, los Γ son operadores. Por ejemplo, en nuestro caso $\Gamma_1 = \gamma_\mu(1-\gamma^5)$. Utilizamos la notación $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$.

Para promediar en los espines iniciales, debemos dividir entre la cantidad de posibles espines. Por ejemplo, si la partícula inicial tuviera espín 1/2, tiene dos posibles orientaciones por lo que agregaríamos un factor 1/2. Como el mesón tiene espín cero, solo hay una posibilidad por lo que este factor es 1. Entonces,

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \sum_{\text{espines finales}} \left(\frac{g_W^2 V_{sb} f_{B_s}}{8M_W^2} \right)^2 (\bar{u}(3)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(2)) p^\mu (\bar{u}(3)\gamma_\nu(1-\gamma^5)v(2))^* p^\nu \\ &= \left(\frac{g_W^2 V_{sb} f_{B_s}}{8M_W^2} \right)^2 p_\mu p_\nu \text{Tr}(\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{p}_2\gamma^\nu(1-\gamma^5)(\not{p}_3 + m_l)). \end{aligned}$$

En esta expresión, m_l es la masa del leptón, y tomamos la masa del neutrino como nula. Para seguir con el cálculo, precisamos tomar la traza de varios elementos. Lo haremos utilizando una serie de propiedades de las trazas de matrices gamma [33]. Por ejemplo, $\text{Tr}(\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\nu\not{p}_3) = 4(p_2^\mu p_3^\nu - g^{\mu\nu} p_2 \cdot p_3 + p_2^\nu p_3^\mu)$. Calculando todas las trazas, llegamos a

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \left(\frac{g_W^2 V_{sb} f_{B_s}}{8M_W^2} \right)^2 p_\mu p_\nu \left[8(p_2^\mu p_3^\nu - g^{\mu\nu} p_2 \cdot p_3 + p_2^\nu p_3^\mu) - 8i p_{2,\alpha} p_{3,\beta} \epsilon^{\beta\mu\alpha\nu} \right] \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{g_W^2 V_{sb} f_{B_s}}{M_W^2} \right)^2 [2(p \cdot p_2)(p \cdot p_3) - p^2(p_2 \cdot p_3)].
\end{aligned}$$

Por conservación del momento, $p = p_2 + p_3$, lo cual implica que $p_2 \cdot p_3 = \frac{1}{2}(m_{B_s}^2 - m_l^2)$ [49] donde m_{B_s} es la masa del mesón. Entonces,

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{8} \left(\frac{g_W^2 V_{sb} f_{B_s}}{M_W^2} \right)^2 \left[\frac{1}{2}(m_{B_s}^2 - m_l^2)(m_{B_s}^2 + m_l^2) - \frac{1}{2}m_{B_s}^2(m_{B_s}^2 - m_l^2) \right] \\
&= \frac{1}{16} \left(\frac{g_W^2 V_{sb} f_{B_s}}{M_W^2} \right)^2 m_l^2(m_{B_s}^2 - m_l^2).
\end{aligned}$$

De esta forma, obtenemos la amplitud de scattering. Para calcular la tasa de decaimiento usamos la expresión (3.9) para el decaimiento a dos partículas:

$$\Gamma = \frac{|\mathbf{p}_2|}{8\pi m_{B_s}^2} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle.$$

Podemos calcular el momento de las partículas finales como $|\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2m_{B_s}}(m_{B_s}^2 - m_l^2)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{1}{32m_{B_s}} \frac{1}{8\pi m_{B_s}^2} \left(\frac{g_W^2 V_{sb} f_{B_s}}{M_W^2} \right)^2 m_l^2(m_{B_s}^2 - m_l^2)^2 \\
&= \left(\frac{g_W^2 V_{sb} f_{B_s}}{16M_W^2} \right)^2 \frac{m_l^2}{\pi m_{B_s}^3} (m_{B_s}^2 - m_l^2)^2.
\end{aligned}$$

Esta es la expresión final para la tasa de decaimiento. Si conociéramos la constante de decaimiento f_{B_s} , la podríamos calcular explícitamente, ya que el resto de los valores son conocidos. Esta expresión tiene la misma forma para el decaimiento de cualquier mesón: basta con sustituir su masa, su constante de decaimiento y el elemento de matriz CKM correspondiente.

En la próxima sección veremos cómo calcular las tasas y constantes de decaimiento. Para la mayoría de los mesones vamos a centrarnos en calcular las constantes ya que, como mencionamos antes, las tasas no se pueden calcular analíticamente excepto para unos pocos decaimientos. Las constantes de decaimiento tienen la ventaja de que solo dependen del mesón y no del proceso considerado. Por otro lado, utilizaremos las tasas de decaimiento para procesos donde las mismas están bien medidas y se pueden calcular analíticamente. En la próxima sección detallaremos cómo se hallan estos observables.

3.4. Constantes de decaimiento

Definimos la constante de decaimiento de un mesón como la amplitud de probabilidad de que el quark y el anti-quark que lo componen se aniquilen dando lugar a un bosón W , Z o un fotón. Para un mesón pseudoescalar $|P\rangle$, la definición involucra a su momento p :

$$\langle 0|J^\mu|P\rangle = if_P p^\mu,$$

donde J^μ es la corriente axial $\bar{q}\gamma^\mu\gamma^5q$. La razón es que, por paridad, este es el único tipo de corriente que puede crear un mesón pseudoescalar desde el vacío hadrónico $|0\rangle$. Esto implica que el mediador de la interacción debe ser un bosón W [53]. Por lo general, para estudiar las constantes de mesones pseudoescalares se utilizan los decaimientos de tipo leptónico, ya que son los más sencillos de analizar. Para un mesón vectorial, se define la constante de decaimiento como

$$\langle 0|J^\mu|V\rangle = f_V M \epsilon^\mu$$

donde ϵ^μ es el vector de polarización del mesón y M es su masa. Ahora J^μ es una corriente vectorial $\bar{q}\gamma^\mu q$. Esta corriente transforma como vector bajo paridad por lo que se puede acoplar a mesones vectoriales. Para este tipo de procesos aparecen el fotón o el bosón Z como mediadores.

En los detectores de partículas, lo que se mide experimentalmente son las vidas medias, como vimos en la sección 3.1.1. A partir de este dato se puede deducir la tasa de decaimiento total, y viendo la cantidad de veces que ocurre cada tipo de decaimiento, se deduce el branching ratio y la tasa de decaimiento particular al canal de decaimiento específico. Por otro lado, las constantes de decaimiento no son tan fáciles de obtener experimentalmente por lo que la mayoría de los valores conocidos provienen de cálculos numéricos.

3.4.1. Valores numéricos y experimentales

En las tablas 3.1 y 3.2 vemos los valores de algunas constantes de decaimiento calculadas mediante métodos numéricos, que tendremos como referencia a la hora de comparar con nuestros resultados. Dentro de los diferentes métodos tenemos: LQCD (Lattice QCD, o QCD en la red) que es una formulación no perturbativa de QCD, donde el espacio-tiempo se discretiza en una red; QCD SR (QCD Sum Rules) que es un método semi-analítico, y LFQM (Light-Front Quark Model) que es un modelo fe-

nomenológico para describir hadrones en términos de quarks constituyentes².

| Método | Referencia | f_{D^+} (MeV) | f_{D_s} (MeV) |
|--------|--------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| LQCD | ETM [54] | 207.4(3.7)(0.9) | 247.2(3.9)(1.4) |
| LQCD | Fermilab/MILC [55] | 212.6(0.4)($^{+1.0}_{-1.2}$) | 249.0(0.3)($^{+1.1}_{-1.5}$) |
| LQCD | χ QCD [56] | — | 254(2)(4) |
| LQCD | HPQCD [57] | 208.3(1.0)(3.3) | — |
| LQCD | Fermilab/MILC [58] | 218.9(9.2)(6.6) | 260.1(8.9)(6.1) |
| LQCD | HPQCD [59] | — | 248.0(1.4)(2.1) |
| LQCD | Fermilab/MILC [60] | 212.7(0.6) | 249.9(0.4) |
| QCD SR | Wang [61] | 208(10) | 240(10) |
| QCD SR | Gelhausen [62] | 201($^{+12}_{-13}$) | 238($^{+13}_{-23}$) |
| QCD SR | Narison [63] | 204(6) | 246(6) |
| QCD SR | Lucha [64] | 206.2(8.9) | 245.3(16.3) |
| LFQM | Hwang [65] | — | 264.5(17.5) |

Tabla 3.1: Valores de las constantes de decaimiento de los mesones D y D_s obtenidas mediante distintos métodos numéricos. El primer valor de incertidumbre corresponde a errores estadísticos y el segundo, a errores sistemáticos.

| Método | Referencia | f_{B^+} (MeV) | f_{B_s} (MeV) | f_{B^0} (MeV) |
|--------|----------------|----------------------|-----------------------|------------------|
| LQCD | ETM [66] | 196(9) | 235(9) | 196(9) |
| LQCD | HPQCD [67] | 184(4) | 224(5) | 188(4) |
| LQCD | Aoki [68] | 218.8(6.5)(30.8) | 263.5(4.8)(36.7) | 218.8(6.5)(30.8) |
| LQCD | RBC [69] | 195.6(6.4)(13.3) | 235.4(5.2)(11.1) | 199.5(6.2)(12.6) |
| LQCD | HPQCD [70] | 191(1)(8) | 228(3)(10) | 191(1)(8) |
| LQCD | HPQCD [70] | 189(3)(3) | — | 189(3)(3) |
| LQCD | HPQCD [71] | 186(4) | 224(5) | — |
| LQCD | HPQCD [72] | — | 225(3)(3) | — |
| LQCD | Fermilab [58] | 196.9(5.5)(7.0) | 242.0(5.1)(8.0) | 196.9(5.5)(7.0) |
| LQCD | Fermilab [60] | 189.4(1.4) | 230.7(1.3) | — |
| QCD SR | Wang [61] | 194(15) | 231(16) | — |
| QCD SR | Baker [73] | 186(14) | 222(12) | — |
| QCD SR | Lucha [74] | 192.0(14.6) | 228.0(19.8) | — |
| QCD SR | Gelhausen [62] | 207($^{+17}_{-9}$) | 242($^{+17}_{-12}$) | — |
| QCD SR | Narison [63] | 206(7) | 234(5) | — |

²Un quark constituyente es un quark “efectivo” dentro de un hadrón, cuya masa incluye los efectos de su interacción con el vacío de QCD (gluones y pares quark-antiquark), resultando en una masa mucho mayor (~ 300 MeV para los quarks u y d).

Tabla 3.2: Valores de las constantes de decaimiento de los mesones B , B^0 y B_s obtenidas mediante distintos métodos numéricos. El primer valor de incertidumbre corresponde a errores estadísticos y el segundo, a errores sistemáticos.

En [53] se calcula un promedio de los valores mostrados en la tabla 3.1, obteniendo $f_{D^+} = 211.9(1.1)$ MeV y $f_{D_s} = 249.0(1.2)$ MeV, y un promedio de los valores numéricos 3.2, obteniendo $f_{B^+} = 187.1(4.2)$ MeV, $f_{B_s} = 227.7(3.4)$ MeV y $f_{B^0} = 190.9(4.1)$ MeV. Para el mesón B_c , en [71] usando LQCD se obtiene $f_{B_c} = 427(6)$ MeV. Estos son los valores de las constantes de decaimiento que utilizaremos en nuestros ajustes.

Por otro lado, a partir de datos experimentales no se calculan las constantes sino su producto con los elementos de la matriz CKM, como vemos en la tabla 3.3.

| Proceso | $ V f$ (MeV) | Experimento |
|---|--------------------------------|-----------------|
| | $ V_{cd} f_{D^+}$ | |
| $D^+ \rightarrow \mu^+\nu$ | $47.07 \pm 2.10 \pm 0.57$ | CLEO-c [75, 76] |
| $D^+ \rightarrow \mu^+\nu + \tau^+\nu$ | $46.41 \pm 1.94 \pm 0.57$ | CLEO-c [75, 76] |
| $D^+ \rightarrow \mu^+\nu$ | $45.73 \pm 1.17 \pm 0.38$ | BESIII [77] |
| | $ V_{cs} f_{D_s^+}$ | |
| $D_s^+ \rightarrow \mu^+\nu$ | $250.8 \pm 10.0 \pm 4.2$ | CLEO-c [78, 79] |
| $D_s^+ \rightarrow \mu^+\nu$ | $258.9 \pm 8.2 \pm 7.5$ | BaBar [80] |
| $D_s^+ \rightarrow \mu^+\nu$ | $243.1 \pm 6.4 \pm 4.9$ | Belle [81] |
| $D_s^+ \rightarrow \tau^+\nu(\pi^+\bar{\nu})$ | $270.8 \pm 17.1 \pm 4.2$ | CLEO-c [78, 79] |
| $D_s^+ \rightarrow \tau^+\nu(\rho^+\bar{\nu})$ | $251.1 \pm 13.0 \pm 5.1$ | CLEO-c [82] |
| $D_s^+ \rightarrow \tau^+\nu(e^+\nu\bar{\nu})$ | $246.1 \pm 10.9 \pm 5.4$ | CLEO-c [83, 84] |
| $D_s^+ \rightarrow \tau^+\nu(e^+(\mu^+)\nu\bar{\nu})$ | $239.0 \pm 8.4 \pm 11.9$ | BaBar [80] |
| $D_s^+ \rightarrow \tau^+\nu(\pi^+\bar{\nu})$ | $262.7 \pm 9.3^{+10.2}_{-8.9}$ | Belle [81] |
| $D_s^+ \rightarrow \tau^+\nu(e^+\nu\bar{\nu})$ | $247.7 \pm 7.6^{+8.3}_{-7.4}$ | Belle [81] |
| $D_s^+ \rightarrow \tau^+\nu(\mu^+\nu\bar{\nu})$ | $258.7 \pm 8.2^{+7.7}_{-13.2}$ | Belle [81] |
| | $ V_{ub} f_{B^+}$ | |
| $B^- \rightarrow \tau^-\bar{\nu}$ | 0.72 ± 0.09 | Belle [85] |
| $B^- \rightarrow \tau^-\bar{\nu}$ | 1.01 ± 0.14 | BaBar [86] |

Tabla 3.3: Valores del producto del elemento de matriz CKM y la constante de decaimiento de los mesones D , D_s y B , extraídos de datos experimentales. El primer valor de incertidumbre corresponde a errores estadísticos y el segundo, a errores sistemáticos.

En [53], usando la tabla 3.3 y los valores de la matriz CKM se hallan los valores $f_{B^+} = 188(17)(18)$ MeV, $f_{D^+} = 203.7(4.7)(0.6)$ MeV y $f_{D_s^+} = 257.8(4.1)(0.1)$ MeV.

Observamos que no coinciden exactamente con el promedio de los valores obtenidos numéricamente, pero están en el mismo rango. Por último, en la figura 3.5, tomada de [71], se comparan los cálculos realizados usando LQCD con los valores experimentales para distintos mesones.

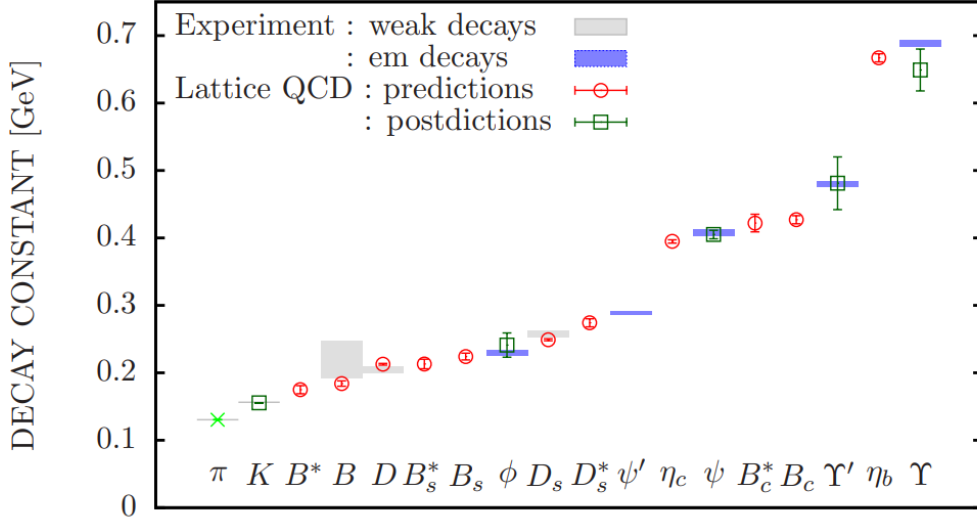


Figura 3.5: Comparación entre valores numéricos (calculados con LQCD) y experimentales de las constantes de decaimiento para distintos mesones. Figura tomada de [71].

Como veremos a continuación, tanto las constantes como las tasas de decaimiento están relacionadas con la función de onda del mesón. Vamos a calcular esta función de onda primero usando la ecuación de Dirac y luego la de Schrödinger. En los próximos capítulos veremos cómo hallar las soluciones a dichas ecuaciones para los mesones que nos interesan, y a partir de ahí calcular las constantes y las tasas.

3.5. Fórmula de van Royen-Weisskopf

El próximo paso es ver cómo calcular las tasas y constantes de decaimiento numéricamente. Nuestra primera aproximación fue utilizar la fórmula de van Royen-Weisskopf [87] [88] que involucra la función de onda del mesón en el límite no relativista $\mathbf{p}^2/m^2 \rightarrow 0$:

$$\Gamma = \frac{16\pi\alpha^2 e_q^2}{M^2} |\Psi(\mathbf{0})|^2, \quad f_M = \sqrt{\frac{12}{M}} |\Psi(\mathbf{0})| \quad (3.10)$$

donde $\Psi(\mathbf{0})$ es la función de onda del mesón evaluada en el origen, M es la masa del mesón y e_q es la carga del quark³ en unidades de la carga del electrón. Deduiremos estas relaciones en la próxima sección.

Esta fórmula se obtiene tomando el límite no relativista al considerar una interacción donde un quark y un anti-quark se aniquilan dando lugar a un fotón virtual, que luego forma un par leptón y anti-leptón. Se asume que la aniquilación se da cuando ambas partículas se encuentran en el mismo punto, por lo que se evalúa la función de onda en $r = 0$ donde r es la distancia relativa entre ellas.

Las principales aproximaciones en esta fórmula son: tratar a los quarks como partículas puntuales y considerar que su momento dentro del mesón es nulo. Esta fórmula tiene sus limitaciones, por ejemplo, que solo los mesones con función de onda no nula en el origen pueden decaer. Experimentalmente, se ve que esto no es cierto ya que mesones con número cuántico $\ell = 1$ (que cumplen $\Psi(\mathbf{0}) = 0$) presentan decaimientos. Por esta razón existen numerosas alternativas y correcciones a esta fórmula: ver, por ejemplo, [89] y sus referencias.

3.5.1. Deducción de la fórmula

Vamos a deducir la fórmula que relaciona los decaimientos de mesones con la función de onda en el origen, siguiendo [89] y [90]. Obtendremos expresiones tanto para el ancho como para la constante de decaimiento. Consideramos el proceso de la figura 3.6 donde tenemos un quark y anti-quark que forman un mesón, con momentos p_{q_1} y p_{q_2} respectivamente. Ese mesón decae a un fotón virtual con momento $q^2 = M^2$, donde M es la masa del mesón [90]. Esto se debe a que en el centro de masa, el mesón tiene momento $p = (M, \mathbf{0})$. Por lo tanto, por conservación del momento ese debe ser el momento del fotón $q = (M, \mathbf{0})$ y $q^2 = M^2$. El fotón decae a un par leptón y anti-leptón, con momentos p_{ℓ_1} y p_{ℓ_2} .

Los estados cuánticos del mesón que pueden sufrir este decaimiento son los que tienen los mismos números cuánticos que el fotón: $J = 1$ y $S = 1$. En estos estados, el mesón es una partícula vectorial. Por ejemplo, podemos tener los estados⁴ 3S_1 o 3D_1 . Escribimos la matriz de scattering S (2.4) como

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^4(q - p_{\ell_1} - p_{\ell_2}) \mathcal{M}. \quad (3.11)$$

³En esta deducción, consideraremos un mesón tipo quarkonium compuesto por un quark y su correspondiente anti-quark.

⁴En notación espectroscópica, las letras S , P , D corresponden a $L = 0$, 1 y 2 respectivamente.

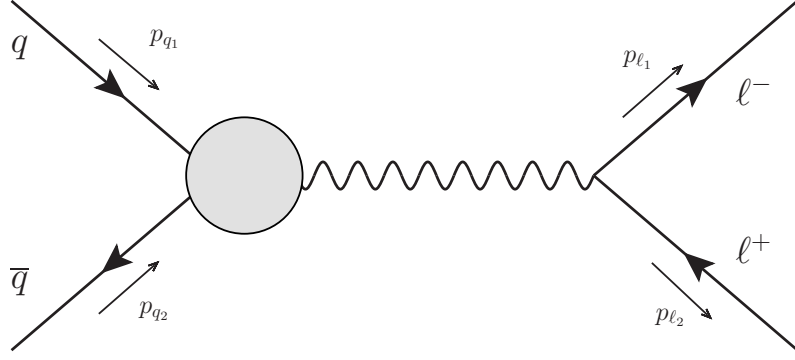


Figura 3.6: Decaimiento de un mesón formado por un quark y su correspondiente anti-quark a un leptón y anti-leptón. La partícula mediadora es un fotón virtual.

En esta expresión, la delta de Dirac impone la conservación del momento y aparece la amplitud de scattering \mathcal{M} :

$$\mathcal{M} = \langle 0 | J^\mu(0) | V \rangle \langle \ell^-(p_{\ell_1}) \ell^+(p_{\ell_2}) | J^\nu(0) | 0 \rangle \frac{(-i)g_{\mu\nu}}{q^2} e^2,$$

donde $\langle 0 | J^\mu(0) | V \rangle$ es el elemento de matriz de la corriente electromagnética entre el vacío y el mesón vectorial en reposo. Esta expresión está relacionada con la constante de decaimiento del mesón vectorial f_V ya que $\langle 0 | J^\mu | V \rangle = f_V M \epsilon^\mu$ donde ϵ^μ es el vector de polarización. Por otro lado, $\langle \ell^-(p_{\ell_1}) \ell^+(p_{\ell_2}) | J^\nu(0) | 0 \rangle = \bar{u}(p_{\ell_1}, \mu_{\ell_1}) \gamma^\nu v(p_{\ell_2}, \mu_{\ell_2})$ donde $\mu_{\ell_1}, \mu_{\ell_2}$ son las componentes de espín del leptón y anti-leptón. Escribimos al vector del estado inicial del mesón de la forma

$$|V\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\mathbf{p})}{2E_p} \sum_{\mu_{q_1}, \mu_{q_2}, \mu_L, \mu_S} \langle \frac{1}{2}\mu_{q_1}; \frac{1}{2}\mu_{q_2} | S \mu_S \rangle \langle L \mu_L; S \mu_S | J \mu_J \rangle | p_{q_1} \mu_{q_1}; p_{q_2} \mu_{q_2} \rangle.$$

El vector $|p_{q_1} \mu_{q_1}; p_{q_2} \mu_{q_2}\rangle$ representa a un estado quark-antiquark con momentos p_{q_1}, p_{q_2} y espines μ_{q_1}, μ_{q_2} respectivamente. La componente temporal de ambos momentos es E_p , mientras que la parte espacial es \mathbf{p} y $-\mathbf{p}$ respectivamente. Escribimos $\phi(\mathbf{p})$ la función de onda del mesón en el espacio de momentos. El factor $\langle \frac{1}{2}\mu_{q_1}; \frac{1}{2}\mu_{q_2} | S \mu_S \rangle$ corresponde a los coeficientes de Clebsch-Gordan⁵ para formar el espín total del mesón μ_S a partir de los espines de los quarks, mientras que el factor $\langle L \mu_L; S \mu_S | J \mu_J \rangle$ corresponde a construir el momento angular total del mesón a partir de su espín y su momento angular orbital: J es el momento angular total del mesón, S su espín y L su momento angular orbital. μ_J, μ_S y μ_L son las respectivas componentes z .

Por último, escribimos $\langle 0 | J^\mu | p_{q_1} \mu_{q_1}; p_{q_2} \mu_{q_2} \rangle = e_q v(p_{q_1}, \mu_{q_1}) \gamma^\mu u(p_{q_2}, \mu_{q_2})$ donde e_q es

⁵Los coeficientes de Clebsch-Gordan son el conjunto de números que aparecen al sumar momentos angulares (orbitales, angulares o de espín) en mecánica cuántica [45].

la carga del quark en unidades de carga del electr3n. Juntando todo y sustituyendo en (3.11), llegamos a

$$S_{fi} = -ie^2 e_q (2\pi)^4 \delta^4(q - p_{\ell_1} - p_{\ell_2}) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\mathbf{p})}{2E_p} \times \sum_{\mu_{q_1}, \mu_{q_2}, \mu_L, \mu_S} \langle L \mu_L; S \mu_S | J \mu_J \rangle \langle \frac{1}{2} \mu_{q_1}; \frac{1}{2} \mu_{q_2} | S \mu_S \rangle A_q^\mu A_\ell^\nu \frac{g_{\mu\nu}}{M^2}, \quad (3.12)$$

donde usamos que $q^2 = M^2$ y definimos las corrientes de quarks y leptones $A_q^\mu = \bar{v}(p_{q_1}, \mu_{q_1}) \gamma^\mu u(p_{q_2}, \mu_{q_2})$, $A_\ell^\nu = \bar{u}(p_{\ell_1}, \mu_{\ell_1}) \gamma^\nu v(p_{\ell_2}, \mu_{\ell_2})$.

Comenzamos trabajando con la parte correspondiente a los quarks. Tomamos los espinores de Dirac en el l3mite no relativista:

$$v^\dagger(p_{q_2}, \mu_{q_2}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \left(-\xi_{-\mu_{q_2}}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m}, \xi_{-\mu_{q_2}}^\dagger \right),$$

$$u(p_{q_1}, \mu_{q_1}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \xi_{\mu_{q_1}} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \xi_{\mu_{q_1}} \end{pmatrix}.$$

Estas expresiones son similares a los espinores que consideramos en la secci3n 2.4, pero al orden siguiente. Los ξ corresponden al estado de esp3n del fermi3n, que tiene dos componentes. El vector $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de matrices de Pauli. El factor relacionado con las masas y energ3as viene de la normalizaci3n de los espinores (tomamos una normalizaci3n diferente a la del cap3tulo 2). Sustituyendo en la corriente del quark, obtenemos

$$A_q^\mu = \frac{E_p + m}{2m} \left(-\xi_{-\mu_{q_2}}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m}, \xi_{-\mu_{q_2}}^\dagger \right) \gamma^0 \gamma^\mu \begin{pmatrix} \xi_{\mu_{q_1}} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \xi_{\mu_{q_1}} \end{pmatrix}.$$

Si $\mu = 0$, tenemos $\gamma^0 \gamma^0 = I_4$ por lo que la corriente se anula. Por lo tanto, a partir de ahora renombraremos el 3ndice $\mu \rightarrow i$ con $i = -1, 0, 1$. Vamos a utilizar la representaci3n de las matrices de Dirac en la que $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$. Usando la relaci3n $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \sigma_i (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = 2p_i (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) - p^2 \sigma_i$,

$$A_q^i = \frac{E_p + m}{2m} \left[\left(1 + \frac{p^2}{(E_p + m)^2} \right) \xi_{-\mu_{q_2}}^\dagger \sigma_i \xi_{\mu_{q_1}} - 2 \sum_j \frac{p_i p_j^*}{(E_p + m)^2} \xi_{-\mu_{q_2}}^\dagger \sigma_j \xi_{\mu_{q_1}} \right]. \quad (3.13)$$

Nos vamos a quedar solamente con el primer t3rmino, que corresponde a la f3rmula

de van Royen-Weisskopf. Si consideramos los dos términos, llegamos a una corrección a esta fórmula (esto es lo que se hace en [89]). Entonces, a partir de ahora

$$A_q^i = \frac{E_p + m}{2m} \left(1 + \frac{p^2}{(E_p + m)^2} \right) \xi_{-\mu_{q_2}}^\dagger \sigma_i \xi_{\mu_{q_1}}. \quad (3.14)$$

Para evaluar los valores esperados de las matrices de Pauli entre estados propios de espín de la forma $\xi_{-\mu_{q_2}}^\dagger \sigma_i \xi_{\mu_{q_1}}$, es más sencillo pasar a la base de helicidad. Luego de realizar el cálculo y realizar la suma en los espines de los quarks que aparece en (3.12), se llega a:

$$\sum_{\mu_{q_1}, \mu_{q_2}} \langle \frac{1}{2}\mu_{q_1}; \frac{1}{2}\mu_{q_2} | 1 \mu_S \rangle \xi_{-\mu_{q_2}}^\dagger \sigma_i \xi_{\mu_{q_1}} = \sqrt{2}(-1)^{i+1} \delta_{S,1} \delta_{i,-\mu_S}.$$

De esta expresión tenemos la regla de selección: $S = 1$. Recordemos que S es el espín del mesón, por lo que ya esperábamos este resultado. Finalmente, podemos escribir la ecuación (3.14) como

$$A_q^i = \delta_{S,1} \sqrt{2} \frac{E_p}{m} (-1)^{i+1} \delta_{i,-\mu_S}.$$

Ahora consideramos la parte de la matriz S que depende del quark y el anti-quark:

$$B^i \equiv \int d^3p \phi(\mathbf{p}) \sum_{\mu_L, \mu_S} \langle L\mu_L, S\mu_S | J\mu_J \rangle \delta_{S,1} \sqrt{2} (-1)^{i+1} \delta_{i,-\mu_S}.$$

Realizamos la integral usando la transformada de Fourier de la función de onda: $\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3p \phi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$ por lo que obtenemos la expresión con la función de onda evaluada en el origen, $\int d^3p \phi(\mathbf{p}) = (2\pi)^{3/2} \Psi(\mathbf{0})$. Calculando los coeficientes de Clebsch-Gordan, tenemos que [89]

$$B^i = (2\pi)^{3/2} \delta_{S,1} \delta_{J,1} \delta_{L,0} \delta_{i,-\mu_J} \sqrt{2} (-1)^{1-\mu_J} \Psi(\mathbf{0}).$$

Notamos que nos aparece una restricción sobre el valor del momento angular orbital: $L = 0$. Esto implica que solo las transiciones que cumplan esta condición pueden ocurrir, es decir los estados tipo S en notación espectroscópica. Esta es una limitación de la fórmula de van Royen-Weisskopf, ya que se han observado experimentalmente decaimientos que no la cumplen, como los estados tipo P (que tienen $L=1$). Esta limitación se corrige teniendo en cuenta el segundo término de la ecuación (3.13). Finalmente, la matriz S será

$$S_{fi} = ie^2 e_q \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{M^2} \delta_{S,1} \delta_{J,1} \delta_{L,0} \sqrt{2} (-1)^{1-\mu_J} \Psi(\mathbf{0}) \delta^{(4)}(q - p_{\ell_1} - p_{\ell_2}) \sum_i A_\ell^{-i} \delta_{i,-\mu_J}.$$

Para llegar al ancho de decaimiento a partir de esta expresión (por detalles, ver el

apéndice de [89]), escribimos explícitamente la parte leptónica y utilizamos el teorema de Wigner-Eckart [45] para escribir los valores esperados de las matrices de Pauli. Recuperamos la matriz \mathcal{M} de (3.11) promediando en los estados iniciales y sumando en los estados finales, y calculamos la tasa de decaimiento diferencial utilizando la expresión

$$d\Gamma = 2\pi|\mathcal{M}|^2\delta^{(4)}\left(\sum p_f - \sum p_i\right)d^3q.$$

Se llega a

$$\Gamma = \frac{16\pi\alpha^2 e_q^2}{M^2}|\Psi(\mathbf{0})|^2. \quad (3.15)$$

Esta es la fórmula de van Royen-Weisskopf para el ancho de decaimiento, donde α es la constante de estructura fina $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$. Es una fórmula a primer orden y, como mencionamos, no contempla todas las transiciones posibles. Existen distintas correcciones a esta fórmula en la literatura. En este trabajo, vamos a utilizar la corrección derivada en [91], que contempla contribuciones de QCD:

$$\Gamma = \frac{16\pi\alpha^2 e_q^2}{M^2}|\Psi(\mathbf{0})|^2 \left(1 - \frac{16\alpha_s}{3\pi}\right). \quad (3.16)$$

En la próxima sección veremos cómo se calculan este tipo de correcciones.

Para obtener la fórmula para la constante de decaimiento (3.10), utilizando el formalismo de teoría cuántica de campos (de forma similar a la deducción para el ancho de decaimiento del mesón B_s que vimos en el capítulo anterior) se calcula para este proceso [90]

$$\Gamma = \frac{4\pi\alpha^2 e_q^2}{3M} f_M^2$$

donde f_M es la constante de decaimiento del mesón. Comparando esta expresión con la ecuación (3.15), llegamos a

$$f_M = \sqrt{\frac{12}{M}}|\Psi(\mathbf{0})|.$$

Aunque esta no sea la expresión original derivada por van Royen y Weisskopf, muchas veces también se la conoce en la literatura como la fórmula de van Royen-Weisskopf. A este orden, es válida tanto para mesones pseudoescalares como vectoriales.

3.5.2. Correcciones a la fórmula

Para obtener la expresión (3.16), debemos repetir el cálculo anterior pero teniendo en cuenta los diagramas de Feynman que dan correcciones de QCD al vértice de in-

teracción mesón-fotón. Este cálculo no es trivial, por lo que estudiaremos un caso más simple: el del proceso inverso $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ donde un electrón y un positrón se aniquilan dando lugar a un par quark y anti-quark (figura 3.7). Este cálculo es más sencillo ya las correcciones involucran al vértice de leptones y fotón, que no presenta las dificultades de tener en cuenta la estructura interna del mesón. Veremos cómo se calculan las correcciones dadas por la QCD en este caso, siguiendo la deducción de [29], lo cual nos ayudará a entender las correcciones para el caso que nos interesa.

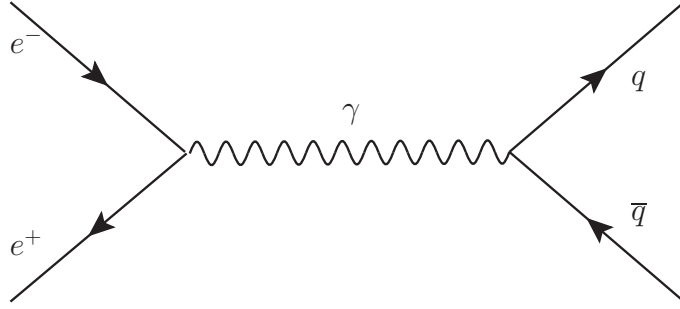


Figura 3.7: Proceso donde un electrón y un positrón se aniquilan formando un fotón que se transforma en un par quark y anti-quark.

Para este proceso, en vez de la tasa de decaimiento vamos a calcular la sección eficaz σ , que mide la probabilidad de que ocurra un cierto proceso cuando dos partículas colisionan [49]. Consideramos la sección eficaz total $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones}) = \sum_q \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})$, donde sumamos sobre todos los posibles quarks en el estado final. Se puede obtener esta sección eficaz como

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones}) = 3 \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \sum_q e_q^2.$$

Esta expresión aparece al considerar que el scattering de electrones a quarks es igual al scattering a muones pero teniendo en cuenta la carga fraccionaria del quark e_q y un factor 3 dado por las distintas posibilidades de color. De esta ecuación, podemos despejar el factor R definido como

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_q e_q^2.$$

Vamos a calcular las correcciones a este factor dadas por QCD. Comenzamos calculando la sección eficaz de los diagramas del estilo de la figura 3.8, donde se emite un gluon en el estado final.

Llamaremos p_q, p_γ, p_g a los momentos del quark, fotón y gluon respectivamente. Tenemos dos diagramas de este tipo, ya que el gluon puede aparecer acoplado al quark o al anti-quark. El cuadrado de la amplitud para la suma de ambos procesos es [29]

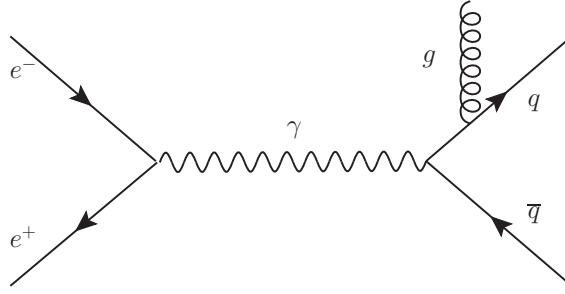


Figura 3.8: Corrección al proceso $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ dada por la emisión de un gluón a partir del quark en el estado final. La otra contribución a esta corrección es el proceso donde el anti-quark emite el gluón.

$$|\mathcal{M}|^2 = N \left(\frac{t}{s} + \frac{s}{t} + \frac{2up_\gamma^2}{st} \right)$$

donde N es una constante que incluye normalizaciones y constantes de acoplamiento, $s = (p_\gamma - p_q)^2$, $t = (p_\gamma - p_{\bar{q}})^2$ y $u = (p_\gamma - p_g)^2$. La energía de aniquilación es Q , de forma que $p_\gamma^2 = Q^2$. Si definimos las variables $x_i = \frac{2E_i}{Q}$, podemos escribir $s = Q^2(1 - x_q)$, $t = Q^2(1 - x_{\bar{q}})$ y $u = (1 - x_g)$. Entonces,

$$|\mathcal{M}|^2 = N \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1 - x_q)(1 - x_{\bar{q}})}.$$

y la sección eficaz diferencial con la normalización correspondiente será

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx_q dx_{\bar{q}}} = \frac{2\alpha_s}{3\pi} \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1 - x_q)(1 - x_{\bar{q}})}$$

Para hallar la sección eficaz total, debemos integrar la expresión anterior con x_i entre 0 y 1. El problema es que dicha expresión diverge cuando $x_i \rightarrow 1$. Se puede ver el origen de estas divergencias considerando el factor del denominador

$$1 - x_q = \frac{s}{Q^2} = \frac{2p_{\bar{q}} \cdot p_g}{Q^2} = \frac{2}{Q^2} E_{\bar{q}} E_g (1 - \cos(\theta_{\bar{q}g})).$$

Es decir, aparecen las divergencias en dos casos. El primero es cuando el gluón tiene una energía muy pequeña $E_g \rightarrow 0$, a lo cual se le llama divergencia infrarroja. El segundo es cuando el gluón sale en la misma dirección que el quark $\theta_{\bar{q}g} \rightarrow 0$, y se le llama divergencia colineal. Esta divergencia aparece porque en este cálculo se considera que tanto el quark como el gluón tienen masa nula. Si alguna de estas partículas tuviera masa, el ángulo $\theta_{\bar{q}g} = 0$ no sería posible cinemáticamente. Una forma de eliminar estas singularidades es repetir el cálculo considerando una masa para el gluón m_g . Sea σ_1 la sección eficaz dada por los diagramas de tipo 3.8, se llega a

$$\sigma_1 = \int dx_q dx_{\bar{q}} \frac{d\sigma}{dx_q dx_{\bar{q}}} = \sigma_q \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{4}{3} \left(\log^2 \left(\frac{m_g}{Q} \right) + 3 \log \left(\frac{m_g}{Q} \right) - \frac{\pi^2}{3} + 5 \right)$$

donde $\sigma_q \equiv \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})$. Para completar la sección eficaz, debemos considerar diagramas donde aparecen correcciones al vértice y al propagador dadas por un bucle de gluon, como vemos en la figura 3.9.

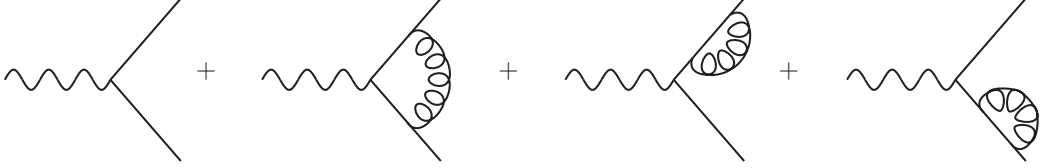


Figura 3.9: Correcciones al vértice de interacción entre un fotón y fermiones dadas por bucles de gluones.

La contribución de estos diagramas a la sección eficaz es

$$\sigma_2 = \sigma_q \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{4}{3} \left(-\log^2 \left(\frac{m_g}{Q} \right) - 3 \log \left(\frac{m_g}{Q} \right) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{7}{2} \right).$$

La sección eficaz total es $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_q \frac{\alpha_s}{\pi}$. Notamos que las divergencias se cancelan, y el resultado es independiente de m_g . Finalmente, la corrección al factor R al orden $\mathcal{O}(\frac{\alpha_s}{\pi})$ es

$$R = 3 \sum_q e_q^2 \left(1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \right).$$

Las sucesivas correcciones tendrán potencias más altas de $\frac{\alpha_s}{\pi}$.

Esta deducción es útil ya que el proceso que nos interesa es el inverso: cuando un mesón formado por dos quarks da lugar a dos leptones. Las correcciones al ancho de decaimiento se pueden obtener de forma similar y están dadas por la ecuación (3.16), que también es de orden $\frac{\alpha_s}{\pi}$.

En el caso de las constantes de decaimiento, para los mesones heavy-light utilizaremos la corrección dada por [88], que también es de orden $\frac{\alpha_s}{\pi}$:

$$f_M^{2P,V} = \frac{3|R(0)|^2}{\pi M} \left(1 - \frac{\alpha_s}{\pi} \left(\delta^{P,V} - \frac{m_q - m_Q}{m_q + m_Q} \ln \left(\frac{m_q}{m_Q} \right) \right) \right) \quad (3.17)$$

donde m_q es la masa del quark liviano, m_Q la del quark pesado y $\delta^P = 2$, $\delta^V = 8/3$ dependiendo de si el mesón es pseudoescalar o vectorial.

Teniendo las fórmulas para las tasas y constantes de decaimiento de los mesones, para poder calcularlas precisamos conocer su función de onda. Con este fin, en el próximo capítulo detallamos cómo calcular funciones de onda usando tanto la ecuación de Schrödinger como la de Dirac. Tomando como base el ejemplo conocido del átomo de hidrógeno, analizaremos cuál de las dos ecuaciones es más conveniente para obtener la información que queremos.

Capítulo 4

Átomo de hidrógeno

En este capítulo analizaremos la resolución del problema del átomo de hidrógeno: un sistema compuesto por dos partículas que interactúan mediante el potencial de Coulomb. Vamos a hallar las energías de ligadura y las funciones de onda, primero utilizando la ecuación de Schrödinger y luego con la ecuación de Dirac. Veremos las diferencias entre ambos enfoques y las ventajas y desventajas de cada uno. Esta resolución de un problema conocido nos servirá de guía para luego estudiar otro sistema de dos partículas interactuantes mediante un potencial: los mesones.

Modelamos al átomo de hidrógeno como un sistema formado por un protón y un electrón, donde el electrón se mueve y el protón está fijo en el origen. Esta aproximación es válida porque la masa del protón es casi 2000 veces mayor que la del electrón. La interacción eléctrica entre ambas partículas se da mediante el potencial de Coulomb:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad (4.1)$$

donde el valor de α depende del sistema de unidades que estemos considerando, pero siempre es una constante positiva. Por ejemplo, en el sistema internacional $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$.

4.1. Ecuación de Schrödinger

Comenzaremos resolviendo la ecuación de Schrödinger con el potencial de Coulomb. Este es un problema muy conocido, por lo que solamente repasaremos las ideas principales (para un tratamiento completo ver, por ejemplo, [92]).

Comenzamos con la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) = H\Psi(\mathbf{r}, t)$$

donde Ψ es la función de onda del electrón (la parte espacial, sin espín) y H es el opera-

dor hamiltoniano. Tomamos el hamiltoniano¹ $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}$. Como únicamente estamos considerando el movimiento del electrón, es su masa la que aparece en el hamiltoniano. El potencial (4.1) no depende explícitamente del tiempo, así que podemos separar la parte temporal de la espacial y la solución a la ecuación es $\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n \psi_n(\mathbf{r}) e^{-iE_n t}$. Las constantes E_n son las energías de ligadura, que corresponden a los valores propios del hamiltoniano y cumplen $E_n < 0$. La ecuación para la función de onda independiente del tiempo es (omitimos los subíndices n)

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + (V(r) - E) \psi(\mathbf{r}) = 0.$$

Reescribiéndola en coordenadas esféricas y separando variables tal que $\psi(\mathbf{r}) = R(r)Y(\theta, \phi)$:

$$\frac{r}{R} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rR) - 2mr^2(V(r) - E) + \frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) = 0.$$

El primer término depende solo de la coordenada radial y el segundo de las angulares, por lo que deben ser iguales con signo opuesto. Igualamos el primero a $\ell(\ell + 1)$ y el segundo a $-\ell(\ell + 1)$ donde ℓ será el número cuántico asociado al operador de momento angular orbital al cuadrado, L^2 . La parte angular nos da los armónicos esféricos $Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi) = N e^{im_\ell \phi} P_\ell^{m_\ell}(\cos \theta)$, donde aparece un nuevo número cuántico m_ℓ asociado a la componente L_z del momento angular orbital y $P_\ell^{m_\ell}(\cos \theta)$ son los polinomios asociados de Legendre. N es una constante de normalización. Observamos que la ecuación angular no depende del potencial: este solo afecta a la parte radial.

Definiendo una nueva función radial $u(r) = rR(r)$, las constantes $k = \sqrt{-2mE}$ y $\rho_0 = \frac{2m\alpha}{k}$, y la nueva variable radial $\rho = kr$, la ecuación radial queda

$$\frac{\partial^2 u(\rho)}{\partial \rho^2} = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{\ell(\ell + 1)}{\rho^2} \right) u(\rho) \quad (4.2)$$

para el potencial (4.1). Observando el comportamiento cuando ρ tiende a cero y a infinito, y suponiendo un polinomio para el comportamiento en el centro, se llega a las soluciones radiales:

$$R_{n\ell}(r) = \frac{1}{r} \rho^{\ell+1} e^{-\rho} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(2\rho)$$

donde L son los polinomios asociados de Laguerre. Esta expresión depende del número cuántico ℓ y de n que está asociado a los niveles de energía. Notamos que no aparece dependencia en m_ℓ . La solución completa y normalizada para las funciones de onda

¹Vamos a escribir los operadores escalares en cursiva y los operadores vectoriales en negrita.

independientes del tiempo es

$$\psi_{n\ell m} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-\ell-1)!}{2n[(n+\ell)!]^3}} e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^\ell [L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(2r/na)] Y_\ell^{m\ell}(\theta, \phi)$$

donde $a = \frac{4\pi\epsilon_0}{me^2}$ se conoce como el radio de Bohr.

Se puede deducir que las energías de ligadura son

$$E_n = -\frac{m}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{n^2} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}. \quad (4.3)$$

Lo interesante es que los niveles de energía solo dependen de n : están degenerados. Para obtener información sobre el momento angular y el espín debemos considerar el orden siguiente en el potencial, lo cual estudiaremos en la siguiente sección.

4.2. Correcciones al potencial de Coulomb

Estudiamos las correcciones de QED al potencial de Coulomb, siguiendo [93]. Comenzamos considerando el scattering de dos fermiones con masas m_1, m_2 , momentos entrantes p_1, p_2 , momentos salientes p'_1, p'_2 y momento del fotón q . Asumimos que ambas partículas tienen la misma carga eléctrica e . En la figura 4.1 se muestra el diagrama de Feynman correspondiente.

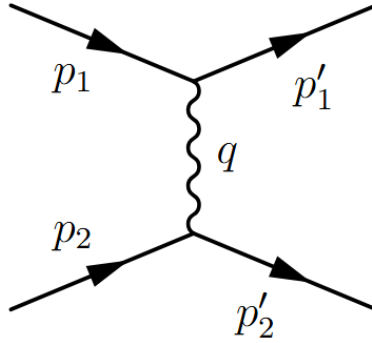


Figura 4.1: Diagrama de Feynman del scattering de dos fermiones con masas diferentes.

La amplitud de scattering, siguiendo las reglas de Feynman, es

$$\mathcal{M} = -ie^2 [\bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(p_1)] D_{\mu\nu}(q) [\bar{u}(p'_2)\gamma^\nu u(p_2)]$$

donde $D_{\mu\nu}(q)$ es el propagador del fotón, los $u(p)$ son los espinores y $q = p_2 - p'_2 = p'_1 - p_1$.

En el gauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), el propagador del fotón es

$$\begin{cases} D_{00} = -\frac{i}{\mathbf{q}^2} \\ D_{i0} = D_{0j} = 0 \\ D_{ij} = -\frac{i}{\mathbf{q}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{\mathbf{q}^2} \right) \end{cases}$$

donde $\omega = q^0$ es la componente temporal del momento interno. En el límite no relativista, $\omega \ll |\mathbf{q}|$. En esta sección, no tomaremos la convención $c = 1$ ya que vamos a hacer un desarrollo en $1/c$. Sustituyendo el propagador en la expresión para la amplitud, tenemos²

$$\mathcal{M} = -ie^2 \{ [\bar{u}'_1 \gamma^0 u_1] [\bar{u}'_2 \gamma^0 u_2] D_{00}(q) + [\bar{u}'_1 \gamma^i u_1] [\bar{u}'_2 \gamma^j u_2] D_{ij}(q) \}.$$

A continuación desarrollamos en $1/c$. Utilizamos las matrices gamma en la representación de Dirac, y los espinores de Dirac en el límite no relativista dados por $u(p) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} (1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2 c^2}) \xi \\ (\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2mc}) \xi \end{pmatrix}$ y $\bar{u}(p) = u^\dagger(p) \gamma^0 = \sqrt{2m} \left(\xi^\dagger (1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2 c^2}) \quad -\xi^\dagger (\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2mc}) \right)$. Las ξ representan las amplitudes de las ondas planas no relativistas, son espinores de dos componentes que cumplen $\xi^\dagger \xi = 1$. Recordemos que $\boldsymbol{\sigma}$ representa el vector de las matrices de Pauli.

4.2.1. A primer orden

Si despreciamos los términos que van como $1/c$, los espinores son $u(p) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\bar{u}(p) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \xi^\dagger & 0 \end{pmatrix}$. Entonces, $\bar{u}'_1 \gamma^0 u_1 = 2m \xi_1^\dagger \xi_1$ y lo mismo para u_2 . Por otro lado, $\bar{u}'_1 \gamma^i u_1 = \mathcal{O}(1/c)$ por lo que lo despreciamos en esta primera aproximación. La amplitud será

$$\mathcal{M} = -e^2 [\bar{u}'_1 \gamma^0 u_1] [\bar{u}'_2 \gamma^0 u_2] \frac{1}{\mathbf{q}^2} = -4m_1 m_2 e^2 \left[\xi_1^\dagger \xi_1 \right] \left[\xi_2^\dagger \xi_2 \right] \frac{1}{\mathbf{q}^2}.$$

Notamos que $V(\mathbf{q}) = \frac{e^2}{\mathbf{q}^2}$ es la transformada de Fourier del potencial de Coulomb $V(r) = \frac{e^2}{4\pi r}$. Es decir, tomando la aproximación de Born a primer orden recuperamos el potencial clásico sin correcciones.

4.2.2. A orden mayor

Ahora vamos a considerar hasta el orden $1/c^2$, así que tomamos los espinores completos. Despreciando los términos en $1/c^4$ (ver desarrollo en el apéndice A),

²A partir de ahora, abreviamos $u(p_i)$ como u_i .

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= e^2 [(\bar{u}'_1 \gamma^0 u_1) (\bar{u}'_2 \gamma^0 u_2) D_{00} + (\bar{u}'_1 \gamma^i u_1) (\bar{u}'_2 \gamma^j u_2) D_{ij}] \\
&= -4m_1 m_2 \xi_1^\dagger \xi_2^\dagger V(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) \xi_1 \xi_2
\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) &= 4\pi e^2 \left[\frac{1}{\mathbf{q}^2} - \frac{1}{8m_2^2 c^2} - \frac{1}{8m_1^2 c^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{4m_2^2 c^2 \mathbf{q}^2} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{4m_1^2 c^2 \mathbf{q}^2} \right. \\
&\quad - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{m_1 m_2 c^2 \mathbf{q}^2} + \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q})}{m_1 m_2 c^2 \mathbf{q}^4} + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)}{4m_1 m_2 c^2} + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{4m_1 m_2 c^2 \mathbf{q}^2} \\
&\quad \left. - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{2m_1 m_2 c^2 \mathbf{q}^2} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{2m_1 m_2 c^2 \mathbf{q}^2} \right]
\end{aligned}$$

De esta forma obtenemos el potencial de interacción de Coulomb con correcciones en la representación de momento. Pasando a la representación de posición (apéndice A):

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{r}) &= \frac{e^2}{r} - \frac{e^2 \hbar^2 \pi}{2c^2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \delta(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{2m_1 m_2 c^2 r} \left(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right) \\
&\quad - \frac{e^2 \hbar}{4c^2 r^3} \left(\frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1) \cdot \boldsymbol{\sigma}_1}{m_1^2} - \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2) \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{m_2^2} \right) - \frac{e^2 \hbar}{2m_1 m_2 c^2 r^3} ((\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1) \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \\
&\quad - (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2) \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) + \frac{e^2 \hbar^2}{4m_1 m_2 c^2} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right. \\
&\quad \left. - \frac{8\pi}{3} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \delta(\mathbf{r}) \right)
\end{aligned}$$

El primer término corresponde al potencial de Coulomb. Al segundo término se le llama término de Darwin, y se debe a que la partícula no es puntual (esparcimiento del potencial). El tercer término describe la interacción órbita-órbita, es decir, entre los momentos magnéticos dipolares de las partículas, que salen del movimiento orbital de las cargas. Los términos con $(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$, es decir el cuarto y quinto, vienen de la interacción espín-órbita. El cuarto es de una partícula consigo misma y el quinto entre dos partículas diferentes. El último término sale de la interacción espín-espín. El primer término dentro de este último es del tipo dipolo-dipolo, mientras que el último se llama interacción de contacto ya que solo es distinto de cero cuando las partículas están en la misma posición.

Este potencial se podría introducir en la ecuación de Schrödinger y nuevamente hallar las soluciones. En este caso, no es posible hacerlo de forma analítica sino que hay que recurrir a métodos numéricos. En la sección 6.1 aplicaremos las mismas ideas que en esta sección para hallar las correcciones al potencial de interacción entre mesones.

Como vimos en la sección anterior, podemos caracterizar los estados del hamiltoniano coulombiano (sin correcciones) usando los números cuánticos n, ℓ, m_ℓ . Entonces podríamos escribir un autoestado del hamiltoniano como $|n, \ell, m_\ell\rangle$. Encontramos que estos estados son degenerados ya que comparten la misma energía para un mismo valor de n . Sin embargo, al considerar las correcciones al potencial, incluimos términos que dependen explícitamente del operador de espín. Para caracterizar estos estados, debemos incluir un nuevo número cuántico al que llamaremos m_s . Ahora, la base del espacio de Hilbert para el electrón será $|n, \ell, m_\ell, m_s\rangle$. Esta base es simultáneamente un autoestado de los observables H_0, L^2, L_z y S_z : forman un conjunto completo de observables que conmutan. Esto será importante a la hora de tratar con la ecuación de Dirac, donde tendremos que elegir un nuevo conjunto.

La conclusión de esta sección es que para obtener información sobre el momento angular orbital y el espín utilizando Schrödinger, hay que ir al orden siguiente en el desarrollo del potencial de interacción. En la siguiente sección, resolveremos el problema del átomo de hidrógeno usando la ecuación de Dirac y analizaremos las diferencias entre ambos enfoques.

4.3. Ecuación de Dirac

Ahora vamos a estudiar la solución analítica a la ecuación de Dirac para el potencial de Coulomb, siguiendo [48, 94–96]. Podemos utilizar esta ecuación para este sistema porque describe la dinámica relativista de partículas con espín 1/2, como el electrón. De esta forma, obtendremos correcciones relativistas y de espín a los resultados hallados con Schrödinger.

Veremos que en este caso obtenemos dos ecuaciones radiales acopladas, en contraste con la resolución de Schrödinger donde obtuvimos una sola ecuación radial. Comenzaremos estudiando la solución para cualquier potencial radial y luego nos centraremos en el potencial coulombiano. Este enfoque nos permitirá obtener información sobre el espín incluso utilizando el potencial sin correcciones, a diferencia de Schrödinger.

Queremos hallar las soluciones de la ecuación de autovalores $H\psi = E\psi$, donde ahora ψ es un espinor de cuatro componentes (espinor de Dirac). El hamiltoniano de Dirac para un potencial central $V(r)$ es

$$H = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \gamma^0 m + V(r)$$

donde en la representación de Dirac, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ y $\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$ son matrices de dimensión 4. Nuevamente consideramos que el protón está fijo y que su masa es muy grande, por lo que la masa y la función de onda que aparezcan en la ecuación serán las del electrón.

Al igual que en el caso de Schrödinger, queremos hallar un conjunto completo de observables que conmuten, para así obtener los autoestados. Uno de estos observables será el hamiltoniano, que nos da el autovalor de la energía. Se puede probar que, en este caso, ni el momento angular \mathbf{L} ni el espín $\boldsymbol{\Sigma}^3$ conmutan con H . Por lo tanto no podremos usar el mismo conjunto que para Schrödinger.

El nuevo observable que consideraremos es el momento angular total: $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}$. El vector \mathbf{J} conmuta con el hamiltoniano, por lo tanto J^2 y su componente J_z también. Teniendo así 3 observables que conmutan entre sí, queremos encontrar otro que nos permita formar un conjunto completo. Antes, vamos a hallar las funciones propias que compartan los operadores de momento angular J^2 y J_z .

4.3.1. Funciones propias

Vamos a escribir al espinor de Dirac como $\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$ donde cada ψ_i es un espinor de Pauli de dos componentes. Usamos la representación en la que $\boldsymbol{\Sigma}$ es diagonal, $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$. De esta forma, podemos separar el problema en dos espinores. La acción del momento angular de cuatro componentes $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}$ sobre ψ será equivalente a la acción del momento angular de dos componentes $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ sobre ψ_A y ψ_B .

Así como en el caso de Schrödinger escribíamos las funciones propias como armónicos esféricos, en este caso introducimos los armónicos esféricos espinoriales, que son una generalización de los anteriores incluyendo el espín:

$$\mathcal{Y}_{j,m_j}^\ell(\theta, \phi) = \sum_{m_\ell, m_s} Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi) \chi_{m_s} \langle \ell \ s \ m_\ell \ m_s | j \ m_j \rangle,$$

donde los χ_{m_s} representan los espinores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Los armónicos esféricos espinoriales son funciones propias de L^2 con número cuántico ℓ , de J^2 con número cuántico j y de J_z con número cuántico m_j . Como $s = \frac{1}{2}$ (porque estamos tratando con fermiones), para un valor dado de j tenemos que $\ell = j \pm \frac{1}{2}$. Entonces, j es semientero. El hecho de

³ $\boldsymbol{\Sigma}$ es la generalización en dimensión 4 del vector $\boldsymbol{\sigma}$. Además, $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}$.

que estos armónicos sean funciones propias de L^2 es una consecuencia de estar tratando con espinores de Pauli y no de Dirac. Es decir, ψ_A y ψ_B tienen diferentes autovalores de L^2 . Por lo tanto, al considerar el espinor completo, ψ no es una autofunción del momento angular orbital. La cantidad conservada en este caso es el momento angular total, no el orbital. Esto es una consecuencia de que los grados de libertad orbitales y de espín están más íntimamente relacionados en esta teoría que en el caso no relativista, ya que en el hamiltoniano aparece el término $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ que genera un acoplamiento espín-órbita.

Recordando que en el caso de Schrödinger escribimos la solución como el producto de una parte radial y otra angular, ahora hacemos lo mismo pero teniendo en cuenta las dos componentes del espinor. Vamos a escribir la solución general como una combinación lineal de las posibilidades que tiene \mathcal{Y} , que corresponden a los valores posibles de ℓ . Como $\ell = j \pm \frac{1}{2}$, tenemos dos componentes con dos términos cada una: introducimos cuatro funciones radiales.

$$\psi_{j,m_j} = \begin{pmatrix} A(r)\mathcal{Y}_{j,m_j}^{j-1/2}(\theta, \phi) + B(r)\mathcal{Y}_{j,m_j}^{j+1/2}(\theta, \phi) \\ C(r)\mathcal{Y}_{j,m_j}^{j-1/2}(\theta, \phi) + D(r)\mathcal{Y}_{j,m_j}^{j+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Estas soluciones son funciones propias de J^2 y J_z (no de L^2). Los armónicos esféricos espinoriales pueden escribirse explícitamente en función de los armónicos esféricos comunes, calculando los coeficientes de Clebsch-Gordan que aparecen en su definición. Para determinar los coeficientes radiales, vamos a imponer que también sean funciones propias de H y de nuestro nuevo operador.

4.3.2. Paridad

No hay una única elección para el nuevo observable que necesitamos; podría ser cualquiera que cumpla con la condición de conmutación. Vamos a estudiar el caso del operador de paridad, y luego definir un nuevo operador que será más conveniente a la hora de trabajar con las soluciones. Definimos al operador paridad como el producto del operador π que actúa en la parte espacial de la función de onda (es decir, $\pi\psi(\mathbf{x}) = \psi(-\mathbf{x})$), y γ^0 en la espinorial:

$$P = \pi\gamma^0.$$

Nuevamente, esta definición es una consecuencia de que los grados de libertad de espín y orbitales estén relacionados. La operación de paridad no cambia simplemente la parte espacial sino que también debe encargarse del espín.

Si aplicamos π al espinor de Dirac (4.5), sale un factor de $(-1)^\ell$ en cada término,

es decir $(-1)^{j\pm 1/2}$ en total. La razón es que los espinores contienen armónicos esféricos, que satisfacen $Y_{\ell,m}(-\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^\ell Y_{\ell,m}(\hat{\mathbf{r}})$. Esto implica que tanto A y B como C y D quedan con signos opuestos. Al multiplicar por la matriz γ^0 , el componente inferior cambia de signo de nuevo. De esta forma, si queremos que este espinor sea estado propio de paridad, entonces $B = C = 0$ (con paridad $(-1)^{j-1/2}$) o $A = D = 0$ (con paridad $(-1)^{j+1/2}$). Vamos a escribir las funciones propias de (P, J^2, J_z) como

$$\psi_{\ell,j,m_j} = \begin{pmatrix} G(r)\mathcal{Y}_{j,m_j}^{\ell_A}(\theta, \phi) \\ iF(r)\mathcal{Y}_{j,m_j}^{\ell_B}(\theta, \phi) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

donde si $\ell_A = j + 1/2$, entonces $\ell_B = j - 1/2$ y viceversa. Es decir, ambas componentes tienen diferente valor de ℓ : los espinores no son autofunciones de L^2 . Renombramos las funciones radiales y agregamos un factor i que va a ser conveniente más adelante. Este espinor tiene paridad $(-1)^{j\pm 1/2}$. Podríamos usar la paridad como nuestro nuevo operador, pero vamos a definir otro más útil.

4.3.3. Operador K

Introducimos un nuevo operador, definido como:

$$K = \gamma^0(\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + 1).$$

Este operador es un escalar bajo rotaciones espaciales y paridad, y conmuta tanto con \mathbf{J} como con P y H . Entonces, vamos a tomar (H, K, J^2, J_z) como nuestro conjunto completo de observables que conmutan. Los nuevos números cuánticos serán n, κ, j, m_j respectivamente.

Para calcular los valores propios de K , comenzamos notando que

$$J^2 = (\mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma})^2 = L^2 + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \frac{\boldsymbol{\Sigma}^2}{4} = L^2 + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \frac{3}{4} \quad (4.7)$$

ya que $\boldsymbol{\Sigma}^2 = 4S^2 = 4s(s+1) = 4\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) = 3$. Además tenemos [94]

$$K^2 = (\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\Sigma})^2 + 2\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + 1 = L^2 + i\boldsymbol{\Sigma} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{L}) + 2\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + 1 = L^2 + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + 1.$$

Entonces,

$$K^2 = J^2 + \frac{1}{4}.$$

Si aplicamos K^2 a un estado con valor propio j , nos queda $j(j+1) + \frac{1}{4} = (j+1/2)^2$. Entonces, los valores propios de K son $\kappa = \pm(j+1/2)$.

Para ver cómo actúa el nuevo operador sobre el espinor de Dirac, precisamos conocer la acción de L^2 y $\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ sobre ψ . Comenzamos escribiendo a K en forma matricial:

$$K\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} + 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \pm(j + 1/2) \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm(j + 1/2 \mp 1)\psi_A \\ \mp(j + 1/2 \pm 1)\psi_B \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Ahora queremos ver cómo actúa L^2 sobre los estados. Tenemos que de la ecuación (4.7), $L^2 = J^2 - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{3}{4}$ por lo que

$$L^2 \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (j^2 + j \mp j \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{4})\psi_A \\ (j^2 + j \pm j \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{4})\psi_B \end{pmatrix}.$$

Si definimos $\ell_{\pm} = j \pm \frac{1}{2}$ (lo que previamente habíamos llamado ℓ_A, ℓ_B), nos queda

$$L^2 \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{\mp}(\ell_{\mp} + 1)\psi_A \\ \ell_{\pm}(\ell_{\pm} + 1)\psi_B \end{pmatrix}.$$

De esta forma hallamos la acción de L^2 sobre el espinor completo ψ .

4.3.4. Ecuación radial

Volviendo a la ecuación de Dirac, la escribimos en forma matricial y obtenemos

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + V(r) - E \right] \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = 0.$$

Para continuar, precisamos conocer la acción de $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$ sobre los estados de la ecuación (4.6). Usamos la siguiente identidad que viene de escribir \mathbf{p} en representación de posición:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{r} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r} \left(-ir \frac{\partial}{\partial r} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} \right).$$

Reescribiendo (4.8) en función de κ , tenemos

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\kappa + 1)\psi_A \\ (\kappa - 1)\psi_B \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, se puede probar que

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r} \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{j,m_j}^{\ell_A} \\ \mathcal{Y}_{j,m_j}^{\ell_B} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{j,m_j}^{\ell_B} \\ \mathcal{Y}_{j,m_j}^{\ell_A} \end{pmatrix}.$$

Juntando todo, llegamos a que las ecuaciones radiales de Dirac son

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial F(r)}{\partial r} + \frac{\kappa-1}{r}F(r) \\ \frac{\partial G(r)}{\partial r} + \frac{\kappa+1}{r}G(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E - V(r) - m)G(r) \\ (E - V(r) + m)F(r) \end{pmatrix}$$

y la parte angular está dada por los armónicos esféricos espinoriales. Tomando $f(r) = rF(r)$ y $g(r) = rG(r)$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f(r)}{\partial r} - \frac{\kappa f(r)}{r} = (m - E + V(r))g(r) \\ \frac{\partial g(r)}{\partial r} + \frac{\kappa g(r)}{r} = (m + E - V(r))f(r) \end{cases} \quad (4.9)$$

Estas son las ecuaciones radiales de Dirac. Notamos que, a diferencia del caso de Schrödinger, tenemos dos funciones radiales con ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas. La función $g(r)$ es la que en el límite no relativista corresponde con la función radial de Schrödinger, mientras que $f(r)$ aparece por efectos relativistas. Hasta este punto, esta resolución es general para cualquier potencial radial. Ahora vamos a centrarnos en el potencial de Coulomb.

4.3.5. Potencial de Coulomb

Nuevamente consideramos el potencial $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$. Definiendo $k_1 = m + E$, $k_2 = m - E$ y $\rho = \sqrt{k_1 k_2} r$, las ecuaciones radiales (4.9) quedan

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{\kappa f}{\rho} = \left(\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} - \frac{\alpha}{\rho} \right) g \\ \frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{\kappa g}{\rho} = \left(\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} + \frac{\alpha}{\rho} \right) f \end{cases} \quad (4.10)$$

Basándonos en las soluciones a la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno, vamos a suponer que las funciones radiales están dadas por series de potencias de la forma

$$\begin{cases} f(\rho) = e^{-\rho} \rho^s \sum_i a_i \rho^i \\ g(\rho) = e^{-\rho} \rho^s \sum_i b_i \rho^i \end{cases}$$

Sustituyendo en (4.10) llegamos a las siguientes relaciones entre los coeficientes:

$$\begin{cases} -a_i + a_{i+1}(s + i - \kappa + 1) - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} b_i + \alpha b_{i+1} = 0 \\ -b_i + b_{i+1}(s + i + \kappa + 1) - \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} a_i - \alpha a_{i+1} = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Tomamos i entre $[0, n]$ con n algún número entero, ya que si la serie no terminara, las funciones radiales crecerían exponencialmente y queremos que decaigan en el infinito. Entonces, $a_{-1} = b_{-1} = 0$. Sustituyendo en (4.11), tenemos que $s = \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2}$. De la misma forma, $a_{n+1} = b_{n+1} = 0$, de donde $a_n = -\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} b_n$.

Ahora consideramos el valor $i = n - 1$. De (4.11) y sustituyendo a_n , tenemos

$$-2(s + n) - \alpha\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} + \alpha\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} = 0.$$

Sustituyendo en esta expresión las constantes k_1 , k_2 , s , κ y despejando la energía:

$$E_n = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{(n + \sqrt{(j+1/2)^2 - \alpha^2})^2}}}. \quad (4.12)$$

Estas son las energías dadas por la ecuación de Dirac para el átomo de hidrógeno, que están cuantizadas con un índice n . También se puede hallar la forma analítica de las soluciones a la ecuación radial (ver, por ejemplo, [95]). Si definimos $n' = n + j + \frac{1}{2}$ y desarrollamos la expresión (4.12), obtenemos

$$E_{n'} = m \left[1 - \frac{\alpha^2}{2n'^2} - \frac{\alpha^4}{2n'^3} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n'} \right) - \dots \right].$$

Los dos primeros términos corresponden a las energías dadas por la ecuación de Schrödinger, identificando el índice n' con el número cuántico asociado a la energía. De esta forma, verificamos que las energías de Schrödinger corresponden al límite no relativista de las energías de Dirac, y que los efectos del espín aparecen solamente a partir del tercer término del desarrollo. Este término corresponde a las correcciones de estructura fina.

Volviendo a la expresión exacta (4.12) vemos que, a diferencia del caso de Schrödinger (4.3), ahora a primer orden en el desarrollo del potencial ya obtenemos información sobre el espín: aparece el número cuántico j , asociado al momento angular total. Esto nos motivó a utilizar la ecuación de Dirac para hallar las funciones de onda de los mesones, siguiendo un procedimiento similar al caso del potencial de Coulomb. En el capítulo 5 exploraremos este problema, hallando las ecuaciones radiales para el potencial de interacción entre los quarks y estudiando su resolución numérica.

Capítulo 5

Espectro y decaimientos con el formalismo de Dirac

Habiendo estudiado en la sección anterior la resolución de la ecuación de Dirac para el potencial de Coulomb, vamos a tomar las mismas ideas para el problema de la interacción entre quarks, con el objetivo final de poder calcular los espectros y constantes de decaimiento de los mesones. Nos vamos a basar en el modelo del átomo de hidrógeno, considerando mesones del tipo *heavy-light*, es decir, compuestos por un quark más liviano (similar al electrón) y otro más pesado (similar al núcleo). Pensamos que el quark pesado está fijo y el liviano es quien se mueve. Esta aproximación no es tan buena como en el caso del hidrógeno, pero de todas formas se cumple que la masa del quark pesado es bastante más grande.

Para modelar la interacción fuerte entre los quarks, usamos el potencial obtenido en la sección 2.4:

$$\begin{cases} V_v(r) = -\frac{g^2 e^{-\mu r}}{3\pi r} \\ V_s(r) = br \end{cases} \quad (5.1)$$

Recordamos que μ es la masa del gluon, b es la tensión de la cuerda y g la constante de acoplamiento de QCD.

Utilizando este potencial, resolvemos numéricamente la ecuación de Dirac. La resolución de las ecuaciones radiales es muy similar a la que vimos para el átomo de hidrógeno; la única diferencia es que ahora también tenemos un potencial escalar. Para ver cómo aparece esta diferencia en las ecuaciones radiales (4.9), volvemos a la forma original de la ecuación de Dirac para una partícula libre $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$.

Un potencial vectorial A_μ se acopla al momento como $p_\mu \rightarrow p_\mu - gA_\mu$ [97]. Si sustituimos en la ecuación libre, $(i\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu) - m)\psi = 0$. Considerando solo la

componente temporal $gA^0 = V_v(r)$ (como en el caso de Coulomb), entonces tenemos $(\gamma^0(E - V_v(r)) - \gamma^i p_i - m)\psi = 0$. Es decir, solo modifica el término de energía.

Ahora agregamos un potencial escalar $V_s(r)$. Se modifica la masa, $m \rightarrow m + V_s(r)$ por lo que la ecuación queda $(\gamma^0(E - V_v(r)) - \gamma^i p_i - m - V_s(r))\psi = 0$. A partir de ahora, la búsqueda de las ecuaciones radiales es idéntica a la que vimos para Coulomb pero tomando una masa $m \rightarrow m + V_s(r)$. De esta forma, las ecuaciones radiales (4.9) se convierten en

$$\begin{cases} \frac{\partial f(r)}{\partial r} - \frac{\kappa f(r)}{r} = (m + V_s(r) - E + V_v(r))g(r) \\ \frac{\partial g(r)}{\partial r} + \frac{\kappa g(r)}{r} = (m + V_s(r) + E - V_v(r))f(r) \end{cases}$$

donde en este caso, m es la masa del quark liviano. Notamos que en las ecuaciones radiales, ambos términos del potencial aparecen con distintos signos dependiendo de su naturaleza escalar o vectorial. Usando nuestro potencial para los mesones, llegamos a

$$\begin{cases} \frac{\partial f(r)}{\partial r} - \frac{\kappa f(r)}{r} = (m + br - E - \frac{g^2 e^{-\mu r}}{3\pi r})g(r) \\ \frac{\partial g(r)}{\partial r} + \frac{\kappa g(r)}{r} = (m + br + E + \frac{g^2 e^{-\mu r}}{3\pi r})f(r) \end{cases} \quad (5.2)$$

Estas son las ecuaciones que vamos a resolver numéricamente para hallar tanto el espectro como las funciones de onda radiales de los mesones a estudiar, utilizando las condiciones de borde adecuadas.

5.1. Resolución numérica

Vamos a resolver la ecuación de Dirac numéricamente. Tenemos dos ecuaciones diferenciales acopladas (5.2) y nuestro objetivo es hallar las funciones $f(r)$ y $g(r)$, así como los niveles de energía. El método consiste en utilizar un procedimiento del tipo *shooting* en el que especificamos las condiciones iniciales y un valor de algún parámetro (en este caso, la energía de ligadura). Se integran las ecuaciones utilizando algún método numérico hasta llegar al punto final. A partir de este resultado, se va ajustando el valor de la energía hasta obtener la que nos asegure condiciones finales lo suficientemente cercanas a las correctas. En el caso de las funciones de onda radiales, tanto $f(r)$ como $g(r)$ deberían tender a cero en el infinito.

El problema con este método es que es muy difícil hallar el valor de la energía correcto, ya que la mayoría de las soluciones divergen. Por esto, vamos a basarnos en el método propuesto en [98]. Se trata de un método llamado *shoot and match*, en el que se integran las ecuaciones desde un radio mínimo r_{min} hasta un radio intermedio r_{match} utilizando las condiciones iniciales. A las funciones radiales obtenidas mediante este

método se les llama $f_{\text{out}}(r)$ y $g_{\text{out}}(r)$. A la vez, se integra desde un radio máximo r_{max} hasta el mismo r_{match} utilizando las condiciones finales y obteniendo funciones $f_{\text{in}}(r)$ y $g_{\text{in}}(r)$. Integramos utilizando el método de Runge-Kutta [99] de orden 4. Estas dos integraciones se realizan para un valor arbitrario de la energía de ligadura y de otro parámetro g_0 que especificaremos más adelante.

A partir de la diferencia entre el valor de ambas funciones en el punto r_{match} , se puede calcular iterativamente los valores de los parámetros E , g_0 que minimizan esa diferencia. Esto se hace utilizando una generalización del algoritmo de Newton-Raphson para encontrar raíces de funciones. En la figura 5.1 vemos un ejemplo de esta convergencia. En la mayoría de los casos, se necesitan unas 10 iteraciones. Utilizamos el criterio de minimizar las diferencias dadas por

$$\Delta g(E, g_0) = \frac{2(g_{\text{out}}(r_{\text{match}}) - g_{\text{in}}(r_{\text{match}}))}{g_{\text{out}}(r_{\text{match}}) + g_{\text{in}}(r_{\text{match}})}$$

y la ecuación análoga para $\Delta f(E, g_0)$. Definimos un valor pequeño δ tal que la iteración se detiene si $\Delta g(E, g_0) < \delta$ y $\Delta f(E, g_0) < \delta$. Al utilizar el programa, notamos que el resultado obtenido (los valores de E y g_0) no depende del valor de r_{match} elegido, así como de los valores iniciales para los parámetros.

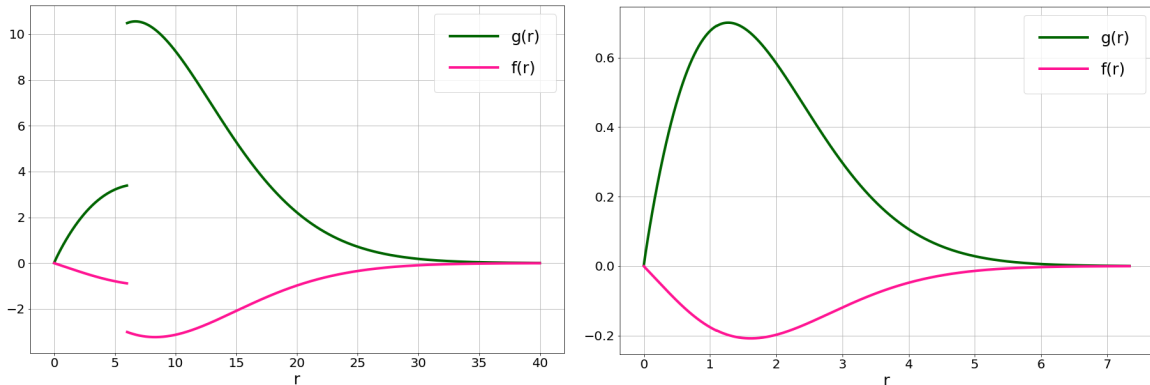


Figura 5.1: Resolución de las ecuaciones radiales de Dirac. A la izquierda vemos el primer paso de la iteración para una energía cualquiera, y a la derecha la solución final normalizada, que nos da la energía de ligadura. En este caso, $r_{\text{match}} = 6.0$. El rango de valores en los ejes es distinto porque la solución final está normalizada.

Las condiciones iniciales y finales van a depender del potencial elegido. Para probar el funcionamiento del programa, en primer lugar hallamos los niveles de energía del átomo de hidrógeno. Al obtener los resultados correctos, pasamos al potencial que modela la interacción entre los quarks.

Para el potencial mesónico, partimos de las ecuaciones (5.2) y definimos las variables

adimensionadas $\tilde{E} = E/m$, $\rho = mr$, $\tilde{\mu} = \mu/m$, $\tilde{b} = b/m^2$ y $\gamma = \frac{g^2}{3\pi}$. Las ecuaciones a resolver numéricamente van a ser

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{\kappa f}{\rho} = (1 - \tilde{E} - \gamma \frac{e^{-\tilde{\mu}\rho}}{\rho} + \tilde{b}\rho)g \\ \frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{\kappa g}{\rho} = (1 + \tilde{E} + \gamma \frac{e^{-\tilde{\mu}\rho}}{\rho} + \tilde{b}\rho)f \end{cases}$$

Para hallar la solución, necesitamos conocer las condiciones iniciales y finales. Para las iniciales, suponemos la forma $g_i(\rho) = g_0\rho^\alpha$ y $f_i(\rho) = f_0\rho^\beta$ con $\alpha, \beta > 0$. Sustituyendo en las ecuaciones diferenciales y quedándonos con los términos de menor orden en ρ , obtenemos

$$\begin{cases} f_0\beta\rho^{\beta-1} - \kappa f_0\rho^{\beta-1} = -\gamma g_0\rho^{\alpha-1} \\ g_0\alpha\rho^{\alpha-1} + \kappa g_0\rho^{\alpha-1} = \gamma f_0\rho^{\beta-1} \end{cases}$$

Notamos que si $\alpha \neq \beta$ obtenemos $f_0 = 0$ o $g_0 = 0$. Como no nos interesa este resultado, tomamos $\alpha = \beta$. Resolviendo el sistema, se llega a que $\alpha = \sqrt{\kappa^2 - \gamma^2}$ y $f_0 = \frac{g_0}{\gamma}(\alpha + \kappa)$. Entonces, para $\rho \rightarrow 0$,

$$\begin{cases} g_i(\rho) = g_0\rho^{\sqrt{\kappa^2 - \gamma^2}} \\ f_i(\rho) = \frac{g_0}{\gamma}(\alpha + \kappa)\rho^{\sqrt{\kappa^2 - \gamma^2}} \end{cases}$$

Vamos a resolver las ecuaciones dejando g_0 como un parámetro libre que se halla por el mismo procedimiento que la energía.

Para las condiciones finales, suponemos $g_f(\rho) = g_1e^{-a\rho^x}$ y $f_f(\rho) = f_1e^{-c\rho^y}$. Al sustituir en las ecuaciones diferenciales y tomar el límite en que $\rho \rightarrow \infty$ se llega a que $x = y = 2$, $a = c = \tilde{b}/2$ y $f_1 = -g_1$:

$$\begin{cases} g_f(\rho) = g_1e^{-\frac{\tilde{b}\rho^2}{2}} \\ f_f(\rho) = -g_1e^{-\frac{\tilde{b}\rho^2}{2}} \end{cases} \quad (5.3)$$

El parámetro g_1 lo vamos a dejar libre, y va a quedar determinado por la normalización de las funciones de onda al final del proceso: se debe cumplir la condición $\int_0^\infty (g^2(r) + f^2(r))dr = 1$. Este proceso nos permite hallar tanto los niveles de energía de los distintos mesones como las funciones $f(r)$ y $g(r)$. A partir de ellas, calculamos las funciones de onda normalizadas $F(r) = \frac{f(r)}{r}$ y $G(r) = \frac{g(r)}{r}$.

Para obtener la energía con dimensiones a partir de la adimensionada, hacemos $E = \tilde{E}m$ donde recordamos que m es la masa del quark liviano. Esta energía E incluye tanto la energía de ligadura como la masa de este quark. Si queremos la energía total, debemos sumar la masa del quark pesado m_Q :

$$E_{\text{total}} = E + m_Q = E_{\text{ligadura}} + m + m_Q.$$

De esta forma hallamos la energía y las funciones de onda. En la siguiente sección veremos cómo utilizar estas funciones para encontrar las constantes de decaimiento.

5.2. Constantes de decaimiento

Recordemos que uno de nuestros objetivos es calcular las constantes de decaimiento de un conjunto de mesones del tipo heavy-light. En el caso no relativista de la ecuación de Schrödinger, teníamos la fórmula (3.10):

$$f_M = \sqrt{\frac{12}{M}} |\Psi(\mathbf{0})|,$$

que relaciona el valor de la función de onda en el origen, la masa del mesón y la constante de decaimiento.

Sin embargo, al intentar aplicarla al caso de Dirac nos dimos cuenta de que no es posible ya que las funciones de onda $F(r)$ y $G(r)$ divergen en el origen para estados con $|\kappa| = 1$, como el estado base (ver figura 5.2). Esto no es lo que sucede con la ecuación de Schrödinger, donde la función de onda del estado base es finita. Para Dirac, observamos esta divergencia a pesar de que la solución es normalizable. Como método alternativo, decidimos seguir el procedimiento de [100], donde los autores proponen un cálculo de las constantes de decaimiento basado en el modelo *bag* [101]. En esta aproximación, la constante de decaimiento para un mesón pseudoescalar está dada por la integral

$$f_M^2 = \frac{12}{M} \int d^3\mathbf{r} |\Psi_Q(\mathbf{r})|^2 G^2(r)$$

donde M es la masa del mesón, $G(r)$ es la función de onda radial y $\Psi_Q(\mathbf{r})$ es una función de onda no relativista que describe las fluctuaciones cuánticas en la posición del quark pesado [100]. Considerando que Ψ_Q está distribuida sobre una distancia $r_Q \approx \frac{1}{m_Q}$ donde m_Q es la masa del quark pesado, se llega a la expresión

$$f_M = \sqrt{\frac{12}{M}} G\left(\frac{k}{m_Q}\right) \quad (5.4)$$

con k una constante a determinar. Vemos que entonces necesitamos evaluar la función de onda $G(r)$ en un radio específico. Utilizamos esta relación para calcular las constantes de decaimiento de los distintos mesones. La constante k la dejamos libre y la ajustamos con los valores conocidos de las constantes de decaimiento.

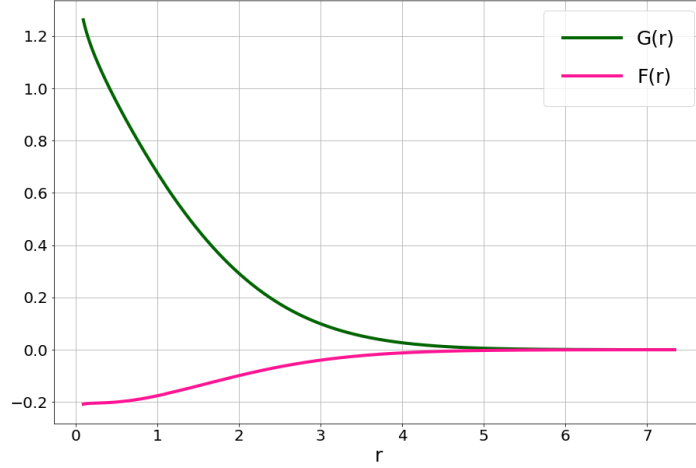


Figura 5.2: Ejemplo de funciones radiales $F(r)$ y $G(r)$. Notamos que $G(r)$ diverge en el origen.

En el artículo [100], los autores dejan la constante k fija (extrapolándola a partir de valores conocidos de las constantes de acoplamiento para otros mesones) pero consideran el *running* de la constante de acoplamiento¹. En nuestro caso, tomamos el acoplamiento constante y lo ajustamos junto con k .

El problema con este enfoque es que el modelo utilizado es una aproximación no muy rigurosa. Además se agrega un parámetro nuevo (la constante k). También encontramos problemas con la resolución numérica de las ecuaciones radiales; el programa resultó ser muy sensible a las condiciones iniciales y por lo tanto difícil de implementar. Por otro lado, la estrategia de unir la solución final con la inicial hizo que el tiempo de cómputo fuera mucho más elevado que con métodos más convencionales. En este sentido, tal vez hubiera sido mejor seguir el camino de Schrödinger y no el de Dirac. Para comprobarlo, vamos a calcular las constantes de decaimiento y niveles de energía usando tanto Dirac como Schrödinger con correcciones al potencial, y comparar ambos enfoques. A continuación, vemos los resultados obtenidos usando la ecuación de Dirac.

5.3. Resultados

Ajuste de las energías

En primer lugar ajustamos las energías de los mesones heavy-light en el estado base, utilizando los valores de la tabla 5.1:

Para los mesones tipo B , tomamos al quark b como el pesado, y consideramos que está fijo en el origen. Para los mesones tipo D , el quark pesado es el c . Variamos los parámetros:

¹Cambio del valor de la constante de acoplamiento con la escala de energía.

| Mesón | Composición | Energía (MeV) |
|---------|-------------|--------------------|
| B_c^+ | $c\bar{b}$ | 6274.47 ± 0.32 |
| B_s^0 | $s\bar{b}$ | 5366.93 ± 0.07 |
| B^0 | $d\bar{b}$ | 5279.72 ± 0.01 |
| B^+ | $u\bar{b}$ | 5279.41 ± 0.08 |
| D^+ | $c\bar{d}$ | 1869.66 ± 0.05 |
| D^0 | $c\bar{u}$ | 1864.84 ± 0.05 |
| D_s^+ | $c\bar{s}$ | 1968.35 ± 0.07 |

Tabla 5.1: Energías de los mesones heavy-light en el estado base, medidas experimentalmente [28].

- μ entre 0 GeV y 0.9 GeV.
- b entre 0.015 y 0.9 GeV².
- g entre 0.1 y 2.9.

Calculamos el error del ajuste como un χ^2 modificado:

$$\chi^2 = \sqrt{\sum_i \left(\frac{E_{\text{calc}}^i - E_{\text{exp}}^i}{\delta E_{\text{exp}}^i} \right)^2} \frac{1}{N - n}.$$

En esta expresión, el índice i recorre los distintos mesones. E_{calc}^i es la energía del estado base calculada con nuestro modelo para un determinado mesón, y E_{exp}^i , δE_{exp}^i el correspondiente valor e incertidumbre experimental. N es el número de valores que ajusta nuestro modelo. En este caso, ajustamos en total 7 valores de energía por lo que $N = 7$. Por otro lado, n es el número de parámetros que ajustamos (en este caso, 3).

Caso I: Masas constituyentes

Nuestra primera aproximación fue usar para las masas de los quarks los valores $m_u = m_d = 0.35$ GeV, $m_s = 0.5$ GeV, $m_c = 1.5$ GeV, $m_b = 4.7$ GeV. Estas masas corresponden a valores estándar dentro de los modelos de quarks constituyentes [102]. En la figura 5.3 vemos los valores del error en función de distintos parámetros.

Notamos que los valores mínimos del error se dan para valores de b muy pequeños. Esto se debe a que, al usar las masas constituyentes, la suma de las masas de los quarks es casi igual a la masa total del mesón. Entonces, la tensión de la cuerda es casi 0. El conjunto de parámetros que minimiza el error es:

| μ (GeV) | b (GeV ²) | g |
|-------------|-------------------------|-------|
| 0 | 0.015 | 1.496 |

El mínimo error es $\chi_{\text{min}}^2 = 1138$, lo cual es un valor muy grande (típicamente, se

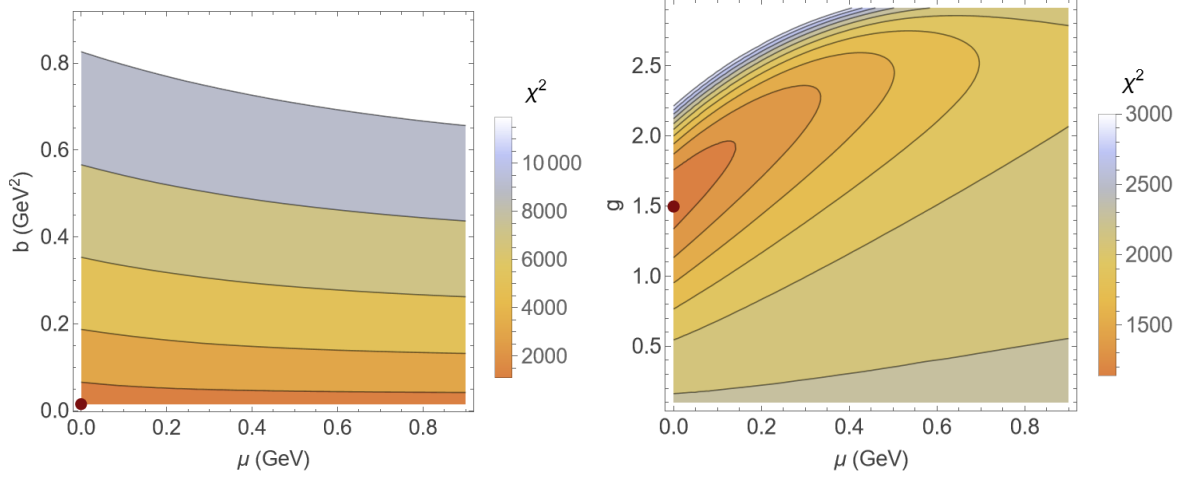


Figura 5.3: Error del ajuste en función de los parámetros b, μ (izquierda) y g, μ (derecha) para el caso I. El punto es el valor que minimiza el error.

espera que sea de orden 10) por lo que el ajuste no es bueno. Vemos de los parámetros de ajuste y las figuras que se favorece una masa del gluon cercana a 0.

Caso II: Masas constituyentes + PDG

Como los valores que esperamos hallar para la tensión de la cuerda son cercanos a 0.2 GeV^2 (teniendo en cuenta otros trabajos que utilizan potenciales similares; [103,104]), decidimos probar con otros valores de las masas: $m_u = m_d = 0.35 \text{ GeV}$, $m_s = 0.5 \text{ GeV}$, $m_c = 1.273 \text{ GeV}$, $m_b = 4.183 \text{ GeV}$. Para los mesones más livianos seguimos usando las masas constituyentes (porque son más relativistas) y para los más pesados, usamos las masas estimadas por el Particle Data Group (PDG) [28].

Usamos los mismos rangos para los valores de los parámetros y la misma función de error que en el caso anterior. En la figura 5.4 vemos los valores del error en función los distintos parámetros.

Observamos que ahora sí tenemos valores mayores de b para los errores mínimos, cercanos a lo esperado. También notamos que el resultado parece ser independiente de la masa del gluon, ya que en todo su rango de variación los errores son similares. A partir de ahora decidimos trabajar con estos valores para las masas. El mínimo error es $\chi_{\min}^2 = 2235$, y el conjunto de parámetros que lo minimiza es:

| μ (GeV) | b (GeV^2) | g |
|-------------|------------------------|-------|
| 0.047 | 0.248 | 0.949 |

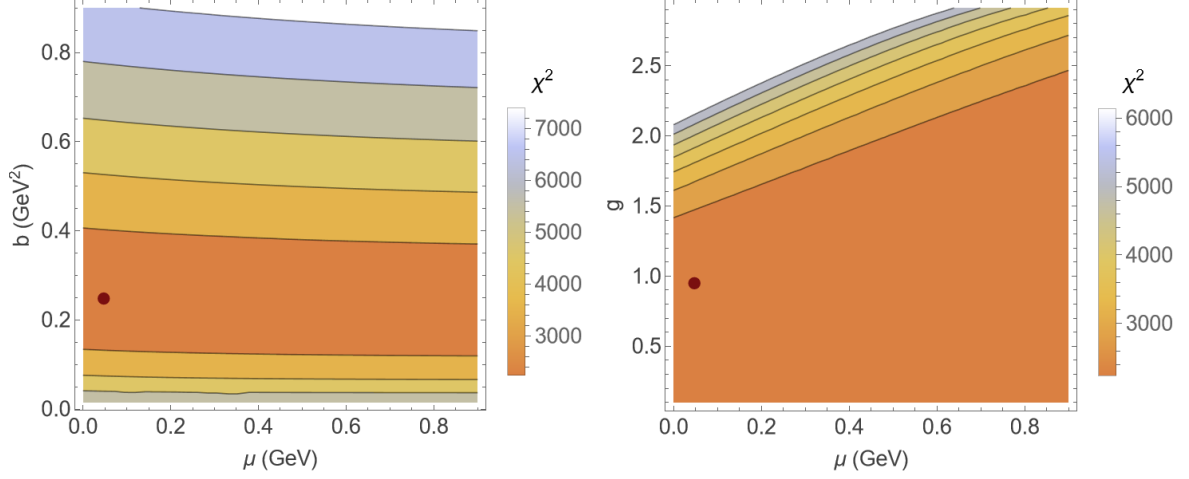


Figura 5.4: Error del ajuste en función de los parámetros b, μ (izquierda) y g, μ (derecha) para el caso II. El punto es el valor que minimiza el error.

Ajuste de las energías y los decaimientos

Pasamos a ajustar conjuntamente las energías del estado base (tabla 5.1) y sus constantes de decaimiento (tabla 5.2). Como están en el estado base (espín 0), todos estos mesones son pseudoescalares.

| Mesón | Composición | Constante de decaimiento (MeV) |
|---------|-------------|--------------------------------|
| B_c^+ | $c\bar{b}$ | 427 ± 6 |
| B_s^0 | $s\bar{b}$ | 227.2 ± 3.4 |
| B^0 | $d\bar{b}$ | 190.9 ± 4.1 |
| B^+ | $u\bar{b}$ | 187.1 ± 4.2 |
| D^+ | $c\bar{d}$ | 211.9 ± 1.1 |
| D_s^+ | $c\bar{s}$ | 249.0 ± 1.2 |

Tabla 5.2: Constantes de decaimiento de mesones heavy-light en el estado fundamental. Los valores fueron extraídos de [53], excepto el del mesón B_c , tomado de [71].

Para el mesón D_0 , en general no se calcula su constante de decaimiento ya que no puede decaer leptónicamente y la constante no tiene implicancia física en ningún proceso de relevancia experimental o teórica. Por el contrario, para el B_0 sí se calcula ya que, aunque no sufra decaimientos leptónicos, la constante de decaimiento es relevante para el proceso de mezcla $B_0 - \bar{B}_0$ [105]. Este proceso se puede medir, por lo que también se calcula su constante de decaimiento.

En el caso de los decaimientos, vimos que se agrega un nuevo parámetro libre: la constante k de la ecuación (5.4). Para reducir la cantidad de parámetros libres que aparecen en este ajuste y así disminuir la complejidad del programa, vamos a tomar b fijo y variar μ, g, k . Fijamos b porque es el parámetro para el cual tenemos más certeza

sobre su valor, tanto a partir de los valores hallados en la literatura como nuestro propio ajuste anterior. Consideramos los siguientes valores:

- μ entre 0 GeV y 0.9 GeV.
- $b = 0.1, 0.15$ y 0.2 GeV^2 . Tomamos como referencia los valores usuales para b y el obtenido mediante el ajuste de las energías.
- g entre 0.1 y 2.9.
- k entre 1 y 10. Nos basamos en [100] donde se utiliza $k = 1.67$.

Utilizamos la misma fórmula de error que en el caso de las masas, pero ahora agregando también los decaimientos:

$$\chi^2 = \sqrt{\sum_i \left(\frac{E_{\text{calc}}^i - E_{\text{exp}}^i}{\delta E_{\text{exp}}^i} \right)^2 + \sum_j \left(\frac{f_{\text{calc}}^j - f_{\text{exp}}^j}{\delta f_{\text{exp}}^j} \right)^2} \frac{1}{N - n}. \quad (5.5)$$

Ahora, $N = 13$ y $n = 4$. Obtenemos las curvas de nivel que observamos en la figura 5.5.

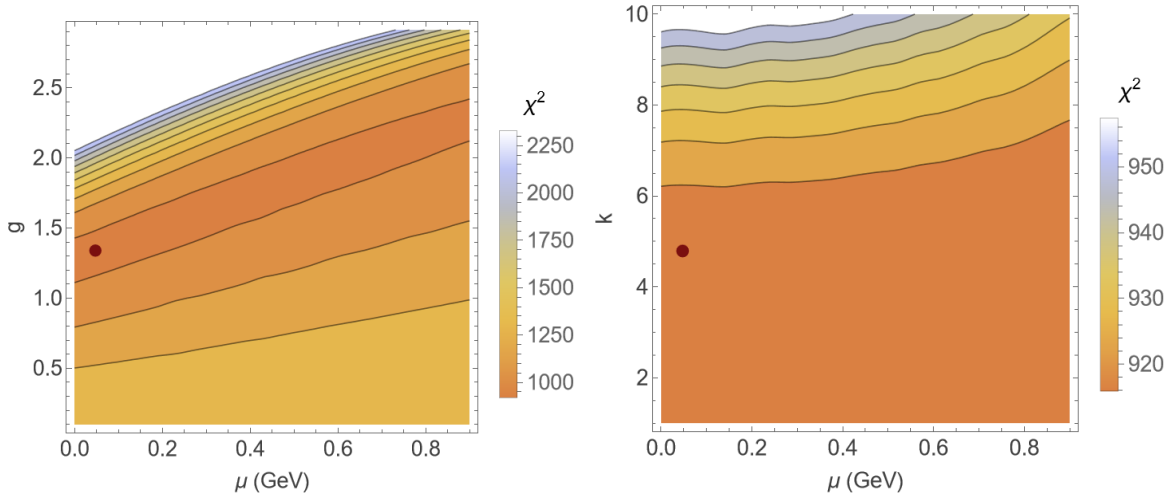


Figura 5.5: Error del ajuste en función de los parámetros g, μ (izquierda) y k, μ (derecha) para el ajuste conjunto de energías y decaimientos. El punto es el valor que minimiza el error.

Nuevamente el ajuste parece ser mayoritariamente independiente del valor de la masa del gluon, y también del valor de k . El mínimo error es $\chi_{\text{min}}^2 = 916$, y el conjunto de parámetros que lo minimiza es:

| μ (GeV) | b (GeV^2) | g | k |
|-------------|------------------------|-------|-------|
| 0.047 | 0.15 | 1.339 | 4.789 |

Como mencionamos, encontramos diversos problemas computacionales a la hora de resolver la ecuación de Dirac. Por otro lado, al intentar calcular las constantes de

decaimiento nos encontramos con un modelo que agrega un parámetro extra a nuestro problema. Además, obtenemos valores de χ^2 poco razonables. Por estas razones, decidimos seguir por el camino de la ecuación de Schrödinger. En la próxima sección veremos su resolución numérica y las correcciones al potencial.

Como posible mejora a futuro, se podría implementar una manera más robusta de calcular la constante de decaimiento. Por ejemplo, en [106] se estudia el espectro y decaimiento leptónico del mesón D_s utilizando la ecuación de Dirac, y se escribe la constante de decaimiento en términos de la función de onda del mesón como una integral en el momento. Esto permite calcular las constantes sin tener que evaluar la función de onda en el origen.

Capítulo 6

Espectro y decaimientos con el formalismo de Schrödinger

Vamos a utilizarla ecuación de Schrödinger para calcular el espectro de energía de los mesones, así como las constantes o tasas de decaimiento, dependiendo del mesón. A diferencia del caso de Dirac, tomaremos a la interacción entre quarks como un problema de dos cuerpos, usando la coordenada r como la distancia relativa entre ellos y la masa reducida $m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Para calcular las constantes de decaimiento de los mesones en el estado base de energía usando la función de onda de Schrödinger, se utiliza la fórmula de van Royen-Weisskopf

$$f_M = \sqrt{\frac{12}{M}} |\Psi(\mathbf{0})|. \quad (6.1)$$

Recordemos que esta fórmula solo es válida cuando $\ell = 0$, por lo que solo la utilizaremos para estados que cumplan con esta condición. Si queremos escribir esta expresión en términos de la función de onda radial (que es la que calculamos numéricamente), recordamos que $\Psi_{n\ell m_\ell}(\mathbf{r}) = R_{n\ell}(r) Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi)$. Como estamos considerando $\ell = 0$, utilizamos solamente el armónico esférico $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, por lo que finalmente $\psi(\mathbf{0}) = \frac{R(0)}{\sqrt{4\pi}}$ y

$$f_M = \sqrt{\frac{3}{\pi M}} |R(0)|.$$

Para calcular la función de onda en el origen, utilizamos su relación con el potencial de interacción [107]. Partimos de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\left[-\frac{1}{2m_r} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}).$$

Como $\ell = 0$, el armónico esférico correspondiente es constante por lo que podemos considerar solamente las ecuaciones radiales y $\nabla^2 R(r) = \nabla^2 \frac{u(r)}{r} = \frac{u''(r)}{r}$ donde $u''(r) =$

$\frac{d^2u}{dr^2}$. Entonces,

$$-\frac{1}{2m_r}u''(r) = (E - V(r))u(r). \quad (6.2)$$

Comenzamos trabajando con el lado izquierdo de esta expresión. Multiplicando por $\frac{u'(r)}{4\pi r^2}$ e integrando en el volumen,

$$-\frac{1}{2m_r} \int \frac{u''u'}{4\pi r^2} d^3r = -\frac{1}{2m_r} \int_0^\infty dr u''u' = -\frac{1}{4m_r} (u'(r))^2 \Big|_0^\infty.$$

En el paso anterior asumimos que u' y u'' decaen rápidamente en el infinito. Podemos escribir a $u(r)$ como $u(r) = rR(r) = \frac{r\psi(\mathbf{r})}{Y_l^{m_\ell}(\theta, \phi)}$, por lo que $u'(r) = \frac{1}{Y_l^{m_\ell}(\theta, \phi)} (\psi(\mathbf{r}) + r\psi'(\mathbf{r}))$. Usando que $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$,

$$-\frac{1}{4m_r} (u'(r))^2 \Big|_0^\infty = -\frac{\pi}{m_r} (\psi(\mathbf{r}) + r\psi'(\mathbf{r}))^2 \Big|_{r=0}^{r=\infty} = \frac{\pi}{m_r} |\psi(r=0)|^2,$$

donde nuevamente usamos que las funciones de onda y sus derivadas tienden a cero en el infinito. Integrando ahora el otro lado de la ecuación,

$$\begin{aligned} \int (E - V(r)) u(r) \frac{u'(r)}{4\pi r^2} d^3r &= \int_0^\infty dr (E - V(r)) u(r) u'(r) = \\ \frac{1}{2} \int_0^\infty dr (E - V(r)) (u^2(r))' &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dr V'(r) u^2(r) = \frac{1}{2} \langle V'(r) \rangle. \end{aligned}$$

Llegamos a una expresión que involucra al valor esperado de la derivada del potencial $\langle V'(r) \rangle$. Juntando los dos lados de la ecuación (6.2), obtenemos

$$\frac{\pi}{m_r} |\psi(r=0)|^2 = \frac{1}{4m_r} |R(0)|^2 = \frac{1}{2} \langle V'(r) \rangle.$$

Entonces, usando la fórmula (6.1) tenemos

$$f_M^2 = \frac{6m_r}{\pi M} \langle V'(r) \rangle \quad (6.3)$$

Hasta ahora, utilizamos el potencial sin correcciones

$$V(r) = -\frac{g^2 e^{-\mu r}}{3\pi r} + br. \quad (6.4)$$

Recordamos que el primer término viene del cálculo de la amplitud de intercambio de un gluon, y el segundo modela el confinamiento. En el caso de Dirac, ambos términos aparecían de forma diferente en las ecuaciones dependiendo de su naturaleza vectorial o escalar, pero como ahora estamos en un contexto no relativista no hay diferencia. Para resolver la ecuación de Schrödinger y obtener información sobre el espín precisamos calcular las correcciones a este potencial.

6.1. Correcciones al potencial

De forma similar al cálculo de las correcciones al potencial de Coulomb que analizamos en el capítulo 4, se pueden calcular las correcciones al potencial de interacción entre quarks en el límite no relativista. Se escribe la interacción de intercambio de un gluon entre quarks y se toma el siguiente orden en el desarrollo. El potencial corregido es [103]

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{L}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = & -\frac{g^2 e^{-\mu r}}{3\pi r} + br + \frac{g^2}{6} \delta^3(\mathbf{r}) \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \\
 & - \frac{4g^2 |\mathbf{p}|^2}{3m_1 m_2 \mu^2} (\mu^2 r^2 + \mu r + 1 - e^{\mu r}) \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r^3} - \frac{g^2 \mu^2 (m_1^2 + m_2^2) e^{-\mu r}}{6m_1^2 m_2^2} \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r} \\
 & + \frac{4g^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})^2}{m_1 m_2 \mu^2} \left(\frac{\mu^2 r^2}{3} + \mu r + 1 - e^{\mu r} \right) \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r^5} \\
 & + \frac{8g^2}{9m_1 m_2} \delta^3(\mathbf{r}) (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2) - \frac{8g^2 \mu^2}{9m_1 m_2} (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2) \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r} \\
 & - \frac{2g^2 (\mu r + 1)}{3m_1 m_2} \left[\frac{2m_1 + m_2}{m_1} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}_1) + \frac{m_1 + 2m_2}{m_2} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}_2) \right] \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r^3} \\
 & - \frac{4g^2}{3m_1 m_2} \left(\frac{\mu^2 r^2}{3} + \mu r + 1 \right) \left[\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 - \frac{3(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right] \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r^3}
 \end{aligned}$$

donde los dos primeros términos corresponden al potencial sin corregir. En los siguientes términos aparecen correcciones como la interacción espín-espín ($\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$), espín-órbita ($\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$) o interacción tensorial ($(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{r})$). m_1 y m_2 son las masas de los quarks, y al igual que antes, g es la constante de acoplamiento fuerte, μ es la masa del gluon y b es la tensión de la cuerda. \mathbf{p} es el momento lineal, \mathbf{L} es el momento angular orbital, y $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ los operadores de espín de la partícula y anti-partícula respectivamente.

6.2. Resolución numérica

Resolvemos numéricamente la ecuación de Schrödinger. Vamos a resolverla en primera instancia utilizando el potencial sin corregir, obteniendo las funciones de onda y el espectro de energía de los mesones. Luego agregaremos las correcciones, considerando los nuevos términos como perturbaciones al hamiltoniano original.

La ecuación radial de Schrödinger para el potencial 6.4 es

$$\left[-\frac{1}{2m_r r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\ell(\ell+1)}{2m_r r^2} - \frac{g^2 e^{-\mu r}}{3\pi r} + br \right] R(r) = E R(r).$$

Esta ecuación se puede escribir de forma adimensionada tomando $u(r) = rR(r)$, $\rho = \frac{r}{a_0}$ con $a_0 = \frac{3\pi}{g^2 m_r}$. Definiendo las constantes $E_0 = \frac{g^2 m_r}{18\pi^2}$, $\lambda = \frac{E}{E_0}$, $A = \mu a_0$ y $B = b \frac{a_0}{E_0}$:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{2e^{-A\rho}}{\rho} - B\rho + \lambda \right] u(\rho) = 0. \quad (6.5)$$

Esta es la ecuación que resolveremos numéricamente. Vamos a hallar las constantes A , B ajustando el espectro de los mesones y las constantes de decaimiento, lo cual nos permitirá hallar los valores de los parámetros μ , b , g .

Luego de resolver la ecuación (6.5) y encontrar las funciones de onda, se hallan las correcciones al espectro de energía utilizando la teoría de perturbaciones independientes del tiempo. Consideramos un hamiltoniano de la forma $H = H_0 + H'$ donde asumimos que ya conocemos las soluciones de los valores propios y funciones propias para el caso $H' = 0$. Es decir, si $H_0|\psi_n^0\rangle = E_n^0|\psi_n^0\rangle$, conocemos E_n^0 y $|\psi_n^0\rangle$. En nuestro caso, H^0 es el hamiltoniano con el potencial no corregido. Desarrollamos las energías como $E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$ donde λ es un número pequeño. Entonces, la corrección de primer orden a los niveles de energía es el valor esperado de la perturbación en el estado sin perturbar [92]: $E_n^1 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$. El cálculo detallado de estas correcciones y cómo aplicarlas a nuestro modelo se puede ver en [46, 103].

Para los mesones tipo quarkonium, calculamos los anchos de decaimiento utilizando la fórmula (3.16). Por otro lado, para los heavy-light calculamos las constantes de decaimiento con (3.17). En ambos casos necesitamos conocer el valor de la función de onda en el origen. A primer orden, la calculamos utilizando el potencial sin corregir (6.4).

A segundo orden se podría implementar la teoría de perturbaciones para calcular las correcciones a la función de onda: de forma similar a las correcciones a la energía, consideramos $\psi_n = \psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$. Se puede calcular el primer orden de la corrección como [92]

$$\psi_n^1 = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{(E_n^0 - E_m^0)} \psi_m^0.$$

Esta corrección implica conocer la función de onda sin corregir para todos los niveles de energía, lo cual dificulta el programa. A pesar de que sería interesante estudiar este tipo de aproximaciones, esto le agrega una dificultad que no abordaremos en el marco

de este trabajo. Además, este procedimiento no es el que suele seguirse en la literatura por lo que tomamos el camino de utilizar las correcciones mencionadas anteriormente.

6.3. Resultados

Caso I: Mesones pesados

Comenzamos trabajando solamente con mesones formados por quarks pesados c, b : el mesón B_c , el charmonium $c\bar{c}$ y el bottomonium $b\bar{b}$. Podemos agregar los quarkonium porque, al utilizar la ecuación de Schrödinger, ya no estamos trabajando con un modelo del estilo heavy-light sino que trabajamos con la masa reducida. Entonces, podemos agregar mesones donde ambos quarks tengan la misma masa. Esperamos obtener mejores resultados trabajando únicamente con los mesones pesados, ya que al tener mayor masa son menos relativistas que los compuestos por quarks más livianos. Ajustamos en conjunto el espectro de los mesones pesados así como los anchos de decaimiento para el $c\bar{c}$ y el $b\bar{b}$ (ver tablas 6.1 y 6.2).

Utilizamos la notación espectroscópica para caracterizar los niveles de energía. En esta notación, escribimos a un cierto estado como $n^{2S+1}L_J$ donde n es el nivel de energía, S el espín y J es el momento angular total. Para el momento angular orbital L se utilizan distintas letras según su valor: para $\ell = 0, 1, 2, 3$ utilizamos las letras S, P, D, F respectivamente. Entonces, por ejemplo, el nivel 3S_1 tiene los números cuánticos $s = 1$, $j = 1$, $\ell = 0$.

| Proceso | Γ (keV) |
|-----------------------------------|-------------------|
| $J/\psi(1S) \rightarrow e^+e^-$ | 5.53 ± 0.10 |
| $\psi(2S) \rightarrow e^+e^-$ | 2.33 ± 0.04 |
| $\Upsilon(1S) \rightarrow e^+e^-$ | 1.340 ± 0.018 |
| $\Upsilon(2S) \rightarrow e^+e^-$ | 0.612 ± 0.011 |

Tabla 6.2: Anchos de decaimiento leptónicos para estados de charmonium y bottomonium [28].

En esta oportunidad, además de los parámetros de nuestro modelo, dejamos libres los valores de las masas de los quarks. En el caso de Dirac no realizamos este estudio debido a que el tiempo de cómputo era muy costoso. Variamos los parámetros:

- b entre 0.15 y 0.33 GeV².
- g entre 1.71 y 2.00.
- μ entre 0.01 GeV y 0.85 GeV.

| Estado | Notación $n^{2S+1}L_J$ | Energía (MeV) |
|---|------------------------|----------------------|
| Charmonium ($c\bar{c}$) | | |
| η_c (1S) | 1^1S_0 | 2984.1 ± 0.4 |
| J/ψ (1S) | 1^3S_1 | 3096.900 ± 0.006 |
| χ_{c0} (1P) | 1^3P_0 | 3414.71 ± 0.30 |
| χ_{c1} (1P) | 1^3P_1 | 3510.67 ± 0.05 |
| h_c (1P) | 1^1P_1 | 3525.37 ± 0.14 |
| χ_{c2} (1P) | 1^3P_2 | 3556.17 ± 0.07 |
| η_c (2S) | 2^1S_0 | 3637.8 ± 0.6 |
| ψ (2S) | 2^3S_1 | 3686.097 ± 0.011 |
| Bottomonium ($b\bar{b}$) | | |
| η_b (1S) | 1^1S_0 | 9398.7 ± 2.0 |
| Υ (1S) | 1^3S_1 | 9460.40 ± 0.10 |
| χ_{b0} (1P) | 1^3P_0 | 9859.44 ± 0.42 |
| χ_{b1} (1P) | 1^3P_1 | 9892.78 ± 0.31 |
| h_b (1P) | 1^1P_1 | 9899.3 ± 0.8 |
| χ_{b2} (1P) | 1^3P_2 | 9912.21 ± 0.31 |
| η_b (2S) | 2^1S_0 | $9999.0 \pm 0.1^*$ |
| Υ (2S) | 2^3S_1 | 10023.4 ± 0.5 |
| χ_{b0} (2P) | 2^3P_0 | 10232.5 ± 0.5 |
| χ_{b1} (2P) | 2^3P_1 | 10255.46 ± 0.50 |
| h_b (2P) | 2^1P_1 | 10259.8 ± 1.2 |
| χ_{b2} (2P) | 2^3P_2 | 10268.65 ± 0.50 |
| B_c^+ ($c\bar{b}$) | | |
| B_c^+ (1S) | 1^1S_0 | 6274.47 ± 0.32 |
| B_c^+ (1S) | 1^3S_1 | $6329.0 \pm 0.1^*$ |
| B_c^+ (2S) | 2^1S_0 | 6871.2 ± 1.0 |

Tabla 6.1: Espectro del charmonium, bottomonium y B_c . Todos los datos son tomados del PDG [28] excepto los indicados con *, que son resultados numéricos de LQCD [108].

- m_b entre 4.55 y 4.7 GeV.
- m_c entre 1.225 y 1.3 GeV.

Calculamos el error del ajuste de la misma forma que en el caso de Dirac:

$$\chi^2 = \sqrt{\sum_i \left(\frac{E_{\text{calc}}^i - E_{\text{exp}}^i}{\delta E_{\text{exp}}^i} \right)^2 + \sum_j \left(\frac{\Gamma_{\text{calc}}^j - \Gamma_{\text{exp}}^j}{\delta \Gamma_{\text{exp}}^j} \right)^2} \frac{1}{N - n}.$$

En esta expresión, los índices índice i, j recorren los niveles de energía de los distintos mesones. E_{calc}^i es la energía calculada con nuestro modelo para un determinado mesón y nivel de energía, y $E_{\text{exp}}^i, \delta E_{\text{exp}}^i$ el correspondiente valor e incertidumbre experimental. Usamos la misma notación para los anchos de decaimiento. N es el número de valores que ajusta nuestro modelo, es decir $N = \text{niveles de energía} + \text{anchos de decaimiento}$. En este caso, ajustamos en total 23 niveles de energía sumando todos los mesones, y 4 anchos de decaimiento por lo que $N = 27$. Por otro lado, n es el número

de parámetros que ajustamos (en este caso, 5).

El mínimo error es $\chi_{\min}^2 = 26.0784$ y se da para el conjunto de parámetros:

| μ (GeV) | b (GeV ²) | g | m_b (GeV) | m_c (GeV) |
|-------------|-------------------------|------|-------------|-------------|
| 0.23 | 0.25 | 1.99 | 4.65 | 1.225 |

Notamos que el mejor valor del ajuste ocurre cuando la masa del gluon es no nula: el caso no relativista favorece la existencia de una masa del gluon. Por otro lado, los valores de b y g concuerdan con los estimados en la literatura [26, 41, 43, 104]. Las masas de los quarks también están dentro del rango esperado (como referencia, según el PDG [28], $m_b = 4.183$ GeV y $m_c = 1.273$ GeV). En las figuras 6.1 y 6.2 vemos las curvas de nivel correspondientes al error para distintas combinaciones de los parámetros de ajuste.

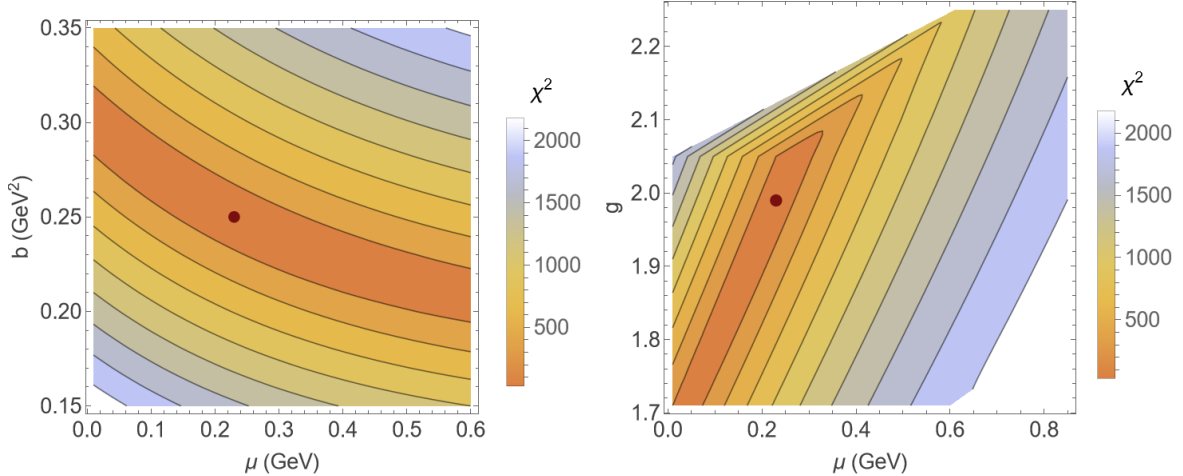


Figura 6.1: Error del ajuste en función de los parámetros b, μ (izquierda) y g, μ (derecha) para el caso I. El punto es el valor que minimiza el error.

Habiendo obtenido buenos resultados para el ajuste con masa del gluon no nula, realizamos una comparación con el caso sin masa. Ajustamos los parámetros nuevamente pero esta vez imponiendo que la masa del gluon sea 0. En este caso, obtenemos un error mayor, de $\chi_{\min}^2 = 27.974$. Como ejemplo, vemos la comparación entre la predicción del espectro del charmonium en ambos casos en la figura 6.3 y los anchos de decaimiento en la figura 6.4. Notamos que para ambos observables, el ajuste es mejor en el caso con gluon masivo.

Como conclusión de esta sección, hallamos que el mejor ajuste para los espectros y anchos de decaimiento de los mesones pesados se da cuando la masa del gluon es no nula. A continuación, extendemos este análisis para un conjunto más grande de mesones.

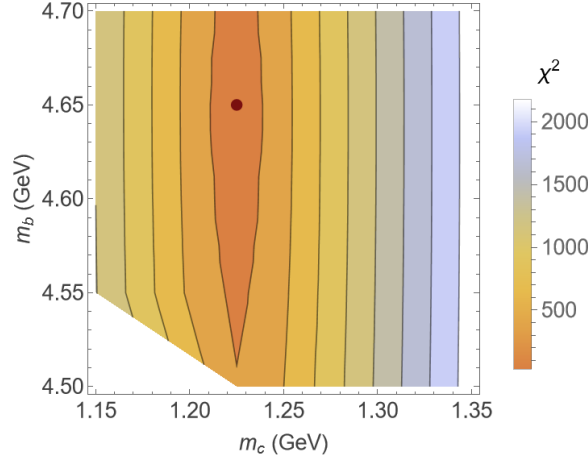


Figura 6.2: Error del ajuste en función de las masas de los quarks para el caso I. El punto representa al mínimo error.

Caso II: Mesones livianos y pesados

Ahora pasamos al ajuste con todos los mesones a la vez. Tenemos 9 mesones: los quarkonium $b\bar{b}$, $c\bar{c}$, y los heavy-light B_c , B_s , B^+ , B^0 , D_s , D^+ y D^0 . Para los quarkonium ajustamos, además del espectro, los anchos de decaimiento de la misma forma que en el caso anterior (tablas 6.1 y 6.2). Para los heavy-light, ajustamos su espectro y constante de decaimiento (tablas 6.3 y 5.2).

Para reducir la complejidad del ajuste, en este caso dejamos fijas las masas de los quarks. Para los quarks pesados usamos las masas obtenidas del ajuste anterior: $m_c = 1.225$ GeV, $m_b = 4.65$ GeV. Para los livianos, usamos los valores dados por los modelos de quarks constituyentes $m_u = m_d = 0.35$ GeV, $m_s = 0.5$ GeV. Nuestros parámetros de ajuste serán μ, b, g .

Variamos los parámetros:

- b entre 0.1 y 0.44 GeV².
- g entre 1.81 y 2.00.
- μ entre 0.01 GeV y 0.59 GeV.

Utilizamos la misma definición de error que en el caso anterior (5.5), con la diferencia de que tenemos más mesones y agregamos también las constantes de decaimiento. Ahora $N = 47$ y $n = 3$.

Obtenemos los parámetros de ajuste:

| μ (GeV) | b (GeV ²) | g |
|-------------|-------------------------|-----|
| 0.01 | 0.22 | 2.1 |

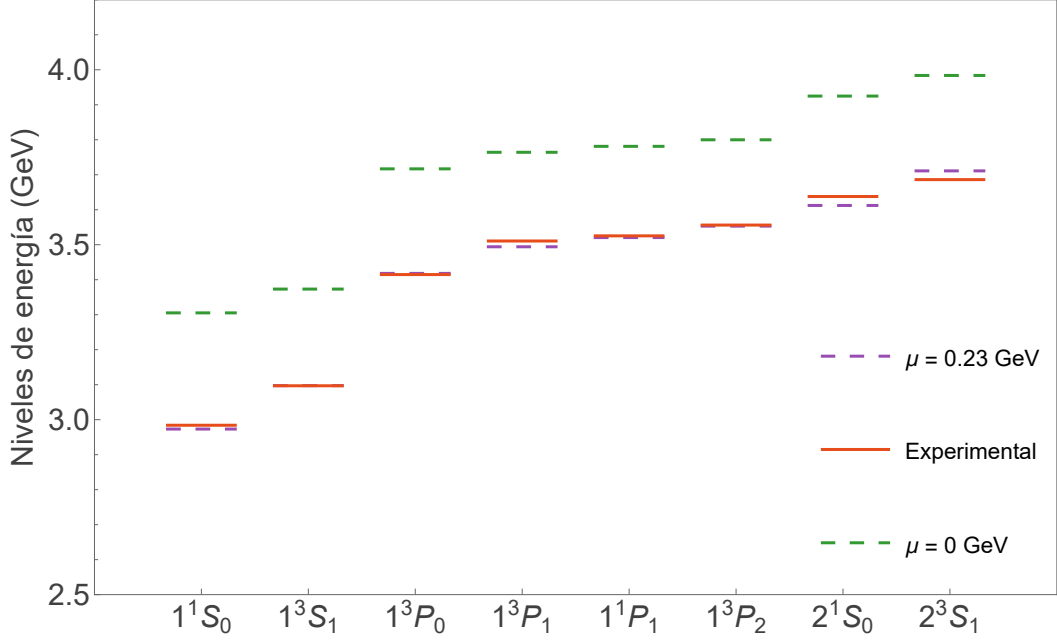


Figura 6.3: Espectro del charmonium para los valores de los parámetros que minimizan el error, con y sin masa del gluon.

En este caso, el ajuste ya no favorece a los gluones masivos. Los otros parámetros siguen dentro de los valores que esperamos. En las figuras 6.5 y 6.6 vemos las predicciones para los espectros y las constantes de decaimiento utilizando los parámetros que minimizan el error.

En primer lugar, notamos que los valores del espectro obtenidos con nuestro modelo son menores que los experimentales para los mesones formados por quarks pesados ($b\bar{b}$, $c\bar{b}$ y $c\bar{c}$) y mayores para el resto. Por otro lado, vemos que los valores de las constantes de decaimiento calculadas son mayores a los valores experimentales. Esto concuerda con los resultados obtenidos en [88]. Notamos que la corrección a la fórmula de van Royen-Weisskopf (3.17) disminuyen su valor respecto a la fórmula sin corregir, por lo que son acertadas.

Caso III: Masas alternativas

Además de este ajuste, probamos realizar otros usando distintos valores para las masas de m_b y m_c . Obtuvimos que el error se minimiza cuando $m_b = 4.675$ GeV y $m_c = 1.35$ GeV, con los parámetros:

| μ (GeV) | b (GeV ²) | g |
|-------------|-------------------------|-----|
| 0.01 | 0.1 | 1.8 |

En ambos casos notamos que al considerar los mesones más relativistas se favorece

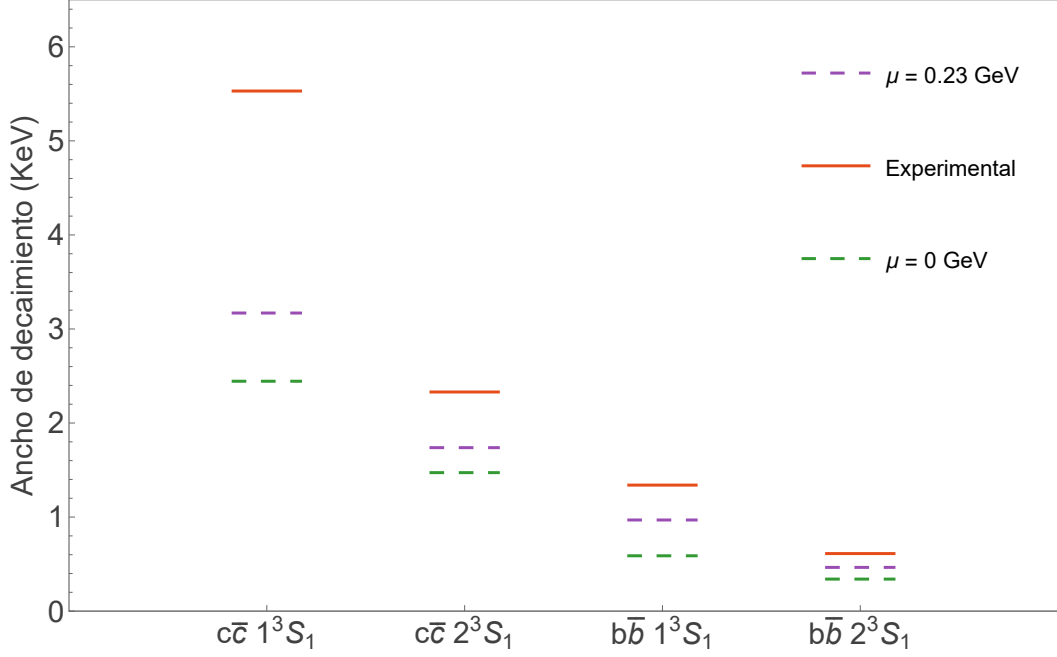


Figura 6.4: Anchos de decaimiento para los valores de los parámetros que minimizan el error, con y sin masa del gluon.

una masa del gluon cercana a cero. Con estos valores, calculamos el espectro y las constantes de decaimiento y obtenemos las figuras 6.7 y 6.8 respectivamente. Notamos que el ajuste es levemente más acertado que en el caso II, pero igualmente es mucho peor que en el caso I. Esto nos indica que nuestro modelo no es adecuado para describir mesones tan relativistas como los que consideramos en esta sección. Una posible mejora sería calcular las correcciones a la función de onda utilizando teoría de perturbaciones.

Comparando con otros trabajos similares, en [41] y [43], se estudian decaimientos de los mesones J/ψ y Υ de la forma $V \rightarrow \gamma + \text{hadrones}$ (con V cualquiera de los mesones), utilizando correcciones relativistas y de QCD en un modelo con gluon masivo. En particular, se calcula el cociente de tasas de decaimiento $\frac{\Gamma(V \rightarrow \text{hadrones})}{\Gamma(V \rightarrow \gamma + \text{hadrones})}$ agregando correcciones debidas a la masa del gluon a la fórmula de van Royen-Weisskopf. Estas correcciones se calculan modificando la cinemática del espacio de fases final en el proceso (por ejemplo, agregando emisión de gluones en el estado final). A diferencia de nuestro trabajo, no se resuelve la ecuación de Schrödinger sino que se extrae el valor de la función de onda en el origen $\psi(0)$ a partir de los valores experimentales de otros decaimientos (por ejemplo, leptónicos). Se encuentra que no es posible reproducir los resultados experimentales a menos que se tenga en cuenta la masa del gluon. Este es un efecto importante y una posible dirección de trabajo futuro en nuestro caso: agregar las correcciones dadas por el gluon masivo no solo a nivel del potencial sino también del espacio de fases.

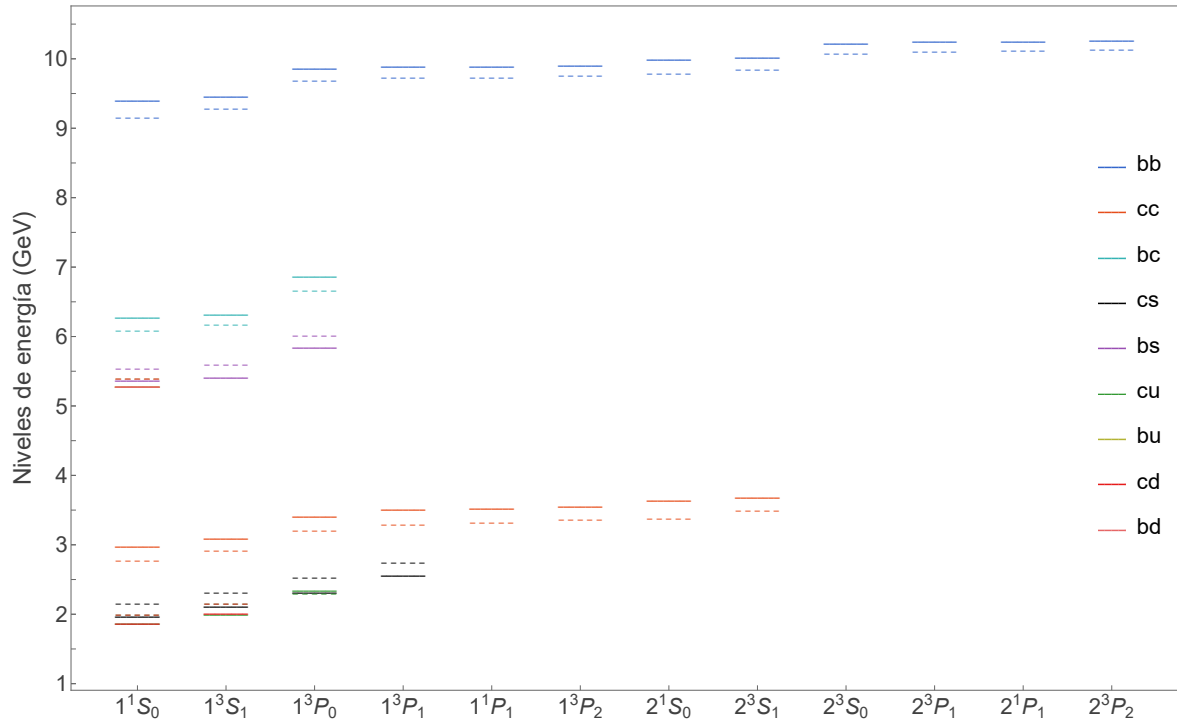


Figura 6.5: Espectro de los mesones: comparación entre valores experimentales y calculados para el caso II. Las líneas punteadas son los valores del ajuste y las líneas continuas, los valores experimentales.

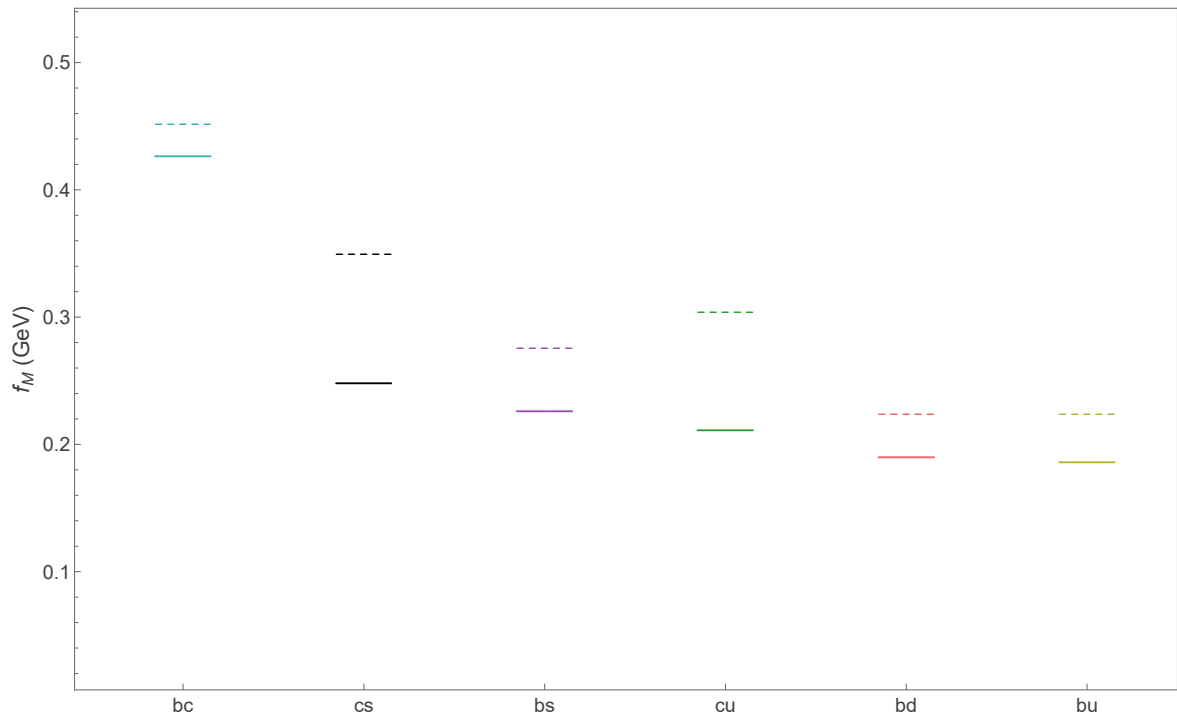


Figura 6.6: Constantes de decaimiento de los mesones heavy-light: comparación entre valores experimentales y calculados para el caso II. Las líneas punteadas son los valores del ajuste y las líneas continuas, los valores experimentales.

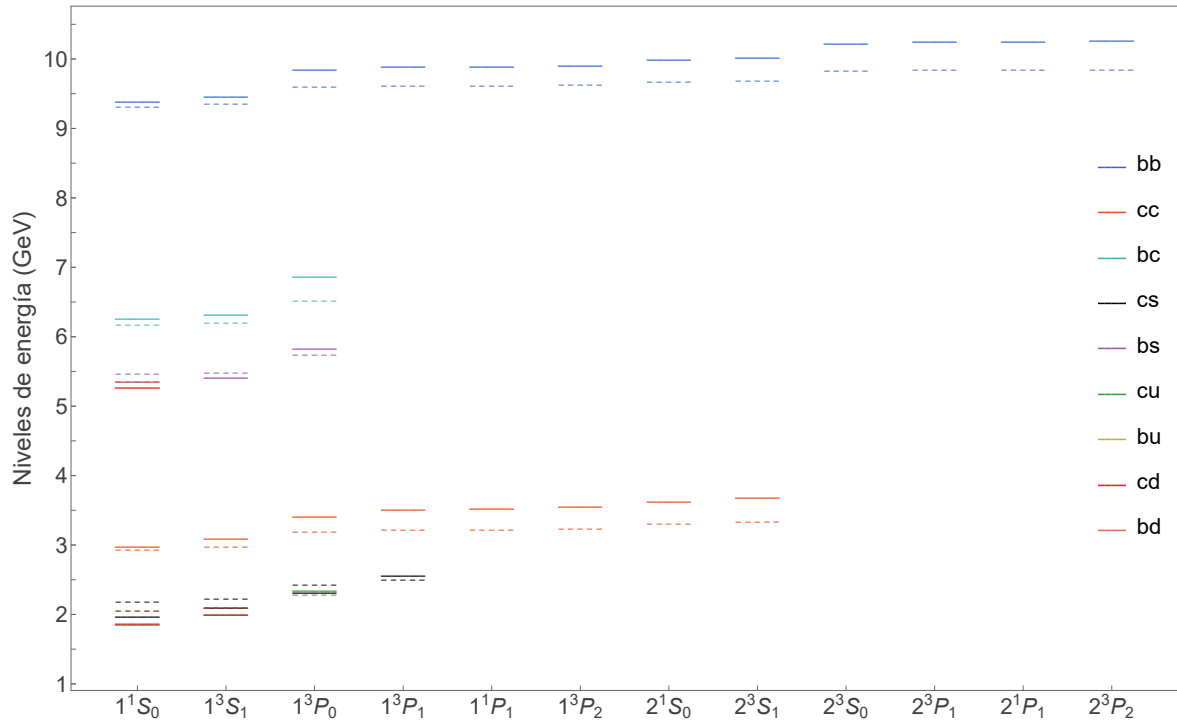


Figura 6.7: Espectro de los mesones: comparación entre valores experimentales y calculados para el caso III. Las líneas punteadas son los valores del ajuste y las líneas continuas, los valores experimentales.

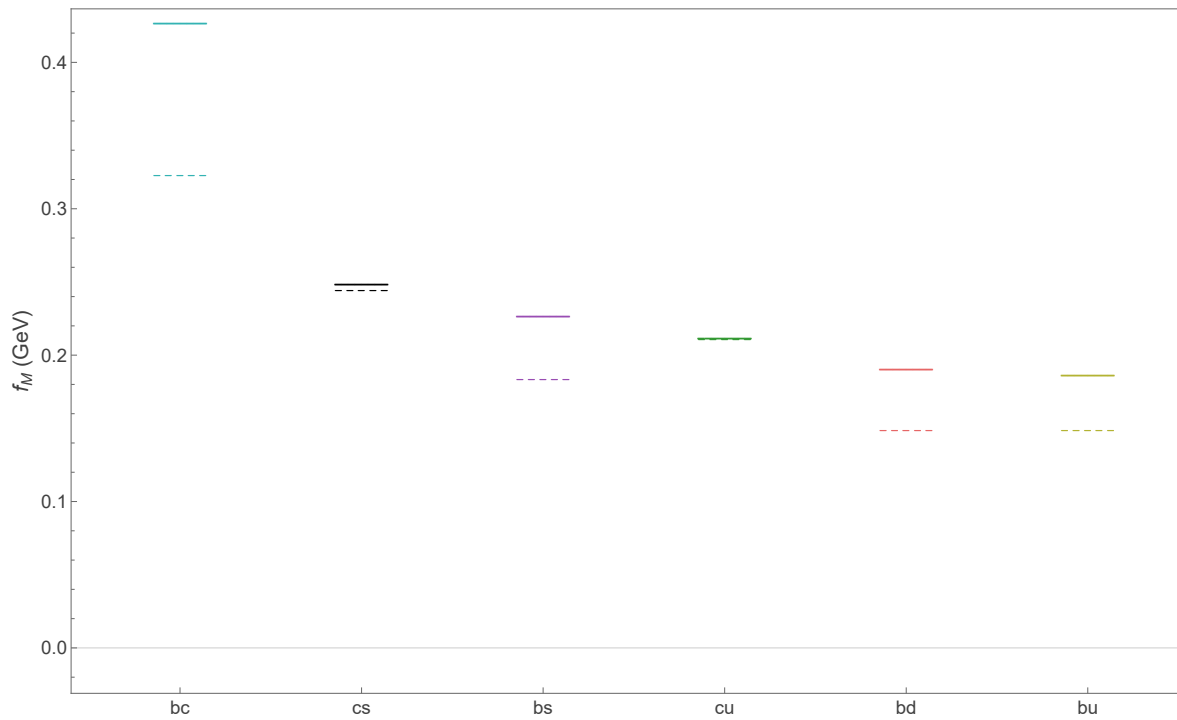


Figura 6.8: Constantes de decaimiento de los mesones heavy-light: comparación entre valores experimentales y calculados para el caso III. Las líneas punteadas son los valores del ajuste y las líneas continuas, los valores experimentales.

| Estado | Notación $n^{2S+1}L_J$ | Energía (MeV) |
|--|------------------------|--------------------|
| D⁰ ($c\bar{u}$) | | |
| D^0 (1S) | 1^1S_0 | 1864.84 ± 0.05 |
| D^0 (1S) | 1^3S_1 | 2006.85 ± 0.05 |
| D^0 (1P) | 1^3P_0 | 2343 ± 10 |
| D⁺ ($c\bar{d}$) | | |
| D^+ (1S) | 1^1S_0 | 1869.66 ± 0.05 |
| D^+ (1S) | 1^3S_1 | 2010.26 ± 0.05 |
| D_s⁺ ($c\bar{s}$) | | |
| D_s^+ (1S) | 1^1S_0 | 1968.35 ± 0.07 |
| D_s^+ (1S) | 1^3S_1 | 2112.2 ± 0.4 |
| D_s^+ (2S) | 2^1S_0 | 2317.8 ± 0.5 |
| D_s^+ (1P) | 1^3P_2 | 2569.1 ± 0.8 |
| B⁰ ($d\bar{b}$) | | |
| B^0 (1S) | 1^1S_0 | 5279.72 ± 0.08 |
| B⁺ ($u\bar{b}$) | | |
| B^+ (1S) | 1^1S_0 | 5279.41 ± 0.07 |
| B_s⁰ ($s\bar{b}$) | | |
| B_s^0 (1S) | 1^1S_0 | 5366.93 ± 0.10 |
| B_s^0 (1S) | 1^3S_1 | 5415.4 ± 1.4 |
| B_s^0 (1P) | 1^3P_2 | 5839.88 ± 0.12 |

Tabla 6.3: Espectro de los mesones D^0 , D^+ , D_s^+ , B^0 , B^+ , B_s^0 [28].

Capítulo 7

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo nos propusimos estudiar los decaimientos de mesones en el límite no relativista, utilizando un potencial de interacción entre quarks obtenido a partir del intercambio de un gluon, y agregando un término lineal para modelar el confinamiento. Discutimos los distintos tipos de decaimientos que sufren los mesones, y nos enfocamos en calcular su espectro además de sus tasas y constantes de decaimiento. Utilizamos un modelo con gluones masivos, y uno de nuestros objetivos fue determinar a partir del ajuste con los datos experimentales, el mejor valor para la masa del gluon.

En primera instancia utilizamos la ecuación de Dirac para hallar las energías y funciones de onda que caracterizan a los mesones, con la esperanza de obtener suficiente información sobre el espín de las partículas incluso con el potencial a primer orden. Sin embargo, nos encontramos con que a nivel computacional, la resolución de estas ecuaciones presenta un gran desafío y no hay procedimientos estándar para calcular las constantes de decaimiento. Como consecuencia, nuestros resultados no fueron tan buenos como esperábamos. Por esta razón decidimos continuar con la ecuación de Schrödinger, utilizando las correcciones perturbativas a los niveles de energía, y correcciones dadas por QCD a las tasas y constantes de decaimiento. Este camino resultó ser más eficiente a la hora de realizar los cálculos, y existen más referencias en la literatura en las cuales basarse y comparar resultados.

En el caso de Schrödinger, observamos que estudiando solamente los mesones más pesados obtenemos una masa del gluon no nula y un ajuste muy bueno para los anchos de decaimiento y las energías. Al agregar mesones más livianos, esta masa se vuelve casi nula y el ajuste empeora. Esto puede deberse a que estamos considerando una ecuación de onda no relativista por lo que es esperable que, al agregar partículas más livianas, no obtengamos resultados tan precisos.

Concluimos que, en primer lugar, no vale la pena utilizar la ecuación de Dirac para

abordar estos problemas y resulta más eficiente continuar con Schrödinger y las correcciones al potencial. En segundo lugar, obtenemos un valor de masa del gluon no nulo mediante el estudio de mesones pesados, donde los resultados son más precisos. También notamos que, en ese caso, es necesario agregar esta masa para lograr reproducir simultáneamente el espectro y los decaimientos.

Para continuar con el estudio de los mesones livianos, hay varios caminos posibles para tomar. En primer lugar, implementar las correcciones perturbativas también a nivel de la función de onda. Otras posibles mejoras incluyen incluir otras correcciones a las fórmulas para el cálculo de los decaimientos (por ejemplo, teniendo en cuenta la masa del gluon) o considerar la variación de los parámetros de nuestro modelo con la escala de energía. Estos trabajos también permitirán profundizar en la relación entre la masa de gluon y los distintos observables físicos.

Apéndice A

Cálculo de correcciones al potencial de Coulomb

Comenzamos con la amplitud

$$\mathcal{M} = -ie^2 \{ [\bar{u}'_1 \gamma^0 u_1] [\bar{u}'_2 \gamma^0 u_2] D_{00}(q) + [\bar{u}'_1 \gamma^i u_1] [\bar{u}'_2 \gamma^j u_2] D_{ij}(q) \}.$$

Los espinores de Dirac son $u(p) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} (1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2})\xi \\ (\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2mc})\xi \end{pmatrix}$ y $\bar{u}(p) = u^\dagger(p)\gamma^0 = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \xi^\dagger(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2}) & -\xi^\dagger(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2mc}) \end{pmatrix}$. A orden $1/c^2$, tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{u}'_1 \gamma^0 u_1 &= 2m_1 \left(1 - \frac{\mathbf{p}'_1{}^2}{8m_1^2c^2}\right) \left(1 - \frac{\mathbf{p}_1^2}{8m_1^2c^2}\right) \xi_1'^\dagger \xi_1 + 2m_1 \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'_1}{2m_1c}\right) \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1}{2m_1c}\right) \xi_1'^\dagger \xi_1 \\ &= 2m_1 \xi_1'^\dagger \left(1 - \frac{\mathbf{p}'_1{}^2 + \mathbf{p}_1^2}{8m_1^2c^2}\right) \xi_1 + \frac{1}{2m_1c^2} \xi_1'^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'_1) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1) \xi_1. \end{aligned}$$

Notar que $\mathbf{p}'_1{}^2 + \mathbf{p}_1^2 = \mathbf{q}^2$. Además tenemos $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'_1) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1) = i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)$. De forma que

$$\bar{u}'_1 \gamma^0 u_1 = 2m_1 \xi_1'^\dagger \left(1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8m_1^2c^2} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{4m_1^2c^2}\right) \xi_1$$

Ahora pasamos a los términos con γ^i . Usando la representación donde $\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}^0 \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{u}'_1 \boldsymbol{\gamma} u_1 &= u_1'^\dagger \boldsymbol{\alpha} u_1 = u_1'^\dagger \sqrt{2m_1} \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1}{2m_1c}\right) \xi_1 \\ \left(1 - \frac{\mathbf{p}_1^2}{8m_1^2c^2}\right) \xi_1 \end{pmatrix} \\ &= 2m_1 \left(1 - \frac{\mathbf{p}_1^2}{8m_1^2c^2}\right) \xi_1'^\dagger \boldsymbol{\sigma} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1}{2m_1c}\right) \xi_1 + 2m_1 \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'_1}{2m_1c}\right) \xi_1'^\dagger \boldsymbol{\sigma} \left(1 - \frac{\mathbf{p}_1^2}{8m_1^2c^2}\right) \xi_1 \end{aligned}$$

Despreciando los términos con $1/c^3$,

$$\bar{u}'_1 \gamma u_1 = \xi_1'^{\dagger} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1)}{c} + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'_1) \boldsymbol{\sigma}}{c} \right) \xi_1 = \frac{1}{c} \xi_1'^{\dagger} [\boldsymbol{\sigma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1) + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'_1) \boldsymbol{\sigma}] \xi_1$$

Si usamos la propiedad $(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, tenemos que la primera componente del paréntesis es

$$\begin{aligned} \sigma_x (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1) + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'_1) \sigma_x &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{e}_x) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1) + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'_1) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{e}_x) \\ &= \mathbf{p}_1 \cdot \hat{e}_x + \mathbf{p}'_1 \cdot \hat{e}_x + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{e}_x \times \mathbf{p}_1) + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}'_1 \times \hat{e}_x) \\ &= p_x + p'_x - i\sigma_y p_z + i\sigma_z p_y + i\sigma_y p'_z - i\sigma_z p'_y \\ &= 2p_x + q_x + i\sigma_y q_z - i\sigma_z q_y. \end{aligned}$$

En el desarrollo anterior usamos $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1$. De forma similar, las otras componentes son

$$\begin{aligned} \sigma_y (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1) + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'_1) \sigma_y &= 2p_y + q_y - i\sigma_x q_z + i\sigma_z q_x \\ \sigma_z (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1) + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'_1) \sigma_z &= 2p_z + q_z + i\sigma_x q_y - i\sigma_y q_x. \end{aligned}$$

Viendo que $\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q} = (\sigma_y q_z - \sigma_z q_y, \sigma_z q_x - \sigma_x q_z, \sigma_x q_y - \sigma_y q_x)$, entonces

$$\bar{u}'_1 \gamma u_1 = \frac{1}{c} \xi_1'^{\dagger} [2\mathbf{p}_1 + \mathbf{q} + i\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}] \xi_1 \quad (\text{A.1})$$

Siguiendo los mismos pasos, tenemos

$$\begin{aligned} \bar{u}'_2 \gamma^0 u_2 &= 2m_2 \xi_2'^{\dagger} \left[1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8m_2^2 c^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{4m_2^2 c^2} \right] \xi_2 \\ \bar{u}'_2 \gamma u_2 &= \frac{1}{c} \xi_2'^{\dagger} [2\mathbf{p}_2 - \mathbf{q} - i\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}] \xi_2 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Entonces, a orden $1/c^2$:

$$\begin{aligned} (\bar{u}'_1 \gamma^0 u_1) (\bar{u}'_2 \gamma^0 u_2) D_{00} &= -\frac{4\pi}{\mathbf{q}^2} 2m_1 2m_2 \xi_1'^{\dagger} \xi_2'^{\dagger} \left[1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8m_2^2 c^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{4m_2^2 c^2} - \frac{\mathbf{q}^2}{8m_1^2 c^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{4m_1^2 c^2} \right] \xi_1 \xi_2 \\ &= -16\pi m_1 m_2 \xi_1'^{\dagger} \xi_2'^{\dagger} \left[\frac{1}{\mathbf{q}^2} - \frac{1}{8m_2^2 c^2} - \frac{1}{8m_1^2 c^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{4m_2^2 c^2 \mathbf{q}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{4m_1^2 c^2 \mathbf{q}^2} \right] \xi_1 \xi_2 \end{aligned}$$

Por otro lado, escribiendo (A.1) y (A.2) en componentes, queda:

$$\begin{cases} \bar{u}'_1 \gamma^i u_1 = \frac{1}{c} \xi_1^\dagger [2p_1^i + q^i + i\epsilon_{ijk} \sigma_1^j q^k] \xi_1 \\ \bar{u}'_2 \gamma^l u_2 = \frac{1}{c} \xi_2^\dagger [2p_2^l - q^l - i\epsilon_{lmn} \sigma_2^m q^n] \xi_2 \\ D_{il} = \frac{4\pi}{\mathbf{q}^2} \left(\delta_{il} - \frac{q_i q_l}{\mathbf{q}^2} \right) \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (\bar{u}'_1 \gamma^i u_1) (\bar{u}'_2 \gamma^l u_2) &= \frac{1}{c^2} \xi_1^\dagger \xi_2^\dagger [\epsilon_{ijk} \sigma_1^j q^k \epsilon_{lmn} \sigma_2^m q^n + 2i\epsilon_{ijk} \sigma_1^j q^k p_2^l - i\epsilon_{ijk} \sigma_1^j q^k q^l \\ &\quad - 2i\epsilon_{lmn} \sigma_2^m q^n p_1^i - i\epsilon_{lmn} \sigma_2^m q^n q^i + 4p_1^i p_2^l - 2p_1^i q^l + 2p_2^l q^i - q^i q^l] \xi_1 \xi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{u}'_1 \gamma^i u_1) (\bar{u}'_2 \gamma^l u_2) D_{il} &= \frac{4\pi}{\mathbf{q}^2} \left[(\epsilon_{ijk} \sigma^i q^k)^2 + 4p_2^i p_1^i - 2i\epsilon_{ijk} \sigma_1^j q^k q^i + 2i\epsilon_{ijk} \sigma_1^j q^k (p_2^i - p_1^i) \right. \\ &\quad + 2q^i (p_2^i - p_1^i) - (q^i)^2 - \epsilon_{ijk} \sigma_1^j q^k \epsilon_{lmn} \sigma_2^m q^n \frac{q_i q_l}{\mathbf{q}^2} \\ &\quad - 2i\epsilon_{ijk} \sigma_1^j q^k p_2^l \frac{q^i q^l}{\mathbf{q}^2} + i\epsilon_{ijk} \sigma_1^j q^k q^l \frac{q^i q^l}{\mathbf{q}^2} + 2i\epsilon_{lmn} \sigma_2^m q^n p_1^i \frac{q^i q^l}{\mathbf{q}^2} \\ &\quad - 4p_1^i p_2^l \frac{q^i q^l}{\mathbf{q}^2} + 2p_1^i q^l \frac{q^i q^l}{\mathbf{q}^2} + i\epsilon_{lmn} \sigma_2^m q^n q^i \frac{q^i q^l}{\mathbf{q}^2} \\ &\quad \left. - 2p_2^l q^i \frac{q^i q^l}{\mathbf{q}^2} + \frac{q^i q^l q^i q^l}{\mathbf{q}^2} \right] \end{aligned}$$

Volviendo a la notación vectorial,

$$\begin{aligned} (\bar{u}'_1 \gamma^i u_1) (\bar{u}'_2 \gamma^l u_2) D_{il} &= \frac{4\pi}{\mathbf{q}^2} [(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) + 4\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 - 2i(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q} \\ &\quad + 2i(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + 2\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \\ &\quad - \frac{[(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q}] \cdot [(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q}]}{\mathbf{q}^2} - 2i[(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q}] \frac{[\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}]}{\mathbf{q}^2} \\ &\quad + i(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q} + 2i[(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q}] \frac{[\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}]}{\mathbf{q}^2} - 4 \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q})}{\mathbf{q}^2} \\ &\quad + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q} - 2\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q}^2 + i(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q}] \\ &= \frac{4\pi}{\mathbf{q}^2} [(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \mathbf{q}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) + 4\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 + 2i(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \\ &\quad - \frac{[(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q}] \cdot [(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q}]}{\mathbf{q}^2} - 2i[(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q}] \frac{[\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}]}{\mathbf{q}^2} \\ &\quad + 2i[(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q}] \frac{[\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}]}{\mathbf{q}^2} - 4 \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q})}{\mathbf{q}^2} \\ &= \frac{4\pi}{\mathbf{q}^2} \left[4\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - \frac{4}{\mathbf{q}^2} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}) + (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \mathbf{q}^2 \right. \\ &\quad \left. - (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q}) + 2i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2) - 2i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1) \right] \end{aligned}$$

Entonces,

$$(\bar{u}'_1 \gamma^i u_1) (\bar{u}'_2 \gamma^l u_2) D_{il} = \frac{4\pi}{c^2} \xi_1^* \xi_2 \left[\frac{4\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{\mathbf{q}^2} - \frac{4}{\mathbf{q}^4} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}) (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}) + (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \right. \\ \left. - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q}) \frac{(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{\mathbf{q}^2} + \frac{2i\boldsymbol{\sigma}_2}{\mathbf{q}^2} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2) - \frac{2i\boldsymbol{\sigma}_2}{\mathbf{q}^2} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1) \right]$$

La amplitud queda

$$\mathcal{M} = e^2 [(\bar{u}'_1 \gamma^0 u_1) (\bar{u}'_2 \gamma^0 u_2) D_{00} + (\bar{u}'_1 \gamma^i u_1) (\bar{u}'_2 \gamma^k u_2) D_{ik}] \quad (\text{A.3}) \\ = -4m_1 m_2 \xi_1^\dagger \xi_2^\dagger V(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) \xi_1 \xi_2$$

donde

$$V(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) = 4\pi e^2 \left[\frac{1}{\mathbf{q}^2} - \frac{1}{8m_2^2 c^2} - \frac{1}{8m_1^2 c^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{4m_2^2 c^2 \mathbf{q}^2} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{4m_1^2 c^2 \mathbf{q}^2} \right. \\ \left. - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{m_1 m_2 c^2 \mathbf{q}^2} + \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}) (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q})}{m_1 m_2 c^2 \mathbf{q}^4} + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)}{4m_1 m_2 c^2} + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{4m_1 m_2 c^2 \mathbf{q}^2} \right. \\ \left. - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{2m_1 m_2 c^2 \mathbf{q}^2} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{2m_1 m_2 c^2 \mathbf{q}^2} \right]$$

De esta forma obtenemos el potencial de interacción de Coulomb con correcciones en la representación de momento. Ahora vamos a utilizar la transformada de Fourier para pasar a la representación de posición. Tenemos que calcular la integral $\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q})$.

Precisamos las siguientes integrales:

a) Vamos a suponer en principio una partícula masiva.

$$\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \frac{4\pi}{\mathbf{q}^2 + m^2} = \frac{4\pi}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \int_0^\infty e^{iqr \cos \theta} \frac{q^2}{q^2 + m^2} \sin \theta \, dq \, d\theta \\ = \frac{1}{i\pi r} \int_0^\infty \frac{q}{q^2 + m^2} [e^{iqr} - e^{-iqr}] \, dq = \frac{1}{i\pi r} \int_{-\infty}^\infty \frac{q}{q^2 + m^2} e^{iqr} \, dq \\ = \frac{1}{i\pi r} \int_{-\infty}^\infty \frac{q}{(q - im)(q + im)} e^{iqr} \, dq = \frac{1}{i\pi r} \frac{e^{-mr}}{2} 2\pi i = \frac{e^{-mr}}{r}$$

donde usamos el teorema de los residuos. Cuando $m \rightarrow 0$, tenemos

$$\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \frac{4\pi}{\mathbf{q}^2} = \frac{1}{r}$$

b) Tomando el gradiente de a), queda

$$\begin{aligned}\nabla_r \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{4\pi}{\mathbf{q}^2} &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} (\nabla_r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}) \frac{4\pi}{\mathbf{q}^2} = i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{4\pi\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2} = \nabla_r \frac{1}{r} = \frac{-\mathbf{r}}{r^3} \\ &\Rightarrow \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{4\pi\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2} = \frac{i\mathbf{r}}{r^3}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{4\pi(\mathbf{a}\cdot\mathbf{q})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{q})}{q^4} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} 4\pi \frac{i}{2} (\mathbf{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} (\mathbf{b}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}) \frac{1}{q^2} \\ &= 2\pi i (\mathbf{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} (\mathbf{b}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}) \frac{1}{q^2} = 2\pi i (\mathbf{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}) \mathbf{b}\cdot \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial\mathbf{q}} \frac{1}{q^2} \\ &= -2\pi i (\mathbf{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}) \mathbf{b}\cdot \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{q^2} i\mathbf{r} = 2\pi (\mathbf{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}) (\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{q^2} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{a}\cdot\nabla_r) (\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}) \frac{1}{r} = \frac{1}{2r} \left[\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})}{r^2} \right] \\ &\Rightarrow \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{4\pi(\mathbf{a}\cdot\mathbf{q})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{q})}{q^4} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{2r} \left[\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})}{r^2} \right]\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{4\pi(\mathbf{a}\cdot\mathbf{q})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{q})}{q^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} &= -4\pi \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} (\mathbf{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}) (\mathbf{b}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{q^2} \\ &= -4\pi (\mathbf{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}) (\mathbf{b}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{q^2} = -(\mathbf{a}\cdot\nabla_r) (\mathbf{b}\cdot\nabla_r) \frac{1}{r}\end{aligned}$$

Para $r \neq 0$, tenemos

$$-(\mathbf{a}\cdot\nabla_r) (\mathbf{b}\cdot\nabla_r) \frac{1}{r} = (\mathbf{a}\cdot\nabla_r) (\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}) \frac{1}{r^3} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{r^3} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}) (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) \frac{3}{r^5}$$

Si $r = 0$,

$$-(\mathbf{a}\cdot\nabla_r) (\mathbf{b}\cdot\nabla_r) \frac{1}{r} = -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \nabla_r^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{4\pi}{3} (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \delta(\mathbf{r})$$

Entonces,

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{4\pi(\mathbf{a}\cdot\mathbf{q})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{q})}{q^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{r^3} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}) (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) \frac{3}{r^5} + \frac{4\pi}{3} (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \delta(\mathbf{r})$$

Juntando todo, queda

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{r}) = & \frac{e^2}{r} - \frac{e^2 \hbar^2 \pi}{2c^2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \delta(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{2m_1 m_2 c^2 r} \left(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right) \\
& - \frac{e^2 \hbar}{4c^2 r^3} \left(\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{m_1^2} - \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{m_2^2} \right) - \frac{e^2 \hbar}{2m_1 m_2 c^2 r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \\
& - \mathbf{r} \times \mathbf{p}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + \frac{e^2 \hbar^2}{4m_1 m_2 c^2} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right) \\
& - \frac{8\pi}{3} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \delta(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

Referencias

- [1] H. Fritzsche, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, *Advantages of the Color Octet Gluon Picture*, [Phys. Lett. B](#) **47**, 365 (1973).
- [2] D. J. Gross and F. Wilczek, *Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories*, [Phys. Rev. Lett.](#) **30**, 1343 (1973).
- [3] H. D. Politzer, *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?*, [Phys. Rev. Lett.](#) **30**, 1346 (1973).
- [4] S. Jia, *Formulating Schwinger-Dyson Equations for QED Propagators in Minkowski Space*, [Ph.D. thesis](#), William-Mary Coll. (2017), [arXiv:2407.19626 \[hep-th\]](#)
- [5] S. R. Beane, W. Detmold, K. Orginos and M. J. Savage, *Nuclear Physics from Lattice QCD*, [Prog. Part. Nucl. Phys.](#) **66**, 1 (2011), [arXiv:1004.2935 \[hep-lat\]](#).
- [6] P. Colangelo and A. Khodjamirian, *QCD sum rules, a modern perspective*, 1495 (10 2000), [arXiv:hep-ph/0010175](#).
- [7] K. G. Wilson, *Confinement of Quarks*, [Phys. Rev. D](#) **10**, 2445 (1974).
- [8] C. T. H. Davies *et al.* (HPQCD, UKQCD, MILC, Fermilab Lattice), *High Precision Lattice QCD Confronts Experiment*, [Phys. Rev. Lett.](#) **92**, 022001 (2004), [arXiv:hep-lat/0304004](#).
- [9] A. Cucchieri and T. Mendes, *What's up with IR gluon and ghost propagators in Landau gauge? A puzzling answer from huge lattices*, [PoS LATTICE2007](#), 297 (2007), [arXiv:0710.0412 \[hep-lat\]](#).
- [10] I. L. Bogolubsky, E. M. Ilgenfritz, M. Muller-Preussker and A. Sternbeck, *The Landau gauge gluon and ghost propagators in 4D SU(3) gluodynamics in large lattice volumes*, [PoS LATTICE2007](#), 290 (2007), [arXiv:0710.1968 \[hep-lat\]](#).
- [11] I. L. Bogolubsky, E. M. Ilgenfritz, M. Muller-Preussker and A. Sternbeck, *Lattice gluodynamics computation of Landau gauge Green's functions in the deep infrared*, [Phys. Lett. B](#) **676**, 69 (2009), [arXiv:0901.0736 \[hep-lat\]](#).

- [12] D. Dudal, J. A. Gracey, S. P. Sorella, N. Vandersickel and H. Verschelde, *A Refinement of the Gribov-Zwanziger approach in the Landau gauge: Infrared propagators in harmony with the lattice results*, *Phys. Rev. D* **78**, 065047 (2008), [arXiv:0806.4348 \[hep-th\]](#).
- [13] D. Dudal, S. P. Sorella, N. Vandersickel and H. Verschelde, *New features of the gluon and ghost propagator in the infrared region from the Gribov-Zwanziger approach*, *Phys. Rev. D* **77**, 071501 (2008), [arXiv:0711.4496 \[hep-th\]](#).
- [14] M. Q. Huber, *Nonperturbative properties of Yang–Mills theories*, *Phys. Rept.* **879**, 1 (2020), [arXiv:1808.05227 \[hep-ph\]](#).
- [15] J. M. Cornwall, *Dynamical Mass Generation in Continuum QCD*, *Phys. Rev. D* **26**, 1453 (1982).
- [16] J. Papavassiliou, *Gluon propagator with dynamical quarks*, *PoS QCD-TNT-III*, 029 (2013), [arXiv:1401.4900 \[hep-ph\]](#).
- [17] J. M. Pawłowski, *Aspects of the functional renormalisation group*, *Annals Phys.* **322**, 2831 (2007), [arXiv:hep-th/0512261](#).
- [18] G. Curci and R. Ferrari, *On a Class of Lagrangian Models for Massive and Massless Yang-Mills Fields*, *Nuovo Cimento A* **32**, 151 (1976).
- [19] M. Tissier and N. Wschebor, *Infrared propagators of Yang-Mills theory from perturbation theory*, *Phys. Rev. D* **82**, 101701 (2010).
- [20] M. Tissier and N. Wschebor, *Infrared safe perturbative approach to Yang-Mills correlators*, *Phys. Rev. D* **84**, 045018 (August 2011), [arXiv:1105.2475 \[hep-th\]](#).
- [21] N. Barrios, M. Peláez, U. Reinosa and N. Wschebor, *The ghost-antighost-gluon vertex from the Curci-Ferrari model: Two-loop corrections*, *Phys. Rev. D* **102**, 114016 (2020), [arXiv:2009.00875 \[hep-th\]](#).
- [22] N. Barrios, *Yang-Mills and Quantum Chromodynamics correlation functions from the Curci-Ferrari model at two-loop accuracy*, Ph.D. thesis, Universidad de la República, Montevideo, Centre de Physique Théorique [Palaiseau], France, Ecole Polytechnique, CPHT (2022)
- [23] M. Pelaez, M. Tissier and N. Wschebor, *Three-point correlation functions in Yang-Mills theory*, *Phys. Rev. D* **88**, 125003 (2013), [arXiv:1310.2594 \[hep-th\]](#).
- [24] M. Peláez, M. Tissier and N. Wschebor, *Two-point correlation functions of QCD in the Landau gauge*, *Phys. Rev. D* **90**, 065031 (2014), [arXiv:1407.2005 \[hep-th\]](#).

- [25] M. Peláez, U. Reinosa, J. Serreau and N. Wschebor, *Small parameters in infrared QCD: The pion decay constant*, *Phys. Rev. D* **107**, 054025 (2023), [arXiv:2212.10089](https://arxiv.org/abs/2212.10089) [hep-ph].
- [26] A. Alvez, N. Barrios, F. Benítez and M. Peláez, *Nonrelativistic meson masses from the Curci-Ferrari model* (9 2025), [arXiv:2509.04365](https://arxiv.org/abs/2509.04365) [hep-ph].
- [27] M. Gell-Mann, *A Schematic Model of Baryons and Mesons*, *Phys. Lett.* **8**, 214 (1964).
- [28] S. Navas *et al.* (Particle Data Group), *Review of Particle Physics*, *Phys. Rev. D* **110**, 030001 (2024).
- [29] F. Halzen and A. D. Martin, *Quarks and Leptons: An introductory course in modern particle physics* (John Wiley & Sons, 1984).
- [30] G. Aad *et al.* (ATLAS), *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, *Phys. Lett. B* **716**, 1 (2012), [arXiv:1207.7214](https://arxiv.org/abs/1207.7214) [hep-ex].
- [31] S. Chatrchyan *et al.* (CMS), *Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC*, *Phys. Lett. B* **716**, 30 (2012), [arXiv:1207.7235](https://arxiv.org/abs/1207.7235) [hep-ex].
- [32] Fabsanhvasq, “Modelo estándar de física de partículas,” https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Modelo_Estndar.svg, licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International
- [33] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory* (Addison-Wesley, Reading, USA, 1995) ISBN 978-0-201-50397-5, 978-0-429-50355-9, 978-0-429-49417-8.
- [34] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).
- [35] M. Thomson, *Modern particle physics* (Cambridge University Press, New York, 2013) ISBN 978-1-107-03426-6, 978-1-139-52536-7.
- [36] A. Buckley, C. White and M. White, *Practical Collider Physics* (IOP, 2021) ISBN 978-0-7503-2444-1, 978-0-7503-2443-4, 978-0-7503-2442-7.
- [37] P. Maris and C. D. Roberts, *Dyson-Schwinger equations: A Tool for hadron physics*, *Int. J. Mod. Phys. E* **12**, 297 (2003), [arXiv:nucl-th/0301049](https://arxiv.org/abs/nucl-th/0301049).
- [38] A. Mihara and A. A. Natale, *Dynamical gluon mass corrections in heavy quarkonia decays*, *Phys. Lett. B* **482**, 378 (2000), [arXiv:hep-ph/0004236](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0004236).

- [39] E. G. S. Luna, A. F. Martini, M. J. Menon, A. Mihara and A. A. Natale, *Influence of a dynamical gluon mass in the pp and p anti-p forward scattering*, *Phys. Rev. D* **72**, 034019 (2005), [arXiv:hep-ph/0507057](#).
- [40] J. R. Forshaw, J. Papavassiliou and C. Parrinello, *The Massive Yang-Mills model and diffractive scattering*, *Phys. Rev. D* **59**, 074008 (1999), [arXiv:hep-ph/9808392](#).
- [41] J. H. Field, *A Phenomenological analysis of gluon mass effects in inclusive radiative decays of the J / psi and Upsilon*, *Phys. Rev. D* **66**, 013013 (2002), [arXiv:hep-ph/0101158](#).
- [42] M. Consoli and J. H. Field, *Effective gluon mass and the determination of alpha-s from J / psi and upsilon branching ratios*, *Phys. Rev. D* **49**, 1293 (1994).
- [43] M. Consoli and J. H. Field, *Relativistic versus gluon mass effects: The role of 1/Q corrections in quarkonia decays*, *J. Phys. G* **23**, 41 (1997).
- [44] J. de Boer, K. Skenderis, P. van Nieuwenhuizen and A. Waldron, *On the renormalizability and unitarity of the Curci-Ferrari model for massive vector bosons*, *Phys. Lett. B* **367**, 175 (1996), [arXiv:hep-th/9510167](#).
- [45] J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, 2020) ISBN 978-1108473224.
- [46] A. Alvez, *Espectro del charmonium y su relación con la masa del gluon*, Master's thesis, Universidad de la República, Montevideo (2022)
- [47] G. S. Bali, *QCD forces and heavy quark bound states*, *Phys. Rept.* **343**, 1 (2001), [arXiv:hep-ph/0001312](#).
- [48] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge University Press, 2005).
- [49] D. Griffiths and D. F. Schroeter, *Introduction to Elementary Particles* (Wiley-VCH, 2008) ISBN 978-3-527-40601-2.
- [50] G. Breit and E. Wigner, *Capture of Slow Neutrons*, *Phys. Rev.* **49**, 519 (1936).
- [51] P. Avery, "Particle decay rates, lifetimes and branching fractions," (2013), lecture notes for the course *Elementary Particle Physics*, University of Florida
- [52] L. Portilla, *Decaimiento leptónico del mesón $D_s \rightarrow \mu\nu_\mu, \tau\nu_\tau$* , Master's thesis, Universidad de Pamplona (2019)
- [53] J. L. Rosner, S. Stone and R. S. Van de Water, *Leptonic Decays of Charged Pseudoscalar Mesons - 2015* (9 2015), [arXiv:1509.02220 \[hep-ph\]](#).

- [54] N. Carrasco *et al.*, *Leptonic decay constants f_K, f_D , and f_{D_s} with $N_f = 2 + 1 + 1$ twisted-mass lattice QCD*, *Phys. Rev. D* **91**, 054507 (2015), [arXiv:1411.7908 \[hep-lat\]](#).
- [55] A. Bazavov *et al.* (Fermilab Lattice, MILC), *Charmed and Light Pseudoscalar Meson Decay Constants from Four-Flavor Lattice QCD with Physical Light Quarks*, *Phys. Rev. D* **90**, 074509 (2014), [arXiv:1407.3772 \[hep-lat\]](#).
- [56] Y.-B. Yang *et al.*, *Charm and strange quark masses and f_{D_s} from overlap fermions*, *Phys. Rev. D* **92**, 034517 (2015), [arXiv:1410.3343 \[hep-lat\]](#).
- [57] H. Na, C. T. H. Davies, E. Follana, G. P. Lepage and J. Shigemitsu, *$|V_{cd}|$ from D Meson Leptonic Decays*, *Phys. Rev. D* **86**, 054510 (2012), [arXiv:1206.4936 \[hep-lat\]](#).
- [58] A. Bazavov *et al.* (Fermilab Lattice, MILC), *B - and D -meson decay constants from three-flavor lattice QCD*, *Phys. Rev. D* **85**, 114506 (2012), [arXiv:1112.3051 \[hep-lat\]](#).
- [59] C. T. H. Davies, C. McNeile, E. Follana, G. P. Lepage, H. Na and J. Shigemitsu, *Update: Precision D_s decay constant from full lattice QCD using very fine lattices*, *Phys. Rev. D* **82**, 114504 (2010), [arXiv:1008.4018 \[hep-lat\]](#).
- [60] A. Bazavov *et al.*, *B - and D -meson leptonic decay constants from four-flavor lattice QCD*, *Phys. Rev. D* **98**, 074512 (2018), [arXiv:1712.09262 \[hep-lat\]](#).
- [61] Z.-G. Wang, *Analysis of the masses and decay constants of the heavy-light mesons with QCD sum rules*, *Eur. Phys. J. C* **75**, 427 (2015), [arXiv:1506.01993 \[hep-ph\]](#).
- [62] P. Gelhausen, A. Khodjamirian, A. A. Pivovarov and D. Rosenthal, *Decay constants of heavy-light vector mesons from QCD sum rules*, *Phys. Rev. D* **88**, 014015 (2013), [Erratum: *Phys.Rev.D* 89, 099901 (2014), Erratum: *Phys.Rev.D* 91, 099901 (2015)], [arXiv:1305.5432 \[hep-ph\]](#).
- [63] S. Narison, *A fresh look into $m_{c,b}$ and precise $f_{D(s),B(s)}$ from heavy-light QCD spectral sum rules*, *Phys. Lett. B* **718**, 1321 (2013), [arXiv:1209.2023 \[hep-ph\]](#).
- [64] W. Lucha, D. Melikhov and S. Simula, *OPE, charm-quark mass, and decay constants of D and D_s mesons from QCD sum rules*, *Phys. Lett. B* **701**, 82 (2011), [arXiv:1101.5986 \[hep-ph\]](#).
- [65] C.-W. Hwang, *$SU(3)$ symmetry breaking in decay constants and electromagnetic properties of pseudoscalar heavy mesons*, *Phys. Rev. D* **81**, 054022 (2010), [arXiv:0910.0145 \[hep-ph\]](#).
- [66] N. Carrasco *et al.*, *A $N_f = 2 + 1 + 1$ "twisted" determination of the b -quark mass, f_B and f_{B_s}* , *PoS LATTICE2013*, 313 (2014), [arXiv:1311.2837 \[hep-lat\]](#).

- [67] R. J. Dowdall, C. T. H. Davies, R. R. Horgan, C. J. Monahan and J. Shigemitsu (HPQCD), *B-Meson Decay Constants from Improved Lattice Nonrelativistic QCD with Physical u , d , s , and c Quarks*, [Phys. Rev. Lett. **110**, 222003 \(2013\)](#), [arXiv:1302.2644 \[hep-lat\]](#).
- [68] Y. Aoki, T. Ishikawa, T. Izubuchi, C. Lehner and A. Soni, *Neutral B meson mixings and B meson decay constants with static heavy and domain-wall light quarks*, [Phys. Rev. D **91**, 114505 \(2015\)](#), [arXiv:1406.6192 \[hep-lat\]](#).
- [69] N. H. Christ, J. M. Flynn, T. Izubuchi, T. Kawanai, C. Lehner, A. Soni, R. S. Van de Water and O. Witzel, *B-Meson Decay Constants from 2+1-Flavor Lattice QCD with Domain-Wall Light Quarks and Relativistic Heavy Quarks*, [Phys. Rev. D **91**, 054502 \(2015\)](#), [arXiv:1404.4670 \[hep-lat\]](#).
- [70] H. Na, C. J. Monahan, C. T. H. Davies, R. Horgan, G. P. Lepage and J. Shigemitsu, *The B and B_s Meson Decay Constants from Lattice QCD*, [Phys. Rev. D **86**, 034506 \(2012\)](#), [arXiv:1202.4914 \[hep-lat\]](#).
- [71] B. Colquhoun, C. T. H. Davies, R. J. Dowdall, J. Kettle, J. Koponen, G. P. Lepage and A. T. Lytle (HPQCD), *B-meson decay constants: a more complete picture from full lattice QCD*, [Phys. Rev. D **91**, 114509 \(2015\)](#), [arXiv:1503.05762 \[hep-lat\]](#).
- [72] C. McNeile, C. T. H. Davies, E. Follana, K. Hornbostel and G. P. Lepage, *High-Precision f_{B_s} and HQET from Relativistic Lattice QCD*, [Phys. Rev. D **85**, 031503 \(2012\)](#), [arXiv:1110.4510 \[hep-lat\]](#).
- [73] M. J. Baker, J. Bordes, C. A. Dominguez, J. Penarrocha and K. Schilcher, *B Meson Decay Constants f_{B_c} , f_{B_s} and f_B from QCD Sum Rules*, [JHEP **07**, 032 \(2014\)](#), [arXiv:1310.0941 \[hep-ph\]](#).
- [74] W. Lucha, D. Melikhov and S. Simula, *Accurate bottom-quark mass from Borel QCD sum rules for f_B and f_{B_s}* , [Phys. Rev. D **88**, 056011 \(2013\)](#), [arXiv:1305.7099 \[hep-ph\]](#).
- [75] M. Artuso *et al.* (CLEO), *Improved measurement of $B(D^+ \rightarrow \mu^+ \nu)$ and the pseudoscalar decay constant $f(D^+)$* , [Phys. Rev. Lett. **95**, 251801 \(2005\)](#), [arXiv:hep-ex/0508057](#).
- [76] B. I. Eisenstein *et al.* (CLEO), *Precision Measurement of $B(D^+ \rightarrow \mu^+ \nu)$ and the Pseudoscalar Decay Constant $f(D^+)$* , [Phys. Rev. D **78**, 052003 \(2008\)](#), [arXiv:0806.2112 \[hep-ex\]](#).
- [77] M. Ablikim *et al.* (BESIII), *Precision measurements of $B(D^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)$, the pseudoscalar decay constant f_{D^+} , and the quark mixing matrix element $|V_{cd}|$* , [Phys. Rev. D **89**, 051104 \(2014\)](#), [arXiv:1312.0374 \[hep-ex\]](#).

- [78] M. Artuso *et al.* (CLEO), *Measurement of the decay constant $f(D_s^+)$ using $D_s^+ \rightarrow \ell^+ \nu$* , [Phys. Rev. Lett. **99**, 071802 \(2007\)](#), [arXiv:0704.0629 \[hep-ex\]](#).
- [79] J. P. Alexander *et al.* (CLEO), *Measurement of $BD_s^+ \rightarrow \ell^+ \nu$ and the Decay Constant fD_s^+ From 600 /pb⁻¹ of e^\pm Annihilation Data Near 4170 MeV*, [Phys. Rev. D **79**, 052001 \(2009\)](#), [arXiv:0901.1216 \[hep-ex\]](#).
- [80] P. del Amo Sanchez *et al.* (BaBar), *Measurement of the Absolute Branching Fractions for $D_s^- \rightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell$ and Extraction of the Decay Constant f_{D_s}* , [Phys. Rev. D **82**, 091103 \(2010\)](#), [Erratum: [Phys.Rev.D 91, 019901 \(2015\)](#)], [arXiv:1008.4080 \[hep-ex\]](#).
- [81] A. Zupanc *et al.* (Belle), *Measurements of branching fractions of leptonic and hadronic D_s^+ meson decays and extraction of the D_s^+ meson decay constant*, [JHEP **09**, 139 \(2013\)](#), [arXiv:1307.6240 \[hep-ex\]](#).
- [82] P. Naik *et al.* (CLEO), *Measurement of the Pseudoscalar Decay Constant $f(D(s))$ Using $D(s)^+ \rightarrow \tau^+ \nu$, $\tau^+ \rightarrow \rho^+ \text{anti-}\nu$ Decays*, [Phys. Rev. D **80**, 112004 \(2009\)](#), [arXiv:0910.3602 \[hep-ex\]](#).
- [83] K. M. Ecklund *et al.* (CLEO), *Measurement of the absolute branching fraction of $D(s)^+ \rightarrow \tau^+ \nu(\tau)$ decay*, [Phys. Rev. Lett. **100**, 161801 \(2008\)](#), [arXiv:0712.1175 \[hep-ex\]](#).
- [84] P. U. E. Onyisi *et al.* (CLEO), *Improved Measurement of Absolute Branching Fraction of $D(s)^+ \rightarrow \tau^+ \nu(\tau)$* , [Phys. Rev. D **79**, 052002 \(2009\)](#), [arXiv:0901.1147 \[hep-ex\]](#).
- [85] B. Kronenbitter *et al.* (Belle), *Measurement of the branching fraction of $B^+ \rightarrow \tau^+ \nu_\tau$ decays with the semileptonic tagging method*, [Phys. Rev. D **92**, 051102 \(2015\)](#), [arXiv:1503.05613 \[hep-ex\]](#).
- [86] J. P. Lees *et al.* (BaBar), *Evidence of $B^+ \rightarrow \tau^+ \nu$ decays with hadronic B tags*, [Phys. Rev. D **88**, 031102 \(2013\)](#), [arXiv:1207.0698 \[hep-ex\]](#).
- [87] R. Van Royen and V. F. Weisskopf, *Hadron Decay Processes and the Quark Model*, [Nuovo Cim. A **50**, 617 \(1967\)](#), [Erratum: [Nuovo Cim.A 51, 583 \(1967\)](#)].
- [88] E. J. Eichten and C. Quigg, *Mesons with Beauty and Charm: New Horizons in Spectroscopy*, [Phys. Rev. D **99**, 054025 \(2019\)](#), [arXiv:1902.09735 \[hep-ph\]](#).
- [89] L. A. Blanco, R. Bonnaz, B. Silvestre-Brac, F. Fernandez and A. Valcarce, *Extended Van Royen-Weisskopf formalism for lepton antilepton meson decay widths within nonrelativistic quark models*, [Nucl. Phys. A **699**, 690 \(2002\)](#), [arXiv:nucl-th/0109080](#).

- [90] H. Grotch, K. J. Sebastian and F. L. Ridener, Jr., *Leptonic decay rates of charmonium S and D states*, [Phys. Rev. D](#) **56**, 5885 (1997).
- [91] W. Celmaster, *Lepton Width Suppression in Vector Mesons*, [Phys. Rev. D](#) **19**, 1517 (1979).
- [92] D. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, 2018) ISBN 978-1107189638.
- [93] V. Berestetskii, L. Pitaevskii and E. Lifshitz, *Quantum Electrodynamics: Volume 4 (Course of Theoretical Physics)* (Butterworth-Heinemann, 1982) ISBN 978-0750633710.
- [94] J. Branson, “Solution of the Dirac Equation for Hydrogen,” (2013), https://quantummechanics.ucsd.edu/ph130a/130_notes/node501.html
- [95] R. G. Littlejohn, “Solutions of the Dirac Equation and their properties,” (2021), <https://bohr.physics.berkeley.edu/classes/221/notes/spdirac.pdf>
- [96] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, 1967) ISBN 978-0201067101.
- [97] A. D. Alhaidari, H. Bahlouli and A. Al-Hasan, *The Dirac and Klein-Gordon equations with equal scalar and vector potentials*, [Phys. Lett. A](#) **349**, 87 (2006), [arXiv:hep-th/0503208](#).
- [98] R. R. Silbar and T. Goldman, *Solving the radial Dirac equations: A Numerical odyssey*, [Eur. J. Phys.](#) **32**, 217 (2011), [arXiv:1001.2514 \[physics.comp-ph\]](#).
- [99] M. E. J. Newman, *Computational Physics* (Createspace, 2012) ISBN 978-1-4801-4551-1.
- [100] M. R. Ahmady, R. R. Mendel and J. D. Talman, *Decay constants and mixing parameters in a relativistic model for q anti-Q system*, [Phys. Rev. D](#) **55**, 419 (1997), [arXiv:hep-ph/9601271](#).
- [101] J. F. Donoghue and K. Johnson, *The Pion and an Improved Static Bag Model*, [Phys. Rev. D](#) **21**, 1975 (1980).
- [102] D. R. Entem, F. Fernández, P. G. Ortega and J. Segovia, *The Constituent Quark Model* (4 2025), [arXiv:2504.07897 \[hep-ph\]](#).
- [103] S. Bortagaray, *Influencia de la masa del gluon en estados de tetraquark no relativistas*, Master’s thesis, Universidad de la República, Montevideo (2026)

- [104] L. Bergstrom, H. Snellman and G. Tengstrand, *Relativistic Corrections to the Electromagnetic Decays of Heavy Quarkonium States*, [Phys. Lett. B](#) **82**, 419 (1979).
- [105] O. Schneider, *$B^0 - \bar{B}^0$ mixing* (6 2008), [arXiv:0806.4634 \[hep-ex\]](#).
- [106] M. Shah, B. Patel and P. C. Vinodkumar, *Mass spectra and decay properties of D_s Meson in a relativistic Dirac formalism*, [Phys. Rev. D](#) **90**, 014009 (2014), [arXiv:1402.4227 \[hep-ph\]](#).
- [107] W. Lucha and F. F. Schoberl, *PHENOMENOLOGICAL ASPECTS OF NONRELATIVISTIC POTENTIAL MODELS* (12 1989).
- [108] S. M. Ryan and D. J. Wilson (Hadron Spectrum), *Excited and exotic bottomonium spectroscopy from lattice QCD*, [JHEP](#) **02**, 214 (2021), [arXiv:2008.02656 \[hep-lat\]](#).