

TESIS DE MEATRÍA

---

# Órbitas periódicas de sistemas Lagrangianos convexos

---

Juan Nario

2026

Orientador:

Miguel Paternain  
Facultad de Ciencias, UdelaR



## Resumen

En esta tesis, estudiamos la existencia de soluciones periódicas para sistemas Lagrangianos en variedades cerradas. Es conocido que para energías superiores al valor crítico de Mañé todo Lagrangiano Tonelli tiene una órbita periódica en dicho nivel de energía. Usamos este resultado como puntapié inicial para presentar la teoría y el enfoque variacional que utilizaremos a lo largo del texto. En esta línea de resultados, se probó que los Lagrangianos convexos y cuadráticos en infinito poseen órbitas periódicas para acciones abreviadas suficientemente grandes. En este trabajo, extendemos este resultado para Lagrangianos Tonelli, sin tener que asumir que el Lagrangiano es cuadrático en infinito. Además, identificamos una subfamilia suficientemente grande de Lagrangianos Tonelli que poseen órbitas periódicas contractibles con acción negativa arbitraria.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Acción</b>	<b>9</b>
2.1. Lagrangianos Tonelli . . . . .	9
2.2. Espacio de loops . . . . .	11
2.3. Modificaciones cuadráticas convexas . . . . .	12
2.4. Regularidad de la acción . . . . .	17
2.5. Puntos críticos de la acción . . . . .	21
<b>3. Minimax</b>	<b>25</b>
3.1. Teorema del paso de la montaña . . . . .	25
3.2. Principio general del Minimax . . . . .	26
<b>4. Energías altas</b>	<b>31</b>
4.1. Completitud relativa de la acción . . . . .	32
4.2. Sucesiones de Palais-Smale para la acción . . . . .	34
4.3. Demostración del Teorema . . . . .	37
<b>5. Acción Abreviada</b>	<b>41</b>
5.1. Preliminares . . . . .	42
5.2. Demostración del Teorema . . . . .	43
5.3. Estimación de la energía . . . . .	46
<b>6. Acción negativa</b>	<b>49</b>
6.1. Modificaciones de tipo magnético . . . . .	49
6.2. Funcional de tiempo . . . . .	55
6.3. Demostración del teorema . . . . .	57



# Capítulo 1

## Introducción

Supongamos que queremos estudiar la dinámica de un sistema mecánico, como lo puede ser un péndulo o una masa en un resorte. La primera forma que se nos enseña a obtener las ecuaciones de movimiento es utilizando las leyes de Newton, las cuales se enfocan en el concepto de *fuera*. Ahora bien, también se puede hacer esto utilizando un enfoque centrado en la *energía*. Consideramos la siguiente cantidad, que se llama *Lagrangiano*,

$$L = T + V,$$

donde  $T$  es la energía cinética y  $V$  la energía potencial de nuestro sistema. Así, las ecuaciones de movimiento vienen dadas por las ecuaciones de *Euler-Lagrange*. En muchos casos, este segundo método es más eficiente que usar las leyes de Newton.

Este enfoque Lagrangiano se basa en el *principio de mínima acción*, a partir del cual se puede deducir la segunda ley de Newton, es decir,  $F = ma$ . Este principio dice que

*El recorrido de una partícula es aquel que constituye un valor estacionario de la acción.*

Se sigue que para estudiar las trayectorias de un sistema mecánico, basta estudiar los puntos críticos de un funcional adecuado. Esta es la idea central de esta tesis, en donde estudiaremos tres funcionales cuyos puntos críticos se corresponden con soluciones a la ecuación de Euler-Lagrange: el *funcional de acción*, el *funcional de energía*, y el *funcional de tiempo*.

Más en concreto, dada una variedad cerrada  $M$  y una función suave  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual llamaremos Lagrangiano, la ecuación de Euler-Lagrange en coordenadas locales es

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)).$$

En este trabajo, nos enfocamos en justificar la existencia de soluciones periódicas de esta ecuación, las cuales cumplan alguna propiedad interesante para la mecánica. Para hacer esto, utilizamos un enfoque variacional, que sigue el principio de detectar (por ejemplo, via minimax) puntos críticos de una función en un espacio de Hilbert. Este tipo de enfoque variacional se encuentra muy desarrollado y algunas referencias se pueden ver en [BT98], [CIPP00], [Con06] y [Abb13].

Son especialmente interesantes los Lagrangianos convexos, esto es, aquellos Lagrangianos tales que la hessiana en la dirección de la fibra es definida positiva. El Lagrangiano permite definir el funcional de acción en un espacio de curvas cerradas adecuado. Más específicamente, si  $L$  es el Lagrangiano y  $x : [0, T] \rightarrow M$  es una curva, la acción de  $x$  es

$$T \int_0^1 L(x(t), \dot{x}(t)/T) dt.$$

Bajo hipótesis adicionales, los puntos estacionarios de la acción corresponden a soluciones periódicas de la ecuación de Euler-Lagrange de  $L$ , formalizando el principio de mínima acción que ya comentamos.

Particular atención se ha dedicado a los Lagrangianos que son cuadráticos en infinito, esto es, cuadráticos para valores suficientemente grandes de la fibra. En este caso, si el espacio de curvas es el espacio de las curvas absolutamente continuas con derivada en  $L^2$ , entonces la acción es derivable con derivada localmente Lipschitziana ([Abb13]). Esto permite entender las órbitas periódicas como puntos críticos de una función en una variedad de Hilbert.

En [Con06] se demostró que para energías superiores al valor crítico de Mañé, todo Lagrangiano convexo y superlineal tiene una órbita periódica en dicho nivel de energía. Es un problema abierto saber si los Lagrangianos magnéticos poseen además órbitas periódicas contractibles debajo del valor crítico. En esta línea de resultados, se probó que los Lagrangianos convexos y cuadráticos en infinito poseen órbitas periódicas para acciones abreviadas suficientemente grandes ([Pat15]). Uno de los aportes de esta tesis es generalizar este resultado, obteniendo:

**Teorema 5.2.** Para todo Lagrangiano Tonelli, existe un número real  $w_0$  tal que para todo  $w > w_0$  existe una órbita periódica con acción abreviada  $w$ .

El otro aporte de esta tesis es identificar una subfamilia de Lagrangianos Tonelli que poseen órbitas periódicas contractibles con acción negativa arbitraria. Este resultado es una generalización del obtenido en [Pat19], en donde se trabaja con Lagrangianos cuadráticos en infinito.

**Teorema 6.1.** Sea  $L$  un Lagrangiano Tonelli tal que  $L(q, 0) = 0$  para todo  $q \in M$  y la 1-forma  $\theta_q(v) = L_v(x, 0) \cdot v$  no es cerrada. Entonces, para todo  $a < 0$  el Lagrangiano admite una órbita periódica contractible y no trivial con acción  $a$ . Más aún, los periodos de dichas órbitas crecen a lo sumo linealmente con  $a$ .

## Descripción por capítulo

En el segundo capítulo se presentarán definiciones y herramientas que utilizaremos durante todo el texto. Comenzaremos definiendo los Lagrangianos Tonelli, la familia de Lagrangianos que estudiaremos durante toda la tesis. También veremos la estructura de variedad de Hilbert que puede darse al espacio de curvas cerradas absolutamente continuas en una variedad. Además, presentamos las  $R$ -modificaciones  $L_0$  de un Lagrangiano Tonelli  $L$ , las cuales permiten trabajar con Lagrangianos que poseen cotas de crecimiento más precisas. Teniendo esto, introduciremos el funcional de acción, el cual está bien definido para Lagrangianos convexos y cuadráticos, como lo son las  $R$ -modificaciones. Probaremos que este operador es de clase  $C^{1,1}$  y que sus puntos críticos se corresponden con órbitas periódicas de la ecuación de Euler-Lagrange de  $L_0$ , las cuales también son soluciones a la ecuación de Euler-Lagrange de  $L$  si consideramos una  $R$ -modificación adecuada.

En el tercer capítulo se introduce el enfoque variacional que usaremos para justificar la existencia de puntos críticos de los funcionales que estudiaremos. Utilizamos el clásico teorema del paso de la montaña para motivar el teorema de minimax que probaremos, el cual es un caso particular del presentado en [Con06].

En el cuarto capítulo de la tesis se prueba la existencia de órbitas periódicas con energía prefijada mayor que el valor crítico de Mañé. Para probar esto, seguimos las pruebas dadas en [Con06] y [Abb13]. Lo que haremos es justificar la existencia de puntos críticos de la acción a tiempo libre, lo que será una consecuencia del teorema de minimax previamente presentado.

Primero haremos esto asumiendo que el Lagrangiano es convexo y cuadrático, y utilizando una  $R$ -modificación adecuada, generalizaremos este resultado a Lagrangianos Tonelli.

En el quinto capítulo se justifica la existencia de órbitas periódicas con acción abreviada suficientemente grande. Comenzamos introduciendo la acción abreviada y el funcional de energía, el cual dependerá de una  $(R, \alpha)$ -modificación  $L_0$  de  $L$  (una generalización de las  $R$ -modificaciones). Luego veremos que los puntos críticos del funcional de energía se corresponden con órbitas periódicas de  $L_0$ . Al probar la existencia de estos puntos críticos, acotaremos la energía de esta solución, lo que nos permite encontrar una  $(R, \alpha)$ -modificación adecuada para recuperar una órbita del Lagrangiano original. Por último, justificamos que se pueden considerar órbitas tales que tanto la acción abreviada como la energía tienden a infinito.

En el último capítulo probamos la existencia de una subfamilia de Lagrangianos Tonelli que admiten órbitas periódicas no triviales con acción negativa prefijada. Esta familia está conformada por los Lagrangianos de tipo magnético. Primero estudiaremos las  $(R, \alpha)$ -modificaciones de estos Lagrangianos. Luego presentamos el funcional de tiempo, el cual depende de una  $(R, \alpha)$ -modificación de  $L$  y cuyos puntos críticos se corresponden con órbitas periódicas. Usando una  $(R, \alpha)$ -modificación adecuada, veremos que también podemos obtener soluciones del Lagrangiano original. Al igual que antes, la existencia de estos puntos críticos es una consecuencia del teorema de minimax probado en el Capítulo 3.



# Capítulo 2

## Acción

Dada una variedad Riemanniana cerrada  $M$  y un Lagrangiano Tonelli  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ , nos interesa resolver la ecuación de Euler-Lagrange, que en coordenadas locales es

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)),$$

donde anotamos  $(q, v) \in TM$  a los puntos del espacio tangente. A las soluciones de esta ecuación las llamamos órbitas de  $L$

En particular, nos interesan las órbitas periódicas de  $L$ . En este capítulo vamos a justificar que los puntos críticos del funcional de acción

$$\mathcal{A}_{L+\kappa}(x, T) := T \int_{S^1} \left( L(x(s), \dot{x}(s)/T) + \kappa \right) ds$$

se corresponden con soluciones a la ecuación con energía  $\kappa$ , siendo  $x$  una curva cerrada en  $M$  en un espacio adecuado (ver Teorema 2.5.6). Un detalle técnico es que si  $L$  es Tonelli, entonces la acción de  $(x, T)$  puede no ser finita. Para saltar este problema, vamos a cambiar  $L$  por una modificación adecuada, justificando que al final obtenemos soluciones del problema original.

### 2.1. Lagrangianos Tonelli

La métrica en  $M$  induce una métrica en  $TM$ , derivadas covariantes en  $M$  y  $TM$ , y el splitting

$$T_{(q,v)}TM = H(q, v) \oplus V(q, v) \simeq T_qM \oplus T_qM,$$

donde  $V(q, v)$ , que es el *subespacio vertical*, es el kernel de  $d_\theta\pi$ , siendo  $\pi : TM \rightarrow M$  la proyección canónica, y  $H(q, v)$ , que es el *subespacio horizontal*, es el kernel del mapa de conexión  $K : T_\theta TM \rightarrow T_{\pi(\theta)}M$ . Anotamos  $\nabla_q$  a la componente horizontal del gradiente de una función definida en  $TM$ , y  $\nabla_v$  a su componente vertical. Usamos una notación similar para las derivadas de orden mayor.

Definimos la familia de Lagrangianos vamos a estudiar a lo largo de todo el texto.

**Definición 2.1.1.** Sea  $M$  una variedad cerrada y conexa. Una función suave  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  es un *Lagrangiano Tonelli* si

(A)  $L$  es estrictamente convexo en cada fibra, es decir,

$$\nabla_{vv}L(q, v) > 0, \quad \forall (q, v) \in TM$$

(B) Para todo  $k > 0$  existe una constante  $c(k)$  tal que

$$L(q, v) \geq k|v|_q - c(k), \quad \forall (q, v) \in TM.$$

**Observación 2.1.2.** La condición (B) es equivalente a decir que  $L$  es superlineal en cada fibra, es decir,

$$\lim_{|v| \rightarrow +\infty} \frac{L(q, v)}{|v|_q} = +\infty,$$

siendo este límite uniforme en  $q$ .

Por otro lado, a la condición (A) la podemos ver en coordenadas locales de la siguiente forma. Va a ser útil considerar cartas que dependen del tiempo, es decir, mapas suaves

$$\varphi : [0, 1] \times U \rightarrow M,$$

donde  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y  $\varphi(t, \cdot)$  es un difeomorfismo sobre  $\varphi(\{t\} \times U)$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Anotamos  $\mathcal{F}$  a la familia de estos pares  $(U, \varphi)$ . En particular, nos interesa considerar que  $(U, \varphi)$  es una *carta acotada*. Decimos que  $(U, \varphi)$  es una *carta acotada* si  $\varphi(t, \cdot) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  es un encaje tal que el pull-back  $f^*g$  de la métrica Riemanniana tiene matriz  $G(x)$  tal que  $G$  y  $G^{-1}$  tienen norma  $C^1$  acotada. También vamos a pedir que  $U$  sea acotado y convexo, y que las derivadas de  $\varphi(t, \cdot)$  y de  $\varphi(t, \cdot)^{-1}$  estén acotadas. Cada elemento  $(U, \varphi)$  induce un sistema de coordenadas en  $TM$  dado por

$$[0, 1] \times U \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM, \quad (t, q, v) \mapsto (\varphi(t, q), D_q\varphi(t, q)[v]).$$

El pull-back de  $L$  por dicho sistema de coordenadas es

$$(\varphi^*L)(t, q, v) := L(t, \varphi(t, q), D_q\varphi(t, q)[v]), \quad \forall (t, q, v) \in [0, 1] \times U \times \mathbb{R}^n.$$

Cuando no hay confusión posible, anotamos  $\varphi^*L$  simplemente como  $L$ . Considerando esto, la condición (A) se traduce en que para toda carta acotada  $(U, \varphi)$  vale

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(t, q, v) > 0, \quad \forall (t, q, v) \in [0, 1] \times U \times \mathbb{R}^n.$$

**Ejemplo 2.1.3.** Al final del día, el ejemplo en el que se basa toda esta teoría son los *Lagrangianos electromagnéticos*, que son funciones de la forma

$$L(q, v) = \frac{1}{2}|v|_q^2 + \theta(q)[v] - V(q),$$

siendo  $|\cdot|_q$  la norma asociada a la métrica Riemanniana (la energía cinética),  $\theta$  es una 1-forma suave (el potencial magnético) y  $V$  es una función suave (el potencial) en  $M$ . Notar que fijada la fibra, esta función es un polinomio de grado 2 en  $|v|$ , y al trabajar con Lagrangianos Tonelli estamos debilitando estas hipótesis.

Conviene notar que a la ecuación de Euler-Lagrange la podemos reescribir como

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \cdot \ddot{\gamma} = \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) - \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \cdot \dot{\gamma}(t).$$

Debido a la convexidad y a la regularidad de  $L$ , tenemos que esta es una ecuación de orden 2 que se puede resolver. En definitiva, la ecuación de Euler-Lagrange define un flujo suave en  $TM$ . Una propiedad clave es que este flujo preserve la energía, la cual está dada por

$$E_L : TM \rightarrow \mathbb{R}, \quad E_L(q, v) := \frac{\partial L}{\partial v}(q, v) \cdot v - L(q, v).$$

En efecto, si anotamos  $\gamma(t) = \gamma$  y  $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E_L(\gamma, \dot{\gamma})) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma} - L(\gamma, \dot{\gamma}) \right) \\ &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma, \dot{\gamma}) \right) \cdot \dot{\gamma} + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma} - \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma} - \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma} + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma} - \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma} - \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma} \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Observación 2.1.4.** En general, la energía de un Lagrangiano Tonelli satisface las siguientes propiedades:

- Para todo  $q \in M$ , la restricción de  $E$  a  $T_q M$  alcanza su mínimo en  $v = 0$ .
- El punto  $(q, 0)$  es singular para la ecuación de Euler-Lagrange si y solo si  $(q, 0)$  es un punto crítico de  $E_L$ .

## 2.2. Espacio de loops

Antes de pasar al estudio de la acción, vamos a definir los espacios de funciones en los que vamos a trabajar. Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana cerrada de dimensión  $n$ . Por el Teorema de Nash, existe un encaje isométrico en algún  $\mathbb{R}^N$ . Teniendo esto, consideramos

$$H^1(\mathbb{R}^N) := \left\{ \xi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N \mid \xi \text{ es absolutamente continua y } \int_0^1 |\dot{\xi}(s)| ds < +\infty \right\}$$

con la métrica

$$\langle \xi, \eta \rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} := \langle \xi(0), \eta(0) \rangle + \int_0^1 \langle \dot{\xi}(s), \dot{\eta}(s) \rangle ds.$$

Por otro lado, en  $H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^+$  consideramos la métrica producto.

Nos va a interesar estudiar a las curvas cerradas (o loops) en  $H^1(\mathbb{R}^N)$  que están incluidas en  $M$ . Para ello, primero definimos

$$\Lambda := \{(x, T) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^+ : x(0) = x(1)\}$$

equipado con la métrica anterior. La idea es que en la segunda coordenada lo que estamos haciendo es guardar el periodo del loop  $x$ , y así podemos considerar que siempre están definidos en  $[0, 1]$ . Su espacio tangente en  $(x, T)$  está dado por

$$T_{(x, T)}\Lambda = \{(\xi, \alpha) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R} : \xi(0) = \xi(1)\}.$$

Anotamos

$$\begin{aligned} H^1(M) &:= \{x \in H^1(\mathbb{R}^N) : x([0, 1]) \subset M\}, \\ H^1(S^1, M) &:= \Lambda \cap H^1(M), \\ \Lambda_M &:= H^1(S^1, M) \times \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Notar que  $\Lambda_M$  es una subvariedad de Hilbert de  $\Lambda$ , y una componente conexa de  $\Lambda_M$  está dada por curvas cerradas en la misma clase de homotopía.

También damos otra definición sin necesidad de pasar por el Teorema de Nash, pues ambas formulaciones nos van a ser útiles. Primero vamos a dar la estructura de variedad de Hilbert de  $H^1(M)$ , que es el espacio de las curvas absolutamente continuas  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  con derivada en  $L^2$ .

Recordar que  $\mathcal{F}$  es el conjunto de las parametrización de  $M$  que dependen del tiempo. Dada  $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ , consideramos

$$H^1(U) := \{\gamma \in H^1(\mathbb{R}^n) : \gamma([0, 1]) \subset U\},$$

que es un conjunto abierto debido a la continuidad del encaje  $H^1 \hookrightarrow C^0$ . El mapa  $\varphi$  induce un mapa inyectivo

$$\varphi_* : H^1(U) \rightarrow H^1(M), \quad \varphi_*(\gamma) := \varphi(\cdot, \gamma(\cdot)),$$

cuya imagen anotamos  $\mathcal{U}_{(U, \varphi)}$ . La estructura de variedad que le damos a  $H^1(M)$  es la dada al declarar que la familia de los mapas  $\varphi_*$  es un atlas. Es útil saber que los conjuntos  $\mathcal{U}_{(U, \varphi)}$  son abiertos con respecto a la topología  $C^0$  en  $H^1(M)$ .

Notar que todo elemento de  $\gamma \in H^1(M)$  pertenece a  $\mathcal{U}_{(U, \varphi)}$  para algún  $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ . En efecto, si  $\tilde{\gamma}$  es una curva suave en  $M$  tal que  $\text{dist}(\gamma(t), \tilde{\gamma}(t)) < \rho$ , siendo  $\rho$  el radio de inyectividad del mapa exponencial, entonces podemos definir un mapa  $\varphi$  tal que  $\gamma \in \mathcal{U}_{(U, \varphi)}$  de la siguiente forma: componemos el mapa exponencial

$$(t, \xi) \mapsto \exp_{\tilde{\gamma}(t)}(\xi), \quad \xi \in T_{\tilde{\gamma}(t)}M,$$

con una trivialización del fibrado  $\tilde{\gamma}^*(TM)$  sobre  $[0, 1]$

$$\Phi : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\gamma}^*(TM),$$

obteniendo así el mapa

$$\varphi : [0, 1] \times B_\rho, \quad \varphi(t, \xi) = \exp_{\tilde{\gamma}(t)}(\Phi(t, \xi)).$$

Usando lo anterior, podemos definir  $H^1(S^1, M)$  como la inversa de la diagonal por el encaje

$$H^1([0, 1], M) \rightarrow M \times M, \quad \gamma \mapsto (\gamma(0), \gamma(1)).$$

Un análisis más detallado de la estructura como espacio de Hilbert del espacio de loops se puede encontrar en la Sección 3.1 de [Maz11].

**Observación 2.2.1.** Las inclusiones

$$C^\infty(S^1, M) \hookrightarrow H(S^1, M) \hookrightarrow C(S^1, M)$$

son equivalencias homotópicas densas. Esto se puede probar tomando  $M$  encajada en  $\mathbb{R}^N$ , regularizando los loops  $x : S^1 \rightarrow M$  por convolución, y proyectando a otro loop en  $M$  usando el teorema del entorno tubular. Ver [Lee03] para más detalles.

### 2.3. Modificaciones cuadráticas convexas

La acción va a ser un operador de la forma  $\mathcal{A}_L : \Lambda_M \rightarrow \mathbb{R}$ . Sin embargo, si asumimos que  $L$  es Tonelli, ni siquiera es inmediato que esta cantidad sea finita para cualquier loop. Para evitar este problema, vamos a tener que estudiar la acción de una modificación adecuada  $L_0$  de  $L$ . En este capítulo justificamos la existencia de este tipo de modificaciones, y vemos que se pueden considerar de forma tal que los niveles de energía  $\kappa$  son iguales para  $L$  y para  $L_0$ .

**Definición 2.3.1.** Decimos que un Lagrangiano  $L_0$  es *convexo y cuadrático* si

(a) Existe  $\ell_0 > 0$  tal que  $\nabla_{vv}L_0(q, v) \geq \ell_0 I$  para todo  $(q, v) \in TM$ .

(b) Existe  $\ell_1 > 0$  tal que para todo  $(q, v) \in TM$  vale

$$\|\nabla_{vv}L_0(q, v)\| \leq \ell_1, \quad \|\nabla_{vq}L_0(q, v)\| \leq \ell_1(1 + |v|_q), \quad \|\nabla_{qq}L_0(q, v)\| \leq \ell_1(1 + |v|_q^2).$$

Notar que (a) implica que  $L$  crece al menos cuadráticamente en  $v$ , mientras que (b) implica que crece a lo sumo cuadráticamente. Conviene notar que (a) implica (A) y (B). Es decir, que estos son Lagrangianos Tonelli.

Las condiciones (a) y (b) son equivalentes a decir que para toda parametrización acotada  $(\varphi, U)$  vale

(a') Existe  $\ell_0 > 0$  tal que  $\partial^2 L_0 / \partial v^2(t, q, v) \geq \ell_0 I$ , para todo  $(t, q, v) \in [0, 1] \times U \times \mathbb{R}^n$ .

(b') Existe  $\ell_1 > 0$  tal que

$$\left\| \frac{\partial^2 L_0}{\partial v^2}(t, q, v) \right\| \leq \ell_1, \quad \left\| \frac{\partial^2 L_0}{\partial v \partial q}(t, q, v) \right\| \leq \ell_1(1 + |v|_q), \quad \left\| \frac{\partial^2 L_0}{\partial q^2}(t, q, v) \right\| \leq \ell_1(1 + |v|_q^2),$$

para todo  $(t, q, v) \in [0, 1] \times U \times \mathbb{R}^n$ .

Además, integrando a lo largo de las fibras, (b') implica que existe  $\ell_2 > 0$  tal que

$$\left| \frac{\partial L_0}{\partial v}(t, q, v) \right| \leq \ell_2(1 + |v|), \quad (2.3.2)$$

$$\left| \frac{\partial L_0}{\partial q}(t, q, v) \right| \leq \ell_2(1 + |v|^2), \quad (2.3.3)$$

$$L_0(t, q, v) \leq \ell_2(1 + |v|^2). \quad (2.3.4)$$

A partir de ahora, anotamos  $\partial_v L = L_v = \frac{\partial L}{\partial v}$  tanto a la derivada en coordenadas como a la derivada covariante, y de forma análoga para las derivadas de orden mayor y las derivadas en  $q$ .

Los Lagrangianos convexos y cuadráticos tienen mejores cotas de crecimiento que los Lagrangianos Tonelli, y por esto nos va a interesar trabajar con ellos. Pero recordar que queremos estudiar las órbitas periódicas de un Lagrangiano Tonelli  $L$ , por lo que precisamos Lagrangianos convexos y cuadráticos que estén relacionados con  $L$ . La siguiente definición introduce la familia de *modificaciones* de  $L$  que utilizaremos.

**Definición 2.3.5.** Sea  $L$  un Lagrangiano Tonelli. Decimos que un Lagrangiano  $L_0$  es una *R-modificación* (cuadrática convexa) de  $L$  si

- $L_0(q, v) = L(q, v)$  para  $|v|_q \leq R$ .
- $L_0$  es convexo y cuadrático.
- $L_0(q, v) \geq |v|_q - c(1)$ , donde  $c(1)$  es la dada por la condición (B).

En el resto del texto,  $L$  denotará Lagrangianos Tonelli y  $L_0$  Lagrangianos convexos y cuadráticos. Cuando se especifique,  $L_0$  podrá ser una modificación de  $L$ , en caso contrario, serán independientes.

Ahora vamos a justificar la existencia de las *R-modificaciones*. Para ello, seguimos la construcción dada en [AF07].

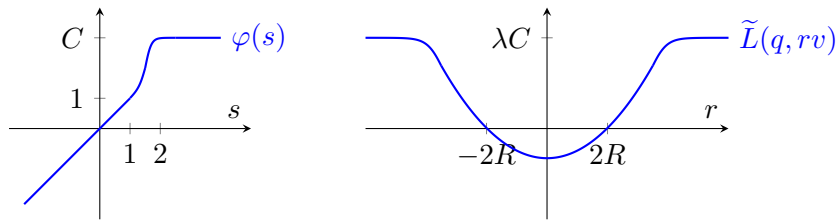
**Proposición 2.3.6.** Sean  $L$  un Lagrangiano Tonelli y  $R > 0$ . Entonces, existe una  $R$ -modificación  $L_0$  de  $L$ .

*Demostración.* Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave tal que  $\varphi(s) = s$  para  $s \leq 1$  y  $\varphi(s)$  es constante para  $s \geq 2$ . Fijamos un  $\lambda > 0$  tal que

$$\lambda \geq \max\{L(q, v) : (q, v) \in TM, |v|_q \leq 2R\},$$

y definimos

$$\begin{aligned} \tilde{L} : TM &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, v) &\mapsto \lambda \varphi\left(\frac{L(q, v)}{\lambda}\right) \end{aligned}$$



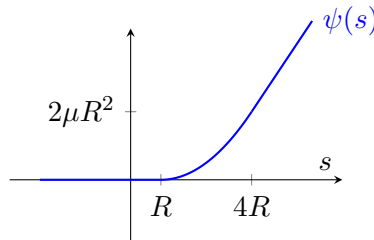
Como  $\lim_{|v| \rightarrow \infty} L(q, v) = +\infty$ , se tiene que  $\tilde{L}$  es constante por fuera de un compacto. Por lo tanto, existe una constante  $\mu$  tal que

$$\mu I \geq -\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial v^2}(q, v), \quad \forall (q, v) \in TM. \quad (2.3.7)$$

A menos de agrandar  $\mu$ , podemos asumir las siguientes desigualdades, que solo usaremos para probar la última condición de la definición de  $R$ -modificación.

$$4R\mu \geq 1, \quad 2R^2\mu \geq 2R - C(1) - \min \tilde{L}. \quad (2.3.8)$$

La función afín  $s \mapsto \mu s - 2\mu R^2$  es negativa en  $(-\infty, R^2]$  y positiva en  $[4R^2, +\infty)$ , por lo que existe una función suave y convexa  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\psi(s) = 0$  si  $s \leq R^2$  y  $\psi(s) = \mu s - 2\mu R^2$  para  $s \geq 4R^2$ .



Teniendo esto, damos a nuestro candidato a  $R$ -modificación cuadrática:

$$\begin{aligned} L_0 : TM &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, v) &\mapsto \tilde{L}(q, v) + \psi(|v|_q^2) \end{aligned}$$

Debido a la definición de  $\tilde{L}$ , vale

$$L_0(q, v) = L(q, v) + \psi(|v|_q^2), \quad \text{si } |v|_q^2 \leq 2R. \quad (2.3.9)$$

En particular, vale  $L = L_0$  si  $|v|_q \leq R$ . Por lo tanto, ya tenemos la primera parte de la Definición 2.3.5.

Ahora vamos a ver que  $\tilde{L}$  satisface (a) y (b) de la Definición 2.3.1. Usando (2.3.9) y que  $\psi$  es convexa y monótona, se sigue que

$$\frac{\partial^2 L_0}{\partial v^2}(q, v) \geq \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial v^2}(q, v), \quad \text{si } |v|_q \leq 2R. \quad (2.3.10)$$

Por otro lado, por (2.3.7) tenemos

$$\frac{\partial^2 L_0}{\partial v^2}(q, v) = \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial v^2}(q, v) + 2\mu I \geq \mu I, \quad \text{si } |v|_q \geq 2R. \quad (2.3.11)$$

Como  $L$  es  $C^2$ -estrictamente convexa, (2.3.10) y (2.3.11) implican que  $L_0$  cumple (a). Además, al ser  $\tilde{L}$  constante por fuera de un compacto, vale

$$L_0(q, v) = \mu|v|_q^2 + \text{constante}, \quad \text{si } |v|_q \text{ es suficientemente grande,}$$

por lo que  $L_0$  cumple (b).

Únicamente nos falta probar la última condición de la Definición 2.3.5. De (2.3.9) y (B) deducimos

$$L_0(q, v) \geq L(q, v) \geq |v|_q - c(1), \quad \text{si } |v|_q \leq 2R.$$

Por otro lado, tenemos

$$L_0(q, v) \geq \min \tilde{L} + \mu|v|_q^2 - 2\mu R^2 \geq |v|_q - c(1), \quad \text{si } |v|_q \geq 2R. \quad (2.3.12)$$

La primera desigualdad se debe a la definición de  $L_0$ . Para la segunda, basta con probar que

$$\min \tilde{L} + \mu s^2 - s - 2\mu R^2 + c(1) \geq 0.$$

Esto se puede verificar evaluando este polinomio y su derivada en  $s = 2R$ , y usando las desigualdades (2.3.8). □

Lo que resta de esta sección lo dedicamos a probar que, fijado un nivel de energía  $\kappa$ , se puede elegir  $R > 0$  tal que  $E_L^{-1}(\kappa) = E_{L_0}^{-1}(\kappa)$  para toda modificación  $L_0$ .

Para esto, primero vamos a ver que  $E_L^{-1}(\kappa)$  es compacto, y por lo tanto existe un  $R > 0$  tal que  $E_L^{-1}(\kappa) \subset \{(q, v) \in TM : \|v\|_q < R\}$ . De esta forma, trivialmente tenemos  $E_L^{-1}(\kappa) \subset E_{L_0}^{-1}(\kappa)$ , siendo  $L_0$  una  $R$ -modificación. Para la otra inclusión vamos a precisar una modificación más fina.

Sea  $L$  un Lagrangiano Tonelli. Vamos a necesitar usar el *Hamiltoniano* asociado a  $L$ , que este es

$$H_L : T^*M \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_L(q, p) := \sup_{v \in T_q M} p(v) - L(q, v).$$

Se tiene  $p(v) \leq L(q, v) + H_L(q, p)$ , y vale la igualdad si y solo si  $p = \frac{\partial L}{\partial v}(q, v)$ . Para una prueba nos referimos al Teorema 3.4.2, parte (6), de [Fat14]. Por lo tanto, vale  $H_L(q, L_v(q, v)) = E_L(q, v)$ .

Para probar que  $E_L^{-1}(\kappa)$  es compacto, lo que haremos será probar que el Hamiltoniano es superlineal en las fibras y que  $\|L_v(x, v)\| \rightarrow +\infty$  cuando  $|v| \rightarrow +\infty$ . De esta forma se deduce que  $E_L(x, v) \rightarrow +\infty$  cuando  $|v| \rightarrow +\infty$ , y por lo tanto  $E_L^{-1}(\kappa)$  tiene que ser un conjunto acotado, de lo que se sigue que es compacto.

**Lema 2.3.13.**  $H_L : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  es superlineal en las fibras. Es decir, vale

$$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \frac{H_L(q, p)}{|p|} = +\infty,$$

siendo este límite uniforme en  $q$ .

*Demostración.* Fijado  $R > 0$ , consideramos

$$K = K(R) := \sup\{L(q, v) : q \in M, \|v\|_q \leq R\} < +\infty,$$

que es finito debido a la compacidad de  $M$  y la continuidad de  $L$ . Notar que para todo  $(q, p) \in T^*M$  vale  $H_L(q, p) \geq p(v) - K$  si  $\|v\|_q \leq R$ , de lo que se sigue que  $H_L$  es superlineal en las fibras:

$$H_L(q, p) \geq \sup_{\|v\|_q \leq R} p(v) - K = R|p| - K.$$

□

**Lema 2.3.14.**  $\|L_v(q, v)\| \rightarrow +\infty$  si  $|v| \rightarrow +\infty$ , siendo el límite uniforme en  $q$ .

*Demostración.* Notar que dado  $(q, v) \in TM$  con  $|v| = 1$  y  $t \geq 0$ , existe un  $0 \leq \tilde{t} \leq t$  tal que

$$L(q, tv) - L(q, 0) = \int_0^t \frac{\partial L}{\partial v}(q, sv) \cdot v \, ds = t \frac{\partial L}{\partial v}(q, \tilde{t}v) \cdot v.$$

Además, al ser  $L$  estrictamente convexa, vale

$$\frac{\partial L}{\partial v}(q, tv) \cdot v - \frac{\partial L}{\partial v}(q, \tilde{t}v) \cdot v = \int_{\tilde{t}}^t \frac{\partial^2 L}{\partial^2 v}(q, sv) \cdot v \, ds \geq 0.$$

Por otro lado, tenemos

$$\frac{L(q, tv)}{t} - \frac{\max_{\tilde{q} \in M} L(\tilde{q}, 0)}{t} \leq \frac{L(q, tv)}{t} - \frac{L(q, 0)}{t} = \frac{\partial L}{\partial v}(q, \tilde{t}v) \cdot v \leq \frac{\partial L}{\partial v}(q, tv) \cdot v.$$

Notar que el término de la izquierda tiende a infinito uniformemente en  $q$  debido a que  $L$  es superlineal. Al haber tomado  $|v| = 1$ , vale  $\|L_v(q, tv)\| \geq \frac{\partial L}{\partial v}(q, tv) \cdot v \rightarrow +\infty$ .

□

Juntando estos dos lemas y que  $H_L(q, L_v(q, v)) = E_L(q, v)$ , concluimos que los niveles de energía son compactos. Teniendo esto, podemos probar el último resultado de esta sección.

**Proposición 2.3.15.** Sea  $L$  un Lagrangiano Tonelli y  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Entonces, existe  $R > 0$  tal que si  $L_0$  es una  $R$ -modificación cuadrática, vale

$$E_L^{-1}(\kappa) = E_{L_0}^{-1}(\kappa).$$

Además,  $L$  y  $L_0$  son iguales en un entorno de  $E_L^{-1}(\kappa)$ .

*Demostración.* Tomamos  $R_0 \geq 0$  tal que  $E_L^{-1}(\kappa) \subset \{(q, v) \in TM : |v| < R_0\}$ . De esta forma, si  $L_0$  es una  $R_0$ -modificación de  $L$ , entonces  $L$  y  $L_0$  coinciden en un entorno de  $E_L^{-1}(\kappa)$ , y se sigue que  $E_L^{-1}(\kappa) \subset E_{L_0}^{-1}(\kappa)$ .

Para la otra inclusión basta con probar que existe un  $R \geq R_0$  tal que para toda  $R$ -modificación  $L_0$  vale

$$[E_{L_0} \leq \kappa] \subset \{(q, v) \in TM : |v|_q < R/2\}. \quad (2.3.16)$$

Es decir, si  $|v|_q \geq R/2$ , entonces  $E_{L_0}(q, v) > \kappa$ . Notar que este  $R$  satisface la tesis.

Tomamos  $R$  es suficientemente grande tal que  $L(q, (R/2)v) \geq L(q, 0)$  para todo  $(q, v) \in T^1M$ , el cual existe por ser  $L$  Tonelli. Dada una  $R$ -modificación  $L_0$ , para todo  $(q, v) \in T^1M$  y  $0 \leq \tilde{t} \leq R/2 \leq t$  vale

$$\frac{\partial L_0}{\partial v}(q, tv) \cdot v \geq \frac{\partial L_0}{\partial v}(q, \tilde{t}v) \cdot v = \frac{\partial L}{\partial v}(q, \tilde{t}v) \cdot v.$$

Por otro lado, fijado  $t \geq R/2$ , existe  $\tilde{t} \in [0, R/2]$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_0}{\partial v}(q, tv) \cdot v &\geq \frac{\partial L}{\partial v}(q, \tilde{t}v) \cdot v \\ &= \frac{L(q, (R/2)v)}{R/2} - \frac{L(q, 0)}{R/2} \\ &\geq \frac{L(q, (R/2)v)}{R/2} - \frac{\max_{\tilde{q} \in M} L(\tilde{q}, 0)}{R/2}. \end{aligned}$$

Como  $|v|_q = 1$ , para todo  $t \geq R/2$  vale

$$\|(L_0)_v(q, tv)\| \geq \frac{L(q, (R/2)v)}{R/2} - \frac{\max_{\tilde{q} \in M} L(\tilde{q}, 0)}{R/2}. \quad (2.3.17)$$

Al ser  $L$  superlineal, existe un  $R$  suficientemente grande tal que para todo  $(q, v) \in T^1M$  vale

$$\frac{L(q, (R/2)v)}{R/2} - \frac{\max_{\tilde{q} \in M} L(\tilde{q}, 0)}{R/2} > \kappa + \sup\{L(q, v) : q \in M, |v|_q \leq 1\}. \quad (2.3.18)$$

Consideramos  $R$  que satisface (2.3.18). También suponemos  $R \geq R_0$  y  $R \geq 1$ . Fijada una  $R$ -modificación  $L_0$ , probaremos (2.3.16). Anotamos  $H_{L_0}$  al Hamiltoniano de  $L_0$ . Juntando el Lema 2.3.13 con (2.3.17) y (2.3.18), obtenemos que para todo  $(q, v) \in T^1M$  y  $t \geq R/2$  vale

$$\begin{aligned} E_{L_0}(q, tv) &= H_{L_0}(q, (L_0)_v(q, tv)) \\ &\geq \|(L_0)_v(q, tv)\| - \sup\{L_0(q, v) : q \in M, |v|_q \leq 1\} \\ &= \|(L_0)_v(q, tv)\| - \sup\{L(q, v) : q \in M, |v|_q \leq 1\} \\ &> \kappa. \end{aligned}$$

□

## 2.4. Regularidad de la acción

Fijamos un Lagrangiano cuadráticos y convexo  $L_0$  para el resto de la sección. Nos interesa estudiar el mapa  $\mathcal{A}_{L_0} : H^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\mathcal{A}_{L_0}(\gamma) := \int_0^1 L_0(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

Al ser  $L_0$  convexo y cuadrático, entonces  $\mathcal{A}_{L_0}(\gamma) \in \mathbb{R}$  cuando  $\gamma \in H^1(M)$ .

Si  $(\varphi, U)$  pertenece a  $\mathcal{F}$ , entonces

$$\mathcal{A}_{L_0}(\varphi_*(\gamma)) = \mathcal{A}_{\varphi^*(L_0)}(\gamma), \quad \forall \gamma \in H^1(U),$$

por lo que el estudio de las propiedades locales de  $\mathcal{A}_{L_0}$  se reduce al estudio del funcional  $\mathcal{A}_{\varphi^*(L_0)}$ . Para esto, ver la página 11 de [AS09], o la Observación 3.4.1 de [Maz11] (en donde se lo prueba para algunas cartas adecuadas).

Nuestro objetivo ahora es probar que  $\mathcal{A}_{L_0}$  pertenece a  $C^{1,1}(H^1(M))$ , es decir,  $\mathcal{A}_{L_0}$  es diferenciable Fréchet y su derivada es Lipschitz. Antes de probar esto, primero enunciamos unos lemas. Arrancamos con un resultado estándar de análisis real.

**Lema 2.4.1.** Sea  $(f_n)$  una sucesión que converge a  $f$  en  $L^2([0,1],\mathbb{R})$ . Entonces, existe una subsucesión  $(f_{n_k})$  y  $g \in L^2([0,1],\mathbb{R})$  tal que

- $|f_{n_k}(x)| \leq |g(x)|$  para todo  $k$ , en casi todo punto.
- $f_{n_k}$  converge a  $f$  en casi todo punto.

*Demostración.* Dado  $k \in \mathbb{N}$ , consideramos  $n_k$  tal que  $\|f - f_{n_k}\|_{L^2} < 1/2^k$ . Definimos

$$h := \sum_{k \in \mathbb{N}} |f_{n_k} - f|.$$

Entonces,  $g := f + h$  y la subsucesión  $(f_{n_k})$  satisfacen la primer condición.

Para la segunda condición, por la desigualdad de Hölder se tiene que  $f$  y  $f_n$  pertenecen a  $L^2([0,1],\mathbb{R})$ , y  $(f_n)$  converge a  $f$  en  $L^2([0,1],\mathbb{R})$ . Entonces, a menos de tomar una subsucesión de  $(f_{n_k})$ , podemos asumir

$$m(E_k) < \frac{1}{2^k}, \quad E_k := \left\{ x \in [0,1] : |f_{n_k} - f(x)| > \frac{1}{k} \right\},$$

donde  $m$  es la medida de Lebesgue en  $[0,1]$ . Usando Borel-Cantelli,

$$m(N) = 0, \quad N := \left\{ x \in [0,1] : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \text{ para infinitos } k \right\}.$$

Se sigue que si  $x \notin N$ , entonces  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ , por lo que  $f_{n_k}$  converge a  $f$  en casi todo punto. □

También precisamos un resultado sobre la derivada de Gateaux y la derivada de Fréchet.

**Lema 2.4.2** ([DM13], Proposición 3.2.15). Sea  $f : X \rightarrow Y$  un mapa Gateaux diferenciable, y anotamos  $Df(x)$  a la derivada de Gateaux en  $x$ . Si  $x \mapsto Df(x)$  es continuo como mapa  $X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ , entonces  $f$  es Fréchet diferenciable, y la derivada de Fréchet de  $f$  en un punto  $a \in X$  es  $Df(a)$ .

Por último, conviene tener presente la siguiente observación elemental sobre sucesiones.

**Observación 2.4.3.** Una sucesión  $(x_n)$  en un espacio métrico converge a  $x$  si y solo toda subsucesión de  $(x_n)$  tiene una subsucesión que converge a  $x$ .

Sin más preámbulo, ahora sí vamos a probar que  $\mathcal{A}_{L_0}$  es de clase  $C^{1,1}$ . Vamos a seguir la prueba dada en [AS09], Proposición 3.1. La idea consiste en usar el Lema 2.4.2 para probar que  $\mathcal{A}_{L_0}$  es de clase  $C^1$  y el teorema de valor medio para probar que tiene derivada de Fréchet localmente Lipschitz, y para esto vamos a tener que probar que  $\mathcal{A}_{L_0}$  es dos veces derivable Gateaux.

**Proposición 2.4.4.** (1)  $\mathcal{A}_{L_0} \in C^{1,1}(H^1(M))$ . Su diferencial  $D\mathcal{A}_{L_0}$  es localmente Lipschitz y diferenciable Gateaux.

(2)  $\mathcal{A}_{L_0}$  es dos veces Fréchet diferenciable si y solo  $L_0$  es electromagnético en todo  $TM$ . En este caso,  $\mathcal{A}_{L_0}$  es suave en  $H^1(M)$ .

El primer punto nos asegura un mínimo de regularidad para la acción, mientras que el segundo nos habla sobre la rigidez de esta regularidad. El segundo ítem no lo vamos a probar, y su prueba también se encuentra en [AS09], Proposición 3.2.

*Demostración.* Como el resultado es local, podemos asumir que el Lagrangiano  $L$  está definido en  $[0, 1] \times U \times \mathbb{R}^n$ , siendo  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto. Asumimos que la carta es acotada. Para probar (1), va a ser clave usar que  $L_0$  satisface la condición (b').

Sean  $\gamma \in H^1(U)$  y  $\xi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ . Si  $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tiene valor absoluto suficientemente chico, podemos asumir que  $\gamma + \delta\xi$  es una curva incluida en  $U$ .

Para cada  $t \in [0, 1]$ , consideramos la función  $f_t(s) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f_t(s) := L_0\left(t, \gamma(t) + s\delta\xi(t), \dot{\gamma}(t) + s\delta\dot{\xi}(t)\right).$$

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, deducimos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{L_0}(\gamma + \delta\xi) - \mathcal{A}_{L_0}(\gamma) &= \int_0^1 [f_t(1) - f_t(0)] dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{df_t}{ds} ds dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial L_0}{\partial q}(t, \gamma + s\delta\xi, \dot{\gamma} + s\delta\dot{\xi}) \cdot \delta\xi \right] ds dt \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial L_0}{\partial v}(t, \gamma + s\delta\xi, \dot{\gamma} + s\delta\dot{\xi}) \cdot \delta\dot{\xi} \right] ds dt \\ &= \delta \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial L_0}{\partial q}(t, \gamma + s\delta\xi, \dot{\gamma} + s\delta\dot{\xi}) \cdot \xi \right] ds dt \\ &\quad + \delta \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial L_0}{\partial v}(t, \gamma + s\delta\xi, \dot{\gamma} + s\delta\dot{\xi}) \cdot \dot{\xi} \right] ds dt. \end{aligned}$$

Entonces, vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \left( \mathcal{A}_{L_0}(\gamma + \delta\xi) - \mathcal{A}_{L_0}(\gamma) \right) \\ = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial L_0}{\partial q}(t, \gamma + s\delta\xi, \dot{\gamma} + s\delta\dot{\xi}) \cdot \xi + \frac{\partial L_0}{\partial v}(t, \gamma + s\delta\xi, \dot{\gamma} + s\delta\dot{\xi}) \cdot \dot{\xi} \right] ds dt. \end{aligned}$$

Por las cotas (2.3.2) y (2.3.3), y el teorema de convergencia dominada, al tomar  $\delta \rightarrow 0$  el resultado anterior converge a

$$D\mathcal{A}_{L_0}(\gamma)[\xi] := \int_0^1 \left[ \frac{\partial L_0}{\partial q}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \cdot \xi + \frac{\partial L_0}{\partial v}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \cdot \dot{\xi} \right] dt.$$

Notar que  $D\mathcal{A}_{L_0}(\gamma)$  es un funcional lineal acotado en  $H^1(\mathbb{R}^n)$ , por lo que  $\mathcal{A}_{L_0}$  es diferenciable Gateaux, y  $D\mathcal{A}_{L_0}(\gamma)$  es su diferencial Gateaux en  $\gamma$ .

Ahora vamos a probar que  $D\mathcal{A}_{L_0}$  es continuo en  $\gamma$ . Para ello, dada una sucesión de curvas tal que  $\gamma_n$  converge a  $\gamma$  en  $H^1(\mathbb{R}^n)$ , debemos probar que  $D\mathcal{A}_{L_0}(\gamma_n)$  converge a  $D\mathcal{A}_{L_0}(\gamma)$  en la norma dual de  $H^1(\mathbb{R}^n)$ . Notar que en particular  $\gamma_n$  converge uniformemente a  $\gamma$ .

Usando la Observación 2.4.3 y el Lema 2.4.1, podemos asumir que  $\dot{\gamma}_n \rightarrow \dot{\gamma}$  en casi todo punto, y que existe  $g \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$  tal que  $|\dot{\gamma}_n| \leq g$  en casi todo punto. Por las cotas (2.3.2) y (2.3.3), en casi todo punto vale

$$\left| \frac{\partial L_0}{\partial q}(t, \gamma_n(t), \dot{\gamma}_n(t)) \right| \leq \ell_2(1 + \|\dot{\gamma}_n(t)\|^2) \leq \ell_1(1 + g(t)^2),$$

$$\left| \frac{\partial L_0}{\partial v}(t, \gamma_n(t), \dot{\gamma}_n(t)) \right| \leq \ell_2(1 + \|\dot{\gamma}_n(t)\|) \leq \ell_1(1 + g(t)).$$

Como  $\ell_2(1 + g(t)^2) \in L^1([0, 1], \mathbb{R})$  y  $\ell_2(1 + g(t)) \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ , usando el teorema de convergencia dominada deducimos

$$\frac{\partial L_0}{\partial q}(\cdot, \gamma_n(\cdot), \dot{\gamma}_n(\cdot)) \rightarrow \frac{\partial L_0}{\partial q}(\cdot, \gamma(\cdot), \dot{\gamma}(\cdot)) \quad \text{en } L^1([0, 1], \mathbb{R}^n),$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial v}(\cdot, \gamma_n(\cdot), \dot{\gamma}_n(\cdot)) \rightarrow \frac{\partial L_0}{\partial v}(\cdot, \gamma(\cdot), \dot{\gamma}(\cdot)) \quad \text{en } L^2([0, 1], \mathbb{R}^n).$$

De esto se sigue que  $D\mathcal{A}_{L_0}(\gamma_n)$  converge a  $D\mathcal{A}_{L_0}(\gamma)$  en la norma dual de  $H^1(U)$ . Por lo tanto,  $D\mathcal{A}_{L_0}(\gamma)$  depende continuamente de  $\gamma$ , y por el Lema 2.4.2,  $\mathcal{A}_{L_0}$  es Fréchet diferenciable con derivada continua.

Nos falta probar que  $D\mathcal{A}_{L_0}$  es Lipschitz y Gateaux diferenciable. Primero vamos a ver que es Gateaux diferenciable. Sean  $\gamma$  y  $\xi$  como antes, y  $\eta \in H^1(\mathbb{R}^n)$ . De forma análoga a lo que ya hicimos, para cada  $t \in [0, 1]$  podemos considerar una función  $g_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g_t(s) := \frac{\partial L_0}{\partial q}(t, \gamma(t) + s\delta\eta(t), \dot{\gamma}(t) + s\delta\dot{\eta}(t)) \cdot \xi(t) + \frac{\partial L_0}{\partial v}(t, \gamma(t) + s\delta\eta(t), \dot{\gamma}(t) + s\delta\dot{\eta}(t)) \cdot \dot{\xi}(t).$$

En lo que sigue, anotamos  $\frac{\partial^2 L_0}{\partial v^2}[u, w] := u^* \cdot \frac{\partial^2 L_0}{\partial v^2} \cdot w$ , y de forma análoga con las otras derivadas. Al igual que antes, usando el teorema fundamental del cálculo, se sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta}(D\mathcal{A}_{L_0}(\gamma + \delta\eta)[\xi] - D\mathcal{A}_{L_0}(\gamma)[\xi]) &= \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 L_0}{\partial v^2}(t, \gamma + s\delta\eta, \dot{\gamma} + s\delta\dot{\eta})[\dot{\xi}, \dot{\eta}] \right] dt ds \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 L_0}{\partial v \partial q}(t, \gamma + s\delta\eta, \dot{\gamma} + s\delta\dot{\eta})[\dot{\xi}, \eta] \right] dt ds \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 L_0}{\partial q \partial v}(t, \gamma + s\delta\eta, \dot{\gamma} + s\delta\dot{\eta})[\xi, \dot{\eta}] \right] dt ds \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 L_0}{\partial q^2}(t, \gamma + s\delta\eta, \dot{\gamma} + s\delta\dot{\eta})[\xi, \eta] \right] dt ds. \end{aligned}$$

Usando (b') y convergencia dominada, al tomar  $\delta \rightarrow 0$  esto converge a

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{A}_{L_0}(\gamma)[\xi, \eta] &:= \int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 L_0}{\partial v^2}(t, \gamma, \dot{\gamma})[\dot{\xi}, \dot{\eta}] \right] dt + \int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 L_0}{\partial v \partial q}(t, \gamma, \dot{\gamma})[\dot{\xi}, \eta] \right] dt \\ &\quad + \int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 L_0}{\partial q \partial v}(t, \gamma, \dot{\gamma})[\xi, \dot{\eta}] \right] dt + \int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 L_0}{\partial q^2}(t, \gamma, \dot{\gamma})[\xi, \eta] \right] dt. \end{aligned}$$

Al ser  $d^2\mathcal{A}_{L_0}(\gamma)$  una forma bilinear simétrica acotada en  $H^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $D\mathcal{A}_{L_0}$  es Gateaux diferenciable en  $\gamma$ , y su derivada Gateaux en  $\gamma$  es el operador lineal acotado  $D^2\mathcal{A}_{L_0}(\gamma) : H^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)^*$  dado por

$$(D^2\mathcal{A}_{L_0}(\gamma)\xi)[\eta] := d^2\mathcal{A}_{L_0}(\gamma)[\xi, \eta], \quad \forall \xi, \eta \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Por (b'), el mapa  $\gamma \mapsto D^2\mathcal{A}_{L_0}(\gamma)$  es un operador acotado en el espacio de los operadores auto-adjuntos. Usando el teorema de valor medio, se tiene que  $D\mathcal{A}_{L_0}$  es Lipschitz en subconjuntos convexos de  $H^1(U)$ . □

## 2.5. Puntos críticos de la acción

Consideramos un Lagrangiano Tonelli  $L$  y una  $R$ -modificación  $L_0$ . Entonces, podemos definir la acción a tiempo libre  $\mathcal{A}_{L_0} : \Lambda_M \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\mathcal{A}_{L_0}(x, T) := T \int_{S^1} L(x(s), \dot{x}(s)/T) ds.$$

Notar que este operador se puede definir en  $H^1(M) \times \mathbb{R}^+$ , pero nos restringimos a  $\Lambda_M$  porque nos vamos a centrar en las órbitas periódicas. En el Teorema 2.4.4 probamos que el operador  $x \mapsto \mathcal{A}_{L_0}(x, 1)$  es  $C^{1,1}$ . Ahora bien, siguiendo el mismo razonamiento, se puede probar que  $\mathcal{A}_{L_0}(x, T)$  también tiene esta regularidad.

Este operador es relevante ya que sus puntos críticos se corresponden con órbitas periódicas de  $L_0$ . Más aún, si consideramos  $\kappa \in \mathbb{R}$ , resulta que los puntos críticos de

$$\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x, T) = T \int_{S^1} \left( L(x(s), \dot{x}(s)/T) + \kappa \right) ds$$

se corresponden con órbitas de energía  $\kappa$ . En esta sección justificamos esto, y vemos cómo recuperar una órbita del Lagrangiano original  $L$ .

Antes de probar que los puntos críticos se corresponden con soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange de  $L_0$ , enunciaremos dos lemas y fijamos un poco de notación que usaremos. Como ya venimos anotando,  $L$  va a ser un Lagrangiano Tonelli y  $L_0$  una  $R$ -modificación.

**Lema 2.5.1** (Teorema 3.4.2 de [Fat14]). La transformada de Legendre

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : TM &\rightarrow T^*M \\ (q, v) &\mapsto \left( q, \frac{\partial L}{\partial v}(q, v) \right) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

**Lema 2.5.2.** Sea  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . Sea  $h \in L^2(I, \mathbb{R}^n)$  tal que

$$\int_a^b h(t) \dot{\varphi}(t) dt = 0, \quad \text{si } \varphi \in H^1(I, \mathbb{R}) \text{ y } \varphi(a) = \varphi(b). \quad (2.5.3)$$

Entonces, existe  $A \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\varphi(t) = A$  para casi todo punto.

*Demostración.* Definimos

$$A := \frac{1}{b-a} \int_a^b h(t) dt, \quad \varphi(t) := \int_a^t (h(y) - A) dy.$$

Entonces,

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi(b) = \int_a^b \dot{\varphi}(t) dt = \int_a^b (h(t) - A) dt = 0. \quad (2.5.4)$$

Usando (2.5.3) y (2.5.4) tenemos

$$0 = \int_a^b (h(y) - A) h(y) dy = \int_a^b (h(y) - A)^2 dy.$$

Concluimos  $h(y) = A$  para casi todo  $y \in [a, b]$ . □

Fijamos un poco de notación. Se puede ver que la derivada de  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  está dada por

$$\begin{aligned} d_{(x,T)}\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(\xi, \alpha) &= \int_0^1 T \left[ \frac{\partial L_0}{\partial q} \left( x, \frac{\dot{x}}{T} \right) \cdot \xi + \frac{\partial L_0}{\partial v} \left( x, \frac{\dot{x}}{T} \right) \cdot \frac{\dot{\xi}}{T} \right] ds + \alpha \int_0^1 \left[ \kappa - E_{L_0} \left( x, \frac{\dot{x}}{T} \right) \right] ds \\ &= \int_0^T \left[ \frac{\partial L_0}{\partial q} (y, \dot{y}) \cdot \zeta + \frac{\partial L_0}{\partial v} (y, \dot{y}) \cdot \dot{\zeta} \right] dt + \frac{\alpha}{T} \int_0^T \left[ \kappa - E_{L_0} (y, \dot{y}) \right] dt \end{aligned}$$

siendo  $y(t) = x(t/T)$ ,  $\zeta = \xi(t/T)$  para  $0 \leq t \leq T$ . Las formulas anteriores las podemos interpretar tanto en coordenadas locales como usando la derivada covariante. En este último caso,

$$\frac{\partial L_0}{\partial q} \cdot \xi = \langle \nabla_q L_0, \xi \rangle_{x(s)}, \quad \frac{\partial L_0}{\partial v} \cdot \dot{\xi} = \langle \nabla_v L_0, \frac{D}{ds} \xi \rangle_{x(s)},$$

siendo  $\nabla_x L_0$  y  $\nabla_v L_0$  las proyecciones del gradiente de  $L$  en el splitting  $T_{(x,\dot{x})}TM = H \oplus V$  y  $\frac{D}{ds} \xi$  la derivada covariante de  $\xi$ .

**Definición 2.5.5.** Sea  $L$  un Lagrangiano Tonelli. Decimos que  $(x, T) \in \Lambda_M$  se corresponde con una órbita de  $L$  si  $y : [0, T] \rightarrow M$  dada por  $y(t) = x(t/T)$  es una solución de la ecuación de Euler-Lagrange de  $L$ . También decimos que  $(x, T)$  se corresponde con una solución de  $L$ .

Ahora sí vamos a probar que los puntos críticos de  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  se corresponden con soluciones de  $L_0$ . Seguimos la prueba presentada en [Con06]. Una vez tengamos esto, lo que nos va a interesar es justificar la existencia de estos puntos críticos, y eso lo veremos en los siguientes capítulos.

**Teorema 2.5.6.** Sea  $L$  un Lagrangiano Tonelli y  $L_0$  una  $R$ -modificación. Fijamos  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Si  $(x, T) \in \Lambda_M$  un punto crítico de la acción  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa} : \Lambda_M \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $(x, T)$  se corresponde con una órbita de  $L_0$ , y además es una órbita de energía  $\kappa$ . En particular, si  $R$  es suficientemente grande,  $(x, T)$  también se corresponde con una órbita de  $L$  de energía  $\kappa$ .

*Demostración.* Sea  $y : [0, T] \rightarrow M$  dada por  $y(t) = x(t/T)$ . Primero vamos a probar que  $y$  es solución de la ecuación asociada a  $L_0$ . Para ello, cubrimos  $y([0, T])$  por imágenes  $\tilde{U} \subset M$  de cartas  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Basta con probar que  $y$  es solución en cada intersección  $y([0, T]) \cap \tilde{U}$ , y como el argumento es local, vamos a asumir que vale  $y([0, T]) \subset U \subset \mathbb{R}^n$ , donde  $y$  no necesariamente es un loop, solo precisamos que  $x \in H^1(M)$ . Anotamos

$$\mathbb{L}_q(t) := \int_0^t \frac{\partial L_0}{\partial q} (y(s), \dot{y}(s)) ds.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} d_{(x,T)}\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(\xi, 0) &= \int_0^T \left[ \frac{\partial L_0}{\partial q} (y, \dot{y}) \cdot \zeta + \frac{\partial L_0}{\partial v} (y, \dot{y}) \cdot \dot{\zeta} \right] dt & (2.5.7) \\ &= \mathbb{L}_q \cdot \zeta \Big|_0^T + \int_0^T \left[ \frac{\partial L_0}{\partial v} (y, \dot{y}) - \mathbb{L}_q \right] \cdot \dot{\zeta} dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Recordar que  $y(t) = x(t/T)$ ,  $\zeta(t) = \xi(t/T)$ . Por otro lado, tenemos  $|(L_0)_q(y, \dot{y})| \leq C(1 + |\dot{y}|_q^2)$  y  $x \in H^1(M)$ , por lo que vale  $(L_0)_q(y, \dot{y}) \in L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$  y  $\mathbb{L}_q$  es (absolutamente) continua en  $[0, T]$ . En particular, se sigue que  $\mathbb{L}_q$  está acotada y pertenece a  $L^2([0, T], \mathbb{R}^n)$ . Por otro lado,  $(L_0)_v(y, \dot{y}) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^n)$  ya que  $x \in H^1(M)$ .

Notar que si tomamos  $\zeta$  tal que  $\zeta(0) = \zeta(T) = 0$ , entonces

$$\int_0^T \left[ \frac{\partial L_0}{\partial v}(y, \dot{y}) - \mathbb{L}_q \right] \cdot \dot{\zeta} dt = 0.$$

Por el Lema 2.5.2, existe  $A \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(L_0)_v(y(t), \dot{y}(t)) = A + \mathbb{L}_q(t)$  en casi todo punto. Ahora vamos a justificar que esta igualdad en realidad vale en todo punto. Como  $\mathbb{L}_q$  está acotado, entonces  $(L_0)_v(y, \dot{y})$  está acotado en casi todo punto, pero al ser  $L$  superlineal, se sigue que  $\dot{y}$  está acotado en casi todo punto. Por el Lema 2.5.1, tenemos que exista una única  $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $(L_0)_v(y(t), v(t)) = A + \mathbb{L}_q(t)$  es constante en todo punto, y además coincide con  $\dot{y}$  en casi todo punto. Ahora bien, usando que  $y$  es absolutamente continua, vale

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \dot{y}(s) ds = y(0) + \int_0^t v(s) ds,$$

y al ser  $v$  continua se sigue que  $y$  es derivable en todo punto, de lo que deducimos  $\dot{y} = v$ . Es decir, acabamos de probar

$$\frac{\partial L_0}{\partial v}(y(t), \dot{y}(t)) = A + \mathbb{L}_q(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Como  $\dot{y}(t)$  es continua, el lado derecho de la igualdad anterior es diferenciable y tenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial v}(y(t), \dot{y}(t)) = \frac{\partial L_0}{\partial q}(y, \dot{y}).$$

Concluimos que  $y$  es una solución  $C^1$  de la ecuación de Euler-Lagrange de  $L_0$ . Más aún, por la teoría de ecuaciones diferenciales, sabemos que si  $L_0$  es  $C^{r+2}$ , entonces  $y$  es  $C^r$ , por lo que tenemos que  $y$  es suave.

Al ser solución, se tiene que  $E_{L_0}(y(t), \dot{y}(t))$  es constante. Además,

$$\left. \frac{\partial \mathcal{A}_{L_0+\kappa}}{\partial T} \right|_{(x,T)} = \frac{1}{T} \int_0^T (\kappa - E_{L_0}(y, \dot{y})) dt = 0,$$

de lo que se sigue que  $E_{L_0}(y, \dot{y}) \equiv \kappa$ .

Notar que aún nos falta probar  $\dot{y}(0) = \dot{y}(T)$ , es decir, que se pega bien la curva al cerrarse. Tomamos una carta  $U \subset \mathbb{R}^n$  con imagen  $\tilde{U} \subset M$  tal que contiene  $y(0)$ , y nos restringimos a trabajar con campos  $\zeta$  sobre  $y$  que están soportados en la componente conexa de  $y([0, T]) \cap \tilde{U}$  que contiene a  $y(0)$ . Como ya sabemos que  $y$  es una órbita de  $L_0$ , integrando por partes en (2.5.7), obtenemos

$$\begin{aligned} d_{(x,T)} \mathcal{A}_{L_0+\kappa}(\xi, 0) &= \frac{\partial L_0}{\partial v}(y, \dot{y}) \cdot \zeta \Big|_0^T + \int_0^T \left[ \frac{\partial L_0}{\partial q}(y, \dot{y}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial v}(y, \dot{y}) \right] \cdot \zeta dt \\ &= \left[ \frac{\partial L_0}{\partial v}(y(T), \dot{y}(T)) - \frac{\partial L_0}{\partial v}(y(0), \dot{y}(0)) \right] \cdot \zeta(0) + 0, \end{aligned}$$

si asumimos  $\zeta(0) = \zeta(T)$ . Entonces,  $(L_0)_v(y(T), \dot{y}(T)) = (L_0)_v(y(0), \dot{y}(0))$ . Finalmente, como  $y(T) = y(0)$  y  $v \mapsto (L_0)_v(y(0), v)$  es inyectivo (por el Lema 2.5.1), concluimos  $\dot{y}(T) = \dot{y}(0)$ .

Aún nos falta probar la última afirmación. Tomamos el  $R$  de la Proposición 2.3.15. De esta forma,  $L$  y  $L_0$  coinciden en un entorno de  $E_L^{-1}(\kappa) = E_{L_0}^{-1}(\kappa)$ , y se sigue que sus derivadas coinciden en  $E_L^{-1}(\kappa)$ . Entonces, sus respectivas ecuaciones de Euler-Lagrange también son iguales en  $E_L^{-1}(\kappa)$ . En particular, ambos Lagrangianos tienen las mismas soluciones en el nivel de energía  $\kappa$ .

□

**Observación 2.5.8.** A nosotros nos interesan las órbitas periódicas, y por eso es que trabajamos en el espacio de loops. Sin embargo, de la prueba anterior también se sigue de que si consideramos las curvas que unen dos puntos fijos y restringimos la acción a ese espacio, entonces los puntos críticos son soluciones a la ecuación de Euler-Lagrange.

Una consecuencia del teorema anterior es que para verificar que  $(x, T)$  se corresponde con una solución de  $L_0$ , basta con probar que  $\frac{\partial \mathcal{A}_{L_0}}{\partial x} = 0$ . Para ver esto, definimos la *función de energía promedio*, que es  $e : \Lambda_M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$e(x, T) := \int_0^1 E_{L_0}(x(t), \dot{x}(t)/T) dt.$$

Consideramos la siguiente observación inmediata para poder referirnos a ella en el futuro.

**Observación 2.5.9.**

$$\frac{\partial \mathcal{A}_{L_0}}{\partial T}(x, T) = -e(x, T).$$

De esta observación y el Teorema 2.5.6, concluimos lo siguiente.

**Corolario 2.5.10.** Si  $(x, T) \in \Lambda_M$  es tal que

$$\frac{\partial \mathcal{A}_{L_0}}{\partial x}(x, T) = 0,$$

entonces  $(x, T)$  se corresponde con una solución de  $L_0$  con energía  $e(x, T)$ .

*Demostración.* Recordar que  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x, T) = \mathcal{A}_{L_0}(x, T) + \kappa T$ . Entonces, para cualquier  $\kappa \in \mathbb{R}$  vale

$$0 = \frac{\partial \mathcal{A}_{L_0}}{\partial x}(x, T) = \frac{\partial \mathcal{A}_{L_0+\kappa}}{\partial x}(x, T),$$

$$\frac{\partial \mathcal{A}_{L_0+\kappa}}{\partial T}(x, T) = \frac{\partial \mathcal{A}_{L_0}}{\partial T} + \kappa.$$

Por la Observación 2.5.9, se concluye tomando  $\kappa = e(x, T)$  y aplicando el Teorema 2.5.6.  $\square$

## Capítulo 3

# Minimax

En esta sección vamos a presentar un método para probar la existencia de puntos críticos para funciones  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  que tengan cierta regularidad, en donde  $N$  es una variedad de Hilbert. El resultado que probaremos es un caso particular de la Proposición 6.3 de [Con06].

### 3.1. Teorema del paso de la montaña

Conviene arrancar con el Teorema del paso de la montaña, que en definitiva es una versión simplificada de lo que vamos a hacer. El setting es el siguiente. Consideremos un espacio de Hilbert real  $H$  y  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ . Supongamos que  $\{f < a\}$  no es conexo, y podemos escribir  $\{f < a\} = A \cup B$  con  $A, B$  abiertos disjuntos no vacíos. Así podemos pensar que  $A$  y  $B$  son dos valles. Definimos

$$\mathcal{F} := \{\text{curvas en } H \text{ con un extremo en } A \text{ y otro en } B\}.$$

Definimos el minimax de  $f$  en  $\mathcal{F}$  como

$$c := \inf_{\gamma \in \mathcal{F}} \max_{x \in \gamma} f(x).$$

Notar que  $a \leq c < +\infty$ , pues todas las curvas consideradas cortan el conjunto  $(A \cup B)^c = \{f \geq a\}$ .

Lo que estamos haciendo es tomar todas las curvas que unen  $A$  y  $B$ , y  $c$  nos dice cual es la altura mínima que debemos subir para pasar de un valle a otro. Intuitivamente,  $c$  debería ser un valor crítico de  $f$ , pero esto es falso.

**Ejemplo 3.1.1.** Consideremos la función  $f(x, y) = e^x - y^2$  definida en  $\mathbb{R}^2$ . Esta función no tiene puntos críticos, sin embargo tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(-n, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} df(-n, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} dx = 0.$$

Notar que de aquí no podemos extraer una subsucesión convergente. Podríamos decir que el punto crítico “está en el infinito”. En definitiva, es un problema de compacidad.

Para evitar este problema es que consideramos la siguiente definición.

**Definición 3.1.2.** Sea  $N$  una variedad de Hilbert Riemanniana y  $f \in C^{1,1}(N, \mathbb{R})$ . Decimos que  $(x_n)$  es una *sucesión de Palais-Smale al nivel  $c$* , o  $(PS)_c$  de forma abreviada, si

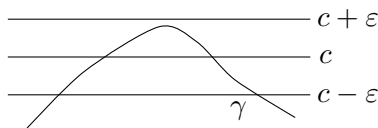
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|df(x_n)\| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c.$$

Se dice que  $f$  satisface la *condición de Palais-Smale restricta al nivel  $c$* , o  $(PS)_c$  de forma abreviada, si toda sucesión de Palais-Smale tiene una subsucesión convergente.

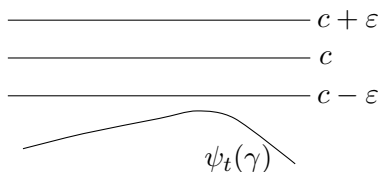
Notar que los puntos límite de sucesiones  $(PS)_c$  son valores críticos de nivel  $c$ . El siguiente resultado es el teorema del paso de la montaña, el cual nos asegura la existencia de puntos críticos de  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  asumiendo regularidad de la función. Para una prueba detallada, ver Teorema 1.3 de [Abb13].

**Teorema 3.1.3.** Sea  $f \in C^{1,1}(H)$  que satisface  $(PS)_c$ . Supongamos que el conjunto  $\{f < a\}$  no es conexo, y sea  $c$  como el definido antes. Entonces,  $f$  admite una sucesión  $(PS)_c$ , y  $c$  es un valor crítico.

Veamos la idea de la prueba. Supongamos por absurdo que existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $\|df\| \geq \varepsilon$  en el conjunto  $\{|f - c| \geq \varepsilon\}$ . Anotamos  $\psi_t$  al flujo  $-\nabla f$ , el cual vamos a asumir que es *positivamente completo*, es decir, que está definido para todo tiempo positivo. Por la definición de  $c$ , podemos considerar una curva que esté por debajo de  $c + \varepsilon$ . Es decir



Como en  $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  el gradiente está lejos de ser cero, al fluir suficiente tiempo la curva queda por debajo del nivel  $c - \varepsilon$ .



Esto contradice la definición de  $c$ .

Al tener  $f \in C^{1,1}$ , en general, el flujo  $\psi_t$  no es *positivamente completo*. En [Abb13] se evita este problema estudiando el flujo de  $-\nabla f / \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}$ , mientras que en este texto lo haremos asumiendo que  $\psi_t$  es *relativamente completo*, que es más débil que ser *positivamente completo*.

## 3.2. Principio general del Minimax

El objetivo de esta sección es probar un resultado más general que el teorema del paso de la montaña, llegando así al Teorema 3.2.5. Esto lo haremos siguiendo [Con06].

En esta sección,  $N$  va a ser una variedad de Hilbert Riemanniana. Es decir, podemos pensar  $N = \Lambda_M$ . Sea  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  un mapa  $C^{1,1}$ . A priori, el flujo gradiente  $\psi_t$  de  $-f$  solo es un flujo local. Dado  $p \in N$ , definimos

$$\alpha(p) := \sup\{s > 0 : t \mapsto \psi_t(p) \text{ está definido para } t \in [0, s]\}.$$

Decimos que el flujo  $\psi_t$  de  $-\nabla f$  es *relativamente completo* en  $[a \leq f \leq b]$  si para todo  $p \in N$  tal que  $a \leq f(p) \leq b$ , vale  $\alpha(p) = +\infty$  o bien  $f(\psi_\beta(p)) \leq a$  para algún  $0 \leq \beta < \alpha(p)$ .

Decimos que una función  $\tau : N \rightarrow [0, +\infty)$  es un *tiempo admisible* si  $\tau$  es continuo y  $0 \leq \tau(x) < \alpha(x)$  para todo  $x \in N$ . Es decir, un tiempo admisible le asigna a cada punto de

$N$  cuánto tiempo va a fluir, y se hace esto de forma continua. Dado un tiempo admisible  $\tau$  y un subconjunto  $F \subset N$ , definimos

$$F_\tau := \{\psi_{\tau(x)} : x \in F\}.$$

**Observación 3.2.1.** El paso clave de esta sección es justificar la existencia de un tiempo admisible que nos permita repetir el absurdo del teorema del paso de la montaña. Los siguientes lemas apuntan a eso.

Dados  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$  definimos

$$\begin{aligned} K_c &:= \{x \in N : f(x) = c, df(x) = 0\}, \\ B_{c,\delta} &:= \{x \in N : d(x, K_c) < \delta\}, \\ V_{c,\delta} &:= \{x \in N : \|df(x)\| < \delta, |f(x) - c| < \delta\}. \end{aligned}$$

**Lema 3.2.2.** Sea  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$ . Si  $f$  cumple la condición de Palais-Smale al nivel  $c$ , entonces

1.  $K_c$  es compacto.
2. La familia  $\{B_{c,\delta}\}_{\delta>0}$  es un base de entornos de  $K_c$ .
3. La familia  $\{V_{c,\delta}\}_{\delta>0}$  es un base de entornos de  $K_c$ .

*Demostración.* 1. Por  $(PS)_c$ , toda sucesión en  $K_c$  tiene una subsucesión convergente. Como  $df$  es continuo, el límite también pertenece a  $K_c$ .

2. Trivial.

3. Supongamos que es falso. Entonces, existe un entorno  $U$  de  $K_c$  y una sucesión  $(x_n)$  tal que  $x_n \in V_{c,1/n} \cap U^c$ . Por  $(PS)_c$ , existe una subsucesión convergente  $(x_{n_k})$ , con  $z = \lim_k x_{n_k}$ . Como  $f \in C^1$ , entonces  $z \in K_c$ , lo que contradice que  $x_n \notin U$  para todo  $n$ . □

**Lema 3.2.3.** Sean  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^{1,1}$  y  $c \in \mathbb{R}$ . Supongamos que

- (a)  $f$  satisface  $(PS)_c$ .
- (b) El flujo  $-\nabla f$  es relativamente completo en  $[c - \varepsilon_0 \leq f \leq c + \varepsilon_0]$  para algún  $\varepsilon_0$ .
- (c)  $K_c = \emptyset$

Entonces, existen  $0 < \varepsilon < \delta < 1$  tales que existe un tiempo admisible  $\tau(x)$  que satisface

$$F_\tau \subset [f \leq c - \varepsilon], \quad \tau(x) = 0 \text{ en } [|f - c| \geq \delta],$$

siendo  $F = ([f \leq c + \varepsilon])$ .

*Demostración.* Como  $K_c = \emptyset$ , por el Lema 3.2.2, existe un  $0 < \delta < \min\{1, \varepsilon_0\}$  tal que vale para todo  $x \in N$  vale alguna de las siguientes dos condiciones:

$$\|df(x)\| \geq \delta, \quad |f(x) - c| \geq \delta. \tag{3.2.4}$$

Consideramos  $\varepsilon$  tal que

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ \frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{\delta}{2}, \frac{\delta^2}{2} \right\}.$$

Sea  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  una función suave tal que

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x - c| \geq \delta, \\ 1 & \text{si } |x - c| \leq \delta/2. \end{cases}$$

Como  $f \in C^{1,1}$ , entonces el campo de vectores  $Y(x) = -\lambda(f(x))\nabla f(x)$  es localmente Lipschitz. Anotamos  $\psi_t$  el flujo de  $-\nabla f$ , y  $\eta_s$  el de  $Y$ . Notar que este último es una reparametrización del primero tal que los puntos en  $\{|f(x) - c| \geq \delta\}$  son fijos. Al tener  $\delta < \varepsilon_0$ , de la hipótesis (b) se sigue que  $\eta_s$  es completo.

Definimos  $\tau(x)$  como  $\psi_{\tau(x)}(x) = \eta_1(x)$ . Es claro que satisface  $\tau(x) = 0$  si  $|f(x) - c| \geq \delta$ . Ahora vamos a probar que  $\tau$  es continuo. Si anotamos  $\eta_s(x) = \psi_{t(s,x)}(x)$ , tenemos

$$Y(\eta_s(x)) = -\lambda(f(\eta_s(x)))\nabla f(\eta_s(x)) = -\frac{\partial t}{\partial s}\nabla f(\eta_s(x)).$$

Entonces,

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \lambda(f(\eta_s(x))), \quad t(1, x) = \tau(x) = \int_0^1 \lambda(f(\eta_s(x))) ds,$$

por lo que  $\tau(x)$  es finito y continuo.

Nos falta probar que  $F_\tau \subset [f \leq c - \varepsilon]$ . Sea  $x \in [f \leq c + \varepsilon]$ . Supongamos que existe un  $s \in [0, 1]$  tal que  $|f(\eta_s(x)) - c| \geq \delta/2$ . Al ser  $s \mapsto f(\eta_s(x))$  decreciente y en  $s = 0$  tener  $f(x) \leq c + \varepsilon < c + \delta/2$ , obtenemos

$$f(\psi_{\tau(x)}(x)) = f(\eta_1(x)) = \inf_{s \in [0, 1]} f(\eta_s(x)) \leq c - \frac{\delta}{2} < c - \varepsilon.$$

Sea  $x \in [f \leq c + \varepsilon]$ . Ahora asumimos que  $|f(\eta_s(x)) - c| < \delta/2 < \delta$  para todo  $s \in [0, 1]$ . De (3.2.4) se sigue que

$$\|\nabla f(\eta_s(x))\| \geq \delta, \quad \forall s \in [0, 1].$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(\eta_1(x)) &= f(x) - \int_0^1 \langle \nabla f(\eta_s(x)), Y(\eta_s(x)) \rangle ds \\ &\leq c + \varepsilon - \int_0^1 \lambda(f(\eta_s(x))) \|\nabla f(\eta_s(x))\|^2 ds \\ &= c + \varepsilon - \int_0^1 \|\nabla f(\eta_s(x))\|^2 ds \\ &\leq c + \varepsilon - \delta^2 \\ &< c - \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Sea  $\mathcal{F}$  una familia de subconjuntos  $F \subset X$ . Decimos que  $\mathcal{F}$  es *invariante hacia adelante* si  $F_\tau \in \mathcal{F}$  para todo  $F \in \mathcal{F}$  y cualquier tiempo admisible  $\tau$ . Definimos

$$c(f, \mathcal{F}) := \inf_{F \in \mathcal{F}} \sup_{x \in F} f(x).$$

Ahora vamos a probar que, bajo ciertas hipótesis, se tiene  $K_{c(f, \mathcal{F})} \neq \emptyset$ . La idea es que al suponer  $K_{c(f, \mathcal{F})} = \emptyset$ , usando el Lema 3.2.3, podemos construir un tiempo admisible que contradice la definición de  $c(f, \mathcal{F})$ .

**Teorema 3.2.5.** Sea  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^{1,1}$ . Sea  $\mathcal{F}$  una familia de subconjuntos de  $N$ . Supongamos que

1.  $\mathcal{F}$  es invariante hacia adelante.
2.  $c := c(f, \mathcal{F}) \in \mathbb{R}$ .
3. El flujo  $-\nabla f$  es relativamente completo en  $[c - \varepsilon_1 \leq f \leq c + \varepsilon_1]$  para algún  $\varepsilon_1 > 0$ .
4.  $f$  satisface  $(PS)_c$ .

Entonces,  $K_c \neq \emptyset$ . Es decir, existe  $x \in M$  tal que  $f(x) = c$  y  $df(x) = 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $K_c = \emptyset$ . Sean  $\varepsilon$  y  $\delta$  los dados por el Lema 3.2.3. Por la definición de  $c$ , existe un  $F \in \mathcal{F}$  tal que  $F \subset [f \leq c + \varepsilon]$ . Por el Lema 3.2.3, existe un tiempo admisible  $\tau$  tal que  $F_\tau \subset [f \leq c - \varepsilon]$ , lo que contradice la definición de  $c$ . □

**Observación 3.2.6.** Basta con considerar tiempos admisibles  $\tau(x)$  tales que  $\tau(x) = 0$  si  $f(x) \leq c - \delta$  para algún  $\delta > 0$ . Notar que esto no modifica el valor de  $c(f, \mathcal{F})$  y la prueba de la Teorema 3.2.5 solo usa este tipo de tiempos admisibles.

Nos va a resultar útil el siguiente caso particular del teorema anterior.

**Corolario 3.2.7.** Sea  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^{1,1}$ . Supongamos que

1.  $c := \inf_{x \in N} f(x) > -\infty$ .
2. El flujo de  $-\nabla f$  es relativamente completo en  $[c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon]$  para algún  $\varepsilon > 0$ .
3.  $f$  cumple  $(PS)_c$ .

Entonces,  $c$  es un valor crítico de  $f$ .



## Capítulo 4

# Energías altas

Nuestro objetivo de esta sección es probar la existencia de órbitas periódicas no homotópicamente triviales si consideramos energía suficientemente alta. También vamos a dar algo de información en el caso de que la variedad sea simplemente conexa. La energía a partir de la cual podemos asegurar esto está dada por el *valor crítico de Mañé*.

**Definición 4.1.** El valor crítico de Mañé (asociado a un Lagrangiano  $L$ ) es

$$c_u(L) := \inf\{\kappa \in \mathbb{R} : \mathcal{A}_{L+\kappa}(x, T) \geq 0, \forall (x, T) \in \Lambda_M \text{ con } x \text{ homotópicamente nula, } T > 0\}.$$

Más concretamente, lo que vamos a probar es lo siguiente.

**Teorema 4.2.** Sea  $L$  un Lagrangiano Tonelli. Supongamos que  $\kappa > c_u(L)$ . Entonces

- (1) Si  $M$  no es simplemente conexa, entonces  $E_L^{-1}(\kappa)$  contiene una órbita periódica que minimiza  $\mathcal{A}_{L+\kappa}$  en cada componente conexa de  $\Lambda_M$  no homotópicamente trivial. Es decir, si se restringe el operador a una componente conexa de  $\Lambda_M$  no homotópicamente trivial, siempre existe un mínimo de  $\mathcal{A}_{L+\kappa}$ .
- (2) Si  $M$  es simplemente conexa, entonces  $E_L^{-1}(\kappa)$  tiene una órbita periódica con acción positiva  $\mathcal{A}_{L+\kappa}$ .

Pruebas de este teorema se pueden encontrar en [Con06] (aquí se asume uniformemente convexo en lugar de Tonelli) y en [Abb13], y son muy parecidas. La idea de esta sección es dar una mezcla de ambas, aprovechando así para presentar resultados e ideas que usaremos en las siguientes secciones

Durante este capítulo,  $L$  siempre va a ser un Lagrangiano Tonelli y  $L_0$  un Lagrangiano cuadrático y convexo. Consideramos constantes positivas  $A, B, C, D$  tales que

$$C|v|^2 - D \leq L_0(q, v) \leq A|v|^2 + B, \quad C|v|^2 - D \leq E_{L_0}(q, v), \quad \forall (q, v) \in TM. \quad (4.3)$$

Además, dado  $(x, T) \in \Lambda_M$ , anotamos  $y$  a la curva  $y : [0, T] \rightarrow M$  dada por  $y(t) = x(t/T)$ .

La prueba del Teorema 4.2 consiste en aplicar el Teorema 3.2.5 a la acción a tiempo libre. Lo que haremos será probar el resultado para cualquier  $R$ -modificación  $L_0$  de  $L$ . Así, usando una  $R$ -modificación adecuada, vamos a justificar que podemos obtener una órbita periódica de  $L$ .

### 4.1. Completitud relativa de la acción

En esta sección probamos que la acción del Lagrangiano es relativamente completa en ciertos niveles, o restringida a una clase de homotopía no trivial.

**Lema 4.1.1.** Si  $0 \notin [a, b] \subset \mathbb{R}$ , entonces el flujo gradiente de  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  en  $\Lambda_M$  es relativamente completo en  $[a \leq \mathcal{A}_{L_0+\kappa} \leq b]$ .

*Demostración.* Consideramos  $f = \mathcal{A}_{L_0+\kappa} : \Lambda_M \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $\psi_t$  el flujo de  $Y = -\nabla f$ . Entonces,

$$f(\psi_{t_1}(p)) - f(\psi_{t_2}(p)) = - \int_{t_1}^{t_2} \nabla f(\psi_s(p)) \cdot Y(\psi_s(p)) ds = \int_{t_1}^{t_2} \|Y(\psi_s(p))\|^2 ds. \quad (4.1.2)$$

Usando Cauchy-Schwarz tenemos

$$d(\psi_{t_1}(p), \psi_{t_2}(p))^2 \leq \left[ \int_{t_1}^{t_2} \|Y(\psi_s(p))\| ds \right]^2 \leq |t_2 - t_1| \int_{t_1}^{t_2} \|Y(\psi_s(p))\|^2 ds,$$

y luego

$$d(\psi_{t_1}(p), \psi_{t_2}(p))^2 \leq |t_2 - t_1| |f(\psi_{t_1}(p)) - f(\psi_{t_2}(p))|. \quad (4.1.3)$$

Sea  $I = [0, \alpha)$  el intervalo maximal en el que está definido el flujo  $t \mapsto \psi_t(p)$ . Supongamos que  $a \leq f(\psi_t(p)) \leq b$  para todo  $t \in I$ , y a partir de esto queremos llegar a un absurdo. Por la desigualdad (4.1.3), para toda sucesión  $s_n \uparrow \alpha$  tenemos que  $n \mapsto \psi_{s_n}(p) = (x_{s_n}, T(s_n))$  es una sucesión de Cauchy en  $\Lambda_M \cap [a \leq f \leq b]$ . Entonces,

$$T_0 := \lim_{s \uparrow \alpha} T(s) \in [0, +\infty) \quad \text{existe.}$$

Ahora discutimos según el valor de  $T_0$ . Supongamos que  $0 < T_0 < +\infty$ . Como todas las sucesiones del tipo  $\{\psi_{s_n}(p)\}$  son de Cauchy, entonces existe  $\lim_{s \uparrow \alpha} \psi_s(p) = \psi_\alpha(p)$ , y pertenece a  $\Lambda_M$  ya que  $T_0 \neq 0$ . Como  $f$  es  $C^{1,1}$ , podemos extender la solución  $t \mapsto \psi_t(p)$  en  $t = \alpha$ , lo que contradice la definición de  $\alpha$ .

Nos queda ver el caso  $T_0 = 0$ . En este caso, tiene que existir una sucesión  $s_n \uparrow \alpha$  tal que

$$\frac{d}{ds} T(s_n) \leq 0.$$

Anotamos  $T_n = T(s_n)$ ,  $y_n(t) = x_{s_n}(t/T_n)$ . Usando las cotas (4.3), tenemos

$$0 \geq \frac{d}{ds} T(s_n) = -\frac{\partial \mathcal{A}_{L_0+\kappa}}{\partial T} = -\kappa + \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} E_{L_0}(y_n, \dot{y}_n) dt \geq -\kappa - D + \frac{C}{T_n} \int_0^{T_n} |\dot{y}_n|^2 dt.$$

Como  $T_n \rightarrow 0$ , vale

$$\lim_n \int_0^{T_n} |\dot{y}_n|^2 dt = 0.$$

Ahora usamos las desigualdades para el Lagrangiano, obteniendo

$$C \int_0^{T_n} |\dot{y}_n|^2 dt + T_n(\kappa - D) \leq \mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x_n, T_n) \leq A \int_0^{T_n} |\dot{y}_n|^2 dt + T_n(B + \kappa).$$

Al tomar  $n \rightarrow \infty$ , ambos extremos de la cadena de desigualdades tiende a cero, por lo que deducimos  $\lim_n \mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x_{s_n}, T_n) = 0$ . Como  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x_{s_n}, T_n) \in [a, b]$  y  $0 \notin [a, b]$ , llegamos a un absurdo.  $\square$

En la prueba anterior la hipótesis de que  $0 \notin [a, b]$  la usamos para evitar el caso en que el periodo de los loops tiende a cero. Esto lo podemos evitar de otra forma, por ejemplo, al restringirnos a trabajar en una componente conexa no homotópicamente trivial de  $\Lambda_M$ . Ahora vamos a probar esto, pero primero necesitamos unos lemas.

**Lema 4.1.4.** Dados  $\kappa, \lambda_1, \lambda_2$ , existe  $\lambda = \lambda(\kappa, \lambda_1, \lambda_2) > 0$  tal que si  $(x, T) \in \Lambda_M$  satisface  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x, T) \leq \lambda_1$  y  $T \leq \lambda_2$ , entonces vale

$$\frac{\ell(x)^2}{T} \leq \int_0^T |\dot{y}|^2 ds = \frac{1}{T} \int_0^1 |\dot{x}|^2 dt \leq \lambda.$$

En particular, si  $T \rightarrow 0$ , entonces  $\ell(x) \rightarrow 0$ .

*Demostración.* Volvemos a usar las cotas (4.3). Notar que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\geq \mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x, T) \\ &= \int_0^T (L_0(y, \dot{y}) - \kappa) ds \\ &\geq C \int_0^T |\dot{y}|^2 ds - (D + \kappa)T \\ &\geq C \int_0^T |\dot{y}|^2 ds - (D + |\kappa|)T. \end{aligned}$$

Por Cauchy-Schwarz, vale

$$\ell(x)^2 = \left( \int_0^T |\dot{y}| ds \right)^2 \leq T \int_0^T |\dot{y}|^2 ds.$$

Juntando todo, tenemos

$$\frac{\ell(x)^2}{T} \leq \int_0^T |\dot{y}|^2 ds \leq \frac{\lambda_1 + (D + |\kappa|)T}{C} \leq \frac{\lambda_1 + (D + |\kappa|)\lambda_2}{C}.$$

□

**Lema 4.1.5.** Sea  $\Lambda_\alpha$  una componente conexa de  $\Lambda_M$  no homotópicamente trivial. Entonces, para todo  $\lambda > 0$  vale

$$\inf\{T > 0 : (x, T) \in \Lambda_\alpha, \mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x, T) \leq \lambda\} > 0.$$

*Demostración.* Como  $M$  es compacta, entonces  $\inf\{\ell(x) : (x, T) \in \Lambda_\alpha\} > 0$ . Concluimos usando el Lema 4.1.4.

□

**Corolario 4.1.6.** Sea  $\Lambda_\alpha$  una componente conexa fija de  $\Lambda_M$  con clase de homotopía no trivial. Entonces, para todo  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a \leq b$  el flujo gradiente de  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  en  $\Lambda_\alpha$  es relativamente completo en  $[a \leq \mathcal{A}_{L_0+\kappa} \leq b]$ .

*Demostración.* Por el Lema 4.1.5 tenemos que el caso  $T_0 = 0$  de la prueba del Lema 4.1.1 no sucede.

□

## 4.2. Sucesiones de Palais-Smale para la acción

Ahora vamos a estudiar a las sucesiones de Palais-Smale  $(x_n, T_n)$  para el operador  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$ . Notar que si  $T_n \rightarrow 0$ , entonces  $(x_n, T_n)$  no tiene ninguna subsucesión convergente en  $\Lambda_M$ . El siguiente resultado muestra que esto solo puede pasar al nivel cero.

**Lema 4.2.1.** Sea  $(x_n, T_n)$  una sucesión  $(PS)_c$  de  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  tal que  $T_n \rightarrow 0$ . Entonces,  $c = 0$ .

*Demostración.* Sea  $y_n(t) = x_n(t/T_n)$ . Como  $(x_n, T_n)$  cumple  $(PS)_c$ , tenemos

$$\alpha_n := \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} (E_{L_0}(y_n, \dot{y}_n) - \kappa) dt = -\frac{\partial \mathcal{A}_{L_0+\kappa}}{\partial T}(x_n, T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Por otro lado,

$$\alpha_n \geq \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} (C|\dot{y}_n|^2 - D - \kappa) dt = \frac{C}{T_n} \int_0^{T_n} |\dot{y}_n|^2 dt - (D + \kappa).$$

Notar que  $\alpha_n$  es una sucesión acotada, y entonces al tomar  $n \rightarrow \infty$  deducimos

$$\int_0^{T_n} |\dot{y}_n|^2 dt \leq \frac{T_n}{C}(\alpha_n + D + \kappa) = O(T_n).$$

Notar que también vale

$$\begin{aligned} C \int_0^{T_n} |\dot{y}_n|^2 dt + T_n(\kappa - D) &\leq \int_0^{T_n} (L_0(y_n, \dot{y}_n) + \kappa) dt \\ &= \mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x_n, T_n) \\ &\leq A \int_0^{T_n} |\dot{y}_n|^2 dt + T_n(D + \kappa). \end{aligned}$$

Al tomar  $n \rightarrow \infty$ , ambos extremos de la desigualdad son de orden  $O(T_n)$ . Como  $T_n \rightarrow 0$ , concluimos que  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x_n, T_n) \rightarrow 0$ , y por lo tanto  $c = 0$ . □

El siguiente resultado nos dice que las sucesiones de Palais-Smale que están acotadas y lejos de cero son siempre compactas.

**Lema 4.2.2.** Sea  $(x_n, T_n)$  una sucesión de Palais-Smale para  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  tal que existen constantes  $T^*$  y  $T_*$  tales que  $0 < T_* \leq T_n \leq T^* < \infty$ . Entonces,  $(x_n, T_n)$  es compacto en  $\Lambda_M$ .

*Demostración.* A menos de tomar una subsucesión, podemos asumir  $T_n \rightarrow T \in [T_*, T^*]$ . Notar que

$$\begin{aligned} c + o(1) &= \mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x_n, T_n) \\ &= T_n \int_0^1 [L_0(x_n, \dot{x}_n/T_n) + \kappa] ds \\ &\geq T_n \int_0^1 \left[ C \frac{|\dot{x}_n|^2}{T_n^2} - (D - \kappa) \right] ds \\ &\geq \frac{C}{T_*} \|\dot{x}_n\|_2^2 - T^* |D - \kappa|. \end{aligned}$$

Entonces,  $\|\dot{x}\|_2$  está uniformemente acotado y  $(x_n)$  cumple

$$\text{dist}(x_n(s'), x_n(s)) \leq \int_s^{s'} |\dot{x}_n(t)| dt \leq |s' - s|^{1/2} \|\dot{x}_n\|_2.$$

Por el teorema de Arzelà-Ascoli, a menos de tomar una subsucesión resulta que  $(x_n)$  converge uniformemente a algún  $x \in C(S^1, M)$ . En particular,  $(x_n)$  eventualmente pertenece a la imagen de una parametrización  $\varphi_*$  inducida por un mapa suave  $\varphi : [0, 1] \times B_r \rightarrow M$ . Conviene recordar que la imagen de la parametrización es  $C^0$ -abierto. Entonces,  $x_n = \varphi_*(\xi_n)$  para  $\xi_n \in H^1(B_r)$  y es una sucesión de Palais-Smale para el funcional

$$\tilde{\mathcal{A}}(\xi, T) := T \int_0^1 \tilde{L}_0(s, \xi, \dot{\xi}/T) ds,$$

donde el Lagrangiano  $\tilde{L}_0 \in C^\infty([0, 1] \times B_r \times \mathbb{R}^n)$  se obtiene al hacer el pull-back de  $L_0 + \kappa$  por  $\varphi$ . Notar que  $(\xi_n)$  converge uniformemente a algún  $\xi$ , pero como  $\|\dot{\xi}_n\|_2$  está acotada, podemos asumir que converge débilmente a  $\xi \in H^1(S^1, B_r)$ . Debemos probar que esta convergencia en realidad es fuerte.

Notar que existe una constante  $C$  tal que

$$\left| \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial q}(s, q, v) \right| \leq C(1 + |v|^2), \quad \left| \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial v}(s, q, v) \right| \leq C(1 + |v|), \quad \forall (s, q, v) \in [0, 1] \times B_r \times \mathbb{R}^n. \quad (4.2.3)$$

Como  $(\xi_n, T_n)$  es una sucesión de Palais-Smale, vale

$$\begin{aligned} o(1) &= d\tilde{\mathcal{A}}(\xi_n, T_n)[(\xi_n - \xi, 0)] \\ &= T_n \int_0^1 \left[ \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial q} \left( s, \xi_n, \frac{\dot{\xi}_n}{T_n} \right) \cdot (\xi_n - \xi) \right] ds + T_n \int_0^1 \left[ \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial v} \left( s, \xi_n, \frac{\dot{\xi}_n}{T_n} \right) \cdot (\dot{\xi}_n - \dot{\xi}) \right] ds. \end{aligned}$$

Por la primera cota de (4.2.3) y la convergencia uniforme de  $\xi_n \rightarrow \xi$ , la primera integral tiende a cero. Al tener que  $(T_n)$  está lejos de cero, deducimos

$$\int_0^1 \left[ \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial v} \left( s, \xi_n, \frac{\dot{\xi}_n}{T_n} \right) \cdot \frac{\dot{\xi}_n - \dot{\xi}}{T_n} \right] ds = o(1). \quad (4.2.4)$$

Por la convexidad de  $\tilde{L}_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\frac{\partial^2 \tilde{L}_0}{\partial v^2}(s, x, v)[u, u] \geq \delta |u|^2, \quad \forall (s, x, v) \in [0, 1] \times B_r \times \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

donde estamos anotando  $\partial_{vv} \tilde{L}_0(s, q, v)[u, u] := u^t \cdot \partial_{vv} \tilde{L}_0(s, q, v) \cdot u$ . Entonces,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial v} \left( s, \xi_n, \frac{\dot{\xi}_n}{T_n} \right) \cdot \left( \frac{\dot{\xi}_n - \dot{\xi}}{T_n} \right) - \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial v} \left( s, \xi_n, \frac{\dot{\xi}}{T_n} \right) \cdot \left( \frac{\dot{\xi}_n - \dot{\xi}}{T_n} \right) \\ &= \int_0^1 \frac{\partial^2 \tilde{L}_0}{\partial v^2} \left( s, \xi_n, \frac{\dot{\xi}}{T_n} + \sigma \frac{\dot{\xi}_n - \dot{\xi}}{T_n} \right) \left[ \frac{\dot{\xi}_n - \dot{\xi}}{T_n}, \frac{\dot{\xi}_n - \dot{\xi}}{T_n} \right] d\sigma \\ &\geq \frac{\delta}{T_n^2} \|\dot{\xi}_n - \dot{\xi}\|_2^2. \end{aligned}$$

Integrando en  $s$  y usando (4.2.4), obtenemos

$$o(1) - \int_0^1 \left[ \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial v} \left( s, \xi_n, \frac{\dot{\xi}}{T_n} \right) \cdot \frac{\dot{\xi}_n - \dot{\xi}}{T_n} \right] ds \geq \frac{\delta}{T_n^2} \|\dot{\xi}_n - \dot{\xi}\|_2^2. \quad (4.2.5)$$

Por la segunda cota de (4.2.3), la sucesión  $\partial_v \tilde{L}_0(s, \xi_n, \dot{\xi}/T_n)$  converge fuertemente en  $L^2$ . Como  $(\dot{\xi}_n - \dot{\xi})$  converge débilmente a 0 en  $L^2$ , deducimos que la integral del lado izquierdo de (4.2.5) tiende a cero. Concluimos que  $(\xi_n)$  converge a  $\xi$  fuertemente en  $H^1$ .  $\square$

**Observación 4.2.6.** Se puede debilitar un poco el lema anterior. Notar que en realidad no estamos usando que  $\|d\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x_n, T_n)\| \rightarrow 0$ , si no que basta con pedir

$$\|d\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x_n, T_n)|_{T_x \Lambda_M \times \{0\}}\| \rightarrow 0,$$

o equivalentemente,

$$\frac{\partial \mathcal{A}_{L_0}}{\partial x} \rightarrow 0.$$

**Corolario 4.2.7.** Sea  $(x_n, T_n)$  una sucesión tal que  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x_n, T_n) \rightarrow c$ , para algún  $c$ . Además supongamos que  $\frac{\partial \mathcal{A}_{L_0}}{\partial x}(x_n, T_n) \rightarrow 0$ , y que existen constantes  $T^*$  y  $T_*$  tales que  $0 < T_* \leq T_n \leq T^* < \infty$ . Entonces,  $(x_n, T_n)$  es compacto en  $\Lambda_M$ .

Notar que hasta ahora no hemos usado que el nivel de energía es mayor a  $c_u(L_0)$ . Ahora sí va a ser importante, porque en general  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  puede tener sucesiones de Palais-Smale  $(x_n, T_n)$  con  $T_n$  no acotado. Sin embargo, esto no pasa si  $\kappa > c_u(L_0)$ . Para probar esto, usaremos el lema anterior y el siguiente resultado.

**Lema 4.2.8.** Si  $\kappa \geq c_u(L_0)$ , entonces  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  está acotado por debajo en cada componente conexa de  $\Lambda_M$ . Si  $\kappa < c_u(L_0)$ , entonces  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  no está acotado por abajo en ninguna componente conexa de  $\Lambda_M$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\kappa \geq c_u(L_0)$ . Sea  $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$  un loop en cierta componente de  $\Lambda_M$  fija. Sea  $\tilde{\gamma} : [0, T] \rightarrow \tilde{M}$  el levantado al cubrimiento universal  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ . También levantamos la métrica a  $\tilde{M}$ , y como estamos trabajando en una componente conexa fija de  $\Lambda_M$ , entonces  $\text{dist}(\tilde{\gamma}(T), \tilde{\gamma}(0))$  está acotado uniformemente. Usando  $L_0(q, v) \leq A|v|^2 + B$ , podemos acotar la acción en función del largo de la curva, y por lo tanto existe un camino  $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  desde  $\tilde{\gamma}(T)$  hasta  $\tilde{\gamma}(0)$  con acción uniformemente acotada <sup>1</sup>

$$\tilde{\mathcal{A}}_{L_0+\kappa}(\tilde{\alpha}) := \int_0^1 (\tilde{L}_0(\tilde{\alpha}, \dot{\tilde{\alpha}}) + \kappa) dt \leq \lambda,$$

siendo  $\tilde{L}_0$  el Lagrangiano obtenido al levantar  $L_0$  a  $T\tilde{M}$ . Si  $\alpha := \pi \circ \tilde{\alpha}$ , al componer las curvas  $\gamma \# \alpha$  obtenemos un loop contractible en  $M$ . Como  $\kappa \geq c_u(L_0)$ , tenemos

$$0 \leq \mathcal{A}_{L_0+\kappa}(\gamma \# \alpha) = \mathcal{A}_{L_0+\kappa}(\gamma) + \mathcal{A}_{L_0+\kappa}(\alpha) = \mathcal{A}_{L_0+\kappa}(\gamma) + \tilde{\mathcal{A}}_{L_0+\kappa}(\tilde{\alpha}) \leq \mathcal{A}_{L_0+\kappa}(\gamma) + \lambda,$$

y concluimos  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(\gamma) \geq -\lambda$ .

Si  $\kappa < c_u(L_0)$ , entonces existe una curva contractible  $\alpha$  tal que  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(\alpha) < 0$ . Sea  $\gamma$  cualquier curva en  $\Lambda_M$ . Ahora consideramos la siguiente curva que está en la misma clase de homotopía de  $\gamma$ : primero unimos  $\gamma(0)$  con  $\alpha(0)$  por algún camino, luego recorremos  $n$  veces  $\alpha$ , volvemos a  $\gamma(0)$  por el camino inverso, y finalmente recorremos  $\gamma$ . Al ir aumentando el  $n$ , obtenemos curvas en la clase de homotopía de  $\gamma$  con acción arbitrariamente negativa.  $\square$

<sup>1</sup>Uniforme en el sentido de que no depende de  $\gamma$ , pero sí depende de la componente conexa de  $\Lambda_M$  que fijamos.

**Proposición 4.2.9.** Sea  $\kappa > c_u(L_0)$  y  $(x_n, T_n)$  una sucesión de Palais-Smale para  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  en una componente conexa de  $\Lambda_M$  dada. Si existe una constante  $T_*$  tal que  $T_n \geq T_* > 0$ , entonces  $(x_n, T_n)$  es compacta.

*Demostración.* Por el Lema 4.2.2, basta con probar que  $(T_n)$  está acotado por arriba. Notar que

$$\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x, T) = \mathcal{A}_{L_0+c_u(L)}(x, T) + (\kappa - c_u(L_0))T.$$

Entonces vale

$$T_n = \frac{1}{\kappa - c_u(L_0)} (\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x_n, T_n) - \mathcal{A}_{L_0+c_u(L)}(x_n, T_n)).$$

Notar que  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x_n, T_n)$  está acotado por ser  $(x_n, T_n)$  una sucesión de Palais-Smale, mientras que  $\mathcal{A}_{L_0+c_u(L)}(x_n, T_n)$  está acotado por abajo por el Lema 4.2.8. Concluimos que  $(T_n)$  es una sucesión acotada, y en definitiva  $(x_n, T_n)$  es compacta.  $\square$

### 4.3. Demostración del Teorema

Antes de poder hacer la prueba, precisamos unos últimos comentarios. Recordar que  $\Lambda_M$  no es una variedad completa, y el problema está cuando el periodo de los loops tiende a cero. El siguiente resultado nos dice qué sucede con la acción cuando el periodo tiende a cero.

Consideramos la descomposición  $H^1(S^1, M) = \Lambda_0 \sqcup \Lambda_1$ , siendo  $\Lambda_0$  los loops contractibles.

**Lema 4.3.1.** Sea  $(x_n, T_n)$  una sucesión en  $\Lambda_M$  tal que  $T_n \rightarrow 0$ .

- Si  $(x_n, T_n) \in \Lambda_1 \times \mathbb{R}^+$ , entonces  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x_n, T_n) \rightarrow +\infty$ . Es decir, los subniveles  $\{\mathcal{A}_{L_0+\kappa} \leq c\}$  son completos en  $\Lambda_1 \times \mathbb{R}^+$ .
- Si  $(x_n, T_n) \in \Lambda_0 \times \mathbb{R}^+$ , entonces  $\liminf_n \mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x_n, T_n) \geq 0$ .

*Demostración.* Usando la notación de (4.3), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x, T) &= T \int_{S^1} (L_0(x, \dot{x}/T) + \kappa) dt \\ &\geq T \int_{S^1} \left( C \frac{|\dot{x}|^2}{T^2} + D + \kappa \right) dt \\ &= \frac{C}{T} \int_{S^1} |\dot{x}|^2 dt - (D - \kappa)T \\ &\geq \frac{C}{T} \ell(x)^2 - (D - \kappa)T, \end{aligned}$$

siendo  $\ell(x)$  el largo del loop  $x$ . Importante notar que el largo de los loops no contractibles en  $M$  está acotado por abajo por una constante positiva. De las desigualdades anteriores se siguen directamente ambas afirmaciones del lema.  $\square$

**Observación 4.3.2.** Anotamos  $\Lambda_c$  al conjunto de las curvas cerradas y continuas en  $M$ . Consideramos un natural  $\ell \geq 2$ . Un mapa  $f : S^\ell \rightarrow M$  con clase de homotopía  $\sigma$  puede ser visto como una familia de mapas  $\Gamma : S^{\ell-1} \rightarrow \Lambda_c \times \mathbb{R}^+$ . Sea  $\mathcal{G}$  el conjunto de todos estos mapas correspondientes a la clase de homotopía  $\sigma$  y sea  $\mathcal{F}$  la familia de los conjuntos  $\Gamma(S^{\ell-1})$ ,  $\Gamma \in \mathcal{G}$ .

Si asumimos que  $M$  es simplemente conexa y  $\ell$  es el menor natural tal que el grupo de homotopía  $\pi_\ell$  es no trivial, por el Teorema 2.1.8 de [Kli78], vale

$$\inf_{\Gamma \in \mathcal{G}} \sup_{s \in S^{l-1}} \ell(x_s) =: \rho > 0,$$

donde  $\Gamma(s) = (x_s, T_s)$ .

Ahora vamos a probar el Teorema 4.2, pero para Lagrangianos cuadráticos y convexos. Una vez tengamos esto, usando  $R$ -modificaciones adecuadas, podemos generalizar el resultado para Lagrangianos Tonelli.

**Lema 4.3.3.** Sea  $L_0$  un Lagrangiano cuadrático y convexo. Supongamos  $\kappa > c_u(L_0)$ . Entonces

- (1) Si  $M$  no es simplemente conexa, entonces  $E_{L_0+\kappa}^{-1}(\kappa)$  contiene una órbita periódica que minimiza  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  en cada componente conexa de  $\Lambda_M$  no homotópicamente trivial. Es decir, si se restringe el operador a una componente conexa de  $\Lambda_M$  no homotópicamente trivial, siempre existe un mínimo de  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$ .
- (2) Si  $M$  es simplemente conexa, entonces  $E_{L_0+\kappa}^{-1}(\kappa)$  tiene una órbita periódica con acción positiva  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$ .

*Demostración.* (1) Supongamos que  $\pi_1(M) \neq 0$ . Sea  $\alpha \in [S^1, M]$  una clase de homotopía no trivial, y  $\Lambda_\alpha$  la componente conexa de  $\Lambda_M$  correspondiente a  $\alpha$ . Por el Lema 4.2.8,  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  está acotado por abajo en  $\Lambda_\alpha$ . Sea  $(x_n, T_n)$  una sucesión de Palais-Smale para  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$ . Por el Lema 4.3.1, sabemos que  $(T_n)$  está lejos de cero, por lo que la Proposición 4.2.9 nos asegura que  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  satisface la condición de Palais-Smale en  $\Lambda_\alpha$ . Finalmente, por el Corolario 4.1.6 estamos en las hipótesis del Corolario 3.2.7, y concluimos que el mínimo es alcanzado.

- (2) Al ser  $M$  cerrada, existe un mínimo  $\ell \geq 2$  tal que el grupo de homotopía  $\pi_\ell(M) \neq 0$  es no trivial. Sea  $\sigma \in [S^\ell, M]$  no trivial. Sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de la Observación 4.3.2. Se tiene que  $\mathcal{F}$  es invariante hacia adelante, y al ser  $\sigma$  no trivial, vale

$$\inf_{\Gamma \in \mathcal{G}} \sup_{s \in S^{l-1}} \ell(x_s) =: \rho > 0.$$

Recordar que existen constantes positivas tales que  $C|v| - D \leq L_0(q, v)$  para todo  $(q, v) \in TM$ . Podemos asumir  $D \gg \kappa$ . Si  $(x, T) \in \Lambda_M$  es una curva cerrada de largo  $\ell(x) \geq \rho$  y acción acotada  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x, T) \leq \alpha$ , entonces

$$\ell^2(x) = \left[ \int_0^1 |\dot{x}| dt \right]^2 \leq T \int_0^1 |\dot{x}|^2 dt.$$

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x, T) \\ &= T \int_0^1 (L_0(x/T, \dot{x}/T) + \kappa) dt \\ &\geq T \int_0^1 C \frac{|\dot{x}|^2}{T^2} dt - (D - \kappa)T \\ &\geq \frac{C}{T} \ell(x)^2 - (D - \kappa)T \\ &\geq \frac{C}{T} \rho^2 - (D - \kappa)T. \end{aligned}$$

Entonces,  $(D - \kappa)T^2 + \alpha T - C\rho^2 \geq 0$ . Como  $T > 0$ , si  $D$  es suficientemente grande, tenemos

$$T \geq \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4(D - \kappa)C\rho^2}}{2(D - \kappa)} =: d > 0$$

Se sigue que

$$\mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x, T) \geq \mathcal{A}_{L_0+c_u(L_0)}(x, T) + [\kappa - c_u(L_0)]T \geq 0 + [\kappa - c_u(L_0)]d > 0.$$

En definitiva, probamos

$$c := c(\mathcal{A}_{L_0+\kappa}, \mathcal{F}) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{G}} \sup_{s \in S^{l-1}} \mathcal{A}_{L_0+\kappa}(x_s, T_s) \geq [\kappa - c_u(L_0)]d > 0.$$

Ahora lo que queremos hacer es aplicar el Teorema 3.2.5 con  $M = \Lambda_M$ ,  $\mathcal{F}$  la familia de los conjuntos  $\Gamma(S^{l-1})$ ,  $\Gamma \in \mathcal{G}$  y  $f = \mathcal{A}_{L_0+\kappa}$ . Como  $c > 0$ , por el Lema 4.1.1, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $-\nabla \mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  es relativamente completo en  $[c - \varepsilon \leq \mathcal{A}_{L_0+\kappa} \leq c + \varepsilon]$ . Lo único que nos falta verificar es que  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  satisface  $(PS)_c$ . Sea  $(x_n, T_n)$  una sucesión  $(PS)_c$ . Por el Lema 4.2.1 tenemos que  $(T_n)$  está lejos de cero, entonces el Lema 4.2.9 nos permite deducir que  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  satisface  $(PS)_c$ . Ahora sí podemos aplicar el Teorema 3.2.5 y concluir que existe un punto crítico de  $\mathcal{A}_{L_0+\kappa}$  en  $\Lambda_M$ .  $\square$

Ahora nos resta generalizar el resultado para Lagrangianos Tonelli. Para ello, precisamos el siguiente resultado, que es el Lema 19 de [CIPP00].

**Lema 4.3.4.** Sea  $L$  un Lagrangiano Tonelli. Entonces, existe  $R > 0$  tal que

$$E_L^{-1}(\kappa) \subset \{(q, v) \in TM : |v| \leq R\} \quad \text{para todo } \kappa \leq c_u(L) + 1.$$

Además, este  $R$  cumple que toda  $R$ -modificación  $L_0$  de  $L$  satisface

$$c_u(L) = c_u(L_0).$$

*Demostración.* Sea  $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  el Hamiltoniano asociado a  $L$ . La existencia de  $R$  es una consecuencia de que  $H$  es superlineal (Lema 2.3.13) y que  $H_L(q, L_v(q, v)) = E_L(q, v)$ .

Ahora, dada una  $R$ -modificación  $L_0$ , queremos probar  $c_u(L) = c_u(L_0)$ . Usamos la caracterización del valor crítico probada en [CIPP98]

$$c_u(L) = \inf_{u \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})} \sup_{q \in \widetilde{M}} \widetilde{H}(q, d_q u). \quad (4.3.5)$$

donde  $\widetilde{M}$  es el cubrimiento universal de  $M$  y  $\widetilde{H}$  es el Hamiltoniano asociado al levantado de  $L$  al cubrimiento universal.

Sea  $0 < \varepsilon < 1$ . Notar que  $\widetilde{H}(q, p) < c_u(L) + \varepsilon$  implica  $\widetilde{H}_0(q, p) = \widetilde{H}(q, p) < c_u(L) + \varepsilon$ , siendo  $\widetilde{H}_0$  el Hamiltoniano del levantado de  $L_0$ . Por (4.3.5), existe  $u \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$  tal que  $\widetilde{H}(q, d_q u) < c_u(L) + \varepsilon$ , y por lo tanto  $\widetilde{H}_0(q, d_q u) = \widetilde{H}(q, d_q u) < c_u(L) + \varepsilon$ . Al ser  $\varepsilon$  arbitrario, acabamos de probar  $c_u(L_0) \leq c_u(L)$ . Cambiando los roles de  $\widetilde{H}_0$ ,  $\widetilde{H}$ ,  $c_u(L_0)$ ,  $c_u(L)$  se prueba la otra desigualdad.  $\square$

Ahora sí podemos probar el teorema para el caso general.

*Demostración del Teorema 4.2.* Fijamos  $\kappa > c_u(L)$ . Consideramos  $R$  más grande que los obtenidos en el Lema 4.3.4 y la Proposición 2.3.15. Sea  $L_0$  una  $R$ -modificación. Entonces,  $L$  y  $L_0$  coinciden en un entorno de  $E_L^{-1}(\kappa)$ , y además

$$c_u(L) = c_u(L_0), \quad E_L^{-1}(\kappa) = E_{L_0}^{-1}(\kappa).$$

Notar que las ecuaciones de Euler-Lagrange de  $L$  y de  $L_0$  son iguales en  $E_L^{-1}(\kappa)$ , y entonces las órbitas periódicas con energía  $\kappa$  son las mismas para ambos Lagrangianos. Finalmente, concluimos la prueba aplicando el Lema 4.3.3. □

## Capítulo 5

# Acción Abreviada

Hasta ahora hemos trabajado con tres cantidades que son importantes para la mecánica: la acción, la energía y el periodo. Sin embargo, no tenemos una fórmula que nos relacione únicamente a estas tres cantidades. Ahora bien, si  $(x, T)$  es una órbita periódica de energía  $E$ , entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_L(x, T) &= T \int_0^1 L(x, \dot{x}/T) dt \\ &= T \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x}/T) \cdot \frac{\dot{x}}{T} dt + T \int_0^1 \left[ L(x, \dot{x}/T) - \frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x}/T) \cdot \frac{\dot{x}}{T} \right] dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x}/T) \cdot \dot{x} dt - TE.\end{aligned}$$

A esta última integral la llamamos acción abreviada.

**Definición 5.1.** La *acción abreviada* de  $(x, T) \in \Lambda_M$  es

$$\mathcal{W}(x, T) := \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)/T) \cdot \dot{x}(t) dt.$$

Este funcional es el que está involucrado en el principio de Maupertuis, el cual dice que las órbitas de energía  $\kappa$  se corresponden con los puntos críticos de la acción abreviada restringida a curvas holonómicas de energía  $\kappa$ .

Nos proponemos presentar un resultado análogo al de la sección anterior, pero ahora para la acción abreviada. Es decir, vamos a probar:

**Teorema 5.2.** Para todo Lagrangiano Tonelli, existe un número real  $w_0$  tal que para todo  $w > w_0$  existe una órbita periódica con acción abreviada  $w$ .

Este resultado es una generalización del Teorema 1 de [Pat15], en donde se concluye lo mismo, pero asumiendo que el Lagrangiano es cuadrático en infinito. Cabe destacar que también hay resultados de este tipo para la acción y el periodo (ver [Pat16] y [Pat24]).

La idea de la prueba es la siguiente. Dada una aproximación cuadrática  $L_0$  apropiada, definimos el funcional

$$\mathcal{E}_w^{L_0}(x, T) := \frac{w - \mathcal{A}_{L_0}(x, T)}{T},$$

el cual depende de un parámetro real  $w$ . Probaremos que los puntos críticos de este operador se corresponden con órbitas periódicas de  $L_0$  con acción abreviada  $w$  y energía igual al valor

crítico del funcional. Entonces, lo que queremos hacer es justificar la existencia de puntos críticos, y lo haremos aplicando el Teorema 3.2.5. Luego veremos que el punto crítico encontrado también es una órbita de  $L$ .

## 5.1. Preliminares

**Definición 5.1.1.** Sean  $\alpha > 0$ ,  $R > 0$  y  $L$  un Lagrangiano Tonelli. Decimos que un Lagrangiano  $L_0$  es una  $(R, \alpha)$ -modificación de  $L$  si:

- $L_0(q, v) = L(q, v)$  para todo  $|v|_q \leq R$ .
- $L_0$  es convexo y cuadrático.
- $L_0(q, v) \geq \alpha|v|_q - c(\alpha)$  para todo  $(q, v) \in TM$ , donde  $c(\alpha)$  es como en la definición 2.1.1.

Notar que esto es una generalización de la definición de  $R$ -modificación (Definición 2.3.5), pues toda  $R$ -modificación es una  $(R, 1)$ -modificación. La existencia de esta nueva familia de modificaciones se deduce del caso particular que ya hemos probado (ver Sección 2.3), como mostramos a continuación.

**Lema 5.1.2.** Sea  $L$  un Lagrangiano Tonelli. Fijamos  $\alpha > 0$  y  $R > 0$ . Entonces, existe una  $(R, \alpha)$ -modificación de  $L$ .

*Demostración.* Sea  $c_\alpha(k) = c(\alpha k)$ , donde  $c(\alpha k)$  es como en la Definición 2.1.1. Como  $L$  es superlineal, tenemos  $L(q, v) \geq k\alpha|v|_q - c_\alpha(k)$ , que esto puede ser visto como la superlinealidad de  $L$  con respecto a la métrica  $\alpha|\cdot|$ . Por lo tanto, existe una  $(\alpha R, 1)$ -modificación  $L_0$  con respecto a la métrica  $\alpha|\cdot|$ . Entonces,  $L_0(q, v) = L(q, v)$  para todo  $|v|_q \leq R$ , y además  $L_0(q, v) \geq \alpha|v|_q - c_\alpha(1)$  para todo  $(q, v) \in TM$ . □

A partir de ahora,  $L_0$  es una  $(R, \alpha)$ -modificación. Conviene recordar a la función de energía promedio  $e : \Lambda_M \rightarrow \mathbb{R}$ , que está dada por

$$e(x, T) = \int_0^1 E_{L_0}(x(t), \dot{x}(t)/T) dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_{L_0}(y(s), \dot{y}(s)) ds,$$

donde  $y : [0, T] \rightarrow M$  está dada por  $y(t) = x(t/T)$ . De esta forma podemos reescribir a la acción abreviada como

$$\mathcal{W}(x, T) = \mathcal{A}_{L_0}(x, T) + Te(x, T).$$

**Proposición 5.1.3.** Si  $(x, T)$  es un punto crítico de  $\mathcal{E}_w^{L_0}$ , entonces  $(x, T)$  se corresponde con una órbita de  $L_0$  con acción abreviada  $w$  y energía  $\mathcal{E}_w^{L_0}(x, T)$ .

*Demostración.* Notar que

$$0 = \frac{\partial \mathcal{E}_w^{L_0}}{\partial x} = -\frac{1}{T} \frac{\partial \mathcal{A}_{L_0}}{\partial x}.$$

Usando la Observación 2.5.9, tenemos

$$0 = \frac{\partial \mathcal{E}_w^{L_0}}{\partial T} = -\frac{w}{T^2} + \frac{\mathcal{A}_{L_0}(x, T) + Te(x, T)}{T^2} = -\frac{w}{T^2} + \frac{\mathcal{W}(x, T)}{T^2} = \frac{e(x, T) - \mathcal{E}_w^{L_0}(x, T)}{T}.$$

Por lo tanto, si  $(x, T)$  es un punto crítico, entonces  $\mathcal{W}(x, T) = w$  y  $\mathcal{E}_w^{L_0}(x, T) = e(x, T)$ . Se concluye aplicando el Corolario 2.5.10. □

## 5.2. Demostración del Teorema

Al igual que en la prueba del Teorema 4.2, vamos a separar la demostración según si  $M$  es simplemente conexa o no. Primero vamos a asumir que  $M$  es simplemente conexa y luego comentamos cómo se resuelve el otro caso.

Como  $M$  es cerrada, existe un primer grupo de homotopía no trivial  $\pi_l(M) \neq 0$ . Tomamos un clase de homotopía no trivial  $\sigma \in [S^l, M]$ . Vamos a volver a utilizar la Observación 4.3.2, con la misma notación. Recordar que al ser  $\sigma$  no trivial, por el Teorema 2.1.8 de [Kli78] vale

$$\inf_{\Gamma \in \mathcal{G}} \sup_{s \in S^{l-1}} \ell(x_s) =: \rho > 0, \quad (5.2.1)$$

donde  $\Gamma(s) = (x_s, T_s)$ . Notar que podemos asumir que  $\Gamma \in \mathcal{G}$  es suave por la Observación 2.2.1.

Ahora presentamos la familia de aproximaciones de  $L$  que vamos a estudiar.

**Definición 5.2.2.** Dado un Lagrangiano Tonelli  $L$ ,  $c(1)$  su constante de superlinealidad (ver Definición 2.1.1) y  $\kappa \in \mathbb{R}$ , definimos  $\mathcal{L}(\kappa)$  al conjunto de los Lagrangianos  $L_0$  tales que

- $L_0$  es una  $(R, \alpha)$ -modificación de  $L$ .
- $L_0$  y  $L$  coinciden en el conjunto de los  $(x, T)$  tales que  $E_L(x, T) \leq \kappa$ .
- Si  $\tilde{\kappa} \leq \kappa$ , entonces  $E_L^{-1}(\tilde{\kappa}) = E_{L_0}^{-1}(\tilde{\kappa})$ .

Notar que el segundo y tercer ítem nos aseguran que las órbitas de  $L_0$  con energía menor a  $\kappa$  también son órbitas de  $L$ .

Sea  $\Gamma \in \mathcal{G}$  suave. Fijamos  $\kappa_0$  tal que

$$\begin{aligned} \kappa_0 &> c(1), \\ E_L(\Gamma(s)) &< \kappa_0, \quad \forall s \in S^{l-1}. \end{aligned}$$

Además, como estamos asumiendo que  $\Gamma$  es suave, existe un  $w_0 > 0$  tal que

$$\mathcal{A}_{L+\kappa_0}(\Gamma(s)) < w_0, \quad \forall s \in S^{l-1}.$$

En efecto, al ser  $\Gamma$  suave, existe  $K > 0$  tal que  $|\dot{x}_s(t)| \leq K$  para todo  $s \in S^{l-1}$ ,  $t \in [0, 1]$ , donde estamos anotando  $\Gamma(s) = (x_s, T_s)$ . También tenemos que existen constantes tales que  $0 < T_* \leq T_s \leq T^* < +\infty$ . Si anotamos

$$h(r) := \max\{L(q, v) : (q, v) \in TM, |v|_q \leq r\},$$

se sigue que para todo  $s$  vale

$$\mathcal{A}_{L+\kappa_0}(\Gamma(s)) = T_s \int_0^1 L\left(x_s(t), \frac{\dot{x}_s(t)}{T_s}\right) dt + T_s \kappa_0 \leq T^* h\left(\frac{K}{T_*}\right) + T^* \kappa_0.$$

**Observación 5.2.3.** Por construcción, existe  $\Gamma \in \mathcal{G}$  tal que

$$\mathcal{A}_{L_0+\kappa_0}(\Gamma(s)) < w_0, \quad \forall s \in S^{l-1}, \forall L_0 \in \mathcal{L}(\kappa_0).$$

**Observación 5.2.4.** Como  $L + c(1) \geq 0$ , tenemos

$$\mathcal{A}_{L+\kappa_0}(x, T) = \mathcal{A}_{L+c(1)}(x, T) + (\kappa_0 - c(1))T \geq (\kappa_0 - c(1))T.$$

Es decir,  $\kappa_0 > c_u(L)$ , y por lo tanto existen órbitas periódicas por arriba de este nivel de energía.

Lo que vamos a hacer es probar que estamos en las hipótesis del Teorema 3.2.5. Los siguientes dos lemas demuestran que  $c(-\mathcal{E}_w^{L_0}, \mathcal{F}) \in \mathbb{R}$  para cierta elección de  $w$  y  $L_0$ .

**Lema 5.2.5.**  $c(-\mathcal{E}_w^{L_0}, \mathcal{F}) < -\kappa_0$  para todo  $w > w_0$  y todo  $L_0 \in \mathcal{L}(\kappa_0)$ .

*Demostración.* Por definición de  $w_0$ , existe  $\Gamma \in \mathcal{G}$ ,  $\Gamma(s) = (x_s, T_s)$  tal que

$$\mathcal{A}_L(x_s, T_s) + \kappa_0 T_s < w, \quad \forall s \in S^{l-1}.$$

Es decir, vale  $-\mathcal{E}_w^{L_0}(\Gamma(s)) < -\kappa_0$  para todo  $s \in S^{l-1}$ . □

**Lema 5.2.6.** Para todo  $w > w_0$  existen  $\kappa > \kappa_0$  y  $L_0 \in \mathcal{L}(\kappa)$  tales que  $c(-\mathcal{E}_w^{L_0}, \mathcal{F}) > -\kappa$ .

*Demostración.* Sean  $\alpha > 0$  y  $\kappa > \kappa_0$  tales que

$$w < \alpha\rho, \quad 2c(\alpha) < \kappa,$$

siendo  $\rho$  el de (5.2.1). Tomamos  $L_0 \in \mathcal{L}(\kappa)$  siendo una  $(R, \alpha)$ -modificación, con el  $\alpha$  que acabamos de considerar. Sea  $\Gamma \in \mathcal{G}$  arbitrario y  $s_0 \in S^{l-1}$  tal que  $\ell(x_{s_0}) > \rho$ . Entonces,

$$\mathcal{A}_{L_0}(x_{s_0}, T_{s_0}) + \frac{\kappa}{2} T_{s_0} \geq \alpha \int_0^1 \|\dot{x}_{s_0}\| + \left(\frac{\kappa}{2} - c(\alpha)\right) T_{s_0} > \alpha\rho > w.$$

Por lo tanto, para todo  $\Gamma \in \mathcal{G}$  existe  $s_0 \in S^{l-1}$  tal que

$$-\mathcal{E}_w^{L_0}(\Gamma(s_0)) \geq -\frac{\kappa}{2} > -\kappa,$$

de lo que se concluye el lema. □

Nos resta ver que flujo de  $\nabla \mathcal{E}_w^{L_0}$  es relativamente completo y que  $-\mathcal{E}_w^{L_0}$  satisface la condición de Palais-Smale al nivel  $c(-\mathcal{E}_w^{L_0}, \mathcal{F})$ . El resto de lemas son para hacer esto, y luego ya podemos terminar la prueba del teorema.

**Lema 5.2.7.** Sea  $w > w_0$  y supongamos que  $\{(x_n, T_n)\}$  es una sucesión de Palais-Smale para  $\mathcal{E}_w^{L_0}$  a nivel  $c(-\mathcal{E}_w^{L_0}, \mathcal{F})$ , siendo  $\kappa$  y  $L_0$  los dados por el Lema 5.2.6. Entonces,  $T_n$  está acotado y acotado lejos de cero.

*Demostración.* Por contradicción supongamos que  $T_n$  converge a cero. Por la Observación 2.5.9, tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{E}_w^{L_0}}{\partial T}(x_n, T_n) = \frac{e(x_n, T_n) - \mathcal{E}_w^{L_0}(x_n, T_n)}{T_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

y por lo tanto

$$e(x_n, T_n) - \mathcal{E}_w^{L_0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Por el Lema 5.2.6, vale  $\mathcal{E}_w^{L_0}(x_n, T_n) \leq \kappa$  si  $n$  es suficientemente grande, y por lo tanto  $e(x_n, T_n) \leq 2\kappa$  si  $n$  es suficientemente grande. Sean  $A, B, C, D$  constantes positivas tales que

$$L_0(x, v) \leq A|v|_q^2 + B, \quad \forall (x, v) \in TM$$

y

$$E_{L_0}(x, v) \geq C|v|_q^2 - D, \quad \forall (x, v) \in TM.$$

Entonces, para  $n$  suficientemente grande vale

$$C \frac{\|\dot{x}_n\|_{L^2}^2}{T_n^2} - D \leq e(x_n, T_n) \leq 2\kappa.$$

Al tener que  $T_n$  converge a cero, se deduce

$$\frac{\|\dot{x}_n\|_{L^2}^2}{T_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Por otro lado, de  $-\mathcal{E}_w^{L_0}(x_n, T_n) \geq -\kappa$  se sigue que  $w \leq \mathcal{A}_{L_0}(x_n, T_n) + \kappa T_n$ , y entonces

$$0 < w \leq \mathcal{A}_{L_0}(x_n, T_n) + \kappa T_n \leq A \frac{\|\dot{x}_n\|_{L^2}^2}{T_n} + B T_n + \kappa T_n,$$

lo que es una contradicción, pues el lado derecho converge a cero.

Ahora vamos a probar que  $T_n$  está acotado. Por el Lema 5.2.5, vale

$$-\mathcal{E}_w^{L_0}(x_n, T_n) \leq -\kappa_0$$

si  $n$  es suficientemente grande. Entonces,

$$\mathcal{A}_{L_0}(x_n, T_n) + \kappa_0 T_n \leq w.$$

Por otro lado,

$$\mathcal{A}_{L_0}(x_n, T_n) + \kappa_0 T_n = \mathcal{A}_{L_0}(x_n, T_n) + c(1)T_n + (\kappa_0 - c(1))T_n.$$

Recordar que  $\mathcal{A}_{L_0}(x_n, T_n) + c(1)T_n \geq 0$ , y como  $k_0 > c(1)$ , se concluye que  $T_n$  está acotado.  $\square$

**Lema 5.2.8.** Sean  $w > w_0$  y  $\kappa > \kappa_0$ . Entonces, para todo  $L_0 \in \mathcal{L}(\kappa)$  el flujo de  $\nabla \mathcal{E}_w^{L_0}$  es relativamente completo en  $[\kappa_0 \leq \mathcal{E}_w^{L_0} \leq \kappa]$ .

*Demostración.* Supongamos por absurdo que  $s \mapsto \Gamma(s) = (x(s), T(s))$  es una semitrayectoria definida en un intervalo maximal  $[0, a)$  y contenida en  $[\kappa_0 \leq \mathcal{E}_w^{L_0} \leq \kappa]$ . Sea  $t_n \in [0, 1)$  una sucesión que converge a  $a$ . Por el mismo argumento que en el Lema 4.1.1, la sucesión  $\Gamma(t_n)$  es de Cauchy, lo que implica que  $T(t_n)$  converge a  $T_0 \in [0, +\infty)$ . Si  $T_0 > 0$ , entonces la sucesión  $\Gamma(t_n)$  converge y la trayectoria puede ser extendida. Si  $T_0 = 0$ , entonces existe una sucesión  $s_n$  que converge a  $a$  tal que  $T(s_n)$  converge a 0 y

$$\frac{dT}{ds}(s_n) \leq 0.$$

Entonces,

$$\frac{dT}{ds}(s_n) = \frac{\partial \mathcal{E}_w^{L_0}}{\partial T}(x(s_n), T(s_n)) = \frac{e(x(s_n), T(s_n)) - \mathcal{E}_w^{L_0}(x(s_n), T(s_n))}{T(s_n)} \leq 0.$$

Como  $\kappa_0 \leq \mathcal{E}_w^{L_0}(x(s_n), T(s_n)) \leq \kappa$ , se concluye que  $e(x(s_n), T(s_n))$  está acotado por arriba, lo que nos permite llegar a un absurdo de la misma forma que en el lema anterior.  $\square$

**Lema 5.2.9.** Sea  $w > w_0$ . Consideramos  $L_0$  el Lagrangiano dado por el Lema 5.2.6. Entonces,  $-\mathcal{E}_w^{L_0}$  satisface la condición de Palais-Smale al nivel  $c(-\mathcal{E}_w^{L_0}, \mathcal{F}) \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Sea  $\{(x_n, T_n)\}$  una sucesión en  $\Lambda_M$  tal que  $\mathcal{E}_w^{L_0}(x_n, T_n) \rightarrow c(-\mathcal{E}_w^{L_0}, \mathcal{F})$  y tal que  $\nabla \mathcal{E}_w^{L_0}(x_n, T_n) \rightarrow 0$ . Por el Lema 5.2.7, la sucesión  $T_n$  es acotada y acotada lejos de cero. Entonces,

$$\frac{\partial \mathcal{A}_{L_0}}{\partial x}(x_n, T_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Por otro lado, como

$$\mathcal{E}_w^{L_0}(x_n, T_n) = \frac{w - \mathcal{A}_{L_0}(x_n, T_n)}{T_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c(-\mathcal{E}_w^{L_0}, \mathcal{F}),$$

se deduce que  $\mathcal{A}_{L_0}(x_n, T_n)$  es una sucesión acotada. Se sigue que existe una subsucesión tal que  $\mathcal{A}_{L_0 + \kappa_0}(x_{n_k}, T_{n_k})$  converge, y por lo tanto podemos aplicar el Lema 4.2.2 para concluir la prueba.  $\square$

Juntando los lemas anteriores podemos concluir la prueba del Teorema 5.2.

*Demostración del Teorema 5.2.* Vamos primero con el caso en que  $M$  es simplemente conexa. Sea  $w > w_0$ . Consideramos  $\kappa$  y  $L_0 \in \mathcal{L}(\kappa)$  dados por el Lema 5.2.6. Usando el Lema 5.2.5, se sigue que

$$\kappa_0 < c(\mathcal{E}_w^{L_0}, \mathcal{F}) < \kappa, \quad (5.2.10)$$

y entonces  $c(\mathcal{E}_w^{L_0}, \mathcal{F}) \in \mathbb{R}$ . Los Lemas 5.2.8 y 5.2.9 nos permiten aplicar el Teorema 3.2.5, por lo que existe una órbita de  $L_0$  con acción abreviada  $w$  en el nivel de energía  $c(\mathcal{E}_w^{L_0}, \mathcal{F})$ . Usando 5.2.10 y que  $L_0 \in \mathcal{L}(\kappa)$ , se sigue esta es una órbita de  $L$ .

Si  $M$  no es simplemente conexa, entonces existe una clase de homotopía  $\sigma$  no trivial de  $\Lambda_M$ . Sea  $\mathcal{F}$  la familia de los conjuntos  $F = \{(x, T)\}$  tales que  $x \in \sigma$ . Como todas las curvas en  $\sigma$  tienen longitud acotada lejos de cero, tenemos un resultado análogo a la ecuación (5.2.1), y esto implica que podemos aplicar todos los argumentos del caso simplemente conexo.  $\square$

### 5.3. Estimación de la energía

Sea  $\Gamma \in \mathcal{G}$  diferenciable,  $\kappa_0 > c(1)$  y  $w_0$  como en la sección anterior, es decir,

$$\mathcal{A}_{L+\kappa_0}(\Gamma(s)) < w_0, \quad \forall s \in S^{l-1}.$$

Anotamos  $\Gamma(s) = (x_s, T_s)$ . Sean  $a$  y  $T^*$  tales que

$$\mathcal{A}_L(\Gamma(s)) < a, \quad \forall s \in S^{l-1}.$$

$$T_s < T^*, \quad \forall s \in S^{l-1}.$$

$$a + \kappa_0 T^* < w_0.$$

Para  $w > w_0$  definimos  $\kappa_0(w)$  como el número real que satisface

$$a + \kappa_0(w) T^* = w.$$

De esta forma, vale  $\kappa_0(w) > \kappa_0$  si  $w > w_0$ . Además, para todo  $s \in S^{l-1}$  se tiene

$$\mathcal{A}_{L+\kappa_0(w)}(\Gamma(s)) = \mathcal{A}_L(\Gamma(s)) + \kappa_0(w) T_s < a + \kappa_0(w) T^* = w.$$

De esta ecuación, siguiendo el Lema 5.2.5, obtenemos el siguiente resultado.

**Lema 5.3.1.**  $c(-\mathcal{E}_w^{L_0}, \mathcal{F}) < \kappa_0(w)$  para todo  $w > w_0$ .

El Teorema 5.2 puede ser mejorado de la siguiente manera.

**Teorema 5.3.2.** Para todo  $w > w_0$  existe una órbita periódica con acción abreviada  $w$  y energía mayor a  $\kappa_0(w)$ , donde  $\kappa_0(w)$  tiende a infinito si  $w$  tiende a infinito.

*Demostración.* Siguiendo la sección anterior se prueba la existencia de  $\kappa(w) > \kappa_0(w)$  tal que hay una órbita periódica con energía en  $[\kappa_0(w), \kappa(w)]$ . □

**Observación 5.3.3.** Usando el teorema anterior no podemos construir órbitas tales que  $\mathcal{A}_L(x, T)$ ,  $E(x, T)$ ,  $\mathcal{W}(x, T)$  y  $T$  tiendan a infinito a al mismo tiempo. Para esto notar que  $2\kappa_0(w)T^* > w$  si  $w$  suficientemente grande. Entonces,

$$\frac{w}{2T^*} \leq \kappa_0(w) \leq \mathcal{E}(x, T) = \frac{w - \mathcal{A}_L(x, T)}{T} \xrightarrow{w \rightarrow +\infty} +\infty,$$

siendo  $(x, T) \in \Lambda_M$  una órbita de las obtenidas en el Teorema 5.3.2. Se sigue que

$$2T^* \mathcal{A}_L(x, T) \leq w(2T^* - T).$$

Por lo tanto, si  $\mathcal{A}(x, T) \geq 0$ , entonces  $T < 2T^*$ , mientras que si  $T$  tiende a infinito, entonces la acción tiende a menos infinito. En particular, no podemos hacer que las cuatro cantidades tiendan a infinito a la vez.



# Capítulo 6

## Acción negativa

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado.

**Teorema 6.1.** Sea  $L$  un Lagrangiano Tonelli tal que  $L(q, 0) = 0$  para todo  $q \in M$  y la 1-forma  $\theta_q(v) = L_v(x, 0) \cdot v$  no es cerrada. Entonces, para todo  $a < 0$  el Lagrangiano admite una órbita periódica contractible y no trivial con acción  $a$ . Más aún, los periodos de dichas órbitas crecen a lo sumo linealmente con  $a$ .

Esto es una generalización del teorema probado en [Pat19], en donde se prueba este resultado cambiando Tonelli por cuadrático en infinito.

La idea de la prueba la siguiente. Fijamos  $a < 0$ . Dada una aproximación  $L_a$  adecuada de  $L$ , consideramos el conjunto  $X_a$  de los  $(x, T)$  tales que  $\mathcal{A}_{L_a}(x, T) = a$ . Veremos que  $X_a$  es no vacío, y que de hecho es una variedad  $C^{1,1}$ . Luego lo que haremos será estudiar el funcional  $\mathcal{T}_a : X_a \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\mathcal{T}_a(x, T) := T.$$

Los puntos críticos de este funcional se corresponden con órbitas periódicas de  $L_a$ , las cuales debemos asegurarnos que también son soluciones para el Lagrangiano original  $L$ . La prueba del teorema es consecuencia de la existencia de estos puntos críticos, y las órbitas periódicas obtenidas son no triviales ya que si  $(x, T) \in X_a$ , entonces  $\|\dot{x}\|_{L^2}^2$  está acotado lejos de cero.

Conviene notar que al probar la existencia de órbitas periódicas con energía o acción abreviada prefijada, en ambos casos trabajamos con energías altas. Es decir, siempre estábamos por encima del valor crítico de Mañé. Sin embargo, las soluciones obtenidas en el Teorema 6.1 pueden tener energía baja, como se muestra en [Pat19].

Por otro lado, en [Pat19], al asumir que el Lagrangiano es cuadrático en infinito, se puede obtener cotas precisas para el periodo y la energía de las soluciones, cosa que para el caso Tonelli no tenemos. Como consecuencia de no tener controlado el nivel de energía en que estamos trabajando, la dificultad de encontrar una buena  $(R, \alpha)$ -modificación aumenta.

Los Lagrangianos que están en las hipótesis del Teorema 6.1 se llaman de *tipo magnético*.

**Definición 6.2.** Decimos que un Lagrangiano Tonelli es de tipo magnético si  $L(q, 0) = 0$  para todo  $q \in M$  y la uno-forma  $\theta$  definida por  $\theta_q(v) = L_v(q, 0) \cdot v$  no es cerrada.

### 6.1. Modificaciones de tipo magnético

En esta sección veremos qué tipo de modificaciones de  $L$  vamos a utilizar. Primero consideramos dos observaciones sobre los Lagrangianos de tipo magnético.

**Observación 6.1.1.** Si  $L$  es tipo magnético, entonces  $E_L(q, 0) = 0$  para todo  $q \in M$ , y  $E_L(q, v) > 0$  si  $|v| > 0$ .

**Observación 6.1.2.** Supongamos que  $L$  es de tipo magnético. Conviene notar que la 1-forma  $\theta$  es la misma para cualquier  $(R, \alpha)$ -modificación de  $L$ . Es decir, si  $L_0$  es una  $(R, \alpha)$ -modificación de  $L$ , entonces  $(L_0)_v(q, 0) = L_v(q, 0)$  para todo  $q \in M$ . Se sigue que todas estas modificaciones de  $L$  son de tipo magnético.

Las siguientes definiciones son tomadas de [Pat24]. Para  $r \geq 0$  definimos

$$h(r) := \sup_{|v|_q \leq r} L(q, v), \quad g(r) := \sup_{|v|_q \leq r} E_L(q, v).$$

Notar que tanto  $h$  como  $g$  divergen a infinito. De la definición de  $h$  tenemos

$$\mathcal{A}_L(x, T) \leq Th(r), \quad \text{si} \quad \frac{|\dot{x}(t)|}{T} \leq r \quad \forall t \in [0, 1].$$

Recordar que decimos que  $(x, T) \in \Lambda_M$  se corresponde con una solución de  $L$  si  $y : [0, T] \rightarrow M$  dada por  $y(t) = x(t/T)$  es una solución de la ecuación de Euler-Lagrange de  $L$ .

El siguiente resultado nos da una condición para asegurar que si  $(x, T)$  se corresponde con una solución de una modificación  $L_0$  de  $L$ , entonces  $(x, T)$  también se corresponde con una solución de  $L$ .

**Lema 6.1.3.** Sea  $L$  un Lagrangiano Tonelli. Para todo número real  $A$  y  $\alpha > 0$ , existe  $r_\alpha > 0$  tal que si  $L_0$  es una  $(r_\alpha(A), \alpha)$ -modificación de  $L$  y  $(x, T)$  se corresponde con una solución de  $L_0$  con  $\mathcal{A}_{L_0}(x, T) \leq AT$ , entonces  $|\dot{x}(t)/T| < r_\alpha(A)$  para todo  $t \in [0, 1]$ . En particular,  $(x, T)$  se corresponde con una solución de  $L$ .

*Demostración.* Definimos  $f : [\text{mín } E, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(t) := \sup\{|v| : E_L(q, v) \leq t, q \in M\}.$$

Sea  $s > 0$  tal que

$$s > \frac{c(\alpha) + A}{\alpha},$$

y tomamos  $r_\alpha(A) > 0$  tal que

$$r_\alpha(A) > f(g(s)) \quad \text{y} \quad r_\alpha(A) > s. \quad (6.1.4)$$

Sea  $L_0$  una  $(r_\alpha(A), \alpha)$ -modificación de  $L$ . Se sigue que

$$\int_0^1 \alpha |\dot{x}(t)| dt - c(\alpha)T \leq \mathcal{A}_{L_0}(x, T) \leq TA.$$

Entonces, existe un  $t_0 \in [0, 1]$  tal que

$$\frac{|\dot{x}(t_0)|}{T} \leq \frac{c(\alpha) + A}{\alpha} < s. \quad (6.1.5)$$

Juntando (6.1.4) y (6.1.5), tenemos

$$E_{L_0}(x(t_0), \dot{x}(t_0)/T) = E_L(x(t_0), \dot{x}(t_0)/T) \leq g(s). \quad (6.1.6)$$

Primero supongamos  $t_0 < 1$ . Recordar que  $y(t) = x(t/T)$ . Sea  $I$  el conjunto de los  $t \in [t_0, 1]$  tal que  $y_{[Tt_0, Tt]}$  es una solución de la ecuación de Euler-Lagrange de  $L$ . Notar que  $I$  es cerrado,

y consideramos  $T^*$  el máximo de  $I$ . Por (6.1.6), la definición de  $I$  y la conservación de la energía, tenemos

$$E_L(x(t), \dot{x}(t)/T) \leq g(s), \quad \forall t \in [t_0, T^*].$$

Entonces,

$$\frac{|\dot{x}(t)|}{T} \leq f(g(s)), \quad \forall t \in [t_0, T^*]. \quad (6.1.7)$$

Afirmamos que  $T^* = 1$ . Si  $T^* \neq 1$ , como  $f(g(s)) < r_\alpha(A)$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que

$$\frac{|\dot{x}(t)|}{T} < r_\alpha(A), \quad \forall t \in [t_0, T^* + \delta],$$

y por lo tanto  $y_{[Tt_0, T(T^* + \delta)]}$  es solución de la ecuación, lo que es absurdo. Un argumento similar prueba que  $y_{[0, Tt_0]}$  es solución de la ecuación. Por lo tanto,  $y$  es solución y satisface

$$\frac{|\dot{x}(t)|}{T} < r_\alpha(A). \quad \forall t \in [t_0, 1].$$

Un argumento similar se utiliza para el caso  $t_0 = 1$ , completando la prueba.  $\square$

A partir de ahora es que empezamos a trabajar con loops contractibles. Sea  $\Lambda_0 \subset H^1(M)$  el subespacio de los loops contractibles. Recordar que estamos asumiendo que  $\theta$  no es cerrada. Definimos

$$\Theta(x) := \int_x \theta, \quad x \in \Lambda_0.$$

$$\sigma = \sigma(L) := \sup_{\substack{\|\dot{x}\|_{L^2}^2 \neq 0 \\ x \in \Lambda_0}} \frac{|\Theta(x)|}{\|\dot{x}\|_{L^2}^2}.$$

El siguiente resultado es el Lema 5.1 de [Con06].

**Lema 6.1.8.** Sean  $\theta_q$  una 1-forma,  $q_0 \in M$  y  $V \subset M$  un entorno de  $q_0$ . Entonces, existen una bola  $U$  centrada en  $x_0$  y  $b > 0$  tales que si  $\gamma$  es una curva cerrada en  $U$ , entonces

$$\left| \int_\gamma \theta_q \right| \leq b \cdot \ell(\gamma)^2.$$

*Demostración.* Sea  $V$  un entorno de  $q_0$ . Achicando  $V$  y usando cartas locales, podemos asumir que  $V$  es una bola cerrada en  $\mathbb{R}^n$  con la métrica euclídea. También podemos asumir  $0 \in V$ . Sea  $b$  tal que  $|d_q \theta_q(u, v)| \leq b|u||v|$  para todo  $u, v \in \mathbb{R}^n$ ,  $q \in V$ .

Sea  $\gamma : [0, T] \rightarrow V$  una curva. Sea  $F : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow V$  dada por  $F(s, t) := s\gamma(t)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma \theta_q \right| &= \left| \int_F d_q \theta \right| \\ &\leq \int_0^1 \int_0^T b \left| \frac{\partial F}{\partial s} \right| \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| dt ds \\ &= b \int_0^1 \int_0^T |\gamma(t)| \cdot s |\dot{\gamma}(t)| dt ds \\ &\leq b \int_0^1 \int_0^T \ell(\gamma) \cdot s |\dot{\gamma}(t)| dt ds \\ &\leq b \int_0^1 \ell(\gamma) \cdot s \ell(\gamma) ds \\ &\leq b \cdot \ell(\gamma)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, basta con tomar  $U$  como una bola abierta para la métrica Riemanniana centrada en  $q_0$  e incluida en  $V$ . □

**Lema 6.1.9.**  $0 < \sigma(L) < +\infty$ .

*Demostración.* Primero probamos que  $\sigma(L) < +\infty$ . Notar que  $\ell(x) \leq \|\dot{x}\|$ . Sea  $\varepsilon_0 > 0$  tal que todo conjunto de diámetro menor a  $\varepsilon_0$  está incluido en la imagen de una bola euclídea por alguna carta local. Por el Lema 6.1.8, existe  $\sigma_0 > 0$  tal que  $|\Theta(x)| \leq \sigma_0 \ell(x)^2$  para todo  $x \in \Lambda$  tal que  $\text{diam}(x([0, 1])) < \varepsilon_0$ , y entonces  $|\Theta(x)| \leq \sigma_0 \|\dot{x}\|_{L^2}^2$  si  $\|\dot{x}\|_{L^2}^2 < \varepsilon_0$ .

Consideramos el Lagrangiano  $L_0(q, v) := \frac{|v|_q^2}{2} + \theta_q(v)$  y sea  $c_u(L)$  el valor crítico de  $L_0$ . Por definición, vale  $\mathcal{A}_{L_0+c_u(L)}(x, T) \geq 0$  para todo  $x \in \Lambda_0$  y  $T > 0$ . Ahora fijamos  $x$  tal que  $\|\dot{x}\|_{L^2} \neq 0$  y consideramos la función

$$f(T) := \frac{\|\dot{x}\|_{L^2}^2}{2T} + \Theta(x) + c_u(L)T.$$

Notar que  $f(T) \geq 0$  y el mínimo se alcanza en  $T(x) := \|\dot{x}\|_{L^2} / \sqrt{2c_u(L)}$ . Entonces,

$$f(T(x)) = \Theta(x) + \sqrt{2c_u(L)}\|\dot{x}\|_{L^2} \geq 0, \quad \forall x \in \Lambda_0.$$

Observar que  $|\Theta(x)|$  vale  $-\Theta(x)$  o  $-\Theta(\bar{x})$ , donde  $\bar{x}(t) = x(1-t)$ . Luego, si  $\|\dot{x}\|_{L^2} \neq 0$ , tenemos

$$-\frac{\Theta(x)}{\|\dot{x}\|_{L^2}} \leq \sqrt{2c_u(L)}, \quad -\frac{\Theta(\dot{x})}{\|\dot{x}\|_{L^2}} = -\frac{\Theta(\dot{\bar{x}})}{\|\dot{\bar{x}}\|_{L^2}} \leq \sqrt{2c_u(L)},$$

y entonces para toda  $x$  no constante vale

$$\frac{|\Theta(x)|}{\|\dot{x}\|_{L^2}} \leq \sqrt{2c_u(L)}.$$

Si  $\|\dot{x}\|_{L^2} > \varepsilon_0$ , se tiene  $\|\dot{x}\|_{L^2}^2 > \varepsilon_0 \|\dot{x}\|_{L^2}$ , y por lo tanto

$$\frac{|\Theta(x)|}{\|\dot{x}\|_{L^2}^2} \leq \frac{\sqrt{2c_u(L)}}{\varepsilon_0}.$$

De esta forma,  $\sigma < +\infty$ .

Afirmamos que existe  $x \in \Lambda_0$  tal que  $\Theta(x) \neq 0$ . Supongamos por absurdo que  $\Theta(x) = 0$  para todo  $x \in \Lambda_0$ . Sea  $U \subset M$  un conjunto abierto y contractible. Entonces,  $\Theta(x) = 0$  para todo  $x \in \Lambda_0$  contenida en  $U$ . Se sigue que  $\theta|_U$  es exacta, y entonces  $d\theta|_U = 0$ . Al ser  $U$  arbitrario, entonces  $\theta$  se cerrada, lo que es absurdo. □

Ahora veamos que el conjunto de los  $(x, T) \in \Lambda_0 \times \mathbb{R}^+$  tales que  $\mathcal{A}_{L_0}(x, T) = a$  es no vacío, siendo  $L_0$  alguna modificación acorde de  $L$ . Más aún, damos una cota superior para  $T$ .

**Lema 6.1.10.** Si  $L$  es de tipo magnético, entonces existen  $R > 0$ ,  $a_0 < 0$  y  $T_0$  tales que, para todo  $a < 0$  y toda  $(R, 1)$ -modificación  $L_0$ , existe  $(x, T) \in \Lambda_0 \times \mathbb{R}^+$  con  $\mathcal{A}_{L_0}(x, T) = a$  y  $T < \frac{T_0}{-a_0}(-a - a_0)$ .

*Demostración.* Primero veamos que existe  $x_0 \in \Lambda_0$  tal que

$$\Theta(x_0) < -\frac{\sigma}{2}\|\dot{x}_0\|_{L^2}^2. \tag{6.1.11}$$

Para esto, sea  $x_0 \in \Lambda_0$  tal que

$$\frac{\sigma}{2} < \frac{|\Theta(x_0)|}{\|\dot{x}\|_{L^2}^2}.$$

Si  $\Theta(x_0) < 0$ , listo. Si  $\Theta(x_0) > 0$ , basta con considerar  $x_0$  recorrida al revés.

Podemos asumir que la curva  $x_0$  que cumple (6.1.11) es una curva  $C^1$ . Sea  $R$  tal que  $|\dot{x}_0(t)| \leq R/2$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Definimos  $M := \sup_{|v| \leq R/2} \|L_{vv}(q, v)\|$ , y notar que este valor es el mismo para toda  $(R, 1)$ -modificación de  $L$ .

Fijamos  $(q, v)$  tal que  $|v| \leq R/2$ , y una  $(R, 1)$ -modificación  $L_0$ . Luego consideramos

$$f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) := L_0(q, tv).$$

Entonces,  $f(1) = f'(0) + \int_0^1 ds \int_0^s f''(u) du$ . Notar que  $f''(u) \leq M|v|^2$  para  $0 \leq u \leq 1$ . Por lo tanto,

$$L_0(q, v) \leq \theta_q(v) + \frac{M}{2}|v|^2, \quad \text{si } |v| \leq \frac{R}{2}.$$

Luego, si  $T \geq 1$ , vale

$$\mathcal{A}_{L_0}(x_0, T) \leq \Theta(x_0) + \frac{M}{2T} \|\dot{x}_0\|_{L^2}^2 < \left( \frac{M}{2T} - \frac{\sigma}{2} \right) \|\dot{x}_0\|_{L^2}^2.$$

Entonces, si tomamos  $T_0 \geq 1$  y  $T_0 > M/\sigma$ , obtenemos  $a_0 := \mathcal{A}_{L_0}(x_0, T_0) < 0$ .

Para todo  $n$  entero positivo, sea  $w^n : [0, n] \rightarrow M$  el mapa dado por  $w^n(t) = x_0(t - i)$  para  $t \in [i, i + 1]$ , donde  $i$  es cualquier entero tal que  $0 \leq i < n$ . Sea  $x_0^n \in \Lambda_0$  dado por  $x_0^n(t) = w^n(tn)$ . Se sigue que

$$\mathcal{A}_{L_0}(x_0^n, nT_0) = na_0, \tag{6.1.12}$$

probando que  $\mathcal{A}_{L_0}$  toma valor arbitrariamente negativos. Como  $\mathcal{A}_{L_0}$  toma el valor 0, usando la continuidad de  $\mathcal{A}_{L_0}$  y que  $\Lambda_0$  es conexo, se sigue que  $\mathcal{A}_{L_0}$  toma cualquier valor negativo.

Para la segunda afirmación, fijamos  $a < a_0$ . Sea  $n$  entero positivo tal que

$$(n + 1)a_0 \leq a < na_0.$$

Sea  $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \Lambda_0 \times \mathbb{R}^+$  un mapa continuo dado por

$$\Gamma(s) = (z_s, \beta_s)$$

tal que  $\beta_s = (n + s)T_0$ ,  $z_0 = x_0^n$  y  $z_1 = x_0^{n+1}$ . Por continuidad de  $\mathcal{A}_{L_0}$  y (6.1.12), existe  $s_1 \in [0, 1]$  tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{L_0}(\Gamma(s_1)) &= a, \\ \beta_{s_1} \leq (n + 1)T_0 &= \frac{T_0}{-a_0}(-na_0 - a_0) < \frac{T_0}{-a_0}(-a - a_0). \end{aligned}$$

Ahora tomamos  $a$  tal que  $a_0 < a < 0$ . Notar que podemos repetir el mismo argumento que para el caso anterior, pero con  $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \Lambda_0 \times \mathbb{R}^+$  tal que  $\beta_s = T_0$ ,  $z_0 = x_0$  y  $z_1$  una curva constante. □

Teniendo esto, estamos listos para definir la familia de modificaciones que vamos a usar para probar el Teorema 6.1. Sea

$$\gamma(a) := \frac{T_0}{-a_0}(-a - a_0).$$

Sean  $A := a/\gamma(a)$ ,  $r_1(A)$  como en el Lema 6.1.3, y  $R$  como en el Lema 6.1.10. Consideramos  $\eta_a$  tal que  $\eta_a > r_1(A)$  y  $\eta_a > R$ .

**Observación 6.1.13.** Sea  $L_a$  una  $(\eta_a, 1)$ -modificación. Si  $(x, T)$  se corresponde con una solución periódica de  $L_a$  y satisface  $\mathcal{A}_{L_a}(x, T) = a$ , con  $T \geq \gamma(a)$ , entonces  $\mathcal{A}_{L_a}(x, T) = a\gamma(a) \leq AT$ . En particular, por el Lema 6.1.3,  $(x, T)$  se corresponde con una órbita periódica de  $L$  y  $\mathcal{A}_L(x, T) = a$ .

Ahora veamos algunas cotas para  $L_a$ . Esto es un caso particular del Lema 3.1 de [Con06].

**Lema 6.1.14.** Existen constantes  $\tilde{A}, \tilde{C}$  tales que

$$\frac{\tilde{C}}{2}|v|_q^2 + \theta_q(v) \leq L_a(q, v) \leq \frac{\tilde{A}}{2}|v|_q^2 + \theta_q(v), \quad (6.1.15)$$

$$\frac{\tilde{C}}{2}|v|_q^2 \leq E_{L_a}(q, v) \leq \frac{\tilde{A}}{2}|v|_q^2. \quad (6.1.16)$$

*Demostración.* Consideramos  $\tilde{L}(q, v) := L_a(q, v) - \theta_q(v)$ . Fijado  $(q, v) \in TM$ , definimos

$$f_L(t) := \tilde{L}(q, tv).$$

Se sigue que  $f_L(0) = 0$ ,  $f'_L(0) = 0$  y  $f''_L(t) = v^* \cdot \frac{\partial^2 L_a}{\partial v^2}(q, tv) \cdot v$ . Por lo tanto, existen constantes positivas  $\tilde{A}, \tilde{C}$  independientes de  $(q, v)$  tales que

$$\tilde{C}|v|_q^2 \leq f''_L(t) \leq \tilde{A}|v|_q^2. \quad (6.1.17)$$

La cota superior se debe a la condición (a) de la Definición 2.3.1, mientras que la cota superior es por (b). Entonces,

$$\tilde{L}(q, v) = \int_0^1 \int_0^t f''_L(s) ds dt \geq \int_0^1 \int_0^t \tilde{C}|v|_q^2 ds dt \geq \frac{\tilde{C}}{2}|v|_q^2.$$

Usando la otra cota de  $f''_L(t)$ , se prueba  $\tilde{L}(q, v) \leq \frac{\tilde{A}}{2}|v|_q^2$ .

Ahora veamos las cotas de la energía. Fijado  $(q, v) \in TM$ , consideramos

$$f_E(t) := E(q, tv) = (L_a)_v(q, tv) \cdot tv - L_a(q, tv).$$

Entonces,  $f_E(0) = 0$  y  $f'_E(t) = tv \cdot \frac{\partial^2 L_a}{\partial v^2}(q, tv) \cdot v$ . Por (6.1.17), vale

$$t\tilde{C}|v|_q^2 \leq f'_E(t) \leq t\tilde{A}|v|_q^2.$$

Entonces,

$$E_{L_a}(q, v) = f_E(1) = f_E(0) + \int_0^1 f'_E(t) dt \geq \int_0^1 t\tilde{C}|v|_q^2 dt \geq \frac{\tilde{C}}{2}|v|_q^2.$$

Usando la otra cota de  $f'_E(t)$ , se obtiene  $E_{L_a}(q, v) \leq \frac{\tilde{A}}{2}|v|_q^2$ . □

**Lema 6.1.18.** Existen constantes positivas  $A, B, C, D$  tales que

$$\frac{C}{2T}\|\dot{x}\|_{L^2}^2 + \Theta(x) \leq \mathcal{A}_{L_a}(x, T) \leq \frac{A}{2T}\|\dot{x}\|_{L^2}^2 + \Theta(x), \quad (6.1.19)$$

$$\frac{C}{2T^2}\|\dot{x}\|_{L^2}^2 \leq e(x, T) \leq \frac{A}{2T^2}\|\dot{x}\|_{L^2}^2, \quad (6.1.20)$$

$$C\frac{\|\dot{x}\|_{L^2}^2}{2T} - DT \leq \mathcal{A}_{L_a}(x, T) \leq A\frac{\|\dot{x}\|_{L^2}^2}{2T} + BT. \quad (6.1.21)$$

*Demostración.* Sean  $\tilde{A}, \tilde{C}$  las constantes del Lema 6.1.14. Por otro lado, como  $L_a$  es convexo y cuadrático, existen constantes positivas  $\tilde{A}_1, \tilde{C}_1, B, D$  tales que

$$\frac{\tilde{C}_1}{2}|v|_q^2 - D \leq L_a(q, v) \leq \frac{\tilde{A}_1}{2}|v|_q^2 + B. \quad (6.1.22)$$

Luego, tomamos  $A$  y  $C$  tales que  $0 < A < \min\{\tilde{A}, \tilde{A}_1\}$  y  $0 < \max\{\tilde{C}, \tilde{C}_1\} < C$ . El resultado de sigue de esta elección usando (6.1.15), (6.1.16) y (6.1.22).  $\square$

## 6.2. Funcional de tiempo

En este capítulo,  $L_a$  va a ser una  $(\eta_a, 1)$ -modificación, siendo  $\eta_a$  como en la sección anterior. Ahora vamos a presentar el funcional que vamos a estudiar, que va a ser el *funcional de tiempo*.

**Definición 6.2.1.** Sea  $X_a$  el conjunto de los  $(x, T) \in \Lambda_0 \times \mathbb{R}^+$  tales que  $\mathcal{A}_{L_a}(x, T) = a$ . Definimos el *funcional de tiempo*  $\mathcal{T}_a : X_a \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\mathcal{T}_a(x, T) := T.$$

Veremos que los puntos críticos de este funcional se corresponden con soluciones de  $L_a$ , y por definición de  $X_a$ , su acción es  $a$ . Para probar el Teorema 6.1, lo que vamos a hacer es aplicar el Corolario 3.2.7 a  $\mathcal{T}_a$ , justificando así la existencia de puntos críticos.

Notar que  $\mathcal{T}_a$  es la restricción a  $X_a$  de la proyección canónica  $\Pi : H^1(S^1, M) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , donde  $\Lambda_M = H^1(S^1, M) \times \mathbb{R}^+$ . Entonces,  $\nabla \mathcal{T}_a(x, T)$  es la proyección ortogonal de  $\nabla \Pi = (0, 1)$  sobre  $T_{(x, T)}X_a$ . Podemos calcular la proyección escribiendo

$$\nabla \mathcal{T}_a = (v_x, v_T), \quad (0, 1) = \alpha \frac{\nabla \mathcal{A}_{L_a}}{\|\nabla \mathcal{A}_{L_a}\|} + (v_x, v_T), \quad (6.2.2)$$

donde estamos usando que  $\nabla \mathcal{A}_{L_a}$  es un vector normal a  $T_{(x, T)}X_a$ .

**Proposición 6.2.3.** Usando la notación de (6.2.2), vale

$$\alpha = \frac{1}{\|\nabla \mathcal{A}_{L_a}\|} \frac{\partial \mathcal{A}_{L_a}}{\partial T}, \quad v_x = -\frac{1}{\|\nabla \mathcal{A}_{L_a}\|^2} \frac{\partial \mathcal{A}_{L_a}}{\partial T} \frac{\partial \mathcal{A}_{L_a}}{\partial x}, \quad v_T = 1 - \alpha^2.$$

En particular,  $\nabla \mathcal{T}_a$  es localmente Lipschitz.

*Demostración.* Primero obtenemos la expresión de  $\alpha$ . Como  $\nabla \mathcal{T}_a$  es ortogonal a  $\nabla \mathcal{A}_{L_a} = (\partial_x \mathcal{A}_{L_a}, \partial_T \mathcal{A}_{L_a})$ , se sigue que

$$(0, 1) \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{A}_{L_a}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{A}_{L_a}}{\partial T} \right) = \left( \alpha \frac{\nabla \mathcal{A}_{L_a}}{\|\nabla \mathcal{A}_{L_a}\|} + \nabla \mathcal{T}_a \right) \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{A}_{L_a}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{A}_{L_a}}{\partial T} \right).$$

Entonces,

$$\frac{\partial \mathcal{A}_{L_a}}{\partial T} = \alpha \frac{\|\nabla \mathcal{A}_{L_a}\|^2}{\|\nabla \mathcal{A}_{L_a}\|} = \alpha \|\nabla \mathcal{A}_{L_a}\|,$$

de donde se despeja  $\alpha$ .

Luego, sustituyendo el valor de  $\alpha$  en (6.2.2), llegamos la ecuación

$$(0, 1) = \frac{\partial \mathcal{A}_{L_a}}{\partial T} \frac{1}{\|\nabla \mathcal{A}_{L_a}\|^2} \left( \frac{\partial \mathcal{A}_{L_a}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{A}_{L_a}}{\partial T} \right) + (v_x, v_t).$$

Al mirar la primer coordenada, obtenemos la expresión de  $v_x$ , mientras que con la segunda coordenada se deduce la de  $v_T$ . □

Teniendo esto, es directo probar que los puntos críticos del funcional se corresponden con soluciones de  $L_a$ .

**Proposición 6.2.4.** Si  $(x, T) \in X_a$  es un punto crítico de  $\mathcal{T}_a$ , entonces  $(x, T)$  se corresponde con una órbita de  $L_a$ .

*Demostración.* Sea  $(x, T)$  tal que  $\nabla \mathcal{T}_a(x, T) = 0$ . Entonces,  $v_x(x, T) = 0 = v_T(x, T)$ . Usando la Proposición 6.2.3, se deduce  $\alpha \neq 0$ . Luego

$$\frac{\partial \mathcal{A}_{L_a}}{\partial x}(x, T) = 0.$$

Concluimos usando el Corolario 2.5.10. □

Los dos siguientes lemas son para probar que  $a$  es un valor regular de  $\mathcal{A}_{L_a}$ , y para asegurarnos que los elementos de  $X_a$  no son curvas constantes.

**Lema 6.2.5.**  $X_a$  no contiene puntos críticos de  $\mathcal{A}_{L_a}$  para ningún  $a < 0$ .

*Demostración.* Supongamos que es falso. Sea  $(x, T) \in X_a$  un punto crítico. Por la Observación 2.5.9, tenemos  $e(x, T) = 0$ , y por (6.1.20), se sigue que  $\|\dot{x}\|_{L^2} = 0$ . Además, por (6.1.19), vale

$$0 = \frac{C}{2T} \|\dot{x}\|_{L^2}^2 + \Theta(x) \leq \mathcal{A}_{L_a}(x, T) = a < 0,$$

lo que es absurdo. □

**Lema 6.2.6.** Sean  $(x, T) \in X_a$  y  $a < 0$ . Entonces,

$$T \geq \frac{C}{2\sigma}, \quad \|\dot{x}\|_{L^2}^2 > \frac{-a}{\sigma}.$$

*Demostración.* Por (6.1.19) y el Lema 6.1.9, tenemos

$$\left(\frac{C}{2T} - \sigma\right) \|\dot{x}\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{2T} \|\dot{x}\|_{L^2}^2 + \Theta(x) \leq \mathcal{A}_{L_a}(x, T) = a < 0,$$

lo que prueba la primera parte. Para la otra afirmación, notar que

$$-a \leq \left(\sigma - \frac{C}{2T}\right) \|\dot{x}\|_{L^2}^2 < \sigma \|\dot{x}\|_{L^2}^2.$$

□

### 6.3. Demostración del teorema

Recordar que queremos aplicar el Corolario 3.2.7 al operador  $\mathcal{T}_a$ . Por ello, definimos  $\mathcal{F}_a$  como la familia de conjuntos de la forma  $F = \{(x, T)\}$  tal que  $\mathcal{A}_{L_a}(x, T) = a$ . Ahora veremos que estamos en las hipótesis del Corolario 3.2.7, lo que nos permite probar el Teorema 6.1.

**Lema 6.3.1.**  $\mathcal{F}_a$  es no vacío para todo  $a < 0$ , y además  $0 < c(\mathcal{T}_a, \mathcal{F}_a) \leq \gamma(a)$ .

*Demostración.*  $\mathcal{F}_a$  es no vacío para  $a < 0$  por el Lema 6.1.10. Del Lema 6.2.6 se sigue que  $0 < \frac{A}{2\sigma} \leq c(\mathcal{T}_a, \mathcal{F}_a)$ . La otra desigualdad se sigue del Lema 6.1.10.  $\square$

Los siguientes Lemas aparecen en [Pat16]. Solo cambiamos unos detalles para que la prueba sea autocontenida.

**Lema 6.3.2.** El flujo de  $-\nabla\mathcal{T}_a$  es relativamente completo en  $0 < c_1 \leq \mathcal{T}_a \leq c_2$ .

*Demostración.* Por absurdo, sea  $s \rightarrow \Gamma(s) = (x(s), T(s))$  una semitrayectoria definida en un intervalo maximal  $[0, \bar{s})$  tal que está contenida en  $[c_1 \leq \mathcal{T}_a \leq c_2]$ . Sea  $t_n \in [0, \bar{s})$  una sucesión que converge a  $\bar{s}$ . Por el mismo argumento que en el Lema 4.1.1, la sucesión  $\Gamma(t_n)$  es de Cauchy, lo que implica que  $T(t_n)$  converge a algún  $T_0 \in [0, +\infty)$ . Como  $T(t_n) \geq c_1 > 0$ , sabemos que  $T_0 > 0$ , y por lo tanto la sucesión  $\Gamma(t_n)$  converge en  $X_a$ . Concluimos que la semitrayectoria puede ser extendida.  $\square$

**Lema 6.3.3.**  $\mathcal{T}_a$  satisface la condición de Palais-Smale al nivel  $c(\mathcal{T}_a, \mathcal{F}_a)$ .

*Demostración.* Sea  $(x_n, T_n)$  una sucesión en  $X_a$  tal que  $\mathcal{T}_a(x_n, T_n) \rightarrow c(\mathcal{T}_a, \mathcal{F}_a)$  y tal que  $\|\nabla\mathcal{T}_a(x_n, T_n)\| \rightarrow 0$ . Por el Lema 6.3.1,  $T_n$  está acotado y acotado lejos de cero.

Veamos que  $\|\nabla\mathcal{A}_{L_a}\|$  está acotado lejos de cero. Supongamos que no, y por lo tanto existe una subsucesión  $\{(x_{n_k}, T_{n_k})\}$  tal que

$$\mathcal{A}_{L_a}(x_{n_k}, T_{n_k}) = a, \quad \|\nabla\mathcal{A}_{L_a}(x_{n_k}, T_{n_k})\| \rightarrow 0.$$

Como además  $T_{n_k}$  está acotado y acotado lejos de cero, podemos aplicar el Lema 4.2.2, y así obtenemos que  $\{(x_n, T_n)\}_n$  tiene una subsucesión que converge a un punto crítico de  $\mathcal{A}_{L_a}$ . Esto es absurdo ya que  $a$  es un valor regular de  $\mathcal{A}_{L_a}$ .

Por otro lado, como  $\mathcal{A}_{L_a}(x_n, T_n) = a$  y  $T_n$  está acotado y acotado lejos de cero, de (6.1.21) se sigue que  $\|\dot{x}_n\|_{L^2}$  está acotado. Entonces, por (6.1.16), se tiene que  $e(x_n, T_n) = -\frac{\partial\mathcal{A}_{L_a}}{\partial T}(x_n, T_n)$  está acotado.

Sean  $v_x, v_T, \alpha$  como en el Lema 6.2.3. Entonces  $v_t(x_n, T_n) \rightarrow 0$ , y por lo tanto  $\alpha(x_n, T_n)$  está acotado y acotado lejos de cero. Luego  $\|\nabla\mathcal{A}_{L_a}\|$  está acotado y  $\frac{\partial\mathcal{A}_{L_a}}{\partial T}(x_n, T_n)$  está acotado lejos de cero.

Ahora bien, al tener  $\|v_x(x_n, T_n)\| \rightarrow 0$ , se deduce

$$\left\| \frac{\partial\mathcal{A}_{L_a}}{\partial x}(x_n, T_n) \right\| \rightarrow 0.$$

Concluimos aplicando el Corolario 4.2.7.  $\square$

Ahora estamos listos para concluir la prueba del Teorema 6.1.

*Demostración del Teorema 6.1.* Fijamos  $a < 0$ . Los Lemas 6.3.1, 6.3.2 y 6.3.3 nos permiten aplicar el Corolario 3.2.7 a  $\mathcal{T}_a$ . Por la Proposición 6.2.4, existe una órbita de  $L_a$  con acción  $a$ . Notar que la órbita encontrada es no trivial por el Lema 6.2.6 y las estimaciones del periodo se siguen del Lema 6.3.1. Finalmente, la órbita encontrada también es una órbita de  $L$  por la Observación 6.1.13. □

# Bibliografía

- [Kli78] Wilhelm Klingenberg. *Lectures on closed geodesics*. Vol. 230. Springer Science & Business Media, 1978.
- [BT98] Abbas Bahri e Iskander A. Taimanov. «Periodic orbits in magnetic fields and Ricci curvature of Lagrangian systems». En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 350.7 (1998), págs. 2697-2717.
- [CIPP98] Gonzalo Contreras, Renato Iturriaga, G. Paternain y M. Paternain. «Lagrangian Graphs, Minimizing Measures and Mañé's Critical Values». En: *Geometric and Functional Analysis* 8 (1998), págs. 788-809.
- [CIPP00] Gonzalo Contreras, Renato Iturriaga, Gabriel P. Paternain y Miguel Paternain. «The Palais-Smale condition and Mañé's critical values». En: *Ann. Henri Poincaré* 1.4 (2000), págs. 655-684.
- [Lee03] John M. Lee. «Embedding and Approximation Theorems». En: *Introduction to Smooth Manifolds*. New York, NY: Springer New York, 2003, págs. 241-259.
- [Con06] Gonzalo Contreras. «The Palais-Smale condition on contact type energy levels for convex Lagrangian systems». En: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 27.3 (2006), págs. 321-395.
- [AF07] Alberto Abbondandolo y Alessio Figalli. «High action orbits for Tonelli Lagrangians and superlinear Hamiltonians on compact configuration spaces». En: *Journal of Differential Equations* 234.2 (2007), págs. 626-653.
- [AS09] Alberto Abbondandolo y Matthias Schwarz. «A smooth pseudo-gradient for the Lagrangian action functional». En: *Adv. Nonlinear Stud.* 9.4 (2009), págs. 597-623. ISSN: 1536-1365.
- [Maz11] Marco Mazzucchelli. *Critical point theory for Lagrangian systems*. Vol. 293. Springer Science & Business Media, 2011.
- [Abb13] Alberto Abbondandolo. «Lectures on the free period Lagrangian action functional». En: *J. Fixed Point Theory Appl.* 13.2 (2013), págs. 397-430.
- [DM13] Pavel Drábek y Jaroslav Milota. *Methods of nonlinear analysis: applications to differential equations*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Fat14] Albert Fathi. *Weak KAM Theorem in Lagrangian Dynamics*. 2014.
- [Pat15] Miguel Paternain. «Periodic orbits with prescribed abbreviated action». En: *Proc. Amer. Math. Soc.* 143.9 (2015), págs. 4001-4008.
- [Pat16] Miguel Paternain. «Periodic orbits of Lagrangian systems with prescribed action or period». En: *Proc. Amer. Math. Soc.* 144.7 (2016), págs. 2999-3007.
- [Pat19] Miguel Paternain. «Contractible periodic orbits of Lagrangian systems». En: *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 99.3 (2019), págs. 445-453.

- [Pat24] Miguel Paternain. «Periodic orbits of Tonelli Lagrangian with prescribed action or period». En: *Proc. Amer. Math. Soc.* 152.4 (2024), págs. 209-222.