



FACULTAD DE  
CIENCIAS ECONÓMICAS  
Y DE ADMINISTRACIÓN



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

## Problemas de parada óptima

Trabajo final de grado presentado como requisito para la obtención  
del título Licenciado en Estadística

Joaquín Andres SILVA VÁZQUEZ

Facultad de Ciencias Económicas y de Administración  
Universidad de la República

### **Tutores**

Ernesto MORDECKI  
Nicolás FREVENZA

### **Tribunal**

Ernesto MORDECKI  
Andres SOSA  
Marco SCAVINO

Montevideo, Uruguay. Marzo de 2026



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Pagos homogéneos en el tiempo</b>	<b>4</b>
2.2. Parada óptima con pagos homogéneos en el tiempo . . . . .	5
2.3. Funciones de pago con valores negativos . . . . .	25
<b>3. Pagos no homogéneos en el tiempo</b>	<b>27</b>
<b>4. Problemas de parada óptima con integrales</b>	<b>37</b>
<b>5. Un teorema de verificación</b>	<b>39</b>
<b>6. Simulaciones</b>	<b>45</b>
<b>7. Apéndice</b>	<b>48</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>52</b>

## Resumen

Este trabajo estudia los problemas de parada óptima en el contexto de procesos estocásticos, con un enfoque particular en difusiones de Itô. El objetivo es determinar el tiempo de parada óptimo que maximiza el valor esperado de una función de pago que depende de la trayectoria del proceso. Partiendo de la formulación clásica introducida en el análisis secuencial, la monografía desarrolla el marco teórico necesario para analizar estos problemas en tiempo continuo.

El estudio comienza con el caso de funciones de pago homogéneas en el tiempo, no negativas y continuas, estableciendo conceptos clave como tiempos de parada, filtraciones y funciones superarmónicas (supermeanvalued). Un resultado central muestra que la función valor del problema de parada óptima coincide con el menor mayorante superarmónico de la función de pago. El trabajo proporciona métodos constructivos para obtener este mayorante y demuestra resultados de existencia y aproximación mediante tiempos de parada  $\varepsilon$ -óptimos.

La teoría se extiende luego a contextos más generales, incluyendo funciones de pago no homogéneas y problemas que involucran funcionales integrales. Se presenta un teorema de verificación para caracterizar la optimalidad, y se discuten condiciones de existencia y unicidad de tiempos de parada óptimos. La monografía también destaca casos en los que el tiempo de parada óptimo no existe.

Finalmente, se exploran métodos de simulación para ilustrar los resultados teóricos y proporcionar intuición numérica sobre estrategias de parada óptima.

**Palabras clave:** Parada óptima, procesos estocásticos, difusiones de Itô, tiempos de parada, movimiento browniano.

# Capítulo 1

## Introducción

Los problemas de parada óptima tienen un papel central en la optimización y el control de procesos estocásticos. Una de las varias formulaciones del problema es la siguiente: un usuario quiere vender un activo cuyo precio evoluciona de manera aleatoria en el tiempo mediante un proceso  $X_t$ , contando el usuario solo con la información generada por la trayectoria del valor del activo hasta tiempo  $t$ . Formalmente, el problema a considerar en esta monografía es que, dado un proceso estocástico  $X_t$ , que tiene como punto inicial  $X_0 = x$ , y una función de pago  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ , se quiere encontrar el valor de la función  $g^*(x)$  y el tiempo de parada óptimo  $\tau^*$ , que cumplen

$$g^*(x) = \sup_{\tau} \mathbb{E}^x[g(\tau, X_{\tau})] = \mathbb{E}^x[g(\tau^*, X_{\tau^*})], \quad (1.1)$$

donde el supremo se toma sobre todos los tiempos de parada posibles. La notación  $\mathbb{E}^x$  corresponde a tomar esperanza siendo  $x$  el punto inicial del proceso.

La teoría de parada óptima se construyó por Wald en la década del 40 (ver [13]) para trabajar en el análisis secuencial, esto es, en la comparación de hipótesis estadísticas mediante métodos no tradicionales (métodos secuenciales). En los métodos estadísticos clásicos el número de observaciones está fijado con anterioridad, mientras que en los métodos secuenciales se caracterizan porque el momento en que se terminan las observaciones (tiempo de parada) es aleatorio y está definido por el observador en función de los datos observados. Wald mostró la ventaja de esta metodología en el problema de probar (para datos independientes) dos hipótesis simples. Demostró que dichos métodos producen, en promedio, un número menor de observaciones que cualquier otro método que utilice un tamaño de muestra fijo (y con las mismas probabilidades de error). Además, Wald describió un procedimiento secuencial específico que resultó ser óptimo dentro de la clase de todos los métodos secuenciales.

Posteriormente se relacionó a estos métodos con la teoría general de optimización estocástica para procesos aleatorios. Algunos años más tarde, esta teoría se aplicó al estudio de las finanzas cuantitativas de opciones americanas (entra otras), donde la opción evoluciona siguiendo un proceso aleatorio y se puede ejecutar el contrato en cualquier momento. La evolución de los problemas de parada óptima aplicados distintos tipos de opciones ha sido una temática ampliamente abordada en la literatura. A modo de ejemplos, el caso de opciones rusas se aborda en el artículo [8] de Shepp y Shiryaev y el de opciones integrales en [6] por

Kramkov y Mordecki.

Uno de los primeros trabajos sobre el problema de parada óptima para procesos estocásticos a tiempo continuo se debe a Shiryaev [10], donde se aborda el problema de la detección más rápida de una perturbación de un proceso estacionario que aparece en un tiempo aleatorio (con algunas condiciones). También en Taylor [12] se enfoca en el problema de parada óptima para procesos de Markov con descuento en el tiempo y para diferentes criterios de maximización.

La referencia clásica dentro de los problemas de parada óptima para procesos estocásticos es el libro de Albert N. Shiryaev [11], publicado originalmente en ruso en la década de los 60 y posteriormente publicado en inglés por Springer hacia finales de la década del 70. Este libro ha tenido ediciones posteriores que han actualizado algunos temas y las referencias de un área que sigue siendo activa. Otro libro importante del área, más avanzado, con contribuciones posteriores y abordando el vínculo con ecuaciones de frontera libre, es el libro [4] de Peskir y Shiryaev.

En el caso particular de esta monografía estudiaremos los problemas de parada óptima para difusiones de Itô, basándonos en el libro de Øksendal [7]. Un proceso estocástico  $X_t$  es una difusión de Itô si es solución de una ecuación estocástica de la siguiente forma

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t. \quad (1.2)$$

Sobre estos tipos de procesos estocásticos se puede encontrar una cantidad extensa de información en [7] y [2].

Para trabajar el problema de parada óptima, comenzaremos por el caso donde la función de pago es continua, homogénea en el tiempo y no negativa, es decir, contamos con una función de pago  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ . Este es el caso más sencillo de trabajar y el que nos dará una amplia teoría; luego podemos eliminar la restricción de homogeneidad o la no negatividad, y veremos que estos casos se pueden reducir al caso homogéneo, permitiéndonos así extender de manera sencilla nuestra teoría.

## Capítulo 2

# Pagos homogéneos en el tiempo

En este capítulo estudiamos la teoría de parada óptima en el caso específico de contar con una función de pago homogénea en el tiempo, es decir que nuestro pago no depende del tiempo. Este capítulo es además el más extenso y con más contenido teórico, dado que será la base para las generalizaciones planteadas luego.

Antes de definir formalmente cuál es el problema de parada óptima, tenemos que brindar la definición de tiempo de parada, y para esto comenzaremos con lo que es una filtración.

**Definición 2.1.1.** Una filtración es una familia  $\{\mathcal{N}_t\}$  de  $\sigma$ -álgebras tales que si

$$0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{N}_s \subset \mathcal{N}_t \quad (2.1)$$

es decir, son crecientes en el sentido de la inclusión con  $t$ .

**Definición 2.1.2.** Sea  $\{\mathcal{N}_t\}$  una filtración en  $\Omega$ , se dice que  $\tau: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  es un tiempo de parada respecto de  $\{\mathcal{N}_t\}$  si se cumple que el evento

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{N}_t \quad \forall t \geq 0, \quad (2.2)$$

lo que se traduce que para decidir si  $\tau \leq t$ , solo se precisa la información hasta el momento  $t$ .

Otro concepto que precisamos introducir son las difusión de Itô.

**Definición 2.1.3.** Un proceso estocástico  $X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $X_t(\omega) = X(t, \omega)$ , se dice que es una difusión de Itô homogénea en el tiempo, si es solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \quad t \geq s \quad X_s = x, \quad (2.3)$$

donde  $W_t$  es un proceso de Wiener  $m$ -dimensional. Para que esta solución exista las funciones  $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ , deben cumplir las condiciones del Teorema 7.1.

Nos interesa la filtración  $\mathcal{M}_t$ , por simplicidad denotaremos  $\mathcal{M}_t$  a la  $\sigma$ -álgebra y a la filtración al mismo tiempo, donde  $\mathcal{M}_t$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\{X_s : s \leq t\}$ , siendo  $X_t$  la difusión de Itô con la que estemos trabajando, es decir la  $\sigma$ -álgebra que guarda la

información del proceso hasta un momento  $t$ . Otra filtración que es importante es  $\mathcal{F}_t$ , la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\{W_s : s \leq t\}$ , es decir la  $\sigma$ -álgebra que contiene la información hasta tiempo  $t$  del movimiento browniano que controla al proceso.

Ambas filtraciones no necesariamente coinciden, esto se puede ver en el hecho que no siempre se puede recuperar  $W_t$  desde  $\{X_s : s \leq t\}$ , pero sin embargo sabemos que  $\{W_t\}$  genera a  $X_t$ .

En ocasiones precisaremos guardar la información hasta un tiempo de parada en lugar de un tiempo fijo; esto brinda una nueva filtración asociada a un tiempo de parada  $\tau$ , que es la  $\sigma$ -álgebra generada por las trayectorias  $\{W_{s \wedge \tau} : s \geq 0\}$ , y se denota  $\mathcal{F}_\tau$ . Para  $\mathcal{M}_\tau$ , la definición es completamente análoga.

## 2.2. Parada óptima con pagos homogéneos en el tiempo

El primer caso de parada óptima que estudiaremos es el más sencillo, donde  $X_t$  es una difusión de Itô homogénea en  $\mathbb{R}^n$ , como la Definición 2.1.3, y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función homogénea en el tiempo, es decir depende solo del espacio, que cumple las siguientes condiciones

- a)  $g(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$
- b)  $g$  continua,

Se quiere hallar el tiempo de parada óptimo  $\tau^*$  y la función de pago óptima  $g^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que verifican

$$g^*(x) = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau^*})] = \sup_{\tau} \mathbb{E}^x [g(X_{\tau})], \quad (2.4)$$

donde el supremo se toma sobre todos los tiempos de parada  $\tau$  asociados a la filtración  $\mathcal{F}_t$ . Para las trayectorias  $\omega$  tales que  $\tau(\omega) = \infty$  impondremos  $g(X_{\tau(\omega)}) = 0$ . Equivalentemente, se puede pensar que estamos hallando el supremo

$$\sup_{\tau} \mathbb{E}^x [g(X_{\tau}) \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}}]. \quad (2.5)$$

Por comodidad no incluiremos la función indicatriz. La dificultad de este problema de parada óptima se encuentra en que no es obvio que el supremo se alcance.

Ahora se presentan dos definiciones que usaremos en el estudio del problema de parada óptima (2.4) y generalizaciones que se abordan más adelante.

**Definición 2.2.1** (Función Semicontinua por debajo). Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\bar{x}$  en  $D$ , entonces se dice que  $f$  es semicontinua por debajo en  $\bar{x}$  cuando para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que

$$f(\bar{x}) - \varepsilon < f(x) \quad \forall x \in B(\bar{x}, \delta) \cap D. \quad (2.6)$$

Diremos que una función es semicontinua por debajo cuando esta es semicontinua por debajo para todos los puntos del dominio.

Es importante remarcar que a menudo usaremos la equivalencia del Teorema 7.2, la cual se encuentra en el apéndice de la monografía. Esta equivalencia nos dice que una función es semicontinua por debajo si y sólo si el límite inferior cuando nos acercamos a  $\bar{x}$  es mayor o igual a  $f(\bar{x})$ .

**Definición 2.2.2.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  una función medible, diremos que es *supermeanvalued* respecto al proceso  $X_t$  cuando

$$f(x) \geq \mathbb{E}^x[f(X_\tau)] \quad (2.7)$$

para todo tiempo de parada  $\tau$  respecto a la filtración  $\mathcal{F}_t$ , y  $x$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Si además  $f$  es semicontinua por debajo, entonces se dice que  $f$  es *superarmónica* respecto a  $X_t$ .

**Observación 2.2.3.** Si  $f$  es superarmónica y  $\{\tau_k\}$  una secuencia de tiempos de parada, que cumple  $\tau_k \rightarrow 0$  casi seguramente. Entonces se cumple que:

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x[f(X_{\tau_k})].$$

*Demostración.* Que  $f$  sea semicontinua por debajo, por el Teorema 7.2, implica

$$f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(X_{\tau_k}^x)$$

para toda sucesión de tiempos de parada  $\{\tau_k\}$  tal que  $\tau_k \rightarrow 0$  casi seguramente, donde  $X_t^x$  denota al proceso  $X_t$  con  $X_0 = x$ . Luego, se toma esperanza y se aplica el Lema de Fatou 7.5, y se tiene que:

$$f(x) \leq \mathbb{E}^x \left[ \liminf_{k \rightarrow \infty} f(X_{\tau_k}^x) \right] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x[f(X_{\tau_k})].$$

Por (2.7) además se tiene que  $f(x) \geq \mathbb{E}[f(X_{\tau_k})]$ . Tomando límite superior en esta última desigualdad nos queda

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x[f(X_{\tau_k})] \leq f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x[f(X_{\tau_k})].$$

En consecuencia,

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x[f(X_{\tau_k})],$$

para toda sucesión de tiempos de parada  $\{\tau_k\}$  tal que  $\tau_k \rightarrow 0$  casi seguramente.  $\square$

Algunas propiedades asociadas a las funciones *supermeanvalued* y las funciones superarmónicas se listan a continuación.

**Lema 2.2.4.** *Las funciones superarmónicas (supermeanvalued) cumplen las siguientes propiedades.*

- a) Si  $f$  es superarmónica (supermeanvalued) y  $\alpha > 0$ , entonces  $\alpha f$  es superarmónica (supermeanvalued).
- b) Si  $f_1, f_2$  son superarmónicas (supermeanvalued), entonces  $f_1 + f_2$  lo es.
- c) Si  $\{f_j\}_{j \in J}$  es una familia de funciones supermeanvalued, entonces cuando  $f(x) := \inf_{j \in J} \{f_j(x)\}$  es medible, se tiene que es supermeanvalued. Notar que si  $J$  es numerable,  $f$  será medible.
- d) Si  $\{f_k\}_{k \geq 1}$  son supermeanvalued (superarmónicas) y  $f_k \uparrow f$  puntualmente, entonces  $f$  es supermeanvalued (superarmónica).
- e) Si  $f$  es supermeanvalued y  $\sigma \leq \tau$  son tiempos de parada asociados a  $\mathcal{F}_t$ , entonces

$$\mathbb{E}^x [f(X_\sigma)] \geq \mathbb{E}^x [f(X_\tau)]$$

- f) Si  $f$  es supermeanvalued y  $H \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto de Borel, entonces la función definida por

$$\tilde{f}(x) := \mathbb{E}^x [f(X_{\tau_H})]$$

es supermeanvalued, siendo  $\tau_H = \inf\{t > 0 : X_t \notin H\}$  el primer tiempo de salida de  $H$ .

*Demostración a).* Veamos que si  $f$  cumple que  $f(x) \geq \mathbb{E}^x [f(X_\tau)]$ , entonces para cualquier  $\alpha > 0$  se cumple

$$\alpha f(x) \geq \alpha \mathbb{E}^x [f(X_\tau)] = \mathbb{E}^x [\alpha f(X_\tau)],$$

por lo cual si  $f$  es supermeanvalued entonces  $\alpha f$  también lo es.

Si  $f$  es superarmónica, entonces es semicontinua por debajo, usando la condición del Teorema 7.2 y multiplicando esta condición por  $\alpha$ , tenemos que:

$$\liminf_{x \rightarrow \bar{x}} \alpha f(x) = \alpha \liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \geq \alpha f(\bar{x})$$

para todo  $\bar{x}$  en el dominio de  $f$ , con lo cual  $\alpha f$  es semicontinua por debajo, y por ende superarmónica.  $\square$

*Demostración b).* Si  $f_1$  y  $f_2$  son supermeanvalued entonces

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \geq \mathbb{E}^x [f_1(X_\tau)] + \mathbb{E}^x [f_2(X_\tau)] = \mathbb{E}^x [f_1(X_\tau) + f_2(X_\tau)].$$

Ahora si ambas son superarmónicas entonces otra vez son semicontinuas por debajo y por el Teorema 7.2 se cumple

$$f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) \leq \liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f_1(x) + \liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f_2(x) = \liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f_1(x) + f_2(x) = \liminf_{x \rightarrow \bar{x}} (f_1 + f_2)(x). \quad (2.8)$$

Por ende  $f_1 + f_2$  es también semicontinua por debajo y entonces superarmónica.  $\square$

*Demostración c).* Tenemos que como  $f_j$  es *supermeanvalued* para todo  $j \in J$  entonces

$$f_j(x) \geq \mathbb{E}^x [f_j(X_\tau)] \geq \mathbb{E}^x \left[ \inf_{j \in J} f_j(X_\tau) \right] = \mathbb{E}^x [f(X_\tau)],$$

y dado que esto se cumple para todo  $j \in J$ , vale:

$$f(x) = \inf_{j \in J} f_j(x) \geq \mathbb{E}^x [f(X_\tau)].$$

Con lo cual  $f$  es *supermeanvalued* siempre y cuando sea una función medible. □

*Demostración d).* Sabemos que  $f_k \uparrow f$  puntualmente, entonces

$$f(x) \geq f_k(x) \geq \mathbb{E}^x [f_k(X_\tau)]$$

para todo  $k$  en  $\mathbb{N}$ , con lo cual tomando esperanza

$$f(x) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [f_k(X_\tau)] = \mathbb{E}^x \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(X_\tau) \right] = \mathbb{E}^x [f(X_\tau)],$$

donde podemos intercambiar límite y esperanza porque estamos dentro de las hipótesis del Teorema de convergencia monótona, Teorema 7.3.

Si  $f_k$  es semicontinua por debajo entonces

$$f_k(\bar{x}) \leq \liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f_k(x) \leq \liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f(x),$$

por lo tanto

$$f(\bar{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\bar{x}) \leq \liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f(x),$$

con lo cual  $f$  es semicontinua por debajo por el Teorema 7.2. □

*Demostración e).* Sea  $t > s$ , entonces por ser  $f$  *supermeanvalued* se cumple

$$f(X_s) \geq \mathbb{E}^{X_s} [f(X_{t-s})],$$

donde se toma la definición de *supermeanvalued*, para el caso específico donde  $\tau = t - s$  y  $x = X_s$ , y luego por la propiedad de Markov para difusiones de Itô, Teorema 7.8, y el Lema 7.9, se tiene

$$\mathbb{E}^{X_s} [f(X_{t-s})] = \mathbb{E}^x [f(X_t) | \mathcal{F}_s] \leq f(X_s)$$

Donde  $\mathcal{F}_s$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\{W_r : r \leq s\}$ , que implica que el proceso  $f(X_t)$  es una supermartingala respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$ .

Para poder utilizar el Teorema de Muestreo Opcional de Doob, Teorema 7.10, además del proceso ser una supermartingala, se debe contar con una variable aleatoria  $\eta$  uniformemente integrable, Definición 7.13, que cumpla

$$f(X_t) \geq \mathbb{E}[\eta | \mathcal{F}_t]. \tag{2.9}$$

En el caso que nos encontramos no es difícil ver que la variable aleatoria  $\eta = 0$ , cumple todo lo que queremos, dado que la función  $f$  es no negativa, y  $\eta$  es uniformemente integrable, con esto podemos utilizar el Teorema de Muestreo Opcional, y queda demostrado que se cumple

$$\mathbb{E}^x[f(X_\tau)] \leq \mathbb{E}^x[f(X - \sigma)]. \quad (2.10)$$

□

*Demostración f).* Sea  $\sigma$  un tiempo de parada, entonces

$$\mathbb{E}^x[\tilde{f}(X_\sigma)] = \mathbb{E}^x[\mathbb{E}^{X_\sigma}[f(X_{\tau_H})]] = \mathbb{E}^x[\mathbb{E}^x[f(X_{\tau_H^\sigma})|\mathcal{F}_\sigma]] = \mathbb{E}^x[f(X_{\tau_H^\sigma})], \quad (2.11)$$

donde  $\tau_H^\sigma = \inf\{t > \sigma : X_t \notin H\}$ . La primera igualdad sale de la definición de  $\tilde{f}$ , luego utilizamos la propiedad fuerte de Markov para procesos de Itô, ver el Teorema 7.8, y por último la propiedad telescópica de la esperanza condicional, Teorema 7.7.

Dado que  $\sigma$  es un tiempo de parada entonces  $\sigma \geq 0$  por lo cual  $\tau_H^\sigma \geq \tau_H$  podemos entonces utilizar la parte e) y tenemos

$$\mathbb{E}^x[\tilde{f}(X_\sigma)] = \mathbb{E}^x[\tilde{f}(X_{\tau_H^\sigma})] \leq \mathbb{E}^x[f(X_{\tau_H})] = \tilde{f}(x), \quad (2.12)$$

de lo que se deduce que  $\tilde{f}$  es *supermeanvalued*. □

Las siguientes definiciones introducen el concepto de mayorante *supermeanvalued* y superarmónico.

**Definición 2.2.5.** Mayorante *supermeanvalued* (superarmónico)

Sea  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible. Si  $f$  es *supermeanvalued* (superarmónica) y  $f \geq h$  entonces decimos que  $f$  es un mayorante *supermeanvalued* (superarmónico) de  $h$  respecto al proceso  $X_t$ .

Particularmente nos interesa el menor mayorante tanto *supermeanvalued* como superarmónico. Veremos que estos se encuentran fuertemente relacionados con la función de pago óptimo.

**Definición 2.2.6.** Menor mayorante *supermeanvalued* (superarmónico). Sea el conjunto

$$MSV_h = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f \geq h, f \text{ supermeanvalued}\}.$$

Se define la función

$$\bar{h}(x) = \inf_{f \in MSV_h} f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.13)$$

y se la llama el menor mayorante *supermeanvalued* de  $h$ .

Análogamente se define  $\hat{h}$  como el menor mayorante superarmónico de  $h$ , donde el ínfimo se toma en

$$MSH_h = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f \geq h, f \text{ superarmónico}\}.$$

**Observación 2.2.7.** Notar que por Lema 10.1.3 c) si la función  $\bar{h}$  es medible entonces es *supermeanvalued*. Además, si  $\bar{h}$  es semicontinua por debajo entonces  $\hat{h}$  existe y  $\hat{h} = \bar{h}$ , ya que cumple la definición 2.2.2.

Ahora se introducirán las funciones excesivas. A primera vista puede parecer un caso particular de la definición de funciones superarmónicas, pero veremos más adelante que son en realidad equivalentes. La utilidad que presentan las funciones excesivas es que algunas veces resulta más sencillo demostrar esta propiedad que ser superarmónica.

**Definición 2.2.8.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  semicontinua por debajo, entonces se dice que  $f$  es excesiva respecto de  $X_t$  cuando

$$f(x) \geq \mathbb{E}^x [f(X_s)] \quad \forall s \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.14)$$

**Observación 2.2.9.** Tomando la definición de función superarmónica y el tiempo de parada constante  $\tau = s$ , se recupera la definición de función excesiva; por ende, toda función superarmónica también es excesiva.

Para demostrar la equivalencia entre las funciones superarmónicas y excesivas precisamos introducir el concepto de operador característico de un proceso.

**Definición 2.2.10.** Sea  $X_t$  una difusión de Itô, el operador característico de  $X_t$ ,  $\mathcal{A}$ , se define mediante el siguiente límite

$$\mathcal{A}f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}^x [f(X_{\tau_{U_k}})] - f(x)}{\mathbb{E}^x [\tau_{U_k}]}. \quad (2.15)$$

Donde los conjuntos  $U_k$  son una secuencia de conjuntos abiertos que decrece a  $\{x\}$ , es decir, cumplen  $U_{k+1} \subset U_k$  y  $\bigcap_k U_k = \{x\}$ , y  $\tau_{U_k}$  es el primer tiempo de salida de  $U_k$ ,  $\tau_{U_k} = \inf\{t > 0 : X_t \notin U_k\}$ . Si  $\mathbb{E}^x[\tau_{U_k}] = \infty$  para todo  $U_k$ , que contenga a  $x$ , diremos que  $\mathcal{A}f(x) = 0$ .

Denotaremos  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$  al conjunto de funciones  $f$  tales que el límite (2.15) existe para todo  $x$  en  $\mathbb{R}^n$ , y para toda secuencia  $\{U_k\}$ .

Se puede demostrar que si  $f$  es una función con derivada segunda continua, que denotaremos por  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ . Además, el operador característico se puede expresar como un operador diferencial, lo cual se analiza en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.11.** *Sea  $X_t$  una difusión de Itô de la forma*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t.$$

*Entonces, si  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ , se cumple que  $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$  y el operador característico se escribe como:*

$$\mathcal{A}f(x) = \sum_i b(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} (\sigma \sigma^t)_{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.16)$$

No se incluye la demostración de este Teorema en la monografía. Se la puede encontrar en la página 123 de [7].

Con el resultado anterior se puede finalmente demostrar la equivalencia entre las funciones superarmónicas y excesivas.

**Teorema 2.2.12.** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ . Entonces  $f$  es excesiva respecto a  $X_t$  si y solo si  $f$  es superarmónica respecto a  $X_t$ .*

*Demostración.* Recordemos que ya probamos que toda función superarmónica es excesiva en la observación 2.2.9. Con lo cual solo resta probar que toda función excesiva es superarmónica.

Sea  $L$  el operador diferencial asociado a  $X_t$ , que coincide con el término de la derecha de (2.16), es decir, que coincide con el operador característico  $\mathcal{A}$  de  $X_t$  en  $C^2(\mathbb{R}^n)$ . Solo demostraremos el teorema en el caso donde  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  y  $Lf$  es acotado. La prueba general se encuentra en [3].

Por la fórmula de Dynkin, ver Teorema 7.11, se tiene que

$$\mathbb{E}^x [f(X_t)] = f(x) + \mathbb{E}^x \left[ \int_0^t Lf(X_r) dr \right] \quad \forall t \geq 0.$$

Como  $f$  es excesiva, entonces

$$\mathbb{E}^x [f(X_t)] - f(x) \leq 0$$

de lo que se obtiene que  $Af \leq 0$  y entonces  $Lf \leq 0$ . Sea  $\tau$  un tiempo de parada asociado a la filtración  $\mathcal{F}_t$ , entonces

$$\mathbb{E}^x [f(X_{t \wedge \tau})] \leq f(x) \quad \forall t \geq 0.$$

Si se toma  $t \rightarrow \infty$ , utilizando el Lema de Fatou reverso, entonces se recupera la definición de función superarmónica, formalmente

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [f(X_{t \wedge \tau})] \leq \mathbb{E}^x [\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} f(X_{t \wedge \tau})] = \mathbb{E}^x [f(X_\tau)]. \quad (2.17)$$

Se cumple así que toda función excesiva es superarmónica, por lo cual queda demostrada la equivalencia.  $\square$

Estas definiciones sobre funciones superarmónicas, excesivas o el menor mayorante superarmónico, son definiciones relevantes para el estudio del problema de parada óptima. Sin embargo, no es claro cómo se pueden hallar dichas funciones, o siquiera asegurar su existencia. El siguiente teorema nos da un método para obtener el menor mayorante superarmónico y, además, si se toma  $\hat{g} = +\infty$ , la función constante igual a  $+\infty$  como una función válida, nos garantiza que siempre existirá un menor mayorante superarmónico.

**Teorema 2.2.13. Construcción del menor mayorante superarmónico**

*Sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función no negativa y semicontinua por debajo, se define la sucesión de funciones  $\{g_k\}$*

$$g_k(x) = \sup_{t \in S_k} \mathbb{E}^x [g_{k-1}(X_t)], \quad g_0 = g. \quad (2.18)$$

Siendo  $S_k = \{l \cdot 2^{-k} : l = 1, 2, \dots, 4^k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces,  $g_k \uparrow \hat{g}$ , donde  $\hat{g}$  es el menor mayorante superarmónico de  $g$ . Además, el menor mayorante superarmónico  $\hat{g}$  y el menor mayorante supermeanvalued  $\bar{g}$  coinciden.

*Demostración.* Notar que la sucesión  $\{g_k\}$  es creciente, ya que se cumple

$$g_k(x) = \sup_{t \in S_k} \mathbb{E}^x [g_{k-1}(X_t)] \geq \mathbb{E}^x [g_{k-1}(X_0)] = g_{k-1}(x).$$

Sea  $g_\infty(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x)$ , donde admitimos que pueda tomar el valor  $\infty$ , y obtenemos la siguiente desigualdad

$$g_\infty(x) \geq g_k(x) \geq \mathbb{E}^x [g_{k-1}(X_t)] \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad t \in S_k.$$

Utilizando esto junto con el Lema de Fatou 7.5, se plantean las siguientes desigualdades

$$g_\infty(x) \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g_{k-1}(X_t)] \geq \mathbb{E}^x [\liminf_{k \rightarrow \infty} g_{k-1}(X_t)] = \mathbb{E}^x [g_\infty(X_t)], \quad (2.19)$$

lo que vale para todo  $t \in S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ . Con esto se tiene que la función  $g_\infty$  es excesiva para  $t$  en  $S$ , pero veamos que se puede generalizar para  $[0, \infty]$ .

Notemos primero que, por el Lema 7.12, se tiene que  $g_\infty$  es semicontinua por debajo, ya que es el límite puntual de una sucesión de funciones semicontinuas por debajo. Sea  $t \in [0, \infty]$  y  $\{t_j\}$  una sucesión de puntos en  $S$  tal que  $t_j \rightarrow t$ , que existe porque  $S$  es denso en  $[0, \infty]$ . Entonces

$$g_\infty(x) \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g_\infty(X_{t_j})] \geq \mathbb{E}^x \left[ \liminf_{k \rightarrow \infty} g_\infty(X_{t_k}) \right] \geq \mathbb{E}^x [g_\infty(X_t)], \quad (2.20)$$

donde la primera desigualdad se obtiene utilizando (2.19) y tomando límite inferior, luego utilizamos el Lema de Fatou y por último que la función  $g_\infty$  es semicontinua por debajo. Dado que se toma  $t \in [0, \infty]$  genérico, se ha probado que  $g_\infty$  es excesiva, y por Teorema 2.2.12, es superarmónica.

Notar además que si  $f$  es cualquier mayorante *supermeanvalued* de  $g$  entonces por definición  $f \geq g = g_0$  y entonces:

$$f(x) \geq \mathbb{E}^x [f(X_\tau)] \geq \mathbb{E}^x [g_0(X_\tau)], \quad (2.21)$$

para cualquier  $x \in \mathbb{R}^n$  y tiempo de parada  $\tau$ . En particular

$$f(x) \geq \sup_{t \in S_1} \mathbb{E}^x [g_0(X_t)] = g_1(x). \quad (2.22)$$

Podemos entonces repetir (2.21) y (2.22) tomando  $g_1$  en lugar de  $g_0$  y tendremos que  $f(x) \geq g_2(x)$ . Iterando este procedimiento se obtiene entonces que

$$f(x) \geq g_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.23)$$

por lo que  $f(x) \geq g_\infty(x)$ . Esto prueba que  $g_\infty$  es el menor mayorante *supermeanvalued*  $\bar{g}$ , y como es semicontinua por debajo,  $g_\infty = \hat{g}$ , es decir es el menor mayorante superarmónico.  $\square$

**Corolario 2.2.14.** *Se define la sucesión de funciones  $h_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$h_k(x) = \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}^x [h_{k-1}(X_t)], \quad h_0 = g.$$

Entonces  $h_k \uparrow \hat{g}$ .

*Demostración.* Notemos que la secuencia de funciones  $h_k$  es creciente; esto se puede demostrar de igual manera que en el caso de las funciones  $g_k$ .

Denotamos por  $h = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k$ . Observar que como el supremo se toma sobre un conjunto mayor que  $S_k$ , entonces  $h_k \geq g_k$  para todo  $k$  y tomando límite de ambos lados se tiene que  $h \geq g_\infty = \hat{g}$ .

Como  $\hat{g}$  es superarmónica es entonces es excesiva por lo cual cumple que:

$$\hat{g}(x) \geq \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}^x [\hat{g}(X_t)] \geq \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}^x [g_0(X_t)].$$

Procediendo de la misma forma que en (2.21) y (2.22), del Teorema anterior, tenemos

$$\hat{g} \geq h_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si se toma límite en  $k$  se obtiene que  $\hat{g} = h$ .  $\square$

Este método alternativo para hallar el menor mayorante superarmónico puede simplificar significativamente las cuentas, por lo que resulta útil.

Luego de la cantidad de definiciones y propiedades, se cuenta con las herramientas necesarias para comenzar a profundizar en resultados del problema de parada óptima propiamente dicho. Se comienza demostrando uno de los teoremas fundamentales para el estudio de estos problemas.

**Teorema 2.2.15. Teorema de existencia de parada óptima**

*Sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de pago continua y no negativa; se denota por  $g^*$  a la función de pago óptimo definida en (2.4) y  $\hat{g}$  al menor mayorante superarmónico de  $g$ . Entonces se cumple que:*

a) Vale

$$g^*(x) = \hat{g}(x). \quad (2.24)$$

b) Para  $\varepsilon > 0$ , sea

$$D_\varepsilon = \{x : g(x) < \hat{g}(x) - \varepsilon\}. \quad (2.25)$$

*Si se asume que  $g$  es acotada, entonces el tiempo de parada  $\tau_\varepsilon = \inf\{t > 0 : X_t \notin D_\varepsilon\}$ , que representa el primer momento de salida de  $D_\varepsilon$ , cumple*

$$|g^*(x) - \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_\varepsilon})]| \leq 2\varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.26)$$

*por lo tanto, es cercano al óptimo y la diferencia se puede cuantificar.*

c) Para  $g$  no negativa y continua, sea

$$D = \{x : g(x) < g^*(x)\}. \quad (2.27)$$

Para  $N \in \mathbb{N}$  se definen  $g_N = g \wedge N$ ,  $D_N = \{x : g_N(x) < \widehat{g}_N(x)\}$ . Entonces  $D_N \subset D_{N+1}$ ,  $D_N \subset D \cap g^{-1}([0, N])$  y  $D = \bigcup_{N \geq 1} D_N$ .

Si  $\tau_{D_N} < \infty$  casi seguramente para todo  $N$ , entonces

$$g^*(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_{D_N}})]. \quad (2.28)$$

d) Si  $\tau_D < \infty$  casi seguramente y  $\{g(X_{\tau_{D_N}})\}_{N \in \mathbb{N}}$  es uniformemente integrable, ver definición 7.13, entonces

$$g^*(x) = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})], \quad (2.29)$$

y vale también que  $\tau^* = \tau_D$  es un tiempo óptimo.

*Demostración.* Para comenzar la demostración, asumamos que  $g$  es una función acotada. Se define para  $\varepsilon > 0$  la función  $\tilde{g}_\varepsilon$

$$\tilde{g}_\varepsilon(x) := \mathbb{E}^x [\hat{g}(X_{\tau_\varepsilon})]. \quad (2.30)$$

Por el Lema 2.2.4 f) se sabe que la función  $\tilde{g}_\varepsilon$  es superarmónica. Afirmamos que vale que:

$$g(x) \leq \tilde{g}_\varepsilon(x) + \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.31)$$

Se probará por contradicción. Supongamos que se cumple que

$$\beta := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{g(x) - \tilde{g}_\varepsilon(x)\} > \varepsilon, \quad (2.32)$$

lo que implica que existe  $\bar{x}$  tal que  $g(\bar{x}) > \tilde{g}_\varepsilon(\bar{x}) + \varepsilon$ . Si vale (2.32) se tiene que, dado  $\eta > 0$  existe  $x_0$  tal que

$$g(x_0) - \tilde{g}_\varepsilon(x_0) \geq \beta - \eta. \quad (2.33)$$

Notar que  $\tilde{g}_\varepsilon + \beta$  es un mayorante de  $g$ , puesto por la definición de  $\beta$  se tiene que

$$\tilde{g}_\varepsilon(x) + \beta \geq \tilde{g}_\varepsilon(x) + g(x) - \tilde{g}_\varepsilon(x) = g(x).$$

Dado que  $\hat{g}$  es el menor mayorante superarmónico de  $g$ , se tiene que para todo  $x$  en  $\mathbb{R}^n$

$$\hat{g}(x) \leq \tilde{g}_\varepsilon(x) + \beta. \quad (2.34)$$

Partiendo de (2.34), y evaluando en  $x_0$  se obtiene que

$$\begin{aligned}
\hat{g}(x_0) &\leq \tilde{g}_\varepsilon(x_0) + \beta \\
&= \tilde{g}_\varepsilon(x_0) - g(x_0) + g(x_0) + \beta \\
&\leq g(x_0) - \beta + \eta + \beta \\
&= g(x_0) + \eta,
\end{aligned}$$

donde lo único a notar aquí es que la segunda desigualdad se acota  $\tilde{g}_\varepsilon(x_0) - g(x_0)$  por  $\eta - \beta$  a partir de (2.33). Con esto nos queda

$$\hat{g}(x_0) \leq g(x_0) + \eta, \quad (2.35)$$

para  $\eta > 0$  cualquiera.

Para ver que (2.35) genera una contradicción, veamos que solo hay dos posibilidades para  $\tau_\varepsilon$ , este puede ser 0 casi seguramente, o en contraposición, positivo casi seguramente. Dado que  $\tau_\varepsilon$  es un tiempo de parada entonces  $\{\omega : \tau_\varepsilon \leq t\} \in \mathcal{M}_t$ . Entonces se cumple que:

$$\begin{aligned}
\{\omega : \tau_\varepsilon = 0\} &\in \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{M}_t, \\
\{\omega : \tau_\varepsilon > 0\} &\in \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{M}_t.
\end{aligned}$$

La primera de estas dos inclusiones es evidente, ya que el evento se encuentra en  $\mathcal{M}_0$ , la segunda inclusión se puede ver teniendo en cuenta que  $\{\omega : \tau_\varepsilon > 0\}$  es el complemento de  $\{\omega : \tau_\varepsilon = 0\}$ , por lo cual también se encuentra dentro de  $\mathcal{M}_0$ .

Se está entonces dentro de las hipótesis del Lema 7.15, es decir que uno de estos dos sucesos debe de ocurrir casi seguramente.

Esto es importante, ya que podemos ver que en ambos casos (2.35) causa una contradicción, para así concluir la demostración de (2.31).

Primero estudiemos cuando  $\tau_\varepsilon > 0$  casi seguramente.

Partiendo de la desigualdad (2.35), y utilizando que  $\hat{g}$  e *supermeanvalued*, se cumple para todo  $t$  que

$$g(x_0) + \eta \geq \hat{g}(x_0) \geq \mathbb{E}^{x_0} [\hat{g}(X_{t \wedge \tau_\varepsilon})]. \quad (2.36)$$

Podemos separar esto en dos casos, cuando  $t < \tau_\varepsilon$  y  $t \geq \tau_\varepsilon$ , en el primer caso sabemos que el proceso aún se encuentra dentro de  $D_\varepsilon$ , mientras que el segundo no, dado que este segundo caso no nos interesa, podemos tomar la siguiente cota

$$\mathbb{E}^{x_0} [\hat{g}(X_{t \wedge \tau_\varepsilon})] \geq \mathbb{E}^{x_0} [\hat{g}(X_{t \wedge \tau_\varepsilon}) \mathbf{1}_{\{t < \tau_\varepsilon\}}]. \quad (2.37)$$

Como mencionamos anteriormente para  $t < \tau_\varepsilon$  el proceso aún se encuentra dentro de  $D_\varepsilon$ , y  $t \wedge \tau_\varepsilon = t$ , para este caso se cumple  $\hat{g}(X_{t \wedge \tau_\varepsilon}) \mathbf{1}_{\{t < \tau_\varepsilon\}} \geq (g(X_t) + \varepsilon) \mathbf{1}_{\{t < \tau_\varepsilon\}}$ , por la definición de  $D_\varepsilon$  obtenemos entonces la desigualdad

$$g(x_0) + \eta \geq \mathbb{E}^{x_0}[(g(X_t) + \varepsilon)\mathbb{1}_{\{t < \tau_\varepsilon\}}]. \quad (2.38)$$

Por último, si se toma  $t \rightarrow 0$ , y se usa el Lema de Fatou y se recupera  $g(x_0) + \varepsilon$  del lado derecho, es decir, se obtiene:

$$\begin{aligned} g(x_0) + \eta &\geq \liminf_{t \rightarrow 0} \mathbb{E}^{x_0} [(g(X_t) + \varepsilon)\mathbb{1}_{\{t < \tau_\varepsilon\}}] \\ &\geq \mathbb{E}^{x_0} \left[ \liminf_{t \rightarrow 0} (g(X_t) + \varepsilon)\mathbb{1}_{\{t < \tau_\varepsilon\}} \right] \\ &\geq g(x_0) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Esta desigualdad es equivalente a  $\eta \geq \varepsilon$ , pero nótese que la desigualdad (2.33) debe cumplirse para  $\eta > 0$  arbitrario, pero para  $\eta < \varepsilon$  tenemos una contradicción.

Ahora nos queda ver que sucede cuando  $\tau_\varepsilon = 0$  casi seguramente. Por la definición de  $\tilde{g}_\varepsilon(x_0)$  (2.30), se cumple que

$$\tilde{g}_\varepsilon(x_0) = \mathbb{E}^{x_0} [\hat{g}(X_{\tau_\varepsilon})] = \mathbb{E}^{x_0} [\hat{g}(X_0)] = \hat{g}(x_0), \quad (2.39)$$

pero como  $\hat{g}$  es un mayorante de  $g$ , entonces  $g(x_0) \leq \tilde{g}_\varepsilon(x_0)$ , por lo cual  $g(x_0) - \tilde{g}_\varepsilon(x_0) \leq 0$ . Esto contradice directamente (2.33) si  $\eta < \beta$ .

Tenemos entonces que en ambos existen valores de  $\eta$  los cuales causan una contradicción, en particular  $\eta < \min\{\beta, \varepsilon\}$  causa contradicciones para ambos casos, en consecuencia la ecuación (2.31) se debe cumplir, es decir  $g(x) \leq \tilde{g}_\varepsilon(x) + \varepsilon$  para todo  $x$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Volvemos a probar *a)* y *b)* del Teorema. Se tiene entonces que  $\tilde{g}_\varepsilon + \varepsilon$  es un mayorante *supermeanvalued* de  $g$ . Como  $\hat{g}$  es el menor mayorante superarmónico de  $g$ , este debe cumplir

$$\hat{g}(x) \leq \tilde{g}_\varepsilon(x) + \varepsilon = \mathbb{E}^x [\hat{g}(X_{\tau_\varepsilon})] + \varepsilon. \quad (2.40)$$

Dado que  $\tau_\varepsilon$  es el primer tiempo de salida de  $D_\varepsilon$ , se cumple que el proceso evaluado en este tiempo está fuera de  $D_\varepsilon$ , lo que implica que  $\hat{g}(X_{\tau_\varepsilon}) - \varepsilon \leq g(X_{\tau_\varepsilon})$ . Sustituyendo esto en la desigualdad anterior se obtiene que

$$\hat{g}(x) \leq \mathbb{E}^x [\hat{g}(X_{\tau_\varepsilon})] + \varepsilon \leq \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_\varepsilon})] + 2\varepsilon \leq g^*(x) + 2\varepsilon, \quad (2.41)$$

donde la última desigualdad es evidente de la definición de  $g^*$ , puesto que es el supremo sobre todos los tiempos de parada. De la desigualdad (2.41) podemos obtener dos resultados relevantes, primero de esta secuencia de desigualdades podemos plantear la siguiente cota

$$\mathbb{E}^x [g(X_{\tau_\varepsilon})] \leq g^*(x) + 2\varepsilon, \quad (2.42)$$

reordenando términos y usando que  $g^*(x) \geq \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_\varepsilon})]$ , se llega a

$$|g^*(x) - \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_\varepsilon})]| \leq 2\varepsilon, \quad (2.43)$$

lo que demuestra la parte *b)* del Teorema.

Y segundo como  $\varepsilon > 0$  arbitrario, podemos concluir que

$$\hat{g} \leq g^*. \quad (2.44)$$

Para obtener la igualdad se debe probar que  $\hat{g} \geq g^*$ . Dado que  $\hat{g}$  es un mayorante superarmónico de  $g$ , para todo  $x$  la función  $\hat{g}$  domina a la esperanza de  $g(X_\tau)$  para cualquier tiempo de parada, cuando el proceso inicia en  $x$ , con lo cual también será mayor que el supremo de esta esperanza sobre todos los tiempos de parada  $\tau$ , que es por definición  $g^*$ . Formalmente, esto es que

$$\hat{g}(x) \geq \mathbb{E}^x [\hat{g}(X_\tau)] \geq \mathbb{E}^x [g(X_\tau)],$$

pero como ya se dijo, esto es válido para cualquier tiempo de parada  $\tau$ , por lo que tomando entonces supremo sobre todos estos

$$\hat{g}(x) \geq \sup_{\tau} \mathbb{E}^x [g(X_\tau)] = g^*(x).$$

Se concluye entonces que  $\hat{g} \geq g^*$ , y entonces  $\hat{g} = g^*$ , si  $g$  es acotada.

Observemos que nunca utilizamos que  $g$  sea acotada para demostrar  $\hat{g} \geq g^*$ , por ende para terminar la demostración de a) se precisa ver que  $\hat{g} \leq g^*$  para  $g$  no acotada.

En el caso de que  $g$  no sea acotada se escribe por  $g_N$  a la función

$$g_N = \min(N, g) \quad N = 1, 2, \dots, \quad (2.45)$$

esta función se encuentra acotada por  $N$ , se quiere esto para poder utilizar el resultado anterior, el cual dice que la función de pago óptimo y el menor mayorante superarmónico coinciden si nuestra función de pago es acotada. Denotamos  $\widehat{g}_N$  al menor mayorante superarmónico de  $g_N$ , que cumple  $\widehat{g}_N = g_N^*$ , siendo  $g_N^*$  la función de pago óptimo para  $g_N$ .

De la definición de  $g_N$  se desprende que esta familia de funciones es creciente con  $N$ , y que todas se encuentran acotadas por  $g$ , es decir  $g_N \leq g_{N+1} \leq g$ , para todo  $N$ .

Esto además implica que las funciones de pago óptimas asociadas son crecientes en  $N$  y se encuentran acotadas por  $g^*$ , es decir, tenemos que  $g_N^* \leq g_{N+1}^* \leq g^*$ . Siendo que  $g_N \leq g_{N+1}$ , se evalúa en  $X_\tau$  y se toma esperanza, quedándonos que

$$\mathbb{E}^x [g_N(X_\tau)] \leq \mathbb{E}^x [g_{N+1}(X_\tau)],$$

para cualquier tiempo de parada  $\tau$ , en particular se cumple para el supremo, con lo cual  $g_N^* \leq g_{N+1}^*$ . La demostración de  $g_N^* \leq g^*$  es completamente análoga.

Recordando que  $\widehat{g}_N = g_N^*$  por ser  $g_N$  acotada, entonces la sucesión de funciones  $\{\widehat{g}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  es creciente, estando además acotada superiormente por  $g^*$ . Por esto se tiene que existir una función  $h$ , límite puntual de  $\widehat{g}_N$  que cumple,  $\widehat{g}_N = g_N^* \uparrow h$  y  $h \leq g^*$ .

Debido a que  $h$  es el límite puntual de funciones superarmónicas por el Lema 2.2.4 d) la función  $h$  es superarmónica.

Tomando en cuenta que  $h$  es el límite de los mayorantes superarmónicos asociados a  $g_N$ , entonces esta será mayor a  $g$ , puesto que se puede plantear que

$$h(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{g}_N(x) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(x) = g(x). \quad (2.46)$$

Tenemos entonces que  $h$  es superarmónica y  $h \geq g$ , por lo cual es un mayorante superarmónico de  $g$ , y como  $\hat{g}$  es el menor mayorante superarmónico, se cumple  $h \geq \hat{g}$ . Además como se mencionó anteriormente  $\hat{g} \geq g^*$ . Por lo que se prueba la parte *a*) del Teorema, esto se da por el hecho de que  $h$  se encuentra acotada superiormente por  $g^*$ , quedando que

$$g^* \geq h \geq \hat{g} \geq g^*, \quad (2.47)$$

que implica que los tres términos deben ser iguales.

Por último nos queda demostrar *c*) y *d*). Esto ya que debemos tratar el caso particular de *d*) donde la función de pago  $g$  es acotada, para poder entonces demostrar *c*), que nos permite generalizar *d*) a funciones de pago no acotadas.

El punto *d*) nos muestra que cuando el tiempo de salida de  $D$  es finito casi seguramente, entonces este alcanzara el supremo sobre todos los tiempos de parada.

Comenzando por el caso donde  $g$  es acotada, se puede notar que los conjuntos  $D_\varepsilon$  tienden a  $D$  en el siguiente sentido:

$$D = \bigcup_{\varepsilon > 0} D_\varepsilon. \quad (2.48)$$

Recordando la definición de  $D_\varepsilon$  tenemos que  $D_\varepsilon \subseteq D_{\varepsilon'}$  para  $\varepsilon' < \varepsilon$ . Esta inclusión se obtiene trivialmente, dado que si  $\varepsilon' < \varepsilon$ , entonces  $\hat{g}(x) - \varepsilon < \hat{g}(x) - \varepsilon'$ , de lo que se concluye que cuando  $g(x)$  es menor al primer término, también es menor al segundo.

Considerando la definición de  $D = \{x : g(x) < \hat{g}(x)\}$ , donde se substituyó  $g^*$  por  $\hat{g}$  utilizando la parte *a*), podemos pensar entonces a  $D$  como el conjunto  $D_\varepsilon$  con  $\varepsilon = 0$ , de esto queda claro que  $D_\varepsilon \subseteq D$ , y que efectivamente se cumple (2.48).

Recordar también que  $\tau_\varepsilon$  es el primer tiempo de salida de  $D_\varepsilon$ , entonces para  $\varepsilon' \leq \varepsilon$  se cumple  $\tau_\varepsilon \leq \tau_{\varepsilon'}$  casi seguramente, dado que, como vimos anteriormente, el conjunto  $D_{\varepsilon'}$  contiene al conjunto  $D_\varepsilon$ . Luego, por (2.48), dado que  $D$  contiene a todos los subconjuntos  $D_\varepsilon$  se cumple

$$\tau_\varepsilon \uparrow \tau_D \quad c.s. \quad \varepsilon \downarrow 0. \quad (2.49)$$

Se sabe que  $\tau_D < \infty$  casi seguramente por hipótesis de *d*), por lo que utilizando que  $g$  es continua y las trayectorias de la difusión de Itô también lo son, se tiene que  $g(X_{\tau_\varepsilon}) \rightarrow g(X_{\tau_D})$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Como se está trabajando con  $g$  acotada, existe  $C > 0$  tal que  $|g(X_t)| \leq C$  para todo  $t$  en  $[0, \infty]$ , por lo que se está en las hipótesis del Teorema de convergencia dominada, Teorema 7.4, lo que nos permite intercambiar límite con esperanza, para afirmar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_\varepsilon})] = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})]. \quad (2.50)$$

Como ya se probó  $\hat{g} = g^*$ , utilizando esto en la desigualdad (2.41), se cumple que

$$g^*(x) = \hat{g}(x) \leq \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_\varepsilon})] + 2\varepsilon \leq g^*(x) + 2\varepsilon,$$

y tomando límite con  $\varepsilon \downarrow 0$  resulta

$$g^*(x) = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})]. \quad (2.51)$$

Esto entonces demuestra *d)* para el caso de una función de pago acotada. Ahora lo usaremos para demostrar *c)* para cualquier función de pago  $g$ .

Iniciando con una construcción idéntica al caso de una función no acotada para la parte *a)*, denotando a  $g_N$  como el mínimo entre  $N$  y  $g$ , y a  $\widehat{g}_N$  el menor mayorante superarmónico asociado. Ya vimos que estos son crecientes con  $N$  y que  $h$ , su límite cuando  $N \rightarrow \infty$  es  $g^*$  (2.47).

La igualdad (2.51) junto con la parte *a)* de este Teorema, nos dice que

$$g_N^*(x) = \widehat{g}_N(x) = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_{D_N}})], \quad (2.52)$$

siendo  $D_N$  el conjunto  $D$  asociado a  $g_N$ , es decir,  $D_N = \{x : g_N(x) < \widehat{g}_N(x)\}$ , y  $\tau_{D_N}$  el primer tiempo de salida del mismo.

Utilizando que  $h$ , el límite puntual de  $\{\widehat{g}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ , es igual a  $g^*$ , que  $g_N$  es siempre menor a  $g$ , y por último que  $g^*$  es el supremo sobre todos los tiempos de parada, se tiene la siguiente secuencia de desigualdades

$$g^*(x) = h(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{g}_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g_N(X_{\tau_{D_N}})] \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_{D_N}})] \leq g^*(x), \quad (2.53)$$

donde en el último paso se usó que  $g^*$  es el supremo sobre todos los tiempos de parada.

Debido a que ambos límites son  $g^*(x)$  se concluye que todos son igualdades, con lo que queda demostrada la primera parte de *c)*, que mencionaba

$$g^*(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_{D_N}})]. \quad (2.54)$$

Para concluir la prueba de *c)* queda ver la igualdad de conjuntos es cierta. Notemos que  $\widehat{g}_N \leq N$ , esto ya que la función es igual a la función de pago óptima, y dado que la función de pago es menor o igual a  $N$  entonces la función de pago óptima también debe de serlo, en términos matemáticos tenemos

$$\widehat{g}_N(x) = g^*(x) = \sup_{\tau} \mathbb{E}^x [g_N(X_{\tau})] \leq \sup_{\tau} \mathbb{E}^x [N] = N. \quad (2.55)$$

Esta desigualdad nos es útil para ver que se cumple  $D_N \subseteq D \cap g^{-1}([0, N])$ . Podemos notar que si  $x$  se encuentra en  $D_N$ , entonces  $g_N(x)$  es menor estricto a  $\widehat{g}_N(x)$  y por consecuente es menor a  $N$ , equivalentemente, se cumple  $g_N(x) < N$ . Teniendo en cuenta que  $g_N$  es el mínimo entre  $g$  y  $N$ , y sabemos además que en este punto es estrictamente menor a  $N$ , entonces se debe cumplir que  $g(x) = g_N(x) < N$ , que implica de manera directa que  $x$  se encuentra en el conjunto preimagen de  $[0, N)$ ,  $g^{-1}([0, N))$ . Para ver que  $x$  se encuentra dentro de  $D$  observemos que  $g(x) = g_N(x) < \widehat{g}_N(x) \leq \widehat{g}(x)$ , es así que  $x$  cumple  $g(x) < \widehat{g}(x)$ , que por definición implica que  $x$  se encuentra dentro de  $D$ . Al encontrarse  $x$  dentro de ambos conjuntos siempre que  $x$  se encuentra en  $D_N$ , podemos afirmar que  $D_N$  se encuentra contenido en la intersección de ambos

$$D_N \subset D \cap g^{-1}([0, N]). \quad (2.56)$$

Resta ver que los conjuntos  $D_N$  son crecientes respecto a  $N$ , en el sentido de inclusión, y que la unión de estos recupera  $D$ .

Como mencionamos, si  $x$  se encuentra dentro de  $D_N$ , entonces  $g(x) = g_N(x)$ , es decir que  $g(x)$  es menor a  $N$ , y por ende será menor a  $N + 1$ , con lo cual  $g(x) = g_{N+1}(x)$ . Esto nos permite plantear

$$g_{N+1}(x) = g_N(x) < \widehat{g}_N(x) \leq \widehat{g}_{N+1}(x), \quad (2.57)$$

que implica que  $x$  se encuentra dentro de  $D_{N+1}$ , es decir, se probó que  $D_N \subseteq D_{N+1}$ . Con esto y tomando en cuenta la definición de  $D_N$ , se cumple que

$$D = \bigcup_{N=1}^{\infty} D_N. \quad (2.58)$$

Esto concluye la demostración de la parte *c*). Utilizaremos este punto para demostrar *d*) en el caso donde  $g$  no es acotada.

Al igual que cuando trabajamos con  $D_\varepsilon$ , dado que los conjuntos  $D_N$  son crecientes, y  $D$  contiene a todos ellos, entonces se sabe que  $\tau_{D_N} \leq \tau_{D_{N+1}} \leq \tau_D$ . En particular

$$\tau_D = \lim_{N \rightarrow \infty} \tau_{D_N}. \quad (2.59)$$

Dentro de las hipótesis de *d*) se pide que la familia  $\{g(X_{\tau_{D_N}})\}_{N \in \mathbb{N}}$  sea uniformemente integrable, esto es porque se quiere intercambiar límite con la esperanza en (2.54). Además, como  $g$  es continua y  $X_t$  tiene trayectorias continuas, se tiene la siguiente igualdad

$$g^*(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_{D_N}})] = \mathbb{E}^x \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} g(X_{\tau_{D_N}}) \right] = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})]. \quad (2.60)$$

Lo que demuestra *d*), y por ende finaliza la prueba del Teorema. □

**Observación 2.2.16.** Notemos que se cumple lo siguiente

1. Dado que  $g$  es continua y  $\hat{g}$  es semicontinua por debajo, entonces los conjuntos  $D$ ,  $D_\varepsilon$  y  $D_N$  son abiertos.
2. En la demostración del ítem *a*) del Teorema, solo se utilizó que  $g \geq 0$  sea semicontinua por debajo, con lo cual se puede pedir esto en lugar de continuidad para *a*).

*Demostración.* Demostraremos el caso de  $D$ , las demostraciones para  $D_\varepsilon$  y  $D_N$  son análogas.

Para demostrar que este conjunto es abierto, veamos que para cualquier punto de  $D$  se puede encontrar una bola abierta contenida en  $D$ .

Para  $x_0$  en  $D$  se cumple  $g(x_0) < g^*(x_0)$ . Como  $g$  es una función continua, se puede encontrar  $\varepsilon > 0$  tal que la bola cerrada de centro  $x_0$  y radio  $\varepsilon$ ,  $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$ , esté contenida en  $D$ , y además el máximo de  $g$  en esta bola,  $M$ , sea menor estricto a  $\hat{g}(x_0)$ .

Como  $g^*$  es semicontinua por debajo, se sabe que para todo  $\delta_1 > 0$ , existe una bola abierta de centro  $x_0$  y radio  $\delta_2 > 0$  tal que

$$g^*(x_0) - \delta_1 < g^*(x) \quad \forall x \in B(x_0, \delta_2). \quad (2.61)$$

Observemos que al cumplirse  $M < g^*(x_0)$ , podemos tomar  $\delta_1 = g^*(x_0) - M > 0$  y así quedarnos con la desigualdad,

$$M < g^*(x) \quad \forall x \in B(x_0, \delta_2). \quad (2.62)$$

Si se toma la menor de las bolas, ambas condiciones se cumplen a la vez, con lo cual  $g(x) \leq M < g^*(x)$  y nos encontramos dentro de  $D$ . Es decir la bola que tenga radio  $\varepsilon' = \min\{\delta_2, \varepsilon\}$  y centro  $x_0$ , se encuentra contenida dentro de  $D$ . Se concluye que para todo punto  $x_0$  se puede encontrar un abierto contenido dentro de  $D$ , con lo cual  $D$  es abierto.  $\square$

**Corolario 2.2.17.** *Si existe un conjunto de Borel  $H$  tal que la función  $\tilde{g}_H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\tilde{g}_H(x) := \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_H})], \quad (2.63)$$

*sea un mayorante supermeanvalued de  $g$ , donde  $\tau_H = \inf\{t > 0 : X_t \notin H\}$ , se tiene entonces*

$$g^*(x) = \tilde{g}_H(x), \quad (2.64)$$

*y  $\tau^* = \tau_H$  es óptimo.*

*Demostración.* Sea  $\bar{g}$  el menor mayorante *supermeanvalued* de  $g$ . Entonces si  $\tilde{g}_H$  es un mayorante *supermeanvalued* de  $g$  se cumple que  $\bar{g}(x) \leq \tilde{g}_H(x)$ .

Por como se define  $\tilde{g}_H$ , resulta sencillo acotar la función por  $g^*$ ,

$$\tilde{g}_H(x) = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_H})] \leq \sup_{\tau} \mathbb{E}^x [g(X_{\tau})] = g^*(x). \quad (2.65)$$

Finalmente por los Teoremas 2.2.13 y 2.2.15 se tiene que

$$g^*(x) = \hat{g}(x) = \bar{g}(x) \leq \tilde{g}_H(x) \leq g^*(x), \quad (2.66)$$

por lo que  $\tilde{g}_H(x) = g^*(x)$  y queda demostrado el corolario.  $\square$

**Corolario 2.2.18.** *Sea*

$$D = \{x : g(x) < \hat{g}(x)\}, \quad (2.67)$$

*definimos la función  $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como*

$$\tilde{g}(x) = \tilde{g}_D(x) = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})]. \quad (2.68)$$

*Si  $\tilde{g} \geq g$ , entonces  $\tilde{g} = g^*$*

*Demostración.* Dado que  $\tau_D$  es el primer tiempo de salida de  $D$ , se tiene que  $X_{\tau_D} \notin D$ , entonces  $g(X_{\tau_D}) \geq \hat{g}(X_{\tau_D})$ . Sin embargo,  $\hat{g}$  es un mayorante de  $g$ , con lo cual se debe cumplir  $g(X_{\tau_D}) = \hat{g}(X_{\tau_D})$  casi seguramente. Esto permite sustituir a  $g$  por  $\hat{g}$  en la definición de  $\tilde{g}$  quedándonos  $\tilde{g}(x) = \mathbb{E}^x[\hat{g}(X_{\tau_D})]$ . El Lema 2.2.4 f) nos asegura que  $\tilde{g}$  es una función *supermeanvalued*. Por hipótesis se cumple  $\tilde{g} \geq g$ , siendo entonces  $\tilde{g}$  un mayorante *supermeanvalued* de  $g$ . Esto implica que estamos dentro de las condiciones del Corolario 2.2.17, lo que completa la demostración.  $\square$

Es importante observar que la teoría vista hasta el momento en ningún momento nos asegura la existencia del tiempo de parada óptimo  $\tau^*$ , esto es simplemente porque este no siempre existe. Veamos a continuación un caso trivial donde el tiempo de parada óptimo no existe.

**Ejemplo 2.2.19.** Sea  $X_t = t$ , un proceso determinístico. Este es una difusión de Itô ya que lo determina la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = dt + 0dW_t \quad X_0 = 0. \quad (2.69)$$

Si se elige como función de pago a

$$g(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.70)$$

entonces el tiempo de parada óptimo no existe.

La función de pago  $g$  es creciente, y su límite cuando  $x \rightarrow \infty$  es 1, lo cual nos permite afirmar que

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}^x[g(X_t)] = \sup_{t \geq 0} \frac{t^2}{1+t^2} = 1.$$

Observemos que este es el resultado de la primera iteración del Corolario 2.2.14, al devolvernos esta iteración un término constante, nos permite decir que  $\hat{g} = 1$ , y por el Teorema 2.2.15 a) esta función es también la función de pago óptimo. Con esto se tiene que, para cualquier tiempo de parada que no sea  $\tau = \infty$  casi seguramente, la función de pago evaluada en el proceso será menor a 1, y por lo tanto la esperanza también lo será. Se concluye que el tiempo de parada óptimo  $\tau^*$  no existe.

Este resultado es entristecedor, pero para contraponer una mala noticia con una buena, veremos que en caso de existir el tiempo de parada óptimo, entonces es único, coincidiendo con el tiempo de parada óptimo dado por el Teorema 2.2.15.

**Teorema 2.2.20.** *Unicidad del tiempo de parada óptimo* Recordando que

$$D = \{x : g(x) < g^*(x)\}$$

y asumamos que existe un tiempo de parada óptimo  $\tau^* = \tau^*(x, \omega)$  para toda  $x$  condición inicial. Entonces

$$\tau^* \geq \tau_D \quad \forall x \in D, \quad (2.71)$$

y además

$$g^*(x) = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.72)$$

Con lo cual  $\tau_D$  es un tiempo de parada óptimo.

*Demostración.* Sea  $x$  un punto dentro de  $D$ , que recordemos es abierto, y un tiempo de parada  $\tau$  respecto a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$ . En primer lugar, nos interesa ver que efectivamente el tiempo de parada óptimo debe de ser mayor o igual a  $\tau_D$ . En efecto, si se cumple que  $\tau$  es menor a  $\tau_D$  con probabilidad no nula, se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x [g(X_\tau)] &= \mathbb{E}^x [\mathbf{1}_{\{\tau < \tau_D\}} g(X_\tau)] + \mathbb{E}^x [\mathbf{1}_{\{\tau \geq \tau_D\}} g(X_\tau)] \\ &< \mathbb{E}^x [\mathbf{1}_{\{\tau < \tau_D\}} g^*(X_\tau)] + \mathbb{E}^x [\mathbf{1}_{\{\tau \geq \tau_D\}} g^*(X_\tau)] \\ &= \mathbb{E}^x [g^*(X_\tau)] \leq g^*(x), \end{aligned}$$

puesto que al condicionar al evento  $\{\tau < \tau_D\}$ , que tiene probabilidad no nula, acotamos de forma estricta  $g(X_\tau)$  por  $g^*(X_\tau)$ , dado que  $X_\tau \in D$ , y que  $g^* = \hat{g}$ ; luego se juntan ambas esperanzas en una sola y se usa que  $g^*$  es superarmónica.

Esto nos permite afirmar que si  $\tau < \tau_D$  con probabilidad no nula, se tiene la siguiente desigualdad estricta

$$\mathbb{E}^x [g(X_\tau)] < g^*(x), \quad (2.73)$$

por lo que se deduce que el tiempo de parada óptimo  $\tau^*$  es mayor a  $\tau_D$  casi seguramente.

Mostrar que el óptimo efectivamente se alcanza en  $\tau_D$  es más complejo. Para ello precisaremos separar la demostración en tres casos, e introducir el concepto de punto irregular. Comenzamos primero introduciendo dicha definición.

**Definición 2.2.21** (Punto Regular). Sea  $B$  un boreliano. Un punto  $x \in \partial B$  se dice regular con respecto a  $X_t$  si

$$\mathbb{P}^x(\tau_B = 0) = 1, \quad (2.74)$$

donde, como es usual  $\tau_B$  es el primer tiempo de salida del conjunto  $B$ . Si esto no se cumple, entonces el punto se dice irregular.

Aplicando la Ley 0 – 1, Teorema 7.15, no es difícil ver que el suceso  $\{\tau_B = 0\}$ , debe tener probabilidad 0 o 1. Esto es debido a que  $\{\tau_B = 0\}$  se encuentra en  $\mathcal{M}_0$ , y consecuentemente se encuentra dentro de  $\cap_{t \geq 0} \mathcal{M}_t$ .

Intuitivamente, la regularidad de un punto nos dice que si soltamos un proceso en el borde de algún conjunto, este entonces en el siguiente instante debe entrar o no al conjunto. Llamamos a un punto regular si al dejar al proceso en este, el mismo se va del conjunto en el siguiente instante, e irregular a los que no.

Comencemos entonces con la demostración propiamente dicha, primero veamos el caso en que  $x$  se encuentra dentro de  $D$ . Se buscará acotar  $\mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})]$  tanto por arriba como por debajo por  $g^*$ .

La cota superior es trivial por la definición de  $g^*$ . Para la cota inferior, recordemos que  $\hat{g}$  es un mayorante de  $g$ , con lo cual su esperanza será mayor, es decir,

$$g^*(x) = \mathbb{E}^x[g(X_{\tau^*})] \leq \mathbb{E}^x[\hat{g}(X_{\tau^*})]. \quad (2.75)$$

Luego, por el hecho que  $\hat{g}$  es una función superarmónica y se cumple  $\tau^* \geq \tau_D$ , entonces, mediante el Lema 2.2.4, se cumple

$$\mathbb{E}^x[\hat{g}(X_{\tau^*})] \leq \mathbb{E}^x[\hat{g}(X_{\tau_D})]. \quad (2.76)$$

Por último, dado que el proceso se encuentra evaluado en  $\tau_D$ , el primer tiempo de salida de  $D$ , donde  $g$  y  $\hat{g}$  son iguales, se tiene que

$$g^*(x) \leq \mathbb{E}^x[\hat{g}(X_{\tau_D})] = \mathbb{E}^x[g(X_{\tau_D})]. \quad (2.77)$$

Tenemos entonces ambas cotas, por lo cual podemos asegurar que si  $x$  se encuentra dentro de  $D$  se cumple

$$g^*(x) = \mathbb{E}^x[g(X_{\tau_D})]. \quad (2.78)$$

Se demuestra ahora el más problemático de los casos, el cual es cuando  $x$  se encuentra en el borde de  $D$ , siendo este un punto irregular. En este caso, por la Definición 2.2.21, se cumple que  $\tau_D > 0$  casi seguramente. Lo que haremos es definir una sucesión de tiempos de parada  $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , que tienden a 0 casi seguramente, y son todos menores a  $\tau_D$ . Esto nos permite trabajar en el interior de  $D$ , donde ya tenemos una solución. Denotemos entonces  $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , una secuencia de tiempos de parada que cumple

$$0 < \sigma_k < \tau_D \text{ y además } \sigma_k \rightarrow 0 \text{ c.s. cuando } k \rightarrow \infty. \quad (2.79)$$

Como  $\sigma_k < \tau_D$  entonces  $X_{\sigma_k} \in D$ , con esto mediante la propiedad telescópica de la esperanza condicional, ver Teorema 7.7, se tiene que

$$\mathbb{E}^x[g(X_{\tau_D})] = \mathbb{E}^x[\mathbb{E}^{X_{\sigma_k}}[g(X_{\tau_D})]]. \quad (2.80)$$

Observemos que la esperanza interior en el segundo término tiene como punto inicial a  $X_{\sigma_k}$  que, como se mencionó, se encuentra dentro de  $D$ , y se puede así afirmar que esta esperanza es igual a la función de pago óptima evaluada en  $X_{\sigma_k}$ ,

$$\mathbb{E}^x[g(X_{\tau_D})] = \mathbb{E}^x[g^*(X_{\sigma_k})]. \quad (2.81)$$

Esta igualdad nos permite afirmar lo siguiente: si el proceso  $X_t$  cumple que  $X_0 = x$ , por ser  $g^*$  semicontinua por debajo, se cumple

$$g^*(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} g^*(X_{\sigma_k}), \quad (2.82)$$

y por lo tanto, al tomar esperanzas de ambos lados nos queda

$$g^*(x) \leq \mathbb{E}^x \left[ \liminf_{k \rightarrow \infty} g^*(X_{\sigma_k}) \right]. \quad (2.83)$$

En esta ecuación es conveniente aplicar el Lema de Fatou, recordando la igualdad (2.81), los términos que obtenemos luego de sacar el límite inferior de la esperanza son todos constantes, es decir que se cumple que

$$\begin{aligned}
g^*(x) &\leq \mathbb{E}^x \left[ \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} g^*(X_{\sigma_k}) \right] \\
&\leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g^*(X_{\sigma_k})] \\
&= \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})] \\
&= \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})] \leq g^*(x),
\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado para  $x \in \partial D$  irregular.

Solo resta ver que sucede si  $x$  se encuentra en el borde de  $D$ , y es un punto regular, y el caso  $x \notin \bar{D}$ . En ambos casos se cumple  $\tau_D = 0$  casi seguramente. Esto trivializa la demostración, dado que se cumple  $\mathbb{E}^x[g(X_{\tau_D})] = g(x)$  y como  $X_{\tau_D}$  está fuera de  $D$  se tiene que  $g = \hat{g} = g^*$  y

$$\mathbb{E}^x[g(X_{\tau_D})] = \mathbb{E}^x[g^*(X_{\tau_D})] = g^*(x), \quad (2.84)$$

lo que completa la demostración del teorema.  $\square$

**Observación 2.2.22.** Sea  $\mathcal{A}$  el operador característico de  $X_t$ . Si  $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$  se define

$$U = \{x : \mathcal{A}g > 0\}, \quad (2.85)$$

se cumple que  $U \subseteq D$  siendo  $D$  el conjunto definido en (2.27).

*Demostración.* Sea  $W$  un conjunto abierto y acotado incluido en  $U$ , y  $x \in W$ . Denotemos por  $\tau_W$  al primer tiempo de salida de  $W$ . Para  $T > 0$ , mediante la fórmula de Dynkin y se obtiene

$$\mathbb{E}^x [g(X_{\tau_W \wedge T})] = g(x) + \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau_W \wedge T} \mathcal{A}g(X_s) ds \right] > g(x), \quad (2.86)$$

dado que  $x$  se encuentra en  $U$ , esto implica  $\mathcal{A}g > 0$ , y la esperanza también será positiva. Entonces se tiene que  $g(x) < g^*(x)$ , por lo que  $U \subseteq D$ .  $\square$

### 2.3. Funciones de pago con valores negativos

Hasta el momento se piden tres condiciones sobre la función de pago  $g$ , que esta sea homogénea en el tiempo, que sea continua y por último, que sea no negativa. En los siguientes capítulos ve de forma extensa cómo trabajar el caso no homogéneo, pero antes de esto, de manera muy breve, veamos qué sucede cuando la función de pago puede tomar valores negativos.

Existen así dos posibles casos para  $g$ , el primero es que esta función se encuentre acotada por debajo, es decir  $g \geq -M$  con  $M > 0$ , entonces se puede tomar

$$g_1(x) = g(x) + M.$$

Esta nueva función  $g_1$  será no negativa, y el problema es igual al anterior, con la única diferencia de que debemos tomar

$$\mathbb{E}^x [g(X_\tau)] = \mathbb{E}^x [g_1(X_\tau)] - M \text{ si } \tau < \infty \text{ c.s.,}$$

y por ende si existe  $\tau^*$ , las funciones de pago óptimo  $g^*$  y  $g_1^*$  se relacionan de la siguiente forma

$$g^*(x) = g_1^*(x) - M.$$

La segunda posibilidad para  $g$  es que no se encuentre acotada inferiormente; para este caso es necesario definir  $g^-(x) = -\text{mín}\{g(x), 0\}$ , donde se deben cumplir las siguientes condiciones:

1.  $\mathbb{E}^x [g^-(X_\tau)] < \infty$  para cualquier tiempo de parada  $\tau$ .
2. La familia de procesos  $\{g^-(X_\tau) : \tau \text{ un tiempo de parada}\}$  debe ser uniformemente integrable.

Cuando ambas condiciones se cumplen la gran mayoría de la teoría vista hasta el momento es aplicable, no realizaremos un desarrollo de esto en la monografía, pero se puede encontrar el mismo en [9].

Lo que se verá luego en el Teorema 5.1 es el cómo verificar si una cierta función es efectivamente la solución del problema de parada óptima, donde se incluye la posibilidad de una función de pago con valores negativos.

## Capítulo 3

# Pagos no homogéneos en el tiempo

Como se mencionó anteriormente, es posible eliminar la restricción de que la función de pago  $g$  sea homogénea en el tiempo, lo cual es lo que se trabajara en este capítulo. Utilizando un pequeño truco que ya veremos, el estudio de este caso en realidad se reduce a transformar el problema en uno homogéneo y aplicar toda la teoría vista hasta el momento.

Dicho esto, las condiciones que sobre la función de pago  $g$  son que esta sea de la forma  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ , donde la primera coordenada se encuentra asociada al tiempo y la segunda al espacio, que  $g$  sea continua, y por último, como se puede ver en su definición, que sea no negativa.

Siendo el problema igual al del caso homogéneo, hallar  $g^* : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  la función de pago óptimo y el tiempo de parada óptimo  $\tau^*$  asociado. Es decir, hallar  $g^*$  y  $\tau^*$  tales que se cumpla

$$g^*(x) = \sup_{\tau} \mathbb{E}^x [g(\tau, X_{\tau})] = \mathbb{E}^x [g(\tau^*, X_{\tau^*})], \quad (3.1)$$

Para trabajar este caso, lo que hacemos es acoplar el tiempo a nuestro proceso  $X_t$ , resultando en un nuevo proceso  $Y_t$ , de forma tal que nos encontremos nuevamente en el caso homogéneo. Sea entonces el proceso  $X_t = X_t^x$  una difusión de Itô, donde el superíndice indica el punto inicial, es decir,  $X_t$  verifica

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \quad t \geq 0 \quad X_0 = x. \quad (3.2)$$

Se define la difusión de Itô  $Y_t = Y_t^{(s,x)}$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  como

$$Y_t = \begin{pmatrix} s+t \\ X_t^x \end{pmatrix} \quad t \geq 0, \quad (3.3)$$

que verifica la ecuación diferencial estocástica,

$$dY_t = \begin{pmatrix} 1 \\ b(X_t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma(X_t) \end{pmatrix} dW'_t = \hat{b}(Y_t)dt + \hat{\sigma}(Y_t)dW'_t. \quad (3.4)$$

Donde  $dt$  es el diferencial en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $W'_t$  el proceso browniano en este mismo espacio.

Se cumple así que el proceso  $Y_t$  es una difusión de Itô homogénea, como queríamos, y se puede reescribir el problema de la siguiente manera

$$g^*(0, x) = \sup_{\tau} \mathbb{E}^{(0,x)} [g(Y_{\tau})] = \mathbb{E}^{(0,x)} [g(Y_{\tau^*})], \quad (3.5)$$

que es un caso particular de

$$g^*(s, x) = \sup_{\tau} \mathbb{E}^{(s,x)} [g(Y_{\tau})] = \mathbb{E}^{(s,x)} [g(Y_{\tau^*})]. \quad (3.6)$$

Este tipo de problemas fueron los que estudiamos en el capítulo anterior (2.4), y que sabemos resolver.

Trabajar con funciones de pago no homogéneas se reduce a transformar nuestro proceso en un proceso que incluya el tiempo, para pasar al caso homogéneo, y resolver el problema con las herramientas conocidas.

**Observación 3.1.** Si  $Y_t$  es el proceso que resulta de homogeneizar el problema para una difusión  $X_t$ , su operador característico  $\widehat{\mathcal{A}}$  cumple

$$\widehat{\mathcal{A}}\phi(s, x) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, x) + \mathcal{A}\phi(s, x) \quad \phi \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \quad (3.7)$$

siendo  $\mathcal{A}$  el operador característico de  $X_t$ , que actúa sobre la variable  $x$ .

Una familia de funciones de pago importantes en finanzas son aquellas que toman cierta función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y se le aplica un término de descuento asociado a la inflación, obteniendo así una función  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , no homogénea en el tiempo, de la forma

$$g(s, x) = e^{-rs} f(x). \quad (3.8)$$

Aquí  $r$  es un término dependiente de la inflación.

Estudiaremos un caso particular que tiene esta forma, donde cierto activo tiene un precio que llamaremos  $X_t$ , y lo modelaremos como un movimiento browniano geométrico. Se tomara cómo función de pago a

$$g(s, x) = e^{-rs} (x - a)^+, \quad (3.9)$$

donde  $x^+$  denota  $\max\{x, 0\}$ .

**Ejemplo 3.2.** Sea  $X_t^x$  un movimiento Browniano geométrico, es decir, la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x, \quad (3.10)$$

que es particularmente una difusión de Itô homogénea.

Queremos hallar el pago óptimo para la función

$$g(s, x) = e^{-rs} (x - a)^+ \quad (3.11)$$

donde  $r$  y  $a$  son constantes positivas.

La teoría vista hasta el momento requiere simplemente que la función de pago sea una función continua y no negativa, condiciones que nuestra función de pago  $g$  cumple, pero que no sea una función de clase  $C^2$  resulta inconveniente, ya que no podemos trabajar con el operador característico de nuestro proceso estocástico. Para resolver este problema, se verá que sustituir  $(x - a)^+$  por  $(x - a)$  da la misma función de pago óptima y el mismo tiempo de parada óptimo, con la ventaja de que la nueva función de pago es de clase  $C^2$ .

**Lema 3.3.** *Sea  $X_t$  un movimiento browniano geométrico de la forma*

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x, \quad (3.12)$$

con  $x > 0$ .

*Las funciones de pago*

$$g(s, x) = e^{-rs}(x - a)^+ \quad \text{y} \quad \tilde{g}(s, x) = e^{-rs}(x - a) \quad (3.13)$$

*resultan en la misma función de pago óptimo  $g^*$ , y tienen el mismo tiempo de parada óptimo asociado  $\tau^*$ .*

*Demostración.* Para demostrar que efectivamente ambas funciones cuentan con el mismo tiempo de parada óptimo  $\tau^*$ , y la misma función de pago óptimo  $g^*$ , vamos a ver que el tiempo de parada óptimo debe cumplir  $X_{\tau^*} \geq a$  casi seguramente. Esto muestra que ambas funciones tienen asociada una misma función de pago óptimo y tiempo de parada óptimo, ya que si  $x \geq a$ , entonces  $\tilde{g}(s, x) = g(s, x)$ , con lo cual nos encontramos maximizando la misma función.

Supongamos que el tiempo de parada óptimo  $\tau^*$  para  $\tilde{g}$  cumple que  $X_{\tau^*} < a$  con probabilidad no nula, podemos entonces descomponer la esperanza de  $\tilde{g}$  de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \left[ e^{-r\tau^*} (X_{\tau^*} - a) \right] &= \mathbb{E}^x \left[ e^{-r\tau^*} (X_{\tau^*} - a) \mathbb{1}_{\{X_{\tau^*} < a\}} \right] \\ &\quad + \mathbb{E}^x \left[ e^{-r\tau^*} (X_{\tau^*} - a) \mathbb{1}_{\{X_{\tau^*} \geq a\}} \right] \\ &< \mathbb{E}^x \left[ e^{-r\tau^*} (X_{\tau^*} - a) \mathbb{1}_{\{X_{\tau^*} \geq a\}} \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

ya que bajo el evento que  $X_{\tau^*} < a$ , se tiene que  $e^{-r\tau^*} (X_{\tau^*} - a) < 0$  y por ende su esperanza también será negativa.

La desigualdad en (3.14) nos lleva directo a una contradicción. Intuitivamente, se puede tomar un nuevo tiempo de parada  $\bar{\tau}$ , que se comporta igual a  $\tau^*$ , excepto cuando el valor resultante del proceso es menor a  $a$ ; en este segundo caso, el tiempo  $\bar{\tau}$  espera a que el proceso alcance el valor  $a$ . Este mecanismo nos lleva a tener una mayor esperanza, puesto que no contamos con pagos negativos.

Fuera de esta idea intuitiva del porqué sucede la contradicción, se debe mostrar que efectivamente  $\bar{\tau}$  es un tiempo de parada, y que además se obtiene un valor esperado mayor. Se define  $\bar{\tau}$  de la siguiente manera:

$$\bar{\tau} = \tau^* \mathbb{1}_{\{X_{\tau^*} \geq a\}} + \tau_a(\tau^*) \mathbb{1}_{\{X_{\tau^*} < a\}}, \quad (3.15)$$

donde  $\tau_a(\tau^*) = \inf\{t \geq \tau^* : X_t \geq a\}$  es el primer tiempo mayor que  $\tau^*$  donde el proceso alcanza  $a$ .

Veamos que este efectivamente es un tiempo de parada. Para esto tenemos que ver que el suceso  $\{\bar{\tau} \leq t\}$  es  $\mathcal{F}_t$  medible. Para que  $\bar{\tau}$  sea menor a  $t$  debe suceder que  $\tau^*$  sea menor a  $t$  y  $X_{\tau^*}$  mayor o igual a  $a$ , o en su defecto, que  $\tau_a(\tau^*)$  sea menor a  $t$  y  $X_{\tau^*}$  sea menor a  $a$ . Esto nos permite reescribir al conjunto  $\{\bar{\tau} \leq t\}$  como

$$\{\bar{\tau} \leq t\} = (\{\tau^* \leq t\} \cap \{X_{\tau^*} \geq a\}) \cup (\{\tau_a(\tau^*) \leq t\} \cap \{X_{\tau^*} < a\}).$$

Resta ver que ambos términos de la unión son  $\mathcal{F}_t$  medibles. Podemos ver que el primer término es  $\mathcal{F}_t$  medible observando que al sustituir  $\tau^*$  por  $\tau^* \wedge t$  en el evento  $\{x_{\tau^*} \geq a\}$ , no se modificará el evento, pues está intersectado con  $\{\tau^* \leq t\}$ . Se obtiene que el primer término de la unión es igual a  $\{\tau^* \leq t\} \cap \{X_{\tau^* \wedge t} \geq a\}$ , donde el primer conjunto,  $\{\tau^* \leq t\}$ , es  $\mathcal{F}_t$  medible por ser  $\tau^*$  un tiempo de parada, y el segundo conjunto,  $\{X_{\tau^* \wedge t} \geq a\}$ , precisa la trayectoria del proceso hasta un tiempo menor o igual a  $t$ , con lo cual también es  $\mathcal{F}_t$  medible.

Por último, para mostrar que el segundo término de la unión es  $\mathcal{F}_t$  medible, observar que si  $\tau_a(\tau^*)$  es menor o igual a  $t$ ,  $\tau^*$  también lo será, con lo cual podemos plantear

$$\{\tau_a(\tau^*) \leq t\} \cap \{X_{\tau^*} < a\} = \{\tau_a(\tau^*) \leq t\} \cap (\{\tau^* \leq t\} \cap \{X_{\tau^*} < a\}), \quad (3.16)$$

ver que este conjunto es  $\mathcal{F}_t$  medible es análogo a la intersección anterior.

Con esto queda demostrado que  $\bar{\tau}$  es efectivamente un tiempo de parada, que como queríamos se comporta como  $\tau^*$ , pero si  $X_{\tau^*}$  es menor que  $a$  continua hasta que el proceso valga  $a$ . Tomando esperanza en la función de pago con este tiempo de parada y separando en los casos donde  $X_{\tau^*}$  es menor a  $a$  y mayor o igual a  $a$ , queda la siguiente ecuación,

$$\mathbb{E}^x [e^{-r\bar{\tau}}(X_{\bar{\tau}} - a)] = \mathbb{E}^x [e^{-r\bar{\tau}}(X_{\bar{\tau}} - a)\mathbb{1}_{\{X_{\tau^*} < a\}}] + \mathbb{E}^x [e^{-r\bar{\tau}}(X_{\bar{\tau}} - a)\mathbb{1}_{\{X_{\tau^*} \geq a\}}]. \quad (3.17)$$

Por como se define  $\bar{\tau}$ , la primera esperanza tiene la condición de que  $X_{\tau^*}$  sea menor a  $a$ , con lo cual  $\bar{\tau}$  tomará el valor de  $\tau_a(\tau^*)$ . Como el proceso a tiempo  $\tau_a(\tau^*)$  es mayor o igual a  $a$  tenemos  $X_{\tau_a(\tau^*)} - a \geq 0$ , y con esto la primera esperanza será positiva. Luego, en la segunda esperanza tenemos la condición  $X_{\tau^*} \geq a$ , con lo cual el tiempo de parada  $\bar{\tau}$  coincide con  $\tau^*$ , sustituyendo esto, tenemos la cota,

$$\mathbb{E}^x [e^{-r\bar{\tau}}(X_{\bar{\tau}} - a)] \geq \mathbb{E}^x [e^{-r\tau^*}(X_{\tau^*} - a)\mathbb{1}_{\{X_{\tau^*} \geq a\}}]. \quad (3.18)$$

La desigualdad anterior nos lleva a una contradicción, dado que por la ecuación (3.14) obtenemos que la esperanza para  $\bar{\tau}$  es mayor que para  $\tau^*$ ,

$$\mathbb{E}^x [e^{-r\tau^*}(X_{\tau^*} - a)] < \mathbb{E}^x [e^{-r\bar{\tau}}(X_{\bar{\tau}} - a)], \quad (3.19)$$

lo que es absurdo, ya que habíamos supuesto que  $\tau^*$  era el tiempo óptimo.

Con esto se concluye que, si se tiene un tiempo óptimo  $\tau^*$ , este tiene que cumplir que

$$\mathbb{P}(X_{\tau^*} < a) = 0. \quad (3.20)$$

Entonces el tiempo de parada óptimo  $\tau^*$  cumple que  $X_{\tau^*} \geq a$  casi seguramente, por lo que

$$\mathbb{E}^x \left[ e^{-r\tau^*} (X_{\tau^*} - a) \right] = \mathbb{E}^x \left[ e^{-r\tau^*} (X_{\tau^*} - a) \mathbb{1}_{\{X_{\tau^*} \geq a\}} \right]. \quad (3.21)$$

En particular,  $\tau^*$  debe maximizar ambos lados de esta ecuación. Teniendo en cuenta que la esperanza de la derecha se encuentra restringida a  $X_{\tau^*}$  mayor o igual a  $a$ , la cual es la misma región donde  $(X_{\tau^*} - a)^+$  y  $X_{\tau^*} - a$  coinciden, esta esperanza será igual a la que define  $g(\tau^*, X_{\tau^*})$ , es decir,

$$\mathbb{E}^x \left[ e^{-r\tau^*} (X_{\tau^*} - a) \mathbb{1}_{\{X_{\tau^*} \geq a\}} \right] = \mathbb{E}^x \left[ e^{-r\tau^*} (X_{\tau^*} - a)^+ \right] = \mathbb{E}^x [g(\tau^*, X_{\tau^*})]. \quad (3.22)$$

Se concluye que  $\tau^*$ , el tiempo de parada que maximiza a la función de pago  $\tilde{g}$ , también maximiza a la función  $g$ .  $\square$

$$Y_t = \begin{pmatrix} s + t \\ X_t \end{pmatrix}.$$

En la observación 3.1 se mencionó que la forma del operador característico de este proceso es,

$$\widehat{\mathcal{A}}f(s, x) = \frac{\partial f}{\partial s} + \mu x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (3.23)$$

Para la función  $\tilde{g}$  toma la forma

$$\widehat{\mathcal{A}}\tilde{g}(s, x) = -re^{-rt}(x - a) + \mu xe^{-rt} = ((\mu - r)x + ra)e^{-rt}. \quad (3.24)$$

Precisamos conocer  $\widehat{\mathcal{A}}\tilde{g}$  para determinar el conjunto  $U$ , donde el operador característico de la función de pago es positivo, que fue definido en la observación 2.2.22. En esta observación se demostró que  $U$  está contenido en  $D$ , y en este caso nos permite determinar la forma de  $D$ . Por los Teoremas 2.2.15 y 2.2.20, sabemos que  $\tau_D$  el primer tiempo de salida de  $D$  es óptimo.

Estudiando la condición  $\widehat{\mathcal{A}}\tilde{g} \geq 0$  en (3.24), se desprenden dos casos: si  $\mu$  es mayor o igual a  $r$ , entonces  $\widehat{\mathcal{A}}\tilde{g} \geq 0$  se cumple para todo  $(s, x)$ , con  $x$  positivo; sin embargo, si  $\mu$  es menor a  $r$ , entonces  $x$  debe pertenecer a  $(0, \frac{ra}{r-\mu})$ . Existen dos posibilidades para el conjunto  $U$ , que son:

$$U = \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, & \mu \geq r \\ \left\{ (s, x) : 0 < x < \frac{ra}{r-\mu} \right\}, & \mu < r. \end{cases} \quad (3.25)$$

Comencemos por el primer caso, dado que este es el más sencillo de ambos. El proceso  $X_t$  es siempre positivo por ser un movimiento browniano geométrico con una condición inicial positiva, que implica que  $Y_t$  se encuentra en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . El conjunto  $D$  debe ser entonces un

subconjunto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , pero sabemos que  $U$  es un subconjunto de  $D$ , y  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , por lo que  $D$  es  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Dado que el proceso  $Y_t$  nunca saldrá de  $D$ , el tiempo de parada  $\tau_D$  toma el valor infinito, con lo cual el tiempo de parada óptimo no existe.

El segundo caso, donde se cumple  $\mu < r$ , es más interesante. Veremos que  $D$  tiene una forma similar a  $U$ , con la diferencia de que el límite superior de  $x$  es distinto. Para demostrar esto veamos primero que  $D$  es invariante respecto al tiempo en el siguiente sentido,

$$D + (t_0, 0) = D \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}. \quad (3.26)$$

Notemos que  $\tilde{g}$  cumple la siguiente igualdad,

$$\tilde{g}(s - t_0, x) = e^{-r(s-t_0)}(x - a) = e^{rt_0} e^{-rs}(x - a) = e^{rt_0} \tilde{g}(s, x). \quad (3.27)$$

Y la función de pago óptimo  $\tilde{g}^*$  cumple

$$\begin{aligned} \tilde{g}^* &= \sup_{\tau} \mathbb{E}^{(s-t_0, x)} [e^{-r\tau}(X_{\tau} - a)] = \sup_{\tau} \mathbb{E} [e^{-r(\tau+s-t_0)}(X_{\tau}^x - a)] \\ &= e^{rt_0} \sup_{\tau} \mathbb{E} [e^{-r(\tau+s)}(X_{\tau}^x - a)] = e^{rt_0} \tilde{g}^*(s, x). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Utilizando las igualdades (3.27), (3.28) se obtiene (3.26) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} D + (t_0, 0) &= \{(t + t_0, x) : (t, x) \in D\} \\ &= \{(s, x) : (s - t_0, x) \in D\} \\ &= \{(s, x) : \tilde{g}(s - t_0, x) < \tilde{g}^*(s - t_0, x)\} \\ &= \{(s, x) : e^{rt_0} \tilde{g}(s, x) < e^{rt_0} \tilde{g}^*(s, x)\} \\ &= \{(s, x) : \tilde{g}(s, x) < \tilde{g}^*(s, x)\} = D. \end{aligned}$$

Dado que  $D$  es invariante respecto del tiempo, esto implica que  $D$  está compuesto por franjas horizontales en el plano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , es decir debe ser la unión de conjuntos de la forma

$$D(a, b) = \{(t, x) : a < x < b\}. \quad (3.29)$$

En particular, uno de estos conjuntos debe ser  $D(0, x_0)$ , con  $x_0 \geq \frac{ra}{r-\mu}$ , dado que  $U$  se encuentra contenido en  $D$ . De hecho, el conjunto  $D(0, x_0) = D(x_0)$  es el único elemento de  $D$  con un tiempo de salida no nulo. Para ver esto, observemos que si  $D(a, b)$  es una franja horizontal de  $D$  distinta a  $D(x_0)$ , e  $y \in D(a, b)$  es un punto que no pertenece a  $U$ , debe suceder que  $\hat{A}\tilde{g} \leq 0$ . Mediante la fórmula de Dynkin, el valor esperado de nuestro proceso decrece mientras permanezca en  $D(a, b)$ . Planteando la fórmula de Dynkin para un tiempo de parada  $\tau$  cualquiera, se cumple

$$\mathbb{E}^y[\tilde{g}(Y_{\tau})] = \tilde{g}(y) + \mathbb{E}^y \left[ \int_0^{\tau} \hat{A}\tilde{g}(Y_t) dt \right] \leq \tilde{g}(y). \quad (3.30)$$

En particular, tomando el tiempo de parada  $\tau(a, b)$ , el primer tiempo de salida de  $D(a, b)$ , que por el Teorema 2.2.15 debe ser el tiempo óptimo para el proceso  $Y_t^y$ , con  $y$  en  $D(a, b)$ , nos queda

$$\mathbb{E}^y[\tilde{g}(Y_{\tau(a,b)})] \leq \tilde{g}(y), \quad (3.31)$$

obteniendo la igualdad si y solo si  $\tau(a,b) = 0$ .

Cuando  $y$ , el punto inicial del proceso, se encuentre en  $D(x_0)$ , dado que contiene a  $U$ , no podemos asegurar que  $\widehat{A}\tilde{g} \leq 0$ , con lo cual el razonamiento anterior no es aplicable, y se cumple  $\tau_{D(x_0)} \geq 0$ .

Ambas afirmaciones implican que el primer tiempo de salida de  $D$ ,  $\tau_D$ , es igual a

$$\tau_D = \begin{cases} 0, & y \notin D(x_0) \\ \tau_{D(x_0)}, & y \in D(x_0), \end{cases}$$

o lo que es equivalente, el tiempo de parada óptimo es el primer tiempo de salida de  $D(x_0)$ .

Se conoce la forma del conjunto  $D$ , que en este caso es  $D(x_0)$ , un conjunto muy amigable, dado que se conoce el valor de  $X_t$  para  $\tau_{D(x_0)}$ , que no es más que  $x_0$ . Falta entonces ver que  $x_0$  maximiza la función de pago, y hallar la forma de la función de pago óptimo  $\tilde{g}^*$ .

Con este fin, se define a la función  $\check{g}_{x_0}$ , de la siguiente manera

$$\check{g}_{x_0}(s, x) = \mathbb{E}^{(s,x)}[\tilde{g}(Y_{\tau_{D(x_0)}})]. \quad (3.32)$$

En el capítulo 9 de [7] el autor demuestra que  $\check{g}_{x_0}$  es solución al siguiente problema,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial s} + \mu x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, & \text{para } 0 < x < x_0 \\ f(s, x_0) = e^{-rs}(x_0 - a). \end{cases} \quad (3.33)$$

Para simplificar esta ecuación en derivadas parciales, y motivados por la forma de la función  $\tilde{g}$ , busquemos soluciones de la forma

$$f(s, x) = e^{-rs} \phi(x). \quad (3.34)$$

Para este tipo de funciones, la ecuación en derivadas parciales definida en (3.33) se reduce a la siguiente ecuación diferencial ordinaria,

$$\begin{cases} -r\phi(x) + \mu x \phi'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \phi''(x) = 0 & \text{para } 0 < x < x_0 \\ \phi(x_0) = x_0 - a. \end{cases} \quad (3.35)$$

Sin adentrarse en la teoría de ecuaciones diferenciales, se puede ver que la solución general de este problema es

$$\phi(x) = c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_2}, \quad 0 < x < x_0 \quad (3.36)$$

con  $c_1$  y  $c_2$  constantes que dependen de las condiciones iniciales, y

$$\gamma_i = \sigma^{-2} \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 - \mu \pm \sqrt{\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right)^2 + 2r\sigma^2} \right] \quad i = 1, 2. \quad (3.37)$$

Estos valores se obtienen sustituyendo  $x^\gamma$  en nuestra ecuación diferencial, y viendo que para que se cumpla la ecuación se precisa que nuestro exponente  $\gamma$  sea solución de

$$\frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\gamma - r = 0. \quad (3.38)$$

Esta ecuación define una parábola con concavidad positiva, que pasa por el punto  $(0, -r)$ , con lo cual se deduce que tiene una raíz positiva y otra negativa. Denotaremos por  $\gamma_2$  a la raíz negativa y por  $\gamma_1$  a la positiva. Además, esta parábola pasa por el punto  $(1, \mu - r)$ , y dado que  $\mu - r < 0$ , se concluye que  $\gamma_1$  no solo es positiva, sino que es mayor que 1.

Se buscan los valores de  $c_1$  y  $c_2$  para tener una solución de la ecuación diferencial (3.35). Al ser  $\gamma_2$  negativo, la componente  $x^{\gamma_2}$  es no acotada cuando la función tiende a 0, lo que en nuestro caso es absurdo, ya que implica que la función de pago óptimo crece cuando el valor del activo es menor. Consecuentemente,  $c_2$  debe valer 0.

Para obtener  $c_1$  podemos sustituir  $\phi$  en la condición inicial de la ecuación diferencial (3.35),

$$c_1 x_0^{\gamma_1} = x_0 - a, \quad (3.39)$$

de lo que se obtiene  $c_1 = x_0^{-\gamma_1}(x_0 - a)$ .

Determinados  $c_1$  y  $c_2$ , la solución de la ecuación en derivadas parciales (3.33) es,

$$\check{g}_{x_0}(s, x) = e^{-rs}(x_0 - a) \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\gamma_1}. \quad (3.40)$$

Recapitulando lo visto hasta ahora, contamos con una familia de conjuntos  $D(x_0)$  y una función de pago  $\check{g}_{x_0}$ , que es nuestra candidata a ser la función de pago óptimo. Se quiere ver qué valor de  $x_0$  maximiza  $\check{g}_{x_0}$ . Para esto utilizaremos el método usual de derivar respecto de  $x_0$  e igualar a 0, y luego verificar que es un máximo. Para esto es importante recordar que se cumple  $\gamma_1 > 1$ . Derivando (3.40) respecto de  $x_0$  e igualando a cero se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \check{g}_{x_0}(s, x) = \frac{1}{x_0} e^{-rs} (\gamma_1 a - (\gamma_1 - 1)x_0) \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\gamma_1} = 0, \quad (3.41)$$

obteniendo el siguiente punto crítico

$$x_M = \frac{a\gamma_1}{\gamma_1 - 1}. \quad (3.42)$$

Estudiando el signo de la derivada se puede ver que este es efectivamente un máximo.

Para finalizar este estudio se debe verificar que  $\check{g}_{x_M}$  es un mayorante *supermeanvalued* de  $\tilde{g}$ , que mediante el Corolario 2.2.17 implica que  $\check{g}_{x_M}$  es la función de pago óptimo.

Para demostrar que  $\check{g}_{x_M}$  es un mayorante de  $\tilde{g}$ , nótese que el mapa  $x \mapsto \check{g}_{x_M}(s, x)$ , es convexo, y la tangente en  $x_M$  es igual a  $\tilde{g}(s, x)$ . Al ser una función convexa todas las tangentes se encuentran por debajo de la función y consecuentemente  $\check{g}_{x_M}(s, x)$  es mayor a  $\tilde{g}$ , como  $s$  es arbitrario esto se cumple para todo  $s$  en  $\mathbb{R}$ , y entonces  $\check{g}_{x_M}(s, x)$  es un mayorante de  $\tilde{g}$ .

Queda por demostrar que la  $\check{g}_{x_M}$  es *supermeanvalued*; resulta más conveniente demostrar que es una función excesiva, definida en 2.14. Dado que  $\check{g}_{x_M}$  es continua, si es excesiva, implica por el Teorema 2.2.12 que es superarmónica, y entonces es *supermeanvalued*.

Puesto que  $X_t$  es un movimiento browniano geométrico, se puede escribir como

$$X_t = xe^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}, \quad (3.43)$$

con  $x$  el punto inicial del proceso. Esto nos permite calcular la esperanza de  $(X_t)^{\gamma_1}$ , ya que la función generatriz de momentos para  $W_t$  se conoce por tener distribución  $N(0, t)$ . En efecto se obtiene,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x[(X_t)^{\gamma_1}] &= \mathbb{E}^x[x^{\gamma_1} e^{\gamma_1(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\gamma_1 W_t}] \\ &= x^{\gamma_1} e^{\gamma_1(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \mathbb{E}^x[e^{\sigma\gamma_1 W_t}] \\ &= x^{\gamma_1} e^{\gamma_1(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2\gamma_1^2 t}. \end{aligned}$$

Notemos que  $(X_t)^{\gamma_1}$  es el único término aleatorio en la función  $\check{g}_{x_M}(Y_t)$ . Esto implica que la esperanza del proceso  $Y_t$  con punto inicial  $(s, x)$  resulta en la esperanza de  $(X_t)^{\gamma_1}$ , multiplicada por estos términos. Consecuentemente, se cumple la igualdad

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{(s,x)}[\check{g}_{x_M}(Y_t)] &= \mathbb{E}^x[\check{g}_{x_M}(s+t, X_t)] \\ &= \mathbb{E}^x \left[ e^{-r(s+t)} (x_M - a) \left( \frac{X_t}{x_M} \right)^{\gamma_1} \right] \\ &= e^{-r(s+t)} (x_M - a) x_M^{-\gamma_1} \mathbb{E}^x[X_t^{\gamma_1}] \\ &= e^{-r(s+t)} (x_M - a) x_M^{-\gamma_1} x^{\gamma_1} e^{\gamma_1(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma_1^2 t}. \end{aligned}$$

Los primeros cuatro factores de la última línea corresponden a  $\check{g}_{x_M}(s, x)$ , multiplicada por  $e^{-rt}$ . Se reescribe la ecuación como

$$\mathbb{E}^{(s,x)}[\check{g}_{x_M}(Y_t)] = \check{g}_{x_M}(s, x) e^{(\frac{1}{2}\sigma^2\gamma_1^2 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\gamma_1 - r)t}. \quad (3.44)$$

Recordando que  $\gamma_1$  está definida como la raíz positiva de la expresión

$$\frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\gamma - r, \quad (3.45)$$

lo que coincide con la expresión del exponente multiplicada por  $t$  y evaluada en  $\gamma_1$ , por lo que el exponente vale 0. Consecuentemente se cumple

$$\mathbb{E}^{(s,x)}[\check{g}_{x_M}(Y_t)] = \check{g}_{x_M}(s, x), \quad (3.46)$$

con lo cual  $\check{g}_{x_M}$  es excesiva, y como derivamos anteriormente es *supermeanvalued*. Por el Corolario 2.2.17 es la función de pago óptimo  $g^*$ .

En conclusión, la función de pago óptima obtenida es

$$g^*(s, x) = e^{-rs} \left( \frac{\gamma_1 - 1}{a} \right)^{\gamma_1 - 1} \left( \frac{x}{\gamma_1} \right)^{\gamma_1}, \quad (3.47)$$

donde en la expresión anterior sustituyo  $x_M$  por  $\frac{a\gamma_1}{\gamma_1-1}$ . El tiempo óptimo asociado es  $\tau_D$ , el tiempo de salida del conjunto

$$D = \left\{ (t, x) : 0 < x < \frac{a\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \right\}. \quad (3.48)$$

## Capítulo 4

# Problemas de parada óptima con integrales

El último caso que se trabaja en esta monografía es cuando la función de pago incluye una integral dentro de su definición. Este es el caso de una función de pago no homogénea en el tiempo, pero que además cuenta con la particularidad de depender de toda la evolución del proceso, lo que introduce diferencias en su comportamiento.

Sea  $X_t$  una difusión de Itô en  $\mathbb{R}^n$ , dado por la ecuación

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x. \quad (4.1)$$

Además sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  una función continua y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  una función Lipschitz continua la cual tiene crecimiento a lo sumo lineal.

Se puede definir el siguiente problema de parada óptima

$$G^*(x) = \sup_{\tau} \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau} f(X_t)dt + g(X_{\tau}) \right] = \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau^*} f(X_t)dt + g(X_{\tau^*}) \right] \quad (4.2)$$

donde en este caso  $G^*$  es la función de pago óptimo, y como es usual,  $\tau^*$  es el tiempo de pago óptimo entre todos los tiempos de parada  $\mathcal{F}_t$  medibles.

De manera similar que en el capítulo anterior se puede transformar este problema en un problema homogéneo, definiendo el proceso  $Z_t$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  de la siguiente forma

$$dZ_t = \begin{pmatrix} dX_t \\ dY_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(X_t) \\ f(X_t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma(X_t) \\ 0 \end{pmatrix} dW_t' \quad Z_0 = (x, y). \quad (4.3)$$

Con  $dt$  es el diferencial en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $W_t'$  el proceso browniano en este mismo espacio.

Entonces  $Z_t$  es una difusión de Itô homogénea en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Se replantea el problema (4.2) como

$$G^*(x) = \sup_{\tau} \mathbb{E}^{(x,0)} [Y_{\tau} + g(X_{\tau})] = \mathbb{E}^{(x,0)} [G(Z_{\tau})], \quad (4.4)$$

siendo  $G$  la función,  $G(z) = G(x, y) = y + g(x)$ , con  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

De esta manera, el problema (4.2) es un problema homogéneo (2.4), donde se reemplaza  $X_t$  por  $Z_t$  y  $g$  por  $G$ , para los cuales contamos con un amplio estudio.

**Observación 4.1.** Sea  $\mathcal{A}_X$  el operador característico de  $X_t$ , entonces  $\mathcal{A}_Z$ , el operador característico de  $Z_t$ , cumple que

$$\mathcal{A}_Z\phi(x, y) = \mathcal{A}_X\phi(x, y) + f(x)\frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y) \quad \phi \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}), \quad (4.5)$$

donde  $\mathcal{A}_X$  actúa sobre las coordenadas  $x$ . Concretamente, para  $G(x, y) = g(x) + y$ , como estaba definida antes, si  $G$  se encuentra en  $C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ , tenemos que

$$\mathcal{A}_ZG(x, y) = \mathcal{A}_Xg(x) + f(x). \quad (4.6)$$

## Capítulo 5

# Un teorema de verificación

En este último capítulo se trabaja con una función de pago más general, combinando tanto integrales como la posibilidad de tomar valores negativos. En contrapartida, el capítulo trabaja sobre un solo resultado que nos permite verificar si una función, que obtuvimos ya sea por intuición, heurística, casualidad o intervención divina, es la función de pago óptimo, pero no nos brinda ninguna herramienta para hallar dicha función.

Sea  $G$  un cierto dominio en  $\mathbb{R}^n$ , y  $X_t$  una difusión de Itô de la forma

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \quad X_0 = x. \quad (5.1)$$

Sea  $\tau_G$  el primer tiempo de salida del conjunto  $G$

$$\tau_G = \tau_G(x, \omega) = \inf\{t > 0 : X_t \notin G\}, \quad (5.2)$$

y consideremos  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas, que satisfacen las siguientes condiciones

1. Para todo  $x$  en  $\mathbb{R}^n$  se cumple  $\mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau_G} |f(X_t)| dt \right] < \infty$ .
2. La familia  $\{g^-(X_\tau), \tau \leq \tau_G, \tau \text{ un tiempo de parada}\}$ , es uniformemente integrable, para todo  $x$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Se define  $\mathcal{T}$  como el conjunto de tiempos de parada que cumplen  $\tau \leq \tau_G$ . Se quiere entonces  $\Phi(x)$  y  $\tau^* \in \mathcal{T}$  tal que

$$\Phi(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} J^\tau(x) = J^{\tau^*}(x). \quad (5.3)$$

Donde  $J^\tau(x)$  es la siguiente función,

$$J^\tau(x) = \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\tau f(X_t) dt + g(X_\tau) \right], \text{ para } \tau \in \mathcal{T}. \quad (5.4)$$

Aquí se tiene que  $\Phi$  es la función de pago óptimo, y  $\tau^*$  es el tiempo de parada óptimo asociado.

Se denota por  $L$  al operador en derivadas parciales dado por  $\mathcal{A}_X$ , en el Teorema 2.2.11, para toda función de clase  $C^2(\mathbb{R}^n)$ , es decir

$$L = \sum_{i=1}^k b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k (\sigma\sigma^t)_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (5.5)$$

Se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 5.1.** *Supongamos que tenemos una función  $\phi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple las condiciones*

(1)  $\phi \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ .

(2)  $\phi \geq g$  en  $G$  y  $\lim_{t \rightarrow \tau_G^-} \phi(X_t) = g(X_{\tau_G}) \mathbf{1}_{\{\tau_g < \infty\}}$  c.s.

(3)  $\mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau_G} \mathbf{1}_{\{X_t \in \partial D\}} dt \right] = 0$  para todo  $x$  en  $G$ , donde  $D$  es el conjunto

$$D = \{x \in G : \phi(x) > g(x)\} \quad (5.6)$$

(4)  $\partial D$  es una superficie Lipschitz, es decir que localmente es el gráfico de una función  $h : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple

$$|h(x) - h(y)| \leq K|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{n-1} \quad K < \infty \quad (5.7)$$

(5)  $\phi \in C^2(G \setminus \partial D)$  y las derivadas de segundo orden de  $\phi$  están acotadas localmente cerca de  $\partial D$ .

(6)  $L\phi + f \leq 0$  en  $G \setminus D$ .

(7)  $L\phi + f = 0$  en  $D$ .

(8)  $\tau_D = \inf\{t > 0 : X_t \notin D\} < \infty$  c.s. para todo  $x$  en  $G$ .

(9) La familia de procesos  $\{\phi(X_\tau) : \tau \leq \tau_D, \tau \in \mathcal{T}\}$  es uniformemente integrable para todo  $x$  en  $G$ .

Entonces se cumple

$$\phi(x) = \Phi(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\tau f(X_t) dt + g(X_\tau) \right] \quad x \in G, \quad (5.8)$$

y además  $\tau^* = \tau_D$  es el tiempo de parada óptimo para este problema.

*Demostración.* Es posible demostrar que las condiciones (1), (4) y (5) implican la existencia de una sucesión de funciones  $\phi_j \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , tales que cumplen

(a)  $\phi_j$  converge uniformemente a  $\phi$ , para cualquier subconjunto compacto de  $\overline{G}$ .

(b)  $L\phi_j$  converge uniformemente a  $L\phi$ , para cualquier subconjunto compacto de  $G \setminus \partial D$ .

(c)  $\{L\phi_j\}_{j=1}^\infty$  se encuentran acotados localmente en  $G$ .

No se incluye la demostración de esto, pero se encuentra en el apéndice  $C$  de [7].

Sea  $\{G_R\}_{R=1}^\infty$  una sucesión de conjuntos abiertos y acotados, tales que  $G = \bigcup_{R=1}^\infty G_R$ . Entonces podemos definir el tiempo de parada

$$T_R = \text{mín}\{R, \text{ínf}\{t > 0 : X_t \notin G_R\}\}. \quad (5.9)$$

Nos interesa este tiempo de parada un poco peculiar, debido a que controla al proceso, mientras que también es acotado. Tomemos ahora otro tiempo de parada  $\tau$  en  $\mathcal{T}$  y un punto  $x$  en  $G$ . Entonces, por la fórmula de Dynkin, tenemos

$$\mathbb{E}^x [\phi_j(X_{\tau \wedge T_R})] = \phi_j(x) + \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau \wedge T_R} L\phi_j(X_t) dt \right]. \quad (5.10)$$

Mediante un reordenamiento de términos resulta en

$$\phi_j(x) = \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau \wedge T_R} -L\phi_j(X_t) dt + \phi_j(X_{\tau \wedge T_R}) \right]. \quad (5.11)$$

Se toma límite con  $j$  tendiendo a infinito en esta igualdad, y se obtiene la función  $\phi$  del lado izquierdo, pero resulta más complejo hallar el límite del lado derecho.

Usando que  $\tau \wedge T_R$  está acotado por  $R$  y que  $L\phi_j$  converge uniformemente a  $L\phi$  según lo mencionado al inicio de la demostración; e ignorando momentáneamente que esta convergencia uniforme es en  $G \setminus \partial D$  y no en todo  $G$ , se tendría que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau \wedge T_R} -L\phi_j(X_t) dt \right] = \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau \wedge T_R} -L\phi(X_t) dt \right]. \quad (5.12)$$

La igualdad (5.12) se implica de probar que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x \left[ \left| \int_0^{\tau \wedge T_R} L\phi(X_t) - L\phi_j(X_t) dt \right| \right] = 0. \quad (5.13)$$

Como se mencionó anteriormente,  $L\phi_j$  converge uniformemente a  $L\phi$ , lo que implica que la norma infinito de su diferencia tiende a 0, es decir

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|L\phi - L\phi_j\|_\infty = 0. \quad (5.14)$$

Se plantea la cota

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \left[ \left| \int_0^{\tau \wedge T_R} L\phi(X_t) - L\phi_j(X_t) dt \right| \right] &\leq \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau \wedge T_R} \|L\phi(X_t) - L\phi_j(X_t)\|_\infty dt \right] \\ &= \|L\phi(X_t) - L\phi_j(X_t)\|_\infty \mathbb{E}^x [\tau \wedge T_R] \\ &\leq \|L\phi(X_t) - L\phi_j(X_t)\|_\infty R. \end{aligned}$$

donde la última desigualdad resulta de que  $\tau \wedge T_R$  se encuentra acotado por  $R > 0$ . Al tomar límite con respecto de  $j$  en ambos lados tenemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x \left[ \left| \int_0^{\tau \wedge T_R} L\phi(X_t) - L\phi_j(X_t) dt \right| \right] \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|L\phi(x) - L\phi_j(x)\|_\infty R = 0. \quad (5.15)$$

Esto demostraría (5.12), si no fuera por el hecho de que obviamos que la convergencia no es en todo  $G$ , sino en  $G \setminus \partial D$ . Afortunadamente, la condición (3) nos menciona que el proceso pasa tiempo 0 en la frontera de  $D$ .

Para demostrar que se cumple el siguiente límite,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [\phi_j(X_{\tau \wedge T_R})] = \mathbb{E}^x [\phi(X_{\tau \wedge T_R})], \quad (5.16)$$

se puede utilizar un razonamiento completamente análogo que para (5.12), pero ahora  $\phi_j$  converge a  $\phi$  uniformemente en  $\bar{G}$ .

Con esto el tomar límite con respecto a  $j$  en la ecuación (5.11) resulta en,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau \wedge T_R} -L\phi_j(X_t) dt + \phi_j(X_{\tau \wedge T_R}) \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau \wedge T_R} -L\phi(X_t) dt + \phi(X_{\tau \wedge T_R}) \right]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Notemos ahora que por la condición (2) tenemos  $\phi \geq g$  y por (6) y (7),  $-L\phi \geq f$ , teniendo en cuenta que se cumple (3), podemos entonces plantear

$$\phi(x) \geq \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau \wedge T_R} f(X_t) dt + g(X_{\tau \wedge T_R}) \right]. \quad (5.18)$$

Con esta última desigualdad se puede utilizar el Lema de Fatou, donde en este caso no se utiliza la hipótesis usual sino la notada en la Observación 7.6, haciendo tender  $R$  a infinito, con lo que se obtiene

$$\phi(x) \geq \liminf_{R \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau \wedge T_R} f(X_t) dt + g(X_{\tau \wedge T_R}) \right] \geq \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\tau f(X_t) dt + g(X_\tau) \right] \quad (5.19)$$

observar que  $T_R \rightarrow \tau_G$  cuando  $R \rightarrow \infty$ , y dado que  $\tau \leq \tau_G$ , entonces  $\tau \wedge \tau_G = \tau$ , se puede concluir

$$\phi(x) \geq \Phi(x) \quad \forall x \in G. \quad (5.20)$$

Con esta desigualdad podemos ya demostrar que  $\phi$  coincide con el óptimo, en el caso donde nuestro punto inicial  $x$  no se encuentra en  $D$ . Por la condición (2), si nos encontramos fuera de  $D$ , entonces  $\phi(x) = g(x)$ . Luego notemos que  $J^0(x) = g(x)$ , con lo cual  $\Phi(x) \geq g(x)$ , y entonces  $\phi(x) \leq \Phi(x)$ . Juntando esto con (5.20) nos queda  $\phi(x) = \Phi(x)$ . Es decir, si  $x$  no se encuentra en  $D$ , entonces  $\phi$  es la función de pago óptima con  $\hat{\tau} = 0$  como tiempo de parada asociado.

Cuando  $x$  se encuentra dentro de  $D$ , la demostración es un poco más compleja. Para esto definimos  $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$  una sucesión de conjuntos abiertos y acotados, donde  $\overline{D_k} \subset D$ ,  $\overline{D_k}$  es compacto y  $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ . Sea entonces  $\tau_{D_k}$  el primer tiempo de salida del conjunto  $D_k$ . De la manera que se encuentran definidos los conjuntos  $D_k$ , los tiempos de parada  $\tau_{D_k}$  crecen a  $\tau_D$  casi seguramente. Utilizando la ecuación (5.11) con tiempo de parada  $\tau_{D_k} \wedge T_R$ , y tomando límite con respecto a  $j$  queda

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau_{D_k} \wedge T_R} -L\phi_j(X_t)dt + \phi_j(X_{\tau_{D_k} \wedge T_R}) \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau_{D_k} \wedge T_R} -L\phi(X_t)dt + \phi(X_{\tau_{D_k} \wedge T_R}) \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau_{D_k} \wedge T_R} f(X_t)dt + \phi(X_{\tau_{D_k} \wedge T_R}) \right]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Donde el límite del lado derecho se resuelve con el mismo razonamiento que en (5.17). Luego, dado que  $X_t$  se encuentra dentro de  $D$  para esta sucesión de tiempos de parada, entonces por la condición (7) se sustituye  $-L\phi$  por  $f$ .

Es útil ver que la siguiente familia de variables aleatorias son uniformemente integrables respecto a  $R$  y  $k$ , ya que el Teorema 7.14 nos permitirá luego intercambiar límites y esperanzas. Sea

$$I(\tau_{D_k} \wedge T_R) = \int_0^{\tau_{D_k} \wedge T_R} f(X_t)dt \quad (5.22)$$

Utilizando la definición de integrabilidad uniforme (7.13), tenemos que el proceso es uniformemente integrable si cumple

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \sup_R \mathbb{E} \left[ |I(\tau_{D_k} \wedge T_R)| \mathbf{1}_{\{|I(\tau_{D_k} \wedge T_R)| > H\}} \right] = 0. \quad (5.23)$$

Primero podemos utilizar la desigualdad básica de integral y módulo, con lo cual tenemos

$$|I(\tau_{D_k} \wedge T_R)| = \left| \int_0^{\tau_{D_k} \wedge T_R} f(X_t)dt \right| \leq \int_0^{\tau_{D_k} \wedge T_R} |f(X_t)|dt. \quad (5.24)$$

En el último término, dado que la función que estamos integrando es positiva, entonces se toma  $\tau_G$  como límite superior de integración, que es mayor a  $\tau_{D_k} \wedge T_R$  para todo  $R$ , y se mantiene la desigualdad, es decir

$$|I(\tau_{D_k} \wedge T_R)| \leq \int_0^{\tau_G} |f(X_t)|dt \quad (5.25)$$

Además por esta desigualdad se cumple que el conjunto  $\{\int_0^{\tau_G} |f(X_t)|dt > H\}$  contiene a  $\{|I(\tau)| > H\}$  para todo  $\tau \leq \tau_G$ . Se plantea la desigualdad

$$\sup_R \mathbb{E} \left[ |I'(\tau_{D_k} \wedge T_R)| \mathbf{1}_{\{|I'(\tau_{D_k} \wedge T_R)| > H\}} \right] \leq \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_G} |f(X_t)|dt \mathbf{1}_{\{I'(\tau_G) > H\}} \right], \quad (5.26)$$

donde  $I'(\tau_G) = \int_0^{\tau_G} |f(X_t)| dt$ .

Recordando que sobre la función  $f$  existe la condición

$$\mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau_G} |f(X_t)| dt \right] < \infty, \quad (5.27)$$

se cumple  $\int_0^{\tau_G} |f(X_t)| dt < \infty$  casi seguramente, con lo cual  $\mathbb{1}_{\{I'(\tau_G) > H\}}$  tiende a 0 cuando  $H \rightarrow \infty$ . Podemos entonces concluir que  $I(\tau_{D_k} \wedge T_R)$  es uniformemente integrable con respecto a  $R$ . La demostración de integrabilidad uniforme respecto a  $k$  es análoga, dado que  $\tau_{D_k} \wedge T_R \leq \tau_G$  para todo  $k$ .

Tomando límites con  $k \rightarrow \infty$  y  $R \rightarrow \infty$  en (5.21), por la demostración anterior el proceso involucrando una integral es uniformemente integrable, y además por la condición (9)  $\phi$  es uniformemente integrable, lo que permite intercambiar límites e integrales. Además dado que  $X_{\tau_D}$  se encuentra fuera de  $D$ , por (2) podemos sustituir  $\phi$  por  $g$ , con esto se plantea la siguiente sucesión de igualdades

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \lim_{R, k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau_{D_k} \wedge T_R} f(X_t) dt + \phi(X_{\tau_D}) \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau_D} f(X_t) dt + g(X_{\tau_D}) \right] \\ &= J^{\tau_D} \leq \Phi(x). \end{aligned}$$

Recordando la desigualdad (5.20), se cumple  $\phi(x) = \Phi(x)$ . Concluyendo que

$$\phi(x) = \Phi(x) \quad \forall x \in G, \quad (5.28)$$

con su tiempo de parada asociado

$$\hat{\tau} = \begin{cases} 0, & x \notin D \\ \tau_D, & x \in D. \end{cases}$$

Nótese que este siempre coincide con  $\tau_D$ , y se concluye que  $\tau_D$  es el óptimo.  $\square$

## Capítulo 6

# Simulaciones

Para cerrar esta monografía veamos algunas simulaciones que ilustran el comportamiento de la esperanza de nuestra función de pago para distintos tiempos de parada  $\tau$ .

Revistaremos el Ejemplo 3.2 de manera computacional. Recordamos rápidamente los resultados de este ejemplo: vimos que el conjunto óptimo era de la forma  $D(x_0) = \{(t, x) : 0 < x < x_0\}$  y veamos entonces cómo se comporta

$$\mathbb{E}^x[e^{-r\tau_{D(x_0)}}(X_{\tau_{D(x_0)}} - a)^+], \quad (6.1)$$

para varios valores de  $x_0$ .

Simular esto parece muy complicado a primera vista, pero si notamos que el proceso a tiempo  $\tau_{D(x_0)}$  es igual a  $x_0$ , podemos entonces sacar el segundo término de la esperanza como una constante. Sabemos además que  $x_0$  debe ser mayor que  $a$ , por lo cual ignoraremos el caso donde  $x_0$  es menor. Resulta entonces que queremos estudiar el comportamiento de la siguiente función,

$$(x_0 - a)\mathbb{E}^x[e^{-r\tau_{D(x_0)}}]. \quad (6.2)$$

Se simplifico la función a simular, pero de todas formas contamos con un problema: el tiempo de parada  $\tau_{D(x_0)}$  no se encuentra acotado lo que causa que las simulaciones puedan ser excesivamente largas. Para solucionar este problema, notemos que el término dentro de la esperanza corresponde a la probabilidad de que una variable aleatoria exponencial  $E$ , con parámetro  $r$ , sea mayor a  $\tau_{D(x_0)}$ , es decir

$$e^{-r\tau_{D(x_0)}} = \mathbb{P}(E > \tau_{D(x_0)}). \quad (6.3)$$

Esto nos permite obtener un límite superior para el largo de las simulaciones, donde este es un valor obtenido mediante una realización de la variable aleatoria  $E$ . La función final a estimar es

$$(x_0 - a)\mathbb{E}^x[\mathbb{P}(E > \tau_{D(x_0)})]. \quad (6.4)$$

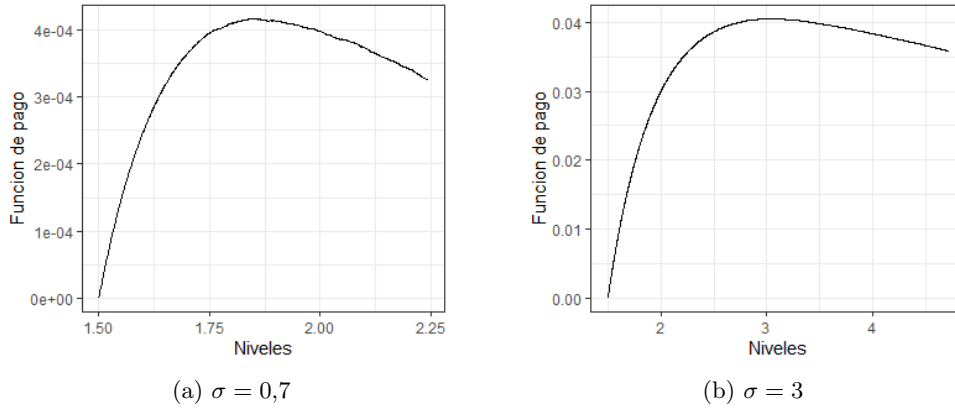


Figura 6.1: Promedio en función del nivel  $x_0$

Se puede entonces estudiar numéricamente nuestra esperanza (6.1), dado que ahora la simulación se reduce a sortear un tiempo exponencial  $E$ , y luego simular al proceso  $X_t$ , donde vemos si este llega al nivel  $x_0$  en un tiempo menor que  $E$  o no.

Veamos primero cómo se relaciona el parámetro  $\sigma$  con el nivel óptimo y el promedio resultante; para ello se toman los parámetros  $r = 10$ ,  $\mu = 1$ ,  $a = 1,5$  y el punto inicial  $x = 0,5$ , tomando los valores  $0,7$  y  $3$  para  $\sigma$ . En la Figura 6.1, podemos ver que cuando  $\sigma$  es mayor, el punto óptimo es más grande y además se da para un nivel mayor, dándose el máximo en  $1,87$  aproximadamente para la primera figura y en  $3,11$  aproximadamente para la segunda, donde el primer caso tiene una esperanza aproximadamente 100 veces más pequeña que el segundo.

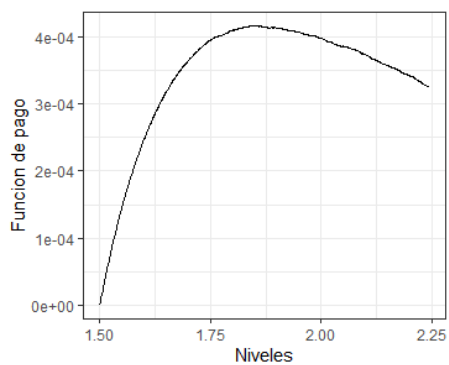
Esto es esperable, no solo por el estudio teórico que realizamos anteriormente, sino también teniendo en cuenta la expresión del movimiento browniano geométrico, que se puede escribir como

$$X_t = x e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}. \quad (6.5)$$

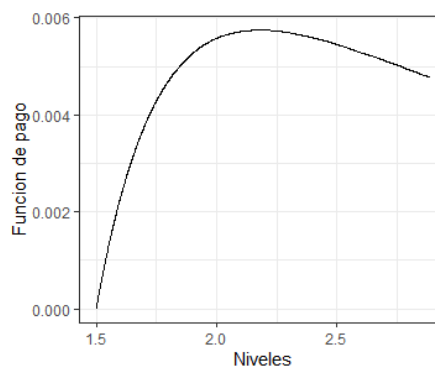
Dado que contamos con un término exponencial, completamente determinista, y luego un término estocástico, en el caso que  $\sigma$  es pequeño, este proceso se comportara parecido a su parte determinista, que sabemos crece más lentamente que el decaimiento por inflación, pero para un valor de  $\sigma$  grande, la componente estocástica tendrá más peso causando que algunas veces este crezca de gran manera.

Veamos que también otro factor importante es qué tan grande es la diferencia entre  $\mu$  y  $r$ . Para esto se simuló un proceso con parámetros  $r = 8$ ,  $\mu = 2$ ,  $\sigma = 0,7$ ,  $a = 1,5$  y condición inicial  $x = 0,5$ . En la Figura 6.2, podemos ver la comparación entre el caso anterior con  $r = 10$  y  $\mu = 1$ , contra  $r = 8$  y  $\mu = 2$ . Se observa que el nivel óptimo para el segundo caso nuevamente es mayor, siendo  $2,19$  aproximadamente, con un pago 15 veces mayor al primer caso.

Esto también resulta razonable, dado que tomar un valor de  $\mu$  más grande causa que la diferencia entre nuestro crecimiento determinista y el decrecimiento por inflación sea menor.



(a)  $r = 10, \mu = 1$



(b)  $r = 8, \mu = 2$

Figura 6.2: Promedio en función del nivel  $x_0$

Esto causa que el tiempo de parada  $\tau_{D(x_0)}$  pueda ser mayor sin causar que el promedio disminuya rápidamente.

# Capítulo 7

## Apéndice

**Teorema 7.1.** Sea  $T > 0$  sean  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  funciones medibles que cumplan

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T] \quad (7.1)$$

para alguna constante  $C$ , donde  $|\sigma|^2 = \sum |\sigma|^2$ .

Y además que se cumpla para alguna constante  $C'$

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq C'|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T] \quad (7.2)$$

Sea  $Z$  una variable aleatoria independiente del  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_\infty^{(m)}$  generada por  $W_t$  tal que  $t \geq 0$  y que cumpla

$$\mathbb{E}[Z^2] < \infty$$

Entonces la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, X_0 = Z \quad (7.3)$$

Tiene una única solución continua en  $t$  tal que  $X_t(\omega)$  es adaptada a la filtración  $\mathcal{F}_t^Z$  generada por  $Z$  y  $W_s$ ,  $s \leq t$  y además

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T X_t^2 dt \right] < \infty$$

**Teorema 7.2.** Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $\bar{x} \in D$  un punto límite de  $D$ , entonces  $f$  es semicontinua por debajo en  $\bar{x}$  si y solo si

$$\liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \geq f(\bar{x}) \quad (7.4)$$

*Demostración.* Primero demostramos que si  $f$  es semicontinua por debajo entonces se cumple

$$\liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \geq f(\bar{x})$$

Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que

$$f(\bar{x}) - \varepsilon < f(x), \quad \forall x \in B(\bar{x}, \delta_0) \cap D \quad (7.5)$$

entonces se cumple

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - \varepsilon &\leq \inf_{x \in B(\bar{x}, \delta) \cap D} f(x) \\ &\leq \sup_{\delta > 0} \inf_{x \in B(\bar{x}, \delta) \cap D} f(x) \\ &= \underline{\lim}_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \end{aligned}$$

Dado que  $\varepsilon$  es arbitrario entonces podemos concluir

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \geq f(\bar{x}) \quad (7.6)$$

Si ahora en su lugar se cumple  $\underline{\lim}_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \geq f(\bar{x})$  entonces

Entonces para todo  $\varepsilon > 0$  se cumple

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) > f(\bar{x}) - \varepsilon \quad (7.7)$$

luego tomando la definición de límite inferior tenemos

$$\sup_{\delta > 0} \inf_{x \in B(\bar{x}, \delta) \cap D} f(x) > f(\bar{x}) - \varepsilon \quad (7.8)$$

Dado que contamos con una desigualdad estricta entonces tenemos que debe existir  $\delta > 0$  tal que

$$\inf_{x \in B(\bar{x}, \delta) \cap D} f(x) > f(\bar{x}) - \varepsilon \quad (7.9)$$

Y con esto podemos concluir que se cumple

$$f(x) > f(\bar{x}) - \varepsilon \quad \forall x \in B(\bar{x}, \delta) \cap D \quad (7.10)$$

es decir cumple la definición de ser semicontinua por debajo y por ende queda demostrada la equivalencia.  $\square$

**Teorema 7.3** (Convergencia Monótona). *Sea  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias no negativas, creciente, y que converge a  $X$  para todo  $\omega \in \Omega$ .*

*Entonces se cumple*

$$\mathbb{E}[X_n] \uparrow \mathbb{E}[X], \quad n \rightarrow \infty \quad (7.11)$$

**Teorema 7.4** (Convergencia Dominada). *Sean  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias convergentes a  $X$ , supongamos que existe  $Y$  y  $\mathbb{E}[Y] < \infty$ , tal que  $|X_n| \leq Y$  para todo  $\omega \in \Omega$ , entonces se cumple*

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] = 0$$

**Lema 7.5** (Lema de Fatou). Sean  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias no negativas, entonces se cumple

$$\mathbb{E} \left[ \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \right] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [X_n] \quad (7.12)$$

**Observación 7.6.** En el Lema de Fatou no estamos tomando las hipótesis más generales posibles, estas son en general suficientes, pero en el último capítulo es necesario trabajar con una forma más general del Lema.

Esta forma más general afirma lo mismo, pero tomando como hipótesis que  $\{X_n\}$  sea uniformemente integrable, y que  $\mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n)$  exista.

Esta forma del teorema se puede encontrar en [1], en la página 211.

**Teorema 7.7** (Propiedad Telescópica). Sea  $X$  una variable aleatoria en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , con  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$  y  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$   $\sigma$ -álgebras contenidas en  $\mathcal{F}$ , entonces se cumple

a)  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{C}]] = \mathbb{E}[X]$

b) Si  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$  entonces  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{C}|\mathcal{D}]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{D}|\mathcal{C}]] = \mathbb{E}[X|\mathcal{C}]$

**Teorema 7.8** (Propiedad de Markov fuerte para procesos de Itô). Sea  $f$  una función acotada y medible de  $\mathbb{R}^n$ , y  $\tau$  un tiempo de parada  $\mathcal{F}_t$ -medible y  $\tau < \infty$  casi seguramente, entonces se cumple

$$\mathbb{E}^x [f(X_{\tau+h})|\mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}^{X_\tau} [f(X_h)], \quad \forall h \geq 0 \quad (7.13)$$

**Lema 7.9.** Si la función  $f$  cumple  $f \geq 0$  se cumple la propiedad de Markov fuerte aunque  $f$  no sea acotada.

*Demostración.* Sea  $f \geq 0$  y  $N \in \mathbb{N}$ , entonces definimos  $f_N = \min(f, N)$ , notemos entonces que para todo  $h$  se cumple  $f_N(X_h) \uparrow f(X_h)$  cuando  $N \rightarrow \infty$ , con esto estamos entonces dentro de las hipótesis del teorema de convergencia dominada (7.4). Tenemos entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [f_N(X_h)|\mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}^x \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(X_h)|\mathcal{F}_\tau \right] = \mathbb{E}^x [f(X_h)|\mathcal{F}_\tau] \quad (7.14)$$

además por definición se cumple  $f_N \leq N$  con lo cual tenemos

$$\mathbb{E}^x [f_N(X_{\tau+h})|\mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}^{X_\tau} [f_N(X_h)] \quad (7.15)$$

tomando límite de ambos lados se cumple

$$\mathbb{E}^x [f(X_{\tau+h})|\mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}^{X_\tau} [f(X_h)] \quad (7.16)$$

y queda demostrado el lema.  $\square$

**Teorema 7.10** (Muestreo Opcional de Doob). Sea  $X_t$  una supermartingala y  $\eta$  una variable aleatoria uniformemente integrable que cumplen la siguiente relación

$$\mathbb{E}[\eta|\mathcal{F}_t] \leq X_t \text{ para todo } t. \quad (7.17)$$

Si  $\sigma$  y  $\tau$  son dos tiempos de parada que cumplen  $\sigma \leq \tau$ , entonces se cumple

$$\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \leq X_\sigma. \quad (7.18)$$

Esta formulación del teorema de Doob no es la más usual, la misma se encuentra en [5], con su demostración, en la página 11, Teorema 6.

**Teorema 7.11** (Formula de Dynkin). Sea  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ , y  $\tau$  un tiempo de parada tal que  $\mathbb{E}^x[\tau] < \infty$ . Entonces se cumple

$$\mathbb{E}^x[f(X_\tau)] = f(x) + \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\tau \mathcal{A}f(X_s) ds \right] \quad (7.19)$$

con  $\mathcal{A}$  el operador característico de  $X_t$ .

**Lema 7.12** (8.1.4). Sea  $g$  una función en  $\mathbb{R}^n$  medible y acotada por debajo, se define para un  $t \geq 0$  fijo

$$u(x) = \mathbb{E}^x[g(X_t)] \quad (7.20)$$

Entonces se cumple lo siguiente

- a) Si  $g$  es semicontinua por debajo, entonces  $u$  también lo es
- b) Si  $g$  es acotada y continua, entonces  $u$  es continua.

**Definición 7.13** (Integrabilidad Uniforme). Una sucesión de variables aleatorias  $\{X_n\}$  es uniformemente integrable si

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \sup_n \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| > H\}}] = 0 \quad (7.21)$$

**Teorema 7.14.** Sea  $\{X_t\}$  una sucesión uniformemente integrable de variables aleatorias, tal que existe  $X_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} X_t$  c.s., entonces se cumple

- 1.  $\mathbb{E}[X_t] \rightarrow \mathbb{E}[X_\infty]$  si  $t \rightarrow \infty$
- 2.  $\mathbb{E}[|X_t - X_\infty|] \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$

**Lema 7.15.** Ley 0 – 1 Sea  $\mathcal{M}_t$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\{X_s : s \leq t\}$ , y  $H \in \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{M}_t$  entonces se cumple

$$\mathbb{P}^x(H) = 0 \text{ o } \mathbb{P}^x(H) = 1 \quad (7.22)$$

**Corolario 7.16.** Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces se cumple

$$\mathbb{P}^x(\tau_D = 0) = 0 \text{ o } \mathbb{P}^x(\tau_D = 0) = 1 \quad (7.23)$$

*Demostración.* La demostración es directa del lema 7.15, tenemos

$$\{\omega : \tau_D = 0\} \in \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{M}_t \quad (7.24)$$

□

# Bibliografía

- [1] R. P. Boas Albert N. Shiryaev. *Probability*. Graduate texts in mathematics Springer series in Soviet mathematics 95. Springer, 2nd ed edition, 1996.
- [2] Andrei N Borodin (auth.). *Stochastic Processes*. Probability and Its Applications. Birkhäuser Basel, 1 edition, 2017.
- [3] E. B. Dynkin. *Markov Processes: Volume II*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 122. Springer, 1965.
- [4] Albert Shiryaev Goran Peskir. *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*. Lectures in Mathematics. ETH Zürich. Birkhäuser Basel, 1 edition, 2006.
- [5] Anatoli Vladimirovich Skorokhod (auth.) Iosif Ilyich Gikhman. *The Theory of Stochastic Processes III*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2007.
- [6] D. O. Kramkov and E. Mordecki. Integral option. *Teor. Veroyatn. Primen.*, 39(1):201–211, 1994.
- [7] Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 2003. An introduction with applications.
- [8] Larry Shepp and A. N. Shiryaev. The Russian option: Reduced regret. *Ann. Appl. Probab.*, 3(3):631–640, 1993.
- [9] A. Shiryaev. *Optimal Stopping Rules [Stoch. Mdlg., Appl. Probability]*. Springer, 1978.
- [10] A. N. Shiryaev. The problem of the most rapid detection of a disturbance in a stationary process. *Sov. Math., Dokl.*, 2:795–799, 1961.
- [11] Albert N. Shiryaev. *Optimal stopping rules*, volume 8 of *Appl. Math. (N. Y.)*. Berlin: Springer, reprint of the 1978 3rd ed. edition, 2008.
- [12] H. M. Taylor. Optimal stopping in a Markov process. *Ann. Math. Stat.*, 39:1333–1344, 1968.
- [13] Abraham Wald. *Sequential Analysis*. Dover Phoenix Editions. Dover Publications, 2004.