



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE FÍSICA
DEPARTAMENTO DE ASTRONOMÍA



INICIACIÓN A LA INVESTIGACIÓN

Calibración astrométrica de cámaras all-sky y análisis de eventos multi-estación

Autor:

Lucas Barrios

Tutor:

Manuel Caldas

(Departamento de Astronomía, UdelaR)

13 de marzo de 2026

AGRADECIMIENTOS

A mi tutor Manuel, por guiarme en el proceso de investigación en el que fui aprendiendo en cada etapa, y por darme la libertad y confianza necesarias para elegir los caminos.

A Gonzalo, que junto con Manuel nos dieron la oportunidad de formar parte del proyecto BOCOSUR en una etapa temprana en la carrera, donde hemos aprendido sobre los saberes más variados, recorrido el país y forjado grandes amistades.

A mis amigos, en especial a Trilce, Bruno (Ch), Lucía, Matías, Belén, Mauro, Jorge, Juan, Bruno (D), Rafa, Rodrigo, Diego, Florencia, Selena, Nicolás y Ezequiel por su compañía, apoyo, motivación y risas siempre tan necesarias.

Finalmente a mi familia, por siempre estar ahí, a mis tías Graciela, Cristina, Rosario y Andrea, a mis primos Guille, Constanza, Jose, Clara, Vivi, Mía, Joaco y Val, a mi sobrina Juana, y por sobre todo a mis padres y a mi hermano, Cristina, Javier y Alejo, muchas gracias.

Resumen

Los meteoros son los fenómenos luminosos que ocurren cuando material extraterrestre ingresa a la atmósfera, desintegrándose a lo largo de su trayectoria por la fricción con los gases que la conforman. Si un fragmento sobrevive el pasaje y llega a la superficie terrestre, se lo denomina meteorito. Para el monitoreo de estos fenómenos luminosos se han ido desarrollando en todo el mundo distintas redes de detección de meteoros, con particular interés en los más brillantes, que indican una mayor masa. La red **BOCOSUR** de Uruguay se suma a estos esfuerzos contando actualmente con 20 estaciones en todo el país, con el objetivo de registrar un mismo evento en al menos dos estaciones a la vez, logrando así calcular su trayectoria atmosférica. En este trabajo se actualiza y complementa el pipeline de **BOCOSUR** para el análisis de estos eventos multi-estación. Por un lado se mejoran los errores astrométricos de la red a través de la implementación de un nuevo modelo de calibración para lentes *fish-eye*. A su vez se complementa el pipeline mediante la aplicación un criterio físico basado en la trayectoria y velocidad del objeto, calculando un coeficiente balístico y un coeficiente de pérdida de masa, para determinar las posibilidades de un evento de ser generador de meteorito. En el cálculo de la velocidad del objeto se discute y se aborda la necesidad de minimizar los desfases temporales de las distintas observaciones del evento. Con estos avances se analiza la base de datos de la red en busca de eventos prometedores de haber generado meteoritos, donde se encuentran tres eventos que pueden haber sido generadores de un meteorito de al menos 50 gramos. Para finalizar se detallan los pasos futuros a realizar en el pipeline de la red, buscando lograr un análisis completo de los eventos, desde su detección, hasta la determinación de un área de dispersión de fragmentos, para organizar campañas de búsqueda de meteoritos asociados.

Índice

1. Introducción	2
1.1. Motivación	2
1.2. Objetivos	3
1.3. Estructura de la monografía	4
2. Calibración astrométrica	5
2.1. Antecedentes	5
2.2. Método desarrollado	6
2.2.1. Marcar estrellas	6
2.2.2. Modelo de distorsión	7
2.2.3. Determinación del vector <i>initial guess</i>	11
2.3. Validación	14
3. Eventos analizados	19
3.1. Clasificador Autobol	19
3.1.1. Clasificación de segundo orden manual	19
3.2. Búsqueda de eventos multi-estación	20
3.2.1. Selección final	20
3.3. Calibraciones	21
4. Criterio $\alpha - \beta$	23
4.1. Motivación	23
4.2. Cálculo de velocidad	27
4.2.1. Offsets temporales	27
5. Resultados y análisis	31
5.1. Trayectorias	31
5.2. Cálculos de $\alpha - \beta$	32
5.3. Eventos interesantes en detalle	34
5.3.1. Evento fragmentado 12/05/23	35
5.3.2. Evento 3: 26/03/23	36
5.3.3. Evento 4: 24/11/22	36
6. Discusión	41
6.1. Calibración astrométrica	41
6.2. Eventos analizados	42
7. Conclusiones	43
7.1. Mejoras futuras al pipeline	43
7.1.1. Muestreo	43
7.1.2. Selección de eventos multi-estacion	44
7.1.3. Calibración astrométrica	44
7.1.4. Criterio $\alpha - \beta$	44
7.1.5. Vuelo oscuro	44

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Cuando material extraterrestre ingresa a la atmósfera terrestre, se puede observar un fenómeno luminoso al que llamamos meteoro, donde ocurre la ablación del meteoride y la ionización de los gases atmosféricos. A los meteoros más brillantes, se los denomina bólidos, y su estudio, con el objetivo de vincular posibles remanentes que lleguen a la superficie terrestre luego de su pasaje por la atmósfera (meteoritos), con sus objetos padres (principalmente cometas y asteroides), es de suma importancia para conocer la composición química y la evolución dinámica del Sistema Solar.

En la revisión de [Jenniskens & Devillepoix \(2025\)](#) se menciona la existencia de 75 meteoritos con órbitas heliocéntricas determinadas, con distinto grado de precisión. Aunque existen órbitas determinadas a partir de observaciones no intencionadas para la tarea como pueden ser de cámaras de videovigilancia o *dashcam* en automóviles (36), la mayoría fueron obtenidas por redes de detección de bólidos establecidas en distintas regiones del planeta, aunque principalmente ubicadas en el hemisferio norte.

La red **BOCOSUR** (Red de detección de Bólidos del Cono Sur) busca sumar esfuerzos a esta tarea contribuyendo a mejorar la cobertura en el hemisferio sur ([Caldas et al. \(2025\)](#)). El proyecto tiene sus incipientes inicios aproximadamente en el 2010, pero fue en 2019 cuando recibió financiamiento para lograr una cobertura total del cielo uruguayo con la instalación de 20 cámaras extendidas en todo el territorio nacional (Fig:1.1).

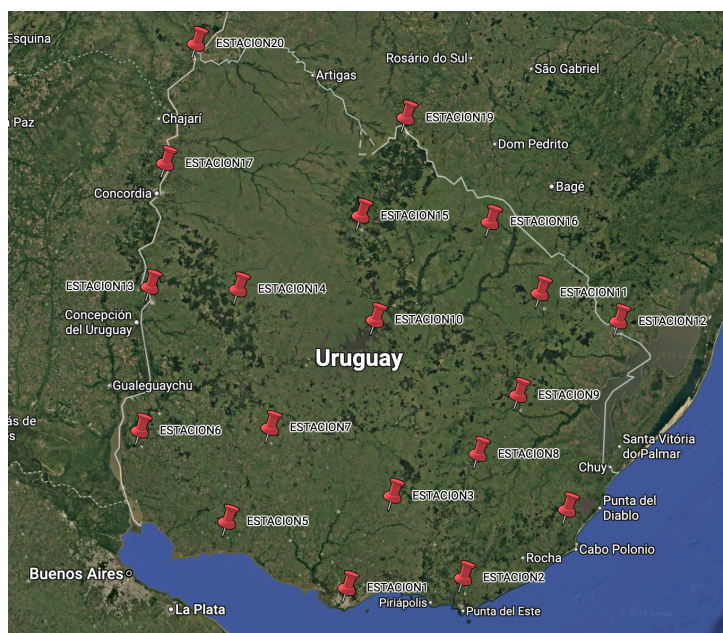


Figura 1.1: Mapa de las 20 Estaciones de la red BOCOSUR.

Para poder obtener una trayectoria atmosférica de un meteorito se necesitan observaciones de al menos dos estaciones distintas, por ejemplo utilizando el método de los planos (**MOP**) de [Ceplecha \(1987\)](#), donde se intersectan los planos producidos por las observaciones de cada estación, y se busca la recta que mejor ajuste a la intersección. Los meteoritos comienzan a una altura aproximada de 80-90 km sobre la superficie terrestre, por lo que para asegurar el registro de un evento (meteorito) en dos o más estaciones en todo el cielo uruguayo, se ideó la distribución de tal forma que si un evento se observa en el cenit en una estación, pueda observarse a más de 30 grados de altura en las estaciones contiguas, resultando en una distancia entre estaciones de aproximadamente 120 km.

En el marco del proyecto **BOCOSUR** se ha desarrollado un pipeline desde la detección del meteorito, hasta el cálculo de su trayectoria para eventos multi-estación, donde se utiliza una aplicación de post procesamiento de los videos para realizar la calibración astrométrica, necesaria para poder transformar las coordenadas en la imagen (x, y) en coordenadas horizontales (z, Az) , así como una calibración fotométrica para reconstruir correctamente su curva de luz.

Para la calibración astrométrica se requiere de un modelo que tome en cuenta la gran distorsión de las lentes all-sky utilizados ampliamente en redes de detección de meteoritos. Estos modelos se encuentran en constante evolución, desde el inicial propuesto en [Ceplecha \(1987\)](#), con las modificaciones posteriores realizadas en [Borovička \(1992\)](#) y [Borovička et al. \(1995\)](#) y más adelante en [Bannister et al. \(2013\)](#) que es el modelo que se estaba utilizando en la red **BOCOSUR**. En el tiempo transcurrido desde el modelo de [Bannister et al. \(2013\)](#) hasta la actualidad, se han propuesto nuevos modelos como por ejemplo los descritos en [Barghini et al. \(2019\)](#), [Jeanne et al. \(2019\)](#) o [Vida et al. \(2021\)](#) que mejoran los resultados astrométricos, obteniendo medidas más precisas de las posiciones de estrellas en el cielo y por lo tanto de las trayectorias de los meteoritos, que el modelo utilizado por **BOCOSUR**.

Desde el comienzo de operación de la red en 2021, se ha generado una gran base de datos, la cual se ha analizado en gran parte en [Velasco \(2024\)](#) con el desarrollo de un clasificador automático de videos en **bólidos** ó **no bólidos**, necesario debido a la gran cantidad de videos espurios (lluvia, animales, luces artificiales, etc) registrados por las cámaras. En [Velasco \(2024\)](#) el análisis se basó principalmente en la búsqueda de lluvias de meteoritos, y calculando en un solo caso particular, la trayectoria atmosférica de un evento multi-estación. En [Caldas et al. \(2025\)](#) se abordan aspectos técnicos del funcionamiento de la red, y también se calcula la trayectoria de un caso particular de un evento multi-estación. No obstante, hace falta un análisis más exhaustivo de los eventos multi-estación orientado a determinar cuáles pueden haber sido generadores de meteoritos. En [Sansom et al. \(2019\)](#) se desarrolla un criterio de suma utilidad para esta tarea (criterio $\alpha - \beta$), basado en trabajos como [Gritsevich \(2007\)](#) y [Gritsevich & Stulov \(2006\)](#), utilizando el coeficiente balístico α y el coeficiente de pérdida de masa β para determinar las probabilidades de los eventos a ser generadores de meteoritos. Ello constituye una herramienta poderosa para poder distinguir visual y sencillamente los eventos que ameriten un análisis más detallado para una posible campaña de búsqueda de meteoritos.

1.2. Objetivos

Como objetivos generales se proponen la mejora del pipeline del análisis de los datos de **BOCOSUR** en su etapa de calibración astrométrica, así como la búsqueda de eventos multi-estación que hayan podido ser generadores de meteoritos, estableciéndose los siguientes objetivos específicos para lograrlos:

- Implementación de un nuevo modelo de calibración astrométrica que alcance los estándares de las redes de detección de meteoritos a nivel mundial.
- Complementar el pipeline de **BOCOSUR** con el cálculo de los parámetros $\alpha - \beta$ para su utilización en el criterio desarrollado en [Sansom et al. \(2019\)](#), que evalúa la probabilidad de un evento multi-estación de ser generador de meteorito.
- Utilizar el criterio $\alpha - \beta$ sobre toda la base de datos de **BOCOSUR** en búsqueda de eventos multi-estación que ameriten un análisis más detallado.

1.3. Estructura de la monografía

La monografía está organizada en siete capítulos, correspondiendo la presente Introducción al primero de ellos.

El Capítulo 2 comienza con la descripción del modelo actual de calibración astrométrica utilizado por **BOCOSUR**, para luego desarrollar el nuevo modelo implementado, así como otras mejoras añadidas al proceso de calibración astrométrica.

En el Capítulo 3 se explicitan los pasos seguidos en la recopilación de los datos de los eventos multi-estación a estudiar, comentando las herramientas utilizadas y las limitantes encontradas.

En el Capítulo 4 se introduce el criterio $\alpha - \beta$ para la determinación de las probabilidades de los eventos multi-estación de ser generadores de meteorito. Se ahonda en los fundamentos físicos y en los aspectos clave para una correcta lectura de los resultados posteriores. Además se presenta el abordaje al cálculo de velocidad del objeto en su trayectoria, aspecto fundamental para hallar los parámetros $\alpha - \beta$.

En el Capítulo 5 se exponen los resultados del análisis de los eventos multi-estación, comenzando por una tabla con distintos datos de las trayectorias halladas, para luego abordar la lectura del gráfico del criterio $\alpha - \beta$. Se profundiza en el análisis de los eventos más prometedores.

En el Capítulo 6 se discuten aspectos relacionados a la calibración astrométrica, y se compara el desempeño de **BOCOSUR**, con el de la red **Desert Fireball Network** en el registro de bólidos muy brillantes.

En el Capítulo 7, se comentan conclusiones finales del trabajo, y se proponen mejoras al pipeline de **BOCOSUR**.

Capítulo 2

Calibración astrométrica

2.1. Antecedentes

Desde las primeras redes de detección de meteoros con cámaras all-sky, varios autores han propuesto y mejorado modelos de distorsión de lentes *fish-eye* para transformar lo observado en la imagen, en posiciones en el cielo. Tal es el caso de [Ceplecha \(1987\)](#), [Borovička \(1992\)](#) y [Borovička et al. \(1995\)](#), y posteriormente el utilizado por BOCOSUR hasta este trabajo, el de [Bannister et al. \(2013\)](#) que propone modificaciones al modelo propuesto por [Borovička et al. \(1995\)](#), además de la adaptación para CCD en lugar de placas fotográficas.

El modelo propuesto por [Bannister et al. \(2013\)](#) contiene 8 parámetros ($P_1, P_2, P_3, a_0, E, x_0, y_0$), de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (2.1)$$

$$u = P_1 r^2 + P_2 r + P_3 \quad (2.2)$$

$$b = a_0 - E + \tan^{-1} \left(\frac{y - y_0}{x - x_0} \right) \quad (2.3)$$

$$\cos(z) = \cos(u) \cos(\epsilon) - \sin(u) \sin(\epsilon) \cos(b) \quad (2.4)$$

$$\sin(a - E) = \sin(b) \sin(u) / \sin(z) \quad (2.5)$$

donde r es el radio desde el centro de proyección (COP) del lente sobre el CCD (x_0, y_0), hasta un punto de la imagen (x, y), u es el ángulo cenital medido desde el COP, b es un ángulo acimutal medido desde el COP. Luego a_0, ϵ y E son los 3 ángulos de rotación del CCD. Un esquema de la óptica del sistema que ilustra estos parámetros se muestra en la figura 2 de [Bannister et al. \(2013\)](#) (Fig:2.1).

Para este trabajo se propuso reemplazar este modelo, ya que existían nuevas propuestas que mejoraban los resultados como los trabajos de [Barghini et al. \(2019\)](#), [Jeanne et al. \(2019\)](#) o [Vida et al. \(2021\)](#). Luego de un análisis preliminar, se estimó más conveniente implementar el modelo de [Jeanne et al. \(2019\)](#) (con la ecuación radial hasta orden 9) dada la mayor facilidad en su implementación, y la similitud en la calidad astrométrica de ambos modelos como se puede observar en la tabla **A3** de [Vida et al. \(2021\)](#).

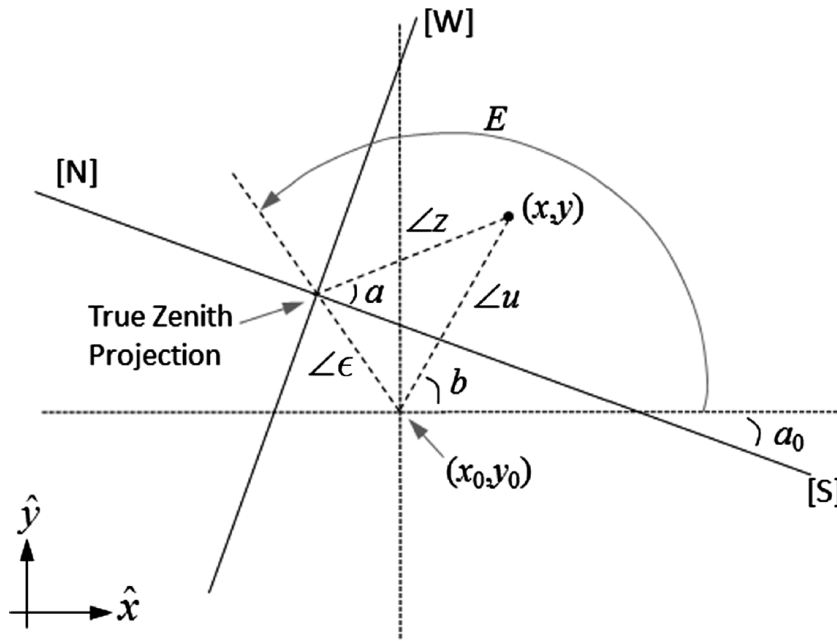


Figura 2.1: Figura 2 de [Bannister et al. \(2013\)](#). Las líneas punteadas representan el sistema de coordenadas de la cámara.

2.2. Método desarrollado

2.2.1. Marcar estrellas

La calibración astrométrica del pipeline de BOCOSUR comienza con el emparejamiento de coordenadas (x_c, y_c) del centro de las estrellas en la imagen con las coordenadas horizontales (Z, Az) de cada una, extraídas de catálogos conocidos. Estas coordenadas (x_c, y_c) son luego transformadas a (Z, Az) a través del modelo de distorsión para el tipo de lente utilizado (all-sky en nuestro caso), donde se comparan con las de catálogo para realizar el ajuste del modelo.

Para la selección de coordenadas (x_c, y_c) , se presenta en la imagen del video integrado y filtrado, un puntero seleccionador (Fig:2.2). Con este puntero el usuario define las coordenadas (i_0, j_0) de la imagen desde donde comenzará la búsqueda del centro de la estrella. En Bocosur el método en utilización era simplemente la búsqueda del pixel con el valor máximo dentro de un cuadrado de lado fijo y centrado en (i_0, j_0) , obteniendo siempre un número entero de pixel.

Para este trabajo nos propusimos mejorar el método y se implementó el ajuste de una PSF gaussiana 2D, donde el pixel de mayor valor, es utilizado para re-centrar el nuevo cuadrado para el cálculo más detallado del centroide final (x_c, y_c) con el ajuste gaussiano.

Automatización de marcar estrellas

Además del cambio de método del cálculo del centroide de la estrella, también se implementó un método de identificación de estrellas automático, que utiliza la misma idea que una función ya desarrollada en la aplicación, la función (**Identificar**). Esta función permite identificar las estrellas presentes en la imagen (video integrado), y realizar la fotometría de cada una, para la posterior calibración fotométrica del video. Comienza utilizando los parámetros ya existentes de la calibración astrométrica, y mapeando en la imagen las n estrellas más brillantes del catálogo Hipparcos de la ESA, donde se realiza la fotometría de cada una.

Para nuestra nueva función **AutoMarcEstr**, se utiliza esta misma idea y se toman los valores que ya

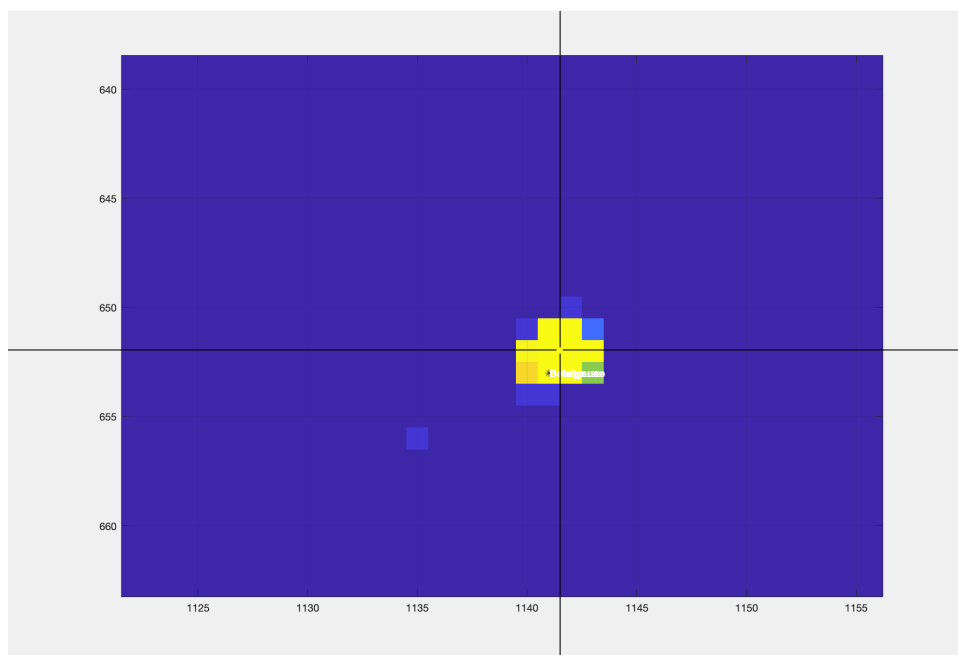


Figura 2.2: Puntero seleccionador.

tengamos de calibración astrométrica para mapear las estrellas presentes en la imagen, también desde la magnitud más baja hasta la más alta, y en cada una se realiza una búsqueda en un radio anteriormente determinado, donde se siguen los mismos pasos que el marcar estrellas manual, primero buscando el pixel de mayor valor en ese radio predeterminado, y luego se ajusta una gaussiana 2D al nuevo cuadrado centrado en (i_0, j_0) . En la figura (Fig:2.3) se puede observar la Cruz del Sur con las estrellas mapeadas (asteriscos negros) y sus respectivas posiciones calculadas de centroide (rombos violetas).

Como vemos, para esta nueva función, es necesario contar de antemano con una calibración astrométrica. La ventaja radica en que no tiene que ser una calibración precisa, puede ser con unas pocas estrellas (~ 25) seleccionadas manualmente (asegurándose que tengan una buena distribución espacial) y a partir de esta calibración (y cambiando el valor de radio de búsqueda si es necesario), se puede realizar un proceso de marcar estrellas de forma automática y realizar calibraciones de forma iterativa, hasta alcanzar una determinada precisión astrométrica.

2.2.2. Modelo de distorsión

Para los lentes “*ojo de pez*” o “*fish-eye*” existen varios tipos de funciones de proyección utilizados para su construcción. En Hughes et al. (2010) se detallan las más utilizadas (Tabla: 2.1).

Proyección	Función de proyección
Equidistante	$r = f \theta$
Equisólida	$r = 2f \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
Ortográfica	$r = f \sin(\theta)$
Estereográfica	$r = 2f \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Tabla 2.1: Funciones de proyección radiales comunes para lentes ojo de pez, que vinculan la distancia en píxeles desde el centro de la imagen (r) con el ángulo cenital (θ). Con f la constante de escala o distancia focal.

En nuestro caso, al igual que lo señalado en Jeanne et al. (2019), el fabricante de los equipos (ZWO:

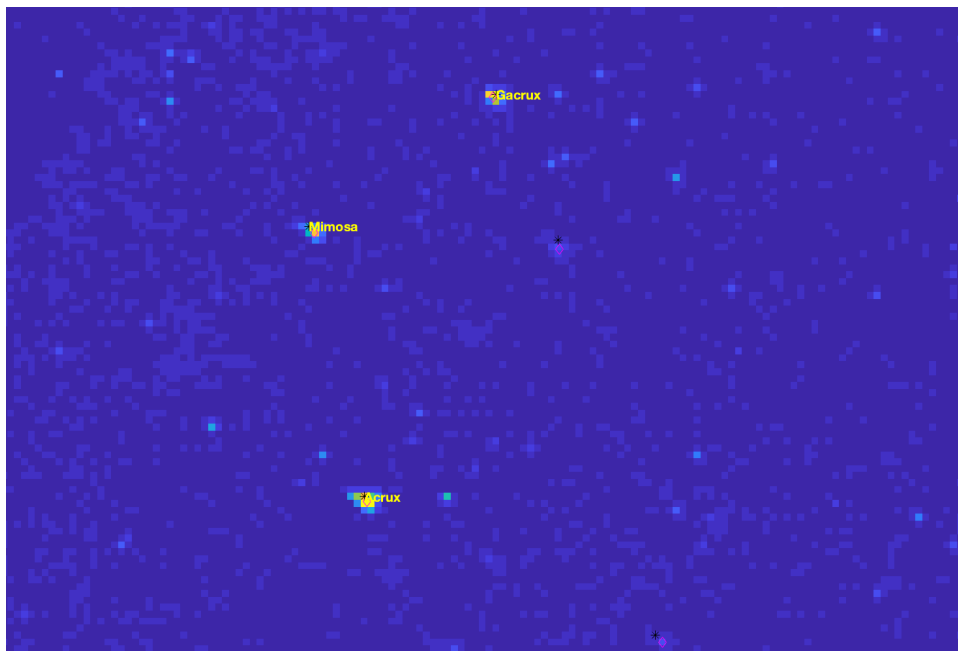


Figura 2.3: Cruz del Sur, con las posiciones de las estrellas mapeadas a partir de una calibración astrométrica previa (asteriscos negros), y sus respectivas posiciones calculadas de centroide (rombos violetas) para una nueva calibración.

ASI 178mm para nuestras cámaras) no menciona la función de proyección utilizada. Por lo tanto, decidimos utilizar los datos ya recabados de una estación, es decir un conjunto de (x_c, y_c) con coordenadas horizontales correspondientes (z, Az) , para hallar el modelo que mejor ajusta a los datos.

Como se puede observar en la figura (Fig: 2.4), la función de proyección que mejor ajusta es la Equisólida, al igual que el sistema utilizado en [Jeanne et al. \(2019\)](#) donde encuentra la misma función de proyección para sus equipos y comenta que es la más utilizada por los fabricantes de lentes *fish-eye*.

A partir de estos resultados decidimos utilizar la función de mapeo equisólida, y seguir el modelo de [Jeanne et al. \(2019\)](#).

Modelo de Jeanne 2019

El modelo presentado por [Jeanne et al. \(2019\)](#) utiliza 12 parámetros que pueden ser separados en cuatro categorías diferentes. Primero tenemos tres ángulos $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ que indican las rotaciones espaciales del sensor; luego dos coordenadas en píxeles (x_{cop}, y_{cop}) indicando el centro de proyección (varía según la alineación del lente con el sensor, si la alineación fuera perfecta serían las coordenadas del centro de la imagen); cinco parámetros para el polinomio de distorsión radial $(a_1, a_3, a_5, a_7, a_9)$, y dos parámetros para la corrección de asimetría azimutal (K_1, ϕ) .

Por lo tanto el método para pasar de coordenadas en la imagen (x_c, y_c) a coordenadas azimutales es el siguiente:

Primero se comienza por calcular el radio desde el centro de proyección (Centre of projection: *COP*):

$$R = \sqrt{(x_c - x_{cop})^2 + (y_c - y_{cop})^2} \quad (2.6)$$

Y el ángulo azimutal A :

$$\tan(A) = \frac{y_c - y_{cop}}{x_c - x_{cop}} \quad (2.7)$$

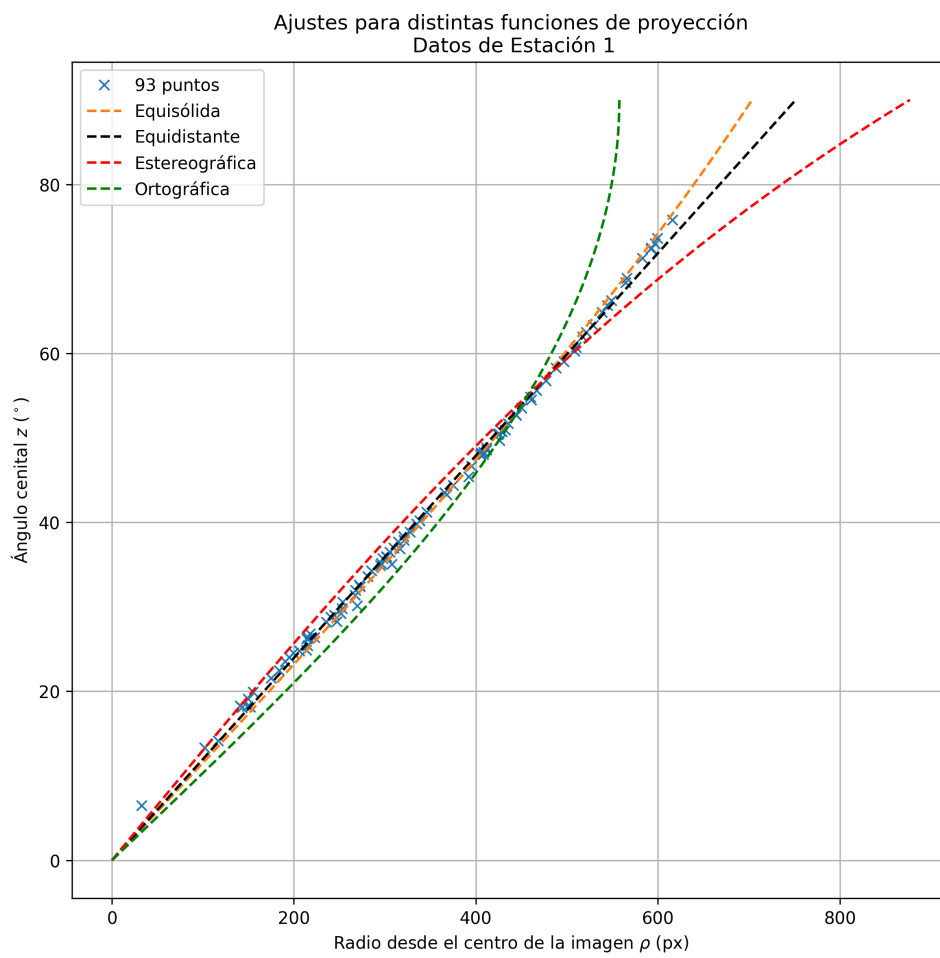


Figura 2.4: Ajustes de funciones de proyección para datos de la Estación 1

Donde al radio R se le aplica la distorsión acimutal correspondiente con (K_1, ϕ) , quedando el radio corregido R_c :

$$R_c = R(1 + K_1 \sin(A + \phi)) \quad (2.8)$$

Para la función de distorsión, partimos de la inversa de la función de proyección equisólida:

$$\theta(r) = 2 \arcsin\left(\frac{r}{2f}\right) \quad (2.9)$$

y se realiza un desarrollo de Taylor hasta noveno orden:

$$\theta(r) = 2 \left(\frac{r}{2f} + \frac{1}{6} \left(\frac{r}{2f}\right)^3 + \frac{3}{40} \left(\frac{r}{2f}\right)^5 + \frac{5}{112} \left(\frac{r}{2f}\right)^7 + \frac{35}{1152} \left(\frac{r}{2f}\right)^9 \right) \quad (2.10)$$

donde se buscan hallar los coeficientes multiplicativos. Por lo tanto, y utilizando el radio corregido R_c , se obtiene:

$$\theta(R_c) = a_1 R_c + a_3 R_c^3 + a_5 R_c^5 + a_7 R_c^7 + a_9 R_c^9 \quad (2.11)$$

Calculados el ángulo cenital θ y el acimutal A , se transforman a coordenadas cartesianas, formando el vector posición solidario a la cámara \mathbf{S}_{cam} :

$$\mathbf{S}_{cam} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \cdot \cos(A) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(A) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

el cual es rotado según los ángulos $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ correspondientes a la convención de Euler para posicionarse solidario al sistema de coordenadas horizontales (z, Az) obteniendo \mathbf{S}_{hor} :

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & \sin(\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_2) & 0 & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) \\ 0 & \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{R}_{rot} = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x \quad (2.16)$$

$$\mathbf{S}_{hor} = \mathbf{R}_{rot} * \mathbf{S}_{cam} \quad (2.17)$$

Se realiza esta transformación para cada estrella (x_c, y_c) , donde se obtiene el vector \mathbf{S}_{hor} para cada una, y se calcula el producto interno con el vector \mathbf{S}_{CAT} formado por las coordenadas horizontales provenientes de catálogo guardadas en la etapa de *marcar estrellas*:

$$\mathbf{S}_{CAT} = \begin{bmatrix} \sin(Z_{CAT}) \cdot \cos(Az_{CAT}) \\ \sin(Z_{CAT}) \cdot \sin(Az_{CAT}) \\ \cos(Z_{CAT}) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

obteniendo un vector de diferencias angulares Δ_α :

$$\Delta_\alpha = \arccos(\mathbf{S}_{hor} \cdot \mathbf{S}_{CAT}) \quad (2.19)$$

Este es el vector de residuos a minimizar, para lo que en este trabajo se utilizó la función **lsqnonlin** de MATLAB, que implementa el algoritmo para resolver sistemas de ecuaciones no lineales **levenberg-marquardt**, hallando los 12 parámetros $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, x_{cop}, y_{cop}, a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, K_1, \phi)$ que minimizan el vector Δ_α .

2.2.3. Determinación del vector *initial guess*

El algoritmo requiere de un vector de estimación inicial de los 12 parámetros. Este vector es de fundamental importancia para el correcto funcionamiento del algoritmo, para asegurar que el mínimo que encuentre sea el mínimo absoluto y no un mínimo local.

Con el modelo de [Bannister et al. \(2013\)](#) el vector inicial no cambiaba de cámara a cámara, ya que suponer los tres coeficientes de la distorsión radial igual a cero convergía siempre al mínimo absoluto. Este no es el caso cuando se utiliza el modelo de [Jeanne et al. \(2019\)](#) con cinco coeficientes para el polinomio de distorsión radial, donde se necesita una aproximación específica utilizando los datos de cada estación respectivamente.

Para esto se agregó un paso previo al modelo, donde a partir de los mismos datos utilizados para la calibración, se hallan automáticamente los cinco coeficientes del polinomio de distorsión radial como estimación inicial.

El método consiste en ajustar el polinomio de la ecuación de distorsión radial (2.11) a los datos recabados en *marcar estrellas*, donde el radio R es calculado como la distancia en píxeles desde el centro de la imagen hasta los (x_c, y_c) , y este se plotea contra el valor de Z correspondiente a ese punto. En la (Fig:2.5) se pueden observar estos plots para cuatro estaciones distintas, donde resulta claro que existe una diferencia de dispersión de los datos dependiente de cada estación. Esta dispersión resulta de la inclinación de la cámara con respecto al cenit real, que se refleja en la distancia en píxeles en la imagen del cenit real al centro de la imagen. Esto puede observarse en la figura (Fig:2.6), donde se cambia el centro desde donde se calcula R , pasando del centro de la imagen al cenit real para cada estación.

Visualizando la posición del cenit real con respecto al centro de la imagen (Fig:2.6) se puede observar claramente esta dependencia según la alineación de cada estación.

El método propuesto se reduce a encontrar las coordenadas del cenit verdadero en la imagen, y ajustar el polinomio de distorsión a los puntos graficados con R medido desde estas nuevas coordenadas contra el valor de Z_{CAT} para cada estrella. De esta manera se maximiza la cantidad de puntos utilizados para el ajuste.

Para encontrar el cenit verdadero, se define una grilla centrada en el centro de la imagen con una medida de lado definida, (para esta resolución de la imagen, $lado = 200px$) donde para cada punto $p(x, y)$ de la grilla, se plotea R_p contra Z_{CAT} y se ajusta simplemente una recta (se elige una recta porque una

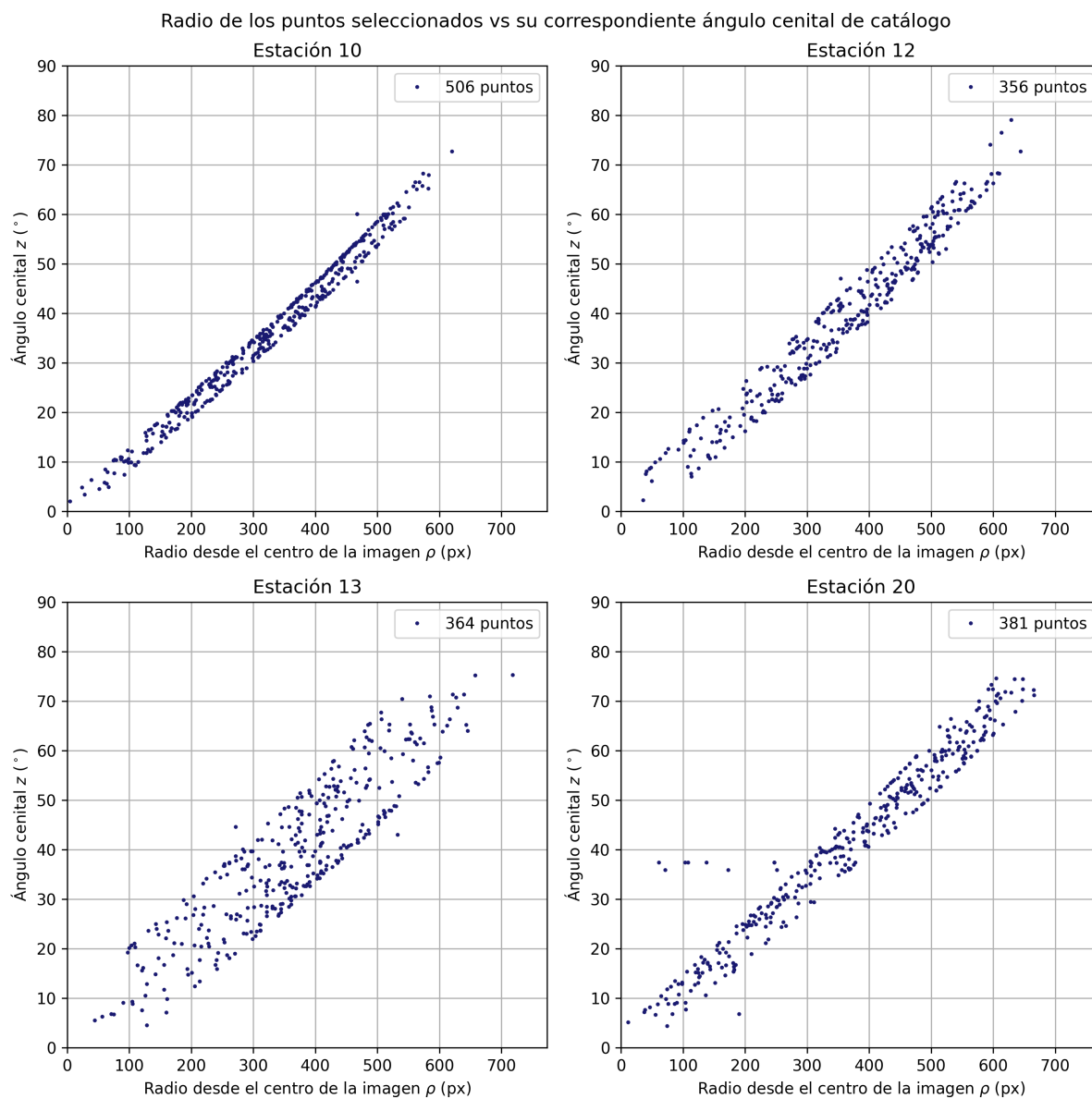


Figura 2.5: Radio medido desde el centro de la imagen de los puntos seleccionados vs su correspondiente ángulo cenital de catálogo para las estaciones: 10, 12, 13 y 20.

Causa de la dispersi3n en R vs Z_{CAT}

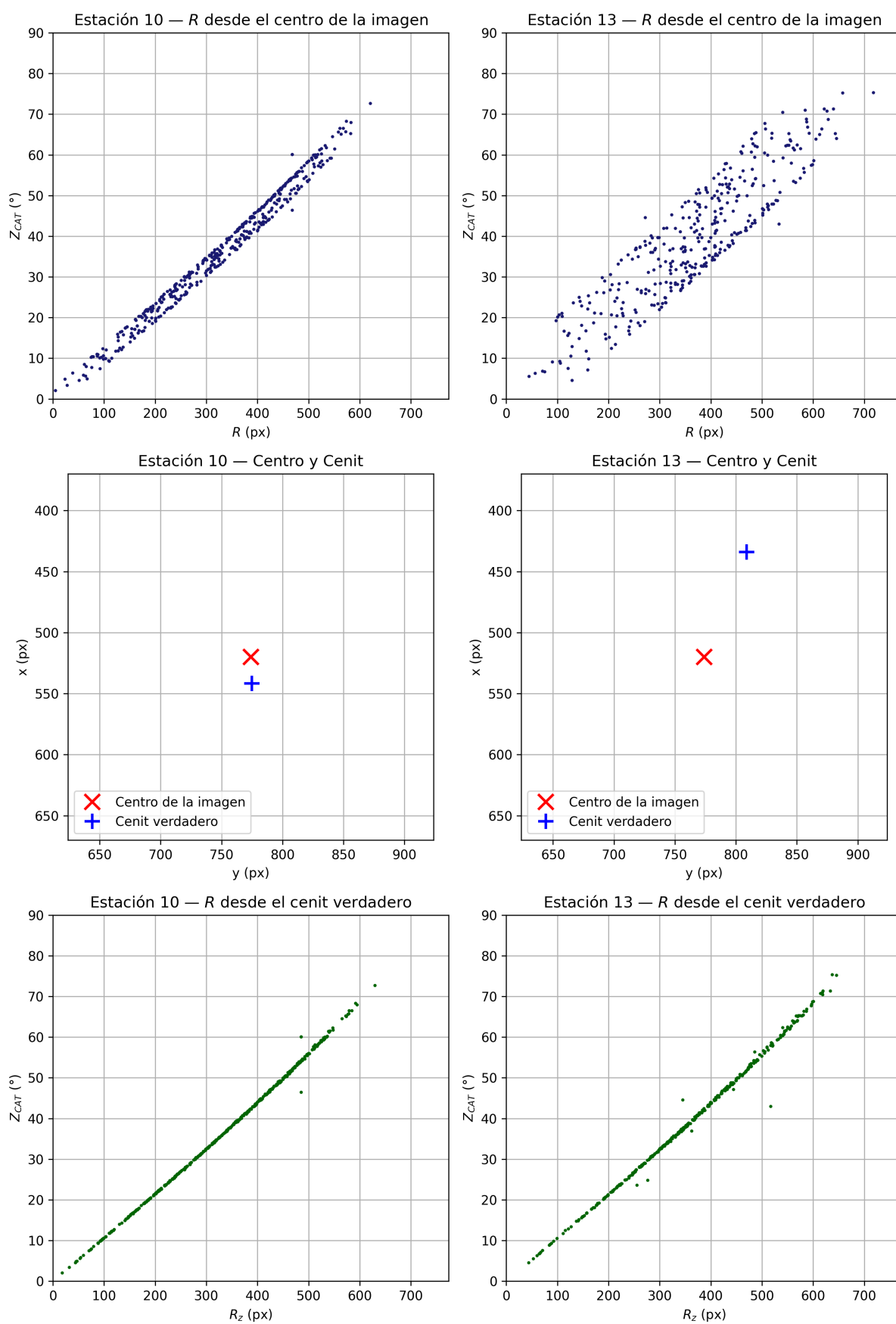


Figura 2.6: Comparativa de la dispersi3n en R vs Z_{CAT} para las estaci3n 10 y 13 dependiendo de la ubicaci3n del cenit verdadero.

Estación	a_1	a_3	a_5	a_7	a_9
1	1.4273	0.1913	0.0094	0.0603	-0.0565
2	1.4264	0.2270	-0.4077	0.9689	-0.6273
3	1.4341	0.3088	-0.8932	2.2109	-1.6645
4	1.4365	0.1250	0.1861	-0.0694	-0.0864
5	1.4435	0.0105	0.7039	-1.1949	0.7279
6	1.4477	0.0479	0.5079	-0.7467	0.4658
7	1.4436	0.1551	0.0358	0.1344	-0.1577
8	1.4466	0.1466	0.2494	-0.3621	0.2018
9	1.4367	0.1066	0.3448	-0.4975	0.2527
10	1.4364	0.1722	-0.0148	0.2955	-0.3404
11	1.4350	0.2217	-0.3204	0.7554	-0.4750
12	1.4351	0.2040	-0.1981	0.4243	-0.2519
13	1.4361	0.1078	0.3177	-0.4994	0.2824
14	1.4393	0.1277	0.2104	-0.2387	0.1343
15	1.4573	-0.0768	0.9666	-1.2779	0.5002
16	1.4362	0.2823	-0.5901	1.2230	-0.7630
17	1.4383	0.1772	-0.0747	0.4035	-0.3221
18	1.4519	0.0406	0.3044	-0.2397	0.0554
19	1.4430	0.1110	0.1665	-0.0270	-0.0775
20	1.4125	0.4886	-1.4439	2.9833	-2.0643

Tabla 2.2: Coeficientes a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 para cada estación (Método Jeanne19).

aproximación a primer orden ya es suficiente para el objetivo planteado), se mide la desviación estándar del ajuste con los datos, y se guarda. Finalizado el recorrido por la grilla, el punto $p(x, y)$ con menor desviación estándar serán las coordenadas del cenit verdadero. Por lo tanto, se grafica R_p contra Z_{CAT} , y se ajusta el polinomio (2.11) para obtener el valor inicial para los cinco coeficientes (a_1, a_3, a_5, a_7, a_9).

2.3. Validación

Se realizó una comparación entre Bannister y Jeanne con el mismo set de datos. Las métricas para esta comparación son el RMSE (root mean squared error) en z y Az en minutos de arco (arcmin), y el rango en z de las estrellas utilizadas por el modelo. Para esto se utilizaron las calibraciones realizadas para el análisis de los eventos multi-estación del capítulo (Cap:3) donde de todas las posibles calibraciones, se eligió uno de los periodos con más estaciones calibradas, del 04/23 al 05/23, y para las restantes estaciones, la 14 y la 20, se eligieron los períodos 12/22 al 01/23, y 10/24 respectivamente.

En la figura (Fig:2.7) se pueden observar los valores de RMSE (Ec:2.20) en z para las 20 estaciones, y en la figura (Fig:2.8) los valores de RMSE para Az en las 20 estaciones. El catálogo utilizado fue el de Hipparcos de la ESA (van Leeuwen (2007)).

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_{\text{CAT}} - z_{\text{modelo}})^2} \quad (2.20)$$

Observando ambas figuras de los RMSE se puede apreciar que existen diferencias claras de estación a estación, independientemente del modelo elegido, esto se puede deber a factores como la contaminación lumínica del lugar de cada estación, o el estado del domo de policarbonato, que necesita ser cambiado en el transcurso del segundo año de uso debido a su deterioro (Fig:2.9).

Como muestran las figuras (Fig:2.7) y (Fig:2.8), se obtienen mejores valores independientemente de la estación, tanto en z como en Az , pero hay que evaluar otra característica antes de poder afirmar una mejora definitiva del nuevo modelo por sobre el anterior, la que nos indica la cobertura espacial de las estrellas utilizadas para el ajuste.

Esta última característica es de suma importancia por la forma en que funciona el algoritmo de

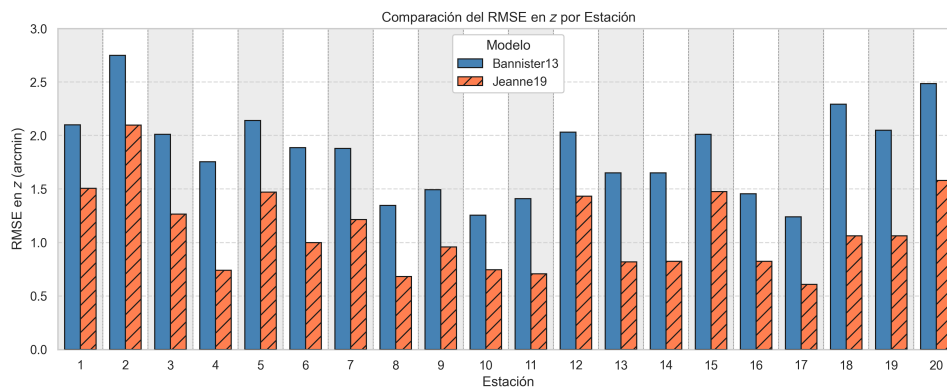


Figura 2.7: Comparación de los valores de RMSE en cenit para los modelos de Bannister et al. (2013) y Jeanne et al. (2019) para las 20 estaciones, utilizando las calibraciones del periodo de 04/23-05/23 para todas las estaciones menos para la 14 (12/22 al 01/23) y la 20 (10/24).

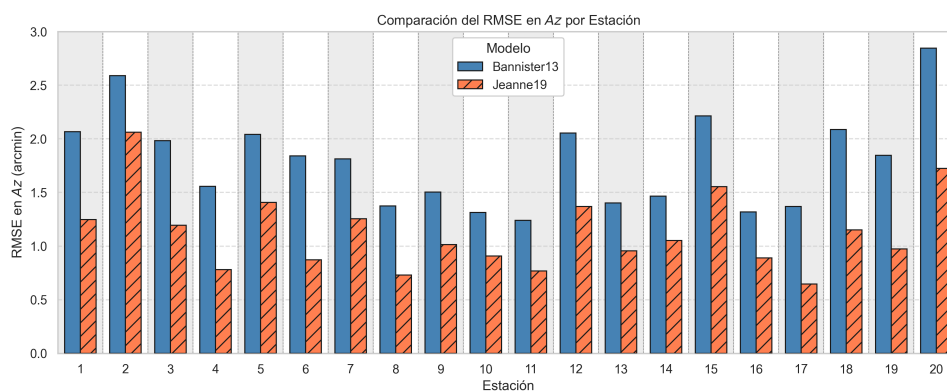


Figura 2.8: Comparación de los valores de RMSE en azimut para los modelos de Bannister et al. (2013) y Jeanne et al. (2019) para las 20 estaciones, utilizando las calibraciones del periodo de 04/23-05/23 para todas las estaciones menos para la 14 (12/22 al 01/23) y la 20 (10/24).



Figura 2.9: Deterioro en los domos de policarbonato. Izquierda: más de dos años de uso. Derecha: nuevo.

calibración, ya que cada iteración va quitando el punto de mayor error astrométrico, llegando hasta una instancia en que se cumpla alguna de las dos condicionantes: el error máximo deseado, o el número de estrellas mínimas a utilizar, ambos seteados previamente. Esto puede introducir sesgos debido a que según el modelo, podemos tener zonas en la imagen que estén peor modeladas que otras, haciendo que las estrellas que sobreviven a la calibración se acumulen en determinados espacios de la imagen. Y esto finalmente puede resultar en un muy buen ajuste en algunas partes de la imagen y muy malos en otras, por lo que luego el cálculo de nuestra trayectoria en el cielo (z , Az) de un meteoro se va a ver afectada por este fenómeno, y esos errores serán trasladados a nuestra trayectoria tridimensional utilizando múltiples estaciones que registran el meteoro en distintas partes de la imagen.

Para observar cómo afecta este fenómeno a los distintos modelos, se presentan las gráficas de las calibraciones de una misma estación (estación 17) con el mismo archivo `matcheadas.txt` en la figura (Fig:2.10).

Se puede observar claramente en la figura (Fig:2.10) cómo en la estación 17, se mejora no solo el valor de RMSE sino que se cubre un área más grande llegando a utilizar estrellas de muy baja elevación, que es donde los lentes fish-eye tienen más distorsión. Por lo cual los eventos que ocurran a elevaciones bajas quedarán mejor mapeados, siendo esto muy importante en una red multi-estación donde tendremos para un mismo evento, estaciones que lo registren cerca del cenit, mientras otras más lejanas lo registrarán a bajas elevaciones.

La comparación de estos parámetros para todas las estaciones se puede ver resumida en la figura (Fig:2.11), donde la barra de color indica el rango de ángulos cenitales que tiene cada calibración. Se pueden distinguir claramente dos grupos, donde las nuevas calibraciones con el modelo de Jeanne presentan en promedio valores más bajos de RMSE en ambas coordenadas (z , Az) comparadas con las realizadas por el modelo de Bannister, además de presentar valores más altos en cuanto al rango en z . Cabe destacar que si bien se observa una intersección entre estos dos grupos, esto se debe a que son calibraciones de distintas estaciones, ya que como se puede corroborar en las figuras (Fig:2.7) y (Fig:2.8), el nuevo modelo siempre mejora al anterior en ambos valores.

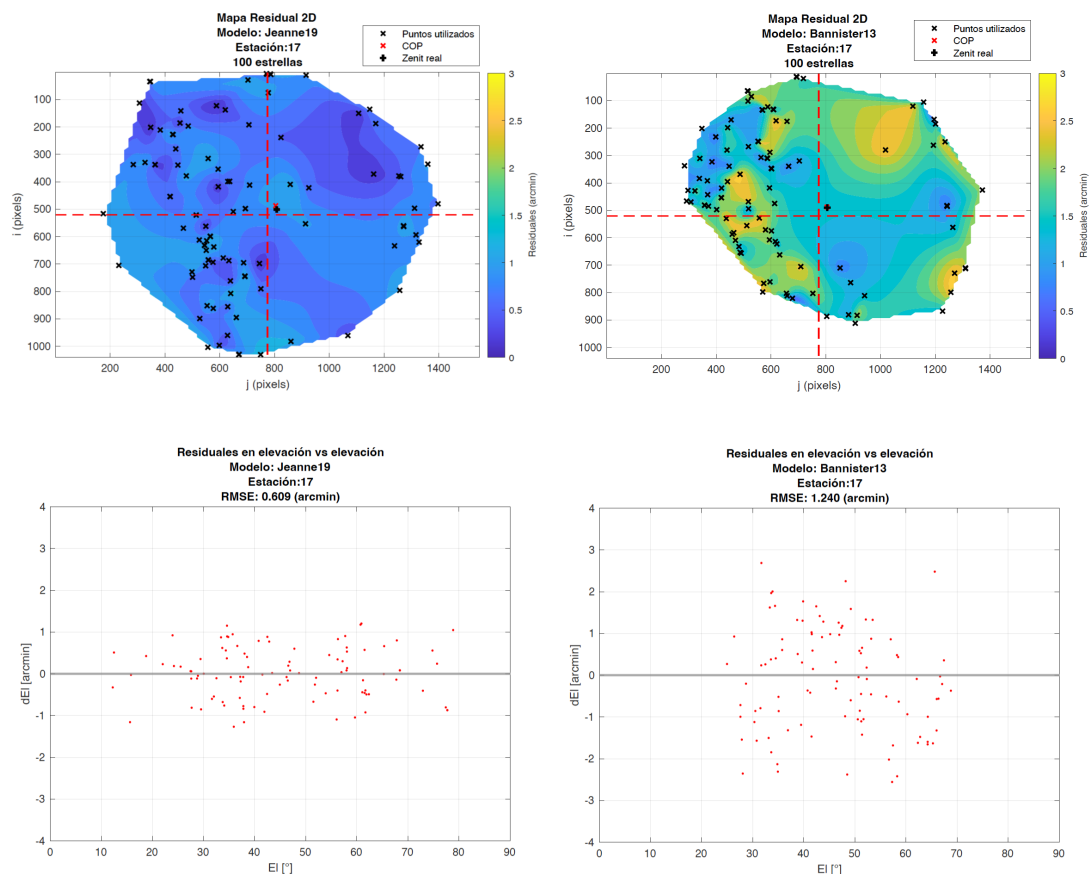


Figura 2.10: Comparación entre los modelos de Jeanne y Bannister en la estación 17 para el período 04/23-05/23. Arriba tenemos los mapas 2D de las calibraciones con sus residuales interpolados en toda el área interior a las estrellas utilizadas, del lado izquierdo el modelo de Jeanne y en el lado derecho el modelo de Bannister. Abajo son los resultados de la misma calibración pero presentados como los residuales en elevación, donde también tenemos en la izquierda el modelo de Jeanne y en la derecha el modelo de Bannister.

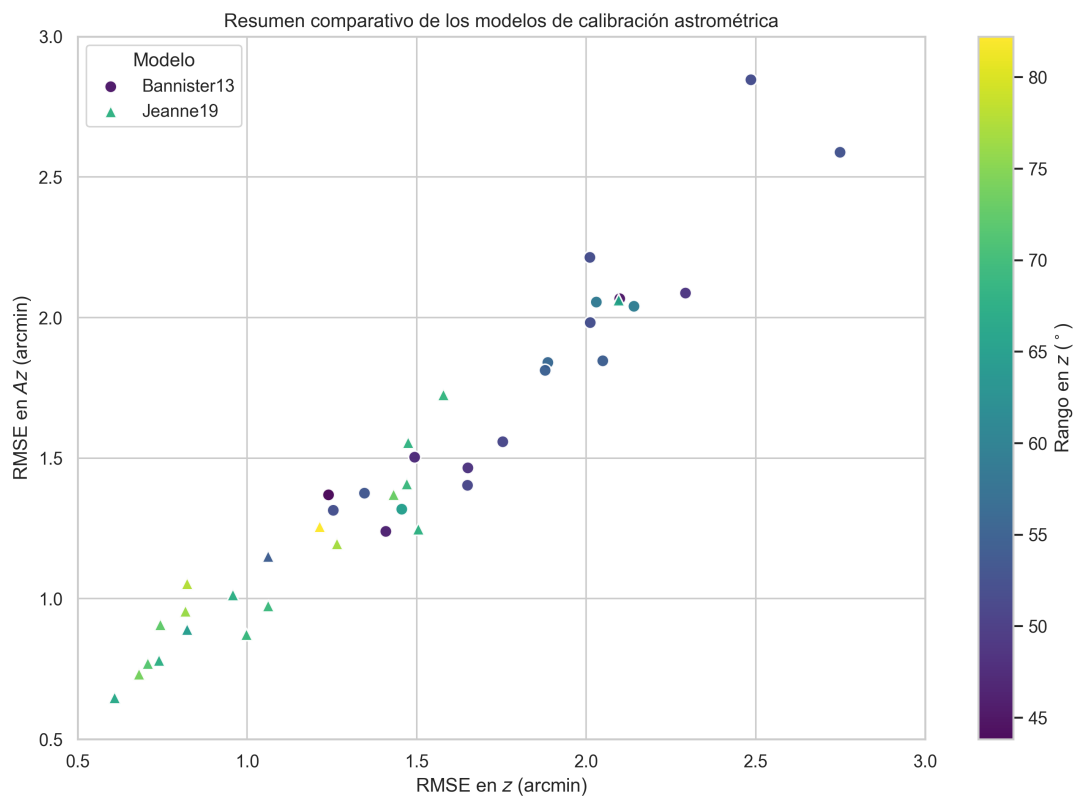


Figura 2.11: Resumen comparativo entre nuestro modelo de [Jeanne et al. \(2019\)](#) modificado y el modelo anterior de [Bannister et al. \(2013\)](#) para todas las estaciones. Eligiendo un mismo período de calibración para todas (04/23-05/23) excepto para la estación 14 (12/22-01/23) y la 20 (10/24).

Capítulo 3

Eventos analizados

3.1. Clasificador Autobol

Luego de implementado el nuevo modelo de calibración astrométrica, nos propusimos analizar la base de datos de la red en busca de eventos multi-estación (un mismo evento visto por 2 o más estaciones) esporádicos (no asociados a priori a ninguna corriente meteórica conocida), con el fin de encontrar aquellos que pudieran haber dado lugar a la generación de meteoritos.

Al momento de comenzar la recopilación de eventos, la red ya contaba con decenas de miles de videos almacenados en el servidor en Facultad de Ciencias. A estos datos se les sumó los que estaban almacenados localmente en las estaciones. Existen vacíos temporales en los datos relacionados con estaciones a las que frecuentemente no era posible acceder por distintos motivos (problemas de conectividad, cortes en el suministro de electricidad o fallas en el hardware de las estaciones). El resultado de esta recopilación de datos fueron un total de 168175 videos, que abarca el período del 06/08/2021 al 04/09/2025.

En las estaciones BOCOSUR, el algoritmo de detección automática genera videos espurios (insectos o aves que reflejan la luz de algún foco cercano, tormentas, reflejos de luz artificial en el domo de la estación, etc), por lo cual se requiere de una clasificación de los videos almacenados, verificando que efectivamente sean videos de meteoros, para su posterior análisis. Como el volumen de datos que genera la red es muy elevado, se hace imposible una clasificación de forma manual, por lo que se utiliza una herramienta de automatización para este proceso.

En [Ballestrino et al. \(2022\)](#) se desarrolló la herramienta **Autobol**, que luego fue mejorada y adaptada para las nuevas cámaras ZWO ASI 178mm en [Velasco \(2024\)](#). La herramienta se basa en el aprendizaje automático supervisado, utilizando árboles de decisión con la librería **XGBoost** de Python, y devuelve la probabilidad de cada video de pertenecer a las clases *Bólide* o *No Bólide*.

Se corrió **Autobol** con el modelo final de entrenamiento descrito en [Velasco \(2024\)](#), donde se mencionan tasas de falsos positivos y falsos negativos de 10.3% y 10.6% respectivamente. Por lo tanto las métricas utilizadas son las mismas que se pueden ver en la *Tabla 11* en [Velasco \(2024\)](#).

Al correr el código con esos valores sobre nuestra base de datos, se obtiene un archivo **csv** con valores de probabilidad de cada video de pertenecer a la categoría **Bólide**, donde se seleccionan como tales, los que presenten un valor superior o igual al 50%. Realizado ese corte en probabilidad, obtuvimos un total de 10.491 videos clasificados como *bóldidos*, que representan un 6.23% del total de videos analizados.

3.1.1. Clasificación de segundo orden manual

Como sabemos que existe un cierto porcentaje de falsos positivos, hay que corroborar cuáles son y quitarlos de la muestra antes de continuar, debiendo realizar este chequeo manualmente. La llamamos clasificación de segundo orden manual, y comienza con el stackeo de los frames de los videos para una rápida visualización de los eventos. Luego de obtenidas estas imágenes integradas de cada video, se procede a un chequeo visual para confirmar la categoría de bólide, donde se buscan trazas del pasaje del

bólido. Para los casos dudosos se chequeó el video, pudiendo discernir velocidades, o identificar la traza si es muy pequeña y de difícil localización en una imagen integrada.

Se encontraron 2733 videos de **Bólidos** confirmados, siendo un 1.62 % de la muestra total de videos. El porcentaje de falsos positivos luego de **Autobol** fue elevado (26.05 %) con respecto a lo previsto por el modelo final utilizado (10.3 %), esto se debió particularmente a una estación que generó muchos videos por gotas de lluvia en el domo que lograron pasar el filtro de **Autobol** por el brillo en forma de curva que generaban cuando se movían, debido a algún foco de iluminación artificial cerca de la estación.

3.2. Búsqueda de eventos multi-estación

Para la búsqueda de videos en distintas estaciones que correspondieran a un mismo evento, se utilizó un código desarrollado en **Velasco (2024)**, que utiliza los tiempos de PC que están registrados en el nombre de los videos, eligiendo un delta temporal y realizando la búsqueda de intersecciones en todos los videos, generando grupos. En este caso se utilizó una tolerancia de 600 segundos ya que algunas estaciones presentaban tiempos de PC muy dispares, y se decidió tener la menor cantidad de falsos negativos aunque eso aumentase la cantidad de falsos positivos. Con ese parámetro de delta temporal, la cantidad de candidatos a eventos multi-estación resultó en 562.

3.2.1. Selección final

Como nuestro objetivo era poder analizar eventos que hayan tenido posibilidad de generar meteoritos, nos interesaban los eventos más brillantes y de largo recorrido. Para este trabajo se optó por realizar la elección de forma manual, ya que la elección automática presenta varios desafíos en sí misma. Por ejemplo tenemos videos en un mismo grupo que no pertenecen a un mismo evento por la elección del delta temporal, además los eventos son vistos desde posiciones muy distintas por cada estación y por lo tanto se dificulta elegir cual sería el video **referencia** para analizar su brillo máximo.

Para esta elección manual de eventos multi-estación se realizaron los stacks de los videos de los grupos en conjunto, obteniendo una imagen por cada grupo como muestra la figura (Fig:3.1). La elección se basó en recorrido, y brillo de los eventos, buscando eventos largos y muy brillantes, además de eventos con fragmentaciones visibles, identificables a través de saturaciones en las trazas registradas. El factor del número de estaciones de un evento fue considerado pero no fue determinante a la hora de la elección, ya que se encontraron varios eventos de solo 2 estaciones lo suficientemente interesantes como para incluirlos en el análisis (ver por ejemplo el de la figura (Fig:3.2)).

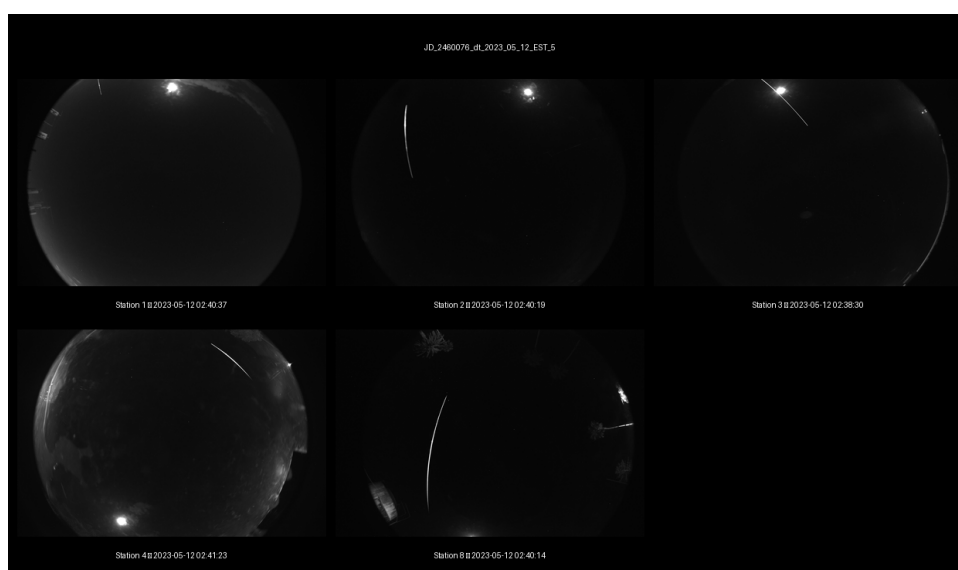


Figura 3.1: Videos integrados del evento del 12/05/2023. Para la creación de las imágenes, se selecciona el valor máximo que cada pixel haya tenido a lo largo del video.



Figura 3.2: Videos integrados del evento del 10/07/2022. El evento solo cuenta con 2 estaciones pero no deja de ser interesante para el análisis ya que presenta momentos de saturación del brillo, que indican fragmentación.

De esta forma se eligieron 70 eventos multi-estación, de los cuales a 64 pudo realizarse un cálculo de trayectoria. Esto se debió a que por más que esos 6 eventos restantes cumplían con el requisito de ser videos de *bólid*os y que sus tiempos de PC estaban a menos del delta temporal elegido (600 segundos), no eran efectivamente el mismo evento, hecho que se corroboraba por el error geométrico resultante a la hora del cálculo de la trayectoria.

A estos 64 eventos se les calculó su trayectoria atmosférica y los parámetros $\alpha - \beta$ si correspondía ($\frac{V_{fin}}{V_{\infty}} < 0.8$) como se menciona en la sección (Sec:4.2).

3.3. Calibraciones

Para el análisis de los eventos, fue necesario contar con calibraciones adecuadas para todos los videos. Se decidió realizar calibraciones cada dos meses en cada estación, saltando los periodos en los que no existían videos para analizar. Para algunos casos particulares hubo que realizar calibraciones extra dentro del período establecido de dos meses debido a fuertes inconsistencias en las observaciones, relacionadas principalmente a visitas de reparación a las estaciones, donde se movía la cámara para poder operar con libertad de movimiento dentro de la estación. En total se realizaron 94 calibraciones, con los valores en las tablas (Tablas:3.1, 3.2). En dos ocasiones se debieron realizar calibraciones mensuales, por movimientos grandes de las cámaras en el periodo bimensual, resultando en la incompatibilidad en las observaciones bimensuales para obtener una única calibración.

Tabla 3.1: Calibraciones bimensuales: RMSE en z en arcmin

ID	6/22-7/22	10/22-11/22	12/22-1/23	2/23-3/23	4/23-5/23	6/23-7/23	8/23-9/23	7/24-8/24	9/24-10/24	11/24-12/24	6/25-7/25
1	1,185	1,102	1,528	1,256	1,302	1,433					
2	1,267	1,186	1,418	1,645	2,216	2,773	3,021		2,290		
3	0,891	1,097	1,183	1,347/1,514	1,144	1,531	2,156				
4		1,121	1,022	0,792	0,734						1,958
5		1,392	1,480	1,159	1,399	2,206		2,190		1,995	
6	1,247	1,362	1,181/1,053		0,934	1,219					
7	1,226	2,671	2,378	0,882	1,194	1,068					
8		1,537	1,157	0,870	0,736	1,366					2,312
9		0,976	0,998	1,322	0,935	0,972		0,907	1,648		
10			1,330	1,102	0,781		1,234				
11		1,047	1,008	1,082	0,728	0,939					
12		1,139	1,447		1,366	1,108		1,352	1,633	2,004	
13				0,942	0,830	0,952					
14			0,843	0,691							
15			1,367		1,540	1,315	1,705				
16				1,506	0,857	1,087					
17				0,733	0,623	0,937					
18					0,984	1,205					
19			1,148	1,698	0,976	1,232					
20											

Tabla 3.2: Calibraciones bimensuales: RMSE en Az en arcmin

ID	6/22- 7/22	10/22- 11/22	12/22- 1/23	2/23- 3/23	4/23- 5/23	6/23- 7/23	8/23- 9/23	7/24- 8/24	9/24- 10/24	11/24- 12/24	6/25- 7/25
1	1,213	1,186	1,602	1,155	1,247	1,557					
2	1,264	1,466	1,440	1,999	2,062	2,740	3,034		2,072		
3	0,954	1,191	1,206	1,539/ 1,668	1,195	1,485	2,109				
4		1,247	1,004	0,882	0,780						1,786
5		1,451	1,548	1,359	1,408	2,013		1,958		1,900	
6	1,235	1,207	1,337/ 1,131		0,872	1,021					
7	1,486	2,729	2,291	0,886	1,256	1,148					
8		1,427	1,072	0,851	0,731	1,329					2,423
9		1,201	1,119	1,695	1,013	1,129		0,870	1,676		
10			1,391	1,311	0,907		1,159				
11		1,146	0,945	1,103	0,769	0,934					
12		1,261	1,551		1,370	1,187		1,493	1,554	2,279	
13				0,965	0,955	0,983					
14			1,053	0,739							
15			1,517		1,555	1,196	1,434				
16				1,480	0,890	1,014					
17				0,877	0,647	0,993					
18					1,150	1,263					
19			1,160	1,509	0,974	1,211					
20											

Capítulo 4

Criterio $\alpha - \beta$

4.1. Motivación

Luego de que tenemos detectados los eventos multi-estación, y analizamos su trayectoria, es de nuestro interés tener indicadores sobre el potencial de estos eventos de generar meteoritos. Como regla empírica sencilla, en la literatura se toma como potencial generador de meteorito, un meteoro que tenga una altura mínima (es decir la altura del último momento de luminosidad registrado) de 35 km, y una velocidad final menor a 10 km/s. En [Sansom et al. \(2019\)](#) se propone un nuevo método para la identificación de este tipo de meteoros (que es un desarrollo ulterior de [Gritsevich \(2007\)](#)) el cual presenta ventajas con respecto al criterio empírico de altura mínima y velocidad final, destacándose el poder justificar físicamente el interés en los eventos que cumplen el criterio empírico, obteniendo valores estimados de masa final y parámetros físicos de la trayectoria, así como la posibilidad de investigar los eventos de los cuales no conozca el final de la trayectoria.

Como se detalla en [Gritsevich \(2007\)](#), el método para calcular los parámetros α (coeficiente balístico) y β (coeficiente de pérdida de masa) se basa en el ajuste de los datos de velocidad según la altura, a partir de las ecuaciones de movimiento y de ablación del meteoro. El desarrollo desde estas ecuaciones hasta la ecuación que se ajusta a los datos buscando valores óptimos de los parámetros α y β se puede encontrar en el apéndice (7.1.5). El resultado final es la ecuación (4.1):

$$y(v) = \ln(\alpha) + \beta - \ln\left(\frac{1}{2} [Ei(\beta) - Ei(\beta v^2)]\right) \quad (4.1)$$

con α y β definidas como:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{c_d \rho_0 h_0 S_0}{M_0 \sin \gamma} \quad (4.2)$$

$$\beta = (1 - \mu) \frac{c_h V_\infty^2}{c_d H^*} \quad (4.3)$$

y donde y es la altura normalizada por la escala de altura de la atmósfera $h_0 = 7160$ metros, v es la velocidad normalizada por la velocidad en el infinito V_∞ , Ei es la integral exponencial, c_d el coeficiente de frenado, ρ_0 la densidad atmosférica en la superficie, S_0 la sección transversal del meteoro, M_0 la masa inicial, γ el ángulo de entrada, c_h el coeficiente de intercambio de calor, H^* el calor de sublimación y μ el coeficiente de cambio de forma, indicador de la velocidad de rotación del objeto. A partir del ajuste de (Ec:4.1) a través de la función `fminsearch` de MATLAB, obtendremos valores de α y β , que se grafican en escala logarítmica para mejor visualización. Además como se menciona en [Sansom et al. \(2019\)](#), se quita el sesgo según el ángulo de entrada, graficando $\ln(\alpha \sin(\gamma))$.

El paso clave para comprender el alcance de este método, es construir las curvas límite que determinan las posibilidades de un evento de ser generador de meteorito de cierta masa mínima (asumiendo una densidad determinada), definidas en [Sansom et al. \(2019\)](#). Para esto, se parte de las definiciones de α y

la masa M en función de la masa inicial M_0 , β , μ y v^2 :

$$M = M_0 \exp \left(-\frac{\beta}{1-\mu} \left(1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 \right) \right) \quad (4.4)$$

Utilizando la relación entre la sección transversal del meteoro, su densidad, su masa, y un parámetro de forma A (Bronshen (1983)), y tomando los valores en la entrada a la atmósfera:

$$S_0 = A_0 \left(\frac{M_0}{\rho_m} \right)^{2/3} \quad (4.5)$$

Entonces podemos escribir:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{c_d \rho_0 h_0 A_0 \left(\frac{M_0}{\rho_m} \right)^{2/3}}{M_0 \sin \gamma} = \frac{1}{2} \frac{c_d \rho_0 h_0 A_0}{M_0^{1/3} \rho_m^{2/3} \sin \gamma}$$

Y despejando para M_0 :

$$M_0 = \left(\frac{1}{2} \frac{c_d \rho_0 h_0 A_0}{\alpha \rho_m^{2/3} \sin \gamma} \right)^3 = \frac{1}{\alpha^3 \sin^3 \gamma} M_* \quad (4.6)$$

Con M_* :

$$M_* = \left(\frac{1}{2} \frac{c_d \rho_0 h_0 A_0}{\rho_m^{2/3}} \right)^3 \quad (4.7)$$

Utilizando entonces M_0 , podemos sustituir en la ecuación (Eq:4.4), y encontrar la masa final M_f cuando $\left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 \rightarrow 0$:

$$M_f = \frac{1}{\alpha^3 \sin^3 \gamma} M_* \exp \left(-\frac{\beta}{1-\mu} \right) \quad (4.8)$$

Donde puedo despejar β y luego aplicar su logaritmo natural para obtener $\ln(\beta)$ en función de $\ln(\alpha \sin \gamma)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{M_f}{M_*} \right) \alpha^3 \sin^3 \gamma &= \exp \left(-\frac{\beta}{1-\mu} \right) \\ -\frac{\beta}{1-\mu} &= \ln \left(\frac{M_f}{M_*} \right) + 3 \ln(\alpha \sin \gamma) \\ \beta &= (\mu - 1) \left(\ln \left(\frac{M_f}{M_*} \right) + 3 \ln(\alpha \sin \gamma) \right) \\ \ln \beta &= \ln \left[(\mu - 1) \left(\ln \left(\frac{M_f}{M_*} \right) + 3 \ln(\alpha \sin \gamma) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para poder graficar las curvas límites todavía nos falta averiguar el valor de $\left(\frac{M_f}{M_*} \right)$, y asumir valores para μ . Comencemos con $\left(\frac{M_f}{M_*} \right)$, donde M_f es simplemente un valor arbitrario que queramos utilizar, por lo tanto nos enfocaremos en el cálculo de M_* . Para calcular M_* utilizamos la ecuación (Ec:4.7), donde para algunos valores que no conocemos en detalle, se utilizan supuestos basados en información empírica. Primero para los valores que no dependen del meteoro se asumen una densidad superficial atmosférica $\rho_0 = 1.21 \text{ kg/m}^3$ y una escala de altura atmosférica $h_0 = 7160 \text{ m}$, luego para los valores que sí dependen del meteoro, se asume un coeficiente de forma-frenado (multiplicación del coeficiente de forma A_0 y de frenado c_d) $c_{dA} = 1.5$ (valor típico según Gritsevich (2008)) y una densidad del objeto $\rho_m = 3500 \text{ kg/m}^3$, (en concordancia con los valores empíricos hallados para de distintos tipos de meteoritos rocosos en Flynn et al. (2018)).

El valor de coeficiente de cambio de forma μ depende fuertemente de la velocidad de rotación que tenga el objeto en su ingreso a la atmósfera. En Bouquet et al. (2014) utilizan la curva de luz para

averiguar valores de μ de 259 meteoros de la red Canadiense (MORP), encontrando valores en todo el rango desde $\mu = 0$ hasta $\mu = 2/3$, con la mayor ocurrencia cercana al límite teórico de $\mu = 2/3$.

Como no sabemos el valor de μ sin antes calcularlo utilizando su curva de luz, es que se utilizan dos curvas límites que representan los extremos de sus valores posibles, $\mu = 0$ y $\mu = 2/3$. Estas curvas son entonces las distintas combinaciones $\alpha - \beta$ que son indicadoras de posibles eventos generadores de meteoritos de cierta masa y densidad, para distintos valores de μ .

Aquí debemos hacer una observación más detallada sobre el comportamiento de estas curvas con respecto a las suposiciones que debemos hacer. Estas son, los valores de masa final M_f , la densidad del objeto ρ_m , y el coeficiente de cambio de forma μ . La ecuación (Ec:4.4) muestra que a mayor μ (mayor rotación) la masa decae más rápidamente, es decir un objeto necesitará tener β menor y/o M_0 mayor para poder llegar a una misma masa final. Esto se observa claramente para cualquier combinación de M_f y ρ_m que elijamos en las gráficas a) y b) de la figura (Fig:4.1), diferenciadas por colores con negro para $\mu = 0$ y rojo para $\mu = 2/3$.

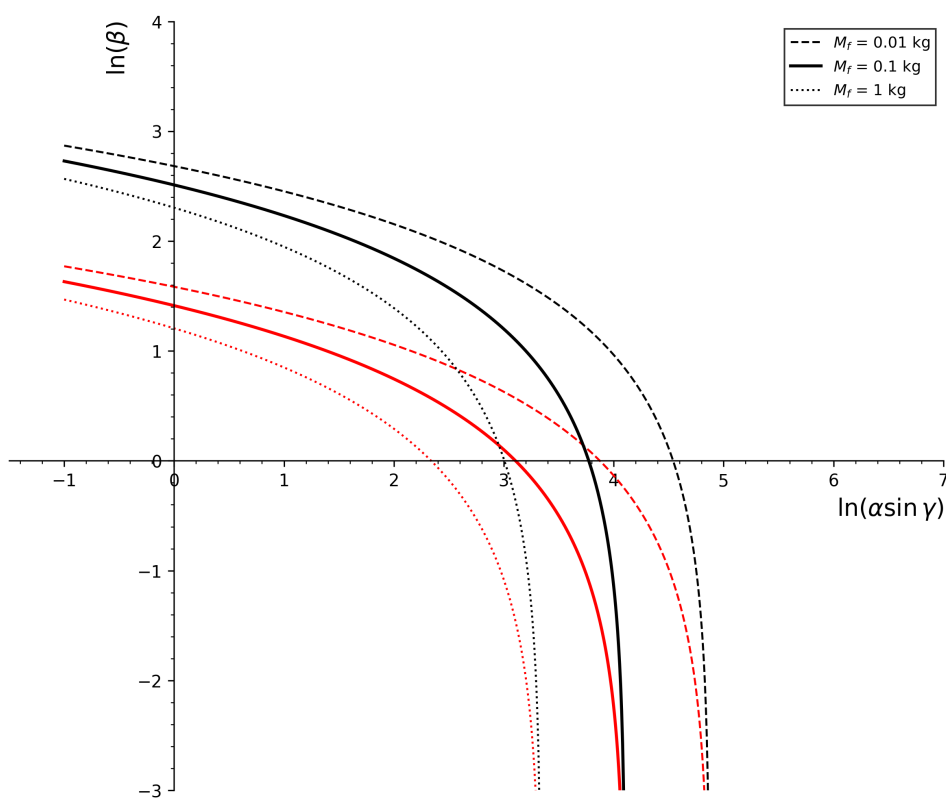
Similares apreciaciones podemos realizar para M_f y ρ_m . Deteniéndonos en la masa final M_f , al suponer valores mayores, estoy imponiendo condiciones más estrictas en los valores iniciales que debe tener el objeto. Como ya mencionamos anteriormente estas condiciones pueden ser una masa inicial M_0 más grande, lo cual disminuya el valor de α , y/o un menor valor de β que significa una pérdida de masa menos eficiente.

Por último si observamos cómo cambian las curvas con respecto a ρ_m , veremos que a mayor densidad pero misma masa final, estas se encuentran en zonas más restrictivas para la generación de meteoritos. Podemos comprender este fenómeno si comparamos dos eventos con distinta densidad pero mismo valor en $\ln(\alpha \sin(\gamma))$, lo cual indica que la eficiencia del frenado por la fricción del aire es la misma. Para que ambos tengan frenados iguales con densidades distintas, las masas iniciales deben ser también distintas. Como se puede observar en la ecuación (Ec:4.6), para un mismo $\alpha \sin \gamma$, si disminuye la densidad ρ_m entonces aumenta la masa inicial M_0 por lo cual resulta más *probable* la supervivencia de la misma masa final M_f con respecto a un objeto de mayor densidad.

Tomando estas consideraciones se fija una densidad ρ_m supuesta, y se definen las áreas donde existe baja probabilidad de caída, posible caída, y alta probabilidad de caída:

- **Baja probabilidad de caída:** arriba de la curva de $\mu = 0$, ya que es el límite de no rotación del meteorito, es decir la configuración de mínima ablación, por lo tanto son los valores mínimos de $\alpha - \beta$ que un meteorito de cierta masa final puede tener.
- **Posible caída:** entre las curvas de $\mu = 0$ y $\mu = 2/3$, es el área donde podemos tener distintos valores de μ para la misma masa final. Sabemos que los valores de μ pueden encontrarse entre 0 y $2/3$ aproximadamente, pudiendo calcular su valor utilizando la curva de luz del evento con un buen muestreo (Bouquet et al. (2014)). Para una primera aproximación al análisis de los eventos es suficiente con el ploteo de las curvas para una identificación primaria de eventos interesantes.
- **Alta probabilidad de caída:** por debajo de la curva de $\mu = 2/3$, que es el límite de máxima eficiencia de ablación del objeto, debido a su rápida rotación aleatoria, permitiendo que toda la superficie se caliente uniformemente. Por lo tanto los puntos $\alpha - \beta$ por debajo de esta curva, necesariamente deben estar asociados a curvas límite de masa final mayor, independientemente de la suposición del valor de μ .

a. Variación de Masa Final (M_f)
 ρ_m fijo = 3500 kg/m^3



b. Variación de Densidad (ρ_m)
 M_f fijo = 0.1 kg

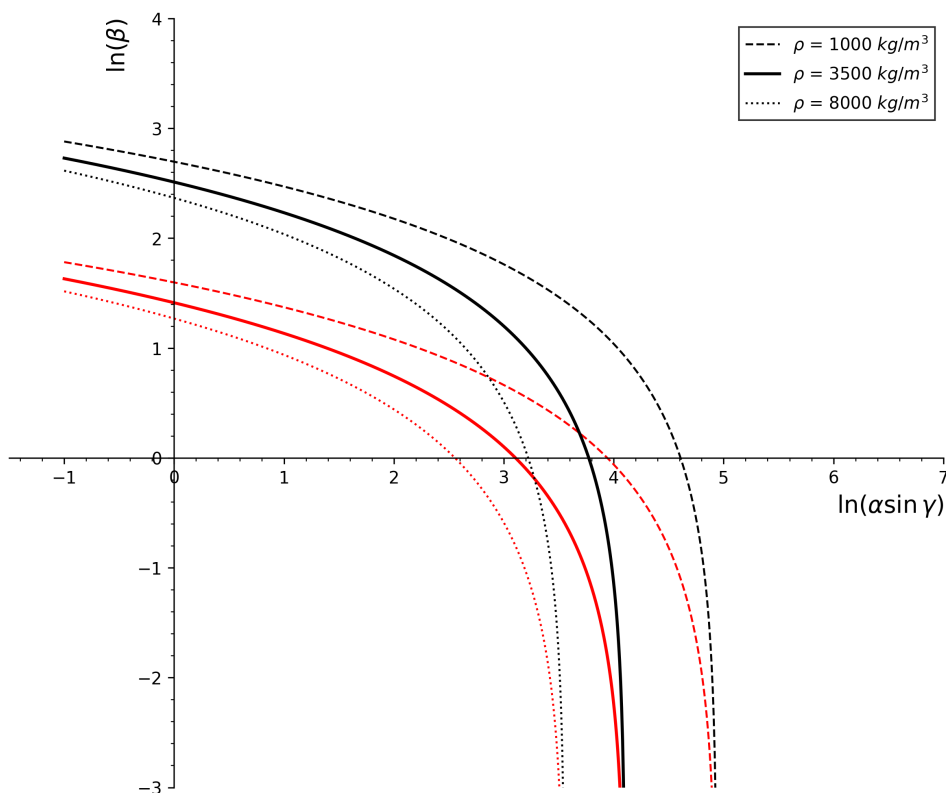


Figura 4.1: Gráfico de curvas limite con $\mu = 0$ en negro y $\mu = 2/3$ en rojo. a) Variando masas finales M_f con densidad fija $\rho_m = 3500 \text{ kg/m}^3$. b) Variando densidades ρ_m con masa final fija $M_f = 0.1 \text{ kg}$. Las curvas de traza continua tienen las mismas características en ambas figuras, $M_f = 0.1$ y $\rho_m = 3500 \text{ kg/m}^3$.

4.2. Cálculo de velocidad

Para realizar el cálculo de $\alpha - \beta$ buscamos meteoros que presenten una visible desaceleración, ya que son los que cuentan con un tamaño y masa suficiente para ser frenados por la atmósfera sin desintegrarse por completo rápidamente. En este trabajo utilizaremos el mismo criterio que en Sansom et al. (2019), por lo tanto los eventos a tratar, serán aquellos en los que se cumpla la siguiente relación entre las velocidades final y en el infinito:

$$\frac{V_{fin}}{V_{\infty}} < 0.8 \quad (4.10)$$

Existen varios métodos para el cálculo de velocidad, analizados en Egal et al. (2017), por sencillez de implementación en nuestro pipeline y robustez elegimos el método descrito en Whipple & Jacchia (1957), que ajusta una función con componentes lineales y exponencial a la distancia recorrida sobre la trayectoria en función del tiempo:

$$L(t) = L_0 + V_{\infty}t + Ce^{kt} \quad (4.11)$$

donde L_0 , V_{∞} , C y k son coeficientes a determinar. Luego que tengo el ajuste de esta función, se utiliza la derivada analítica para obtener la velocidad en función del tiempo del meteoro a lo largo de la trayectoria:

$$V(t) = \frac{dL(t)}{dt} = V_{\infty} + Cke^{kt} \quad (4.12)$$

4.2.1. Offsets temporales

El ajuste de esta función $L(t)$ es muy dependiente de la sincronización temporal de las estaciones, ya que el ajuste se realiza sobre todas ellas a la vez. Para entender el problema, debemos conocer cómo funciona la creación de la trayectoria en el espacio 3D a partir de lo que observa cada estación.

El Método de los Planos, o *Method of Planes* (MOP) elaborado en Ceplecha (1987), dibuja un plano por cada estación, a partir de las líneas de visión de la trayectoria (esto se debe a que la trayectoria de un meteoro en la atmósfera se asume rectilínea en su etapa luminosa), y luego busca la recta que mejor ajuste a la intersección de todos los planos.

Una vez definida la trayectoria, dada una estación, y para cada tiempo t , se proyecta la línea de visión hacia la trayectoria calculada, donde se asigna el punto más cercano a ésta como el valor de la distancia recorrida en la trayectoria (definida simplemente como la distancia euclidiana desde el punto de inicio de la trayectoria) a ese tiempo t para esa estación.

Si tengo offsets muy grandes en las estaciones (que pueden ser solo fracciones de segundo), tendré curvas desfasadas horizontalmente en la gráfica de Distancia recorrida vs tiempo (gráfica arriba a la izquierda en Fig:4.2), por lo que el ajuste de $L(t)$ quedará notoriamente distorsionado, dejando inutilizable la función de velocidad $V(t)$, por lo cual tampoco se podrán calcular los parámetros $\alpha - \beta$.

Es por este motivo que las estaciones cuentan con un receptor GPS, que tiene una precisión temporal mayor que el reloj de la mini PC. Aunque este instrumento mejora considerablemente la calidad de la medición con respecto al reloj de la mini PC, no es perfecto, y existen ciertas diferencias entre estaciones, además de que pueden fallar, dejando algunas estaciones con el tiempo PC que puede tener varios minutos de discrepancia con el resto.

Para atacar estos problemas es que se estaba utilizando la corrección por los máximos en la curva de luz, en el entendido de que el pico máximo de brillo de un meteoro es registrado en el mismo tiempo por todas las estaciones. Al trabajar con un medio digital (sensores CCD) nuestro muestreo es discretizado, por lo tanto esta última suposición no es exactamente cierta, ya que las estaciones no están sincronizadas en su muestreo, resultando en que los picos en la curva de luz pueden quedar levemente desfasados. Otro problema es cuando tengo un evento que recorre una larga distancia, y las estaciones captan diferentes tramos de la trayectoria, dando lugar a que los picos de las curvas de luz puedan ser momentos en la trayectoria completamente distintos.

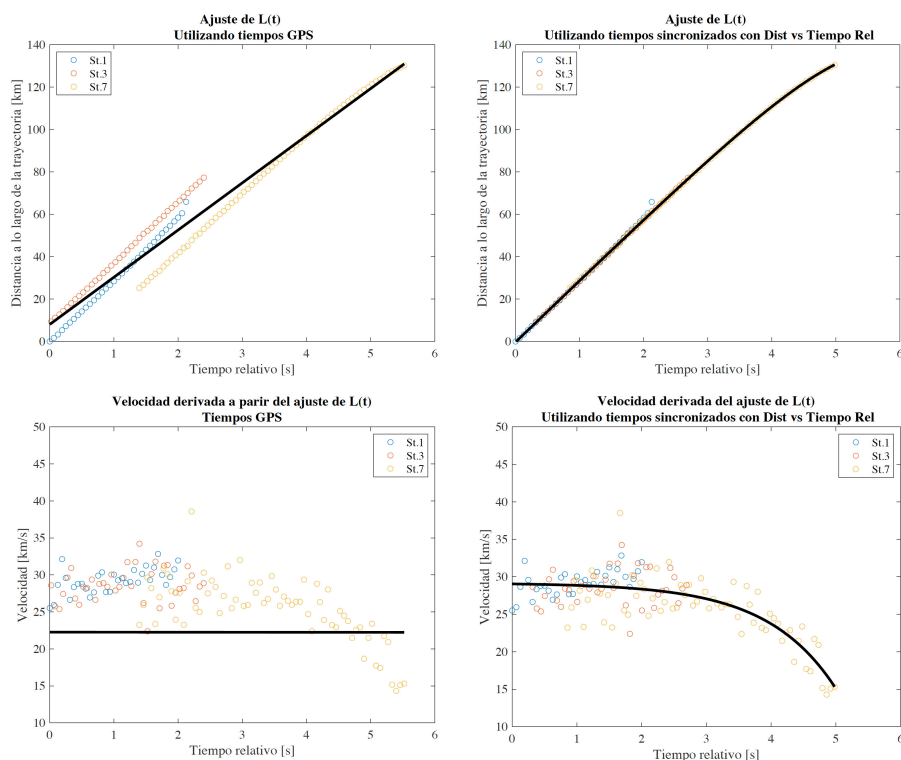


Figura 4.2: Comparación del desempeño del cálculo de la velocidad del meteoro según las correcciones temporales utilizadas. Izquierda: Utilizando tiempos GPS. Derecha: Utilizando correcciones a partir de Dist vs Tiempo relativo. Evento del 10/03/22.

Es por esta razón, y con el objetivo final de obtener un buen ajuste en la velocidad a lo largo de la trayectoria, que se implementó un nuevo método de corrección de desfasajes temporales, utilizando la información de distancia recorrida vs tiempo.

Corrección de offsets temporales en distancia vs tiempo

El método es una simplificación del **Multi-parameter fit** propuesto en Gural (2012), donde al calcular la trayectoria 3D con **MOP**, se ajusta simultáneamente un modelo físico de trayectoria incluyendo una incógnita de desfase temporal intrínseca de cada estación para esa observación.

Para nuestro modelo, utilizamos la misma idea de averiguar las incógnitas de desfasajes temporales por cada estación, pero calculándolas a partir de la información presente en las gráficas de Distancia recorrida a lo largo de la trayectoria según el tiempo relativo luego de calculada la trayectoria geométrica 3D con **MOP**. Esta información se encuentra en cuánto están separadas horizontalmente las curvas de distancia vs tiempo, por lo que es posible hallar cuánto debo correr temporalmente cada curva para obtener un buen ajuste de una función $L(t)$ utilizando todas las estaciones. Esto se puede observar en las dos gráficas superiores de la figura (Fig:4.2) que son ajustes de $L(t)$ para un mismo evento donde se compara el uso de los tiempos GPS (izquierda) con el nuevo método (derecha). En la figura (Fig:4.3) se corrobora cómo el nuevo método mejora claramente al uso de tiempos GPS en este caso, donde también se muestra en la gráfica 2 una limitante del uso de los máximos en las curvas de luz cuando tengo tramos distintos de la trayectoria.

Para averiguar los desfasajes de cada estación, se elige una estación **máster** de referencia, que será la de mayor recorrido, a esta se le ajusta una función $L(t)$ con el modelo de la ecuación (Ec:4.11), y se calculan para cada estación los desfasajes Δ_t utilizando **fminsearch** con la función de costo f_{costo} a minimizar:

$$f_{costo} = \sqrt{\sum [d_n - L((t_n + \Delta_t) - t_0)]^2} \quad (4.13)$$

donde d_n es la distancia recorrida en la trayectoria por cada estación a corregir, y L es el ajuste realizado a la estación **máster**, con t_n siendo los tiempos crudos registrados por esa estación, Δ_t la constante de corrección y t_0 el tiempo inicial de la **máster**. Se buscan los Δ_t que minimicen la diferencia entre las distancias interpoladas con L referenciadas a la **máster** y las predichas por **MOP**. Luego de obtener los Δ_t de cada estación, se reinicia el proceso en el ajuste de una nueva función $L(t)$.

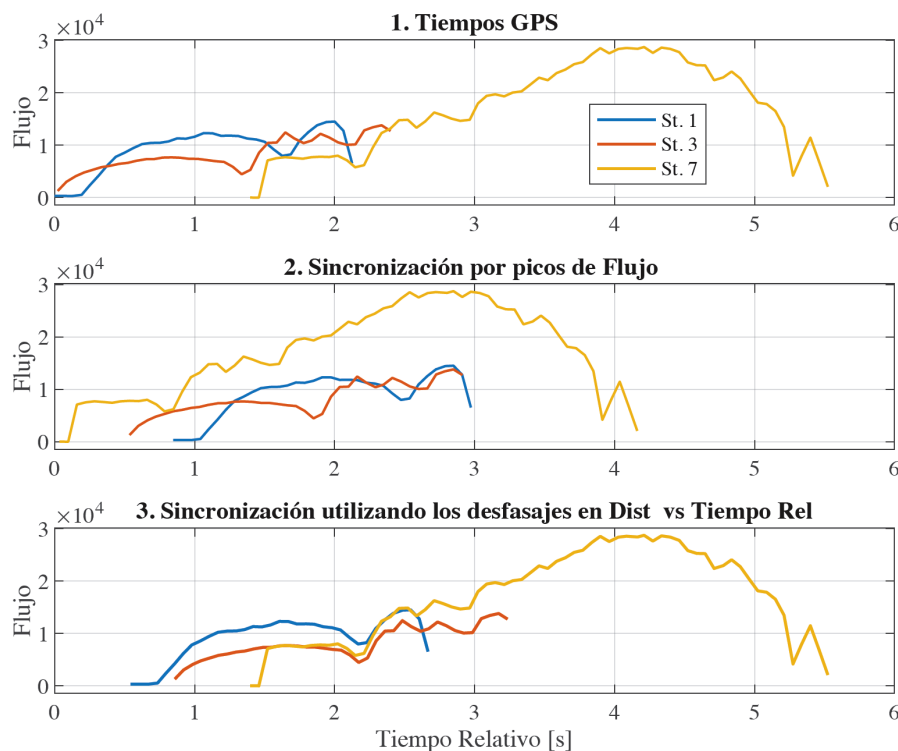


Figura 4.3: Comparación de la sincronización temporal por diferentes métodos. Evento del 10/03/22.

Con este nuevo método podemos obtener ajustes de velocidades donde se aprecie claramente la desaceleración del meteoro, pudiendo calcular de forma correcta los parámetros α y β (Fig:4.4) para finalmente utilizar en el criterio de Sansom et al. (2019).

Como nota mencionamos que los datos de velocidad “cruda” que se muestran en las gráficas inferiores de la figura (Fig:4.2) son calculadas solo para visualización, a partir del método de diferencia central con los datos de distancia recorrida en función del tiempo, pero estación por estación, para evitar los problemas de desfase temporal entre estaciones anteriormente discutido. Son de utilidad para corroborar a simple vista la calidad del ajuste de la función $L(t)$ a partir de su derivada analítica $V(t)$ como se aprecia en las dos gráficas inferiores de la figura (Fig:4.2).

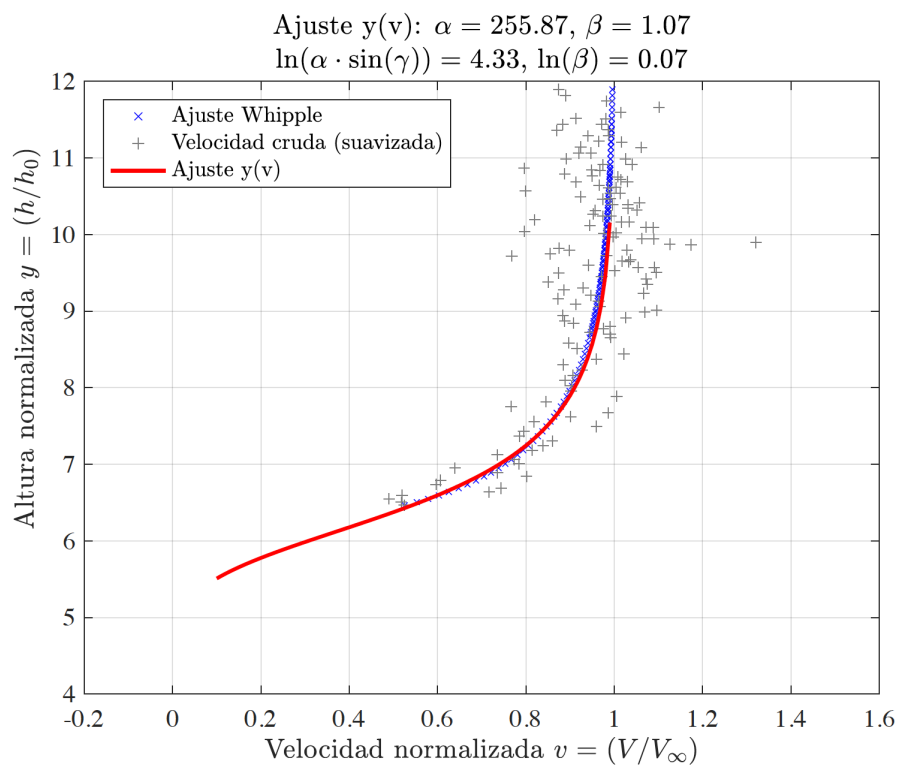


Figura 4.4: Ajuste de la función $y(v)$ de la ecuación (Ec:4.1) para hallar los valores de α y β . Evento del 03/10/22.

Capítulo 5

Resultados y análisis

5.1. Trayectorias

De los 70 eventos analizados, se descartaron 6 ya que no se contaba con suficientes estaciones (2) para calcular la trayectoria, debido a los errores en agrupación por el delta temporal grande elegido, de 600 segundos. Por lo que finalmente obtuvimos 64 eventos, siendo dos de ellos, fragmentos del mismo objeto (evento del 12/05/23 Fig:3.1) ya que en los videos correspondientes se observa una clara fragmentación, y se pudo registrar el recorrido de cada uno por separado.

La tabla 5.1 proporciona los principales datos de las trayectorias de estos eventos.

Tabla 5.1: Datos de Trayectorias (64 eventos). Distancia recorrida y alturas, en km. Velocidad promedio geocéntrica v_G en km/s, duración en segundos y magnitud pico.

UT	Est	N	Dist	H max	H min	RA	DEC	v_G	Dur	Mag
2022-06-05 23:54:06	1, 3	2	36.46	86.22	57.63	245.51	-59.02	32.94	1.38	-5.73
2022-07-10 07:38:49	6, 7	2	74.26	88.25	40.56	276.70	-34.49	16.96	4.19	-5.99
2022-10-03 04:52:28	1, 3, 7	3	130.58	85.15	46.29	135.76	-47.11	27.02	4.98	-5.01
2022-10-14 07:27:32	1, 2, 5, 11	4	55.60	102.82	82.13	159.88	-31.62	57.13	1.08	-6.16
2022-10-15 05:24:07	8, 9	2	63.95	94.02	53.31	12.84	5.94	27.25	2.38	-5.36
2022-10-25 04:44:57	4, 9, 11, 12	4	71.91	105.09	54.17	42.94	12.30	32.79	2.19	-7.01
2022-10-25 06:39:19	1, 9, 11	3	58.92	98.23	72.01	46.06	22.56	40.98	1.38	-4.40
2022-10-28 04:47:14	1, 4, 8, 9	4	61.99	101.86	59.41	42.85	13.36	31.38	1.95	-4.05
2022-10-28 06:08:54	8, 9	2	48.59	95.40	65.66	30.16	1.78	29.85	1.56	-4.00
2022-10-29 04:31:43	4, 8	2	50.49	98.30	62.43	50.63	13.87	31.52	1.63	-7.48
2022-10-30 00:29:30	3, 8	2	53.28	61.34	54.98	65.82	20.88	16.67	2.00	-2.56
2022-11-02 01:32:47	8, 9	2	53.26	96.67	69.29	65.01	-1.40	36.22	1.69	-3.74
2022-11-02 04:12:18	1, 2, 8	3	39.46	88.70	62.00	65.18	12.16	28.49	1.31	-5.89
2022-11-05 01:44:23	1, 12	2	28.30	83.36	69.06	69.51	1.03	27.65	0.94	-5.51
2022-11-05 06:56:52	1, 5	2	39.99	84.83	63.77	35.75	2.98	21.97	1.69	-3.04
2022-11-07 06:16:45	1, 3, 5, 6, 9	5	141.12	107.90	74.76	171.64	-21.13	66.87	2.42	-6.14
2022-11-18 02:36:34	6, 11	2	41.33	101.94	75.38	82.26	-0.22	26.00	1.56	-7.17
2022-11-24 06:28:41	1, 5, 6	3	65.39	74.05	37.55	17.89	-34.62	10.34	5.02	-5.85
2022-11-30 03:46:08	5, 6	2	40.49	81.36	66.24	285.18	-67.95	18.04	2.07	-4.60
2022-12-05 06:00:21	11, 15	2	69.33	116.21	92.70	173.26	4.95	69.07	1.02	-5.16
2022-12-07 03:34:19	8, 9	2	37.77	85.44	83.02	104.61	49.49	47.26	0.81	-6.06
2022-12-14 02:50:52	1, 4, 8	3	135.11	99.45	64.98	123.34	25.09	34.18	3.93	-4.64
2022-12-14 05:10:10	5, 7, 14	3	74.91	100.28	68.49	124.11	29.45	34.32	2.13	-4.93
2022-12-14 06:44:04	4, 9, 11, 12	4	74.06	100.76	68.88	104.61	29.44	34.94	2.10	-4.34
2022-12-14 07:30:54	4, 11	2	31.67	88.82	76.80	101.89	25.11	34.85	0.89	-2.79
2022-12-19 04:45:44	2, 4	2	23.06	105.00	85.43	141.47	-57.53	39.49	0.56	-5.36
2022-12-21 04:01:38	1, 3, 8, 10, 12	5	529.96	110.32	108.49	165.57	26.23	64.86	8.06	-5.73
2022-12-23 00:14:26	5, 6, 10	3	20.33	89.19	74.88	68.69	-76.11	22.39	0.82	-7.26
2022-12-27 04:28:42	11, 8, 12	3	32.89	95.33	67.61	99.47	-67.35	24.68	1.26	-6.07
2022-12-29 05:42:28	1, 2, 8, 14	4	32.21	105.10	79.08	85.36	-60.05	24.14	1.26	-7.63
2023-01-04 06:19:58	1, 6, 8, 9	4	40.62	109.69	73.95	172.78	-50.73	55.74	0.73	-5.76

Continúa en la siguiente página...

Tabla 5.1 – continuación de la página anterior

UT	Est	N	Dist	H max	H min	RA	DEC	vG	Dur	Mag
2023-02-19 08:35:32	1, 2, 8, 9	4	23.63	105.22	84.70	258.51	-48.32	61.67	0.38	-4.70
2023-02-20 07:46:59	1, 2, 4, 7, 8, 9	6	63.11	111.29	74.97	273.93	-18.89	61.70	1.05	-5.01
2023-03-13 02:41:49	13, 14, 17	3	43.88	91.16	51.95	185.54	-39.69	21.73	1.82	-5.18
2023-03-17 01:38:25	3, 5	2	57.54	89.14	42.96	134.62	-72.50	27.59	2.08	-5.65
2023-03-18 06:48:14	13, 17	2	82.41	107.38	66.22	120.53	-77.76	41.21	2.13	-7.43
2023-03-26 23:11:19	8, 10, 11, 19	4	60.04	73.27	33.66	170.00	-1.65	10.44	4.58	-5.26
2023-03-27 03:24:45	10, 13, 17	3	34.96	104.55	76.00	158.32	-63.20	30.00	1.08	-6.46
2023-03-28 08:10:35	9, 11, 16, 19	4	97.47	98.44	76.69	167.32	-5.70	17.82	4.69	-6.01
2023-04-14 02:21:48	4, 8, 9, 11	4	38.43	88.94	54.44	214.36	-45.17	26.14	1.43	-4.88
2023-04-14 06:50:44	11, 12, 19	3	46.97	79.20	43.42	202.15	-27.00	29.88	1.59	-6.75
2023-04-14 23:38:20	8, 9, 11, 16	4	87.58	94.61	56.49	221.32	-29.35	32.48	2.70	-5.50
2023-04-22 07:00:08	3, 9	2	49.85	87.07	56.45	192.78	-33.31	24.10	1.99	-6.10
2023-04-24 01:57:43	18, 19	2	36.64	72.30	38.85	155.52	-44.61	10.06	2.81	-3.11
2023-04-28 08:27:43	1, 3, 5, 6	4	40.35	110.34	79.54	246.06	-16.36	56.84	0.69	-6.74
2023-04-28 08:46:38	9, 11, 12, 16	4	96.22	97.20	72.71	84.12	-65.32	23.92	3.69	-4.00
2023-04-28 08:47:06	6, 13, 17, 18	4	61.04	114.73	89.51	342.69	8.59	63.54	1.07	-6.07
2023-05-04 00:00:37	2, 3, 5, 8, 9	5	46.80	101.67	75.64	239.00	-38.31	32.01	1.45	-7.13
2023-05-04 08:55:57	3, 12, 15	3	36.44	111.17	86.30	351.32	-22.89	69.84	0.59	-6.90
2023-05-08 07:41:36	6, 7, 8, 15	4	50.69	114.18	90.40	350.57	-15.89	66.44	0.76	-6.95
2023-05-09 08:06:29	5, 9	2	61.73	105.28	93.93	338.83	31.62	52.30	1.19	-6.56
2023-05-12 05:40:40	1, 2, 3, 4, 8	5	94.56	79.23	33.59	160.31	-33.64	8.04	8.88	-5.35
2023-05-12 05:40:40	4, 8	2	78.97	79.28	42.68	159.99	-31.79	8.01	6.69	-3.21
2023-05-13 21:57:10	8, 10, 12, 16, 19	5	126.90	111.51	85.94	279.98	-62.64	49.45	2.51	-6.46
2023-05-17 06:17:23	7, 17	2	49.85	78.65	38.42	224.04	-42.52	22.28	2.25	-5.86
2023-06-12 05:26:34	1, 2, 5, 6	4	33.77	81.48	59.70	228.53	-81.61	24.13	1.32	-4.77
2023-06-13 02:35:50	1, 5	2	39.33	74.81	37.42	233.15	-51.51	13.99	2.57	-4.74
2023-06-13 09:15:42	3, 8, 9, 12	4	32.15	111.23	78.92	345.47	-37.64	58.36	0.62	-5.99
2023-06-19 03:16:34	6, 17, 18	3	27.74	87.18	60.48	249.27	-46.69	25.01	1.38	-7.42
2023-06-29 00:47:48	5, 6, 7	3	77.49	102.36	85.57	70.08	-65.31	33.98	2.21	-4.48
2023-07-21 22:38:31	11, 12, 15, 19	4	92.97	89.17	44.94	85.03	-81.61	22.69	4.11	-4.93
2024-07-01 03:48:51	9, 12	2	65.43	86.95	64.66	166.10	-47.47	12.56	4.07	-6.01
2024-09-21 04:18:48	9, 12	2	205.35	108.20	86.36	65.08	35.16	64.67	3.19	-5.91
2025-07-20 22:39:08	4, 8	2	94.25	99.69	84.41	323.10	-26.48	36.11	2.50	-5.11

5.2. Cálculos de $\alpha - \beta$

Siguiendo el criterio de Sansom et al. (2019), solo se calculan los valores de $\alpha - \beta$ para los eventos que presentan una clara desaceleración, es decir que presenten una pérdida de velocidad tal que $\frac{V_{fin}}{V_{\infty}} < 0.8$, con V_{fin} la velocidad final de la trayectoria, y V_{∞} la velocidad pre-atmosférica.

De los 64 eventos con trayectoria calculada, 34 pasaron el criterio de desaceleración necesario para el cálculo de $\alpha - \beta$. En la figura 5.1 se pueden observar estos 34 eventos, y las curvas límites que indican si un evento puede haber generado un meteorito, de determinada masa y determinada densidad.

Podemos observar que hay una clara relación entre las posibilidades de que un evento haya sido generador de meteorito, con la altura final alcanzada. Esto concuerda con los resultados de Sansom et al. (2019) para la suposición de la misma masa final $M_f = 0.050$ kg, donde los eventos que cumplen el criterio empírico (altura final < 35 km y velocidad final < 10 km/s) se encuentran todos por debajo de la curva de $\mu = 0$.

Se puede constatar que no se cuenta con eventos con **alta probabilidad de caída**, pero sí con dos eventos que se encuentran claramente en la zona de **posible caída** y un tercero que cae muy cerca del límite con **baja probabilidad de caída**. Tomando en cuenta que debemos tener un error asociado en el cálculo de $\alpha - \beta$, se consideraron los tres eventos como interesantes y se analizaron más detalladamente.

Distribución de los parámetros α - β para BOCOSUR
 N° de eventos: 34. Período: 06/08/21 al 04/09/25.

Con una densidad estimada $\rho_m = 3500 \frac{kg}{m^3}$

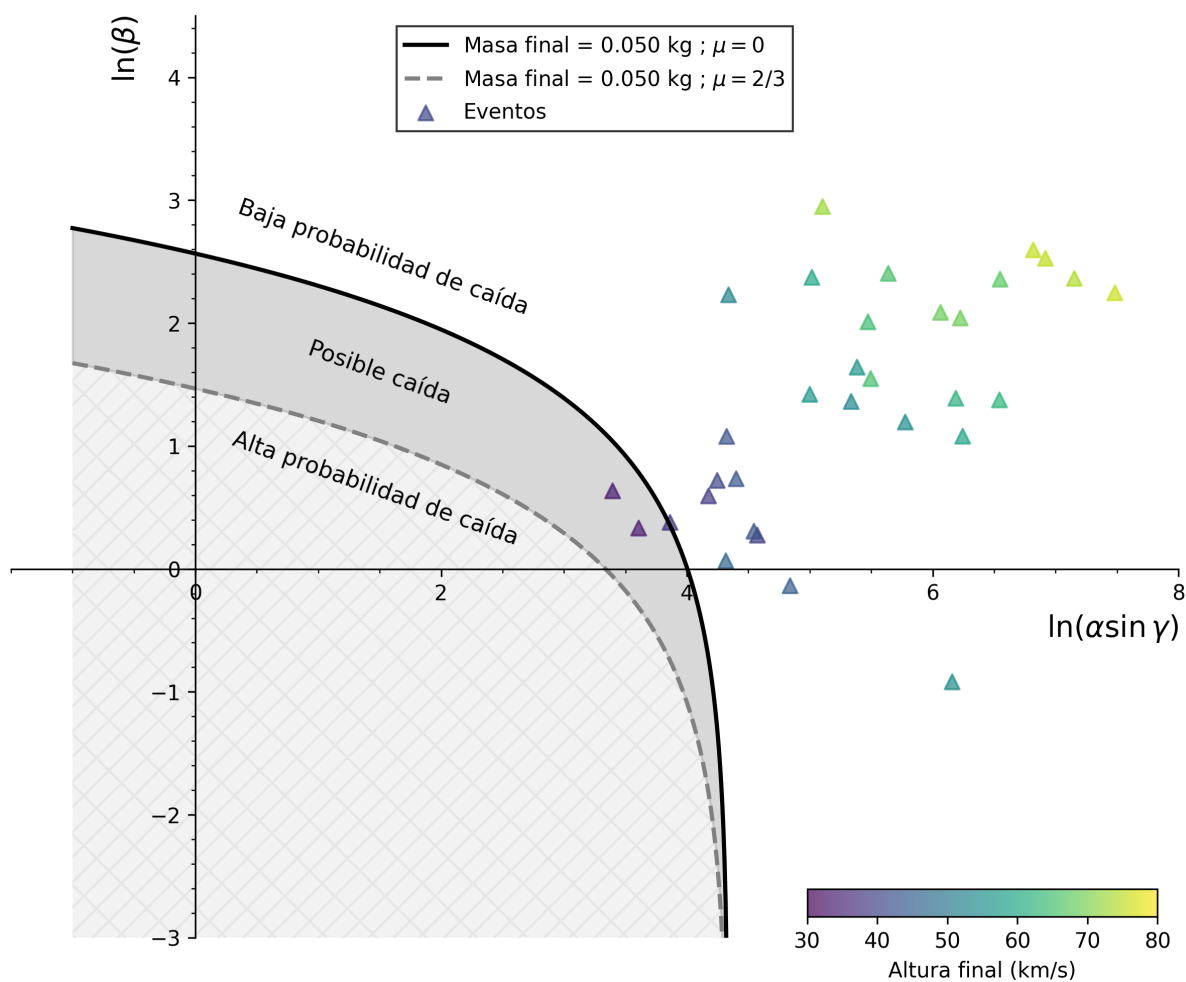


Figura 5.1: Gráfico del criterio $\alpha - \beta$ para eventos de BOCOSUR, en el periodo del 06/08/21 al 04/09/25. Tomando como masa final para definir un meteorito $M_f = 50g$.

5.3. Eventos interesantes en detalle

Lo primero que debemos notar es que uno de los tres eventos a estudiar es un fragmento de un evento que generó dos fragmentos, y que se lograron calcular sus trayectorias y velocidades por separado. Por lo tanto agregamos el segundo fragmento en el estudio más detallado aunque no se encuentre en la zona definida anteriormente como posible generador de meteorito.

Se realizaron 1000 simulaciones Monte Carlo para cada uno de los 4 eventos. Para cada evento, se buscó la estación utilizada con mayores errores astrométricos en su calibración (Tabla:3.1, Tabla: falta agregar en Az), y se tomaron esos valores para agregar un ruido gaussiano a las medidas de (z, Az) que indican la trayectoria local en cada estación, para todas las estaciones. Luego de las simulaciones, se obtuvieron valores promedio y desviaciones estándar de los parámetros $\alpha - \beta$ de cada evento que se pueden observar en la figura (Fig:5.2).

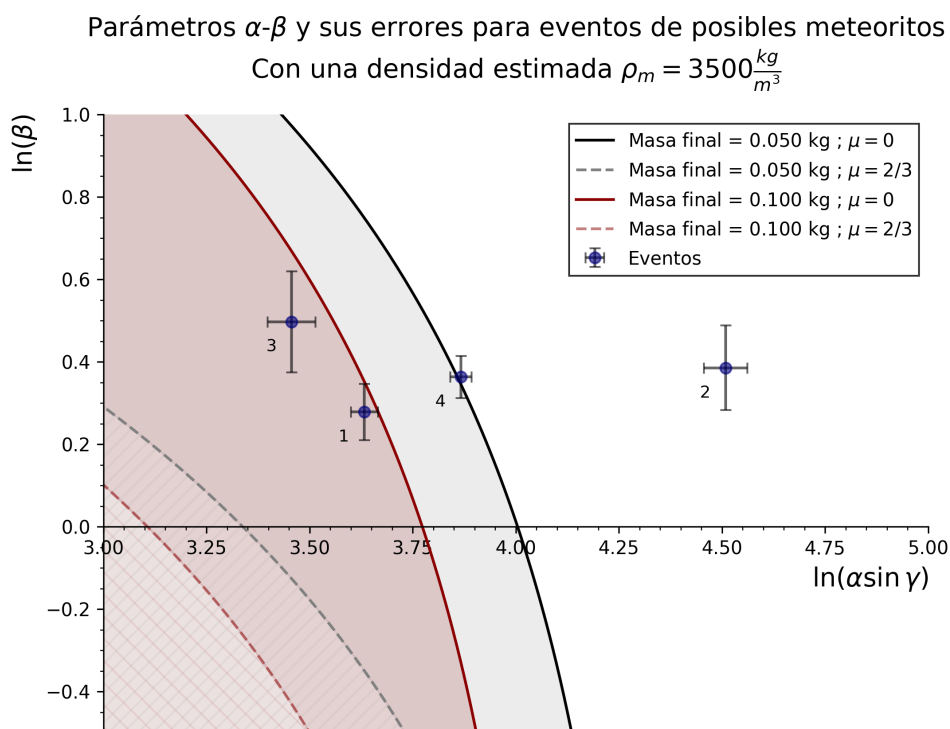


Figura 5.2: Eventos 1 y 2, fragmento principal y secundario respectivamente del mismo evento: 12/05/23. Evento 3: 26/03/2023. Evento 4: 24/11/2022

De los eventos analizados solo 2 cumplen con los criterios empíricos de posibles generadores de meteoritos, es decir altura final < 35 km y velocidad final < 10 km/s (Tabla:5.2), siendo ambos los únicos que se encuentran totalmente por debajo de la curva límite de $\mu = 0$ incluyendo sus errores. Las velocidades finales fueron calculadas evaluando la función obtenida $V(t)$ para el tiempo de la última observación registrada.

Tabla 5.2: Coordenadas ecuatoriales de los eventos

Evento	Altura final [km]	Velocidad final [m/s]
1) 12/05/23 Principal	33.5531 ± 0.0437	1921.92 ± 128.29
2) 12/05/23 Secundario	42.7073 ± 0.0327	4357.26 ± 165.47
3) 26/03/23	33.5619 ± 0.1103	3918.52 ± 470.17
4) 24/11/22	37.5413 ± 0.0183	5476.12 ± 67.54

Se consultó en el registro de la **International Meteor Organization** (Rendtel (2021), Rendtel

(2022)) por lluvias de meteoros conocidas en las fechas de los eventos (Tabla:5.3) y no se encontraron coincidencias para ninguno de ellos, ya que la diferencia entre los radiantes obtenidos y los candidatos, era muy superior al margen de error para cada trayectoria. Lo que nos permite fundamentar la hipótesis del carácter esporádico de los eventos.

Tabla 5.3: Coordenadas ecuatoriales de los eventos

Evento	RA [°]	DEC [°]	Estaciones	Duración [s]
1) 12/05/23 Principal	160.389 ± 0.129	-33.684 ± 0.073	1,2,3,4,8	8.880
2) 12/05/23 Secundario	159.740 ± 0.214	-31.645 ± 0.122	4,8	6.689
3) 26/03/23	169.951 ± 0.065	-1.692 ± 0.140	8,10,11,19	4.576
4) 24/11/22	17.885 ± 0.067	-34.619 ± 0.031	1,5,6	5.022

En la figura (Fig:5.3) podemos observar las trayectorias de los eventos, donde los vuelos luminosos de todos ellos culminan sobre suelo uruguayo, por lo que de haber resultado en la generación de meteoritos, estos se encontrarían en territorio nacional. Para esta última etapa de campañas de búsqueda de meteoritos es fundamental un análisis más detallado del campo de dispersión generado en cada evento. En Moilanen et al. (2021) detallan un nuevo método para este análisis basándose en la aplicación de simulaciones Monte Carlo luego de simular trayectorias de distintos fragmentos a partir de modelos de fragmentación. En el artículo se destaca la gran influencia de los vientos en los resultados finales, y la importancia de este análisis detallado para no desperdiciar recursos en búsquedas donde las condiciones no se auspician favorables.

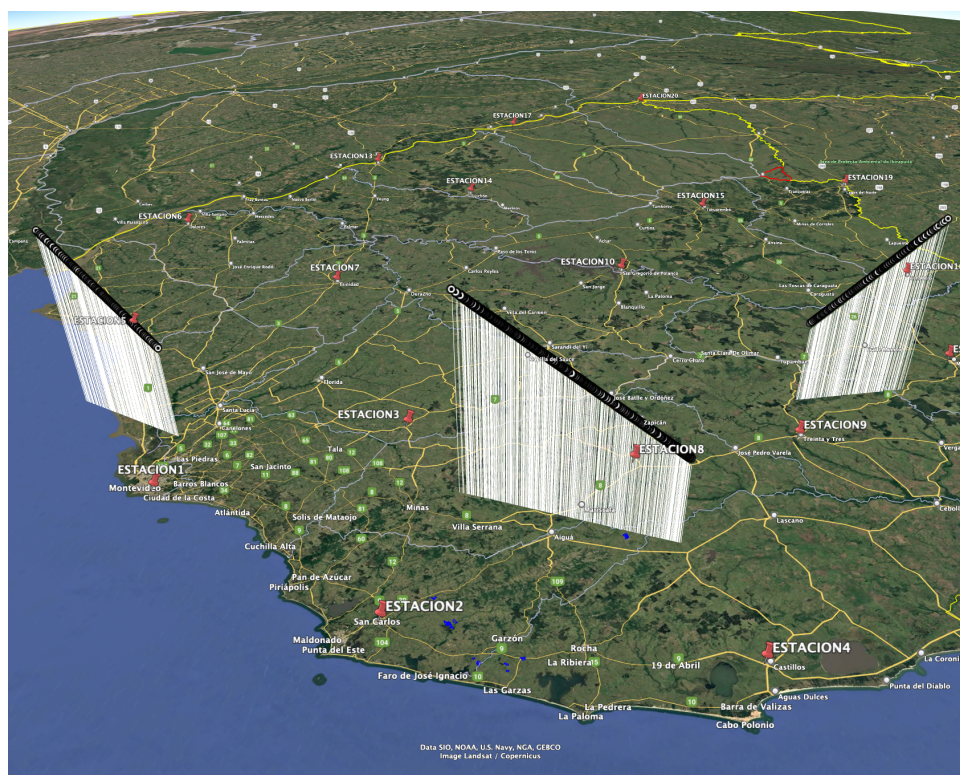


Figura 5.3: Trayectorias de los eventos analizados, mapeadas en Google Earth. Izquierda: Evento 4 (24/11/22). Centro: Eventos 1 y 2 (12/05/23). Derecha: Evento 3 (26/03/23).

5.3.1. Evento fragmentado 12/05/23

En la figura (Fig:5.2) podemos observar que los eventos marcados como 1 y 2 son los fragmentos del evento del 12/05/23, donde definimos como (1) **Principal** al fragmento con trayectoria de mayor duración y que penetró más profundo en la atmósfera, y (2) **Secundario** al de menor duración. Podemos observar que su valor en β es muy similar mientras que difieren claramente en α .

Deteniéndonos en la definición de β :

$$\beta = (1 - \mu) \frac{c_h}{c_d} \frac{V_e^2}{H^*} \quad (5.1)$$

Vemos que no depende del tamaño o masa del objeto, sino de cantidades que se pueden asumir iguales en ambos fragmentos. H^* es fuertemente dependiente de la composición química y se asume constante a lo largo de la trayectoria (Mancuso et al. (2025)), además sabemos que la velocidad de entrada V_e es la misma, y se pueden asumir las rotaciones (μ) y el coeficiente de ablación $\sigma = \frac{c_h}{c_d}$ como cantidades compartidas de los fragmentos indicando que la eficiencia de ablación es la misma para ambos.

En cambio la discrepancia en α se puede argumentar por la posible diferencia en masa de los fragmentos, siendo el **principal** el remanente de mayor masa (y por lo tanto mayor tamaño), el que pudo penetrar más profundo en la atmósfera llegando a alturas mínimas inferiores.

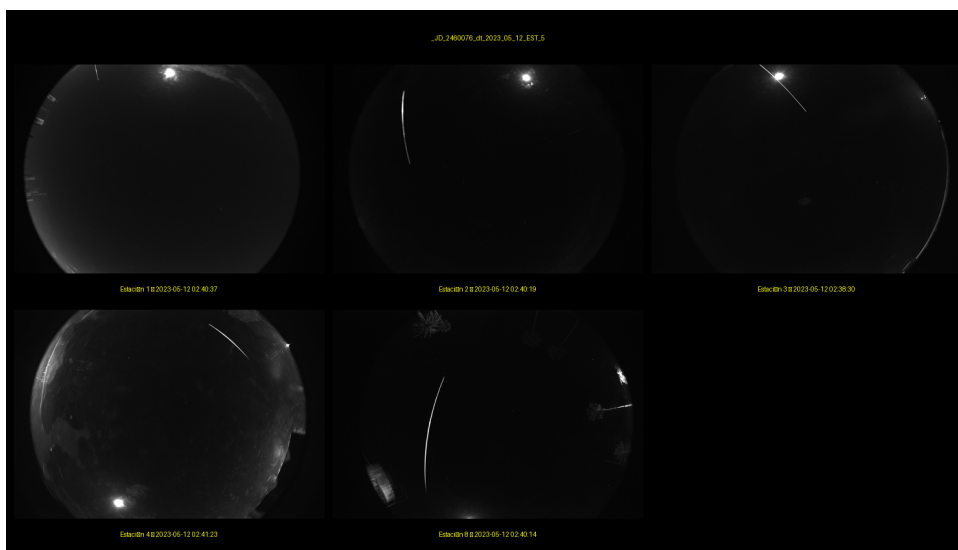


Figura 5.4: Videos integrados de los eventos 1 y 2 del 12/05/23.

5.3.2. Evento 3: 26/03/23

Junto con el fragmento (1) **principal** es el de mayor interés ya que se encuentra en una zona de posible caída de un meteorito de masa final $M_f = 100$ gramos. Debemos tener en cuenta que como se menciona en Bouquet et al. (2014), el valor de μ más probable se encuentre cercano a $\mu = 2/3$. Si el evento efectivamente tiene este valor de μ , la masa final M_f será significativamente menor. Dibujando las curvas límite con $\mu = 2/3$, podemos estimar una masa final de entre 10 y 3 gramos aproximadamente (Fig:5.6).

5.3.3. Evento 4: 24/11/22

Es el evento que se encuentra cerca de los límites definidos en el trabajo para considerar un análisis más detallado ($M_f = 50$ gramos, $\mu = 0$). Se decidió incluirlo ya que la distancia al límite de $\mu = 0$ es inferior a las magnitudes de los errores obtenidos para los otros eventos.

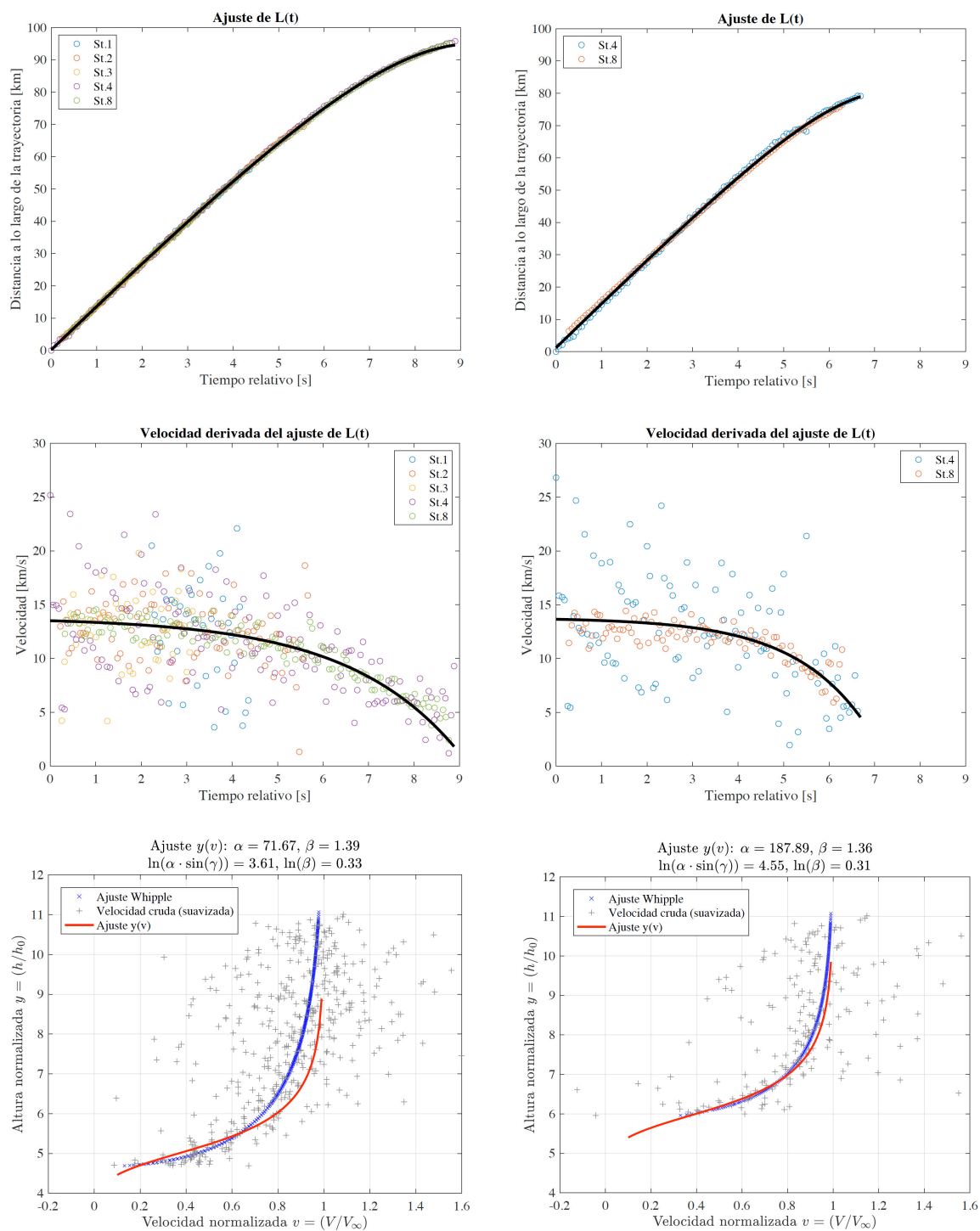


Figura 5.5: Comparación de los fragmentos del evento del 12/05/23. Izquierda: gráficos del fragmento principal. Derecha: gráficos del fragmento secundario.

Curvas con $\mu = 2/3$ para distintas masa finales de los eventos 1 y 3
 Con una densidad estimada $\rho_m = 3500 \frac{kg}{m^3}$

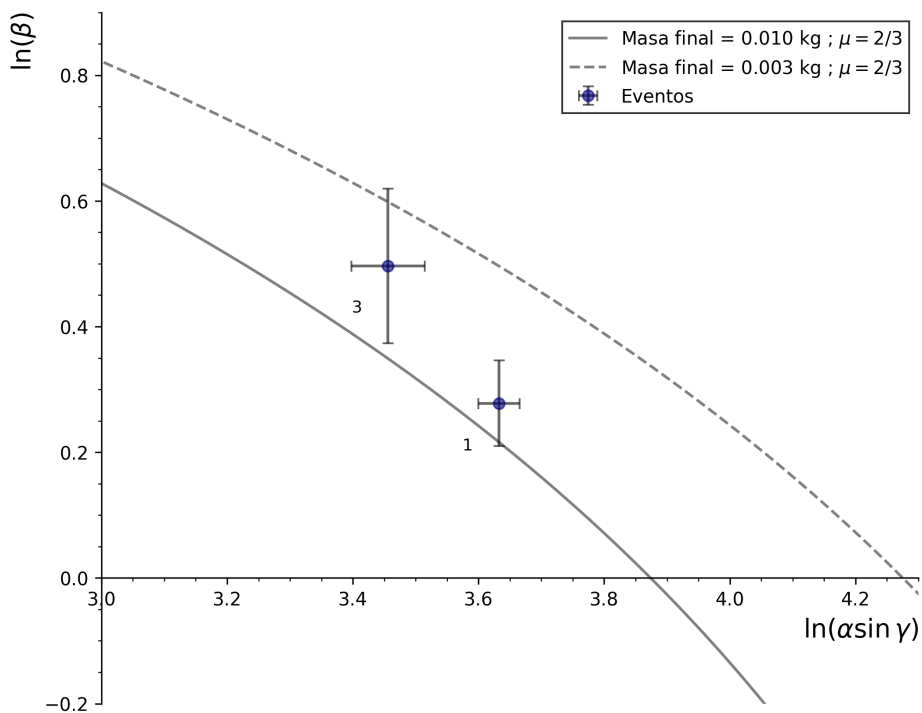


Figura 5.6: Curvas límite con el valor más probable de μ para distintas masas finales y con misma densidad, para los eventos 1 y 3.

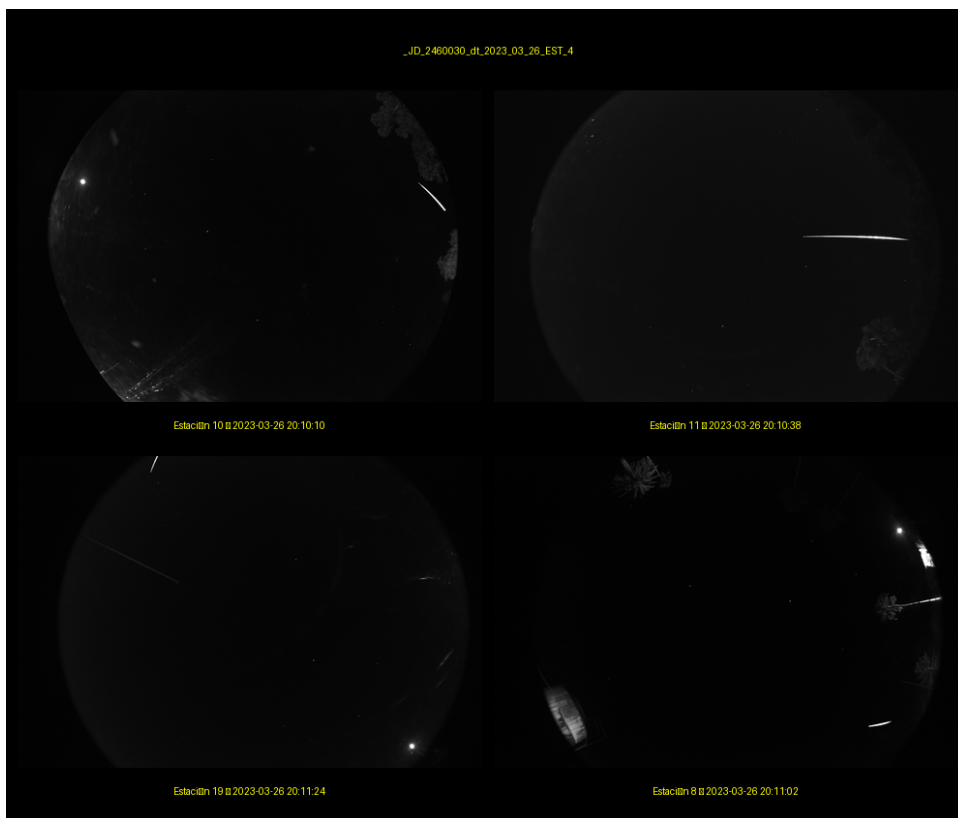


Figura 5.7: Videos integrados del evento 3 del 26/03/23.

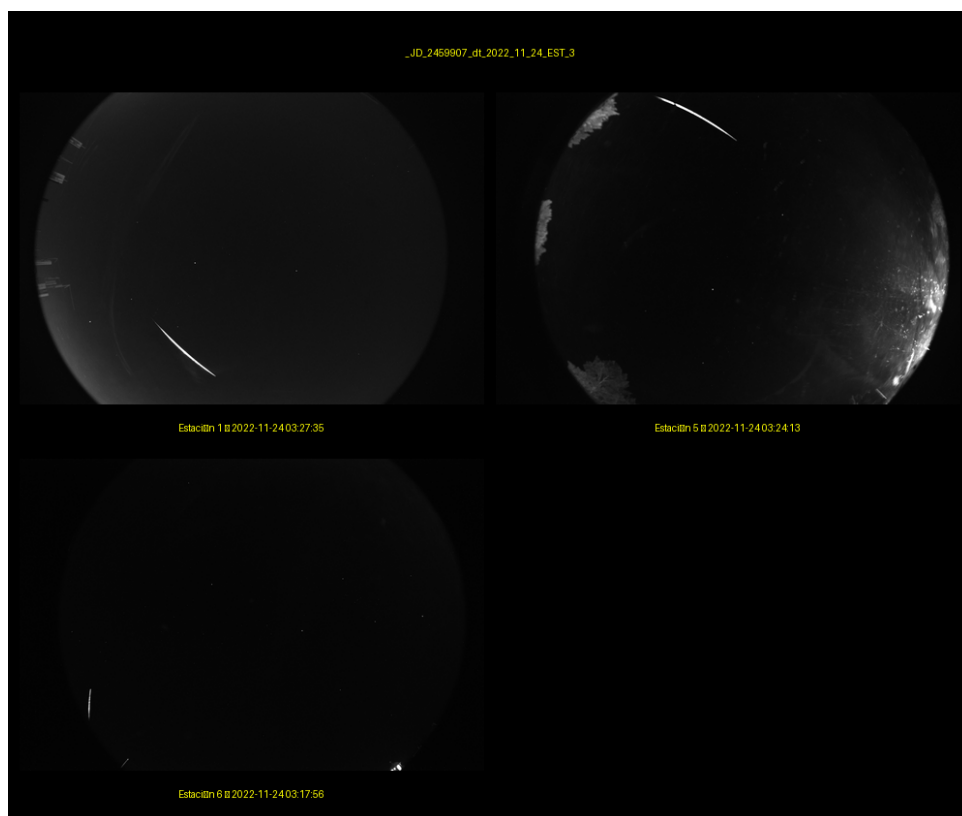


Figura 5.8: Videos integrados del evento 4 del 24/11/22.

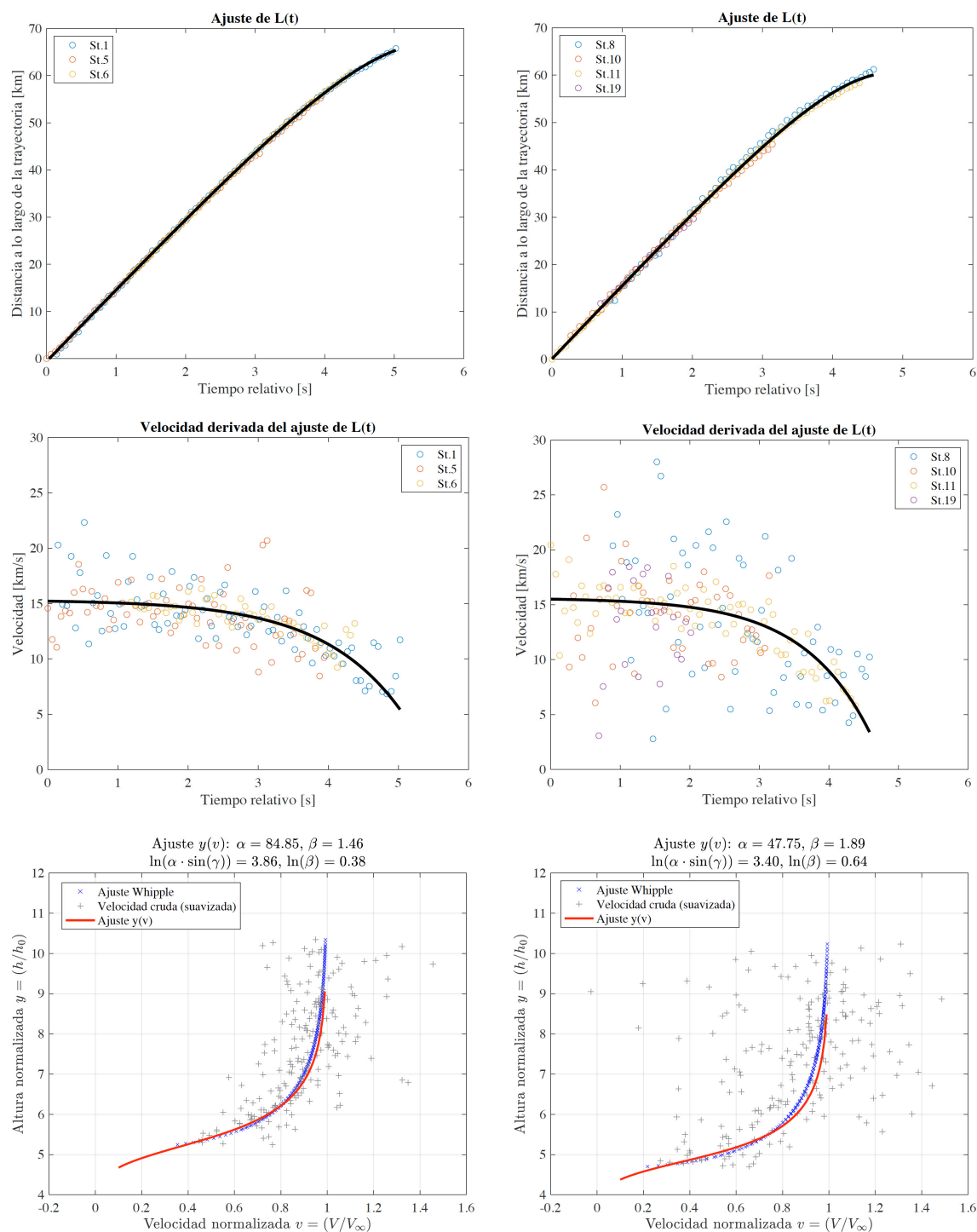


Figura 5.9: Gráficos del cálculo de velocidad ($L(t)$ y su derivada $V(t)$) y posterior ajuste de la función $y(v)$ (Ec:4.1) para hallar los parámetros α y β de los eventos (4) 24/11/22 (izquierda) y (3) 26/03/23 (derecha).

Capítulo 6

Discusión

6.1. Calibración astrométrica

Con nuestra implementación del modelo de [Jeanne et al. \(2019\)](#) para la calibración astrométrica de nuestras cámaras **all-sky** se mejoró la precisión astrométrica de la red BOCOSUR, resultando en valores de errores astrométricos comparables a los obtenidos por [Vida et al. \(2021\)](#) en sus ensayos del mismo modelo. No obstante cabe discutir un aspecto no relacionado con la elección del modelo, como lo es la selección de estrellas para la calibración.

Como se menciona en la sección (Sec:2.2.1), luego de generar nuestro **txt** con las asociaciones realizadas de (x_c, y_c) y (z, Az) , el algoritmo de calibración itera para remover en cada paso la estrella de mayor error astrométrico, hasta llegar al error máximo permitido para la calibración ó a un mínimo de estrellas a utilizar. Para este trabajo se utilizó un mínimo de 100 estrellas en cada calibración, en concordancia con [Vida et al. \(2021\)](#) para sus calibraciones de las cámaras de mayor similitud a las de BOCOSUR, las **GMN 3.6mm**.

Los errores en la determinación del centroide de una estrella se acentúan cuando el tamaño del pixel es similar al **FWHM** de la **PSF** para una estrella débil, o cuando una estrella brillante se encuentra cerca de los bordes de la imagen sufriendo efecto de **coma**. Para minimizar esta fuente de error, podemos utilizar la herramienta **AutoMarcarEstr** para generar un gran número de estrellas iniciales. En la figura (Fig:6.1) observamos cómo el aumento de la muestra inicial mejora los resultados astrométricos finales. Estos datos fueron elaborados a partir de un archivo de 1000 estrellas de la calibración del período 04/23 al 05/23 de la Estación 8, donde se fueron seleccionando de forma aleatoria 100 estrellas a eliminar en cada nueva calibración. Se puede observar también que no es una relación lineal, por lo que podemos definir un valor de cantidad de estrellas como suficiente para una “buena calibración”, procurando una eficiencia del uso de la herramienta **AutoMarcarEstr**.

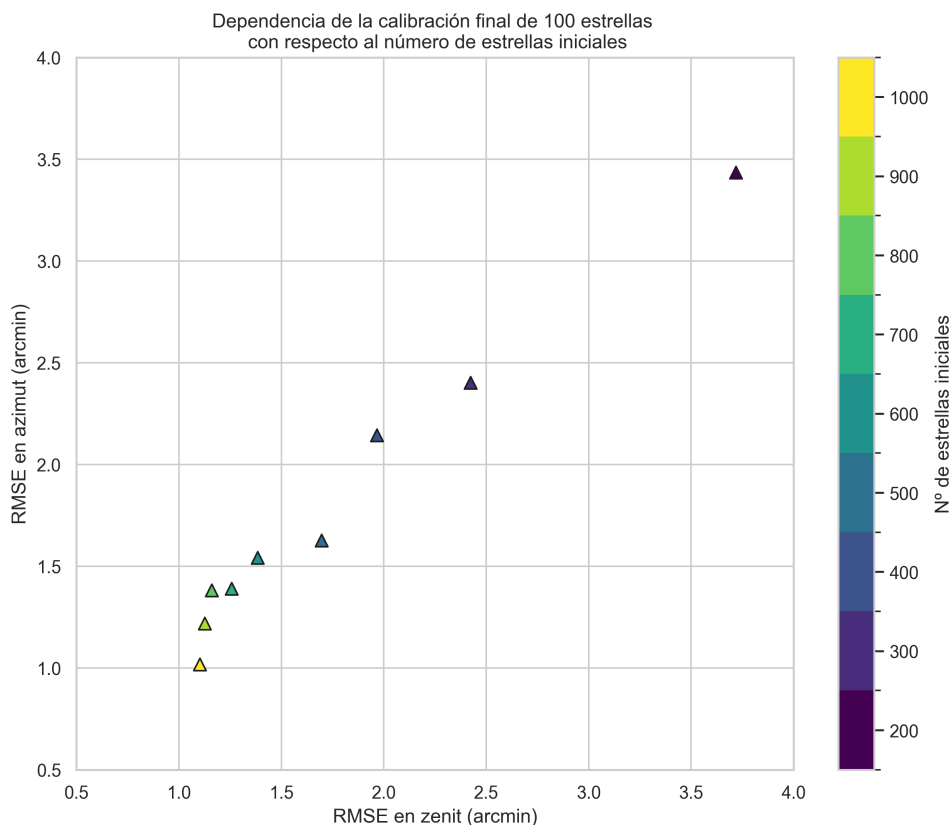


Figura 6.1: Dependencia de las estrellas iniciales en la calibración final con 100 estrellas. Datos de la estación 8.

6.2. Eventos analizados

Podemos realizar un análisis de órdenes de magnitud para evaluar cómo se comparan nuestros registros de cantidad de **bólid**os con desaceleración suficiente para el cálculo de $\alpha - \beta$, con los utilizados en Sansom et al. (2019) de la red **Desert Fireball Network (DFN)**. En nuestro trabajo, se encontraron 34 eventos con $\frac{V_{fin}}{V_{\infty}} < 0.8$ en **BOCOSUR** en el período del 06/08/2021 al 04/09/2025, mientras que para la **DFN** se obtuvieron 278 eventos en un período indefinido pero que para los propósitos de este análisis podemos enmarcar desde su digitalización en 2016 (Howie et al. (2017)) hasta el 2019 donde se publicó Sansom et al. (2019). Tomando en cuenta la cobertura espacial de cada red, asumimos una cobertura nacional para **BOCOSUR** resultando en 176000 km^2 , y una cobertura de $2.5 \times 10^6 \text{ km}^2$ para **DFN** (Howie et al. (2017)). Multiplicando la cantidad de años de operación de las redes por la superficie cubierta, 4 años y 176000 km^2 , contra 3 años y $2.5 \times 10^6 \text{ km}^2$, y dividimos las cantidades de bólid^os con $\alpha - \beta$ calculados, por estos valores:

$$\sigma = \frac{\text{Eventos analizados}}{\text{Tiempo de Operación} \times \text{Cobertura espacial}} \quad (6.1)$$

$$\sigma_{\text{BOCOSUR}} = \frac{34}{4 \times 176000} = 4.82 \times 10^{-5} \quad (6.2)$$

$$\sigma_{\text{DFN}} = \frac{278}{3 \times 2.5 \times 10^6} = 3.70 \times 10^{-5} \quad (6.3)$$

donde se obtiene el resultado esperable, de valores del mismo orden de magnitud.

Capítulo 7

Conclusiones

Para este trabajo nos propusimos acercar al estado del arte distintas áreas del pipeline de la red **BOCOSUR**. Se logró mejorar considerablemente la calibración astrométrica obteniendo resultados comparables a los estándares actuales de las redes de detección de meteoros a nivel mundial (Vida et al. (2021)). Se implementó el criterio $\alpha - \beta$ utilizado para encontrar en grandes bases de datos, eventos con posibilidad de ser generadores de meteoritos (Sansom et al. (2019), Peña-Asensio et al. (2024)). Junto con la herramienta **Autobol** son pasos importantes de la red **BOCOSUR** para lograr un monitoreo constante y un uso eficiente de los recursos humanos, para centrar los esfuerzos en el análisis detallado y las posibles campañas de búsqueda en los eventos más prometedores.

Asimismo se analizó la base de datos existente de **BOCOSUR**, encontrando tres eventos con posibilidad de ser generadores de meteoritos, y con las perspectivas futuras de analizar sus órbitas heliocéntricas en búsqueda de asteroides que hayan podido ser los objetos padres.

7.1. Mejoras futuras al pipeline

7.1.1. Muestreo

Temporal

Cuando se detecta un cambio de brillo en los fotogramas y comienza la grabación, los eventos quedan registrados aproximadamente a 15 cuadros por segundo (frames per second **fps**). En cambio otras redes como pueden ser **DFN** (Howie et al. (2017)), **FRIPON** y **PRISMA** (comparten tecnología) (Barghini et al. (2019)) o **GMN** (Vida et al. (2021)) utilizan 25-30 **fps**, aumentando el muestreo, siendo una variable importante para obtener una buena representación del perfil de velocidad del objeto, y poder obtener valores de $\alpha - \beta$ más confiables. Las cámaras utilizadas actualmente por **BOCOSUR** cuentan con la posibilidad de grabar a 30 **fps** (aunque no a máxima resolución). La razón por la cual no se utiliza este valor de **fps** es por restricciones en el espacio de almacenamiento local en las estaciones, y en el poder de cómputo de las mini PC para grabar a esa velocidad la información. Mejorando estos aspectos podremos aumentar el muestreo temporal de los eventos.

Espacial

Al igual que sucede con el muestreo temporal, el muestreo espacial utilizado actualmente en **BOCOSUR**, es decir la resolución utilizada de la **CCD**, es menor (1548px \times 1040px) al valor máximo al que la cámara puede acceder (3096px \times 2080px). Esto se debe principalmente a la falta de almacenamiento tanto local (en las estaciones) como en el servidor central en Facultad de Ciencias. Un mayor muestreo espacial permitiría una mayor precisión en el cálculo de centroides de las estrellas y de los bólidos. Al no contar con la mayor tasa de muestreo temporal (30 **fps**) utilizando la mayor resolución, se debe encontrar un balance entre ambas.

7.1.2. Selección de eventos multi-estacion

Clasificador Autobol

Debido al gran porcentaje de falsos positivos obtenidos (26.05%), y contando luego de este trabajo con un número elevado de videos confirmados como bólidos (2733) en comparación a los utilizados para el entrenamiento de **Autobol** en Velasco (2024) (290), se prevé realizar un nuevo entrenamiento de la herramienta, esperando mejorar las métricas de falsos positivos y falsos negativos.

Definición de eventos multi-estación

Para mejorar la agrupación de los videos de distintas estaciones en eventos mutli-estación es fundamental el uso de los tiempos GPS para la búsqueda de coincidencias temporales. Actualmente se utilizan los tiempos de las Mini PC almacenados en los nombres de los videos, mientras que la información de los tiempos GPS es almacenada en archivos **.mat**. Para subsanar este problema la solución más directa es que las Mini PC puedan leer correctamente el tiempo GPS y tomarlo como propio.

7.1.3. Calibración astrométrica

Imágenes de calibración

Los videos utilizados para calibración en este trabajo (además de los videos de los eventos) fueron falsos positivos que se obtuvieron con la red. Esto resultó en calibraciones dispares ya que se dependía de la cantidad y calidad de los falsos positivos. En Jeanne et al. (2019) estandarizan los videos para calibración, destinando tiempo de observación todas las noches a la captura de videos de 10 segundos cada 15 minutos, especificos para esta tarea. Esto permite una amplia cobertura espacial y la posibilidad de obtener buenos resultados astrométricos de una noche en particular, sin depender de que existan “errores” en la activación de una grabación.

7.1.4. Criterio $\alpha - \beta$

Cálculo de velocidad

Para el cálculo de velocidad utilizamos el modelo propuesto por Whipple & Jacchia (1957), que ajusta una función de la distancia recorrida del objeto sobre la trayectoria en el tiempo, luego de calculada la trayectoria geométrica mediante **MOP** (Ceplecha (1987)). Como mencionamos en la sección (Sec:4.2.1), en Gural (2012) se propone un nuevo método que calcula la trayectoria al mismo tiempo que los desfases temporales ajustando funciones cinemáticas a las observaciones, llamado **Multi-parameter fit**. En Egal et al. (2017) se compara este modelo con el de Whipple & Jacchia (1957) donde se concluye la superioridad del modelo de Gural (2012) para cálculos de velocidad independientemente de la calidad del cálculo de los centroides.

7.1.5. Vuelo oscuro

Para completar el pipeline hace falta implementar un modelo de vuelo oscuro o modelo de área de dispersión para los eventos que ameriten una campaña de búsqueda. Como se comentó en la sección (Sec:5.3, en Moilanen et al. (2021) se detalla un modelo para esta tarea con ventajas sobre una asunción de elipse para el campo de dispersión. La implementación de este modelo completaría el pipeline **BO-COSUR** desde la detección de un evento hasta las campañas de búsqueda de meteoritos, logrando una red de detección de bólidos de desarrollo propio en todas sus etapas.

Bibliografía

- Ballestrino, J. P., Deandraya, C., & Uviedo, C. 2022, AUTOBOL: Detección Automática de Bóolidos para Cámaras AllSky
- Bannister, S. M., Boucheron, L. E., & Voelz, D. G. 2013, Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 125, 1108
- Barghini, D., Gardiol, D., Carbognani, A., & Mancuso, S. 2019, Astronomy & Astrophysics, 626, A105
- Borovička, J. 1992, Publications of the Astronomical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences, 79
- Borovička, J., Spurný, P., & Keclíková, J. 1995, Astronomy and Astrophysics Supplement Series, 112, 173
- Bouquet, A., Baratoux, D., Vaubaillon, J., Gritsevich, M. I., Mimoun, D., Mousis, O., & Bouley, S. 2014, Planet. Space Sci., 103, 238
- Bronshten, V. A. 1983, Physics of Meteoric Phenomena (Dordrecht: D. Reidel Publishing Company)
- Caldas, M., Guaimare, A., Abraham, V., Barrios, L., Hernández, M., Velasco, L., & Tancredi, G. 2025, Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems, 11, 025006
- Cepelcha, Z. 1987, Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia, 38, 222
- Egal, A., Gural, P. S., Vaubaillon, J., Colas, F., & Thuillot, W. 2017, Icarus, 294, 43
- Flynn, G. J., Consolmagno, G. J., Brown, P., & Macke, R. J. 2018, Chemie der Erde - Geochemistry, 78, 269
- Gritsevich, M. I. 2007, Solar System Research, 41, 509
- . 2008, Doklady Physics, 53, 588
- Gritsevich, M. I., & Stulov, V. P. 2006, Solar System Research, 40, 477
- Gural, P. S. 2012, Meteoritics & Planetary Science, 47, 1405
- Howie, R. M., Paxman, J., Bland, P. A., Towner, M. C., Cupak, M., Sansom, E. K., & Devillepoix, H. A. R. 2017, Experimental Astronomy, 43, 237
- Hughes, C., Denny, P., Jones, E., & Glavin, M. 2010, Applied Optics, 49, 3338
- Jeanne, S. et al. 2019, Astronomy & Astrophysics, 627, A78
- Jenniskens, P., & Devillepoix, H. A. R. 2025, Meteoritics & Planetary Science, 60, 928
- Lyytinen, E., & Gritsevich, M. 2016, Planetary and Space Science, 120, 35
- Mancuso, S., Barghini, D., & Gardiol, D. 2025, Astronomy & Astrophysics, 685
- Moilanen, J., Gritsevich, M., & Lyytinen, E. 2021, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 503, 3337
- Peña-Asensio, E., Grèbol-Tomás, P., Trigo-Rodríguez, J. M., & Gritsevich, M. 2024, Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica (Serie de Conferencias), 59

- Rendtel, J. 2021, 2022 Meteor Shower Calendar, International Meteor Organization (IMO), iMO INFO(3-21)
- . 2022, 2023 Meteor Shower Calendar, International Meteor Organization (IMO), iMO INFO(3-22)
- Sansom, E. K. et al. 2019, ApJ, 885, 115
- van Leeuwen, F. 2007, Astronomy & Astrophysics, 474, 653
- Velasco, L. 2024, Reducción de datos de los meteoros detectados por la Red BOCOSUR (Bóolidos del Cono SuR)
- Vida, D. et al. 2021, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, arXiv:2107.12335
- Whipple, F. L., & Jacchia, L. G. 1957, Smithsonian Contributions to Astrophysics, 1, 183

Apéndice

Desarrollo de la ecuación para ajustar los parámetros $\alpha - \beta$

El siguiente desarrollo es una compilación de los desarrollos expuestos en los artículos de [Gritsevich \(2007\)](#) y [Lyytinen & Gritsevich \(2016\)](#). Las ecuaciones fundamentales del bólido son:

$$M \frac{dV}{dt} = -D + P \sin \gamma \quad (7.1)$$

$$MV \frac{d\gamma}{dt} = P \cos \gamma - \frac{MV^2}{R} \cos \gamma - L \quad (7.2)$$

$$\frac{dh}{dt} = -V \sin \gamma \quad (7.3)$$

y las fuerzas se definen como:

$$D = \frac{1}{2} c_d \rho_a V^2 S \quad (\text{“Head resistance” o Drag})$$

$$L = \frac{1}{2} c_l \rho_a V^2 S \quad (\text{“Lifting force” o Fuerza de sustentación})$$

Donde:

- t : Tiempo.
- h : Altura por encima de la superficie planetaria.
- γ : Ángulo local entre trayectoria y horizonte.
- S : Área de sección media del objeto.
- ρ_a : Densidad atmosférica.
- g : Aceleración gravitatoria ($P = Mg$).
- R : Radio planetario.
- c_d : coeficiente de frenado o drag.
- c_l : coeficiente de sustentación o lift.

Estas ecuaciones son complementadas por la ecuación que modela la pérdida de masa (ecuación de ablación):

$$H^* \frac{dM}{dt} = -\frac{1}{2} c_h \rho_a V^3 S \quad (7.4)$$

Donde:

- c_h : Coeficiente de intercambio de calor.
- H^* : Calor de sublimación.

Se asume que todo el flujo de calor del gas hacia el objeto es para evaporación de la superficie.

Usamos la ecuación (7.3) para cambiar de variable t a h :

$$dt = -\frac{dh}{V \sin \gamma} \quad (7.5)$$

Luego se utilizan las siguientes variables adimensionaladas:

$$M = M_e m$$

$$V = V_e v$$

$$h = -h_0 y$$

$$\rho_a = \rho_0 \rho$$

$$S = S_e s$$

Donde:

- h_0 : Escala de altura de la atmósfera (atmósfera homogénea).
- ρ_0 : Densidad atmosférica en la superficie planetaria.
- M_e : Masa del objeto en su entrada atmosférica.
- V_e : Velocidad del objeto en su entrada atmosférica.

El problema se simplifica al considerar rectilínea las trayectorias de los bólidos y despreciar fuerza de lift en comparación con la fuerza de frenado debido a las altas velocidades de entrada de los meteoros. Estas asunciones nos permiten despreciar la ecuación (Ec:7.2) y asumir:

$$\gamma \simeq \text{cte} \quad (7.6)$$

Lo que nos deja con un sistema de dos ecuaciones:

$$m \frac{dv}{dy} = \frac{\frac{1}{2} c_d \rho_0 h_0 S_e}{M_e} \frac{\rho v s}{\sin \gamma} \quad (7.7)$$

$$\frac{dm}{dy} = \frac{\frac{1}{2} c_h \rho_0 h_0 S_e}{M_e} \frac{V_e^2}{H^*} \frac{\rho v^2 s}{\sin \gamma} \quad (7.8)$$

Para encontrar una solución analítica, asumimos una **atmósfera isotérmica**:

$$\rho_a = \rho_0 e^{-h/h_0} \implies \rho = e^{-y} \quad (7.9)$$

Además la sección eficaz y la masa están relacionados por:

$$s = m^\mu \quad (7.10)$$

Donde $\mu = \text{cte}$ es el parámetro de cambio de forma.

- Si $\mu = 2/3$: Ablación uniforme (esfera).
- Si $\mu = 0$: No hay cambio de área.

Entonces puedo escribir:

$$m \frac{dv}{dy} = \frac{\frac{1}{2} c_d \rho_0 h_0 S_e}{M_e} \frac{v m^\mu}{e^y \sin \gamma} \quad (7.11)$$

$$\frac{dm}{dy} = \frac{\frac{1}{2} c_h \rho_0 h_0 S_e}{M_e} \frac{V_e^2}{H^*} \frac{v^2 m^\mu}{e^y \sin \gamma} \quad (7.12)$$

Divido (Ec:7.12) entre (Ec:7.11):

$$\frac{dm}{m} = \left(\frac{c_h V_e^2}{c_d H^*} \right) v dv \quad (7.13)$$

Donde integro desde las condiciones iniciales $(m = 1, v = 1)$ hasta (m, v) :

$$\int_1^m \frac{dm}{m} = \int_1^v \left(\frac{c_h V_e^2}{c_d H^*} \right) v dv \quad (7.14)$$

$$\ln(m) = \frac{1}{2} \frac{c_h V_e^2}{c_d H^*} (v^2 - 1) \quad (7.15)$$

Donde definimos el parámetro de pérdida de masa β :

$$\beta = (1 - \mu) \frac{c_h V_e^2}{c_d H^*} \quad (7.16)$$

Entonces:

$$\ln(m) = \frac{\beta}{1 - \mu} (v^2 - 1) \quad (7.17)$$

$$m(v) = \exp \left(-\frac{\beta}{1 - \mu} (1 - v^2) \right) \quad (7.18)$$

Luego despejo $\frac{dy}{dv}$ de (Ec:7.11):

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\frac{1}{2} c_d \rho_0 h_0 S_e}{m M_e} \frac{v m^\mu}{e^y \sin \gamma} \quad (7.19)$$

Donde se define el coeficiente balístico α como:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{c_d \rho_0 h_0 S_e}{M_e} \frac{1}{\sin \gamma} \quad (7.20)$$

Entonces:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\alpha v m^{\mu-1}}{e^y}$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{e^y m^{1-\mu}}{\alpha v}$$

Y utilizando (Ec:7.18):

$$\frac{dy}{dv} = \frac{e^y e^{-\beta(1-v^2)}}{\alpha v}$$

Con un cambio de variable $u(v) = e^{-y(v)}$ tenemos:

$$\frac{du}{dv} = -e^{-y} \frac{dy}{dv}$$

Entonces:

$$\frac{du}{dv} = -u \frac{e^y e^{-\beta(1-v^2)}}{\alpha v}$$

Donde tengo que $ue^y = 1$ entonces:

$$\frac{du}{dv} = -\frac{e^{-\beta(1-v^2)}}{\alpha v}$$

$$du = -\frac{e^{-\beta(1-v^2)}}{\alpha v} dv \quad (7.21)$$

E integro desde el infinito $(v = 1, y = \infty)$ hasta un punto de la trayectoria con (v, y) :

$$u(v) - u(1) = \int_1^v \frac{-\exp(-\beta(1-\xi^2))}{\alpha \xi} d\xi \quad (7.22)$$

Dado que $u(1) = e^{-\infty} = 0$:

$$e^{-y(v)} = \frac{1}{\alpha} \int_v^1 \frac{\exp(-\beta(1-\xi^2))}{\xi} d\xi \quad (7.23)$$

Reordenando:

$$e^{-y(v)} = \frac{e^{-\beta}}{\alpha} \int_v^1 \frac{e^{\beta\xi^2}}{\xi} d\xi$$

Hacemos sustitución $t = \beta\xi^2 \implies dt = 2\beta\xi d\xi \implies d\xi = \frac{1}{2\beta\xi} dt$.

Entonces:

$$\begin{aligned} e^{-y(v)} &= \frac{e^{-\beta}}{\alpha} \int_{\beta\xi^2}^{\beta} \frac{e^t}{\xi'} \frac{1}{2\beta\xi'} dt \\ e^{-y(v)} &= \frac{e^{-\beta}}{\alpha} \int_{\beta\xi^2}^{\beta} \frac{e^t}{2\beta\xi'^2} dt \\ e^{-y(v)} &= \frac{e^{-\beta}}{2\alpha} \int_{\beta v^2}^{\beta} \frac{e^t}{t} dt \end{aligned} \quad (7.24)$$

Donde por definición, la integral exponencial es $Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$, por lo que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{e^t}{t} dt = Ei(t_2) - Ei(t_1) \quad (7.25)$$

Entonces llegamos finalmente a:

$$e^{-y(v)} = \frac{e^{-\beta}}{2\alpha} [Ei(\beta) - Ei(\beta v^2)] \quad (7.26)$$

Tomando logaritmos para despejar y (altura adimensional):

$$y(v) = \ln(\alpha) + \beta - \ln\left(\frac{1}{2} [Ei(\beta) - Ei(\beta v^2)]\right) \quad (7.27)$$