



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



Influencia de la masa del gluon en estados de tetraquark no relativistas

Sofía Bortagaray

Orientadoras: **Marcela Peláez** y **Florencia Benítez**

Tesis de Maestría presentada a PEDECIBA como parte de los requisitos para obtener el título de Magíster en Física en la *Universidad de la República*.

Miembros del tribunal:

Dra. Lucía Duarte (UdelaR)

Dra. Virginia Feldman (UdelaR)

Dr. Fernando Silveira Navarra (USP)

Dr. Andrés Vallejo (UdelaR)

Dr. Nicolás Wschebor (UdelaR)

Suplente:

Dr. Rodrigo Eyheralde (UdelaR)

Fecha de la defensa:

20 de febrero de 2026

Agradecimientos

Este trabajo fue posible gracias a la ayuda de muchas personas. Quiero agradecer especialmente a mis tutoras, Marcela y Florencia, por guiarme y apoyarme a lo largo de este proceso. A Nahuel por su ayuda en la parte final de este proyecto. A mis compañeros y profesores, por las instancias de aprendizaje y discusión compartidas. A mi madre, padre y hermano, por el apoyo y el aliento constante. A Manuel y Joaquín, por acompañarme durante todo este camino. A Lucía, con quien compartí gran parte de esta etapa, y a Agustín, por creer siempre en mí. Finalmente, agradezco a los miembros del tribunal por aceptar participar y leer esta tesis, y a la ANII por el financiamiento.

Resumen

La interacción fuerte es una de las interacciones fundamentales de la naturaleza y es la responsable de mantener a los protones y neutrones unidos dentro del núcleo atómico. La teoría cuántica de campos que describe esta interacción se conoce como Cromodinámica Cuántica (QCD), y postula que algunas de las partículas fundamentales, los quarks y gluones, interactúan fuertemente para formar estados ligados denominados hadrones. A altas energías, se sabe analizar la QCD de forma bien controlada. Sin embargo, a bajas energías, la teoría se vuelve extremadamente compleja y la teoría de perturbaciones presenta inconsistencias con las simulaciones numéricas.

El régimen de bajas energías es donde se forman la mayoría de los hadrones que conocemos, como protones y neutrones, y por lo tanto, es de gran importancia para entender el comportamiento de la materia a nivel fundamental. El interés por el estudio de estas escalas de energía ha crecido en la última década, debido a los numerosos descubrimientos experimentales de estados nuevos que no pueden describirse como mesones convencionales, formados por un par quark-antiquark, ni como bariones tradicionales, formados por tres quarks. Entre ellos se destacan los tetraquarks, sistemas formados por cuatro quarks. Para estudiar este tipo de estados exóticos es necesaria una descripción de la interacción fuerte que sea efectiva en el régimen complicado de bajas energías.

El objetivo de esta tesis es estudiar el espectro de los tetraquarks, y para eso utilizamos una versión modificada de QCD, conocida como modelo de Curci-Ferrari, que consiste en agregar un término de masa para los gluones. Con esta modificación, se reproduce el comportamiento observado en simulaciones numéricas de QCD y presenta la ventaja de que permite realizar cálculos analíticos usando teoría de perturbaciones en regiones donde la teoría original se vuelve difícil de manejar. A partir del lagrangiano de Curci-Ferrari, y utilizando algunas aproximaciones, es posible derivar un potencial de interacción entre quarks incluso a bajas energías, el cual utilizaremos para estudiar la dinámica en sistemas de cuatro quarks.

Para abordar el estudio de los tetraquarks, los modelamos como dos sistemas de dos cuerpos. Consideramos la configuración diquark-antidiquark, donde dos quarks interactúan fuertemente formando un objeto compacto llamado diquark, que a su vez interactúa con el correspondiente antidiquark mediante intercambio de gluones. El análisis se lleva a cabo en el régimen no relativista, limitándonos al estudio de tetraquarks compuestos solamente por quarks pesados como el charm y el bottom. Previo al estudio del espectro de tetraquarks, ajustamos los distintos parámetros del modelo, incluyendo la masa del gluon, mediante la comparación del espectro de mesones compuestos por quarks pesados con los resultados experimentales. En particular, estudiamos el charmonium, el bottomonium y el mesón charm-bottom en la aproximación no relativista usando el potencial de interacción deducido de Curci-Ferrari.

Los resultados obtenidos para las masas de tetraquarks son consistentes con otros modelos teóricos de la literatura. Para el caso del tetraquark compuesto únicamente por quarks charm, que es el único confirmado experimentalmente, obtenemos masas comparables a las observaciones experimentales. Estos resultados validan la efectividad del modelo de Curci-Ferrari en el régimen de bajas energías y abren nuevas posibilidades para el estudio de los hadrones exóticos.

Además, se estudia el efecto de la masa del gluon sobre las masas de los mesones y los tetraquarks. Cuando se utiliza un modelo simplificado para describir estos hadrones, en el que los parámetros relevantes se consideran independientes para los distintos sectores estudiados, se obtiene una dependencia muy débil con la masa del gluon. Sin embargo, al emplear un modelo más completo,

en el que se incluyen parámetros que dependen de la escala de energía de acuerdo con el flujo de renormalización, se observa que la masa del gluon juega un papel muy importante para reproducir adecuadamente las propiedades de los mesones, favoreciendo valores relativamente grandes, del orden de 0.8 GeV.

Abstract

The strong interaction is one of the fundamental interactions of nature and is responsible for the binding of protons and neutrons within the atomic nucleus. The quantum field theory that describes this interaction is known as Quantum Chromodynamics (QCD), which postulates that some of the fundamental particles, quarks and gluons, interact strongly to form bound states known as hadrons. At high energies, QCD can be analyzed in a well-controlled manner. However, at low energies the theory becomes extremely complex and the perturbation theory presents inconsistencies when compared with numerical simulations.

The low-energy regime is where most of the hadrons we observe in nature are formed, such as protons and neutrons, and therefore it is of great importance for understanding the fundamental behaviour of matter. Interest in the study of this energy regime has increased over the past decade due to numerous experimental discoveries of new states that cannot be described as conventional mesons, composed of a quark-antiquark pair, nor as traditional baryons, composed of three quarks. Among these states the tetraquarks stand out, systems formed by four quarks. Studying such exotic states requires an effective description of the strong interaction that remains valid in the complicated low-energy regime.

The goal of this thesis is to study the spectrum of tetraquarks. To this end, we employ a modified version of QCD known as the Curci-Ferrari model, which consists of introducing a mass term for the gluons. This modification reproduces the behaviour observed in numerical simulations of QCD and has the advantage of allowing analytical calculations using perturbation theory in regions where the original theory becomes difficult to handle. Starting from the Curci-Ferrari lagrangian and applying a set of approximations, it is possible to derive an interaction potential between quarks even at low energies, which we use to study the dynamics of four-quark systems.

To address the study of tetraquarks, we model them as a two-body system. We consider the diquark-antidiquark configuration, in which two quarks interact strongly to form a compact object known as a diquark, which then interacts with the corresponding antidiquark through gluon exchange. The analysis is performed in the non-relativistic regime, restricting ourselves to tetraquarks composed exclusively of heavy quarks, such as charm and bottom. Prior to studying the tetraquark spectrum, we determine the model parameters, including the gluon mass, by comparing the spectra of heavy-quark mesons with experimental results. In particular, we analyze charmonium, bottomonium and the charm-bottom meson within the non-relativistic approximation using the interaction potential derived from the Curci-Ferrari model.

The resulting tetraquarks masses are consistent with those obtained in other theoretical models in the literature. In the case of tetraquarks composed solely of charm quarks, which are the only ones confirmed experimentally, we obtain masses that are comparable to experimental observations. These results validate the effectiveness of the Curci-Ferrari model in the low-energy regime and open new possibilities for the study of exotic hadrons.

Moreover, the effect of the gluon mass on the masses of mesons and tetraquarks is studied. When a simplified model is used to describe these hadrons, in which the relevant parameters are assumed to be independent for the different sectors under consideration, a very weak dependence on the gluon mass is obtained. However, when a more complete model is employed, in which parameters that depend on the energy scale according to the renormalization flow are included, it is observed

that the gluon mass plays a very important role in adequately reproducing the properties of mesons, favoring relatively large values, of the order of 0.8 GeV.

Índice general

1. Introducción	7
2. Cromodinámica cuántica	12
2.1. Grupo $SU(3)$ local	12
2.2. Lagrangiano de QCD	13
2.3. Procedimiento de Faddeev-Popov	14
2.4. Regularización, renormalización y running de los parámetros	17
2.5. QCD a bajas energías	20
2.6. Modelo de QCD con gluones masivos	21
3. ¿Cómo se modela un tetraquark?	26
3.1. El modelo de diquarks	26
3.2. Interacción de color	28
3.3. Estructura de color	30
3.3.1. Quark-antiquark	31
3.3.2. Quark-quark	33
3.3.3. Antiquark-antiquark	35
3.3.4. Diquarks y tetraquarks	35
3.4. Sistema de dos cuerpos en un potencial central no relativista	36
4. Metodología	39
4.1. Potencial de interacción del one gluon exchange	39
4.1.1. Scattering quark-antiquark	39
4.1.2. Aproximación de Born	42
4.2. Hamiltoniano del sistema	44
4.3. Resolución numérica de la ecuación de Schrödinger	46
4.4. Correcciones a la energía	47
4.4.1. Autoestados del hamiltoniano sin perturbar y cambios de base	48
4.4.2. Cálculo de las correcciones a primer orden de la energía	51
5. Parámetros del modelo	58
5.1. Ajuste del espectro del bottomonium	61
5.2. Ajuste del espectro del charmonium	72
5.3. Conclusiones parciales	84
6. Espectro de los tetraquarks	85
6.1. Espectro de los diquarks	85
6.1.1. Diquark bb	86
6.1.2. Diquark cc	91
6.2. Espectro de los tetraquarks	95

6.2.1. All-bottom tetraquark	96
6.2.2. All-charm tetraquark	106
6.3. Conclusiones parciales	116
7. Resultados incluyendo el flujo de los parámetros	118
7.1. Flujos de los parámetros	119
7.2. Espectro de mesones pesados	121
7.2.1. Análisis incluyendo el flujo en el régimen de altas energías	122
7.2.2. Flujo de Curci-Ferrari a un loop	124
7.3. Espectro de los diquarks	135
7.4. Espectro de los tetraquarks	136
7.5. Conclusiones parciales	139
8. Conclusiones y perspectivas	140
A. Deducción del propagador del gluon	142
B. Cálculo de transformadas de Fourier	144
C. Interacción quark-quark	146
D. Espinores de Dirac en el límite no relativista	149
E. Función de onda en el origen	151

Capítulo 1

Introducción

El estudio de la interacción fuerte se originó a partir de los intentos de comprender la estructura del átomo. Uno de los problemas fundamentales de la época era entender por qué los protones, a pesar de tener carga eléctrica positiva, no se repelen dentro del núcleo. La resolución del problema comenzó en la década de 1930, cuando se propuso que los protones y neutrones no sólo interactúan eléctricamente, sino también mediante una nueva fuerza que se llamó fuerza nuclear fuerte [1]. Esta nueva interacción, responsable de la estabilidad del núcleo, debía ser mayor que la interacción electromagnética pero de muy corto alcance, lo que la hace imperceptible fuera del núcleo. A partir de entonces, uno de los focos de interés de la física ha sido el desarrollo de una descripción microscópica más profunda de la materia.

Otro gran avance en la física de partículas ocurrió en la década de 1960, cuando Gell-Mann propuso un sistema de clasificación de las partículas conocidas hasta ese momento [2], hoy en día llamadas hadrones (como el protón y el neutrón). Dicho sistema, conocido como *Eightfold Way*, llevó a descubrir ciertos patrones que sugerían que los hadrones no eran elementales, sino estados ligados de partículas fundamentales que se denominaron quarks. Pocos años después, experimentos de dispersión inelástica profunda del protón a altas energías confirmaron esta teoría [3]. Se observó que los electrones dispersados no cambiaban su trayectoria como si impactaran con un protón con una carga distribuida uniformemente, sino como si chocaran contra componentes internos. En concordancia con estos resultados, unos años antes Gell-Mann y Zweig propusieron el modelo de quarks [4,5]. Inicialmente incluyeron sólo tres tipos de quarks: up, down y strange, que se distinguen entre sí mediante un número cuántico llamado sabor; y más adelante, se descubrieron tres sabores adicionales: charm, bottom y top, con masas mucho mayores a los anteriores.

Sin embargo, el modelo de quarks presentaba un problema asociado con el principio de exclusión de Pauli, el cual establece que dos partículas idénticas de spin semi-entero (llamadas fermiones) no pueden ocupar el mismo estado. Algunas partículas, como el barión Δ^{++} compuesto por tres quarks up (uuu), parecían violar este principio. En 1964, Greenberg propuso resolver este problema introduciendo un nuevo número cuántico llamado color, que puede tomar tres valores: rojo, verde y azul [6,7]. De esta forma, cada quark up en el barión Δ^{++} se encuentra en un estado distinto de color y el principio de exclusión de Pauli no es violado. Poco tiempo después, en mediados de los 70, la existencia del color fue demostrada experimentalmente estudiando la sección eficaz de la aniquilación electrón-positrón [8].

Estos descubrimientos contribuyeron al desarrollo de lo que hoy se conoce como el modelo estándar, el cual establece que la materia, a nivel fundamental, está compuesta por partículas subatómicas llamadas quarks, junto con sus correspondientes antipartículas, los antiquarks, y otras

partículas llamadas leptones. Los quarks interactúan mediante cuatro interacciones fundamentales: la electromagnética, la nuclear fuerte, la nuclear débil y la gravitatoria. Sin embargo, esta última no ha podido incorporarse de manera consistente dentro del modelo estándar. El estudio de estas interacciones a nivel microscópico continúa siendo un área activa de investigación en teoría de campos, orientada tanto a mejorar la descripción de cada interacción como a construir un modelo que permita unificarlas.

La teoría que describe microscópicamente la interacción fuerte se conoce como Cromodinámica Cuántica (QCD, por sus siglas en inglés), una teoría cuántica de campos que explica esta interacción fundamental. En QCD, se describe la interacción entre partículas que poseen color mediante el intercambio de gluones, partículas mediadoras de la interacción fuerte similares a los fotones en la interacción electromagnética. La teoría se basa en el grupo de simetría local de color $SU(3)$, lo que la convierte en una teoría no abeliana. Esto implica que, a diferencia de los fotones, que carecen de carga eléctrica, los gluones poseen color, lo que permite una interacción entre ellos mismos. Este comportamiento es una de las características más distintivas de QCD y la razón por la cual su comportamiento difiere del electromagnetismo.

Otra de las principales diferencias entre la teoría asociada al electromagnetismo y QCD es el confinamiento [9], un fenómeno característico de QCD que aún no se logra explicar desde primeros principios. Mientras que en la electrodinámica cuántica las partículas cargadas, como los electrones, se pueden hallar aislados, en QCD las partículas con color, como los gluones y los quarks, no pueden existir de forma aislada. En su lugar, estas partículas interactúan fuertemente para formar estados ligados incoloros llamados hadrones, que sí podemos observar. Los hadrones se clasifican en dos grupos: mesones, formados por un quark y un antiquark de valencia, y bariones, compuestos por tres quarks o tres antiquarks de valencia. Una forma de entender el confinamiento es pensar en separar un par quark-antiquark para crear estados aislados. Las simulaciones muestran que la energía del par crece con la distancia, por lo que separarlos es muy costoso energéticamente [10, 11]. Resulta ser menos costoso a partir de cierta distancia, crear un nuevo par quark-antiquark a partir del vacío, manteniendo únicamente estados ligados incoloros.

Otra propiedad muy importante de QCD es la libertad asintótica [12–14], un fenómeno que se presenta a escalas de alta energía (régimen ultravioleta), donde la interacción fuerte se vuelve cada vez más débil. En estas escalas, los quarks confinados dentro de los hadrones se comportan casi como partículas libres. La intensidad de la interacción está determinada por un parámetro llamado constante de acoplamiento fuerte; a altas energías este parámetro toma valores muy pequeños y por lo tanto es posible aplicar métodos perturbativos utilizando la constante de acoplamiento como parámetro de desarrollo. Dicha técnica ha sido muy importante para obtener predicciones de la teoría, como secciones eficaces, tasas de producción de quark pesados en distintas colisiones, y para entender cómo la constante de acoplamiento depende de la escala de energía.

Sin embargo, a escalas de baja energía (régimen infrarrojo), la constante de acoplamiento crece indefinidamente según los cálculos perturbativos usuales, invalidando el uso de teoría de perturbaciones [15, 16]. Este régimen se conoce como no perturbativo, y corresponde a la región en la que se producen la mayoría de los hadrones observados experimentalmente. Para explorar las escalas de baja energía se han desarrollado distintos métodos no perturbativos, entre ellos *lattice* QCD [17], que se basa en principios fundamentales de la teoría y consiste en discretizar el espacio-tiempo en una red finita. Dicha herramienta utiliza simulaciones Monte Carlo para calcular magnitudes relevantes como las masas de los hadrones, obteniendo resultados consistentes con los experimentos. No obstante, las simulaciones en el *lattice* requieren mucho poder de cómputo y no brindan información sobre la descripción correcta de QCD a nivel fundamental.

Con el desarrollo de las simulaciones numéricas en QCD surgieron indicios de que la teoría, en el régimen de bajas energías, presenta un comportamiento diferente al que predicen los métodos perturbativos estándar. En particular, simulaciones realizadas en el *lattice* en el *gauge* de Landau muestran dos resultados muy importantes. En primer lugar, el propagador del gluon no diverge en el infrarrojo, sino que se mantiene finito [18,19]. Esta saturación del propagador a momento nulo es consistente con el comportamiento esperado para una partícula masiva. En segundo lugar, se observa que la constante de acoplamiento no crece de manera indefinida como era esperado según los cálculos perturbativos en el régimen ultravioleta [20], lo que sugiere que el régimen infrarrojo de la teoría debería controlarse utilizando teoría de perturbaciones.

Motivados por estos resultados, en [21] se retoma un modelo ya existente llamado Curci-Ferrari [22], que consiste en una versión modificada del lagrangiano de Faddeev-Popov para QCD donde se incluye un término de masa para el gluon. En una serie de trabajos demostraron que este modelo reproduce perturbativamente los resultados del *lattice* en el régimen infrarrojo, y al mismo tiempo permanece compatible con QCD estándar en el ultravioleta [23]. Una gran ventaja del modelo de gluones masivos es que permite realizar cálculos analíticos en el régimen infrarrojo de QCD utilizando teoría de perturbaciones, lo que permite entender algunas propiedades de QCD en este régimen.

La introducción de un término de masa para el gluon implica la aparición de un parámetro adicional con respecto a QCD estándar. El valor de dicha masa ha sido estimado dentro del marco del modelo de Curci-Ferrari mediante la comparación con distintas funciones de correlación del *lattice* y también de diagramas de fase de QCD [24–32], así como, más recientemente, a partir de la constante de decaimiento del pion en el límite quiral [33]. Sin embargo, resulta interesante explorar el valor de este parámetro a través de la comparación con el espectro de masas de distintos estados ligados. Este estudio, en teoría cuántica de campos, se realiza mediante el uso de la ecuación de Bethe-Salpeter, la cual consiste en un sistema de ecuaciones integrales acopladas de gran complejidad. Sin embargo, cuando se considera la aproximación no relativista, el problema se simplifica significativamente y queda determinado por la ecuación de Schrödinger. Esta aproximación es válida para estados ligados compuestos por quarks pesados, cuyas velocidades son mucho menores que la velocidad de la luz. En este régimen, es posible estudiar la masa del gluon mediante el análisis del espectro de mesones, bariones y también configuraciones exóticas que se han observado experimentalmente, todas ellas compuestas por quarks pesados.

Durante décadas se asumió que el espectro hadrónico estaba compuesto únicamente por mesones y bariones, hasta que en 1977 Jaffe propuso la existencia de hadrones compuestos de cuatro partículas fundamentales: dos quarks y dos antiquarks, llamados tetraquarks [34,35]. Desde el punto de vista de QCD, la simetría de color $SU(3)$ admite la formación de estados incoloros de cuatro quarks, por lo que estos nuevos hadrones no contradicen el confinamiento. Sin embargo, por muchos años no se obtuvo ningún indicio experimental de su existencia. Además de los tetraquarks, se propusieron otros estados nuevos compatibles con la simetría de color, como los pentaquarks, formados por cinco quarks [36,37]. El conjunto de todos estos estados ligados posibles, más allá de los mesones y bariones, reciben el nombre de hadrones exóticos.

El interés por el estudio de tetraquarks resurgió en 2003, cuando la colaboración Belle descubrió una resonancia estrecha en el canal $B^\pm \rightarrow K^\pm J/\psi \pi^+ \pi^-$ [38]. Este estado, denominado X(3872) no correspondía al mesón charmonium ($c\bar{c}$), y no podía ser explicado mediante el modelo de mesones y bariones. Hoy es considerado el primer candidato a hadrón exótico. En los años siguientes se identificaron otras estructuras exóticas como Y(4260), Z(4430) y Y(4360) [39–41]. En particular, el Z(4430) fue el primer estado cargado tipo charmonium, lo que implicaba una estructura con al menos cuatro quarks.

La evidencia experimental de tetraquarks compuestos de quarks pesados (quarks charm y/o bottom) se originó con el descubrimiento de los estados $Z_b(10610)$ y $Z_b(10650)$ por la colaboración Belle, que fueron los primeros candidatos a tetraquarks en el sector del bottomonium [42]. Posteriormente, en 2021, el LHCb observó el estado estrecho T_{cc}^+ [43], confirmando por primera vez la existencia de un tetraquark con dos quarks pesados. A su vez, en 2020, el LHCb anunció una estructura identificada como el $X(6900)$, un candidato a tetraquark totalmente pesado ($cc\bar{c}\bar{c}$) [44]. Más recientemente, en 2023 y 2024, las colaboraciones CMS y ATLAS detectaron los estados $X(6600)$ y $X(7200)$, agregando más evidencia de tetraquarks totalmente pesados [45, 46].

Simultáneamente, se lograron avances importantes en el estudio de tetraquarks mediante *lattice* QCD. Los resultados actuales de estas simulaciones apoyan la existencia de tetraquarks pesados. En particular, un estudio reciente de 2025, identificó un polo correspondiente a un tetraquark compuesto por dos quarks charm (T_{cc}), cuya masa es cercana al umbral de desintegración en mesones, lo que sugiere que podría ser un estado estable [47]. Mientras que, en el sector del bottom, las simulaciones han encontrado un posible estado estable de un tetraquark compuesto por dos quarks bottom (T_{bb}) [48, 49].

A pesar del progreso experimental en el estudio de los tetraquarks, a nivel teórico aún no existe un consenso sobre cómo modelarlos. Una interpretación posible consiste en pensar a los tetraquarks como sistemas moleculares, compuestos por un par mesón-mesón que interactúan residualmente mediante el intercambio de mesones [50–56]. Otra interpretación propone un modelo de tetraquark compacto de tipo diquark–antidiquark: dos quarks forman un diquark (qq) y dos antiquarks un antidiquark ($\bar{q}\bar{q}$), y estos interactúan mediante intercambio de gluones para mantener al tetraquark unido [57–62]. Además de estos dos modelos, han surgido más variantes, incluyendo características de ambas representaciones [63–65].

En este trabajo, utilizaremos el modelo de diquarks para describir a los tetraquarks (ver Fig. (1.1)), tomando inspiración de los modelos de bariones, donde la representación de diquarks ha tenido gran éxito. En particular, nos centraremos en una clase de tetraquarks denominada *fully-heavy*, compuestos exclusivamente por quarks y antiquarks pesados. Este tipo de tetraquarks resulta especialmente interesante ya que son más sencillos de identificar desde el punto de vista experimental, debido a que sus masas se encuentran en regiones del espectro donde no se observan mesones.

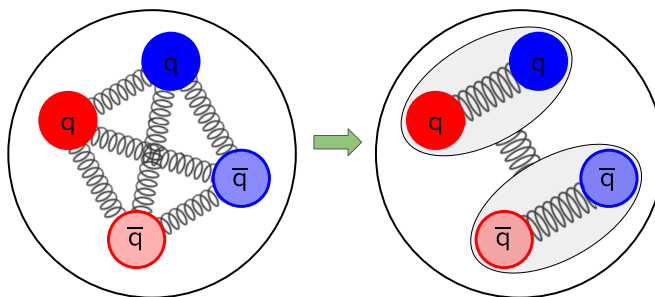


Figura 1.1: Representación esquemática del modelo de diquarks. El problema de cuatro cuerpos con interacciones (izquierda) se convierte en un problema de dos cuerpos interactuando mediante el intercambio de gluones (derecha). Los quarks qq forman el diquark y los antiquarks $\bar{q}\bar{q}$ forman el antidiquark.

Desde el punto de vista teórico, se han desarrollado diversos modelos para describir los *fully-heavy* tetraquarks. Los primeros trabajos fueron en 1975, cuando Iwasaki utilizó un potencial de confinamiento para quarks pesados [66], y en 1981 con Chao [67] utilizando el modelo de diquarks e incluyendo un término de confinamiento de forma cuadrática para describir tetraquarks, prediciendo una masa entre 6.2 y 6.4 GeV para el $cc\bar{c}\bar{c}$. Posteriormente, se estudiaron modelos completos de cuatro cuerpos con un potencial tipo Cornell¹ utilizando métodos variacionales, obteniendo masas en el rango de 6.3–6.6 GeV para el $cc\bar{c}\bar{c}$ y 18.8–19.2 GeV para el $bb\bar{b}\bar{b}$ [68]. En los últimos años, las simulaciones de *lattice* QCD permitieron determinar el potencial entre cuatro quarks, obteniendo masas alrededor de 6.3–6.9 GeV para el $cc\bar{c}\bar{c}$ y 18.6–19.5 GeV para el $bb\bar{b}\bar{b}$ [69–71]. Por otra parte, estudios mediante reglas de sumas de QCD² de Chen *et al.* [72] obtuvieron 6.8–6.9 GeV para $cc\bar{c}\bar{c}$ y 18.3–18.5 GeV para $bb\bar{b}\bar{b}$, mientras que Li *et al.* [73], usando la ecuación de Bethe–Salpeter, predijeron valores de 6.5–6.8 GeV y 18.4–18.8 GeV para la masa de los mismos estados.

El objetivo de esta tesis es realizar un primer estudio para analizar la posible influencia de la masa del gluon en la predicción del espectro de los *fully-heavy* tetraquarks. Para esto utilizaremos la representación de diquarks, aproximando cada diquark como una partícula puntual. Además, ya que los quarks involucrados son pesados, consideraremos la aproximación no relativista, simplificando el cálculo de los espectros. La interacción fuerte entre los componentes del tetraquark será calculada con un modelo que incluye gluones masivos. Previo al estudio del espectro de tetraquarks, ajustaremos los distintos parámetros del modelo comparando el espectro de mesones compuestos por quarks pesados con los resultados experimentales, específicamente estudiaremos el charmonium, bottomonium y el mesón charm-bottom. Debido a que cada uno de dichos mesones representa una escala de energía diferente, realizaremos un estudio considerando una relación entre los parámetros del modelo en cada escala.

La tesis se organiza de la siguiente manera: en el Cap. 2 se introducen los conceptos básicos de QCD, algunos problemas encontrados y el modelo con gluones masivos. En el Cap. 3 se presenta el modelo que utilizamos para describir al tetraquark, las interacciones relevantes, la estructura de color y las aproximaciones utilizadas. En el Cap. 4 se detalla la metodología, el cálculo hamiltoniano, los métodos numéricos, y las correcciones empleadas. En el Cap. 5 se discuten los ajustes de los parámetros del modelo utilizando los valores conocidos de los espectros de mesones pesados, utilizando parámetros independientes para describir los sistemas a diferentes escalas. En el Cap. 6 se muestran las predicciones para los estados del tetraquark. En el Cap. 7 se repite este procedimiento, pero ahora considerando una relación entre los parámetros involucrados a las diferentes escalas consideradas. Finalmente, en el Cap. 8 se presentan las conclusiones y las perspectivas de trabajo futuro.

¹Un potencial tipo Cornell es un potencial efectivo que se usa para describir la interacción entre un quark y un antiquark en sistemas ligados pesados, toma la forma: $V(r) = \frac{\kappa}{r} + br + C$

²Las reglas de sumas de QCD son relaciones matemáticas entre funciones de correlación que vinculan la descripción microscópica de quarks y gluones con la descripción hadrónica.

Capítulo 2

Cromodinámica cuántica

En este capítulo introducimos los conceptos básicos de la teoría cuántica de campos que describe la interacción fuerte: la Cromodinámica Cuántica (QCD). Presentamos la simetría de *gauge* que caracteriza a la teoría y mostramos cómo esta simetría da lugar al lagrangiano de QCD. Describimos también el procedimiento de Faddeev-Popov, mediante el cual se eliminan los grados de libertad redundantes de la teoría asociados a la invarianza de *gauge*, y discutimos el rango de validez de este procedimiento haciendo énfasis en los problemas que aparecen a bajas energías. Mencionamos también cómo se renormaliza la teoría para resolver el problema de integrales divergentes. Finalmente, introducimos un modelo de QCD con gluones masivos, capaz de reproducir algunos resultados del *lattice* a escalas de bajas energías y recrear los resultados de QCD en su rango de validez a altas energías. Este modelo será utilizado a lo largo del trabajo. La mayoría de los conceptos de este capítulo se encuentran en libros de texto de teoría cuántica de campos y *reviews* [74–78]. En este capítulo, y a lo largo de toda la tesis, trabajaremos en unidades naturales ($c = \hbar = 1$).

2.1. Grupo $SU(3)$ local

Para describir la Cromodinámica Cuántica es necesario incorporar las simetrías que se observan en la interacción fuerte. Distintos resultados experimentales muestran que la teoría presenta una carga conservada denominada color, que puede tomar exactamente tres valores [79–81]. La conservación de esta carga se debe a la existencia de una simetría en la teoría, y la estructura que reproduce correctamente las observaciones es la simetría de *gauge* asociada al grupo $SU(3)$.

$SU(3)$ es un grupo de Lie compacto de dimensión 8 que corresponde a las transformaciones especiales y unitarias en un espacio de tres dimensiones. En la representación fundamental, sus elementos son matrices 3×3 , unitarias y con determinante uno. Los generadores del álgebra de Lie de este grupo son 8 y se representan como t^a , donde a es un índice que toma valores de 1 a 8. Estos generadores cumplen la siguiente relación de conmutación:

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c,$$

donde índices repetidos implican una suma en todos sus posibles valores. Definimos las constantes de estructura, f^{abc} , que tienen en cuenta que los generadores no conmutan. Todo grupo de Lie en el cual los generadores no conmutan se denomina no abeliano.

En la representación fundamental de matrices, es usual escribir a los generadores como:

$$t^a = \frac{\lambda^a}{2},$$

siendo λ^a las matrices de Gell-Mann, que se explicitan en la Sección 3.3. A partir de estos generadores se puede escribir un elemento genérico del grupo como:

$$U(x) = e^{i\theta^a(x)\lambda^a/2}, \quad (2.1)$$

donde $\theta^a(x)$ son ocho parámetros reales que dependen de las coordenadas x del espacio-tiempo y da lugar a los distintos elementos del grupo. La dependencia de los parámetros en las coordenadas define el carácter local de esta simetría.

Distintas representaciones del grupo $SU(3)$ actúan de diferentes formas sobre los elementos característicos de la teoría. La representación fundamental de matrices actúa sobre vectores de tres componentes de la siguiente forma:

$$\psi \rightarrow U(x)\psi,$$

donde $U(x)$ es un elemento del grupo y esta transformación corresponde al producto matricial usual.

Por otro lado, los campos de *gauge* transforman de la siguiente manera bajo la acción de $SU(3)$:

$$t^a A_\mu^a \rightarrow U t^a A_\mu^a U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger, \quad (2.2)$$

donde $t^a A_\mu^a$ es el campo de *gauge*. Los índices griegos representan componentes espacio-temporales, y los índices latinos, componentes en el espacio de color.

2.2. Lagrangiano de QCD

La Cromodinámica Cuántica es la teoría cuántica de campos que describe las interacciones entre partículas con color. En esta teoría, los quarks y gluones se representan como excitaciones cuánticas de campos y su dinámica se determina a partir del lagrangiano del sistema. Para reproducir las características de la interacción fuerte, QCD se basa en las propiedades de la carga de color que se han visto experimentalmente mediante la simetría del grupo $SU(3)$ local.

Empecemos por describir a los quarks. A cada quark le asociamos un campo $\psi(x)$ que transforma según la representación fundamental de $SU(3)$. Es decir, como son partículas que tienen color, los escribiremos como un vector de tres componentes en el espacio de color.

$$\psi^c(x) = \begin{pmatrix} \psi^r(x) \\ \psi^g(x) \\ \psi^b(x) \end{pmatrix},$$

donde cada componente $\psi^c(x)$ es un espinor de Dirac y el índice $c = 1, 2, 3$ refiere al color, rojo, verde y azul respectivamente. Además de este campo, debemos definir el campo asociado a los antiquarks, $\bar{\psi}_c = \gamma^0 \psi_c^\dagger$, con γ^μ las matrices de Dirac.

Para que esta teoría de campos respete la simetría de $SU(3)$, es decir, sea invariante ante la acción de este grupo, se debe introducir el campo de gluones (también llamado campo de *gauge*) $A_\mu(x) = t^a A_\mu^a(x)$, donde a es un índice de 1 a 8. Estos campos dan lugar a los 8 gluones de la teoría, cada uno asociado con un generador de $SU(3)$. Además, debido a la acción de $SU(3)$ sobre los campos de *gauge*, cuando hacemos transformaciones de color los gluones se mezclan entre ellos.

La interacción entre quarks y gluones se representa mediante la derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig t^a A_\mu^a(x),$$

donde g es la constante de acoplamiento fuerte, y da una medida de qué tan intensa es esta interacción.

Finalmente, la dinámica de los gluones se describe mediante el tensor $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

donde el último término es el que da lugar a las interacciones entre gluones, característico de una teoría no abeliana. Este comportamiento proviene de la no conmutación de los generadores de $SU(3)$.

Con todo esto, se puede demostrar que la densidad lagrangiana de QCD debe escribirse de la siguiente forma para respetar la simetría de color [82–86]:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu D_\mu - m_i) \psi_i, \quad (2.3)$$

donde los índices repetidos implican que estamos sumando sobre ellos. El primer término describe tanto la propagación libre de gluones como las interacciones entre ellos. El segundo término, con la derivada covariante, describe las interacciones entre los quarks y gluones. Y el último término da lugar a las masas de los quarks, m_i .

A partir de la densidad lagrangiana de la ecuación (2.3), se puede definir la acción de QCD como:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{QCD}. \quad (2.4)$$

2.3. Procedimiento de Faddeev-Popov

Una vez obtenido el lagrangiano de QCD, el siguiente problema al que nos enfrentamos es cómo utilizarlo para calcular distintas cantidades, por ejemplo funciones de correlación o funciones de Green. Para eso, el primer paso es cuantizar la teoría clásica de QCD que acabamos de describir. Existen varios métodos equivalentes para lograr este resultado [87, 88], pero nos centraremos en el formalismo de la integral de caminos [89–92]. Este consiste en, dado un proceso, integrar en todos los caminos posibles desde la configuración inicial a la final (no sólo la trayectoria clásica). En este caso una función de Green se escribe como:

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{iS}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS}},$$

donde ϕ es un campo genérico de la teoría.

Una de las ventajas de este método, es que permite observar las simetrías de la teoría de forma directa. Sin embargo, si sólo sustituyéramos la acción de la ecuación (2.4) en esta expresión, y la utilizáramos para calcular alguna función de correlación, llegaríamos a un problema: el resultado de cada integral sería infinito. Esta dificultad proviene de la invarianza de *gauge*, como veremos a continuación.

A partir de ahora nos centraremos en estudiar QCD en el caso sin quarks, lo que se conoce como la teoría de Yang-Mills pura, y prestaremos atención a la siguiente integral de caminos:

$$\int \mathcal{D}A e^{iS}. \quad (2.5)$$

Cuando dedujimos el lagrangiano de QCD, pedimos que fuera invariante bajo transformaciones del grupo $SU(3)$, en particular bajo transformaciones de la forma de la ecuación (2.2). Esto significa que, utilizando dicha ecuación, podemos obtener infinitos campos de *gauge* A_μ distintos, pero que dan lugar al mismo lagrangiano, y por lo tanto a la misma dinámica. El conjunto de todos estos campos equivalentes se conoce como la órbita de *gauge* de A_μ , y no son campos físicos, sino una libertad extra que tiene nuestro sistema al definir el campo de *gauge*. Una representación de estas orbitas se puede observar en la Fig. (2.1).

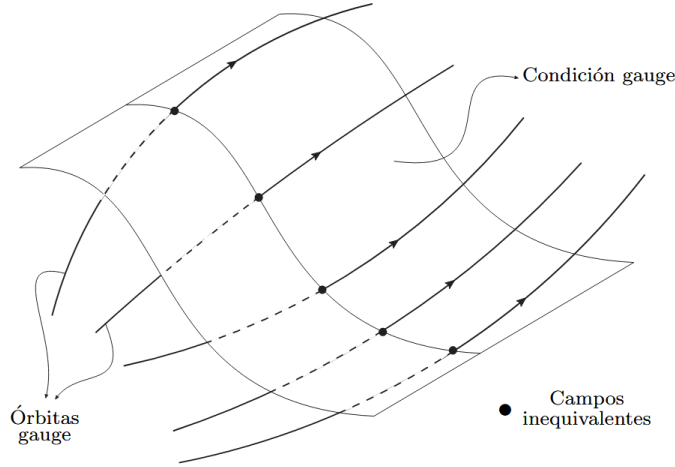


Figura 2.1: Representación de las orbitas de *gauge* de una teoría y cómo fijar una condición *gauge* determina un único campo de *gauge* de la órbita. Extraído de [93].

La suma sobre estos grados de libertad no físicos da lugar a divergencias en las integrales de camino. La solución a este problema se conoce como el procedimiento de Faddeev-Popov, el cual implica fijar el *gauge*. Esto significa que, de cada órbita de *gauge* se elige un único representante, eliminando las copias no físicas. Existen muchas opciones para fijar el *gauge*, imponiendo distintas condiciones al campo A_μ . Nosotros nos vamos a enfocar en una específica conocida como *gauge* de Landau, que se basa en imponer la siguiente condición:

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.6)$$

Sin demostrar los pasos intermedios, veamos el procedimiento de Faddeev-Popov para el caso del *gauge* de Landau [94,95]. El primer paso es escribir la identidad de la siguiente manera:

$$1 = \int \mathcal{D}\theta \delta(G[A^\theta]) \det\left(\frac{\delta G[A^\theta]}{\delta\theta}\right),$$

donde $G[A]$ es una función del campo de *gauge* que se anula cuando el campo cumple la condición de *gauge*, en nuestro caso $G[A] = \partial_\mu A^\mu$. Además, θ es parámetro de un elemento del grupo $SU(3)$,

como muestra la ecuación (2.1), y A_μ^θ es el campo de *gauge* transformado según la ecuación (2.2).

El determinante en la expresión anterior se conoce como el determinante de Faddeev-Popov. Utilizando propiedades de las transformaciones de *gauge* y de la integral de caminos, se puede escribir esta integral como:

$$1 = \int \mathcal{D}\theta \delta(\partial_\mu A^\mu) \det\left(\frac{1}{g}\partial_\mu D^\mu\right).$$

Agregando esta identidad a la ecuación (2.5) obtenemos:

$$\int \mathcal{D}A e^{iS} = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\theta \delta(\partial_\mu A^\mu) \det\left(\frac{1}{g}\partial_\mu D^\mu\right) e^{iS[A_\mu]},$$

donde la integral en θ sólo da lugar a una constante que es irrelevante en el cálculo de las funciones de correlación.

El siguiente paso es escribir la delta de la integral de una forma conveniente. Podemos introducir un campo auxiliar $h^a(x)$, tal que:

$$\delta(\partial_\mu A^\mu) = \int \mathcal{D}h e^{i \int d^4x h^a \partial_\mu A^{\mu a}}.$$

El objetivo, es intentar escribir todo como una integral de una exponencial compleja. El último problema a resolver es el determinante, para eso usamos un truco propuesto por Faddeev y Popov:

$$\det\left(\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu^{ab}\right) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} e^{i \int d^4x \bar{c}^a(x) (-\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b(x)},$$

donde los nuevos campos $c^a(x)$ y $\bar{c}^a(x)$ son campos escalares, complejos, que anticonmutan, y se los conoce como los *ghosts* de Faddeev-Popov. Todos los campos introducidos en este proceso no son más que herramientas matemáticas, sus excitaciones no están asociadas a ninguna partícula física, y los observables de la teoría no dependen de estos campos.

Juntando todo e integrando por partes en la integral de *ghosts*:

$$\int \mathcal{D}A e^{iS} = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}h e^{i \int d^4x h^a \partial^\mu A_\mu^a} e^{i \int d^4x (\partial^\mu \bar{c}^a) D_\mu^{ab} c^b} e^{iS},$$

y por lo tanto la densidad lagrangiana fijada de *gauge* se escribe como:

$$\mathcal{L}_{FP} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + h^a \partial^\mu A_\mu^a + (\partial^\mu \bar{c}^a) D_\mu^{ab} c^b. \quad (2.7)$$

Es directo el proceso de incluir quarks en este lagrangiano.

Habiendo solucionado el problema de las órbitas de *gauge*, ahora podemos hallar las funciones de correlación de la teoría. Sin embargo, estos cálculos no son para nada sencillos de resolver de forma exacta. En su lugar, utilizamos la teoría de perturbaciones, considerando las interacciones de la teoría como correcciones pequeñas a la teoría libre. Es útil dividir el lagrangiano de QCD de la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}},$$

donde \mathcal{L}_0 es el lagrangiano de la teoría libre y \mathcal{L}_{int} es el lagrangiano asociado a las interacciones.

Para QCD:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_i) \psi_i + \partial^\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a + h^a \partial^\mu A_\mu^a,$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{g}{2} f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A^{b\mu} A^{c\nu} - \frac{g^2}{4} (f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)^2 + g \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i \gamma^\mu t^a A_\mu^a \psi_i + g f^{abc} (\partial^\mu \bar{c}^a) A_\mu^b c^c.$$

Notamos que los términos de interacción dependen de la constante de acoplamiento g . Si ésta es suficientemente pequeña se puede hacer un desarrollo perturbativo en los términos de interacción:

$$e^{i \int d^4x \mathcal{L}} \sim e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0} \left[1 - \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} + \frac{1}{2} \left(\int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} \right)^3 + \dots \right].$$

Mientras la constante de acoplamiento se mantenga pequeña, cada término del desarrollo es menor que el anterior, lo que habilita un desarrollo en g . De esta forma, se pueden hallar las funciones de correlación aproximadas, utilizando el desarrollo hasta cierto orden en la constante de acoplamiento. En base a estas herramientas, se logra reproducir gran cantidad de resultados experimentales a altas energías (*scattering* inelástico profundo, producción de *jets*, secciones eficaces a altas energías), así como demostrar la libertad asintótica de QCD, como veremos en la siguiente sección.

2.4. Regularización, renormalización y running de los parámetros

Los cálculos perturbativos de funciones de correlación más allá del primer orden contienen integrales en el espacio de momentos que divergen en el ultravioleta. El proceso de aislar estas divergencias se conoce como regularización [96, 97]. Para esto se introduce un parámetro externo que controla las divergencias de forma condicional. Existen varios métodos para regularizar una teoría, los más conocidos son: la inclusión de un corte ultravioleta, Pauli-Villars [98], regularización dimensional [99] y regularización de *lattice* [100]. El más intuitivo es el primero, que implica introducir un límite superior finito, Λ , en las integrales de momento, como se muestra en la ecuación (2.8). Si bien no es el procedimiento que utilizaremos en esta tesis, introduciremos el concepto de regularización siguiendo este método más intuitivo.

$$\int^\infty dq \longrightarrow \int^\Lambda dq. \quad (2.8)$$

Cambiando el límite de integración por un parámetro finito, la integral ya no diverge. Sin embargo, ahora las funciones de Green y los observables de la teoría dependen de este nuevo parámetro arbitrario. Para solucionar este problema se utiliza la técnica de renormalización, a través de la cual las funciones de correlación dejan de depender de Λ y es posible tomar el límite en el cual Λ tiende a infinito para recuperar la teoría original sin divergencias.

El proceso de renormalización implica absorber la dependencia en Λ con una redefinición de los campos, masas y constantes de acoplamiento. Llamaremos *bare* a las cantidades originales presentes en el lagrangiano, y las denotaremos con un subíndice B; y llamaremos renormalizadas a las nuevas

cantidades, representándolas sin subíndice. La relación entre ambos conjuntos se expresa mediante factores de renormalización, Z :

$$\begin{aligned}\phi_B &= \sqrt{Z_\phi} \phi, \\ X_B &= Z_X X,\end{aligned}$$

donde ϕ es un campo genérico de la teoría y X es un parámetro genérico, como masas o constantes de acoplamiento.

De esta forma, las funciones de Green *bare* se pueden escribir en función de las renormalizadas:

$$G_B(p_1, \dots, p_n; g_B, m_B) = \left(\prod_{i=1}^n \sqrt{Z_i} \right) G(p_1, \dots, p_n; g, m),$$

donde cada $\sqrt{Z_i}$ corresponde a un campo en la función de correlación.

Sin embargo, no toda teoría es renormalizable, ya que necesitan existir suficientes parámetros y campos en el lagrangiano como para controlar cada función de correlación divergente de la teoría. En el caso de QCD, se puede demostrar que la teoría es renormalizable [101–103] y que los únicos factores de renormalización necesarios son: Z_A , Z_c , Z_ψ , Z_g , Z_{m_i} .

Las cantidades renormalizadas se definen con un esquema de renormalización. Es decir, definimos los factores de renormalización fijando el valor de algunas funciones renormalizadas de Green a cierta escala de momento μ . Existen muchos esquemas de renormalización diferentes, todos absorben la dependencia en Λ , pero dan distintos valores de la parte finita. Los más conocidos son los esquemas de resta, MS y MOM. Como ejemplo, en el esquema MOM (*momentum-space subtraction scheme*) los factores de renormalización se definen tal que las funciones de correlación a dos y tres puntos correspondan a su expresión a primer orden a escala μ . Aplicando este esquema al propagador del *ghost* $D(p)$:

$$D^{ab}(p) = \delta^{ab} \frac{F(p)}{p^2}, \quad \text{con} \quad F(p) = Z_c^{-1} F_B(p).$$

La condición MOM se fija exigiendo que, a la escala μ ,

$$F(\mu) = 1, \quad \longrightarrow \quad Z_c = F_B(\mu).$$

Procedimientos análogos permiten determinar Z_A , Z_g y Z_{m_i} a partir de los propagadores y vértices correspondientes.

Ahora las constantes de acoplamiento, las masas y las funciones de Green dependen de la escala de renormalización μ en la que se imponen las condiciones del esquema de renormalización. Para determinar el comportamiento de los parámetros con la escala, utilizamos las ecuaciones del grupo de renormalización [104, 105]. Para esto pensamos que μ es una escala móvil, y que los valores de los parámetros del modelo varían con μ . Esta dependencia con la escala se llama *corrimiento* o *running*, y para determinarla notamos que las funciones de correlación *bare* no dependen de μ :

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} G_B(p, g_B, m_{B_i}) \Big|_{g_B, m_{B_i}}.$$

Cuando escribimos esta expresión en términos de los campos, masas y acoplamientos renormali-

zados obtenemos:

$$\begin{aligned}\beta_g(g, m_i) &= \mu \frac{dg}{d\mu} \Big|_{g_B, m_{B_i}}, \\ \gamma_A(g, m_i) &= \mu \frac{d \log Z_A}{d\mu} \Big|_{g_B, m_{B_i}}, \\ \gamma_c(g, m_i) &= \mu \frac{d \log Z_c}{d\mu} \Big|_{g_B, m_{B_i}}, \\ \beta_{M_i}(g, m_i) &= \mu \frac{dm_i}{d\mu} \Big|_{g_B, m_{B_i}}, \\ \gamma_\psi(g, m_i) &= \mu \frac{d \log Z_\psi}{d\mu} \Big|_{g_B, m_{B_i}}.\end{aligned}$$

En el caso de QCD, la función β_g fue calculada por primera vez en 1973 por David Politzer [12], y poco después por David Gross y Frank Wilczek [13]. No entraremos en detalle en los cálculos, pero haciendo un desarrollo perturbativo a altas energías se obtiene [106]:

$$\beta_g(g(\mu)) = -\beta_0 \frac{g(\mu)^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g^5),$$

donde

$$\beta_0 = \frac{11}{3}N - \frac{2}{3}N_f$$

siendo N_f es la cantidad de sabores de quarks, y N es la cantidad de colores, que para QCD es tres.

Resolviendo la ecuación de β_g para hallar la dependencia de la constante de acoplamiento con la escala, se obtiene:

$$g^2(\mu) = \frac{g_0^2}{1 + \frac{g_0^2 \beta_0}{16\pi^2} \log\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)},$$

siendo g_0 el valor de la constante de acoplamiento en una escala de referencia μ_0 que llamamos escala de renormalización. Un gráfico del comportamiento de la constante de acoplamiento en función de la escala se puede ver en la Fig. (2.2). Vemos que, a altas energías el acoplamiento decrece con la energía. Este fenómeno se conoce como libertad asintótica, según el cual los quarks y gluones se comportan casi como partículas libres en dicha escala. Adicionalmente, cuando la constante de acoplamiento es pequeña, la teoría de perturbaciones está bien justificada. Sin embargo, a bajas energías, los cálculos perturbativos muestran que el acoplamiento crece, incluso alcanza lo que se conoce como polo de Landau, un valor finito de μ en el cual g diverge. Cuando la constante de acoplamiento deja de ser pequeña, el uso de teoría de perturbaciones ya no es válido. Por lo tanto, el régimen de bajas energías de QCD presenta grandes dificultades para realizar cálculos.

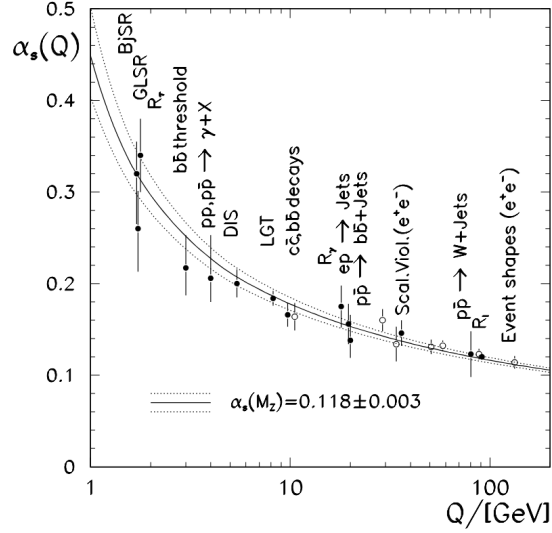


Figura 2.2: *Running* de la constante de acoplamiento α_s establecida por distintos resultados experimentales y comparada con las predicciones de la teoría de perturbaciones en QCD. Extraída de [107]

2.5. QCD a bajas energías

Debido al fallo de la teoría de perturbaciones para QCD a bajas energías, se han desarrollado diversas metodologías alternas para su estudio. Entre ellas se encuentran el uso de las ecuaciones de Dyson-Schwinger [108–128] u otras basadas en las ecuaciones del grupo de renormalización no perturbativo [129–134], que han sido muy exitosas a la hora de calcular las funciones de correlación de una teoría aproximando un sistema infinito de ecuaciones integrales acopladas por un sistema truncado finito. Otro método son las simulaciones Monte-Carlo en el *lattice* [135, 136]. Estas permiten calcular funciones de correlación a partir de primeros principios con *gauge* fijado.

A escalas de altas energías, los resultados obtenidos aplicando teoría de perturbaciones a la acción de Faddeev-Popov son compatibles con los cálculos de *lattice* QCD. Sin embargo, a bajas energías, las estas parecen contradecirse. Las simulaciones numéricas del *lattice* predicen que la constante de acoplamiento no presenta un polo de Landau en el infrarrojo, sino que alcanza un valor máximo y luego vuelve a decrecer. En la Fig. (2.3) se representan estos resultados. Dicho comportamiento parecería permitir el uso de teoría de perturbaciones en cualquier régimen de energía, considerando que el parámetro de desarrollo correcto para la teoría de perturbaciones no es realmente g , sino $\lambda_{\text{QCD}} = Ng^2/16\pi^2$ [137], que no toma valores mayores a 0.3 para $N = 3$. Esto abre la pregunta, si la teoría de perturbaciones podría ser válida a cualquier escala de energía, ¿por qué los cálculos utilizando la acción de Faddeev-Popov presentan inconsistencias en el régimen infrarrojo? La respuesta a esta pregunta continúa siendo un problema a explorar.

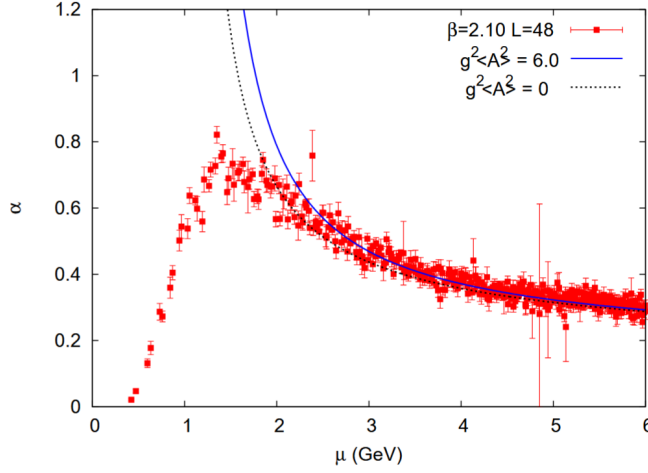


Figura 2.3: Resultados de *lattice* QCD en función de la escala de momento, μ , representados con puntos rojos y resultados del *running* de α_s usando QCD perturbativo representados con una línea gris. Extraída de [138].

Otro problema que presenta la teoría se descubrió en 1978, cuando Vladimir Gribov probó que el procedimiento de fijación de *gauge* mediante el cual se deriva el lagrangiano de Faddeev-Popov es incorrecto [139, 140]. Para obtener un resultado consistente, se debe eliminar la libertad de *gauge*, fijando una condición que determine un único campo de *gauge* en cada órbita. En nuestro caso impusimos el *gauge* de Landau. Gribov demostró que existe más de un campo de la misma órbita de *gauge* que satisface la condición de Landau, invalidando el procedimiento de Faddeev-Popov [141]. A estas repeticiones las llamó copias de Gribov. En particular, se puede demostrar que en el régimen de altas energías, el campo de *gauge* no presenta copias de Gribov en el *gauge* de Landau, limitando el problema al régimen de bajas energías.

2.6. Modelo de QCD con gluones masivos

A lo largo de esta tesis adoptaremos un lagrangiano diferente al de la ecuación (2.3) para el estudio de la interacción fuerte a bajas energías. Dado que la fijación de *gauge* es un gran problema en el régimen infrarrojo, y por lo tanto no conocemos realmente el lagrangiano de QCD fijado de *gauge*, buscamos el lagrangiano más sencillo que logre reproducir los resultados del *lattice* en el régimen de bajas energías y que sea compatible con los resultados del lagrangiano de Faddeev-Popov a altas energías.

En particular, seguiremos la idea presentada por Tissier y Wschebor en 2010 [21]. Ellos se inspiraron en los resultados de *lattice* QCD para el propagador del gluon en el infrarrojo, que muestran que el propagador satura en un valor finito a estas escalas [19, 142–146]. Este resultado es el comportamiento esperado para una partícula masiva. Un gráfico de este comportamiento se observa en la Fig. (2.4). En base a estos resultados, plantearon agregar un término de masa para los gluones al lagrangiano de Faddeev-Popov, con el cual se ha logrado reproducir con gran precisión los resultados del *lattice* del propagador del gluon usando teoría de perturbaciones [21, 23] y recupera los resultados de Faddeev-Popov a altas energías, donde sí está bien justificado.

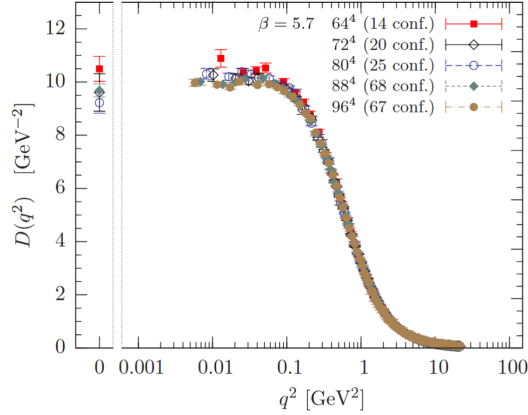


Figura 2.4: Resultados de *lattice* QCD para el propagador del gluon para distintos tamaños de la red. Extraído de [143].

Este modelo de gluones masivos resultó ser un caso particular de un modelo planteado en la década de 1970 por Curci y Ferrari en el *gauge* de Landau [22]. Originalmente, el modelo se planteó como una alternativa al mecanismo de Higgs, pero fue abandonado debido a que presenta problemas de unitariedad. Es decir, daba lugar a estados físicos con norma negativa [147]. Sin embargo, en el caso de QCD los estados físicos de norma negativa no son algo nuevo. Estudios realizados con enfoques no perturbativos, como las ecuaciones de Dyson-Schwinger y *lattice* QCD, han observado estados de norma negativa asociados al propagador del gluon usando la definición del espacio físico usual [148–150]. Este problema se interpretó como un error en la definición del espacio de estados físicos relacionada con el confinamiento y la imposibilidad de observar gluones como estados asintóticos.

En estas décadas se han realizados varios estudios que introducen el concepto de masa del gluon de forma explícita, por ejemplo [112, 151–164], entre otros. Por otra parte, es importante mencionar que estudios basados en las ecuaciones de Dyson-Schwinger reproducen un comportamiento masivo para el propagador del gluon y otras propiedades de QCD a bajas energías, siendo pioneros en muchas de las observaciones (por mencionar algunas [108–134]). A pesar de esto, en la tesis usaremos el modelo con gluones masivos, que presenta varias ventajas operacionales y que ha permitido entender varias de las propiedades de la física a bajas energías.

Una aclaración importante sobre este modelo es que el término de masa se agrega sobre el lagrangiano de Faddeev-Popov, es decir, el lagrangiano ya fijado de *gauge*. Entendemos que esta masa podría interpretarse como el efecto de las copias de Gribov en el lagrangiano fijado de *gauge*, aunque aún no se conoce el proceso analítico completo que permitiría fijar el *gauge* en el infrarrojo libre del problema de las copias de Gribov.

En el *gauge* de Landau, la densidad lagrangiana de este modelo corresponde a:

$$\mathcal{L}_{CF} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + h^a \partial^\mu A_\mu^a + (\partial^\mu \bar{c}^a) D_\mu^{ab} c^b + \frac{1}{2}m_g^2 A_\mu^a A^{a\mu} + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu D_\mu - m_i) \psi_i$$

Una ventaja de este modelo es que resulta ser renormalizable. Este resultado fue probado en 1976 por Curci y Ferrari [22]. Cuando se realiza dicho proceso se llega a un resultado muy importante, y es que existe un esquema de renormalización, llamado *infrared-safe*, con el cual se pueden obtener constantes de acoplamiento sin polos de Landau [28, 165], como el comportamiento observado en la

Fig. (2.4). Para esto se debe imponer que la parte longitudinal de los propagadores del gluon y del *ghost* coincidan con la forma a primer orden en la escala de renormalización. Trabajando con este esquema, se logra obtener constantes de acoplamiento en concordancia con los resultados del *lattice*, donde no se presenta un polo de Landau y el parámetro perturbativo se mantiene razonablemente pequeño, abriendo la posibilidad de aplicar teoría de perturbaciones a cualquier escala de energías utilizando el modelo con gluones masivos. En particular, para el caso sin quarks se obtiene el *running* calculado en [23]:

$$\beta_g = \frac{g^3 N}{192\pi^2 t^3} \left\{ t^4 (6+t) \log(t) + (12 + 16t + t^2 + t^4 - 2t^5) \log(1+t) - t \left[12 - 62t + 29t^2 + \sqrt{t}\sqrt{4+t} (-36 + 20t - 9t^2 + t^3) \log\left(\frac{-\sqrt{t} + \sqrt{4+t}}{\sqrt{t} + \sqrt{4+t}}\right) \right] \right\},$$

con $t = \mu^2/m_g^2$. Recordando la relación $\beta_g = \mu \frac{dg}{d\mu}$, obtenemos una ecuación diferencial para la dependencia en la escala de la constante de acoplamiento, cuya solución se encuentra representada en la Fig. (2.5).

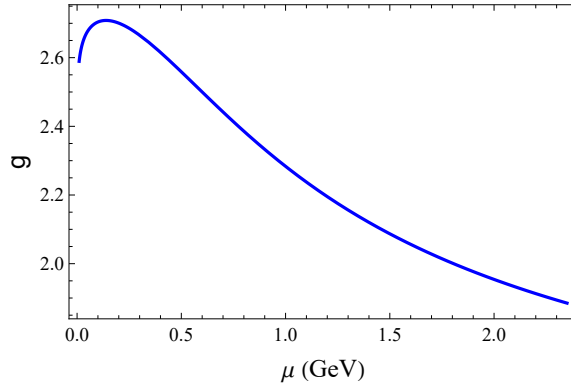


Figura 2.5: Comportamiento de la constante de acoplamiento con la escala μ .

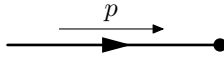
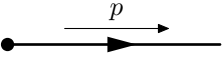
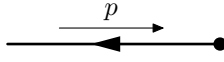
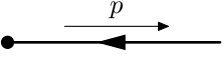
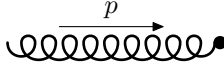
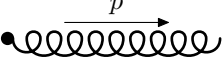
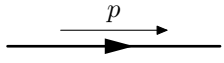
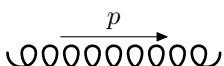
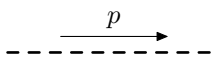
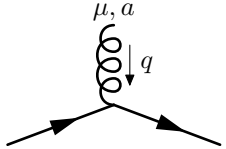
A partir del lagrangiano de Curci-Ferrari se pueden derivar las reglas de Feynman en el espacio de momentos para esta teoría. Estas son esencialmente las mismas que las que se obtienen con el lagrangiano de Faddeev–Popov (extraídas de [74]), pero con el propagador del gluon con la misma forma que el de una partícula masiva. La deducción de este propagador se encuentra en el Apéndice A.

Los quarks y antiquarks entrantes y salientes se describen como espinores $u_s(p)$ y $v_s(p)$, que son las soluciones a la ecuación de Dirac. Además, se introduce un vector c de tres componentes asociado al color. Los gluones entrantes y salientes tienen, además del vector de polarización $\epsilon(p)$, un vector de ocho componentes a^α , correspondiente a los ocho gluones de la teoría.

El factor de simetría de cada diagrama sigue las siguientes reglas:

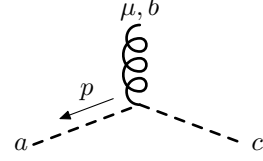
- Hay un factor -1 por cada *loop* de fermiones.
- Si tenemos v vértices, hay un factor $i^v/v!$ del desarrollo de la exponencial.

- Hay un factor $1/3!$ por cada vértice de tres gluones.
- Hay un factor $1/4!$ por cada vértice de cuatro gluones.
- Para diagramas con distintos tipos de vértices, hay un factor $v!/(v_1!v_2!v_3!)$ del desarrollo de la exponencial.
- Hay un factor combinatorio debido a las distintas contracciones posibles del teorema de Wick.

Fermión entrante:	$u^s(p)c$	
Fermión saliente:	$\bar{u}^s(p)c^\dagger$	
Antifermión entrante:	$\bar{v}^s(p)c^\dagger$	
Antifermión saliente:	$v^s(p)c$	
Gluon entrante:	$\epsilon_\mu(p)a^\alpha$	
Gluon saliente:	$\epsilon_\mu^*(p)a^{\alpha*}$	
Propagador del fermión:	$\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}$	
Propagador del gluon:	$\frac{-i\delta^{ab}}{p^2-m_g^2+i\epsilon} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right)$	
Propagador del ghost:	$\frac{i\delta^{ab}}{p^2+i\epsilon}$	
Vértice quark-gluon:	$ig\gamma^\mu t^a$	

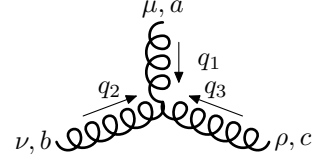
Vértice *ghost*-gluon:

$$-g f^{abc} p^\mu$$



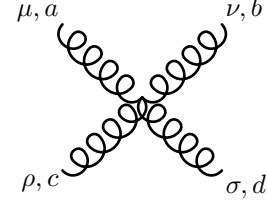
Vértice de tres gluones:

$$g f^{abc} [\eta^{\mu\nu} (q_1 - q_2)^\rho + \eta^{\nu\rho} (q_2 - q_3)^\mu + \eta^{\rho\mu} (q_3 - q_1)^\nu]$$



Vértice de cuatro gluones:

$$-ig^2 [f^{abe} f^{cde} (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma})]$$



Para las reglas de Feynman mencionadas, y a lo largo de todo este trabajo, consideramos la métrica *mostly minus*: $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

La adición del término de masa en el modelo de Curci-Ferrari permite recrear algunos resultados de las simulaciones numéricas y otros métodos no perturbativos. En particular, se logran replicar los resultados de funciones de correlación a dos y tres puntos [24–32], y se obtienen ciertos observables como la temperatura de transición confinamiento/desconfinamiento [166–170] y la constante de decaimiento del pion [33]. Además, permite el uso de teoría de perturbaciones en toda escala de energía. Por esta razón, este trabajo utiliza este modelo para estudiar hadrones en el régimen de energía donde Faddeev-Popov no admite métodos perturbativos. En particular, lo utilizaremos para estudiar hadrones exóticos llamados tetraquarks. Adicionalmente, analizaremos la influencia de la masa del gluon en el espectro de masas de mesones pesados.

Capítulo 3

¿Cómo se modela un tetraquark?

La Cromodinámica Cuántica únicamente permite la existencia de estados ligados neutros en color. Los hadrones convencionales, los mesones y bariones, satisfacen esta condición, sin embargo, existen más posibilidades. La simetría de $SU(3)$ también admite configuraciones neutras más complejas, entre ellas los tetraquarks, compuestos por dos quarks y dos antiquarks, combinados de forma que sean neutros en color ($qq\bar{q}\bar{q}$). En los últimos años se han observado experimentalmente diversos estados compatibles con una estructura de cuatro quarks, aumentando el interés por el estudio de estos estados. Sin embargo, aún no existe un modelo teórico único y aceptado que describa de forma completa la estructura interna y la dinámica de los tetraquarks. En este trabajo adoptamos el modelo de diquarks para describir tetraquarks *fully-heavy* (compuestos por cuatro quarks pesados como charm o bottom), donde pensamos al tetraquark como un estado compuesto por un diquark y un antidiquark, ambos con carga de color, que interactúan mediante intercambio de gluones.

En este capítulo, detallamos el modelo de diquarks, incluyendo qué aproximaciones debemos realizar para utilizarlo. Estudiamos la estructura de color de los subsistemas, identificando las configuraciones atractivas a partir del cálculo de los factores de color. Además, introducimos la aproximación no relativista, adecuada para describir estados ligados de quarks pesados como los *fully-heavy* tetraquarks. En general, describimos las bases del formalismo teórico que seguiremos en los siguientes capítulos para estudiar el espectro de los tetraquarks.

3.1. El modelo de diquarks

El estudio de sistemas compuestos por cuatro cuerpos interactuando entre ellos resulta extremadamente difícil desde el punto de vista teórico. Por esta razón, para describir los tetraquarks es necesario utilizar un modelo que permita reemplazar el problema original de interacciones entre cuatro cuerpos por un sistema efectivo con interacciones entre dos cuerpos, que son más sencillas de resolver. En la literatura existen dos modelos predominantes para los tetraquarks: el modelo de diquarks [57–62] y el modelo molecular [50–56, 171]. En esta tesis abarcaremos el primero.

El modelo molecular describe a los tetraquarks como sistemas compuestos por dos mesones, cada uno formado por un quark y un antiquark, que interactúan mediante una fuerza residual de QCD, análoga a la interacción entre protones y neutrones. Esta interacción es mediada por el intercambio de piones o mesones livianos, lo que la hace más débil y de mayor alcance que la interacción entre quarks. Como resultado, los estados moleculares suelen ser inestables y no compactos. En este enfoque, los grados de libertad relevantes no son quarks y gluones, sino mesones que se consideran como partículas puntuales con números cuánticos bien definidos. El modelo ha tenido éxito describiendo ciertos estados exóticos detectados experimentalmente, entre ellos el hadrón $X(3872)$, cuya masa y

ancho de decaimiento se logra explicar como un estado molecular [172, 173], así como los estados cargados $Z_b(10610)$ y $Z_b(10650)$ [174, 175].

En contraste, el modelo de diquarks plantea que la interacción atractiva entre dos quarks produce un estado compacto llamado diquark (qq), mientras que la interacción entre antiquarks produce el correspondiente antidiquark ($\bar{q}\bar{q}$). De esta forma, la estructura del tetraquark se reduce a un sistema de dos cuerpos, diquark y antidiquark, cada uno fuertemente ligado. Luego, como estos subsistemas son estados con carga de color, también interactúan mediante el intercambio de gluones. El resultado es que los tetraquarks en este modelo son compactos, con radios comparables a los de los mesones. El modelo de diquarks también reproduce exitosamente una variedad de resultados experimentales de hadrones exóticos, incluyendo el estado $X(3872)$ que también se logra explicar como un estado diquark-antidiquark [176], y otros hadrones como, por ejemplo, $Y(4260)$, $Y(4360)$, $Z(4248)$, $Z(4430)$ y $Y(4660)$ [177–179].

A diferencia del modelo molecular, los grados de libertad relevantes en este modelo son los gluones y los quarks, que se describen mediante un esquema efectivo en términos de quarks constituyentes [180, 181]. En esta descripción, los grados de libertad del modelo aparecen “vestidos” por una nube de quarks y gluones virtuales, lo que permite tener en cuenta los efectos no perturbativos que dan lugar a la generación de masa. Este tratamiento es análogo al que se utiliza habitualmente en el estudio de mesones y bariones. Como consecuencia, los constituyentes adquieren una masa mayor a las conocidas mediante experimentos indirectos.

La inspiración detrás de ambos modelos viene de la estructura de color permitida por la simetría $SU(3)$. En el caso del modelo de diquarks, la simetría permite que dos quarks formen un estado con anticolor y dos antiquarks formen un estado con color, tal que, cuando interactúan para formar un estado ligado, la combinación del anticolor del diquark y el color del antidiquark da lugar a un estado neutro. De esta forma, la factorización del tetraquark en un diquark y un antidiquark respeta el confinamiento, permitiendo que el estado ligado final sea observable.

En este modelo, como veremos en la Sección 3.3, la interacción entre quarks puede dar lugar a dos configuraciones de color posibles, llamadas antitriplete de color $\mathbf{\bar{3}}$ y sexteto de color $\mathbf{6}$ (o antitriplete de anticolor y sexteto de anticolor para el caso del antidiquark), siendo sólo el primer caso una interacción atractiva. Por lo tanto, para este trabajo, solamente consideramos los diquarks en la configuración $\mathbf{\bar{3}}$ de anticolor y los antiquarks en la configuración $\mathbf{3}$ de color, ignorando las configuraciones repulsivas cuyo efecto es despreciable en comparación [182–184]. Es importante recordar que como los diquarks y antidiquarks poseen carga de color, debido al confinamiento, no pueden existir como partículas libres, sino únicamente como subsistemas dentro del tetraquark.

El uso de diquarks para modelar hadrones no se originó con los tetraquarks, sino que se ha utilizado para la descripción de bariones [185–187]. Tomando estos casos previos como motivación, consideramos que los diquarks y antidiquarks que conforman al tetraquark se encuentran en su estado fundamental. De esta forma, las excitaciones del tetraquark se obtienen como excitaciones del sistema ligado diquark-antidiquark y no como excitaciones internas de los diquarks. Otra aproximación que utilizamos es considerar a los diquarks y antidiquarks como objetos puntuales dentro del tetraquark, despreciando sus radios.

Un aspecto importante a tener en cuenta al trabajar con diquarks es el principio de exclusión de Pauli, ya que este impone restricciones sobre las combinaciones de *spin* permitidas. Para quarks de distintos sabores, se pueden formar diquarks escalares ($s = 0$) o axiales ($s = 1$), mientras que, para quarks de igual sabor, sólo se permiten diquarks axiales ($s = 1$), como veremos en la Sección 6.1.

Una vez definida la estructura de diquark y antidiquark, el paso siguiente es modelar la interacción entre partículas con color. Para abordar este problema se han desarrollado diversos modelos efectivos inspirados en QCD. Entre los más utilizados se encuentran aquellos basados en potenciales que describen el intercambio de un gluon mediante un término tipo Coulomb, complementado por un término confinante, que puede ser lineal o armónico [188–190]. Otro grupo de modelos incorpora interacciones cromomagnéticas, que se enfocan en las interacciones debido al *spin* [182, 191, 192]. Existen además enfoques híbridos que combinan distintas descripciones en un único esquema efectivo. En este trabajo estudiamos la interacción entre partículas con color en el límite no relativista, utilizando un modelo de QCD que incluye gluones masivos. La adición de este término de masa nos permite deducir el potencial de interacción en el límite no relativista de forma analítica utilizando teoría de perturbaciones, como se detallará en la Sección 3.2.

Particularmente, nos centramos en el estudio de los *fully-heavy* tetraquarks, es decir, tetraquarks compuestos exclusivamente por quarks pesados (charm o bottom), para los cuales el régimen no relativista es una mejor aproximación debido a las grandes masas de sus constituyentes. Esta clase de tetraquarks parece ser mejor aproximada por el modelo de diquarks, ya que en el modelo molecular no podrían intercambiar mesones livianos [193, 194]. A partir de la estructura de color del sistema se determina cómo factorizaremos el problema en esta tesis: primero estudiaremos el diquark (o, análogamente, el antidiquark) y luego construiremos el tetraquark como el estado ligado entre ambos.

3.2. Interacción de color

Una ventaja de trabajar en la representación de diquarks es que todos los subsistemas que conforman el tetraquark interactúan mediante el mismo mecanismo: el intercambio de gluones. En este esquema se consideran tres configuraciones de dos cuerpos: el sistema quark-quark, que da lugar al diquark; el sistema antiquark-antiquark, que da lugar al antidiquark, y el sistema diquark-antidiquark, que forma el tetraquark. Cada uno de ellos está compuesto por partículas con color, y por lo tanto, interactúan mediante el intercambio de gluones. De esta forma, el trabajo de modelar las interacciones es más sencillo, sólo debemos entender el intercambio de gluones en QCD, y luego podemos aplicarlo a los tres subsistemas.

Para esto, vamos a separar la interacción en dos partes: la primera parte, derivada del intercambio de un gluon masivo; y la segunda, en la cual introducimos los efectos de confinamiento de forma fenomenológica en base a los resultados de las simulaciones numéricas de QCD. Este procedimiento es el estándar en la literatura, ya que no es posible aún entender el fenómeno de confinamiento desde primeros principios, y por lo tanto debemos basarnos en métodos alternativos para describirlo.

One gluon exchange

Comencemos el estudio del intercambio de gluones analizando la interacción entre un quark y un antiquark formando un estado neutro en color, y para eso, utilizaremos el modelo con gluones masivos presentado en el capítulo anterior. En teoría cuántica de campos, las interacciones entre partículas se describen mediante diagramas de Feynman, donde cada diagrama representa una expresión matemática asociada con la amplitud de la interacción. En el caso de la interacción entre un quark y un antiquark, el diagrama más sencillo es aquel en el que ambas partículas intercambian un único gluon, como se muestra en la Fig. (3.1). Sin embargo, también existen contribuciones de orden superior, como las representadas en la Fig. (3.2), donde intervienen múltiples gluones y con topologías más complejas. En principio, infinitos diagramas contribuyen a la interacción mediante intercambio de gluones.

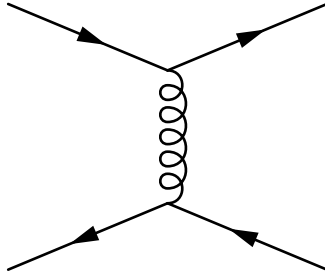


Figura 3.1: Diagrama de Feynman a primer orden de la interacción entre un quark y un antiquark. Las líneas externas representan el par quark-antiquark entrante y saliente, y el espiral representa el gluon que intercambian.

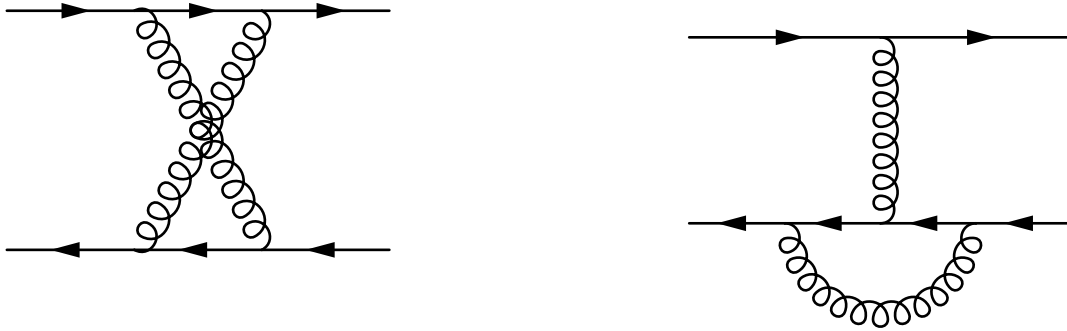


Figura 3.2: Diagramas de Feynman de mayor orden de la interacción entre un quark y un antiquark. Las líneas externas representan el par quark-antiquark entrante y saliente, y los espirales representan los gluones intercambiados.

El cálculo de la amplitud total de interacción entre dos partículas se realiza utilizando la ecuación de Bethe–Salpeter, que describe los estados ligados relativistas mediante una ecuación integral. De manera complementaria, las ecuaciones de Dyson–Schwinger determinan los propagadores y vértices del sistema. En conjunto, estas ecuaciones incluyen la contribución de los infinitos diagramas de Feynman. La resolución exacta de este sistema de ecuaciones es extremadamente compleja. Por esta razón, se introducen distintas aproximaciones que permiten identificar los términos dominantes de la interacción. Una de ellas es el esquema Rainbow–Ladder, en el cual se considera únicamente la interacción dada por el intercambio sucesivo de un gluon entre el quark y el antiquark, descartando correcciones más complejas. En este contexto, la contribución principal a la interacción es el intercambio de un único gluon, dando lugar a la aproximación de *one-gluon exchange* (OGE). Otra aproximación utilizada es la no relativista, adecuada para sistemas formados por quarks pesados ya que las velocidades relativas de los quarks son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. En esta aproximación, la ecuación de Bethe–Salpeter se reduce a una ecuación de Schrödinger [195].

El uso de ambas aproximaciones da lugar a un potencial asociado a la interacción OGE entre el quark y el antiquark, que será calculado en la Sección 4.1.2. Para esto, se realizará un desarrollo en potencias de p/m , donde el término dominante será el primer orden y al considerar términos del siguiente orden surgen correcciones dependientes del *spin*, como las interacciones *spin–spin*, *spin–órbita* y tensoriales. Estas contribuciones son responsables de la estructura fina e hiperfina del espectro hadrónico, de manera análoga a lo que ocurre en QED para el átomo de hidrógeno.

El procedimiento descrito hasta ahora nos permite estudiar la interacción de color entre quarks

y antiquarks de forma aproximada. El siguiente paso es extenderlo a la interacción de color entre diquarks, sin embargo, debido a que no son grados de libertad fundamentales de la teoría, deducir como interactúan a partir diagramas de Feynman es una tarea muy complicada. En su lugar, utilizamos otra aproximación: consideramos a los diquarks como objetos compactos, sin grados de libertad internos más allá del *spin*. Esta suposición es ampliamente utilizada en estudios de tetraquarks compactos, y nos permite aplicar la misma estructura de interacción que en el caso de quarks, cambiando solamente parámetros como las masas y la carga de color.

Confinamiento

El confinamiento es un fenómeno que aún no se comprende desde primeros principios. Si bien la teoría predice que la interacción fuerte se vuelve más intensa a grandes distancias, no existe una demostración analítica que derive el confinamiento directamente del lagrangiano de QCD. Por esta razón, en la literatura el confinamiento se aborda de manera fenomenológica, utilizando modelos efectivos que tienen en cuenta los resultados experimentales y las simulaciones numéricas.

Resultados de *lattice* QCD muestran que la energía del sistema quark–antiquark crece linealmente con la distancia. Esto se interpreta como la formación de un tubo de flujo de color, una región donde se concentra el campo de color [196, 197]. En este régimen, la energía del tubo es proporcional a su longitud, lo cual motiva un potencial efectivo de la forma:

$$V(r) = br,$$

con b , la tensión de la cuerda, un parámetro positivo. Este término asegura que los estados ligados puedan tener energías positivas y que no existan estados no confinados, ya que a medida que la separación aumenta, la energía crece indefinidamente.

En el capítulo siguiente derivaremos la expresión del potencial asociado al *one gluon exchange* e introduciremos manualmente un término confinante de la forma del potencial de la cuerda.

3.3. Estructura de color

Cuando modelamos la interacción entre partículas con color mediante el *one gluon exchange*, es necesario especificar cómo se combinan los colores de cada partícula para formar el sistema completo. Esta estructura de color determina tanto la intensidad como el signo de las interacciones mediadas por gluones, y se representa mediante el factor de color (f_s). Por esta razón, al estudiar la interacción entre dos subsistemas resulta fundamental analizar primero su estructura de color.

En esta sección nos centramos únicamente en los grados de libertad de color de las partículas, empezando por el caso de los quarks. Estos transforman según la representación fundamental del grupo $SU(3)$, conocida como triplete de color $\mathbf{3}$. Esto significa que transforman como vectores de tres dimensiones bajo la acción del grupo. En la representación fundamental, cada quark se escribe como una combinación lineal de los tres colores posibles: rojo, verde y azul, que se escriben como la base:

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De la misma forma, los antiquarks pertenecen a la representación conjugada $\bar{\mathbf{3}}$, llamada triplete de anticolor. En este caso, los antiquarks se describen mediante combinaciones lineales de los colores

conjugados \bar{r} , \bar{g} y \bar{b} .

Por otro lado, los gluones transforman en la representación adjunta de $SU(3)$, que es de dimensión ocho y se conoce como el octete $\mathbf{8}$. De manera informal suele decirse que, a diferencia de los quarks o antiquarks que tienen color, los gluones poseen una combinación de color y anticolor, aunque nunca son neutros. En la representación fundamental los gluones se escriben en la base de matrices de Gell-Mann:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Veamos ahora qué estructuras de color se pueden obtener mediante la interacción de estas partículas. Analizaremos los distintos casos: interacción quark-antiquark, interacción quark-quark e interacción antiquark-antiquark, que resulta ser análoga al caso anterior. En cada situación estudiaremos la interacción a orden dominante y, utilizando las reglas de Feynman, calcularemos el factor de color (f_c) asociado. Además, analizaremos si la interacción es atractiva o repulsiva en cada caso.

Para el estudio de la interacción entre dos partículas iguales (quark-quark y antiquark-antiquark) calcularemos los factores de color asociados a la interacción. Sin embargo, al interpretar estos resultados en términos de un potencial efectivo, es necesario tener en cuenta el argumento presentado en [198]. Donde, mediante una analogía con Quantum Electrodynamics (QED), se muestra que el potencial entre las partículas iguales está relacionado con el opuesto del factor de color. Por esta razón, los criterios que determinan si la interacción es atractiva o repulsiva se invierten en el caso de partículas iguales con respecto a la interacción quark-antiquark.

3.3.1. Quark-antiquark

Vemos cómo la estructura de color afecta al *scattering* quark-antiquark. En este caso, un quark (triplete de color) interactúa con un antiquark (triplete de anticolor), dando lugar a una estructura de color que se obtiene como la combinación de tres colores y tres anticolores. En términos de teoría de grupos, esta combinación se escribe de la siguiente forma:

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}.$$

Esto implica que la interacción entre un quark y un antiquark puede dar lugar a dos tipos de estados de color. El primero es un singlete de color, que corresponde al estado neutro asociado con la formación de un mesón observable. Su combinación de colores está dada por:

$$|1\rangle_1 = \frac{(r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})}{\sqrt{3}}.$$

Una observación importante es que el estado singlete, además de tener igual cantidad de color que

de anticolor, es simétrico bajo el intercambio de pares de color y anticolor. Ambas propiedades son necesarias para que el estado sea neutro en color.

Además del singlete, la interacción también puede dar lugar a un octete de color. Este octete está formado por ocho estados linealmente independientes que no son neutros en color y cuyas combinaciones pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}
 |1\rangle_8 &= \frac{(r\bar{b} + b\bar{r})}{\sqrt{2}}, & |5\rangle_8 &= \frac{-i(r\bar{g} - g\bar{r})}{\sqrt{2}}, \\
 |2\rangle_8 &= \frac{-i(r\bar{b} - b\bar{r})}{\sqrt{2}}, & |6\rangle_8 &= \frac{(b\bar{g} + g\bar{b})}{\sqrt{2}}, \\
 |3\rangle_8 &= \frac{(r\bar{r} - b\bar{b})}{\sqrt{2}}, & |7\rangle_8 &= \frac{-i(b\bar{g} - g\bar{b})}{\sqrt{2}}, \\
 |4\rangle_8 &= \frac{(r\bar{g} + g\bar{r})}{\sqrt{2}}, & |8\rangle_8 &= \frac{(r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g})}{\sqrt{6}}.
 \end{aligned}$$

Nos interesa estudiar la configuración singlete, ya que es la única que da lugar a observables. Consideremos entonces la amplitud de *scattering* del quark y antiquark a nivel árbol, aplicando las reglas de Feynman a los diagramas mostrados en la Fig. (3.3). El segundo diagrama contribuye únicamente en el caso de quark y antiquark del mismo sabor.

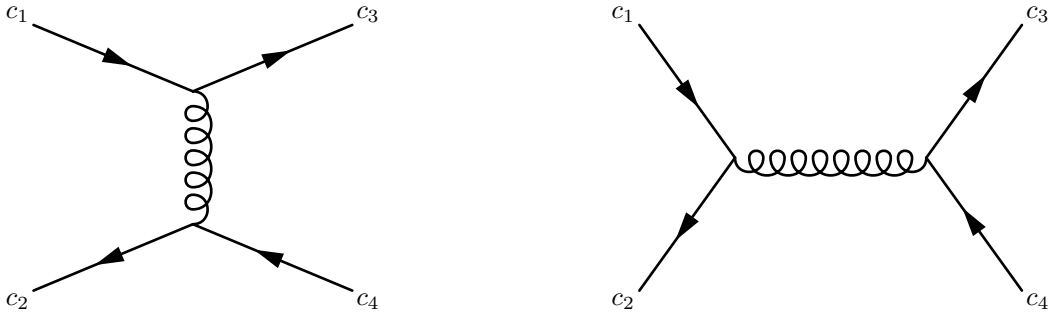


Figura 3.3: Diagramas de Feynman para el *scattering* quark-antiquark a nivel árbol, en el caso de quark y antiquark del mismo sabor.

Siguiendo las reglas de Feynman, el factor de color del primer diagrama se calcula como:

$$f_c = \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \left(c_3^{\dagger} \lambda^{\alpha} c_1 \right) \left(c_2^{\dagger} \lambda^{\alpha} c_4 \right), \quad (3.1)$$

donde c_1 y c_3 son los colores del quark entrante y saliente respectivamente, y c_2 y c_4 son los colores del antiquark entrante y saliente respectivamente.

Sustituyendo los estados de color en la Ec. (3.1) por singletes, se obtienen en total nueve combinaciones posibles de estados iniciales y finales sin color. Luego, sumando cada término sobre las distintas matrices de Gell-Mann y utilizando sus propiedades, se obtiene que el factor de color

asociado al primer diagrama es:

$$f_c = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\alpha} \lambda_{ij}^{\alpha} \lambda_{ji}^{\alpha} = \frac{1}{12} \text{Tr}(\lambda^{\alpha} \lambda^{\alpha}) = \frac{4}{3}.$$

Mientras que para el segundo diagrama, el factor de color se calcula como:

$$f_c = \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \left(c_2^{\dagger} \lambda^{\alpha} c_1 \right) \left(c_3^{\dagger} \lambda^{\alpha} c_4 \right), \quad (3.2)$$

y, en el caso del estado singlete, operando igual que como el diagrama anterior, el factor de color resulta nulo. Este resultado refleja el hecho de que un singlete de color no puede acoplarse a un gluon, que pertenece al octete de color.

Por lo tanto, el factor de color de la interacción quark-antiquark a orden dominante es:

$$f_1 = \frac{4}{3}, \quad (3.3)$$

donde el subíndice 1 refiere al estado singlete.

En el caso de *scattering* quark-antiquark, un factor de color positivo implica que la interacción es atractiva. Este resultado es fundamental para la formación de mesones.

3.3.2. Quark-quark

En la interacción entre dos quarks la estructura de color está dada por la combinación entre un triplete de color con otro triplete. En lenguaje de teoría de grupos:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6},$$

es decir, la interacción entre quarks da lugar a estados con color, puede ser un antitriplete de color o un sextete de color.

El antitriplete corresponde a combinaciones antisimétricas bajo el intercambio de dos quarks. Sus estados pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} |1\rangle_{\bar{3}} &= \frac{(rb - br)}{\sqrt{2}}, \\ |2\rangle_{\bar{3}} &= \frac{(bg - gb)}{\sqrt{2}}, \\ |3\rangle_{\bar{3}} &= \frac{(gr - rg)}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Por otro lado, el sextete corresponde a combinaciones simétricas en los colores. Los estados que forman esta representación están dados por:

$$\begin{aligned} |1\rangle_6 &= rr, & |4\rangle_6 &= \frac{(rb + br)}{\sqrt{2}}, \\ |2\rangle_6 &= bb, & |5\rangle_6 &= \frac{(bg + gb)}{\sqrt{2}}, \\ |3\rangle_6 &= gg, & |6\rangle_6 &= \frac{(gr + rg)}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Estudiamos ahora el efecto de ambos estados en el *scattering* quark-quark. Los diagramas de Feynman a nivel árbol se muestran en la Fig. (3.4), donde el segundo diagrama sólo existe en el caso de quarks del mismo sabor.

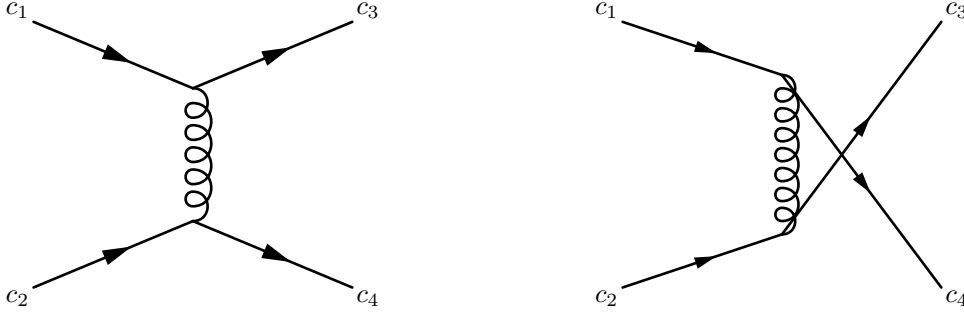


Figura 3.4: Diagramas de Feynman para el *scattering* quark-quark a nivel árbol, en el caso de quarks del mismo sabor.

En el primer diagrama, el factor de color se calcula como:

$$f_c = \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \left(c_3^{\dagger} \lambda^{\alpha} c_1 \right) \left(c_4^{\dagger} \lambda^{\alpha} c_2 \right), \quad (3.4)$$

con c_1 y c_2 los colores de los quarks entrantes, y c_3 y c_4 los colores de los quarks salientes. De manera análoga, el factor de color del segundo diagrama es:

$$f_c = \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \left(c_3^{\dagger} \lambda^{\alpha} c_2 \right) \left(c_4^{\dagger} \lambda^{\alpha} c_1 \right). \quad (3.5)$$

Antitriplete

Sustituimos los vectores de color en ambos diagramas por un estado del antitriplete. Resolvemos, por ejemplo, usando la configuración $|1\rangle_{\bar{3}}$. Para el primer diagrama, la ecuación (3.4) queda de la forma:

$$f_c = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha} (\lambda_{11}^{\alpha} \lambda_{22}^{\alpha} - \lambda_{21}^{\alpha} \lambda_{12}^{\alpha} - \lambda_{12}^{\alpha} \lambda_{21}^{\alpha} + \lambda_{22}^{\alpha} \lambda_{11}^{\alpha}) = -\frac{2}{3}.$$

Mientras que, en la ecuación (3.5) se obtiene un factor de color:

$$f_c = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha} (\lambda_{12}^{\alpha} \lambda_{21}^{\alpha} - \lambda_{22}^{\alpha} \lambda_{11}^{\alpha} - \lambda_{11}^{\alpha} \lambda_{22}^{\alpha} + \lambda_{21}^{\alpha} \lambda_{12}^{\alpha}) = \frac{2}{3}.$$

Se puede probar que el resultado es el mismo para cualquier estado del antitriplete.

Esta diferencia de signo es irrelevante para el cálculo final, ya que al tratarse de fermiones idénticos es necesario antisimetrizar la amplitud de *scattering* ante el intercambio de partículas. Esto implica que las amplitudes de ambos diagramas se restan, dando lugar a un factor de color global

$$f_{\bar{3}} = -\frac{2}{3}, \quad (3.6)$$

donde el subíndice $\bar{3}$ refiere al antitriplete.

En el caso de la interacción entre dos quarks, un factor de color negativo indica que la interacción es atractiva. Esto justifica que el antitriplete sea la configuración relevante en el modelo de diquarks.

Sextete

Repitiendo el procedimiento para el sextete, y utilizando como ejemplo el estado $|1\rangle_6$, los factores de color de las ecuaciones (3.4) y (3.5) dan el mismo resultado:

$$f_6 = \frac{1}{3}. \quad (3.7)$$

Como el factor de color es positivo, la interacción entre estados del sextete es repulsiva.

3.3.3. Antiquark-antiquark

La interacción antiquark-antiquark es completamente análoga al caso quark-quark. La estructura de color está dada por la combinación de dos tripletes de anticolor:

$$\bar{\mathbf{3}} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{6}},$$

dando lugar a dos posibles estados: el antitriplete de anticolor y el sextete de anticolor. Análogo al caso anterior.

Intercambiando los colores por anticolors en las expresiones del caso quark-quark, obtenemos los mismos factores de color:

$$f_3 = -\frac{2}{3}, \quad (3.8)$$

$$f_{\bar{6}} = \frac{1}{3}, \quad (3.9)$$

siendo nuevamente el antitriplete la configuración atractiva y el sextete la repulsiva.

3.3.4. Diquarks y tetraquarks

A partir de los factores de color obtenidos, podemos entender la formación de distintos hadrones. Los mesones se forman por un quark y un antiquark combinados en un singlete de color, con un factor de color $4/3$. Por otro lado, los diquarks están compuestos por dos quarks, y por lo tanto pueden existir en dos configuraciones, antitriplete y sextete. El antitriplete es la configuración favorable, ya que es un estado atractivo, con factor de color $2/3$. Los antidiquarks son análogos, y el estado atractivo tiene el mismo factor de color.

El tetraquark, modelado como un sistema compuesto por un diquark y un antidiquark en configuraciones atractivas de antitriplete, presenta la siguiente estructura de color:

$$(\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}) \otimes (\bar{\mathbf{3}} \otimes \bar{\mathbf{3}}) = \bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}.$$

Por lo tanto, la interacción entre diquark y antidiquark puede dar lugar a un singlete o a un octete de color. Nos centramos exclusivamente en la configuración singlete, que es la única observable. En este caso, la estructura de color es equivalente a la del sistema quark-antiquark, y el factor de color correspondiente es nuevamente $4/3$. Aunque podría considerarse también la interacción entre diquarks y antidiquarks en sextetes, se ha encontrado que la contribución de estos estados es despreciable [182–184].

3.4. Sistema de dos cuerpos en un potencial central no relativista

Una vez estudiada la estructura de color detrás del modelo de diquarks, analizamos ahora cómo utilizar este modelo, junto con la aproximación no relativista, para simplificar el estudio de los tetraquarks. En particular, consideramos la descripción del sistema de dos cuerpos formado por un diquark y un antidiquark, que interactúan mediante *one gluon exchange*. Dado que esta interacción depende únicamente del módulo de la distancia entre ambos subsistemas, es posible definir un cambio de variables que simplifica el problema. En esta sección, y a lo largo de toda la tesis, vamos a trabajar en unidades tales que $c = \hbar = 1$.

Consideremos un sistema de dos partículas de masas m_1 y m_2 , cada una con un operador posición \vec{R}_1 y \vec{R}_2 y momento \vec{P}_1 y \vec{P}_2 , respectivamente. Si sobre el sistema no actúa ninguna fuerza externa y la interacción entre las partículas viene de un potencial que sólo depende de las posiciones relativas de las partículas $V(\vec{R}_1 - \vec{R}_2)$, entonces, el sistema se puede simplificar definiendo nuevas variables:

$$\begin{aligned}\vec{R}_G &= \frac{m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2}{m_1 + m_2}, & \vec{P}_G &= \vec{P}_1 + \vec{P}_2, \\ \vec{R} &= \vec{R}_1 - \vec{R}_2, & \vec{P} &= \frac{m_2\vec{P}_1 - m_1\vec{P}_2}{m_1 + m_2},\end{aligned}$$

donde \vec{R}_G y \vec{P}_G están asociados con el movimiento del centro de masas del sistema, mientras que \vec{R} y \vec{P} determinan el movimiento relativo entre las partículas.

Si también definimos $M = m_1 + m_2$, la masa total del sistema, y $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, la masa reducida, el hamiltoniano del sistema se puede separar en dos términos:

$$H_G = \frac{\vec{P}_G^2}{2M}, \quad (3.10) \quad H_r = \frac{\vec{P}^2}{2\mu} + V(\vec{R}). \quad (3.11)$$

Entonces, la energía total del sistema está dada por:

$$E = E_G + E_r = M + E_r = m_1 + m_2 + E_r. \quad (3.12)$$

Una manipulación muy útil es escribir el hamiltoniano relativo de la ecuación (3.11) en términos del operador de momento angular:

$$H_r = -\frac{1}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{2\mu r^2} \vec{L}^2 + V(\vec{R}).$$

De este modo, el problema de dos cuerpos se reduce a dos problemas independientes de un sólo cuerpo: uno correspondiente al movimiento del centro de masas, que se resuelve de forma trivial, y otro asociado al movimiento relativo entre los subsistemas. El siguiente paso consiste en utilizar el hamiltoniano relativo para calcular el espectro de energías del sistema. En el caso de partículas relativistas este cálculo se realiza mediante la ecuación de Bethe-Salpeter, lo cual resulta un cálculo complejo. Sin embargo, tomando el límite no relativista, el problema se vuelve aún más simple.

El régimen no relativista es adecuado para describir sistemas en los cuales las velocidades involucradas son mucho menores que la velocidad de la luz. En particular, para estados ligados formados por dos quarks pesados, como el charm o el bottom, las masas de los quarks constituyentes son lo suficientemente grandes como para garantizar que las velocidades sean mucho menores que la

velocidad de la luz.

En mecánica cuántica no relativista, una partícula se describe mediante una función de onda cuya evolución está gobernada por la ecuación de Schrödinger:

$$H \psi_n(\vec{r}) = E_n \psi_n(\vec{r}),$$

donde estamos considerando un hamiltoniano que no depende explícitamente del tiempo, por lo que la ecuación de Schrödinger nos permite separar la parte temporal de la función de onda de la parte espacial. La dependencia temporal resulta trivial y no aporta información adicional sobre el sistema, por lo que a partir de ahora nos concentraremos en el estudio de la parte espacial.

Para un sistema de dos cuerpos sometido a un potencial central, la ecuación de Schrödinger se separa en una ecuación para el movimiento del centro de masas y otra para el movimiento relativo:

$$\frac{\vec{P}_G^2}{2M} \psi_n(\vec{r}_G) = E_G \psi_n(\vec{r}_G), \quad \left[-\frac{1}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{2\mu r^2} \vec{L}^2 + V(r) \right] \psi_n(\vec{r}) = E_n \psi_n(\vec{r}). \quad (3.13)$$

El hecho de que el potencial dependa únicamente de la distancia radial implica que es invariante bajo rotaciones alrededor del origen. Como consecuencia, el hamiltoniano conmuta con las tres componentes del operador de momento angular \vec{L} , y la función de onda puede escribirse como una autofunción tanto del operador de momento angular \vec{L}^2 de autovalor $l(l+1)$, como de la componente z L_z con autovalor m :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{L}^2 \psi_l = l(l+1) \psi_l, \\ \vec{L}_z \psi_m = m \psi_m. \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) Y_l^m(\theta, \phi).$$

De este modo, el problema se reduce a resolver una ecuación diferencial radial para el movimiento relativo de entre las partículas. Esta ecuación admite distintas soluciones para diferentes valores de los números cuánticos n , l y m , generando un espectro de estados, cada uno con diferente energía o momento angular.

$$\left[-\frac{1}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right] R_{n,l}(r) = E_{n,l} R_{n,l}(r). \quad (3.14)$$

A partir de las soluciones de la ecuación diferencial, es posible calcular los valores esperados de las velocidades de los quarks, con el objetivo de verificar la validez de la aproximación no relativista. En el referencial de centro de masas, se espera que el valor esperado del cuadrado de la velocidad del quark sea mucho menor que la velocidad de la luz:

$$\langle v_q^2 \rangle \sim \lambda_{QCD} c,$$

donde λ_{QCD} es el parámetro de desarrollo de QCD, y toma valores razonablemente pequeños. En unidades naturales, donde $c = 1$, la condición no relativista sobre el valor esperado del cuadrado de la velocidad del quark está dada por:

$$\langle v_q^2 \rangle < 0.3.$$

Veamos cómo se calcula este valor esperado a partir de los datos del sistema reducido (etiquetado con subíndice μ), que tiene en cuenta únicamente el movimiento relativo de los quarks:

$$\left. \begin{array}{l} p_q = p_\mu, \\ v_q = \frac{p_\mu}{m_q} = \frac{\mu v_\mu}{m_q}. \end{array} \right\} \quad \langle v_q^2 \rangle = \frac{\mu^2}{m_q^2} \langle v_\mu^2 \rangle = \frac{2\mu}{m_q^2} \langle K_\mu \rangle = \frac{2\mu}{m_q^2} \langle E_{n,l} - V(r) \rangle,$$

donde $K_\mu = \frac{\mu v^2}{2}$ es la energía cinética del sistema reducido, que podemos hallar a partir de la energía del centro de masas y el potencial de interacción.

En este capítulo se establecieron las bases teóricas para modelar los tetraquarks dentro del marco del modelo de diquarks. En primer lugar, se discutieron las motivaciones para emplear esta descripción en el caso de tetraquarks *fully-heavy*, así como las aproximaciones necesarias para reducir el problema original de cuatro cuerpos a un sistema efectivo de dos cuerpos. A continuación, se analizó la interacción de color entre quarks, antiquarks, diquarks y antidiquarks, identificando las configuraciones atractivas a partir del cálculo de los factores de color asociados al intercambio de gluones. En base a esto, se introdujo la descripción de la interacción fuerte mediante el esquema de *one-gluon exchange*, adicionando un término confinante de origen fenomenológico. Finalmente, se planteó el problema del tetraquark como un sistema no relativista de dos cuerpos en un potencial central, lo que permite abordar el estudio del espectro mediante ecuaciones de tipo Schrödinger. Este marco será utilizado en los capítulos siguientes para calcular las propiedades espectrales de los hadrones estudiados en esta tesis.

Capítulo 4

Metodología

En este capítulo derivamos la expresión del hamiltoniano del sistema hasta segundo orden en el desarrollo no relativista. A continuación, vemos cómo resolver la ecuación de Schrödinger con los términos de menor orden del hamiltoniano, y cómo tratar los términos del orden siguiente como correcciones a la energía usando teoría de perturbaciones.

4.1. Potencial de interacción del one gluon exchange

En el capítulo anterior analizamos cómo la interacción entre partículas con color se puede aproximar a orden dominante como el *one gluon exchange*, en el cual, como hace referencia el nombre, las partículas intercambian un único gluon. En esta sección, calculamos el potencial asociado con esta interacción. Primero, deducimos la expresión para el caso del *one gluon exchange* entre un quark y un antiquark, y luego lo generalizamos al caso de la interacción entre cualquier partícula con color.

El primer paso para deducir el potencial es calcular la amplitud del *scattering* quark-antiquark a orden dominante. Luego, utilizamos la aproximación no relativista, en la cual consideramos que el momento de los quarks es pequeño en comparación con su masa, obteniendo una expresión hasta segundo orden dicho desarrollo. El segundo paso es utilizar la aproximación de Born, mediante la cual a partir de la amplitud de *scattering* calculada, se logra obtener el potencial aproximado asociado a la interacción. Una vez hallado el potencial, construiremos el hamiltoniano del sistema.

4.1.1. Scattering quark-antiquark

La amplitud de *scattering* quark-antiquark se representa de forma gráfica mediante diagramas de Feynman. Cada diagrama tiene una expresión matemática asociada que se obtiene siguiendo las reglas de Feynman que describimos en el Cap. 2. En esta sección, nos enfocamos en el estudio de la interacción entre un quark y un antiquark de distintos sabores, y por lo tanto, con masas diferentes, donde llamamos m_1 a la masa del quark y m_2 a la masa del antiquark. Para este caso, el único diagrama de Feynman que contribuye es el representado en la Fig. (4.1) y siguiendo las reglas de Feynman se obtiene la amplitud en la ecuación (4.1):

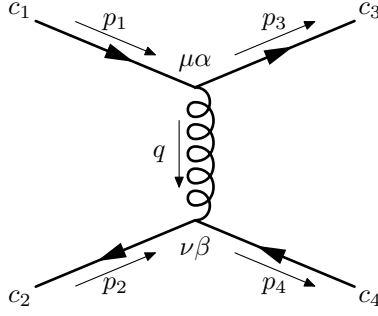


Figura 4.1: Diagrama de Feynman para el *scattering* quark-antiquark a nivel árbol.

$$i\mathcal{M} = \left[\bar{u}^{s_3}(p_3)c_3^\dagger (ig\gamma^\mu t^a) u^{s_1}(p_1)c_1 \right] \frac{-i\delta^{ab}}{q^2 - m_g^2 + i\varepsilon} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \left[\bar{v}^{s_2}(p_2)c_2^\dagger (ig\gamma^\nu t^b) v^{s_4}(p_4)c_4 \right], \quad (4.1)$$

con $q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$.

El factor de color f_c , escrito en función de las matrices de Gell-Mann, queda:

$$f_c = \frac{1}{4} c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1 c_2^\dagger \lambda^\alpha c_4.$$

En la Sección 3.3 se calcularon distintos valores de este factor. En particular, para el caso en el que los estados inicial y final están en la configuración singlete de color, el factor de color toma el valor $4/3$.

Para los espinores usamos las siguientes expresiones, que son soluciones de la ecuación de Dirac en el límite no relativista:

$$\begin{aligned} \bar{u}^s(p) &= \sqrt{2m} \left(w_s^\dagger \left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{8m^2} \right), -w_s^\dagger \frac{\vec{\sigma}_s \cdot \vec{p}}{2m} \right), & u^s(p) &= \sqrt{2m} \left(\left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{8m^2} \right) w_s \right. \\ & & & \left. \frac{\vec{\sigma}_s \cdot \vec{p}}{2m} w_s \right), \\ \bar{v}^s(p) &= \sqrt{2m} \left(w_s^\dagger \frac{\vec{\sigma}_s \cdot \vec{p}}{2m}, -w_s^\dagger \left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{8m^2} \right) \right), & v^s(p) &= \sqrt{2m} \left(\frac{\vec{\sigma}_s \cdot \vec{p}}{2m} w_s \right. \\ & & & \left. \left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{8m^2} \right) w_s \right), \end{aligned}$$

con m la masa del quark o del antiquark, según corresponda, $\vec{\sigma}$ las matrices de Pauli y w_s un vector de dos componentes asociado al *spin*. Estas expresiones se derivan en el Apéndice D.

Como queremos estudiar el régimen no relativista, vamos a considerar que la norma del vector momento de los quarks es pequeño en comparación con su masa:

$$|\vec{p}| \sim m\lambda_{\text{QCD}},$$

donde λ_{QCD} corresponde al parámetro de desarrollo de la teoría, que toma valores pequeños, permitiéndonos hacer un desarrollo del potencial en el límite no relativista.

Empezamos por aproximar el propagador del gluon, para esto utilizamos:

$$\begin{aligned} p^0 &= \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} \sim m + mO(\lambda_{\text{QCD}}^2), \\ |\vec{q}| &= |\vec{p}_1 - \vec{p}_3| \sim m\lambda_{\text{QCD}}, \\ q^0 &= p_1^0 - p_3^0 \sim m - m + mO(\lambda_{\text{QCD}}^2) \sim mO(\lambda_{\text{QCD}}^2), \\ q^2 &= (q^0)^2 - |\vec{q}|^2 \sim -|\vec{q}|^2 + m^2O(\lambda_{\text{QCD}}^4). \end{aligned}$$

Entonces, la componente temporal del propagador queda:

$$\frac{i}{q^2 - m_g^2 + i\varepsilon} \left(\eta_{00} - \frac{(q_0)^2}{q^2} \right) = \frac{-i\eta_{00}}{|\vec{q}|^2 + m_g^2 - i\varepsilon} \left(1 + \frac{q_0^2}{|\vec{q}|^2} + \frac{q_0^2}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} \right) + O(\lambda_{\text{QCD}}^3),$$

donde estamos considerando que $m_g \sim m\lambda_{\text{QCD}}$, con m la masa de los quarks considerados. Esta condición se satisface para quarks pesados como el charm y bottom.

Y las componentes espaciales del propagador:

$$\frac{i}{q^2 - m_g^2 + i\varepsilon} \left(\eta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right) = \frac{-i}{|\vec{q}|^2 + m_g^2 - i\varepsilon} \left(\eta_{ij} + \frac{q_i q_j}{|\vec{q}|^2} \right) + O(\lambda_{\text{QCD}}^3).$$

Por otro lado, los términos del propagador con un índice espacial y un índice temporal son nulos, ya que la métrica es diagonal y los términos proporcionales a q_0 terminan siendo despreciables como se explica en [199].

De igual forma, debemos aproximar los factores que incluyen espinores, manteniendo los términos hasta segundo orden en λ_{QCD} . Para esto se deben utilizar propiedades de las matrices de Pauli, así como la conservación del momento para escribir todo en función de \vec{p}_1 , \vec{p}_2 y \vec{q} . Obtenemos:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_3)\gamma^0 u(p_1) &= w_3^\dagger \left[2m_1 - \frac{|\vec{q}|^2}{4m_1} - i \frac{(\vec{q} \times \vec{p}_1) \cdot \vec{\sigma}_1}{2m_1} \right] w_1 + O(\lambda_{\text{QCD}}^3), \\ \bar{u}(p_3)\vec{\gamma} u(p_1) &= w_3^\dagger [-i\vec{\sigma}_1 \times \vec{q} - \vec{q} + 2\vec{p}_1] w_1 + O(\lambda_{\text{QCD}}^3), \\ \bar{v}(p_2)\gamma^0 v(p_4) &= w_2^\dagger \left[2m_2 - \frac{|\vec{q}|^2}{4m_2} + i \frac{(\vec{p}_2 \times \vec{q}) \cdot \vec{\sigma}_2}{2m_2} \right] w_4 + O(\lambda_{\text{QCD}}^3), \\ \bar{v}(p_2)\vec{\gamma} v(p_4) &= w_2^\dagger [-i\vec{\sigma}_2 \times \vec{q} + \vec{q} + 2\vec{p}_2] w_4 + O(\lambda_{\text{QCD}}^3), \end{aligned}$$

con m_1 y m_2 las masas del quark y antiquark, respectivamente.

Juntando todo, la parte temporal de la amplitud queda:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{00} &= g^2 f_c \left[\bar{u}(p_3)\gamma^0 u(p_1) \right] \left(\frac{-i\eta_{00}}{|\vec{q}|^2 + m_g^2 - i\varepsilon} \right) \left[\bar{v}(p_2)\gamma^0 v(p_4) \right] \\ &\approx f_c g^2 w_2^\dagger w_3^\dagger \left[4m_1 m_2 - \frac{(m_1^2 + m_2^2) |\vec{q}|^2}{2m_1 m_2} - \frac{im_2 (\vec{q} \times \vec{p}_1) \cdot \vec{\sigma}_1}{m_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{im_1 (\vec{p}_2 \times \vec{q}) \cdot \vec{\sigma}_2}{m_2} \right] w_1 w_4 \left(\frac{-i}{|\vec{q}|^2 + m_g^2 - i\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Haciendo lo mismo para los términos espaciales, obtenemos:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{ij} &= g^2 f_c \left[\bar{u}(p_3)\gamma_i u(p_1) \right] \left(\frac{-i}{|\vec{q}|^2 + m_g^2 - i\varepsilon} \right) \left(-\delta_{ij} + \frac{q_i q_j}{|\vec{q}|^2} \right) \left[\bar{v}(p_2)\gamma_j v(p_4) \right] \\ &\approx g^2 f_c w_2^\dagger w_3^\dagger \left[|\vec{q}|^2 (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q}) (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q}) - 2i\vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{p}_2 \times \vec{q}) - 2i\vec{\sigma}_2 \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{q}) \right. \\ &\quad \left. - 4\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 + \frac{4}{|\vec{q}|^2} (\vec{p}_1 \cdot \vec{q}) (\vec{q} \cdot \vec{p}_2) \right] w_1 w_4 \left(\frac{-i}{|\vec{q}|^2 + m_g^2 - i\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, la amplitud de *scattering* hasta segundo orden es:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M} \approx & -ig^2 f_c w_2^\dagger w_3^\dagger \left[4m_1 m_2 - \frac{(m_1^2 + m_2^2) |\vec{q}|^2}{2m_1 m_2} + \frac{im_2 (\vec{p}_1 \times \vec{q}) \cdot \vec{\sigma}_1}{m_1} + \frac{im_1 (\vec{p}_2 \times \vec{q}) \cdot \vec{\sigma}_2}{m_2} \right. \\
& + |\vec{q}|^2 (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q}) (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q}) - 2i\vec{\sigma}_2 \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{q}) - 2i\vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{p}_2 \times \vec{q}) - 4\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \\
& \left. + \frac{4}{|\vec{q}|^2} (\vec{p}_1 \cdot \vec{q}) (\vec{q} \cdot \vec{p}_2) \right] w_1 w_4 \left(\frac{1}{|\vec{q}|^2 + m_g^2 - i\varepsilon} \right). \quad (4.2)
\end{aligned}$$

4.1.2. Aproximación de Born

Una vez calculada la amplitud del *scattering* quark-antiquark a orden dominante para quarks no relativistas, nos preguntamos cómo se conecta esta cantidad con el potencial de interacción que queremos calcular. La respuesta está en la teoría de *scattering* en mecánica cuántica, que introduce la aproximación de Born [200]. A primer orden, esta aproximación relaciona la amplitud de *scattering* con el potencial de interacción de la siguiente forma:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{-i}{4m_1 m_2} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} i\mathcal{M}. \quad (4.3)$$

Utilizando la aproximación de Born, hallamos el potencial del *one gluon exchange* como la transformada de Fourier de la amplitud de *scattering* calculada en la sección anterior. En este caso el factor multiplicativo es $1/4m_1 m_2$, donde m_1 y m_2 son las masas de los fermiones que están interactuando.

Sustituyendo la expresión de la amplitud de la Ec. (4.2) en la expresión para el potencial (4.3), debemos calcular transformadas de Fourier que se pueden clasificar en las siguientes formas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{1.} \quad & \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}}{|\vec{q}|^2 + m_g^2}. & \mathbf{4.} \quad & \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{q})(\vec{q} \cdot \vec{b})}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}}{|\vec{q}|^2}. \\
\mathbf{2.} \quad & \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}. & & \\
\mathbf{3.} \quad & \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{|\vec{q}|^2}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}. & \mathbf{5.} \quad & \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{q})(\vec{q} \cdot \vec{b})}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}.
\end{aligned}$$

Las transformadas de Fourier de la forma **1** se resuelven en coordenadas esféricas, donde q es el módulo del vector \vec{q} y θ es el ángulo entre \vec{q} y \vec{r} :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1.} \quad & \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} q^2 \sin \theta \, dq d\theta d\phi \frac{e^{iqr \cos \theta}}{q^2 + m_g^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 + m_g^2} \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} \\
& = \frac{1}{ir (2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty dq \frac{q}{q^2 + m_g^2} e^{iqr}.
\end{aligned}$$

Para resolver esta integral pasamos al plano complejo. Definimos el dominio de integración considerando un semicírculo en el semiplano superior. De esta forma, la integral en el contorno tiende a

cero cuando el semicírculo se lleva al infinito. Dentro de la región definida hay un polo en $q = im_g$, por lo que usando el teorema del residuo obtenemos:

$$\int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{e^{iqr}}{ir} \frac{q}{(q + im_g)(q - im_g)}, im_g \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-m_g r}}{r} \frac{im_g}{2im_g} = \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r}.$$

Este término se conoce como potencial de Yukawa, y es el potencial esperado para el intercambio de un gluon masivo cuando no se consideran correcciones relativistas. Los términos de forma **2** y **3** se pueden obtener a partir de este resultado, notando que corresponden a derivadas con respecto a r de la expresión **1**:

$$\begin{aligned} \mathbf{2.} \quad \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} &= -i \nabla \left(\int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} \right) = -i \nabla \left(\frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} \right) \\ &= i \left(m_g + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^2} \vec{r}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{3.} \quad \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{|\vec{q}|^2}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = -\nabla^2 \left(\int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} \right) = -\nabla^2 \left(\frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} \right) = -m_g^2 \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} + \delta^3(r).$$

Las transformadas de la forma **4**, se pueden escribir como casos particulares de las de forma **5** escribiendo el denominador como:

$$\frac{1}{|\vec{q}|^2 (|\vec{q}|^2 + m_g^2)} = \frac{1}{m_g^2 |\vec{q}|^2} - \frac{1}{m_g^2 (|\vec{q}|^2 + m_g^2)},$$

donde el segundo término queda exactamente de la forma **5** y el primero se puede calcular como el caso **5** tomando el límite de m_g tendiendo a cero.

Por último, las transformadas de la forma **5** se calculan utilizando la siguiente propiedad:

$$\int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{q})(\vec{q} \cdot \vec{b})}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = -(\vec{a} \cdot \nabla)(\vec{b} \cdot \nabla) \left(\frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} \right).$$

Sin embargo, la resolución de esta transformada de Fourier es más complicada y se encuentra en el Apéndice B. El resultado es:

$$\begin{aligned} \mathbf{5.} \quad \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{q})(\vec{q} \cdot \vec{b})}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} &= \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{3} \delta^3(r) + \left[\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{r^3} (m_g r + 1) \right. \\ &\quad \left. - 3 \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{b} \cdot \vec{r})}{r^5} \left(\frac{m_g^2 r^2}{3} + m_g r + 1 \right) \right] \frac{e^{-mr}}{4\pi}. \end{aligned}$$

Finalmente, el potencial de interacción debido al *one gluon exchange* en el referencial del centro

de masas es:

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) = & -\frac{g^2 f_c e^{-m_g r}}{4\pi r} - \frac{g^2 f_c |\vec{p}|^2}{m_1 m_2 m_g^2} (m_g^2 r^2 + m_g r + 1 - e^{m_g r}) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^3} + \frac{g^2 f_c \delta^3(r)}{8} \left(\frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_1^2} \right) \\
& - \frac{g^2 f_c m_g^2 (m_1^2 + m_2^2)}{8 m_1^2 m_2^2} \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} + \frac{3 g^2 f_c (\vec{p} \cdot \vec{r})^2}{m_1 m_2 m_g^2} \left(\frac{m_g^2 r^2}{3} + m_g r + 1 - e^{-m_g r} \right) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^5} \\
& + \frac{2 g^2 f_c \delta^3(r)}{3 m_1 m_2} (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) - \frac{2 g^2 f_c m_g^2}{3 m_1 m_2} (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} \\
& - \frac{g^2 f_c (m_g r + 1)}{2 m_1 m_2} \left[\frac{2 m_1 + m_2}{m_1} (\vec{L} \cdot \vec{S}_1) + \frac{m_1 + 2 m_2}{m_2} (\vec{L} \cdot \vec{S}_2) \right] \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^3} \\
& - \frac{g^2 f_c}{m_1 m_2} \left(\frac{m_g^2 r^2}{3} + m_g r + 1 \right) \left[\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - \frac{3 (\vec{S}_1 \cdot \vec{r}) (\vec{S}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} \right] \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^3},
\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde usamos las definiciones de momento angular: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, y de *spin*: $\vec{S}_1 = \frac{\vec{\sigma}_1}{2}$ para la partícula y $\vec{S}_2 = -\frac{\vec{\sigma}_2}{2}$ para la antipartícula.

Este potencial es similar al obtenido en [201], donde también se trabaja con una masa del gluon. En particular, obtenemos los mismos resultados para los términos dependientes del *spin*, difiriendo únicamente en los términos cinéticos (dependientes del momento). Si consideramos el límite en el que la masa del gluon tiende a cero, se recuperan los términos dependientes del *spin* hallados en [202].

El potencial obtenido fue calculado para la interacción entre un quark y un antiquark, sin embargo se puede extender para cualquier partícula de color interactuando mediante *one gluon exchange*. En particular, en el Apéndice C se deriva el potencial para la interacción entre dos quarks, obteniendo la misma expresión que la ecuación (4.4).

4.2. Hamiltoniano del sistema

Finalmente, podemos escribir una aproximación al hamiltoniano de interacción entre dos partículas con color en el régimen no relativista. En base a la discusión de la Sección 3.2, dicha interacción se compone de dos partes: la primera, calculada en la sección anterior, dada por el intercambio de un gluon; y la segunda, agregada de forma fenomenológica, consiste en un término de tensión de la cuerda, que corresponde a un potencial que crece linealmente con la distancia. Juntando ambos resultados e introduciendo una corrección relativista a la energía cinética, obtenemos el siguiente hamiltoniano en el centro de masas:

$$\begin{aligned}
H = & \frac{|\vec{p}|^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - \frac{g^2 f_c e^{-m_g r}}{4\pi r} + br - \frac{|\vec{p}|^4}{8} \left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right) + \frac{g^2 f_c \delta^3(r)}{8} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \\
& - \frac{g^2 f_c |\vec{p}|^2}{m_1 m_2 m_g^2} (m_g^2 r^2 + m_g r + 1 - e^{-m_g r}) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^3} - \frac{g^2 f_c m_g^2 (m_1^2 + m_2^2) e^{-m_g r}}{8 m_1^2 m_2^2} \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} \\
& + \frac{3g^2 f_c (\vec{p} \cdot \vec{r})^2}{m_1 m_2 m_g^2} \left(\frac{m_g^2 r^2}{3} + m_g r + 1 - e^{-m_g r} \right) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^5} \\
& + \frac{2g^2 f_c \delta^3(r)}{3 m_1 m_2} (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) - \frac{2g^2 f_c m_g^2}{3 m_1 m_2} (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} \\
& - \frac{g^2 f_c (m_g r + 1)}{2 m_1 m_2} \left[\frac{2m_1 + m_2}{m_1} (\vec{L} \cdot \vec{S}_1) + \frac{m_1 + 2m_2}{m_2} (\vec{L} \cdot \vec{S}_2) \right] \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^3} \\
& - \frac{g^2 f_c}{m_1 m_2} \left(\frac{m_g^2 r^2}{3} + m_g r + 1 \right) \left[\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - \frac{3 (\vec{S}_1 \cdot \vec{r}) (\vec{S}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} \right] \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^3}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Utilizaremos este hamiltoniano para calcular el espectro de masas del sistema reducido definido en la Sección 3.4, para el cual la función de onda y los niveles de energía se hallaban resolviendo la ecuación de Schrödinger. Para esto, dividimos el hamiltoniano en dos partes: $H = H_0 + H_1$ representadas en las ecuaciones (4.6) y (4.7) respectivamente. Los primeros tres términos del hamiltoniano: la energía cinética, la interacción de tipo Yukawa y el potencial de la cuerda, constituyen H_0 , y se utilizarán como potencial de interacción en la ecuación de Schrödinger. Mientras que, los términos de mayor orden pertenecen a H_1 , y se considerarán como perturbaciones al potencial que darán lugar a correcciones a los niveles de energía.

$$H_0 = \frac{|\vec{p}|^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - \frac{g^2 f_c e^{-m_g r}}{4\pi r} + br. \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
H_1 = & - \frac{|\vec{p}|^4}{8} \left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right) - \frac{g^2 f_c |\vec{p}|^2}{m_1 m_2 m_g^2} (m_g^2 r^2 + m_g r + 1 - e^{-m_g r}) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^3} + \frac{g^2 f_c \delta^3(r)}{8} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \\
& - \frac{g^2 f_c m_g^2 (m_1^2 + m_2^2) e^{-m_g r}}{8 m_1 m_2} \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} + \frac{3g^2 f_c (\vec{p} \cdot \vec{r})^2}{m_1 m_2 m_g^2} \left(\frac{m_g^2 r^2}{3} + m_g r + 1 - e^{-m_g r} \right) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^5} \\
& + \frac{2g^2 f_c \delta^3(r)}{3 m_1 m_2} (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) - \frac{2g^2 f_c m_g^2}{3 m_1 m_2} (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} \\
& - \frac{3g^2 f_c (m_g r + 1) e^{-m_g r}}{2 m_1 m_2} \left[\frac{2m_1 + m_2}{m_1} (\vec{L} \cdot \vec{S}_1) + \frac{m_1 + 2m_2}{m_2} (\vec{L} \cdot \vec{S}_2) \right] \\
& - \frac{g^2 f_c}{m_1 m_2} \left(\frac{m_g^2 r^2}{3} + m_g r + 1 \right) \left[\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - \frac{3 (\vec{S}_1 \cdot \vec{r}) (\vec{S}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} \right] \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^3}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Dónde los términos de mayor orden correspondientes a H_1 son el análogo en QCD de las correcciones finas e hiperfinas de QED. Algunos de estos son muy conocidos en la literatura, como la interacción *spin-spin* $(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)$, la interacción *spin-órbita* $(\vec{L} \cdot \vec{S})$ y la interacción tensorial $(\vec{S}_1 \cdot \vec{r}) (\vec{S}_2 \cdot \vec{r})$.

El hamiltoniano obtenido se utilizará para describir tres sistemas: mesones, diquarks y tetraquarks. En cada caso, las características de las dos partículas que componen cada sistema son

distintas, lo cual se refleja en los parámetros del potencial, como el factor de color, las masas y el *spin*. En la Tabla (4.1) se muestran los valores de dichos parámetros en el caso de mesones, diquarks y tetraquarks. En el resto del capítulo describiremos como trabajar con el hamiltoniano de forma genérica, luego en cada caso se sustituirán los parámetros correspondientes.

Sistema	Estado	Configuración de color	Factor de color	Masas	<i>Spin</i>
Mesón	$q\bar{q}$	singlete	$4/3$	m_q	$1/2$
Diquark	qq	antitriplete	$2/3$	m_q	$1/2$
Tetraquark	$qq\bar{q}\bar{q}$	singlete	$4/3$	m_{qq}	1

Tabla 4.1: Parámetros del hamiltoniano utilizados para cada sistema estudiado: mesón, diquark y tetraquark.

4.3. Resolución numérica de la ecuación de Schrödinger

En base a las aproximaciones que hemos realizado hasta ahora, reducimos el problema de estudiar tetraquarks a la resolución de la ecuación de Schrödinger para el movimiento relativo de sistemas de dos partículas que a orden dominante interactúan mediante un potencial radial. Para estudiarlo a orden dominante utilizamos la ecuación de Schrödinger radial (3.14) con el potencial de interacción sin perturbar de la ecuación (4.6):

$$\left[-\frac{1}{2\mu r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} - \frac{g^2 f_c e^{-m_g r}}{4\pi r} + br \right] R_{n,l}(r) = E_{n,l} R_{n,l}(r).$$

Esta ecuación no admite soluciones analíticas cerradas debido a la forma del potencial que estamos considerando. Por este motivo, vamos a recurrir a métodos numéricos para obtener los valores de la energía y las funciones de onda. Para simplificar el tratamiento numérico y disminuir la cantidad de parámetros independientes del problema, escribimos la ecuación radial de forma adimensionada. Definimos $R_{n,l}(r) = \frac{1}{r} u_{n,l}(r)$ y hacemos el cambio de variable $\rho = \frac{r}{a_0}$ con $a_0 = \frac{4\pi}{g^2 f_c \mu}$:

$$\left[-\frac{1}{2\mu a_0^2} \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{l(l+1)}{2\mu a_0^2 \rho^2} - \frac{g^2 f_c e^{-m_g a_0 \rho}}{4\pi a_0 \rho} + ba_0 \rho - E_{n,l} \right] u_{n,l}(\rho) = 0.$$

También definimos $E_I = \frac{g^2 f_c^2 \mu}{32\pi^2}$ la energía de ionización, $\lambda = \frac{E_{n,l}}{E_I}$, $A = m_g a_0$ y $B = b \frac{a_0}{E_I}$. Sustituyendo, la ecuación radial de Schrödinger adimensionada toma la forma:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} e^{-A\rho} - B\rho + \lambda_{n,l} \right] u_{n,l}(\rho) = 0. \quad (4.8)$$

De esta forma, la ecuación ahora depende de dos coeficientes, A y B , que tienen en cuenta los valores de los distintos parámetros del modelo, los cuales podremos hallar mediante el ajuste del espectro de mesones pesados. Además, la ecuación depende de dos números cuánticos: el momento angular l y la excitación radial n . Los diferentes valores que estos tomen darán lugar a distintas energías, formando así el espectro de energías del sistema.

En este trabajo, la ecuación de Schrödinger se resuelve numéricamente. En un principio, implementamos una rutina propia para resolver la ecuación, basada en discretizar el espacio. Sin embargo, el procesamiento numérico resultó ser muy costoso, por lo que, luego de verificar que se obtienen los mismos resultados, se introdujo la función *NDEigensystem* de *Mathematica* para resolver la

ecuación, que está mejor optimizada. Dicha función calcula simultáneamente los autovalores y sus respectivas autofunciones dado un operador. En nuestro caso la utilizamos para hallar $\lambda_{n,l}$ y la función adimensionada $u_{n,l}$. *NDEigensystem* resuelve la ecuación utilizando técnicas de elementos finitos, discretizando un dominio finito de resolución. Esto es útil para el caso del cálculo de estados ligados, en los cuales la función de onda converge a cero en el infinito debido a que la probabilidad de encontrar los constituyentes del sistema a distancias arbitrariamente grandes debe ser nula. Por lo tanto, se puede considerar a la función de onda como acotada a un dominio finito.

Para resolver la ecuación diferencial se deben considerar condiciones de borde. La condición en infinito ya fue discutida pero veamos qué sucede en el origen. Cuando $r \rightarrow 0$ la solución de la ecuación se comporta como $R_{n,l}(r) \sim r^l$, esto da lugar a las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{cases} R_{n,l=0}(0) \neq 0 \\ R_{n,l \neq 0}(0) = 0. \end{cases}$$

En función de las variables adimensionadas, estas condiciones se verifican imponiendo $u_{n,l}(0) = 0$. Desde el punto de vista numérico, las condiciones de borde se obtienen implementando condiciones de Dirichlet.

Además, incorporamos al programa una verificación explícita del número cuántico radial asociado a cada solución encontrada. Para esto, utilizamos el teorema de nodos de Sturm-Liouville, el cual plantea que el número cuántico radial está determinado por el número de nodos de la función de onda radial:

$$\text{nodos} = n - 1.$$

En la implementación numérica, se realiza un conteo del número de raíces de cada función de onda obtenida utilizando *NDEigensystem* y se compara con la cantidad esperada según el número cuántico radial. En caso de fallar, se debe agrandar la región del espacio en la cual resolvemos la ecuación diferencial, por tratarse de un problema de convergencia.

Finalmente, conociendo $\lambda_{n,l}$ podemos determinar los niveles de energía del sistema mediante la relación: $E_{n,l} = \lambda_{n,l} E_I$. Además, debemos recordar de la Sección 3.4 que la energía total del sistema de dos cuerpos es la suma de $E_{n,l}$ y la energía del movimiento del centro de masas, como obtuvimos en la Ec. (3.12). Por lo que el espectro final se calcula a partir de:

$$E_{n,l} = M + \frac{g^2 f_c^2 \mu}{32\pi^2} \lambda_{n,l}, \quad (4.9)$$

con M la suma de las masas de las partículas que componen el sistema de dos cuerpos.

4.4. Correcciones a la energía

Hasta ahora, hemos calculado el espectro de estados ligados de dos partículas con color, considerando únicamente los términos dominantes del hamiltoniano, es decir el hamiltoniano de la Ec. (4.6). Esta aproximación permite obtener el espectro radial del sistema y las autofunciones asociadas mediante la ecuación de Schrödinger en el régimen no relativista. Sin embargo, considerando el siguiente orden del hamiltoniano de interacción, se obtienen términos adicionales que, si bien son subdominantes, introducen correcciones relevantes a los niveles de energía y a la estructura fina del espectro. A estos términos les llamamos H_1 y se escriben en la Ec. (4.7). El objetivo de esta sección es analizar el efecto de estos términos subdominantes sobre los estados previamente obtenidos, utilizando teoría de perturbaciones a primer orden.

Teoría de perturbaciones independiente del tiempo

Sea un hamiltoniano de la forma:

$$H = H_0 + H_1,$$

donde H_0 es el hamiltoniano no perturbado, correspondiente al potencial central ya estudiado, y H_1 representa un conjunto de términos de corrección cuya contribución es pequeña en comparación con H_0 .

De la misma forma, los autovalores del hamiltoniano se pueden expresar como un desarrollo en órdenes de la perturbación:

$$E = E_0 + E_1 + \dots$$

dónde E_0 corresponde al autovalor obtenido a partir del hamiltoniano no perturbado H_0 , determinado utilizando la ecuación de Schrödinger con el potencial central, y E_1 representa la corrección a primer orden, asociada al hamiltoniano perturbativo H_1 . Existen también correcciones de orden superior que en este caso no consideramos.

En teoría de perturbaciones independiente del tiempo, las correcciones a la energía a primer orden para un estado no degenerado están dadas por el valor esperado de H_1 evaluado sobre los autoestados no perturbados [203]:

$$E_1 = \langle n_0 | H_1 | n_0 \rangle, \quad (4.10)$$

siendo $|n_0\rangle$ un autoestado del hamiltoniano sin perturbar.

4.4.1. Autoestados del hamiltoniano sin perturbar y cambios de base

Previo al cálculo de las correcciones a la energía, debemos analizar de manera completa cómo se construyen los autoestados del sistema y cuáles son los números cuánticos que los caracterizan. El objetivo de esta sección es presentar una descripción de la función de onda del sistema e introducir las bases que resultarán útiles para el cálculo de correcciones perturbativas.

La función de onda total del estado puede descomponerse en los distintos grados de libertad del sistema:

$$\Psi_T = \psi_{espacial} \otimes \varphi_{temporal} \otimes w_{spin} \otimes \chi_{color} \otimes \Delta_{sabor}. \quad (4.11)$$

La función de onda espacial se obtuvo resolviendo la ecuación de Schrödinger en el régimen no relativista, como se describe en la Sección 3.4. Aprovechando la simetría esférica del potencial central, la parte espacial puede separarse en una contribución radial y una angular:

$$\psi_{espacial}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) Y_l^{m_l}(\theta, \phi),$$

donde la función radial se determina numéricamente y depende de los números cuánticos radial, n , y orbital, l , mientras que la dependencia angular está dada por los armónicos esféricos.

Por otro lado, previamente estudiamos las consecuencias de la existencia de los grados de libertad de color, calculando la estructura de color del sistema y deduciendo el factor de color asociado al tetraquark, a los diquarks y a los mesones. En cuanto al sabor, en este trabajo se consideran sistemas formados por quarks pesados, compuestos únicamente por charm y bottom. Para el caso de los mesones se estudiará el charmonium, bottomonium y charm-bottom, mientras que para los tetraquarks nos centraremos en sistemas formados por quarks del mismo sabor, $ccc\bar{c}$ y $bbb\bar{b}$.

Resta entonces describir la dependencia con el *spin*. En el marco de un sistema de dos cuerpos, la dependencia en el *spin* se puede escribir en función del *spin* de los componentes (diquarks en el caso del tetraquark y quarks en el caso de mesones y diquarks). Sea \vec{S}_1 el operador de *spin* de un constituyente y \vec{S}_2 el operador de *spin* del otro componente, tal que cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\vec{S}_1^2 |s_1, m_{s_1}\rangle &= s_1 (s_1 + 1) |s_1, m_{s_1}\rangle, & \vec{S}_2^2 |s_2, m_{s_2}\rangle &= s_2 (s_2 + 1) |s_2, m_{s_2}\rangle, \\ S_1^z |s_1, m_{s_1}\rangle &= m_{s_1} |s_1, m_{s_1}\rangle, & S_2^z |s_2, m_{s_2}\rangle &= m_{s_2} |s_2, m_{s_2}\rangle,\end{aligned}$$

donde S^z representa la componente z del vector \vec{S} . Entonces, un autoestado de \vec{S}_1 se describe con el número cuántico s_1 asociado al módulo del *spin* del constituyente y con el número cuántico m_{s_1} asociado a la componente z del *spin*, que toma valores entre $-s_1$ y s_1 . En el caso del diquark s_1 tomará el valor 1 y en el caso del quark tomará el valor $1/2$.

De esta forma, se caracterizan los estados de *spin* de los constituyentes con dos números cuánticos, s_1 y m_{s_1} . Por lo tanto, una descripción completa del sistema de dos cuerpos está dada por la base:

$$|n, l, m_l, s_1, m_{s_1}, s_2, m_{s_2}\rangle, \quad (4.12)$$

donde los operadores asociados forman un conjunto completo de operadores que conmutan. Nos referiremos a esta base como la base de diquarks.

Si bien la base hallada es la más natural para trabajar con sistemas de dos cuerpos, no es la más útil. Para el cálculo de las correcciones a primer orden de la energía, va a resultar más cómodo definir el operador de *spin* total del sistema, \vec{S} , y el operador de momento angular total \vec{J} , que relaciona el momento angular orbital con su *spin* total:

$$\begin{aligned}\vec{S}^2 |s, m_s\rangle &= s (s + 1) |s, m_s\rangle, & \vec{J}^2 |j, m_j\rangle &= j (j + 1) |j, m_j\rangle, \\ S^z |s, m_s\rangle &= m_s |s, m_s\rangle, & J^z |j, m_j\rangle &= m_j |j, m_j\rangle.\end{aligned}$$

Análogo al caso del operador de *spin* de los constituyentes, s describirá el *spin* total del sistema, que puede tomar valores 0, 1 o 2 en el caso del tetraquark y 0 o 1 en el caso del diquark y el mesón; mientras que m_s puede tomar valores enteros entre $-s$ y s . Por el otro lado, los valores de j van a estar determinados por s y l , pudiendo valer cualquier número entero entre $l + s$ y $|l - s|$, mientras que m_j toma valores enteros entre j y $-j$.

Con estos nuevos operadores se puede formar un conjunto completo de operadores que conmutan, dando lugar a la base:

$$|n, j, m_j, l, s, s_1, s_2\rangle. \quad (4.13)$$

Esta base resulta ser la más útil para describir al sistema total, ya que los números cuánticos presentes son los que se suelen usar para describir estados ligados. Informalmente, nos referiremos a esta base como la base de tetraquarks, aunque la utilizaremos para describir todos los estados ligados considerados en este trabajo.

Una observación sobre esta base es que, desde el punto de vista relativista, sólo el número cuántico j se conserva. En nuestro modelo no relativista vamos a considerar que todos los números cuánticos de la base son conservados, y sólo vamos a tener en cuenta estados puros, es decir, no vamos a considerar estados mezcla de distintos números cuánticos.

Es posible relacionar el nuevo operador \vec{S} con los operadores de *spin* de los constituyentes, obteniendo:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes \vec{S}_2.$$

Y a su vez, podemos hallar una relación entre el operador de momento angular total \vec{J} y los operadores \vec{S} y \vec{L} :

$$\vec{J} = \vec{L} \otimes \mathbb{1}_S + \mathbb{1}_L \otimes \vec{S}.$$

A partir de las relaciones anteriores entre los operadores de las distintas bases, se puede hallar una conexión entre las bases. Para esto se deben usar los coeficientes de Clebsch-Gordan, que nos permiten escribir una base como combinación lineal de los elementos de la otra. En el caso de las bases de las ecuaciones (4.12) y (4.13) la relación queda:

$$|n, j, m_j, l, s, s_1, s_2\rangle = \sum_{m_s} \sum_{m_l} \sum_{m_{s_1}} \sum_{m_{s_2}} C_{jm_j}^{m_s m_l} C_{sm_s}^{m_{s_1} m_{s_2}} |n, l, m_l, s_1, m_{s_1}, s_2, m_{s_2}\rangle, \quad (4.14)$$

donde las sumas son en todos los valores permitidos de m_s , m_l , m_{s_1} y m_{s_2} que describimos anteriormente. Debido a las propiedades de los coeficientes de Clebsch-Gordan, muchos de estos términos resultan ser nulos.

En este caso, los coeficientes de Clebsch-Gordan utilizados tienen la forma:

$$C_{jm_j}^{m_s m_l} = \langle n, l, m_l, s, m_s, s_1, s_2 | n, j, m_j, l, s, s_1, s_2 \rangle,$$

$$C_{sm_s}^{m_{s_1} m_{s_2}} = \langle n, l, m_l, s_1, m_{s_1}, s_2, m_{s_2} | n, l, m_l, s, m_s, s_1, s_2 \rangle,$$

donde se debe usar una base auxiliar como paso intermedio para pasar entre la base de diquarks y la base de tetraquarks. Estos coeficientes se calculan a partir de relaciones de recurrencia, o se pueden hallar usando tablas y funciones integradas de *Mathematica*.

En general, trabajaremos en la base de tetraquarks definida en la ecuación (4.13). Sin embargo, veremos que algunos términos del hamiltoniano no son diagonales en dicha representación, por lo que será necesario pasar a la base de diquarks, introducida en la ecuación (4.12). Este cambio se realizará escribiendo la base de tetraquarks como combinación lineal de los elementos de la base de diquarks, como se muestra en la ecuación (4.14), utilizando los coeficientes de Clebsch-Gordan definidos.

Para el caso del cálculo del diquark y tetraquark con todos los quarks del mismo sabor, este proceso es suficiente para hallar las correcciones a la energía. Sin embargo, el caso de quarks de distintos sabores es más difícil debido a la diferencia de masas entre ellos. Para este caso, debemos realizar otro cambio de base, descrito a continuación. Para esto seguimos los detalles de [204].

Definimos dos operadores \vec{K}_1 y \vec{K}_2 que relacionan el momento angular del sistema con el *spin* de cada constituyente. Mostraremos cómo se define el caso de \vec{K}_1 , y \vec{K}_2 es análogo:

$$\vec{K}_1 = \vec{L} \otimes \mathbb{1}_{S_1} + \mathbb{1}_L \otimes \vec{S}_1.$$

Vemos que es similar a la definición del momento angular total con:

$$\vec{K}_1^2 |k_1, m_{k_1}\rangle = k_1(k_1 + 1) |k_1, m_{k_1}\rangle,$$

$$K_1^z |k_1, m_{k_1}\rangle = m_{k_1} |k_1, m_{k_1}\rangle,$$

donde nuevamente k_1 puede tomar valores entre $|l - s_1|$ y $l + s_1$ y m_{k_1} valores entre $-k_1$ y k_1 .

Utilizando este operador, y los demás ya definidos para la base de diquarks, se puede escribir la base:

$$|n, k_1, m_{k_1}, l, s_1, s_2, m_{s_2}\rangle. \quad (4.15)$$

Al igual que antes, las bases de las ecuaciones (4.15) y (4.12) se relacionan mediante coeficientes de Clebsch-Gordan:

$$|n, l, m_l, s_1, m_{s_1}, s_2, m_{s_2}\rangle = \sum_{k_1} \sum_{m_{k_1}} C_{m_l m_{s_1}}^{k_1 m_{k_1}} |n, k_1, m_{k_1}, l, s_1, s_2, m_{s_2}\rangle,$$

con:

$$C_{m_l m_{s_1}}^{k_1 m_{k_1}} = \langle n, k_1, m_{k_1}, l, s_1, s_2, m_{s_2} | n, l, m_l, s_1, m_{s_1}, s_2, m_{s_2} \rangle.$$

Para escribir la base de tetraquarks en función de la nueva base debemos seguir utilizando los coeficientes de Clebsch-Gordan igual que antes.

Este procedimiento descrito se va a utilizar para el estudio de los tetraquarks, diquarks y para los mesones, donde, para calcular las correcciones a la energía, se deberá utilizar distintos cambios de bases dependiendo del *spin* del sistema y de las masas de los constituyentes.

4.4.2. Cálculo de las correcciones a primer orden de la energía

En esta sección calculamos las correcciones a la energía a primer orden utilizando teoría de perturbaciones, enfocándonos en cómo calcular el valor esperado de las perturbaciones. Para cada término se busca la base en la que se diagonalizan las correcciones empleando los cambios de bases mostrados en la sección anterior.

El procedimiento general que seguimos para calcular las distintas correcciones consiste en separar la parte radial, asociada a los números cuánticos n y l , y trabajar esta parte del valor esperado en la representación de posición. Utilizando clausuras de los autoestados de posición, los valores esperados se pueden escribir como integrales de la función de onda. Por ejemplo, para un operador O que se puede separar en una parte radial $f(r)$ y una parte dependiente de otros números cuánticos que llamaremos $W(x)$, el valor esperado se escribe como:

$$\langle n_0 | O | n_0 \rangle = \langle n_0 | W(x) f(r) | n_0 \rangle = \langle n_0 | W(x) | n_0 \rangle \int dr r^2 R_{n,l}^*(r) f(r) R_{n,l}(r).$$

Esta separación nos permite tratar de forma numérica la parte radial de la función de onda, mientras que el comportamiento conocido de los demás números cuánticos se resuelve analíticamente.

Veamos las correcciones a la energía término a término:

$$T_1 = - \left\langle \frac{|\vec{p}|^4}{8} \left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right) \right\rangle.$$

Para calcular este valor esperado utilizamos la expresión:

$$|\vec{p}|^2 = 2\mu \left(H_0 + \frac{g^2 e^{-m_g r}}{3\pi r} - br \right),$$

donde el valor esperado de H_0 en la base del hamiltoniano sin perturbar corresponde a los valores de la energía obtenidos con la ecuación de Schrödinger. Entonces el valor esperado queda:

$$T_1 = -\frac{\mu^2}{2} \left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right) \int dr r^2 \left(E_0 + \frac{g^2 e^{-m_g r}}{3\pi r} - br \right)^2 |R_{n,l}(r)|^2. \quad (4.16)$$

$$T_2 = -\left\langle \frac{g^2 f_c m_g^2 (m_1^2 + m_2^2) e^{-m_g r}}{8 m_1^2 m_2^2} \frac{1}{4\pi r} \right\rangle = -\frac{g^2 f_c m_g^2 (m_1^2 + m_2^2)}{8 m_1^2 m_2^2} \int dr r \frac{e^{-m_g r}}{4\pi} |R_{n,l}(r)|^2. \quad (4.17)$$

$$T_3 = \left\langle \frac{g^2 f_c \delta^3(r)}{8} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \right\rangle = \frac{g^2 f_c}{8} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) |\psi_{n,l}(0)|^2, \quad (4.18)$$

con $\psi_{n,l}(0)$ la función de onda en el origen. Debido a que las resoluciones numéricas de la función de onda pueden presentar dificultades en el origen y para reducir errores numéricos, calculamos el valor de la función en el origen utilizando la siguiente expresión:

$$|\psi_{n,l}(0)|^2 = \frac{\mu}{2\pi} \left\langle \frac{dV(r)}{dr} \right\rangle. \quad (4.19)$$

La deducción de esta identidad se encuentra en el Apéndice E.

$$T_4 = -\left\langle \frac{g^2 f_c |\vec{p}|^2}{m_1 m_2 m_g^2} (m_g^2 r^2 + m_g r + 1 - e^{m_g r}) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^3} \right\rangle.$$

Usando la misma expresión para el momento que en T_1 :

$$T_4 = -\frac{2 g^2 f_c \mu}{m_1 m_2 m_g^2} \int dr \left(E_0 + \frac{g^2 e^{-m_g r}}{3\pi r} - br \right) (m_g^2 r^2 + m_g r + 1 - e^{m_g r}) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} |R_{n,l}(r)|^2. \quad (4.20)$$

$$T_5 = \left\langle \frac{3 g^2 f_c (\vec{p} \cdot \vec{r})^2}{m_1 m_2 m_g^2} \left(\frac{m_g^2 r^2}{3} + m_g r + 1 - e^{-m_g r} \right) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^5} \right\rangle.$$

Para resolver este término escribimos el operador \vec{p} en representación posición $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$. Siguiendo las reglas deducidas en [199] a partir de la ecuación de Bethe-Salpeter, este operador actúa únicamente sobre la función de onda.

$$T_5 = -\frac{3 g^2 f_c}{m_1 m_2 m_g^2} \int dr \left(\frac{m_g^2 r^2}{3} + m_g r + 1 - e^{-m_g r} \right) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} R_{n,l}(r) \partial_r^2 R_{n,l}(r). \quad (4.21)$$

$$T_6 = -\left\langle \frac{g^2 f_c (m_g r + 1)}{2 m_1 m_2} \left[\frac{2m_1 + m_2}{m_1} (\vec{L} \cdot \vec{S}_1) + \frac{m_1 + 2m_2}{m_2} (\vec{L} \cdot \vec{S}_2) \right] \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^3} \right\rangle \quad (4.22)$$

$$= -\frac{g^2 f_c}{2 m_1 m_2} \left[\frac{2m_1 + m_2}{m_1} \langle \vec{L} \cdot \vec{S}_1 \rangle + \frac{m_1 + 2m_2}{m_2} \langle \vec{L} \cdot \vec{S}_2 \rangle \right] \int dr (m_g r + 1) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} |R_{n,l}(r)|^2.$$

Para calcular este término, observamos que los operadores $\vec{L} \cdot \vec{S}_1$ y $\vec{L} \cdot \vec{S}_2$ no son diagonales en la base de tetraquarks. En este caso debemos utilizar el cambio de base descrito en la sección anterior,

ya que en la base $|n, k_1, m_{k_1}, l, s_1, s_2, m_{s_2}\rangle$ y en la respectiva base para el otro constituyente, los operadores sí se diagonalizan.

En la nueva base, podemos escribir el operador $(\vec{L} \cdot \vec{S}_1)$ como:

$$2\vec{L} \cdot \vec{S}_1 = (\vec{L} + \vec{S}_1)^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}_1^2 = \vec{K}_1^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}_1^2,$$

donde conocemos cómo actúan los operadores \vec{K}_1^2 , \vec{L}^2 y \vec{S}_1^2 en la nueva base:

$$\langle \vec{L} \cdot \vec{S}_1 \rangle = \frac{1}{2} [k_1(k_1 + 1) - l(l + 1) - s_1(s_1 + 1)].$$

Utilizando este resultado junto con los coeficientes de Clebsch-Gordan como se explicó en la sección anterior, y repitiendo el procedimiento para \vec{S}_2 , se obtiene la corrección T_6 .

Caso particular de masas iguales

En el caso de masas iguales el cálculo de la corrección T_6 se simplifica ampliamente. En particular, la dependencia en el momento angular pasa a ser:

$$\frac{2m_1 + m_2}{m_1} \langle \vec{L} \cdot \vec{S}_1 \rangle + \frac{m_1 + 2m_2}{m_2} \langle \vec{L} \cdot \vec{S}_2 \rangle \longrightarrow 3 \langle \vec{L} \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \rangle.$$

Escribiendo $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, el operador sí es diagonal en la base de tetraquarks y ya no es necesario el cambio de base.

Usando que $2\vec{S} \cdot \vec{L} = (\vec{L} + \vec{S})^2 - \vec{S}^2 - \vec{L}^2 = \vec{J}^2 - \vec{S}^2 - \vec{L}^2$, se obtiene:

$$\begin{aligned} T_6 &= - \left\langle \frac{3g^2 f_c}{4m^2} (m_{gr} + 1) \frac{e^{-m_{gr}}}{4\pi r^3} (\vec{J}^2 - \vec{S}^2 - \vec{L}^2) \right\rangle \\ &= \frac{3g^2 f_c}{4m^2} [j(j + 1) - s(s + 1) - l(l + 1)] \int dr (m_{gr} + 1) \frac{e^{-m_{gr}}}{4\pi r} |R_{n,l}(r)|^2. \end{aligned}$$

$$T_7 = \left\langle \frac{2g^2 f_c}{3m_1 m_2} (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) \delta^3(r) \right\rangle.$$

Ahora, usando el mismo razonamiento que antes para escribir \vec{S}_1 y \vec{S}_2 en función de \vec{S} :

$$2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2 = \vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2,$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} T_7 &= \frac{g^2 f_c}{3m_1 m_2} \left\langle (\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2) \right\rangle |\psi_{n,l}(0)|^2 \\ &= \frac{g^2 f_c}{3m_1 m_2} [s(s + 1) - s_1(s_1 + 1) - s_2(s_2 + 1)] |\psi_{n,l}(0)|^2, \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde nuevamente se aplica la igualdad de la ecuación (4.19) para calcular el valor de la función de onda en el origen.

$$\begin{aligned}
T_8 &= - \left\langle \frac{2g^2 f_c m_g^2}{3m_1 m_2} (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} \right\rangle = \\
&= - \frac{g^2 f_c m_g^2}{3m_1 m_2} [s(s+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)] \int dr r \frac{e^{-m_g r}}{4\pi} |R_{n,l}(r)|^2. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Finalmente, el último término de las correcciones, que llamaremos corrección tensorial, es:

$$T_9 = - \left\langle \frac{g^2 f_c}{m_1 m_2} \left(\frac{m_g^2 r^2}{3} + m_g r + 1 \right) \left[\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - 3 (\vec{S}_1 \cdot \hat{r}) (\vec{S}_2 \cdot \hat{r}) \right] \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^3} \right\rangle.$$

Nos enfocamos en la parte de *spin*, siguiendo el procedimiento descrito en [62]. Empezamos descomponiendo los productos escalares y escribiendo \hat{r} en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}
\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - 3 (\vec{S}_1 \cdot \hat{r}) (\vec{S}_2 \cdot \hat{r}) &= S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y + S_1^z S_2^z \\
&- 3 (S_1^x \sin \theta \cos \phi + S_1^y \sin \theta \sin \phi + S_1^z \cos \theta) (S_2^x \sin \theta \cos \phi + S_2^y \sin \theta \sin \phi + S_2^z \cos \theta).
\end{aligned}$$

Definimos los operadores de subida y bajada, $S^\pm = S^x \pm iS^y$, que actúan sobre autoestados de *spin* como:

$$S^\pm |s, m_s\rangle = C_\pm(s, m_s) |s, m_s \pm 1\rangle,$$

$$\text{con } C_\pm(s, m_s) = \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}.$$

En función de estos nuevos operadores la parte tensorial de la corrección T_9 queda:

$$\begin{aligned}
\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - 3 (\vec{S}_1 \cdot \hat{r}) (\vec{S}_2 \cdot \hat{r}) &= -\frac{3}{4} \sin^2 \theta e^{2i\phi} S_1^- S_2^- - \frac{3}{4} \sin^2 \theta e^{-2i\phi} S_1^+ S_2^+ - \frac{3}{2} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} (S_1^- S_2^z + S_1^z S_2^-) \\
&- \frac{3}{2} \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi} (S_1^+ S_2^z + S_1^z S_2^+) + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 \theta \right) (S_1^+ S_2^- + S_1^- S_2^+) + (1 - 3 \cos^2 \theta) S_1^z S_2^z.
\end{aligned}$$

Y a su vez la parte angular se puede escribir en función de los armónicos esféricos:

$$Y_2^0(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (2 - 3 \sin^2 \theta),$$

$$Y_2^{-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{-i\phi},$$

$$Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{i\phi},$$

$$Y_2^{-2}(\theta, \phi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\phi},$$

$$Y_2^2(\theta, \phi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi},$$

con $Y_l^{-m_l} = (-1)^{m_l} (Y_l^{m_l})^*$.

Entonces el valor esperado toma la forma:

$$T_9 = \frac{g^2 f_c}{m_1 m_2} \sqrt{\frac{2\pi}{5}} \left\langle \sqrt{3} Y_2^2 S_1^- S_2^- + \sqrt{3} Y_2^{-2} S_1^+ S_2^+ - \sqrt{3} Y_2^1 (S_1^- S_2^z + S_1^z S_2^-) + \sqrt{3} Y_2^{-1} (S_1^+ S_2^z + S_1^z S_2^+) \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{2}}{2} Y_2^0 (S_1^+ S_2^- + S_1^- S_2^+) + 2\sqrt{2} Y_2^0 S_1^z S_2^z \right\rangle \int dr \left(\frac{m_g^2 r^2}{3} + m_g r + 1 \right) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} |R_{n,l}(r)|^2. \quad (4.25)$$

Es sencillo calcular este valor esperado cuando hacemos el cambio de base a la base de diquarks $|n, l, m_l, s_1, s_2, m_{s_1}, m_{s_2}\rangle$, donde los operadores de subida y bajada actúan como describimos anteriormente. Por ejemplo, para el primer término tratamos primero la parte de *spin* y luego la parte angular:

$$\begin{aligned} \langle s_1, s_2, m_{s_1}, m_{s_2} | S_1^- S_2^+ | s_1, s_2, m'_{s_1}, m'_{s_2} \rangle &= \langle s_1, m_{s_1} | S_1^- | s_1, m'_{s_1} \rangle \langle s_2, m_{s_2} | S_2^+ | s_2, m'_{s_2} \rangle \\ &= C_-(s_1, m'_{s_1}) C_+(s_2, m'_{s_2}) \langle s_1, m_{s_1} | s_1, m'_{s_1} - 1 \rangle \langle s_2, m_{s_2} | s_2, m'_{s_2} + 1 \rangle \\ &= C_-(s_1, m'_{s_1}) C_+(s_2, m'_{s_2}) \delta_{m_{s_1}, m'_{s_1} - 1} \delta_{m_{s_2}, m'_{s_2} + 1}. \end{aligned}$$

El valor esperado de los armónicos esféricos es sencillo de calcular considerando los autoestados de momento angular en la representación de posición:

$$\begin{aligned} \langle l, m_l | Y_2^2 | l, m'_l \rangle &= \int d\Omega (Y_l^{m_l}(\theta, \phi))^* Y_2^2(\theta, \phi) Y_l^{m'_l}(\theta, \phi) \\ &= (-1)^{m_l} \int d\Omega Y_l^{-m_l}(\theta, \phi) Y_2^2(\theta, \phi) Y_l^{m'_l}(\theta, \phi). \end{aligned}$$

Esta integral se resuelve empleando una identidad de los armónicos esféricos:

$$\int d\Omega Y_l^{-m_l}(\theta, \phi) Y_2^m(\theta, \phi) Y_l^{m'_l}(\theta, \phi) = (2l+1) \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \begin{pmatrix} l & 2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 2 & l \\ -m_l & m & m'_l \end{pmatrix},$$

donde los valores entre paréntesis son los coeficientes 3j-Wigner, que se pueden hallar utilizando funciones integradas de *Mathematica*.

Siguiendo estos pasos para cada término y además teniendo en cuenta los coeficientes de Clebsch-Gordan del cambio de base utilizado, se obtiene la corrección T_9 .

Caso particular de spin 1/2

Cuando los constituyentes del sistema tienen spin 1/2, como en el caso de los mesones y diquarks, el estudio de la corrección T_9 se simplifica notoriamente. Utilizando que, para dos operadores \vec{a} y \vec{b} que conmutan entre ellos y con \vec{r} y \vec{L} , el valor esperado de la transición entre estados con el mismo número cuántico orbital l vale:

$$\begin{aligned} &\left\langle (\vec{a} \cdot \vec{b}) r^2 f(r) - 3(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{b} \cdot \vec{r}) f(r) \right\rangle \\ &= -\frac{\langle r^2 f(r) \rangle}{(2l+3)(2l-1)} \left\langle 2\vec{L}^2 (\vec{a} \cdot \vec{b}) - 3(\vec{a} \cdot \vec{L})(\vec{b} \cdot \vec{L}) - 3(\vec{b} \cdot \vec{L})(\vec{a} \cdot \vec{L}) \right\rangle, \end{aligned}$$

vemos que esto es válido para el caso $\vec{a} = \vec{S}_1$ y $\vec{b} = \vec{S}_2$, que conmutan tanto con \vec{L} y \vec{r} como entre ellos porque actúan en espacios distintos. Entonces:

$$T_9 = \left\langle \frac{g^2 f_c}{m_1 m_2} \left(\frac{m_g^2 r^2}{3} + m_g r + 1 \right) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^3} \right\rangle \frac{\left\langle 2\vec{L}^2 (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) - 3(\vec{S}_1 \cdot \vec{L})(\vec{S}_2 \cdot \vec{L}) - 3(\vec{S}_2 \cdot \vec{L})(\vec{S}_1 \cdot \vec{L}) \right\rangle}{(2l+3)(2l-1)}.$$

Mirando la parte de *spin* y momento angular, el segundo y tercer término se pueden reescribir como:

$$3 \left[\left(\vec{S}_1 \cdot \vec{L} \right) \left(\vec{S}_2 \cdot \vec{L} \right) + \left(\vec{S}_2 \cdot \vec{L} \right) \left(\vec{S}_1 \cdot \vec{L} \right) \right] = 3 \left[\left(\vec{S} \cdot \vec{L} \right)^2 - \left(\vec{S}_1 \cdot \vec{L} \right)^2 - \left(\vec{S}_2 \cdot \vec{L} \right)^2 \right].$$

Pero como son partículas de *spin* 1/2:

$$\begin{aligned} \vec{S}_1 &= \frac{\vec{\sigma}_1}{2}, \\ \vec{S}_2 &= -\frac{\vec{\sigma}_2}{2}, \end{aligned}$$

con $\vec{\sigma}$ las matrices de Pauli, entonces podemos usar las propiedades de estas matrices para $\left(\vec{S}_1 \cdot \vec{L} \right)^2$ y $\left(\vec{S}_2 \cdot \vec{L} \right)^2$.

$$\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{a} \right) \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{b} \right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \longrightarrow \left(\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{L} \right) \left(\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{L} \right) = \frac{\vec{L} \cdot \vec{L}}{4} + \frac{i\vec{\sigma}}{4} \cdot \left(\vec{L} \times \vec{L} \right) = \frac{\vec{L}^2}{4} - \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{L}}{2},$$

donde usamos la definición de momento angular $\vec{L} \times \vec{L} = i\vec{L}$ y volvimos a escribir todo en términos de S_1 . Para S_2 el cálculo es análogo.

Usando que $2\vec{L}^2 \left(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \right) = \vec{L}^2 \vec{S}^2 - \vec{L}^2 \vec{S}_1^2 - \vec{L}^2 \vec{S}_2^2$ y juntado todo, la parte de *spin* queda:

$$\begin{aligned} &\vec{L}^2 \vec{S}^2 - \vec{L}^2 \vec{S}_1^2 - \vec{L}^2 \vec{S}_2^2 - 3 \left(\vec{S} \cdot \vec{L} \right)^2 + \frac{3}{2} \vec{L}^2 - \frac{3}{2} \left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2 \right) \cdot \vec{L} \\ &= \vec{L}^2 \vec{S}^2 - \vec{L}^2 \vec{S}_1^2 - \vec{L}^2 \vec{S}_2^2 - 3 \left(\vec{S} \cdot \vec{L} \right)^2 + \frac{3}{2} \vec{L}^2 - \frac{3}{2} \vec{S} \cdot \vec{L} \\ &= \vec{L}^2 \vec{S}^2 - \vec{L}^2 \vec{S}_1^2 - \vec{L}^2 \vec{S}_2^2 - \frac{3}{4} \left(\vec{J}^2 - \vec{S}^2 - \vec{L}^2 \right)^2 + \frac{3}{2} \vec{L}^2 - \frac{3}{4} \left(\vec{J}^2 - \vec{S}^2 - \vec{L}^2 \right), \end{aligned}$$

donde en el último paso usamos que $\vec{S} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \left(\vec{J}^2 - \vec{S}^2 - \vec{L}^2 \right)$.

Juntando todo y calculando el valor esperado se obtiene:

$$\begin{aligned} T_9 &= \frac{g^2 f_c}{m_1 m_2} \frac{1}{(2l+3)(2l-1)} \left\{ l(l+1)s(s+1) - \frac{3}{4} [j(j+1) - s(s+1) - l(l+1)]^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} [j(j+1) - s(s+1) - l(l+1)] \right\} \int dr \left(\frac{m_g^2 r^2}{3} + m_g r + 1 \right) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} |R_{n,l}(r)|^2. \quad (4.26) \end{aligned}$$

A partir de estas expresiones y las funciones de onda obtenidas de la resolución de la ecuación de Schrödinger, obtenemos las distintas correcciones a primer orden de la energía. Le llamaremos corrección relativista a la dada en la ecuación (4.16); corrección *spin*-órbita, a la ecuación (4.22); corrección *spin-spin* a la suma de las correcciones de las ecuaciones (4.23) y (4.24); y corrección tensorial, a la correspondiente a la ecuación (4.25). Las demás correcciones dependientes del momento se agrupan bajo el nombre de correcciones cinéticas, dadas por las ecuaciones (4.17, 4.18, 4.20, 4.21).

Observamos que tratando el hamiltoniano sin perturbar se obtuvo un espectro que sólo depende de los números cuánticos n y l . Es la inclusión de correcciones a primer orden que introduce las dependencias en los demás números cuánticos s y j , dando lugar al espectro completo del sistema

de dos cuerpos.

En el capítulo siguiente utilizaremos esta metodología para calcular el espectro de masas de tres sistemas: mesones pesados, diquarks pesados y tetraquarks *fully-heavy*.

Capítulo 5

Parámetros del modelo

Previo al estudio del espectro de los *fully-heavy* tetraquarks, es necesario fijar los parámetros relevantes del modelo, como la constante de acoplamiento, g , la masa del gluon, m_g , la tensión de la cuerda, b , y las masas de los quarks constituyentes, m_c y m_b . Para hallar los valores de dichos parámetros, utilizamos el modelo descrito anteriormente para calcular el espectro de mesones pesados, $c\bar{c}$ y $b\bar{b}$. Para distintos conjuntos de parámetros se calcula el espectro de masas y se lo compara con los valores experimentales disponibles. El conjunto que mejor ajuste los datos luego será utilizado en el estudio de sistemas más complejos.

La motivación para estudiar mesones pesados viene de varias razones. En primer lugar, al tratarse de sistemas de dos cuerpos, podemos aplicar el mismo modelo descrito para el caso de diquarks, simplemente cambiando el factor de color (ver Tabla 4.1). En segundo lugar, eligiendo centrarnos en mesones pesados, la gran masa de los quarks constituyentes justifica el uso de la aproximación no relativista y la aproximación $m_g \sim \lambda_{QCD}m$ utilizada en el Cap. 4. Finalmente, desde el punto de vista experimental, los sistemas de charmonium y bottomonium se han estudiado experimentalmente en mucha profundidad y sus espectros de masas se conocen con gran precisión, lo que permite realizar ajustes confiables. Estas características hacen de los mesones pesados un sistema ideal para calibrar el modelo.

Para comenzar el estudio de los mesones pesados debemos entender el hamiltoniano de estos sistemas. Siguiendo el modelo descrito en los capítulos anteriores, el hamiltoniano de un mesón se construye como la suma de un término correspondiente al *one gluon exchange* y un potencial lineal que modela el confinamiento, representado en la ecuación (4.5). En este caso, debido a que los mesones son estados observables, deben ser neutros en color, que corresponde a un factor de color de $4/3$, como se discutió en la Sección 3.3. Como en los casos previos, el hamiltoniano se separa en dos contribuciones: un término dominante que se utiliza para resolver la ecuación de Schrödinger de forma numérica y un conjunto de correcciones subdominantes que se tratan de manera perturbativa. Estas correcciones permiten mejorar los niveles de energía, incluyendo los efectos relativistas dominantes y dependientes del *spin*, como se detalla en la Sección 4.4.

Con este hamiltoniano, y siguiendo la metodología descrita en el Cap. 4, es posible calcular las masas de los mesones pesados resolviendo la ecuación de Schrödinger e incluyendo correcciones a primer orden mediante la teoría de perturbaciones independiente del tiempo. Este procedimiento se aplica a distintos conjuntos de parámetros del modelo, con el objetivo de identificar aquellos que mejor reproducen los valores experimentales.

Para determinar el conjunto de parámetros que mejor reproduce los espectros experimentales, se

define una medida del error entre el espectro calculado y el experimental. En este trabajo se utiliza el error relativo, definido como:

$$\text{Error relativo} = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_i^{\mathcal{N}} \left(\frac{E_i^{\text{exp}} - E_i^{\text{calculada}}}{E_i^{\text{calculada}}} \right)^2}, \quad (5.1)$$

donde el índice i recorre los distintos niveles del espectro y \mathcal{N} es el número total de estados considerados. Para los valores experimentales se incluyen únicamente estados confirmados por el Particle Data Group (PDG) [205], con números cuánticos bien establecidos.

Por otro lado, si bien la aproximación no relativista resulta adecuada para mesones pesados, su validez disminuye al considerar estados excitados radialmente, donde los efectos relativistas contribuyen cada vez más. Por esta razón, se analizan dos estrategias de ajuste. En el primer caso, se ajustan simultáneamente los estados con números cuánticos $n = 1$ y $n = 2$. En el segundo, el ajuste se realiza exclusivamente sobre los estados con $n = 1$ y los niveles excitados se consideran como una predicción del modelo.

Adicionalmente, se estudia un caso particular del modelo en el cual sólo se incorporan correcciones dependientes del *spin*. Este tipo de aproximación es habitual en modelos efectivos inspirados en QCD, donde se incluyen solamente las correcciones tipo *spin-spin*, *spin-órbita* y tensorial [188, 206].

Combinando las estrategias anteriores, consideramos cuatro esquemas de ajuste. En el esquema (a) los parámetros se fijan ajustando los niveles con $n = 1$ y $n = 2$, y las masas se calculan incorporando todas las correcciones del OGE derivadas en el Cap. 4. En el esquema (b), también se emplean los niveles con $n = 1$ y $n = 2$, pero se incluyen únicamente las correcciones dependientes del *spin*. Por otro lado, en el esquema (c) los parámetros se ajustan exclusivamente a los niveles con $n = 1$, considerando todas las correcciones del OGE, mientras que en el esquema (d) se utilizan estos mismos niveles, pero considerando sólo las correcciones dependientes del *spin*. La comparación entre estos esquemas permitirá determinar la estrategia que conduce a una mejor descripción de los mesones pesados.

Una vez definidos los esquemas de ajuste, es necesario estimar la incertidumbre teórica asociada a los resultados. Para esto nos basamos en teoría de perturbaciones del modelo Curci-Ferrari. En este contexto, la masa del mesón puede expresarse como un desarrollo perturbativo en el parámetro de desarrollo, $\lambda_{QCD} = \frac{3g^2}{16\pi^2}$:

$$M_{total} = M_0 + \lambda_{QCD}M_1 + \lambda_{QCD}^2M_2 + \dots$$

donde M_0 corresponde a las masas halladas a partir de la ecuación de Schrödinger, mientras que $\lambda_{QCD}M_1$ representa la corrección de primer orden calculada mediante teoría de perturbaciones independiente del tiempo.

En este trabajo, se calcularon las masas hasta primer orden en λ_{QCD} , por lo que la incertidumbre teórica dominante de nuestros cálculos viene de los órdenes superiores no incluidos, y se puede estimar como $\lambda_{QCD}^2M_2$. Para obtener una estimación cuantitativa, asumimos que M_2 del mismo orden que las masas obtenidas experimentalmente y escribiendo λ_{QCD} en función de los parámetros del modelo, la incertidumbre resulta del orden de:

$$\left(\frac{3g^2}{16\pi^2} \right)^2 M^{\text{exp}}.$$

Esta estimación permite cuantificar de manera simple el impacto de los términos de orden superior no considerados en los resultados obtenidos.

En este capítulo, presentamos los parámetros obtenidos utilizando el modelo al ajustar el espectro de mesones pesados para dos casos: por un lado, ajustando el espectro del mesón bottomonium ($b\bar{b}$), y por el otro, ajustando el espectro del mesón charmonium ($c\bar{c}$). En ambos casos estudiamos las distintas situaciones, considerando niveles excitados radialmente o no, y considerando únicamente correcciones dependientes del *spin* o el conjunto completo.

Para todos estos casos, los estados se etiquetan utilizando la notación espectroscópica $n^{2s+1}l_j$, donde $l = 0, 1, 2, \dots$ corresponde a los estados S, P, D, \dots respectivamente. De manera equivalente, es frecuente caracterizar los estados mediante los números cuánticos j^{PC} , asociados al momento angular total, la paridad y la conjugación de carga. Para mesones, ambas notaciones se relacionan mediante:

$$\begin{aligned} P &= (-1)^{l+1}, \\ C &= (-1)^{l+s}. \end{aligned}$$

Un aspecto central en el análisis del espectro de mesones pesados es efecto de las correcciones hiperfinas, debidas a la interacción entre el *spin* de los quarks constituyentes. Estas correcciones representan uno de los mayores desafíos en modelos efectivos. En muchos enfoques, para lograr reproducir correctamente el desdoblamiento hiperfino se agrega la perturbación *spin-spin* al hamiltoniano de orden cero. En este trabajo, sin embargo, estas correcciones se tratan de manera perturbativa, siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 4.4. El objetivo es estudiar si la inclusión de la masa del gluon permite describir mejor estos efectos.

Con este propósito, se observa la diferencia de masas entre estados con la misma estructura espacial pero distinto *spin*, donde se logran observar los efectos de las correcciones hiperfinas de manera aislada. Estos estados son 1^1S_0 y 1^3S_1 en el caso $n = 1$ y, de forma análoga, 2^1S_0 y 2^3S_1 para el caso $n = 2$. Experimentalmente, estos desdoblamientos están bien determinados para el estado fundamental tanto en el charmonium como en el bottomonium. En charmonium, la diferencia de masa entre J/ψ y $\eta_c(1S)$ es de aproximadamente 117 MeV, mientras que la diferencia entre los estados excitados $\psi(2S)$ y $\eta_c(2S)$ es del orden de 43 MeV [207, 208]; en concordancia con resultados de *lattice* QCD [209, 210]. En bottomonium, el desdoblamiento del estado fundamental es cercano a 69 MeV [211, 212], mientras que el correspondiente a los estados excitados aún no está firmemente establecido. Un experimento en CLEO III encuentra una separación de 49 MeV aproximadamente [213], mientras que resultados de *lattice* QCD predicen diferencias de alrededor de 24 MeV [214, 215].

Desde el punto de vista teórico, para estados con el mismo n y $l = 0$, la diferencia de masas $n^3S_1 - n^1S_0$ viene dada por:

$$\Delta m(nS) = \frac{8g^2}{9m^2} \left(|\psi_{n,l=0}(0)|^2 - m_g^2 \int dr r \frac{e^{-m_g r}}{4\pi} |R_{n,l=0}(r)|^2 \right),$$

donde las funciones de onda espaciales son idénticas para ambos estados y m es la masa del quark. Esta expresión se puede derivar de las ecuaciones (4.23) y (4.24).

La inclusión de la masa del gluon da lugar a un nuevo término en la corrección hiperfina (ver ecuación (4.24)). De esta forma, el efecto hiperfino ya no depende únicamente de la función de onda evaluada en el origen, que resultaba ser un problema para el cálculo de los estados excitados. En las secciones siguientes se analiza el efecto de este término y su capacidad para reproducir los desdoblamientos observados.

5.1. Ajuste del espectro del bottomonium

A partir de los valores experimentales del espectro de masas del bottomonium, obtenemos el conjunto de parámetros del modelo (g, m_g, b, m_b) que genera un espectro con el mínimo error en comparación a los datos experimentales. Para esto, se utilizan los resultados de PDG 2025, junto con un resultado de las simulaciones de *lattice* QCD para el estado $\eta_b(2S)$ [216], el cual aún no se ha confirmado experimentalmente. Los valores empleados en el ajuste se presentan en la Tabla (5.1).

Estado	Masa (GeV)	j^{pc}	$n^{2s+1}l_j$
$\eta_b(1S)$	9.3987(20)	0^{-+}	1^1S_0
$\Upsilon(1S)$	9.46040(10)	1^{--}	1^3S_1
$\chi_{b_0}(1P)$	9.85944(42)	0^{++}	1^3P_0
$\chi_{b_1}(1P)$	9.89278(31)	1^{++}	1^3P_1
$h_b(1P)$	9.8993(8)	1^{+-}	1^1P_1
$\chi_{b_2}(1P)$	9.91221(31)	2^{++}	1^3P_2
$\eta_b(2S)$	9.999	0^{-+}	2^1S_0
$\Upsilon(2S)$	10.0234(5)	1^{--}	2^3S_1
$\chi_{b_0}(2P)$	10.2325(5)	0^{++}	2^3S_0
$\chi_{b_1}(2P)$	10.25546(50)	1^{++}	2^3P_1
$h_b(2P)$	10.2598(12)	1^{+-}	2^1P_1
$\chi_{b_2}(2P)$	10.26865(50)	2^{++}	2^3P_2

Tabla 5.1: Valores experimentales (o de *lattice* QCD) del espectro de masas del bottomonium utilizados para ajustar los parámetros del modelo.

En el caso del bottomonium, los parámetros libres del modelo corresponden a la constante de acoplamiento, g , la masa del gluon, m_g , la tensión de la cuerda, b , y la masa del quark constituyente bottom, m_b . Estos parámetros se variaron dentro de los siguientes rangos:

$$\begin{aligned}
 1.6 &\leq g \leq 2.1, \\
 0.01 \text{ GeV} &\leq m_g \leq 0.60 \text{ GeV}, \\
 0.15 \text{ GeV}^2 &\leq b \leq 0.40 \text{ GeV}^2, \\
 4.5 \text{ GeV} &\leq m_b \leq 4.8 \text{ GeV}.
 \end{aligned}$$

Esquema (a)

Al ajustar simultáneamente los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ del espectro del bottomonium, incluyendo todas las correcciones del OGE, se obtiene un error mínimo para los valores $g = 1.94$, $m_g = 0.11 \text{ GeV}$, $b = 0.23 \text{ GeV}^2$ y $m_b = 4.675 \text{ GeV}$. Este conjunto de parámetros produce un error relativo a los datos experimentales de 0.00132 y el espectro correspondiente se muestra en la Fig. (5.1). En términos generales, el modelo logra reproducir adecuadamente el comportamiento global del espectro experimental.

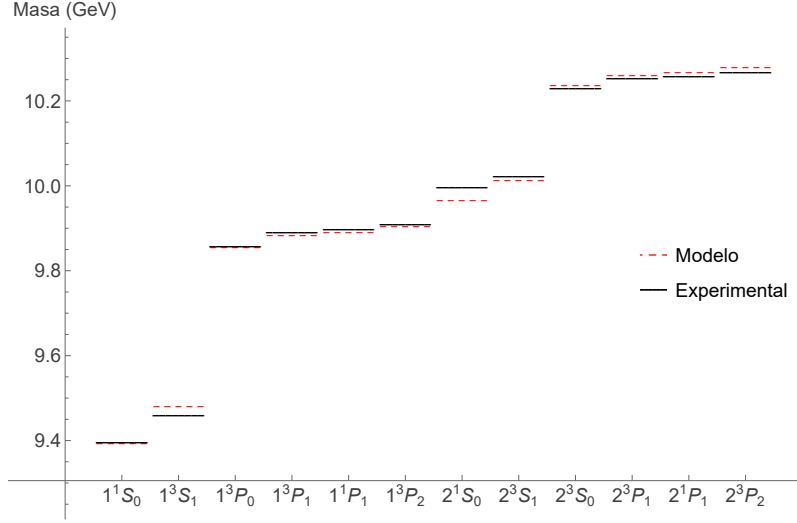


Figura 5.1: Espectro de masas del bottomonium obtenido del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ utilizando todas las correcciones del OGE. Las líneas punteadas corresponden a los resultados obtenidos utilizando el modelo y las líneas continuas son los resultados experimentales presentados en la Tabla (5.1).

Sin embargo, presenta ciertas dificultades, en particular en los estados 1^3S_1 y 2^1S_0 . Estas diferencias están relacionadas con las correcciones hiperfinas, ya que la única contribución que distingue a los estados n^1S_0 y n^3S_1 proviene de la interacción *spin-spin*. En este ajuste obtenemos una separación hiperfina $\Delta m(1S) = 0.0869$ GeV, superior a los valores experimentales, mientras que para $n = 2$ obtenemos $\Delta m(2S) = 0.0475$ GeV, compatible con el resultado experimental, pero significativamente alejado de los resultados de las simulaciones.

En la Tabla (5.2) se presentan algunos resultados extraídos de las funciones de onda que verifican la ecuación de Schrödinger, incluyendo la masa de los estados sin correcciones M_0 , el valor esperado del radio del mesón y la velocidad cuadrática media del quark constituyente (en unidades naturales con $c = 1$). Estas magnitudes dependen únicamente de los números cuánticos n y l , dado que la dependencia en el *spin* aparece recién cuando se incluyen las correcciones perturbativas. Las velocidades obtenidas resultan ser mucho menores que la velocidad de la luz, lo cual es consistente con la aproximación no relativista.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
$1S$	9.4884	1.0543	0.0821
$1P$	9.9166	1.8909	0.0722
$2S$	10.0458	6.3604	0.0863
$2P$	10.3073	10.1356	0.0912

Tabla 5.2: Algunos resultados extraídos de la función de onda del bottomonium correspondiente al ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ utilizando todas las correcciones del OGE.

No obstante, se observa un comportamiento no esperado en la monotonía de la velocidad, ya que el estado $1P$ presenta una velocidad menor que la del estado fundamental. Este fenómeno se observa en la literatura [200, 206, 217, 218], y una de las explicaciones posibles parte del comportamiento de

la función de onda en el origen para los estados con momento angular $l = 1$, que, a diferencia de los estados con $l = 0$, toma valores despreciables. Esto implica una menor probabilidad de que las partículas se superpongan, lo que simplifica el estudio de la interacción, mejorando la aproximación de dos cuerpos utilizada. Siguiendo esta cadena de razonamiento, se puede dar lugar a velocidades menores para estados con $l = 1$.

Las correcciones individuales para cada estado, así como las masas finales con correcciones incluidas, se muestran en la Tabla (5.3). Puede observarse, por ejemplo, que en los dos primeros estados todas las correcciones toman el mismo valor, con excepción del término asociado a la interacción *spin-spin*. Cabe aclarar que en la tabla se presentan sólo algunos dígitos significativos, mientras que los cálculos se realizaron con mayor precisión numérica.

Estado	Corrección relativista	Correcciones cinéticas	<i>Spin-órbita</i>	<i>Spin-spin</i>	Tensorial	Masa
$\eta_b(1S)$	-0.0254	-0.0022	0	-0.0652	0	9.3956(480)
$\gamma(1S)$	-0.0254	-0.0022	0	0.0217	0	9.4825(484)
$\chi_{b_0}(1P)$	-0.0099	-0.0134	-0.0265	0.0000	-0.0089	9.8579(504)
$\chi_{b_1}(1P)$	-0.0099	-0.0134	-0.0132	0.0000	0.0044	9.8844(506)
$h_b(1P)$	-0.0099	-0.0134	0	0.0001	0	9.8933(506)
$\chi_{b_2}(1P)$	-0.0099	-0.0134	0.0132	0.0000	-0.0009	9.9055(507)
$\eta_b(2S)$	-0.0650	-0.0306	0	-0.0652	0	9.9679(511)
$\gamma(2S)$	-0.0650	-0.0306	0	0.0217	0	10.0153(512)
$\chi_{b_0}(2P)$	-0.0322	-0.0216	-0.0265	0.0000	-0.0089	10.2391(523)
$\chi_{b_1}(2P)$	-0.0322	-0.0216	-0.0132	0.0000	0.0044	10.2625(524)
$h_b(2P)$	-0.0322	-0.0216	0	0.0001	0	10.2703(525)
$\chi_{b_2}(2P)$	-0.0322	-0.0216	0.0132	0.0000	-0.0009	10.2812(525)

Tabla 5.3: Valores de las correcciones para cada estado del bottomonium en GeV utilizando el ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ con todas las correcciones del OGE.

Las curvas de nivel del error en función de los distintos parámetros del modelo se muestran en la Fig. (5.2). A partir de estas gráficas, se observa que el error presenta una dependencia débil tanto con la masa del gluon como con la constante de acoplamiento, de modo que errores del mismo orden pueden obtenerse para una amplia región de estos parámetros. En particular, no puede descartarse a priori la posibilidad de una masa del gluon nula. En contraste, la masa del quark bottom y la tensión de la cuerda quedan mejor determinadas dentro de la región analizada.

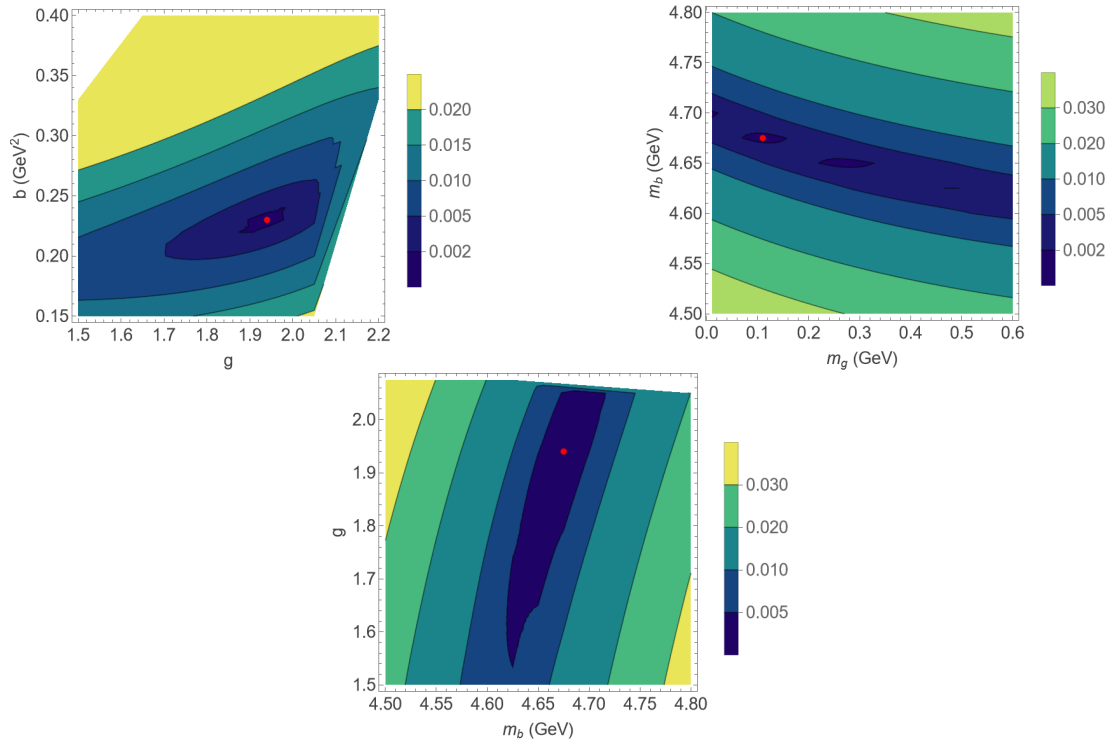


Figura 5.2: Curvas de nivel del error en función de distintos parámetros del modelo halladas a partir del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ incluyendo todas del correcciones del OGE. Con un punto rojo se representa el valor de los parámetros con menor error.

Esquema (b)

Repetiendo el ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$, pero considerando únicamente correcciones dependientes del *spin*, se obtiene un error mínimo para $g = 1.99$, $m_g = 0.05$ GeV, $b = 0.21$ GeV² y $m_b = 4.700$ GeV, con un error relativo de 0.00126. El espectro correspondiente se muestra en la Fig. (5.3). Nuevamente, el modelo reproduce el comportamiento general del espectro experimental, aunque los estados más afectados continúan siendo aquellos más sensibles a la interacción *spin-spin*.

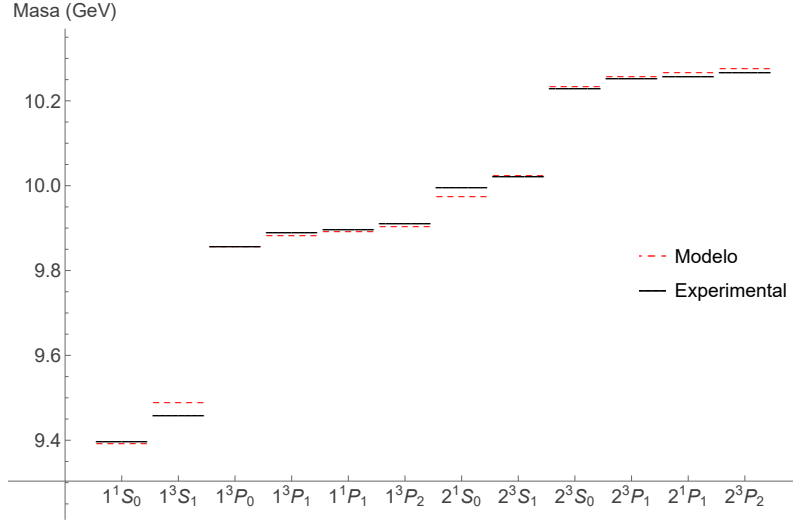


Figura 5.3: Espectro de masas del bottomonium obtenido del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ utilizando únicamente correcciones debido al *spin*. Las líneas punteadas corresponden a los resultados obtenidos utilizando el modelo. Las líneas continuas son los resultados experimentales presentados en la Tabla (5.12).

En este caso, se obtiene una separación hiperfina de $\Delta m(1S) = 0.0969$ GeV y $\Delta m(2S) = 0.0501$ GeV, valores que resultan mayores que los observados tanto experimentalmente como en simulaciones numéricas. Las cantidades extraídas de las funciones de onda se presentan en la Tabla (5.4) donde nuevamente se verifica la consistencia de la aproximación no relativista, aunque persiste el comportamiento no monótono de la velocidad entre los distintos estados. Se observa que las velocidades de los niveles excitados radialmente son menores en este ajuste que en el anterior.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
1S	9.4663	1.0458	0.0836
1P	9.8943	1.9151	0.0701
2S	10.0134	6.5207	0.0836
2P	10.2680	10.5355	0.0873

Tabla 5.4: Algunos resultados extraídos de la función de onda del bottomonium correspondiente al ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ utilizando únicamente correcciones dependientes del *spin*.

Las correcciones dependientes del *spin* y las masas finales se muestran en la Tabla (5.5). Las dependencias del error con los parámetros, ilustradas en la Fig. (5.4), resultan muy similares a las del caso con todas las correcciones, mostrando que es posible obtener errores del mismo orden con valores distintos de g y m_g .

Estado	<i>Spin</i> -órbita	<i>Spin-spin</i>	Tensorial	Masa
$\eta_b(1S)$	0	-0.07266	0	9.3936(531)
$\gamma(1S)$	0	0.0242	0	9.4905(535)
$\chi_{b_0}(1P)$	-0.0270	0.0000	-0.0090	9.8582(558)
$\chi_{b_1}(1P)$	-0.0135	0.0000	0.0045	9.8852(560)
$h_b(1P)$	0	0.0000	0	9.8943(560)
$\chi_{b_2}(1P)$	0.0135	0.0000	-0.0009	9.9069(561)
$\eta_b(2S)$	0	-0.0727	0	9.9758(566)
$\gamma(2S)$	0	0.0242	0	10.0259(567)
$\chi_{b_0}(2P)$	-0.0270	0.0000	-0.0090	10.2367(579)
$\chi_{b_1}(2P)$	-0.0135	0.0000	0.0045	10.2602(580)
$h_b(2P)$	0	0.0000	0	10.2680(581)
$\chi_{b_2}(2P)$	0.0135	0.0000	-0.0009	10.2789(581)

Tabla 5.5: Valores de las correcciones para cada estado del bottomonium en GeV utilizando el ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ únicamente con correcciones debido al *spin*.

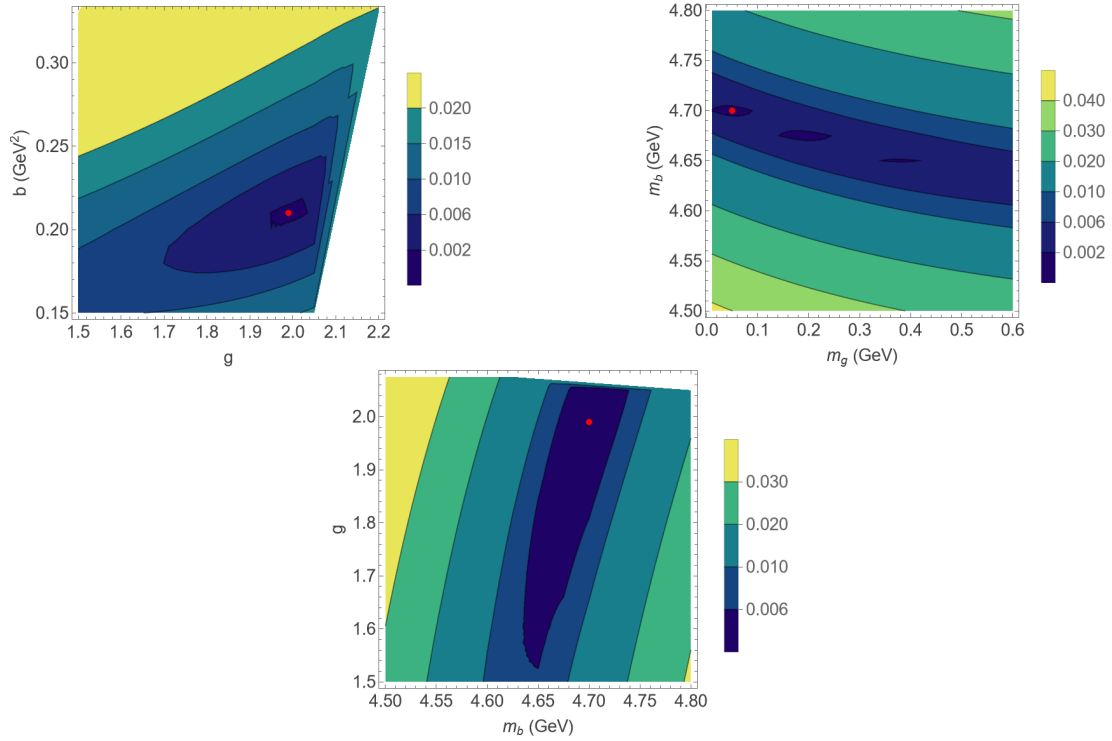


Figura 5.4: Curvas de nivel del error en función de distintos parámetros del modelo halladas a partir del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ incluyendo únicamente las correcciones de *spin*. Con un punto rojo se representa el valor de los parámetros con menor error.

Si comparamos estos resultados con los del esquema anterior, notamos que ambos esquemas permiten ajustar el espectro experimental del bottomonium, obteniendo errores pequeños y comparables. Se lograron ajustar los estados excitados ($n = 2$) incluso con un modelo no relativista, y la velocidad de los quarks constituyentes en estos estados probó ser mucho menor a la velocidad

de la luz, validando este ajuste. Si bien los parámetros obtenidos en ambos casos son similares, el esquema (b) favorece masas del gluon más pequeñas. En cuanto a los efectos hiperfinos, el ajuste que incluye todas las correcciones parece reproducir levemente mejor los valores experimentales, aunque en ambos enfoques estos efectos son sobrestimados.

En lo que respecta a las correcciones, en el esquema (a) se observa que tanto la corrección relativista como los términos cinéticos contribuyen de forma no despreciable. No obstante, se logra reproducir el espectro incluso cuando no se incluyen en el esquema (b). Las correcciones de tipo *spin-spin* presentan, en general, valores muy pequeños, con la excepción de algunos estados con momento angular orbital nulo ($l = 0$), donde su efecto se vuelve más significativo. Por su parte, las correcciones *spin-órbita* y tensoriales contribuyen a la separación de masas de los estados χ_b , tomando valores nulos para los demás estados. Como es esperable, al considerar el esquema (b), con correcciones únicamente de *spin*, las contribuciones *spin-spin* aumentan, mientras que el resto de las correcciones se mantienen prácticamente inalteradas.

Esquema (c)

Cuando el ajuste se restringe exclusivamente a los niveles con $n = 1$, incluyendo todas las correcciones del OGE, se obtiene un error mínimo para $g = 1.75$, $m_g = 0.04$ GeV, $b = 0.33$ GeV² y $m_b = 4.575$ GeV, con un error relativo a los datos experimentales de 0.00014. Como es de esperar, al reducir el número de estados ajustados manteniendo la misma cantidad de parámetros libres, el error disminuye aproximadamente un orden de magnitud.

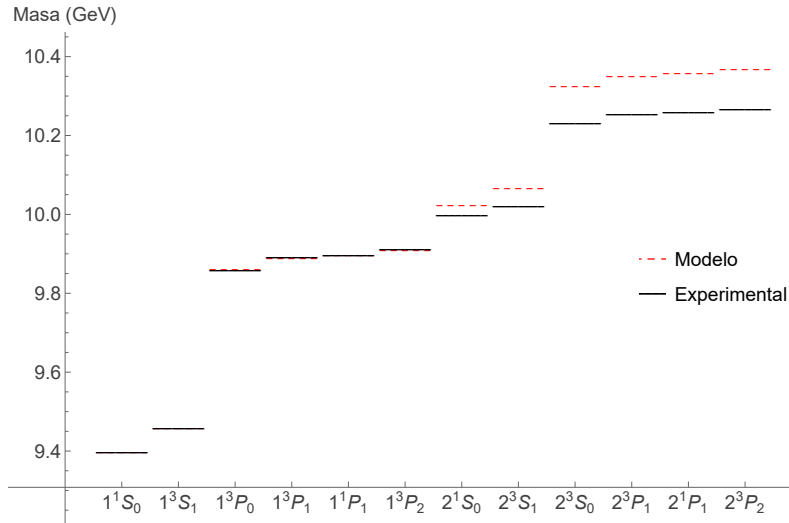


Figura 5.5: Espectro de masas del bottomonium obtenido del ajuste de los niveles con $n = 1$ utilizando todas las correcciones del OGE. Las líneas punteadas corresponden a los resultados obtenidos utilizando el modelo. Las líneas continuas son los resultados experimentales presentados en la Tabla (5.12).

El espectro correspondiente, mostrado en la Fig. (5.5), reproduce con gran precisión los estados fundamentales y resuelve en gran medida las discrepancias hiperfinas, obteniendo $\Delta m(1S) = 0.0625$ GeV, muy cercano a los valores experimentales. En contraste, los estados con $n = 2$ no se predicen adecuadamente, aunque conservan el comportamiento cualitativo esperado. Para estos niveles exci-

tados se obtiene $\Delta m(2S) = 0.0410$ GeV, cercano al valor experimental pero nuevamente alejado de los resultados del *lattice*.

Las magnitudes extraídas de las funciones de onda se presentan en la Tabla (5.6), donde se verifica nuevamente la validez de la aproximación no relativista. En esta tabla se presentan también los resultados para los niveles excitados radialmente, si bien no son ajustados, sí podemos predecir los valores con este modelo. Las correcciones individuales y las masas finales se muestran en la Tabla (5.7), destacándose nuevamente el rol de la interacción *spin-spin* en los desdoblamientos hiperfinos.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
1S	9.4714	1.0528	0.0821
1P	9.9270	1.7617	0.0846
2S	10.1066	5.5284	0.1019
2P	10.4085	8.4346	0.1117

Tabla 5.6: Algunos resultados extraídos de la función de onda del bottomonium correspondiente al ajuste de los niveles $n = 1$ utilizando todas las correcciones del OGE.

Estado	Corrección relativista	Correcciones cinéticas	<i>Spin-órbita</i>	<i>Spin-spin</i>	Tensorial	Masa
$\eta_b(1S)$	-0.0219	-0.0045	0	-0.0469	0	9.3980(318)
$\gamma(1S)$	-0.0219	-0.0045	0	0.0156	0	9.4606(320)
$\chi_{b_0}(1P)$	-0.0135	-0.0151	-0.0268	0.0000	-0.0089	9.8628(334)
$\chi_{b_1}(1P)$	-0.0135	-0.0151	-0.0134	0.0000	0.0045	9.8895(335)
$h_b(1P)$	-0.0135	-0.0151	0	0.0000	0	9.8985(335)
$\chi_{b_2}(1P)$	-0.0135	-0.0151	0.0134	0.0000	-0.0009	9.9109(336)
$\eta_b(2S)$	-0.0707	-0.0328	0	-0.0469	0	10.0261(338)
$\gamma(2S)$	-0.0707	-0.0328	0	0.0156	0	10.0670(339)
$\chi_{b_0}(2P)$	-0.0471	-0.0255	-0.0268	0.0000	-0.0089	10.3268(346)
$\chi_{b_1}(2P)$	-0.0471	-0.0255	-0.0134	0.0000	0.0045	10.3514(347)
$h_b(2P)$	-0.0471	-0.0255	0	0.0000	0	10.3595(347)
$\chi_{b_2}(2P)$	-0.0471	-0.0255	0.0134	0.0000	-0.0009	10.3710(348)

Tabla 5.7: Valores de las correcciones para cada estado en GeV utilizando el ajuste de los niveles $n = 1$ con todas las correcciones del OGE.

Los gráficos del error en función de los diferentes parámetros se presentan en la Fig. (5.6). Se observa una dependencia similar a la encontrada con los esquemas anteriores. En particular, la dependencia con la masa del gluon y con la constante de acoplamiento resulta leve, mientras que el mínimo del error se desplaza ahora hacia valores más bajos de estos parámetros.

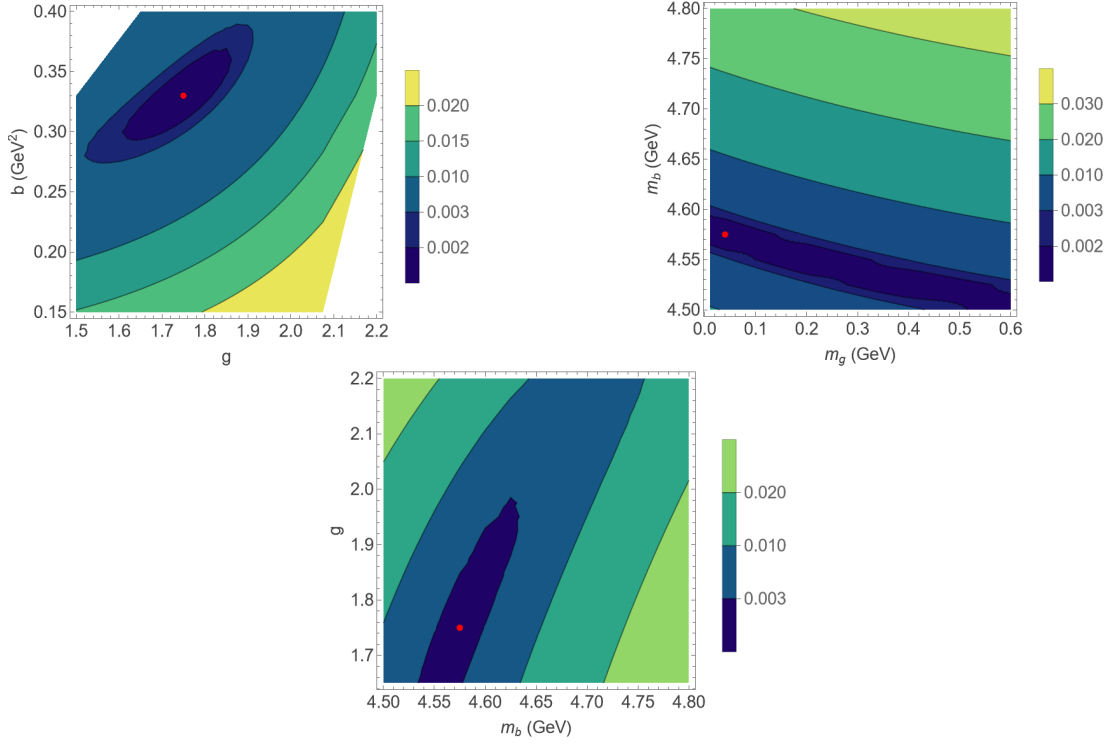


Figura 5.6: Curvas de nivel del error en función de distintos parámetros del modelo halladas a partir del ajuste de los niveles con $n = 1$ incluyendo todas las correcciones del OGE. Con un punto rojo se representa el valor de los parámetros con menor error.

Esquema (d)

Finalmente, al repetir el ajuste de los niveles con $n = 1$ considerando únicamente correcciones dependientes del *spin*, se obtiene un error mínimo para $g = 1.75$, $m_g = 0.11$ GeV, $b = 0.33$ GeV² y $m_b = 4.550$ GeV. El error relativo a los datos experimentales es 0.00015, del mismo orden que cuando usamos todas las correcciones.

El espectro reproducido por los parámetros que minimizan el error se muestra en la Fig. (5.7). Nuevamente, al ajustar únicamente los niveles con $n = 1$ se logra reproducir muy bien esta parte del espectro, mientras que los estados con $n = 2$ no se predicen adecuadamente. Las correcciones hiperfinas mejoran en comparación con el caso del ajuste conjunto de $n = 1$ y $n = 2$, obteniendo $\Delta m(1S) = 0.0623$ GeV y $\Delta m(2S) = 0.0409$ GeV, valores muy similares a los obtenidos con el esquema (c).

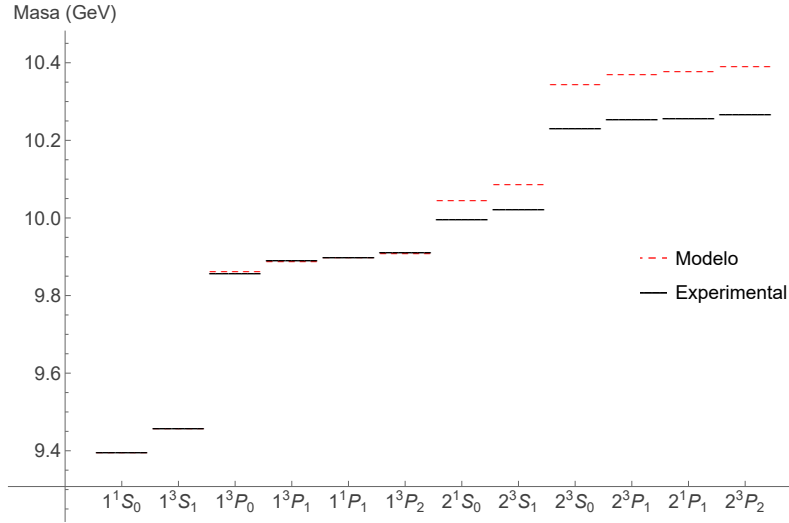


Figura 5.7: Espectro de masas del bottomonium obtenido del ajuste de los niveles con $n = 1$ utilizando únicamente correcciones debido a interacciones del *spin*. Las líneas punteadas corresponden a los resultados obtenidos utilizando el modelo. Las líneas continuas son los resultados experimentales presentados en la Tabla (5.12).

En la Tabla (5.8) se presentan los resultados obtenidos utilizando las funciones de onda que verifican la ecuación de Schrödinger. Nuevamente, se observa que las velocidades obtenidas son mucho menores que la velocidad de la luz, en concordancia con la aproximación no relativista. En este caso sí se obtiene un comportamiento monótono de la velocidad. En la Tabla (5.9) se encuentran los valores de las correcciones para cada estado, así como los resultados de las masas con correcciones incluidas.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
1S	9.4445	1.0570	0.0819
1P	9.8992	1.7679	0.0845
2S	10.0786	5.5671	0.1017
2P	10.3801	8.4906	0.1116

Tabla 5.8: Algunos resultados extraídos de la función de onda correspondiente al ajuste de los niveles $n = 1$ utilizando únicamente correcciones dependientes del *spin*.

Estado	<i>Spin</i> -órbita	<i>Spin-spin</i>	Tensorial	Masa
$\eta_b(1S)$	0	-0.0467	0	9.3978(318)
$\gamma(1S)$	0	0.0156	0	9.4601(320)
$\chi_{b_0}(1P)$	-0.0266	0.0000	-0.0089	9.8636(334)
$\chi_{b_1}(1P)$	-0.0133	0.0000	0.0045	9.8903(335)
$h_b(1P)$	0	0.0001	0	9.8992(335)
$\chi_{b_2}(1P)$	0.0133	0.0000	-0.0089	9.9116(336)
$\eta_b(2S)$	0	-0.0467	0	10.0480(338)
$\gamma(2S)$	0	0.0156	0	10.0889(339)
$\chi_{b_0}(2P)$	-0.0266	0.0000	-0.0089	10.3474(346)
$\chi_{b_1}(2P)$	-0.0133	0.0000	0.0045	10.3720(347)
$h_b(2P)$	0	0.0001	0	10.3801(347)
$\chi_{b_2}(2P)$	0.0133	0.0000	-0.0089	10.3915(348)

Tabla 5.9: Valores de las correcciones para cada estado, en GeV, utilizando el ajuste de los niveles $n = 1$ únicamente con correcciones debido al *spin*.

Al comparar los resultados del esquema (c) y (d) se observa que ambos esquemas logran reproducir los resultados experimentales de los estados con $n = 1$. Sin embargo, ambos fallan en la predicción de los estados excitados con $n = 2$. Los errores obtenidos son pequeños y del mismo orden de magnitud en ambos casos. Los parámetros ajustados resultan muy similares, difiriendo principalmente en el valor de la masa del gluon, que es menor cuando se consideran todas las correcciones. Un aspecto a destacar es que el valor obtenido para la constante de acoplamiento es menor en el ajuste restringido a los niveles con $n = 1$; para reproducir simultáneamente los niveles con $n = 2$ es necesario aumentar el acoplamiento, como se observa en la Tabla (5.10).

Ajuste	Esquema (a)	Esquema (b)	Esquema (c)	Esquema (d)
g	1.94	1.99	1.75	1.75
m_g (GeV)	0.11	0.05	0.04	0.11
b (GeV) ²	0.23	0.21	0.33	0.33
m_b (GeV)	4.675	4.700	4.575	4.550
Error	0.00132	0.00126	0.00014	0.00015

Tabla 5.10: Parámetros obtenidos a partir del ajuste del espectro del bottomonium para distintos esquemas de ajuste. El esquema (a) corresponde al ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ del bottomonium utilizando todas las correcciones del OGE. El esquema (b) corresponde a ajustar los mismos niveles pero utilizando sólo correcciones de *spin*. El esquema (c) es en el que se ajustan de los niveles con $n = 1$ del bottomonium incluyendo todas las correcciones de OGE y el esquema (d) es análogo pero incluyendo únicamente correcciones de *spin*.

Comparación con la literatura

En la Tabla (5.11) se recopilan distintos resultados teóricos disponibles en la literatura del espectro del bottomonium calculado utilizando diferentes modelos. Las primeras dos referencias, [219] y [188], utilizan modelos no relativistas, en el segundo caso considerando un gluon masivo y en el primer caso con una masa del gluon nula. Mientras que la referencia [220] obtiene el espectro a partir

de la ecuación de Bethe-Salpeter y la referencia [221] aplica un potencial relativista, en ambos casos se consideran gluones sin masa. Se observa que los valores obtenidos en este trabajo son consistentes con la literatura. En particular, la separación hiperfina de los estados resulta ser un problema para todas las referencias presentadas, en ciertos casos obteniendo separaciones más grandes a lo observado experimentalmente y otros más pequeñas. El mejor ajuste de esta separación viene de nuestro modelo cuando se ajustan solamente los niveles con $n = 1$.

Comparando nuestros resultados con los hallados en [219], si bien el modelo utilizado para describir el potencial de interacción entre los quarks no es el mismo, se obtienen masas del gluon muy similares cuando utilizamos los esquemas (b) y (c), así como una constante de acoplamiento cercana a la de los esquemas (a) y (b).

Estado	Esquema (a)	Esquema (b)	Esquema (c)	Esquema (d)	[219]	[188]	[220]	[221]
$\eta_b(1S)$	9.3956(480)	9.3936(531)	9.3980(318)	9.3978(318)	9.38	9.4191	9.405	9.4064
$\gamma(1S)$	9.4825(484)	9.4905(535)	9.4606(320)	9.4601(320)	9.46	9.4515	9.488	9.4511
$\chi_{b0}(1P)$	9.8579(504)	9.8582(558)	9.8628(334)	9.8636(334)	-	9.8949	9.831	9.8387
$\chi_{b1}(1P)$	9.8844(506)	9.8852(560)	9.8895(335)	9.8903(335)	-	9.9253	9.878	9.8657
$h_b(1P)$	9.8933(506)	9.8943(560)	9.8985(335)	9.8992(335)	-	9.9282	9.873	9.8729
$\chi_{b2}(1P)$	9.9055(507)	9.9069(561)	9.9109(336)	9.9116(336)	-	9.9457	9.927	9.8856
$\eta_b(2S)$	9.9679(511)	9.9758(566)	10.0261(338)	10.0480(338)	9.60	-	-	9.9989
$\gamma(2S)$	10.0153(512)	10.0259(567)	10.0670(339)	10.0889(339)	9.68	10.0435	-	10.0238
$\chi_{b0}(2P)$	10.2391(523)	10.2367(579)	10.3268(346)	10.3474(346)	-	10.2813	-	10.2449
$\chi_{b1}(2P)$	10.2625(524)	10.2602(580)	10.3514(347)	10.3720(347)	-	10.3070	-	10.2662
$h_b(2P)$	10.2703(525)	10.2680(581)	10.3595(347)	10.3801(347)	-	-	-	10.2717
$\chi_{b2}(2P)$	10.2812(525)	10.2789(581)	10.3710(348)	10.3915(348)	-	10.3226	-	10.2823

Tabla 5.11: Espectro del bottomonium en GeV obtenido en este trabajo y en distintos trabajos teóricos.

5.2. Ajuste del espectro del charmonium

A partir de los valores experimentales del espectro de masas del charmonium se determinó el conjunto de parámetros del modelo (g, m_g, b, m_c) que minimiza el error relativo respecto a los datos experimentales. Para ello se utilizaron los valores reportados por el PDG 2025, que se presentan en la Tabla (5.12).

A diferencia del caso del bottomonium, la menor masa del quark charm implica velocidades internas más grandes, por lo que se espera que la aproximación no relativista sea menos precisa y que el ajuste global resulte de peor calidad. En este contexto, se exploraron los rangos de parámetros indicados a continuación, analizando la sensibilidad del error a cada uno de ellos.

$$\begin{aligned}
 1.6 &\leq g \leq 2.1, \\
 0.01 \text{ GeV} &\leq m_g \leq 0.60 \text{ GeV}, \\
 0.15 \text{ GeV}^2 &\leq b \leq 0.40 \text{ GeV}^2, \\
 1.15 \text{ GeV} &\leq m_c \leq 1.45 \text{ GeV}.
 \end{aligned}$$

Estado	Masa (GeV)	j^{pc}	$n^{2s+1}l_j$
$\eta_c(1S)$	2.9839(4)	0^{-+}	1^1S_0
$J/\psi(1S)$	3.096900(6)	1^{--}	1^3S_1
$\chi_{c0}(1P)$	3.41471(30)	0^{++}	1^3P_0
$\chi_{c1}(1P)$	3.51067(5)	1^{++}	1^3P_1
$h_c(1P)$	3.52537(14)	1^{+-}	1^1P_1
$\chi_{c2}(1P)$	3.55617(7)	2^{++}	1^3P_2
$\eta_c(2S)$	3.6377(11)	0^{-+}	2^1S_0
$\psi(2S)$	3.68610(6)	1^{--}	2^3S_1

Tabla 5.12: Valores experimentales del espectro de masas del charmonium utilizados para ajustar los parámetros del modelo.

Esquema (a)

Cuando se ajustan simultáneamente los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ del espectro del charmonium utilizando todas las correcciones del OGE, obtenemos un mínimo en $g = 1.90$, $m_g = 0.06$ GeV, $b = 0.25$ GeV² y $m_c = 1.250$ GeV. Este conjunto de parámetros presenta un error relativo a los datos experimentales de 0.00356. El espectro producido se muestra en la Fig. (5.8).

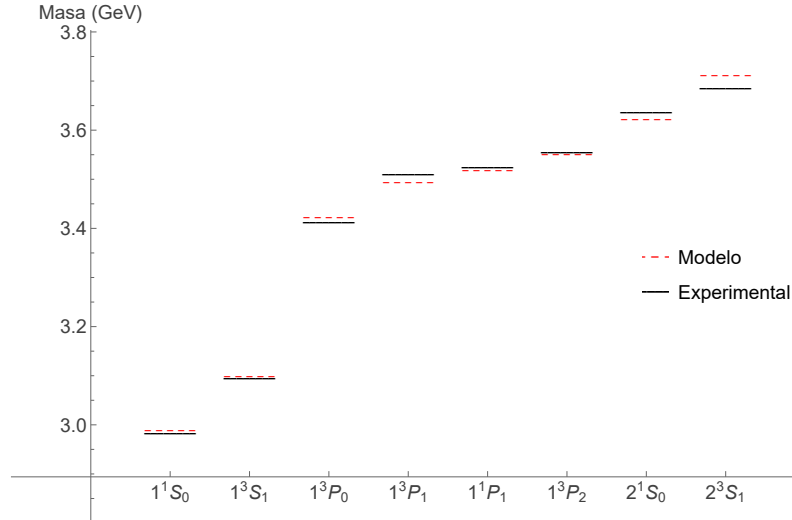


Figura 5.8: Espectro de masas del charmonium obtenido del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ utilizando todas las correcciones del OGE. Las líneas punteadas corresponden a los resultados obtenidos utilizando el modelo. Las líneas continuas son los resultados experimentales presentados en la Tabla (5.12).

El espectro calculado reproduce de forma razonable el comportamiento general de los datos experimentales, aunque con un error mayor que en el caso del bottomonium. Este resultado es esperable, dado que la menor masa del quark charm hace que la aproximación no relativista sea menos precisa. Las mayores discrepancias aparecen en los estados con $n = 2$, donde la única contribución relevante proviene de la interacción *spin-spin*. En particular, se obtiene una separación $\Delta m(2S) = 0.0883$ GeV, significativamente mayor que la observada experimentalmente. En contraste, los estados con

$n = 1$ se reproducen adecuadamente, obteniéndose una separación entre los estados 1^1S_0 y 1^3S_1 de $\Delta m(1S) = 0.1103$ GeV, compatible tanto con los valores experimentales como con resultados numéricos del *lattice*.

Las magnitudes extraídas de las funciones de onda que satisfacen la ecuación de Schrödinger se presentan en la Tabla (5.13). Al igual que en el caso del bottomonium, se muestran la masa sin correcciones M_0 , el radio esperado del mesón y la velocidad cuadrática media del quark constituyente, en unidades donde $c = 1$. Como era de esperar, las velocidades obtenidas son mayores que en el caso del bottomonium, reflejando la menor masa del quark charm. Mientras que los estados con $n = 1$ aún pueden describirse dentro de una aproximación no relativista, los estados excitados con $n = 2$ presentan valores de $\langle v^2 \rangle$ más elevados, lo que dificulta describirlos como no relativistas.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
$1S$	3.1474	2.0112	0.2538
$1P$	3.6219	3.1272	0.3088
$2S$	3.8696	17.4107	0.3735

Tabla 5.13: Algunos resultados extraídos de la función de onda del charmonium correspondiente al ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ utilizando todas las correcciones del OGE.

En la Tabla (5.14) se presentan los valores de las correcciones para cada estado, junto con las masas finales obtenidas. Se observa que las correcciones relativistas son mayores para los estados con $n = 2$, donde esperamos que los efectos relativistas sean más notorios. Por otro lado, el efecto conjunto de las correcciones cinéticas resulta ser del orden de las demás correcciones, motivando el estudio del caso donde estas correcciones no se tienen en cuenta.

Estado	Corrección relativista	Correcciones cinéticas	<i>Spin-órbita</i>	<i>Spin-spin</i>	Tensorial	Masa
$\eta_b(1S)$	-0.0624	-0.0122	0	-0.0827	0	2.9902(140)
$J/\psi(1S)$	-0.0624	-0.0122	0	0.0276	0	3.1005(146)
$\chi_{c0}(1P)$	-0.0644	-0.0384	-0.0714	0.0000	-0.0239	3.4237(161)
$\chi_{c1}(1P)$	-0.0644	-0.0384	-0.0357	0.0000	0.0120	3.4952(165)
$h_c(1P)$	-0.0644	-0.0384	0	0.0001	0	3.5192(166)
$\chi_{c2}(1P)$	-0.0644	-0.0384	0.0357	0.0000	-0.0024	3.5523(167)
$\eta_c(2S)$	-0.2761	-0.0777	0	-0.0827	0	3.6245(171)
$\psi(2S)$	-0.2761	-0.0777	0	0.0276	0	3.7128(173)

Tabla 5.14: Valores de las correcciones para cada estado del charmonium en GeV utilizando el ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ con todas las correcciones del OGE.

La dependencia del error con los distintos parámetros del modelo se muestra en la Fig. (5.9). Se observa un comportamiento global muy similar al obtenido para el bottomonium. La dependencia con la masa del gluon y la constante de acoplamiento es débil, y se observan diversos mínimos locales para distintas masas del gluon.

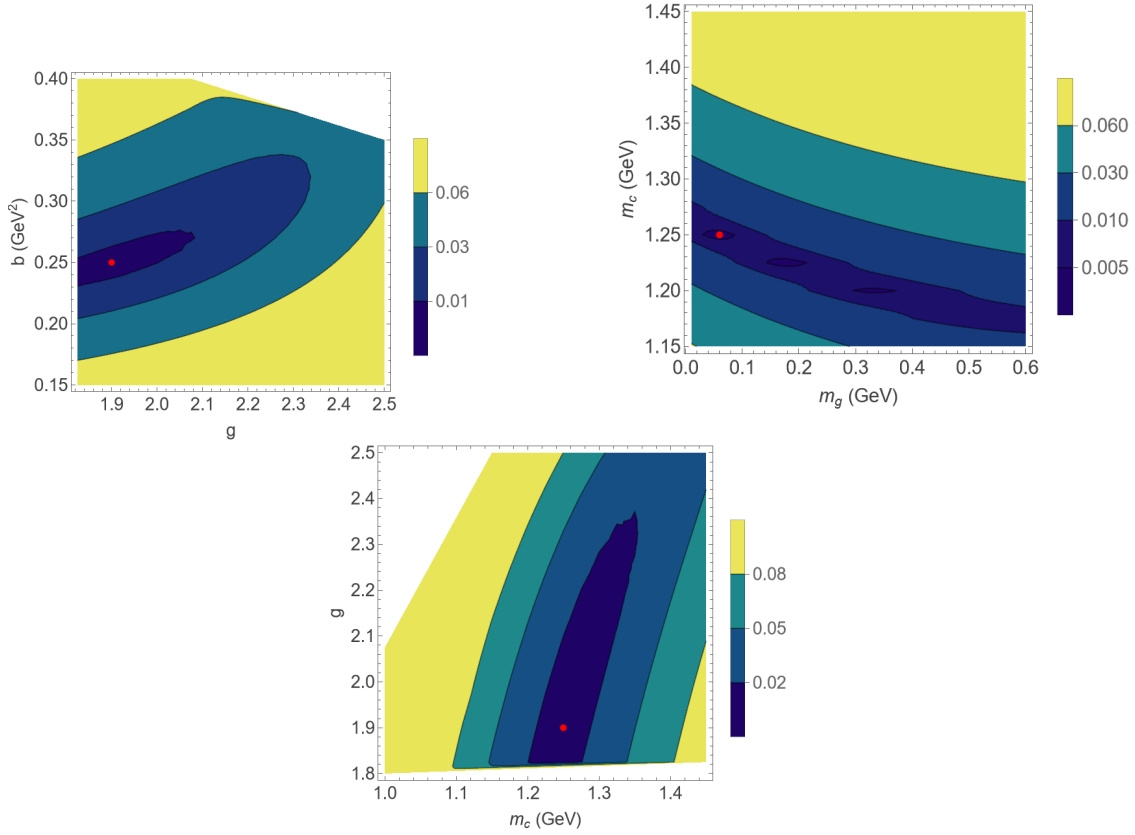


Figura 5.9: Curvas de nivel del error en función de distintos parámetros del modelo halladas a partir del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ incluyendo todas del correcciones del OGE. Con un punto rojo se representa el valor de los parámetros con menor error.

Esquema (b)

Al repetir el ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ considerando únicamente las correcciones dependientes del *spin*, se obtiene un mínimo en $g = 2.10$, $m_g = 0.01$ GeV, $b = 0.19$ GeV² y $m_c = 1.325$ GeV. Este conjunto de parámetros tiene un error relativo a los datos experimentales de 0.00563 y el espectro producido se observa en la Fig. (5.10).

En este caso, el modelo vuelve a reproducir el comportamiento general del espectro experimental, aunque el ajuste resulta globalmente peor que cuando se incluyen todas las correcciones. El error aumenta levemente y las mayores discrepancias se observan en los estados 1^1S_0 y 1^3S_1 , cuya separación resulta $\Delta m(1S) = 0.1299$ GeV, mayor tanto a los resultados experimentales, como al obtenido al incluir todas las correcciones. Un comportamiento similar se observa para los estados 2^1S_0 y 2^3S_1 , con una separación $\Delta m(2S) = 0.0948$ GeV.

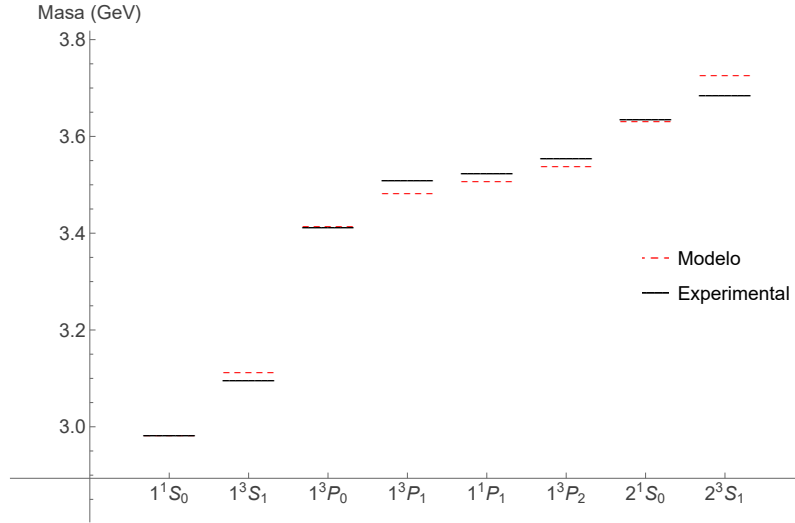


Figura 5.10: Espectro de masas del charmonium obtenido del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ utilizando únicamente correcciones debido a interacciones del *spin*. Las líneas punteadas corresponden a los resultados obtenidos utilizando el modelo. Las líneas continuas son los resultados experimentales presentados en la Tabla (5.12).

Los resultados extraídos de las funciones de onda correspondientes a este ajuste se presentan en la Tabla (5.15). Se observa que las velocidades cuadráticas medias resultan menores que en el caso con todas las correcciones, a pesar de que el ajuste global es peor. Sin embargo, el radio esperado que se obtuvo para los estados radialmente excitados es mucho mayor al esperado para un hadrón, mostrando algún problema en el modelo. Las correcciones dependientes del *spin* y las masas finales correspondientes se muestran en la Tabla (5.16).

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
$1S$	3.0810	2.0423	0.2344
$1P$	3.5079	3.2841	0.2645
$2S$	3.7038	19.2122	0.3192

Tabla 5.15: Algunos resultados extraídos de la función de onda del charmonium correspondiente al ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ utilizando únicamente correcciones dependientes del *spin*.

Estado	<i>Spin</i> -órbita	<i>Spin-spin</i>	Tensorial	Masa
$\eta_c(1S)$	0	-0.0975	0	2.9836(209)
$J/\psi(1S)$	0	0.0325	0	3.1135(217)
$\chi_{c0}(1P)$	-0.0691	0.0000	-0.0230	3.4158(240)
$\chi_{c1}(1P)$	-0.0345	0.0000	0.0115	3.4849(246)
$h_c(1P)$	0	0.0000	0	3.5079(247)
$\chi_{c2}(1P)$	0.0345	0.0000	-0.0023	3.5402(250)
$\eta_c(2S)$	0	-0.0975	0	3.6327(255)
$\psi(2S)$	0	0.0325	0	3.7275(259)

Tabla 5.16: Valores de las correcciones para cada estado del charmonium, en GeV, utilizando el ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ únicamente con correcciones debido al *spin*.

Los gráficos del error en función de los diferentes parámetros se observan en la Fig. (5.11). Las dependencias con los parámetros son muy similares al esquema anterior. Se logra ajustar el charmonium con un error del mismo orden que antes pero con una masa del gluon y constante de acoplamiento distintas.

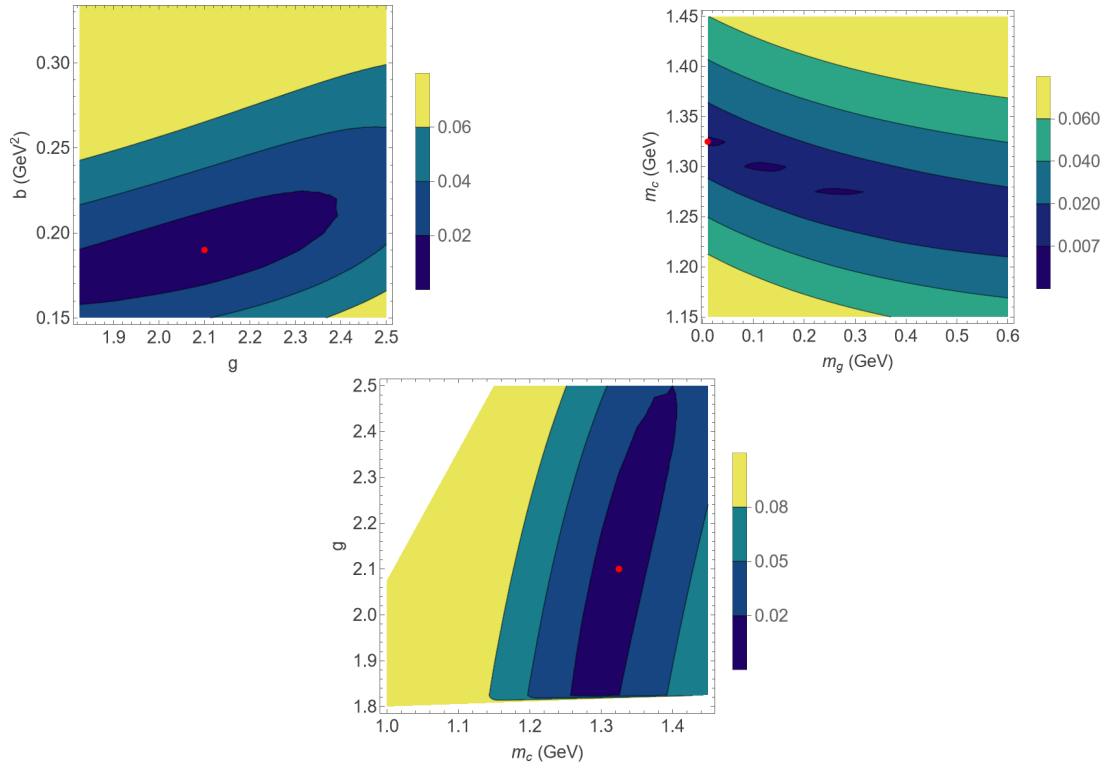


Figura 5.11: Curvas de nivel del error en función de distintos parámetros del modelo halladas a partir del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ incluyendo únicamente las correcciones de *spin*. Con un punto rojo se representa el valor de los parámetros con menor error.

Esquema (c)

Al restringir el ajuste exclusivamente a los niveles con número cuántico $n = 1$ e incluir todas las correcciones del OGE, se obtiene un mínimo para $g = 1.925$, $m_g = 0.03$ GeV, $b = 0.26$ GeV² y $m_c = 1.250$ GeV, con un error relativo respecto a los datos experimentales de 0.00152. Este error disminuye respecto al ajuste simultaneo de los estados base y los excitados radialmente, pero continúa siendo mayor que el obtenido ajustando bottomonium.

El espectro correspondiente a este conjunto de parámetros se muestra en la Fig. (5.12). Los estados con $n = 1$ se reproducen con gran precisión, incluyendo adecuadamente los efectos de las correcciones hiperfinas en los niveles fundamentales, obteniendo una separación de $\Delta m(1S) = 0.1194$ GeV muy próxima a los resultados experimentales. El comportamiento del primer estado con $n = 2$ se predice de forma cualitativamente correcta; sin embargo, el estado 2^3S_0 no se reproduce adecuadamente, lo que conduce a una separación hiperfina para los niveles excitados de $\Delta m(2S) = 0.0952$ GeV, alejada del valor experimental.

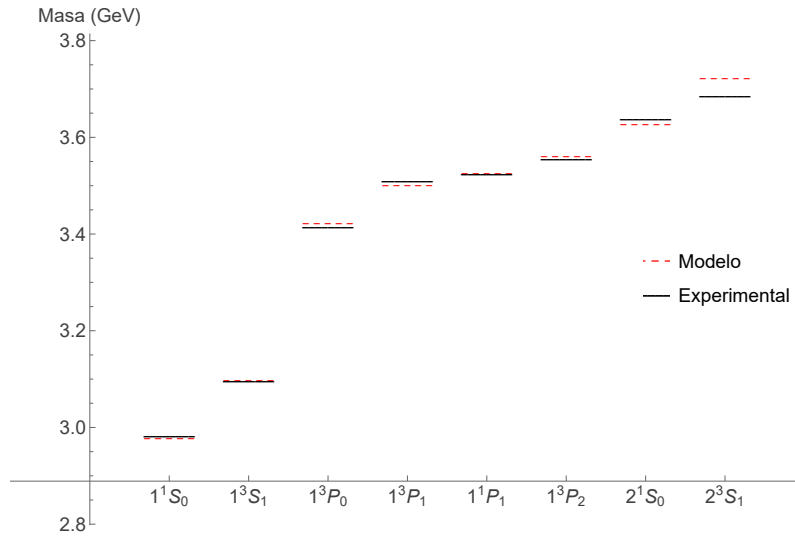


Figura 5.12: Espectro de masas del charmonium obtenido del ajuste de los niveles con $n = 1$ utilizando todas las correcciones del OGE. Las líneas punteadas corresponden a los resultados obtenidos utilizando el modelo. Las líneas continuas son los resultados experimentales presentados en la Tabla (5.12).

En la Tabla (5.17) se presentan las magnitudes calculadas a partir de las funciones de onda que satisfacen la ecuación de Schrödinger. Las velocidades se mantienen igual que en los casos anteriores, y el radio de los estados excitados nuevamente muestra un problema. Las correcciones individuales y las masas finales se muestran en la Tabla (5.18).

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
$1S$	3.1503	1.9804	0.2618
$1P$	3.6395	3.0826	0.3179
$2S$	3.8938	16.9184	0.3844

Tabla 5.17: Algunos resultados extraídos de la función de onda del charmonium correspondiente al ajuste de los niveles $n = 1$ utilizando todas las correcciones del OGE.

Estado	Corrección relativista	Correcciones cinéticas	$Spin$ -órbita	$Spin$ - $spin$	Tensorial	Masa
$\eta_c(1S)$	-0.0681	-0.0156	0	-0.0937	0	2.9790(148)
$J/\psi(1S)$	-0.0681	-0.0156	0	0.0312	0	3.0984(153)
$\chi_{c0}(1P)$	-0.0688	-0.0453	-0.0795	0.0000	-0.0265	3.4246(169)
$\chi_{c1}(1P)$	-0.0688	-0.0453	-0.0397	0.0000	0.0133	3.5017(174)
$h_c(1P)$	-0.0688	-0.0453	0	0.0000	0	3.5274(175)
$\chi_{c2}(1P)$	-0.0688	-0.0453	0.0397	0.0000	-0.0027	3.5632(176)
$\eta_c(2S)$	-0.2969	-0.0930	0	-0.0937	0	3.6286(180)
$\psi(2S)$	-0.2969	-0.0930	0	0.0312	0	3.7238(183)

Tabla 5.18: Valores de las correcciones para cada estado del charmonium, en GeV, utilizando el ajuste de los niveles $n = 1$ con todas las correcciones del OGE.

Los gráficos del error en función de los diferentes parámetros se presentan en la Fig. (5.13). Observamos una dependencia similar al caso del ajuste de $n = 1$ y $n = 2$.

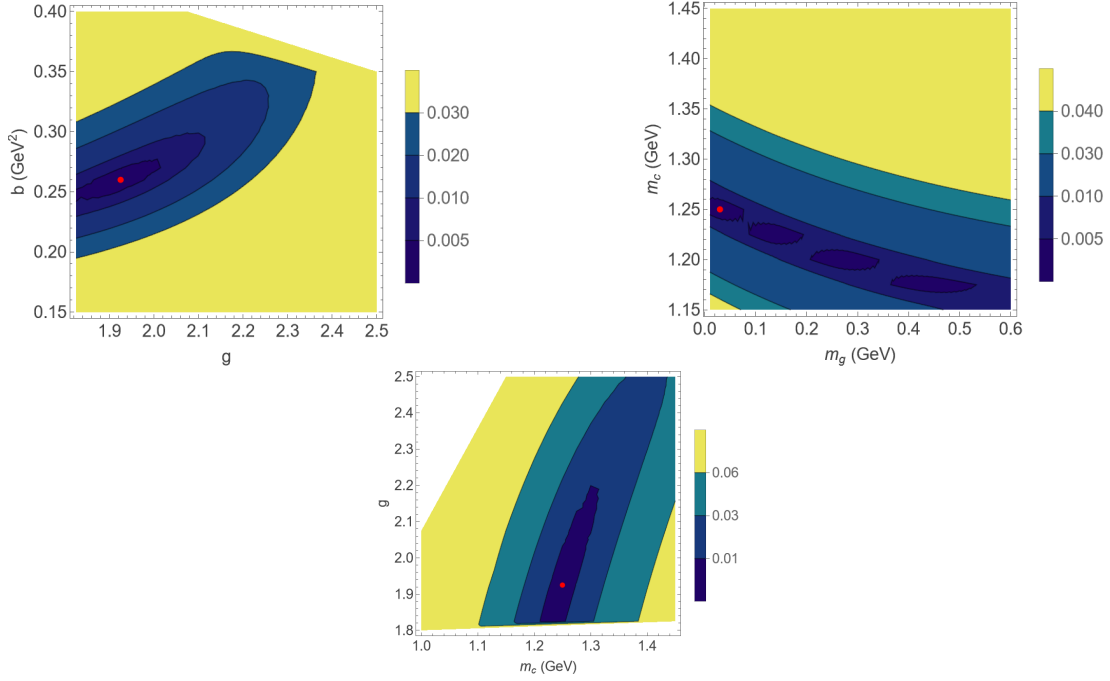


Figura 5.13: Curvas de nivel del error en función de distintos parámetros del modelo halladas a partir del ajuste de los niveles con $n = 1$ incluyendo todas las correcciones del OGE. Con un punto rojo se representa el valor de los parámetros con menor error.

Esquema (d)

Cuando el ajuste de los niveles con $n = 1$ se realiza considerando únicamente correcciones dependientes del *spin*, se obtiene un mínimo para $g = 2.00$, $m_g = 0.09$ GeV, $b = 0.22$ GeV² y $m_c = 1.250$ GeV. El error relativo a los datos experimentales es de 0.00189, del mismo orden que cuando usamos todas las correcciones.

El espectro producido por los parámetros con menor error se observa en la Fig. (5.14). Nuevamente, ajustando solamente los niveles con $n = 1$ se logra reproducir muy bien esta parte del espectro. Sin embargo, no se predicen bien ninguno de los niveles con $n = 2$. Las correcciones hiperfinas dan $\Delta m(1S) = 0.1201$ GeV y $\Delta m(2S) = 0.0928$ GeV, muy similares al caso donde se utilizan todas las correcciones. Como antes, la separación correspondiente a $n = 1$ resulta cercana a la experimental, mientras que para $n = 2$ se encuentra sobrestimada.

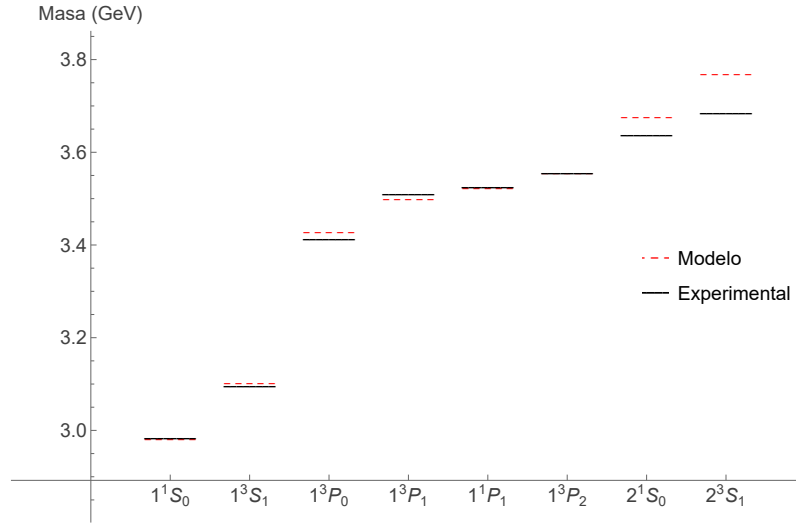


Figura 5.14: Espectro de masas del charmonium obtenido del ajuste de los niveles con $n = 1$ utilizando únicamente correcciones debido a interacciones del *spin*. Las líneas punteadas corresponden a los resultados obtenidos utilizando el modelo. Las líneas continuas son los resultados experimentales presentados en la Tabla (5.12).

En la Tabla (5.19) se encuentran los resultados obtenidos a partir de las funciones de onda correspondientes a este ajuste. Nuevamente, los valores de las velocidades se sitúan en el límite de validez de la aproximación no relativista, y el radio de los estados excitados es problemático. Las correcciones dependientes del *spin* y las masas finales correspondientes se muestran en la Tabla (5.20).

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
$1S$	3.0723	2.0552	0.2439
$1P$	3.5238	3.2384	0.2881
$2S$	3.7477	18.6729	0.3482

Tabla 5.19: Algunos resultados extraídos de la función de onda del charmonium correspondiente al ajuste de los niveles $n = 1$ utilizando únicamente correcciones dependientes del *spin*.

Estado	<i>Spin</i> -órbita	<i>Spin-spin</i>	Tensorial	Masa
$\eta_c(1S)$	0	-0.0901	0	2.9822(172)
$J/\psi(1S)$	0	0.0300	0	3.1023(179)
$\chi_{c0}(1P)$	-0.0714	-0.0001	-0.0240	3.4282(197)
$\chi_{c1}(1P)$	-0.0357	-0.0001	0.0120	3.5000(203)
$h_c(1P)$	0	0.0003	0	3.5241(204)
$\chi_{c2}(1P)$	0.0357	-0.0001	-0.0024	3.5569(205)
$\eta_c(2S)$	0	-0.0901	0	3.6781(210)
$\psi(2S)$	0	0.0300	0	3.7709(213)

Tabla 5.20: Valores de las correcciones para cada estado del charmonium, en GeV, utilizando el ajuste de los niveles $n = 1$ únicamente con correcciones debido a la *spin*.

Los gráficos del error en función de los diferentes parámetros se presentan en la Fig. (5.15). Observamos una dependencia similar al caso del ajuste de $n = 1$ y $n = 2$.

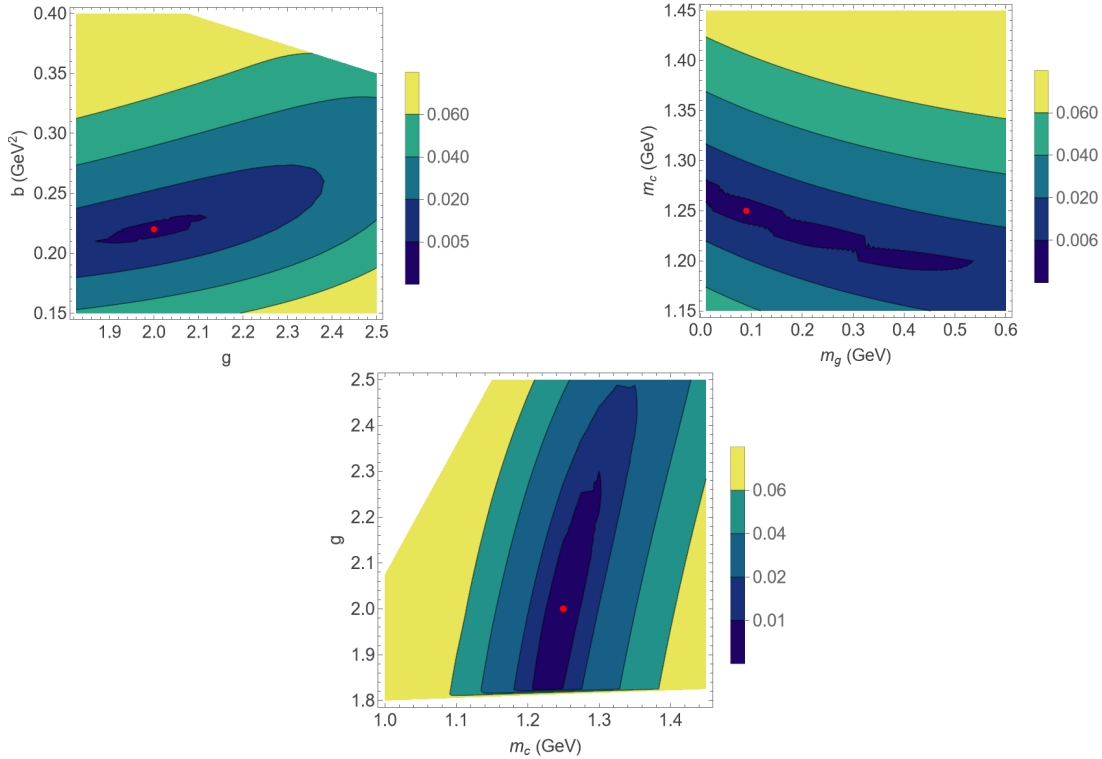


Figura 5.15: Curvas de nivel del error en función de distintos parámetros del modelo halladas a partir del ajuste de los niveles con $n = 1$ incluyendo únicamente las correcciones de *spin*. Con un punto rojo se representa el valor de los parámetros con menor error.

En conjunto, todos los esquemas utilizados permiten ajustar el espectro experimental del charmonium. Como es esperado, se obtiene un error relativo a los datos experimentales menor cuando se ajustan únicamente los niveles con $n = 1$. Sin embargo, comparando los esquemas (a) y (c) contra los esquemas (b) y (d), los errores hallados resultan comparables. El esquema que incluye todas

las correcciones describe de manera más precisa los efectos hiperfinos para los estados con $n = 1$, mientras que para $n = 2$ estos efectos son sobrestimados en ambos enfoques.

Resulta notable que incluso los estados excitados con $n = 2$ puedan describirse dentro de un modelo no relativista, aunque en este caso las velocidades cuadráticas medias obtenidas no son particularmente pequeñas. Si bien el error obtenido al ajustar únicamente los niveles con $n = 1$ es pequeño, no alcanza los valores observados en el bottomonium, lo que sugiere que la aproximación no relativista resulta menos precisa para el sistema de charmonium. El contraste entre ambos sistemas refuerza la interpretación del modelo como una descripción válida en el régimen de quarks pesados, cuya calidad disminuye al reducir la masa de los quarks constituyentes.

En cuanto a las correcciones individuales, el término de corrección relativista a la energía cinética toma valores más elevados para el charmonium que para el bottomonium como es esperado. De la misma forma, las correcciones cinéticas también resultan mayores en el caso de charmonium, debido a las velocidades más elevadas.

A diferencia del caso del bottomonium, no parece ser necesario aumentar la constante de acoplamiento para ajustar los niveles $n = 2$, aunque en este caso tenemos un menor número de estados excitados para ajustar. Los valores ajustados para la masa efectiva del gluon son menores en el caso del charmonium que en el bottomonium, aunque la dependencia del error con este parámetro es muy débil. Un resumen de los resultados obtenidos con los distintos esquemas de ajuste se puede observar en la Tabla (5.21).

Ajuste	Esquema (a)	Esquema (b)	Esquema (c)	Esquema (d)
g	1.90	2.10	1.925	2.00
m_g (GeV)	0.06	0.01	0.03	0.09
b (GeV) ²	0.25	0.19	0.26	0.22
m_c (GeV)	1.250	1.325	1.250	1.250
Error	0.00356	0.00563	0.00152	0.00189

Tabla 5.21: Parámetros obtenidos a partir del ajuste del espectro del charmonium para distintos esquemas de ajuste. El esquema (a) corresponde al ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ del charmonium utilizando todas las correcciones del OGE. El esquema (b) corresponde a ajustar los mismos niveles pero utilizando sólo correcciones de *spin*. El esquema (c) es en el que se ajustan los niveles con $n = 1$ del charmonium incluyendo todas las correcciones de OGE y el esquema (d) es análogo pero incluyendo únicamente correcciones de *spin*.

Al considerar un modelo con gluones masivos, no resulta necesario tratar el término *spin-spin* de forma no perturbativa para obtener una separación hiperfina apreciable. Sin embargo, el problema parece ser el opuesto: aún cuando se lo considera como una perturbación, dichas separaciones tienden a sobrestimarse. En general, para los estados con $n = 1$ el efecto puede reproducirse al ajustar únicamente los estados no excitados; pero, en todos los casos analizados, las separaciones correspondientes a los estados con $n = 2$ fueron sobrestimadas.

Comparación con la literatura

En la Tabla (5.22) se recopilan distintos resultados teóricos disponibles en la literatura del espectro del charmonium calculado utilizando diferentes modelos. Se extraen los resultados de las mismas referencias que en el caso de bottomonium, a excepción de la última, que obtiene el espectro del charmonium a partir de un modelo no relativista. Nuevamente, se observa que los valores obtenidos en este trabajo son consistentes con la literatura. Todos los modelos concuerdan en el valor aproximado de la separación hiperfina de los niveles con $n = 1$, que parecería logar modelarse mejor que en el bottomonium.

En el caso del esquema (c), obtenemos una masa del gluon prácticamente nula. Para este esquema de ajuste, podemos comparar los parámetros hallados con los de [188] y [206]. Ambos artículos encuentran parámetros muy similares entre sí ya que utilizan en mismo modelo. Sin embargo, en nuestro caso obtenemos una tensión de la cuerda del mismo orden, pero una constante de acoplamiento menor. Esta diferencia se puede deber a las variaciones en los modelos utilizados.

Estado	Esquema (a)	Esquema (b)	Esquema (c)	Esquema (d)	[219]	[188]	[220]	[206]
$\eta_c(1S)$	2.9902(140)	2.9836(209)	2.9790(148)	2.9822(172)	2.98	2.98339	2.928	2.9924
$J/\psi(1S)$	3.1005(146)	3.1135(217)	3.0984(153)	3.1023(179)	3.10	3.0969	3.111	3.0917
$\chi_{c0}(1P)$	3.4237(161)	3.4158(240)	3.4246(169)	3.4282(197)	-	3.4147	3.321	3.4258
$\chi_{c1}(1P)$	3.4952(165)	3.4849(246)	3.5017(174)	3.5000(203)	-	3.5107	3.421	3.5018
$h_c(1P)$	3.5192(166)	3.5079(247)	3.5274(175)	3.5241(204)	-	3.5254	3.582	3.5105
$\chi_{c2}(1P)$	3.5523(167)	3.5402(250)	3.5632(176)	3.5569(205)	-	3.5562	3.818	3.5481
$\eta_c(2S)$	3.6245(171)	3.6327(255)	3.6286(180)	3.6781(210)	3.64	3.6375	-	3.6317
$\psi(2S)$	3.7128(173)	3.7275(259)	3.7238(183)	3.7709(213)	3.69	3.6681	-	3.6714

Tabla 5.22: Espectro del charmonium en GeV obtenido en este trabajo y en distintos trabajos teóricos.

5.3. Conclusiones parciales

A lo largo de este capítulo se analizó si el modelo no relativista con gluones masivos logra ajustar el espectro de mesones pesados. Se observó que el modelo reproduce de manera razonable las masas de los estados, obteniendo errores del orden de 10^{-3} . Además, este estudio permitió fijar los parámetros del potencial y estudiar el rol de las distintas correcciones a la energía.

El análisis muestra que el espectro de mesones pesados no fija la masa del gluon de forma absoluta, y que esta puede tomar valores en todo el espacio de parámetros considerado y aun así lograr un buen ajuste de los datos, incluso en el límite de gluon sin masa. En contraste, la masa del quark constituyente y la tensión de la cuerda resultan mejor determinadas. Por otro lado, los efectos hiperfinos se describen de forma cualitativa correcta, aunque tienden a ser sobrestimados, especialmente en estados excitados.

En el caso del charmonium, debido a que la masa del quark charm es menor a la del bottom, se incrementa la contribución de los efectos relativistas, obteniendo mayores discrepancias con los resultados de los estados excitados.

Capítulo 6

Espectro de los tetraquarks

En este capítulo continuamos el estudio de sistemas hadrónicos pesados compuestos por quarks bottom y charm utilizando el modelo no relativista con gluones masivos. Esta aproximación simplifica enormemente dicho estudio, que en el caso contrario debería realizarse a partir de las ecuaciones de Bethe-Salpeter [222,223]. A partir de los parámetros del modelo obtenidos en el capítulo anterior, se analizan los diquarks pesados, calculando sus masas y otras propiedades estructurales. Finalmente, el modelo se aplica al estudio de tetraquarks pesados en el esquema diquark–antidiquark, tanto en el sector *all-bottom* como *all-charm*. Para estos sistemas se presentan los espectros obtenidos, se analiza su estabilidad frente a decaimientos tipo *fall-apart* y, en el caso del sector charm, se comparan las predicciones con resultados experimentales recientes.

6.1. Espectro de los diquarks

Una vez determinados los parámetros del modelo, los utilizamos para calcular el espectro de los diquarks. Al igual que en la sección anterior, estudiaremos dos casos: el diquark compuesto por dos quarks bottom y el diquark compuesto por dos quarks charm, utilizando los parámetros obtenidos de ajustar el espectro del bottomonium y charmonium respectivamente.

Como analizamos anteriormente, los diquarks pueden estar en dos estados de color: antitriplete y sexteto. En la Sección 3.3 calculamos los factores de color de cada uno, y determinamos que únicamente el antitriplete es un estado atractivo. Por esta razón, en este trabajo solamente consideraremos el estado antitriplete para los diquarks, con un factor de color $2/3$.

Para el estudio del espectro de los diquarks, utilizamos el mismo modelo que en la sección anterior, ahora variando el factor de color. En lugar del factor $4/3$ utilizado para el mesón, el factor para los diquarks que nos interesa es la mitad: $2/3$. Motivados por este cambio, en la literatura es usual cambiar también el valor de la tensión de la cuerda b , utilizando para el caso de diquarks $b/2$ [188,206]. Para este trabajo adoptamos esta convención, y de esta forma, el potencial no perturbado del diquark es exactamente la mitad que el del mesón.

Al trabajar con un sistema de dos quarks del mismo sabor debemos prestar atención al principio de exclusión de Pauli, según el cual dos fermiones idénticos no pueden ocupar el mismo estado. Como consecuencia, las funciones de onda correspondientes a estados de dos fermiones iguales deben ser antisimétricas ante su intercambio. Esta es la condición que impondremos sobre los estados encontrados de diquarks. Para eso, debemos prestar atención a la función de onda total del diquark, no sólo a la parte espacial. Los diquarks considerados son simétricos en la parte de sabor, ya que los dos quarks constituyentes son del mismo sabor, y por lo tanto intercambiarlos da el mismo estado.

La parte de color es antisimétrica cuando consideramos el estado atractivo, y la parte espacial queda determinada por la paridad de los armónicos esféricos, que corresponde a $(-1)^l$, siendo 1 cuando es simétrico y -1 cuando es antisimétrico. Por último, la parte de *spin* puede tomar dos valores: 0 (singlete) y 1 (tripleto), donde el singlete es antisimétrico ante el intercambio de partículas y el tripleto es simétrico. De esta forma, distintas combinaciones de l y s dan lugar a estados simétricos o antisimétricos.

Para los estados con $l = 0$, la parte espacial es simétrica, por lo que el *spin* debe ser simétrico también para cumplir el principio de exclusión de Pauli, considerando que la parte de color es antisimétrica. De esta forma, el estado base debe tener *spin* 1. Para los estados con $l = 1$, la parte espacial es antisimétrica y por lo tanto el *spin* debe ser antisimétrico, es decir *spin* 0. En general, la parte espacial y de *spin* deben tener la misma paridad. En base a esa restricción nos limitamos a estudiar cuatro estados: 1^3S_1 , 1^1P_1 , 2^3S_1 y 2^1P_1 , donde, debido a los números cuánticos, las correcciones *spin*-órbita y tensorial son nulas para estas configuraciones y la corrección *spin-spin* juega un gran papel.

En esta sección, obtenemos el espectro de los diquarks, utilizando los parámetros calculados en la sección anterior. Utilizamos los parámetros obtenidos ajustando bottomonium para calcular el diquark bb y los parámetros obtenidos ajustando charmonium para calcular cc . Si bien predecimos el espectro del diquark hasta los estados excitados radialmente, para la siguiente sección nuestro mayor interés será el estado fundamental, con el cual construiremos el tetraquark.

6.1.1. Diquark bb

A partir del ajuste del espectro del bottomonium se obtienen cuatro conjuntos de parámetros, correspondientes a los distintos esquemas de ajuste considerados. Cada uno de estos conjuntos se emplea para calcular el espectro del diquark bb .

Esquema (a)

Para los parámetros obtenidos ajustando tanto los niveles con $n = 1$ como $n = 2$, y utilizando todas las correcciones del OGE, se obtiene el espectro de la Fig. (6.1). Los parámetros utilizados son $g = 1.94$, $m_g = 0.11$ GeV, $b = 0.115$ GeV² y $m_b = 4.675$ GeV.

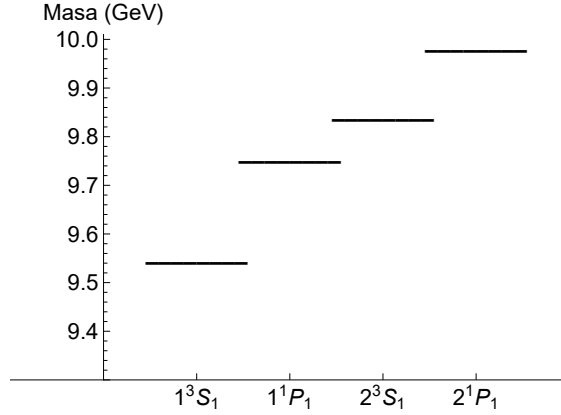


Figura 6.1: Espectro de masas del diquark bb calculado con los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ del bottomonium, utilizando todas las correcciones del OGE.

En la Tabla (6.1) se presentan algunos resultados relevantes de los estados calculados. Al comparar estos resultados con los obtenidos para el bottomonium con el mismo conjunto de parámetros, se observa que las masas, tanto con y sin correcciones, y el radio medio del estado fundamental son mayores en el caso del diquark, aunque aumentan más lento para los estados excitados. Este comportamiento es consistente con el hecho de que el potencial no perturbado del diquark es más débil debido al cambio del factor de color. Además, se observa que las correcciones *spin-spin* toman valores más pequeños en el caso del diquark que del mesón, siendo las correcciones relativistas las contribuciones dominantes.

Estado	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$	Corrección relativista	Correcciones cinéticas	<i>Spin-spin</i>	Masa
1^3S_1	9.5454	1.5357	0.0711	-0.0133	-0.0027	0.0048	9.5433(484)
1^1P_1	9.7570	2.5221	0.0559	-0.0054	-0.0033	0.0000	9.7514(506)
2^3S_1	9.8466	11.3291	0.0672	-0.0289	-0.0076	0.0048	9.8386(512)
2^1P_1	9.9899	17.0843	0.0652	-0.0149	-0.0050	0.0000	9.9799(525)

Tabla 6.1: Resultados relevantes sobre los estados obtenidos del diquark bb cuando se utilizan los parámetros: $g = 1.94$, $m_g = 0.11$ GeV, $b = 0.115$ GeV² y $m_b = 4.675$ GeV. Donde las correcciones y masas están escritas en GeV.

Esquema (b)

Si se utilizan los parámetros obtenidos ajustando el mismo espectro del bottomonium pero considerando únicamente las correcciones dependientes del *spin*, se obtiene el espectro del diquark bb de la Fig. (6.2). Los parámetros utilizados son $g = 1.99$, $m_g = 0.05$ GeV, $b = 0.105$ GeV² y $m_b = 4.700$ GeV. La relación entre las masas y el radio medio se mantiene respecto del caso anterior, como se muestra en la Tabla (6.2). Se observa que nuevamente la velocidad de los estados con $l = 1$ es menor que la de los estados con $l = 0$, como había sucedido en el estudio de mesones. La masa del estado base obtenido es 9.5433 GeV, muy similar a la hallada con el conjunto anterior de parámetros.

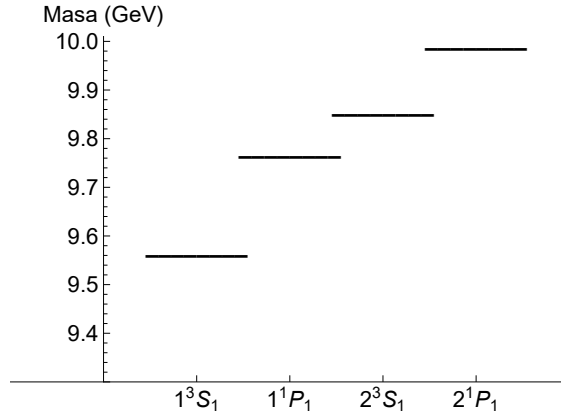


Figura 6.2: Espectro de masas del diquark bb calculado con los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ del bottomonium, utilizando únicamente las correcciones del $spin$.

Estado	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$	$Spin-spin$	Masa
1^3S_1	9.5596	1.5440	0.0747	0.0052	9.5626(535)
1^1P_1	9.7665	2.5684	0.0569	0.0000	9.7665(560)
2^3S_1	9.8499	11.7516	0.0678	0.0052	9.8519(567)
2^1P_1	9.9879	17.8641	0.0648	0.0000	9.9879(581)

Tabla 6.2: Resultados relevantes sobre los estados obtenidos del diquark bb cuando se utilizan los parámetros: $g = 1.99$, $m_g = 0.05$ GeV, $b = 0.105$ GeV² y $m_b = 4.700$ GeV. En este caso se utiliza el esquema (b). Los valores de las correcciones y las masas están escritos en GeV.

Esquema (c)

Por otro lado, para los parámetros obtenidos ajustando solamente los niveles con $n = 1$, y utilizando todas las correcciones del OGE, se obtiene el espectro de la Fig. (6.3). Los parámetros utilizados son $g = 1.75$, $m_g = 0.04$ GeV, $b = 0.165$ GeV² y $m_b = 4.575$ GeV. Los resultados presentados en la Tabla (6.3) muestran una masa del estado base de 9.44063 GeV, menor que la correspondiente al mesón. Se observa además, que las correcciones relativistas son las que más contribuyen para este sistema. Este resultado es esperable para los diquarks, ya que las correcciones relativistas son las únicas que no se ven afectadas por el cambio del factor de color.

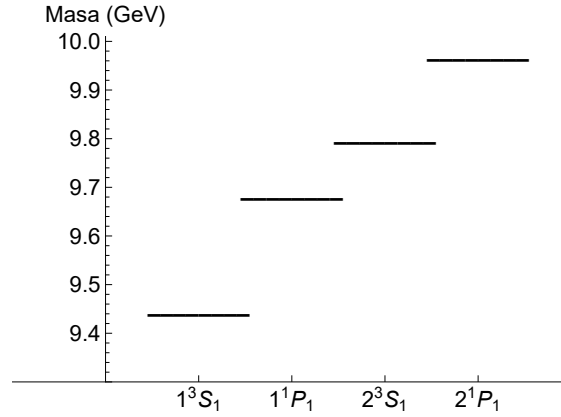


Figura 6.3: Espectro de masas del diquark bb calculado con los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles con $n = 1$ del bottomonium, utilizando todas las correcciones del OGE.

Estado	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$	Corrección relativista	Correcciones cinéticas	$Spin-spin$	Masa
1^3S_1	9.4441	1.4652	0.0721	-0.0126	-0.0030	0.0038	9.4406(320)
1^1P_1	9.6867	2.3087	0.0652	-0.0074	-0.0040	0.0000	9.6791(335)
2^3S_1	9.8071	9.4926	0.0780	-0.0332	-0.0086	0.0038	9.7957(339)
2^1P_1	9.9790	13.9617	0.0796	-0.0218	-0.0063	0.0000	9.9645(347)

Tabla 6.3: Resultados relevantes sobre los estados obtenidos del diquark bb cuando se utilizan los parámetros: $g = 1.75$, $m_g = 0.04$ GeV, $b = 0.165$ GeV² y $m_b = 4.575$ GeV. Los valores de las correcciones y las masas están escritos en GeV.

Esquema (d)

Por último, cuando se utilizan únicamente las correcciones dependientes del $spin$ para los niveles con $n = 1$, se obtienen los parámetros $g = 1.75$, $m_g = 0.11$ GeV, $b = 0.165$ GeV² y $m_b = 4.550$ GeV. Estos dan lugar al espectro de la Fig. (6.4), con una masa del estado base de 9.40771 GeV. Los resultados presentados en la Tabla (6.4) muestran que los esquemas (c) y (d) predicen radios medios de los estados excitados menores que los obtenidos con los esquemas que ajustan tanto $n = 1$ como $n = 2$.

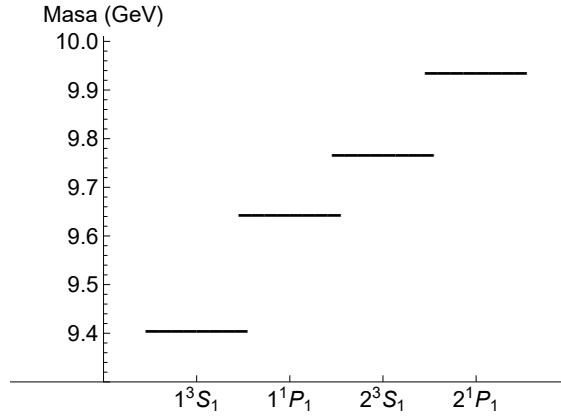


Figura 6.4: Espectro del diquark bb calculado con los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles con $n = 1$ del bottomonium, utilizando únicamente las correcciones del $spin$.

Estado	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$	$Spin-spin$	Masa
1^3S_1	9.4445	1.4678	0.0698	0.0038	9.4077(320)
1^1P_1	9.6866	2.3127	0.0630	0.0000	9.6476(335)
2^3S_1	9.8067	9.5242	0.0759	0.0038	9.7697(339)
2^1P_1	9.9782	14.0067	0.0776	0.0000	9.9396(347)

Tabla 6.4: Resultados relevantes sobre los estados obtenidos del diquark bb cuando se utilizan los parámetros: $g = 1.75$, $m_g = 0.11$ GeV, $b = 0.165$ GeV² y $m_b = 4.550$ GeV. En este caso se utiliza el esquema (d). Los valores de las correcciones y las masas están escritos en GeV.

En términos generales, las masas obtenidas a partir de los esquemas que ajustan únicamente los niveles con $n = 1$ del bottomonium son menores, sin embargo, se obtiene una mayor separación entre los niveles. Para la construcción del tetraquark en la sección siguiente, será de gran importancia el estado fundamental, y los diferentes valores obtenidos de su masa se presentan en la Tabla (6.5). Se observa que los distintos esquemas de ajuste conducen a valores muy similares.

Ajuste	Esquema (a)	Esquema (b)	Esquema (c)	Esquema (d)
Masa de estado fundamental (GeV)	9.5433(484)	9.5626(535)	9.4406(320)	9.4077(320)

Tabla 6.5: Masa del estado fundamental del diquark bb calculada utilizando los parámetros obtenidos en la sección anterior, para distintos esquemas de ajuste. El esquema (a) corresponde al ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ del bottomonium utilizando todas las correcciones del OGE. El esquema (b) corresponde a ajustar los mismos niveles pero utilizando sólo correcciones de $spin$. El esquema (c) es en el que se ajustan los niveles con $n = 1$ del bottomonium incluyendo todas las correcciones de OGE y el esquema (d) es análogo pero incluyendo únicamente correcciones de $spin$.

Comparación con la literatura

En la Tabla (6.6) se recopilan distintos resultados teóricos disponibles en la literatura para la masa del diquark bb en el estado de color antitriplete. En todos los casos se observa que la masa del estado fundamental 1^3S_1 es aproximadamente 9 GeV, con una dispersión de aproximadamente 1 GeV entre los valores más bajos y más altos. Nuestros resultados se encuentran dentro de este rango. Por otro lado, los trabajos que presentan también estados radialmente excitados, obtienen masas levemente mayores que las nuestras para el primer excitado 2^3S_1 . Aunque obtienen una separación entre 2^3S_1 y 1^3S_1 del orden de 200–300 MeV, consistente con nuestros resultados.

Estado	Esquema (a)	Esquema (b)	Esquema (c)	Esquema (d)	[224]	[225]	[226]	[227]	[228]	[188]
1^3S_1	9.5433	9.5626	9.4406	9.4077	8.67	9.774	9.778	9.792	8.9166	9.6285
2^3S_1	9.8386	9.8519	9.7957	9.7697	-	10.055	-	10.011	-	-

Tabla 6.6: Resultados de este trabajo y de la literatura del espectro del diquark bb en GeV.

6.1.2. Diquark cc

El análisis del diquark cc se realiza de manera análoga, utilizando los cuatro conjuntos de parámetros obtenidos del ajuste del espectro del charmonium.

Esquema (a)

Utilizando el conjunto de parámetros obtenido ajustando tanto los niveles con $n = 1$ como $n = 2$, y utilizando todas las correcciones del OGE: $g = 1.90$, $m_g = 0.06$ GeV, $b = 0.125$ GeV² y $m_c = 1.250$ GeV, se obtiene el espectro de la Fig. (6.5). En la Tabla (6.7) se observan valores de interés para cada estado calculado. Se observa que la masa del estado base del diquark resulta menor que la del estado correspondiente del charmonium, debido al cambio de factor de color en la interacción. Por otro lado, los radios medios obtenidos para los estados excitados radialmente son mucho mayores a lo esperado para un diquark, indicando que el modelo deja de ser confiable en este régimen, de manera similar a lo observado en el caso del charmonium.

Estado	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$	Corrección relativista	Correcciones cinéticas	<i>Spin-spin</i>	Masa
1^3S_1	2.9626	2.6670	0.20017	-0.0337	-0.0050	0.0072	2.9467(146)
1^1P_1	3.2364	4.0226	0.2165	-0.0304	-0.0096	0.0001	3.2046(166)
2^3S_1	3.3973	28.7835	0.2614	-0.1234	-0.0191	0.0072	3.3460(173)
2^1P_1	3.6004	41.2264	0.2853	-0.1039	-0.0156	0.0001	3.5340

Tabla 6.7: Resultados relevantes sobre los niveles obtenidos del diquark cc cuando se utilizan los parámetros: $g = 1.90$, $m_g = 0.06$ GeV, $b = 0.25$ GeV² y $m_c = 1.250$ GeV. Las correcciones y masas están escritas en GeV.

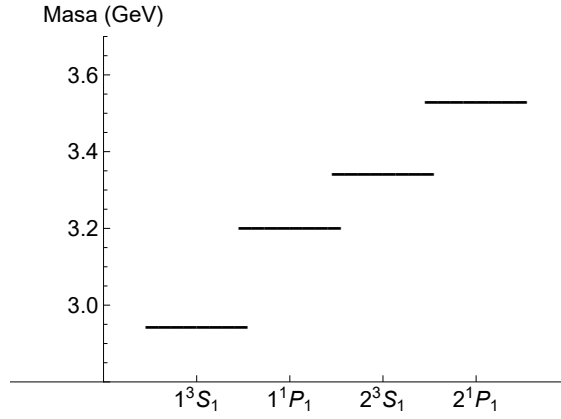


Figura 6.5: Espectro de masas del diquark cc calculado con los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ del charmonium, utilizando todas las correcciones del OGE.

Esquema (b)

Se obtienen resultados similares al considerar los parámetros obtenidos ajustando únicamente las correcciones dependientes del $spin$: $g = 2.10$, $m_g = 0.01$ GeV, $b = 0.095$ GeV² y $m_c = 1.325$ GeV. El espectro hallado se encuentra en la Fig. (6.6) y los resultados relevantes de cada estado se muestran en la Tabla (6.8). Se observa que las correcciones de $spin-spin$ toman valores levemente mayores para el diquark cc que para el bb .

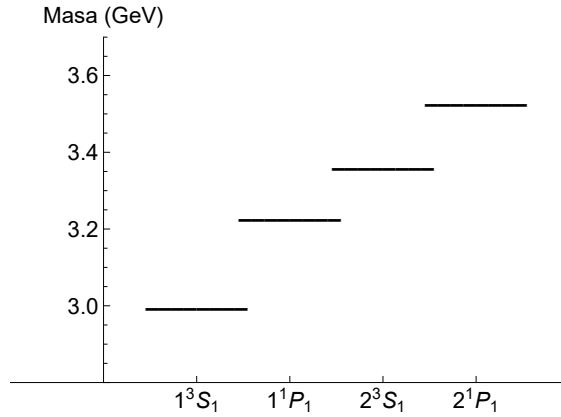


Figura 6.6: Espectro de masas del diquark cc calculado con los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ del charmonium, utilizando únicamente las correcciones del $spin$.

Estado	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$	$Spin-spin$	Masa
1^3S_1	2.9903	2.7688	0.2002	0.0083	2.9959(217)
1^1P_1	3.2277	4.2609	0.1979	0.0000	3.2277(247)
2^3S_1	3.3567	32.3167	0.2371	0.0082	3.3612(259)
2^1P_1	3.5291	46.8565	0.2501	0.0000	3.5291

Tabla 6.8: Resultados relevantes sobre los estados obtenidos del diquark cc cuando se utilizan los parámetros: $g = 2.10$, $m_g = 0.01$ GeV, $b = 0.095$ GeV² y $m_c = 1.325$ GeV. En este caso se utilizan únicamente correcciones dependientes del $spin$. Las correcciones y las masas se escriben en GeV.

Esquema (c)

Por el otro lado, para los parámetros obtenidos ajustando solamente los niveles con $n = 1$, y utilizando todas las correcciones del OGE, se obtiene el espectro de la Fig. (6.7). Los parámetros utilizados son $g = 1.925$, $m_g = 0.03$ GeV, $b = 0.13$ GeV² y $m_c = 1.250$ GeV y con ellos se obtiene un espectro de masas muy similar a los casos anteriores, aunque con los mismos problemas ya señalados en los niveles excitados, como se observa en la Tabla (6.9).

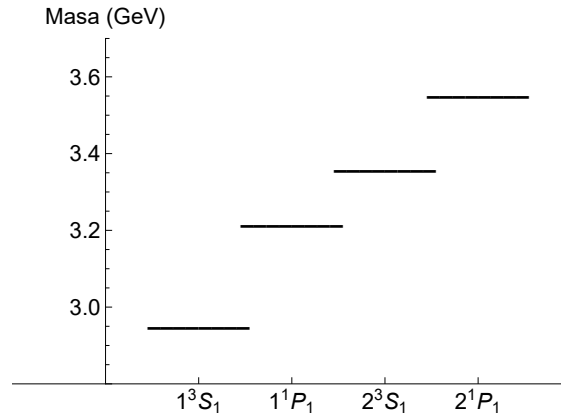


Figura 6.7: Espectro de masas del diquark cc calculado con los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles con $n = 1$ del charmonium, utilizando todas las correcciones del OGE.

Estado	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$	Corrección relativista	Correcciones cinéticas	$Spin-spin$	Masa
1^3S_1	2.9684	2.6280	0.2105	-0.0368	-0.0064	0.0078	2.9509(153)
1^1P_1	3.2503	3.9663	0.2264	-0.0330	-0.0113	0.0000	3.2157(174)
2^3S_1	3.4154	27.9866	0.2726	-0.1329	-0.0229	0.0078	3.3601(183)
2^1P_1	3.6244	40.1026	0.2968	-0.1115	-0.0188	0.0000	3.5529

Tabla 6.9: Resultados relevantes sobre los estados obtenidos del diquark cc cuando se utilizan los parámetros: $g = 1.925$, $m_g = 0.03$ GeV, $b = 0.13$ GeV² y $m_c = 1.250$ GeV. Las correcciones y las masas se escriben en GeV.

Esquema (d)

Por último, para los parámetros obtenidos ajustando solamente los niveles con $n = 1$, pero utilizando únicamente las correcciones dependientes del *spin*, se obtiene el espectro de la Fig. (6.6) y los valores mostrados en la Tabla (6.10). Los parámetros utilizados son $g = 2.00$, $m_g = 0.09$ GeV, $b = 0.11$ GeV² y $m_c = 1.250$ GeV.

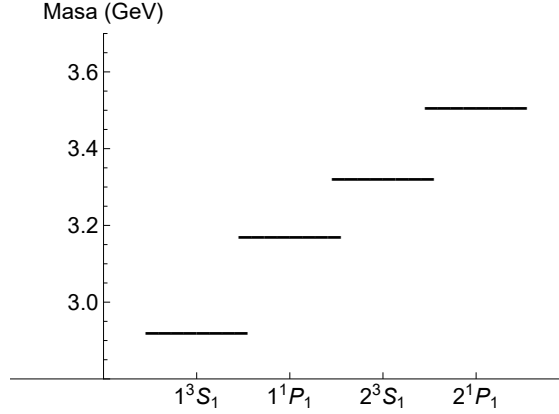


Figura 6.8: Espectro de masas del diquark cc calculado con los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles con $n = 1$ del charmonium, utilizando únicamente las correcciones del *spin*.

Estado	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$	<i>Spin-spin</i>	Masa
1^3S_1	2.9182	2.7493	0.1927	0.0077	2.9236(179)
1^1P_1	3.1749	4.1796	0.2014	0.0001	3.1750(204)
2^3S_1	3.3212	31.0767	0.2440	0.0077	3.3258(213)
2^1P_1	3.5101	44.7202	0.2633	0.0001	3.5102

Tabla 6.10: Resultados relevantes sobre los estados obtenidos del diquark cc cuando se utilizan los parámetros: $g = 2.00$, $m_g = 0.09$ GeV, $b = 0.11$ GeV² y $m_c = 1.250$ GeV. En este caso se utilizan únicamente correcciones dependientes del *spin*. Las correcciones y las masas se escriben en GeV.

Al igual que en el caso del diquark bb , el análisis se centra en el estado fundamental. En la Tabla (6.11) se observa que los distintos esquemas de ajuste dan lugar a valores similares para la masa del estado fundamental, incluso cuando se consideran variaciones en los parámetros del modelo y en el conjunto de correcciones utilizadas. Esto indica que el valor obtenido para esta magnitud es bastante estable.

Ajuste	Esquema (a)	Esquema (b)	Esquema (c)	Esquema (d)
Masa del estado fundamental (GeV)	2.9467(146)	2.9959(217)	2.9509(153)	2.9236(179)

Tabla 6.11: Masa del estado fundamental del diquark cc calculada utilizando los parámetros obtenidos en la sección anterior para distintos esquemas de ajuste. El esquema (a) corresponde al ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ del charmonium utilizando todas las correcciones del OGE. El esquema (b) corresponde a ajustar los mismos niveles pero utilizando sólo correcciones de $spin$. El esquema (c) es en el que se ajustan los niveles con $n = 1$ del charmonium incluyendo todas las correcciones de OGE y el esquema (d) es análogo pero incluyendo únicamente correcciones de $spin$.

Comparación con la literatura

En la Tabla (6.12) se presentan distintos resultados de la literatura para la masa del diquark cc en el estado de color antitriplete, obtenidos mediante distintos modelos. A diferencia del caso del diquark bb , los valores para el estado fundamental 1^3S_1 muestran una dispersión más amplia, con masas que se extienden aproximadamente entre 2.9 y 3.5 GeV. Nuestros resultados se sitúan dentro de este intervalo. Para los estados excitados, los trabajos que los incluyen encuentran masas más grandes que las obtenidas en esta tesis, y una mayor separación entre los estados 2^3S_1 y 1^3S_1 , del orden de 300–500 MeV.

Estado	Esquema (a)	Esquema (b)	Esquema (c)	Esquema (d)	[224]	[225]	[226]	[227]	[228]	[206]	[188]
1^3S_1	2.9467	2.9959	2.9509	2.9236	3.51	3.133	3.226	3.114	2.8655	3.1334	3.1334
1^1P_1	3.2046	3.2277	3.2157	3.1750	-	-	-	-	-	3.3530	-
2^3S_1	3.3460	3.3612	3.3601	3.3258	-	3.695	-	3.443	-	3.4560	-
2^1P_1	3.5340	3.5291	3.5529	3.5102	-	-	-	-	-	3.6062	-

Tabla 6.12: Resultados de este trabajo y de la literatura del espectro del diquark cc en GeV.

6.2. Espectro de los tetraquarks

En esta sección nos dedicamos al estudio del espectro de los *fully-heavy* tetraquarks. Para eso, los modelamos como un sistema de dos cuerpos compuesto por un diquark y un antidiquark, ambos considerados como partículas puntuales, tal como se presentó en la Sección 3.1. Este enfoque es consistente con el utilizado en las secciones anteriores para describir sistemas de dos partículas con color. Para el tetraquark seguimos el mismo procedimiento, introduciendo únicamente dos cambios. La primera diferencia es la masa de las partículas constituyentes. Previamente los constituyentes eran quarks, cuyas masas se ajustaban como parámetros libres del modelo. En el caso de los tetraquarks, los constituyentes son diquarks, y los valores de sus masas se obtienen a partir de los resultados obtenidos para el estado fundamental en la sección anterior.

La segunda diferencia está relacionada con el $spin$ de las partículas constituyentes. Mientras que los quarks tienen $spin\ 1/2$, los diquarks en su estado fundamental tienen $spin\ 1$. Esta característica da lugar a una estructura más compleja en las correcciones dependientes del $spin$, en particular en el término tensorial. Como consecuencia, resulta necesario realizar cambios de base, tal como se explicó en la Sección 4.4.

Al igual que en los análisis anteriores, nos centramos en dos sistemas concretos: el *all-charm* tetraquark, compuesto por un diquarks cc y un antidiquark $\bar{c}\bar{c}$, y el *all-bottom* tetraquark, compuesto por un diquark bb y un antidiquark $\bar{b}\bar{b}$. En cada caso utilizamos los parámetros del modelo obtenidos mediante el ajuste del espectro de mesones, junto con las masas de los diquarks calculadas previamente. Tal como se hizo antes, consideramos cuatro esquemas de ajuste: el ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ incluyendo todas las correcciones del OGE, el ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ considerando únicamente las correcciones dependientes del *spin*, el ajuste de los niveles con $n = 1$ utilizando todas las correcciones del OGE, y el ajuste de los niveles con $n = 1$ considerando sólo las correcciones de *spin*. Para cada una de estos esquemas analizamos el espectro resultante de ambos tetraquarks.

6.2.1. All-bottom tetraquark

Para calcular el espectro del *all-bottom* tetraquark, utilizamos los parámetros obtenidos a partir del ajuste del espectro del bottomonium, así como la masa del diquark bb hallada en la sección anterior. En base a los distintos esquemas de ajuste que hemos trabajado hasta ahora, obtendremos distintos espectros del tetraquark.

Esquema (a)

Comenzamos analizando el conjunto de parámetros obtenido al ajustar los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ del bottomonium, incluyendo todas las correcciones asociadas al intercambio de un gluon. En este caso, los parámetros del modelo son: $g = 1.94$, $m_g = 0.11$ GeV, $b = 0.23$ GeV² y $m_b = 4.675$ GeV. En lugar de la masa del bottom, utilizamos la masa del estado fundamental del diquark bb , que para este conjunto de parámetros corresponde a $m_{bb} = 9.5433$ GeV. Con estos valores se obtiene el espectro del tetraquark mostrado en la Fig. (6.9).

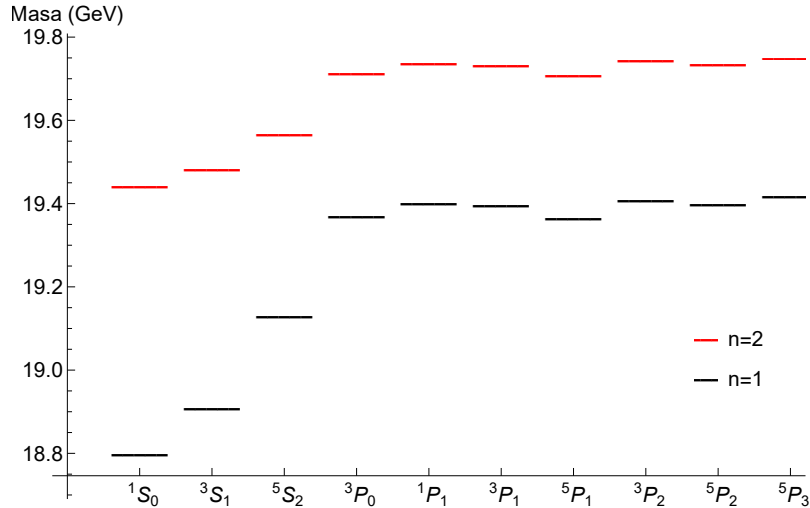


Figura 6.9: Espectro de masas del tetraquark $bb\bar{b}\bar{b}$ calculado con los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ del charmonium, utilizando todas las correcciones del OGE. Las líneas rojas corresponden a los estados excitados radialmente, mientras que las líneas negras son estados con $n = 1$.

En la Tabla (6.13) se presentan algunos parámetros característicos extraídos de las funciones

de onda de los distintos estados del tetraquark. En particular, las velocidades cuadráticas medias resultan muy pequeñas, incluso para los estados excitados radialmente. Este comportamiento puede atribuirse a las grandes masas de los constituyentes, es decir, de los diquarks, en comparación con los constituyentes de los mesones. Los radios medios obtenidos también son pequeños, lo que es consistente con la interpretación del tetraquark como un sistema compacto dentro del modelo de diquarks.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
$1S$	18.8244	0.6336	0.0579
$1P$	19.3517	1.3553	0.0343
$2S$	19.4291	3.2356	0.0398
$2P$	19.6833	5.8529	0.0383

Tabla 6.13: Resultados extraídos de la función de onda correspondiente al tetraquark *all-bottom* calculado con los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ utilizando todas las correcciones del OGE.

Sin embargo, estos radios muestran un problema de consistencia muy común en la literatura [206] cuando se utiliza el modelo de diquarks: los radios del tetraquark resultan menores que los radios de los diquarks que lo componen. Este resultado también se observa en los demás conjuntos de parámetros. Esta discrepancia puede atribuirse a la aproximación de tratar a los diquarks como objetos puntuales dentro del tetraquark, la cual resulta excesivamente simplificada para describir adecuadamente este sistema. En este trabajo continuaremos utilizando el modelo descrito, sin embargo, una posible mejora consiste en incorporar factores de forma para los diquarks (refs. [229, 230]), de modo de tener en cuenta su estructura extendida sin introducir un aumento significativo en la complejidad del modelo.

En la Tabla (6.14) se muestran los valores de las distintas correcciones a la energía para los niveles del tetraquark. Se observa que las correcciones relativistas a la energía cinética son muy pequeñas, lo que valida el uso de la aproximación no relativista.

Estado	Corrección relativista	Correcciones cinéticas	<i>Spin-órbita</i>	<i>Spin-spin</i>	Tensorial	Masa
1^1S_0	-0.0281	-0.0008	0	-0.0833	0	18.7992
1^3S_1	-0.0281	-0.0008	0	0.0278	0	18.9102
1^5S_2	-0.0281	-0.0008	0	0.2498	0	19.1322
1^3P_0	-0.0049	-0.0097	-0.0191	0.0000	-0.0072	19.3763
1^1P_1	-0.0049	-0.0097	0	0.0000	0	19.4026
1^3P_1	-0.0049	-0.0097	-0.0096	0.0000	0.0020	19.3950
1^5P_1	-0.0049	-0.0097	-0.0287	-0.0001	-0.0047	19.3691
1^3P_2	-0.0049	-0.0097	0.00956	0.0000	-0.0010	19.4111
1^5P_2	-0.0049	-0.0097	-0.0096	-0.0001	0.0041	19.3970
1^5P_3	-0.0049	-0.0097	0.0191	-0.0001	-0.0014	19.4202
2^1S_0	-0.0169	-0.0109	0	-0.0316	0	19.4434
2^3S_1	-0.0169	-0.0109	0	0.0105	0	19.4856
2^5S_2	-0.0169	-0.0109	0	0.0949	0	19.5699
2^3P_0	-0.0077	-0.0117	-0.0153	0.0000	-0.0057	19.7181
2^1P_1	-0.0077	-0.0117	0	0.0000	0	19.7391
2^3P_1	-0.0077	-0.0117	-0.0076	0.0000	0.0016	19.7331
2^5P_1	-0.0077	-0.0117	-0.0229	0.0000	-0.0038	19.7124
2^3P_2	-0.0077	-0.0117	0.0076	0.0000	-0.0008	19.7459
2^5P_2	-0.0077	-0.0117	-0.0076	0.0000	0.0033	19.7347
2^5P_3	-0.0077	-0.0117	0.0153	0.0000	-0.0011	19.7532

Tabla 6.14: Valores de las correcciones para cada estado del tetraquark *all-bottom* utilizando los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ con todas las correcciones debido al OGE. Las correcciones y masas se escriben en GeV.

Esquema (b)

El segundo conjunto de parámetros se obtiene a partir del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ del bottomonium considerando únicamente correcciones dependientes del *spin*. En este caso, los valores ajustados son $g = 1.99$, $m_g = 0.05$ GeV, $b = 0.21$ GeV² y $m_b = 4.700$ GeV, lo que conduce a una masa del estado fundamental del diquark bb de $m_{bb} = 9.5626$ GeV. El espectro del tetraquark calculado con este conjunto de parámetros se encuentra en la Fig. (6.10).

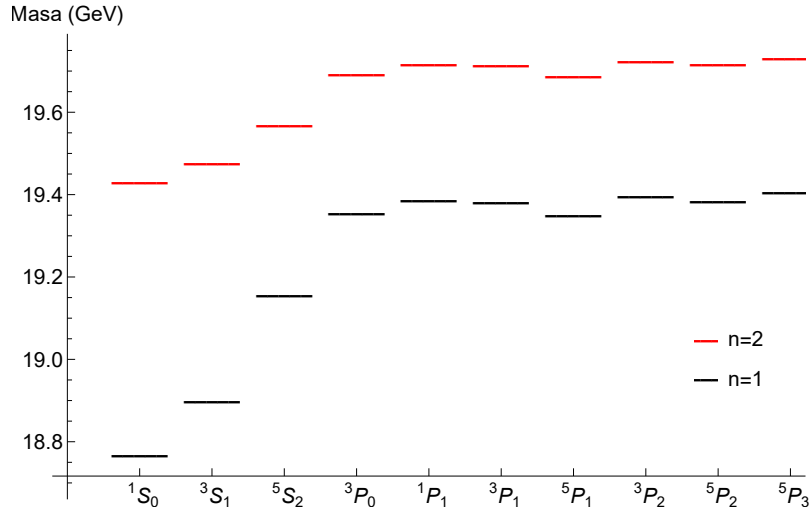


Figura 6.10: Espectro de masas del tetraquark $b\bar{b}b\bar{b}$ calculado con los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ del charmonium, utilizando únicamente las correcciones del *spin*. Las líneas rojas corresponden a los estados excitados radialmente, mientras que las líneas negras son estados con $n = 1$.

En la Tabla (6.15) se recopilan algunos valores característicos hallados a partir de las funciones de onda del tetraquark, mientras que en la Tabla (6.16) se presentan las contribuciones de las distintas correcciones a la energía de cada nivel. Se observa que, para ciertos estados, las correcciones asociadas a la interacción *spin-spin* toman valores mucho mayores que las encontradas en el estudio del botomonium o del diquark, a pesar de estar suprimidas por un factor de $1/m_{bb}$. Este comportamiento posiblemente se debe a lo compacto que resulta ser el tetraquark, teniendo una mayor contribución del valor de la función de onda en el origen que los demás sistemas estudiados. Este resultado no es exclusivo de este conjunto de parámetros, sino que se reproduce en los distintos esquemas de ajuste. Por otro lado, las masas totales del espectro del tetraquark resultan muy similares a las obtenidas en el caso anterior, lo que indica una estabilidad de los resultados frente a cambios de los parámetros.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
$1S$	18.9488	0.6516	0.0541
$1P$	19.4550	1.3495	0.0344
$2S$	19.5406	3.2154	0.0402
$2P$	19.7963	5.6690	0.0394

Tabla 6.15: Resultados extraídos de la función de onda correspondiente al tetraquark *all-bottom* calculado con los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ utilizando únicamente las correcciones del *spin*.

Estado	<i>Spin-órbita</i>	<i>Spin-spin</i>	Tensorial	Masa
1^1S_0	0	-0.0971	0	18.7702
1^3S_1	0	0.0324	0	18.8997
1^5S_2	0	0.2914	0	19.1587
1^3P_0	-0.0202	0.0000	-0.0075	19.3615
1^1P_1	0	0.0000	0	19.3892
1^3P_1	-0.0101	0.0000	0.0022	19.3813
1^5P_1	-0.0287	-0.0001	-0.0047	19.3691
1^3P_2	0.0101	0.0000	-0.0011	19.3982
1^5P_2	-0.0101	0.0000	0.0043	19.3834
1^5P_3	0.0202	0.0000	-0.0015	19.4078
2^1S_0	0	-0.0343	0	19.4328
2^3S_1	0	0.0114	0	19.4785
2^5S_2	0	0.1029	0	19.5699
2^3P_0	-0.0157	0.0000	-0.0059	19.6982
2^1P_1	0	0.0000	0	19.7198
2^3P_1	-0.0079	0.0000	0.0017	19.7136
2^5P_1	-0.0236	0.0000	-0.0039	19.6923
2^3P_2	0.0079	0.0000	-0.0008	19.7268
2^5P_2	-0.0079	0.0000	0.0034	19.7153
2^5P_3	0.0157	0.0000	-0.0012	19.7344

Tabla 6.16: Valores de las correcciones para cada estado del tetraquark *all-bottom* utilizando los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ considerando únicamente las correcciones debido al *spin*. Las correcciones y masas se escriben en GeV.

Esquema (c)

El tercer conjunto de parámetros proviene del ajuste del espectro del bottomonium considerando únicamente los niveles con $n = 1$ e incluyendo todas correcciones del OGE. En este caso se obtienen $g = 1.75$, $m_g = 0.04$ GeV y $b = 0.33$ GeV², con una masa del estado fundamental del diquark *bb* de $m_{bb} = 9.4406$ GeV. El espectro del tetraquark correspondiente se encuentra en la Fig. (6.11).

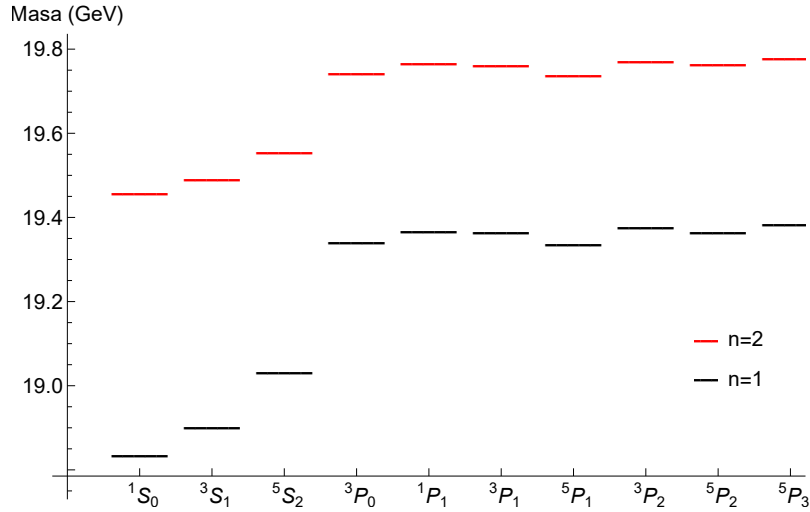


Figura 6.11: Espectro de masas del tetraquark $bb\bar{b}\bar{b}$ calculado con los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles con $n = 1$ del charmonium, utilizando todas las correcciones del OGE. Las líneas rojas corresponden a los estados excitados radialmente, mientras que las líneas negras son estados con $n = 1$.

En la Tabla (6.17) se muestran valores característicos hallados a partir de las funciones de onda del tetraquark, mientras que en la Tabla (6.18) se presentan los valores de las distintas correcciones a la energía. Se observa que la masa del estado fundamental es mayor que la obtenida en los casos anteriores, sin embargo, la separación entre este estado y el primer estado excitado es menor que antes. Este resultado es consistente con lo observado en el análisis del bottomonium, donde los ajustes que incluyen los niveles excitados radialmente tienden a sobrestimar la separación entre los primeros estados, mientras que los ajustes restringidos niveles con $n = 1$ reducen dicha separación.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
$1S$	18.9068	0.6947	0.0472
$1P$	19.3855	1.2918	0.0382
$2S$	19.5110	2.9650	0.0455
$2P$	19.7904	4.8395	0.0471

Tabla 6.17: Resultados extraídos de la función de onda correspondiente al tetraquark *all-bottom* calculado con los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ utilizando todas las correcciones del OGE.

Estado	Corrección relativista	Correcciones cinéticas	<i>Spin-órbita</i>	<i>Spin-spin</i>	Tensorial	Masa
1^1S_0	-0.0180	-0.0022	0	-0.0489	0	18.8377
1^3S_1	-0.0180	-0.0022	0	0.0163	0	18.9029
1^5S_2	-0.0180	-0.0022	0	0.1468	0	19.0333
1^3P_0	-0.0056	-0.0094	-0.0171	0.0000	-0.0075	19.3471
1^1P_1	-0.0056	-0.0094	0	0.0000	0	19.3705
1^3P_1	-0.0056	-0.0094	-0.0085	0.0000	0.0018	19.3638
1^5P_1	-0.0056	-0.0094	-0.0256	0.0000	-0.0042	19.3408
1^3P_2	-0.0056	-0.0094	0.0085	0.0000	-0.0009	19.3782
1^5P_2	-0.0056	-0.0094	-0.0085	0.0000	0.0036	19.3656
1^5P_3	-0.0056	-0.0094	0.0171	0.0000	-0.0013	19.3863
2^1S_0	-0.0161	-0.0110	0	-0.0243	0	19.4596
2^3S_1	-0.0161	-0.0110	0	0.0081	0	19.4921
2^5S_2	-0.0161	-0.0110	0	0.0730	0	19.5570
2^3P_0	-0.0102	-0.0124	-0.0147	0.0000	-0.0055	19.7478
2^1P_1	-0.0102	-0.0124	0	0.0000	0	19.7679
2^3P_1	-0.0102	-0.0124	-0.0073	0.0000	0.0016	19.7622
2^5P_1	-0.0102	-0.0124	-0.0220	0.0000	-0.0036	19.7423
2^3P_2	-0.0102	-0.0124	0.0073	0.0000	-0.0008	19.7745
2^5P_2	-0.0102	-0.0124	-0.0073	0.0000	0.0031	19.7637
2^5P_3	-0.0102	-0.0124	0.0147	0.0000	-0.0011	19.7815

Tabla 6.18: Valores de las correcciones para cada estado del tetraquark *all-bottom* utilizando los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ considerando todas las correcciones debido al OGE. Los resultados se presentan en GeV.

Esquema (d)

Finalmente, el último conjunto de parámetros se obtiene a partir del ajuste de los niveles con $n = 1$ del bottomonium considerando únicamente las correcciones dependientes del *spin*. Los valores resultantes son $g = 1.75$, $m_g = 0.11$ GeV, $b = 0.33$ GeV² y una masa del estado fundamental del diquark bb de $m_{bb} = 9.4077$ GeV. El espectro del tetraquark obtenido utilizando estos parámetros se encuentra en la Fig. (6.12).

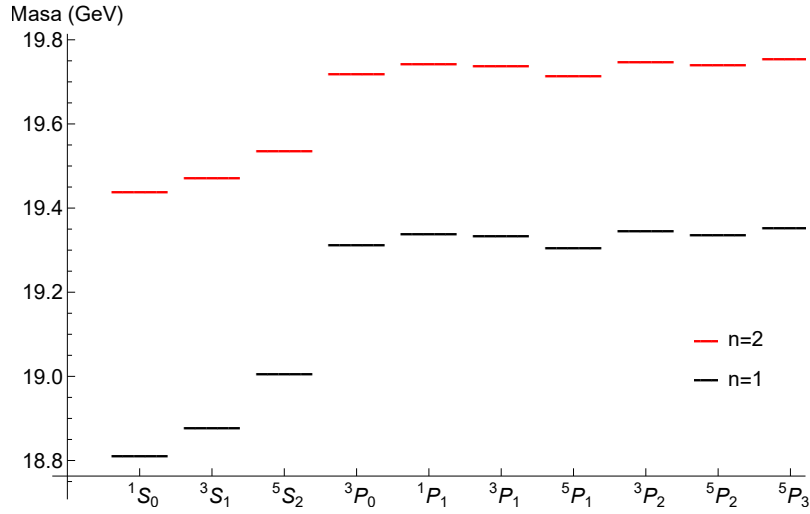


Figura 6.12: Espectro de masas del tetraquark $bb\bar{b}\bar{b}$ calculado con los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles con $n = 1$ del charmonium, utilizando únicamente las correcciones del *spin*. Las líneas rojas corresponden a los estados excitados radialmente, mientras que las líneas negras son estados con $n = 1$.

En las Tablas (6.19) y (6.20) se presentan, por un lado, los observables extraídos de las funciones de onda del tetraquark y por otro, las correcciones energéticas para cada estado. Un aspecto interesante que se observa en este análisis es la dependencia de las masas con los números cuánticos de *spin*. En particular, para estados con los mismos valores de l y j , se observa que la masa disminuye al aumentar el *spin*, debido a que las correcciones *spin-spin* se vuelven progresivamente más negativas.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
$1S$	18.8641	0.6968	0.0472
$1P$	19.3417	1.2955	0.0382
$2S$	19.4670	2.9817	0.0455
$2P$	19.7458	4.8656	0.0472

Tabla 6.19: Resultados extraídos de la función de onda correspondiente al tetraquark *all-bottom* calculado con los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ utilizando únicamente las correcciones del *spin*.

Estado	<i>Spin</i> -órbita	<i>Spin-spin</i>	Tensorial	Masa
1^1S_0	0	-0.0487	0	18.8154
1^3S_1	0	0.0162	0	18.8804
1^5S_2	0	0.1462	0	19.0104
1^3P_0	-0.0170	0.0000	-0.0064	19.3183
1^1P_1	0	0.0000	0	19.3417
1^3P_1	-0.0085	0.0000	0.0018	19.3350
1^5P_1	-0.0255	-0.0001	-0.0042	19.312
1^3P_2	0.0085	0.0000	-0.0009	19.3493
1^5P_2	-0.0085	-0.0001	0.0036	19.3656
1^5P_3	0.0169	-0.0001	-0.0013	19.3573
2^1S_0	0	-0.0243	0	19.4427
2^3S_1	0	0.0081	0	19.4751
2^5S_2	0	0.0728	0	19.5398
2^3P_0	-0.0146	0.0000	-0.0055	19.7257
2^1P_1	0	0.0000	0	19.7458
2^3P_1	-0.0073	0.0000	0.0016	19.7418
2^5P_1	-0.0219	0.0000	-0.0036	19.7202
2^3P_2	0.0073	0.0000	-0.0008	19.7523
2^5P_2	-0.0073	0.0000	0.0031	19.7416
2^5P_3	0.0146	0.0000	-0.0011	19.7593

Tabla 6.20: Valores de las correcciones para cada estado del tetraquark *all-bottom* utilizando los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ considerando únicamente las correcciones debido al *spin*. Los resultados se presentan en GeV.

En general se observa que, a pesar de las diferencias en los parámetros ajustados y en las correcciones incluidas, los espectros resultantes muestran una estructura global muy similar.

Estabilidad

Finalmente, es interesante discutir la estabilidad de los estados obtenidos. Para el caso de un tetraquark, la estabilidad está determinada por los umbrales de decaimiento fuerte hacia dos hadrones. El canal de decaimiento dominante corresponde al llamado decaimiento *fall-apart* hacia dos mesones $q\bar{q} q\bar{q}$, proceso que no requiere la creación de pares adicionales y que puede ocurrir mediante un reordenamiento de quarks y antiquarks. El umbral correspondiente está dado por la suma de las masas de los dos mesones más livianos permitidos por los números cuánticos del estado. Si la masa del tetraquark se encuentra por encima de dicho umbral, el decaimiento fuerte es energéticamente accesible y, en consecuencia, se espera que el estado sea inestable, manifestándose experimentalmente como una resonancia ancha. Por el contrario, si la masa quedara por debajo del umbral, el decaimiento fuerte estaría prohibido y el estado sólo podría decaer por aniquilación de quark-antiquark a gluones o decaimiento radiactivo, pero dichos procesos están suprimidos y el estado sería estable o cuasiestable.

Para el tetraquark $b\bar{b}b\bar{b}$, el umbral *fall-apart* para el estado fundamental está dado por el canal $\eta_b(1S) \eta_b(1S)$, cuya energía es 18.7974 GeV. Los resultados obtenidos en este trabajo se sitúan muy próximos a este umbral, de modo que las incertidumbres del modelo no permiten establecer la estabilidad del estado fundamental. Este resultado, junto con los umbrales para los demás estados se observan en la Tabla (6.21). En la mayoría de los casos, las masas resultan levemente superiores al umbral, con la excepción de los estados excitados radialmente, que se encuentran muy por debajo

del umbral, sugiriendo estados cuasiestables.

Estado	Esquema (a)	Esquema (b)	Esquema (c)	Esquema (d)	Canal	Umbral
1^1S_0	18.7992	18.7702	18.8377	18.8154	$\eta_b(1S) \eta_b(1S)$	18.7974
1^3S_1	18.9102	18.8997	18.9029	18.8804	$\gamma(1S) \eta_b(1S)$	18.8591
1^5S_2	19.1322	19.1587	19.0333	19.0104	$\gamma(1S) \gamma(1S)$	18.9208
1^3P_0	19.3763	19.3615	19.3471	19.3183	$\eta_b(1S) \chi_{b_0}(1P)$	19.25814
1^1P_1	19.4026	19.3892	19.3705	19.3417	$\eta_b(1S) h_b(1P)$	19.298
1^3P_1	19.3950	19.3813	19.3638	19.3350	$\eta_b(1S) \chi_{b_1}(1P)$	19.29148
1^5P_1	19.3691	19.3691	19.3408	19.3120	$\eta_b(1S) h_b(1P)$	19.298
1^3P_2	19.4111	19.3982	19.3782	19.3493	$\eta_b(1S) \chi_{b_2}(1P)$	19.31091
1^5P_2	19.3970	19.3834	19.3656	19.3656	$\gamma_b(1S) \chi_{b_1}(1P)$	19.35318
1^5P_3	19.4202	19.4078	19.3863	19.3573	$\gamma_b(1S) \chi_{b_2}(1P)$	19.37261
2^1S_0	19.4434	19.4328	19.4596	19.4427	$\eta_b(2S) \eta_b(2S)$	19.998
2^3S_1	19.4856	19.4785	19.4921	19.4751	$\gamma(2S) \eta_b(2S)$	20.0224
2^5S_2	19.5699	19.5699	19.5570	19.5398	$\gamma(2S) \gamma(2S)$	20.0468
2^3P_0	19.7181	19.6982	19.7478	19.7257	$\eta_b(2S) \chi_{b_0}(2P)$	20.2315
2^1P_1	19.7391	19.7198	19.7679	19.7458	$\eta_b(2S) h_b(2P)$	20.2588
2^3P_1	19.7331	19.7136	19.7622	19.7418	$\eta_b(2S) \chi_{b_1}(2P)$	20.25446
2^5P_1	19.7124	19.6923	19.7423	19.7202	$\eta_b(2S) h_b(2P)$	20.2588
2^3P_2	19.7459	19.7268	19.7745	19.7523	$\eta_b(2S) \chi_{b_2}(2P)$	20.26765
2^5P_2	19.7347	19.7153	19.7637	19.7416	$\gamma_b(2S) \chi_{b_1}(2P)$	20.48796
2^5P_3	19.7532	19.7344	19.7815	19.7593	$\gamma_b(2S) \chi_{b_2}(2P)$	20.29205

Tabla 6.21: Resultados obtenidos para el espectro del tetraquark *all-bottom* para los distintos esquemas de ajuste empleados. El esquema (a) corresponde al uso de los parámetros obtenidos mediante el ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ del bottomonium utilizando todas las correcciones del OGE. El esquema (b) corresponde a utilizar los parámetros del ajuste de los mismos niveles pero utilizando sólo correcciones de *spin*. El esquema (c) es en el cual se usan los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ del bottomonium incluyendo todas las correcciones de OGE y esquema (d) es análogo pero incluyendo únicamente correcciones de *spin*. Además se muestra el canal mediante el cual decaen a un par de masones, y el umbral correspondiente.

Comparación con la literatura

En la Tabla (6.22) se recopilan diversos resultados teóricos disponibles en la literatura para la masa del tetraquark $bb\bar{b}\bar{b}$ en la representación de diquarks. Se observa que entre los diferentes modelos existe una dispersión de aproximadamente 1 GeV entre los valores más bajos y más altos de la masa de cada nivel del tetraquark. En general, los modelos relativistas como [231, 232] tienden a predecir masas más elevadas, mientras que modelos no relativistas como [188, 233] obtienen masas más pequeñas, aunque existen excepciones notables como [227], que usando un modelo no relativista obtiene las mayores masas en esta comparación. Nuestros resultados se encuentran dentro de este rango, más próximo a los valores obtenidos por modelos no relativistas. Al comparar las separaciones entre los estados 1^1S_0 y 1^3S_0 , se observa que muchos de los resultados de la literatura predicen separaciones menores que las obtenidas en este estudio. En cambio, para los estados excitados radialmente, los resultados son más compatibles, ya que, aunque el estado fundamental que obtenemos es relativamente liviano, las masas crecen más rápidamente, acercándose a los valores reportados por otros autores.

Estado	Esquema (a)	Esquema (b)	Esquema (c)	Esquema (d)	[227]	[233]	[232]	[188]	[234]	[231]	[235]
1^1S_0	18.7992	18.7702	18.8377	18.8154	19.666	18.723	19.201	18.7679	19.247	19.314	19.685
1^3S_1	18.9102	18.8997	18.9029	18.8804	19.673	18.738	19.251	18.7834	19.247	19.320	19.700
1^5S_2	19.1322	19.1587	19.0333	19.0104	19.680	18.768	19.262	-	19.249	19.330	19.708
1^3P_0	19.3763	19.3615	19.3471	19.3183	-	-	-	19.3855	-	19.533	-
1^1P_1	19.4202	19.4078	19.3863	19.3573	-	-	-	19.4189	-	19.536	-
1^3P_1	19.3950	19.3813	19.3638	19.3350	-	-	-	19.4007	-	19.535	-
1^5P_1	19.3691	19.3691	19.3408	19.3120	-	-	-	-	-	19.534	-
1^3P_2	19.4111	19.3982	19.3782	19.3493	-	-	-	19.4343	-	19.539	-
1^5P_2	19.3970	19.3834	19.3656	19.3656	-	-	-	-	-	19.538	-
1^5P_3	19.4202	19.4078	19.3863	19.3573	-	-	-	-	-	19.545	-
2^1S_0	19.4434	19.4328	19.4596	19.4427	19.841	-	-	19.4883	-	19.680	-
2^3S_1	19.4856	19.4785	19.4921	19.4751	19.849	-	-	19.491	19.594	19.682	-
2^5S_2	19.5699	19.5699	19.5570	19.5398	-	-	-	-	19.596	19.687	-
2^3P_0	19.7181	19.6982	19.7478	19.7257	-	-	-	19.4063	-	-	-
2^1P_1	19.7391	19.7198	19.7679	19.7458	-	-	-	19.7678	-	-	-
2^3P_1	19.7331	19.7136	19.7622	19.7418	-	-	-	19.6812	-	-	-
2^5P_1	19.7124	19.6923	19.7423	19.7202	-	-	-	-	-	-	-
2^3P_2	19.7459	19.7268	19.7745	19.7523	-	-	-	19.6253	-	-	-

Tabla 6.22: Espectro del tetraquark $bb\bar{b}\bar{b}$ en GeV obtenido en este trabajo y en distintos trabajos teóricos.

6.2.2. All-charm tetraquark

Para el cálculo del espectro del *all-charm* tetraquark se emplean los parámetros obtenidos a partir del ajuste del espectro del charmonium, junto con la masa del diquark cc determinada en la sección anterior. Este procedimiento se aplica a los distintos esquemas de ajuste considerados a lo largo de este trabajo, lo que da lugar a diferentes espectros posibles para el tetraquark.

Esquema (a)

El primer conjunto de parámetros analizado corresponde al ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ del charmonium, incorporando todas las correcciones asociadas al intercambio de un gluon (OGE): $g = 1.90$, $m_g = 0.06$ GeV, $b = 0.25$ GeV² y $m_{cc} = 2.9467$ GeV. El espectro resultante del tetraquark se muestra en la Fig. (6.13).

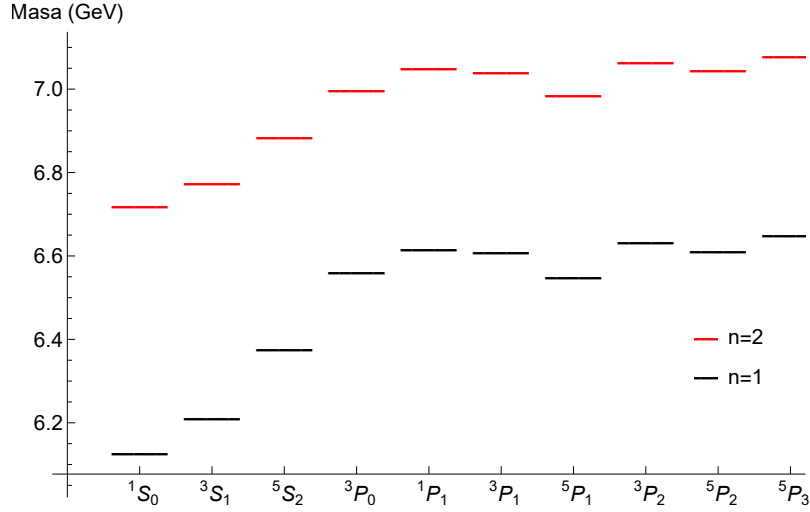


Figura 6.13: Espectro de masas del tetraquark $cc\bar{c}\bar{c}$ calculado con los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ del charmonium, utilizando todas las correcciones del OGE. Las líneas rojas corresponden a los estados excitados radialmente, mientras que las líneas negras son estados con $n = 1$.

Algunos parámetros relevantes de los estados hallados a partir de la función de onda del tetraquark se encuentran en la Tabla (6.23). Se observa que las velocidades cuadráticas medias obtenidas son menores que las del diquark cc , como es esperable, e incluso para los estados excitados la aproximación no relativista parece bien justificada. Sin embargo, estas velocidades son significativamente mayores que las obtenidas en el caso del tetraquark $bb\bar{b}\bar{b}$ debido a las masas de los constituyentes. De forma análoga, los radios medios son considerablemente más grandes que en el sistema *all-bottom*, aunque permanecen por debajo de los valores de los diquarks cc , mostrando el mismo problema de consistencia mencionado anteriormente. Este resultado se observa también en los demás conjuntos de parámetros.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
$1S$	6.2269	1.3510	0.1232
$1P$	6.6579	2.2475	0.1287
$2S$	6.8316	8.9980	0.1550
$2P$	7.1191	13.6784	0.1705

Tabla 6.23: Resultados extraídos de la función de onda correspondiente al tetraquark *all-charm* calculado con los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ utilizando todas las correcciones del OGE.

En la Tabla (6.24) se presentan los valores de las correcciones a la energía para los distintos niveles del tetraquark. Se observa que las correcciones relativistas a la energía cinética son muy pequeñas, validando el uso de la aproximación no relativista.

Estado	Corrección relativista	Correcciones cinéticas	<i>Spin</i> -órbita	<i>Spin-spin</i>	Tensorial	Masa
1^1S_0	-0.0296	-0.0055	0	-0.0619	0	6.1299
1^3S_1	-0.0296	-0.0055	0	0.0206	0	6.2125
1^5S_2	-0.0296	-0.0055	0	0.1858	0	6.3777
1^3P_0	-0.0190	-0.0197	-0.0364	0.0000	-0.0136163	6.5691
1^1P_1	-0.0190	-0.0197	0	0.0000	0	6.6192
1^3P_1	-0.0190	-0.0197	-0.0182	0.0000	0.0039	6.6048
1^5P_1	-0.0190	-0.0197	-0.0546	-0.0001	-0.0089	6.5555
1^3P_2	-0.0190	-0.0197	0.0182	0.0000	-0.0019	6.63537
1^5P_2	-0.0190	-0.0197	-0.0182	-0.0001	0.0078	6.6086
1^5P_3	-0.0190	-0.0197	0.0364	-0.0001	-0.0027	6.6527
2^1S_0	-0.0437	-0.0242	0	-0.0412	0	6.7224
2^3S_1	-0.0437	-0.0242	0	0.0137	0	6.7774
2^5S_2	-0.0437	-0.0242	0	0.1237	0	6.8874
2^3P_0	-0.0285	-0.0389	-0.0335	0.0000	-0.0125	7.0056
2^1P_1	-0.0285	-0.0389	0	0.0000	0	7.0517
2^3P_1	-0.0285	-0.0389	-0.0168	0.0000	0.0036	7.0385
2^5P_1	-0.0285	-0.0389	-0.0503	-0.0001	-0.0082	6.9931
2^3P_2	-0.0285	-0.0389	0.0168	0.0000	-0.0018	7.0666
2^5P_2	-0.0285	-0.0389	-0.0168	-0.0001	0.0072	7.0420
2^5P_3	-0.0285	-0.0389	0.0335	-0.0001	-0.0025	7.0826

Tabla 6.24: Valores de las correcciones para cada estado del tetraquark *all-charm* utilizando los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ con todas las correcciones debido al OGE. Los resultados se presentan en GeV.

Esquema (b)

El segundo conjunto de parámetros proviene del estudio de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ del charmonium considerando únicamente correcciones dependientes del *spin*: $g = 2.10$, $m_g = 0.01$ GeV, $b = 0.19$ GeV² y $m_{cc} = 2.9959$ GeV. El espectro del tetraquark obtenido utilizando estos parámetros se encuentra en la Fig. (6.14).

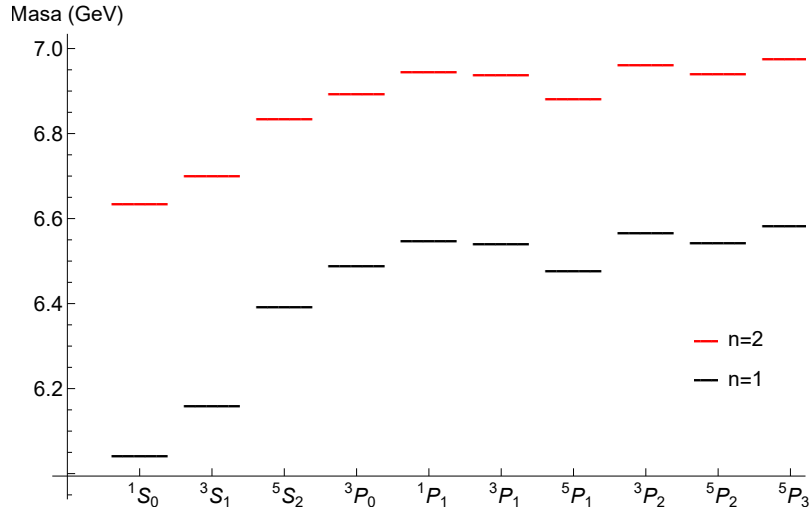


Figura 6.14: Espectro de masas del tetraquark $cc\bar{c}\bar{c}$ calculado con los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ del charmonium, utilizando únicamente las correcciones del *spin*. Las líneas rojas corresponden a los estados excitados radialmente, mientras que las líneas negras son estados con $n = 1$.

En la Tabla (6.25) se muestran valores característicos hallados a partir de las funciones de onda del tetraquark, mientras que en la Tabla (6.26) se presentan los valores de las distintas correcciones a la energía de los niveles. Se observa que, al igual que en el caso del *all-bottom*, las correcciones debido a la interacción *spin-spin* toman valores mucho mayores que para los mesones o diquarks. Incluso, toman valores del mismo orden que el caso del *all-bottom*, a pesar de estar suprimido por un factor menor ($1/m_{cc}$), mostrando que lo que domina es el valor de la función de onda en el origen. Los valores del espectro de masas del tetraquark obtenidos son muy similares a los resultados anteriores a pesar del cambio en los parámetros.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
1S	6.1337	1.3384	0.1239
1P	6.5525	2.3580	0.1135
2S	6.6879	9.8967	0.1359
2P	6.9491	15.5946	0.1450

Tabla 6.25: Resultados extraídos de la función de onda correspondiente al tetraquark *all-charm* calculado con los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ utilizando únicamente las correcciones del *spin*.

Estado	<i>Spin-órbita</i>	<i>Spin-spin</i>	Tensorial	Masa
1^1S_0	0	-0.0875	0	6.0461
1^3S_1	0	0.0292	0	6.1628
1^5S_2	0	0.2626	0	6.3962
1^3P_0	-0.0388	0.0000	-0.0145	6.4991
1^1P_1	0	0.0000	0	6.5524
1^3P_1	-0.0194	0.0000	0.0041	6.5372
1^5P_1	-0.0582	0.0000	-0.0104	6.4838
1^3P_2	0.0194	0.0000	-0.0021	6.5697
1^5P_2	-0.0194	0.0000	0.0083	6.5413
1^5P_3	0.0388	0.0000	-0.0029	6.5883
2^1S_0	0	-0.0501	0	6.6378
2^3S_1	0	0.0167	0	6.7045
2^5S_2	0	0.1502	0	6.8380
2^3P_0	-0.0345	0.0000	-0.0129	6.9016
2^1P_1	0	0.0000	0	6.9490
2^3P_1	-0.0173	0.0000	0.0037	6.9355
2^5P_1	-0.0518	0.0000	-0.0085	6.8888
2^3P_2	0.0173	0.0000	-0.0018	6.9645
2^5P_2	-0.0173	0.0000	0.0074	6.9391
2^5P_3	0.0345	0.0000	-0.0026	6.9810

Tabla 6.26: Valores de las correcciones para cada estado del tetraquark *all-charm* utilizando los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ considerando únicamente las correcciones debido al *spin*. Los resultados se presentan en GeV.

Esquema (c)

El tercer conjunto de parámetros se obtiene a partir del estudio de los niveles con $n = 1$ del charmonium, incluyendo todas las correcciones del OGE: $g = 1.925$, $m_g = 0.03$ GeV, $b = 0.26$ GeV² y una masa del estado fundamental del diquark cc de $m_{cc} = 2.9509$ GeV. El espectro del tetraquark correspondiente se encuentra en la Fig. (6.15).

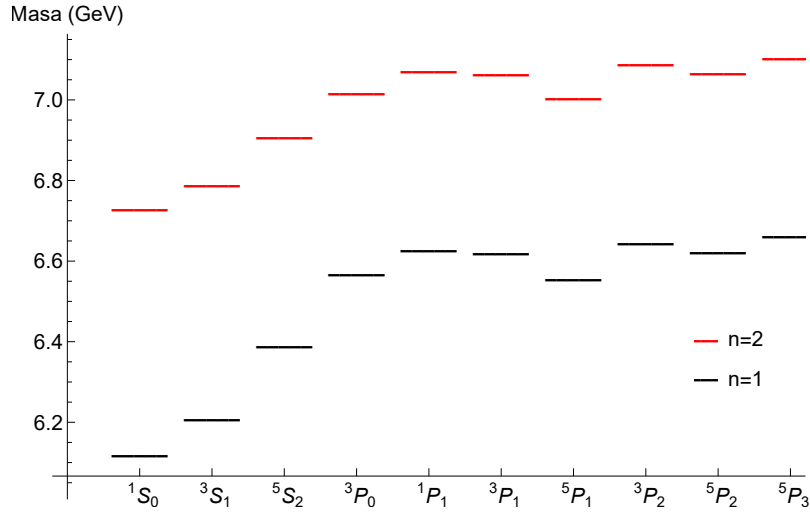


Figura 6.15: Espectro de masas del tetraquark $cc\bar{c}\bar{c}$ calculado con los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles con $n = 1$ del charmonium, utilizando todas las correcciones del OGE. Las líneas rojas corresponden a los estados excitados radialmente, mientras que las líneas negras son estados con $n = 1$.

Los valores característicos extraídos de las funciones de onda y las correcciones energéticas se presentan en las Tablas (6.27) y (6.28) respectivamente. En este caso, al igual que con el primer conjunto de parámetros, se obtienen diferencias hiperfinas entre el estado fundamental y el primer estado excitado levemente menores a las halladas con los esquemas que incluyen solamente correcciones de *spin*. Aunque en general, las masas halladas con los esquemas (a) y (c) tienden a ser mayores, compensando este efecto.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
$1S$	6.2169	1.3180	0.1294
$1P$	6.6675	2.2067	0.1332
$2S$	6.8447	8.6741	0.1603
$2P$	7.1431	13.2389	0.1757

Tabla 6.27: Resultados extraídos de la función de onda correspondiente al tetraquark *all-charm* calculados con los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ utilizando todas las correcciones del OGE.

Estado	Corrección relativista	Correcciones cinéticas	<i>Spin</i> -órbita	<i>Spin-spin</i>	Tensorial	Masa
1^1S_0	-0.0319	-0.0068	0	-0.0674	0	6.1212
1^3S_1	-0.0319	-0.0068	0	0.0225	0	6.2111
1^5S_2	-0.0319	-0.0068	0	0.2021	0	6.3907
1^3P_0	-0.0202	-0.0221	-0.0392	0.0000	-0.0146	6.5765
1^1P_1	-0.0202	-0.0221	0	0.0000	0	6.6303
1^3P_1	-0.0202	-0.0221	-0.0196	0.0000	0.0042	6.6149
1^5P_1	-0.0202	-0.0221	-0.0588	0.0000	-0.0096	6.5619
1^3P_2	-0.0202	-0.0221	0.0196	0.0000	-0.0021	6.6478
1^5P_2	-0.0202	-0.0221	-0.0196	0.0000	0.0084	6.6191
1^5P_3	-0.0202	-0.0221	0.0392	0.0000	-0.0029	6.6666
2^1S_0	-0.0465	-0.0272	0	-0.0446	0	6.7324
2^3S_1	-0.0465	-0.0272	0	0.0149	0	6.7918
2^5S_2	-0.0465	-0.0272	0	0.1337	0	6.9107
2^3P_0	-0.0411	-0.0318	-0.0360	0.0000	-0.0135	7.0246
2^1P_1	-0.0411	-0.0318	0	0.0000	0	7.0741
2^3P_1	-0.0411	-0.0318	-0.0180	0.0000	0.0038	7.0599
2^5P_1	-0.0411	-0.0318	-0.0541	0.0000	-0.0088	7.0111
2^3P_2	-0.0411	-0.0318	0.0180	0.0000	-0.0019	7.0901
2^5P_2	-0.0411	-0.0318	-0.0180	0.0000	0.0077	7.0637
2^5P_3	-0.0411	-0.0318	0.0360	0.0000	-0.0027	7.1074

Tabla 6.28: Valores de las correcciones para cada estado del tetraquark *all-charm* utilizando los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ considerando todas las correcciones debido al OGE. Los resultados se presentan en GeV.

Esquema (d)

El último conjunto de parámetros considerado se obtiene del ajuste de los niveles con $n = 1$ del charmonium, incorporando únicamente las correcciones dependientes del *spin*: $g = 2.00$, $m_g = 0.09$ GeV, $b = 0.22$ GeV² y una masa del estado fundamental del diquark *cc* de $m_{cc} = 2.9236$ GeV. El espectro del tetraquark obtenido utilizando estos parámetros se encuentra en la Fig. (6.16).

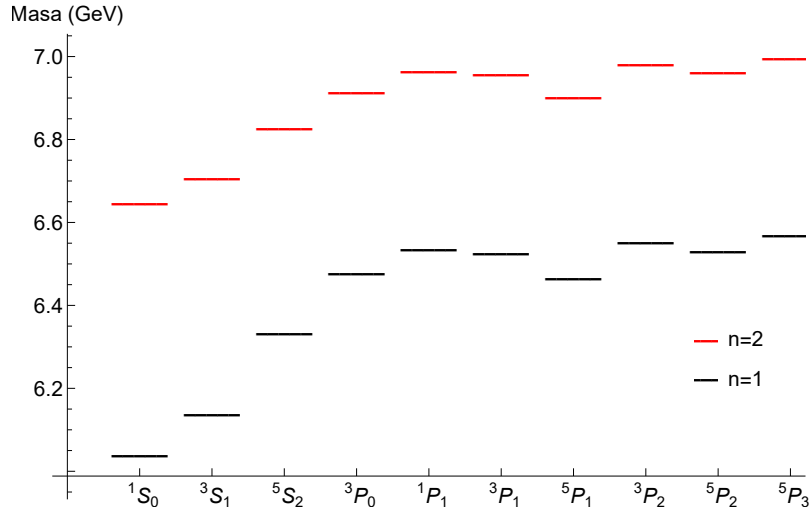


Figura 6.16: Espectro de masas del tetraquark $cc\bar{c}\bar{c}$ calculado con los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles con $n = 1$ del charmonium, utilizando únicamente las correcciones del *spin*. Las líneas rojas corresponden a los estados excitados radialmente, mientras que las líneas negras son estados con $n = 1$.

En la Tabla (6.29) se muestran valores característicos hallados a partir de las funciones de onda del tetraquark, mientras que en la Tabla (6.30) se presentan los valores de las distintas correcciones a la energía de los niveles.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
1S	6.1148	1.3595	0.1247
1P	6.5381	2.3176	0.1231
2S	6.6935	9.5656	0.1480
2P	6.9681	14.7614	0.1606

Tabla 6.29: Resultados extraídos de la función de onda correspondiente al tetraquark *all-charm* calculados con los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ utilizando únicamente las correcciones del *spin*.

Estado	<i>Spin-órbita</i>	<i>Spin-spin</i>	Tensorial	Masa
1^1S_0	0	-0.0732	0	6.0416
1^3S_1	0	0.0244	0	6.1392
1^5S_2	0	0.2195	0	6.3343
1^3P_0	-0.0378	0.0000	-0.0142	6.4861
1^1P_1	0	0.0001	0	6.5382
1^3P_1	-0.0189	0.0000	0.0041	6.5233
1^5P_1	-0.0567	-0.0001	-0.0093	6.4719
1^3P_2	0.0189	0.0000	-0.0020	6.5550
1^5P_2	-0.0189	-0.0003	0.0081	6.5271
1^5P_3	0.0378	-0.0003	-0.0028	6.5729
2^1S_0	0	-0.0456	0	6.6479
2^3S_1	0	0.0152	0	6.7087
2^5S_2	0	0.1369	0	6.8305
2^3P_0	-0.0344	0.0000	-0.0129	6.9209
2^1P_1	0	0.0001	0	6.9682
2^3P_1	-0.0172	0.0000	0.0037	6.9546
2^5P_1	-0.0516	-0.0002	-0.0085	6.9080
2^3P_2	0.0172	0.0000	-0.0018	6.9835
2^5P_2	-0.0172	-0.0002	0.0074	6.9582
2^5P_3	0.0344	-0.0002	-0.0026	6.9998

Tabla 6.30: Valores de las correcciones para cada estado del tetraquark *all-charm* utilizando los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ considerando únicamente las correcciones debido al *spin*. Los resultados se presentan en GeV.

Estabilidad

La estabilidad del tetraquark se analiza de forma análoga a la realizada para el sistema *all-bottom*, evaluando si es energéticamente posible el decaimiento del tipo *fall-apart* hacia dos mesones $q\bar{q} q\bar{q}$. En el caso del tetraquark $cc\bar{c}\bar{c}$, el umbral correspondiente al estado fundamental está dado por el canal $\eta_c(1S) \eta_c(1S)$, cuya energía es 5.9678 GeV. Los resultados obtenidos en este trabajo se encuentran próximos a este umbral, aunque por encima del mismo en todas los esquemas de ajuste considerados, como se muestra en la Tabla (6.31). Nuevamente, los estados excitados radialmente parecerían ser cuasiestables, obteniendo valores por debajo del umbral para todos los esquemas de ajuste.

Estado	Esquema (a)	Esquema (b)	Esquema (c)	Esquema (d)	Canal	Umbral
1^1S_0	6.1299	6.0461	6.1212	6.0416	$\eta_c(1S)\eta_c(1S)$	5.9678
1^3S_1	6.2125	6.1628	6.2111	6.1392	$J/\psi(1S)\eta_c(1S)$	6.0808
1^5S_2	6.3777	6.3962	6.3907	6.3343	$J/\psi(1S)J/\psi(1S)$	6.1938
1^3P_0	6.5691	6.4991	6.5765	6.4861	$\eta_c(1S)\chi_{c_0}(1P)$	6.39861
1^1P_1	6.6192	6.5524	6.6303	6.5382	$\eta_c(1S)h_c(1P)$	6.50927
1^3P_1	6.6048	6.5372	6.6149	6.5233	$\eta_c(1S)\chi_{c_1}(1P)$	6.49457
1^5P_1	6.5555	6.4838	6.5619	6.4719	$\eta_c(1S)h_c(1P)$	6.50927
1^3P_2	6.6354	6.5697	6.6478	6.5550	$\eta_c(1S)\chi_{c_2}(1P)$	6.54007
1^5P_2	6.6086	6.5413	6.6191	6.5271	$J/\psi(1S)\chi_{c_1}(1P)$	6.60757
1^5P_3	6.6527	6.5883	6.6665	6.5729	$J/\psi(1S)\chi_{c_2}(1P)$	6.65307
2^1S_0	6.7224	6.6378	6.7324	6.6479	$\eta_c(2S)\eta_c(2S)$	7.2754
2^3S_1	6.7774	6.7045	6.7918	6.7087	$\psi(2S)\eta_c(2S)$	7.3238
2^5S_2	6.8874	6.8380	6.9107	6.8305	$\psi(2S)\psi(2S)$	7.3722

Tabla 6.31: Resultados obtenidos para el espectro del tetraquark *all-charm* para los distintos esquemas de ajuste empleados. El esquema (a) corresponde al uso de los parámetros obtenidos mediante el ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ del charmonium utilizando todas las correcciones del OGE. El esquema (b) corresponde a utilizar los parámetros del ajuste de los mismos niveles pero utilizando sólo correcciones de *spin*. El esquema (c) es en el cual se usan los parámetros del ajuste de los niveles con $n = 1$ del charmonium incluyendo todas las correcciones de OGE y esquema (d) es análogo pero incluyendo únicamente correcciones de *spin*. Además se muestra el canal mediante el cual decaen a un par de mesones, y el umbral correspondiente.

Comparación con la literatura y los experimentos

En la Tabla (6.32) se recopilan distintos resultados teóricos disponibles en la literatura para la masa del tetraquark $cc\bar{c}\bar{c}$ en la representación de diquarks. Entre los distintos modelos se observa una dispersión de aproximadamente 0.5 GeV, menor que la encontrada en el caso del sistema *all-bottom*. Los valores obtenidos en este trabajo se ubican dentro de dicho rango. Al comparar las separaciones entre los estados 1^1S_0 y 1^3S_0 , se observa que muchos de los resultados disponibles en la literatura predicen separaciones menores que las obtenidas en este trabajo. Por otra parte, las masas de los estados excitados radialmente suelen encontrarse, en la mayoría de los modelos, por debajo de 7 GeV, siendo en general menores que las predichas por nuestro enfoque.

Una ventaja adicional del estudio del sistema *all-charm* es la existencia de resultados experimentales con los cuales contrastar las predicciones teóricas, a diferencia de lo que ocurre para el sistema *all-bottom*. En 2024, la colaboración CMS reportó la observación de tres estados exóticos X(6600), X(6900) y X(7200) [45], en el canal $J/\psi J/\psi$, propuestos como candidatos a tetraquarks *all-charm*. Posteriormente, en 2025, se logró determinar sus números cuánticos como $j^{PC} = 2^{++}$ [236]. En la Tabla (6.33) se comparan estos resultados experimentales con las predicciones de los cuatro esquemas de ajuste considerados. Se incluyen los valores reportados por CMS tanto en el análisis con interferencia (IM) como sin interferencia (NIM), siendo el primero el que presenta una mejor descripción global de los datos. En todos los casos, las masas obtenidas para el estado 1^5S_2 resultan menores que las observadas experimentalmente, situándose más cerca de los valores del análisis NIM. En cambio, para el estado excitado 2^5S_2 , los resultados teóricos se aproximan notablemente a los valores experimentales, llegando incluso a ubicarse dentro de las incertidumbres reportadas en el análisis IM.

Estado	Esquema (a)	Esquema (b)	Esquema (c)	Esquema (d)	[227]	[233]	[235]	[188]	[234]	[231]	[62]
1^1S_0	6.1299	6.0461	6.1212	6.0416	6.322	5.960	6.469	6.03337	6.425	6.190	5.9694
1^3S_1	6.2125	6.1628	6.2111	6.1392	6.354	6.009	6.519	6.08137	6.425	6.271	6.0209
1^5S_2	6.3777	6.3962	6.3907	6.3343	6.385	6.100	6.545	-	6.432	6.367	6.1154
1^3P_0	6.5691	6.4991	6.5765	6.4861	-	-	-	6.51929	-	6.628	6.4804
1^1P_1	6.6192	6.5524	6.6303	6.5382	-	-	-	6.58654	-	6.631	6.5771
1^3P_1	6.6048	6.5372	6.6149	6.5233	-	-	-	6.57687	-	6.634	6.5774
1^5P_1	6.5555	6.4838	6.5619	6.4719	-	-	-	-	-	6.635	6.4954
1^3P_2	6.6354	6.5697	6.6478	6.5550	-	-	-	6.61831	-	6.644	6.6099
1^5P_2	6.6086	6.5413	6.6191	6.5271	-	-	-	-	-	6.648	6.6002
1^5P_3	6.6527	6.5883	6.6665	6.5729	-	-	-	-	-	6.664	6.6412
2^1S_0	6.7224	6.6378	6.7324	6.6479	6.575	-	-	6.55988	-	6.782	6.6633
2^3S_1	6.7774	6.7045	6.7918	6.7087	6.609	-	-	6.68904	6.856	6.816	6.6745
2^5S_2	6.8874	6.8380	6.9107	6.8305	-	-	-	-	6.864	6.868	6.6981
2^3P_0	-	-	-	-	-	-	-	6.8962	-	-	6.8665
2^1P_1	-	-	-	-	-	-	-	6.95144	-	-	6.9441
2^3P_1	-	-	-	-	-	-	-	6.94318	-	-	6.9439
2^5P_1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6.8756
2^3P_2	-	-	-	-	-	-	-	6.97743	-	-	6.9704
2^5P_2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6.9621
2^5P_3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6.9967

Tabla 6.32: Espectro del tetraquark $cc\bar{c}$ en GeV obtenido en este trabajo y en distintos trabajos teóricos.

Estado	Esquema (a)	Esquema (b)	Esquema (c)	Esquema (d)	M_{NIM}	M_{IM}
1^5S_2	6.3777	6.3962	6.3907	6.3343	6.552(12)	6.638(43)
2^5S_2	6.8874	6.8380	6.9107	6.8305	6.927(9)	6.847(48)

Tabla 6.33: Resultados experimentales de los estados detectados del tetraquark *all-charm* en GeV, junto con las predicciones de nuestro modelo.

6.3. Conclusiones parciales

A partir de los parámetros del modelo obtenidos en el capítulo anterior, se estudiaron los diquarks pesados como bloques constituyentes de los tetraquarks. Los resultados muestran que los diquarks presentan funciones de onda más extendidas y valores mayores de la velocidad cuadrática media en comparación con los mesones. Para el caso del diquark bb , se mantiene bien justificado el uso de la aproximación no relativista, mientras que para el diquark cc los estados excitados muestran inconsistencias, como radios medios muy grandes.

Estas diferencias se atenúan al considerar los tetraquarks pesados, en los cuales los radios medios y velocidades cuadráticas medias son muy pequeñas, consistentes con la visión de tetraquarks compactos. Las correcciones relativistas resultan subdominantes frente a las demás, justificando el uso del modelo. Sin embargo, se presenta un problema de consistencia debido al uso de la aproximación de los diquarks como objetos puntuales dentro del tetraquark, dando lugar a tetraquarks con radios menores a los radios de los diquarks.

Por otro lado, comparando los resultados hallados con la literatura, se obtienen masas dentro del rango de los valores esperados, donde las masas de los estados excitados radialmente resultan ser mayores a lo predicho por otros modelos. Sin embargo, en el caso del tetraquark *all-charm* se observa una gran concordancia con los valores experimentales, especialmente para los estados excitados radialmente.

Al igual que en el capítulo anterior, la masa del gluon no juega un papel relevante para determinar el espectro de los tetraquarks. Se obtuvieron resultados similares para todos los esquemas de ajuste considerados a pesar de la variación en el valor de la masa del gluon.

En conjunto, a pesar de las dificultades asociadas al tratamiento de la interacción *spin-spin* y las limitaciones debido a la validez de la aproximación no relativista en el sector de charm, el modelo proporciona una descripción coherente de mesones, diquarks y tetraquarks en tanto en el sector del bottom como en el del charm.

Capítulo 7

Resultados incluyendo el flujo de los parámetros

En el Cap. 5 se utilizó el espectro experimental del bottomonium y charmonium para ajustar los parámetros del modelo considerando dos conjuntos independientes de parámetros: $\{g, m_g, b, m_b\}$ para el bottomonium y $\{g, m_g, b, m_c\}$ para el charmonium. Este procedimiento nos permitió describir el espectro de cada sistema por separado. Sin embargo, como se discutió en la Sección 2.4, en QCD los parámetros fundamentales de la teoría no son constantes, sino que obtienen una dependencia con la escala de energía cuando se utiliza el grupo de renormalización. Desde este punto de vista, nos preguntamos si es posible describir simultáneamente los espectros de los mesones pesados (compuestos por quarks c y b) empleando un único conjunto de parámetros, cuya diferencia entre ambos sistemas provenga de la variación con la escala.

Con este objetivo, en lugar de utilizar parámetros independientes para cada mesón, se considera que la constante de acoplamiento, g , y la masa del gluon, m_g , dependen de la escala, μ , correspondiente a la masa reducida del sistema ligado. De este modo, se obtienen los conjuntos $\{g(\mu_{c\bar{c}}), m_g(\mu_{c\bar{c}}), b, m_c\}$ y $\{g(\mu_{b\bar{b}}), m_g(\mu_{b\bar{b}}), b, m_b\}$ asociados a las escalas características del charmonium y del bottomonium, respectivamente, pero conectados entre sí mediante el flujo de los parámetros g y m_g . En este esquema, la tensión de la cuerda, b , se mantiene constante, tomando un valor común para ambos sistemas. Si bien las masas de los quarks también presentan, en principio, una dependencia con la escala, este efecto no juega un rol relevante en este análisis.

Para implementar esta idea, se debe especificar cómo es el flujo de los parámetros del modelo. Para esto se utiliza el flujo derivado del modelo de Curci–Ferrari a un *loop*, presentado en [237]. Adicionalmente, se estudia de forma superficial el límite a altas energías de este flujo, que da lugar al *running* UV de QCD para la constante de acoplamiento, el cual se utiliza comúnmente en la literatura [231, 235, 238].

Con esta nueva idea, volvemos a repetir el análisis del espectro de tetraquarks del capítulo anterior, ajustando los parámetros del modelo a partir del espectro de masas de mesones pesados. Además de los sistemas charmonium y bottomonium, se agrega el estudio del mesón mixto charm–bottom. Se analizan nuevamente dos esquemas de ajuste del espectro. En el primero, los parámetros del modelo se ajustan utilizando simultáneamente los estados con números cuánticos $n = 1$ y $n = 2$ de los mesones. En el segundo, el ajuste se realiza exclusivamente a partir de los estados con $n = 1$, mientras que los niveles excitados radialmente se consideran como una predicción del modelo. Adicionalmente, se estudia un caso particular en el que sólo se incorporan las correcciones dependientes del *spin*. Este tipo de aproximación es habitual en modelos efectivos inspirados en QCD, donde se

retienen únicamente las contribuciones *spin-spin*, *spin-órbita* y tensorial.

Una vez fijados los parámetros, se analiza el espectro de diquarks pesados *cc* y *bb*, y se utilizan estos resultados para predecir el espectro de tetraquarks *all-charm* y *all-bottom*. Al igual que en el caso de los mesones pesados, para utilizar los parámetros obtenidos en el estudio de tetraquarks, se debe tener en cuenta la dependencia con la escala de los parámetros del modelo. En particular, es necesario determinar el conjunto $\{g(\mu_{\text{tetraquark}}), m_g(\mu_{\text{tetraquark}}), b, m_{\text{diquark}}\}$ para los distintos sistemas considerados.

El capítulo se organiza de manera progresiva, comenzando con el ajuste del espectro de mesones pesados y continuando con el estudio de diquarks y tetraquarks pesados. En cada etapa, los parámetros del modelo se evalúan a la escala característica del sistema considerado, siguiendo el flujo correspondiente, y se analizan las diferencias entre los distintos esquemas de *running* y estrategias de ajuste.

7.1. Flujos de los parámetros

En teorías cuánticas de campos, la dependencia con la escala de los parámetros de un modelo se formaliza mediante el grupo de renormalización. Este formalismo describe cómo los acoplamientos y demás parámetros del modelo evolucionan al cambiar la escala de energía del proceso considerado. Dicha dependencia se describe mediante ecuaciones de flujo.

En particular, la evolución de la constante de acoplamiento $g(\mu)$ está determinada por la función beta:

$$\beta_g \equiv \mu \frac{dg}{d\mu},$$

mientras que, de manera análoga, la evolución de la masa del gluon $m_g(\mu)$ se describe mediante:

$$\beta_{m_g^2} \equiv \mu \frac{dm_g^2}{d\mu}.$$

Estas ecuaciones de flujo dan lugar a una ecuación diferencial que permite obtener la constante de acoplamiento y la masa del gluon como una función de la escala μ . La forma explícita de estas funciones beta depende tanto del modelo considerado como del régimen de energías en el que se trabaje.

Cabe destacar que no todos los parámetros del modelo se consideran dependientes de la escala. En particular, el parámetro de confinamiento b se considera constante a lo largo de este análisis. Esto se debe a que el confinamiento es un fenómeno que domina en el régimen infrarrojo y no se espera que varíe de manera significativa dentro del rango de escalas asociado a los estados ligados estudiados.

En este trabajo se emplea una descripción del flujo de los parámetros que surge del modelo de Curci-Ferrari a un *loop*. Esta descripción introduce una dependencia en la escala a la constante de acoplamiento consistente con fenómenos como la libertad asintótica. En este caso, las funciones beta para el acoplamiento y la masa del gluon a un *loop* se escriben como en [237]:

$$\begin{aligned} \beta_g &= g(\mu) \left(\frac{1}{2} \gamma_a + \gamma_c \right), \\ \beta_{m_g} &= \frac{1}{2} m_g(\mu) (\gamma_a + \gamma_c), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \gamma_a = & \frac{g^2(\mu)}{192\pi^2} \left\{ 48 + \frac{16(-6m_c + \mu^2)}{\mu^2} + \frac{384m_c^4 \operatorname{arctgh}\left(\frac{\mu}{\sqrt{4m_c^2 + \mu^2}}\right)}{\mu^3 \sqrt{4m_c^2 + \mu^2}} + \frac{12\mu^4 \log\left[\frac{\mu}{m_g(\mu)}\right]}{m_g^4(\mu)} \right. \\ & + 6 \log\left[\frac{m_g^2(\mu)}{\mu^2 + m_g^2(\mu)}\right] \frac{2\mu^2 - 3m_g^2(\mu)}{\mu^6 m_g^4(\mu)} [\mu^4 - \mu^2 m_g^2(\mu) - 2m_g^4(\mu)] \\ & \left. + 12 \operatorname{arctgh}\left[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 4m_g^2(\mu)}}\right] \frac{\mu^8 - 5\mu^6 m_g^2(\mu) - 16\mu^4 m_g^4(\mu) + 44\mu^2 m_g^6(\mu) - 144m_g^8(\mu)}{\mu^3 m_g^4(\mu) \sqrt{\mu^2 + 4m_g^2(\mu)}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\gamma_c = \frac{3g^2(\mu)}{16\pi^2} \frac{1}{2s^2} \left\{ s^3 \log(s) - (1+s) [2s + (-2-s+s^2) \log(1+s)] \right\},$$

donde $s = \mu^2/m_g^2(\mu)$.

Para este flujo se consideró que el número de colores de la teoría es tres. Se debe determinar además el número de sabores activos, correspondiente a la cantidad de quarks con masas menores a la escala considerada. Para la mayor parte de nuestro estudio, el número de quarks activos será cuatro: up, down, strange y charm. Sin embargo, para trabajar con escalas mayores, como la del $bb\bar{b}\bar{b}$, se debe incluir también el quark bottom. Además se impuso que las masas de los quarks más livianos son despreciables en comparación con las masas del charm y bottom, fijando $m_u \approx m_d \approx m_s \approx 0$.

Estas ecuaciones diferenciales se resuelven de forma numérica, y las funciones resultantes se representan en la Fig. (7.1). Se observa que tanto la constante de acoplamiento como la masa del gluon decrecen a medida que aumenta la energía. Cuanto mayor es la masa del gluon inicialmente, más rápido decrece la constante de acoplamiento.

Es interesante analizar el régimen de altas energías de este *running*, donde la masa del gluon se vuelve muy pequeña, ya que el flujo de la constante de acoplamiento toma la forma del conocido flujo UV de QCD a un *loop*, el cual es utilizado frecuentemente en la literatura [231, 235, 238]:

$$\beta_g = -\beta_0 \frac{g^3}{16\pi^2},$$

donde

$$\beta_0 = \frac{11N_c - 2N_f}{3},$$

con N_c el número de colores y N_f el número de sabores activos.

La solución de esta ecuación conduce a la conocida expresión para la constante de acoplamiento dependiente de la escala,

$$g^2(\mu) = \frac{g_0^2}{1 + \frac{g_0^2 \beta_0}{16\pi^2} \log\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)},$$

con g_0 el valor de la constante de acoplamiento en una escala de referencia μ_0 , que llamamos escala de renormalización.

Es importante señalar que este flujo no se debe extender hacia escalas muy bajas de energía, ya que presenta un polo de Landau. Nosotros asumiremos que dicho polo no es alcanzado en el rango

de escalas relevantes para los sistemas ligados considerados.

En el régimen de altas energías del modelo de Curci–Ferrari también se debe tener en cuenta el flujo de la masa del gluon. Lo que introduce una ecuación de flujo adicional:

$$\beta_{m_g^2} = \frac{m_g^2 g^2}{16\pi^2} \left(-\frac{35}{6} N_c + \frac{4}{3} N_f \right).$$

Esta ecuación puede resolverse analíticamente, obteniendo:

$$m_g^2(\mu) = m_0^2 \left(\frac{g(\mu)}{g_0} \right)^\kappa, \quad (7.1)$$

con

$$\kappa = \frac{35N_c - 8N_f}{2(11N_c - 2N_f)},$$

donde se utilizan los mismos valores de N_c y N_f que en el caso del acoplamiento.

En la Fig. (7.1) se muestra el comportamiento de estos parámetros en función de la escala de energía. Para el rango de escalas considerado, la constante de acoplamiento no presenta un polo de Landau, lo que valida el uso del régimen ultravioleta en este análisis. Comparando ambos flujos, se observa que cuando no se considera el régimen ultravioleta, se predice una constante de acoplamiento que decrece más lentamente, mientras que la masa del gluon disminuye de manera más pronunciada.

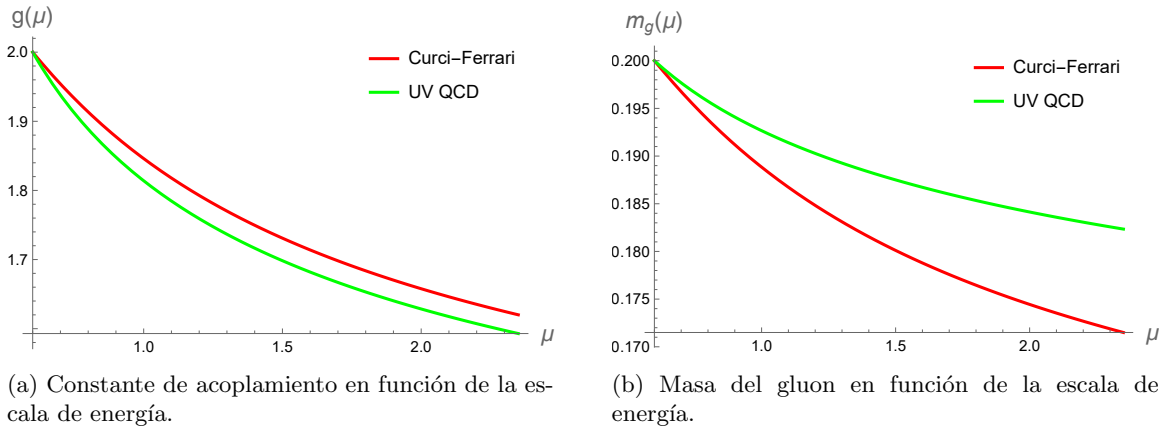


Figura 7.1: Comportamiento de los parámetros del modelo con la escala de energía, μ , en GeV. En rojo se muestran los resultados utilizando el modelo de Curci-Ferrari y en verde se muestran los resultados para el límite de altas energías, correspondiente al flujo de QCD perturbativo.

Para el estudio del espectro de mesones pesados, utilizamos el flujo obtenido a partir del modelo de Curci-Ferrari, sin embargo, realizamos un pequeño análisis de los resultados que se obtendrían con el flujo en el régimen ultravioleta y qué problemas trae.

7.2. Espectro de mesones pesados

En esta sección se ajusta el espectro de mesones pesados con el objetivo de determinar los parámetros del modelo. Siguiendo la estrategia introducida en el Cap. 5, el ajuste se realiza comparando

el espectro calculado con los valores experimentales disponibles para los sistemas de charmonium, bottomonium y charm–bottom. Para ello, se utilizan los datos reportados por el Particle Data Group (PDG 2025) con números cuánticos bien definidos, así como resultados de *lattice* QCD en aquellos casos en los que la información experimental es incompleta o aún no está firmemente establecida. Los estados considerados en el ajuste se resumen en la Tabla (7.1).

Estado	Masa (GeV)	j^{pc}	$n^{2s+1}l_j$
$\eta_b(1S)$	9.3987(20)	0^{-+}	1^1S_0
$\gamma(1S)$	9.46040(10)	1^{--}	1^3S_1
$\chi_{b0}(1P)$	9.85944(42)	0^{++}	1^3P_0
$\chi_{b1}(1P)$	9.89278(31)	1^{++}	1^3P_1
$h_b(1P)$	9.8993(8)	1^{+-}	1^1P_1
$\chi_{b2}(1P)$	9.91221(31)	2^{++}	1^3P_2
$\eta_b(2S)$	9.999	0^{-+}	2^1S_0
$\gamma(2S)$	10.0234(5)	1^{--}	2^3S_1
$\chi_{b0}(2P)$	10.2325(5)	0^{++}	2^3S_0
$\chi_{b1}(2P)$	10.25546(50)	1^{++}	2^3P_1
$h_b(2P)$	10.2598(12)	1^{+-}	2^1P_1
$\chi_{b2}(2P)$	10.26865(50)	2^{++}	2^3P_2
$\eta_c(1S)$	2.9839(4)	0^{-+}	1^1S_0
$J/\psi(1S)$	3.096900(6)	1^{--}	1^3S_1
$\chi_{c0}(1P)$	3.41471(30)	0^{++}	1^3P_0
$\chi_{c1}(1P)$	3.51067(5)	1^{++}	1^3P_1
$h_c(1P)$	3.52537(14)	1^{+-}	1^1P_1
$\chi_{c2}(1P)$	3.55617(7)	2^{++}	1^3P_2
$\eta_c(2S)$	3.6377(11)	0^{-+}	2^1S_0
$\psi(2S)$	3.68610(6)	1^{--}	2^3S_1
B_c^+	6.27447(32)	$0^{-?}$	1^1S_0
[239]	6.329	1^{--}	1^3S_1
$B_c^\pm(2S)$	6.8712(10)	$0^{-?}$	2^1S_0

Tabla 7.1: Valores experimentales, o de *lattice* QCD, del espectro de masas de los mesones pesados utilizados para ajustar los parámetros del modelo.

El ajuste se lleva a cabo de manera simultánea para los tres sistemas. Para cada conjunto de parámetros se calcula el espectro completo de masas y se lo compara con los valores de referencia, asociando un error a cada conjunto según la ecuación (5.1). Los parámetros que presenten menor error serán utilizados en el estudio de sistemas más complejos. Este procedimiento se repite utilizando las dos descripciones del flujo de los parámetros introducidas previamente: el flujo perturbativo de QCD a un *loop* y el flujo completo derivado del modelo de Curci–Ferrari a un *loop*.

7.2.1. Análisis incluyendo el flujo en el régimen de altas energías

Motivados por trabajos previos que incorporan el flujo de los parámetros de QCD a altas energías en el estudio de espectros de masas, adoptamos un enfoque similar en esta sección. En particular, utilizamos el flujo obtenido en el límite ultravioleta del modelo de Curci–Ferrari a un *loop*, en concordancia con el empleado en la literatura. Sin embargo, al aplicar este enfoque, no fue posible ajustar simultáneamente los tres mesones considerados. En general, los parámetros obtenidos correspondían

a un buen ajuste del espectro del charmonium, pero presentaban problemas al ajustar el espectro del bottomonium.

Algunos de los resultados obtenidos se encuentran en la Fig. (7.2). Se observa que el espectro del charmonium y del charm-bottom se logran ajustar casi perfectamente. Para el caso del espectro del bottomonium, se logra ajustar el comportamiento general de los datos, obteniendo muy buenos resultados para los niveles con $n = 2$. No obstante, el estado fundamental y el primer estado excitados presentan grandes errores. Este resultado es opuesto al esperado, ya que, como vimos en el Cap. 5, los estados excitados radialmente y los compuestos por quarks charm son los que el modelo tiene mayor dificultad para predecir, debido a que tienen velocidades mayores. Por esta razón, nos gustaría priorizar el ajuste de los niveles con $n = 1$ del bottomonium. Sin embargo, siguiendo esta idea, no se logra un buen ajuste de los demás mesones.

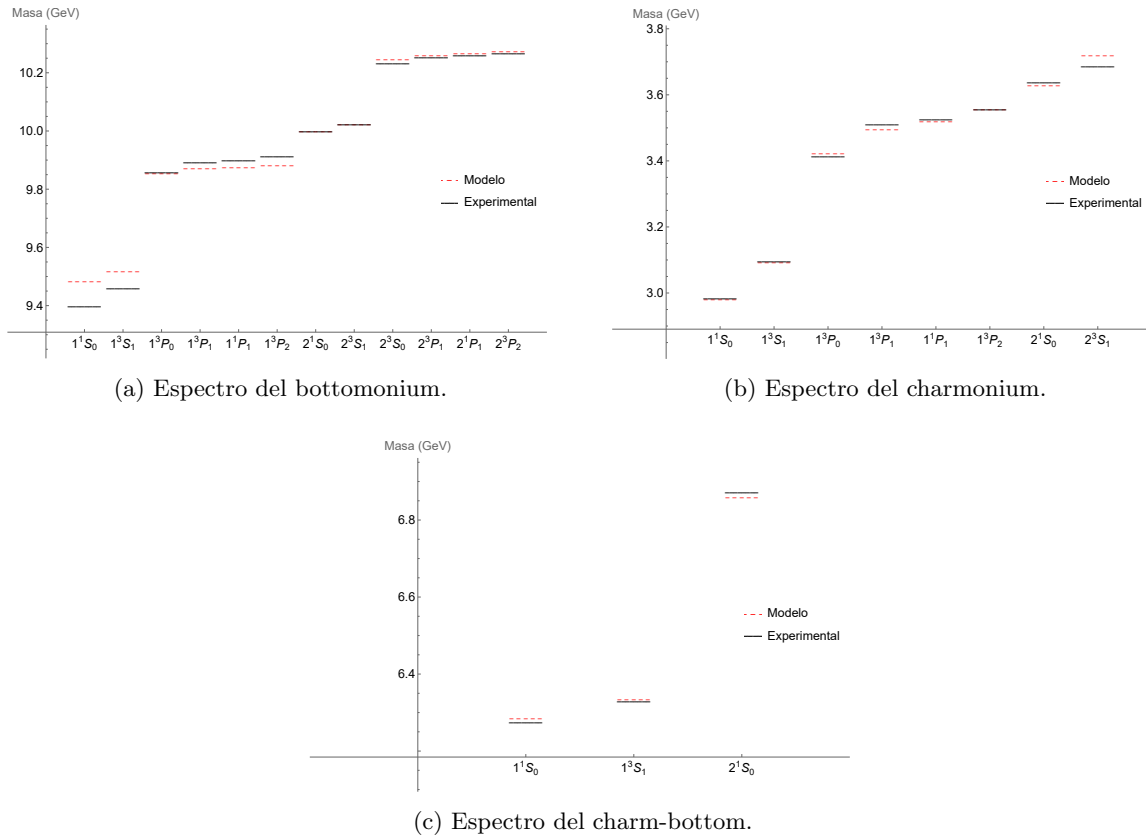


Figura 7.2: Espectro de masas de los mesones pesados para el conjunto de parámetros $g(\mu_{c\bar{c}}) = 1.90$, $m_g(\mu_{c\bar{c}}) = 0.11$ GeV, $b = 0.26$ (GeV)², $m_c = 1.225$ GeV y $m_b = 4.600$ GeV. Las líneas punteadas corresponden a los resultados obtenidos utilizando el modelo y ajustando tanto los niveles con $n = 1$ como los niveles con $n = 2$. Las líneas continuas son los resultados experimentales presentados en la Tabla (7.1).

Cuando se comparan estos resultados con el caso sin *running* del Cap. 5, se observa que los valores de la constante de acoplamiento obtenidos a la escala del charmonium son muy similares a los que se obtuvieron en el caso sin flujo cuando se ajusta el espectro de dicho mesón. Sin embargo, a la escala del bottomonium difieren significativamente de los parámetros obtenidos ajustando úni-

Parámetro	$\mu_{c\bar{c}}$	$\mu_{c\bar{b}}$	$\mu_{b\bar{b}}$
g	1.90	1.77	1.58
m_g (GeV)	0.11	0.11	0.10
b (GeV) ²	0.26		
m_c (GeV)	1.225		
m_b (GeV)	4.600		
Error	0.00336		

Tabla 7.2: Parámetros obtenidos a partir del ajuste del espectro de los mesones pesados. Se ajustan tanto los niveles con $n = 1$ como los niveles con $n = 2$, incluyendo todas las correcciones del OGE.

camente el espectro del bottomonium. Esto explica por qué este mesón ajusta peor que los demás. Este problema sucede porque el flujo de la constante de acoplamiento exige una gran diferencia entre los valores que toma el acoplamiento a las distintas escalas, mientras que los resultados del Cap. 5 muestran que los mesones se ajustan mejor con constantes de acoplamiento similares a ambas escalas.

Por este motivo, a partir de ahora incluiremos el flujo completo derivado de Curci-Ferrari, sin aproximar al régimen ultravioleta, donde la inclusión de una masa del gluon no despreciable causa que la constante de acoplamiento decaiga más lentamente, acercándose más a los resultados esperados para los mesones.

7.2.2. Flujo de Curci-Ferrari a un loop

Repetimos el procedimiento de ajuste ahora considerando el flujo de Curci-Ferrari a un *loop*. Al igual que el Cap. 5 separamos el estudio en distintos casos: ajustando únicamente los niveles con $n = 1$, o ajustando también los niveles con $n = 2$. También consideramos dos esquemas de ajuste: una que incluye correcciones cinéticas a la energía de los estados y una que únicamente incluye correcciones debido al *spin*.

Al ajustar simultáneamente los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ del bottomonium, charmonium y charm-bottom utilizando todas las correcciones de OGE, se obtiene el conjunto de parámetros $g(\mu_{c\bar{c}}) = 2.00$, $m_g(\mu_{c\bar{c}}) = 0.51$ GeV, $b = 0.26$ (GeV)², $m_c = 1.175$ GeV y $m_b = 4.575$ GeV, a la escala del charmonium. Este conjunto presenta un error respecto a los datos experimentales de 0.00318 y los espectros producidos se observan en la Fig. (7.3).

Se obtiene un muy buen ajuste del espectro del charmonium y charm-bottom. En particular los dos primeros niveles de estos mesones se reproducen de forma casi exacta. El ajuste del bottomonium no es tan preciso, pero logra recrear el comportamiento general de los datos experimentales. El estado fundamental del bottomonium es el que presenta más problemas, afectando al primer estado excitado. Sin embargo, los estados con $n = 2$ del bottomonium se ajustan perfectamente. Se observan problemas muy similares a los discutidos con el flujo en el régimen ultravioleta, donde los estados más relativistas parecen ajustar mejor. Sin embargo, presenta ciertas mejoras respecto al caso anterior. El ajuste de los primeros niveles del bottomonium mejora significativamente, pero más importante, en la Tabla (7.4) se observa que los parámetros obtenidos a la escala del bottomonium son mucho más cercanos a los valores que esperábamos.

En la Tabla (7.3a) se presentan resultados extraídos de las funciones de onda obtenidas para los distintos mesones. Se observa que las velocidades pueden ser consideradas como no relativistas, siendo las más elevadas las correspondientes al quark charm debido a su menor masa. Los radios

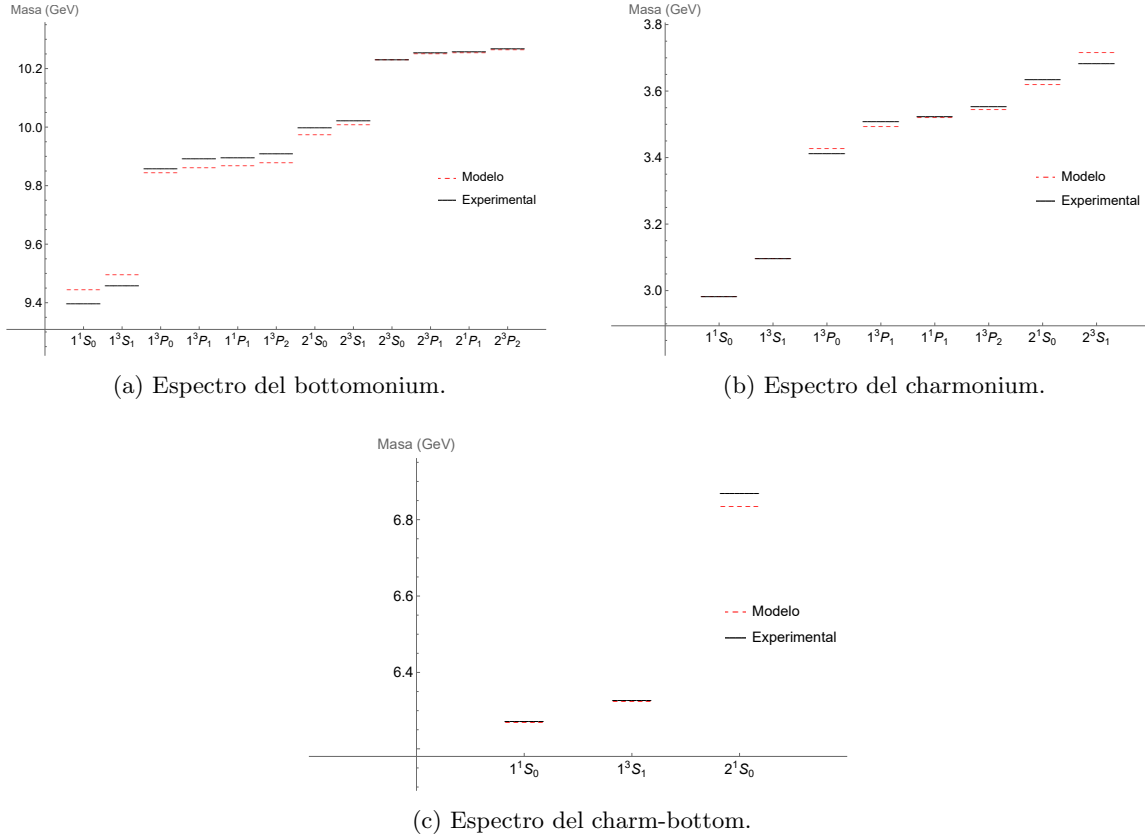
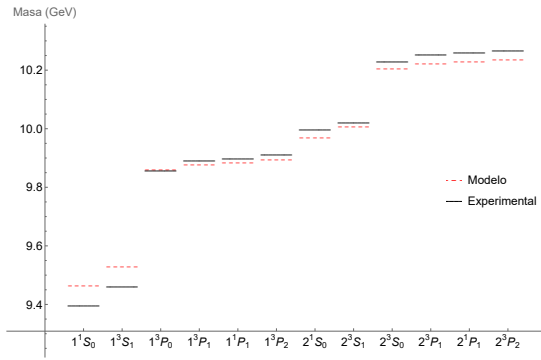


Figura 7.3: Espectro de masas de los mesones pesados. Las líneas punteadas corresponden a los resultados obtenidos utilizando el modelo y ajustando tanto los niveles con $n = 1$ como los niveles con $n = 2$. Las líneas continuas son los resultados experimentales presentados en la Tabla (7.1).

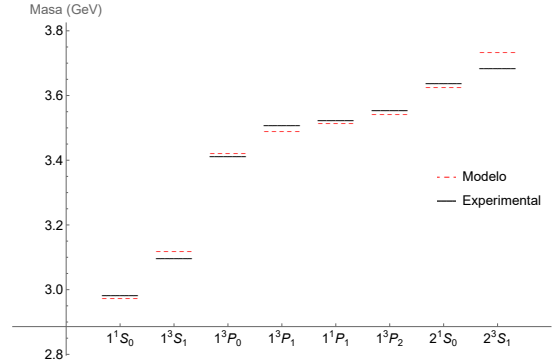
medios de los mesones se mantienen dentro del rango razonable para los estados con $n = 1$.

Cuando, en lugar de utilizar todas las correcciones de OGE, se utilizan sólo las correcciones dependientes del *spin* para el mismo conjunto de datos se obtiene el conjunto de parámetros $g(\mu_{c\bar{c}}) = 2.225$, $m_g(\mu_{c\bar{c}}) = 0.43$ GeV, $b = 0.20$ (GeV)², $m_c = 1.250$ GeV y $m_b = 4.650$ GeV, el cual presenta un error respecto a los datos experimentales de 0.00459.

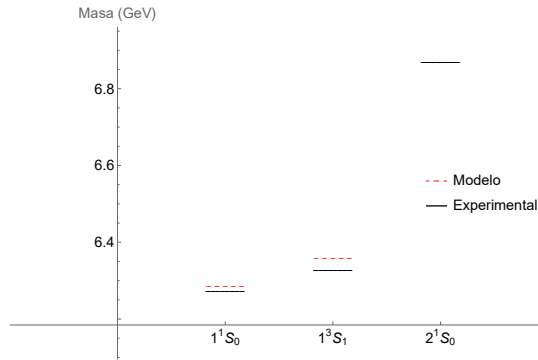
Los espectros producidos se observan en la Fig. (7.4), obteniendo nuevamente un buen ajuste global de los tres mesones, aunque mejor en el caso del charmonium y charm-bottom. La inclusión de correcciones a la energía únicamente dependientes del *spin* parecería favorecer el ajuste de los niveles con $l = 1$ del bottomonium, a costa del ajuste del estado fundamental y del primer estado excitado. El espectro del charmonium y charm-bottom empeora, sobrestimando levemente la separación entre los primeros dos estados, problemas que ya habíamos visto en el Cap. 5. Globalmente, si bien este esquema de ajuste mejora ciertos aspectos del ajuste del espectro de los mesones, el error obtenido resulta levemente mayor que cuando se consideran todas las correcciones del OGE.



(a) Espectro del bottomonium.



(b) Espectro del charmonium.



(c) Espectro del charm-bottom.

Figura 7.4: Espectro de masas de los mesones pesados. Las líneas punteadas corresponden a los resultados obtenidos utilizando el modelo y ajustando tanto los niveles con $n = 1$ como los niveles con $n = 2$ con correcciones únicamente de *spin*. Las líneas continuas son los resultados experimentales presentados en la Tabla (7.1).

Por otro lado, el ajuste mejora significativamente si se pretende reproducir sólo los niveles fundamentales de los mesones. Al ajustar los niveles con $n = 1$ del bottomonium, charmonium y charm-bottom utilizando todas las correcciones de OGE, se obtiene el conjunto de parámetros $g(\mu_{c\bar{c}}) = 2.075$, $m_g(\mu_{c\bar{c}}) = 0.84$ GeV, $b = 0.28$ (GeV)², $m_c = 1.125$ GeV y $m_b = 4.550$ GeV. Este conjunto presenta un error respecto a los datos experimentales de 0.00177, que mejora significativamente en comparación con los ajustes anteriores.

Los espectros correspondientes a este conjunto de datos se observan en la Fig. (7.5). Se logra un muy buen ajuste del espectro de los tres mesones considerados. En particular se obtiene un excelente ajuste para el espectro del charmonium y charm-bottom, incluso obteniendo una predicción adecuada de los niveles con $n = 2$. El ajuste del bottomonium mejora significativamente, logrando ajustar mejor el estado fundamental, aunque sobrestimando levemente la separación entre los primeros dos estados. La predicción de los niveles con $n = 2$ del bottomonium también es muy buena.

Resulta sorprendente que a partir del ajuste de los niveles con $n = 1$ se mejore de forma significativa el ajuste global del espectro de los tres mesones, incluso obteniendo muy buenas predicciones para los niveles radialmente excitados. Esta diferencia respecto a los casos anteriores se debe a la masa del gluon mayor que se encontró para este conjunto de parámetros. Esto indica que con el

running que incluye una masa del gluon de 0.84 GeV a la escala del charmonium, se logra un comportamiento de la constante de acoplamiento en función de la escala más próxima a lo esperado según los valores obtenidos en el Cap. 5. Este resultado se puede ver en la Tabla (7.4).

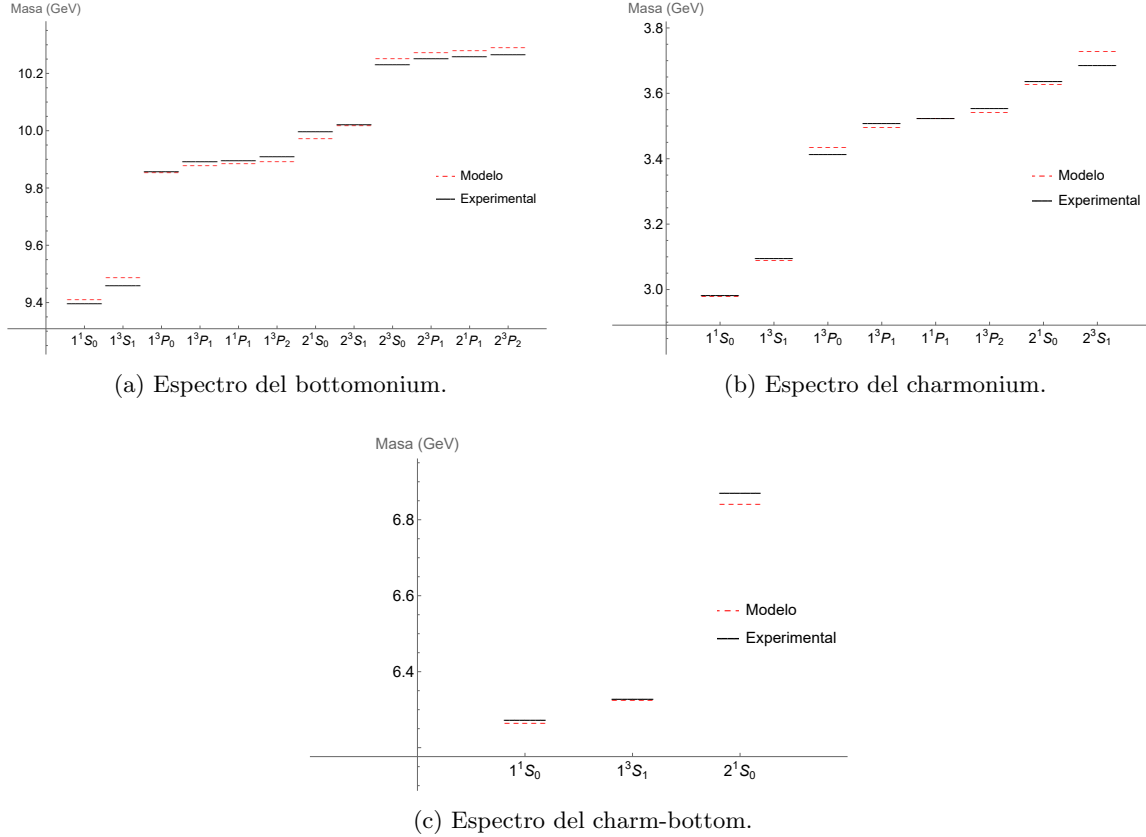
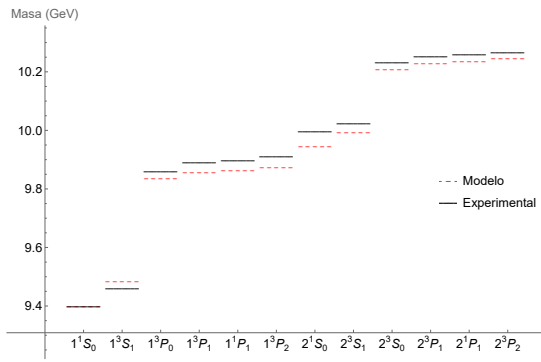


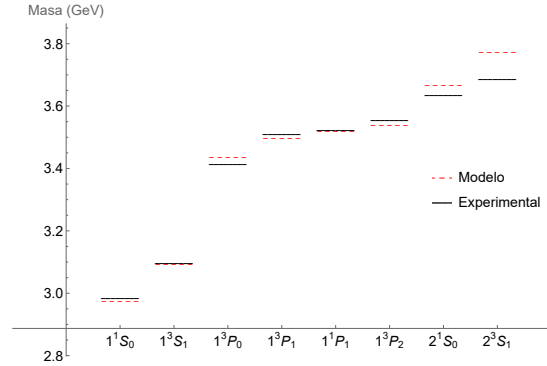
Figura 7.5: Espectro de masas de los mesones pesados. Las líneas punteadas corresponden a los resultados obtenidos utilizando el modelo y ajustando los niveles con $n = 1$. Las líneas continuas son los resultados experimentales presentados en la Tabla (7.1).

Finalmente, al ajustar los niveles con $n = 1$ del bottomonium, charmonium y charm-bottom utilizando sólo las correcciones a la energía dependientes del *spin*, se obtiene el conjunto de parámetros $g(\mu_{c\bar{c}}) = 2.20$, $m_g(\mu_{c\bar{c}}) = 0.82$ GeV, $b = 0.24$ (GeV)², $m_c = 1.150$ GeV y $m_b = 4.575$ GeV. El error obtenido con este conjunto de parámetros es de 0.00216, levemente mayor al caso anterior.

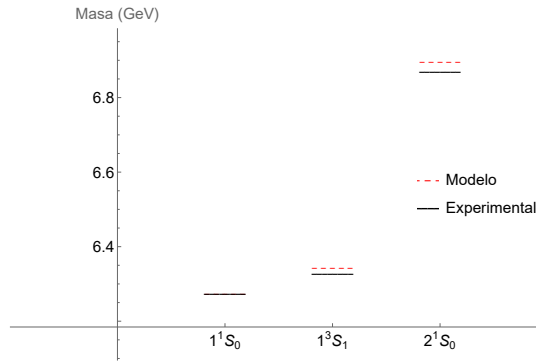
En la Fig. (7.6) se representan los espectros hallados para este conjunto de parámetros. Nuevamente se logra un muy buen ajuste del espectro de los tres mesones. Sorprendentemente, con este esqueja de ajuste se logran ajustar el estado base y el primer estado excitado de los tres mesones, que resultaba muy difícil en los casos anteriores. Se observan leves discrepancias en la separación de los dos primeros estados, pero este problema estaba presente incluso cuando ajustamos los mesones por separado en el Cap. 5. Sin embargo, el ajuste global del bottomonium empeora levemente respecto al caso anterior, los niveles con $l = 1$ presentan más dificultades, y el error resulta ser un poco mayor. Nuevamente este buen ajuste de los espectros y buena predicción de los estados excitados radialmente se debe a la masa del gluon considerable obtenida del ajuste, correspondiente a 0.82 GeV a la escala del charmonium.



(a) Espectro del bottomonium.



(b) Espectro del charmonium.



(c) Espectro del charm-bottom.

Figura 7.6: Espectro de masas de los mesones pesados. Las líneas punteadas corresponden a los resultados obtenidos utilizando el modelo y ajustando los niveles con $n = 1$ con correcciones únicamente de *spin*. Las líneas continuas son los resultados experimentales presentados en la Tabla (7.1).

En la Tabla (7.3) se presentan resultados extraídos de las funciones de onda para los distintos mesones. Se observan resultados muy similares para todos los esquemas de ajuste. Las velocidades obtenidas pueden ser consideradas como no relativistas, en particular para los niveles con $n = 1$, siendo las más elevadas las correspondientes al quark charm debido a su menor masa. Se obtienen, en general, velocidades levemente más elevadas en los ajustes únicamente de niveles con $n = 1$ y, por otro lado, los radios medios de los mesones de mantienen dentro del rango razonable para los estados no excitados radialmente.

El comportamiento del error en función de los parámetros de los distintos ajustes se puede ver en la Fig. (7.7). Esta muestra que, al igual que en el capítulo anterior, el error es poco sensible al valor de la masa del gluon. Sin embargo, al incluir el flujo de los parámetros, la masa del gluon comienza a afectar el comportamiento de la constante de acoplamiento con la escala, introduciendo un nuevo peso al valor de esta masa. En este estudio, se logra descartar el caso de masa nula para todos los ajustes, consistente con lo observado cuando se utilizó el flujo UV: cuando se tiene una masa del gluon muy pequeña no se logra reproducir el comportamiento necesario de la constante de acoplamiento para ajustar los tres mesones.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
Bottomonium			
1S	9.4997	1.1354	0.0711
1P	9.8879	1.9306	0.0705
2S	10.0320	6.5994	0.0854
2P	10.2871	10.1235	0.0932
Charmonium			
1S	3.1308	2.0708	0.2548
1P	3.6071	3.2151	0.3108
2S	3.8658	18.2328	0.3801
Charm-Bottom			
1S	6.3691	1.7008	$v_b = 0.0780$ $v_c = 0.3036$
2S	7.0149	12.9830	$v_b = 0.1094$ $v_c = 0.4258$

(a) Ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ utilizando todas las correcciones del OGE.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
Bottomonium			
1S	9.5186	1.1404	0.0705
1P	9.8874	2.0349	0.0626
2S	10.0010	7.3291	0.0754
2P	10.2297	11.5858	0.0802
Charmonium			
1S	3.0829	2.092	0.2373
1P	3.5131	3.3738	0.2656
2S	3.7088	20.0580	0.3248
Charm-Bottom			
1S	6.3437	1.7061	$v_b = 0.0734$ $v_c = 0.2730$
2S	6.9096	14.2498	$v_b = 0.0930$ $v_c = 0.3458$

(b) Ajuste de los niveles $n = 1$ y $n = 2$ utilizando únicamente las correcciones de *spin*.

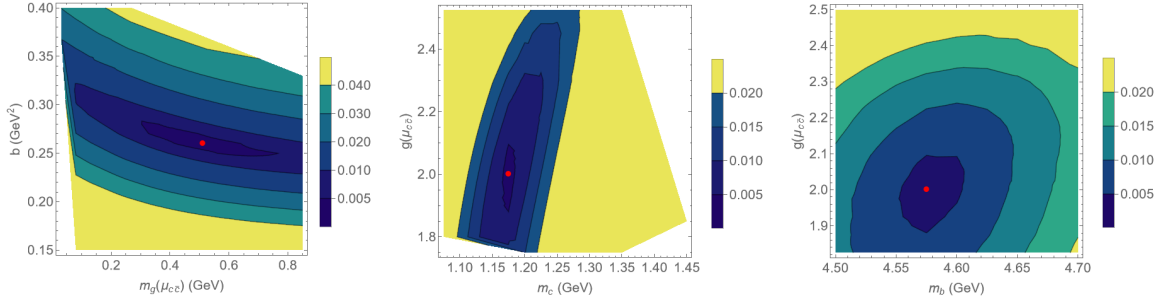
$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
Bottomonium			
1S	9.4887	1.0939	0.0779
1P	9.9031	1.9060	0.0728
2S	10.0434	6.3459	0.0895
2P	10.3140	9.8070	0.0969
Charmonium			
1S	3.1241	2.0955	0.2596
1P	3.6117	3.2240	0.3227
2S	3.8779	18.1739	0.3992
Charm-Bottom			
1S	6.3744	1.7085	$v_b = 0.0806$ $v_c = 0.3261$
2S	7.0406	12.8824	$v_b = 0.1152$ $v_c = 0.4660$

(c) Ajuste de los niveles $n = 1$ utilizando todas las correcciones del OGE.

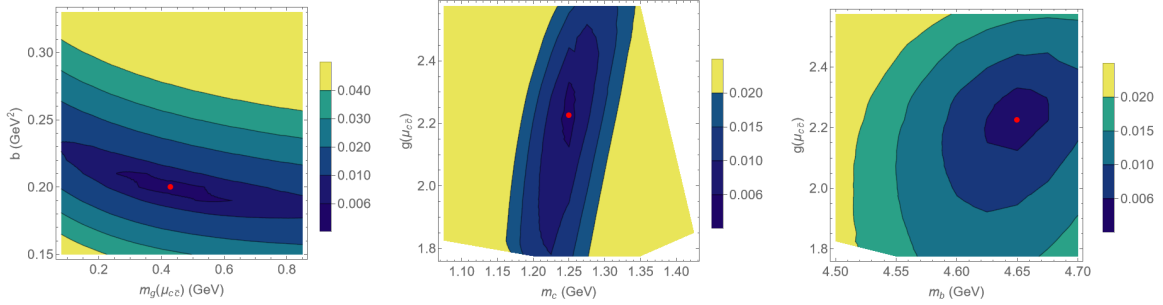
$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
Bottomonium			
1S	9.4607	1.0941	0.0785
1P	9.8642	1.9767	0.0674
2S	9.9831	6.7974	0.0830
2P	10.2370	10.7086	0.0884
Charmonium			
1S	3.0664	2.1490	0.2426
1P	3.5165	3.3563	0.2913
2S	3.7486	19.6220	0.3621
Charm-Bottom			
1S	6.3287	1.7372	$v_b = 0.0767$ $v_c = 0.3053$
2S	6.9372	13.8642	$v_b = 0.1046$ $v_c = 0.4163$

(d) Ajuste de los niveles $n = 1$ utilizando únicamente las correcciones de *spin*.

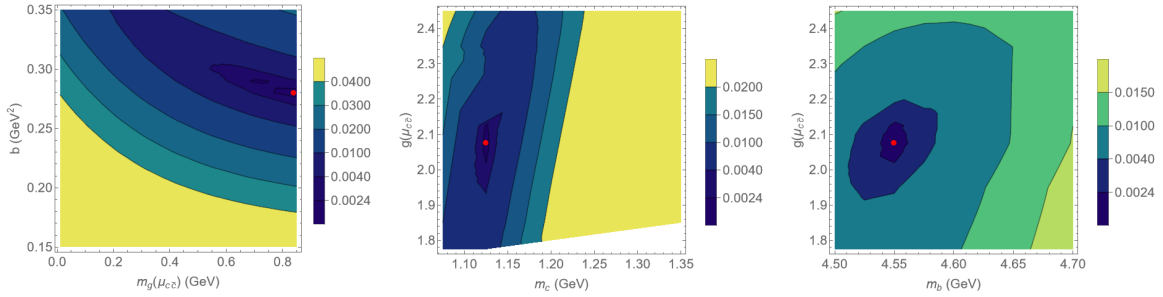
Tabla 7.3: Algunos resultados extraídos de la función de onda de los distintos mesones.



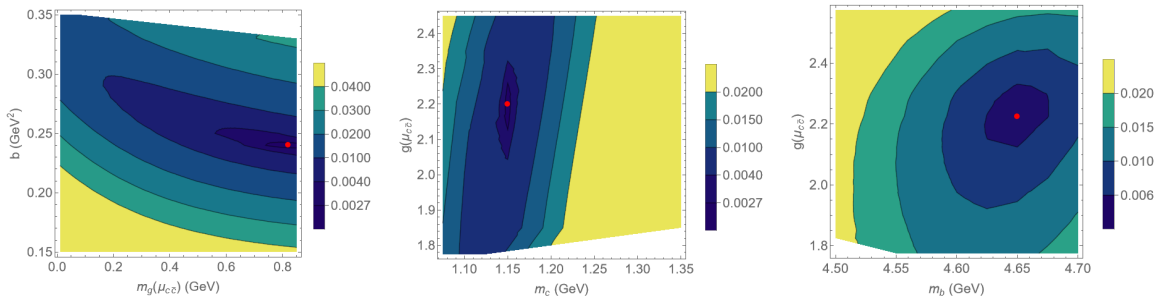
(a) Ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ incluyendo todas las correcciones del OGE.



(b) Ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ incluyendo únicamente las correcciones de *spin*.



(c) Ajuste de los niveles con $n = 1$ incluyendo todas del correcciones del OGE.



(d) Ajuste de los niveles con $n = 1$ incluyendo únicamente las correcciones de *spin*.

Figura 7.7: Curvas de nivel del error en función de distintos parámetros para los diferentes ajustes realizados utilizando el flujo de Curci-Ferrari. Con un punto rojo se representa el valor de los parámetros con menor error.

En la misma figura se observa que, cuando se ajustan únicamente los niveles con $n = 1$, se necesitan masas del gluon más grandes para obtener un menor error, incluso obteniendo mínimos muy próximos al límite del rango considerado. Una mejora a esta predicción podría ser considerar masas del gluon más grandes en nuestro ajuste. Sin embargo, otros trabajos que obtienen valores de la masa del modelo de Curci-Ferrari predicen resultados menores de este parámetro, por lo que no estamos interesados en estudiar un rango mayor de la masa.

En general, se logra ajustar el espectro de los mesones pesados utilizando un único conjunto de parámetros que depende de la escala. Con todas los esquemas de ajuste se obtienen parámetros similares, como se observa en la Tabla (7.4). Los ajustes donde se utilizan correcciones de *spin* requieren valores de $g(\mu_{c\bar{c}})$ levemente más elevados, mientras que cuando se utilizan todas las correcciones se obtienen errores menores. Como es esperable, el error disminuye cuando se consideran sólo los niveles con $n = 1$, y los ajustes mejoran significativamente, en especial el del bottomonium.

Parámetro	Esquema (a)			Esquema (b)			Esquema (c)			Esquema (d)		
	$\mu_{c\bar{c}}$	$\mu_{c\bar{b}}$	$\mu_{b\bar{b}}$	$\mu_{c\bar{c}}$	$\mu_{c\bar{b}}$	$\mu_{b\bar{b}}$	$\mu_{c\bar{c}}$	$\mu_{c\bar{b}}$	$\mu_{b\bar{b}}$	$\mu_{c\bar{c}}$	$\mu_{c\bar{b}}$	$\mu_{b\bar{b}}$
g	2.00	1.93	1.76	2.225	2.11	1.87	2.075	2.051	1.92	2.20	2.17	2.01
m_g (GeV)	0.51	0.50	0.47	0.43	0.42	0.38	0.84	0.84	0.81	0.82	0.82	0.78
b (GeV) ²	0.26			0.20			0.28			0.24		
m_c (GeV)	1.175			1.250			1.125			1.150		
m_b (GeV)	4.575			4.650			4.550			4.575		
Error	0.00318			0.00459			0.00177			0.00216		

Tabla 7.4: Parámetros obtenidos a partir del ajuste del espectro de los mesones pesados para distintos esquemas de ajuste. El esquema (a) corresponde al ajuste de los niveles con $n = 1$ y $n = 2$ utilizando todas las correcciones del OGE. El esquema (b) corresponde a ajustar los mismos niveles pero utilizando sólo correcciones de *spin*. El esquema (c) es en el que se ajustan los niveles con $n = 1$ incluyendo todas las correcciones de OGE y el esquema (d) es análogo pero incluyendo únicamente correcciones de *spin*.

Comparando estos resultados con los obtenidos con el flujo en el UV, se observa que con este *running* se obtienen valores de $g(\mu_{c\bar{c}})$ y $g(\mu_{b\bar{b}})$ mucho más próximos entre sí que antes. Este resultado es fundamental para lograr recrear el comportamiento de los mesones tanto a la escala del charmonium como a la escala del bottomonium, que, como vimos en el Cap. 5 requieren constantes de acoplamiento similares para su ajuste. Esta separación entre el valor de g a las diferentes escalas es menor cuando se aumenta la masa del gluon, como se observa en la Tabla (7.4) para los esquemas donde se ajusta únicamente $n = 1$. Es en estos casos que se obtiene un muy buen ajuste del espectro de los tres mesones, solucionando la tensión que parecía haber entre el ajuste de los primeros estados de cada mesón.

Cuando se comparan estos resultados con el caso sin *running*, se observa que la constante de acoplamiento es mayor a las halladas previamente a las respectivas escalas y ya no se observa el comportamiento obtenido ajustando el bottomonium, en el cual la constante de acoplamiento aumentaba cuando se ajustaban también los niveles con $n = 2$. En todo caso, se observa el fenómeno contrario. Las masas de los quarks obtenidas son levemente menores que antes.

Finalmente, con este análisis hallamos que el modelo con gluones masivos, incluyendo el flujo de los parámetros, logra ajustar el espectro de los mesones pesados. A partir de ahora, nos centraremos en los parámetros obtenidos del ajuste de los niveles con $n = 1$ de los mesones incluyendo todas

las correcciones de OGE, los cuales obtuvieron el menor error relativo a los datos experimentales. Nuestra única preocupación sobre los resultados es que minimizar el error relativo con los datos experimentales parece favorecer el ajuste del charmonium, que, utilizando un modelo no relativista, se logra describir peor que el bottomonium debido a la menor masa de sus quarks y velocidad mayor.

Priorizando el ajuste del bottomonium

En base a esto, probamos un último ajuste, en el cual partimos del ajuste únicamente de los niveles con $n = 1$ del bottomonium, como se realizó en el Cap. 5. A partir de esto, definimos una región en el espacio de parámetros donde el error relativo a los datos experimentales del bottomonium es menor a cierta cota superior que fijamos como 0.0009. Esto nos asegura trabajar con un conjunto de parámetros que logra ajustar bien los niveles con $n = 1$ del bottomonium, que son los mejor descritos por el modelo no relativista. A partir de dicho conjunto de parámetros, y utilizando el flujo para obtener su valor a la escala del charmonium, buscamos el set que presenta menor error relativo al ajustar el espectro del charmonium.

En la Fig. (7.8a) se representan las curvas de nivel del error relativo entre los datos experimentales y el espectro del bottomonium producido por el modelo. Este comportamiento es igual al observado en el Cap. 5. Nos interesamos ahora por la región marcada en rojo en la figura, que representa los parámetros que tienen asociados un error relativo menor a 0.0009 respecto a los datos experimentales del bottomonium.

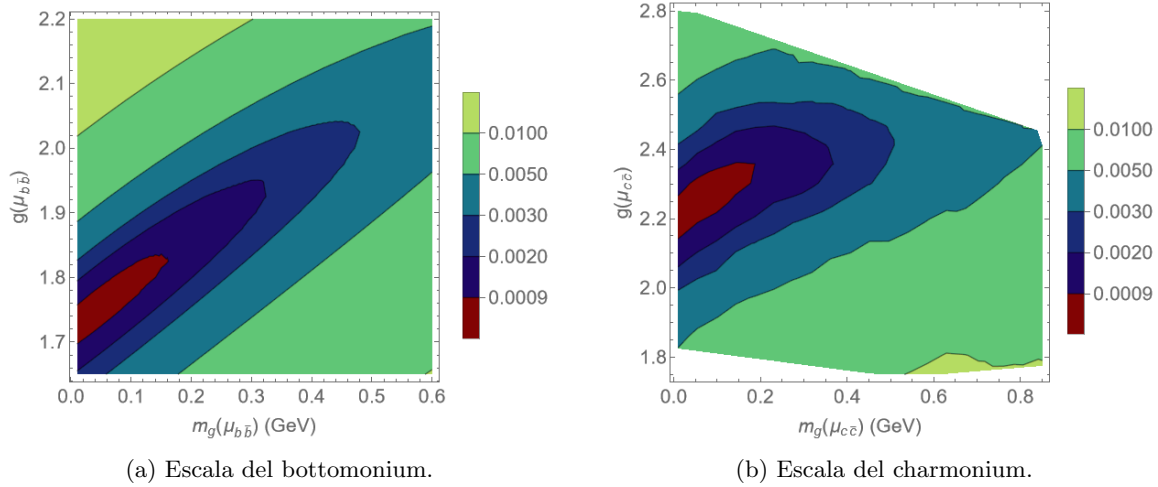


Figura 7.8: Curvas de nivel del error relativo entre los datos experimentales y el espectro del bottomonium. En rojo se representa la región de interés para el estudio, donde el error es menor a 0.0009.

En la Fig. (7.8b) se observan las mismas curvas de error, pero ahora en función de los parámetros a la escala del charmonium. Vemos que la zona de interés se expande a valores más elevados de la masa del gluon para esta escala, y se encuentra en valores de la constante de acoplamiento mayores, como es esperado. Ahora nos limitamos a estudiar esta zona, calculando el espectro de masas del charmonium producido por los parámetros en esta región. Las curvas de nivel de este nuevo error relativo a los datos experimentales del charmonium se encuentra en la Fig. (7.9).

A partir de este estudio, se encuentran los parámetros a la escala del charmonium, limitados a la región de interés, cuyo error relativo al espectro experimental del charmonium es mínimo. Con

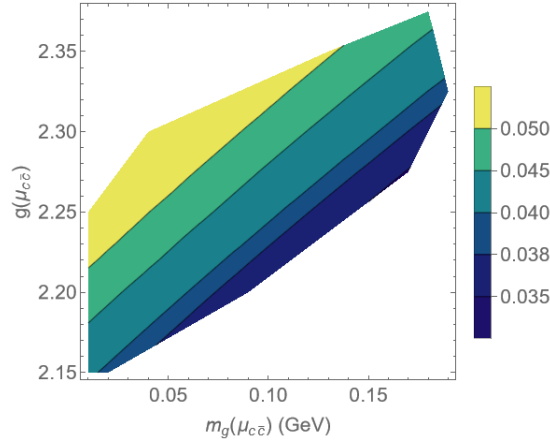


Figura 7.9: Curvas de nivel del error relativo entre los datos experimentales y el espectro del charmonium para la región de interés.

estos parámetros a la escala del charmonium, resta utilizar el flujo de los parámetros para obtener su valor a las escala del bottomonium y charm-bottom y ver el espectro que producen, el cual sabemos que tendría un error menor a 0.0009 para el bottomonium.

Una aclaración relevante es que las figuras mostradas son a modo ilustrativo, para explicar el procedimiento. Para generarlas se fijó un valor de las masas de los quarks y de la tensión de la cuerda, y se graficó solamente la dependencia en g y m_g . Para el procedimiento completo se variaron todos los parámetros del modelo.

Siguiendo este procedimiento, se obtienen los espectros mostrados en la Fig. (7.10). Se logra un muy buen ajuste del espectro del bottomonium, reproduciendo el estado base y algunos niveles con $l = 1$ a la perfección. El espectro del charmonium se reproduce bastante bien, logrando un muy buen ajuste de los niveles con $l = 1$, aunque con poca precisión en el ajuste del estado base. El espectro del charm-bottom se logra reproducir globalmente bien a pesar de no haber sido ajustado en este procedimiento. En general, la separación hiperfina entre los estados con $l = 0$ se sobrestima levemente para los tres mesones. Los estados excitados radialmente se predicen cualitativamente sin ser muy precisos.

Los parámetros correspondientes a este ajuste se encuentran en la Tabla (7.5). Observamos que la constante de acoplamiento crece respecto al ajuste de los niveles con $n = 1$ sin priorizar el bottomonium. Los errores individuales presentados corresponden al error relativo a los datos experimentales de cada mesón por separado, donde se observa que, como se esperaba, el bottomonium presenta un error mucho menor. El error global es el error de los tres mesones juntos con respecto a los valores experimentales, el cual se mantiene del orden que el ajuste sin prioridad al bottomonium, mostrando que distintos conjuntos de parámetros pueden tener errores comparables.

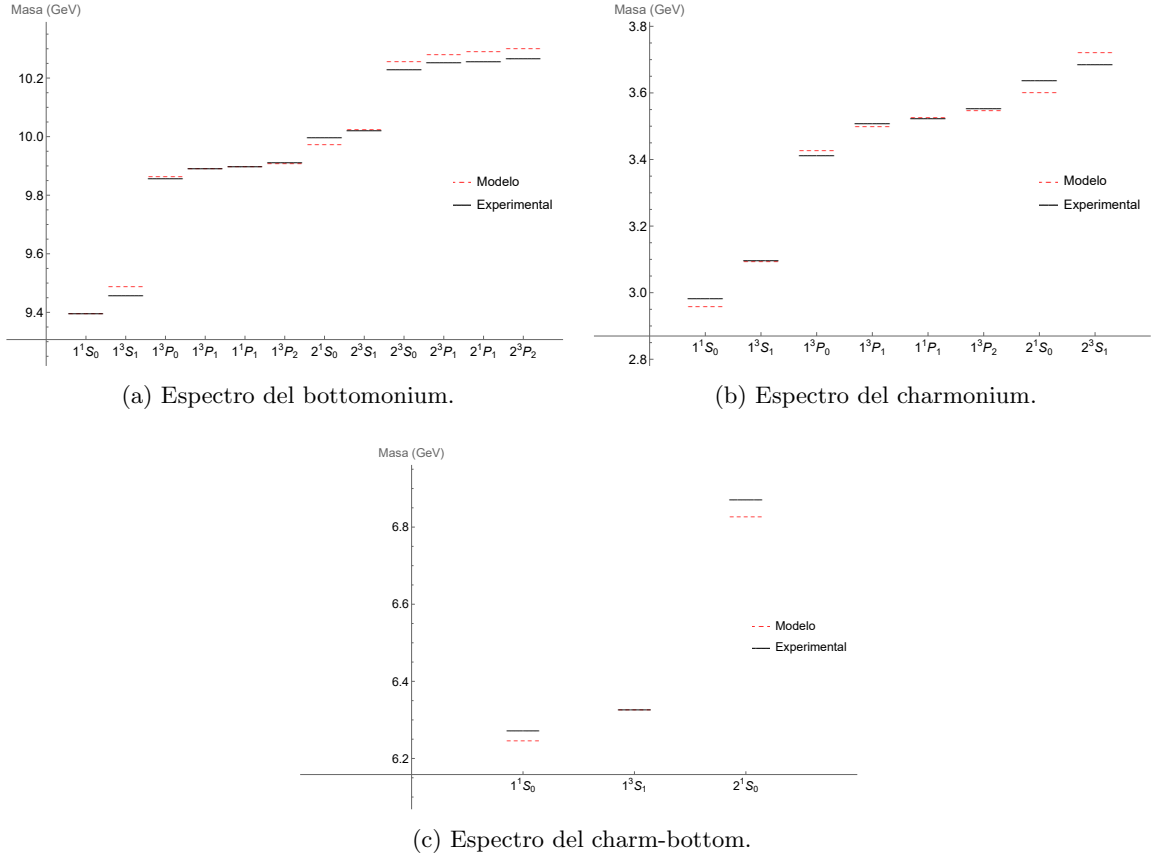


Figura 7.10: Espectro de masas de los mesones pesados, obtenidos priorizando el ajuste de los niveles con $n = 1$ del bottomonium. Las líneas punteadas corresponden a los resultados obtenidos y las líneas continuas son los valores experimentales presentados en la Tabla (7.1).

Parámetro	$\mu_{c\bar{c}}$	$\mu_{c\bar{b}}$	$\mu_{b\bar{b}}$
g	2.20	2.175	2.00
m_g (GeV)	0.78	0.78	0.77
b (GeV) ²	0.27		
m_c (GeV)	1.150		
m_b (GeV)	4.575		
Error individual	0.00340	0.00297	0.00089
Error global	0.00228		

Tabla 7.5: Parámetros obtenidos a partir del ajuste priorizando los niveles con $n = 1$ del bottomonium.

Este resultado es más consistente con la precisión de nuestro modelo no relativista para ajustar el espectro de los mesones pesados, priorizando ajustar los niveles que se logran modelar mejor. En las siguientes secciones utilizaremos este conjunto de parámetros para predecir el espectro de diquarks y tetraquarks pesados, ahora incluyendo el flujo hasta las escalas correspondientes.

7.3. Espectro de los diquarks

Una vez determinados los parámetros del modelo, los utilizamos para calcular el espectro de los diquarks. Al igual que antes estudiamos los diquarks bb y cc , pero ahora descritos por conjuntos de parámetros que están relacionados. Las escalas de los mesones $c\bar{c}$ y $b\bar{b}$ son muy similares a las correspondientes a los diquarks cc y bb , respectivamente. Por lo tanto, no es necesario aplicar el flujo de los parámetros para calcular el espectro de los diquarks.

El modelo que se utiliza para describir a los diquarks es el mismo que en el capítulo anterior, donde consideramos que se encuentran en un estado de color antitriplete, que es atractivo. Este estado de color implica un factor $2/3$, que motiva la elección de considerar la tensión de la cuerda como $b/2$. Consideramos el principio de exclusión de Pauli, permitiendo la existencia únicamente de estados con $s = 1$ para $l = 0$ y $s = 0$ para $l = 1$. La justificación de estas propiedades se encuentra en la Sección 6.1.

Para los parámetros obtenidos priorizando el ajuste de los niveles con $n = 1$ del espectro del bottomonium, se obtienen los espectros de los diquarks de la Fig. (7.11). A partir de las funciones de onda obtenidas para los diferentes niveles se extraen los valores presentados en la Tabla (7.6). Se observa que los valores obtenidos son muy similares al estudio sin *running*, aunque ahora los niveles excitados radialmente tienen radios medios mayores, lo que refleja los problemas del modelo no relativista. Los niveles con $n = 1$ presentan radios medios y velocidades cuadráticas medias acorde a lo esperado, manteniéndose dentro del régimen no relativista.

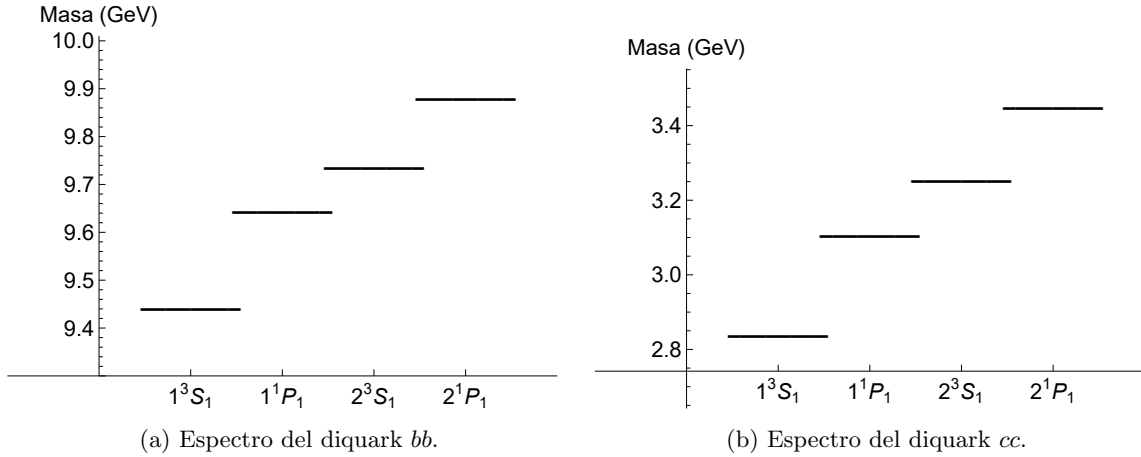


Figura 7.11: Espectro de masas de los diquarks pesados, obtenidos utilizando los parámetros del ajuste priorizando los niveles con $n = 1$ del bottomonium.

Los valores del espectro obtenidos son muy similares a los del Cap. 6. Para el diquark bb los estados base difieren en aproximadamente 0.01 GeV, sin embargo, en este caso las masas de los niveles crecen más lentamente, obteniendo niveles excitados con masas más pequeñas que antes. Para el diquark cc la diferencia entre los estados base es del orden de 0.1 GeV y se mantiene esa diferencia para todos los niveles.

Los resultados obtenidos se pueden comparar con [231], donde utilizan un modelo relativista para calcular la masa del estado base de diquarks en la configuración antitriplete. En este artículo, también incluyen el flujo de la constante de acoplamiento, considerando el *running* UV que discutimos

anteriormente. Ellos obtienen una masa del estado fundamental de $m_{cc} = 3.226$ GeV y $m_{bb} = 9.778$ GeV, levemente mayores a nuestros resultados.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$	Masa (GeV)
bb				
1S	9.4480	1.5476	0.0565	9.4424
1P	9.6619	2.5115	0.0464	9.6469
2S	9.7571	11.0292	0.0608	9.7371
2P	9.90831	16.3873	0.0611	9.8821
cc				
1S	2.8555	2.7421	0.1708	2.8417
1P	3.1373	4.1188	0.1982	3.1085
2S	3.3061	29.7368	0.2531	3.2556
2P	3.5206	42.4083	0.2821	3.4528

Tabla 7.6: Algunos resultados extraídos de la función de onda de los diquarks.

7.4. Espectro de los tetraquarks

Por último, a partir de los parámetros encontrados mediante el estudio del espectro de mesones pesados y de las masas del estado base de los diquarks halladas en la sección anterior, se construyen los *fully-heavy* tetraquarks. Para esto se utiliza el modelo de dos cuerpos descrito en la Sección 3.1, considerando al tetraquark como un sistema diquark-antidiquark de factor de color $4/3$.

En este caso, debemos considerar el flujo de los parámetros del modelo hasta la escala de los respectivos tetraquarks, obteniendo los valores mostrados en la Tabla (7.7). Además, en lugar de la masa del bottom y charm, utilizamos las masas de los estados fundamentales de los diquarks. Con estos valores se obtiene el espectro del tetraquark mostrado en la Fig. (7.12).

Parámetro	$\mu_{cc\bar{c}\bar{c}}$	$\mu_{bb\bar{b}\bar{b}}$
g	2.11	1.79
m_g (GeV)	0.77	0.68
b (GeV) ²	0.27	
m_{cc} (GeV)	2.8417	
m_{bb} (GeV)	9.4424	

Tabla 7.7: Parámetros obtenidos a partir del ajuste priorizando los niveles con $n = 1$ del bottomonium a la escala de los tetraquarks *fully-heavy*.

En la Tabla (7.8) se presentan algunos parámetros característicos extraídos de las funciones de onda de los distintos estados del tetraquark. En particular, las velocidades cuadráticas medias resultan muy pequeñas, incluso para los estados excitados radialmente, validando la aproximación no relativista. Los radios medios obtenidos también son pequeños, lo que es consistente con la interpretación del tetraquark como un sistema compacto en el modelo de diquarks. Sin embargo, nuevamente los radios del tetraquark resultan menores que los radios de los diquarks que lo componen debido a la aproximación del diquark como puntual.

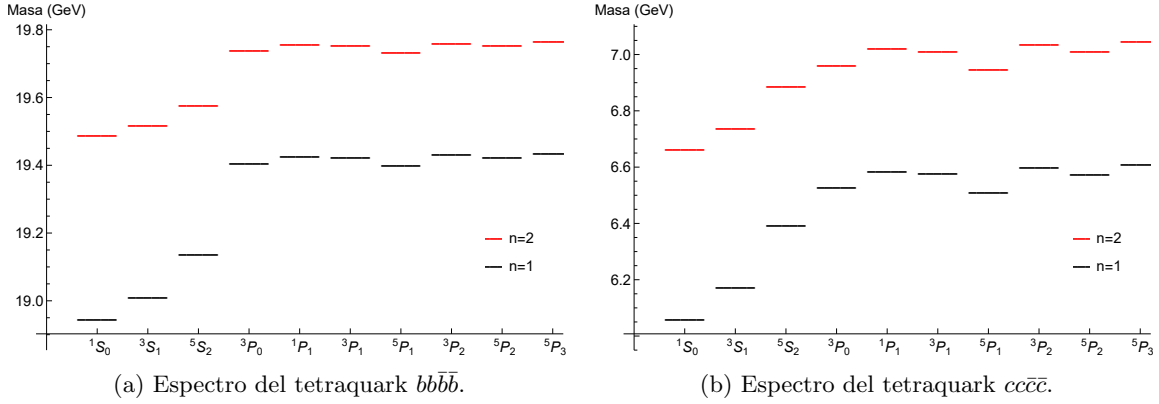


Figura 7.12: Espectro de masas de los tetraquarks *fully-heavy*, obtenidos utilizando los parámetros del ajuste priorizando los niveles con $n = 1$ del bottomonium.

$n l$	M_0 (GeV)	$\langle r \rangle$ (fm)	$\langle v^2 \rangle$
bbbb			
1S	19.0098	0.7272	0.0438
1P	19.4361	1.4089	0.0322
2S	19.5311	3.4814	0.0386
2P	19.7722	5.7713	0.0396
cccc			
1S	6.1773	1.3514	0.1339
1P	6.6183	2.2930	0.1330
2S	6.7837	9.1685	0.1644
2P	7.0817	13.9496	0.1802

Tabla 7.8: Resultados extraídos de las funciones de onda de los tetraquarks.

Se observa que, en comparación con el espectro del tetraquark $b\bar{b}b\bar{b}$ obtenido en el capítulo anterior, en este caso los primeros niveles tienen masas mayores. Sin embargo, los resultados anteriores crecen rápidamente, alcanzando masas comparables para los estados con $n = 2$. Cuando se comparan los resultados del tetraquark $c\bar{c}c\bar{c}$ se obtiene el resultado contrario: los estados con $n = 1$ resultan menores en los resultados actuales, mientras que los niveles con $n = 2$ son mayores.

Estabilidad

Al igual que en el capítulo anterior, estudiamos la estabilidad de los tetraquarks obtenidos ante el decaimiento tipo *fall-apart* a dos mesones. Estos resultados se observan en la Tabla (7.9), donde para los niveles con $n = 1$ del *fully-bottom* las masas resultan levemente por encima del umbral, por lo que no se pueden considerar estados estables. Estos resultados concuerdan con lo observado en las simulaciones de *lattice* QCD [240], según las cuales los primeros tres niveles del $b\bar{b}b\bar{b}$ son inestables. Lo mismo sucede para el tetraquark *fully-charm*, con la excepción de algunos casos con $l = 1$. En general, los niveles con $n = 2$ de ambos tetraquarks se encuentran por debajo del umbral, sugiriendo estados cuasiestables.

Estado	bbbb			cc $\bar{c}\bar{c}$		
	Masa	Canal	Umbral	Masa	Canal	Umbral
1^1S_0	18.9480	$\eta_b(1S) \eta_b(1S)$	18.7974	6.0626	$\eta_c(1S)\eta_c(1S)$	5.9678
1^3S_1	19.0116	$\gamma(1S) \eta_b(1S)$	18.8591	6.1743	$J/\psi(1S)\eta_c(1S)$	6.0808
1^5S_2	19.1387	$\gamma(1S) \gamma(1S)$	18.9208	6.3976	$J/\psi(1S)J/\psi(1S)$	6.1938
1^3P_0	19.4077	$\eta_b(1S) \chi_{b_0}(1P)$	19.25814	6.5359	$\eta_c(1S)\chi_{c_0}(1P)$	6.39861
1^1P_1	19.4280	$\eta_b(1S) h_b(1P)$	19.298	6.5892	$\eta_c(1S)h_c(1P)$	6.50927
1^3P_1	19.4248	$\eta_b(1S) \chi_{b_1}(1P)$	19.29148	6.5727	$\eta_c(1S)\chi_{c_1}(1P)$	6.49457
1^5P_1	19.4025	$\eta_b(1S) h_b(1P)$	19.298	6.5172	$\eta_c(1S)h_c(1P)$	6.50927
1^3P_2	19.4332	$\eta_b(1S) \chi_{b_2}(1P)$	19.31091	6.6017	$\eta_c(1S)\chi_{c_2}(1P)$	6.54007
1^5P_2	19.4253	$\gamma_b(1S) \chi_{b_1}(1P)$	19.35318	6.5708	$J/\psi(1S)\chi_{c_1}(1P)$	6.60757
1^5P_3	19.4379	$\gamma_b(1S) \chi_{b_2}(1P)$	19.37261	6.6123	$J/\psi(1S)\chi_{c_2}(1P)$	6.65307
2^1S_0	19.4917	$\eta_b(2S) \eta_b(2S)$	19.998	6.6664	$\eta_c(2S)\eta_c(2S)$	7.2754
2^3S_1	19.5206	$\gamma(2S) \eta_b(2S)$	20.0224	6.7408	$\psi(2S)\eta_c(2S)$	7.3238
2^5S_2	19.5784	$\gamma(2S) \gamma(2S)$	20.0468	6.8895	$\psi(2S)\psi(2S)$	7.3722
2^3P_0	19.7412	$\eta_b(2S) \chi_{b_0}(2P)$	20.2315	6.9710	-	-
2^1P_1	19.759	$\eta_b(2S) h_b(2P)$	20.2588	7.0242	-	-
2^3P_1	19.7562	$\eta_b(2S) \chi_{b_1}(2P)$	20.25446	7.0081	-	-
2^5P_1	19.7368	$\eta_b(2S) h_b(2P)$	20.2588	6.9535	-	-
2^3P_2	19.7637	$\eta_b(2S) \chi_{b_2}(2P)$	20.26765	7.0380	-	-
2^5P_2	19.7568	$\gamma_b(2S) \chi_{b_1}(2P)$	20.48796	7.0079	-	-
2^5P_3	19.7681	$\gamma_b(2S) \chi_{b_2}(2P)$	20.29205	7.0508	-	-

Tabla 7.9: Resultados obtenidos para el espectro de los tetraquarks en GeV. Se muestra también el canal mediante el cual decaen a un par de mesones y el umbral correspondiente en GeV.

Comparación con la literatura

Comparando nuestros resultados del tetraquark *all-bottom* con los de la literatura presentada en la Tabla (6.22), se observa que nuestros resultados para los primeros niveles se encuentran dentro del rango de los valores considerados en la tabla. Prestamos particular atención a los resultados extraídos de [231] y [235], en los cuales también se incluye el flujo de la constante de acoplamiento, considerando el *running* UV de QCD. En estos dos artículos se obtienen masas del estado fundamental sutilmente mayores que en nuestros resultados, obteniendo una diferencia comparable entre los tres resultados. A medida que se comparan estados más excitados, los resultados obtenidos son cada vez más similares.

Por otro lado, los resultados del espectro del tetraquark *all-charm* de la literatura se encuentran en la Tabla (6.32), donde nuevamente nos centramos en los resultados de [231] y [235]. En este caso se obtienen valores muy similares a los presentados, especialmente a los extraídos de [231]. Por último, comparando con los resultados experimentales del tetraquark *cc $\bar{c}\bar{c}$* presentados en la Tabla (6.33) se obtienen masas muy próximas a las medidas. El primer estado detectado, correspondiente a 1^5S_2 , tiene una masa levemente mayor a nuestros cálculos, aunque con una diferencia comparable con las de la propia tabla. El estado excitado 2^5S_2 se logra predecir con gran precisión, particularmente comparado con la masa del modelo con interferencia.

7.5. Conclusiones parciales

En este capítulo se incorporó la dependencia con la escala de los parámetros del modelo y se logró describir de manera simultánea el espectro de los mesones pesados charmonium, bottomonium y charm–bottom utilizando un único conjunto de parámetros que varían con la escala. Este resultado es un gran avance respecto al capítulo anterior, donde cada sistema se ajustaba de forma independiente.

Se analizaron dos descripciones del flujo de los parámetros: el *running* perturbativo de QCD a un *loop* en el régimen ultravioleta y el flujo completo derivado del modelo de Curci–Ferrari a un *loop*. El análisis mostró que el flujo UV estándar no logra describir simultáneamente los distintos sistemas, ya que implica una variación demasiado pronunciada de la constante de acoplamiento entre las escalas características del charmonium y del bottomonium, no pudiendo tomar los valores requeridos para ajustar ambos espectros. En contraste, el flujo de Curci–Ferrari da lugar a un acoplamiento que disminuye de forma más suave cuando se tiene una masa del gluon elevada, lo que mejora significativamente el ajuste de ambos sectores.

Con el flujo derivado del modelo de Curci–Ferrari, se logró ajustar el espectro de los mesones pesados. En este análisis se logró descartar el límite de gluon sin masa. Se observó además, que existe una tensión entre la descripción simultánea de los estados fundamentales del charmonium y del bottomonium. Y finalmente, se definió un conjunto de parámetros obtenido priorizando el ajuste de los niveles fundamentales del bottomonium debido a ser mejor descritos por el modelo no relativista.

Con este conjunto de parámetros, se repitió el proceso presentado en el capítulo anterior para obtener el espectro de tetraquarks. Se obtuvieron resultados muy similares a los del capítulo anterior, teniendo problemas con los radios de los diquarks. Los tetraquarks obtenidos se encuentran dentro de los valores esperados por la literatura y se logró predecir las masas medidas experimentalmente del $c\bar{c}\bar{c}$.

Capítulo 8

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo estudiamos el espectro de tetraquarks pesados en el límite no relativista utilizando un modelo con gluones masivos. El objetivo es estudiar el efecto de la masa del gluon en la predicción de observables como el espectro de masas del tetraquark. Para esto, ajustamos los parámetros del modelo mediante la comparación del espectro de mesones pesados con los resultados experimentales y utilizamos estos parámetros para predecir las masas de los *fully-heavy* tetraquarks.

Para modelar el tetraquark utilizamos la representación de diquarks, donde el tetraquark se modela como un sistema de dos cuerpos: un diquark compuesto por dos quarks y un antidiquark compuesto por dos antiquarks, cada uno fuertemente ligado. Ambos subsistemas interactúan mediante el intercambio de gluones, dando lugar a un tetraquark compacto. Esta interacción se calcula utilizando la aproximación de Born que consiste en calcular el potencial de interacción para las partículas que forman un estado ligado a partir de los diagramas de Feynman a nivel árbol. En este caso el potencial se conoce como *one gluon exchange*, y a este se le suma, de manera fenomenológica, un término que crece de forma lineal con la distancia para simular el confinamiento. Se utiliza este potencial para resolver la ecuación de Schrödinger, obteniendo así una primera aproximación del espectro de energías. Luego, el cálculo del espectro de energías se mejora agregando correcciones calculadas utilizando la teoría de perturbaciones y considerando los diagramas de Feynman a siguiente orden en el desarrollo no relativista.

Previo al estudio de tetraquarks, con este modelo se logró ajustar por un lado el espectro del bottomonium y por el otro el del charmonium, obteniendo masas del gluon distintas de cero, pero no pudiendo descartar la posibilidad del caso de masa nula. Además, el modelo presenta algunos problemas para recrear las correcciones hiperfinas. Con estos resultados se construyó el tetraquark *fully-charm* y *fully-bottom*, obteniendo un espectro dentro de lo predicho por la literatura. Incluso se logran recrear los resultados experimentales del *fully-charm* tetraquark.

Posteriormente, se agregó el flujo de renormalización de los parámetros a la descripción del sistema, vinculando los parámetros a distintas escalas. De esta forma, fue posible estudiar el espectro del charmonium, bottomonium y charm-bottom simultáneamente, con un mismo conjunto de parámetros cuya la variación con la escala es calculable. Se estudiaron dos flujos, el primero derivado de QCD a altas energías a un *loop*, y el segundo obtenido a partir del modelo de Curci-Ferrari a un *loop*. Únicamente el segundo flujo fue capaz de ajustar el espectro de los tres mesones simultáneamente, siendo necesario una masa del gluon no nula para lograrlo.

Con los parámetros obtenidos de este ajuste, se volvió a estudiar el espectro de los tetraquarks *fully-charm* y *fully-bottom*, obteniendo resultados muy similares al estudio anterior y comparables con

los valores presentes en la literatura, pero con la ventaja de tener un único conjunto de parámetros para todo el espectro. Nuevamente, se logran predecir los estados experimentales del tetraquark $cc\bar{c}\bar{c}$.

En conclusión, la inclusión de una masa del gluon no juega un gran papel al ajustar los espectros de hadrones pesados en el límite no relativista cuando se estudian individualmente. Sin embargo, presenta un rol crucial cuando se incluye la dependencia de la constante de acoplamiento con la escala, permitiendo describir el sector de charm y el sector de bottom de manera simultánea con el modelo trabajado, únicamente cuando se considera una masa del gluon no nula.

Nos planteamos como objetivo a futuro, seguir estudiando el efecto de la masa del gluon en distintos observables, por ejemplo en las tasas de decaimiento de mesones, tasas de decaimiento de tetraquarks y en el espectro de mesones livianos, donde deberíamos tener en cuenta ecuaciones acopladas del tipo Bethe-Salpeter y Dyson-Schwinger.

Apéndice A

Deducción del propagador del gluon

Calculamos el propagador del gluon masivo en el *gauge* de Landau. El propagador se define como la inversa de la matriz hessiana de la acción, evaluada en el vacío y en espacio de momentos. De esta forma, los únicos términos de la acción que contribuyen al propagador son los que involucran al campo del gluon:

$$S_{gluon} = \int d^4z \left\{ -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) + h^c \partial^\mu A_\mu^c + \frac{1}{2} m_g^2 A_\mu^a A^{a\mu} \right\}. \quad (\text{A.1})$$

De esta forma:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta A^{a\mu}(x) \delta A^{b\nu}(y)} = \delta^{ab} [\delta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho \delta(x-y) - \partial_\mu \partial_\nu \delta(x-y) + m_g^2 \delta_{\mu\nu} \delta(x-y)], \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\delta^2 S}{\delta A^{a\mu}(x) \delta h^b(y)} = \delta^{ab} \partial_\mu \delta(x-y), \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\delta^2 S}{\delta h^a(x) \delta h^b(y)} = 0. \quad (\text{A.4})$$

El siguiente paso es tomar la transformada de Fourier de las derivadas. Para la derivada respecto a los campos gluónicos, la transformada de Fourier es:

$$\delta^{ab} \left[-p^2 \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + m_g^2 \delta_{\mu\nu} \right], \quad (\text{A.5})$$

donde podemos definir el proyector transversal y el proyector longitudinal:

$$P_{\mu\nu}^\perp(p) = \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}. \quad P_{\mu\nu}^\parallel(p) = \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}. \quad (\text{A.6})$$

Mientras que la transformada de la derivada cruzada es:

$$-\delta^{ab} p_\mu. \quad (\text{A.7})$$

La matriz hessiana queda:

$$\Gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} \delta^{ab} \left[(m_g^2 - p^2) P_{\mu\nu}^\perp(p) + m_g^2 P_{\mu\nu}^\parallel(p) \right] & -\delta^{ab} p_\mu \\ \delta^{ab} p_\nu & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

y su inversa debe ser de la forma:

$$\left(\Gamma^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \delta^{ab} \left[M P_{\mu\nu}^\perp(p) + N P_{\mu\nu}^\parallel(p) \right] & B p_\mu \\ C p_\nu & D \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Imponiendo que el producto de ambas matrices de lugar a la identidad se obtiene: $M = \frac{1}{m_g^2 - p^2}$, $N = 0$, $B = \frac{1}{p^2} = -C$ y $D = \frac{m_g^2}{p^2}$. De esta forma, el propagador del gluon es:

$$G_{\mu\nu}^{ab}(p) = \frac{\delta^{ab}}{p^2 - m_g^2} P_{\mu\nu}^\perp(p). \quad (\text{A.10})$$

Apéndice B

Cálculo de transformadas de Fourier

Veamos en detalle el cálculo de la transformada de Fourier con parte divergente:

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} (\vec{a} \cdot \vec{q}) (\vec{q} \cdot \vec{b}) \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} = -(\vec{a} \cdot \nabla_r) (\vec{b} \cdot \nabla_r) \left(\frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} \right). \quad (\text{B.1})$$

Empecemos por estudiar el lado derecho de la igualdad, empezando por ver el efecto de la primera divergencia:

$$(\vec{b} \cdot \nabla) f(r) = \vec{b} \cdot \frac{\vec{r} f'(r)}{r},$$

Aplicando el mismo razonamiento al otro factor del lado derecho obtenemos:

$$(\vec{a} \cdot \nabla) (\vec{b} \cdot \nabla) f(r) = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{r} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{b} \cdot \vec{r})}{r^3} \right) f'(r) + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{b} \cdot \vec{r})}{r^2} f''(r). \quad (\text{B.2})$$

Ahora consideremos una función $f(r)$ de la forma:

$$f(r) = \frac{e^{-m_g r}}{4\pi(r + \epsilon)}, \quad (\text{B.3})$$

donde el factor ϵ remueve la singularidad que presenta el potencial de Yukawa. Recuperamos la transformada estudiada tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$.

Para estudiar las singularidades del lado derecho de la igualdad, integramos la expresión de la ecuación (B.2) multiplicada por una función regular de prueba $\psi(r)$:

$$\int dr d\theta d\phi r^2 \sin \theta \psi(r) \left(\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{r} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{b} \cdot \vec{r})}{r^3} \right) f'(r) + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{b} \cdot \vec{r})}{r^2} f''(r) \right).$$

Integrando en la parte angular y usando que $\langle r_i r_j \rangle = \frac{\delta_{ij} \langle r^2 \rangle}{3}$:

$$\int dr r^2 \psi(r) \left(\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{r} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{3r} \right) f'(r) + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{3} f''(r) \right) 4\pi.$$

Sustituyendo $f(r)$ y sus derivadas:

$$\frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{3} \int_0^\infty dr \psi(r) \left(\frac{2m_g r}{r + \epsilon} + \frac{2r}{(r + \epsilon)^2} - \frac{m_g^2 r^2}{r + \epsilon} - \frac{2m_g r^2}{(r + \epsilon)^2} - \frac{2r^2}{(r + \epsilon)^3} \right) e^{-m_g r}.$$

Dividimos en intervalo de integración en dos: $[0, \sqrt{\epsilon}]$ y $[\sqrt{\epsilon}, \infty)$, donde el segundo no presenta problemas de divergencias, ya que el límite $r \rightarrow \infty$ está suprimido por la exponencial. Sin embargo, en el primer intervalo $e^{-m_g r} \approx 1$ y si suponemos ψ suficientemente suave tal que su valor en el intervalo es aproximadamente el valor en el origen, obtenemos la siguiente expresión con el cambio de variables $r = \epsilon u$

$$\frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{3} \psi(r=0) \int_0^{\sqrt{\epsilon}^{-1}} du \left(\frac{2m_g \epsilon u}{u + 1} + \frac{2u}{(u + 1)^2} - \frac{m_g^2 \epsilon^2 u^2}{u + 1} - \frac{2m_g \epsilon u^2}{(u + 1)^2} - \frac{2u^2}{(u + 1)^3} \right).$$

Cada uno de estos términos vale:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\epsilon}^{-1}} du \frac{u}{u + 1} &= \epsilon \log \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} + 1 \right) - \sqrt{\epsilon}, \\ \int_0^{\sqrt{\epsilon}^{-1}} du \frac{u}{(u + 1)^2} &= \log \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} + 1 \right) - \frac{\sqrt{\epsilon}^{-1}}{\sqrt{\epsilon}^{-1} + 1}, \\ \int_0^{\sqrt{\epsilon}^{-1}} du \frac{u^2}{u + 1} &= \epsilon \log \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} + 1 \right) - \epsilon(1 - \epsilon) \log \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} + 1 \right) - \sqrt{\epsilon} + \frac{1}{2}, \\ \int_0^{\sqrt{\epsilon}^{-1}} du \frac{u^2}{(u + 1)^2} &= -2\epsilon \log \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} + 1 \right) - \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon}^{-1} + 1} + \sqrt{\epsilon}, \\ \int_0^{\sqrt{\epsilon}^{-1}} du \frac{u^2}{(u + 1)^3} &= \log \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} + 1 \right) - \frac{1}{2} \frac{\epsilon^{-1}}{(\sqrt{\epsilon}^{-1} + 1)^2} - \frac{\sqrt{\epsilon}^{-1}}{\sqrt{\epsilon}^{-1} + 1}, \end{aligned}$$

las partes divergentes se compensan y la integral cuando $\epsilon \rightarrow 0$ queda:

$$\frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{3} \psi(r=0).$$

Entonces el resultado debe contener un término de la forma $\frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{3} \delta^3(r)$:

$$\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{q}) (\vec{q} \cdot \vec{b}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{3} \delta^3(r) + \left[\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{r^3} (m_g r + 1) - 3 \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r}) (\vec{b} \cdot \vec{r})}{r^5} \left(\frac{m_g^2 r^2}{3} + m_g r + 1 \right) \right] \frac{e^{-m_g r}}{4\pi}.$$

Apéndice C

Interacción quark-quark

Verifiquemos que el potencial de interacción obtenido en la ecuación (3.2) es válido también para el caso de interacción quark-quark. El diagrama a nivel árbol para la interacción entre dos quarks se encuentra en la Fig. (C.1). Siguiendo las reglas de Feynman se obtiene la amplitud en la ecuación (C.1).

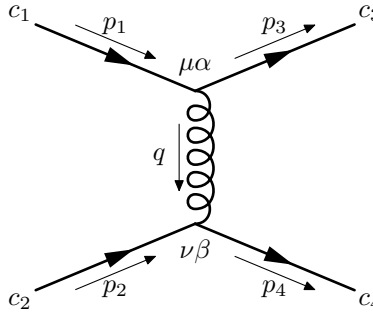


Figura C.1: Diagrama de Feynman para el *scattering* quark-quark a nivel árbol.

$$i\mathcal{M} = \left[\bar{u}^{s_3}(p_3) c_3^\dagger (ig\gamma^\mu t^a) u^{s_1}(p_1) c_1 \right] \frac{-i\delta^{ab}}{q^2 - m_g^2 + i\varepsilon} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \left[\bar{u}^{s_4}(p_4) c_4^\dagger (ig\gamma^\nu t^b) u^{s_2}(p_2) c_2 \right], \quad (\text{C.1})$$

con $q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$.

El factor de color f_c queda:

$$f_c = \frac{1}{4} c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1 c_4^\dagger \lambda^\alpha c_2.$$

Utilizando los mismos espinores que en el Cap. 4.1.1 y tomando la misma aproximación del momento de los quarks pequeño en comparación con su masa:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_{00} &= g^2 f_c [\bar{u}(p_3) \gamma^0 u(p_1)] \left(\frac{-i\eta_{00}}{|\vec{q}|^2 + m_g^2 - i\varepsilon} \right) [\bar{u}(p_4) \gamma^0 u(p_2)] \\
&\approx g^2 f_c w_3^\dagger w_4^\dagger \left[4m_1 m_2 - \frac{(m_1^2 + m_2^2) |\vec{q}|^2}{2m_1 m_2} - \frac{im_2 (\vec{q} \times \vec{p}_1) \cdot \vec{\sigma}_1}{m_1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{im_1 (\vec{q} \times \vec{p}_2) \cdot \vec{\sigma}_2}{m_2} \right] w_1 w_2 \left(\frac{-i}{|\vec{q}|^2 + m_g^2 - i\varepsilon} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_{ij} &= g^2 f_c [\bar{u}(p_3) \gamma_i u(p_1)] \left(\frac{-i}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} \right) \left(-\delta_{ij} + \frac{q_i q_j}{|\vec{q}|^2} \right) [\bar{u}(p_4) \gamma_j u(p_2)] \approx \\
&\approx g^2 f_c w_3^\dagger w_4^\dagger \left[-|\vec{q}|^2 (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) + (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q}) (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q}) - 2i\vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{p}_2 \times \vec{q}) + 2i\vec{\sigma}_2 \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{q}) \right. \\
&\quad \left. - 4\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 + \frac{4}{|\vec{q}|^2} (\vec{p}_1 \cdot \vec{q}) (\vec{q} \cdot \vec{p}_2) \right] w_1 w_2 \left(\frac{-i}{|\vec{q}|^2 + m_g^2 - i\varepsilon} \right).
\end{aligned}$$

Juntando todo:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M} &= g^2 f_c w_3^\dagger w_4^\dagger \left[4m_1 m_2 - \frac{(m_1^2 + m_2^2) |\vec{q}|^2}{2m_1 m_2} - \frac{im_2 (\vec{q} \times \vec{p}_1) \cdot \vec{\sigma}_1}{m_1} + \frac{im_1 (\vec{q} \times \vec{p}_2) \cdot \vec{\sigma}_2}{m_2} \right. \\
&\quad \left. - |\vec{q}|^2 (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) + (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q}) (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q}) - 2i\vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{p}_2 \times \vec{q}) + 2i\vec{\sigma}_2 \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{q}) - 4\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{|\vec{q}|^2} (\vec{p}_1 \cdot \vec{q}) (\vec{q} \cdot \vec{p}_2) \right] w_1 w_2 \left(\frac{-i}{|\vec{q}|^2 + m_g^2} \right).
\end{aligned}$$

Para encontrar el potencial asociado a esta amplitud de *scattering* seguimos el mismo proceso que en el Cap. 4.1.2, aplicando al aproximación de Born. Como se puede ver, la expresión obtenida para la amplitud es muy similar al caso de *scattering* quark-antiquark, con la excepción de algunos signos y los vectores de *spin*. Entonces la aproximación de Born da lugar a la misma expresión con algunos signos cambiados.

Este problema de signo se resuelve cuando consideramos la nueva relación entre las matrices de Pauli y el *spin* de la partícula, como ya no estamos considerando una antipartícula, $\vec{S}_1 = \vec{S}_2 = \frac{\vec{\sigma}}{2}$, donde la antipartícula tenía un operador de *spin* opuesto a la matriz de Pauli dividido dos. Este cambio de signo contrarresta las diferencias en la amplitud de *scattering*, obteniendo el mismo potencial que antes:

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) = & -\frac{g^2 f_c e^{-m_g r}}{4\pi r} - \frac{g^2 f_c |\vec{p}|^2}{m_1 m_2 m_g^2} (m_g^2 r^2 + m_g r + 1 - e^{m_g r}) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^3} + \frac{g^2 f_c \delta^3(r)}{8} \left(\frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_1^2} \right) \\
& - \frac{g^2 f_c m_g^2 (m_1^2 + m_2^2)}{8 m_1^2 m_2^2} \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} + \frac{3 g^2 f_c (\vec{p} \cdot \vec{r})^2}{m_1 m_2 m_g^2} \left(\frac{m_g^2 r^2}{3} + m_g r + 1 - e^{-m_g r} \right) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^5} \\
& + \frac{2 g^2 f_c \delta^3(r)}{3 m_1 m_2} (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) - \frac{2 g^2 f_c m_g^2}{3 m_1 m_2} (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r} \\
& - \frac{g^2 f_c (m_g r + 1)}{2 m_1 m_2} \left[\frac{2 m_1 + m_2}{m_1} (\vec{L} \cdot \vec{S}_1) + \frac{m_1 + 2 m_2}{m_2} (\vec{L} \cdot \vec{S}_2) \right] \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^3} \\
& - \frac{g^2 f_c}{m_1 m_2} \left(\frac{m_g^2 r^2}{3} + m_g r + 1 \right) \left[\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - \frac{3 (\vec{S}_1 \cdot \vec{r}) (\vec{S}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} \right] \frac{e^{-m_g r}}{4\pi r^3}.
\end{aligned}$$

Existe otro diagrama asociado al *scattering* quark-quark. Sin embargo se puede probar que al incluirlo en la amplitud el resultado del potencial no cambia.

Apéndice D

Espinores de Dirac en el límite no relativista

En esta sección derivamos la forma explícita de los espinores de Dirac en el límite no relativista, que serán utilizados en el cálculo de observables en sistemas ligados.

Partimos de la ecuación de Dirac en el espacio de momentos

$$(\not{p} - m)u(p) = 0,$$

donde $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$. Trabajaremos en la representación de Dirac, en la cual las matrices gamma toman la forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

Escribimos el espinor como

$$u(p) = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix},$$

donde ϕ y χ son espinores de dos componentes. Sustituyendo en la ecuación de Dirac se obtiene el sistema acoplado

$$\begin{aligned} (E - m)\phi - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi &= 0, \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\phi - (E + m)\chi &= 0. \end{aligned}$$

A partir de la segunda ecuación podemos expresar la componente inferior como

$$\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \phi.$$

En el límite no relativista, $|\vec{p}| \ll m$, la energía puede expandirse como $E \simeq m + \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$. En este régimen, la componente inferior está suprimida respecto de la superior por un factor del orden $|\vec{p}|/m$.

Para conectar con la interpretación probabilística no relativista, consideramos la densidad asociada a la corriente conservada

$$\rho = u^\dagger(p)u(p) = |\phi|^2 + |\chi|^2.$$

Sin embargo, en mecánica cuántica no relativista la densidad de probabilidad está dada únicamente por el módulo cuadrado de una función de onda de dos componentes. Introducimos entonces un espinor efectivo φ tal que

$$\rho = |\varphi|^2.$$

Sustituyendo la expresión de χ y expandiendo en potencias de $|\vec{p}|^2/m^2$, obtenemos

$$\rho = |\phi|^2 + \frac{1}{4m^2} \phi^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 \phi + \mathcal{O}\left(\frac{p^4}{m^4}\right).$$

Utilizando la identidad $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = |\vec{p}|^2$, se sigue que

$$\rho = |\phi|^2 + \frac{|\vec{p}|^2}{4m^2} |\phi|^2.$$

Esto sugiere definir la función de onda no relativista como

$$\varphi = \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2}\right) \phi,$$

de modo que la densidad toma la forma estándar a este orden.

Invirtiendo esta relación, se obtiene

$$\phi = \left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{8m^2}\right) \varphi, \quad \chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} \varphi.$$

Finalmente, el espinor de Dirac en el límite no relativista puede escribirse como

$$u(p) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{8m^2}\right) \varphi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} \varphi \end{pmatrix}.$$

Para antipartículas, el procedimiento es completamente análogo, partiendo de la ecuación

$$(\not{p} + m)v(p) = 0.$$

En este caso, las componentes del espinor se intercambian en el límite no relativista, obteniéndose

$$v(p) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} \varphi \\ \left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{8m^2}\right) \varphi \end{pmatrix}.$$

Apéndice E

Función de onda en el origen

Deduciremos la expresión de la ecuación (4.19) donde se calcula el valor de la función de onda en el origen a partir del potencial de interacción. Para $l > 0$ el valor de la función de onda en el origen es cero debido a las condiciones iniciales, veremos como se calcula para $l = 0$. Partiendo de la ecuación de Schrödinger:

$$\left[-\frac{1}{2\mu} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}).$$

Si consideramos la separación $\psi(\vec{r}) = \frac{1}{r} u(r) Y_l^m(\theta, \phi)$, el armónico esférico con $l = 0$ es constante, por lo que la ecuación de Schrödinger se puede escribir como:

$$-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} = [E - V(r)] u(r).$$

Si multiplicamos el lado izquierdo por un factor $\frac{1}{4\pi r^2} \frac{du(r)}{dr}$ e integramos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\mu} \int d^3 r \frac{d^2 u(r)}{dr^2} \frac{du(r)}{dr} \frac{1}{4\pi r^2} &= \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty dr \frac{d^2 u(r)}{dr^2} \frac{du(r)}{dr} = -\frac{1}{4\mu} \left[\frac{du(r)}{dr} \right]^2 \Big|_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{\mu} \left[\psi(\vec{r}) + r \frac{d\psi(\vec{r})}{dr} \right]^2 \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{\mu} |\psi(0)|^2, \end{aligned}$$

donde estamos suponiendo que la función de onda y sus derivadas decaen suficientemente rápido en el infinito por ser un estado ligado.

Ahora debemos tratar el lado derecho:

$$\int d^3 r \frac{[E - V(r)]}{4\pi r^2} u(r) \frac{du(r)}{dr} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dr [E - V(r)] \frac{d[u^2(r)]}{dr} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dV(r)}{dr} u^2(r) = \frac{1}{2} \left\langle \frac{dV(r)}{dr} \right\rangle.$$

Finalmente:

$$|\psi(0)|^2 = \frac{\mu}{2\pi} \left\langle \frac{dV(r)}{dr} \right\rangle.$$

Bibliografía

- [1] Hideki Yukawa. On the interaction of elementary particles. i. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 1:1–10, 01 1955.
- [2] Murray Gell-Mann. The Eightfold Way: A Theory of strong interaction symmetry. 3 1961.
- [3] Martin Breidenbach, Jerome I. Friedman, Henry W. Kendall, Elliott D. Bloom, D. H. Coward, H. C. DeStaebler, J. Drees, Luke W. Mo, and Richard E. Taylor. Observed behavior of highly inelastic electron-proton scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 23:935–939, 1969.
- [4] G. Zweig. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 1. 1 1964.
- [5] Murray Gell-Mann. A Schematic Model of Baryons and Mesons. *Phys. Lett.*, 8:214–215, 1964.
- [6] O. W. Greenberg. Spin and Unitary Spin Independence in a Paraquark Model of Baryons and Mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:598–602, 1964.
- [7] P. Skands. Introduction to QCD. In *Searching for New Physics at Small and Large Scales*. World Scientific, September 2013.
- [8] J. E. Augustin, A. M. Boyarski, M. Breidenbach, F. Bulos, J. T. Dakin, G. J. Feldman, G. E. Fischer, D. Fryberger, G. Hanson, B. Jean-Marie, R. R. Larsen, V. Lüth, H. L. Lynch, D. Lyon, C. C. Morehouse, J. M. Paterson, M. L. Perl, B. Richter, R. F. Schwitters, F. Vannucci, G. S. Abrams, D. Briggs, W. Chinowsky, C. E. Friedberg, G. Goldhaber, R. J. Hollebeek, J. A. Kadyk, G. H. Trilling, J. S. Whitaker, and J. E. Zipse. Total cross section for hadron production by electron-positron annihilation between 2.4 and 5.0 gev center-of-mass energy. *Phys. Rev. Lett.*, 34:764–767, Mar 1975.
- [9] Kenneth G. Wilson. Confinement of Quarks. *Phys. Rev. D*, 10:2445–2459, 1974.
- [10] G. S. Bali, Hartmut Neff, Thomas Duessel, Thomas Lippert, and K. Schilling. Observation of string breaking in QCD. *Phys. Rev. D*, 71:114513, 2005.
- [11] G. S. Bali and K. Schilling. Static quark-antiquark potential: Scaling behavior and finite-size effects in SU(3) lattice gauge theory. *Phys. Rev. D*, 46:2636–2646, Sep 1992.
- [12] H. David Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong interactions? *Phys. Rev. Lett.*, 30:1346–1349, Jun 1973.
- [13] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343–1346, Jun 1973.
- [14] H. David Politzer. Asymptotic Freedom: An Approach to Strong Interactions. *Phys. Rept.*, 14:129–180, 1974.

- [15] S. Bethke. Determination of the QCD coupling α_s . *J. Phys. G*, 26:R27, 2000.
- [16] G.M. Prosperi, M. Raciti, and C. Simolo. On the running coupling constant in QCD. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 58(2):387–438, April 2007.
- [17] Particle Data Group. Review of Particle Physics. *Phys. Rev. D*, 110:030001, 2024.
- [18] A. Cucchieri and T. Mendes. What’s up with IR gluon and ghost propagators in Landau gauge? A puzzling answer from huge lattices, 2007.
- [19] A. Cucchieri and T. Mendes. Constraints on the Infrared Behavior of the Gluon Propagator in Yang-Mills Theories. *Physical Review Letters*, 100(24), June 2008.
- [20] A. Sternbeck, E.M. Ilgenfritz, M. Müller-Preussker, and A. Schiller. Landau gauge ghost and gluon propagators and the Faddeev-Popov operator spectrum. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 153(1):185–190, March 2006.
- [21] Matthieu Tissier and Nicolas Wschebor. Infrared propagators of Yang-Mills theory from perturbation theory. *Physical Review D*, 82(10), November 2010.
- [22] G. Curci and R. Ferrari. On a Class of Lagrangian Models for Massive and Massless Yang-Mills Fields. *Nuovo Cim. A*, 32:151–168, 1976.
- [23] Matthieu Tissier and Nicolas Wschebor. An Infrared Safe perturbative approach to Yang-Mills correlators. *Phys. Rev. D*, 84:045018, 2011.
- [24] Marcela Peláez, Matthieu Tissier, and Nicolás Wschebor. Three-point correlation functions in Yang-Mills theory. *Phys. Rev. D*, 88:125003, Dec 2013.
- [25] Marcela Peláez, Matthieu Tissier, and Nicolás Wschebor. Two-point correlation functions of QCD in the Landau gauge. *Phys. Rev. D*, 90:065031, Sep 2014.
- [26] Marcela Peláez, Matthieu Tissier, and Nicolás Wschebor. Quark-gluon vertex from the Landau gauge Curci-Ferrari model. *Phys. Rev. D*, 92:045012, Aug 2015.
- [27] Felipe Figueroa and Marcela Peláez. One-loop unquenched three-gluon and ghost-gluon vertices in the Curci-Ferrari model. *Phys. Rev. D*, 105:094005, May 2022.
- [28] John A. Gracey, Marcela Peláez, Urko Reinosa, and Matthieu Tissier. Two-loop calculation of Yang-Mills propagators in the Curci-Ferrari model. *Physical Review D*, 100(3), August 2019.
- [29] Nahuel Barrios, Marcela Peláez, Urko Reinosa, and Nicolás Wschebor. Ghost-antighost-gluon vertex from the Curci-Ferrari model: Two-loop corrections. *Phys. Rev. D*, 102:114016, Dec 2020.
- [30] Nahuel Barrios, John A. Gracey, Marcela Peláez, and Urko Reinosa. Two-loop corrections to the QCD propagators within the Curci-Ferrari model. *Phys. Rev. D*, 104:094019, Nov 2021.
- [31] Nahuel Barrios, Marcela Peláez, and Urko Reinosa. Two-loop three-gluon vertex from the Curci-Ferrari model and its leading infrared behavior to all loop orders. *Phys. Rev. D*, 106:114039, Dec 2022.
- [32] Nahuel Barrios, Philippe De Fabritiis, and Marcela Peláez. Four-gluon vertex from the Curci-Ferrari model at one-loop order. *Phys. Rev. D*, 109:L091502, May 2024.
- [33] Marcela Peláez, Urko Reinosa, Julien Serreau, and Nicolás Wschebor. Small parameters in infrared QCD: The pion decay constant. *Phys. Rev. D*, 107:054025, Mar 2023.

- [34] R. J. Jaffe. Multiquark hadrons. I. Phenomenology of $Q^2\bar{q}^2$ mesons. *Phys. Rev. D*, 15:267–280, Jan 1977.
- [35] R. L. Jaffe. Multiquark hadrons. II. Methods. *Phys. Rev. D*, 15:281–289, Jan 1977.
- [36] Takumi Doi. Theoretical Status of Pentaquarks. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 168:45–49, 03 2007.
- [37] R. Aaij and *et al.* Observation of a narrow pentaquark state, $P_c(4312)^+$, and of the two-peak structure of the $P_c(4450)^+$. *Phys. Rev. Lett.*, 122:222001, Jun 2019.
- [38] S. K. Choi and *et al.* Observation of a Narrow Charmoniumlike State in Exclusive $B^\pm \rightarrow K^\pm\pi^+\pi^-J/\psi$ decays. *Phys. Rev. Lett.*, 91:262001, Dec 2003.
- [39] B. Aubert *et al.* Observation of a Broad Structure in the $\pi^+\pi^-J/\psi$ Mass Spectrum around 4.26 GeV/c². *Physical Review Letters*, 95(14), September 2005.
- [40] X. L. Wang and *et al.* Observation of Two Resonant Structures in $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\psi(2S)$ via Initial-State Radiation at Belle. *Phys. Rev. Lett.*, 99:142002, Oct 2007.
- [41] S. K. Choi and *et al.* Observation of a Resonancelike Structure in the $\pi^{+-}\psi'$ Mass Distribution in Exclusive $B \rightarrow K\pi^{+-}\psi'$ Decays. *Phys. Rev. Lett.*, 100:142001, Apr 2008.
- [42] A. Bondar and *et al.* Observation of Two Charged Bottomoniumlike Resonances in $\Upsilon(5S)$ Decays. *Phys. Rev. Lett.*, 108:122001, Mar 2012.
- [43] LHCb collaboration. Observation of an exotic narrow doubly charmed tetraquark. *Nature Physics*, 18(7):751–754, June 2022.
- [44] LHCb Collaboration. Observation of structure in the J/ψ -pair mass spectrum. *Science Bulletin*, 65(23):1983–1993, December 2020.
- [45] CMS Collaboration. Observation of new structures in the $J/\psi J/\psi$ mass spectrum in pp collisions at $\sqrt{s} = 13\sqrt{2}$ TeV. 2022.
- [46] ATLAS Collaboration. Observation of an Excess of Dicharmonium Events in the Four-Muon Final State with the ATLAS Detector. *Physical Review Letters*, 131(15), October 2023.
- [47] Sasa Prelovsek, Emmanuel Ortiz-Pacheco, Sara Collins, Luka Leskovec, M. Padmanath, and Ivan Vujmilovic. Doubly heavy tetraquarks from lattice QCD: Incorporating diquark-antidiquark operators and the left-hand cut. *Phys. Rev. D*, 112:014507, Jul 2025.
- [48] Martin Pflaumer, Luka Leskovec, Stefan Meinel, and Marc Wagner. Existence and Non-Existence of Doubly Heavy Tetraquark Bound States. In *Proceedings of The 38th International Symposium on Lattice Field Theory — PoS(LATTICE2021)*, LATTICE2021, page 392. Sissa Medialab, May 2022.
- [49] Constantia Alexandrou, Jacob Finkenrath, Theodoros Leontiou, Stefan Meinel, Martin Pflaumer, and Marc Wagner. b^-b^-ud and b^-b^-us tetraquarks from lattice QCD using symmetric correlation matrices with both local and scattering interpolating operators. *Physical Review D.*, 110(5), 09 2024.
- [50] Feng-Kun Guo, Christoph Hanhart, Ulf-G. Meißner, Qian Wang, Qiang Zhao, and Bing-Song Zou. Hadronic molecules. *Reviews of Modern Physics*, 90(1), February 2018.
- [51] D. P. Rathaud and Ajay Kumar Rai. Dimesonic states with the heavy-light flavour mesons. *The European Physical Journal Plus*, 132(8), August 2017.

- [52] Yizhuang Liu and Ismail Zahed. Heavy exotic molecules with charm and bottom. *Physics Letters B*, 762:362–370, November 2016.
- [53] Ming-Zhu Liu, Duo-Jie Jia, and Dian-Yong Chen. Possible hadronic molecular states composed of S-wave heavy-light mesons. *Chinese Physics C*, 41(5):053105, May 2017.
- [54] Xiaozhao Chen, Xiaofu Lü, Renbin Shi, and Xiurong Guo. Mass of $Y(4140)$ in Bethe-Salpeter equation for quarks, 2015.
- [55] Zhen-Yang Wang, Jing-Juan Qi, Xin-Heng Guo, and Chao Wang. $X(3872)$ as a molecular $D\bar{D}^*$ state in the Bethe-Salpeter equation approach. *Physical Review D*, 97(1), January 2018.
- [56] S. Sakai, L. Roca, and E. Oset. Charm-beauty meson bound states from $B(B^*)D(D^*)$ and $B(B^*)\bar{D}(\bar{D}^*)$ interaction. *Physical Review D*, 96(5), September 2017.
- [57] Luciano Maiani, Antonio D. Polosa, and Veronica Riquer. A theory of X and Z multiquark resonances. *Physics Letters B*, 778:247–251, March 2018.
- [58] Rudolf Faustov, Vladimir Galkin, and Elena Savchenko. Fully Heavy Tetraquark Spectroscopy in the Relativistic Quark Model. *Symmetry*, 14(12):2504, November 2022.
- [59] Smruti Patel and P. C. Vinodkumar. Tetraquark states in the bottom sector and the status of the $y_b(10890)$ state. *The European Physical Journal C*, 76(7), June 2016.
- [60] Qi-Fang Lü and Yu-Bing Dong. The $X(4140)$, $X(4274)$, $X(4500)$ and $X(4700)$ in the relativized quark model. *Physical Review D*, 94(7), October 2016.
- [61] Jesse F. Giron, Richard F. Lebed, and Curtis T. Peterson. The dynamical diquark model: First numerical results. *Journal of High Energy Physics*, 2019(5), May 2019.
- [62] V. R. Debastiani and F. S. Navarra. Spectroscopy of the All-Charm Tetraquark. *PoS, Hadron2017*:238, 2018.
- [63] A. N. Kvinikhidze and B. Blankleider. Covariant tetraquark equations in quantum field theory. *Phys. Rev. D*, 106:054024, Sep 2022.
- [64] George Chiladze, Adam F. Falk, and Alexey A. Petrov. Hybrid charmonium production in B decays. *Physical Review D*, 58(3), July 1998.
- [65] Hagop Sazdjian. The Interplay between Compact and Molecular Structures in Tetraquarks. *Symmetry*, 14(3):515, March 2022.
- [66] Y. Iwasaki. A possible model for new resonances: Exotics and hidden charm. *Prog. Theor. Phys.*, 54:492, 1975.
- [67] K. T. Chao. The $(cc)(\bar{c}\bar{c})$ (doubly charmed) meson states in QCD. *Z. Phys. C*, 7:317, 1981.
- [68] J. P. Ader, J. M. Richard, and P. Taxil. Do narrow heavy multiquark states exist? *Phys. Rev. D*, 25:2370, 1982.
- [69] P. Bicudo, J. Scheunert, and M. Wagner. Including heavy spin effects in the static potential of a tetraquark system computed in lattice QCD. *Phys. Rev. D*, 95:034502, 2017.
- [70] G. Yang, J. Ping, and J. Segovia. Fully-heavy tetraquarks in constituent quark models. *Phys. Rev. D*, 104(1):014006, 2021.

- [71] Z. Asadi, S. M. Moosavi Nejad, and M. A. Moosavi Nejad. Masses of fully heavy tetraquark states from a four-quark static potential computed in lattice QCD. *Phys. Rev. D*, 105:014006, 2022.
- [72] W. Chen, H. X. Chen, X. Liu, and S. L. Zhu. Fully heavy tetraquark states and their mass spectra. *Phys. Lett. B*, 802:135155, 2020.
- [73] Q. Li, C. Deng, Y. Chen, and S. L. Zhu. Fully heavy tetraquark states in a relativized diquark model. *Chin. Phys. C*, 45:023116, 2021.
- [74] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [75] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, 1996.
- [76] Taizo Muta. *Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories, (3rd ed.)*, volume 78 of *World scientific Lecture Notes in Physics*. World Scientific, Hackensack, N.J., 3rd edition, 2010.
- [77] David Tong. Gauge Theory, 2018. Lecture notes, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge.
- [78] Marcela Peláez, Urko Reinoso, Julien Serreau, Matthieu Tissier, and Nicolás Wschebor. A window on infrared QCD with small expansion parameters. *Rept. Prog. Phys.*, 84(12):124202, 2021.
- [79] B. Borasoy. The number of colors in the decays $\pi^0, \eta, \eta' \rightarrow \gamma\gamma$. *The European Physical Journal C*, 34(3):317–326, May 2004.
- [80] P. N. Burrows. *Precise Tests of QCD in e^+e^- Annihilation*, 1997.
- [81] M. Y. Han and Y. Nambu. Three-Triplet Model with Double SU(3) Symmetry. *Phys. Rev.*, 139:B1006–B1010, Aug 1965.
- [82] H Fritzsch, M Gell-Mann, and H Leutwyler. Advantages of the color octet gluon picture. *Phys. Lett., B, v. 47B, no. 4, pp. 365-368*, 11 1973.
- [83] Steven Weinberg. Non-Abelian Gauge Theories of the Strong Interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 31:494–497, Aug 1973.
- [84] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, Oct 1954.
- [85] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li. *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Oxford University Press, Oxford, UK, 1984.
- [86] María Florencia Izzo Villafañe. *Modelos quirales para las interacciones fuertes: fenomenología de mesones y transiciones de fase en presencia de campos magnéticos externos*. PhD thesis, Buenos Aires, CONICET, La Plata U., 2017.
- [87] Werner Heisenberg and Wolfgang Pauli. Zur Quantendynamik der Wellenfelder. *Zeitschrift für Physik*, 56:1–61, 1929.
- [88] Yongshi WU G. PARISI. Perturbation Theory Without Gauge Fixing. *Scientia Sinica*, 24(4):483–, 1981.
- [89] Richard MacKenzie. *Path Integral Methods and Applications*, 2000.

- [90] Michele Maggiore. Path integral quantization. In *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 11 2004.
- [91] R. P. Feynman. Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction. *Phys. Rev.*, 80:440–457, Nov 1950.
- [92] R. P. Feynman. Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 20:367–387, Apr 1948.
- [93] Matías Fernández Lakatos. Rol de los diversos acoplamientos en la cromodinámica cuántica infrarroja., 2018.
- [94] L. D. Faddeev and V. N. Popov. Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field. *Phys. Lett. B*, 25:29–30, 1967.
- [95] Fiorenzo Bastianelli. Path Integrals and Gauge Fixing. Lecture notes, 2006. Disponible en línea.
- [96] D. I. Kazakov. Radiative Corrections, Divergences, Regularization, Renormalization, Renormalization Group and All That in Examples in Quantum Field Theory, 2009.
- [97] M. D. B. de Melo S. R. Gobira. Divergent Integrals Treatment in Quantum Field Theory. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 43, 2021.
- [98] W. Pauli and F. Villars. On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory. *Rev. Mod. Phys.*, 21:434–444, Jul 1949.
- [99] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi. Dimensional renormalization: The number of dimensions as a regularizing parameter. *Il Nuovo Cimento B*, 12(1):20–26, 1972.
- [100] John B. Kogut. The lattice gauge theory approach to quantum chromodynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 55:775–836, Jul 1983.
- [101] G. 't Hooft. Renormalizable Lagrangians for massive Yang-Mills fields. *Nuclear Physics B*, 35(1):167–188, 1971.
- [102] G. 't Hooft and M. Veltman. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nuclear Physics B*, 44(1):189–213, 1972.
- [103] G. 't Hooft and M. Veltman. Combinatorics of gauge fields. *Nuclear Physics B*, 50(1):318–353, 1972.
- [104] M. Gell-Mann and F. E. Low. Quantum Electrodynamics at Small Distances. *Phys. Rev.*, 95:1300–1312, Sep 1954.
- [105] Steven Weinberg. New approach to the Renormalization Group. *Phys. Rev. D*, 8:3497–3509, Nov 1973.
- [106] D.R.T. Jones. Two-loop diagrams in Yang-Mills theory. *Nuclear Physics B*, 75(3):531–538, 1974.
- [107] Michael Schmelling. Status of the Strong Coupling Constant, 1997.
- [108] Markus Q. Huber. Nonperturbative properties of Yang-Mills theories, 2020.
- [109] F. J. Dyson. The s Matrix in Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev.*, 75:1736–1755, Jun 1949.
- [110] Julian Schwinger. On the Green's functions of quantized fields. I. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 37(7):452–455, 1951.

- [111] Julian Schwinger. On the Green's functions of quantized fields. II. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 37(7):455–459, 1951.
- [112] John M. Cornwall. Dynamical mass generation in continuum quantum chromodynamics. *Phys. Rev. D*, 26:1453–1478, Sep 1982.
- [113] Craig D. Roberts and Anthony G. Williams. Dyson-schwinger equations and their application to hadronic physics. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 33:477–575, January 1994.
- [114] R Alkofer. The infrared behaviour of QCD Green's functions Confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. *Physics Reports*, 353(5–6):281–465, November 2001.
- [115] Christian S Fischer. Infrared properties of QCD from Dyson–Schwinger equations. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 32(8):R253–R291, June 2006.
- [116] C.D. Roberts. Hadron properties and Dyson–Schwinger equations. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 61(1):50–65, July 2008.
- [117] A. C. Aguilar, D. Binosi, and J. Papavassiliou. Gluon and ghost propagators in the Landau gauge: Deriving lattice results from Schwinger-Dyson equations. *Physical Review D*, 78(2), July 2008.
- [118] Arlene C. Aguilar and Joannis Papavassiliou. Non-perturbative QCD effective charges. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 199(1):172–177, 2010. Proceedings of the International Workshop Light Cone 2009 (LC2009): Relativistic Hadronic and Particle Physics.
- [119] A. C. Aguilar, D. Binosi, and J. Papavassiliou. Gluon mass generation in the presence of dynamical quarks. *Physical Review D*, 88(7), October 2013.
- [120] Ian C. Cloët and Craig D. Roberts. Explanation and prediction of observables using continuum strong QCD. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 77:1–69, July 2014.
- [121] A. C. Aguilar, D. Binosi, and J. Papavassiliou. The gluon mass generation mechanism: a concise primer, 2015.
- [122] A.C. Aguilar, M.N. Ferreira, C.T. Figueiredo, and J. Papavassiliou. Gluon mass scale through nonlinearities and vertex interplay. *Physical Review D*, 100(9), November 2019.
- [123] Markus Q. Huber. Correlation functions of Landau gauge Yang-Mills theory. *Phys. Rev. D*, 101:114009, 2020.
- [124] A. C. Aguilar, M. N. Ferreira, and J. Papavassiliou. Gluon dynamics from an ordinary differential equation. *Eur. Phys. J. C*, 81(1):54, 2021.
- [125] A. C. Aguilar, M. N. Ferreira, and J. Papavassiliou. Exploring smoking-gun signals of the Schwinger mechanism in QCD. *Phys. Rev. D*, 105:014030, Jan 2022.
- [126] Jan Horak, Friederike Ihssen, Joannis Papavassiliou, Jan M. Pawłowski, Axel Weber, and Christof Wetterich. Gluon condensates and effective gluon mass. *SciPost Phys.*, 13:042, 2022.
- [127] Gernot Eichmann and Jan M. Pawłowski. Studying mass generation for gluons. *SciPost Phys. Proc.*, page 018, 2022.
- [128] J. Papavassiliou. Emergence of mass in the gauge sector of QCD*. *Chinese Physics C*, 46(11):112001, November 2022.

- [129] Ulrich Ellwanger, Manfred Hirsch, and Axel Weber. The heavy quark potential from Wilson's exact renormalization group. *Eur. Phys. J. C*, 1(3):563–578, 1998.
- [130] Christian S. Fischer and Holger Gies. Renormalization flow of Yang-Mills propagators. *Journal of High Energy Physics*, 2004(10):048, nov 2004.
- [131] Jan M. Pawłowski, Daniel F. Litim, Sergei Nedelko, and Lorenz von Smekal. Infrared Behavior and Fixed Points in Landau-Gauge QCD. *Physical Review Letters*, 93(15), October 2004.
- [132] Holger Gies. *Introduction to the Functional RG and Applications to Gauge Theories*, page 287–348. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [133] Jens Braun. Fermion interactions and universal behavior in strongly interacting theories. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 39(3):033001, January 2012.
- [134] N. Dupuis, L. Canet, A. Eichhorn, W. Metzner, J.M. Pawłowski, M. Tissier, and N. Wschebor. The nonperturbative functional renormalization group and its applications. *Physics Reports*, 910:1–114, May 2021.
- [135] G. Colangelo, S. Dürr, A. Jüttner, L. Lellouch, H. Leutwyler, V. Lubicz, S. Necco, C. T. Sachrajda, S. Simula, A. Vladikas, U. Wenger, and H. Wittig. Review of lattice results concerning low-energy particle physics. *The European Physical Journal C*, 71(7), July 2011.
- [136] Christof Gattringer and Christian B. Lang. *Quantum Chromodynamics on the Lattice: An Introductory Presentation*, volume 788 of *Lecture Notes in Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [137] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields, Volume 2: Modern Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [138] Ph. Boucaud, M. Brinet, F. De Soto, V. Morenas, O. Pène, K. Petrov, and J. Rodríguez-Quintero. Three-gluon running coupling from lattice QCD at $N_f = 2 + 1 + 1$: a consistency check of the OPE approach. *Journal of High Energy Physics*, 2014(4), April 2014.
- [139] V.N. Gribov. Quantization of non-Abelian gauge theories. *Nuclear Physics B*, 139(1):1–19, 1978.
- [140] N. Vandersickel and Daniel Zwanziger. The Gribov problem and QCD dynamics. *Physics Reports*, 520(4):175–251, November 2012.
- [141] I. M. Singer. Some remarks on the Gribov ambiguity. *Communications in Mathematical Physics*, 60(1):7–12, 1978.
- [142] A. Cucchieri and T. Mendes. Constraints on the infrared behavior of the ghost propagator in Yang-Mills theories. *Phys. Rev. D*, 78:094503, Nov 2008.
- [143] I.L. Bogolubsky, E.-M. Ilgenfritz, M. Müller-Preussker, and A. Sternbeck. Lattice gluodynamics computation of Landau-gauge Green's functions in the deep infrared. *Physics Letters B*, 676(1–3):69–73, June 2009.
- [144] A. Cucchieri and T. Mendes. Landau-gauge propagators in yang-mills theories at $\beta = 0$: Massive solution versus conformal scaling. *Phys. Rev. D*, 81:016005, Jan 2010.
- [145] O. Oliveira, A. G. Duarte, D. Dudal, and P. J. Silva. Gluon and Ghost Dynamics from Lattice QCD. *Few Body Syst.*, 58(2):99, 2017.

- [146] A. Athenodorou, Ph. Boucaud, F. De Soto, J. Rodríguez-Quintero, and S. Zafeiropoulos. Gluon green functions free of quantum fluctuations. *Physics Letters B*, 760:354–358, 2016.
- [147] Jan de Boer, Kostas Skenderis, Peter van Nieuwenhuizen, and Andrew Waldron. On the renormalizability and unitarity of the Curci-Ferrari model for massive vector bosons. *Physics Letters B*, 367(1–4):175–182, January 1996.
- [148] Stefan Strauss, Christian S. Fischer, and Christian Kellermann. Analytic Structure of the Landau-Gauge Gluon Propagator. *Phys. Rev. Lett.*, 109:252001, Dec 2012.
- [149] Patrick O. Bowman, Urs M. Heller, Derek B. Leinweber, Maria B. Parappilly, André Sternbeck, Lorenz von Smekal, Anthony G. Williams, and Jianbo Zhang. Scaling behavior and positivity violation of the gluon propagator in full QCD. *Phys. Rev. D*, 76:094505, Nov 2007.
- [150] Attilio Cucchieri, Tereza Mendes, and Andre R. Taurines. Positivity violation for the lattice Landau gluon propagator. *Physical Review D*, 71(5), March 2005.
- [151] G Parisi and Roberto Petronzio. On low energy tests of QCD. *Phys. Lett. B*, 94:51–53, 1980.
- [152] F. Halzen, G. Krein, and A. A. Natale. Relating the QCD pomeron to an effective gluon mass. *Phys. Rev. D*, 47:295–298, Jan 1993.
- [153] M. B. Gay Ducati, F. Halzen, and A. A. Natale. Diffraction and the gluon mass. *Phys. Rev. D*, 48:2324–2328, Sep 1993.
- [154] J.R. Cudell and B.U. Nguyen. A consistent next-to-leading-order QCD calculation of hadronic diffractive scattering. *Nuclear Physics B*, 420(3):669–694, June 1994.
- [155] J.H. FIELD. Are gluons massive? *International Journal of Modern Physics A*, 09(18):3283–3306, 1994.
- [156] Jueping Liu and Werner Wetzel. Gluon-mass effects in quarkonia decays, e^+e^- annihilation and the scalar glueball current, 1996.
- [157] M. Consoli and J. H. Field. Effective gluon mass and the determination of α_s from $\frac{J}{\psi}$ and Υ branching ratios. *Phys. Rev. D*, 49:1293–1301, Feb 1994.
- [158] M Consoli and J H Field. Relativistic versus gluon mass effects: the role of $1/Q$ corrections in quarkonia decays. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 23(1):41, Jan 1997.
- [159] J. R. Forshaw, J. Papavassiliou, and C. Parrinello. Massive Yang-Mills model and diffractive scattering. *Phys. Rev. D*, 59:074008, Feb 1999.
- [160] A Mihara and A.A Natale. Dynamical gluon mass corrections in heavy quarkonia decays. *Physics Letters B*, 482(4):378–382, June 2000.
- [161] J. H. Field. Phenomenological analysis of gluon mass effects in inclusive radiative decays of the j/ψ and Υ . *Phys. Rev. D*, 66:013013, Jul 2002.
- [162] Wei-Shu Hou, Ching-Shan Luo, and Gwo-Guang Wong. Glueball states in a constituent gluon model. *Phys. Rev. D*, 64:014028, Jun 2001.
- [163] E. G. S. Luna, A. F. Martini, M. J. Menon, A. Mihara, and A. A. Natale. Influence of a dynamical gluon mass in the pp and $\bar{p}p$ forward scattering. *Phys. Rev. D*, 72:034019, Aug 2005.

- [164] Stanisław D. Glazek, María Gómez-Rocha, Jai More, and Kamil Serafin. Renormalized quark–antiquark hamiltonian induced by a gluon mass ansatz in heavy-flavor QCD. *Physics Letters B*, 773:172–178, 2017.
- [165] U. Reinosa, J. Serreau, M. Tissier, and N. Wschebor. How nonperturbative is the infrared regime of Landau gauge Yang-Mills correlators? *Physical Review D*, 96(1), July 2017.
- [166] U. Reinosa, J. Serreau, M. Tissier, and N. Wschebor. Deconfinement transition in SU(2) Yang-Mills theory: A two-loop study. *Phys. Rev. D*, 91:045035, Feb 2015.
- [167] U. Reinosa, J. Serreau, M. Tissier, and N. Wschebor. Two-loop study of the deconfinement transition in Yang-Mills theories: SU(3) and beyond. *Phys. Rev. D*, 93:105002, May 2016.
- [168] Urko Reinosa. A perturbative approach to the confinement-deconfinement phase transition. *EPJ Web of Conferences*, 129:00032, 2016.
- [169] J. Maelger, U. Reinosa, and J. Serreau. Universal aspects of the phase diagram of QCD with heavy quarks. *Phys. Rev. D*, 98:094020, Nov 2018.
- [170] Victor Tomas Mari Surkau and Urko Reinosa. Deconfinement transition within the Curci-Ferrari model: Renormalization scale and scheme dependences. *Phys. Rev. D*, 109:094033, May 2024.
- [171] F. C. Sobrinho, L. M. Abreu, C. A. Bertulani, and F. S. Navarra. Production of meson molecules in ultraperipheral heavy ion collisions. *Phys. Rev. D*, 110(3):034037, 2024.
- [172] Yubing Dong, Amand Faessler, Thomas Gutsche, Sergey Kovalenko, and Valery E. Lyubovitskij. $X(3872)$ as a hadronic molecule and its decays to charmonium states and pions. *Phys. Rev. D*, 79:094013, May 2009.
- [173] Thomas Gutsche, Tanja Branz, Amand Faessler, Ian Woo Lee, and Valery E. Lyubovitskij. Hadron molecules. *Chinese Physics C*, 34(9):1185, sep 2010.
- [174] Qian Wang, Christoph Hanhart, and Qiang Zhao. Decoding the Riddle of $Y(4260)$ and $Z_c(3900)$. *Physical Review Letters*, 111(13), September 2013.
- [175] M. Cleven, F. K. Guo, C. Hanhart, and U. G. Meißner. Bound state nature of the exotic z_b states. *The European Physical Journal A*, 47(10), October 2011.
- [176] You-You Lin, Ji-Ying Wang, and Ailin Zhang. $X(3872)$ and hidden charmed tetraquarks, 2025.
- [177] D. Ebert, R. N. Faustov, and V. O. Galkin. Excited heavy tetraquarks with hidden charm. *The European Physical Journal C*, 58(3):399–405, October 2008.
- [178] L. Maiani, F. Piccinini, A.D. Polosa, and V. Riquer. $Z(4430)$ and a new paradigm for spin interactions in tetraquarks. *Physical Review D*, 89(11), June 2014.
- [179] H.-X. Chen, L. Maiani, A. D. Polosa, and V. Riquer. $Y(4260) \rightarrow \gamma + X(3872)$ in the diquarkonium picture. *The European Physical Journal C*, 75(11), November 2015.
- [180] Hongxia Huang, Chengrong Deng, Xuejie Liu, Yue Tan, and Jialun Ping. Tetraquarks and Pentaquarks from Quark Model Perspective. *Symmetry*, 15(7), 2023.
- [181] D. R. Entem, F. Fernández, P. G. Ortega, and J. Segovia. The Constituent Quark Model, 2025.
- [182] Woosung Park and Su Hounng Lee. Color spin wave functions of heavy tetraquark states. *Nuclear Physics A*, 925:161–184, May 2014.

- [183] Ze-Hua Cao, Wei He, and Zhi-Feng Sun. Z_{CS} states and the mixture of hadronic molecule and diquark-anti-diquark components within effective field theory. *Physical Review D*, 107(1), January 2023.
- [184] V. O. Galkin and E. M. Savchenko. Relativistic description of asymmetric fully heavy tetraquarks in the diquark–antidiquark model. *The European Physical Journal A*, 60(5), May 2024.
- [185] V. V. Kiselev, A. K. Likhoded, O. N. Pakhomova, and V. A. Saleev. Mass spectra of doubly heavy $\omega_{QQ'}$ baryons. *Physical Review D*, 66(3), August 2002.
- [186] E. Santopinto. Diquark Correlations in Baryons: The Interacting Quark Diquark Model. In *Proceedings of the 10th International Workshop on the Physics of Excited Nucleons (NSTAR2015)*. Journal of the Physical Society of Japan, May 2016.
- [187] Mauro Anselmino, Enrico Predazzi, Svante Ekelin, Sverker Fredriksson, and D. B. Lichtenberg. Diquarks. *Rev. Mod. Phys.*, 65:1199–1233, Oct 1993.
- [188] Vinícius S. Silva, Cássio Pigozzo, and Luciano M. Abreu. Fully-heavy tetraquarks in the vacuum and in a hot environment. *The European Physical Journal C*, 85(7), July 2025.
- [189] Sungsik Noh, Woosung Park, and Su Houn Lee. Doubly heavy tetraquarks ($qq'\bar{q}\bar{q}'$) in a nonrelativistic quark model with a complete set of harmonic oscillator bases. *Physical Review D*, 103(11), June 2021.
- [190] Sungsik Noh and Woosung Park. Nonrelativistic quark model analysis of T_{cc} . *Phys. Rev. D*, 108:014004, Jul 2023.
- [191] Shi-Yuan Li , Yan-Rui Liu , Zi-Long Man , Zong-Guo Si , and Jing Wu . $X(3960)$, $X(4140)$, and other compact states. *Chinese Physics C*, 48(6):063109, June 2024.
- [192] Xin-Yue Liu, Wen-Xuan Zhang, and Duojie Jia. Doubly heavy tetraquarks: Heavy quark bindings and chromomagnetically mixings. *Physical Review D*, 108(5), September 2023.
- [193] Pedro Bicudo. Tetraquarks and pentaquarks in lattice QCD with light and heavy quarks, 2022.
- [194] Wei-Lin Wu, Yan-Ke Chen, Lu Meng, and Shi-Lin Zhu. Benchmark calculations of fully heavy compact and molecular tetraquark states. *Physical Review D*, 109(5), March 2024.
- [195] William E. Caswell and G. Peter Lepage. Reduction of the Bethe-Salpeter equation to an equivalent Schrödinger equation, with applications. *Phys. Rev. A*, 18:810–819, Sep 1978.
- [196] Bastian B. Brandt. Spectrum of the open QCD flux tube and its effective string description, 2018.
- [197] M. Baker, P. Cea, V. Chelnokov, and et al. Isolating the confining color field in the SU(3) flux tube. *The European Physical Journal C*, 79, 2019.
- [198] David J. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Physics Textbook. Wiley, New York, NY, 2008.
- [199] Anaclara Álvarez. Espectro del charmonium y su relación con la masa del gluón. Tesis de maestría, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay, 2022. Facultad de Ciencias - PEDECIBA.
- [200] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, volume 3 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, 3 edition, 1977.
- [201] Johannes Eiglsperger. Quarkonium spectroscopy: Beyond one-gluon exchange. Diploma thesis, Technische Universität München, Munich, Germany, 2007.

- [202] Dieter Gromes. Effective hamiltonian for charmonium and similar two-fermion systems. *Nuclear Physics B*, 131(1):80–92, 1977.
- [203] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloe. *Quantum Mechanics*, volume 2. Wiley, New York, 1977.
- [204] Robert N. Cahn and J. David Jackson. Spin-orbit and tensor forces in heavy-quark light-quark mesons: Implications of the new D_s state at 2.32 gev. *Phys. Rev. D*, 68:037502, Aug 2003.
- [205] S. Navas et al. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, 110(3):030001, 2024.
- [206] V. R. Debastiani and F. S. Navarra. A non-relativistic model for the $[cc][\bar{c}\bar{c}]$ tetraquark. *Chinese Physics C*, 43(1):013105, January 2019.
- [207] D. M. Asner and *et al.* Observation of η'_c Production in γ Fusion at CLEO. *Physical Review Letters*, 92(14), April 2004.
- [208] D. Hatton, C. T. H. Davies, B. Galloway, J. Koponen, G. P. Lepage, and A. T. Lytle. Charmonium properties from lattice $QCD+QED$: Hyperfine splitting, J/ψ leptonic width, charm quark mass, and a_μ^c . *Phys. Rev. D*, 102(5):054511, 2020.
- [209] G. C. Donald, C. T. H. Davies, R. J. Dowdall, E. Follana, K. Hornbostel, J. Koponen, G. P. Lepage, and C. McNeile. Precision tests of the J/ψ from full lattice QCD: Mass, leptonic width, and radiative decay rate to η_c . *Physical Review D*, 86(9), November 2012.
- [210] Stefan Meinel. Bottomonium spectrum at order v^6 from domain-wall lattice QCD: Precise results for hyperfine splittings. *Phys. Rev. D*, 82:114502, Dec 2010.
- [211] B. Aubert and *et al.* Study of b Meson Decays with Excited η and η' mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 101:091801, Aug 2008.
- [212] G. Bonvicini et al. Measurement of the $\eta_b(1S)$ mass and the branching fraction for $Upsilon(3S) \rightarrow \gamma\eta_b(1S)$. *Phys. Rev. D*, 81:031104, 2010.
- [213] S. Dobbs, Z. Metreveli, A. Tomaradze, T. Xiao, and Kamal K. Seth. Observation of the $\eta_b(2S)$ Meson in $Y(2S) \rightarrow \gamma\eta_b(2S)$, $\eta_b(2S) \rightarrow$ Hadrons and Confirmation of the $\eta_b(1S)$ Meson. *Phys. Rev. Lett.*, 109:082001, Aug 2012.
- [214] R. Mizuk and *et al.* Evidence for the $\eta_b(2S)$ and observation of $h_b(1P) \rightarrow \eta_b(1S)\gamma$ and $h_b(2P) \rightarrow \eta_b(1S)\gamma$. *Phys. Rev. Lett.*, 109:232002, Dec 2012.
- [215] Jorge Segovia, Pablo G. Ortega, David R. Entem, and Francisco Fernández. Bottomonium spectrum revisited. *Physical Review D*, 93(7), 2016.
- [216] Sinéad M. Ryan and David J. Wilson. Excited and exotic bottomonium spectroscopy from lattice QCD. *Journal of High Energy Physics*, 2021(2), February 2021.
- [217] N. Brambilla and *et at.* Heavy quarkonium: progress, puzzles, and opportunities. *The European Physical Journal C*, 71(2), February 2011.
- [218] Estia J. Eichten and Chris Quigg. Mesons with beauty and charm: Spectroscopy. *Phys. Rev. D*, 49:5845–5856, Jun 1994.
- [219] L. X. Gutierrez-Guerrero, Jesus Alfaro, and A. Raya. Mass spectra of one or two heavy quark mesons and diquarks within a nonrelativistic potential model. *Int. J. Mod. Phys. A*, 36(24):2150171, 2021.
- [220] M. Blank and A. Krassnigg. Bottomonium in a Bethe-Salpeter-equation study. *Physical Review D*, 84(9), November 2011.

- [221] Chaitanya Anil Bokade and Azhothkaran Bhaghyesh. Predictions for bottomonium from a relativistic screened potential model. *Chinese Physics C*, 49(7):073102, jul 2025.
- [222] Gernot Eichmann, Christian S. Fischer, and Walter Heupel. Tetraquarks from the Bethe-Salpeter equation, 2015.
- [223] Nico Santowsky, Gernot Eichmann, Christian S. Fischer, Paul C. Wallbott, and Richard Williams. σ -meson: Four-quark versus two-quark components and decay width in a Bethe-Salpeter approach. *Phys. Rev. D*, 102:056014, Sep 2020.
- [224] S. Esau, A. Palameta, R.T. Kleiv, D. Harnett, and T.G. Steele. Axial vector cc and bb diquark masses from QCD Laplace sum rules. *Physical Review D*, 100(7), October 2019.
- [225] M. V. Carlucci, F. Giannuzzi, G. Nardulli, M. Pellicoro, and S. Stramaglia. AdS-QCD quark-antiquark potential, meson spectrum and tetraquarks. *The European Physical Journal C*, 57(3):569–578, August 2008.
- [226] D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin, and W. Lucha. Masses of tetraquarks with two heavy quarks in the relativistic quark model. *Physical Review D*, 76(11), December 2007.
- [227] Halil Mutuk. Nonrelativistic treatment of fully-heavy tetraquarks as diquark-antidiquark states. *The European Physical Journal C*, 81(4), April 2021.
- [228] Yong-Xing Song and Duo-Jie Jia . Mass spectra of doubly heavy tetraquarks in diquarkantidiquark picture*. *Communications in Theoretical Physics*, 75(5):055201, April 2023.
- [229] B. Blankleider and A. N. Kvinikhidze. Exact unified tetraquark equations. *Few-Body Systems*, 65(2):59, 2024.
- [230] C. Weiss, A. Buck, R. Alkofer, and H. Reinhardt. Diquark electromagnetic form factors in a nambu-jona-lasinio model. *Physics Letters B*, 312(1–2):6–12, August 1993.
- [231] Rudolf N. Faustov, Vladimir O. Galkin, and Elena M. Savchenko. Fully Heavy Tetraquark Spectroscopy in the Relativistic Quark Model. *Symmetry*, 14(12), 2022.
- [232] Qi-Fang Lü, Dian-Yong Chen, and Yu-Bing Dong. Masses of fully heavy tetraquarks $QQ\bar{Q}\bar{Q}$ in an extended relativized quark model. *The European Physical Journal C*, 80(9), September 2020.
- [233] Per Lundhammar and Tommy Ohlsson. Nonrelativistic model of tetraquarks and predictions for their masses from fits to charmed and bottom meson data. *Physical Review D*, 102(5), September 2020.
- [234] Guang-Juan Wang, Lu Meng, and Shi-Lin Zhu. Spectrum of the fully-heavy tetraquark state $QQ\bar{Q}\bar{Q}'$. *Phys. Rev. D*, 100:096013, Nov 2019.
- [235] Ting-Qi Yan, Wen-Xuan Zhang, and Duojie Jia. Mass spectra of hidden heavy-flavor tetraquarks with two and four heavy quarks. *The European Physical Journal C*, 83(9), September 2023.
- [236] A. Hayrapetyan and *et al.* Determination of the spin and parity of all-charm tetraquarks. *Nature*, 648(8092):58–63, December 2025.
- [237] Marcela Peláez. *Infrared correlation functions in Quantum Chromodynamics*. PhD thesis, 2015.
- [238] M. Baldicchi and G. M. Prosperi. Running coupling constant and masses in QCD: the meson spectrum. In A. V. Nefediev and W. Lucha, editors, *Quark Confinement and the Hadron Spectrum VI*, volume 892 of *AIP Conference Proceedings*, pages 332–334. American Institute of Physics, 2005.

- [239] E. B. Gregory, C. T. H. Davies, E. Follana, E. Gamiz, I. D. Kendall, G. P. Lepage, H. Na, J. Shigemitsu, and K. Y. Wong. Prediction of the B_c^* Mass in Full Lattice QCD. *Phys. Rev. Lett.*, 104:022001, Jan 2010.
- [240] Ciaran Hughes, Estia Eichten, and Christine T.H. Davies. Searching for beauty-fully bound tetraquarks using lattice nonrelativistic QCD. *Physical Review D*, 97(5), March 2018.