

TESIS DE MAESTRÍA

Conjuntos de Julia de medida positiva

Matías Carrasco
Orientador: Dr. Álvaro Rovella

Maestría en Matemática (PEDECIBA)
Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República Montevideo, Uruguay

15 de Agosto de 2008

Resumen

La *conjetura de medida cero* para los conjuntos de Julia con interior vacío ha sido uno de los problemas centrales en dinámica holomorfa en una dimensión. En este trabajo presentamos una solución al problema, basados en los recientes trabajos de A. Cheritat y X. Buff. Ésto fue la culminación de un programa iniciado por su orientador común, A. Douady a comienzos de los 90. La respuesta negativa a la conjetura crea nuevas preguntas y las técnicas desarrolladas tienen aplicaciones sobre una gran variedad de problemas en el área.

Palabras claves: dinámica compleja en una variable, conjunto de Julia, medida de Lebesgue.

Abstract

The *measure zero conjecture* for the Julia sets with empty interior has been one of the central problems in complex dynamics in one dimension. We present a solution to the problem, based on the recent work of A. Cheritat and X. Buff. This was the culmination of a program initiated by his common advisor, A. Douady at the beginnings of the 90's. The negative answer to the conjecture create new questions and the developed techniques have applications on a variety of diferent problems in the field.

Key words: complex dynamics in one variable, Julia set , Lebesgue measure.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi excelente orientador Álvaro Rovella por todo el apoyo tanto académico como humano que me brindó durante todo este período.

A Matilde Martínez y Aldo Portela por aceptar estar en el tribunal y participar con entusiasmo en los diferentes seminarios que hicimos.

A Juan Alonso, Diego Armentano, Alfonso Artigue, Joaquín Brum, Pablito Guarino, Mariana Haim, Jorge Iglesias, Pablito Lessa, Ezequiel Maderna, Richard Muniz, Alejandro Passeggi, Mariana Pereira, Rafael Potrie, Andrés Sambarino, Martín Sambarino, José Vieitez y Juliana Xavier por hacer la matemática una disciplina enormemente disfrutable y por ayudarme a comprenderla mejor. A los integrantes del «Arbeitsgemeinschaft mit aktuellem Thema: Julia Sets of Positive Measure» en Oberwolfach con quienes tuve la oportunidad de discutir, en un excelente clima profesional, sobre el trabajo.

A Peter Haissinsky porque desde la distancia estuvo siempre al tanto de mis avances en la maestría. A toda mi flía. que me apoyo siempre y me dio para adelante en todo momento.

Y principalmente al amor de mi vida, Lú, que me bancó todos estos años, me dio siempre para adelante y me acompañó hasta el fin.

Índice general

1. El problema	5
1.1. Introducción	5
1.2. Idea de la construcción	8
2. Control de la órbita periódica	13
2.1. Explosión parabólica	13
2.1.1. Funciones de explosión	13
2.1.2. Control de una órbita periódica	15
2.1.3. Desigualdad de Yoccoz	17
2.1.4. Estimación de R_{α_0}	18
2.2. Apéndice	21
2.2.1. I-Comportamiento asintótico de Γ_{α_0}	21
2.2.2. II-Prueba de la desigualdad de Yoccoz	25
3. Perturbación de discos de Siegel	30
3.1. Estimando la pérdida de área	30
3.1.1. Enunciado del Teorema	30
3.1.2. Comparando la dinámica con un campo vectorial adecuado	34
3.1.3. Renormalización	39
3.1.4. Apéndice	46
4. Control del conjunto poscrítico y promoción	53
4.1. Resultados preliminares: teorema de McMullen y control del conjunto poscrítico . .	53
4.2. Promoción	55
4.2.1. Enunciado	55
4.2.2. Demostración del lema 4.2.3	57
4.2.3. Apéndice	62

Capítulo 1

El problema

1.1. Introducción

La conjetura central en dinámica holomorfa en una dimensión es la siguiente:

Conjetura de Hiperbolicidad: En los mapas racionales de grado $d \geq 2$, el conjunto de los mapas hiperbólicos (o expansores en el Julia) es un abierto y denso.

La conjetura sigue abierta aún para el conjunto de los mapas polinomiales de grado $d \geq 2$, e inclusive para los polinomios cuadráticos $z \mapsto z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$.¹

En la familia cuadrática tenemos la siguiente dicotomía:

- J_c es conexo si $0 \in K_c$,
- J_c es un Cantor si $0 \notin K_c$.

donde K_c es el conjunto de Julia relleno. El conjunto de Mandelbrot es

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ es conexo}\}$$

El conjunto de parámetros J -estables para la familia cuadrática es: c_0 es J -estable si existe un entorno U de c_0 y una familia de homeomorfismos ϕ_c con $c \in U$ tal que:

- $\phi_c : J_{c_0} \rightarrow J_c$
- $\phi_c \circ f_{c_0} = f_c \circ \phi_c$, es decir conjuga f_{c_0} con f_c en el Julia.
- $\phi_{c_0} = id$ y para todo $z \in J_{c_0}$ la función $c \mapsto \phi_c(z)$ es holomorfa.

En su celebrado trabajo Mané-Sad-Sullivan [23] prueban que²

Teorema 1.1.1. *El conjunto de parámetros J -estables es abierto y denso.*

La relación entre los mapas hiperbólicos y los mapas J -estables no es del todo clara todavía. Por ejemplo, es conocido que los mapas hiperbólicos forman un subconjunto abierto y cerrado de los parámetros J -estables, pero no se sabe aún si los J -estables son hiperbólicos. En el caso cuadrático se puede ver que el $\partial\mathcal{M}$ es el complemento de los parámetros J -estables.

Se sabe que si una componente U del interior de $\mathcal{M}$ tiene un mapa hiperbólico, entonces todos los mapas de dicha componente son hiperbólicos, y una tal componente se llama *hiperbólica*. Un ataque al problema fue entonces ver que todas las componentes acotadas del interior de $\mathcal{M}$ son hiperbólicas. Del trabajo de [MSS], se sabe que

¹La parte de la conjetura que resiste una solución es la densidad.

²De hecho el teorema vale en cualquier familia analítica razonable de mapas racionales.

Teorema 1.1.2. *Sea U una componente no hiperbólica del interior de $\mathcal{M}$. Para que $f_c : z \mapsto z^2 + c$ esté en U es necesario y suficiente que, la medida del Julia de f_c sea positiva y que f_c tenga un campo de líneas invariante en el Julia.*

Un campo de líneas invariante en el Julia es una función $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ a valores en $S^1 \cup \{0\}$ (ctp), que verifica:

- $\mu(z) = \mu(f(z)) \cdot \frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)}$
- El soporte de μ tiene medida positiva y está contenido en el Julia.

En los ejemplos de Lattés, mapas racionales no polinomiales donde el conjunto de Fatou es vacío, es fácil encontrar un campo de líneas invariante -Ver [20]. La siguiente conjetura implica entonces la conjetura de hiperbolicidad,

Conjetura CLI: Los únicos mapas racionales que admiten un campo de líneas invariante son los ejemplos de Lattés.

De este modo comenzó a tomar importancia el estudio de la medida del conjunto de Julia. Entre los intentos por probar la no existencia de campos de líneas invariantes para los conjuntos de Julia, el primero fue

Conjetura de medida cero: El conjunto de Julia de un polinomio de grado $d \geq 2$ tiene medida de Lebesgue cero.

El conjunto de Julia o bien es toda la esfera $\hat{\mathbb{C}}$ o bien tiene interior vacío. La conjetura de medida cero se formulaba no sólo para mapas polinomiales sino que para todos los mapas racionales con Julia de interior vacío. La conjetura análoga para grupos Kleinianos también estaba abierta y el diccionario introducido por Sullivan [33] entre ambas teorías parecía vincular aún más las dos conjeturas. En el 2004 la conjetura para grupos Kleinianos fue probada. Para un tratamiento detallado de la conjetura en grupos Kleinianos ver [22].

Sin embargo los intentos de probar la conjetura sobre la medida del Julia siguieron un camino diferente y complejo. Es conocido que en los siguientes casos el conjunto Julia tiene medida cero:

- f_c es hiperbólico (más aun en este caso la dimensión de Hausdorff de J_c es menor que 2. [8, 12])
- f_c tiene un ciclo parabólico. [12]
- f_c no tiene ciclos indiferentes y no es infinitamente renormalizable. [19]
- f_c tiene un ciclo linealizable (de Siegel) con multiplicador $e^{2\pi i\theta}$ y (ver [28, 30])

$$\theta = [a_1, a_2, \dots] \text{ con la condición aritmética } \log a_n = O(\sqrt{n})$$

Trabajaremos siempre con la siguiente notación. Si $\theta \in \mathbb{R}$ denotamos por $\theta = [a_1, a_2, \dots]$ su desarrollo en fracción continua. Los ciclos indiferentes irracionales (con multiplicador $e^{2\pi i\theta}$ con θ irracional) se clasifican en linealizables o de Siegel y en no linealizables o de Cremer. El primer caso se diferencia del segundo por el hecho del ciclo pertenecer al conjunto de Fatou. La contraparte aritmética de esta dicotomía no es todavía clara en general, pero si en el caso cuadrático.

Más precisamente, supongamos que f_c tiene un punto fijo indiferente irracional de multiplicador $e^{2\pi i\theta}$ con $\theta = [a_1, a_2, \dots]$. Denotamos por $\frac{p_n}{q_n} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$ las aproximaciones racionales de

θ dadas por su fracción continua. Entonces (ver [2, 4, 36]) f_c es linealizable si y sólo si $B(\theta) < +\infty$, donde B es la función de Brjuno

$$B(\theta) = \sum_{n \geq 1} \frac{\log q_{n+1}}{q_n}$$

Todo número θ tal que $B(\theta) < +\infty$ se dice *de Brjuno*. Dentro de los números de Brjuno están los números *diofantinos*, es decir aquellos para los cuales existen constantes $C > 0$ y $\kappa \geq 2$ tales que

$$\left| \frac{p}{q} - \theta \right| \geq \frac{C}{q^\kappa}, \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

De particular importancia serán para nosotros los números diofantinos de orden 2, esto es, cuando $\kappa = 2$. Éstos se caracterizan también por el hecho de tener coeficientes acotados en su fracción continua:

$$\sup_i a_i < +\infty$$

y por eso se los llama *de tipo acotado*. Una buena referencia para la teoría de fracciones continuas es [18].

En la década de los 90, empezaron de forma independiente, por un lado Douady y por el otro Nowicki y Van Striend, la búsqueda de conjuntos de Julia de medida positiva. A diferencia de Douady, que buscaba un contraejemplo dentro de la familia cuadrática, N-VS buscaban contraejemplos para polinomios de grado muy grande. En el año 94, N-VS anunciaron la construcción de un contraejemplo [26]. Sin embargo al poco tiempo, X. Buff encontró un error importante en la construcción de N-VS, lo que dejó nuevamente la conjetura sin respuesta. El plan de Douady fue buscar dentro de los polinomios no linealizables, es decir de Cremer. En su tesis de doctorado A. Cheritat [9] (orientado por Douady) consiguió avances importantes en la búsqueda de polinomios cuadráticos con un punto fijo de Cremer y Julia de medida positiva. Su trabajo tenía también una buena base empírica con experiencias numéricas que confirmaban ciertas hipótesis que hacían plausible la construcción.

Douady falleció repentinamente a fines del año 2006, pero antes anunciaba junto con X. Buff y A. Cheritat la validez de la construcción, dando así una respuesta negativa y definitiva a la conjetura de medida cero. No sólo probaron la existencia de polinomios cuadráticos de Cremer con Julia de medida positiva, sino también la existencia de polinomios cuadráticos de Siegel con conjuntos de Julia de medida positiva.

La construcción se basa en trabajos anteriores y recientes de varios investigadores del área. A su vez, las técnicas introducidas por Buff-Cheritat-Douady dieron nueva luz sobre una gran variedad de diferentes problemas y demostraciones alternativas a otros ya resueltos. Ver [1, 3, 4]. Entre éstos se destaca por ejemplo la existencia de polinomios cuadráticos con un disco de Siegel de borde C^∞ .

La solución de la conjetura plantea otros problemas. Por ejemplo, no queda clara la relación de la medida del conjunto de Julia y las propiedades aritméticas del multiplicador, ni cuán grande es el conjunto de polinomios cuadráticos con Julia de medida positiva. Si bien sabemos ahora que existen conjuntos de Julia de medida positiva, las conjeturas de hiperbolicidad y de no existencia de campo de líneas invariante siguen abiertas.

La existencia de mapas cuadráticos con Julia de medida positiva, implica indirectamente la existencia en cualquier «Mandelbrot-like family», debido a los trabajos de Douady-Hubbard [13]. Sin embargo es de interés saber hasta qué punto la construcción de B-C-D puede extenderse a familias más generales, como por ejemplo

$$P_{\lambda,d} : z \mapsto \lambda \cdot z \left(1 + \frac{z}{d} \right)^d, \quad d \geq 1$$

Las dificultades radican en extender los resultados en los que se basa la construcción, como por ejemplo el control del conjunto poscrítico, consecuencia de los trabajos de Inou y Shishikura.

También plantea la siguiente (ver [2])

Conjetura: Todo polinomio cuadrático de Cremer tiene Julia de medida positiva.

Un posible ataque puede ser

Pregunta: ¿existe una constante $c > 0$ tal que para todo $\theta \in \mathbb{R}$, la medida del Julia relleno de $P_\theta : z \mapsto e^{2\pi i\theta} z + z^2$ es mayor que c ?

1.2. Idea de la construcción

Nuestra principal meta es probar el siguiente

Teorema 1.2.1. *Existen polinomios cuadráticos con un punto fijo de Cremer y tal que su conjunto de Julia tiene medida (de Lebesgue) positiva.*

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ denotamos por P_α el polinomio cuadrático

$$z \mapsto e^{2\pi i\alpha} z + z^2$$

Denotaremos también por K_α el conjunto de Julia relleno y J_α el conjunto de Julia ($J_\alpha = \partial K_\alpha$) de P_α .

La idea es construir inductivamente una sucesión de parámetros θ_i (reales), de forma tal que los respectivos conjuntos de Julia relleno, K_{θ_i} , tengan medida acotada inferiormente por una constante positiva. Si construimos esta sucesión de parámetros de forma que converjan a un límite θ , con P_θ no linealizable (es decir, de Cremer), el conjunto de Julia J_θ tendrá medida positiva. Esto es debido a la semicontinuidad superior de la función $\alpha \mapsto m(K_\alpha)$.

$$\underbrace{K_{\theta_0} \longrightarrow K_{\theta_1} \longrightarrow K_{\theta_2} \longrightarrow \cdots}_{\text{Medida acotada por abajo}} \longrightarrow \underbrace{K_\theta = J_\theta}_{\text{no linealizable}}$$

De esta forma, el problema queda reducido a estudiar el paso inductivo de la construcción. Es decir, necesitamos de un paso inductivo que nos permita pasar de un parámetro θ_i al siguiente, con el cuidado de que las siguientes imposiciones se verifiquen:

- la pérdida de área es arbitrariamente pequeña en el pasaje $\theta_i \rightarrow \theta_{i+1}$.
- como queremos un límite no linealizable, debemos agregar (y asegurarnos de su persistencia) las obstrucciones a una tal linealización. Una forma de hacer ésto es con ciclos periódicos³. Es decir, debemos controlar la existencia y persistencia de órbitas periódicas arbitrariamente cerca de 0 en cada paso.

Resumimos entonces la estrategia en el siguiente enunciado

Proposición 1.2.2 (Paso inductivo). *Existe un conjunto no vacío S de números irracionales de tipo acotado con la siguiente propiedad: para todo $\alpha \in S$ y todo $\epsilon > 0$, existe $\alpha' \in S$ tal que*

³De hecho ésta es la única obstrucción a la linealizabilidad en el caso cuadrático.

- $|\alpha' - \alpha| < \epsilon$
- $P_{\alpha'}$ tiene un ciclo periódico contenido en $D^*(0, \epsilon)$.
- $m(K_{\alpha'}) \geq (1 - \epsilon) m(K_\alpha)$

El último punto es el más difícil. Por un lado tenemos

Lema 1.2.3. *La función $\alpha \mapsto m(K_\alpha)$ es semicontinua superiormente.*

Demostración. Es bien conocido que la función $\alpha \mapsto K_\alpha$ es semicontinua superiormente si consideramos la métrica de Hausdorff en los compactos de $\mathbb{C}$.⁴ Es decir, para todo abierto V tal que $K_\alpha \subset V$, existe $\delta > 0$ tal que si $|\alpha' - \alpha| < \delta$ entonces $K_{\alpha'} \subset V$. Ver [11].

Por otro lado tenemos que

$$m(K_\alpha) = \inf \{m(V) : K_\alpha \subset V \text{ abierto}\}$$

Sea entonces $\alpha_n \rightarrow \alpha$ y λ es un punto límite de la sucesión $m(K_{\alpha_n})$. Tenemos que para todo $\epsilon > 0$, si n es suficientemente grande

$$m(K_{\alpha_n}) \leq m(V) < m(K_\alpha) + \epsilon$$

de donde $\lambda < m(K_\alpha) + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Luego

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} m(K_{\alpha_n}) \leq m(K_\alpha)$$

□

Sin embargo no es cierto en general que $m(K_{\alpha_n}) \rightarrow m(K_\alpha)$. Por lo que será necesario encontrar una forma de perturbar cada parámetro θ_i de forma tal que esta propiedad se cumpla. Es decir, el conjunto $\mathcal{S}$, debe por lo tanto ser «invariante» por un tipo especial de perturbaciones en donde tengamos continuidad en la medida del Julia relleno.

Empezemos probando el teorema 1.2.1 asumiendo el paso inductivo. Para ésto tomemos una sucesión $0 < \epsilon_n < 1$ tal que

$$\prod_{n \geq 1} (1 - \epsilon_n) > 0$$

Construimos la sucesión $\{\theta_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{S}$ de la siguiente manera:

- Primero elegimos arbitrariamente θ_0 en $\mathcal{S}$, y aplicamos el paso inductivo con θ_0 y ϵ_1 para obtener θ_1 .

Notar que existe un intervalo cerrado $I(\theta_1, \delta_1)$ (donde podemos tomar $\delta_1 \leq \epsilon_2$), tal que: todo polinomio P_θ con $\theta \in I(\theta_1, \delta_1)$, también tiene un ciclo periódico contenido en $D^*(0, \epsilon_1)$.⁵

Aplicando el paso inductivo, elegimos θ_2 tal que: $\theta_2 \in \text{int } I(\theta_1, \delta_1)$ y P_{θ_2} verifique los dos últimos puntos de la proposición 1.2.2.

- Hacemos lo mismo en cada paso, tomando $I(\theta_n, \delta_n) \subset \text{int } I(\theta_{n-1}, \delta_{n-1})$ y $\delta_n \leq \epsilon_{n+1}$.

De este modo obtenemos una sucesión $\{\theta_n\}$ que cumple para todo $n \geq 1$:

⁴De todos modos el estudio de la discontinuidad de esta aplicación es delicado, en donde se produce un fenómeno conocido con el nombre de «implosión parabólica».

⁵Ésto es posible porque el ciclo que tiene P_{θ_1} en $D^*(0, \epsilon_1)$ es necesariamente repulsor. Un polinomio cuadrático tiene a lo sumo un ciclo no repulsor, y $\theta_1 \in \mathbb{R}$.

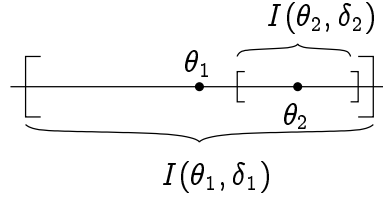


Figura 1.1: Intervalos $I(\theta_n, \delta_n)$.

- $|\theta_n - \theta_{n-1}| \leq \epsilon_n$, por lo que θ_n es una sucesión de Cauchy que tiene un cierto límite θ .
- $m(K_{\theta_n}) \geq (1 - \epsilon_n) \cdot m(K_{\alpha_{n-1}})$
- $\theta \in I(\theta_n, \delta_n)$, por lo que P_θ tiene un ciclo contenido en $D^*(0, \epsilon_n)$.

En particular, como $\epsilon_n \rightarrow 0$ el origen es acumulado por órbitas periódicas de P_θ y por lo tanto éste es un polinomio de Cremer. En éste caso sabemos que $J_\theta = K_\theta$, es decir, J_θ tiene interior vacío. Por otro lado tenemos

$$m(J_\theta) = m(K_\theta) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} m(K_\theta) \geq m(K_{\theta_0}) \cdot \prod_{n \geq 1} (1 - \epsilon_n) > 0$$

ya que P_{θ_0} tiene un disco de Siegel.

El control de la órbita periódica, se realiza mediante el uso de las «funciones de explosión». Éstas describen de forma explícita el fenómeno de «explosión parabólica», es decir, la bifurcación de un punto fijo parabólico (múltiple) en órbitas periódicas. Cuando el parámetro α es racional, entonces el origen es un punto fijo múltiple de un cierto iterado de P_α .⁶ Para los parámetros cercanos a α , este punto fijo se bifurca en varios puntos fijos de este iterado, es decir en órbitas periódicas. La primera parte del trabajo será establecer detalladamente la dependencia de dicho ciclo periódico con el parámetro. También necesitaremos estimar el radio de validez (cuan lejos podemos estar de α) de dicha dependencia.

Para ilustrar el uso de las funciones de explosión veamos lo siguiente. Supongamos que el parámetro θ es irracional. Todo racional p/q cercano a θ tiene definida su función de explosión. Si ahora elegimos un parámetro θ_1 irracional bien cerca de p/q , sabemos que P_{θ_1} tiene un ciclo cercano al origen. Más aún, según cuan cerca esté θ_1 de p/q , podemos controlar la distancia del ciclo de P_{θ_1} al origen.

Una forma cómoda de controlar estos parámetros es a través de su fracción continua. Es decir, podemos acercarnos al irracional $\theta = [a_1, a_2, \dots]$ por medio de las reducidas $p_n/q_n = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$. Si tomamos $\theta_1 = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, A, a_{n+1}, \dots]$, tenemos que la distancia entre θ_1 y p_n/q_n es una función de $\frac{1}{A}$. Más precisamente

$$\left| \theta_1 - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n(q_n(A + \theta_1(n)) + q_{n-1})}, \quad \theta_1(n) = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$$

La segunda parte del trabajo es estimar la pérdida de área. Supongamos que para el parámetro θ de arriba, P_θ tiene un disco de Siegel Δ . El perturbado P_{θ_1} también tendrá un disco de Siegel, que denotamos por Δ_1 . Veremos mediante una modificación de un procedimiento de renormalización (introducido por primera vez por Douady y Ghys, y luego mejorado por Yoccoz)⁷, que el disco Δ_1

⁶De P_α^q si $\alpha = p/q$.

⁷Ver [10, 36].



Figura 1.2: Disco de Siegel para $\alpha = [1, 1, 1, \dots]$ y para $[1, 1, 1, 1, 1, 2^8, 1, 1, \dots]$.

llena una buena proporción $\rho > 0$ del disco Δ . Es decir, si truncamos la fracción continua con n grande, entonces

$$\frac{m(\Delta_1 \cap \Delta)}{m(\Delta)} > \rho > 0$$

Si bien lo importante aquí es que $\rho > 0$, veremos que $\rho \geq \frac{1}{2}$.

El trabajo es entonces promover éste coeficiente ρ a un coeficiente 1. Ésto sólo es posible, teniendo en cuenta todo el Julia relleno K_{θ_1} . Esta promoción, se basa en dos ingredientes importantes. El primero es un teorema de McMullen, el cual afirma que los puntos de $\partial\Delta$ son puntos de densidad de Lebesgue del conjunto K_θ . En este punto encontramos ya una primera obstrucción técnica: es necesario restringir el tipo aritmético de θ , pues el teorema de McMullen requiere que θ sea de tipo acotado.

El segundo, es un resultado sobre el control del conjunto poscrítico. Aquí es quizás donde están las dificultades técnicas más grandes. La renormalización de Douady-Ghys-Yoccoz no es útil para trabajar con el conjunto poscrítico, ésta requiere que los mapas en cuestión sean univalentes. El control del conjunto poscrítico se obtiene a través de la renormalización parabólica introducida por Inou y Shishikura (ver [17]).

El control del conjunto poscrítico es necesario para poder transferir con una distorsión acotada, la buena densidad de K_θ y K_{θ_1} en $\partial\Delta$, a través de los iterados de P_θ y P_{θ_1} respectivamente. Para poder utilizar los resultados de Inou-Shishikura, necesitamos restringir aún más el tipo aritmético de θ . Éstos valen para irracionales de tipo acotado con coeficientes grandes. Es decir, cuando $a_i \geq N$ para todo i donde N es una constante, llamada *constante de Inou-Shishikura*.

Resumimos entonces la estrategia de la prueba en la siguiente versión detallada del paso inductivo. Denotaremos por

$$S_N := \left\{ \alpha := [a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : \sup_i a_i < +\infty \text{ y } \inf_i a_i \geq N \right\}$$

Proposición 1.2.4 (Versión detallada del paso inductivo). *Sean $\alpha \in S_N$ y $\epsilon > 0$. Existe un entero $A > 1$ tal que:*

- *si A_n es una sucesión de enteros con $\sqrt[n]{A_n} \rightarrow A$,*
- *$\alpha_n := [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, A_n, N, N, \dots]$*

Entonces para n suficientemente grande,

1. *P_{α_n} tiene un ciclo contenido en $D^*(0, \epsilon)$ y*
2. *$m(K_{\alpha_n}) \geq (1 - \epsilon)m(K_\alpha)$*

Notar que por ejemplo, con esta construcción obtenemos un parámetro límite, con Julia de medida positiva, que tiene un desarrollo en fracción continua de la forma,

$$\theta = [N, N, \dots, A_1, N, N, \dots, A_2, N, N, \dots]$$

donde la sucesión A_n crece rápidamente. Sin embargo, no sabemos ni cuán espaciados deben estar los A_n , ni cuán grande deben ser. Por otras referencias consultar [6, 7, 37].

Capítulo 2

Control de la órbita periódica

2.1. Explosión parabólica

2.1.1. Funciones de explosión

En esta sección vamos a estudiar como se bifurca una órbita periódica cerca de un punto fijo parabólico. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ denotamos por P_α el polinomio

$$z \mapsto z^2 + e^{2\pi i \alpha} z$$

Supongamos que $\alpha_0 = p/q$ con $(p, q) = 1$. Entonces 0 es un punto fijo parabólico de P_α . Por un lado sabemos que

$$P_{\alpha_0}^q(z) = z + C z^{r+1} + O(z^{r+2}), \quad z \rightarrow 0$$

con $C \neq 0$ y $r \geq 1$. El número r debe ser un múltiplo de q , esto es $r = kq$, y k es el número de ciclos formados por los diferentes pétalos asociados a 0. Como cada ciclo contiene un punto crítico de P_{α_0} , debe ser $k = 1$.

Es decir, 0 es un punto fijo de $P_{\alpha_0}^q$ de multiplicidad $q+1$. Tomemos un disco pequeño D centrado en 0, de forma tal que en D la ecuación $F_{\alpha_0}(z) = P_{\alpha_0}^q(z) - z = 0$ tenga exactamente $q+1$ soluciones. Si α es suficientemente cercano a α_0 , las curvas $F_{\alpha_0}(\partial D)$ y $F_\alpha(\partial D)$ tienen el mismo índice respecto de 0. Por lo tanto $P_\alpha^q(z) - z = 0$ tiene exactamente $q+1$ soluciones en D .

Si $q = 1$ esto nos dice que en D hay otro punto fijo además del cero, porque podemos tomar α suficientemente cerca de α_0 de modo que no sea entero.

Supongamos que $q > 1$. Como 0 es un punto fijo simple de $P_{\alpha_0}^i$ para $1 \leq i < q$, si D es chico y α está suficientemente cerca de α_0 , 0 es el único punto fijo de P_α^i en D para $1 \leq i < q$. Esto quiere decir que los $q+1$ puntos fijos de P_α^q se dividen en, 0 punto fijo de P_α más una órbita periódica de período q .

En ambos casos, para α cercano a α_0 , 0 se bifurca en un punto fijo más una órbita periódica de período q . Esta bifurcación es lo que llamamos *explosión parabólica*.

Para controlar este nuevo ciclo cercano a cero, debemos estudiar más finamente la dependencia de éste con el parámetro α . Eso es lo que vamos a hacer en esta sección.

Definición 2.1.1 (Tamano asintótico). Supongamos que $f(z) = z + Az^{k+1} + O(z^{k+2})$ es holomorfa en un entorno de 0, con $A \neq 0$. Definimos el *tamaño asintótico* de f en 0 como

$$T_\alpha(f, 0) = \left| \frac{1}{Ak} \right|^{1/k}$$

El nombre se debe (ver [9]) a que toda órbita z_n con $z_n \not\rightarrow 0$, verifica

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{n} z_n = v$$

donde $kAv^k = -1$ es un vector atractor. Tomando módulos vemos que

$$|z_n| \sim \frac{T_a(f, 0)}{\sqrt[k]{n}}, \quad n \rightarrow +\infty$$

Para cada racional p/q con $(p, q) = 1$ definimos

$$T_a(\alpha_0) = T_a\left(\frac{p}{q}\right) = T_a(P_{\alpha_0}^q, 0)$$

Para $q \geq 1$, denotamos por $\mathcal{P}_q$ el conjunto de los $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que P_α^q tiene un punto fijo de multiplicador 1. Denotamos también

$$R_{\alpha_0} = \text{dist}(\mathcal{P}_q - \{\alpha_0\}, \alpha_0)$$

Teorema 2.1.2 (Funciones de explosión). *Para cada α_0 existe una función holomorfa $\Gamma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ que verifica:*

- $\Gamma(0) = 0$ y $|\Gamma'(0)| = (2\pi q^2 R_{\alpha_0})^{1/q} T_a(\alpha_0)$ y
- para todo $\delta \in \mathbb{D}$ la imagen por Γ de

$$\{\delta, e^{2\pi i \alpha_0} \delta, \dots, e^{2\pi i (q-1) \alpha_0} \delta\}$$

es un ciclo de período q de P_α , donde $\alpha = \alpha_0 + R_{\alpha_0} \delta^q$.

Demostración. Consideremos la función analítica¹ $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$F(\alpha, z) = \begin{cases} \frac{P_\alpha^q(z) - z}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ e^{2\pi i q \alpha} - 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Sean $D = D(\alpha_0, R_{\alpha_0})$ y

$$X = \{(\alpha, z) \in D \times \mathbb{C} : F(\alpha, z) = 0\}$$

Denotaremos también por $\pi_1(\alpha, z) = \alpha$ y $\pi_2(\alpha, z) = z$ las proyecciones sobre cada variable.

Sea $(\alpha, z) \in X$ con $\alpha \neq \alpha_0$. Entonces $z \neq 0$, porque de lo contrario tendríamos $F(\alpha, 0) = e^{2\pi i q \alpha} - 1 = 0$, de donde 0 sería un punto fijo de multiplicador 1 para P_α^q y ésto contradice que $\alpha \in D$. Si ponemos $m = (P_\alpha^q)'(z)$, entonces

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\alpha, z) = \frac{m - 1}{z} \neq 0$$

de donde por función implícita, X es suave en (α, z) .

¹Uno podría tomar $F(\alpha, z) = P_\alpha^q(z) - z$. El problema es que la variedad algebraica definida por este polinomio tiene una singularidad en $(\alpha_0, 0)$. La prueba se puede hacer pero hay que utilizar técnicas de resolución de singularidades. De todos modos, parece más viable generalizar este enfoque algebraico a otras familias de polinomios que el que damos aquí.

Si $(\alpha_0, z) \in X$ con $z \neq 0$, entonces igual que antes $m \neq 1$, porque P_α puede tener a lo sumo un ciclo no repulsor (el 0 es parabólico). Falta ver que pasa en $(\alpha_0, 0)$.

La expansión de $F(\alpha, z)$ en $(\alpha_0, 0)$ es

$$F(\alpha_0 + \epsilon, z) = 2\pi i q \epsilon + A z^q + O(z^{q+1}) + O(\epsilon^2) + O(\epsilon z) \quad (*)$$

Entonces

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha_0, 0) = 2\pi i q$$

de donde X también es suave en $(\alpha_0, 0)$. En conclusión, cada componente de X es una superficie de Riemann.

Además $\pi_1 : X \rightarrow D$ es un mapa propio. Para ver esto, notar que si $(\alpha, z) \in X$ entonces z es un punto periódico de P_α^q . Existe una constante $M > 0$ independiente de $\alpha \in D$ tal que si $|w| > M$ entonces $w \in \mathbb{C} - K_\alpha$. Luego para todo $(\alpha, z) \in X$ tenemos que $|z| \leq M$.

Sea $(\alpha_n, z_n) \in X$ sin subsucesiones convergentes en X , pero con $\alpha_n \rightarrow \alpha \in D$. Entonces (pasando a una subsucesión) $z_n \rightarrow z \in \mathbb{C}$ y

$$0 = F(\alpha_n, z_n) \rightarrow F(\alpha, z)$$

lo cual implica que $(\alpha, z) \in X$ que es imposible.

Sea Y la componente conexa de X que contiene a $(\alpha_0, 0)$. Entonces $\pi_1 : Y \rightarrow D$ es también propia y es fácil ver con lo que hicimos arriba que el único punto ramificado de π_1 es $(\alpha_0, 0)$. Esto implica que Y es simplemente conexa.

Sea $\phi : \mathbb{D} \rightarrow Y$ un isomorfismo conforme que manda 0 a $(\alpha_0, 0)$. El mapa $\pi_1 \circ \phi : \mathbb{D} \rightarrow D$ es un cubrimiento ramificado con un único punto de ramificación en 0. Entonces existe $n \geq 1$ tal que

$$\pi_1 \circ \phi(\delta) = \alpha_0 + R_{\alpha_0} \delta^n$$

Sea $\Gamma = \pi_2 \circ \phi$. Si ponemos $\Gamma(\delta) = \Gamma'(0)\delta + O(\delta^2)$, por * tenemos que

$$0 = F(\phi(\delta)) = 2\pi i q R_{\alpha_0} \delta^n + A \Gamma'(0)^q \delta^q + O(\delta^{q+1}) + O(\delta^{n+1})$$

Es fácil ver que esto implica $n = q$, y por lo tanto

$$\Gamma'(0)^q = \frac{-2\pi i q R_{\alpha_0}}{A}$$

Sea $\delta \in \mathbb{D}^*$ y $\alpha = \alpha_0 + R_{\alpha_0} \delta^q$. Entonces $(\alpha, P_\alpha(\Gamma(\delta))) \in X$, y como tiende a cero cuando $\delta \rightarrow 0$ debe estar en Y . Luego

$$P_\alpha(\Gamma(\delta)) = \Gamma(e^{2\pi i k \alpha_0} \delta)$$

para algún k . Derivando a ambos lados es fácil ver que $k = 1$. □

2.1.2. Control de una órbita periódica

Sea $\alpha = [a_1, a_2, \dots]$ un número de Brjuno. Es decir, el polinomio P_α es linealizable en 0 y denotamos por Δ su disco de Siegel. Es conocido que un tal polinomio es un punto de discontinuidad para el conjunto de Julia en el espacio de parámetros. Nos interesa estudiar en esta sección y a lo largo del trabajo un tipo particular de perturbaciones de éste.

Denotemos por $p_n/q_n = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$ las aproximaciones dadas por el desarrollo en fracción continua de α . Como vimos, los polinomios P_{p_n/q_n} tienen un punto fijo parabólico en 0, y podemos

controlar la aparición de un ciclo periódico cerca de 0 mediante las funciones de explosión $\Gamma_n = \Gamma_{p_n/q_n}$.²

Consideremos α_n a distancia menor que $R_n = R_{p_n/q_n}$ de p_n/q_n . Si δ_n es una raíz q_n -ésima de $\alpha_n - p_n/q_n$, entonces

$$\Gamma_n \left(\frac{\delta_n}{R_n^{1/q_n}} \right)$$

es un punto periódico de período q_n de P_{α_n} .

Queremos encontrar un parámetro α_n como arriba, que además cumpla:

- P_{α_n} es linealizable en 0,
- P_{α_n} tiene un ciclo de período q_n cerca de 0 y
- α_n tiende a α .

Una forma de hacer ésto es la siguiente. Sea A un entero positivo, truncamos la fracción continua de α de la siguiente manera:

$$\alpha_n = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, A, \dots]$$

Los coeficientes posteriores a A no son importantes por ahora y tenemos libertad para elegirlos. Queremos que P_{α_n} sea linealizable. Si $\theta = [t_1, t_2, \dots]$ es otro número de Brjuno cualquiera, podemos tomar entonces

$$\alpha_n = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, A + \theta] = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, A, t_1, t_2, \dots]$$

Es claro que α_n tiende a α . La distancia de α_n a p_n/q_n es

$$\left| \alpha_n - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{q_n(q_n(A + \theta) + q_{n-1})} \right|$$

Para asegurarnos la existencia del ciclo periódico, necesitamos controlar cuan rápido tiende R_n a cero. Veremos más adelante queo $R_n^{1/q_n} \rightarrow 1$ de donde

$$|\delta_n| \sim \frac{1}{|A + \theta|^{1/q_n}}$$

cuando n es grande. Por un lado vamos a dejar θ fijo, y en lugar de A tomamos A^{q_n} . De este modo,

$$|\delta_n| \sim \frac{1}{A}, \quad n \text{ grande}$$

Es decir, para n grande, la distancia del ciclo periódico de P_{α_n} es aproximadamente $1/A$. Resumimos ésto en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.3. *Sean α y θ números de Brjuno. Para $A \geq 1$ entero denotamos por $A_n = A^{q_n}$ y ponemos*

$$\alpha_n = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, A_n, t_1, t_2, \dots]$$

Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe A tal que para n suficientemente grande, P_{α_n} tiene un ciclo periódico contenido en $D^(0, \epsilon)$.*

²La función de explosión en un multiplicador racional $\frac{p}{q}$ no está univocamente determinada, pero todas ellas difieren en la precomposición con la rotación de ángulo $2\pi k \frac{p}{q}$ para algún $k = 0, 1, \dots, q-1$.

Para la demostración necesitamos además conocer las propiedades asintóticas de las funciones Γ_n cuando $n \rightarrow +\infty$. Veremos en las secciones siguientes que todo punto límite de la sucesión Γ_n , es un isomorfismo conforme $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \Delta$.³

Demostración. Sea C_n el conjunto formado por las raíces q_n -ésimas de $\alpha_n - p_n/q_n$. Por lo que vimos antes

$$C_n \rightarrow C_A = \left\{ |z| = \frac{1}{A} \right\}$$

en la métrica de Hausdorff.

Para cada n , tomamos Γ_n una función explosión en p_n/q_n y $\lambda_n = \Gamma'_n(0)$. Sabemos que $|\lambda_n| \rightarrow r(\alpha)$ el radio conforme de Δ en 0, y que al normalizar de la siguiente forma

$$\phi_n(\delta) = \Gamma_n \left(\frac{\delta}{\lambda_n} \right)$$

la sucesión de mapas ϕ_n converge localmente uniforme al isomorfismo conforme $\phi : D(0, r(\alpha)) \rightarrow \Delta$, que fija 0 con derivada uno.

Sea $\delta > 0$ tal que $\phi(D_\delta) \subset D_{\epsilon/2}$. Como $\lambda_n C_n \rightarrow C_{\frac{r(\alpha)}{A}}$, para n suficientemente grande tenemos

$$\phi_n(\lambda_n C_n) = \Gamma_n(C_n) \subset D_\epsilon$$

si $A > \frac{2r(\alpha)}{\delta}$.

□

Notar que P_{α_n} también es linealizable en 0. Denotemos por Δ_n su disco de Siegel. Como Δ_n debe esquivar este ciclo periódico cercano a cero, uno podría pensar que este ciclo restringe el tamaño de Δ_n . Como veremos en el próximo capítulo, esto no es tan así.

2.1.3. Desigualdad de Yoccoz

Para estimar el radio R_{α_0} que está relacionado con la derivada en 0 de las funciones Γ_{α_0} utilizaremos la *desigualdad de Yoccoz*. Ésta relaciona el multiplicador de un punto fijo repulsor con la cantidad de rayos externos que aterrizan sobre él.

Consideremos un polinomio mónico de grado $d \geq 2$

$$P(z) = z^d + \cdots + a_0$$

Suponemos aquí que el conjunto de Julia relleno K_P es conexo y que z_0 es un punto fijo repulsor de multiplicador λ . Como K_P es conexo, tenemos que las coordenadas de Botcher están definidas en todo $\mathbb{C} - K_P$. Es decir, existe un isomorfismo $\phi : \mathbb{C} - K_P \rightarrow \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}$ tangente a la identidad en el infinito tal que $\phi(P(z)) = (\phi(z))^d$.

Decimos que R_t es un rayo externo de ángulo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ si

$$R = \phi^{-1}\{re^{2\pi it} : r > 1\}$$

Notar que la acción de P sobre los rayos externos está dada por

$$P(R_t) = R_{dt}$$

³De hecho para la demostración necesitamos sólo la compacidad de la familia.

La función de Green de K_P con polo en el infinito está dada por $G(z) = \log |\phi(z)|$ y por lo tanto verifica $G(P(z)) = dG(z)$. Notar que las semirectas $re^{2\pi it}$ con $r > 1$ son geodésicas en la métrica hiperbólica de $\mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}$, por lo que R es una geodésica en la métrica hiperbólica de $\mathbb{C} - K_P$. Las curvas de nivel de G son ortogonales a los rayos externos y decimos que R aterriza en un punto $z \in J_P$ si existe el límite

$$\lim_{r \rightarrow 1} \phi^{-1}(re^{2\pi it})$$

y es igual a z .

Para una discusión detallada de esto recomendamos [24]. Para lo que sigue necesitamos del siguiente resultado.

Lema 2.1.4. *Supongamos que al menos un rayo externo periódico aterriza sobre z_0 ⁴. Entonces la cantidad de rayos que aterrizan sobre z_0 es finita, son todos periódicos y con el mismo período. Más aún, si numeramos los rayos de la forma $R_{t(i)}$ con los ángulos $t(i)$ ordenados*

$$0 \leq t(0) < t(1) < \dots < t(q' - 1) < 1$$

entonces existe un único entero $0 \leq p' < q'$, tal que $P(R_{t(i)}) = R_{t(j)}$ con $j \equiv i + p' \pmod{q'}$.

De este modo si $m = (p', q')$ con $p' = mp$ y $q' = mq$, tenemos m ciclos de rayos periódicos de período q que se ordenan como una órbita de la rotación de ángulo $\frac{p}{q}$. Decimos que $\frac{p}{q}$ es el *número de rotación combinatorio* de z_0 .

Teorema 2.1.5 (Desigualdad de Yoccoz). *Con las notaciones de arriba tenemos que*

$$\frac{mq}{\log d} \leq \frac{2\operatorname{Re}(\tau)}{|\tau - 2\pi i \frac{p}{q}|^2}$$

donde τ es una rama adecuada de $\log \lambda$.

Es decir, para una elección adecuada de τ , éste pertenece al disco de radio $\frac{\log d}{mq}$ tangente al eje imaginario en el punto $2\pi i \frac{p}{q}$.

El contenido de esta desigualdad es de naturaleza geométrica aunque no lo parezca a primera vista. En efecto es una desigualdad entre módulos, áreas y números de vueltas. Para el lector interesado incluimos un apéndice a este capítulo con la demostración de la desigualdad.

2.1.4. Estimación de R_{α_0}

En ésta sección damos una cota inferior para R_{α_0} (Ver [9]). Es fácil ver que $R_{\alpha_0} \leq 1/q$, necesitamos entonces una cota que estime por debajo la velocidad con la que R_{α_0} tiende a cero a medida que q crece. Más precisamente,

Proposición 2.1.6. *Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $\alpha_0 = p/q$ se tiene*

$$R_{\alpha_0} \geq \frac{C}{q^3}$$

En particular

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} R_{p/q}^{1/q} = 1$$

⁴No es necesario suponer qué que z_0 es repulsor.

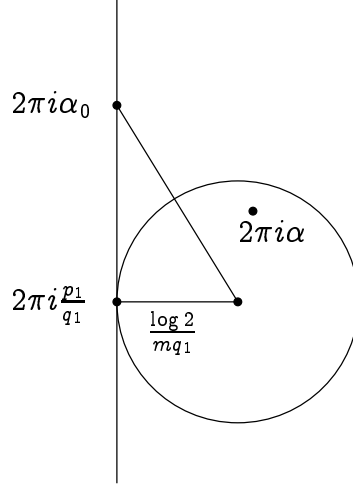


Figura 2.1: Estimación de $|\alpha - \alpha_0|$.

Demostración. Sea $\alpha_0 = p/q$ y sea $\alpha \in \mathbb{C}$, diferente de α_0 , tal que P_α^q tiene un punto fijo de multiplicador 1.

Primer caso: $q = 1$

Esto es, P_α tiene un punto fijo de multiplicador 1 y $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$. Si ponemos $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, entonces los puntos fijos de P_α son 0 y $1 - \lambda$, de multiplicadores λ y $2 - \lambda$ respectivamente. En cualquier caso, debemos tener $\lambda = 1$ de donde $\alpha \in \mathbb{Z}$ y en consecuencia $|\alpha - \alpha_0| \geq 1$.

Segundo caso: $q \geq 2$:

Podemos suponer que $\alpha_0 \in (0, 1)$. Si $\text{Re}(\alpha) \notin (0, 1)$ entonces $|\alpha - \alpha_0| \geq \frac{1}{q}$. Podemos suponer entonces que $\text{Re}(\alpha) \in (0, 1)$.

Sea z_0 un punto fijo de P_α^q de multiplicador 1. Entonces z_0 es periódico de período k divisor de q , y $\{z_0, z_1, \dots, z_{k-1}\}$ es un ciclo parabólico.

Si $z_0 = 0$ tenemos que $k = 1$ y $\lambda^q = 1$, de donde $\alpha = r/q$ para un cierto entero r . Luego

$$|\alpha - \alpha_0| \geq \frac{1}{q}$$

Si no, 0 debe ser un punto fijo repulsor, esto es $\text{Im}(\alpha) < 0$. Sean $R_0, R_1, \dots, R_{q'-1}$ ⁵ los rayos externos que aterrizan sobre 0 y sea $0 \leq p' < q'$ el único entero que verifica $P_\alpha(R_i) = R_{i+p' \bmod q'}$. Sea $m = (p', q')$, y denotemos por $p_1 = p'/m$ y $q_1 = q/m$.⁶

Lema 2.1.7. *Debemos tener $q_1 < q$.*

Asumiendo el lema podemos razonar como sigue. De la desigualdad de Yoccoz existe un entero r tal que $2\pi i(\alpha + r)$ pertenece al disco de centro

$$\frac{\log 2}{mq_1} + 2\pi i \frac{p_1}{q_1}$$

y radio $\log 2 / mq_1$. En particular

$$\text{Re}(\alpha) + r \in \left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{\log 2}{2\pi mq_1}, \frac{p_1}{q_1} + \frac{\log 2}{2\pi mq_1} \right)$$

⁵Ordenados ciclicamente.

⁶Es fácil probar que en grado 2 debe ser $m = 1$. Esto se deduce de que un conjunto de rotación está unívocamente determinado por su número de rotación combinatorio. Ver [25]

Suponemos ahora que $q_1 \geq 2$. Como hay un sólo rayo fijo (estamos en grado 2), $p_1 \neq 0$ de donde p_1 puede tomar los valores $1, 2, \dots, q_1 - 1$. En cualquier caso, tenemos que

$$0 < \frac{1}{q_1} - \frac{\log 2}{2\pi q_1} \leq \operatorname{Re}(\alpha) + r \leq 1 - \frac{1}{q_1} - \frac{\log 2}{2\pi q_1} < 1$$

de donde $r = 0$.

Podemos estimar entonces la distancia

$$|\alpha - \alpha_0| \geq \frac{1}{2\pi} \left(\sqrt{4\pi^2 \left(\frac{p}{q} - \frac{p_1}{q_1} \right)^2 + \left(\frac{\log 2}{mq_1} \right)^2} - \frac{\log 2}{mq_1} \right)$$

Tenemos que $\left| \frac{p}{q} - \frac{p_1}{q_1} \right| \geq \frac{1}{qq_1}$, de donde el lado derecho de la desigualdad es mayor o igual que

$$\frac{2\pi}{q^2 q_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{qq_1} \right)^2 + \left(\frac{\log 2}{mq_1} \right)^2} + \frac{\log 2}{mq_1}} \quad (*)$$

Un simple cálculo muestra que poniendo $C > 0$ tal que

$$\sqrt{\left(\frac{2\pi}{q_1} \right)^2 + \left(\frac{\log 2}{m} \right)^2} + \frac{\log 2}{m} \leq C$$

tenemos que

$$(*) \geq \frac{2\pi}{Cq^2 q_1} \geq \frac{2\pi}{Cq^3}$$

Si $q_1 = 1$, entonces $p_1 = 0$ y tenemos que $2\pi i\alpha$ está o bien en el disco de centro $\log 2/m$ y del mismo radio, o bien en el trasladado por $2\pi i$ de éste⁷. En éste caso, es fácil acotar la distancia entre α y α_0 por C/q^2 . $\square$

Demostración del lema 2.1.7. Se utilizan nociones desarrolladas en [?].

Denotemos por $R_0, R_1, \dots, R_{q_1-1}$ los rayos que aterrizan en 0. Sean $S_1, S_2, \dots, S_{q_1}$ las componentes conexas de el complemento de $\{0\} \cup R_0 \cup \dots \cup R_{q_1-1}$, de modo tal que $\partial S_i = \{0\} \cup R_{i-1} \cup R_i$. Podemos suponer además que el punto crítico $c_0 \in S_1$.

Dado i , denotemos por S_j el sector bordeado por la imagen (por P_α) de ∂S_i . Afirmamos que para $1 < i \leq q_1$, $P_\alpha : S_i \rightarrow S_j$ es un isomorfismo. De hecho, $S_j \subset P_\alpha(S_i)$. Como S_i no contiene al punto crítico, cada componente de la preimagen de S_j en S_i debe ser simplemente conexa y se mapea bijectivamente por P_α sobre S_i . Más aún, como ningún rayo contiene al valor crítico, P_α es 1 a 1 en el borde de cada componente. Esto implica que el borde de cada componente o bien es ∂S_i o bien es la curva formada por dos rayos que aterrizan en la preimagen de 0. Es fácil ver que existe una componente cuyo borde contiene a ∂S_i de donde debe ser igual a éste. Pero una tal componente es igual a S_i .

Sea ahora S_j igual que antes pero para S_1 . Afirmamos que $c_1 = P_\alpha(c_0) \in S_j$. Si no, repitiendo el argumento que hicimos arriba, tendríamos que $P_\alpha : S_1 \rightarrow S_j$ es un isomorfismo lo cual es imposible.

Como $c_1 \in S_j$ para $j > 1$, $c_2 \in S_{j'} = P_\alpha(S_j)$, etc. Pero antes de volver a S_1 pasa por todas las componentes S_i de donde:

cada componente S_i contiene uno de los puntos $c_0, c_1, \dots, c_{q_1-1}$.

⁷Es decir, puede ser $r = 0$ o $r = 1$.

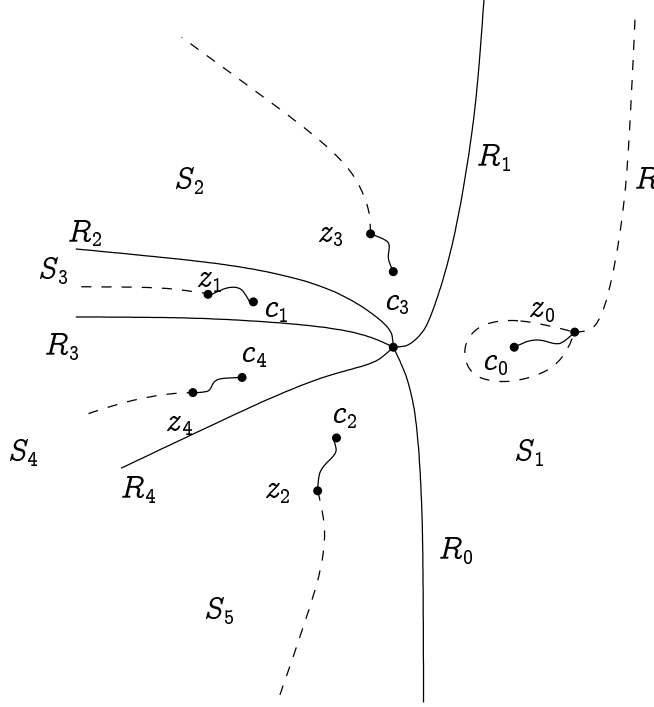


Figura 2.2: Esquema de los rayos externos cuando $q_1 = 5, p_1 = 2$.

Supongamos que z_0 es el punto del ciclo que contiene a c_0 en su cuenca parabólica inmediata. Como z_0 y c_0 se pueden unir por una curva que no corte a J_α , las imágenes z_i y c_i se pasean por las mismas componentes S_i , antes de volver a S_1 . Esto implica que $k \geq q_1$.

Supongamos que $q_1 = q$, entonces $q_1 = k = q$. Consideremos un rayo R que aterriza sobre z_0 . Como z_0 tiene período q y multiplicador uno, $P_\alpha^q(R) = R$. Como z_0 se pasea igual que las componentes S_i , el rayo R determina una órbita periódica de rayos, con el mismo número de rotación combinatorio que $R_0, \dots, R_{q_1-1}$, lo cual es imposible por la unicidad de tales ciclos respecto de su número de rotación. $\square$

2.2. Apéndice

2.2.1. I-Comportamiento asintótico de Γ_{α_0}

En lo que sigue vamos a estudiar el comportamiento asintótico de Γ_{α_0} cuando $\alpha_0 \rightarrow \alpha$ irracional. El objetivo es probar que en caso de ser P_α linealizante en 0, los mapas $\Gamma_k = \Gamma_{p_k/q_k}$ aproximan a la conjugación linealizante. Esto será de gran utilidad más adelante para estudiar las perturbaciones de un disco de Siegel. Por más detalles consultar [9, 4].

Lema 2.2.1. *La familia $\{\Gamma_{p/q} : p/q \in \mathbb{Q}\}$ es normal.*

Demostración. De hecho probaremos que está uniformemente acotada. Fijemos $\alpha_0 = p/q$. Entonces para todo α que diste menos de $R_{\alpha_0} \leq 1$ de α_0 tenemos que $\text{Im}(\alpha) \geq -R_{\alpha_0} \geq -1$. Luego para todo $z \neq 0$

$$\frac{|P_\alpha(z)|}{|z|} \geq \left| |z| - e^{-2\pi \text{Im}(\alpha)} \right|$$

por lo que los puntos periódicos de P_α están contenidos en el disco de centro cero y radio $1 + e^{2\pi}$. Como $\Gamma_{\alpha_0}(\delta)$ es un punto periódico de $P_{\alpha_0 + R_{\alpha_0}\delta^q}$ tenemos $|\Gamma_{\alpha_0}(\delta)| \leq 1 + e^{2\pi}$. $\square$

Lema 2.2.2. *Sea Γ un punto límite de $\Gamma_{p/q}$, donde $p/q \xrightarrow{\neq} \alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $\Gamma(\mathbb{D}) \subset K_\alpha$.*

Demostración. Si no, existe un $\delta \in \mathbb{D}$ y un $n \geq 0$ tal que

$$|P_\alpha^n(\Gamma(\delta))| > 1 + e^{2\pi}$$

Como $q \rightarrow +\infty$, tenemos que $p/q + R_{p/q}\delta^q \rightarrow \alpha$, de donde

$$\Gamma(e^{2\pi i n p/q} \delta) = P_{p/q + R_{p/q}\delta^q}^n(\Gamma(\delta)) \rightarrow P_\alpha^n(\Gamma(\delta))$$

y esto contradice que $|\Gamma_{p/q}| < 1 + e^{2\pi}$. $\square$

Corolario 2.2.3. *Sea $p/q \xrightarrow{\neq} \alpha \in \mathbb{R}$ irracional, y sea Γ un punto límite de $\Gamma_{p/q}$. Entonces,*

- *si 0 es de Cremer para P_α , $\Gamma \equiv 0$.*
- *si 0 es de Siegel para P_α con disco de Siegel Δ , $\Gamma(\mathbb{D}) \subset \Delta$.*

Demostración. Como $\Gamma_{p/q}(0) = 0$ para todo p/q , cualquier función límite deja fijo al origen. Además sabemos que toma valores en K_α por lo que si $0 \notin \text{int } K_\alpha$ la función límite debe ser constante. De lo contrario necesariamente toma valores en la componente conexa de $\text{int } K_\alpha$ que contiene a 0, que es Δ . $\square$

En lo que sigue denotamos por p_k/q_k las aproximaciones dadas por el desarrollo en fracción continua de α irracional.

Lema 2.2.4. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ irracional, tal que P_α tiene un disco de Siegel Δ en 0. Entonces la sucesión de mapas $P_{p_k/q_k}^{q_k}$ converge uniformemente a la identidad en compactos de Δ .*

Demostración. Sea $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \Delta$ un isomorfismo conforme que fija el 0. Para cada $\alpha' \in \mathbb{C}$ definimos $f_{\alpha'} = \phi^{-1} \circ P_{\alpha'} \circ \phi$, que está definida en un entorno del origen. Fijemos $r < 1$, y sea $\Delta_r = \phi(D_r)$.

Entonces P_α deja invariante Δ_r y como $P_{\alpha'} \rightarrow P_\alpha$ uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$, existe $\epsilon > 0$ tal que si $\alpha' \in D(\alpha, \epsilon)$ entonces $f_{\alpha'}$ está definida en D_r y $f_{\alpha'}(z) \rightarrow e^{2\pi i \alpha} z$ uniformemente en D_r . Más aún, la aplicación $(\alpha', z) \mapsto f_{\alpha'}(z)$ es analítica en $D(\alpha, \epsilon) \times D_r$.

Podemos suponer que ϵ es suficientemente pequeño de modo tal que

$$\left| \frac{f_{\alpha'}(z)}{e^{2\pi i \alpha} z} - 1 \right| < 1, \quad z \in \overline{D}_r$$

y tal que la aplicación

$$(\alpha', z) \mapsto u(\alpha', z) = \log \left(\frac{f_{\alpha'}(z)}{e^{2\pi i \alpha} z} \right)$$

es analítica en un entorno de $\overline{D(\alpha, \epsilon)} \times \overline{D}_r$. Observemos que $u(\alpha, z) = 0$ para todo $|z| \leq r$.

Definimos $F_{\alpha'} : \mathbb{H}_r \rightarrow \mathbb{H}$ dada por

$$F_{\alpha'}(Z) = Z + \alpha' + u(\alpha', e^{2\pi i Z})$$

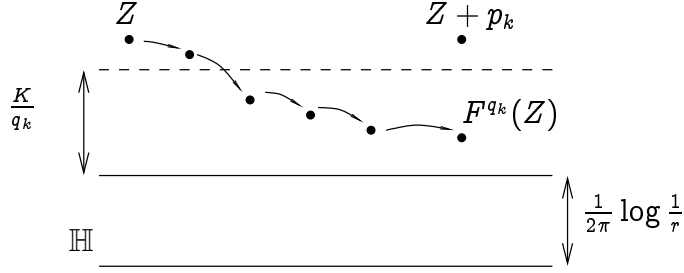


Figura 2.3: Demostración del lema.

donde

$$\mathbb{H}_r = \left\{ Z \in \mathbb{C} : \text{Im}(Z) > -\frac{1}{2\pi} \log(r) \right\}$$

De este modo tenemos que

$$e^{2\pi i F_{\alpha'}(Z)} = f_{\alpha'}(e^{2\pi i Z})$$

Sea $K > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \alpha'}(\alpha', z) \right| < K \text{ para todo } (\alpha', z) \in D(\alpha, \epsilon) \times D_r$$

Así tenemos que

$$|u(\alpha', z)| \leq K|\alpha' - \alpha| \text{ para todo } (\alpha', z) \in D(\alpha, \epsilon) \times D_r$$

Entonces tenemos que

$$\left| F_{p_k/q_k}(Z) - Z - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq K \left| \frac{p_k}{q_k} - \alpha \right| \leq \frac{K}{q_k^2}$$

Esto implica que si $\text{Im}(Z) \geq -\log(r)/2\pi + K/q_k$, para $m = 0, \dots, q_k$ $F_{p_k/q_k}^m(Z)$ está definida y además

$$\left| F_{p_k/q_k}^m(Z) - Z - \frac{mp_k}{q_k} \right| \leq \frac{mK}{q_k^2}$$

Como la exponencial decrece distancias en el semiplano inferior, y $-\log(r)/2\pi + K/q_k$ puede elegirse arbitrariamente cerca de cero eligiendo k grande y r cercano a 1, el lema está probado. $\square$

En el próximo capítulo vamos a precisar una versión un poquito más general de este lema. Bajo las mismas hipótesis que en lema, supongamos que tenemos además una sucesión $\alpha_n \rightarrow \alpha$. Fijemos $r_1 < r_2 < 1$, y sean como antes Δ_{r_1} y Δ_{r_2} . De la prueba del lema, sabemos que existe n suficientemente grande, tal que $F_{\alpha_n} : \mathbb{H}_{r_2} \rightarrow \mathbb{H}$ está definida y que existe una constante $K > 0$ (que depende de r_2) tal que

$$|F_{\alpha_n}(Z) - Z - \alpha_n| \leq K|\alpha_n - \alpha|, \quad Z \in \mathbb{H}_{r_2}$$

Si $\text{Im}(Z) \geq \frac{1}{2\pi} \log r_2^{-1} - mK|\alpha_n - \alpha|$, tenemos que los primeros $j = 0, 1, \dots, m$ iterados de Z están definidos y pertenecen a $\mathbb{H}_{r_2}$. Si m_n es tal que $m_n|\alpha_n - \alpha| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$, entonces para n suficientemente grande: si $Z \in \mathbb{H}_{r_1}$ entonces los primeros m_n iterados de Z están definidos y pertenecen a $\mathbb{H}_{r_2}$.

En otras palabras, dados $r_1 < r_2 < 1$, si n es suficientemente grande, entonces para todo $z \in \Delta_{r_1}$ tenemos que

$$P_{\alpha_n}^j(z) \in \Delta_{r_2} \quad j = 0, 1, \dots, m_n$$

Lema 2.2.5. Sea $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que P_α tiene un disco de Siegel Δ en el origen. Sea $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \Delta$ un isomorfismo conforme que fija el origen. Entonces

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} T_a(p_k/q_k) \geq |\phi'(0)|$$

Demostración. Consideremos como antes los mapas $f_{\alpha'} = \phi^{-1} \circ P_{\alpha'} \circ \phi$ con $\alpha' \in \mathbb{C}$. Fijado $r < 1$ sabemos que existe un k_0 tal que si $k \geq k_0$ entonces $f_{p_k/q_k}^{q_k}$ esta definida en D_r y toma valores en $\mathbb{D}$. Además tenemos que existe $A_k \neq 0$ tal que

$$f_{p_k/q_k}^{q_k}(z) = z + A_k z^{q_k+1} + O(z^{q_k+2})$$

y vale la relación

$$\frac{|\phi'(0)|}{|q_k A_k|^{1/q_k}} = T_a(p_k/q_k)$$

Por otro lado tenemos

$$|A_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f_{p_k/q_k}^{q_k}(z)}{z^{q_k+2}} dz \right| \leq \frac{1}{r^{1+q_k}}$$

de donde obtenemos que

$$|\phi'(0)| \leq T_a(p_k/q_k) \left(\frac{q_k}{r} \right)^{1/q_k} \frac{1}{r}$$

y entonces

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} T_a(p_k/q_k) \geq r |\phi'(0)|$$

y haciendo $r \rightarrow 1$ se obtiene el resultado. $\square$

Teorema 2.2.6. Sea $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Entonces si P_α es linealizable en 0, cualquier punto límite Γ de la sucesión $\Gamma_k = \Gamma_{p_k/q_k}$ es un isomorfismo conforme de $\mathbb{D}$ en Δ .

Demostración. Tenemos que

$$|\Gamma'(0)| = \left| \lim_{k_i \rightarrow +\infty} \Gamma'_{p_{k_i}/q_{k_i}}(0) \right| = \lim_{k_i \rightarrow +\infty} |2\pi q_{k_i}^2 R_{p_{k_i}/q_{k_i}}|^{1/q_{k_i}} T_a(p_{k_i}/q_{k_i}) \geq |\phi'(0)|$$

donde $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \Delta$ es un isomorfismo conforme. Pero entonces el mapa $\phi^{-1} \circ \Gamma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ fija el 0 con derivada $\Gamma'(0)/\phi'(0)$ que tiene módulo mayor o igual que uno. Por el lema de Schwarz debe ser una rotación, y luego Γ es también un isomorfismo. $\square$

Corolario 2.2.7. Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es tal que P_α es linealizable en 0 y p_k/q_k son las convergentes de la fracción continua de α , se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} T_a(p_k/q_k) = r(\alpha)$$

donde $r(\alpha)$ es el radio conforme de Δ en 0.

Observar que el resultado es cierto también para los polinomios de Cremer si definimos $r(\alpha) = 0$.

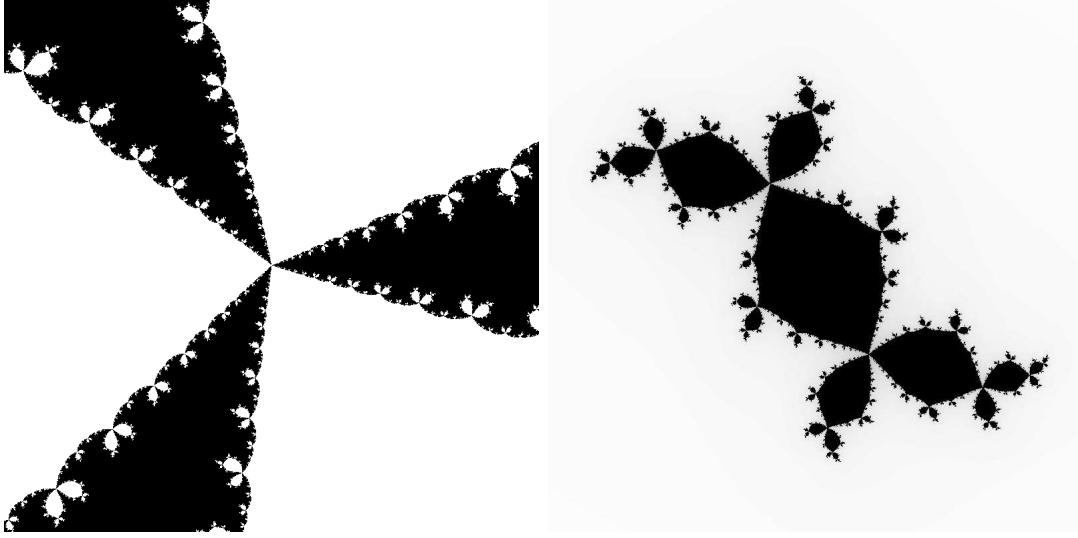


Figura 2.4: $\hat{K}$ para $P(z) = \lambda z + z^2$ con $\lambda \sim 0,95945i - 0,55267$

2.2.2. II-Prueba de la desigualdad de Yoccoz

La desigualdad de Yoccoz la utilizamos en la estimación de R_{α_0} . En ésta sección damos un prueba de la misma, por más detalle se puede consultar [16]. La notación que usaremos aquí es la misma que la utilizada en la sección 2.1.3

Existe una única función $\kappa : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, con $\kappa(0) = z_0$, $\kappa'(0) = 1$ y tal que $\kappa(\lambda z) = P(\kappa(z))$. Más aún κ está dada por

$$\kappa(z) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P^k \left(\frac{z}{\lambda^k} + z_0 \right)$$

Sea $\hat{K} = \kappa^{-1}(K_P)$. El conjunto $\mathbb{C} - \hat{K}$ es invariante bajo multiplicación por λ y su imagen por κ es claramente $\mathbb{C} - K_P$.

Lema 2.2.8. *Sea U una componente de $\mathbb{C} - \hat{K}$. Entonces $\kappa : U \rightarrow \mathbb{C} - K_P$ es un cubrimiento universal.*

Demostración. Veamos que U es simplemente conexo. Para esto basta probar que $\hat{K}$ no tiene componentes acotadas. En efecto si $\hat{K}_0$ es una tal componente, entonces existe un $n \geq 0$ tal que $\lambda^{-n}\hat{K}_0$ está contenido en un entorno de 0 donde κ es un homeomorfismo. Pero ésto nos daría que K_P no es conexo.

Para ver que κ restricta a U es un cubrimiento, tomemos un disco $W \in \mathbb{C} - K_P$. Sea $w_0 \in W$ y $z_0 \in U$ tales que $\kappa(z_0) = w_0$. Si ponemos $w_n = \kappa(\lambda^{-n}z_0)$, tenemos que $P^n(w_n) = w_0$. Como el conjunto poscrítico de P está contenido en K_P , para cada n existe una rama de la inversa de P^n definida en W que manda w_0 a w_n . Denotamos por g_n tales inversas. No es difícil probar que

$$\mu(w) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n (g_n(w) - z_0), \quad w \in W$$

existe y define una rama de la inversa de κ . □

Definimos la función $\hat{G} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\hat{G} = G \circ \kappa$. Como el semiplano $\mathbb{H} = \{u + iv : u > 0\}$ cubre con la exponencial $\mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}$, podemos levantar el mapa $\phi_U : U \rightarrow \mathbb{C} - K_P$ dado por $\phi_U = \phi \circ \kappa$, a un mapa $\hat{\phi}_U : U \rightarrow \mathbb{H}$. Es fácil ver que $\hat{\phi}_U$ es un isomorfismo; denotamos por ψ_U su inversa.

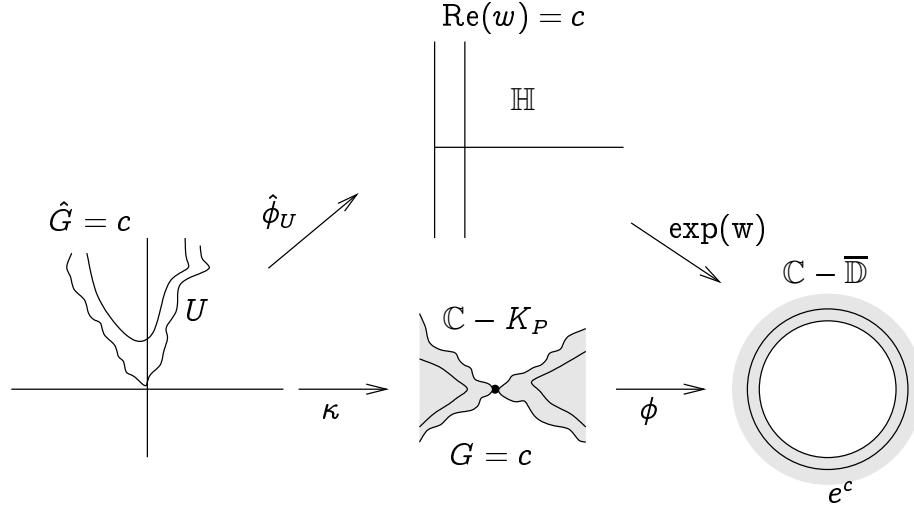


Figura 2.5: Los mapas $\phi, \hat{\phi}_U$ y la equipotencial de valor c en cada caso.

Notar que si $z \in U$ tenemos que $\hat{G}(z) = \text{Re}(\hat{\phi}_U(z))$ por lo que las equipotenciales de $\hat{G}$ en U se corresponden con las rectas verticales de $\mathbb{H}$.

Lema 2.2.9. *Existe $q \geq 1$ tal que $\lambda^q U = U$.*

Demostración. Supongamos que todos los iterados de U por multiplicación por λ son disjuntos. Si consideramos el toro $\mathbb{T} = \mathbb{C} - \{0\}/(\lambda)$ y la proyección canónica $\pi : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{T}$, tenemos que π es inyectiva en

$$U' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^n U$$

Para cada n denotamos por $C_n = \{|z| = |\lambda|^n\}$. Como $\hat{G}$ es estrictamente positiva en U' y tiende a cero en el borde, tenemos que

$$m = \max_{z \in U' \cap C_0} \hat{G}(z) > 0$$

se alcanza en algún punto $z' \in U' \cap C_0$. Podemos suponer que $z' \in U$.

Si $w \in \mathbb{H}$ es tal que $\text{Re}(w) \geq md^n$, entonces $|\psi_U(w)| \geq |\lambda|^n$. En efecto tenemos que

$$\hat{G}\left(\frac{\psi_U(z)}{\lambda^n}\right) = \frac{\hat{G}(\psi_U(z))}{d^n} \geq m$$

Sea $\psi_U(w') = z'$ con $w' = m + iv' \in \mathbb{H}$. La métrica hiperbólica de U se corresponde con la métrica hiperbólica de $\mathbb{H}$ que esta dada por $|dw|/\text{Re}(w)$. Como la equipotencial $\hat{G} = m$ es tangente a C_0 en z' , la recta vertical $\text{Re} = m$ es tangente a la imagen de C_0 por $\hat{\phi}_U$. El segmento de geodésica $[w', w' + md^n]$ corta a la imagen de C_n porque ésta se encuentra en la región $\{\text{Re} \leq md^n\}$. De este modo la distancia hiperbólica en U de C_0 a C_n es menor o igual que $n \log d$.

Por otro lado en $\mathbb{T}$ tenemos la métrica plana⁸ inducida por $|dz|/|z|$ en $\mathbb{C} - \{0\}$, que a su vez es la inducida por la métrica euclídea en $\mathbb{C}$ por el mapa exponencial. Si consideramos los anillos $A_n = \{|\lambda|^n \leq |z| \leq |\lambda|^{n+1}\}$, tenemos que

$$\text{Area}(\pi(U \cap A_n)) \rightarrow 0$$

⁸La multiplicación por λ es una isometría con esta métrica.

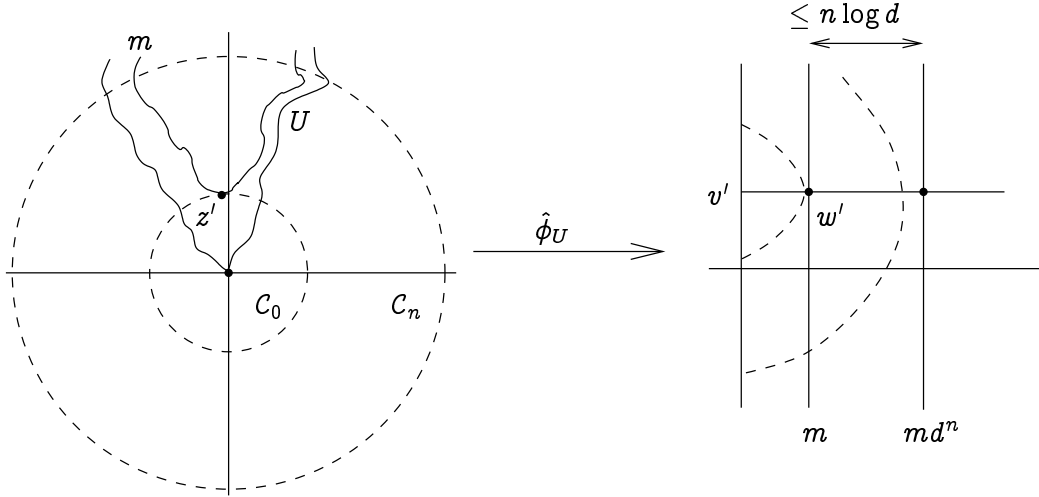


Figura 2.6: Distancia hiperbólica entre C_0 y C_n .

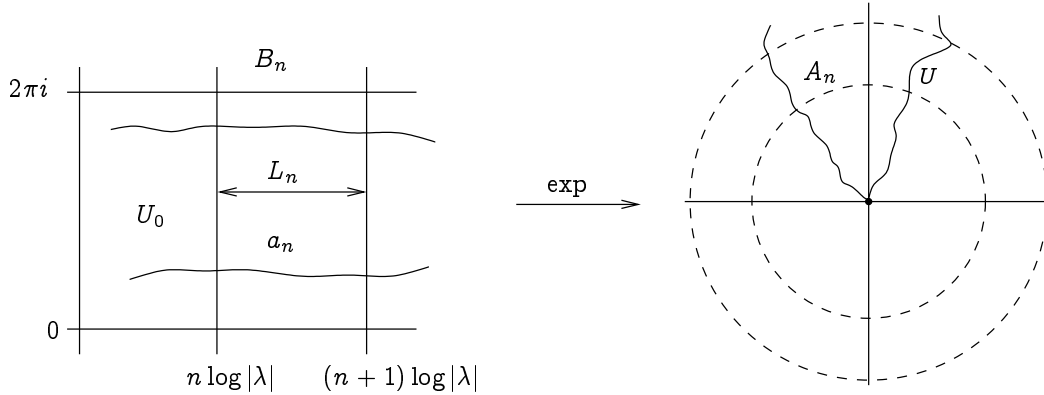


Figura 2.7: Relación entre L_n y a_n .

o lo que es lo mismo, el área en $\mathbb{C} - \{0\}$ de $U \cap A_n$ tiende a cero.

Si U_0 es una preimagen de U por la exponencial, tenemos que U_0 es simplemente conexo. Los anillos A_n se levantan a las bandas verticales $B_n = \{n \log |\lambda| \leq \operatorname{Re}(z) \leq (n+1) \log |\lambda|\}$. Por lo tanto, lo anterior se traduce en que el área euclídea de $U_0 \cap B_n$ tiende a cero. En U_0 la exponencial es una isometría en las métricas hiperbólicas, y como mostraremos en un lema a seguir tenemos la siguiente desigualdad: si L_n es la distancia hiperbólica en U_0 entre $\operatorname{Re} = n \log |\lambda|$ y $\operatorname{Re} = (n+1) \log |\lambda|$, y a_n es el área euclídea de $B_n \cap U_0$, entonces

$$L_n \geq \frac{(\log |\lambda|)^2}{4a_n}$$

Luego $L_n \rightarrow +\infty$, de donde

$$\frac{\operatorname{dist}_U(C_0, C_n)}{n} \rightarrow +\infty$$

Pero esto contradice que este número está acotado por $\log d$.

□

Terminaremos ahora la demostración del lema con otro lema.

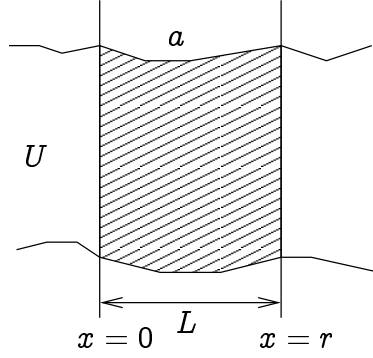


Figura 2.8: Relación entre L y a .

Lema 2.2.10. *Sea U un dominio hiperbólico y simplemente conexo que corta las rectas verticales $x = 0$ y $x = r$, con $r > 0$. Sea a el área euclídea de $U \cap \{0 \leq x \leq r\}$. Entonces L , la distancia hiperbólica en U entre $x = 0$ y $x = r$, cumple*

$$L \geq \frac{r^2}{4a}$$

Demostración. La demostración se basa en el siguiente hecho. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ es una curva diferenciable, y si $\ell_U(\gamma)$ denota la longitud hiperbólica de γ en U , entonces

$$\frac{\ell_U(\gamma)}{2} \leq \int_{\gamma} \frac{|dz|}{d(z, \partial U)} \leq 2\ell_U(\gamma)$$

Para cada $x \in [0, r]$ denotemos por $\ell(x)$ la longitud euclídea del segmento $U \cap \{\operatorname{Re} = x\}$. Entonces $a = \int_0^r \ell(x) dx$. Sea $J \in [0, r]$ el conjunto de los x tales que $\ell(x) \leq 2a/r$. Entonces

$$a = \int_0^r \ell(x) dx \geq \int_{[0, r] - J} \ell(x) dx \geq (r - |J|) \frac{2a}{r}$$

de donde deducimos que $|J| \geq r/2$.

Sea $\gamma : [0, r] \rightarrow U$ una curva que une $x = 0$ con $x = r$. Entonces para cada $z = x + iy \in \gamma$ tenemos que $d(z, \partial U) \leq \ell(x)/2$, de donde

$$\ell_U(\gamma) \geq \int_{\gamma} \frac{|dz|}{\ell(x)} \geq \int_J \frac{|dz|}{\ell(x)} \geq |J| \frac{r}{2a} \geq \frac{r^2}{4a}$$

□

Sea $q \geq 1$ el período de U . Es fácil ver que podemos elegir el levantado $\hat{\phi}_U$ de forma tal que la multiplicación por λ^q en U se corresponda con la multiplicación por d^q en $\mathbb{H}$. Vemos entonces que $U/(\lambda^q)$ es un anillo en $\mathbb{T}$ de módulo $\pi/q \log d$.

Sea γ la única geodésica cerrada de $U/(\lambda^q)$. Podemos levantar γ a $\hat{\gamma}$ geodésica⁹ en U invariante por λ^q . Sea R la imagen de $\hat{\gamma}$ por κ .

⁹Para la métrica hiperbólica de U .

Como $\hat{\gamma}$ es invariante por λ^q vemos que $\hat{G}$ no está acotada en $\hat{\gamma}$; o lo que es lo mismo $\hat{\gamma}$ se corresponde con una geodésica en $\mathbb{H}$ que no tiene parte real acotada. Ésta debe ser entonces una recta horizontal. Es decir R es un rayo externo.

Una parametrización de $\hat{\gamma}$ por longitud de arco está dada por lo siguiente: $\hat{\gamma}(s)$ es el punto de corte de $\hat{\gamma}$ con la equipotencial $\{\hat{G} = e^s\}$. Otra vez por la invarianza de $\hat{\gamma}$ bajo la multiplicación por λ^q vemos que $\hat{\gamma}$ tiende a cero cuando $s \rightarrow -\infty$, de donde R aterriza en z_0 . Además como $\lambda^i U \cap U = \emptyset$ para $i = 0, 1, \dots, q-1$ vemos que R tiene período q .

La cantidad de rayos externos que aterrizan sobre un punto fijo es finita, y son todos periódicos con el mismo período. Esto muestra que la cantidad de ciclos disjuntos formados por las componentes U debe ser finita y que son todas de período q . Es decir, en $\mathbb{T}$, obtenemos m anillos disjuntos, las proyecciones de cada ciclo, de módulo $\pi/q \log d$.

Más aún, tenemos que si $U_0, \dots, U_{q-1}$ es un tal ciclo, entonces $\lambda U_i = U_{i+p \pmod{q}}$ para el mismo p de los rayos externos.

Para concluir la prueba de la desigualdad, nos hace falta un último ingrediente: el número de vueltas de un anillo encajado $\mathbb{T}$. Para dar la definición veamos al toro como cociente de $\mathbb{C}$ por un látice Λ . Decimos que un anillo encajado $A \subset \mathbb{T}$ da $\omega \in \Lambda$ vueltas alrededor del toro si al levantar la geodésica cerrada de A en un punto z , ésta termina en $z + \omega$.

En nuestro caso, al considerar el mapa exponencial de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C} - \{0\}$ vemos que $\mathbb{T}$ es el cociente de $\mathbb{C}$ por el látice generado por $2\pi i$ y τ , donde τ es un logaritmo cualquiera de λ .

Lema 2.2.11. *Para una elección adecuada de τ , el anillo $U/(\lambda)$ da $q\tau - 2p\pi i$ vueltas alrededor de $\mathbb{T}$.*

Demostración. Denotemos por A al anillo $U/(\lambda)$. Las preimágenes de A por la exponencial son

$$\exp^{-1} \left(\bigcup_{i=0}^{q-1} U_i \right) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} U'_i$$

Podemos suponer que las componentes U'_i están indexadas de modo tal que en la banda $\{2k\pi \leq \text{Im} \leq 2(k+1)\pi\}$, están las componentes U'_{i+kq} con $i = 0, 1, \dots, q-1$, que $\exp(U'_i) = U_{i \pmod{q}}$, y que si $k < j < h$ la componente U'_j separa U'_k de U'_h .

De este modo como $\lambda U_i = U_{i+p \pmod{q}}$, para cada τ logaritmo de λ existe un $l \in \mathbb{Z}$ tal que si $z \in U'_i$ entonces $z + \tau \in U'_{i+p+lq}$. Como trasladando τ por $\pm 2\pi i$ sumamos ± 1 a l , podemos elegir τ de forma que $l = 0$. Fijemos dicho τ .

Entonces si $z \in U'_0$ tenemos que $z + q\tau \in U'_{pq}$, de modo que $z + q\tau - 2\pi pi \in U'_0$. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ la única geodésica cerrada en A y sea $\hat{\gamma}$ su levantado en U'_0 . Si $z = \hat{\gamma}(0)$, entonces $\hat{\gamma}(1) = z + q\tau + 2k\pi i$ para algun $k \in \mathbb{Z}$. Pero como este k es único y el mismo para todo $z \in U'_0$ tenemos que $k = -p$. $\square$

Por último observemos lo siguiente. La proyección $\pi_q : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{T}_q$ donde $\mathbb{T}_q = \mathbb{C} - \{0\}/(\lambda^q)$ induce un mapa $h : \mathbb{T}_q \rightarrow \mathbb{T}$ tal que $\pi_q = \pi \circ h$. Además como $\lambda^i U_0 \cap U_0 = \emptyset$ para $i \neq 0 \pmod{q}$ tenemos que $h : U_0/(\lambda^q) \rightarrow A$ es inyectiva y por lo tanto un isomorfismo conforme. Luego el módulo de A es $\pi/q \log d$ también.

Para finalizar la prueba, notemos que tenemos m anillos $A_1, \dots, A_m$ encajados en $\mathbb{T}$, con

$$\text{mod}(A_i) = \frac{\pi}{q \log d}$$

y que dan $\omega = q\tau - 2p\pi i$ vueltas al toro. La desigualdad de Bers establece que en esas condiciones

$$\sum_{i=1}^m \text{mod}(A_i) \leq \frac{\text{Area}(\mathbb{T})}{|\omega|^2}$$

Como $\text{Area}(\mathbb{T}) = 2\pi \log |\lambda| = 2\pi \text{Re}(\tau)$ obtenemos la desigualdad de Yoccoz.

Capítulo 3

Perturbación de discos de Siegel

3.1. Estimando la pérdida de área

3.1.1. Enunciado del Teorema

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado,

Teorema 3.1.1. Sean $\alpha = [a_1, a_2, \dots]$ y $\theta = [t_1, t_2, \dots]$ números de Brjuno. Para $A > 1$ entero denotamos por $A_n = A^{q_n}$ y

$$\alpha_n = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, A_n, t_1, t_2 \dots]$$

Entonces, para todo abierto $U \subset \Delta$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{dens}_U(\Delta'_n) \geq \frac{1}{2}$$

La notación arriba es la siguiente. Si U y V son conjuntos medibles de $\mathbb{C}$, con $0 < m(U) < +\infty$, entonces

$$\text{dens}_U(V) = \frac{m(V \cap U)}{m(U)}$$

Como dijimos antes, P_{α_n} es linealizabile en 0 con disco de Siegel Δ_n . Aquí Δ'_n es el disco de Siegel de P_{α_n} restringido a Δ . Esto es, Δ'_n es el mayor abierto y conexo contenido en Δ en donde P_{α_n} es conjugado a la rotación.

El truco está en conseguir un conjunto incluido en Δ'_n con la propiedad que buscamos. En Δ es naturalmente más fácil trabajar en las coordenadas donde P_α es la rotación por $e^{2\pi i \alpha}$. Es decir, dado un isomorfismo $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \Delta$, considerar los mapas $\phi^{-1} \circ P_{\alpha_n} \circ \phi$. Las funciones de explosión Γ_n , según vimos en el capítulo anterior, son una buena aproximación al mapa ϕ . Será conveniente trabajar en las coordenadas inducidas por las Γ_n . En particular por su relación con la órbita periódica, que limita el tamaño posible del disco de Siegel Δ'_n .

Denotemos por

$$\epsilon_n = \alpha_n - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(q_n(A_n + \theta) + q_{n-1})}$$

Como vimos antes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[q_n]{|\epsilon_n|} = \frac{1}{A}$$

Para $r < 1$ definimos

$$X_n(r) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z^{q_n}}{z^{q_n} - \epsilon_n} \right| \leq s_n \right\}$$

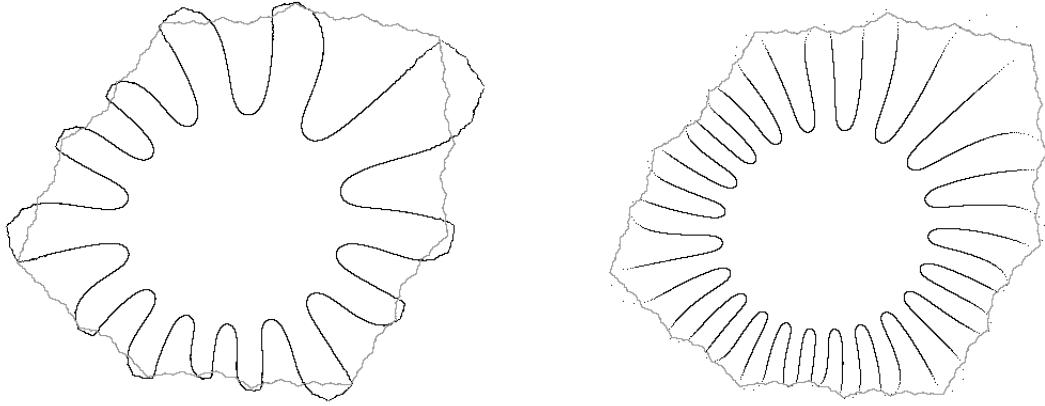


Figura 3.1: Los discos Δ y Δ_n , para $\alpha = \theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $n = 7, n = 8$ y $A = 2$.

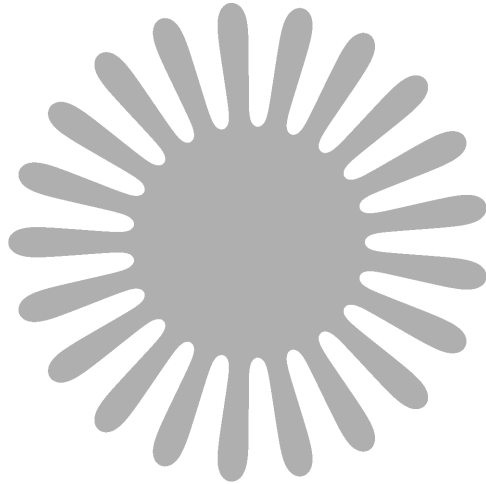


Figura 3.2: El conjunto $X_n(r)$.

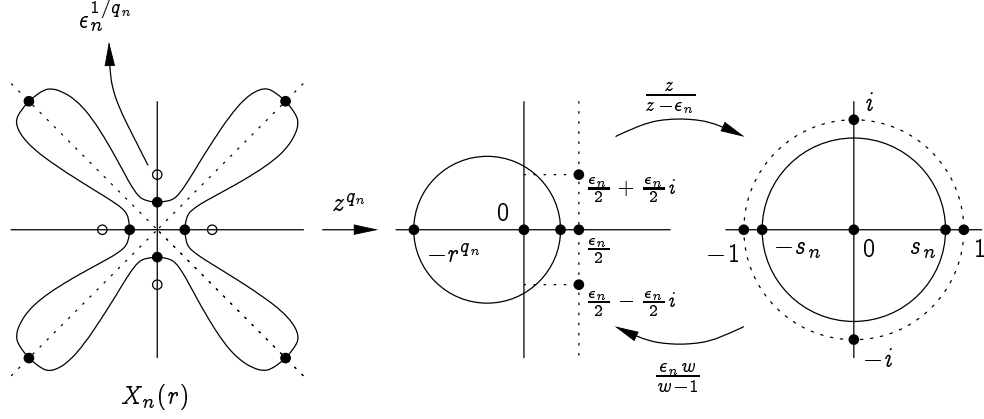


Figura 3.3: El conjunto $X_n(r)$.

donde $s_n = \frac{r^{q_n}}{r^{q_n} + |\epsilon_n|}$. El conjunto $X_n(r)$, tiene una forma estrellada que esquiva las raíces q_n -ésimas de ϵ_n . Los puntos de mayor módulo de $X_n(r)$, tienen módulo igual a r y argumento igual a

$$\frac{\pi}{q_n} + \frac{2\pi k}{q_n} \quad k = 0, 1, \dots, q_n - 1$$

Análogamente los puntos de menor módulo tiene argumentos $\frac{2\pi k}{q_n}$ para $k = 0, 1, \dots, q_n - 1$.

Para todo abierto U de D_r , tenemos que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{dens}_U(X_n(r)) \geq \frac{1}{2}$$

El conjunto $X_n(r)$ es entonces el candidato que buscamos. Como todo punto límite de la sucesión Γ_n es un isomorfismo de $\mathbb{D}$ en Δ , el teorema resultará de la siguiente proposición.

Proposición 3.1.2. *Para todo $r < 1$, si n es suficientemente grande, el disco Δ'_n contiene a $\Gamma_n(X_n(r))$.*

Trabajaremos entonces con los mapas P_{α_n} en las coordenadas inducidas por Γ_n . Es decir, vamos a considerar los mapas

$$f_n = \Gamma_n^{-1} \circ P_{\alpha_n} \circ \Gamma_n$$

Éstos están definidos en un entorno de 0. Un primer paso es observar lo siguiente:

Lema 3.1.3. *Para todo $r_1 < r_2 < 1$, si n es suficientemente grande, para todo $z \in D_{r_1}$ los primeros q_n iterados de z por f_n están definidos y pertenecen a D_{r_2} .*

Demostración. Fijemos $r_1 < r_2 < 1$, sea $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \Delta$ un isomorfismo conforme y denotemos por $\Delta_{r_i} = \phi(D_{r_i})$ para $i = 1, 2$. Entonces si n es suficientemente grande, tenemos que para todo $z \in \Delta_{r_1}$, $P_{\alpha_n}^j(z) \in \Delta_{r_2}$ para $j = 0, 1, \dots, q_n$.

Esto es porque¹

$$q_n |\alpha_n - \alpha| \leq \frac{1}{q_n(A_n + \theta) + q_{n-1}} + \frac{1}{q_n} \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow +\infty$$

¹Recordar el comentario que hicimos después de la prueba del lema ??

Por otro lado, todo punto límite de Γ_n es ϕ pre-compuesto con una rotación. Entonces para todo par $r' < r < 1$, si n es suficientemente grande, Γ_n es inyectiva en D_r y $\Delta_{r'} \subset \Gamma_n(D_r)$. Análogamente si $r < r' < 1$, entonces $\Gamma_n(D_r) \subset \Delta_{r'}$.

Tomamos $r_1 < r < r' < r_2 < 1$. Para n suficientemente grande, Γ_n es inyectiva en D_{r_2} y además

$$\Gamma_n(D_{r_1}) \subset \Delta_r \subset \Delta_{r'} \subset \Gamma_n(D_{r_2})$$

En particular (tomando n más grande si es necesario) para todo $z \in D_{r_1}$, los primeros q_n iterados de $w = \Gamma_n(z)$, $P_{\alpha_n}^j(w) \in \Delta_{r'}$. En particular podemos definir $f_n : D_{r_1} \rightarrow D_{r_2}$. $\square$

La estrategia de la demostración es la siguiente. Podemos agrandar r si es necesario, así que suponemos que $\frac{1}{A} < r_1 < 1$. Si tomamos $r_1 < r_2 < 1$, probaremos que si n es suficientemente grande, entonces la órbita de todo punto $z \in \Gamma_n(X_n(r_1))$ permanece en $\Gamma_n(D_{r_2}) \subset \Delta$. Esto implicará automáticamente, que $\Gamma_n(X_n(r_1)) \subset \Delta'$.

En las coordenadas inducidas por Γ_n esto se escribe así:

Proposición 3.1.4. *Supongamos que*

$$0 < \frac{1}{A} < r_1 < r_2 < 1$$

Entonces para n suficientemente grande, la órbita por f_n de todo punto $z \in X_n(r_1)$ es infinita y permanece en D_{r_2} .

La idea es comparar la dinámica de $f_n^{q_n}$ con la dinámica del tiempo uno de un campo vectorial adecuado. Este campo es construido en base a los conjuntos $X_n(r)$, de forma tal que éstos son invariantes por el flujo de dicho campo. La idea es simple, pero los cálculos son un poco engorrosos.

Una vez hecha la aproximación, la prueba continua de la siguiente manera. Tomemos un punto $z \in X_n(r_2)$. Unimos éste con el 0 por una curva, de forma tal que ésta y su imagen por $f_n^{q_n}$ (que está cerca de la imagen por el flujo) sean disjuntas. Podemos unir los extremos de éstas por otra curva, de forma tal que éstas determinan un sector triangular dentro de $X_n(r_2)$.

Tomamos un r_3 con $r_1 < r_3 < r_2$. Los puntos de este sector que están en $X_n(r_3)$ tienen, para n suficientemente grande, bien definido un mapa de retorno al sector.

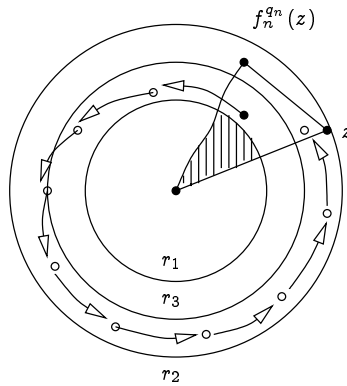


Figura 3.4: El mapa $f_n^{q_n}$ renormalizado, en coordenadas que alizan los $X_n(r)$.

Al identificar los bordes del sector por la dinámica de $f_n^{q_n}$, obtenemos una superficie (no tomamos en cuenta el origen), cuyo interior es una superficie de Riemann isomorfa a $\mathbb{D}^*$. El mapa

de retorno baja a este cociente, y se extiende a un mapa holomorfo (definido en un abierto de $\mathbb{D}$ que contiene a 0) que fija el origen con derivada $e^{-2\pi i\theta}$. Este es el renormalizado de $f_n^{q_n}$.

Sabemos que el mapa renormalizado tiene entonces un disco de Siegel, cuyo tamaño es comparable al dominio de inyectividad del mapa (en nuestro caso éste coincide con el dominio de definición del mapa). Unas comparaciones más, nos permiten mostrar que los puntos de $X_n(r_1)$ en esta identificación, se acercan más rápido al origen (al crecer n) que lo que decrece el tamaño del disco de Siegel, equivalente al tamaño de $X_n(r_3)$. Esto implica que, para n grande dichos puntos están en el disco de Siegel, y por lo tanto tienen órbita infinita por el mapa renormalizado. Como este último es un mapa de retorno (y los iterado intermedios hasta el retorno los podemos controlar), concluimos el teorema.

La importancia del campo es auxiliar. Este nos permite hacer las estimaciones para que la construcción funcione correctamente. Sin embargo muestra claramente (ya que los conjuntos $X_n(r)$ son invariantes por el flujo) que éś lo que está pasando. Por último mencionamos que los cálculos (y de hecho la construcción entera) los haremos en las coordenadas de un cubrimiento universal donde el campo toma un aspecto sencillo.

3.1.2. Comparando la dinámica con un campo vectorial adecuado

Construcción del campo y de las coordenadas adecuadas

Supongamos por comodidad que n es par de forma tal que $\epsilon_n > 0$. El conjunto $X_n(r)$ puede parametrizarse de la siguiente manera. Tomemos $a \in \mathbb{R}$ que determinaremos después. Para $0 \leq s \leq s_n$ podemos poner

$$X_n(r, s) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z^{q_n}}{z^{q_n} - \epsilon_n} \right| = s \right\}$$

de modo que $X_n(r) = \bigcup_{0 \leq s \leq s_n} X_n(r, s)$. Para cada s podemos parametrizar $X_n(r, s)$ poniendo

$$\frac{z(t)^{q_n}}{z(t)^{q_n} - \epsilon_n} = s e^{2\pi i a t}$$

Es fácil ver que $z(t)$ verifica la ecuación

$$\dot{z} = \xi_n^a(z) = \frac{2\pi a i}{\epsilon_n q_n} z(\epsilon_n - z^{q_n})$$

El parámetro a sólo determina la velocidad con la que recorremos el conjunto $X_n(r, s)$. Lo que vemos de éśto, es que el conjunto $X_n(r)$ es invariante por el flujo generado por ξ_n^a . Lo primero que haremos es ver que para a elegido correctamente, el tiempo 1 de este flujo aproxima bien el mapa $f_n^{q_n}$.

Elegimos a para que $f_n^{q_n}$ y el tiempo 1 del flujo de ξ_n^a tengan la misma derivada en 0. No es difícil ver que éstas valen

$$e^{2\pi i \alpha_n q_n} \quad \text{y} \quad e^{2\pi i \frac{a}{q_n}}$$

respectivamente. Como $q_n \alpha_n = q_n \epsilon_n + p_n$, podemos tomar $a = \epsilon_n q_n^2$.

De ahora en más fijamos este valor de a , de modo que

$$\xi_n(z) = 2\pi i q_n z(\epsilon_n - z^{q_n})$$

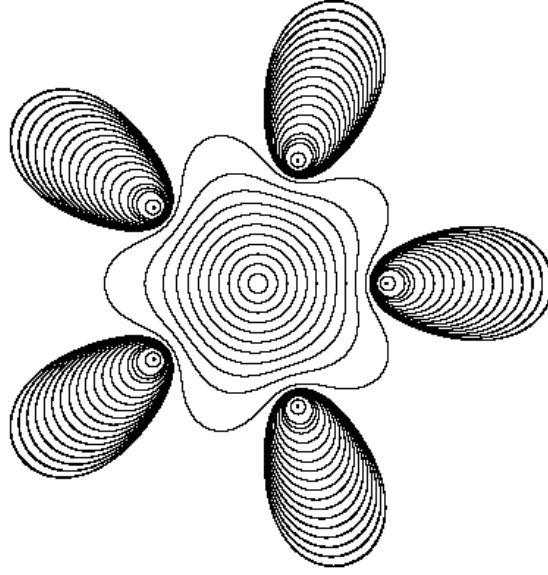


Figura 3.5: Trayectorias del campo ξ_n , para $\alpha = \theta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $n = 4$ y $A = 3$.

Será más fácil trabajar en coordenadas donde ξ_n sea lo más simple posible. Para ésto, notemos que para todo $r < 1$ el conjunto $X_n(r) \subset \Omega_n$ donde

$$\Omega_n := \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{z^{q_n}}{z^{q_n} - \epsilon_n} \in \mathbb{D} \right\}$$

El conjunto Ω_n es simplemente conexo e invariante por el flujo de ξ_n . El mapa $p_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{D}$ dado por $p_n(z) = \frac{z^{q_n}}{z^{q_n} - \epsilon_n}$ es un cubrimiento ramificado de grado q_n , con un único punto de ramificación en 0.

Sea $\phi_n : \mathbb{D} \rightarrow \Omega_n$ un isomorfismo conforme. Entonces $p_n \circ \phi_n(z) = z^{q_n}$. Es decir, si $\psi_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{D}$ denota la inversa de ϕ_n , tenemos que

$$(\psi_n(z))^{q_n} = \frac{z^{q_n}}{z^{q_n} - \epsilon_n}$$

Como antes, sean $a \in \mathbb{R}$ y $\pi_n : \mathbb{H} \rightarrow \Omega_n - \{0\}$ el cubrimiento universal de Ω_n dado por

$$\pi_n(Z) = \phi_n \left(e^{2\pi i a Z} \right)$$

Vamos a determinar a para que el pull-back de ξ_n por π_n sea $\pi_n^* \xi_n \equiv 1$. Es fácil calcular

$$\pi_n'(Z) = \frac{a}{q_n \epsilon_n} \xi_n(\pi_n(Z))$$

de donde $\pi_n^* \xi_n(Z) = \frac{q_n \epsilon_n}{a}$, y tomamos $a = q_n \epsilon_n$. Es decir,

$$\pi_n : \mathbb{H} \rightarrow \Omega_n \text{ es } \pi_n(Z) = \phi_n \left(e^{2\pi i q_n \epsilon_n Z} \right) \text{ y } \pi_n^* \xi_n \equiv 1$$

Luego en $\mathbb{H}$, el tiempo 1 del flujo se corresponde con la traslación $Z \mapsto Z + 1$. En lo que sigue vamos a estimar la diferencia entre $f_n^{q_n}$ y el tiempo uno de ξ_n trabajando en estas coordenadas. En éstas, los conjuntos $X_n(r)$ se levantan a los semiplanos

$$\mathbb{H}_n(r) = \{Z \in \mathbb{H} : \text{Im}(Z) \geq \tau_n(r)\}$$

donde $\tau_n(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_n q_n^2} \log \left(1 + \frac{\epsilon_n}{r^{q_n}}\right)$. Es fácil ver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[q_n]{\tau_n(r)} = \frac{1}{r}$, por lo que $\tau_n(r)$ crece exponencialmente rápido respecto de q_n . Notar que si $r_1 < r_2 < 1$ entonces $\tau_n(r_1) - \tau_n(r_2) \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Ésto será clave más adelante, cuando comparemos la velocidad con la que crecen $\tau_n(r)$ y el dominio de definición del mapa de retorno. Necesitaremos también la siguiente

Definición 3.1.5. Decimos que una sucesión de reales positivos x_n es subexponencial respecto de q_n , si

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[q_n]{x_n} \leq 1$$

Si y_n crece exponencialmente respecto de q_n y x_n es sub-exponencial, entonces es claro que $y_n - x_n \rightarrow +\infty$.

El siguiente lema establece basicamente, que podemos levantar los mapas $f_n^{q_n}$ y $f_n^{q_{n-1}}$ mediante π_n . Nos da también las primeras estimaciones referentes a estos mapas.

Proposición 3.1.6. Sea $\frac{1}{A} < r < 1$. Para n suficientemente grande, existen mapas holomorfos $F_n, G_n : \mathbb{H}_n(r) \rightarrow \mathbb{H}$ tales que:

- $\pi_n \circ F_n = f_n^{q_n} \circ \pi_n$ y $\pi_n \circ G_n = f_n^{q_{n-1}} \circ \pi_n$
- F_n y G_n conmutan con la traslación $Z \mapsto Z + \frac{1}{q_n \epsilon_n}$.
- Cuando $\text{Im}(Z) \rightarrow +\infty$ tenemos

$$F_n(Z) = Z + 1 + o(1) \quad \text{y} \quad G_n(Z) = Z - (A_n + \theta) + o(1)$$

- Más aún, existe una sucesión B_n sub-exponencial respecto de q_n , tal que

$$\sup_{Z \in \mathbb{H}_n(r)} |F_n(Z) - Z - 1| \leq B_n \quad \text{y} \quad \sup_{Z \in \mathbb{H}_n(r)} |G_n(Z) - Z + A_n + \theta| \leq B_n$$

El último punto es el que más no importa. Para el mapa G_n es todo lo que necesitamos; como $\tau_n(r)$ crece exponencialmente, la estimación de arriba nos garantiza que al aplicar G_n a un punto de $\mathbb{H}_n(r_1)$, la parte imaginaria no decrece lo suficiente como para escaparse de $\mathbb{H}_n(r_2)$ (para $r_1 < r_2 < 1$).

Sin embargo, la estimación para F_n es insuficiente. En primer lugar porque para construir el mapa de retorno, luego de aplicar G_n , vamos a aplicar F_n y no sabemos cuantas veces ($A_n \rightarrow +\infty$). Y en segundo lugar, la construcción que haremos depende del hecho de F_n estar cerca de la rotación. En nuestro caso es $Z \mapsto Z + 1$.

Proposición 3.1.7. Sea $\frac{1}{A} < r < 1$. Entonces,

$$\sup_{Z \in \mathbb{H}_n(r)} |F_n(Z) - Z - 1| \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \sup_{Z \in \mathbb{H}_n(r)} |F_n'(Z) - 1| \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow +\infty$.

Probaremos ambas proposiciones en la sección 3.1.4, no son difíciles pero los cálculos nos desviarían un poco de la idea central de la prueba.

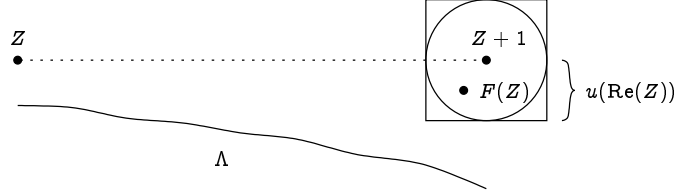


Figura 3.6: El lema.

Construcción del mapa de retorno

Nuestro primer paso será probar lo siguiente,

Proposición 3.1.8. Sean $\frac{1}{A} < r < r' < 1$. Si n es suficientemente grande, entonces para todo $Z \in \mathbb{H}_n(r)$, existe un entero $j(Z)$ tal que

- para todo $j \leq j(Z)$ tenemos que $F_n^j \circ G_n(Z)$ está definido y pertenece a $\mathbb{H}_n(r')$.
- $\text{Re}(F_n^{j(Z)} \circ G_n(Z)) > \text{Re}(Z)$.

Para ésto necesitamos controlar los iterados de F_n . El siguiente lema indica la forma en la que vamos a controlar F_n , después necesitaremos probar que se satisfacen las hipótesis del mismo.

Lema 3.1.9. Supongamos que existe $u : \mathbb{R} \rightarrow (0, \delta)^2$ una función tal que $\log u$ es $\frac{1}{2}$ -Lipschitz y que $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ verifica

$$|F(Z) - Z - 1| \leq u(\text{Re}(Z))$$

Sea Λ el gráfico de una primitiva de $-2u$. Entonces si $Z \in \mathbb{H}$ está por arriba de Λ , $F(Z)$ también está por arriba de Λ .

Demostración. Denotemos por U la primitiva de $-2u$ cuyo gráfico es Λ . Sea $Z = x + iy \in \mathbb{H}$ que está por arriba de Λ . Si ponemos $F(Z) = X + iY$, entonces $X \in (x + 1 - \delta, x + 1 + \delta)$. Para todo $t \in [x, x + 1 + \delta]$ tenemos que $\log u(t) \geq \log u(x) - \frac{1+\delta}{2}$. Luego el incremento en U es

$$\begin{aligned} U(x) - U(X) &= \int_X^x -2u(t)dt = 2 \int_x^X u(t)dt \geq 2u(x)e^{-\frac{1+\delta}{2}}(X - x) \\ &\geq 2(1 - \delta)e^{-\frac{1+\delta}{2}}u(x) \geq 2(1 - \delta)e^{-\frac{1+\delta}{2}}(y - Y) \end{aligned}$$

Para δ chico, por ejemplo menor que $\frac{1}{10}$, tenemos que $2(1 - \delta)e^{-\frac{1+\delta}{2}} > 1$. Luego

$$Y - U(X) \geq y - U(x) \geq 0$$

□

Notar que si denotamos por Λ^+ y Λ^- los gráficos de las primitivas de $2u$ y $-2u$ respectivamente, el lema también vale para Λ^+ . Es decir, si Z está por debajo de Λ^+ , entonces $F(Z)$ también.

En nuestro caso tenemos,

² δ suficientemente chico.

Lema 3.1.10. Fijemos $\frac{1}{A} < r < r' < 1$. Para n grande, existe una función $u_n : \mathbb{R} \rightarrow (0, \delta_n)$ tal que

(a) $|F_n(Z) - Z - 1| \leq u_n(\operatorname{Re} Z)$ para todo $Z \in \mathbb{H}_n(r')$.

(b) $\delta_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$.

(c) $\log u_n$ es $\frac{1}{2}$ -Lipschitz.

Sabemos entonces que si el punto $G_n(Z)$ está por arriba (resp. por debajo) de Λ_n^- (resp. Λ_n^+), sus iterados por F_n permanecen en la misma situación. Necesitamos entonces estimar cuanto decrece o crece el gráfico $\Lambda_n^\pm$.

Lema 3.1.11. La sucesión

$$C_n := \int_{\operatorname{Re}(G_n(Z))}^{\operatorname{Re}(Z)} 2u_n(t)dt$$

es sub-exponencial respecto de q_n .

Con todo ésto podemos ahora probar

Demostración de la proposición 3.1.8. Tomemos n suficientemente grande para que:

(i) $\delta_n < \frac{1}{10}$,

(ii) $\tau_n(r') \leq \tau_n(r) - B_n - C_n - \frac{1}{10}$ y

(iii) las funciones u_n verifiquen (a),(b),(c) y la última estimación de arriba.

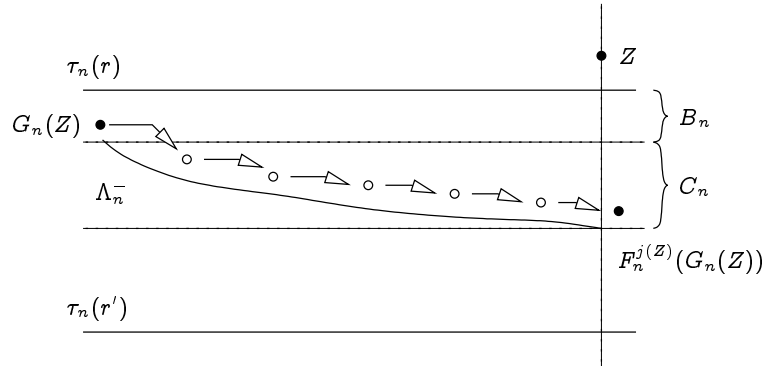


Figura 3.7: El mapa de retorno.

Sea $Z \in \mathbb{H}_n(r)$. Entonces sabemos que

$$\operatorname{Im}(G_n(Z)) \geq \tau_n(r) - B_n$$

Sea Λ_n^- es el gráfico de una primitiva de $-2u_n$, que podemos suponer pasa por el punto $(\operatorname{Re}(G_n(Z)), \tau_n(r) - B_n)$. Luego Λ_n^- tiene pendiente negativa y corta a la recta vertical $\operatorname{Re}(Z)$ en una altura superior a

$$\tau_n(r) - B_n - C_n$$

Mientras un iterado de $G_n(Z)$ por F_n tenga parte real menor que $\operatorname{Re}(Z)$, podemos iterar una vez más. Como

$$\operatorname{Re}(F_n(Z)) \leq \operatorname{Re}(Z) + \frac{9}{10}$$

existe un último iterado que tiene parte real menor que $\operatorname{Re}(Z)$. El siguiente iterado tiene parte imaginaria mayor que $\tau_n(r')$. Este es el iterado $j(Z)$ que buscamos. $\square$

3.1.3. Renormalización

El objetivo de ésta sección es demostrar lo siguiente.

Proposición 3.1.12. *Sean $\frac{1}{A} < r_1 < r_2 < 1$. Para n suficientemente grande se verifica lo siguiente. Dado un punto $Z \in \mathbb{H}_n(r_1)$, existe una sucesión de enteros $\{j_\ell\}_{\ell \geq 0}$ tal que para todo ℓ y todo $0 \leq j \leq j_\ell$, está definido el iterado*

$$F_n^j \circ G_n \circ F_n^{j_{\ell-1}} \circ G_n \circ \cdots \circ F_n^{j_1} \circ G_n \circ F_n^{j_0}(Z)$$

y pertenece a $\mathbb{H}_n(r_2)$.

La prueba se basa en el método de renormalización de Douady-Ghys-Yoccoz. (Ver [10, 36].

Construcción de una superficie de Riemann

La construcción que vamos a hacer se basa en el hecho de que el mapa F_n está cerca de la rotación. Empezaremos viendo algunos lemas en el caso general.

Consideremos un mapa $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ univalente³ y cercano a la rotación de ángulo $\alpha \in (0, 1)^4$: existe $0 < \delta < 1/2$ tal que

$$|F(Z) - Z - \alpha| \leq \alpha\delta \quad \text{y} \quad |F'(Z) - 1| \leq \delta$$

Además supondremos que F conmuta con la traslación y que es tangente a $Z + \alpha$ en el infinito. Esto es, existe $u : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ -periódica con

$$F(Z) = Z + \alpha + u(Z) \quad \text{y} \quad u(Z) \rightarrow 0 \text{ cuando } \operatorname{Im}(Z) \rightarrow +\infty$$

Lema 3.1.13. *Consideremos la recta $\ell = i\mathbb{R}$. La unión de las curvas $\ell \cup F(\ell) \cup [0, F(0)]$ es el borde de un dominio de Jordan $\mathcal{U}$. El cociente de pegar ℓ con $F(\ell)$ a travez de F es una superficie con borde homeomorfa a $\mathbb{D}^*$, cuyo interior es una superficie de Riemann isomorfa a $\mathbb{D}^*$.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{U}$ está bien definido. Para empezar, como $|F'(Z) - 1| \leq \delta$ tenemos que la tangente a la curva $F(\ell)$ forma un ángulo con la vertical menor o igual que $\arcsin(\delta) \leq \frac{\pi}{2}\delta < \frac{\pi}{4}$.

Esto implica que $F(\ell)$ corta a una recta, de ángulo con la horizontal entre $\frac{-\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{4}$, a lo sumo una vez.

³En las condiciones de más abajo es fácil ver que F se extiende inyectivamente a $\overline{\mathbb{H}}$.

⁴En esta sección α no tiene nada que ver con el que teníamos antes.

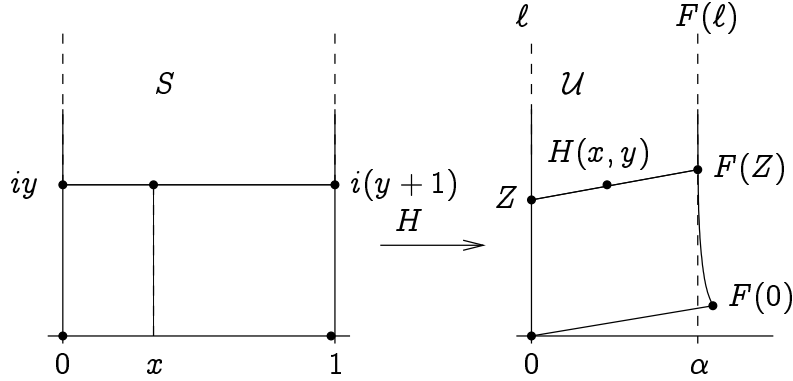


Figura 3.9: El mapa H .

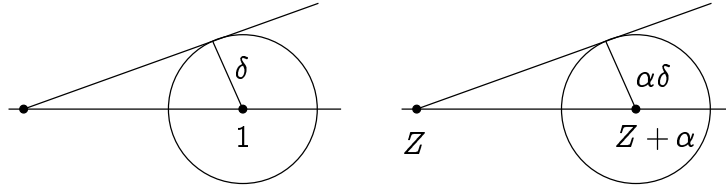


Figura 3.8: Estimación del ángulo.

Como $|F(Z) - Z - \alpha| \leq \alpha\delta$, el segmento $[Z, F(Z)]$ forma un ángulo con la horizontal menor o igual también que $\frac{\pi}{4}$. En particular el segmento $[0, F(0)]$ corta a $F(\ell)$ sólo en $F(0)$.

Del mismo modo, los segmentos $[Z, F(Z)]$ cortan a las rectas, de ángulo con la vertical entre $\frac{-\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{4}$, a lo sumo una vez. Ésto implica que $[0, F(0)]$ corta a ℓ sólo en 0. Además es claro que ℓ y $F(\ell)$ no se cortan. Luego $\ell \cup F(\ell) \cup [0, F(0)]$ es una curva de Jordan que bordea un dominio de Jordan $\mathcal{U}$.

El segmento $[Z, F(Z)]$ corta a $\ell \cup F(\ell)$ sólo en Z y $F(Z)$. Tampoco puede cortar al segmento $[0, F(0)]$ como se muestra en el dibujo. Luego $[Z, F(Z)] \subset \mathcal{U}$.

Denotemos por $S = \{Z = x + iy : 0 < x < 1, y > 0\}$ la banda vertical en $\mathbb{H}$, y consideremos el mapa $H : \bar{S} \rightarrow \bar{\mathcal{U}}$ dado por

$$H(x, y) = (1 - x) \cdot Z + x \cdot F(Z), \quad \text{con } Z = i\alpha y$$

Es decir, H mapea el segmento $[iy, i(y+1)]$ en el segmento $[Z, F(Z)]$. El diferencial de H está dado por

$$\begin{pmatrix} F_1(i\alpha y) & \alpha x F_{1y}(i\alpha y) \\ F_2(i\alpha y) - \alpha y & \alpha x F_{2,y}(i\alpha y) + (1 - x)\alpha \end{pmatrix}$$

donde hemos puesto $F = F_1 + iF_2$. Entonces

$$DH - \alpha \text{Id} = \begin{pmatrix} F_1(i\alpha y) - \alpha & \alpha x F_{1y}(i\alpha y) \\ F_2(i\alpha y) - \alpha y & \alpha x F_{2,y}(i\alpha y) - \alpha x \end{pmatrix}$$

Recordando que $F_{1y} = -F_{2x}$, $F_{2y} = F_{1x}$, y las hipótesis hechas a F , vemos que $\|DH - \alpha \text{Id}\| \leq \alpha\delta < \alpha/2$, que a su vez implica que H es inyectiva.

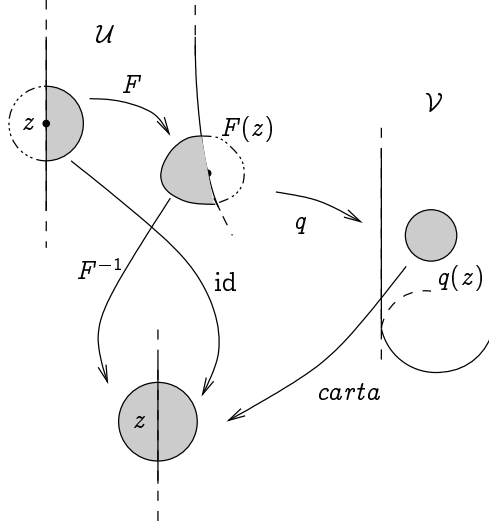


Figura 3.10: Estructura analítica de $\mathcal{V}$.

La imagen de H es un abierto conexo contenido en $\mathcal{U}$, que tiene el mismo borde que $\mathcal{U}$. Luego H es un homeomorfismo de $\bar{S}$ en $\bar{\mathcal{U}}$.

Sea $q : \bar{\mathcal{U}} \rightarrow \bar{\mathcal{U}}/F := \bar{\mathcal{V}}$ el mapa cociente. Como $F(H(Z)) = H(Z + 1)$, tenemos que H induce un homeomorfismo $H_F : \bar{S}/T \sim \bar{\mathbb{H}}/\mathbb{Z} \rightarrow \bar{\mathcal{V}}$.⁵ Concluimos de aquí que $\bar{\mathcal{V}}$ es una superficie con borde, homeomorfa al cilindro $\bar{\mathbb{H}}/\mathbb{Z}$. El borde es precisamente $q([0, F(0)])$.

Por otro lado tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial Z} = \frac{1}{2} \cdot (F(i\alpha y) - i\alpha y + \alpha x(F'(i\alpha y) - 1) + \alpha)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{Z}} = \frac{1}{2} \cdot (F(i\alpha y) - i\alpha y - \alpha x(F'(i\alpha y) - 1) - \alpha)$$

de donde

$$\left| \frac{\partial H}{\partial Z} - \alpha \right| \leq \alpha \delta$$

$$\left| \frac{\partial H}{\partial \bar{Z}} \right| \leq \alpha \delta$$

De ésto podemos estimar el coeficiente de dilatación de H ,

$$\left| \frac{\partial H / \partial \bar{Z}}{\partial H / \partial Z} \right| \leq \frac{\delta}{1 - \delta} < 1$$

Como $0 < \delta < 1/2$, vemos que H es quasiconforme, con un coeficiente de dilatación que sólo depende de δ . Esto prueba que H_F es quasiconforme también.

Como F es analítica, $\mathcal{V}$ el interior de $\bar{\mathcal{V}}$, hereda una estructura de superficie de Riemann (ver dibujo). Es quasiconformemente homeomorfa a $\mathbb{H}/\mathbb{Z} \sim \mathbb{D}^*$, lo cual implica que es conformemente equivalente a ésta. $\square$

⁵Aquí T es la traslación $Z \mapsto Z + 1$.

Volviendo a nuestro caso concreto, tomemos n suficientemente grande para que F_n esté definida en $\text{Im}(Z) \geq \tau_n(r_2) - \frac{1}{10}$, y que

$$|F_n(Z) - Z - 1| \leq \delta_n < \frac{1}{10} \quad \text{y} \quad |F'_n(Z) - 1| \leq \delta_n < \frac{1}{10}, \quad \text{para } \text{Im}(Z) > \tau_n(r_2) - \frac{1}{10}$$

Sea $Z_0 = X_0 + iY_0 \in \mathbb{H}_n(r_1)$. Vamos a construir una superficie de Riemann mediante F_n de la misma⁶ manera que arriba. Necesitaremos hacer otras consideraciones para más adelante, pero la construcción es exactamente la misma.

Consideremos el punto

$$P_n = X_0 + i \left(\tau_n(r_2) - \frac{1}{10} \right)$$

Unimos la recta $\ell_n = \{it : t > \text{Im}(P_n)\}$ con su imagen $F_n(\ell_n)$ por el segmento $[P_n, F(P_n)]$ para formar una curva de Jordan que encierra una región simplemente conexa $\mathcal{U}_n \subset \mathbb{C}$.

Si identificamos en $\overline{\mathcal{U}}_n$ mediante F_n los puntos de ℓ_n con los de $F_n(\ell_n)$, obtenemos una superficie con borde que denotamos por $\overline{\mathcal{V}}_n$. Sea $\iota_n : \overline{\mathcal{U}}_n \rightarrow \overline{\mathcal{V}}_n$ la proyección canónica. Como F_n es analítica, el interior de $\overline{\mathcal{V}}_n$, que denotamos por $\mathcal{V}_n$, es una superficie de Riemann isomorfa a $\mathbb{D}^*$.

Bosquejo de lo que sigue

En lo que sigue vamos a construir el renormalizado de F_n . Tomemos $r_1 < r_3 < r_2$ y consideremos el punto

$$P'_n = X_0 + i \left(\tau_n(r_3) + \frac{1}{10} \right)$$

Denotamos por $\mathcal{U}'_n$ los puntos de $\mathcal{U}_n$ que están por encima del segmento $[P'_n, F_n(P'_n)]$, y sea $\mathcal{V}'_n = \iota_n(\mathcal{U}'_n)$.

Aplicamos el lema 3.1.8 con $r = r_3$ y $r' = r_2$. De este modo, si n es suficientemente grande, para todo punto $Z \in \mathcal{U}'_n \subset \mathbb{H}_n(r_3)$ existe un entero $j(Z)$ tal que, para todo $j \leq j(Z)$, el iterado $F_n^j(G_n(Z))$ está definido y pertenece a $\mathbb{H}_n(r_2)$. Más aún, es fácil ver que $F_n^{j(Z)}(G_n(Z)) = W \in \mathcal{U}_n$.

Esto define un mapa $g_n : \mathcal{V}'_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ en el cociente; que se puede ver es holomorfo y univalente. Mediante el isomorfismo ϕ_n podemos pensar a g_n definido en un entorno abierto de 0 en $\mathbb{D}$, con $g_n(0) = 0$. Como

$$F_n(Z) = Z + 1 + o(1) \quad \text{y} \quad G_n(Z) = Z - A_n - \theta + o(1) \quad \text{cuando } \text{Im}(Z) \rightarrow +\infty$$

el multiplicador de G_n en 0 es

$$g'_n(0) = e^{-2\pi i(A_n + \theta)} = e^{-2\pi i\theta}$$

Denotemos por $\zeta_n = \phi_n \circ \iota_n(Z_0)$. Lo que probaremos es que la órbita del punto ζ_n es infinita bajo la iteración de g_n . Para ésto vamos a probar que ζ_n pertenece al disco de Siegel de g_n ⁷.

Sea d_n el radio del disco más grande contenido en $\phi_n(\mathcal{V}'_n)$. Como g_n es univalente en $D(0, d_n)$, el teorema de Yoccoz nos garantiza que existe una constante $C = C(\theta) > 0$ ⁸, tal que el disco de Siegel de g_n contiene al disco $D(0, Cd_n)$. Por otro lado, veremos que $|\zeta_n| = o(d_n)$ ⁹.

⁶Hay algunas diferencias menores, por ejemplo el F_n conmuta con la traslación por $\frac{1}{\epsilon_n q_n}$ y no con T .

⁷Recordar que θ es un número de Brjuno.

⁸Depende sólo de θ .

⁹Ésto es básicamente porque $\tau_n(r_1) - \tau_n(r_3) \rightarrow +\infty$ exponencialmente respecto de q_n .

La prueba de la proposición 3.1.12 termina así. Qué quiere decir que ζ_n tiene órbita infinita por g_n ?

Cuando iteramos por g_n hacemos lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
Z_0 & \xrightarrow{G_n} & \bullet \in \mathbb{H}_n(r_2) & \xrightarrow{F_n} & \bullet \in \mathbb{H}_n(r_2) & \xrightarrow{F_n} & \cdots \xrightarrow{F_n} Z_1 \in \mathbb{H}_n(r_2) \\
Z_1 & \xrightarrow{G_n} & \bullet \in \mathbb{H}_n(r_2) & \xrightarrow{F_n} & \bullet \in \mathbb{H}_n(r_2) & \xrightarrow{F_n} & \cdots \xrightarrow{F_n} Z_2 \in \mathbb{H}_n(r_2) \\
& & & & \vdots & & \\
Z_n & \xrightarrow{G_n} & \bullet \in \mathbb{H}_n(r_2) & \xrightarrow{F_n} & \bullet \in \mathbb{H}_n(r_2) & \xrightarrow{F_n} & \cdots \xrightarrow{F_n} Z_{n+1} \in \mathbb{H}_n(r_2) \\
& & & & \vdots & &
\end{array}$$

Cada vez que iteramos por F_n o G_n estamos aplicando $f_n^{q_n}$ o $f_n^{q_n-1}$. Para $0 \leq j \leq q_n$ los iterados de f_n pertenecen a $D_{r'}$ para $r' > r_2$. Esto termina la prueba.

El lector que esté satisfecho con ésto, puede pasar sin problema al siguiente capítulo. Para aquellos que deseen completar los detalles, en las siguientes secciones construimos el mapa renormalizado (de una forma ligeramente diferente) y completamos los detalles de la demostración.

Construcción del mapa renormalizado

Sea $\phi_n : \mathcal{V}_n \rightarrow \mathbb{D}^*$ un isomorfismo conforme. Cubrimos $\mathbb{D}^*$ con $\mathbb{H}$ mediante el mapa exponencial $\exp(2\pi i \epsilon_n q_n Z)$. Entonces podemos levantar $\phi_n \circ \iota_n$ a un mapa univalente $L_n : \mathcal{U}_n \rightarrow \mathbb{H}$. Además L_n se extiende a un homeomorfismo en el borde de $\mathcal{U}_n$.¹⁰ Como el isomorfismo ϕ_n está univocamente determinado a menos de post-composición con rotaciones, L_n está determinada a menos de traslaciones reales. Podemos elegir ϕ_n y L_n de modo que $L_n(P_n) = 0$. Por último, es fácil ver que

$$\forall Z \in \ell_n, \quad L_n(F_n(Z)) = L_n(Z) + \frac{1}{\epsilon_n q_n}$$

Para entender el significado del mapa L_n es útil pensar en la rotación. Es decir, si el mapa F_n fuese exactamente la traslación $Z + 1$, el mapa L_n sería el mapa lineal $\frac{1}{\epsilon_n q_n}(Z - i\text{Im}(P_n))$. Cuando miramos, por ejemplo el mapa de retorno a $\mathcal{U}_n$, obtenemos una dinámica definida en una escala pequeña comparada con la del mapa F_n . Luego L_n no es más que un «rescalado» de $\mathcal{U}_n$, que lo vuelve al tamaño original.

Sea Λ_n el gráfico de una primitiva U_n de $-2u_n$ que pasa por el punto $X_0 + i\tau_n(r_2)$. Definimos el conjunto

$$\mathcal{W}_n = \{x + iy : X_0 - 4\pi T_n < x < X_0, y \geq U_n(x)\}$$

Esto es, los puntos de la banda vertical $X_0 - 4\pi T_n < x < X_0$ que están por encima de Λ_n . De las estimaciones que hicimos antes, sabemos que, para n grande, los puntos de Λ_n tienen parte imaginaria menor que $\tau_n(r_2) + C_n$.

Recordar que tenemos $r_1 < r_3 < r_2$ y

$$P'_n = X_0 + i \left(\tau_n(r_3) + \frac{1}{10} \right)$$

¹⁰El borde es una curva de Jordan.

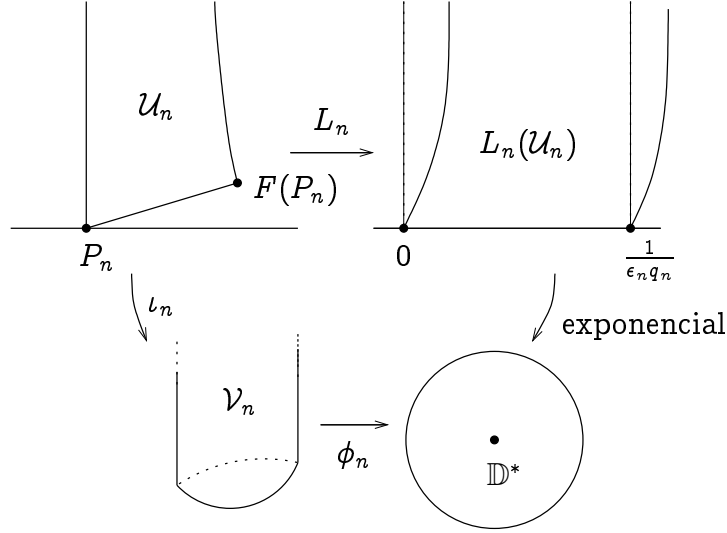


Figura 3.11: El mapa L_n

También teníamos $\mathcal{U}'_n$, los puntos de $\mathcal{U}_n$ que están por encima del segmento $[P'_n, F_n(P'_n)]$, y $\mathcal{V}'_n = \iota_n(\mathcal{U}'_n)$. Como los puntos de $\mathcal{U}'_n$ tienen parte imaginaria mayor que $\tau_n(r_3)$, tenemos que $G_n(\mathcal{U}'_n) \subset \mathcal{U}'_n \cup \mathcal{W}_n$.¹¹

De la demostración del lema 3.1.3, se deduce que todo punto de $\mathcal{W}_n$ tiene un iterado que pertenece a $\mathcal{U}_n$: existe¹² k tal que $F_n^k(Z) = Z' \in \mathcal{U}_n$. Esto nos permite extender L_n a todo $\mathcal{W}_n \cup \mathcal{U}_n$ poniendo $L_n(Z) = Z' - \frac{k}{\epsilon_n q_n}$.

Lema 3.1.14. *Podemos extender L_n a un mapa univalente en $\mathcal{W}_n \cup \mathcal{U}_n$, que conjuga F_n con la traslación $Z \mapsto Z + \frac{1}{\epsilon_n q_n}$.*

Demostración. Deberíamos comentar sobre la continuidad. Los puntos de discontinuidad de k (la cantidad necesaria de iterados para llegar a $\mathcal{U}_n$) son aquellos que caen sobre ℓ_n . Luego para un tal punto tenemos

$$L_n(Z) = L_n(F_n^k(Z)) - \frac{k}{q_n \epsilon_n} = L_n(F_n^{k+1}(Z)) - \frac{1}{q_n \epsilon_n} - \frac{k}{q_n \epsilon_n} = L_n(F_n^{k+1}(Z)) - \frac{k+1}{q_n \epsilon_n}$$

Luego L_n es continua sobre tales puntos. Como las preimágenes de ℓ_n por F_n son curvas analíticas, son removibles para la analiticidad. $\square$

Necesitamos saber cómo distorciona la altura de los puntos el mapa L_n . Para la demostración del siguiente lema ver [4, 36]. La distancia de F_n a la traslación $Z + 1$ es menor que δ_n , y tiende a cero a medida que aumenta la parte imaginaria¹³. Ésto implica que el mapa L_n está cerca del mapa lineal $\frac{1}{q_n \epsilon_n}(Z - i\text{Im}(P_n))$.

Lema 3.1.15. *Para todo $Z \in \mathcal{U}_n$ tenemos que*

$$\text{Im}(Z) - \tau_n(r_2) + \frac{1}{10} - 2\delta_n \leq \epsilon_n q_n \text{Im}(L_n(Z)) \leq \text{Im}(Z) - \tau_n(r_2) + \frac{1}{10} + 2\delta_n$$

¹¹Tomamos n grande de modo que $\tau_n(r_3) - B_n - C_n \geq \tau_n(r_2)$.

¹²Tomamos el menor de todos.

¹³De hecho se puede probar fácilmente que la distancia $|F_n(Z) - Z - 1|$ decae exponencialmente con $\text{Im}(Z)$.

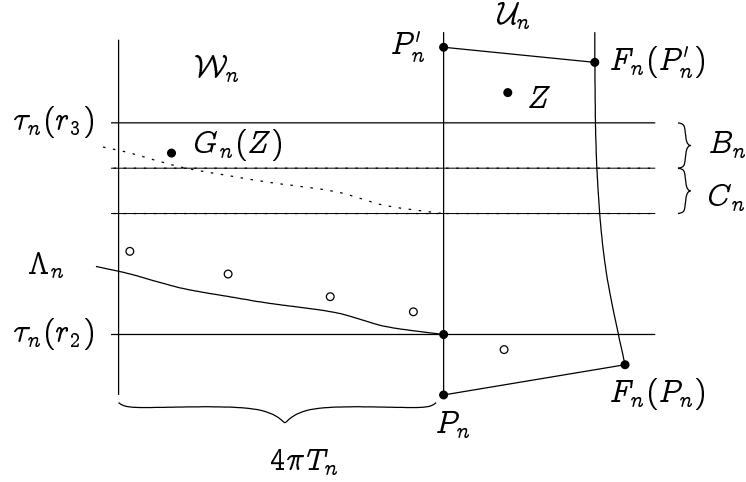


Figura 3.12: El conjunto $\mathcal{W}_n$.

Denotemos por $\mathcal{D}_n = L_n(\mathcal{U}'_n)$. Entonces definimos $H_n : \mathcal{D}_n \rightarrow \mathbb{H}$ como el conjugado de G_n por L_n , es decir

$$H_n = L_n \circ G_n \circ L_n^{-1}$$

Del lema 3.1.15 se puede ver facilmente que todo punto $Z \in \mathbb{H}$, con

$$\text{Im}(Z) > \frac{\tau_n(r_3) - \tau_n(r_2) + 1/10 + 2\delta_n}{\epsilon_n q_n} := \eta_n$$

tiene algún trasladado $Z + \frac{k}{\epsilon_n q_n}$ en $\mathcal{D}_n$, el dominio de H_n . Esto es,

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\mathcal{D}_n + \frac{k}{\epsilon_n q_n} \right) \supset \{\text{Im}(Z) > \eta_n\}$$

Como G_n conmuta con F_n , tenemos que H_n conmuta con la traslación $Z \mapsto Z + \frac{1}{q_n \epsilon_n}$. Luego podemos extender H_n a un mapa analítico definido en todo el semiplano $\{\text{Im}(Z) > \eta_n\}$.

Lema 3.1.16. *Tenemos que*

$$H_n(Z) = Z - \frac{A_n + \theta}{\epsilon_n q_n} + o(1) \quad \text{cuando } \text{Im}(Z) \rightarrow +\infty$$

Para una demostración de este lema ver [36]. Repetimos que se basa en el hecho de estar L_n cerca del mapa lineal. Definimos el mapa renormalizado de F_n como (que también llamamos de H_n)

$$Z \mapsto q_n \epsilon_n \left(H_n \left(\frac{Z}{q_n \epsilon_n} + i\eta_n \right) - i\eta_n \right)$$

De este modo obtenemos un mapa $H_n : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ univalente con las siguientes propiedades:

- H_n conmuta con la traslación $T : Z \mapsto Z + 1$.
- $H_n(Z) = Z - (A_n + \theta) + o(1)$ cuando $\text{Im}(Z) \rightarrow +\infty$.

Denotamos por $\zeta_n = q_n \epsilon_n (L_n(Z_0) - i\eta_n)$. Vamos a estudiar en la siguiente sección la órbita de éste punto por el mapa H_n .

La órbita de ζ_n

La idea ahora es ver que el punto ζ_n tiene órbita infinita cuando lo iteramos por H_n . Para probar ésto, mostraremos que para n grande, ζ_n pertenece al disco de Siegel de H_n .

Recordemos el teorema de Yoccoz¹⁴:

Teorema 3.1.17 (Yoccoz). *Sea $H : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ univalente, con $H \circ T = T \circ H$ y $H(Z) = Z + \alpha + o(1)$ cuando $\text{Im}(Z) \rightarrow +\infty$. Sea K el conjunto de puntos $Z \in \mathbb{H}$ tales que $H^j(Z)$ está definido y pertenece a $\mathbb{H}$ para todo $j \geq 0$. Si denotamos por*

$$d = \max\{\text{Im}(Z) : Z \in K\}$$

entonces

$$d \leq C + \Phi(\alpha) = C(\alpha)$$

donde C es una constante universal y Φ es la función de Brjuno-Yoccoz.

Entonces sabemos que existe una constante $C = C_\theta$ tal que:

si $\text{Im}(Z) > C$, entonces Z está en el disco de Siegel de H_n .

Probemos que para n grande, $\text{Im}(\zeta_n) > C$. En efecto por el lema 3.1.15 sabemos que

$$\text{Im}(\zeta_n) \geq \tau_n(r_1) - \tau_n(r_3) - 4\delta_n \rightarrow +\infty$$

3.1.4. Apéndice

Demostración de la proposición 3.1.6

Para empezar según vimos en el lema 3.1.3, para todo $r_1 < r_2 < 1$ si n es suficientemente grande, entonces los primeros q_n iterados de f_n están definidos en D_{r_1} y pertenecen a D_{r_2} . En particular para todo $r < 1$, si n es suficientemente grande, $f_n^{q_n}$ y $f_n^{q_n-1}$ están definidos en D_r . Faltaría probar que

$$\forall z \in D_r^*, \quad f_n^{q_n} \text{ y } f_n^{q_n-1} \text{ estan en } \Omega_n - \{0\}$$

Para ver ésto y los demás puntos de la proposición empezamos por

Lema 3.1.18. *Existe una función holomorfa g_n definida en el mismo dominio que $f_n^{q_n}$ y tal que*

$$f_n^{q_n}(z) = z + \xi_n(z) \cdot g_n(z)$$

Más aún, para todo $\frac{1}{A} < r < 1$ la sucesión

$$\sup_{z \in D_r} |g_n(z)|$$

es sub-exponencial respecto de q_n .

Demostración. Sea C_n el conjunto formado por las raíces q_n -ésimas de ϵ_n . Sabemos que cuando $n \rightarrow +\infty$, $C_n \rightarrow C_A$ la circunferencia de radio $\frac{1}{A}$. Entonces para n suficientemente grande, $C_n \subset D_r$.

Por otro lado, cada raíz q_n -ésima de ϵ_n es un cero de $f_n^{q_n}(z) - z$, por lo que la existencia de g_n es clara.

¹⁴Ver [36, 27, 4]. Aquí α es un número de Brjuno.

Fijemos $r < r' < 1$ y suponemos n suficientemente grande tal que $f_n^{q_n}$ está definida en un entorno de $D_{r'}$ y toma valores en $\mathbb{D}$. Entonces tenemos que $|\xi_n(z)g_n(z)| \leq 2$ para todo $z \in D_{r'}$. Luego

$$\sup_{z \in D_r} |g_n(z)| \leq \sup_{z \in D_r} |g_n(z)| \leq \sup_{|z|=r'} |g_n(z)| \leq \frac{2}{\inf_{|z|=r'} |\xi_n(z)|}$$

Los ceros de ξ_n no están en $\{|z| = r'\}$, porque $\epsilon_n < r'^{q_n}$ para n grande. Más aún es fácil ver que $\frac{\epsilon_n}{r'^{q_n}} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$ y como

$$\inf_{|z|=r'} |\xi_n(z)| \geq 2\pi q_n r' (r'^{q_n} - \epsilon_n) = 2\pi q_n r'^{q_n+1} \left(1 - \frac{\epsilon_n}{r'^{q_n}}\right) := B_n$$

tenemos que $B_n \sim 2\pi q_n r'^{q_n+1}$, lo cual implica que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[q_n]{B_n} = r' < 1$$

y que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{z \in D_r} |g_n(z)| \right)^{1/q_n} \leq \frac{1}{r'}$$

Haciendo $r' \rightarrow 1$ obtenemos el resultado. □

El siguiente lema establece un resultado análogo para $f_n^{q_{n-1}}$.

Lema 3.1.19. *Existe una función holomorfa h_n definida en el mismo dominio que $f_n^{q_{n-1}}$ tal que*

$$e^{\frac{2\pi i}{q_n}} f_n^{q_{n-1}}(z) = z + \xi_n(z) \cdot h_n(z)$$

Más aún, para todo $\frac{1}{A} < r < 1$, la sucesión

$$\sup_{z \in D_r} |h_n(z)|$$

es sub-exponencial respecto de q_n .

Demostración. Recordar que estamos suponiendo que n es par, de donde $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = -1$. Esto implica que

$$q_{n-1} \frac{p_n}{q_n} = \frac{-1}{q_n} \pmod{1}$$

Como f_n actúa como la rotación de ángulo $\frac{p_n}{q_n}$ en las raíces q_n -ésimas de ϵ_n , tenemos que cada una de ellas es fija por $e^{\frac{2\pi i}{q_n}} f_n^{q_{n-1}}$. Esto prueba la existencia de h_n . La estimación en el módulo de h_n es completamente análoga a la anterior. □

Ahora estamos en condiciones de probar la proposición 3.1.6. Fijemos $\frac{1}{A} < r < 1$ y n suficientemente grande de modo que $f_n^{q_n}$ y $f_n^{q_{n-1}}$ están definidas en D_r y toman valores en $\mathbb{D}$.

Sea $z \in X_n(r)$ y $Z \in \mathbb{H}_n(r)$ tal que $\pi_n(Z) = z$. De los lemas anteriores tenemos que

$$|f_n^{q_n}(z) - z| \leq |\xi_n(z)| B_n$$

Sea $R_n = \min\left(\frac{1}{\epsilon_n q_n}, \tau_n(r)\right)$. Es claro que $R_n^{\frac{1}{q_n}} \rightarrow \min\left(A, \frac{1}{r}\right)$, por lo que R_n crece exponencialmente respecto de q_n . Como π_n es inyectiva en el disco $D(Z, R_n)$, el teorema $\frac{1}{4}$ de Koebe implica que la imagen de dicho disco (que está contenida en $\Omega_n - \{0\}$), contiene a $D\left(z, \frac{|\pi'_n(Z)|R_n}{4}\right)$. Como $\pi'_n(Z) = \xi_n(z)$, tenemos que si n es suficientemente grande de modo que $\frac{R_n}{4} \geq B_n$ ¹⁵, entonces $f_n^{q_n}(z)$ está en la imagen de π_n . El mismo razonamiento se aplica a $f_n^{q_n-1}$.

Entonces podemos levantar $f_n^{q_n}$ y $f_n^{q_n-1}$ a dos mapas $F_n, G_n : \mathbb{H}_n(r) \rightarrow \mathbb{H}$. El primer punto se cumple por definición y es fácil ver que el segundo también. Notar que como¹⁶

$$(f_n^{q_n})'(0) = e^{2\pi i \alpha_n q_n} = e^{2\pi i \epsilon_n q_n} \quad \text{y} \quad (f_n^{q_n-1})'(0) = e^{2\pi i \alpha_n q_n - 1} = e^{-2\pi i \epsilon_n q_n (A_n + \theta)}$$

podemos elegir estos levantados de forma tal que el tercer punto también se verifica.

Probemos el último punto. Sean $Z \in \mathbb{H}_n(r)$ y $z = \pi_n(Z)$. Como vimos antes, $f_n^{q_n}(z) \in D(z, |\pi'_n(Z)|B_n)$ y el mapa π_n es inyectivo en el disco $D(Z, R_n)$ y en todos sus trasladados por $Z \mapsto Z + \frac{1}{\epsilon_n q_n}$. Además para n suficientemente grande, vimos que

$$D(z, |\pi'_n(Z)|B_n) \subset D\left(z, \frac{|\pi'_n(Z)|R_n}{4}\right) \subset \pi_n(D(Z, R_n))$$

Como el cociente $\frac{B_n}{R_n} \rightarrow 0$, por el teorema de distorsión de Koebe, sabemos que existe $\kappa_n \rightarrow 1$ tal que

$$\pi_n^{-1}(D(z, |\pi'_n(Z)|B_n)) \subset D\left(Z + \frac{k}{\epsilon_n q_n}, B_n \kappa_n\right)$$

para cada una de las ramas de la inversa de π_n (que mandan $z \mapsto Z + \frac{k}{\epsilon_n q_n}$ para un cierto $k \in \mathbb{Z}$.)

Ésto implica que existe un entero k tal que

$$F_n(Z) - Z \in D\left(\frac{k}{\epsilon_n q_n}, B_n \kappa_n\right)$$

Como estos discos son disjuntos para n suficientemente grande, el entero k debe ser el mismo para todo $Z \in \mathbb{H}_n(r)$. Pero entonces debe ser $k = 0$, pues si no

$$|F_n(Z) - (Z + 1)| \geq R_n - 1 - B_n \kappa_n > 0 \quad \text{para } n \text{ grande}$$

lo que contradice que $F_n(Z) - Z - 1 = o(1)$ cuando $\text{Im}(Z) \rightarrow +\infty$. En conclusión,

$$|F_n(Z) - Z - 1| \leq 1 + B_n \kappa_n, \quad \forall Z \in \mathbb{H}_n(r)$$

lo cual prueba el último punto. La demostración para G_n es completamente análoga.

¹⁵Esto es posible porque B_n es sub-exponencial respecto de q_n .

¹⁶Un cálculo sencillo muestra que $q_{n-1}\alpha_n = -\epsilon_n q_n(A_n + \theta) + p_{n-1}$.

Mejorando la estimación anterior

Terminaremos esta sección con una última estimación, ésta asegura que las dinámicas de los mapas $f_n^{q_n}$ y el tiempo uno de ξ_n , son (a medida que crece n) más próximas una de la otra. Lo que vamos a probar es,

Demostración de la proposición 3.1.7. Comenzaremos por mejorar la estimación hecha en el lema 3.1.18. Teníamos que

$$f_n^{q_n}(z) = z + \xi_n(z)g_n(z), \quad \text{con} \quad \sup_{z \in D_r} |g_n(z)| \leq B_n$$

y B_n sub-exponencial respecto de q_n .

Lema 3.1.20. Para $\frac{1}{A} < r < 1$, existe una sucesión D_n sub-exponencial respecto de q_n , un número complejo μ_n y una función holomorfa k_n definida en el mismo dominio que $f_n^{q_n}$ tales que

$$f_n^{q_n}(z) = z + \xi_n(z)(\mu_n + (\epsilon_n - z^{q_n})k_n(z))$$

y

$$|\mu_n - 1| \leq |\epsilon_n|D_n, \quad \sup_{z \in D_r} |k_n(z)| \leq D_n$$

Demostración. Como las raíces q_n -ésimas de ϵ_n se corresponden con un ciclo de período q_n de P_{α_n} , tenemos que la derivada de $f_n^{q_n}$ es la misma en dichas raíces. Como es a su vez igual a $1 + g_n(\delta_n)$ donde $\delta_n^{q_n} = \epsilon_n$, tenemos que

$$g_n(z) = \mu_n + (\epsilon_n - z^{q_n})k_n(z)$$

con k_n holomorfa y definida en el mismo dominio que $f_n^{q_n}$, y $\mu_n = g_n(\delta_n)$. Evaluando en δ_n vemos que $|\mu_n| \leq B_n$, de donde

$$|(\epsilon_n - z^{q_n})k_n(z)| \leq 2B_n$$

Igual que en el lema 3.1.18, si tomamos $1 > r' > r$, tenemos que

$$\sup_{z \in D_r} |k_n(z)| \leq \sup_{z \in D_{r'}} |k_n(z)| = \sup_{|z|=r'} |k_n(z)| \leq \frac{2B_n}{\inf_{|z|=r'} |z^{q_n} - \epsilon_n|} := B'_n$$

y

$$B'_n \leq \frac{2B_n}{r^{q_n} - \epsilon_n}$$

De aquí deducimos que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[q_n]{B'_n} \leq \frac{1}{r'}$, y haciendo $r' \rightarrow 1$ tenemos que la sucesión

$$\sup_{z \in D_r} |k_n(z)|$$

es sub-exponencial respecto de q_n .

Como

$$\frac{f_n^{q_n}(z) - z}{\xi_n(z)} = \mu_n + (\epsilon_n - z^{q_n})k_n(z)$$

evaluando en $z = 0$ obtenemos que

$$\frac{e^{2\pi i q_n \epsilon_n} - 1}{2\pi i q_n \epsilon_n} = \mu_n + \epsilon_n k_n(0)$$

es decir

$$\mu_n - 1 = -\epsilon_n k_n(0) + \pi i q_n \epsilon_n + O(q_n^2 \epsilon_n^2)$$

Entonces

$$|\mu_n - 1| \leq |\epsilon_n|(|k_n(0)| + \pi q_n + O(q_n^2 \epsilon_n)) = |\epsilon_n| C_n$$

Es fácil ver que C_n es subexponencial respecto de q_n . □

Recordar que $F_n(Z) \in D(Z, B_n \kappa_n) := W_n$ y que π_n es inyectiva en $D(Z, R_n)$. Como $\frac{B_n \kappa_n}{R_n} \rightarrow 0$, por el teorema de distorsión de Koebe, existe $\kappa'_n \rightarrow 1$ tal que

$$\frac{\max_{W_n} |\pi'_n|}{\min_{W_n} |\pi'_n|} \leq \kappa'_n$$

El flujo de ξ_n en $\mathbb{H}$ es $Z \mapsto Z + t$. Luego como $\xi_n(\pi_n(Z)) = \pi'_n(Z)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_n(Z) + \xi_n(\pi_n(Z)) - \pi_n(Z + 1) &= \xi_n(\pi_n(Z)) - \int_0^1 \xi_n(\pi_n(Z + t)) dt \\ &= \xi_n(\pi_n(Z)) \cdot \left(1 - \int_0^1 \frac{\xi_n(\pi_n(Z + t))}{\xi_n(\pi_n(Z))} dt\right) \end{aligned}$$

Como¹⁷

$$\frac{1}{\kappa'_n} \leq \frac{\pi'_n(Z + t)}{\pi'_n(Z)} \leq \kappa'_n$$

tenemos que

$$1 - \int_0^1 \frac{\xi_n(\pi_n(Z + t))}{\xi_n(\pi_n(Z))} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \min_{W_n} |\pi'_n| \cdot |F_n(Z) - Z - 1| &\leq |\pi_n(F_n(Z)) - \pi_n(Z + 1)| = |f_n^{q_n}(\pi_n(Z)) - \pi_n(Z + 1)| \\ &\leq |\pi_n(Z) + \xi_n(\pi_n(Z)) - \pi_n(Z + 1)| + |\xi_n(\pi_n(Z))| \cdot (|\mu_n - 1| + |\epsilon_n - \pi_n(Z)^{q_n}| \cdot |k_n(\pi_n(Z))|) \\ &\leq \max_{W_n} |\pi'_n| \cdot (H_n + D_n \cdot (|\epsilon_n| + |\epsilon_n - \pi_n(Z)^{q_n}|)) \end{aligned}$$

con $H_n \rightarrow 0$. Por último obtenemos que

$$|F_n(Z) - Z - 1| \leq \kappa'_n \cdot (H_n + D_n \cdot (|\epsilon_n| + |\epsilon_n - \pi_n(Z)^{q_n}|))$$

Como $|\pi_n(Z)| \leq r < 1$ y B_n es sub-exponencial respecto de q_n , es fácil ver que ésto implica la primera afirmación del lema. Para la segunda basta considerar $1 > r' > r$ y utilizar la primer afirmación junto con la estimativa de Cauchy para la derivada. □

¹⁷No es necesario pero como $B_n \rightarrow +\infty$ podemos aplicar Koebe con la misma constante κ'_n .

Demostración de los lemas 3.1.10 y 3.1.11

Recordar la estimación que usamos en la prueba del lema 3.1.7. Podemos resumir aquella estimación de la siguiente manera: existe una sucesión B'_n subexponencial respecto de q_n , tal que para n grande se tiene

$$|F_n(Z) - Z - 1| \leq B'_n (\epsilon_n + |\epsilon_n - \pi_n(Z)^{q_n}|)$$

Si ponemos $T_n = \frac{1}{2\pi i q_n^2 \epsilon_n}$ es fácil ver que

$$\pi_n(Z)^{q_n} = \frac{\epsilon_n}{1 - e^{\frac{-iZ}{T_n}}}$$

Luego

$$B'_n (\epsilon_n + |\epsilon_n - \pi_n(Z)^{q_n}|) \leq B'_n \epsilon_n \left(2 + \frac{1}{|1 - e^{\frac{-iZ}{T_n}}|} \right)$$

Por otro lado, si ponemos $\rho_n = 1 + \frac{\epsilon_n}{r'^{q_n}}$ tenemos que

$$|1 - e^{\frac{-iZ}{T_n}}| \geq |\rho_n e^{\frac{i\operatorname{Re}(Z)}{T_n}} - 1|$$

Es decir,

$$B'_n \epsilon_n \left(2 + \frac{1}{|1 - e^{\frac{-iZ}{T_n}}|} \right) \leq B'_n \epsilon_n \left(2 + \frac{1}{|\rho_n e^{\frac{i\operatorname{Re}(Z)}{T_n}} - 1|} \right) \leq \frac{5B'_n \epsilon_n}{|\rho_n e^{\frac{i\operatorname{Re}(Z)}{T_n}} - 1|}$$

si n es grande, ya que $\rho_n \rightarrow 1$. Ponemos entonces

$$u_n(x) = \frac{5B'_n \epsilon_n}{|\rho_n e^{\frac{ix}{T_n}} - 1|}$$

Como $|\rho_n e^{\frac{ix}{T_n}} - 1| \geq \rho_n - 1$, tenemos que

$$u_n(x) \leq \frac{5B'_n \epsilon_n}{\rho_n - 1} = 5B'_n r'^{q_n} = \delta_n \rightarrow 0$$

Veamos ahora que para n grande, $\log u_n$ es $\frac{1}{2}$ -Lipschitz. Un cálculo muestra que

$$u'_n(x) = \frac{-5B'_n \epsilon_n \cdot \frac{\rho_n}{T_n} \sin\left(\frac{x}{T_n}\right)}{|\rho_n e^{\frac{ix}{T_n}} - 1|^3}$$

de donde

$$\frac{u'_n(x)}{u_n(x)} = \frac{\frac{-\rho_n}{T_n} \sin\left(\frac{x}{T_n}\right)}{|\rho_n e^{\frac{ix}{T_n}} - 1|^2} = \frac{-\rho_n}{T_n} \frac{\sin\left(\frac{x}{T_n}\right)}{\rho_n^2 + 1 - 2\rho_n \cos\left(\frac{x}{T_n}\right)}$$

Es fácil ver que el máximo de esta función se alcanza en $(\rho_n^2 + 1) \cos\left(\frac{x}{T_n}\right) - 2\rho_n = 0$, de donde

$$\left| \frac{u'_n(x)}{u_n(x)} \right| \leq \frac{\rho_n}{T_n(\rho_n^2 - 1)} \sim 2\pi q_n^2 r'^{q_n} \rightarrow 0$$

Lo que vamos a probar es que la sucesión

$$C_n := \int_{\operatorname{Re}(G_n(Z))}^{\operatorname{Re}(Z)} 2u_n(t)dt$$

es sub-exponencial respecto de q_n .

Recordemos primero que existe una sucesión B_n sub-exponencial respecto de q_n , tal que

$$|G_n(Z) - Z + A_n + \theta| \leq B_n \quad \text{para todo } Z \in \mathbb{H}_n(r')$$

En particular

$$\operatorname{Re}(G_n(Z)) \geq \operatorname{Re}(Z) - A_n - \theta - B_n$$

Como

$$q_n^2 \epsilon_n A_n = \frac{q_n}{q_n + \frac{q_n - 1}{A_n}} \rightarrow 1$$

para n grande tenemos que $A_n + \theta + B_n \leq 4\pi T_n$. Luego

$$C_n \leq \int_{\operatorname{Re}(Z) - 4\pi T_n}^{\operatorname{Re}(Z)} 2u_n(t)dt = 4 \int_{-\pi T_n}^{\pi T_n} u_n(t)dt$$

Haciendo el cambio de variables $x = t/T_n$ vemos que

$$C_n \leq \frac{10 B_n \epsilon_n}{\pi q_n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho_n^2 + 1 - 2\rho_n \cos(x)}} dx := B'_n$$

Una estimación delicada nos da

$$B'_n \sim \frac{20 B_n}{\pi q_n^2} \log \frac{1}{\rho_n - 1} \sim \frac{20 B_n}{\pi q_n} \log(r' A)$$

de donde B'_n , y por lo tanto C_n , es sub-exponencial respecto de q_n .

Capítulo 4

Control del conjunto poscrítico y promoción

4.1. Resultados preliminares: teorema de McMullen y control del conjunto poscrítico

En ésta sección vamos a trabajar con $P_\alpha : z \mapsto e^{2\pi i\alpha}z + z^2$ restringiendonos al caso en que $\alpha = [a_1, a_2, \dots]$ es un irracional de tipo acotado. Lo primero que haremos es bosquejar una construcción, introducida por Douady [10], de un modelo «de Blaschke» para el mapa cuadrático P_α . Este modelo ha sido utilizado en diferentes problemas, ver por ejemplo [28, 30, 35].

Para $\tau \in \mathbb{R}$ consideremos el siguiente producto de Blaschke:

$$B_\tau(z) = e^{2\pi i\tau} \cdot z^2 \frac{z-3}{1-3z}$$

Los puntos críticos de B_τ son 0, 1 e ∞ , todos de orden 2. Por lo tanto 0 e ∞ son puntos fijos superatractores de B_τ . Además es fácil ver que $B_\tau : S^1 \rightarrow S^1$ es un homeomorfismo analítico con un único punto crítico (en 1).

El número de rotación $r(\tau)$ de B_τ es una función continua y creciente de τ , y por lo tanto existe un único valor de $\tau = \tau(\alpha)$ tal que $r(\tau(\alpha)) = \alpha^1$. Fijamos entonces dicho valor de τ .

El disco $\mathbb{D}$ no es invariante pues $1/3$ es un polo de B_τ . La preimagen de $\mathbb{D}$ tiene dos componentes conexas, una dentro de $\mathbb{D}$ que se mapea 2 : 1 sobre $\mathbb{D}$ y la otra en $\mathbb{C} - \mathbb{D}$ que se mapea 1 : 1. El siguiente teorema hace posible la construcción (ver [S]).

Teorema 4.1.1 (Herman-Swiatek). *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un homeomorfismo analítico, que es el levantado de un homeomorfismo del círculo. Supongamos además que f tiene un punto crítico y que el número de rotación de $r(f)$ es irracional de tipo acotado. Entonces existe $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, homeomorfismo quasi-simétrico, también el levantado de un homeomorfismo del círculo, que conjuga f con la rotación $x \mapsto x + r(f)$.*

Aquí el término quasi-simétrico significa que existe una constante $C > 0$ tal que,

$$\text{para todo } x \in \mathbb{R}, \delta > 0 \quad \frac{|H(x+\delta) - H(x)|}{|H(x) - H(x-\delta)|} \leq C$$

Además esta constante sólo depende del número de rotación de f . La importancia del teorema radica en que un homeomorfismo quasi-simétrico del círculo se extiende a un homeomorfismo quasiconforme del disco $\overline{\mathbb{D}}$. Ver [30].

¹La unicidad es porque α es irracional.

Denotemos por $R_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha} z$. Entonces existe un homeomorfismo $h : S^1 \rightarrow S^1$ que conjuga B_τ con R_α y que se extiende a un homeomorfismo quasiconforme en $h : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$. Definimos entonces el mapa

$$F_\alpha(z) = \begin{cases} B_\tau(z) & \text{si } |z| \geq 1 \\ H^{-1} \circ R_\alpha \circ H(z) & \text{si } |z| \leq 1 \end{cases}$$

El mapa F_α es un cubrimiento ramificado del plano en sí mismo (no es más analítico), que tiene un punto crítico de orden dos en S^1 . Si tomamos el pull-back mediante H de la estructura compleja estandar en $\mathbb{D}$, obtenemos un campo de elipses con excentricidad acotada en $\mathbb{D}$. Mediante F_α extendemos este campo de elipses a las preimágenes de $\mathbb{D}$ y lo definimos igual a cero en el resto. La excentricidad del campo también está acotada pues F_α es conforme en el complemento de $\overline{\mathbb{D}}$. Por el teorema de Ahlfors-Bers existe un homeomorfismo quasiconforme $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que manda este campo de elipses en círculos (la estructura compleja estandar de $\mathbb{C}$.) Como el campo de elipses es invariante por F_α , el conjugado $\phi \circ F_\alpha \circ \phi^{-1} = G_\alpha$ es analítico. Con una normalización adecuada debemos tener $G_\alpha = P_\alpha$. Como el disco de Siegel de P_α es $\Delta = \phi(\mathbb{D})$ se deduce que

el punto crítico de P_α está en el $\partial\Delta$ y además $\partial\Delta$ es un quasicírculo.

En particular la clausura del conjunto poscrítico

$$\mathcal{PC}_\alpha = \{c_i\}, \quad c_i = P_\alpha^i(c_0), \quad c_0 = \frac{-e^{2\pi i\alpha}}{2}$$

es igual al $\partial\Delta$. Éste último por ser un quasicírculo tiene medida de Lebesgue cero.²

No vamos a explicar los detalles de lo que sigue, pero en [20] se utilizan estos resultados para probar el siguiente teorema. Notar que el conjunto de Julia relleno K_α es la unión del conjunto de Julia J_α y las preimágenes por P_α de Δ . Para cada $\delta > 0$ denotamos por

$$K(\delta) = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(P_\alpha^i(z), \Delta) \leq \delta, \forall i \geq 0\}$$

Teorema 4.1.2 (McMullen). *Todo punto de $\partial\Delta$ es un punto de densidad de Lebesgue de $K(\delta)$.*

Aquí la terminología es la siguiente: si $X \subset \mathbb{C}$ es un conjunto medible, decimos que $x \in \mathbb{C}$ es un punto de densidad de Lebesgue para X si

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(X \cap D(x, r))}{m(D(x, r))} = 1$$

Más aún, del teorema se deduce lo siguiente (ver [BC]): para $d > 0$ denotamos por

$$\eta(d) = \sup \left\{ \text{dens}_{D(z, d)} K(\delta) : z \notin \Delta \text{ y } \text{dist}(z, \partial\Delta) = d \right\}$$

Entonces

$$\eta(d) \rightarrow 1 \text{ cuando } d \rightarrow 0$$

es decir, el límite es uniforme cuando nos acercamos a $\partial\Delta$. Este resultado junto con el control del conjunto poscrítico que pasamos a explicar ahora nos permitirán promover el coeficiente 1/2 del capítulo anterior a 1.

Denotamos por

$$\partial(X, Y) = \sup_{x \in X} \text{dist}(x, Y)$$

²De hecho la diemsi3n de Hausdorff de $\partial\Delta$ es menor estricto que 2. Por resultados m3s generales consultar [38].

la semidistancia de Hausdorff entre los subconjuntos de $\mathbb{C}$. Para $N \geq 1$ entero definimos el conjunto

$$\mathcal{S}_N := \left\{ \alpha = [a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : \sup_i a_i < +\infty, a_i \geq N \right\}$$

Para la demostración del siguiente teorema ver [6, 17]:

Teorema 4.1.3 (Control del conjunto poscrítico). *Existe un entero $N \geq 1$ tal que si $\alpha' \in \mathcal{S}_N \rightarrow \alpha \in \mathcal{S}_N$ entonces*

$$\partial(\mathcal{PC}_{\alpha'}, \overline{\Delta}_{\alpha}) \rightarrow 0$$

donde Δ_{α} es el disco de Siegel de P_{α} .

El número N se llama constante de Inou-Shishikura. En otras palabras, para todo abierto V que contiene a Δ_{α} , si $\alpha' \in \mathcal{S}_N$ está suficientemente cerca de $\alpha \in \mathcal{S}_N$, entonces $\mathcal{PC}_{\alpha'} \subset V$. La prueba de este resultado se basa en un estudio detallado del comportamiento de las coordenadas de Fatou, cuando se perturba de una manera particular un mapa con un punto fijo parabólico. Para ser más precisos, la prueba utiliza resultados de Inou y Shishikura acerca de la renormalización parabólica, procedimiento de renormalización ampliamente estudiado por Shishikura con aplicaciones a una gran variedad de problemas. Ver [11, 17, 31, 32, 35].

4.2. Promoción

4.2.1. Enunciado

El objetivo de esta sección es promover el coeficiente $\frac{1}{2}$ del teorema *. Sea N la constante de Inou-Shishikura. Recordar la definición del conjunto $\mathcal{S}_N$.

Teorema 4.2.1. *Sean $\alpha \in \mathcal{S}_N$, $\epsilon > 0$, y $A > 1$ entero. Si denotamos por $A_n := A^{q_n}$ y*

$$\alpha_n := [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, A_n, N, N, \dots]$$

entonces para n suficientemente grande

$$\text{Area}(K_{\alpha_n}) \geq (1 - \epsilon) \text{Area}(K_{\alpha})$$

Recordamos que P_{α} tiene un disco de Siegel Δ en 0. Es sabido, que en estas circunstancias, las funciones $\alpha' \mapsto J_{\alpha'}$ y $\alpha' \mapsto \text{Area}(K_{\alpha'})$ son discontinuas en α . Lo que el teorema establece, es que cuando perturbamos el parámetro α en la forma particular indicada, entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Area}(K_{\alpha_n}) = \text{Area}(K_{\alpha})$$

El teorema * establece que al perturbar α , los puntos de Δ que permanecen en Δ bajo iteración por P_{α_n} , llenan la mitad (en medida) de cada parte abierta $U \subset \Delta$. Para promover este coeficiente $\frac{1}{2}$ a 1, será necesario considerar también los puntos que se escapan de Δ .

Es decir, los discos de Siegel Δ_n de los perturbados P_{α_n} , no llenan por sí solos el disco Δ .³ Para tal propósito necesitamos considerar los puntos de las pre-imagenes de Δ_n . Consideremos primero lo que ocurre en Δ . Vamos a probar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dens}_{\Delta} K_{\alpha_n} = 1$$

³Al menos no en principio.

Si uno se pregunta, por qué los puntos que se escapan de Δ son los que nos proveen la promoción? la respuesta es: el teorema de McMullen. Basicamente, la situación es la siguiente. Si $z_0 \in \Delta$, entonces su órbita entera (por P_{α_n}) permanece en Δ , y más aún su clausura es un círculo análogo invariante. Supongamos entonces que z_0 se escapa de Δ cuando iteramos por P_{α_n} . Podemos medir cuan lejos se escapa z_0 de la siguiente manera:

para $\delta > 0$ denotamos por

$$V(\delta) := \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, \Delta) < \delta\}$$

$$K(\delta) := \{z \in \mathbb{C} : P_{\alpha}^k(z) \in V(\delta), \forall k \geq 0\}$$

$$K_n(\delta) := \{z \in \mathbb{C} : P_{\alpha_n}^k(z) \in V(\delta), \forall k \geq 0\}$$

Supongamos entonces que $z_0 \in \Delta - K_n(\delta)$. Si n es grande, P_{α_n} está cerca de P_{α} , y la órbita de z_0 (ahora por P_{α_n}) se va escapando muy despacio. No sólo se necesitan una cantidad grande de iterados para que z_0 se escape, sino que la órbita de z_0 pasa mucho tiempo cerca de $\partial\Delta$.

Para $\delta_1 < \delta$ pequeño, el conjunto $K(\delta)$ tiene una alta densidad en $V(\delta_1)$. Esto, como veremos se traduce en una buena densidad para $K_n(\delta)$. Luego, los puntos cercanos a z_0 tienen una buena probabilidad de pertenecer a $K_n(\delta)$.

Es decir, aunque z_0 consigue escapar (iterado por P_{α_n}) la barrera δ , una buena proporción de puntos cerca de z_0 no. Este razonamiento nos permite comparar las densidades de los puntos que superan la barrera δ y la de los que no superan la barrera δ_1 .

Definimos $\rho_n : (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ la función dada por

$$\rho_n(\delta) = \text{dens}_{\Delta}(\mathbb{C} - K_n(\delta))$$

Proposición 4.2.2. *En las mismas hipótesis que en 4.2.1, tenemos que*

$$\forall \delta > 0, \quad \rho_n(\delta) \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow +\infty$.

La prueba se una consecuencia directa del siguiente lema

Lema 4.2.3. *Para todo $\delta > 0$, existen $0 < \delta_1 < \delta$ y una sucesión c_n de reales positivos, con $c_n \rightarrow 0$, tales que*

$$\rho_n(\delta) \leq \frac{3}{4}\rho_n(\delta_1) + c_n$$

La sucesión c_n y el número δ_1 dependen sólo de δ . Notar que trivialmente tenemos $\rho_n(\delta) \leq \rho_n(\delta_1)$. Por lo que el lema establece una caída importante en la densidad $\rho_n(\delta)$ respecto de $\rho_n(\delta_1)$ ⁴. Aquí en lugar del factor $\frac{3}{4}$ puede ponerse cualquier $\frac{1}{2} < \mu < 1$.

Demostración de la proposición 4.2.2. Sea

$$\rho(\delta) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \rho_n(\delta)$$

Por el lema 4.2.3, sabemos que existe una sucesión decreciente δ_n , tal que $\rho(\delta_{n-1}) \leq \frac{3}{4}\rho(\delta_n)$ para todo n . En otras palabras

$$\rho(\delta) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \rho(\delta_n) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

de donde $\rho(\delta) = 0$. □

⁴A menos de un error c_n que se hace cero en el límite.

4.2.2. Demostración del lema 4.2.3

El peaje

Consideremos el conjunto

$$W = \{z \in \mathbb{C} : 2\delta_1 \leq \text{dist}(z, \Delta) \leq 12\delta_1\}$$

Vamos a probar primero, que todo punto $z_0 \in \Delta$ que escapa la barera δ (es decir $z_0 \in \Delta - K_n(\delta)$), debe pasar necesáriamente por W .⁵

Para $\theta \in \mathbb{R}$, el conjunto de Julia relleno K_θ de P_θ está contenido en el disco $\overline{D}(0, 2)$. Luego

$$\max_{K_\theta} |P'_\theta(z)| < 6$$

Podemos tomar δ_1 suficientemente chico para que $|P'_\alpha(z)| < 6$ para todo $z \in \overline{V(2\delta_1)}$. Por otro lado, Δ es invariante por P_α . Por lo que si $z_0 \in \overline{V(2\delta_1)}$, entonces $P_\alpha(z) \in V(12\delta_1)$.

Como P_{α_n} converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$ a P_α cuando $n \rightarrow +\infty$, para n grande tenemos que

$$P_{\alpha_n}(\overline{V(2\delta_1)}) \subset V(12\delta_1)$$

Sea z_k el primer iterado de z_0 en $\mathbb{C} - V(2\delta_1)$. Como $z_{k-1} \in V(2\delta_1)$, tenemos que $z_k \in W$.

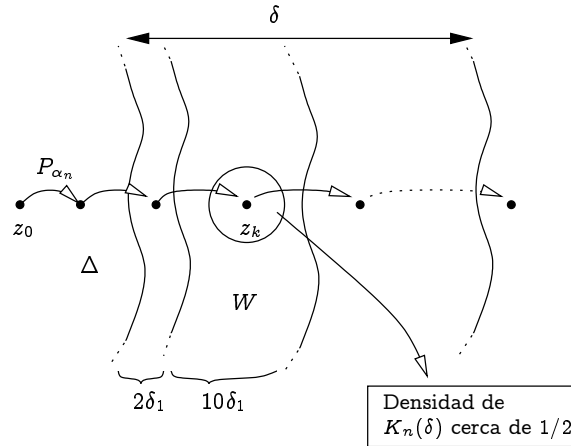


Figura 4.1: El peaje.

En otras palabras, si denotamos por

$$X_n := \{z \in \Delta : \exists k \geq 0 \text{ tal que } P_{\alpha_n}^k(z) \in W\}$$

entonces para δ_1 suficientemente chico y n suficientemente grande,

$$\Delta - K_n(\delta) \subset X_n \subset \Delta - K_n(\delta_1)$$

⁵Para δ_1 suficientemente pequeño y n suficientemente grande.

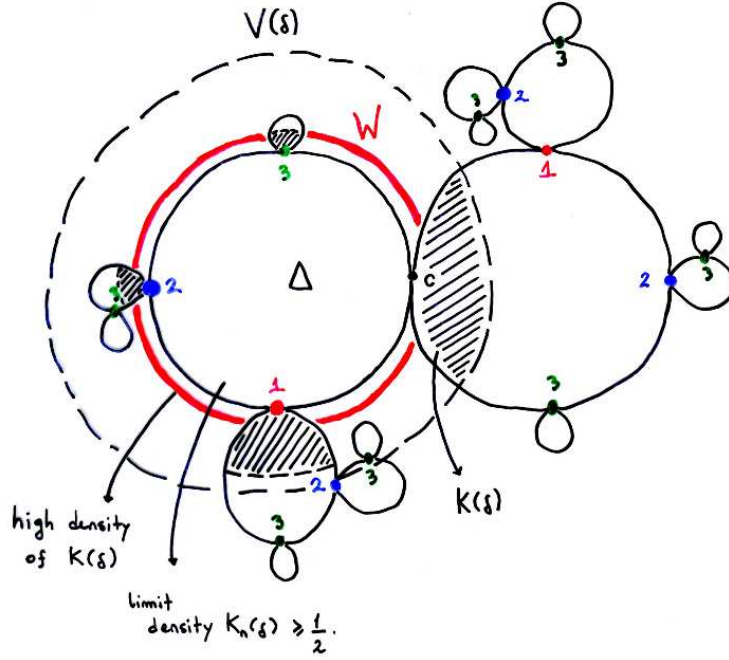


Figura 4.2: Los conjuntos W , $K(\delta)$ y $K_n(\delta)$.

El precio del peaje

Vamos a estimar en esta sección cual es la proporsión de puntos cercanos a z_0 , que no pueden superar la barrera δ . Como dijimos arriba, en W el conjunto $K(\delta)$ tiene una densidad alta. Precisemos esta afirmación: es claro que para medir la densidad del conjunto $K(\delta)$ debemos fijar una escala en la cual mirar. Además ésta debe ser tal, que podamos transferir esa buena densidad de $K(\delta)$ por la dinámica.

Para cada punto $w \in W$, tomamos el disco $D(w, \delta_1)$.⁶ No es difícil ver, que podemos tomar δ_1 suficientemente chico para que en este disco tengamos

$$\text{dens}_{D(w, \delta_1)}(K(\delta)) \geq 1 - \eta_0$$

Como los conjuntos $K_n(\delta)$ llenan la mitad de Δ , es esperable que llenen la mitad de cualquier cantidad finita de preimágenes del mismo. Pero una cantidad suficientemente grande de preimágenes de Δ aproxima a $K(\delta)$ ⁷, de donde concluimos que, para n suficientemente grande

$$\text{dens}_{D(w, \delta_1)}(K_n(\delta)) \geq \left(\frac{1}{2} - \eta_1\right) \cdot (1 - \eta_0)$$

Éste es basicamente el contenido del siguiente lema, dejamos la demostración para la sección 4.2.3.

Esta es una información local, sobre cada punto $z_0 \in \Delta - K_n(\delta)$. Para sumar las densidades respectivas y estimar la medida del conjunto entero, será conveniente expresar el resultado no para discos sino para entornos que se agrupen mejor.

⁶Es importante que el tamaño del disco es el mismo para todos los puntos $w \in W$.

⁷En términos de área.

Decimos que Q es un cuadrado diádico si

$$Q = \left[\frac{r}{2^s}, \frac{r+1}{2^s} \right] \times \left[\frac{p}{2^s}, \frac{p+1}{2^s} \right] \quad p, r, s \in \mathbb{Z}$$

Notar que el cuadrado diádico de lado más grande contenido en $D(a, r)$ que contiene a a , tiene lado al menos $\frac{r}{\sqrt{8}}$.

Lema 4.2.4. *Para todo $0 < \epsilon < 1$, si δ_1 suficientemente chico y n suficientemente grande lo siguiente se verifica. Sean*

1. $w \in W$,
2. $\phi : D(w, 3\delta_1/2) \rightarrow \mathbb{C}$ univalente,
3. $D = D(w, \delta_1)$, $r = \text{in-radius}(\phi(D), \phi(w))$ y
4. Q el cuadrado diádico más grande que contiene a $\phi(w)$ contenido en $D(\phi(w), r)$.

Entonces

$$\text{dens}_Q(\phi(K_n(\delta))) \geq \frac{1-\epsilon}{2}$$

Por otro lado, sabemos que

$$\partial(\mathcal{PC}(P_{\alpha_n}), \overline{\Delta}) \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow +\infty$, de modo que para n grande el conjunto poscrítico de P_{α_n} esta contenido en $V(\delta_1/2)$.

Sea $z_0 \in \Delta - K_n(\delta)$ y denotemos por $z_j = P_{\alpha_n}^j(z_0)$. Sabemos que existe $k \geq 1$ tal que $z_k \in W$ y $z_j \in V(2\delta_1)$ para $0 \leq j \leq k-1$. Como $\mathcal{PC}(P_{\alpha_n}) \subset V(2\delta_1)$ podemos definir para cada $0 \leq j \leq k-1$, la rama local de la inversa de $P_{\alpha_n}^{k-j}$ que manda z_k en z_j . Más aún, esta inversa la podemos extender a un mapa univalente

$$\phi_j : D(z_k, 3\delta_1/2) \rightarrow \mathbb{C}$$

Sea $D := D(z_k, \delta_1)$. Antes de aplicar el lema 4.2.4 veamos lo siguiente.

Lema 4.2.5. *Con las mismas notaciones de arriba, si δ_1 es chico y n es grande, entonces*

$$\phi_0(D \cap K_n(\delta)) \subset K_n(\delta)$$

Necesitaremos una cota en la distorsión de mapas univalentes. Por el teorema de distorsión de Koebe, existe una constante universal κ , tal que para todo mapa $\phi : D(a, 3r/2) \rightarrow \mathbb{C}$ univalente, con $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, entonces

$$\frac{\max_D |\phi'|}{\min_D |\phi'|} \leq \kappa$$

donde $D = D(a, r)$. Esta constante κ sólo depende del cociente de los radios de los discos, que en nuestro caso es $3/2$.

Demostración del lema 4.2.5. Debemos probar que si $w_k \in D \cap K_n(\delta)$, entonces $w_j = \phi_j(w_k) \in V(\delta)$. Por un lado, como $D \subset \mathbb{C} - V(\delta_1)$, tenemos que $\phi_j(D) \cap K_n(\delta_1) = \emptyset$. Pero como $z_j \in V(2\delta_1)$, existe un $y_j \in \Delta$ tal que $|z_j - y_j| < 2\delta_1$. Estimemos la distancia de y_j a $K_n(\delta_1)$.

Como para todo abierto $U \in \Delta$ tenemos que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{dens}_U(K_n(\delta_1)) \geq \frac{1}{2}$$

tenemos que

$$s_n := \sup_{y \in \Delta} \text{dist}(y, K_n(\delta_1)) \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow +\infty$. Si denotamos por $r_j = \text{in-radio}(\phi_j(D), z_j)$, esto último implica que

$$r_j \leq \text{dist}(z_j, K_n(\delta_1)) \leq 2\delta_1 + s_n$$

Está cota en r_j y la cota en la distorsión nos permiten concluir de la siguiente manera. Sea $R_j := \text{ex-radio}(\phi_j(D), z_j)$, esto es

$$R_j := \inf\{s > 0 : \phi_j(D) \subset D(z_j, s)\}$$

Tenemos que $R_j \leq \kappa r_j$, de donde $R_j \leq \kappa(2\delta_1 + s_n)$. Luego todo punto de $w \in \phi_j(D)$ verifica que

$$\text{dist}(w, \Delta) \leq R_j + \text{dist}(z_j, \Delta) \leq 2\delta_1 + \kappa(2\delta_1 + s_n) < \delta$$

para δ_1 chico y n grande. Además tenemos que $D \subset V(\delta)$ si $13\delta_1 < \delta$. $\square$

Se deduce de la demostración del lema, que en particular el radio r_0 del disco

$$D(z_0, r_0) \subset \phi_0(D)$$

es menor o igual que s_n porque $z_0 \in \Delta$. Es decir, está uniformemente acotado por una sucesión que tiende a cero.

Corolario 4.2.6. *Para todo punto $z_0 \in \Delta - K_n(\delta)$ existe un disco $D(z_0, r_0)$ tal que*

- $r_0 \leq s_n$,
- $D(z_0, r_0) \subset \mathbb{C} - K_n(\delta_1)$ y
- $\text{dens}_{Q_{z_0}}(K_n(\delta)) \geq \frac{1}{4}$, donde Q_{z_0} es el cuadrado diádico más grande contenido en $D(z_0, r_0)$.

Demostración. Aplicar el lema 4.2.4 al mapa ϕ_0 y al punto z_k , con ϵ suficientemente chico. $\square$

Sumando densidades

Lo que vamos hacer ahora es juntar todos los cuadrados Q_{z_0} obtenidos en la sección anterior. Sea $U \subset \Delta$ abierto, tal que ∂U tiene área cero. Vamos a probar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dens}_U K_n(\delta) = 1$$

Denotemos por

$$U(s_n) = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, U) < s_n\}$$

Consideremos la colección de todos los cuadrados $\{Q_z\}$ con $z \in U - K_n(\delta)$. Dos cuadrados diádicos, o bien son disjuntos o bien uno está contenido en el otro. Esto implica que podemos extraer una subcolección disjunta y numerable $\{Q_i\}$ de éstos tal que

$$U - K_n(\delta) \subset \bigcup_i Q_i$$

Luego

$$\text{Area}(U - K_n(\delta)) \leq \text{Area}\left(\bigcup_i Q_i - K_n(\delta)\right) = \sum_i \text{Area}(Q_i - K_n(\delta))$$

$$\leq \frac{3}{4} \sum_i \text{Area}(Q_i) = \frac{3}{4} \text{Area} \left(\bigcup_i Q_i \right)$$

Como cada cuadrado Q_i es disjunto de $K_n(\delta_1)$ y está contenido en $U(s_n)$, tenemos que

$$\text{Area} \left(\bigcup_i Q_i \right) \leq \text{Area}(U(s_n) - K_n(\delta_1)) = \text{Area}(U(s_n) - U) + \text{Area}(U - K_n(\delta_1))$$

Ponemos $\rho_n^U(\delta) = \text{dens}_U(\mathbb{C} - K_n(\delta))$ y

$$c_n(U) = \frac{3}{4} \cdot \frac{\text{Area}(U(s_n) - U)}{\text{Area}(U)}$$

De este modo obtenemos

$$\rho_n^U(\delta) \leq \frac{3}{4} \rho_n^U(\delta_1) + c_n(U)$$

Como ∂U tiene área cero y $s_n \rightarrow 0$ tenemos que $c_n \rightarrow 0$. En particular, esto prueba el lema 4.2.3 tomando $U = \Delta$. Notar que $\partial \Delta$ tiene área cero.

Demostración del teorema 4.2.1

Hemos probado que para todo abierto $U \in \Delta$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dens}_U(K_n(\delta)) = 1$$

Como $K_n(\delta) \subset K_{\alpha_n}$, de hecho tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dens}_U(K_{\alpha_n}) = 1 \quad (*)$$

Sabemos que:

- $P_{\alpha_n} \rightarrow P_\alpha$ localmente uniforme,
- $K_\alpha - J_\alpha = \bigcup_{\ell \geq 0} P_\alpha^{-\ell}(\Delta)$ y que
- $P_{\alpha_n}^{-1}(K_{\alpha_n}) = K_{\alpha_n}$.

Estas condiciones implican que (ver apéndice) podemos transferir (*) a las preimágenes de Δ . Esto es,

$$\text{dens}_{K_\alpha - J_\alpha}(K_{\alpha_n}) \rightarrow 1$$

cuando $n \rightarrow +\infty$. Como $\text{Area}(J_\alpha) = 0$, tenemos

$$\text{Area}(K_{\alpha_n}) \geq \text{Area}(K_{\alpha_n} \cap (K_\alpha - J_\alpha)) \rightarrow \text{Area}(K_\alpha - J_\alpha) = \text{Area}(K_\alpha)$$

es decir,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{Area}(K_{\alpha_n}) \geq \text{Area}(K_\alpha)$$

La otra desigualdad se deduce de la semicontinuidad superior.

4.2.3. Apéndice

Demostración del lema 4.2.4

Para $d > 0$ sea

$$\eta(d) := \sup_{\substack{z \notin \Delta \\ d = \text{dist}(z, \partial\Delta)}} \text{dens}_{D(z,d)}(\mathbb{C} - K(\delta))$$

Sabemos por el teorema ?? que $\eta(d) \rightarrow 0$ cuando $d \rightarrow 0$. Es sencillo ver que ésto implica

$$\hat{\eta}(\delta_1) := \sup_{z \in W} \text{dens}_{D(z,\delta_1)}(\mathbb{C} - K(\delta)) \rightarrow 0$$

cuando $\delta_1 \rightarrow 0$. Supongamos que δ_1 es suficientemente chico, de forma tal que $\hat{\eta}(\delta_1) < \eta_0$, para cierto η_0 que determinaremos después.

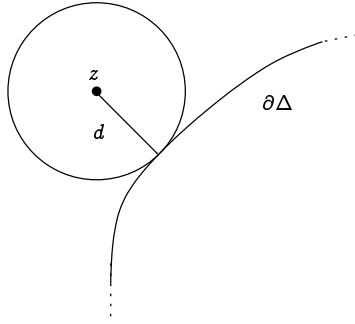


Figura 4.3: Alta densidad de $K(\delta)$ en $\partial\Delta$.

Sabemos por otro lado que los conjuntos $K_n(\delta)$ llenan la mitad de Δ . Queremos transferir ésto a $K(\delta)$. Pero para eso, precisamos aproximar $K(\delta)$ por un conjunto más estable bajo perturbaciones.

Para $\ell \geq 0$, denotemos por

$$\Delta^\ell = \left\{ z \in K(\delta) : P_\alpha^\ell(z) \in \Delta \right\}$$

Equivalentemente Δ^ℓ es el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ tales que $P_\alpha^j(z) \in V(\delta)$ para $0 \leq j < \ell$, y $P_\alpha^\ell(z) \in \Delta$. Luego los conjuntos Δ^ℓ , forman una sucesión creciente de abiertos. Además los puntos de $K(\delta)$ que no pertenecen eventualmente a Δ (bajo iteración por P_α), pertenecen a J_α . Es decir

$$\text{Area} \left(K(\delta) - \bigcup_{\ell \geq 0} \Delta^\ell \right) \leq \text{Area}(J_\alpha) = 0$$

Tomamos ℓ tal que

$$\sup_{z \in W} \text{dens}_{D(z,\delta_1)}(\mathbb{C} - \Delta^\ell) < \eta_0$$

Los conjuntos análogos para los mapas P_{α_n} son

$$\Delta_n^\ell = \left\{ z \in \mathbb{C} : P_{\alpha_n}^j(z) \in V(\delta) \text{ para } 0 \leq j < \ell, P_{\alpha_n}^\ell(z) \in \Delta \right\}$$

Para todo abierto $U \subset \Delta$, tenemos que

$$\liminf_n \text{dens}_U(K_{\alpha_n}) \geq \frac{1}{2}$$

También

$$P_\alpha^\ell : \Delta^\ell \rightarrow \Delta$$

$$P_{\alpha_n}^\ell : \Delta_n^\ell \rightarrow \Delta$$

y todo compacto de Δ^ℓ está eventualmente contenido en los conjuntos Δ_n^ℓ . Por último, si $z \in \Delta_n^\ell$ y $P_{\alpha_n}^\ell(z) \in K_n(\delta)$, entonces es claro que $z \in K_n(\delta)$. Estas condiciones implican⁸ lo siguiente: para todo abierto U con $\overline{U} \subset \Delta^\ell$ compacta,

$$\liminf_n \text{dens}_U(K_n(\delta)) \geq \frac{1}{2} \quad (*)$$

Esto es, los conjuntos $K_n(\delta)$, también llenan la mitad de cada parte abierta de Δ^ℓ .

Sean $w \in W$ y $\phi : D(w, 3\delta_1/2) \rightarrow \mathbb{C}$ univalente. Sea $r := \text{in-radio}(\phi(D), \phi(w))$, esto es

$$r = \sup \{s > 0 : D(\phi(w), s) \subset \phi(D)\}$$

Consideremos Q el cuadrado diádico más grande, contenido en el disco $D(\phi(w), r)$ y que contiene a $\phi(w)$. Como $r \geq \min_D |\phi'| \cdot \delta_1$, tenemos que

$$\text{Area}(Q) \geq \frac{r^2}{8} \geq \frac{\delta_1^2 \min_D |\phi'|^2}{8}$$

de donde

$$\text{dens}_Q(\phi(D - \Delta^\ell)) \leq \frac{8 \max_D |\phi'|^2 \text{Area}(D - \Delta^\ell)}{\min_D |\phi'|^2 \delta_1^2} \leq 8\pi\kappa^2\eta_0$$

Supongamos ahora que tenemos:

- $w_n \in W$,
- $\phi_n : D(w_n, 3\delta_1/2) \rightarrow \mathbb{C}$ univalentes, $D_n = D(w_n, \delta_1)$,
- $r_n := \text{in-radio}(\phi_n(D_n), \phi_n(w_n))$,
- Q_n es un cuadrado contenido en $\phi_n(D_n)$ de lado mayor o igual que $r_n/\sqrt{8}$.

Sea λ un punto límite de la sucesión

$$\text{dens}_{Q_n}(\phi_n(D_n \cap K_n(\delta)))$$

Poscomponiendo con mapas afines y tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que:

- $w_n \rightarrow w \in W$
- ϕ_n converge uniformemente en compactos de $D(w, 3\delta_1/2)$ a un mapa ϕ univalente en dicho disco.
- $r_n \rightarrow r := \text{in-radio}(\phi(D), \phi(w))$, donde $D = D(w, \delta_1)$.
- $Q_n \rightarrow Q \subset \phi(D)$.

⁸Consultar la sección 4.2.3.

Sea A abierto con $\overline{A} \subset D \cap \Delta^\ell$ compacta. Para n suficientemente grande

$$A \cap K_n(\delta) = A \cap D_n \cap K_n(\delta)$$

porque $A \subset D_n$. Por $(*)$, tenemos que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{dens}_A(D_n \cap K_n(\delta)) \geq \frac{1}{2}$$

Esto implica⁹ que:

$$\forall A \text{ abierto con } \overline{A} \subset \phi(D \cap \Delta^\ell) \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{dens}_A(\phi_n(D_n \cap K_n(\delta))) \geq \frac{1}{2}$$

Por último los cálculos:

$$\begin{aligned} \text{dens}_{Q_n}(\phi_n(D_n \cap K_n(\delta))) &= \frac{\text{m}(Q_n \cap \phi_n(D_n \cap K_n(\delta)))}{\text{m}(Q_n)} \\ &= \frac{\text{m}(Q \cap \phi_n(D_n \cap K_n(\delta)))}{\text{m}(Q)} \cdot \frac{\text{m}(Q)}{\text{m}(Q_n)} \cdot \frac{\text{m}(Q_n \cap \phi_n(D_n \cap K_n(\delta)))}{\text{m}(Q \cap \phi_n(D_n \cap K_n(\delta)))} \\ &\geq \frac{\text{m}(Q \cap \phi_n(D_n \cap K_n(\delta)))}{\text{m}(Q)} \cdot a_n \cdot b_n \cdot c_n \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{\text{m}(Q \cap \phi(D \cap \Delta^\ell) \cap \phi_n(D_n \cap K_n(\delta)))}{\text{m}(Q \cap \phi(D \cap \Delta^\ell))} \\ b_n &:= \frac{\text{m}(Q)}{\text{m}(Q_n)} \rightarrow 1 \\ c_n &:= \frac{\text{m}(Q \cap \phi(D \cap \Delta^\ell))}{\text{m}(Q \cap \phi_n(D_n \cap \Delta^\ell))} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Además tenemos que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq \frac{1}{2}$$

por lo que

$$\lambda \geq \frac{1}{2} \cdot \text{dens}_Q(\phi(D \cap \Delta^\ell)) \geq \frac{1}{2} \cdot (1 - 8\pi\kappa^2\eta_0)$$

Basta tomar η_0 suficientemente chico para probar el lema.

Pull-back de proporsiones

Vamos a demostrar ahora la propiedad que hemos utilizado a lo largo de esta sección. acerca del pull-back de densidades o proporciones. Supongamos que $\{X_n\}$ es una sucesión de conjuntos medibles de $\mathbb{C}$. Sean $V \subset \mathbb{C}$ un abierto y $\lambda \in [0, 1]$. Suponemos entonces, que para todo abierto A (no vacío) con $\overline{A} \subset V$ compacto, se tiene que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{dens}_A(X_n) \geq \lambda$$

Sean U y U_n abiertos de $\mathbb{C}$, $f_n : U_n \rightarrow \mathbb{C}$ y $f : U \rightarrow V$ funciones holomorfas tales que:

⁹Ver sección 4.2.3.

para todo compacto $K \subset V$, existe un $n(K)$ tal que para $n \geq n(K)$, $K \subset U_n$ y los mapas f_n convergen uniformemente a f en K .

En estas condiciones, vamos a probar que para todo abierto A , con $\overline{A} \subset U$ compacto, tenemos que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{dens}_A(f_n^{-1}(X_n)) \geq \lambda$$

Sea $z_0 \in U$ tal que $|f'(z_0)| > 0$, y fijemos $0 < \epsilon < 1$. Existe $r > 0$, tal que $f : D(z_0, r) \rightarrow f(D(z_0, r))$ es un difeomorfismo y tal que

$$\forall z \in D(z_0, r), \quad 1 - \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{|f'(z)|^2}{|f'(z_0)|^2} \leq 1 + \frac{\epsilon}{2}$$

Sea Q_{z_0} el cuadrado diádico más grande contenido en $D(z_0, r)$, que contiene a z_0 . En particular sabemos que Q_{z_0} tiene lado al menos $r/\sqrt{8}$.

Denotemos por $\phi : f(D(z_0, r)) \rightarrow D(z_0, r)$ y por $\phi_n : f_n(D(z_0, r)) \rightarrow D(z_0, r)$, las inversas de f y f_n respectivamente. Por un lado tenemos

$$m(Q_{z_0} \cap f_n^{-1}(X_n)) = m(\phi_n(f_n(Q_{z_0}) \cap X_n)) = \int_{f_n(Q_{z_0}) \cap X_n} |\phi'_n|^2 dm$$

De donde

$$\frac{m(Q_{z_0} \cap f_n^{-1}(X_n))}{m(Q_{z_0})} = \frac{\int_{f_n(Q_{z_0}) \cap X_n} |\phi'_n|^2 dm}{\int_{f_n(Q_{z_0})} |\phi'_n|^2 dm} \geq \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \cdot \frac{m(f_n(Q_{z_0}) \cap X_n)}{m(f_n(Q_{z_0}))}$$

Además

$$m(f_n(Q_{z_0})) = \int_{Q_{z_0}} |f'_n|^2 dm \rightarrow \int_{Q_{z_0}} |f'|^2 dm = m(f(Q_{z_0}))$$

y no es difícil ver que

$$\frac{m(f_n(Q_{z_0}) \cap X_n)}{m(f(Q_{z_0}) \cap X_n)} \rightarrow 1$$

cuando $n \rightarrow +\infty$. Luego:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{m(Q_{z_0} \cap f_n^{-1}(X_n))}{m(Q_{z_0})} \geq \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \cdot \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{m(f_n(Q_{z_0}) \cap X_n)}{m(f(Q_{z_0}) \cap X_n)} \geq \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \cdot \lambda$$

Sea A abierto con $\overline{A} \subset V$ compacto. Sean $c_1, c_2, \dots, c_p$ los finitos (si los hay) puntos críticos de f en A . Sea $r_c > 0$ tal que $p\pi r_c^2 < \epsilon$, y tal que $\overline{D}(c_i, r_c) \subset A$. Denotamos por

$$\hat{A} = A - \bigcup_{i=1}^p \overline{D}(c_i, r_c)$$

y sea $K \subset \hat{A}$ compacto tal que $m(K) \geq m(\hat{A}) - \epsilon$.

Para cada $z \in K$ sea Q_z el cuadrado construido anteriormente, que podemos suponer $Q_z \in \hat{A}$. Sean $z_1, z_2, \dots, z_q$ una cantidad finita de ellos tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^q Q_{z_i}$$

Además, como los Q_i los tomamos diádicos, podemos suponer que son disjuntos dos a dos. Entonces

$$\mathfrak{m}(A \cap f_n^{-1}(X_n)) \geq \mathfrak{m}(\hat{A} \cap f_n^{-1}(X_n)) \geq \sum_{i=1}^q \mathfrak{m}(Q_{z_i} \cap f_n^{-1}(X_n))$$

De donde

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{m}(A \cap f_n^{-1}(X_n)) &\geq \sum_{i=1}^q \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \cdot \lambda \cdot \mathfrak{m}(Q_{z_i}) \\ &\geq \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \cdot \lambda \cdot \mathfrak{m}(K) \geq \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \cdot \lambda \cdot (\mathfrak{m}(\hat{A}) - \epsilon) \\ &= \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \cdot \lambda \cdot (\mathfrak{m}(A) - p\pi r_c^2 - \epsilon) \geq \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \cdot \lambda \cdot (\mathfrak{m}(A) - 2\epsilon) \end{aligned}$$

Luego basta hacer $\epsilon \rightarrow 0$.

Bibliografía

- [1] A. Avila, X. Buff, A. Chéritat, Siegel disks with smooth boundaries, *Acta Mathematica* (2004) 193, 1-30.
- [2] X. Buff, Disques de Siegel et Ensembles de Julia d'aire strictement positive, HDR ,Institut de Mathématiques, Laboratoire Emile Picard. 2006.
- [3] X. Buff, A. Chéritat, Upper Bound for the Size of Quadratic Siegel Disks, *Invent. Math.* (2004) 156/1, 1-24.
- [4] X. Buff, A. Chéritat, The Brjuno function continuously approximates the size of quadratic Siegel disks, *Annals of Math.*
- [5] X. Buff, A. Chéritat, Ensembles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive, *Comptes Rendus Mathématiques* (2005) 341/11, 669-674.
- [6] X. Buff, A. Chéritat, Quadratic Julia sets with positive area, preprint. 2006
- [7] X. Buff, A. Chéritat, Oberwolfach Reports, report n 17, 2008.
http://www.mfo.de/cgi-bin/path?cgi-bin/tagung_espe?type=21&tnr=0814
- [8] L. Carleson, T. Gamelin, *Complex Dynamics*, Universitext, Springer.
- [9] A. Chéritat, Recherche d'ensembles de Julia de mesure de Lebesgue positive, These, Orsay (2001).
- [10] A. Douady, Disques de Siegel et anneaux de Herman, *Séminaire Bourbaki*, (1986/87), pag 151-172. *Astérisque*, volume 152-153, (1987).
- [11] A. Douady, Does a Julia set depend continuously on the Polynomial?, *Proceedings of Symposia in Applied Math.*, 49, 91-139, (1994).
- [12] A. Douady, J.H. Hubbard, Etude dynamique des polynômes complexes I y II, *Publ. Math. d'Orsay* (1984-85).
- [13] A. Douady, J.H. Hubbard, On the dynamics of polynomial-like mappings, *Ann. Sci. ENS Paris* vol 18 (1985), 287-343.
- [14] L. R. Goldberg, Fixed points of polynomial maps. I. Rotation subsets of circles, *Ann. Sci. ENS Paris* tomo 25, n 6 (1992) p. 679-685.
- [15] M. Herman, Conjugaison quasisymétrique des difféomorphismes du cercle a des rotations et applications aux disques singuliers de Siegel, *Manuscript* (1986).
<http://picard.ups-tlse.fr/~cheritat/Herman/herman.html>

- [16] J. H. Hubbard, Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: three theorems of J. C. Yoccoz, *Topological Methods in Modern Mathematics*, Edit. Goldberg and Phillips, Publish or Perish, Houston, TX, 467-511.
- [17] H. Inou, M. Shishikura, The renormalization for parabolic fixed points and their perturbation, en preparación. <http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~mitsu/pararenorm/>
- [18] A. Y. Khinchin, *Continued Fractions*, Dover Publ.
- [19] M. Lyubich, On the Lebesgue measure of the Julia set of a quadratic polynomial, *Stonybrook IMS Preprint* 1991/10.
- [20] C.T. McMullen, Self-similarity of Siegel disks and Hausdorff dimension of Julia sets, *Acta Math.*, 180 (1998), 247-292.[18]
- [21] C. T. McMullen, *Complex Dynamics and Renormalization*, *Annals of Mathematical Studies*, Princeton University Press (1994).
- [22] C. T. McMullen, The classification of conformal dynamical systems, *Current Developments in Mathematics*, Cambridge 1995.
- [23] R. Mañé, P. Sad, D.P. Sullivan, On the dynamics of rational maps, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, Paris, 16:193-217, (1983).
- [24] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, Third edit., Princeton University Press, 2005.
- [25] J. Milnor, L. R. Goldberg, Fixed points of polynomial maps. II. Fixed point portraits. *Ann. Sci. ENS Paris* tomo 26, n 1, (1993) p. 51-98.
- [26] T. Nowicki, S. Van Striend, Polynomial maps with a Julia set of positive measure, preprint *Stony Brook IMS* 1994/3.
- [27] R. Perez-Marco, Sur les dynamiques holomorphes non linéarisables et una conjecture de V. I. Arnold, *Ann. Sci. ENS Paris* tomo 26, n5, 1993.
- [28] C.L. Petersen, Local connectivity of some Julia sets containing a circle with an irrational rotation, *Acta Math.* 177 (1996), no. 2, 163-224.
- [29] C.L. Petersen, The Herman-Swiatek theorems with applications, *The Mandelbrot set, theme and variations*, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, vol. 274, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, pp. 211-225.
- [30] C.L. Petersen, S. Zakeri, On the Julia set of a typical quadratic polynomial with a Siegel disk, *Ann. of Math.* 159 (2004) 1-52.
- [31] M. Shishikura, Bifurcation of parabolic fixed points, *The Mandelbrot set, theme and variations*, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 274, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2000) 325-363.
- [32] M. Shishikura, The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets, *Annals of Mathematics*.
- [33] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains, *Ann. Math.* 122, 401-418.
- [34] G. Swiatek, On critical circle homeomorphisms *Bol. Soc. Bras. Mat.* 29 (1998), 329-351.

- [35] M. Yampolsky, Siegel disks and renormalization fixed points, Fields Institute Communications, 53 (2008)
- [36] J.C. Yoccoz, Petits diviseurs en dimension 1, S.M.F., Astérisque 231 (1995).
- [37] J.C. Yoccoz, Ensembles de Julia de mesure positive et disques de Siegel des polynômes quadratiques (d'après X. Buff et A. Chéritat), Astérisque (2007), no. 311, 385-401.
- [38] S. Zakeri, On Siegel Disks of a Class of Entire Maps, 2008, preprint.