Condiciones de promediabilidad en fibrados de Fell

Laura Martí

Orientador: Fernando Abadie

Agosto de 2006

Tesis de maestría
Maestría en Matemática
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay.

Autor: Laura Martí.
Dirección electrónica: lau@cmat.edu.uy.

Tesis de Maestría.
Título de la tesis: Condiciones de promediabilidad en fibrados de Fell.

Orientador: Dr. Fernando Abadie, Centro de Matemática, Facultad de Ciencias.
Dirección electrónica: fabadie@cmat.edu.uy.

Fecha: Agosto de 2006.

Resumen

Este trabajo tiene dos objetivos: por un lado, hacer una introducción a los fibrados de Fell sobre grupos discretos, presentando la definición, ejemplos y propiedades básicas, y por otro lado, probar algunos resultados nuevos que se refieren a la promediabilidad en este contexto.

Entre los ejemplos de fibrados de Fell que presentamos, el principal de ellos es el de los fibrados de Fell asociados a acciones parciales. Es por eso que incluimos las definiciones y algunos resultados básicos concernientes a las acciones parciales y sus acciones envolventes en el caso de espacios topológicos y C*-álgebras. Así mismo, incluimos un resultado nuevo: dada una acción parcial α en una C*-álgebra conmuntativa, con acción envolvente α^e en un espacio con unidad, si φ es un estado invariante por α, existe una única extensión a una funcional lineal positiva invariante por α^e.

La noción de fibrado de Fell promediable que introducimos, presentada en [**Exe97**], es una extensión de la caracterización de grupo promediable proporcionada por la propiedad de contención débil. Dado un fibrado de Fell $\mathcal{B}$ le asociamos dos C*-álgebras, $C^*(\mathcal{B})$ y $C^*_r(\mathcal{B})$. La primera de ellas se obtiene a partir de una propiedad universal, en tanto que la segunda se obtiene a partir de una representación. Ambas están relacionadas por un morfismo sobreyectivo $\lambda^\dagger : C^*(\mathcal{B}) \to C^*_r(\mathcal{B})$. Decimos que $\mathcal{B}$ es promediable si $\lambda^\dagger$ es un isomorfismo, y esta situación es ventajosa ya que $C^*(\mathcal{B})$ y $C^*_r(\mathcal{B})$ se obtienen de formas tan distintas.

Dados dos fibrados de Fell $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de manera que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y se verifican otras condiciones de compatibilidad entre ellos, $\mathcal{A}$ es promediable si y sólo si $\mathcal{B}$ lo es (el directo de esta propiedad es un resultado de F. Abadie, ver [**Aba03**], y el recíproco se prueba en este trabajo). En particular, si α es una acción parcial y β es su acción envolvente, α es promediable si y sólo si β lo es. Como corolario de este resultado probamos que toda representación parcial admite una dilatación unitaria. Gracias al resultado sobre extensión de estados invariantes y a la equivalencia de la promediabilidad de una acción parcial y de su acción envolvente, obtenemos una generalización de una propiedad de Zeller-Meier (ver [**ZM68**, 5.2]) que relaciona la promediabilidad de un grupo con la promediabilidad de fibrados sobre el grupo obtenidos a partir de acciones.

Las principales referencias bibliograficas de este trabajo son [**Aba03**] y [**Exe97**]

Palabras claves

Fibrados de Fell, Acciones parciales, Fibrados de Fell promediables.

Abstract

This work has two aims: on one hand, to introduce the Fell bundles over discrete groups, presenting the definition, some examples and basic properties, and on the other hand to prove some new results concerning amenability in this context.

Among the examples of Fell bundles that we present, the main one is the Fell bundle associated to a partial action. Therefore, we include the definitions and some basic results concerning partial actions and theire enveloping actions for the topological and C^* cases. Moreover, we include a new result: given a partial action α on a commutative C^*-algebra with enveloping action α^e on a unital space, any α-invariant state can be extended to a unique α^e-invariant positive linear functional.

The definition of amenable Fell bundle ([**Exe97**]) is an extension of the amenable group characterization provided by the weak containment property. Given a Fell bundle $\mathcal{B}$, it has associated two C^*-algebras, $C^*(\mathcal{B})$ and $C^*_r(\mathcal{B})$. The first of them is obtained from an universal property, whereas the second is obtained from a representation. Both are related by a surjective morphism $\lambda^\dagger : C^*(\mathcal{B}) \to C^*_r(\mathcal{B})$. We say that $\mathcal{B}$ is amenable if $\lambda^\dagger$ is an isomorphism. This situation is an advantageous one because $C^*(\mathcal{B})$ and $C^*_r(\mathcal{B})$ are obtained by so different ways.

Given two Fell bundles $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ verifying further compatibility conditions, $\mathcal{A}$ is amenable if and only if $\mathcal{B}$ is amenable (the direct part was proved by F. Abadie in [**Aba03**] and the reciprocal is proved here). Then, if α is a partial action and β is its enveloping action, α is amenable if and only if β is amenable. As a corollary, we prove that any partial representation may be dilated to a unitary representation. Finally, using the result on extensions of invariant states and the equivalence between the amenability of a partial action and the one of its enveloping action, we obtain a generalization of a result of Zeller-Meier ([**ZM68**, 5.2]). This result relates the amenability of a group to the one of a Fell bundle over the group obtained from a partial action.

The main bibliographic references for this work are [**Aba03**] and [**Exe97**].

Índice general

er*Introducción

Este trabajo se propone presentar una revisión de algunos aspectos de la teoría de fibrados de Fell sobre grupos discretos y probar algunos resultados nuevos que conciernen a la propiedad de promediabilidad en dicho contexto. Antes de hacer una rápida descripción de este trabajo y de explicar dichos resultados, en los siguientes párrafos intentamos hacer una breve introducción histórica a los fibrados de Fell, las acciones parciales, la promediabilidad y las relaciones entre estos conceptos.

Desde los trabajos de Murray y von Neumann en 1936, los productos cruzados, ya sea por acciones de grupos o semigrupos, o endomorfismos, jugaron un papel muy importante a efectos de estudiar las álgebras de operadores. A partir de esa fecha, diversos autores trataron este tema, en un principio considerando acciones de grupos discretos y más adelante de grupos topológicos. Por ejemplo, el trabajo de Zeller-Meier [**ZM68**] de 1968 considera el producto cruzado de una C*-álgebra A en la que actúa un grupo G torcido por un 2-cociclo α. Varios productos cruzados pueden ser estudiados conjuntamente desde el punto de vista de los fibrados de Fell, que podemos pensar como una abstracción de una graduación de un álgebra. Esta estructura fue introducida por Fell con el nombre de "C^*-algebraic bundle" entre finales de los '60 y principios de los '70 con el objetivo de generalizar los trabajos de Mackey sobre inducción de representaciones. Los fibrados de Fell resultaron ser una herramienta muy apropiada para desarrollar la teoría de productos cruzados por acciones parciales introduciada por R. Exel en [**Exe94**] y continuada en los siguientes años por varios artículos de este y otros autores (ver, por ejemplo, [**McC95**], [**EN02**], [**Aba03**]).

Dado un fibrado de Fell $\mathcal{B}$, es posible asociarle una C*-álgebra $C^*(\mathcal{B})$, llamada C*-álgebra seccional plena, que fue estudiada por Fell (ver [**FD88b**], $VIII$.7.2). En [**Exe97**], el autor asocia a un fibrado $\mathcal{B}$ sobre un grupo discreto G otra C*-álgebra, la C*-álgebra seccional reducida $C^*_r(\mathcal{B})$ (para el caso de un grupo G localmente compacto, ver [**EN02**] y [**Aba03**]). Ambas C*-álgebras están relacionadas por medio de la existencia de un $*$-morfismo sobreyectivo $\lambda^\dagger : C^*(\mathcal{B}) \to C^*_r(\mathcal{B})$. Podemos ver al grupo G como un caso particular de un fibrado de Fell trivial, en este caso las C*-álgebras asociadas coinciden con la C*-álgebra universal $C^*(G)$ y la C*-álgebra reducida $C^*_r(G)$ respectivamente y el $*$-morfismo sobreyectivo entre ellas es la extensión de la representación regular $\lambda^\dagger$. Gracias a la caracterización brindada por la propiedad de contención débil, decimos que G es promediable si $\lambda^\dagger$ es un isomorfimo. Extendiendo este concepto al contexto de los fibrados de Fell, en [**Exe97**] se define que $\mathcal{B}$ es promediable si $\lambda^\dagger$ es un isomorfismo y se introduce una propiedad de aproximación que es condición suficiente para que el fibrado sea promediable. En particular, a partir de esto se prueba que es condición suficiente para que el fibrado sea promediable que el grupo G lo sea. Sin embargo, esta condición no es necesaria.

El primer capítulo de este trabajo se titula "Acciones parciales". En la primera sección se presentan resultados que conciernen a la existencia y la unicidad de acciones envolventes de una acción parcial en el caso topológico y en el caso de C*-álgebras. Mientras que en el caso topológico toda acción parcial admite una acción envolvente (es decir, una acción global cuya restricción sea la acción parcial), y ésta es única a menos de isomorfismos, en el caso de C*-álgebras no se puede asegurar la existencia, pero sí la unicidad. Estos resultados son tomados de [**Aba03**]. En la segunda sección se prueba que si α es una acción parcial en una C*-álgebra conmutativa $C_0(X)$ tal que tiene acción envolvente α^e en un espacio $C_0(Y)$ con unidad, entonces un estado φ de $C_0(X)$ G-invariante puede extenderse a una funcional lineal positiva G-invariante en $C_0(Y)$. Este resultado será utilizado al final del trabajo.

En el segundo capítulo, "Fibrados de Fell", hacemos una revisión de resultados que incumben a esta estructura. En particular, nos centramos en la construcción de las C*-álgebras que asociamos a un fibrado mencionadas, así como en las condiciones suficientes de promediabilidad a las que hicimos referencia un par de párrafos antes. Ya que en este capítulo aparecen por primera vez los grupos promediables, cabe aclarar que en lo que se refiere a resultados previos que involucran a este concepto nos referiremos a [**Mar04**]. Algunos resultados probados en dicha monografía y usados en este trabajo, así como las definiciones básicas de este tema, están brevemente presentados en el apéndice B.

El último capítulo, "Condiciones de promediabilidad" consta de tres partes. En la primera nos ocupamos de la siguiente situación: supongamos que tenemos dos fibrados de Fell $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de manera que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, y que además hay un tercer "casi-fibrado de Fell" $\mathcal{E}$ entre ellos, de manera que los tres tienen "buenas" propiedades de compatibilidad. En [**Aba03**] está probado que si $\mathcal{A}$ es promediable entonces $\mathcal{B}$ lo es y en este trabajo probamos el recíproco. Ambas pruebas se basan en establecer la equivalencia Morita entre las C*-álgebras seccionales, más concretamente, entre $C_r^*(\mathcal{A})$ y $C_r^*(\mathcal{B})$ en el primer caso y entre $C^*(\mathcal{A})$ y $C^*(\mathcal{B})$ en el segundo. Incluimos en el apéndice A algunas definiciones y propiedades concernientes a módulos de Hilbert y equivalencia Morita que pueden ser de ayuda para leer este capítulo. En el caso de acciones parciales, si $\mathcal{A}$ es el fibrado asociado a un acción parcial y $\mathcal{B}$ es el asociado a su acción envolvente, deducimos que $\mathcal{A}$ es promediable si y sólo si $\mathcal{B}$ lo es. Como corolario de este resultado en la segunda parte del capítulo, en analogía con lo hecho en [**Aba03**] para grupos promediables, probamos que toda representación parcial admite una dilatación unitaria. En la última parte del capítulo probamos una generalización de un resultado de Zeller-Meier (ver [**ZM68**, 5.2]) que establece que, dada una C*-álgebra con unidad B en la que actúa una acción β de un grupo G, G es promediable si y sólo si β es promediable y en B hay un estado G-invariante. En nuestra generalización, inmediata a partir del último resultado del capítulo 1 y de lo probado en la primera sección de este capítulo, probamos que si A es una C*-álgebra conmutativa en la que actúa una acción parcial α de un grupo G que tiene acción envolvente en una C*-álgebra con unidad, G es promediable si y sólo si α es promediable y en A hay un estado G-invariante.

A lo largo de este trabajo, salvo que se explicite lo contrario, los grupos considerados son discretos.

Capítulo 1

Acciones parciales

En este capítulo comenzamos por presentar las definiciones de acción parcial de un grupo discreto sobre un espacio topológico y sobre una C*-álgebra. En el caso topológico, se prueba la existencia y unicidad de la acción envolvente (es decir, una acción global de manera que la acción parcial sea una restricción de ella). Dado un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff X, podemos considerar la C*-álgebra conmutativa $C_0(X)$ y hay una correspondencia entre las acciones parciales en X y en $C_0(X)$. Vía esta correspondencia se extiende la noción de acción envolvente para una C*-álgebra cualquiera. Pero en este caso no podemos asegurar la existencia de una acción envolvente, aunque sí la unicidad. Estos resultados presentados en la primera sección se encuentran en [**Aba03**] y [**Aba04**]. Nos interesa en este trabajo considerar las acciones parciales sobre C*-álgebras pues, como veremos a comienzos del capítulo 2, nos proporcionan ejemplos de fibrados de Fell cuya promediabilidad será tratada en el capítulo 3.

En la segunda parte de este capítulo nos concentramos en el caso de C*-álgebras conmutativas. Probamos que si $A = C_0(X)$ es una C*-álgebra conmutativa en la que actúa una acción parcial α con acción envolvente α^e, cuyo espacio envolvente $C_0(X^e)$ tiene unidad, dado un estado en A invariante por α podemos extenderlo a una funcional lineal positiva en $C_0(X^e)$ que es invariante por la acción envolvente. Este resultado será aplicado al final del trabajo.

1. Acciones parciales y acciones envolventes

Definiciones 1.1. Sean G un grupo y D un conjunto. El par $\alpha = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ es una acción parcial de G en D si:

1. Cada D_t es un subconjunto de D y $\alpha_t : D_{t^{-1}} \to D_t$ es una biyección, $\forall t \in G$.
2. $D_e = D$ y $\forall s,t \in G$, $\alpha_s\alpha_t \subset \alpha_{st}$, es decir, si $x \in D_{t^{-1}}$ y $\alpha_t(x) \in D_{s^{-1}}$, entonces $x \in D_{(st)^{-1}}$ y $\alpha_s\alpha_t(x) = \alpha_{st}(x)$.

Si G es un grupo topológico y X es un espacio topológico, un par $\alpha = (\{X_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ es una acción parcial si es una acción parcial considerando X como un conjunto y además se verifica:

- Cada X_t es un subconjunto abierto de X y α_t es un homeomorfismo, $\forall t \in G$.
- $\Gamma_\alpha = \{(t,x) \in G \times X \ : \ t \in G, x \in X_{t^{-1}}\}$ es abierto en $G \times X$ y $\alpha : \Gamma_\alpha \to X$ tal que $\alpha(t,x) = \alpha_t(x)$ es continuo.

La condición 2. puede sustituirse por

- $\alpha_e = \mathrm{Id}_X$ y $\alpha_{t^{-1}} = (\alpha_t)^{-1}$, $\forall t \in G$.
- $\alpha_t(X_{t^{-1}} \cap X_s) = X_t \cap X_{ts}$, $\forall s,t \in G$.
- $\alpha_s\alpha_t : X_{t^{-1}} \cap X_{(st)^{-1}} \to X_s \cap X_{st}$ es una biyección y $\alpha_s\alpha_t(x) = \alpha_{st}(x)$, $\forall x \in X_{t^{-1}} \cap X_{(st)^{-1}}$, $\forall s,t \in G$.

Si G es un grupo discreto y A es una C*-álgebra, una acción parcial de G en A es una acción parcial como conjuntos $\alpha = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ que además verifica:

- Cada D_t es un ideal de A y α_t es un isomorfismo de C*-álgebras, $\forall t \in G$.

Si $\alpha = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ y $\alpha' = (\{D'_t\}_{t\in G}, \{\alpha'_t\}_{t\in G})$ son acciones parciales de A y A' en G, donde A y A' pueden ser conjuntos, espacios topológicos o C*-álgebras, un morfismo $\varphi : \alpha \to \alpha'$ es un homomorfismo $\varphi : A \to A'$ tal que $\varphi(D_t) \subseteq D'_t$, $\forall t \in G$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} D_{t^{-1}} \arrow[r, "\alpha_t"] \arrow[d, "\varphi"'] & D_t \arrow[d, "\varphi"] \\ D'_{t^{-1}} \arrow[r, "\alpha'_t"'] & D'_t \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.2. Sea β una acción global continua en un espacio topológico Y (respectivamente, una C*-álgebra) y sea X un subconjunto abierto de Y (respectivamente, un ideal). Entonces $\alpha = \beta_{|X}$ es una acción parcial, con $\alpha = (\{X_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$, donde $X_t = X \cap \beta_t(X)$ y $\alpha_t : X_{t^{-1}} \to X_t$, $\alpha_t(x) = \beta_t(x)$.

Ejemplo 1.3. El flujo de una ecuación diferencial es una acción parcial. Sea $\dot{y} = f(y)$ una ecuación diferencial, donde I es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función tal que $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ existe una única solución maximal que en 0 vale x_0. Llamamos $\varphi(t, x)$ a la evaluación en t de la solución que en el instante 0 vale x y llamamos $(w_-(x), w_+(x))$ al intervalo máximo de definición de dicha solución. Sea $X_{-t} = \{x \in X : t \in (w_-(x), w_+(x))\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Entonces $\varphi = (\{X_t\}_{t\in G}, \{\varphi_t\}_{t\in G})$ es una acción parcial de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, donde $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$.

Teorema 1.4. *Sea α una acción parcial de un grupo G en un espacio topológico X. Existe un par (ι, α^e) tal que α^e es una acción continua de G en un espacio topológico X^e y $\iota : \alpha \to \alpha^e$ es un morfismo de acciones parciales con la siguiente propiedad:*

Si β es una acción continua de G y $\psi : \alpha \to \beta$ es un morfismo, existe un único morfismo $\psi^e : \alpha^e \to \beta$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\psi"'] & \alpha^e \arrow[d, dotted, "\psi^e"] \\ & \beta \end{tikzcd}$$

Además el par (ι, α^e) es único a menos de isomorfismos y se cumple que:

1. *$\iota(X)$ es abierto en X^e.*
2. *$\iota : X \to \iota(X)$ es un homeomorfismo.*
3. *X^e es la α^e-órbita de $\iota(X)$.*

Demostración: Consideramos la acción continua $\gamma : G \times (G \times X) \to G \times X$ tal que $\gamma(s, (t, x)) = (st, x)$. En $G \times X$ consideramos la siguiente relación de equivalencia: $(r, x) \sim (s, y)$ si y sólo si $x \in X_{r^{-1}s}$ y $\alpha_{s^{-1}r}(x) = y$. Se cumple que si $(r, x) \sim (s, y)$ entonces $\gamma(r, x) \sim \gamma(s, y)$. Por lo tanto, si llamamos $X^e = G \times X/\sim$, γ induce una acción continua $\alpha^e : G \times X^e \to X^e$ tal que $\alpha^e(t, [(r, x)]) = [(tr, x)]$. El mapa proyección $q : \gamma \to \alpha^e$, $q(t, x) = [(t, x)]$, es un morfismo de acciones parciales.

Sea $\iota : X \to X^e$ definido por $\iota(x) = [(e, x)]$. Este mapa es un morfismo de acciones parciales ya que, si $x \in X_{t^{-1}}$, $t \in G$, se verifica que $[(e, \alpha_t(x))] = [(t, x)]$ y por lo tanto

$$\iota(\alpha_t(x)) = [(e, \alpha_t(x)] = [(t, x)] = \alpha^e([t, (e, x)]) = \alpha^e_t(\iota(x)).$$

Veamos que el par (ι, α^e) tiene la propiedad universal enunciada. Supongamos que $\beta : G \times Y \to Y$ es una acción y $\psi : \alpha \to \beta$ es un morfismo de acciones parciales. Queremos hallar un morfismo $\psi^e : \alpha^e \to \beta$ tal que $\psi = \psi^e \circ \iota$. Para eso vamos a hallar $\psi' : \gamma \to \beta$ y probar que ψ' induce, al pasar al cociente por q, el mapa que estamos buscando. El siguiente diagrama puede aclarar lo que se explicó recién:

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\psi"'] & \alpha^e \arrow[d, dotted, "\psi^e"] & \gamma \arrow[l, "q"'] \arrow[dl, "\psi'"] \\ & \beta & \end{tikzcd}$$

Es inmediato verificar que $\psi' : G \times X \to Y$ tal que $\psi'((t,x)) = \beta(t, \psi(x))$ es un morfismo de γ en β. Si $(r,x) \sim (s,y)$ entonces

$$\psi(y) = \psi(\alpha_{s^{-1}r}(x)) = \beta_{s^{-1}r}(\psi(x)) = \beta_{s^{-1}}\beta_r(\psi(x))$$

y por lo tanto $\psi'(s,y) = \beta_s(\psi(y)) = \beta_r(\psi(x)) = \psi'(r,x)$. Luego ψ' induce $\psi^e : X^e \to Y$ tal que $\psi^e([(t,x)]) = \psi'((t,x)) = \beta_t(\psi(x))$. Es directo comprobar que $\psi^e : \alpha^e \to \beta$ es un morfismo y hace conmutar el diagrama anterior. Además la condición $\psi = \psi^e \circ \iota$ lo determina:

$$\psi^e([(t,x)]) = \psi^e(\alpha^e(t, [(e,x)]) = \beta_t(\psi^e(\iota(x))) = \beta_t(\psi(x))$$

y por lo tanto es único.

Por verificar esta propiedad universal, concluimos que el par (ι, α^e) es único a menos de isomorfismos.

En cuanto a 3., utilizamos la siguiente notación: si η es una acción de un grupo H en un espacio B, la órbita de $C \subseteq B$ por η es $\mathcal{O}_\eta(C) = \{\eta_t(c) : t \in H, c \in C\}$. En el caso que nos ocupa, X^e es la órbita de $\iota(X)$ por α^e porque:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\alpha^e}(\iota(X)) &= \{\alpha^e(t, \iota(x)) : t \in G, x \in X\} \\ &= \{\alpha^e(t, [(e,x)]) : t \in G, x \in X\} \\ &= \{[(t,x)]) : t \in G, x \in X\} \\ &= X^e. \end{aligned}$$

Para probar que $\iota(X)$ es abierto en X^e, veamos que si U es abierto en X, entonces $q^{-1}(\iota(U))$ es abierto en $G \times X$:

$$\begin{aligned} q^{-1}(U) &= \{(t,x) \in G \times X : \exists u \in U \text{ tal que } (t,x) \sim (e,u)\} \\ &= \{(t,x) \in G \times X : x \in X_{t^{-1}},\, \alpha_t(x) \in U\} \\ &= \alpha^{-1}(U) \cap \Gamma_\alpha, \end{aligned}$$

que es abierto en $G \times X$.

Por último, para probar que ι es un homeomorfismo sobre su imagen alcanza con probar que es inyectiva. Esto es evidente ya que $\iota(x) = \iota(x')$ si y sólo si $x \in X$ y $\alpha^e(x) = x'$, y por lo tanto debe ser $x = x'$.

Podemos considerar $X \subseteq X^e$ y lo haremos de aquí en más. Nótese que en particular $\alpha^e_{|X} = \alpha$ y entonces en el caso topológico todas las acciones parciales son como en el ejemplo 1.2.

$\square$

Definición 1.5. Si α es una acción parcial, la acción α^e del teorema anterior es la acción envolvente de α, X^e es el espacio envolvente y ψ^e es el morfismo envolvente de ψ.

Observación 1.6. El espacio envolvente de una acción parcial en un espacio topológico de Hausdorff puede no ser de Hausdorff. Sean $G = \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ y $X = [0,1]$. Consideramos la siguiente acción parcial: $X_1 = [0,1]$, $\alpha_1 = \mathrm{Id}_{[0,1]}$ y $X_{-1} = (a,1]$, $\alpha_{-1} = \mathrm{Id}_{(a,1]}$, con $a > 0$.

En el espacio envolvente X^e, $[(1,t)] = [(-1,t)]$, $\forall t \in (a,1]$. Por lo tanto, $(1,a)$ y $(-1,a)$ no tienen entornos disjuntos.

Proposición 1.7. *Sea $\alpha = (\{X_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ una acción parcial de G en un espacio topológico de Hausdorff X. Sea*

$$\mathrm{Gr}(\alpha) = \{(t,x,y) \in G \times X \times X \,:\, x \in X_{t^{-1}}, \alpha_t(x) = y\}$$

el grafo de α. Si (α^e, X^e) es la acción envolvente de α, entonces X^e es un espacio de Hausdorff si y sólo si $\mathrm{Gr}(\alpha)$ es cerrado.

Demostración: Dada una red $\{(t_i, x_i, \alpha_{t_i}(x_i))\}_{i\in I}$ en $\mathrm{Gr}(\alpha)$ tal que $(t_i, x_i, \alpha_{t_i}(x_i)) \underset{i}{\longrightarrow} (t,x,y)$, veamos que $y = \alpha_t(x)$. Por ser α^e continua, $\alpha^e(t_i, x_i) \underset{i}{\longrightarrow} \alpha^e(t,x)$. Pero $\alpha^e(t,x) = \alpha(t,x)$, $\alpha^e(t_i,x_i) = \alpha(t_i,x_i)$ y $\alpha(t_i,x_i) \underset{i}{\longrightarrow} y$. Estamos suponiendo que X^e es un espacio de Hausdorff, luego por la unicidad del límite, $\alpha_t(x) = y$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{Gr}(\alpha)$ es cerrado en $G \times X \times X$. Vamos a probar que si asumimos que x^e, $y^e \in X^e$ no tienen entornos disjuntos, entonces $x^e = y^e$.

Sabemos que $\mathcal{O}_{\alpha^e}(X) = X^e$ y por lo tanto podemos suponer que $x^e \in X$ y existen $t \in G$, $y \in X$ tales que $y^e = \alpha_t^e(y)$. Si U es un entorno de x y V es un entorno de y, entonces existe $x_{U,V} \in U \cap \alpha_t(V)$. Debe ser $x_{U,V} = \alpha_t(y_{U,V})$, para algún $y_{U,V} \in \alpha_t(V)$. La red $\{(t, y_{U,V}, x_{U,V})\}_{(U,V)}$ está incluida en $\mathrm{Gr}(\alpha)$ y converge, por definición, a (t,y,x). Por ser $\mathrm{Gr}(\alpha)$ cerrado en $G\times X\times X$, (t,y,x) debe pertenecer a $\mathrm{Gr}(\alpha)$, de donde $y^e = \alpha_t(y) = x$, como queríamos probar.

□

Ejemplo 1.8. Sean X un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff y G un grupo discreto. Veremos que dada una acción parcial de G en X le corresponde una única acción parcial de G en $C_0(X)$ y viceversa.

Sea $\sigma = (\{X_t\}_{t\in G}, \{\sigma_t\}_{t\in G})$ una acción parcial de G en X. Dado $t \in G$, sea $D_t = C_0(X_t)$ y sea $\alpha_t : D_{t^{-1}} \to D_t$ tal que $\alpha_t(a) = a \circ \sigma_t^{-1}$, $\forall a \in D_{t^{-1}}$. Nótese que $D_t \subseteq C_0(X)$, extendiendo cualquier función de D_t de manera obvia a todo X y más concretamente D_t es un ideal de $C_0(X)$, $\forall t \in G$. El par $\alpha = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ resulta ser una acción parcial de G en $C_0(X)$.

Recíprocamente, sea $\alpha = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ una acción parcial de G en $A = C_0(X)$. Dados dos ideales I, J de A el Teorema de Gelfand nos asegura la existencia de subconjuntos abiertos U, V de X, únicos en verificar que $I = \{a \in A \,:\, a(x) = 0, \forall x \notin U\}$ y $J = \{a \in A \,:\, a(x) = 0, \forall x \notin V\}$. Además, aplicando el mismo teorema, si $\omega : I \to J$ es un homomorfismo de C*-álgebras, existe un único homeomorfismo $\theta : U \to V$ tal que $\omega(a) = a \circ \theta^{-1}$, es decir, $\omega(a)(x) = a(\theta^{-1}(x))$ si $x \in V$ y $\omega(a)(x) = 0$ en otro caso. Esto nos permite, $\forall t \in G$, a partir de $\alpha_t : D_{t^{-1}} \to D_t$, obtener $\sigma_t : X_{t^{-1}} \to X_t$, donde X_t, $X_{t^{-1}}$ son subconjuntos abiertos de X y σ_t es un homeomorfimo, tales que

$$D_t = \{a \in C_0(X) \,:\, a(x) = 0, \forall x \notin X_t\} \text{ y } \sigma_t(a)(x) = \begin{cases} a|_{\sigma_t^{-1}(x)} & \text{si } x \in X_t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Se verifica que $\sigma = (\{X_t\}_{t\in G}, \{\sigma_t\}_{t\in G})$ así construida es una acción parcial de G en X. Por más detalles de esta correspondencia, ver [**Aba04**].

Si σ es una acción parcial de G en X con acción envolvente σ^e en un espacio de Hausdorff Y, entonces $C_0(X)$ es un ideal de $C_0(Y)$ y la acción β inducida por σ^e en $C_0(Y)$ verifica que:

- $\beta|_{C_0(X)} = \alpha$ y

- $[\beta(C_0(X))] := \operatorname{span}\{\beta_t(a) : t \in G, a \in A\}$ es denso en $C_0(Y)$.

Estas condiciones sugieren la definición que sigue.

Definición 1.9. Sean G un grupo, A una C*-álgebra y $\alpha = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ una acción parcial de G en A. Sea β una acción continua de G en B, donde B es una C*-álgebra y $A \subseteq B$. Decimos que (β, B) es una acción envolvente de (α, A) si

- A es un ideal de B.
- $\alpha = \beta_{|_A}$.
- $B = \overline{[\beta(A)]}$.

Observación 1.10. La proposición que sigue aborda el asunto de la existencia de una acción envolvente para una acción parcial en una C*-álgebra conmutativa. Como adelantamos en la introducción, en el caso C^* no podemos asegurar la existencia de acciones envolventes. La siguiente proposición y la observación a continuación nos permiten probar que no toda acción parcial tiene acción envolvente en el caso C^*.

Si A es un álgebra de Banach conmutativa, denotamos $\widehat{A}$ su espacio de Gelfand, $\widehat{A} = \{h : A \to \mathbb{C} : h$ homomorfismo de álgebras no nulo$\}$. En dicho espacio consideramos la topología w^*, caracterizada por $h_i \xrightarrow[i]{w^*} h$ si y sólo si $h_i(a) \xrightarrow[i]{} h(a)$, $\forall a \in A$. En la próxima proposición usaremos el teorema de Gelfand: si A es una C*-álgebra conmutativa entonces $A \simeq C_0(\widehat{A})$.

Proposición 1.11. *Sea $\alpha = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ una acción parcial de G en una C*-álgebra conmutativa A y sea $\widehat{\alpha}$ la correspondiente acción parcial de G en $\widehat{A}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\operatorname{Gr}(\widehat{\alpha})$ *es cerrado en* $G \times \widehat{A} \times \widehat{A}$.
2. α *tiene una acción envolvente en la categoría de las C*-álgebras conmutativas.*
3. α *tiene una acción envolvente en la categoría de las C*-álgebras.*

Demostración: La equivalencia entre las dos primeras afirmaciones fue probada en 1.7 y es claro que la segunda condición implica la tercera. Supongamos que (B, β) es una acción envolvente de (A, α). Probaremos que B es una C*-álgebra conmutativa. Notamos $Z(B)$ al centro de B. El ideal A de B es conmutativo y por lo tanto $A \subseteq Z(B)$. En efecto, sea una unidad aproximada $\{u_i\}_{i\in I}$ de A. Si $b \in B$,

$$ab = \lim_i (ab)u_i = \lim_i a(bu_i) = \lim_i (bu_i)a = ba.$$

Nótese que $Z(B)$ es invariante por β, ya que si $z \in Z$, $t \in G$ y $b \in B$, entonces $\beta_t(z)b = \beta_t(z\beta_{t^{-1}}(b)) = \beta_t(\beta_{t^{-1}}(b)z) = b\beta_t(z)$. En particular, $\beta_t(A) \subseteq Z(B)$, $\forall t \in G$. Luego, $B = \overline{\operatorname{span}\{\beta_t(a) : a \in A, t \in G\}} \subseteq Z(B) \subseteq B$ y por lo tanto B es conmutativa.

□

Observación 1.12. Si σ es una acción parcial de G en un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff X y σ^e es su acción envolvente en un espacio Y, vimos que Y puede no ser de Hausdorff. En ese caso, la acción α correspondiente a σ en $C_0(X)$ no puede tener acción envolvente como C*-álgebra. Si la tuviera, por la proposición anterior y la correspondencia entre acciones parciales en X y en $C_0(X)$, $\operatorname{Gr}(\sigma)$ sería cerrado en $G \times X \times X$, contradiciendo la suposición de que Y no es un espacio de Hausdorff. Luego, en el caso de C*-álgebras no se cumple siempre la existencia de acciones envolventes. Sin embargo, en caso de que una acción parcial en una C*-álgebra tenga acción envolvente, ésta es única, como veremos en seguida.

Lema 1.13. *Sea* $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *una familia de ideales en una* C^**-álgebra* A*. Sea* $\|\cdot\|_\Lambda : A \to \mathbb{R}$ *tal que* $\|a\|_\Lambda = \sup_{\lambda\in\Lambda}\{\|ax\| \,:\, x \in J_\lambda,\, \|x\| \leq 1\}$*. Entonces* $\|\cdot\|_\Lambda$ *es una* C^**-seminorma en* A*,* $\|\cdot\|_\Lambda \leq \|\cdot\|$ *y* $\|\cdot\|_\Lambda$ *es una norma si y sólo si* $\overline{\operatorname{span}\{x \in J_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}}$ *es un ideal esencial de* A*. En este caso, ambas normas coinciden.*

Demostración: Sea $B = \Pi_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, donde $A_\lambda = A$, $\forall\lambda \in \Lambda$. Entonces B es una C*-álgebra con $\|b\| = \sup_\lambda \|b_\lambda\|$. En B consideramos el siguiente ideal:

$$J = \{(x_\lambda) \in B \,:\, x_\lambda \in J_\lambda,\, \forall\lambda \in \Lambda\},$$

que es además un B-módulo de Hilbert a derecha con $\langle , \rangle : J \times J \to B$, $\langle x, y\rangle = x^* y$. El mapa $\eta(b) : J \to J$ tal que $\eta(b)(x) = bx$ es adjuntable y tenemos un homomorfismo $\eta : B \to \mathcal{L}(J)$. Definimos el homomorfismo $\tilde{\eta} : A \to \mathcal{L}(J)$ como $\tilde{\eta} = \eta \circ \iota$, donde $\iota : A \to B$ es la inclusión $\iota(a)_\lambda = a$, $\forall\lambda \in \Lambda$. Se cumple que

$$\|a\| \geq \|\tilde{\eta}(a)\| = \sup\{\|\tilde{\eta}(a)x\| \,:\, x \in J,\, \|x\| \leq 1\} = \|a\|_\Lambda,$$

para todo $a \in A$.

Por último, las normas coinciden si y sólo si $\tilde{\eta}$ es inyectiva, y esto ocurre si y sólo si $ax = \tilde{\eta}(a)(x) = 0, \forall x \in J$, entonces $a = 0$, es decir, si $\overline{\operatorname{span}\{x \in J_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}}$ es un ideal esencial de A.

□

Teorema 1.14. *Sea* $\alpha = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ *una acción parcial de* G *en una* C^**-álgebra* A *y sean* (β, B) *y* (γ, C) *dos acciones envolventes de* α*. Entonces existe un único isomorfismo* $\phi : B \to C$ *tal que* $\phi\beta_t = \gamma_t\phi$*,* $\forall t \in G$ *y* $\phi_{|_A} = \mathrm{Id}_{|_A}$*.*

Demostración: Dado $s \in G$, consideramos las siguientes C^*-seminormas:

$$\begin{aligned} &\|\cdot\|_{s,B} : B \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \|b\|_{s,B} = \sup\{\|bx\| \,:\, x \in \beta_s(A),\, \|x\| \leq 1\} \\ &\|\cdot\|_{s,C} : C \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \|c\|_{s,C} = \sup\{\|cx\| \,:\, x \in \gamma_s(A),\, \|x\| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Gracias a que β y γ son acciones envolventes, los espacios generados por los ideales $\{\beta_s(A)\}_{s\in G}$ y $\{\gamma_s(A)\}_{s\in G}$ son densos en A y por lo tanto el lema anterior nos perminte concluir que $\|\cdot\|_B = \sup_{s\in G}\|\cdot\|_{s,B}$ y $\|\cdot\|_C = \sup_{s\in G}\|\cdot\|_{s,C}$.

Nótese que si $a, b \in A$, $t \in G$, entonces $\beta_t(a)b = \gamma_t(a)b$. En efecto, si $\{u_i\}_{i\in I}$ es una unidad aproximada de $D_{t^{-1}}$,

$$\beta_t(a)b = \lim_i \beta_t(au_i)b = \lim_i \alpha_t(au_i)b = \lim_i \gamma_t(au_i)b = \gamma_t(a)b. \tag{1.1}$$

Probemos que si $t_1, t_2, \ldots, t_n \in G$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, entonces

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \beta_{t_i}(a_i)\Big\|_B = \Big\|\sum_{i=1}^n \gamma_{t_i}(a_i)\Big\|_C.$$

Por lo observado al comienzo de la demostración, alcanza con probar que $\forall s \in G$, $\forall a \in A$, $\|a\| \leq 1$, se cumple

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \beta_{t_i}(a_i)\beta_s(a)\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n \gamma_{t_i}(a_i)\gamma_s(a)\Big\|.$$

Por ser β_s y γ_s isometrías, usando 1.1, tenemos que:

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=1}^{n}\beta_{t_i}(a_i)\beta_s(a)\Big\| &= \Big\|\beta_s\Big(\sum_{i=1}^{n}\beta_{s^{-1}t_i}(a_i)a\Big)\Big\| \\ &= \Big\|\sum_{i=1}^{n}\beta_{s^{-1}t_i}(a_i)a\Big\| \\ &= \Big\|\sum_{i=1}^{n}\gamma_{s^{-1}t_i}(a_i)a\Big\| \\ &= \Big\|\gamma_s\Big(\sum_{i=1}^{n}\gamma_{s^{-1}t_i}(a_i)a\Big)\Big\| \\ &= \Big\|\sum_{i=1}^{n}\gamma_{t_i}(a_i)\gamma_s(a)\Big\|.\end{aligned}$$

Esto nos permite definir la isometría $\phi : [\beta(A)] \to [\gamma(A)]$ tal que $\phi\big(\sum_{i=1}^{n}\beta_{t_i}(a_i)\big) = \sum_{i=1}^{n}\gamma_{t_i}(a_i)$, que se extiende de manera única a una isometría $\phi : B \to C$.

Es inmediato verificar que $\phi\beta_t = \gamma_t\phi$, $\forall t \in G$, y que $\phi_{|_A} = \mathrm{Id}_{|_A}$. Estas propiedades determinan a ϕ: $\phi(\beta_t(a)) = \gamma_t\phi(a) = \gamma_t(a)$, $\forall t \in G$, $a \in A$, y por lo tanto ϕ es único.

$\square$

2. Estados invariantes por acciones parciales

Definiciones 1.15. Sean φ una funcional lineal en una C*-álgebra A y G un grupo. Si $\alpha = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ es una acción parcial de G en A, decimos que φ es G-invariante si se cumple que $\varphi(\alpha_t(a)) = \varphi(a)$ para todo $a \in D_{t^{-1}}$, $t \in G$.

Sean X un espacio topológico y μ una medidad de Borel en X. Si $\sigma = (\{X_t\}_{t\in G}, \{\sigma_t\}_{t\in G})$ es una acción parcial de G en X, decimos que μ es G-invariante si se cumple que $\forall t \in G$ y $\forall E$ boreliano incluido en $X_{t^{-1}}$, $\mu(\sigma_t(E)) = \mu(E)$.

Observación 1.16. Sea X un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff. Recuérdese que si

$$M(X) = \{\mu \,:\, \mu \text{ es una medida de Radon compleja en } X\},$$

el teorema de representación de Riesz nos asegura que el mapa de $M(X)$ en $C_0(X)'$ tal que a μ le corresponde I_μ, con $I_\mu(f) = \int f\,d\mu$, es un isomorfismo lineal isométrico. En particular, si φ es un estado en $C_0(X)$, existe $\mu \in M(X)$ tal que $\varphi = I_\mu$ y μ es una medida de probabilidad.

Proposición 1.17. *Sea X un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff. Sean $\mu \in M(X)$ y $\sigma = (\{X_t\}_{t\in G}, \{\sigma_t\}_{t\in G})$ una acción parcial de G en X. Sean $\varphi = I_\mu$ la funcional correspondiente a μ vía el teorema de Riesz y $\alpha = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ la acción parcial correspondiente a σ en $C_0(X)$.*

Entonces μ es G-invariante si y sólo si φ es G-invariante.

Demostración: Comencemos por probar que si φ es G-invariante, entonces μ es G-invariante. Veamos primero que si $t \in G$ y $K \subseteq X_{t^{-1}}$ es compacto, entonces $\mu(K) =$

$\mu(\sigma_t(K))$. Por ser una medida de Radon,

$$\begin{aligned}\mu(K) &= \inf\Big\{\int f\,d\mu \,:\, \chi_{_K} \leq f,\, f \in C_c(X,\mathbb{R}_{\geq 0})\Big\}\\ &= \inf\Big\{\int f\,d\mu \,:\, \chi_{_K} \leq f,\, f \in C_c(X,\mathbb{R}_{\geq 0}),\, \mathrm{supp}(f) \subseteq X_{t^{-1}}\Big\},\end{aligned}$$

la segunda igualdad se verifica por el lema de Urysohn. Utilizamos la siguiente notación: si g es una función de un conjunto C a los complejos, su soporte es $\mathrm{supp}(g) = \overline{\{x \in C \,:\, g(x) \neq 0\}}$. En el caso que nos ocupa, obsérvese que $\mathrm{supp}(f) \subseteq X_{t^{-1}}$ si y sólo si $f \in D_t = \{a \in C_0(X) \,:\, a(x) = 0\,\forall x \notin X_{t^{-1}}\}$. Aplicando esto y la invariancia de $\varphi = I_\mu$, observando que $\alpha_t(\chi_{_K}) = \chi_{_K} \circ (\sigma_t)^{-1} = \chi_{_{\sigma_t(K))}}$ y sustituyendo $\alpha_t(f)$ por g, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mu(K) &= \inf\Big\{\int \alpha_t(f)\,d\mu \,:\, \chi_{_K} \leq f,\, f \in C_c(X,\mathbb{R}_{\geq 0}),\, \mathrm{supp}(f) \subseteq X_{t^{-1}}\Big\}\\ &= \inf\Big\{\int \alpha_t(f)\,d\mu \,:\, \chi_{_{\sigma_t(K)}} \leq \alpha_t(f),\, \alpha_t(f) \in C_c(X,\mathbb{R}_{\geq 0}),\, \mathrm{supp}(\alpha_t(f)) \subseteq X_t\Big\}\\ &= \inf\Big\{\int g\,d\mu \,:\, \chi_{_{\sigma_t(K)}} \leq g,\, g \in C_c(X,\mathbb{R}_{\geq 0}),\, \mathrm{supp}\, g \subseteq X_t\Big\}\\ &= \mu(\sigma_t(K)).\end{aligned}$$

Si $E \subseteq X_{t^{-1}}$ es un boreliano,

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \sup\{\mu(K) \,:\, K \subseteq E,\, K \text{ compacto }\}\\ &= \sup\{\mu(\sigma_t(K)) \,:\, \sigma_t(K) \subseteq \sigma_t(E),\, \sigma_t(K) \text{ compacto }\}\\ &= \mu(\sigma_t(E)).\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que μ es G-invariante. Fijemos $s \in G$. Nótese que si $E \subseteq X_{s^{-1}}$, entonces

$$\varphi(\alpha_s(\chi_{_E})) = \int \alpha_s(\chi_{_E})\,d\mu = \int \chi_{_{\sigma_s(E)}}\,d\mu = \mu(\sigma_s(E)) = \mu(E) = \varphi(\chi_{_E}).$$

Sea $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_{_{E_i}}$, donde $E_i \subseteq X_{s^{-1}}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, E_i boreliano en X, entonces,

$$\varphi(\alpha_s(f)) = \varphi\big(\sum_{i=1}^k \alpha_s(\lambda_i\chi_{_{E_i}})\big) = \sum_{i=1}^k \lambda_i\varphi\big(\alpha_s(\chi_{_{E_i}})\big) = \sum_{i=1}^k \lambda_i\varphi(\chi_{_{E_i}}) = \varphi(f).$$

Si $f \in C_c(X_{s^{-1}})$, existe una sucesión de funciones simples $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, acotadas en valor absoluto por f y que convergen a f en $C_c(X_{s^{-1}})$. Aplicando el teorema de convergencia dominada y la invariancia de las funciones simples por α, tenemos que $\varphi(f) = \varphi(\alpha_s(f))$.

Para terminar, sea $\varphi_s : C_0(X_{s^{-1}}) \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi_s(f) = \int \alpha_s(f)\,d\mu$. Acabamos de probar que $(\varphi_s)_{|_{C_c(X_{s^{-1}})}} = \varphi_{|_{C_c(X_{s^{-1}})}}$ y como $C_c(X_{s^{-1}})$ es denso en $C_0(X_{s^{-1}})$, debe ser $\varphi_s = \varphi_{|_{C_0(X_{s^{-1}})}}$. Por lo tanto dado $s \in G$, $\varphi(f) = \varphi(\alpha_s(f))$, $\forall f \in D_{s^{-1}}$, como queríamos probar.

□

LEMA 1.18. *Sean X un espacio topológico, G un grupo, $\sigma = (\{X_t\}_{t\in G}, \{\sigma_t\}_{t\in G})$ una acción parcial de G en X y μ una medida de Borel G-invariante en X. Sean X^e y σ^e el espacio envolvente y la acción envolvente de σ.*

Supongamos que E es un subconjunto de X^e tal que existen $t_1, t_2, \ldots, t_k \in G$ y $E_1, E_2, \ldots, E_k$ subconjuntos borelianos de X tales que $E = \uplus_{i=1}^k \sigma^e_{t_i}(E_i)$. Entonces:

1. *Si existen* $s_1, s_2, \ldots, s_l \in G$ *y* $F_1, F_2, \ldots, F_l$ *subconjuntos borelianos de* X *tales que* $E = \uplus_{j=1}^{l} \sigma^e_{s_j}(F_j)$, *entonces* $\sum_{j=1}^{l} \mu(F_j) = \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i)$.
2. *Si* $F \subseteq X^e$ *es tal que* $F = \uplus_{j=1}^{m} \sigma^m_{s_j}(F_j)$, *con* $s_1, s_2, \ldots, s_m \in G$ *y* $F_1, F_2, \ldots, F_m$ *subconjuntos borelianos de* X, *y* $E \subseteq F$, *entonces* $\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \leq \sum_{j=1}^{m} \mu(F_j)$.

Demostración: Alcanza con probar 2.

Sea $E_{ij} = (\sigma^e_{t_i})^{-1}\big(\sigma^e_{t_i}(E_i) \cap \sigma^e_{s_j}(F_j)\big)$. Nótese que $\sigma^e_{t_i}(E_{ij}) = \sigma^e_{t_i}(E_i) \cap \sigma^e_{s_j}(F_j)$, que es boreliano en X^e, y por lo tanto E_{ij} es boreliano en X. Análogamente, sea $F_{ji} = (\sigma^e_{s_j})^{-1}\big(\sigma^e_{t_i}(E_i) \cap \sigma^e_{s_j}(F_j)\big)$, se cumple que $\sigma^e_{s_j}(F_{ji}) = \sigma^e_{t_i}(E_{ij})$.

Obsérvese que si $E, F \subseteq X$ verifican que $\sigma^e_t(E) = \sigma^e_s(F)$ entonces $\mu(E) = \mu(F)$. Se cumple que $E = \sigma^e_{t^{-1}s}(F) \subseteq \sigma^e_{t^{-1}s}(X) \cap X = X_{t^{-1}s}$. Entonces $E \subseteq X_{t^{-1}s}$ y $F \subseteq X_{s^{-1}t}$. Luego

$$\mu(E) = \mu(\sigma^e_{t^{-1}s}(F)) = \mu(\sigma_{t^{-1}s}(F)) = \mu(F).$$

Por lo tanto, probamos que $\mu(E_{ij}) = \mu(F_{ji})$, $\forall i, j$. Se cumple que $E_i = \uplus_{j=1}^{l} E_{ij}$ y $F_j \supseteq \uplus_{i=1}^{k} F_{ji}$. Si $x \in E_i$, entonces $\sigma^e_{t_i}(x) \in \uplus_{j=1}^{l} \sigma^e_{s_j}(F_j)$. Luego, existe un único $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ tal que $\sigma^e_{t_i}(x) \in \sigma^e_{s_j}(F_j)$ y entonces existe un único $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ tal que $x \in E_{ij}$. De manera análoga se prueba la inclusión que involucra a F_j. Deducimos entonces que $\mu(E_i) = \sum_{j=1}^{l} \mu(E_{ij})$ y $\mu(F_j) \geq \sum_{i=1}^{k} \mu(F_{ji})$. De aquí que

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(E_i) = \sum_{i,j} \mu(E_{ij}) = \sum_{i,j} \mu(F_{ji}) \leq \sum_{j=1}^{l} \mu(F_j),$$

como queríamos verificar.

LEMA 1.19. *En las hipótesis del lema anterior, supongamos que* E *es un subconjunto boreliano de* X^e *incluido en un compacto* K. *Entonces existen* $t_1, t_2, \ldots, t_n \in G$ *y* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *subconjuntos borelianos de* X *tales que* $E = \uplus_{i=1}^{n} \sigma^e_{t_i}(E_i)$.

En particular, si X^e *es compacto, todo subconjunto boreliano admite ser escrito de esa manera.*

Demostración: En la prueba de la existencia de X^e vimos que $X^e = \mathcal{O}_{\sigma^e}(X)$ y que X es abierto en X^e, por lo tanto $\{\sigma^e_t(X)\}_{t \in G}$ es un cubrimiento por abiertos de K, que es compacto. Entonces existen $t_1, t_2, \ldots t_n \in G$ tales que $K \subseteq \cup_{i=1}^{n} \sigma^e_{t_i}(X) = \uplus_{i=1}^{n} \sigma^e_{t_i}(X_i)$, eligiendo $X_1 = X$, $X_2 = X \setminus X_{t_2^{-1}t_1}$ y $X_j = X \setminus \cup_{i=1}^{j-1} X_{t_j^{-1}t_i}$, $\forall j = 3, \ldots, n$. Esta última afirmación se debe a que

$$X_{t_j^{-1}t_i} = \sigma^e_{t_j^{-1}t_i}(X) \cap X = \sigma^e_{t_j^{-1}}\big(\sigma^e_{t_i}(X) \cap \sigma^e_{t_j}(X)\big).$$

Al considerar $\sigma_{t_j}(X \setminus X_{t_j^{-1}t_i})$ estamos retirando los elementos que están en la intersección de $\sigma^e_{t_i}(X)$ y $\sigma^e_{t_j}(X)$, asegurándonos de esta manera que la unión es disjunta.

Por lo tanto, si $E \subseteq K$, $E = \big(\uplus_{i=1}^{n} \sigma^e_{t_i}(X_i)\big) \cap E$. Sea $E_i = X_i \cap (\sigma^e_{t_i}(E))$, que es un subconjunto boreliano, $\forall i$. Entonces $E = \uplus_{i=1}^{n} \sigma^e_{t_i}(E_i)$, como queríamos probar.

□

TEOREMA 1.20. *Sean* X *un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff y* $\sigma = (\{X_t\}_{t \in G}, \{\sigma_t\}_{t \in G})$ *una acción parcial de un grupo* G *en* X. *Supongamos que la acción envolvente de* σ *es* (σ^e, X^e) *y que* X^e *es un espacio de Hausdorff.*

Si μ *es una medida de Radon positiva y* G*-invariante, entonces existe una única medida de Radon positiva y* G*-invariante en* X^e *que extiende a* μ.

Demostración: Si K es un subconjunto de X^e tal que existen $E_1, E_2, \ldots, E_n$ subconjuntos borelianos de X y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ que verifican $K = \uplus_{i=1}^n \sigma_{t_i}^e(E_i)$, definimos $\nu(K) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$. Como vimos antes, los subconjuntos compactos de X^e admiten descomposición de ese tipo. Antes probamos que $\nu(K)$ no depende de la descomposición de K elegida y que es una función monótona en aquellos subconjuntos de X^e que admiten una descomposición como la de los compactos. Además $\nu(K) < \infty$, $\forall K$ compacto en X^e, y se verifican las siguientes aditividad y subadivitidad:

1. Si $K_j = \uplus_{i=1}^{n_j} \sigma_{t_i}^e(E_{ij})$, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$ y los subconjuntos K_j son dos a dos disjuntos, entonces
$$\nu(\uplus_{j=1}^n K_j) = \nu(\uplus_{i,j} \sigma_{t_i}^e(E_{ij})) = \sum_{i,j} \mu(E_{ij}) = \sum_{i=1}^n \nu(K_j).$$
2. Si $K_1, K_2, \ldots, K_n$ son subconjuntos, no necesariamente dos a dos disjuntos, que admiten una descomposición, entonces $\cup_{j=1}^n K_j = \uplus_{j=1}^n K'_j$, con $K'_j \subseteq K_j$ y por lo tanto
$$\nu(\cup_{j=1}^n K_j) = \nu(\uplus_{j=1}^n K'_j) = \sum_{j=1}^n \nu(K'_j) \leq \sum_{j=1}^n \nu(K_j).$$

Sea $\nu(U) = \sup\{\nu(K) : K \subseteq U, K \text{ compacto}\}$, $\forall U$ abierto en X^e. Definimos
$$\nu^*(E) = \inf\{\nu(U) : E \subseteq U, U \text{ abierto}\}, \quad \forall E \subseteq X^e.$$
Vamos a verificar que ν^* es una medida exterior.

Obsérvese que si U es abierto, $\nu^*(U) = \nu(U)$ y si $U = \uplus_{i=1}^k \sigma_{t_i}^e(U_i)$, $U_i \subseteq X$, entonces $\nu(U) = \sum \mu(U_i)$, por la regularidad interior de μ.

Veamos que si K es compacto, $\nu(K) = \nu^*(K)$. Es inmediato que $\nu(K) \leq \inf\{\nu(U) : K \subseteq U, U \text{ abierto}\}$. Por otra parte, si $\varepsilon > 0$, podemos hallar U abierto que incluye a K y que verifica $\nu(U) \leq \nu(K) + \varepsilon$ gracias a la regularidad de μ. En efecto, supongamos que $K = \uplus_{i=1}^k \sigma_{t_i}^e(E_i)$. Dado $\varepsilon > 0$, por ser μ una medida regular, existe U_i abierto en X tal que $\mu(U_i) \leq \mu(E_i) + \varepsilon/k$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces,
$$\sum_{i=1}^k \mu(U_i) \leq \sum_{i=1}^k \mu(E_i) + \varepsilon/k = \sum_{i=1}^k \mu(E_i) + \varepsilon = \nu(K) + \varepsilon.$$
Nótese que $U = \cup_{i=1}^k \sigma_{t_i}^e(U_i)$ es un subconjunto abierto de X^e y que
$$\nu(U) \leq \sum_{i=1}^k \mu(U_i) < \nu(E) + \varepsilon,$$
donde en la primera desigualdad estamos aplicando la subaditividad verificada en 2.

Es claro que $\nu(U) \geq 0$, por ser $\mu \geq 0$, y por lo tanto $\nu^*(E) \geq 0$, $\forall E$. También es inmediato que $\nu^*(\emptyset) = \nu(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Para verificar que ν^* es monótona, obsérvese que si $E \subseteq F$ y V es un abierto tal que $V \supseteq F$, entonces $V \supseteq E$. Luego, $\nu^*(E) \leq \nu^*(F)$.

Veamos que ν^* es numerablemente subaditiva, es decir, si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^e$, entonces $\nu^*(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu^*(E_n)$.

Supongamos primero que $\nu^*(\cup E_n) < \infty$. En este caso, $\nu^*(E_n) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y entonces, dado $\varepsilon > 0$, por la definición de ν^*, existe V_n abierto en X^e que contiene a E_n y verifica $\nu^*(E_n) + \varepsilon/2^n \geq \nu^*(V_n)$. Sea $V = \cup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Vamos a probar que $\nu(V) \leq \varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu^*(E_n)$ y por lo tanto, haciendo tender ε a 0, probamos que $\nu(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu^*(E_n)$. Sea K un subconjunto compacto de X^e incluido en V; $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento por abiertos de

K y entonces existen $V_{i_1}, \ldots, V_{i_k}$ tales que $K \subseteq \cup_{j=1}^{k} V_{i_j}$. Para cada j, sea $K_j = \overline{V_{i_j} \cap K}$. Entonces

$$\nu(K) = \nu(\cup_{j=1}^{k} K_j) \leq \sum_{j=1}^{k} \nu(K_j) \leq \sum_{j=1}^{k} \nu(V_{i_j}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(V_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Luego, $\nu(V) = \sup \nu(K) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu^*(E_n) + \varepsilon$, como queríamos probar.

Ahora vamos a verificar que si $\nu^*(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \infty$, entonces $\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu^*(E_n) = \infty$. Podemos suponer que $\nu^*(E_n) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ya que en caso contrario no hay nada que probar. Fijamos $m > 0$ arbitrario y vamos a probar que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu^*(E_n) > m$. Dado $\varepsilon > 0$, si $n \in \mathbb{N}$, existe $U_n \supseteq E_n$ abierto tal que $\nu^*(U_n) \leq \nu^*(E_n) + \varepsilon/2^n$. Sea $V = \cup_{n \in \mathbb{N}} U_n$, $V \supseteq \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ y por lo tanto $\nu(V) = \infty$. Entonces, podemos elegir $K \subseteq V$ compacto tal que $\nu(K) > m+1$. Eligiendo un subcubrimiento $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ de $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tenemos que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu^*(U_n) \geq \sum_{j=1}^{k} \nu^*(U_{i_j} \cap K) \geq \nu(K) > m + 1.$$

Por lo tanto, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu^*(E_n) + \varepsilon \geq m + 1$ y entonces $\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu^*(E_n) > m$.

Hasta el momento probamos que ν^* es una medida exterior. A continuación vamos a demostrar que los borelianos son ν^*-medibles, para esto alcanza con verificar que los abiertos lo son, es decir que si E es un subconjunto de X^e y U es abierto, entonces $\nu^*(E) \geq \nu^*(E \cap U) + \nu^*(E \cap U^c)$.

Si $\nu^*(E) = \infty$, no hay nada que probar. Supongamos entonces que $\nu^*(E) < \infty$. Vamos a considerar primero el caso en que E es abierto. En este caso, $E \cap U$ es abierto y por lo tanto, si $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto compacto K incluido en $E \cap U$ tal que $\nu^*(E \cap U) - \varepsilon < \nu(K)$. Análogamente, como $E \cap K^c$ también es abierto, existe un subconjunto compacto K' tal que $\nu^*(E \cap K^c) - \varepsilon < \nu(K')$. Obsérvese que $K \cap K' = \emptyset$, $K' \uplus K \subseteq E$ y $E \cap K^c \supseteq E \cap U$. Entonces,

$$\nu(E) \geq \nu(K \uplus K') = \nu(K) + \nu(K') > \nu^*(E \cap U) + \nu^*(E \cap K^c) - 2\varepsilon > \nu^*(E \cap U) + \nu^*(E \cap U^c) - 2\varepsilon$$

y concluimos que E es ν^*-medible.

Si E es un subconjunto cualquiera tal que $\nu^*(E) < \infty$, dado $\varepsilon > 0$ elegimos V abierto que incluye a E y verifica $\nu^*(E) \geq \nu(V) - \varepsilon$. Por ser V abierto, como acabamos de ver, se tiene que $\nu(V) \geq \nu(V \cap U) + \nu^*(V \cap U^c)$. Entonces,

$$\nu^*(E) \geq \nu(V \cap U) + \nu^*(V \cap U^c) - \varepsilon \geq \nu(E \cap U) + \nu^*(E \cap U^c) - \varepsilon.$$

Probamos entonces que $\nu(E) = \text{ínf}\{\nu(U) : U \supseteq E, U \text{ es abierto}\}$ define una medida en los borelianos de X^e. Esta medida es de Radon por definición. Resta únicamente probar que extiende a μ y que es invariante por σ^e.

Sea un conjunto boreliano $E \subseteq X$. Si E es compacto, $E = \sigma_e^e(E)$ y $\nu(E) = \mu(E)$. Si E es abierto, para hallar $\nu(E)$ consideramos subconjuntos compactos de E, y por lo tanto $\nu(E) = \mu(E)$. Por último, si E es cualquier boreliano, $\nu(E) \leq \nu(U) = \mu(U)$, $\forall U \subseteq X$, U abierto que contiene a E, y por lo tanto $\nu(E) \leq \mu(E)$. Pero si U es abierto en X^e y contiene a E, $U \cap X$ es abierto en X, contiene a E y $\mu(U \cap X) = \nu(U \cap X) \leq \nu(U)$, de donde $\nu(E) = \mu(E)$.

Para verificar la invariancia de ν por σ^e alcanza con probarla para los subconjuntos compactos de X^e. Si $K = \uplus_{i=1}^{k} \sigma_{t_i}^e(E_i)$, entonces $\forall s \in G$,

$$\nu(\sigma_s^e(E)) = \nu\big(\sigma_s^e(\uplus_{i=1}^{k} \sigma_{t_i}^e(E_i))\big) = \nu\big(\uplus_{i=1}^{k} \sigma_{st_i}^e(E_i)\big) = \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i) = \nu(E).$$

Con respecto a la unicidad de ν, obsérvese que si η es otra medida con las propiedades del enunciado, ν y η deben coincidir en los compactos, por ser G-invariantes y extender a μ. Pero entonces coinciden en los borelianos, por ser de Radon.

$\square$

COROLARIO 1.21. *En las hipótesis del teorema anterior y siguiendo la notación ahí utilizada, si X^e es compacto, entonces la medida ν es finita.*

Demostración: La medida ν construida en la demostración del teorema es de Radon, y en particular, finita en los compactos.

$\square$

TEOREMA 1.22. *Sean $A = C_0(X)$ una C^*-álgebra conmutativa, G un grupo y $\alpha = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ una acción parcial de G en A. Supongamos que α tiene acción envolvente $(\alpha^e, C_0(X^e))$ y que $C_0(X^e)$ tiene unidad.*

Si φ es un estado G-invariante sobre A,entonces φ se extiende a una única funcional lineal positiva G-invariante de $C_0(X^e)$.

Demostración: Por el teorema de Riesz, a φ le corresponde una medida de probabilidad μ, que es invariante por σ, la acción parcial correspondiente a α en X, por la proposición 1.17. Por el teorema 1.20, μ se extiende de manera única a una medida de Radon positiva G-invariante en X^e que llamamos ν. Estamos suponiendo que $C_0(X^e)$ tiene unidad, o equivalentemente, que X^e es compacto, y esto nos permite afirmar que ν es finita. Nuevamente aplicando la proposición 1.17, a ν le asociamos una funcional lineal positiva en $C_0(X^e)$, que llamamos ψ y que es G-invariante. Como ν extiende a μ, ψ extiende a φ, y de la unicidad en el caso de las medidas se deduce la unicidad en este caso.

$\square$

OBSERVACIÓN 1.23. Podríamos haber probado el teorema anterior de manera más directa si en 1.20 hubieramos supuesto la compacidad de X^e. En ese caso, $\forall E$ boreliano en X^e, E admite una descomposición de la forma $E = \uplus_{i=1}^{n} \sigma_{t_i}^{e}(E_i)$ y podríamos haber definido directamente $\nu(E) = \sum \mu(E_i)$. Se verifica directamente que ν es una medida de Radon sin necesidad de extenderla a una medida exterior.

Capítulo 2

Fibrados de Fell

El objetivo de este capítulo es hacer una introducción a los fibrados de Fell sobre grupos discretos y presentar la noción de promediabilidad en este contexto.

En la primera sección introduciremos la definición de fibrado de Fell así como algunos ejemplos, entre ellos, los fibrados de Fell asociados a acciones parciales. Además, dado un fibrado de Fell $\mathcal{B}$ le asociaremos una C*-álgebra $C^*(\mathcal{B})$, llamada C*-álgebra seccional plena de $\mathcal{B}$.

En la siguiente sección, luego de presentar las representaciones en el contexto que estamos considerando, nos concentraremos en una en especial: la representación regular a izquierda de $\mathcal{B}$. Esta representación nos permitirá asociar otra C*-álgebra a $\mathcal{B}$, la C*-álgebra seccional reducida de $\mathcal{B}$, que notaremos $C_r^*(\mathcal{B})$. Extendiendo la caracterización de grupo promediable obtenida a partir de la propiedad de contención débil, decimos que el fibrado $\mathcal{B}$ es promediable si $C^*(\mathcal{B}) \simeq C_r^*(\mathcal{B})$.

La tercera sección está dedicada al análisis de la relación entre un fibrado de Fell $\mathcal{B}$ y sus posibles C*-álgebras graduadas asociadas. En particular, veremos que entre las C*-álgebras graduadas asociadas a $\mathcal{B}$, $C^*(\mathcal{B})$ es en algún sentido la mayor y, si incluimos una condición más, $C_r^*(\mathcal{B})$ es la menor.

En la última sección probamos una condición suficiente para que un fibrado sea promediable, la condición llamada "propiedad de aproximación". En particular, esta propiedad nos permite probar que los fibrados sobre grupos promediables son promediables.

Los resultados de este capítulo se encuentran en [**FD88a**], [**FD88b**] y [**Exe97**].

1. Fibrados de Fell

Definición 2.1. Sea $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$, donde B es un espacio topológico de Hausdorff, G es un grupo discreto y $\Pi : B \to G$ es un mapa continuo y sobreyectivo. Sea $B_t := \Pi^{-1}(t)$, para todo $t \in G$, llamada fibra en t.

Decimos que $\mathcal{B}$ es un fibrado de Banach algebraico si está dotado de los siguientes mapas con las siguientes propiedades:

- Un mapa suma $+ : B_t \times B_t \to B_t$ continuo, $\forall t \in G$.
- Un mapa producto escalar $\cdot : \mathbb{C} \times B_t \to B_t$ continuo, $\forall t \in G$.
- Una norma continua $\| \cdot \| : B \to \mathbb{C}$ tal que B_t es un espacio de Banach, $\forall t \in G$.
- Un mapa producto $\cdot : B \times B \to B$ tal que $B_s B_t \subseteq B_{st}$, $\forall s, t \in G$, es bilineal, asociativo y submultiplicativo.

Definición 2.2. Decimos que un fibrado de Banach algebraico $\mathcal{B} = (\Pi, B, G)$ es un fibrado de Fell si hay una involución $* : B_t \to B_{t^{-1}}$, $\forall t \in G$, que es antilineal e isométrico, cumple $(ab)^* = b^* a^*$ y además se verifica $\|b^* b\| = \|b\|^2$ y $b^* b \geq 0$, $\forall b \in B$. Nótese que el conjunto las condiciones, excepto la positividad de $b^* b$, implican que B_e, llamada fibra unidad, es una C*-álgebra, por lo cual tiene sentido considerar elementos positivos.

NOTACIÓN 2.3. Dado un fibrado de Banach $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$, en algunas ocasiones escribiremos b_t con el propósito de remarcar que el elemento b_t de B pertenece a la fibra B_t.

EJEMPLO 2.4. Sean G un grupo discreto y C una C*-álgebra. Supongamos que $\forall t \in G$ existe C_t, un subespacio cerrado de C, tal que $C_s C_t \subseteq C_{st}$ y $(C_t)^* \subseteq C_{t^{-1}}$, $\forall s, t \in G$.

Si $B = \{(t, a) : t \in G, a \in C_t\}$ y $\Pi : B \to G$ es tal que $\Pi(t, a) = t$, entonces $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ es un fibrado de Fell con las siguientes operaciones:

- $(t, a) + (t, b) = (t, a + b)$,
- $\lambda(t, a) = (t, \lambda a)$,
- $(s, a) \cdot (t, b) = (st, ab)$
- $\|(t, a)\| = \|a\|$,
- $(t, a)^* = (t^{-1}, a^*)$,

$\forall s, t \in G, a, b \in C, \lambda \in \mathbb{C}$.

Si además de las condiciones mencionadas antes, $(C, \{C_t\}_{t \in G})$ verifica que los subespacios son linealmente independientes y el espacio que generan es denso en C, decimos que $(C, \{C_t\}_{t \in G})$ es una C*-álgebra graduada. Veremos más adelante, en la proposición 2.23, que a todo fibrado de Fell podemos asociarle una C*-álgebra graduada.

EJEMPLO 2.5. Sean A una C*-álgebra y G un grupo discreto. El fibrado de Fell trivial es $\mathcal{B} = (G \times A, \Pi_G, G)$, donde $\Pi_G : A \times G \to G$, $\Pi_G(t, a) = t$ y las operaciones son las siguientes:

- la suma, el producto por escalares y la norma de A,
- el producto $(s, a)(t, b) = (st, ab)$, $\forall s, t \in G, a, b \in A$
- y la involución $(s, a)^* = (s^{-1}, a^*)$, $\forall s \in G, a \in A$.

En particular, si $A = \mathbb{C}$ llamamos fibrado del grupo al fibrado obtenido.

EJEMPLO 2.6. Sean A una C*-álgebra, G un grupo discreto y $\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ una acción parcial de G en A. El fibrado de Fell asociado a α es $\mathcal{B}_\alpha = (B_\alpha, \Pi, G)$, donde $B_\alpha = \{(t, x) : x \in D_t, t \in G\}$, $\Pi : B_\alpha \to G$, $\Pi(t, x) = t$ y las operaciones son las siguientes:

- la suma, el producto escalar y la norma inducidos naturalmente por la estructura de A,
- el producto $(s, x)(t, y) = (st, \alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(x)y))$, $\forall (s, x), (t, y) \in B_\alpha$
- y la involución $(s, x)^* = (s^{-1}, \alpha_{s^{-1}}(x^*))$, $\forall (s, x) \in B_\alpha$.

En particular, si α es una acción, el producto es $(s, x)(t, y) = (st, x\alpha_s(y))$, $\forall (s, x), (t, y) \in B_\alpha$

DEFINICIÓN 2.7. Si $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ es un fibrado de Fell, una sección de $\mathcal{B}$ es una función $f : G \to B$ tal que $f(t) \in B_t$, $\forall t \in G$.

Llamamos $C_c(\mathcal{B}) = \{f \text{ sección de } \mathcal{B} : \# \operatorname{supp} f < \infty\}$ al espacio de las funciones de soporte compacto.

Sea $l^1(\mathcal{B}) = \{f \text{ sección de } \mathcal{B} : \sum_{t \in G} \|f(t)\| < \infty\}$. El mapa $\| \cdot \|_1 : l^1(\mathcal{B}) \to \mathbb{C}$, $\|f\|_1 = \sum_{t \in G} \|f(t)\|$ es una norma, y el espacio resulta ser completo con respecto a ella (ver Fell II.15.9). Definimos además un producto y una involución:

Si $f, g \in l^1(\mathcal{B})$, sea

$$(f * g)(t) = \sum_{s \in G} f(s) g(s^{-1}t) \quad \forall t \in G.$$

Nótese que $\forall s, t \in G$, $f(s)g(s^{-1}t) \in B_t$. Como B_t es un espacio de Banach, alcanza con acotar $\sum_{s \in G} \|f(s)g(s^{-1}t)\|$ para probar que la serie $\sum_{s \in G} f(s)g(s^{-1}t)$ converge en B_t. Si llamamos N_f a la función $N_f : G \to \mathbb{C}$ tal que $N_f(t) = \|f(t)\|$, se tiene que $\|f\|_1 = \|N_f\|_1$, donde en el primer término nos referimos a la norma en $l^1(\mathcal{B})$ y en el segundo a la norma en $l^1(G)$. Por lo tanto, si $f, g \in l^1(\mathcal{B})$,

$$\sum_{s\in G} \|f(s)g(s^{-1}t)\| \leq \sum_{s\in G} N_f(s)N_g(s^{-1}t) = (N_f * N_g)(t),$$

de donde $f * g$ es una sección de $\mathcal{B}$. Es inmediato verificar que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$, luego $f * g \in l^1(\mathcal{B})$.

En cuanto a la involución, definimos

$$f^*(t) = f(t^{-1})^* \quad \forall t \in G.$$

Se tiene que $f(t^{-1}) \in B_{t^{-1}}$, luego $f(t^{-1})^* \in (B_{t^{-1}})^* \subseteq B_t$, y además $\|f^*\|_1 = \sum_{t\in G} \|f^*(t)\| = \sum_{t\in G} \|f(t^{-1})^*\| = \sum_{t\in G} \|f(t^{-1})\| = \|f\|_1$, de donde $f^* \in l^1(\mathcal{B})$. Se verifica directamente que $(f * g)^* = g^* * f^*$ y que * es antilineal.

De todo lo anterior se deduce que $(l^1(\mathcal{B}), *, ^*)$ es una $*$-álgebra de Banach, que llamamos álgebra seccional de $\mathcal{B}$.

Llamamos C*-álgebra seccional plena de $\mathcal{B}$ a $(C^*(\mathcal{B}), \|\cdot\|^\dagger)$, la C*-álgebra envolvente de $l^1(\mathcal{B})$ (ver B.5).

Nos interesará saber que en el proceso de construcción de $C^*(\mathcal{B})$ no es necesario tomar cocientes, ya que existe una representación fiel de $l^1(\mathcal{B})$, como veremos en 2.22.

Ejemplo 2.8. Si $\mathcal{B}_\alpha$ es el fibrado de Fell asociado a una acción parcial α como en el ejemplo 2.6, decimos que $C^*(\mathcal{B}_\alpha)$ es el producto cruzado de A por α y escribimos $A \rtimes_\alpha G$. A continuación describimos las operaciones en $l^1(\mathcal{B}_\alpha)$ en este contexto. Utilizaremos la siguiente notación: si $(t, b) \in B_\alpha$, $(t, b) =: b\delta_t$. Es decir,

$$B_\alpha = \{(t, b) = b\delta_t \in G \times A \,:\, b \in D_t\}$$

Si llamamos $\tilde{f}(t)$ al elemento de D_t tal que $f(t) = \tilde{f}(t)\delta_t$,

$$\begin{aligned}
C_c(\mathcal{B}_\alpha) &= \{f : G \to B_\alpha \text{ sección} \,:\, \#\operatorname{supp}(f) < \infty\},\\
l^1(\mathcal{B}_\alpha) &= \{f : G \to B_\alpha \text{ sección} \,:\, f(t) = (t, \tilde{f}(t)), \sum_{t\in G} \|\tilde{f}(t)\| < \infty\},\\
(f * g)(t) &= \sum_{s\in G} \tilde{f}(s)\delta_s\tilde{g}(s^{-1}t))\delta_{s^{-1}t} = \sum_{s\in G} \alpha_s\Big(\alpha_{s^{-1}}(\tilde{f}(s))\tilde{g}(s^{-1}t)\Big)\delta_{st},\\
f^*(s) &= \alpha_{s^{-1}}(\tilde{f}(s)^*)\delta_{s^{-1}}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.9. Si $\mathcal{B}$ es el fibrado del grupo, se tiene que $l^1(\mathcal{B}) = l^1(G)$ y $C^*(\mathcal{B}) = C^*(G)$.

Definición 2.10. Obsérvese que $C_c(\mathcal{B})$ es un pre-módulo de Hilbert a derecha sobre B_e con las siguientes operaciones:

$$C_c(\mathcal{B}) \times B_e \to C_c(B) \text{ tal que } \eta \cdot b(s) = \eta(s)b,\ \forall b \in B_e, s \in G.$$

$$C_c(\mathcal{B}) \times C_c(\mathcal{B}) \to B_e \text{ tal que } \langle \eta, \xi\rangle = \sum_{t\in G} \eta(t)^*\xi(t),\ \forall \eta, \xi \in C_c(\mathcal{B}).$$

La norma inducida por ese producto interno es $\|\xi\|_2 = \|\langle\xi, \xi\rangle\|^{1/2}$ y llamamos $l^2(\mathcal{B})$ a la completación de $C_c(\mathcal{B})$ con respecto a ella. Sea $\mathcal{P}_F(G) = \{F \subseteq G \,:\, F \text{ es finito}\}$. Veamos que $l^2(\mathcal{B})$ coincide con

$$\mathcal{D} := \Big\{\xi \text{ sección de } \mathcal{B} :\ \text{ la red } \{\sum_{s\in F} \xi(s)^*\xi(s)\}_{F\subseteq \mathcal{P}_F(G)} \text{ converge en } B_e\Big\}$$

$$\text{y que } \langle \xi, \eta \rangle = \sum_{t \in G} \xi(t)^* \eta(t) \quad \forall \xi, \eta \in l^2(\mathcal{B}).$$

Consideramos $|\cdot| : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ tal que $|\xi| = \| \sum_{s \in G} \xi(s)^* \xi(s)\|^{1/2}$. Es claro que $C_c(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{D}$ y que $|\cdot|$ es una norma que extiende a $(\| \cdot \|_2)_{|C_c(\mathcal{B})}$.

Nótese que $\mathcal{D}$ es completo con respecto a $|\cdot|$. En efecto, sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ una sucesión de Cauchy y sea $\varepsilon > 0$. Sea m_0 tal que si $m, n \geq m_0$, entonces $|f_n - f_m|^2 < \varepsilon$. Por lo tanto, si $t \in G$,

$$\begin{aligned} \|f_n(t) - f_m(t)\|^2 &= \|(f_n(t) - f_m(t))^* (f_n(t) - f_m(t))\| \\ \leq \Big\| \sum_{s \in G} (f_n(s) - f_m(s))^* (f_n(s) - f_m(s)) \Big\| &= |f_n - f_m|^2 < \varepsilon, \end{aligned}$$

$\forall m, n \geq m_0$, de donde $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en B_t, $\forall t \in G$. Sea $f(t) := \lim_n f_n(t)$. Veamos que $f \in \mathcal{D}$ y $f_n \xrightarrow[n]{|\cdot|} f$. Dado $\varepsilon > 0$, existe n_ε tal que si $m, n \geq n_\varepsilon$, entonces $|f_n - f_m| < \varepsilon$. Como $\big||f_n| - |f_m|\big| \leq |f_n - f_m| < \varepsilon$, entonces $|f_n| \leq \varepsilon + |f_{n_\varepsilon}|$, $\forall n \geq n_\varepsilon$. Por otro lado, sea $F_\varepsilon \in \mathcal{P}_F(G)$ tal que

$$\Big\| \sum_{F \setminus F_\varepsilon} f_{n_\varepsilon}(t)^* f_{n_\varepsilon}(t) \Big\| < \varepsilon \quad \forall F \in \mathcal{P}_F(G).$$

Si $n \geq n_\varepsilon$, se tiene:

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{F \setminus F_\varepsilon} f_n(t)^* f_n(t) \Big\|^{1/2} &\leq \Big\| \sum_{F \setminus F_\varepsilon} (f_n - f_{n_\varepsilon})(t)^* (f_n - f_{n_\varepsilon})(t) \Big\|^{1/2} + \Big\| \sum_{F \setminus F_\varepsilon} f_{n_\varepsilon}(t)^* f_{n_\varepsilon}(t) \Big\| \\ &\leq |f_n - f_{n_\varepsilon}| + \varepsilon < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

y por lo tanto $f \in \mathcal{D}$, ya que

$$\Big\| \sum_{F \setminus F_\varepsilon} f(t)^* f(t) \Big\| = \lim_n \Big\| \sum_{F \setminus F_\varepsilon} f_n(t)^* f_n(t) \Big\| \leq 4\varepsilon^2,$$

$\forall F \in \mathcal{P}_F(G)$. Además $f_n \xrightarrow[n]{|\cdot|} f$, porque si $n \geq n_\varepsilon$ y $F \in \mathcal{P}_F(G)$, entonces

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{t \in F} (f(t) - f_n(t))^* (f(t) - f_n(t)) \Big\| &= \lim_m \Big\| \sum_{t \in F} (f_m(t) - f_n(t))^* (f_m(t) - f_n(t)) \Big\| \\ &\leq \lim_m |f_m - f_n|^2 \leq \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Veamos ahora que $C_c(\mathcal{B})$ es denso en $\mathcal{D}$. Dados $\xi \in \mathcal{D}$ y F incluido en G, sea ξ_F tal que

$$\xi_F(t) = \begin{cases} \xi(t) & \text{si } t \in F \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $F_0 \in \mathcal{P}_F(G)$ tal que si $F \supseteq F_0$, entonces $\| \sum_{s \in G \setminus F} \xi(s)^* \xi(s)\| < \varepsilon$. Luego,

$$|\xi - \xi_F|^2 = \Big\| \sum_{s \in G \setminus F} \xi(s)^* \xi(s) \Big\| < \varepsilon$$

y por lo tanto $|\cdot|$-$\lim_{F \in \mathcal{P}_F(G)} \xi_F = \xi$.

Concluimos entonces que $\mathcal{D} = l^2(\mathcal{B})$.

Supongamos ahora que $\xi, \eta \in l^2(\mathcal{B})$, $\xi = \lim_{\substack{F \subseteq G \\ F \, finito}} \xi_F$, $\eta = \lim_{\substack{F \subseteq G \\ F \, finito}} \eta_F$.

Luego, $\langle \xi, \eta \rangle = \lim_{\substack{F \subseteq G \\ F finito}} \langle \xi_F, \eta_F \rangle$. Probaremos que la red $\{\langle \xi_F, \eta_F \rangle\}_{\substack{F \subseteq G \\ F finito}}$ es de Cauchy, es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto F_0 de G finito tal que si $F_0 \subseteq F' \subseteq F$, entonces $\| \langle \xi_F, \eta_F \rangle - \langle \xi_{F'}, \eta_{F'} \rangle \| < \varepsilon$. Elegimos un subconjunto F_0 finito de G tal que si $F \supseteq F_0$ entonces $\|\eta_F\|_2 < \frac{\varepsilon}{2\|\xi\|_2}$ y $\|\xi_F\|_2 < \frac{\varepsilon}{2\|\eta\|_2}$. Si $F \supseteq F' \supseteq F_0$, entonces:

$$\begin{aligned}
\| \langle \xi_F, \eta_F \rangle - \langle \xi_{F'}, \eta_{F'} \rangle \| &\leq \| \langle \xi_F, \eta_F \rangle - \langle \xi_F, \eta_{F'} \rangle \| + \| \langle \xi_F, \eta'_F \rangle - \langle \xi_{F'}, \eta_{F'} \rangle \| \\
&= \| \langle \xi_F, \eta_{F \setminus F'} \rangle \| + \| \langle \xi_{F \setminus F'}, \eta'_F \rangle \| \\
&\leq \|\xi_F\|_2 \|\eta_{F \setminus F'}\|_2 + \|\xi_{F \setminus F'}\|_2 \|\eta_{F'}\|_2 \\
&< \|\xi\|_2 \frac{\varepsilon}{2\|\xi\|_2} + \frac{\varepsilon}{2\|\eta\|_2} \|\eta\|_2 \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

2. Representaciones de Fibrados de Fell

Definición 2.11. Sean $\mathcal{B}$ un fibrado de Fell y $\mathcal{H}$ un módulo de Hilbert. Una representación de $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ en $\mathcal{H}$ es un mapa $T : B \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que:

1. $T_{|_{B_t}}$ es lineal, $\forall t \in G$.
2. $T_b T_c = T_{bc}$, $\forall b, c \in B$.
3. $(T_b)^* = T_{b^*}$, $\forall b \in B$.

Observación 2.12. Sea $T : B \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ una representación. Nótese que

$$\|T_b\|^2 = \|(T_b)^* T_b\| = \|T_{b^*b}\| \overset{(*)}{\leq} \|b^* b\| = \|b\|^2,$$

donde $(*)$ se debe a que $T_{|_{B_e}}$ es un homomorfismo de C*-álgebras. En particular, $T_{|_{B_t}}$ es continua, $\forall t \in G$. Además, si $T_{|_{B_e}}$ es fiel, T es una isometría en cada fibra.

Notación 2.13. Si $t \in G, b \in B_t$, notamos $\chi_{b,t}$ a la función de $C_c(\mathcal{B})$ tal que

$$\chi_{b,t}(s) = \begin{cases} b & \text{si } s = t \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Proposición 2.14. *Sea $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ un fibrado de Fell y sea $\mathcal{H}$ un módulo de Hilbert. Si $T : B \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es una representación de $\mathcal{B}$, existe una única representación $\mathbb{T} : l^1(\mathcal{B}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $\mathbb{T}(\chi_{b,t}) = T(b)$, $\forall t \in B, b \in B_t$.*

Recíprocamente, si $\mathbb{T} : l^1(\mathcal{B}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es una representación, induce una representación T de $\mathcal{B}$ a través de $T(b) = \mathbb{T}(\chi_{b,t})$, $\forall t \in G, b \in B_t$.

Las correspondencias que llevan T en $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}$ en T son una inversa de la otra y se cumple que $\overline{\langle T(B) \rangle} = \overline{\mathbb{T}(l^1(\mathcal{B}))}$.

Demostración: Dada una representación $T : B \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, sea $\mathbb{T} : C_c(\mathcal{B}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ lineal definida por $\mathbb{T}(\chi_{b,t}) = T(b)$. Si $f \in C_c(\mathcal{B})$, $f = \sum_{i=1}^n \chi_{b_i,t_i}$, con $t_i \in G$, $b_i \in B_{t_i}$, $i =$

$1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, se verifica que $\|\mathbb{T}(f)\| \leq \|f\|_1$:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{T}(f)\| &= \sup\{\|\mathbb{T}(f)(\xi)\| : \xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|\sum_{i=1}^{n} T(b_i)(\xi)\| : \xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\sum_{i=1}^{n} \|T(b_i)\|\|(\xi)\| : \xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leq 1\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|T(b_i)\| \overset{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \|b_i\| = \|f\|_1. \end{aligned}$$

La desigualdad en $(*)$ se debe a la observación 2.12.

Luego, por continuidad, $\mathbb{T}$ se extiende a $l^1(\mathcal{B})$. Es inmediato verificar que $\mathbb{T}(f * g) = \mathbb{T}(f)\mathbb{T}(g)$ y $\mathbb{T}(f)^* = \mathbb{T}(f^*)$, $\forall f \in l^1(\mathcal{B})$, de donde $\mathbb{T}$ es una representación.

Recíprocamente, dada una representación $\mathbb{T} : l^1(B) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definimos $T(b) = \mathbb{T}(\chi_{b,t})$, $\forall t \in G, b \in B_t$. Es directo comprobar que es una representación en $\mathcal{B}$.

En cuanto a las imágenes, obsérvese que si $\eta \in T(B)$, entonces existen $\xi \in \mathcal{H}$, $b \in B_t$, $t \in G$, tales que $T(b)(\xi) = \eta$, luego $\mathbb{T}(\chi_{b,t})(\xi) = \eta$, de donde $\langle T(B)\rangle \subseteq \mathbb{T}(l^1(\mathcal{B}))$. Si $\eta \in \mathbb{T}(l^1(\mathcal{B}))$, existe una sucesión de funciones de la forma $\sum_{i=1}^{m_n} \chi_{b_i,t_i}$, con $b_i \in B_{t_i}$, $t_i \in G$, tal que $\eta = \mathbb{T}(f)(\xi)$, donde $f \in l^1(B)$, $f = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} \chi_{b_i,t_i}$, $\xi \in \mathcal{H}$. Se tiene que

$$\mathbb{T}(f)(\xi) = \lim_n \mathbb{T}(\sum_{i=1}^{m_n} \chi_{b_i,t_i})(\xi) = \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} T(b_i)(\xi) \in \overline{\langle T(B)\rangle},$$

por lo tanto, $\overline{\langle T(B)\rangle} = \overline{\mathbb{T}(l^1(\mathcal{B}))}$.

□

Definición 2.15. Si $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ es un fibrado de Fell, el mapa $\lambda : B \to \mathcal{L}(l^2(\mathcal{B}))$ tal que $\lambda(b_t)(\xi)(s) = b_t\xi(t^{-1}s)$, $\forall b_t \in B_t$, $t, s \in G$ y $\xi \in l^2(\mathcal{B})$ se llama representación regular a izquierda de $\mathcal{B}$. Enseguida veremos que efectivamente es una representación.

Observación 2.16. Sea $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ un fibrado de Fell. Si B_e es una C*-álgebra con unidad, se cumple que $b^*b \leq \|b^*b\| = \|b\|^2$, $\forall b \in B$. Si B_e no tiene unidad, la desigualdad se cumple en $\widetilde{B_e}$, la unitización de B_e. En ambos casos, si $a, b \in B$, $a^*b^*ba \leq \|b\|^2a^*a$, ya que $a^*b^*ba \leq a^*\|b\|^2 1_{\widetilde{B_e}} a = \|b\|^2a^*a \in B_e$, donde, si es necesario, extendemos el producto de $B_r \times B_e \to B_r$ a $B_r \times \widetilde{B_e} \to B_r$ por medio de $c(d + \lambda) = cd + \lambda c$.

Proposición 2.17. *La representación regular a izquierda en $\mathcal{B}$ es una representación y se corresponde con la representación regular a izquierda en $l^1(\mathcal{B})$, $\lambda : l^1(\mathcal{B}) \to \mathcal{L}(l^2(\mathcal{B}))$ tal que $\lambda(f)(\xi) = f * \xi$, $\forall f \in l^1(\mathcal{B})$, $\xi \in l^2(\mathcal{B})$.*

Demostración: Veamos que si $\xi \in l^2(\mathcal{B})$, $b_t \in B_t$, $b_t \neq 0$, y $t \in G$, $\lambda(b_t)(\xi) \in l^2(\mathcal{B})$. Como $\xi \in l^2(\mathcal{B})$, dado $\varepsilon > 0$, sea $F \subseteq G$ un conjunto finito tal que

$$\|\sum_{r\in G\setminus F} \xi(r)^*\xi(r)\| < \frac{\varepsilon}{\|b_t\|^2}.$$

Por lo tanto, si $F' = tF$,

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{s \in G \setminus F'} (\lambda(b_t)\xi(s))^* \lambda(b_t)\xi(s) \Big\| &= \Big\| \sum_{s \in G \setminus F'} (b_t \xi(t^{-1}s))^* b_t \xi(t^{-1}s) \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{s \in G \setminus F'} \xi(t^{-1}s)^* b_t^* b_t \xi(t^{-1}s) \Big\| \\
&\overset{(*)}{\leq} \|b_t\|^2 \Big\| \sum_{s \in G \setminus F'} \xi(t^{-1}s)^* \xi(t^{-1}s) \Big\| \\
&= \|b_t\|^2 \Big\| \sum_{r \in G \setminus F} \xi(r)^* \xi(r) \Big\| \\
&< \|b_t\|^2 \frac{\varepsilon}{\|b_t\|^2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

En $(*)$ estamos aplicando la observación 2.16.

Del cálculo anterior se deduce que

$$\|\lambda(b_t)(\xi)\|_2^2 = \|\langle \lambda(b_t)(\xi), \lambda(b_t)(\xi) \rangle\| \leq \|b_t\|^2 \|\langle \xi, \xi \rangle\| = \|b_t\|^2 \|\xi\|_2^2,$$

y por lo tanto $\|\lambda(b_t)\| \leq \|b_t\|$.

Por otra parte, se verifica que, si $\xi, \eta \in l^2(\mathcal{B})$, $b_t \in B_t$, entonces:

$$\langle \lambda(b_t)\xi, \eta \rangle = \sum_{s \in G} \xi(t^{-1}s)^* b_t^* \eta(s) = \sum_{s \in G} \xi(s)^* b_t^* \eta(ts) = \langle \xi, \lambda(b_t^*)(\eta) \rangle.$$

Luego, $\lambda(b_t) \in \mathcal{L}(l^2(\mathcal{B}))$ y $(\lambda(b_t))^* = \lambda(b_t^*)$.

Ya que la linealidad de λ es inmediata, para probar que es una representación con el dominio y codominio indicados sólo falta verificar que respeta el producto. Si $\eta \in l^2(\mathcal{B})$, $b_t \in B_t$, $c_s \in B_s$ y $s, t \in G$, se tiene que

$$\lambda(b_t c_s)(\eta)(r) = b_t c_s \xi(s^{-1}t^{-1}r) = b_t(\lambda(c_s)(\xi))(t^{-1}r) = \lambda(b_t)\lambda(c_s)(\xi)(r).$$

Si $f = \sum_{i=1}^n \chi_{b_i, t_i} \in C_c(\mathcal{B})$,

$$\lambda(f)(\xi)(s) = \sum_{i=1}^n \lambda(b_i)(\xi)(s) = \sum_{i=1}^n b_i \xi(t_i^{-1}s) = \sum_{i=1}^n (\chi_{bi,t_i} * \xi)(s) = (f * \xi)(s).$$

Nótese que dado $t \in G$ el mapa evaluación de $l^2(\mathcal{B}) \to B$ es continuo, porque

$$\|\xi(t)\|^2 = \|\xi(t)^* \xi(t)\| \leq \| \sum_{s \in G} \xi(s)^* \xi(s) \| = \|\xi\|_2^2.$$

Luego, si $f \in l^1(\mathcal{B})$, $\lambda(f)(\xi)(s) = (\sum_{t \in G} \lambda(f(t))(\xi))(s) = \sum_{t \in G} \lambda(f(t))(\xi)(s) = \sum_{t \in G} f(t)\xi(t^{-1}s) = (f * \xi)(s)$.

□

Definición 2.18. Si $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ es un fibrado de Fell, la C*-álgebra reducida asociada a $\mathcal{B}$ es $C_r^*(\mathcal{B}) = \overline{\lambda(l^1(\mathcal{B}))} \subseteq \mathcal{L}(l^2(\mathcal{B}))$.

Si $\mathcal{B}_\alpha = (B_\alpha, \Pi, G)$ es un fibrado de Fell asociado a una acción parcial α como en el ejemplo 2.6, el producto cruzado reducido de A por α es $C_r^*(\mathcal{B}_\alpha)$, que escribimos $A \rtimes_{\alpha,r} G$.

Definición 2.19. Sean $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ un fibrado de Fell y λ la representación regular de $l^1(\mathcal{B})$. Por la propiedad universal de $C^*(\mathcal{B})$, λ induce un mapa sobreyectivo $\lambda^\dagger : C^*(\mathcal{B}) \to C_r^*(\mathcal{B})$. Decimos que $\mathcal{B}$ es promediable si $\lambda^\dagger$ es inyectivo; en este caso $C^*(\mathcal{B})$ es isomorfo a $C_r^*(\mathcal{B})$ vía $\lambda^\dagger$.

En el apéndice B incluimos un breve comentario sobre el nombre "promediable" y la importancia de este concepto.

Ejemplo 2.20. La noción de fibrado de Fell promediable extiende a la de grupo promediable. Sean G un grupo y $\mathcal{B}$ el fibrado del grupo. En este caso, la representación regular a izquierda del fibrado es la representación regular del grupo , $C_r^*(\mathcal{B}) = C_r^*(G)$ y $C^*(\mathcal{B}) = C^*(G)$. Por la propiedad universal de $C^*(G)$, λ induce un mapa sobreyectivo $\lambda^\dagger : C^*(G) \to C_r^*(G)$. Decimos que el grupo G es promediable si λ es inyectivo. Ver apéndice B.

Ejemplo 2.21. Si $\mathcal{B}_\alpha$ es el fibrado de Fell asociado a una acción parcial α, decimos que α es promediable si $\mathcal{B}_\alpha$ lo es.

Proposición 2.22. *Si $\mathcal{B}$ es un fibrado de Fell, la representación regular de $l^1(\mathcal{B})$ es fiel. Por lo tanto, $C^*(\mathcal{B})$ es la completación de $l^1(\mathcal{B})$ con respecto a la norma $\|\cdot\|^\dagger$.*

Demostración: Sea $f \in l^1(\mathcal{B})$ tal que $\lambda(f) = 0$. Sean $\{u_i\}_{i\in D}$ una unidad aproximada de B_e y $\chi_{u_i,e} \in C_c(\mathcal{B})$, $\forall i \in D$. Entonces,

$$0 = \lambda(f)(\chi_{u_i,e})(t) = (f * \chi_{u_i,e})(t) = \sum_{s\in G} f(s)\chi_{u_i,e}(s^{-1}t) = f(t)u_i \quad \forall i \in D, t \in G.$$

Nótese que si $b \in B$,

$$\begin{aligned} \|bu_i - b\|^2 &= \|(bu_i - b)^*(bu_i - b)\| \\ &= \|(u_i b^* - b^*)(bu_i - b)\| \\ &= \|u_i b^* b u_i - u_i b^* b + b^* b - b^* b u_i\| \\ &\leq \|u_i\|\|b^* b u_i - b^* b\| + \|b^* b - b^* b u_i\| \\ &\xrightarrow[i]{} 0 \quad \text{ya que } b^* b \in B_e. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\{u_i\}_{i\in D}$ es una unidad aproximada de B_e, $bu_i \xrightarrow[i]{} b$ y $u_i b \xrightarrow[i]{} b$, $\forall b \in B$. Luego, $f = 0$ y por lo tanto λ es fiel.

□

3. Fibrados de Fell y C^*-álgebras graduadas

Recuérdese que en el ejemplo 2.4 definimos C*-álgebra graduada.

Proposición 2.23. *Dado un fibrado de Fell $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$, cada fibra B_t puede ser identificada con un subespacio cerrado E_t de $C^*(\mathcal{B})$ de manera que $(C^*(\mathcal{B}), \{E_t\}_{t\in G})$ es una C^*-álgebra graduada.*

Demostración: Para cada $t \in G$, definimos la siguiente correspondencia:

$$\begin{aligned} \varphi_t : B_t &\longrightarrow E_t = \{f \text{ sección de } \mathcal{B} : f(s) = 0 \text{ si } s \neq t\} \subseteq C^*(\mathcal{B}) \\ b &\longrightarrow \chi_{b,t}, \end{aligned}$$

con inverso $(\varphi_t)^{-1} : E_t \to B_t$ tal que $(\varphi_t)^{-1}(f) = f(t)$. Esta correspondencia preserva la norma $\|\cdot\|^\dagger$. Por un lado,

$$\|\chi_{b,t}\|^\dagger = \sup\{\|\pi(\chi_{b,t})\| : \pi : l^1(\mathcal{B}) \to C,\ C \text{ C}^*\text{-álgebra },\pi \text{ representación}\} \leq \|\chi_{b,t}\|_1 = \|b\|.$$

Por otra parte, si consideramos la representación regular de $l^1(\mathcal{B})$, $\|\lambda(\chi_{b,t})\| = \|\lambda(b)\| = \|b\|$, por la correspondencia entre representaciones de $l^1(\mathcal{B})$ y de $\mathcal{B}$, la observación 2.12 y la proposición 2.22.

Luego los subespacios E_t son cerrados en $C^*(\mathcal{B})$. Más aún, $(C^*(\mathcal{B}), \{E_t\}_{t\in G})$ es una C*-álgebra graduada. Si $b_t \in B_t$ y $c_s \in B_s$, $\chi_{b_t,t} * \chi_{c_s,s} = \chi_{b_tc_s,ts}$ y por lo tanto $E_t * E_s \subseteq E_{ts}$. Si $b_t \in B_t$, $(\chi_{b_t,t})^* = \chi_{b_t^*,t^{-1}}$, de donde $(E_t)^* \subseteq E_{t^{-1}}$. Además los subespacios $\{E_t\}_{t\in G}$ son linealmente independientes: si $\chi_{b_i,t_i} \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$ y $\sum_{i=1}^n \chi_{b_i,t_i} = 0$, entonces $b_i = 0$, $\forall i$. Por último,

$$\overline{\langle E_t : t \in G\rangle}^{\|\cdot\|^\dagger} = \overline{C_c(\mathcal{B})}^{\|\cdot\|^\dagger} = C^*(\mathcal{B}).$$

□

Observación 2.24. En el ejemplo 2.4 habíamos mostrado como dada una C*-álgebra graduada le asociamos un fibrado de Fell. La construcción anterior nos permite, dado un fibrado de Fell, asociarle una C*-álgebra graduada. Sin embargo estas asociaciones no son necesariamente inversas una de la otra.

El procedimiento de la proposición anterior puede aplicarse de manera análoga a cualquier C^*-norma $\|\cdot\|$ en $C_c(\mathcal{B})$ que sea respetada por la correspondencia φ_t. De esta manera, hubiéramos obtenido otra C*-álgebra graduada $(E = \overline{\text{span}\{E_t : t \in G\}}^{\|\cdot\|}, \{E_t\}_{t\in G})$. Además, los cálculos anteriores nos permiten afirmar que $\varphi : B \to E$ tal que $\varphi(b_t) = \varphi_t(b_t)$, $\forall b_t \in B_t, t \in G$ es una representación de $\mathcal{B}$ en E, y por lo tanto induce una representación $\varphi : l^1(\mathcal{B}) \to E$. Nótese que la imagen de este mapa es densa en E. A su vez, esta nueva representación induce un $*-$homomorfismo sobreyectivo $\varphi^\dagger : C^*(\mathcal{B}) \to E$. Luego, $E \simeq \frac{C^*(\mathcal{B})}{\ker(\varphi^\dagger)}$, y en este sentido decimos que $C^*(\mathcal{B})$ es la graduación "más grande" de $\{E_t\}_{t\in G}$.

Nuestro próximo objetivo es mostrar un contexto en el cual $(C_r^*(\mathcal{B}), \{E_t\}_{t\in G})$ es una C*-álgebra graduada, y es en algún sentido, la "más chica". Para eso, siguiendo a [**Exe97**], vamos a desarrollar un análisis de Fourier para $C_r^*(\mathcal{B})$.

Observación 2.25. Recuérdese que para todo $t \in G$, B_t es un B_e-módulo de Hilbert a derecha con $b_t \cdot a_e = b_t a_e$ y $\langle b_t, c_t\rangle = b_t^* c_t$, $\forall b_t, c_t \in B_t, a_e \in B_e$.

El mapa $\varphi_t : B_t \to l^2(\mathcal{B})$ es un mapa adjuntable, con adjunta $\varphi_t^*(\eta) = \eta(t)$, $\forall \eta \in l^2(\mathcal{B})$, ya que

$$\langle \eta(t), c_t\rangle = \eta(t)^* c_t = \sum_{s\in G} \eta(s)^* \chi_{c_t,t}(s) = \langle \eta, \chi_{c_t,t}\rangle = \langle \eta, \varphi_t(c_t)\rangle.$$

Es fácil comprobar que $\varphi_t^*\varphi_t = Id_{B_t}$ y que φ_t es una isometría. Llamamos $\overline{B_t} = \varphi_t(B_t)$. Esta notación no se corresponde con la de la proposición 2.23, pero esta alteración se debe a que estamos considerando distintas normas en $C_c(\mathcal{B})$.

Proposición 2.26. *Si $t, s \in G$, $b_t \in B_t$, $c_s \in B_s$, entonces $\lambda(b_t)\varphi_s(c_s) = \varphi_{ts}(b_tc_s)$ y el mapa $B_t \to \mathcal{L}(\overline{B_e}, \overline{B_t})$ tal que $b_t \to \lambda(b_t)_{|\overline{B_e}}$ es isométrico.*

Demostración: La primera afirmación se comprueba directamente y nos sirve para afirmar que $\lambda(b_t)\varphi_e(c_e) = \varphi_t(b_tc_e) \in \overline{B_t}$, $\forall b_t \in B_t$, $c_e \in B_e$. Además

$$\langle \lambda(b_t)\varphi_e(c_e), \varphi_t(d_t)\rangle = \langle b_tc_e, \varphi_t^*\varphi_t(d_t)\rangle = \langle c_e, b_t^*d_t\rangle = \langle c_e, \varphi_e^*\varphi_e(b_t^*d_t)\rangle = \langle \varphi_e(c_e), \lambda(b_t^*)\varphi_t(d_t)\rangle,$$

$\forall b_t, d_t \in B_t$, $c_e \in B_e$, y por lo tanto $\lambda(b_t)_{|\overline{B_e}} \in \mathcal{L}(\overline{B_e}, \overline{B_t})$.

Por último,

$$\begin{aligned}\|\lambda(b_t)_{|\overline{B_e}}\| &= \sup\{\|\lambda(b_t)\varphi_e(c_e)\| : \|\varphi_e(c_e)\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|\varphi_t(b_t c_e)\| : \|c_e\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|b_t a\| : \|a\| \leq 1,\, a \in B_e\} \\ &= \|b_t\|,\end{aligned}$$

donde para probar la última igualdad alcanza con considerar una unidad aproximada $\{u_i\}_{i\in I}$ de B_e y recordar que $b_t u_i \underset{i}{\longrightarrow} b_t$, $\forall b_t \in B_t$, $t \in G$.

$\square$

Proposición 2.27. *Si $x \in C^*_r(\mathcal{B})$, $t \in G$, existe un único $b_t \in B_t$ tal que $\varphi^*_t x \varphi_e(a) = b_t a$, $\forall a \in B_e$. Además $\|b_t\| \leq \|x\|$.*

Demostración: La unicidad se deduce a partir de un razonamiento análogo al hecho al final de la proposición anterior: si existen $b_t, c_t \in B_t$ tales que $b_t a = c_t a$ $\forall a \in B_e$, consideramos $\{u_i\}_{i\in I}$ unidad aproximada de B_e y tenemos que $0 = (b_t - c_t)u_i \underset{i}{\longrightarrow} b_t - c_t$, luego $b_t = c_t$.

Para probar la existencia, consideremos primero $x = \sum_{s\in F} \lambda(b_s) \in C^*_r(\mathcal{B})$, donde F es un subconjunto finito de G. Podemos escribir $x = \sum_{s\in G} \lambda(b_s)$, suponiendo $b_s = 0$ si $s \notin F$.

$$\begin{aligned}\varphi^*_t x \varphi_e(a) &= \sum_{s\in G} \varphi^*_t \lambda(b_s)\varphi_e(a) \\ &= \sum_{s\in G} \lambda(b_s)\varphi_e(a)(t) \\ &= \sum_{s\in G} \varphi_s(b_s a)(t) \\ &= \varphi_t(b_t a)(t) \\ &= b_t a \quad \forall a \in B_e.\end{aligned}$$

Si $x \in C^*_r(\mathcal{B})$, se tiene que $x = \lim_{\substack{F\subseteq G \\ \#F<\infty}} x_F$ y por continuidad $\varphi^*_t x \varphi_e(a) = b_t a$.

Por último, nótese que al cumplirse que $\lambda(b_t)\varphi_e(a) = b_t a = \varphi^*_t x \varphi_e(a)$, $\forall a \in B_e$, si identificamos $\varphi_t(b_t)$ con b_t, $\forall b_t \in B_t$, $t \in G$, tenemos que $\lambda(b_t)_{|B_e} = \varphi^*_t x \varphi_e$ y por lo tanto:

$$\|b_t\| = \|\lambda(b_t)_{|B_e}\| = \|\varphi^*_t x \varphi_e\| \leq \|x\|.$$

$\square$

Definiciones 2.28. Si $x \in C^*_r(\mathcal{B})$ y $t \in G$, el t-ésimo coeficiente de Fourier de x es el único $\hat{x}(t) \in B_t$ tal que $\varphi^*_t x \varphi_e(a) = \hat{x}(t)a$, $\forall a \in B_e$.

La transformada de Fourier de x es la sección $t \to \hat{x}(t)$, $\forall t \in G$.

Si $y \in C^*(\mathcal{B})$, el t-ésimo coeficiente de Fourier de y es $\hat{y}(t) = \widehat{\lambda(y)}(t)$.

Observación 2.29. Las siguientes afirmaciones son de verificación inmediata.

- Si $x = \sum_{i=1}^n \lambda(c_{s_i})$, entonces $\hat{x}(t) = c_t$, tal y como vimos en la demostración de la proposición anterior.
- $\|\hat{x}(t)\| \leq \|x\|$, $\forall t \in G$.
- Si $x \in C^*_r(\mathcal{B})$, $t, s \in G$ y $b_t \in B_t$, entonces $\varphi^*_s x \varphi_t(b_t) = \hat{x}(st^{-1})b_t$.

Definiciones 2.30. Sean A, B C*-álgebras tales que A es un B-módulo a derecha. Una A-B esperanza condicional es un mapa $\rho : A \to B$ tal que $\rho(a^*) = \rho(a)^*$ y $\rho(ab) = \rho(a)b$, $\forall a \in A$, $b \in B$.

Si además A es un B-módulo a izquierda, pedimos que $\rho(ba) = b\rho(a)$, $\forall a \in A$, $b \in B$.

Si se verifica que $B \subseteq A$, pedimos que $\rho(\rho(a)) = \rho(a)$, $\forall a \in A$.

Proposición 2.31. *El mapa $E : C_r^*(\mathcal{B}) \to B_e$ tal que $E(x) = \hat{x}(e)$ es una esperanza condicional positiva y contractiva.*

Demostración: Ya sabemos que E es contractivo. Con respecto a la positividad, nótese que si $x = \sum_{t\in F} \lambda(b_t)$, donde $F \subseteq G$ es un conjunto finito, entonces:

$$x^*x = \sum_{s,t\in F} \lambda(b_t^* b_s) = \sum_{r\in F} \lambda(\sum_{t\in F} b_t^* b_{tr}).$$

Por lo tanto,

$$E(x^*x) = \sum_{t\in F} b_t^* b_t \geq 0.$$

Por continuidad se deduce que para cualquier $x \in C_r^*(\mathcal{B})$, $E(x^*x) \geq 0$.

Para que tenga sentido considerar $E(E(x))$, tenemos que recordar la identificación entre B_t y $\lambda(B_t)$. Hecha esta salvedad, nótese que

$$E(\lambda(E(x))) = E(\lambda(\hat{x}(e))) = \hat{x}(e) = E(x),$$

de donde E es idempotente.

Por último, es inmediato verificar que $E(x^*) = E(x)^*$, $E(ax) = aE(x)$ y $E(xa) = E(x)a$ $\forall x \in C_r^*(\mathcal{B})$ $a \in B_e$.

□

Proposición 2.32. *Si $x \in C_r^*(\mathcal{B})$, entonces $\xi_x = \{\hat{x}(t)\}_{t\in G} \in l^2(\mathcal{B})$. Además, $x\varphi_e(a) = \xi_x a$, $\forall a \in B_e$, donde al escribir $\xi_x a$ estamos considerando la acción de $l^2(\mathcal{B}) \times B_e \to l^2(\mathcal{B})$ tal que $\eta a(t) = \eta(t)a$, que ya fue mencionada antes.*

Demostración:

Si $x_F = \sum_{t\in F} \lambda(b_t)$, donde $F \subseteq G$ es finito, $\xi_{x_F} \in C_c(\mathcal{B})$ y $\xi_{x_F} = \sum_{t\in F} \varphi_t(b_t)$.

Sea $a \in B_e$. Se verifica que:

$$x_F\varphi_e(a) = \sum_{t\in F} \lambda(b_t)\varphi_e(a) = \sum_{t\in F} \varphi_t(b_t a) = \sum_{t\in F} \varphi_t(b_t)a = \xi_{x_F} a.$$

El mapa $\langle \lambda(B) \rangle \to l^2(\mathcal{B})$ tal que $x_F \to \xi_{x_F}$ es continuo:

$$\|\xi_{x_F}\|_2^2 = \|\sum_{t\in F} \hat{x}(t)^*\hat{x}(t)\| = \|\sum_{t\in F} b_t^* b_t\| = \|E(x_F^* x_F)\| \leq \|x_F^* x_F\| = \|x_F\|^2.$$

Luego, se extiende por continuidad a un mapa $C_r^*(\mathcal{B}) \to l^2(\mathcal{B})$ tal que $x \to \xi_x$. Veamos que esta extensión sigue cumpliendo que $\xi_x(t) = \hat{x}(t)$. Por continuidad, sigue valiendo que $x\varphi_e(a) = \xi_x a$, si $x \in C_r^*(\mathcal{B})$, $a \in B_e$. Como $\hat{x}(t) \in B_t$ es único en verificar $\varphi_t^* x\varphi_e(a) = \hat{x}(t)a$, $\forall a \in B_e$, y se cumple que

$$\varphi_t^* x\varphi_e(a) = x\varphi_e(a)(t) = (\xi_x a)(t) = \xi_x(t)a,$$

deducimos que $\xi_x(t) = \hat{x}(t)$, $\forall t \in G, s \in C_r^*(\mathcal{B})$.

□

Corolario 2.33. *Si $x \in C_r^*(\mathcal{B})$, entonces $E(x^*x) = \sum_{t\in G} \hat{x}(t)^*\hat{x}(t)$.*

Demostración: Si $a, b \in B_e$,

$$\begin{aligned} a^*E(x^*x)b &= \langle a, E(x^*x)b\rangle = \langle a, \widehat{x^*x}(e)b\rangle \\ &= \langle a, \varphi_e^* x^* x\varphi_e(b)\rangle = \langle x\varphi_e(a), x\varphi_e(b)\rangle \\ &= \langle \xi_x a, \xi_x b\rangle = a^*\langle \xi_x, \xi_x\rangle b \\ &= a^* \sum_{t\in G} \hat{x}(t)^*\hat{x}(t)b, \end{aligned}$$

y por lo tanto $E(x^*x) = \sum_{t\in G} \hat{x}(t)^*\hat{x}(t)$.

□

Proposición 2.34. *Si $x \in C_r^*(\mathcal{B})$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $E(x^*x) = 0$.
2. $\hat{x}(t) = 0$, $\forall t \in G$.
3. $x = 0$.

Demostración: El corolario anterior permite establecer la equivalencia entre las dos primeras condiciones. En vista de que es evidente que la última implica la segunda, veamos la implicancia recíproca.

Supongamos que $\hat{x}(t) = 0$, $\forall t \in G$. Recordemos que $\varphi_t^* x\varphi_s(b_s) = \hat{x}(tx^{-1})b_s$, $\forall b_s \in B_s, s \in G$, como vimos en la observación 2.29. Por lo tanto, $\varphi_t^* x\varphi_s = 0$, $\forall t, s \in G$.

Nótese que si $\eta \in l^2(\mathcal{B})$, $\eta = \sum_{t\in G} \varphi_t\varphi_t^*\eta$ y luego $x\eta = \sum_{s,t} \varphi_s\varphi_s^* x\varphi_t\varphi_t^*\eta = 0$, $\forall \eta \in l^2(\mathcal{B})$, por lo tanto $x = 0$.

□

Proposición 2.35. *Sea $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ un fibrado de Fell. La C*-álgebra seccional reducida $C_r^*(\mathcal{B})$ es una C*-álgebra graduada con fibras identificables con las fibras de $\mathcal{B}$.*

Demostración: Veamos que $(C_r^*(\mathcal{B}), \{\lambda(B_t)\}_{t\in G})$ es una graduación. La independencia de los $\{\lambda(B_t)\}_{t\in G}$ es lo único que no se deduce directamente y fue a efectos de demostrarla que presentamos el análisis de Fourier de $C_r^*(\mathcal{B})$.

Supongamos que $x = \sum_{t\in G} \lambda(b_t)$ y que $x = 0$, donde $b_t = 0$ salvo para una cantidad finita de índices. Entonces, $b_t = \hat{x}(t) = 0$, $\forall t \in G$ y por lo tanto los espacios son independientes.

□

Ejemplo 2.36. Si un fibrado de Fell $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ no es promediable, podemos asociarle más de una graduación. Veremos enseguida que si el fibrado de Fell tiene una condición más, esto es, admite una graduación topológica, entonces $C_r^*(\mathcal{B})$ nos proporciona la "menor graduación" que podemos considerar. Por lo tanto, en caso de que el fibrado sea promediable, todas las graduaciones coinciden.

Teorema 2.37. *Sean C una C*-álgebra, G un grupo discreto y $\{C_t\}_{t\in G}$ una familia de subespacios cerrados de C tales que:*

- $C_sC_t \subseteq C_{st}$, $\forall s, t \in G$.
- $C_s^* = C_{s^{-1}}$, $\forall s \in G$.
- $\langle \cup_{t\in G} C_t\rangle$ *es denso en* C.

Supongamos que existe un mapa lineal y continuo $F : C \to C_e$ tal que $F_{|C_e} = \mathrm{Id}_{C_e}$ y $F_{|C_t} = 0$, $\forall t \neq e$. Entonces:

1. *Los subespacios C_t son independientes, y por lo tanto $(C, \{C_t\}_{t\in G})$ es una C^*-álgebra graduada.*
2. *El mapa F es una esperanza condicional positiva y contractiva.*
3. *Si $\mathcal{B}$ es el fibrado de Fell asociado, existe un morfismo sobreyectivo de C^*-álgebras*
$$l : C \to C^*_r(\mathcal{B}) \text{ tal que } l(c_t) = \lambda(t, c_t)\, \forall c_t \in C, t \in G.$$

Demostración: Con el objetivo de simplificar la notación, identificamos a (t, c_t) y c_t.

Probemos primero que F es positiva, y a partir de eso deduciremos que los subespacios C_t son independientes. Si $x = \sum_{t\in G} c_t$, donde $c_t = 0$ salvo para una cantidad finita de índices, entonces

$$x^*x = \sum_{r\in G}(\sum_{t\in G} c_t^* c_{tr}) \text{ y por lo tanto } F(x^*x) = \sum_{t\in G} c_t^* c_t \geq 0.$$

Si $0 = \sum_{t\in G} c_t$, entonces $0 = F(0^*0) = \sum_{t\in G} c_t^* c_t \geq 0$ y por lo tanto $c_t = 0$, $\forall t \in G$. Luego C es una C*-álgebra graduada.

Es directo verificar que $F(ax) = aF(x)$, $F(xa) = F(x)a$ y $F(F(x)) = F(x)$, $\forall a \in C_e$, y por lo tanto F es una esperanza condicional positiva.

Nótese que C es un C_e-premódulo de Hilbert a derecha con $\langle x, y\rangle = F(x^*y)$. Llamemos X a la completación de C con respecto a este producto interno. Dado $c \in C$, definimos el siguiente mapa, que es lineal y continuo:

$$L_c : C \to X \text{ tal que } L_c(x) = cx.$$

La continuidad se debe a que $\langle cx, cx\rangle = F(x^*c^*cx) \leq \|c\|^2 F(x^*x) = \|c\|^2\langle x, x\rangle$, la desigualdad del medio se debe a la observación 2.16. Además L_c es adjuntable:

$$\langle cx, y\rangle = F(x^*c^*y) = \langle x, c^*y\rangle\, \forall x, y \in C.$$

Por lo tanto $L_{c^*} = (L_c)^*$. Se verifica que $L_c L_b = L_{cb}$, $\forall c, b \in C$. Luego el mapa

$$L : C \to \mathcal{L}(X) \text{ tal que } L(c) = L_c$$

es un homomorfismo de C*-álgebras.

Obsérvese que $\langle \cup_{t\in G} C_t\rangle$ también es denso en X, ya que $\|x\|_X^2 = \|F(x^*x)\| \leq \|F\|\|x\|_C^2$, $\forall x \in \langle \cup_{t\in G} C_t\rangle$.

Definimos el siguiente mapa:

$$\overline{U} : \langle \cup_{t\in G} C_t\rangle \to C_c(\mathcal{B}) \text{ tal que } \overline{U}(\sum_{t\in F} c_t) = \sum_{t\in F} \varphi_t(c_t).$$

Consideremos en $C_c(\mathcal{B})$ el producto interno $\langle f, g\rangle = \sum_{t\in G} f(t)^*g(t)$. Si $x = \sum_{t\in G} b_t$, $y = \sum_{t\in G} c_s$, donde $b_t = 0, c_s = 0$ salvo para una cantidad finita de índices, entonces

$$\langle \overline{U}(x), \overline{U}(y)\rangle = \sum_{r\in G}(\sum_{t\in G} \varphi_t(b_t))(r)^*(\sum_{s\in G} \varphi_s(c_s))(r) = \sum_{r\in G} b_r^* c_r = F(x^*y) = \langle x, y\rangle,$$

y $\overline{U}$ se extiende a un mapa isométrico $U : X \to l^2(\mathcal{B})$.

Es directo verificar que U es adjuntable, y que su adjunto U^* está determinado en $C_c(\mathcal{B})$ por $U^*(\sum_{t\in F} \varphi_t(b_t)) = \sum_{t\in F} \varphi_t^*\varphi_t(b_t) = \sum_{t\in F} b_t$. Además se verifica que $UU^* = \mathrm{Id}_{l^2(\mathcal{B})}$.

Si $b_t \in C_t, c_s \in C_s$, $s, t \in G$, se cumple que $UL_{b_t}(c_s) = U(b_t c_s) = \varphi_{ts}(b_t c_s) = \lambda(b_t)\varphi_s(c_s) = \lambda(b_t)U(c_s)$. La penúltima igualdad se debe a la proposición 2.26. Por lo tanto, $UL_{b_t}U^* = \lambda(b_t) \in C^*_r(\mathcal{B})$.

Definimos entonces el epimorfismo buscado

$$l : C \to C_r^*(\mathcal{B}) \text{ tal que } l(b) = UL_bU^*.$$

Para terminar, resulta que $E(l(c)) = E(\lambda(c)) = \widehat{\lambda(c)}(e) = F(c)$, de donde F es contractivo, ya que E y l lo son.

□

Definición 2.38. Decimos que una graduación (B,$\{B_t\}_{t\in G}$) es una graduación topológica si existe una esperanza condicional de B en B_e como en el teorema anterior.

Observación 2.39. Sean (C,$\{C_t\}_{t\in G}$) una C*-álgebra topológicamente graduada y $\mathcal{B}$ el fibrado de Fell asociado. Si $l : C \to C_r^*(\mathcal{B})$ es el epimorfismo del teorema anterior, tenemos que $\frac{C}{\ker(l)} = C_r^*(\mathcal{B})$, y es en este sentido que decimos que $C_r^*(\mathcal{B})$ es la "menor graduación".

Como mencionamos antes, si $\mathcal{B}$ es un fibrado de Fell promediable, todas las C*-álgebras topológicamente graduadas con fibrado de Fell asociado $\mathcal{B}$ son isomorfas.

Corolario 2.40. *Sea (B,$\{B_t\}_{t\in G}$) una C*-álgebra topológicamente graduada, con esperanza condicional F y morfismo sobreyectivo $l : B \to C_r^*(\mathcal{B})$ dado por el teorema 2.37. Entonces* $\ker(l) = \{b \in B : F(b^*b) = 0\}$ *y, si F es fiel, entonces B es isomorfo a $C_r^*(\mathcal{B})$ a través de l.*

Demostración: Recuérdese que E es fiel y que $F(b^*b) = E(l(b)^*l(b))$. Por lo tanto $F(b^*b) = 0$ si y sólo si $l(b) = 0$.

□

4. La propiedad de aproximación

Lema 2.41. *Sea $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ un fibrado de Fell. Si $\pi : B \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación tal que $\pi_{|B_e}$ es fiel, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, entonces*

$$C_r^*(\mathcal{B}) \simeq \overline{\langle\{\pi(b_t) \otimes \lambda_t \,:\, b_t \in B_t,\, t \in G\}\rangle}$$

vía el mapa l del teorema 2.37, aplicado a cierta C-álgebra D, con fibrado asociado $\mathcal{B}$ que será construida en la demostración. En particular, π induce una representación π_λ de $C_r^*(\mathcal{B})$ fiel tal que si $f \in l^1(\mathcal{B})$, $\pi_\lambda(f) = \sum_{t\in G} \pi(f(t)) \otimes \lambda_t$.*

Demostración: Sea $\lambda : G \to \mathcal{B}(l^2(G))$ la representación regular a izquierda de G. Consideramos la representación $\pi_\lambda : B \to \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes l^2(G))$ tal que $\pi_\lambda(b_t) = \pi(b_t) \otimes \lambda_t$, es decir $\pi_\lambda(b_t)(h \otimes \xi) = \pi(b_t)(h) \otimes \lambda_t(\xi)$, $\forall b_t \in B_t, t \in G, h \in \mathcal{H}, \xi \in l^2(G)$.

Sea $D = \overline{\langle\{\pi_\lambda(b_t) : b_t \in B_t, t \in G\}\rangle} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes l^2(G))$. Veamos que D es una C*-álgebra graduada, con subespacios $D_t = \{\pi(B_t) \otimes \lambda_t\}_{t\in G}$.

Sea $t \in G$. Si $\delta_t : G \to C$ es tal que $\delta_t(s) = \delta_{t,s}$, el mapa $j_t : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes l^2(G)$, $j_t(h) = h \otimes \delta_t$ es una isometría con mapa adjunto $j_t^* : \mathcal{H} \otimes l^2(G) \to \mathcal{H}$ tal que $j_t^*(h \otimes \zeta) = \zeta(t)h$.

Sea $d = \sum_{t\in F} \pi_\lambda(b_t) \in D$, donde F es un subconjunto finito de G. Se cumple que $j_t^* d j_s = \pi(b_{ts^{-1}})$:

$$\begin{aligned} j_t^* d j_s(h) &= \sum_{r\in F} j_t^* \pi_\lambda(b_r) j_s(h) = \sum_{r\in F} j_t^*(\pi(b_r) \otimes \lambda_r)(h \otimes \delta_s) \\ &= \sum_{r\in F} j_t^*(\pi(b_r)(h) \otimes \lambda_r(\delta_s)) = \sum_{r\in F} \pi(b_r)(h)\lambda_r(\delta_s)(t) = \pi(b_{t^{-1}s})(h). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $d = 0$, entonces $\pi(b_t) = 0$, $\forall t \in G$, y los subespacios son independientes.

Es inmediato que $D_t D_s \subseteq D_{ts}$, $D_t^* = D_{t^{-1}}$. Luego (D,$\{D_t\}_{t\in G}$) es una C*-álgebra graduada cuyo fibrado asociado podemos identificar con $\mathcal{B}$, recordando que $\pi_{|_{B_t}}$ debe ser un isomorfismo, $\forall t \in G$.

A continuación probaremos que la graduación anterior es topológica y con esperanza condicional fiel, de donde deducimos, gracias al corolario 2.40, que D es isomorfo a $C_r^*(\mathcal{B})$.

Sea $F : D \to D_e = \pi(B_e) \otimes \lambda_e$ tal que $F(d) = j_e^* d j_e \otimes \lambda_e$. Entonces:

- $F_{|_{\pi(B_e)\otimes\lambda_e}} = \mathrm{Id}_{|_{D_e}}$ y $F_{|_{D_t}} = 0$ si $t \neq e$.
- F es continuo: $\|F(d)\| = \|j_e^* d j_e\| \|\lambda_e\| \leq \|d\|$, $\forall d \in D$.
- Si $F(d^*d) = 0$, $d \in D$, entonces $j_e^* d^* d j_e = 0$, de donde $dj_e = 0$. Esto alcanza para afirmar que $d = 0$:

  Consideramos $\rho : G \to \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes l^2(G))$ tal que $\rho(t)(h \otimes \delta_s) = h \otimes \rho_t(\delta_s)$, con $\rho_t(\delta_s) = \delta_{st}$, la representación regular a derecha en G. Si $d = \sum_{t\in F} \pi_\lambda(b_t)$, se cumple que $\rho(s)d = d\rho(s)$.
  $$\rho(s)d = \sum_{t\in F} \rho(s)(\pi(b_t) \otimes \lambda_t) = \sum_{t\in F} \pi(b_t) \otimes \rho_s\lambda_t \overset{(*)}{=} \sum_{t\in F} \pi(b_t) \otimes \lambda_t\rho_s = d\rho(s).$$
  La igualdad en $(*)$ se cumple porque $\rho_s\lambda_t(\zeta)(r) = \lambda_t(\zeta)(rs^{-1}) = \zeta(trs^{-1}) = \rho_s(\zeta)(tr) = \lambda_t\rho_s(\zeta(r))$. Además $\rho(s)j_t = j_{st}$, por que $\rho(s)j_t(h) = \rho(s)(h \otimes \delta_t) = h \otimes \delta_{st} = j_{st}(h)$.

  Finalmente, $dj_t = d\rho(t)j_e = \rho(t)dj_e = 0$, $\forall t \in G$, de donde se deduce que $d_{|_{\mathcal{H}\otimes\delta_t}} = 0$, $\forall t \in G$ y por lo tanto $d = 0$, como queríamos probar.

Demostramos entonces que D es isomorfo a $C_r^*(\mathcal{B})$ a través del mapa l del teorema 2.37. Recuérdese que $l(\pi(b_t) \otimes \lambda_t) = \lambda(b_t)$.

La representación $\pi_\lambda : B \to D \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes l^2(G))$ induce una representación $\pi_\lambda : C^*(\mathcal{B}) \to D \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes l^2(G))$ tal que $\pi_\lambda(\chi_{b_t,t}) = \pi_\lambda(b_t) = \pi(B_t) \otimes \lambda_t$, $\forall b_t \in B_t$, $t \in G$.

Nótese que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} C^*(\mathcal{B}) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\pi_\lambda"'] & C_r^*(\mathcal{B}) \arrow[dl, "l^{-1}"] \\ D & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, π_λ se factoriza a través de $C_r^*(\mathcal{B})$, y escribiremos
$$l^{-1} = \pi_\lambda : C_r^*(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes l^2(G)),$$
que es una representación fiel.

□

LEMA 2.42. *Sea* $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ *un fibrado de Fell. Sea* $a : G \to B_e$ *tal que* $\sum_{t\in G} a(t)^* a(t)$ *converge. Entonces existe un mapa acotado*
$$\psi : C_r^*(\mathcal{B}) \to C^*(\mathcal{B}) \text{ tal que } \psi(b_t) = \sum_{r\in G} a(tr)^* b_t a(r) \,\forall b_t \in B_t.$$
Además $\|\psi\| \leq \|\sum_{t\in G} a(t)^* a(t)\|$.

Demostración: Podemos considerar $C^*(\mathcal{B})$ como subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Considerando la representación inducida de B en $\mathcal{H}$, por comodidad escribimos b la imagen en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de b, $\forall b \in B$. Siguiendo con la notación del lema anterior, tenemos que $D \simeq C_r^*(\mathcal{B})$.

Nótese que si $h \in \mathcal{H}$,

$$\sum_{t\in G} \|a(t)h\|^2 = \sum_{t\in G} \langle a(t)^*a(t)h, h\rangle \leq \Big\| \sum_{t\in G} a(t)^*a(t) \Big\| \|h\|^2 < \infty,$$

esto nos permite definir

$$V : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes l^2(G) \text{ tal que } V(h) = \sum_{t\in G} a(t)h \otimes \delta_t.$$

Más aun, $\|V\| \leq \| \sum_{t\in G} a(t)^*a(t)\|^{1/2}$, ya que

$$\|V(h)\|^2 = \sum_{t\in G} \|a(t)h \otimes \delta_t\|^2 \leq \sum_{t\in G} \|a(t)h\|^2 \leq \| \sum_{t\in G} a(t)^*a(t)\| \|h\|^2.$$

El mapa $V^* : \mathcal{H} \otimes l^2(G) \to \mathcal{H}$ tal que $V^*(h \otimes \delta_t) = a(t)^*h$ es adjunto de V:

$$\langle V(h), k \otimes \delta_s\rangle = \langle \sum_{t\in G} a(t)h \otimes \delta_t, k \otimes \delta_s\rangle = \sum_{t\in G} \langle a(t)h, k\rangle \langle \delta_t, \delta_s\rangle = \langle a(s)h, k\rangle = \langle h, a(s)^*k\rangle.$$

Estamos en condiciones de definir el mapa

$$\psi : \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes l^2(G)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ tal que } \psi(x) = V^*xV.$$

Si $b_r \in B_r$, $r \in G$, $h \in \mathcal{H}$, entonces:

$$\begin{aligned} \psi(b_r \otimes \delta_r)(h) &= V^*(b_r \otimes \delta_r)V(h) \\ &= V^*(b_r \otimes \delta_r)(\sum_{t\in G} a(t)h \otimes \delta_t) \\ &= V^*(\sum_{t\in G} b_r a(t)h \otimes \delta_{rt}) \\ &= \sum_{t\in G} a(rt)^* b_r a(t)h. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\psi(b_r \otimes \delta_r) = \sum_{t\in G} a(rt)^* b_r a(t)$ $\forall b_r \in B_r, r \in G$.

Entonces $\overline{\psi} = \psi_{|D} \circ \pi_\lambda$, $\overline{\psi}(b_r) = \sum_{t\in G} a(rt)^* b_r a(t)$, $b_r \in B_r$, es el mapa que buscábamos y $\|\overline{\psi}\| \leq \|V\|^2 \leq \| \sum_{t\in G} a(t)^*a(t)\|$.

□

Definición 2.43. Decimos que el fibrado de Fell $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ tiene la propiedad de aproximación si existe una red $\{a_i\}_{i\in I}$ de funciones $a_i : G \to B_e$ uniformemente acotadas que cumplen que $\forall b_t \in B_t$,

$$\lim_{i\in I} \sum_{r\in G} a_i(tr)^* b_t a_i(r) = b_t.$$

Teorema 2.44. *Sea $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ un fibrado de Fell. Si $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de aproximación, entonces es promediable.*

Demostración: Sean $\{a_i\}_{i\in I}$ una red de funciones con la propiedad de aproximación y $\overline{\psi_i}$ las funciones asociadas a cada a_i como en el lema anterior. Entonces:

$$b_t = \lim_{i\in I} \sum_{r\in G} a_i(tr)^* b_t a_i(r) = \lim_{i\in I} \overline{\psi_i}(b_t),\ \forall b_t \in B_t.$$

Sea $\Phi_i : C^*(\mathcal{B}) \to C^*(\mathcal{B})$ tal que $\Phi_i = \overline{\psi_i} \circ \lambda$. Entonces, $\lim_{i\in I} \Phi_i(x) = x$, $\forall x \in C^*(\mathcal{B})$, gracias a la densidad de $\langle \cup_{t\in G} B_t\rangle$ en $C^*(\mathcal{B})$. Luego, si $x \in \ker \lambda$, $x = \lim_i \Phi_i(x) = \lim_i \overline{\psi_i}(\lambda(x)) = 0$ y por lo tanto $\mathcal{B}$ es promediable.

COROLARIO 2.45. *Si $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ es un fibrado de Fell y G es promediable, entonces $\mathcal{B}$ es promediable.*

Demostración: Si G es promediable, sea $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq l^2(G)$ tal que $\|f_i\|_2 < M$, $\forall i \in I$, para algún $M > 0$, y $\lim_i \sum_{r\in G} \overline{f_i(tr)} f_i(r) = 1$ (ver B.7). Sea $\{u_j\}_{j\in J}$ una unidad aproximada de B_e. Entonces $\{a_{i,j}\}_{i,j\in I\times J}$ tal que $a_{i,j} = f_i(t)u_j$ satisface la propiedad de aproximación:

- $\sup_{i,j} \| \sum_{t\in G} a_{i,j}(t)^* a_{i,j}(t)\| = \sup_{i,j} \| \sum_{t\in G} \overline{f_i(t)} f_i(t) u_j u_j\| < M^2$.
- $\lim_{i,j} \sum_{r\in G} a_{i,j}(tr)^* b_t a_i(r) = \lim_{i,j} \sum_{r\in G} \overline{f_i(tr)} f_i(t) u_j b_t u_j \to b_t$.

Por lo tanto $\mathcal{B}$ es promediable.

OBSERVACIÓN 2.46. Como vimos recién, es condición suficiente para que un fibrado $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ sea promediable que el grupo G lo sea. Sin embargo, esta condición no es necesaria: en [**Exe97**] se prueba la promediabilidad de ciertos fibrados de Fell sobre el grupo libre en n generadores, grupo que no es promediable. En la segunda sección del próximo capítulo volveremos a la relación entre la promediabilidad de un grupo y la de los fibrados sobre ese grupo, en el caso en que los fibrados son obtenidos a partir de acciones parciales.

Capítulo 3

Condiciones de promediabilidad

Este último capítulo consta de tres secciones. En la primera de ellas se prueba que dados dos fibrados de Fell $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ que satisfacen ciertas condiciones (brevemente, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y existe un fibrado de Banach algebraico $\mathcal{E}$ entre ellos dos de manera que hay "buenas" relaciones de compatibilidad entre los tres fibrados) $\mathcal{A}$ es promediable si y sólo si $\mathcal{B}$ lo es. En particular, la situación a la que hacemos referencia es verificada si consideramos los fibrados asociados a una acción parcial α y su acción envolvente β, y por lo tanto queda probado que α es promediable si y sólo si β lo es. La prueba de que si $\mathcal{A}$ es promediable entonces $\mathcal{B}$ es promediable se encuentra en [**Aba03**].

En la segunda y muy breve sección probamos que toda representación parcial admite una dilatación unitaria. En [**Aba03**] se prueba que esto es cierto para todo grupo discreto promediable. Podemos obviar aquí esta hipótesis gracias a que en la sección anterior se prueba la equivalencia Morita de $C^*(\mathcal{A})$ y $C^*(\mathcal{B})$, si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ cumplen las "buenas" relaciones que mencionábamos antes.

En la tercera sección obtenemos una generalización de una proposición probada en [**ZM68**] que relaciona la promediabilidad de un grupo G con la promediabiliad de los fibrados de Fell sobre G asociados a acciones del grupo en una C*-álgebra. En dicha generalización consideramos el fibrado asociado a una acción parcial del grupo en una C*-álgebra conmutativa y el fibrado asociado a su acción envolvente. Este resultado será probado utilizando el teorema 1.22 del capítulo 1 y el resultado probado en la primera sección.

1. Equivalencia Morita de C^*-álgebras seccionales

Definición 3.1. Sea $\mathcal{B} = (B, \Pi, G)$ un fibrado de Banach algebraico (respectivamente, de Fell). Decimos que $\mathcal{A} = (A, \Pi_A, G)$ es un subfibrado de Banach algebraico (de Fell) de $\mathcal{B}$ si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ (con esto queremos decir que $A \subseteq B$ y $\Pi_A = \Pi_{|_A}$) y $\mathcal{A}$ es un fibrado de Banach algebraico (de Fell) con la estructura heredada de $\mathcal{B}$.

Proposición 3.2. *Si $\mathcal{A}$ es un subfibrado de Fell de $\mathcal{B}$, entonces $C_r^*(\mathcal{A}) \subseteq C_r^*(\mathcal{B})$. Además $C_r^*(\mathcal{A})$ es isomorfo a la clausura de $C_c(\mathcal{A})$ en $C_r^*(\mathcal{B})$.*

Demostración: Consideremos una representación inyectiva π de B como al comienzo del lema 2.42. Aplicando el lema 2.41 a esa representación, tenemos que si $\pi_\lambda : B \to \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes l^2(G))$, $\pi_\lambda(b_t) = \pi(b_t) \otimes \lambda_t$, entonces

$$D = \overline{\langle \pi_\lambda(b_t) \,:\, b_t \in B_t, t \in G \rangle} = \overline{\pi_\lambda(l^1(\mathcal{B}))} \simeq C_r^*(\mathcal{B})$$

Sea $\rho_\lambda = \pi_{\lambda|_A}$. Entonces $\overline{\rho_\lambda(l^1(\mathcal{A}))} \simeq C_r^*(\mathcal{A})$ y $\overline{\pi_\lambda(l^1(\mathcal{B}))} \simeq C_r^*(\mathcal{B})$. Luego $C_r^*(\mathcal{A}) \simeq \overline{\rho_\lambda(l^1(\mathcal{A}))} = \overline{\pi_\lambda(l^1(\mathcal{A}))} = \overline{\pi_\lambda(C_c(\mathcal{A}))} \subseteq C_r^*(\mathcal{B})$. En particular, el isomorfismo entre $C_r^*(\mathcal{A})$ y $\overline{C_c(\mathcal{A})}^{\|\cdot\|_{\mathcal{B}}^r}$ es la identidad en los elementos de $C_c(\mathcal{A})$.

□

DEFINICIÓN 3.3. Sean $\mathcal{B}$ un fibrado de Fell y $\mathcal{A}$ un subfibrado de Banach algebraico de $\mathcal{B}$. Decimos que $\mathcal{A}$ es un ideal a izquierda (respectivamente, a derecha) de $\mathcal{B}$ si $\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ($\mathcal{B}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$). Decimos que $\mathcal{A}$ es un ideal de $\mathcal{B}$ si lo es a izquierda y a derecha.

TEOREMA 3.4. *Sean $\mathcal{B}$ un fibrado de Fell, $\mathcal{E}$ un ideal a derecha de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ un subfibrado de Fell de $\mathcal{B}$ contenido en $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{A}\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}$ y $\mathcal{E}\mathcal{E}^* \subseteq \mathcal{A}$, entonces*

- $l^1(\mathcal{A}) * l^1(\mathcal{E}) \subseteq l^1(\mathcal{E})$
- $l^1(\mathcal{E}) * l^1(\mathcal{B}) \subseteq l^1(\mathcal{E})$
- $l^1(\mathcal{E}) * l^1(\mathcal{E})^* = l^1(\mathcal{A})$
- *Si* $\overline{\operatorname{span}(B_t \cap \mathcal{E}^*\mathcal{E})} = B_t$, $\forall t \in G$, *entonces* $\overline{\operatorname{span}(l^1(\mathcal{E})^* * l^1(\mathcal{E}))} = l^1(\mathcal{B})$.

Demostración: Si $f \in C_c(\mathcal{A})$ y $g \in C_c(\mathcal{E})$, entonces, $\forall s \in G$,

$$(f * g)(s) = \sum_{t \in G} f(t)g(t^{-1}s) \in A_s,$$

pues $f(t) \in A_t$, $g(t^{-1}s) \in E_{t^{-1}s}$ y $A_t E_{t^{-1}s} \subseteq E_s \cap A$. Por lo tanto, $l^1(\mathcal{A}) * l^1(\mathcal{E}) \subseteq l^1(\mathcal{E})$. Análogamente, $l^1(\mathcal{E}) * l^1(\mathcal{B}) \subseteq l^1(\mathcal{E})$ y $l^1(\mathcal{E}) * l^1(\mathcal{E})^* \subseteq l^1(\mathcal{A})$.

Por el teorema de Cohen-Hewitt ([**FD88a**, V.9]), $l^1(\mathcal{A}) * l^1(\mathcal{A})^* = l^1(\mathcal{A})$. Luego, $l^1(\mathcal{A}) = l^1(\mathcal{A}) * l^1(\mathcal{A})^* \subseteq l^1(\mathcal{E}) * l^1(\mathcal{E})^* \subseteq l^1(\mathcal{E})$.

Por último supongamos que si $t \in G$, $\overline{\operatorname{span}(B_t \cap \mathcal{E}^*\mathcal{E})} = B_t$. Veamos que $\forall b \in B_t$, $\chi_{b,t} \in \overline{\operatorname{span}(l^1(\mathcal{E})^* * l^1(\mathcal{E}))}$. Se cumple que $b = \lim_{d \in D} c_d$, donde $c_d = \sum_{i=1}^{n_d} e_{i_d}^* * f_{i_d}$, con $e_{i_d} \in E_{r_{i_d}}$, $f_{i_d} \in E_{r_{i_d}t}$, para algún $r_{i_d} \in G$, para cada i_d. Vamos a probar que

$$\sum_{i=1}^{n_d} (\chi_{e_{i_d}, r_{i_d}})^* * \chi_{f_{i_d}, r_{i_d}t} \xrightarrow[d]{\|\cdot\|_1} \chi_{b,t}.$$

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{i=1}^{n_d} (\chi_{e_{i_d}, r_{i_d}})^* * \chi_{f_{i_d}, r_{i_d}t} - \chi_{b,t} \Big\|_1 &= \sum_{s \in G} \Big\| \sum_{i=1}^{n_d} \chi_{e_{i_d}^* f_{i_d}, t}(s) - \chi_{b,t}(s) \Big\| \\ = \Big\| \sum_{i=1}^{n_d} e_{i_d}^* f_{i_d} - b \Big\| &\xrightarrow[d]{} 0. \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 3.5. Sea $C_r^*(\mathcal{E}) = \overline{\lambda(C_c(\mathcal{E}))} \subseteq C_r^*(\mathcal{B})$. En las hipótesis del teorema anterior,

- $C_r^*(\mathcal{A})C_r^*(\mathcal{E}) \subseteq C_r^*(\mathcal{E})$,
- $C_r^*(\mathcal{E})C_r^*(\mathcal{B}) \subseteq C_r^*(\mathcal{E})$, es decir $C_r^*(\mathcal{E})$ es un ideal a derecha de $C_r^*(\mathcal{B})$,
- $\overline{C_r^*(\mathcal{E})C_r^*(\mathcal{E})^*} = C_r^*(\mathcal{A})$,
- si $\overline{\operatorname{span}(B_t \cap \mathcal{E}^*\mathcal{E})} = B_t$, $\forall t \in G$, entonces $\overline{\operatorname{span}(C_r^*(\mathcal{E})^* C_r^*(\mathcal{E}))} = C_r^*(\mathcal{B})$.

COROLARIO 3.6. *Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ verifican las condiciones del teorema 3.4, entonces $C_r^*(\mathcal{A})$ es una sub-C*-álgebra hereditaria de $C_r^*(\mathcal{B})$. Si además se cumple que $\overline{\operatorname{span}(B_t \cap \mathcal{E}^*\mathcal{E})} = B_t$, $\forall t \in G$, entonces $C_r^*(\mathcal{A})$ y $C_r^*(\mathcal{B})$ son equivalentes Morita vía $C_r^*(\mathcal{E})$.*

Demostración: Para probar la primera afirmación, alcanza con observar que $C_r^*(\mathcal{E}) \cap C_r^*(\mathcal{E})^* = \overline{C_r^*(\mathcal{E})C_r^*(\mathcal{E})^*} = C_r^*(\mathcal{E})C_r^*(\mathcal{E})^* = C_r^*(\mathcal{A})$, ya que podemos considerar una unidad aproximada en el ideal a derecha $C_r^*(\mathcal{E})$ de $C_r^*(\mathcal{B})$. Luego, $C_r^*(\mathcal{A})$ es una sub-C*-álgebra hereditaria de $C_r^*(\mathcal{B})$.

En cuanto a la segunda afirmación, $C_r^*(\mathcal{E})$ es un $C_r^*(\mathcal{A})$-módulo a derecha con producto interno ${}_A\langle f, g\rangle = fg^*$, y es pleno por la observación anterior. Además, $C_r^*(\mathcal{E})$ es un $C_r^*(\mathcal{B})$-módulo a izquierda con producto interno $\langle f, g\rangle_B = f^*g$, también pleno por la observación anterior. Como la condición de compatibilidad ${}_A\langle f, g\rangle h = f\langle g, h\rangle_B$, $\forall f, g, h \in C_r^*(\mathcal{E})$ es inmediata, se verifica que $C_r^*(\mathcal{A})$ y $C_r^*(\mathcal{B})$ son equivalentes Morita vía $C_r^*(\mathcal{E})$.

□

NOTACIÓN 3.7. Utilizaremos la siguiente notación: si $\mathcal{D}$ es un fibrado de Fell, $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}^{\dagger}$ es la norma en $C^*(\mathcal{D})$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}^{r}$ es la norma en $C_r^*(\mathcal{D})$.

TEOREMA 3.8. *Supongamos que $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ verifican las condiciones del teorema 3.4 y que $\overline{\operatorname{span}(B_t \cap \mathcal{E}^*\mathcal{E})} = B_t$, $\forall t \in G$. Entonces, si $\mathcal{A}$ es promediable, $\mathcal{B}$ es promediable.*

Demostración: Comenzaremos por probar que $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}^{\dagger}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}^{r}$ coinciden en $C_c(\mathcal{E})$.

Sea $f \in l^1(\mathcal{A})$. Por ser $\mathcal{A}$ promediable, $\|f\|_{\mathcal{A}}^{r} = \|f\|_{\mathcal{A}}^{\dagger}$. Se verifica que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{A}}^{\dagger} &= \sup_{\pi}\{\|\pi(f)\| \,:\, \pi : l^1(\mathcal{A}) \to C \text{ representación, } C \text{ C}^*\text{-álgebra } \} \\
&\geq \sup_{\pi}\{\|\pi_{|A}(f)\| \,:\, \pi : l^1(\mathcal{B}) \to C \text{ representación, } C \text{ C}^*\text{-álgebra } \} \\
&= \|f\|_{\mathcal{B}}^{\dagger} \geq \|f\|_{\mathcal{B}}^{r},
\end{aligned}$$

ya que la restricción a $l^1(\mathcal{A})$ de una representación de $l^1(\mathcal{B})$ es una representación. Por la proposición 3.2, $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}^{r}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}^{r}$ coinciden en $l^1(\mathcal{A})$. Luego,

$$\|f\|_{\mathcal{A}}^{r} = \|f\|_{\mathcal{A}}^{\dagger} \geq \|f\|_{\mathcal{B}}^{\dagger} \geq \|f\|_{\mathcal{B}}^{r} = \|f\|_{\mathcal{A}}^{r}$$

Entonces $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}^{\dagger}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}^{r}$ coinciden en $l^1(\mathcal{A})$. Si $\xi \in C_c(\mathcal{E})$, $\xi * \xi^* \in C_c(\mathcal{A})$. Por lo tanto,

$$(\|\xi\|_{\mathcal{B}}^{r})^2 = \|\xi * \xi^*\|_{\mathcal{B}}^{r} = \|\xi * \xi^*\|_{\mathcal{B}}^{\dagger} = (\|\xi\|_{\mathcal{B}}^{\dagger})^2$$

y las normas $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}^{\dagger}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}^{r}$ coinciden en $C_c(\mathcal{E})$. Llamamos E a la clausura de $C_c(\mathcal{E})$ con respecto a cualquiera de ellas.

Vimos antes que E es un $C_r^*(\mathcal{B})$-módulo de Hilbert pleno. De manera análoga, E es un $C^*(\mathcal{B})$-módulo de Hilbert pleno y $C^*(\mathcal{A})$ es equivalente Morita a $C^*(\mathcal{B})$ vía E. Como $C = C^*(\mathcal{A}) = C_r^*(\mathcal{A})$, entonces ${}_C E_{C^*(\mathcal{B})}$ y ${}_C E_{C_r^*(\mathcal{B})}$ son bimódulos de equivalencia Morita. Entonces (ver A.14) $C^*(\mathcal{B}) \simeq C_r^*(\mathcal{B})$ mediante un isomorfismo que lleva $\xi * \eta \to \xi * \eta$, $\forall \xi, \eta \in C_c(\mathcal{E})$, y por lo tanto debe ser $\lambda^{\dagger}$.

□

Los próximos resultados son obtenidos directamente de los teoremas anteriores una vez que verifiquemos que al considerar una acción parcial y su acción envolvente podemos situarnos en las condiciones de 3.4.

PROPOSICIÓN 3.9. *Sea β una acción de G en una C^*-álgebra B. Sean A un ideal de B y $\alpha = \beta_{|A}$. Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\beta$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_\alpha$ y $\mathcal{E} = (E, \pi, G)$, donde $E = G \times A$, entonces $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$ y $\mathcal{A}$ verifican las condiciones del teorema 3.4. Si además β es una acción envolvente de α entonces $\overline{\operatorname{span}(B_t \cap \mathcal{E}^*\mathcal{E})} = B_t$, $\forall t \in G$.*

Demostración: Es claro que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ es un subfibrado de Fell de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{E}$ es un subfibrado de Banach algebraico de $\mathcal{B}$.

Si $(t, a) \in E$ y $(s, b) \in G \times B$, entonces $(t, a)(s, b) = (ts, a\beta_t(b))$. Por ser A un ideal de B, $a\beta_t(b) \in A$ y por lo tanto $(ts, a\beta_t(b)) \in G \times A = E$. Luego, $\mathcal{E}$ es un ideal a derecha de $\mathcal{B}$.

Sea $(r,a) \in \{r\}\times D_r$, donde $D_r = \beta_r(A)\cap A$. Si $(s,e) \in G\times A$, veamos que $(r,a)(s,e) \in G \times A$ y por lo tanto $\mathcal{A}\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}$. Esto es cierto ya que $(r,a)(s,e) = (rs, \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)e)$ y $\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)e) \in D_r \subseteq A$.

Si $(r,e),(s,f) \in E$, entonces $(r,e)(s,f)^* = (rs^{-1}, e\beta_{rs^{-1}}(f^*)) \in \{rs^{-1}\} \times A\beta_{rs^{-1}}(A) \subseteq \{rs^{-1}\} \times A \cap \beta_{rs^{-1}}(A) = \{rs^{-1}\} \times D_{rs^{-1}} \subseteq A$. Entonces $\mathcal{E}\mathcal{E}^* \subseteq \mathcal{A}$.

Por último, para probar la última afirmación, nótese que si $(r,e),(s,f) \in E$, entonces $(r,e)^*(s,f) = (r^{-1}s, \beta_{r^{-1}}(e^*f))$. Luego, si $(t,b) \in B_t \cap \mathcal{E}^*\mathcal{E}$, $b = \beta_r(xy)$, para algún $r \in G$ y $x,y \in A$. Por lo tanto, $\operatorname{span}(B_t \cap \mathcal{E}^*\mathcal{E}) \subseteq \{t\} \times [\beta(A)]$. Por el teorema de Cohen-Hewitt, si $x \in A$, existen $y,z \in A$ tales que $x = yz$, de donde $\overline{\operatorname{span}(B_t \cap \mathcal{E}^*\mathcal{E})} = \{t\} \times \overline{[\beta(A)]} = B_t$, $\forall t \in G$.

□

Corolario 3.10. *Sean β una acción de G en una C^*-álgebra B. Sea A un ideal de B y $\alpha = \beta_{|A}$. Entonces $A \rtimes_{\alpha,r} G$ es una sub-C^*-álgebra hereditaria de $B \rtimes_{\alpha,r} G$. Si además β es una acción envolvente de α, entonces $A \rtimes_{\alpha,r} G$ y $B \rtimes_{\alpha,r} G$ son equivalentes Morita.*

Corolario 3.11. *Si β es la acción envolvente de una acción parcial promediable α, entonces β es promediable.*

Proposición 3.12. *Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ verifican las condiciones del teorema 3.4 y además se cumple que $\overline{\operatorname{span}(\mathcal{E}^*\mathcal{E} \cap B_t)} = B_t$, $\forall t \in G$, entonces $C^*(\mathcal{A})$ y $C^*(\mathcal{B})$ son equivalentes Morita.*

Demostración: Sea $E = \overline{C_c(\mathcal{E})}^{\|\cdot\|_E}$, donde $\|\xi\|_E^2 = \|\xi * \xi^*\|_{\mathcal{A}}^{\dagger}$, $\forall \xi \in C_c(\mathcal{E})$. Entonces ${}_{C^*(\mathcal{A})}E$ es un módulo de Hilbert a izquierda pleno. Sea $\mathcal{K} = \mathcal{K}({}_{C^*(\mathcal{A})}E)$.

Sea $\rho : \operatorname{span}(l^1(\mathcal{E})^* * l^1(\mathcal{E})) \to \mathcal{K}$ tal que

$$\rho\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^* * \eta_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \theta_{\xi_i,\eta_i} \quad \forall \xi_i, \eta_i \in C_c(\mathcal{E}),\ i \in \{1,2,\dots,n\},\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

La anterior es una definición. En efecto, supongamos que $\sum_{i=1}^n \xi_i^* * \eta_i = 0$. Entonces, $\forall \mu \in E$,

$$\mu * \Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^* * \eta_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \theta_{\xi_i,\eta_i}(\mu) = 0.$$

Luego, $\sum_{i=1}^n \theta_{\xi_i,\eta_i} = 0$.

Veamos que ρ preserva la convolución. Alcanza con probar que $\rho((\xi^* * \eta) * (\mu^* * \nu)) = \rho(\mu^* * \nu)\rho(\xi^* * \eta)$, $\forall \xi,\eta,\mu,\nu \in C_c(\mathcal{E})$, y esto es cierto porque

$$\theta_{\eta^* * \xi, \mu^* * \nu}(\zeta) = \zeta * (\xi^* * \eta) * (\mu^* * \nu) = \theta_{\mu,\nu}(\zeta * \xi^* * \eta) = \theta_{\mu,\nu}\theta_{\xi,\eta}(\zeta),$$

para toda $\zeta \in C_c(\mathcal{E})$. En cuanto a la involución, se verifica que $\theta_{\xi,\eta}^* = \theta_{\eta,\xi}$ y por lo tanto $\rho(\xi^* * \eta)^* = \rho((\xi^* * \eta)^*)$, $\forall \xi, \eta \in C_c(\mathcal{E})$.

Nótese que $J := \operatorname{span}(l^1(\mathcal{E})^* * l^1(\mathcal{E}))$ es un ideal de $l^1(\mathcal{B})$. Consideramos una representación no degenerada y fiel de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, para algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Por lo tanto, ρ se extiende de manera única a un homomorfismo $\overline{\rho} : l^1(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ver [**FD88a**, XI-19.11]). Obsérvese que, debido a la densidad de J en $l^1(\mathcal{B})$, la imagen de $\overline{\rho}$ está incluida en $\mathcal{K}$. A su vez, $\overline{\rho}$ induce un homomorfismo $\tilde{\rho} : C^*(\mathcal{B}) \to \mathcal{K}$. Dicho homomorfismo debe ser contractivo. Entonces, si $\xi \in C_c(\mathcal{E})$, se cumple que:

$$\|\xi * \xi^*\|_{\mathcal{B}}^{\dagger} \leq \|\xi * \xi^*\|_{\mathcal{A}}^{\dagger} = \|\xi\|_E^2 = \|\theta_{\xi,\xi}\|_{\mathcal{K}} = \|\rho(\xi^* * \xi\|_{\mathcal{K}} \leq \|\xi^* * \xi\|_{\mathcal{B}}^{\dagger},$$

donde la primera desigualdad se debe a que si π es una representación de $l^1(\mathcal{B})$ entonces $\pi_{|_{l^1(\mathcal{A})}}$ es una representación de $l^1(\mathcal{A})$. Por lo tanto todas las normas de la desigualdad anterior son iguales.

Sea $F = \overline{C_c(\mathcal{E})}^{\|\cdot\|_F}$, donde $\|\xi\|_F^2 = \|\xi^* * \xi\|_{\mathcal{B}}^{\dagger}$. Acabamos de probar que $F = E$. Luego, $E_{C^*(\mathcal{B})}$ es un módulo de Hilbert a derecha pleno. Además, si $\xi, \eta, \mu \in C_c(\mathcal{E})$, se verifica que $\xi \cdot \langle \eta, \mu \rangle_{C^*(\mathcal{B})} = \xi * \eta^* * \mu = {}_{C^*(\mathcal{A})}\langle \xi, \eta \rangle \cdot \mu$. Probamos entonces que $C^*(\mathcal{A})$ y $C^*(\mathcal{B})$ son equivalentes Morita.

□

TEOREMA 3.13. *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ en las hipótesis del teorema 3.4 y tales que, $\forall t \in G$, $\overline{\operatorname{span}(\mathcal{E}^*\mathcal{E} \cap B_t)} = B_t$. Entonces, $\mathcal{B}$ es promediable si y sólo si $\mathcal{A}$ lo es.*

Demostración: El recíproco fue probado en 3.8.

Para probar la promediabilidad de $\mathcal{A}$ a partir de la de $\mathcal{B}$, queremos ver que las normas $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}^{\dagger}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}^{r}$ coinciden en los elementos de $l^1(\mathcal{A})$. Esto es cierto porque

$$\|f\|_{\mathcal{A}}^{\dagger} = \|f\|_{\mathcal{B}}^{\dagger} = \|f\|_{\mathcal{B}}^{r} = \|f\|_{\mathcal{A}}^{r} \quad \forall f \in l^1(\mathcal{A}),$$

donde la primera igualdad se debe a la cadena de desigualdades del teorema anterior, la segunda a la promediabilidad de $\mathcal{B}$ y la última a la proposición 3.2.

□

Al igual que cuando probamos la promediabilidad de $\mathcal{B}$ a partir de la de $\mathcal{A}$, obtenemos como corolarios del teorema anterior y de la proposición 3.9 resultados que conciernen a los fibrados obtenidos a partir de acciones parciales.

COROLARIO 3.14. *Sean β una acción de G en una C^*-álgebra B, A un ideal de B y $\alpha = \beta_{|_A}$. Si β es la acción envolvente de α, entonces $A \rtimes_\alpha G$ y $B \rtimes_\alpha G$ son equivalentes Morita.*

COROLARIO 3.15. *Si β es la acción envolvente de una acción parcial α, entonces α es promediable si y sólo si β lo es.*

2. Dilatación de representaciones parciales

A continuación probaremos que toda representación parcial de un grupo discreto G admite una dilatación. En [**Aba03**] se prueba esto con la hipótesis adicional de que G sea promediable. La proposición 3.12 nos permite deshacernos de esta hipótesis. Comenzamos por presentar algunas definiciones y observaciones que serán utilizadas en la proposición 3.26. Estas se refieren a representaciones parciales de grupos discretos (ver [**Exe98**]) y a representaciones covariantes (ver [**ZM68**, 2.6]).

DEFINICIÓN 3.16. Sean G un grupo y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un mapa $u : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación parcial si:

- $u_e = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$,
- $u_t^* = u_{t^{-1}}$ y
- $u_s u_t u_{t^{-1}} = u_{st} u_{t^{-1}}$,

$\forall s, t \in G$.

OBSERVACIÓN 3.17. Si u es una representación parcial, entonces u_t es una isometría parcial y $u_{s^{-1}} u_s u_t = u_{s^{-1}} u_{st}$, $\forall s, t \in G$.

DEFINICIONES 3.18. Dado $t \in G$, sea

$$X_t = \{\omega \in \mathcal{P}(G) : e, t \in \omega\} = \{\omega : G \to \{0,1\} : \omega(e) = \omega(t) = 1\}.$$

Considerando la topología producto, cada X_t resulta ser abierto y cerrado y los mapas $\sigma_t : X_{t^{-1}} \to X_t$ tales que $\sigma_t(\omega) = t\omega$ son homomorfismos. El par $\sigma = (\{X_t\}_{t\in G}, \{\sigma_t\}_{t\in G})$ es una acción parcial de G en $X := X_e$.

La correspondiente acción parcial de G en $C(X)$, según lo visto en el capítulo 1, es $\alpha = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$, donde $D_t = C(X_t)$ y $\alpha_t(f)(\omega) = f(\sigma_{t^{-1}}(\omega))$, $\forall t \in G$, $f \in C(X_{t^{-1}})$, $\omega \in X_t$.

Sea $\mathcal{B}_\alpha$ el correspondiente fibrado de Fell. La C*-álgebra parcial de G es $C_p^*(G) := C^*(\mathcal{B}_\alpha) = C(X) \rtimes_\alpha G$.

Llamamos $\mathbf{1}_t$ a la función característica de X_t, es decir, $\mathbf{1}_t(\omega) = 1$ si $\omega \in X_t$ y $\mathbf{1}_t(\omega) = 0$ en otro caso. Nótese que, al ser X_t abierto y cerrado, se tiene que $\mathbf{1}_t \in C(X)$.

Si $a_t \in C(X_t)$, definimos $a_t\delta_t \in C_c(\mathcal{B}_\alpha)$ tal que $a_t\delta_t(s) = a_t$ si $t = s$ y $a_t\delta_t(s) = 0$ en otro caso.

OBSERVACIÓN 3.19. Las representaciones parciales de G están en correspondencia con las representaciones no degeneradas de $C_p^*(G)$ (ver [**Exe98**]). En particular, esta correspondencia lleva $u : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ en $\pi_u : C_p^*(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\pi_u(\mathbf{1}_t\delta_t) = u_t$.

OBSERVACIÓN 3.20. La acción parcial α de G en $C(X)$ tiene acción envolvente (α^e, X^e), donde $X^e = \{\omega \subseteq G : \omega \neq \emptyset\}$ y $\alpha_t^e(\omega) = t\omega$.

OBSERVACIÓN 3.21. En vista de 3.12, se cumple que $C_p^*(G)$ es equivalente Morita a $C(X^e) \rtimes_{\alpha^e} G$ vía E. El módulo E es la completación de $C_c(\mathcal{E})$ con respecto a la norma inducida por $C_p^*(G)$, donde $\mathcal{E}$ es el fibrado $\mathcal{E} = (G \times C(X), \pi_G, G)$.

Siguiendo el procedimiento A.20, dada $\pi_u : C_p^*(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ obtenemos $\pi_u^e := E - \operatorname{Ind} \pi_u : C(X^e) \rtimes_{\alpha^e} G \to \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes E)$ tal que $\pi_u^e(f)(h \otimes \xi) = h \otimes \xi \cdot f$, $\forall f \in C(X^e) \rtimes_{\alpha^e} G$, $h \in \mathcal{H}$ y $\xi \in E$.

Sea $\mathcal{H}^e = \mathcal{H} \otimes E$. Si llamamos $i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^e$ a la inclusión natural y $P : \mathcal{H}^e \to \mathcal{H}$ a la proyección ortogonal, entonces $P^* = i$ y $\pi_u(f) = P\pi_u^e(f)i$, $\forall f \in C_p^*(G)$. En efecto, $\pi_u^e(f)(h\otimes\xi) = h\otimes\xi\cdot f = h\cdot f\otimes\xi = \pi(f)h\otimes\xi$ y por lo tanto $\pi_u(f) = P\pi_u^e(f)i$, $\forall f \in C_p^*(G)$.

DEFINICIÓN 3.22. Sean una C*-álgebra A, un grupo G y una acción θ de G en A. Una representación covariante de (A, G, θ) sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un par (π, u) tal que:

1. $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación,
2. $u : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ es una representación unitaria y
3. se verifica que $\pi(\theta_t(a)) = u_t\pi(a)u_t^*$, $\forall a \in A$ y $t \in G$.

TEOREMA 3.23. [**ZM68**, 2.6 y siguientes] *Sean una C*-álgebra A, un grupo G y una acción de G en A. Existe una biyección entre las representaciones covariantes de (A, G, θ) y las representaciones de $A \rtimes_\theta G$, dada por $(\pi, u) \to \pi \rtimes u$, tal que $\pi \rtimes u(a\delta_t) = \pi(a)u_t$.*

OBSERVACIÓN 3.24. Si $A = C(X^e)$ y $\theta = \alpha^e$, dada una representación π_u^e de $A \rtimes_\theta G$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ le corresponde (π^e, u^e) tales que $\pi^e(\mathbf{1}\delta_t) = \pi_u^e(\mathbf{1}\delta_t) = u_t^e$, $\forall t \in G$.

DEFINICIÓN 3.25. Sea $\rho : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert. Decimos que ρ es definido positivo (compàrese con B.3) si $\forall n \geq 0$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in G$ y $h_1, h_2, \ldots, h_n \in \mathcal{H}$ se cumple que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle \rho(t_j^{-1}t_i)(h_i), h_j\rangle \geq 0.$$

PROPOSICIÓN 3.26. *Sean G un grupo discreto y $u : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una representación parcial. Entonces existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}^e$, que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio, y una representación unitaria $u_e : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H}^e)$ tales que $u_t = Pu^e_t i$, $\forall t \in G$. En particular, las representaciones parciales son mapas definidos positivos.*

Demostración: Sean α y α^e como antes. Observamos que a $u : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ le corresponde $\pi_u : C^*_p(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, y a su vez a esta representación le corresponde $\pi^e_u : C(X^e) \rtimes_{\alpha^e} G \to \mathcal{B}(\mathcal{H}^e)$. A esta última representación le corresponde un par (π^e, u^e) como vimos antes.

Nótese que, por ser X abierto y cerrado en X^e, $\mathbf{1}_e \in C(X^e)$. Se verifica que

$$(\mathbf{1}_e\delta_e)(\mathbf{1}\delta_t)(\mathbf{1}_e\delta_e) = (\mathbf{1}_e\delta_t)(\mathbf{1}_e\delta_e) = \mathbf{1}_t\delta_t.$$

Entonces,

$$u_t = \pi_u(\mathbf{1}_t\delta_t) = P\pi^e_u(\mathbf{1}_e\delta_e)(\mathbf{1}\delta_t)(\mathbf{1}_e\delta_e)i = P\pi^e(\mathbf{1}_e\delta_e)u^e_t\pi^e(\mathbf{1}_e\delta_e)i.$$

Sea $Q : \mathcal{H}^e \to \mathcal{H}^e$ la proyección según $\mathcal{H}$. Se cumple que $PQ = P$, $Qi = i$ y $Q\pi^e(\mathbf{1}_e\delta_e) = Q = \pi^e(\mathbf{1}_e\delta_e)Q$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P\pi^e(\mathbf{1}_e\delta_e) &= PQ\pi^e(\mathbf{1}_e\delta_e) = PQ = P \\ \text{y } \pi^e(\mathbf{1}_e\delta_e)i &= \pi^e(\mathbf{1}_e\delta_e)Qi = Qi = i, \end{aligned}$$

de donde concluimos que $u_t = Pu^e_t i$.

Por último, obsérvese que, si $n \geq 0$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in G$ y $h_1, h_2, \dots, h_n \in \mathcal{H}$, entonces:

$$0 \leq \Big\| \sum_{i=1} u^e_{t_i} i(h_i) \Big\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \langle Pu^e_{t_j^{-1}t_i} i(h_i), h_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle u_{t_j^{-1}t_i}(h_i), h_j\rangle.$$

□

3. Promediabilidad del grupo y promediabilidad del fibrado

La proposición que sigue es un resultado de Zeller-Meier (ver [**ZM68**, 5.2]). Nuestro objetivo es obtener una generalización de este resultado que involucra a las acciones parciales de un grupo G sobre una C*-álgebra conmutativa. Antes de probar la proposición incluimos un lema que demuestra una condición de promediabilidad de grupos.

LEMA 3.27. *Sea G un grupo discreto. Si $g : G \to \mathbb{C}$ es una función, sea $\tilde{g}$ tal que $\tilde{g}(t) = \overline{g(t^{-1})}$. Supongamos que se cumple la siguiente propiedad:*

> *Si $f \in l^1(G)$ verifica que, $\forall g$ de soporte compacto, $\sum_{t\in G} f(t)(g * \tilde{g})(t) \geq 0$, entonces $\sum_{t\in G} f(t) \geq 0$.*

Entonces G es promediable.

Demostración: En virtud de B.8, alcanza con probar que la función $\mathbf{1}$ es el límite uniforme sobre subconjuntos compactos de G de funciones de la forma $g*\tilde{g}$, con $g \in C_c(G)$.

Sea $Q = \{\psi$ definida positiva : ψ es el límite uniforme en compactos de funciones de la forma $g * \tilde{g}, g \in C_c(G)\}$ (ver B.3). El conjunto Q es un cono convexo y w^*-cerrado de $l^\infty(G)$ (ver [**Dix83**, 18.3.5]). Por lo tanto, Q coincide con su bipolar (ver [**NB85**, 9.3.6]), es decir

$$Q = \{\eta : l^\infty(G) \to \mathbb{C} : \sum_{s\in G} \eta(s)h(s) \geq 0, \forall h \in l^1(G) : \sum_{s\in G} \psi(s)h(s) \geq 0 \,\text{si}\, \psi \in Q\}.$$

Queremos probar que $\mathbf{1} \in Q$. Equivalentemente, si $h \in l^1(G)$ verifica que, $\forall g$ de soporte compacto, $\sum_{s\in G} h(s)(g * \tilde{g})(s) \geq 0$, entonces $\sum_{s\in G} h(s)\mathbf{1}(s) \geq 0$, y eso es lo que estamos suponiendo. Luego, G es promediable.

Proposición 3.28. *Supongamos que B es una C^*-álgebra con unidad y β una acción de G en B. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *G es promediable.*
2. *β es promediable y B tiene un estado G-invariante.*

Demostración: 1. $\Rightarrow$ 2. En virtud del corolario 2.45 podemos afirmar que β es promediable. Sea m una media invariante a derecha por G (ver B.1) y sea φ un estado en B. Si $b \in B$, definimos $\varphi_b : G \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi_b(t) = \varphi(\beta_t(b))$, $\forall t \in G$. Se cumple que $\varphi_b \in l^\infty(G)$, ya que

$$\|\varphi_b\|_\infty = \sup_{t\in G} |\varphi_b(t)| = \sup_{t\in G} |\varphi(\beta_t(b))| \leq \sup_{t\in G} \|\beta_t(b)\| = \|b\|.$$

Consideramos $\varphi_m : B \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi_m(b) = m(\varphi_b)$, $\forall b \in B$. Es inmediato que φ_m es una funcional lineal positiva. Además

$$\|\varphi_m\| = \varphi_m(1_B) = m(\varphi_1) = m(\mathbf{1}) = 1.$$

En cuanto a la invariancia por la acción de G, si $b \in B$, $t \in G$, entonces, como $\varphi_{\beta_t(b)}(s) = \varphi(\beta_{st}(b)) = \varphi_b(st) =_t (\varphi_b)(s)$ y m es invariante por la translación a derecha,

$$\varphi_m(\beta_t(b)) = m(\varphi_{\beta_t(b)}) = m(\varphi_b) = \varphi_m(b).$$

Por lo tanto φ_m es un estado G-invariante en B.

2. $\Rightarrow$ 1. Sea $f \in l^1(G)$ tal que $\sum_{s\in G} f(s)(g * \tilde{g})(s) \geq 0$, $\forall g \in C_c(G)$. Definimos $F : G \to \mathcal{B}_\beta$ tal que $F(t) = f(t)1_B$, $\forall t \in G$. Nótese que $\|F\|_1 = \|f\|_1$, y por lo tanto $F \in l^1(\mathcal{B})$.

Elegimos una representación π del fibrado $\mathcal{B}_\alpha$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $\pi_{|B_e}$ es fiel. Como en el lema 2.41, π induce una representación $\pi_\lambda : l^1(\mathcal{B}_\alpha) \to \mathcal{B}(H \otimes l^2(G))$ tal que $\pi_\lambda(g) = \sum_{s\in G} \pi(g(s)) \otimes \lambda(s)$. En dicho lema probamos que la representación inducida por π_λ en $C^*_r(\mathcal{B}_\alpha)$ es fiel. En este caso, $C^*_r(\mathcal{B}_\alpha) = C^*(\mathcal{B}_\alpha)$. Nótese además que

$$\pi_\lambda(F) = \sum_{s\in G} \pi(f(s)1) \otimes \lambda(s) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes \sum_{s\in G} f(s)\lambda(s)$$

y si $h \in l^2(G)$, $t \in G$

$$\sum_{s\in G} f(s)\lambda(s)(h)(t) = \sum_{s\in G} f(s)h(s^{-1}t) = (f * h)(t) = \lambda(f)(h)(t).$$

Por lo tanto $\pi_\lambda(F) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes \lambda(f)$, y esto implica que $\pi_\lambda(F) \geq 0$, porque la condición $0 \leq \sum_{s\in G} f(s)(g * \tilde{g})(s) = \langle \lambda(f)\bar{g}, \bar{g} \rangle$, $\forall g \in C_c(G)$, dice que $\lambda(f) \geq 0$. Entonces, por ser π_λ una representación fiel de $C^*_r(\mathcal{B}_\alpha) = C^*(\mathcal{B}_\alpha)$, concluimos que $F \geq 0$ como elemento de $C^*(\mathcal{B}_\beta)$.

Sea φ un estado G-invariante de B. Llamamos Φ al mapa $\Phi : l^1(\mathcal{B}_\beta) \to \mathbb{C}$ tal que $\Phi(g) = \sum_{s\in G} \varphi(g(s))$.

Veamos que Φ es una funcional lineal positiva. La linealidad es inmediata. Nótese que

$$|\Phi(g)| \leq \sum_{s\in G} |\varphi(g(s))| \leq \sum_{s\in G} \|g(s)\| = \|g\|_1.$$

Si $g = \sum_{i=1}^{n} \chi_{b_i,t_i} \in C_c(\mathcal{B}_\beta)$, entonces

$$\begin{aligned}\Phi(g^* * g) &= \sum_{s\in G} \varphi((g^* * g)(s)) = \sum_{s\in G} \varphi(\sum_{i,j=1}^{n} \chi_{\beta_{t_j^{-1}}(b_j^* b_i), t_j^{-1} t_i}(s)) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(\beta_{t_j^{-1}}(b_j^* b_i)) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(b_j^* b_i).\end{aligned}$$

En la última igualdad se usó la invariancia de φ con respecto a la acción de G. Luego, si $\rho : B \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ es la representación que corresponde a través de la GNS a φ, para un vector ζ de norma 1 del espacio de Hilbert $\mathcal{K}$, se cumple que

$$0 \leq \| \sum_{i=1} \rho(b_i)\zeta\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} \rho(b_i)\zeta, \sum_{j=1}^{n} \rho(b_j)\zeta\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \rho(b_j^* b_i)\zeta, \zeta\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(b_j^* b_i).$$

Por lo tanto $\Phi \geq 0$. En particular,

$$0 \leq \Phi(F) = \sum_{s\in G} \varphi(f(s)1) = \sum_{s\in G} f(s),$$

como queríamos probar.

Observación 3.29. En la demostración del teorema la existencia de 1_B es usada únicamente para probar que la funcional φ_m construida en la demostración de 1. $\Rightarrow$ 2. es un estado. A priori, alcanzaría con probar que es no nula y luego normalizarla. Sin embargo, no podemos asegurar que φ_m sea no nula si B no tiene unidad. El siguiente ejemplo muestra que en ese caso el teorema anterior no se cumple.

Ejemplo 3.30. Sea G un grupo discreto infinito y promediable. Sea $B = C_0(G)$ y sea β la acción de G en B por translación a izquierda, es decir $\beta_t(g)(s) = g_t(s) = g(t^{-1}s)$, $\forall t, s \in G$, $g \in B$. Por medio de 1.8, a β le corresponde la acción σ, $\sigma : G \times G \to G$ tal que $\sigma_t(s) = t^{-1}s$.

Pero en B no hay estados G-invariantes. Supongamos que sí hay. Por 1.17, la medida de Radon positiva y de norma 1 que corresponde a φ debe ser G-invariante. Luego, μ es una medida de Haar a izquierda en G y como ν, la medida de conteo en G, es medida de Haar a izquierda, debe ser $1 = \mu(G) = c\nu(G) = \infty$, para algún $c > 0$, y esto es absurdo.

A continuación, gracias a la equivalencia entre la promediabilidad de una acción parcial y de su acción envolvente y al teorema 1.22, obtenemos para el caso de C*-álgebras conmutativas la siguiente versión de 3.28.

Teorema 3.31. *Sea $A = C_0(X)$ una C*-álgebra conmutativa. Supongamos que α es una acción parcial de un grupo G en A que tiene acción envolvente $(\beta, C_0(X^e))$. Si $B = C_0(X^e)$ tiene unidad, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *G es promediable.*
2. *β es promediable y existe un estado en B que es G-invariante.*
3. *α es promediable y existe un estado en A que es G-invariante.*

Demostración: En vista de 3.28, 3.15 y 1.22, sólo tenemos que probar que la existencia de un estado φ que es G-invariante en B asegura la existencia de un estado G-invariante en A. Nótese que la restricción de φ a A no puede ser nula: si lo fuera, entonces $0 = \varphi(a) = \varphi(\beta_t(a))$, $\forall a \in A, t \in G$ y por lo tanto $\varphi([\beta(A)]) = 0$, de donde φ es nulo. Luego, alcanza con considerar $\psi = \frac{\varphi_{|A}}{\|\varphi_{|A}\|}$, que es un estado G-invariante en A.

□

Apéndice A

Módulos de Hilbert y equivalencia Morita

Dedicamos esta sección a recordar algunas definiciones y propiedades sobre módulos de Hilbert y equivalencia Morita que son utilizados a lo largo del trabajo. Es referencia para lo que sigue [**Ach03**].

Definiciones A.1. Se dice que $(X, A, \cdot)$ es un A-módulo a izquierda si X es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, A es una C*-álgebra y $\cdot : A \times X \to X$ es un mapa, llamado acción, con las siguientes propiedades:

1. $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ y $a \cdot (\lambda x) = \lambda(a \cdot x)$
2. $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$, $(\lambda a) \cdot x = \lambda(a \cdot x)$ y $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$

$\forall x, y \in X$, $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Escribimos ${}_AX$.

Decimos que $(X, A, \cdot)$ es un A-módulo a derecha si $\cdot : X \times A \to X$ tiene propiedades análogas a derecha. Escribimos X_A.

Si además X y A son seminormados (respectivamente, normados) y se cumple que $\|a \cdot x\| \leq \|a\|\|x\|$ (o $\|x \cdot a\| \leq \|x\|\|a\|$, si estamos considerando la estructura a derecha) $\forall a \in A$, $x \in X$, decimos que X es un A-módulo seminormado (respectivamente, normado).

Un A-módulo normado X es de Banach si A y X lo son.

Un A-módulo seminormado X es no degenerado si $\overline{\text{span}(A \cdot X)} = X$ (si estamos considerando la estructura a derecha, $\overline{\text{span}(X \cdot A)} = X$).

Supongamos que X es un A-módulo a izquierda y un B-módulo a derecha. Si se cumple que

$$a \cdot (x \cdot b) = (a \cdot x) \cdot b \quad \forall a \in A,\, b \in B,\, x \in X,$$

decimos que X es un A-B-bimódulo y escribimos ${}_AX_B$. Si además ${}_AX$ y X_B son seminormados, considerando la misma seminorma en X, (respectivamente, son normados, son de Banach), entonces ${}_AX_B$ es seminormado (respectivamente, normado, de Banach).

Decimos que A es una pre-C*-álgebra si es una $*$-álgebra normada tal que $\|a^*a\| = \|a\|^2$, $\forall a \in A$.

Sean A una pre-C*-álgebra y X un A-módulo a izquierda. Un semiproducto interno en X a valores en A es un mapa $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to A$ tal que

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal en la primera variable y $\langle a \cdot x, y \rangle = a \cdot \langle x, y \rangle$,
2. $\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle$ y
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$,

$\forall x, y \in X$, $a \in A$. Escribimos ${}_A\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Si además se cumple que si $x \in X$ y $\langle x, x \rangle = 0$, entonces $x = 0$, decimos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en X a valores en A.

Si X es un A-módulo a derecha, la definición es análoga, sustituyendo la primera condición por

1. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es lineal en la segunda variable y $\langle x, y\cdot a\rangle = \langle x,y\rangle\cdot a$,

$\forall x,y\in X$, $a\in A$. Escribimos $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$.

En lo que sigue, a menos que se explicite lo contrario, consideraremos módulos a izquierda y no escribiremos los resultados análogos que involucran a los módulos a derecha.

Sea X un A-módulo con semiproducto interno. Definimos $|x| := \sqrt{\langle x,x\rangle} \in A$ y $\|x\| := \sqrt{\|\langle x,x\rangle\|}\in\mathbb{C}$, $\forall x\in X$. Se verifica que $\|x\| = \|\sqrt{\langle x,x\rangle}\|$, $\forall x\in X$.

Proposición A.2. *Desigualdad de Cauchy-Schwarz.*
Sea X un A-módulo con semiproducto interno. Entonces:

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \|\langle x,x\rangle\|\langle y,y\rangle \quad \forall x,y\in X.$$

Corolario A.3. *Si X es un A-módulo con semiproducto interno (respectivamente, con producto interno), entonces el mapa $x\to\|x\|$ es una seminorma (respectivamente, una norma) en X que satisface:*

$$\|a\cdot x\| \leq \|a\|\|x\|,$$
$$\|\langle x,y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|,$$

$\forall a\in A$, $x,y\in X$.

A partir de ahora, consideraremos dicha seminorma (respectivamente, norma) en X.

Definición A.4. Un A-módulo con semiproducto interno es pleno si $\overline{\operatorname{span}\langle X,X\rangle} = A$.

Un A-módulo con producto interno en el que A y X son normados es un C^*-módulo de Hilbert o A-módulo de Hilbert.

Observación A.5. Los $\mathbb{C}$-módulos de Hilbert a izquierda son los espacios de Hilbert.

Los módulos de Hilbert son no degenerados. Más aún, si X es un módulo de Hilbert, se verifica que $\overline{\operatorname{span}\langle X,X\rangle\cdot X} = X$.

Definición A.6. Sean dos A-módulos de Hilbert X e Y. Un mapa $T: X\to Y$ es adjuntable si existe un mapa $T^*: X\to Y$ tal que $\langle T(x),y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$, $\forall x\in X$, $y\in Y$. Decimos que T^* es un adjunto de T.

Notamos $\mathcal{L}(X,Y) := \{T: X\to Y \,:\, T \text{ es adjuntable}\}$ y $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$.

Proposición A.7. *Sean dos A-módulos de Hilbert X e Y.*

1. *Si T es adjuntable, entonces T es A-lineal y acotado y T tiene un único adjunto, que escribimos T^*. Se cumple que T^* es adjuntable y el adjunto de T^* es T.*
2. *Si $T\in\mathcal{L}(X,Y)$, entonces $\|T^*\| = \|T\|$ y $\|T^*T\| = \|T\|^2$.*
3. *$\mathcal{L}(X,Y)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(X,Y)$.*

Corolario A.8. *Si X es un módulo de Hilbert, entonces $\mathcal{L}(X)$ es una C^*-álgebra con unidad con la estructura de álgebra normada de $\mathcal{B}(X)$ y la involución dada por el adjunto.*

Ejemplo A.9. El álgebra $\mathcal{K}(X)$
Sean dos A-módulos de Hilbert X e Y. Si $x\in X$ e $y\in Y$, sea $\theta_{x,y}: X\to Y$ tal que $\theta_{x,y}(z) = \langle z,x\rangle\cdot y$. Entonces el mapa $\theta_{x,y}$ es adjuntable y $\theta^*_{x,y} = \theta_{y,x}$.

Sea $\mathcal{K}(X,Y) = \overline{\operatorname{span}\{\theta_{x,y} \,:\, x\in X,\, y\in Y\}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ y sea $\mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X,X)$.

Se cumple que $\mathcal{K}(X)$ es un ideal de $\mathcal{L}(X)$.

Cuando sea necesario hacer referencia a A, escribiremos $\mathcal{K}({}_AX)$.

PROPOSICIÓN A.10. *Sea un A-módulo de Hilbert X. Entonces X es un $\mathcal{K}(X)$-módulo de Hilbert a derecha pleno con las siguientes operaciones:*

$$\cdot : X \times \mathcal{K}(X) \to X \quad z \cdot \theta_{x,y} = \theta_{x,y}(z),$$
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathcal{K}(X) \quad \langle x, y \rangle = \theta_{x,y},$$

$\forall x, y, z \in X$. Además las normas inducidas por $\mathcal{K}(X)$ y A en X coinciden.

DEFINICIÓN A.11. Sean dos C*-álgebras A y B y un espacio vectorial X sobre $\mathbb{C}$. Decimos que X es un A-B-bimódulo de equivalencia Morita si:

- ${}_AX$ y X_B son módulos de Hilbert plenos y
- se cumple que ${}_A\langle x, y\rangle \cdot z = x \cdot \langle y, z\rangle_B$, $\forall x, y, z \in X$.

EJEMPLO A.12. Si ${}_AX$ es un módulo de Hilbert pleno, entonces X es un A-$\mathcal{K}(X)$-bimódulo de equivalencia Morita.

PROPOSICIÓN A.13. *Si X es un A-B-bimódulo de equivalencia Morita, entonces el mapa $\varphi : B \to \mathcal{K}({}_AX)$ correspondiente a la acción de B en X (es decir, $\varphi(b)x = x \cdot b$) es un $*$-isomorfismo que satisface $x \cdot b = x \cdot \varphi(b)$ y $\varphi(\langle x, y\rangle_B) = \langle x, y\rangle_{\mathcal{K}({}_AX)}$.*

COROLARIO A.14. *Si X es un A-B-bimódulo de equivalencia Morita y un A-C-bimódulo de equivalencia Morita, entonces $B \simeq C$, vía el mapa $\langle x, y\rangle_B \to \langle x, y\rangle_C$, $\forall x, y \in X$.*

COROLARIO A.15. *Si X es un A-B-bimódulo de equivalencia Morita, entonces las normas $\|\cdot\|_A$ y $\|\cdot\|_B$ coinciden.*

DEFINICIÓN A.16. Sean A y B C*-álgebras. Decimos que A es equivalente Morita a B, y escribimos $A \overset{\mathcal{M}}{\sim} B$, si existe algún A-B-bimódulo de equivalencia Morita.

Si $A \overset{\mathcal{M}}{\sim} B$ y X es un A-B-bimódulo de equivalencia Morita, decimos que A es equivalente Morita a B vía X.

PROPOSICIÓN A.17. *La equivalencia Morita es una relación de equivalencia.*

PROPOSICIÓN A.18. *Si A y B son C*-álgebras, entonces $A \overset{\mathcal{M}}{\sim} B$ si y sólo si $A \simeq \mathcal{K}(X_B)$ para algún módulo de Hilbert pleno X_B.*

DEFINICIONES A.19. Sean A y B C*-álgebras. Si ${}_AX$ es un módulo de Hilbert a izquierda, decimos que B actúa en ${}_AX$ por operadores adjuntables si X es un B-módulo a derecha que verifica ${}_A\langle x, y \cdot b\rangle = {}_A\langle x \cdot b^*, y\rangle$, $\forall b \in B, x, y \in X$. En este caso, decimos que ${}_AX_{*B}$ es un A-B-bimódulo de Hilbert a izquierda.

Si Y es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y ${}_AX$ es un A-módulo, el producto tensorial de X e Y como espacios vectoriales $X \odot Y$ es un A-módulo a izquierda con la siguiente acción: $a \cdot (x \odot y) = a \cdot x \odot y$, $\forall a \in A, x \in X, y \in Y$. Si además Y es un B-módulo de Hilbert a izquierda y ${}_AX_{*B}$ es un A-B-bimódulo de Hilbert a izquierda, entonces existe un único semiproducto interno sobre A en ${}_A(X \odot Y)$ tal que

$${}_A\langle x_1 \odot y_1, x_2 \odot y_2\rangle = {}_A\langle x_1 \cdot \langle y_1, y_2\rangle, x_2\rangle \quad \forall x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y.$$

Llamamos producto tensorial interno $X_B \otimes Y$ de ${}_AX_{*B}$ y ${}_BY$ a la completación de Hausdorff (ver [**Ach03**]) de ${}_A(X \otimes Y)$ con respecto a ${}_A\langle \cdot, \cdot\rangle$. Supongamos que Y es un B-C-bimódulo de Hilbert a izquierda, para alguna C*-álgebra C. Entonces ${}_A(X \otimes Y)$ admite una única acción adjuntable de C tal que

$$(x \otimes y) \cdot c = x \otimes y \cdot c \quad \forall c \in C, x \in X, y \in Y.$$

El A-C bimódulo de Hilbert obtenido así se llama producto tensorial interno y se escribe ${}_A(X \otimes Y)_{*C}$.

Observación A.20. Dados una C*-álgebra C y un A-módulo de Hilbert a izquierda X, una representación de C sobre ${}_AX$ es un $*$-morfismo $\pi : C^{op} \to \mathcal{L}({}_AX)$. Al considerar C^{op}, la C*-álgebra opuesta de C, estamos pidiendo que el comportamiento de π con respecto al producto de C sea tal que $\pi(cc') = \pi(c')\pi(c)$, $\forall c, c' \in C$. Esto permite que cada representación π defina una acción a derecha de C en X dada por $x \cdot c = \pi(c)(x)$, $\forall x \in X, c \in C$. Notamos $\mathrm{rep}_A(C)$ a la clase de las representaciones de C sobre ${}_AX$. Mediante la acción recién definida, $\mathrm{rep}_A(C)$ está en correspondencia con la clase de los A-C-bimódulos de Hilbert a izquierda. A partir de la construcción del producto tensorial interno de bimódulos de Hilbert y de la correspondencia entre bimódulos de Hilbert y representaciones, podemos inducir representaciones de la manera que sigue. Fijado un B-C-bimódulo de Hilbert a izquierda ${}_BY_{*C}$ y dado un A-B-bimódulo de Hilbert a izquierda ${}_AX_{*B}$, mediante el producto tensorial interno obtenemos el A-C-bimódulo ${}_A(X \otimes Y)_{*C}$. En términos de representaciones, si $\pi : B \to \mathcal{L}({}_AX)$ es una representación, obtenemos $Y - \mathrm{Ind}\,\pi : C \to \mathcal{L}({}_A(X \otimes Y))$ dada por

$$Y\text{-}\mathrm{Ind}\,\pi(c)(x \otimes y) = x \otimes y \cdot c \quad \forall c \in C, x \in X, y \in Y.$$

La fórmula anterior puede parecer extraña en un primer momento debido a la ausencia de π. Pero debemos recordar que π está "escondida" en la construcción del producto tensorial.

Consideremos ahora un bimódulo de equivalencia Morita ${}_AX_B$, en particular, es un A-B-bimódulo de Hilbert a izquierda. Luego, si $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}({}_{\mathbb{C}}\mathcal{H})$ es una representación en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, induce una representación $X\text{-}\mathrm{Ind}\,\pi : B \to \mathcal{L}({}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H} \otimes X))$ tal que

$$X - \mathrm{Ind}(b)(h \otimes \xi) = h \otimes \xi \cdot b \quad \forall b \in B, h \in \mathcal{H}, \xi \in X.$$

Notar que $\mathcal{L}({}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H} \otimes X)) = \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes X)$.

Apéndice B

Promediabilidad de grupos discretos

En este apéndice recordamos definiciones y resultados que conciernen a los grupos promediables, algunos de los cuales son usados a lo largo del trabajo. Puesto que en este trabajo sólo consideramos grupos discretos, enunciaremos las definiciones y los resultados en este contexto, aunque valgan para grupos localmente compactos y de Hausdorff. Ver [**Mar04**].

El estudio de la condición de promediabilidad tiene su origen en un problema planteada por Lebesgue a principios del siglo XX relacionado con la existencia de ciertas medidas invariantes por translaciones. Más adelante, esto llevó a von Neumann a definir la clase de los grupos en los cuales existe una medida aditiva invariante con respecto a la acción por multiplicación a izquierda y que asigna el valor 1 a todo el grupo. La denominación de "amenable" (en inglés) a tales grupos se debe a Day. En francés se usa el término "moyennable" y en castellano usamos el término "promediable". La definición que damos más adelante de grupo promediable en términos de la existencia de una media invariante fue propuesta por Day. Además de en el contexto de los grupos y de los fibrado de Fell, también se estudia la promediabilidad de, por ejemplo, semigrupos y álgebras de Banach, involucrando un espectro sorprendentemente amplio de teorías matemáticas (ver [**Pat88**]).

Con el objetivo de que este trabajo y [**Mar04**] sean autocontenidos en lo que refiere a la promediabilidad de grupos, incluimos al final de esta sección la prueba de dos resultados que son utilizados en 2.45 y 3.27.

En lo que sigue, G es un grupo discreto en el que consideramos la medida de conteo. Con respecto a esa medida consideramos los espacios $l^p(G)$.

Definiciones B.1. Una función $m : l^\infty(G) \to \mathbb{C}$ es una media si $m \in \mathcal{S}(l^\infty(G))$, el espacio de los estados en $l^\infty(G)$.

Decimos que una media m en G es invariante a izquierda si

$$m(\varphi_t) = m(\varphi), \quad \forall \varphi \in l^\infty(G),\, t \in G,$$

donde $\varphi_t(x) = \varphi(tx)$, $\forall t, x \in G$.

Una media m en G es invariante a derecha si

$$m({}_t\varphi) = m(\varphi), \quad \forall \varphi \in l^\infty(G),\, t \in G,$$

donde ${}_t\varphi(x) = \varphi(xt)$, $\forall t, x \in G$.

Decimos que el grupo G es promediable a izquierda (recíprocamente, a derecha) si existe una media invariante a izquierda (derecha) en G. Notar que si m es una media invariante a izquierda, entonces n tal que $n(\varphi) = m(\check{\varphi})$, donde $\check{\varphi}(x) = \varphi(x^{-1})$, es una media invariante a derecha. Por lo tanto, decimos que G es promediable si existe una media invariante en G a uno de los dos lados (y por lo tanto, a los dos lados).

Ejemplos B.2. Si G es un grupo abeliano, compacto o resoluble, entonces G es promediable.

Si G es un grupo promediable, entonces los subgrupos de G son promediables.

Si $n \geq 2$, el grupo libre en n generadores $\mathbb{F}_n$ no es promediable.

Definición B.3. Sea $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que φ es definida positiva si

> $\forall s_1, s_2, \ldots, s_n,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que $s_i \in G$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 1$, se verifica que
> $$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} \varphi(s_i^{-1} s_j) \geq 0.$$

Definición B.4. La representación regular a izquierda de $l^1(G)$ es $\lambda : l^1(G) \rightarrow \mathcal{B}(l^2(G))$ tal que $\lambda(f)(\xi) = f * \xi$. Llamamos C*-álgebra reducida de G a $C^*_r(G) := \overline{\lambda(l^1(G))}$.

Definición B.5. Si A es una $*$-álgebra de Banach, podemos asociarle un par $(C^*(A), \iota)$, con $C^*(A)$ una C*-álgebra y $\iota : A \longrightarrow C^*(A)$ un $*$-homomorfismo que cumple la siguiente propiedad universal:

> Si ϕ es un $*$-homomorfismo de A en una C*-álgebra C, entonces existe un homomorfismo de C*-álgebras $\phi^\dagger : C^*(A) \longrightarrow C$, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota"'] & C \\ C^*(A) \arrow[ur, "\phi^\dagger"'] & \end{tikzcd}$$

El par $(C^*(A), \iota)$, que es único a menos de isomorfismos, se llama C*-álgebra envolvente de A ([**Dix83**, 2.7]). Veamos una manera de obtener la C*-álgebra envolvente de A.

Consideremos la siguiente familia de funciones:

$$H = \{\varphi : A \longrightarrow C \ : \ \varphi \text{ es un } *\text{-homomorfismo, siendo } C \text{ una C}^*\text{-álgebra } \}$$

y la siguiente seminorma: $\|\ \|^\dagger : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $\|a\|^\dagger = \sup\{\|\varphi(a)\| \ : \ \varphi \in H\}$. Notar que $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$, para todo $a \in A$ y para todo $\varphi \in H$, de donde $\|a\|^\dagger < \infty$.

Sea $N = \{a \in A \ : \ \|a\|^\dagger = 0\}$ y sea $\pi : A \longrightarrow \frac{A}{N}$ la proyección canónica. Luego, $C^*(A) = \overline{\pi(A)}^{\|\ \|^\dagger}$ e $\iota = \mathrm{inc} \cdot \pi$, siendo $\mathrm{inc} : \pi(A) \longrightarrow \overline{\pi(A)}^{\|\ \|^\dagger}$ la inclusión.

Si G es un grupo, su C*-álgebra envolvente, que notamos $C^*(G)$, es $C^*(l^1(G))$.

Teorema B.6. *Propiedad de contención débil*
Sea G un grupo. Entonces G es promediable si y sólo si $\lambda^\dagger$ es un isomorfismo.

Proposición B.7. *Si G es promediable, entonces existe una red $\{g_d\}_{d \in D} \subseteq l^2(G)$, con $\|g_d\|_2 \leq M$, $\forall d \in D$, tal que*

$$\lim_{d \in D} \sum_{r \in G} g_d(r) \overline{g_d(rt)} = 1 \quad \forall t \in G.$$

Demostración: Si G es promediable, en la demostración de [**Mar04**, 3.35] probamos la existencia de una red $\{g_d\}_{d \in D}$ de funciones de soporte compacto tales que $\|g_d\|_2 = 1$, $\forall d \in D$, y que verifican que, si $\tilde{g}(t) = \overline{g_d(t^{-1})}$, entonces:

$$\sum_{r \in G} (\bar{g}_d * \tilde{\bar{g}}_d)(r)) f(r) \underset{d}{\longrightarrow} \sum_{r \in G} f(r) \quad \forall f \in l^1(G).$$

En particular, $\bar{g}_d * \tilde{\bar{g}}_d(t) \underset{d}{\longrightarrow} 1$, $\forall t \in G$.

Notar que $\bar{g}_d * \tilde{\bar{g}}_d(t) = \sum_{r\in G} g_d(r)\overline{g_d(rt)}$, y con esto termina la prueba.

PROPOSICIÓN B.8. *Sea* $\mathbf{1} : G \to \mathbb{C}$ *la función constante* 1*. Supongamos que* $\mathbf{1}$ *es el límite uniforme sobre subconjuntos compactos de funciones de la forma* $g*\tilde{g}$*, donde* g *tiene soporte compacto. Entonces* G *es promediable.*

Demostración: Podemos suponer que $(g * \tilde{g})(e) = 1$. Notar que $(g * \tilde{g})(t) \in l^\infty(G)$. Recordar que $l^\infty(G)$ es isométricamente isomorfo a $l^1(G)'$ vía $\varphi \to I_\varphi$, donde $I_\varphi(f) = \sum_{t\in G} f(t)\varphi(t)$. En particular, $I_{g*\tilde{g}}(f) = \langle\lambda(f)(\bar{g}), \bar{g}\rangle$, $\forall f \in l^1(G)$.

Si $\mathbf{1}$ es el límite uniforme sobre subconjuntos compactos de funciones de la forma $g*\tilde{g}$, por el lema [**Mar04**, 3.18], $I_{\mathbf{1}}$ es el límite w^* de funcionales de la forma $I_{g*\tilde{g}}$, que son funcionales asociadas a la representación regular. Entonces, la proposición [**Mar04**, 3.34] nos permite afirmar que $\mathbf{1}$, vista como representación de $C^*(G)$, está débilmente contenida en $\lambda^\dagger$. Por la observación posterior a [**Mar04**, 3.35], concluimos que G es promediable.

Bibliografía

[Aba03] Fernando Abadie, *Enveloping actions and Takai duality for partial actions.*, J. Funct. Anal. **197** (2003), no. 1, 14–67.

[Aba04] ______, *On partial actions and groupoids.*, Proc. Am. Math. Soc. **132** (2004), no. 4, 1037–1047.

[Ach03] Mauricio Achigar, *Equivalencia Morita y C^*-álgebras de traza continua*, Monografía de Licenciatura, Universidad de la República, 2003.

[Dix83] Jacques Dixmier, *C^*-algebras.* , North-Holland Mathematical Library, Vol. 15. Amsterdam etc,: North- Holland (Elsevier). XIII, 492 p. , 1983.

[EN02] Ruy Exel and Chi-Keung Ng, *Approximation property of C^*-algebraic bundles.*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **132** (2002), no. 3, 500–522.

[Exe94] Ruy Exel, *Circle actions on C^*-algebras, partial automorphisms, and a generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence.*, J. Funct. Anal. **122** (1994), no. 2, 361–401.

[Exe97] ______, *Amenability for Fell bundles.*, J. Reine Angew. Math. **492** (1997), 41–73.

[Exe98] ______, *Partial actions of groups and actions of inverse semigroups.*, Proc. Am. Math. Soc. **126** (1998), no. 12, 3481–3494.

[FD88a] J.M.G. Fell and R.S. Doran, *Representations of *-algebras, locally compact groups, and Banach *-algebraic bundles. Vol. 1: Basic representation theory of groups and algebras.*, Pure and Applied Mathematics, 125. Nosten, MA etc.: Academic Press, Inc. xviii, 746 p. , 1988.

[FD88b] ______, *Representations of *-algebras, locally compact groups, and Banach *- algebraic bundles. Vol. 2: Banach *-algebraic bundles, induced representations, and the generalized Mackey analysis.*, Pure and Applied Mathematics, 126. Boston, MA etc.: Academic Press, Inc. viii, p. 747-1486, 1988.

[Mar04] Laura Martí, *Grupos promediables y C^*-álgebras asociadas*, Monografía de Licenciatura, Universidad de la República, 2004.

[McC95] Kevin McClanahan, *K-theory for partial crossed products by discrete groups.*, J. Funct. Anal. **130** (1995), no. 1, 77–117.

[NB85] Lawrence Narici and Edward Beckenstein, *Topological vector spaces.*, Pure and applied mathematics, 95. New York-Basel: Marcel Dekker, Inc. XII, 408 p., 1985.

[Pat88] Alan L.T. Paterson, *Amenability.*, Mathematical Surveys and Monographs, 29. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). xvii, 452 p. , 1988.

[ZM68] G. Zeller-Meier, *Produits croises d'une C^*-algèbre par un groupe d'automorphismes*, J. Math. pures et appl., IX. Sér, **47** (1968), 101–239.