K-teoría para C*-álgebras

Trabajo Monográfico

Autor: **Santiago Perini**

Orientadora: **Eugenia Ellis**

Licenciatura en Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de la República, Uruguay

18 de febrero de 2026

Índice general

Introducción

Durante las décadas de 1920 y 1930, John von Neumann, con el objetivo de formalizar la mecánica cuántica, introdujo lo que él llamó *anillos de operadores*, conocidos hoy en día como *álgebras de von Neumann*. Estas son *-subálgebras compuestas por operadores acotados en espacios de Hilbert y cerradas bajo una topología específica, denominada *topología operador fuerte* (ver [13, Capítulo 4]). Esta topología es más débil que la inducida por la norma operador, lo que implica que toda *-subálgebra cerrada en la topología operador fuerte también es cerrada en la topología norma operador. Por lo tanto, si en vez de las *-subálgebras cerradas por la topología operador fuerte, consideramos aquellas cerradas respecto de la norma operador, obtenemos una versión más general de las anteriores. Estas *-subálgebras cerradas bajo la norma operador se conocen como C^*-álgebras.

La definición abstracta de C^*-álgebra fue propuesta por Gelfand en 1943, y Gelfand junto con Naimark demostraron que toda C^*-álgebra puede representarse como una *-subálgebra cerrada bajo la norma operador en el álgebra de operadores acotados sobre algún espacio de Hilbert. Además, Gelfand y Naimark establecieron que toda C^*-álgebra conmutativa es isomorfa a $C_0(X)$, el álgebra de funciones continuas $X \to \mathbb{C}$ que se anulan en el infinito, para algún espacio topológico localmente compacto Hausdorff. El resultado de Gelfand y Naimark lleva a una correspondencia más profunda, que afirma que la categoría de C*-álgebras conmutativas y la categoría de espacios topológicos localmente compactos Hausdorff, donde los morfismos son las funciones continuas propias, son equivalentes. Esto implica que estudiar C*-álgebras conmutativas es equivalente a estudiar la topología en espacios localmente compactos de Hausdorff, por lo tanto, las C*-álgebras no conmutativas corresponden a la *topología no conmutativa*.

En la década de 1970, las C^*-álgebras experimentaron un resurgimiento impulsado por la incorporación de métodos topológicos, como el trabajo de Brown, Douglas y Fillmore sobre las extensiones de C^*-álgebras, junto con la aplicación de la K-teoría por parte de Elliott para clasificar las AF-álgebras.

La K-teoría es una herramienta utilizada en el ámbito de la topología (véase [2]). Al interpretar las C^*-álgebras como una forma de topología no conmutativa, el objetivo es extender la K-teoría topológica a este contexto no conmutativo.

Para un espacio topológico compacto, Hausdorff y conexo X, el grupo $K^0(X)$ se construye tomando clases de isomorfismo de fibrados vectoriales sobre X y formando su grupo de Grothendieck. Para llevar esta definición topológica al contexto de C^*-álgebras, se debe asociar a cada fibrado vectorial un objeto algebraico de manera que los fibrados isomorfos correspondan a objetos equivalentes. Observemos que los subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^n$ están en correspondencia con las proyecciones de $M_n(\mathbb{C})$. Un fibrado vectorial asocia "continuamente" a cada punto de X un espacio vectorial, pudiendo ser descrito por una proyección continua $p\colon X \to M_n(\mathbb{C})$, es decir, mediante una proyección p en la C^*-álgebra

$$C\Big(X, M_n(\mathbb{C})\Big) \cong M_n(C(X)).$$

Dada una proyección $p \in M_n(C(X))$, se construye el fibrado vectorial

$$E_p = \Big\{(x, v) \in X \times \mathbb{C}^n : v \in p(x)(\mathbb{C}^n)\Big\}.$$

Swan [18] demuestra que cualquier fibrado vectorial sobre X se puede obtener de esta manera, a menos de isomorfismo. Además, se puede probar que dos fibrados E_p y E_q, definidos por proyecciones $q \in M_m(C(X))$ y $p \in M_n(C(X))$, son isomorfos si y solo si existe $v \in M_{m,n}(C(X))$ tal que $p = v^*v$ y $q = vv^*$. En tal caso, utilizamos la notación $p \sim_0 q$.

Con esta traducción del lenguaje de fibrados al contexto algebraico, observamos que considerar clases de isomorfismo de fibrados se traduce en el lenguaje algebraico a analizar proyecciones relacionadas por $\sim_0$. Específicamente, para construir el primer grupo de K-teoría de $C(X)$ como una C^*-álgebra, consideremos

$$P_\infty(C(X)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P\Big(M_n(C(X))\Big),$$

donde $P(M_n(C(X)))$ representa las proyecciones en $M_n(C(X))$. Definimos el semigrupo abeliano

$$D(C(X)) = P_\infty(C(X))/ \sim_0,$$

que es el equivalente algebraico de tomar clases de isomorfismo de fibrados vectoriales. Luego, a través de una construcción similar a la de la K-teoría topológica, transformamos este semigrupo abeliano en un grupo abeliano llamado $K_0(C(X))$. Se puede demostrar que $K_0(C(X))$ y $K^0(X)$ son isomorfos como grupos, indicando que la construcción en el caso de C^*-álgebras conmutativas coincide con la construcción topológica.

Generalizando la K-teoría al ámbito de la topología no conmutativa, definimos K_0 para una C^*-álgebra con unidad de forma similar a como se define $K_0(C(X))$, donde X es un espacio topológico compacto, Hausdorff y conexo. Esto significa que para una C*-álgebra A con unidad, definimos

$$P_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P\Big(M_n(A)\Big),$$

luego $P_\infty(A)$ tiene una operación binaria tal que $D(A) = P_\infty(A)/ \sim_0$ se convierte en un semigrupo abeliano. Similar a $D(C(X))$, aplicamos la construcción de Grothendieck al semigrupo $D(A)$, resultando en un grupo abeliano que llamamos $K_0(A)$.

En la K-teoría topológica, K^0 define un funtor contravariante entre los espacios topológicos localmente compactos Hausdorff y los grupos abelianos. Este funtor es invariante por homotopía, lo que significa que si X e Y son espacios topológicos localmente compactos Hausdorff y homotópicamente equivalentes, entonces $K^0(X) \simeq K^0(Y)$. Esto también se cumple para la K-teoría de C*-álgebras, donde se demuestra que K_0 es un funtor covariante entre las C*-álgebras con unidad y los grupos abelianos, además es invariante por homotopía.

Hasta ahora solo hemos considerado la K-teoría de C^*-álgebras con unidad. No obstante, la misma construcción de K_0 es aplicable a C^*-álgebras sin unidad. El problema con este caso es que el funtor K_0 deja de preservar las sucesiones exactas cortas que escinden. Dicha propiedad no solo facilita el cálculo de ciertos grupos K_0, también resulta esencial para la demostración de los teoremas principales de esta monografía. Por lo tanto, conviene definir K_0 en el caso sin unidad de modo que se garantice la preservación de las sucesiones exactas cortas que escinden.

El cálculo de K_0, aun con las propiedades que se desprenden de su definición, es difícil. En búsqueda de simplificar el cálculo recurriremos a los grupos superiores de K-teoría, denominados K_n con $n \geq 1$. Estos permiten que, dada una sucesión exacta corta de C^*-álgebras, se obtenga una sucesión exacta larga que involucra a los grupos K_n. Aun así, el cálculo de la K-teoría sigue siendo complicado, pero para facilitarlo utilizamos el teorema de periodicidad de Bott. La periodicidad de Bott también se traslada de la K-teoría topológica. El teorema establece que los grupos K_n para n par son isomorfos entre sí, y que los K_n para n impar también lo son entre sí. Por consiguiente, basta considerar únicamente los grupos K_0 y K_1, los demás grupos de K-teoría son isomorfos a uno u otro. Existen varias demostraciones de este teorema en el contexto de C^*-álgebras. La demostración presentada en [15] sigue la idea de la prueba original en K-teoría topológica. En esta monografía seguiremos la demostración dada por Cuntz en [6]. Dicha demostración se basa en un uso inteligente de la denominada álgebra de Toeplitz, la cual se define como la C^*-álgebra generada por un operador acotado $v \in B(H)$ en un espacio de Hilbert de dimensión infinita numerable, tal que $v^*v = 1$ y $1 - vv^*$ es la proyección ortogonal sobre un subespacio de dimensión 1. Cabe destacar que, a diferencia de la prueba dada en [15], que tiene raíces conmutativas al estar motivada por la demostración topológica, la demostración de Cuntz, al basarse en el uso del álgebra de Toeplitz, es de naturaleza no conmutativa. Esto se debe a que el álgebra de Toeplitz es no conmutativa, como se observa en que $v^*v = 1$ y $vv^* \neq 1$.

La periodicidad de Bott, al indicarnos que basta considerar K_1 y K_0, permite cerrar la sucesión exacta larga. Es decir, dada una sucesión exacta corta de C^*-álgebras

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

obtenemos la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd} K_0(I) \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] & K_0(B) \arrow[d] \\ K_1(B) \arrow[u] & K_1(A) \arrow[l] & K_1(I) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

denominada *sucesión exacta de seis términos*.

Hasta ahora solo hemos visto la motivación de la K-teoría y herramientas para su cálculo, pero no hemos mencionado en qué ámbitos se utiliza. Las aplicaciones inmediatas aparecen en la clasificación de C^*-álgebras. Elliott utilizó la K-teoría para clasificar cierto tipo de C^*-álgebras, denominadas AF-álgebras. Es fácil ver que K_0 proporciona un invariante para C^*-álgebras: si A y B son C^*-álgebras isomorfas, entonces $K_0(A) \simeq K_0(B)$. Elliott demostró que, al considerar K_0 con estructura adicional (grupo abeliano ordenado), se obtiene un invariante completo para las AF-álgebras con unidad.

También la K-teoría permite distinguir las denominadas álgebras de rotación irracional. Las álgebras de rotación son isomorfas a un producto cruzado y, utilizando la sucesión de Pimsner–Voiculescu, se puede calcular su K-teoría. Esto no es suficiente para distinguir las álgebras de rotación irracional: para ello es necesario un análisis más fino de la K-teoría (véase [14]).

Sobre la monografía. Esta monografía se basa principalmente en el libro [15], mientras que [19] se empleó como fuente secundaria. La demostración del teorema de periodicidad de Bott es la proporcionada por Cuntz en [6].

La estructura de la monografía es la siguiente.

Capítulo 1. Se presentan los preliminares básicos de la teoría de C^*-álgebras sin demostración, basados en el libro [13]. Se enuncian los principales teoremas sobre C^*-álgebras y, a continuación, se aborda el tratamiento de las C^*-álgebras nucleares.

Capítulo 2. Se comienza con una introducción a los elementos unitarios y a las proyecciones en una C^*-álgebra, tratando teoremas sobre ellos y sus relaciones. Mediante una relación de equivalencia en las proyecciones definimos un semigrupo abeliano que, utilizando la construcción de Grothendieck, se obtiene un grupo abeliano. Esto conduce a la definición de K_0 para C^*-álgebras con unidad, aquí probamos que es un funtor de las C^*-álgebras con unidad a la categoría de grupos abelianos y que es invariante por homotopía, es decir, si dos C^*-álgebras con unidad son homotópicas, sus grupos K_0 son isomorfos.

A continuación pasamos a la definición de K_0 para C^*-álgebras sin unidad. El procedimiento anterior para construir K_0 en el caso sin unidad carece de una propiedad importante, denominada *escinde-exacto*. Por ello daremos una definición alternativa que coincida con la anterior en el caso de C*-álgebras con unidad.

Probamos tres propiedades importantes de K_0:

- K_0 es un funtor que escinde-exacto: toda sucesión exacta corta que escinde de C*-álgebras

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"'] & A \arrow[r, "\psi"'] & B \arrow[l, bend right, "\eta"'] \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

  induce una sucesión exacta corta que escinde de grupos abelianos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(I) \arrow[r, "K_0(\varphi)"'] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\psi)"'] & K_0(B) \arrow[l, bend right, "K_0(\eta)"'] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

- Continuidad: $\varinjlim_n K_0(A_n) \simeq K_0(\varinjlim_n A_n)$ para cualquier límite inductivo de C^*-álgebras $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

- Estabilidad: primero demostramos la denominada *estabilidad matricial*, es decir, $K_0(A) \simeq K_0(M_n(A))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego tratamos la estabilidad mediante operadores compactos: sea $\mathcal{K}$ el álgebra de operadores compactos en un espacio de Hilbert de dimensión infinita numerable, se tiene $K_0(A) \simeq K_0(A \otimes \mathcal{K})$.

Terminamos el capítulo definiendo el grupo K_1 y enunciando algunas de sus propiedades.

Capítulo 3. Presentamos una forma de relacionar los grupos K_0 y K_1 mediante el denominado *morfismo índice*. Luego probaremos que, en cierto caso, este morfismo es un isomorfismo, estableciendo así la relación $K_0(SA) \simeq K_1(A)$, donde $SA \simeq C_0((0,1)) \otimes A$ es la suspensión de A. A continuación definimos los grupos superiores de K-teoría de forma inductiva por $K_n(A) = K_{n-1}(SA)$ para todo $n \geq 2$. Con estos grupos probamos la existencia de una sucesión exacta larga en la que aparecen todos los grupos K_n.

Para finalizar demostramos el teorema principal de la teoría básica de K-teoría para C^*-álgebras, denominado *periodicidad de Bott*, daremos la demostración de Cuntz [6]. Este teorema afirma que $K_{2n}(A) \simeq K_0(A)$ y $K_{2n+1}(A) \simeq K_1(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Una consecuencia inmediata es la sucesión exacta de seis términos asociada a una sucesión exacta corta de C^*-álgebras, que relaciona los grupos K_0 y K_1.

1 Preliminares

En este capítulo presentaremos la teoría básica de las C^*-álgebras, basada principalmente en el libro [13]. Comenzaremos con la definición abstracta de C^*-álgebra y algunos ejemplos fundamentales. Luego veremos que toda C^*-álgebra puede identificarse como una *-subálgebra de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert, y enunciaremos la correspondencia de Gelfand, que relaciona las C^*-álgebras conmutativas con los espacios topológicos localmente compactos de Hausdorff.

Para concluir el capítulo, estudiaremos diversas formas de construir C^*-álgebras, incluyendo el producto de C^*-álgebras, el límite inductivo y el producto tensorial de dos C^*-álgebras.

1.1. C*-álgebras

Definición 1.1.1. *Sea A un álgebra sobre $\mathbb{C}$. Decimos que A es* normada *si está equipada con una norma $\|\cdot\|$ que satisface la propiedad submultiplicativa*

$$\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\| \qquad \textit{para todo } a, b \in A.$$

Si A admite unidad 1 y $\|1\| = 1$, diremos que A es un álgebra normada unital *o que tiene unidad.*

Comentario 1.1.2. En esta monografía consideraremos todas las álgebras como álgebras sobre $\mathbb{C}$. El hecho de que sean álgebras sobre $\mathbb{C}$ se utiliza sin mencionarlo, por ejemplo, en la prueba de [13, Teorema 1.2.1] se emplea que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado. Existe una K-teoría para las C^*-álgebras reales, aunque estas se definen de forma un poco diferente a las complejas, véase [16].

Definición 1.1.3. *Sea A un álgebra. Una* involución *en A es una función*

$$a \longmapsto a^*$$

que verifica, para todo $a, b \in A$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$,

1. $(\lambda a + \beta b)^* = \overline{\lambda}\, a^* + \overline{\beta}\, b^*$,
2. $(a^*)^* = a$,
3. $(ab)^* = b^* a^*$.

En este caso llamamos a A una *-álgebra *(o álgebra con involución).*

Definición 1.1.4. *Consideremos A una *-álgebra normada. Decimos que A es una C^*-álgebra si cumple:*

- $(A, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach.*
- *Se cumple la identidad C^*: $\|a^*a\| = \|a\|^2$ para todo $a \in A$.*

Ejemplo 1.1.5. Dado X un espacio topológico, $C_0(X)$ es el álgebra de funciones continuas $f\colon X \to \mathbb{C}$ tales que, para todo $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K \subseteq X$ con

$$|f(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in X \setminus K.$$

La norma en $C_0(X)$ es la norma supremo. Si X es compacto, entonces $C_0(X) = C(X)$. Con esta norma $C_0(X)$ es una C*-álgebra, donde $(f)^*(x) = \overline{f(x)}$.

Ejemplo 1.1.6. Sea H un espacio de Hilbert. Entonces, el conjunto de los operadores lineales acotados $B(H)$ forma una C^*-álgebra con la norma operador y la involución dada por el adjunto de un operador.

Definición 1.1.7. *Un *-homomorfismo entre dos C^*-álgebras A y B es un morfismo de álgebras $\psi\colon A \to B$ tal que $\psi(a^*) = \psi(a)^*$ para todo $a \in A$. Si A y B tienen unidad y $\psi(1_A) = 1_B$, decimos que ψ preserva la unidad.*

Definición 1.1.8.

- *Sea A una C^*-álgebra. Un subconjunto no vacío $B \subseteq A$ es una* *-subálgebra *si B es una subálgebra de A y $b^* \in B$ para todo $b \in B$.*
- *Una *-subálgebra de A es una* C*-subálgebra *si es cerrada en la topología inducida por la norma de A.*

Sea A una C^*-álgebra y $F \subseteq A$ un subconjunto. La C*-subálgebra de A generada por F, denotada $C^*(F)$, es la menor C*-subálgebra de A que contiene a F. Para describirla, definimos para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$W_n = \{x_1 \cdots x_n : \ x_j \in F \cup F^*, \ 1 \leq j \leq n\},$$

donde $F^* = \{x^* : x \in F\}$, y sea $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$. Entonces

$$C^*(F) = \overline{\operatorname{span}(W)},$$

siendo la barra la clausura respecto de la norma de A.

Ideales y cocientes

Un ideal en una C^*-álgebra es un ideal bilátero, cerrado y con estructura de subespacio vectorial. Todo ideal de una C^*-álgebra es, automáticamente, una C^*-subálgebra [13, Teorema 3.1.3].

Sea I un ideal de A. Entonces, el cociente

$$A/I = \{a + I : a \in A\}$$

es una C^*-álgebra con la norma dada por

$$\|a + I\| = \text{ínf}\{\|a + x\| : x \in I\}, \quad a \in A,$$

esto se demuestra en [13, Teorema 3.1.4]. Además, el morfismo cociente $\pi\colon A \to A/I$ es un *-homomorfismo.

Teorema 1.1.9 (Gelfand-Naimark)**.** *Para toda C^*-álgebra A existe un espacio de Hilbert H y un *-homomorfismo isométrico*

$$\psi\colon A \to B(H),$$

donde $B(H)$ denota el álgebra de operadores lineales acotados en H. Si A es separable, entonces H puede elegirse separable.

Demostración. [13, Teorema 3.4.1]. □

Teorema 1.1.10 (Gelfand)**.** *Toda C^*-álgebra abeliana es *-isomorfa a una C^*-álgebra de la forma $C_0(X)$, donde X es un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff.*

Demostración. [13, Teorema 2.1.10]. □

Enunciaremos algunos detalles adicionales sobre el teorema de Gelfand. Sean X y Y espacios topológicos localmente compactos de Hausdorff, se cumplen lo siguientes puntos:

- $C_0(X)$ tiene unidad si y solo si X es compacto.
- $C_0(X)$ es separable si y solo si X es separable.
- X y Y son homeomorfos si y solo si $C_0(X)$ y $C_0(Y)$ son isomorfas como C*-álgebras.
- Toda función continua propia $g\colon Y \to X$ induce un *-homomorfismo $\psi\colon C_0(X) \to C_0(Y)$ definido por $\psi(f) = f \circ g$. Recíprocamente, para todo *-homomorfismo $\psi\colon C_0(X) \to C_0(Y)$ existe una función continua propia $\hat{\psi}\colon Y \to X$ tal que $\psi(f) = f \circ \hat{\psi}$.
- Existe una correspondencia biyectiva entre los abiertos de X y los ideales de $C_0(X)$. Al abierto $U \subseteq X$ le corresponde el ideal

  $$\{f \in C_0(X) : f(x) = 0 \text{ para todo } x \in X \setminus U\},$$

  el cual es isomorfo a la C^*-álgebra $C_0(U)$.

Comentario 1.1.11. Con todos estos puntos podemos notar que, a grandes rasgos, el estudio de la C^*-álgebra $C_0(X)$ corresponde al estudio de la topología del espacio X. Además, por el teorema de Gelfand, toda C^*-álgebra conmutativa es de esta forma, por ende, el estudio de las C^*-álgebras conmutativas puede interpretarse como el estudio de espacios topológicos localmente compactos y Hausdorff. Bajo esta interpretación, suele decirse que el estudio de las C^*-álgebras no conmutativas constituye el estudio de la *topología no conmutativa.*

1.2. Sucesiones exactas cortas

Dada una sucesión $\{A_n, \psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, en donde cada A_n es una C^*-álgebra y $\psi_n\colon A_n \to A_{n+1}$ es un *-homomorfismo,

$$\ldots \longrightarrow A_n \xrightarrow{\psi_n} A_{n+1} \xrightarrow{\psi_{n+1}} A_{n+2} \longrightarrow \ldots$$

decimos que la sucesión es *exacta* si $Im(\psi_n) = \ker(\psi_{n+1})$ para todo n.

Una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

se denomina *sucesión exacta corta.*

Ejemplo 1.2.1. Sea A una C*-álgebra y I un ideal de la misma, entonces

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta, donde i es la inclusión y π el *-homomorfismo cociente.

Por otro lado, si consideramos una sucesión exacta corta como en (1.1), entonces $\psi(I)$ es un ideal en A, con $Im(\phi) = B$ y $Im(\psi) = ker(\phi)$. Por lo tanto, B es isomorfo a $A/Im(\psi)$, y de aquí resulta el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\cong"', "\psi"] & A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \psi(I) \arrow[r, hook] & A \arrow[r] & A/\psi(I) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Definición 1.2.2. *Si en (1.1) existe un *-homomorfismo $\lambda : B \to A$ tal que $\phi \circ \lambda = Id_B$, entonces λ se llama levantado de ϕ y decimos que (1.1) escinde.*

Ejemplo 1.2.3. Sean A y B dos C^*-álgebras. Definimos la C^*-álgebra $A \oplus B$ como el conjunto de pares (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$. Equipado con las operaciones coordenada a coordenada, forma una *-álgebra. La dotamos de la norma

$$\|(a, b)\| = \text{máx}\{\|a\|, \|b\|\}.$$

Consideremos los siguientes *-homomorfismos:

$$\pi_A \colon A \oplus B \to A,\ (a, b) \mapsto a, \qquad \pi_B \colon A \oplus B \to B,\ (a, b) \mapsto b,$$

y

$$i_A \colon A \to A \oplus B,\ a \mapsto (a, 0), \qquad i_B \colon B \to A \oplus B,\ b \mapsto (0, b).$$

Entonces se obtiene la siguiente sucesión exacta corta que escinde:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_A"'] & A \oplus B \arrow[r, "\pi_B"'] & B \arrow[l, bend right, "i_B"'] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

1.3. Unitización

A toda C^*-álgebra A se le puede asociar una C^*-álgebra con unidad $\widetilde{A}$ que contiene a A como un ideal y que cumple la propiedad de que $\widetilde{A}/A \cong \mathbb{C}$.

Definimos $\widetilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ como espacio vectorial. Luego, definimos el producto en $\widetilde{A}$ dado por

$$(a, \lambda)(b, \alpha) = (ab + \alpha a + \lambda b, \lambda\alpha).$$

Entonces $(0, 1)$ es la unidad de $\widetilde{A}$. El *-homomorfismo

$$A \to \widetilde{A}, \quad a \mapsto (a, 0)$$

es inyectivo, y lo utilizamos para identificar A con un ideal en $\widetilde{A}$. Además, el *-homomorfismo

$$\pi : \widetilde{A} \to \mathbb{C}, \quad (a, \lambda) \mapsto \lambda$$

preserva la unidad y su núcleo es A. Definimos una involución en $\widetilde{A}$ dada por $(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$. En [13, Teorema 2.1.6] se prueba que $\widetilde{A}$ admite una única norma tal que $\widetilde{A}$ es una C*-álgebra y que dicha norma extiende la de A. También tenemos la siguiente sucesión exacta de C*-álgebras que escinde:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"'] & \widetilde{A} \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[l, bend right, "\lambda"'] & 0
\end{tikzcd}
$$

donde $\lambda(\alpha) = \alpha 1_{\widetilde{A}} = (0, \alpha)$.

La C*-álgebra $\widetilde{A}$ se denomina la *unitización* de A, o A con la unidad agregada. También para los elementos $(a, \alpha) \in \widetilde{A}$ se utiliza la notación $a + \alpha$.

Agregar la unidad es funtorial: si $\psi : A \to B$ es un *-homomorfismo entre C*-álgebras, entonces existe un único *-homomorfismo $\widetilde{\psi} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$ tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \widetilde{A} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\psi}"] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & \widetilde{B} \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo.

El *-homomorfismo está dado por

$$\widetilde{\psi}(a + \alpha 1_{\widetilde{A}}) = \psi(a) + \alpha 1_{\widetilde{B}},$$

donde $a \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si A tiene unidad 1_A y $1_{\widetilde{A}}$ es la unidad de $\widetilde{A}$, entonces $f = 1_{\widetilde{A}} - 1_A$ es una proyección en $\widetilde{A}$, y se cumple

$$\widetilde{A} = \{a + \alpha f : a \in A,\ \alpha \in \mathbb{C}\} = A + \mathbb{C}f.$$

Notar que, en este caso, $\widetilde{A}$ se identifica con $A \oplus \mathbb{C}$, siendo esta última la C^*-álgebra como en el ejemplo 1.2.3. El *-isomorfismo entre $\widetilde{A}$ y $A \oplus \mathbb{C}$ está dado por

$$(a, \alpha) \mapsto (a + 1_A, \alpha).$$

1.4. Teoría espectral

Sea A una C^*-álgebra con unidad y $a \in A$. El *espectro* de a es el conjunto de los números complejos λ tales que $a - \lambda 1$ no es invertible, y se denota por $\mathrm{sp}(a)$

$$\mathrm{sp}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \text{ no es invertible}\}.$$

El *radio espectral* de a es

$$r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{sp}(a)\}.$$

El espectro $\mathrm{sp}(a)$ es cerrado en $\mathbb{C}$, y el radio espectral satisface $r(a) \leq \|a\|$ [13, Lema 1.2.4]. Mediante el teorema de Beurling [13, Teorema 1.2.7] se establece que

$$r(a) = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Si A no tiene unidad, definimos $\mathrm{sp}(a)$ como el espectro de a considerándolo en $\widetilde{A}$. En este caso, se cumple que $0 \notin \mathrm{sp}(a)$ para todo $a \in A$ [1].

Un elemento $a \in A$ se llama:

- *autoadjunto* si $a = a^*$,
- *normal* si $a^*a = aa^*$,
- *positivo* si a es autoadjunto y $\mathrm{sp}(a) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

El conjunto de elementos positivos de una C*-álgebra A es denominado A^+. Se puede probar que un elemento a es positivo si solo si $a = x^*x$ para un $x \in A$ [13, Teorema 2.2.5].

1.5. Estados

Una función lineal $\rho : A \to \mathbb{C}$ se denomina funcional lineal. Consideremos

$$||\rho|| = sup\{|\rho(a)| : a \in A, ||a|| \leq 1\}$$

como la norma del operador. Un funcional lineal ρ es continuo si y solo si $||\rho|| < \infty$.

Definición 1.5.1. *Sea ρ un funcional lineal en una C*-álgebra A.*

- *Si $\rho(a) \geq 0$ para cada $a \in A$ que sea positivo, entonces decimos que ρ es positivo.*
- *Un estado en una C*-álgebra con unidad A se define como un funcional lineal positivo ρ tal que $\rho(1) = 1$, o de manera equivalente, que $||\rho|| = 1$.*

En una C-álgebra, el conjunto de estados tiene la propiedad de separar puntos, lo que significa que si a es un elemento de A tal que $\rho(a) = 0$ para cada estado ρ en A, entonces a debe ser igual a cero* [13, Teorema 5.1.11].

Comentario 1.5.2. El término estado se originó a partir de la formulación de la mecánica cuántica utilizando C*-álgebras. En este esquema, los observables se consideran como elementos autoadjuntos dentro de una C*-álgebra, y los estados del sistema corresponden a los estados de la C*-álgebra. Los detalles completos se pueden consultar en [10].

1.6. El cálculo funcional continuo

Teorema 1.6.1 (Cálculo funcional continuo)**.** *Consideremos A una C^*-álgebra con unidad. Para cada elemento normal $a \in A$ existe un único *-isomorfismo*

$$C(\mathrm{sp}(a)) \to C^*(a, 1) \subseteq A, \quad f \mapsto f(a),$$

tal que envía la inclusión $i : \mathrm{sp}(a) \to \mathbb{C}$ en a

[1] Por definición del espectro, $0 \in \mathrm{sp}(a)$ si y solo si a es invertible en $\widetilde{A}$. Sin embargo, ningún elemento de A es invertible en $\widetilde{A}$.

Demostración. [13, Teorema 2.1.13]. □

Teorema 1.6.2 (Morfismo espectral)**.** *Consideremos A una C^*-álgebra con unidad. Para cada elemento normal $a \in A$, tenemos:*

$$\mathrm{sp}(f(a)) = f(\mathrm{sp}(a)),$$

para toda función continua f en $C(\mathrm{sp}(a))$.

Demostración. [13, Teorema 2.1.14]. □

Comentario 1.6.3. Sea $\varphi : A \to B$ un *-homomorfismo que preserva la unidad entre las C^*-álgebras A y B. Si $a \in A$ es un elemento normal, entonces

$$\mathrm{sp}(\varphi(a)) \subseteq \mathrm{sp}(a),$$

y además

$$f(\varphi(a)) = \varphi(f(a)) \quad \text{para todo } f \in C(\mathrm{sp}(a)).$$

Comentario 1.6.4. Para todo elemento normal a en una C^*-álgebra A sin unidad, $f(a)$ está definido como un elemento de la unitización $\widetilde{A}$. Si además $f(0) = 0$, entonces $f(a) \in A$. En este caso, sea $\pi \colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$ la proyección canónica $\pi(a, \alpha) = \alpha$. Por lo anterior,

$$\pi(f(a)) = f(\pi(a)) = f(0) = 0,$$

y por tanto $\pi(f(a)) = 0$, lo que implica que $f(a) \in \ker \pi = A$.

Lema 1.6.5. *Sea K un compacto no vacío de $\mathbb{R}$, y $f : K \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces dada A una C*-álgebra con unidad, definimos Ω_K como el conjunto de elementos autoadjuntos en A con espectro contenido en K. La función*

$$f : \Omega_K \to A,\ a \to f(a)$$

es continua.

Demostración. La función $A \to A$ definida por $a \mapsto a^n$ es continua para todo entero $n \geq 0$, ya que la multiplicación en A es continua. Por lo tanto, todo polinomio complejo f induce una función continua $A \to A$ dada por $a \mapsto f(a)$.

Fijemos $f : K \to \mathbb{C}$ una función continua, $a \in \Omega_K$ y $\epsilon > 0$. Utilizando el teorema de Stone-Weierstrass, existe un polinomio complejo g tal que

$$|f(z) - g(z)| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{para todo } z \in K.$$

Como sabemos que evaluar un polinomio en elementos de A induce una función continua en A, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\|g(a) - g(b)\| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{si } \|a - b\| < \delta.$$

El isomorfismo dado por el cálculo funcional también es una isometría, por lo que se cumple

$$\|(f - g)(c)\| = \sup\{|(f - g)(z)| : z \in \mathrm{sp}(c)\} \leq \frac{\epsilon}{3}$$

para todo $c \in \Omega_K$. Concluimos así que

$$\|f(a) - f(b)\| \leq \epsilon \quad \text{para todo } b \in \Omega_K \text{ con } \|a - b\| < \delta.$$

□

1.7. Álgebras de matrices

Sea A una C^*-álgebra. Para cada natural n, sea $M_n(A)$ el conjunto de matrices $n \times n$ con entradas en A:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

donde $a_{i,j} \in A$. Equipamos $M_n(A)$ con la estructura de espacio vectorial y el producto de matrices. Además, definimos la siguiente involución:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_{1,1}^* & a_{2,1}^* & \dots & a_{n,1}^* \\ a_{1,2}^* & a_{2,2}^* & \dots & a_{n,2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n}^* & a_{2,n}^* & \dots & a_{n,n}^* \end{pmatrix}.$$

Para definir una C^*-norma en $M_n(A)$, elegimos un espacio de Hilbert H y un *-homomorfismo inyectivo $\varphi : A \to B(H)$. Sea $\varphi_n : M_n(A) \to B(H^n)$ dado por

$$\varphi_n \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(a_{1,1})\xi_1 + \dots + \varphi(a_{1,n})\xi_n \\ \vdots \\ \varphi(a_{n,1})\xi_1 + \dots + \varphi(a_{n,n})\xi_n \end{pmatrix},$$

con $\xi_j \in H$.

Definimos una norma en $M_n(A)$ dada por $\|a\| = \|\varphi_n(a)\|$ para $a \in M_n(A)$. Con estas operaciones, $M_n(A)$ es una C^*-álgebra.

Comentario 1.7.1. En [13, Corolario 2.1.2] se establece que, a lo sumo, existe una única norma en una *-álgebra que la convierta en una C^*-álgebra. Por lo tanto, no nos preocupa qué *-homomorfismo φ se elija, ya que todos inducen la misma C^*-norma.

También se cumple la siguiente desigualdad:

$$\max_{i,j}\{||a_{i,j}||\} \leq \left\| \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \right\| \leq \sum_{i,j} ||a_{i,j}||. \tag{1.2}$$

Esto muestra por ejemplo que una función $f : X \to M_n(A)$ es continua si solo si cada función de entrada $f_{i,j} : X \to A$ es continua.

Comentario 1.7.2. Usaremos la notación $diag(a_1, \dots, a_n)$ para referirnos a la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Las álgebras de matrices son funtoriales: si A y B son C^*-álgebras y $\varphi : A \to B$ es un *-homomorfismo, entonces el morfismo

$$\varphi_n : M_n(A) \to M_n(B)$$

dado por

$$\varphi_n \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(a_{1,1}) & \varphi(a_{1,2}) & \dots & \varphi(a_{1,n}) \\ \varphi(a_{2,1}) & \varphi(a_{2,2}) & \dots & \varphi(a_{2,n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(a_{n,1}) & \varphi(a_{n,2}) & \dots & \varphi(a_{n,n}) \end{pmatrix}$$

es un *-homomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.8. Productos y sumas de C*-álgebras

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de C^*-álgebras. A esa familia le asociamos dos C^*-álgebras: el producto $\prod\limits_{i\in I} A_i$ y la suma $\sum_{i\in I} A_i$. Definimos

$$\prod_{i\in I} A_i$$

como el conjunto de funciones $a\colon I \to \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ tales que $a(i) \in A_i$ para todo $i \in I$ y que satisfacen

$$\|a\| = \sup\{\|a(i)\|_{A_i} : \ i \in I\} < \infty.$$

Omitiremos el subíndice A_i y escribiremos simplemente $\|a(i)\|$ para la norma de $a(i)$ en A_i. También utilizaremos la notación $(a_i)_{i\in I}$ (o (a_i)) para el elemento $a \in \prod\limits_{i\in I} A_i$ tal que $a(i) = a_i$ para todo $i \in I$.

Equipamos $\prod\limits_{i\in I} A_i$ con la estructura de *-álgebra definida coordenada a coordenada.

Proposición 1.8.1. *El producto* $\prod\limits_{i\in I} A_i$ *es una C*-álgebra.*

Demostración. Sean $(a_i)_{i\in I},\ (b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$. Observamos que $\|a_i\| \leq \|a\|$ para todo $i \in I$. Luego,

$$\|(a+b)_i\| = \|a_i + b_i\| \leq \|a_i\| + \|b_i\| \leq \|a\| + \|b\|$$

para todo $i \in I$; por tanto $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

Como $\|(a^*a)_i\| = \|a_i\|^2$ para todo $i \in I$, se sigue que $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

Sea $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\prod\limits_{i\in I} A_i$. Entonces, para cada $i \in I$, la sucesión $\{a_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en A_i y, por tanto, converge a un elemento $a_i \in A_i$. Definimos $a = (a_i)_{i\in I}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{a^n\}$ es de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|a^n - a^m\| \leq \varepsilon$ siempre que $m, n \geq n_0$. Entonces, para todo $n \geq n_0$ y todo $i \in I$,

$$\|a_i^n - a_i\| = \lim_{m\to\infty} \|a_i^n - a_i^m\| \leq \varepsilon.$$

De aquí se obtiene

$$\|a_i\| \leq \|a_i^{n_0}\| + \varepsilon \leq \|a^{n_0}\| + \varepsilon$$

para todo $i \in I$. Por tanto $\sup_i \|a_i\| \leq \|a^{n_0}\| + \varepsilon < \infty$, lo que muestra que $a \in \prod_{i\in I} A_i$.

Además, de la desigualdad anterior se deduce que $\|a^n - a\| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, es decir, $a^n \to a$. Concluimos que $\prod_{i\in I} A_i$ es completo. $\square$

Definición 1.8.2. *Definimos* $\sum\limits_{i\in I} A_i$ *como la clausura del subconjunto*

$$\mathfrak{I} = \{a \in \prod_{i\in I} A_i : a(i) \neq 0 \text{ solo para una cantidad finita de elementos } i \in I.\}$$

Proposición 1.8.3. *El conjunto* $\mathfrak{I}$ *es un ideal bilátero en* $\prod\limits_{i\in I} A_i$*, por lo tanto* $\sum\limits_{i\in I} A_i$ *es un ideal bilátero y cerrado en* $\prod\limits_{i\in I} A_i$*. En particular, es una* C^**-subálgebra.*

Denominamos π al morfismo cociente $\prod\limits_{i\in I} A_i \to \prod\limits_{i\in I} A_i \Big/ \sum\limits_{i\in I} A_i$.

Lema 1.8.4. *Sea* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de* C^**-álgebras, y sea* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un elemento de* $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$*. Entonces*

$$\|\pi(a)\| = \limsup_{n\to\infty} \|a_n\|.$$

En particular, $a \in \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *si y sólo si* $\lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0$.

Demostración. Como $\mathfrak{I}$ es denso en $\sum A_n$, tenemos $\|\pi(a)\| = \inf\{\|a-b\| : b \in \mathcal{I}\}$. Cada $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}$ tiene la propiedad de que, eventualmente, $b_n = 0$. Luego,

$$\|a - b\| \geq \limsup_{n\to\infty} \|a_n - b_n\| = \limsup_{n\to\infty} \|a_n\|.$$

Concluyendo así $\|\pi(a)\| \geq \limsup_{n\to\infty} \|a_n\|$.

Para todo $k \in \mathbb{N}$ definimos $b^k = (b_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ un elemento en $\mathfrak{I}$ dado por:

$$b_n^k = \begin{cases} a_n, & n \leq k \\ 0, & n > k \end{cases}$$

Entonces

$$\|\pi(a)\| \leq \mathop{inf}_{k\in\mathbb{N}} \|a - b^k\| = \inf_{k\in\mathbb{N}} \mathop{sup}_{n>k} \|a_n\| = \limsup_{n\to\infty} \|a_n\|.$$

□

1.9. Límite inductivo de C*-álgebras

Límites inductivos

Definición 1.9.1. *Una sucesión inductiva dentro de una categoría* $\boldsymbol{C}$ *es una sucesión de objetos* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $\boldsymbol{C}$*, acompañada por una sucesión de morfismos en* $\boldsymbol{C}$*,* $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$*, que se representa como*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

Para $m > n$, consideramos los morfismos

$$\varphi_{m,n} = \varphi_{m-1} \circ \varphi_{m-2} \circ \cdots \circ \varphi_n : A_n \to A_m,$$

junto con los morfismos φ_n que se denominan **morfismos de conexión**. En ciertas ocasiones, es útil considerar los morfismos de conexión $\varphi_{m,n}$ con $m \leq n$. Estos se definen como $\varphi_{n,n} = Id_{A_n}$ y $\varphi_{m,n} = 0$ cuando $m < n$ (el último caso está definido en categorías que tienen un objeto cero).

Definición 1.9.2 (Límites inductivos)**.** *Un límite inductivo de una sucesión inductiva*

$$\{A_1\} \xrightarrow{\varphi_1} \{A_2\} \xrightarrow{\varphi_2} \{A_3\} \xrightarrow{\varphi_3} \dots \tag{1.3}$$

en la categoría $\boldsymbol{C}$ *es un sistema* $(A, \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}})$*, donde* A *es un objeto de* $\boldsymbol{C}$ *y* $\mu_n : A_n \to A$ *son morfismos en* $\boldsymbol{C}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*, que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *El diagrama*

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\mu_n"'] & & A_{n+1} \arrow[dl, "\mu_{n+1}"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

   conmuta para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. *Si tenemos el sistema* $(B, \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}})$*, donde* B *es un objeto en* $\boldsymbol{C}$ *y* $\lambda_n : A_n \to B$ *son morfismos en* $\boldsymbol{C}$ *que cumplen* $\lambda_n = \lambda_{n+1} \circ \varphi_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*, entonces existe un único morfismo* $\lambda : A \to B$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & A_n \arrow[dl, "\mu_n"'] \arrow[dr, "\lambda_n"] & \\ A \arrow[rr, "\lambda"'] & & B \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

   conmuta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Comentario 1.9.3. Cuando los límites inductivos existen, son únicos en el sentido de que, si $(A, \{\mu_n\})$ y $(B, \{\lambda_n\})$ son ambos límites inductivos de la sucesión (1.3), entonces existe un único isomorfismo λ: $A \to B$ tal que el diagrama (1.5) conmuta.

Como, a menos de isomorfismo, los límites inductivos son únicos (cuando existen), nos referiremos a *el* límite inductivo. El límite inductivo de (1.3) lo denominamos $\varinjlim(A_n, \varphi_n)$ o $\varinjlim A_n$. También escribiremos:

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots \longrightarrow A$$

para indicar que A es el límite inductivo de la sucesión (1.3).

Proposición 1.9.4 (Límites inductivos de C*-álgebras)**.** *Toda sucesión inductiva de C*-álgebras*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

tiene un límite inductivo $(A, \{\mu_n\})$*. Además, se cumple:*

1. $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n)}$,
2. $||\mu_n(a)|| = \lim_{m\to\infty} ||\varphi_{m,n}(a)||$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $a \in A_n$,

3. $Ker(\mu_n) = \{a \in A_n : \lim_{m\to\infty} ||\varphi_{m,n}(a)|| = 0\}$,

4. Si $(B, \{\lambda_n\})$ *y* $\lambda : A \to B$ *son como en 2. de la definición 1.9.2, entonces*

a*)* $Ker(\mu_n) \subseteq Ker(\lambda_n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

b*)* λ *es inyectiva si solo si* $Ker(\lambda_n) \subseteq Ker(\mu_n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

c*)* λ *es sobreyectiva si solo si* $B = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A_n)}$.

Demostración. Comenzaremos demostrando que la condición 1. de la definición 1.9.2 se verifica. La demostración de que la condición 2. de la definición 1.9.2 también se cumple se incluirá en la prueba de la parte 4-a. de la proposición. Sea

$$\pi : \prod_{n=1}^{\infty} A_n \to \prod_{n=1}^{\infty} A_n \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

el morfismo cociente y $\varphi_{m,n} : A_n \to A_m$ los morfismos de conexión dados por la sucesión inductiva de C^*-álgebras. Para cada $a \in A_n$ definimos $v_n(a) = (\varphi_{m,n}(a))_{m\in\mathbb{N}}$ y $\mu_n = \pi \circ v_n$. Entonces

$$v_n : A_n \to \prod_{k=1}^{\infty} A_k, \qquad \mu_n : A_n \to \prod_{k=1}^{\infty} A_k \Big/ \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

son *-homomorfismos. Dado $a \in A_n$ tenemos

$$v_n(a) - (v_{n+1} \circ \varphi_n)(a) = (\varphi_{m,n}(a))_{m\in\mathbb{N}} - (\varphi_{m,n+1}(\varphi_n(a)))_{m\in\mathbb{N}}.$$

Cuando $m < n$ observamos que $\varphi_{m,n}(a) - \varphi_{m,n+1}(\varphi_n(a)) = 0$, ya que $\varphi_{m,n} = \varphi_{m,n+1} = 0$. Si $m > n$ entonces

$$\varphi_{m,n+1} \circ \varphi_n = \varphi_m \circ \cdots \circ \varphi_{n+1} \circ \varphi_n = \varphi_{m,n},$$

concluyendo así $\varphi_{m,n}(a) - \varphi_{m,n+1}(\varphi_n(a)) = 0$. Por último, si $m = n$, de la definición $\varphi_{n,n+1} = 0$ y $\varphi_{n,n} = \mathrm{Id}_{A_n}$, entonces $\varphi_{m,n}(a) - \varphi_{m,n+1}(\varphi_n(a)) = a$. Resumiendo, $v_n(a) - (v_{n+1} \circ \varphi_n)(a)$ es igual a la sucesión $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$, donde $c_n = a$ y $c_m = 0$ si $m \neq n$. Dicha sucesión pertenece a $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, por ende

$$\mu_n(a) - (\mu_{n+1} \circ \varphi_n)(a) = \pi\Big(v_n(a) - (v_{n+1} \circ \varphi_n)(a)\Big) = 0,$$

concluyendo así $\mu_n = \mu_{n+1} \circ \varphi_n$. De esto último obtenemos que $\{\mu_n(A_k)\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de C^*-álgebras. Entonces

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \mu_k(A_n)}$$

es una C^*-álgebra, y cada μ_n es un *-homomorfismo desde A_n a $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \mu_k(A_k)}$. El sistema $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple la condición (1) de la definición 1.9.2.

Probemos (2) de la proposición. Sea $a \in A_n$, entonces $\mu_n(a) = \pi(v_n(a))$, donde $v_n(a)$ es la sucesión $(\varphi_{m,n}(a))_{m\in\mathbb{N}}$. Utilizando el lema 1.8.4 obtenemos

$$\|\mu_n(a)\| = \|\pi(v_n(a))\| = \limsup_{m\to\infty} \|\varphi_{m,n}(a)\| = \lim_{m\to\infty} \|\varphi_{m,n}(a)\|,$$

este último límite existe ya que, a partir de cierto índice, la sucesión $\{\|\varphi_{m,n}(a)\|\}_{m\in\mathbb{N}}$ se vuelve monótonamente decreciente, debido a que los *-homomorfismos son contracciones. El punto 3. se obtiene del punto 2.

Probaremos 4-a. junto con que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n)}$ cumple la condición 2. de la definición 1.9.2. Si $(B, \{\lambda_n\})$ es un sistema como en 2. de la definición 1.9.2, entonces $\lambda_m \circ \varphi_{m,n} = \lambda_n$ para cada $m > n$, por lo tanto $\|\lambda_n(a)\| \leq \|\varphi_{m,n}(a)\|$. Luego

$$\|\lambda_n(a)\| \leq \limsup_{m \to \infty} \|\varphi_{m,n}(a)\| = \|\mu_n(a)\|.$$

Obteniendo así $\ker(\mu_n) \subseteq \ker(\lambda_n)$.

Definimos $\lambda'_n \colon \mu_n(A_n) \to B$ por

$$\lambda'_n(\mu_n(a)) = \lambda_n(a).$$

Esto está bien definido, ya que si $\mu_n(a) = \mu_n(b)$ tenemos $a - b \in \ker(\mu_n) \subseteq \ker(\lambda_n)$. Nótese además que es el único *-homomorfismo tal que $\lambda'_n \circ \mu_n = \lambda_n$. Por su unicidad, λ'_{n+1} necesariamente extiende a λ'_n. De este modo obtenemos un *-homomorfismo

$$\lambda' \colon \bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n) \to B$$

que extiende cada λ'_n. El morfismo λ' es una contracción (tiene norma ≤ 1) ya que cada λ'_n lo es. Luego λ' es uniformemente continua y podemos extenderlo por continuidad a un *-homomorfismo $\lambda \colon A \to B$. La restricción de λ a $\mu_n(A_n)$ es λ'_n, de aquí sigue $\lambda \circ \mu_n = \lambda'_n \circ \mu_n = \lambda_n$. La unicidad de λ con respecto a esta propiedad se sigue de la densidad de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n)$ en A.

(4-b). El *-homomorfismo λ es inyectivo si y sólo si es una isometría, y esto ocurre si y sólo si λ' también lo es, a su vez, esto se verifica si y sólo si λ'_n es una isometría para todo n, o, equivalentemente, si cada λ'_n es inyectiva. Pero λ'_n es inyectiva si y sólo si $\ker(\lambda_n) = \ker(\mu_n)$.

(4-c). Se sigue de que la imagen de λ es $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A_n)}$. □

Proposición 1.9.5. *Toda sucesión inductiva de grupos abelianos*

$$G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_2 \xrightarrow{\alpha_2} G_3 \xrightarrow{\alpha_3} \ldots$$

tiene límite inductivo $(G, \{\beta_n\})$. *También se cumplen:*

1. $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \beta_n(G_n)$.

2. $\ker(\beta_n) = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \ker(\alpha_{m,n})$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

3. *Si* $(H, \{\gamma_n\})$ *y* $\gamma \colon G \to H$ *son como en 2. de la definición 1.9.2, entonces*

   a) γ *es inyectiva si y sólo si* $\ker(\gamma_n) = \ker(\beta_n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

   b) γ *es sobreyectiva si y sólo si* $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n(G_n)$.

Demostración. Consideremos el grupo $\prod_{n=1}^{\infty} G_n$ con el producto coordenada a coordenada. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} G_n$ el subgrupo de $\prod_{n=1}^{\infty} G_n$ formado por las sucesiones que son no nulas sólo en un número finito de índices. Sea $\beta_n\colon G_n \to \prod_{m=1}^{\infty} G_m \Big/ \sum_{m=1}^{\infty} G_m$ el homomorfismo dado por la composición

$$G_n \longrightarrow \prod_{m=1}^{\infty} G_m, \quad a \mapsto (\alpha_{m,n}(a))_{m=1}^{\infty},$$

seguida del homomorfismo cociente. Definimos $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \beta_n(G_n)$. De forma análoga a la proposición anterior, se verifica que $\beta_{n+1} \circ \alpha_n = \beta_n$.

Veamos (2). Si $a \in \ker(\alpha_{m,n})$ con $m > n$, entonces

$$0 = \beta_m(\alpha_{m,n}(a)) = \beta_n(a),$$

por lo que $\ker(\alpha_{m,n}) \subseteq \ker(\beta_n)$. Recíprocamente, si $a \in \ker(\beta_n)$ entonces la sucesión $(\alpha_{m,n}(a))_{m=1}^{\infty}$ pertenece a $\sum_{m=1}^{\infty} G_m$, de donde sigue que existe $m > n$ tal que $\alpha_{m,n}(a) = 0$. Esto demuestra la igualdad.

Para probar que $(G, \{\beta_n\})$ es el límite inductivo de la sucesión, verifiquemos la propiedad universal (2) de la definición 1.9.2. Si $(H, \{\gamma_n\})$ es un sistema como en la definición, entonces $\gamma_m \circ \alpha_{m,n} = \gamma_n$ para cada $m > n$, de esto se obtiene

$$\ker(\beta_n) = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \ker(\alpha_{m,n}) \subseteq \ker(\gamma_n).$$

Definimos $\gamma_n'\colon \beta_n(G_n) \to H$ por $\gamma_n'(\beta_n(g)) = \gamma_n(g)$. Esto está bien definido porque $\ker(\beta_n) \subseteq \ker(\gamma_n)$, y satisface $\gamma_n' \circ \beta_n = \gamma_n$. Observando que γ_m' y γ_n' coinciden en $\mathrm{Im}(\beta_n)$ cuando $m > n$, podemos unir estos morfismos y obtener un homomorfismo

$$\gamma'\colon \bigcup_{n=1}^{\infty} \beta_n(G_n) \to H$$

que extiende cada γ_n'. Por la unicidad en cada etapa y que $\bigcup_n \beta_n(G_n){=}G$, γ' determina de forma única un homomorfismo $\gamma\colon G \to H$ con la propiedad requerida.

Las partes (a) y (b) de (3) se obtienen de forma inmediata a partir de la definición de γ. □

1.10. Producto tensorial de C*-algebras

Teorema 1.10.1. *Sea H y K espacios de Hilbert. Existe un único producto interno en $H \otimes_{\mathbb{C}} K$ tal que*

$$\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle = \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle.$$

Demostración. [13, Teorema 6.3.1]. □

Definimos el producto tensorial $H \otimes K$ como la completación de $H \otimes_{\mathbb{C}} K$ con respecto a la norma dada por el producto interno del teorema 1.10.1.

Lema 1.10.2. *Sean H, K espacios de Hilbert y $u \in B(H)$, $v \in B(K)$. Entonces, existe un único operador $u \hat{\otimes} v \in B(H \otimes K)$ tal que*

$$(u \hat{\otimes} v)(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y) \qquad x \in H, y \in K.$$

También $||u \hat{\otimes} v|| = ||u||\ ||v||$.

Demostración. [13, Lema 6.3.2]. □

Lema 1.10.3. *Sean A y B dos C^*-álgebras. Su producto tensorial como espacio vectorial $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ admite estructura de álgebra con involución que cumple:*

- $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$,
- $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$.

Demostración. [13, Remark 6.3.1]. □

Teorema 1.10.4. *Consideremos (H, φ) y (K, ψ) representaciones de las C*-álgebras A y B respectivamente. Existe un único *-homomorfismo $\pi : A \otimes_{\mathbb{C}} B \to B(H \otimes K)$ tal que*

$$\pi(a \otimes b) = \varphi(a)\hat{\otimes}\psi(b).$$

Si φ y ψ son inyectivas entonces π también lo es.

Demostración. [13, Teorema 6.3.3]. □

Definición 1.10.5. *Sean A y B dos C^*-álgebras con representaciones universales (H, φ) y (K, ψ). Por el teorema 1.10.4 existe un único *-homomorfismo inyectivo*

$$\pi \colon A \otimes_{\mathbb{C}} B \to B(H \otimes K)$$

tal que $\pi(a \otimes b) = \varphi(a) \hat{\otimes} \psi(b)$. Por ende la la función

$$\| \cdot \| \colon A \otimes_{\mathbb{C}} B \to \mathbb{R}_{\geq 0} : c \mapsto \|\pi(c)\|$$

es una norma C^* en $A \otimes_{\mathbb{C}} B$, denominada norma C^* espacial. *La completación de $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ con respecto a esta norma se denomina el producto tensorial espacial de A y B, usamos la notación $A \otimes B$. Nótese que*

$$\|a \otimes b\| = \|a\| \; \|b\|.$$

1.10.1. Nuclearidad de C*-álgebras

Definición 1.10.6. *Una C^*-álgebra A se denomina* nuclear *si, para cualquier otra C^*-álgebra B, existe una única C^*-norma en $A \otimes_{\mathbb{C}} B$.*

Teorema 1.10.7. *Sean A, B, A', B' C*-álgebras y $\varphi : A \to A'$, $\psi : B \to B'$ *-homomorfismos. Existe un único *-homomorfismo $\pi : A \otimes B \to A' \otimes B'$ tal que*

$$\pi(a \otimes b) = \varphi(a) \otimes \psi(b), \quad \forall\; a \in A,\; b \in B.$$

Además, si φ y ψ son inyectivos entonces también lo es π.

Demostración. [13, Teorema 6.5.1]. □

Teorema 1.10.8. *Consideremos una sucesión exacta corta de C*-álgebras*

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{\;j\;} A \xrightarrow{\;\pi\;} B \longrightarrow 0,$$

y sea D otra C-álgebra. Si $B \otimes_{\mathbb{C}} D$ tiene una única C*-norma, entonces se obtiene la siguiente sucesión exacta de C*-álgebras*

$$0 \longrightarrow J \otimes D \xrightarrow{j \otimes Id_D} A \otimes D \xrightarrow{\pi \otimes Id_D} B \otimes D \longrightarrow 0.$$

Demostración. [13, Teorema 6.5.2]. □

Comentario 1.10.9. Notar que si B o D del teorema anterior son nucleares siempre podemos obtener la sucesión exacta al tensorizar con D.

Ejemplo 1.10.10. Toda C*-álgebra de dimensión finita es nuclear.

Demostración. [4, Proposición 2.4.1]. □

Ejemplo 1.10.11. Toda C*-álgebra conmutativa es nuclear.

Demostración. [4, Proposición 2.4.2]. □

2 Los funtores K_0 y K_1

En este capítulo nos centraremos en definir los funtores K_0 y K_1, junto con la demostración de diversas propiedades para ambos. Comenzaremos estudiando las proyecciones y los elementos unitarios de una C*-álgebra, así como las relaciones de equivalencia en las proyecciones y en los unitarios, estas relaciones serán esenciales a la hora de definir K_0 y K_1.

Construiremos $K_0(A)$ para A una C*-álgebra con unidad considerando las proyecciones en $M_n(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y cocientando por una relación de equivalencia. El resultado de este cociente será un semigrupo abeliano, que completaremos a un grupo abeliano mediante la construcción de Grothendieck. Probaremos la funtorialidad de K_0 entre la categoría de C*-álgebras con unidad y la categoría de grupos abelianos. Luego pasaremos a la construcción de K_0 para C*-álgebras sin unidad, explicando en el proceso por qué distinguimos entre los casos con unidad y sin unidad. Mostraremos que, en el caso con unidad, ambas definiciones coinciden y probaremos la funtorialidad también en la situación sin unidad.

A continuación, estudiaremos diversas propiedades del funtor K_0, tales como la preservación de sucesiones exactas que escinden y la estabilidad de K_0 bajo tensorizar con operadores compactos. Esto último significa que si $\mathcal{K}$ denota los operadores compactos en un espacio de Hilbert de dimensión infinita numerable, entonces se verifica

$$K_0(A) \simeq K_0(A \otimes \mathcal{K}).$$

Posteriormente introduciremos la definición del grupo $K_1(A)$, basado en los elementos unitarios de $M_n(\widetilde{A})$. Probaremos que K_1 es un funtor entre la categoría de C*-álgebras y la categoría de grupos abelianos, además de establecer diversas propiedades de este funtor.

2.1. Proyecciones y unitarios

2.1.1. Homotopías en los elementos unitarios

Definición 2.1.1. *Sea X un espacio topológico. Decimos que dos puntos a y b en X son homotópicos en X, $a \sim_h b$ en X, si existe una función continua $v : [0,1] \to X$ tal que $v(0) = a$ y $v(1) = b$. La relación $\sim_h$ es una relación de equivalencia en X.*

Definición 2.1.2. *Dada A una C*-álgebra con unidad. Recordar que $u \in A$ es unitario si*

$$uu^* = u^*u = 1.$$

El grupo de elementos unitarios en A es denominado $\mathcal{U}(A)$. Y $\mathcal{U}_0(A)$ todos los elementos $u \in \mathcal{U}(A)$ tales que $u \sim_h 1$ en $\mathcal{U}(A)$.

Comentario 2.1.3. Decir el espacio sobre el cual se da la homotopía es crucial. Por ejemplo todo par de elementos a, b en una C* álgebra A son homotópicos en A, esto debido a que es un espacio vectorial y por ende convexo. En cambio dos proyecciones en A pueden no ser homotópicas en el espacio de proyecciones de A.

Comentario 2.1.4. Si u_1, v_1, u_2, v_2 son elementos unitarios de una C*-álgebra A con $u_1 \sim_h v_1$ y $u_2 \sim_h v_2$, entonces $u_1u_2 \sim_h v_1v_2$. Esto es simplemente multiplicando las homotopías.

Lema 2.1.5. *Sea A una C*-álgebra con unidad.*

1. *Si $h \in A$ es un elemento autoadjunto entonces $exp(ih) \in \mathcal{U}_0(A)$.*
2. *Si u es unitario en A tal que $sp(u) \neq \mathbb{T}$, entonces u pertenece a $\mathcal{U}_0(A)$.*
3. *Si u, v son elementos unitarios de A con $||u - v|| < 2$, implica $u \sim_h v$.*

Demostración. (1). Para toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ continua se cumple:

$$f\overline{f} = |f|^2 = 1.$$

Por ende $f^{-1} = \overline{f}$[1].

Dado que h es un elemento autoadjunto su espectro es real, $sp(h) \subseteq \mathbb{R}$. El cálculo funcional continua nos da un *-isomorfismo

$$\varphi : C(sp(h)) \to C^*(1, h),$$

entonces

$$\varphi(f)^{-1} = \varphi(f^{-1}) = \varphi(\overline{f}) = \varphi(f)^*.$$

Utilizando la notación del cálculo funcional

$$f(h)^* = \overline{f}(h) = f(h)^{-1}.$$

Esto muestra que $f(h)$ es un elemento unitario de A, en particular $exp(ih)$ lo es. Para cada $t \in [0, 1]$ definimos

$$f_t : sp(h) \to \mathbb{T}, \text{ dado por } f_t(x) = exp(itx).$$

Veamos que la función $[0, 1] \to C(sp(h)) : t \to f_t$ es continua. Fijamos t_0 y $\epsilon > 0$. Utilizando la compacidad de $sp(h)$ existe $R > 0$ tal que $sp(h) \subseteq \overline{B}(0, R)$. Luego, por la continuidad de $exp(z)$, obtenemos que es uniformemente continuo en $\overline{B}(0, R)$. Además, $itz \in \overline{B}(0, R)$ para todo $z \in sp(h)$ y $t \in [0, 1]$. Sea $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in \overline{B}(0, R)$ que satisfacen $|x - y| < \delta$, se cumple $|\exp(x) - \exp(y)| < \epsilon$.

Si $t \in [0, 1]$ con $|t - t_0| < \frac{\delta}{R}$, vemos lo siguiente

$$|itx - it_0x| = |ix||t - t_0| < \delta, \ \forall\ x \in sp(h).$$

[1] Denominamos f^{-1} a la función $f(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Por ende
$$|exp(itx) - exp(it_0x)| < \epsilon,\ \forall\ x \in sp(h) \Longrightarrow ||f_t - f_{t_0}|| < \epsilon.$$
Concluimos que el camino $t \to f_t(h)$ también es continuo en $\mathcal{U}(A)$. Obteniendo así $exp(ih) = f_1(h) \sim_h f_0(h) = 1$.

(2). Si $sp(u) \neq \mathbb{T}$, entonces $\exp(i\theta)$ no pertenece a $sp(u)$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$. Sea φ la función real definida en $sp(u)$ tal que $\varphi(\exp(it)) = t$, donde $t \in (\theta, \theta + 2\pi)$. Vemos que φ es continua y $z = \exp(i\varphi(z))$ para todo $z \in sp(u)$. Definimos $h = \varphi(u)$, como φ es una función con imagen en los reales tenemos $h^* = h$ y $u = \exp(ih)$. Concluimos por la parte (1), $u \in \mathcal{U}_0(A)$.

(3). Sean $u, v \in A$ elementos unitarios tales que $||u - v|| < 2$, entonces
$$||v^*u - 1|| = ||v^*(u - v)|| \leq ||v||\ ||(u - v)|| < 2||v|| = 2,$$
la última igualdad viene de que los elementos unitarios tienen norma 1. Obtenemos $sp(v^*u-1) \subseteq B(0, 2)$, por ende $-2 \notin sp(v^*u - 1)$. Supongamos que $-1 \in sp(v^*u)$, entonces $v^*u + 1$ no es invertible y $v^*u - 1 + 2$ tampoco lo es. Concluyendo así $-2 \in sp(v^*u - 1)$, lo cual es un absurdo. Por ende $-1 \notin sp(v^*u)$.

Luego, mediante 2. tenemos $v^*u \sim_h 1$, y utilizando que v es unitario concluimos $u \sim_h v$ al multiplicar por v.

□

Comentario 2.1.6. Todo elemento unitario en $M_n(\mathbb{C})$ tiene espectro finito y por (2) del lema 2.1.5 tenemos que $\mathcal{U}_0(M_n(\mathbb{C})) = \mathcal{U}(M_n(\mathbb{C}))$. Esto implica que $\mathcal{U}(M_n(\mathbb{C}))$ es arco conexo.

Lema 2.1.7 (Whitehead)**.**
Sea A una C^*-álgebra con unidad y u, v elementos unitarios de A. Entonces
$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \ \text{en } \mathcal{U}(M_2(A)).$$
En particular
$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{en } \mathcal{U}(M_2(A)).$$

Demostración. De la parte (2) del lema 2.1.5 obtenemos
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{en } \mathcal{U}(M_2(A)).$$
Luego
$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{en } \mathcal{U}(M_2(A)).$$
Las otras relaciones se demuestran de forma similar utilizando lo siguiente
$$\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Proposición 2.1.8. *Sea A una C^*-álgebra con unidad.*

1. *$\mathcal{U}_0(A)$ es un subgrupo normal de $\mathcal{U}(A)$.*

2. *$\mathcal{U}_0(A)$ es abierto y cerrado respecto a $\mathcal{U}(A)$.*

3. *Un elemento $u \in A$ pertenece a $\mathcal{U}_0(A)$ si solo si*

$$u = exp(ih_1)\dots exp(ih_n)$$

para un $n \in \mathbb{N}$ y elementos autoadjuntos $h_1, \dots, h_n$ en A.

Demostración. (1). Utilizando el comentario 2.1.4 notamos que $\mathcal{U}_0(A)$ es cerrado por multiplicación. Solo resta probar que dado $u \in \mathcal{U}_0(A)$ también pertenecen u^{-1} y vuv^* a $\mathcal{U}_0(A)$ para todo $v \in \mathcal{U}(A)$.

Sea $t \to w_t$ la homotopía en $\mathcal{U}(A)$ entre u y 1. Observamos que $t \to w_t^{-1} = w_t^*$ es continua, ya que $*\colon A \to A$ es una isometría, obteniendo así que $u^{-1} \in \mathcal{U}_0(A)$. Ahora, la homotopía $t \to vw_tv^*$ es una homotopía en $\mathcal{U}(A)$ entre 1 y vuv^*, lo que concluye (1).

Probaremos (2) y (3) al mismo tiempo. Sea G el conjunto de elementos en A de la forma

$$u = exp(ih_1)\dots exp(ih_n)$$

para un $n \in \mathbb{N}$ y elementos autoadjuntos $h_1, \dots, h_n$ en A. Se sigue por (1) y por (1) del lema 2.1.5 que $G \subseteq \mathcal{U}_0(A)$. Como $exp(ih)^{-1} = exp(-ih)$, para todo h autoadjunto, vemos que G es un grupo.

Tomamos $u \in \mathcal{U}(A)$ y $v \in G$ con $||u - v|| < 2$, entonces

$$||1 - uv^*|| \leq ||u - v|| < 2.$$

En la demostración de (3) del lema 2.1.5 vimos que en este caso $-1 \notin sp(uv^*)$, luego como en la prueba de (1) del mismo lema obtenemos que $uv^* = exp(ih)$, donde $h \in A$ es un autoadjunto. Por ende $u = exp(ih)v$ y $u \in G$, esto muestra que G es abierto relativo a $\mathcal{U}(A)$.

El complemento $\mathcal{U}(A)\setminus G$ es la unión disjunta de clases laterales de la forma Gu con $u \in \mathcal{U}(A)$. Cada una de estas clases es homeomorfa a G, el cual es abierto relativo en $\mathcal{U}(A)$. Por ende, G es cerrado en $\mathcal{U}(A)$.

Como G es abierto y cerrado en $\mathcal{U}(A)$, también lo es en $\mathcal{U}_0(A)$. Dado que $\mathcal{U}_0(A)$ es conexo (es arcoconexo) y G es no vacío, concluimos que $\mathcal{U}_0(A) = G$, obteniendo así (2) y (3).

□

Lema 2.1.9. *Sean A y B dos C^*-álgebras con unidad y $\varphi : A \to B$ un *-homomorfismo sobreyectivo.*

1. *$\varphi(\mathcal{U}_0(A)) = \mathcal{U}_0(B)$.*

2. *Para cada $u \in \mathcal{U}(B)$ existe un $v \in \mathcal{U}_0(M_2(A))$ tal que*

$$\varphi_2(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix},$$

*donde $\varphi_2 : M_2(A) \to M_2(B)$ es el *-homomorfismo inducido por φ.*

3. *Si u es un elemento unitario de B y existe un elemento unitario $v \in A$ tal que $u \sim_h \varphi(v)$, entonces $u \in \varphi(\mathcal{U}(A))$.*

Demostración. (1) Un *-homomorfismo que perserva la unidad es continuo y lleva elementos unitarios en unitarios. Entonces $\varphi(\mathcal{U}_0(A)) \subseteq \mathcal{U}_0(B)$. Por otro lado, si $u \in \mathcal{U}_0(B)$, por la proposición 2.1.8 tenemos

$$u = exp(ih_1) \dots exp(ih_n)$$

para $h_1, \dots, h_n$ elementos autoadjuntos de B. Como φ es sobreyectiva, existen $x_j \in A$ tales que $\varphi(x_j) = h_j$. Definimos $k_j = (x_j + x_j^*)/2$ y observamos que $k_j = k_j^*$ y $\varphi(k_j) = h_j$. Consideramos

$$v = exp(ik_1) \dots exp(ik_n).$$

Utilizando la proposición 2.1.8 obtenemos $v \in \mathcal{U}_0(A)$ y se cumple $\varphi(v) = u$.

(2). Viene del lema 2.1.7 y de la parte (1).

(3). Si $u \sim_h \varphi(v)$ entonces $u\varphi(v^*) \in \mathcal{U}_0(B)$. Por (1) vemos que $u\varphi(v^*) = \varphi(w)$ para un $w \in \mathcal{U}_0(A)$, concluyendo así $u = \varphi(wv)$. □

Sea A una C*-álgebra con unidad. El grupo de los elementos invertibles en A es denominado $GL(A)$, y el conjunto de elementos en $GL(A)$ que son homotópicos a 1 en $GL(A)$ es designado como $GL_0(A)$.

Proposición 2.1.10 (Series de Carl-Neumann)**.** *Dada A una C*-álgebra con unidad. Si $a \in A$ cumple $||1 - a|| < 1$ entonces a es invertible, y su inversa está dada por la serie*

$$a^{-1} = 1_A + (1_A + a) + (1_A + a)^2 + (1_A + a)^3 + \dots .$$

En particular vemos que la norma $||a^{-1}||$ puede ser estimada

$$||a^{-1}|| \leq 1 + ||(1_A + a)|| + ||(1_A + a)||^2 + ||(1_A + a)^3|| + \dots = (1 - ||1_A - a||)^{-1} \tag{2.1}$$

Demostración. [13, Teorema 1.2.2]. □

Proposición 2.1.11. *Sea A una C^*-álgebra con unidad. Sea $a \in A$ invertible. Si tomamos $b \in A$ con $\|a - b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, entonces b es invertible,*

$$\|a^{-1}\|^{-1} - \|a - b\| \leq \|b^{-1}\|^{-1},$$

y $a \sim_h b$ en $GL(A)$.

Demostración. Como

$$||1_A - a^{-1}b|| = ||a^{-1}(a - b)|| \leq ||a^{-1}|| \; ||a - b|| < 1,$$

entonces $a^{-1}b$ es invertible, y por la desigualdad (2.1) obtenemos lo siguiente

$$||(a^{-1}b)^{-1}|| \leq (1 - ||1_A - a^{-1}b||)^{-1}.$$

Esto implica que b también es invertible, con inversa $b^{-1} = (a^{-1}b)^{-1}a^{-1}$. Observar que

$$||1_A - a^{-1}b|| \; ||a^{-1}||^{-1} = ||a^{-1}(a - b)|| \; ||a^{-1}||^{-1} \leq ||a^{-1}|| \; ||a - b|| \; ||a^{-1}||^{-1} = ||a - b||.$$

Luego,

$$\begin{aligned}||b^{-1}||^{-1} &\geq ||(a^{-1}b)^{-1}||^{-1}\ ||a^{-1}||^{-1} \geq (1 - ||1_A - a^{-1}b)||)\ ||a^{-1}||^{-1}\\ &\geq ||a^{-1}||^{-1} - ||a-b||.\end{aligned}$$

^{2} Para probar la última afirmación usamos la homotopía $c_t = (1-t)a + tb$ con $t \in [0,1]$. Tenemos $||a - c_t|| = t||a-b|| < ||a^{-1}||^{-1}$, luego c_t es invertible por la primera parte de la prueba, concluyendo así $a = c_0 \sim_h c_1 = b$ en $GL(A)$. □

Definición 2.1.12. *Sea X un espacio topológico y X_0 un subespacio. Decimos que X_0 es un retracto de X si existe una función $\tau : X \to X_0$ tal que $x \sim_h \tau(x)$ en X para todo $x \in X$ y $\tau(x) = x$, $\forall\ x \in X_0$.*

La parte (2) de la siguiente proposición prueba que $\mathcal{U}(A)$ es un retracto de $GL(A)$.

Definición 2.1.13. *Para todo elemento a de A definimos $|a| = (a^*a)^{1/2}$. El elemento $|a|$ es llamado el valor absoluto de a.*

Proposición 2.1.14. *Sea A una C^*-álgebra con unidad.*

1. *Si z es un elemento invertible de A, entonces también lo es $|z|$ y $\omega(z) = z|z|^{-1}$ pertenece a $\mathcal{U}(A)$.*

2. *El morfismo $\omega : GL(A) \to \mathcal{U}(A)$ definido en (1) es continuo, $\omega(u) = u$ para todo $u \in \mathcal{U}(A)$, y $\omega(z) \sim_h z$ en $GL(A)$ para todo $z \in GL(A)$.*

3. *Sean $u, v \in \mathcal{U}(A)$, si $u \sim_h v$ en $GL(A)$ entonces $u \sim_h v$ en $\mathcal{U}(A)$.*

Demostración. (1). Si z es invertible entonces también lo es z^*, ya que $1 = (zz^{-1})^* = (z^{-1})^*z^*$ y lo mismo del otro lado. Luego, $(z^*z)^{1/2}$ es invertible con inversa $((z^*z)^{-1})^{1/2}$. Sea $u = z|z|^{-1}$, entonces $z = u|z|$ y u es invertible por ser el producto de dos elementos invertibles. Además $u^{-1} = u^*$, ya que

$$uu^* = |z|^{-1}z^*z|z|^{-1} = |z|^{-1}|z|^2|z|^{-1} = 1.$$

(2). Para mostrar que $\omega(z) = z|z|^{-1}$ es continua es suficiente probar que la función $z \to |z|^{-1}$ lo es, esto debido a que el producto es continuo. El morfismo $z \to |z|^{-1}$ es composición de la función $h \to |h|$ y el morfismo dado por invertir, por ende debemos mostrar que estos dos son continuos.

Veamos que la función $GL(A) \to A : z \to z^{-1}$ es continuo. Fijamos un $a \in GL(A)$, sea $b \in A$ tal que $||b - a|| \leq ||a^{-1}||^{-1}$ entonces por la proposición 2.1.11 tenemos que b es invertible y

$$||b^{-1}||^{-1} \geq ||a^{-1}||^{-1} - ||a-b||.$$

Luego

$$\begin{aligned}||a^{-1} - b^{-1}|| &= ||a^{-1}(b-a)b^{-1}||\\ &\leq ||a^{-1}||\ ||b-a||\ ||b^{-1}||\\ &\leq \frac{||a^{-1}||^2\ ||b-a||}{1 - ||a^{-1}||\ ||a-b||} \xrightarrow[b\to a]{} 0.\end{aligned}$$

^{2}La última desigualdad viene de $||1_A - a^{-1}b||\ ||a^{-1}||^{-1} \leq ||a-b||$.

Probaremos la continuidad de la función $a \to |a|$. Esta función es la composición de los morfismos $a \to a^*a$ y $h \to h^{1/2}$. Para la continuidad de la función $a \mapsto a^*a$, consideremos una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A que converge a $a \in A$. Como la involución es una isometría $a_n^* \underset{n}{\longrightarrow} a^*$, luego por la continuidad del producto $a_n^*a_n \underset{n}{\longrightarrow} a^*a$. Resta probar la continuidad de la función $h \mapsto h^{1/2}$. Sea $a \in A^+$, si $y \in B(a, ||a||/2) \cap A^+$ tenemos que

$$||y|| \leq ||y-a|| + ||a|| \leq 2||a||.$$

Por ende $B(a, ||a||/2) \cap A^+ \subset \Omega_K$, donde $K = [0, 2||a||]$. Luego utilizando la función $\sqrt{\cdot} : K \to \mathbb{R}^+$ junto al lema 1.6.5 tenemos que la raíz cuadrada es continua en a, esto para todo $a \in A^+$.

Demostraremos la otra parte de (2). Si u es un elemento unitario de A, entonces $|u| = 1$ por ende $\omega(u) = u$.

Sea $z \in GL(A)$, definimos $z_t = \omega(z)(t|z| + (1-t)1_A)$ para $t \in [0,1]$. Luego $\omega(z) = z_0$ y $z = z_1$. Como $|z|$ es positivo e invertible obtenemos $\mathrm{sp}(|z|) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$. Como $\mathrm{sp}(|z|)$ es compacto ([13, Lema 1.2.4]), podemos definir

$$M = min\{\beta \in \mathrm{sp}(|z|)\}.$$

Tomando $\lambda \in (0,1]$ tal que $M - \lambda > 0$, tenemos $\mathrm{sp}(|z| - \lambda 1_A) = \mathrm{sp}(|z|) - \lambda \geq M - \lambda > 0$. Por ende $|z| - \lambda 1_A$ es un elemento positivo, o sea $|z| \geq \lambda 1_A$. Luego, para todo $t \in [0,1]$

$$t|z| + (1-t)1_A \geq t\lambda 1_A + (1-t)1_A \geq t\lambda 1_A + (1-t)\lambda 1_A = \lambda 1_A,$$

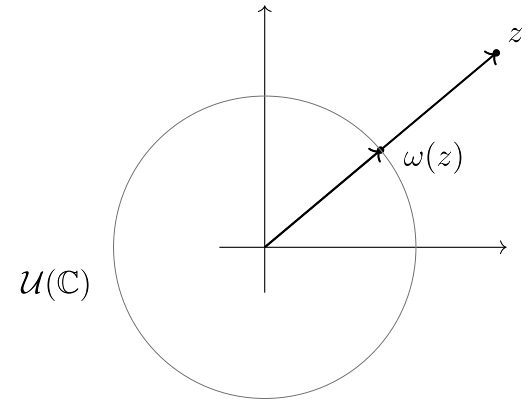
donde la última desigualdad se debe a $\lambda \leq 1$, por ende $1_A \geq \lambda 1_A$. Concluyendo así que

$$0 \leq \mathrm{sp}(t|z| + (1-t)1_A - \lambda 1_A) = \mathrm{sp}(t|z| + (1-t)1_A) - \lambda \Longrightarrow \mathrm{sp}(t|z| + (1-t)1_A) \geq \lambda > 0.$$

Entonces $t|z| + (1-t)1_A$ es invertible, ya que no contiene al 0 en su espectro y luego z_t también lo es para todo $t \in [0,1]$. La función $t \to z_t$ es continua, por ende $w(z) = z_0 \sim_h z_1 = z$ en $GL(A)$.

(3). Si $t \to z_t$ es un camino continuo en $GL(A)$ desde u a v, entonces $t \to \omega(z_t)$ es un camino continuo en $\mathcal{U}(A)$ desde u a v. □

Comentario 2.1.15 (Descomposición polar). La proposición anterior muestra que existe una descomposición análoga a la polar en $\mathbb{C}$: para todo elemento invertible z existe un número positivo $|z| \in \mathbb{R}_{>0}$ y un elemento unitario $\omega(z) \in \mathcal{U}(\mathbb{C}) = S^1$ tales que $z = |z|\omega(z)$.



También la demostración del teorema nos dice que el segmento que une $\omega(z)$ y z está contenido en los invertibles.

2.1.2. Relaciones entre proyecciones

Definición 2.1.16. *Un elemento p en una C^*-álgebra es llamado una proyección si $p = p^* = p^2$. El conjunto de las proyecciones en A es denotado por $P(A)$.*

Además de la relación de equivalencia $\sim_h$ consideraremos otras dos en $P(A)$:

- $p \sim q$ si existe $v \in A$ con $p = v^*v$ y $q = vv^*$ (equivalencia Murray-von Neumann),
- $p \sim_u q$ si existe un elemento unitario $u \in \mathcal{U}(\widetilde{A})$ con $q = upu^*$ (equivalencia unitaria).

Geométricamente, si nuestra C^*-álgebra son los operadores acotados en un espacio de Hilbert H, entonces, para proyecciones $p, q \in B(H)$, se tiene

$$p \sim q \iff pH \text{ isométricamente isomorfo a } qH \iff \dim(pH) = \dim(qH).$$

Por ende, dos proyecciones son Murray–von Neumann equivalentes si y solo si sus imágenes tienen la misma dimensión (como espacios de Hilbert): $p \sim q \iff \dim(pH) = \dim(qH)$.

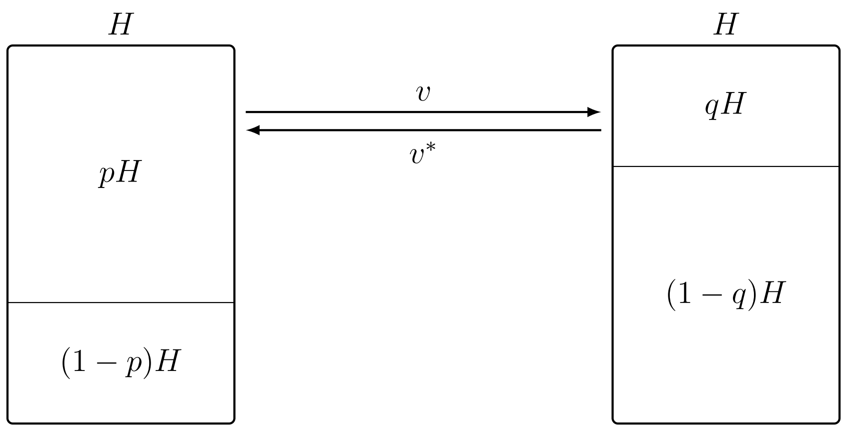
Notar que $1 - p$ y $1 - q$ son las proyecciones ortogonales sobre $(pH)^\perp$ y $(qH)^\perp$. Por lo tanto, la afirmación

$$p \sim q \implies 1 - p \sim 1 - q$$

es equivalente a la implicación

$$dim(pH) = dim(qH) \implies dim((pH)^\perp) = dim((qH)^\perp).$$

Sin embargo, la implicación $dim(pH) = dim(qH) \implies dim((pH)^\perp) = dim((qH)^\perp)$ es falsa cuando H es de dimensión infinita, por ende $p \sim q$ no implica $1 - p \sim 1 - q$. Con la proposición 2.1.18 probaremos que, en cambio, si $p \sim_u q$ entonces $1 - p \sim 1 - q$. Por lo tanto, $p \sim_u q$ implica que las proyecciones p y q dividen a H de la misma manera.



Definición 2.1.17. *Un elemento v de A tal que v^*v es una proyección se llama una isometría parcial.*

Sea v una isometría parcial. Entonces consideramos $z = (1 - vv^*)v$

$$\begin{aligned} z^*z &= v^*(1 - vv^*)(1 - vv^*)v \\ &= (v^* - v^*vv^*)(v - vv^*v) \\ &= v^*v - v^*vv^*v - v^*vv^*v + v^*vv^*vv^*v \\ &= 0 \ (\textit{usando } (v^*v)^2 = v^*v). \end{aligned}$$

Concluimos $||z||^2 = ||z^*z|| = 0$, y luego $v = vv^*v$. Por ende también se cumplen las siguientes igualdades con $p = v^*v$, $q = vv^*$

$$v = qv = vp = qvp. \tag{2.2}$$

Podemos usar esto último para mostrar que la relación Murray-von Neumann es transitiva. Sean $p, q, r \in P(A)$, tomando las isometrías parciales $v, w \in A$ tales que $p = v^*v$, $q = vv^*, q = w^*w$ y $r = ww^*$. Definimos $z = wv$ y obtenemos que

$$z^*z = v^*w^*wv = v^*qv = v^*v = p$$

luego

$$zz^* = wvv^*w^* = wqw^* = ww^* = r$$

por ende $p \sim r$.

Proposición 2.1.18. *Dadas p, q proyecciones en una C^*-álgebra con unidad A. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $p \sim_u q$,
2. $q = upu^*$ *con u unitario en A,*
3. $p \sim q$ *y* $1_A - p \sim 1_A - q$.

Demostración. Sea $1_{\widetilde{A}}$ la unidad de $\widetilde{A}$ y $f = 1_{\widetilde{A}} - 1_A$. Entonces $\widetilde{A} = A + \mathbb{C}f$ y $af = fa = 0$, ya que

$$fa = (-1_A, 1)(a, 0) = (-a + a, 0) = 0$$

$$af = (a, 0)(-1_A, 1) = (-a + a, 0) = 0.$$

(1) $\Longrightarrow$ (2). Supongamos $q = zpz^*$ donde $z \in \mathcal{U}(\widetilde{A})$. Tenemos que $z = u + \alpha f$ para un $u \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Usando $af = fa = 0$ obtenemos $q = upu^*$ y

$$\begin{aligned}(0, 1) &= zz^* \\ &= (u + \alpha f)(u^* + \overline{\alpha} f) \\ &= uu^* + |\alpha|^2 f \\ &= (uu^* - |\alpha|^2 1_A, |\alpha|^2).\end{aligned}$$

Mirando la segunda coordenada podemos concluir $|\alpha|^2 = 1$, y por ende $uu^* = 1_A$. Lo mismo ocurre mirando zz^* obtenemos $u^*u = 1_A$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Supongamos que $q = upu^*$ para un elemento unitario $u \in \mathcal{U}(A)$. Definiendo $v = up$ y $w = u(1_A - p)$. Entonces

$$v^*v = p,\ vv^* = q,\ w^*w = 1_A - p,\ ww^* = 1_A - q.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1). Supongamos que las isometrías parciales $v, w \in A$ cumplen lo siguiente:

$$v^*v = p,\ vv^* = q,\ w^*w = 1_A - p,\ ww^* = 1_A - q.$$

Veamos que $z = w + v + f$ es un elemento unitario en $\widetilde{A}$

$$\begin{aligned} zz^* &= (w + v + f)(w^* + v^* + f) \\ &= {}^3 ww^* + vv^* + f \\ &= 1_A - q + q + f \\ &= 1_A + f \\ &= (1_A, 0) + (-1_A, 1) = (0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^*z &= (w^* + v^* + f)(w + v + f) \\ &= w^*w + v^*v + f \\ &= 1_A - p + p + f = (0, 1). \end{aligned}$$

Ahora utilizando la igualdad 2.2 tenemos

$$\begin{aligned} zpz^* = (w + v + f)p(w^* + v^* + f) &= (wp + vp)(w^* + v^* + f) \\ &= wpw^* + wpv^* + vpw^* + vpv^* \\ &= {}^4 w(1_A - p)pw^* + w(1_A - p)pv^* + vp(1_A - p)w^* + vpv^* \\ &= vpv^* = vv^* = q. \end{aligned}$$

□

Lema 2.1.19. *Consideramos p una proyección en la C*-álgebra A, y a un elemento autoadjunto dentro de A. Al definir $\delta = ||a - p||$, entonces*

$$\mathrm{sp}(a) \subseteq [-\delta, \delta] \cup [1 - \delta, 1 + \delta].$$

Demostración. Notar que como p es una proyección tenemos $\mathrm{sp}(p) \subseteq \{0, 1\}$.Vamos a dividir esta demostración en tres casos.

Caso $\mathrm{sp}(p) = \{0\}$:

En este caso tenemos que $||p|| = r(p) = 0$, por ende $p = 0$. Por definición $\delta = ||a||$ y sabemos que $\mathrm{sp}(a) \subseteq [-||a||, ||a||]$, concluyendo así este caso.

Caso $\mathrm{sp}(p) = \{1\}$:

Entonces $\mathrm{sp}(p - 1_{\widetilde{A}}) = \{0\}$, por lo mismo que antes concluimos $p = 1_{\widetilde{A}}$.
Ahora tenemos $\mathrm{sp}(a) - 1 = \mathrm{sp}(a - 1_{\widetilde{A}}) \subseteq [-\delta, \delta]$, por ende $sp(a) \subseteq [1 - \delta, 1 + \delta]$.

Caso $\mathrm{sp}(p) = \{0, 1\}$:
Es suficiente demostrar que, si $t \in \mathbb{R}$ tiene distancia d estrictamente mayor que δ al conjunto $\{0, 1\}$, entonces $t \notin \mathrm{sp}(a)$. Consideremos $t \in \mathbb{R}$ como el recién mencionado, $p - t1_{\widetilde{A}}$ es invertible en $\widetilde{A}$, ya que $t \notin \{0, 1\}$ por tener $d > 0$. A continuación probaremos la siguiente igualdad:

$$\mathrm{sp}\Big((p - t1_{\widetilde{A}})^{-1}\Big) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \mathrm{sp}(p - t1_{\widetilde{A}})\}.$$

[3]Dado que $af = fa = 0$ para todo $a \in A$, en particular $wf = vf = fw^* = fv^* = 0$. Utilizando (2.2) y $(1 - p)p = 0$ se obtiene $wv^* = w(1 - p)v^* = w(1 - p)pv^* = 0$, análogamente $vw^* = 0$.

[4]Mediante la identidad (2.2) se obtiene $w = w(1_A - p)$.

Claramente, 0 no pertenece al espectro ni de $p - t1_{\widetilde{A}}$ ni de su inversa. Veamos la igualdad para $\lambda \neq 0$. Tenemos

$$(p - t1_{\widetilde{A}})^{-1} - \lambda 1_{\widetilde{A}} = \lambda (p - t1_{\widetilde{A}})^{-1} \Big(\tfrac{1}{\lambda} - (p - t1_{\widetilde{A}}) \Big),$$

de donde se sigue que $(p - t1_{\widetilde{A}})^{-1} - \lambda 1_{\widetilde{A}}$ no es invertible si y solo si $\frac{1}{\lambda} - (p - t1_{\widetilde{A}})$ no lo es. Esto prueba la igualdad de espectros indicada.

Usando que, para $f \in \mathbb{C}[x]$, se cumple $f(\mathrm{sp}(a)) = \mathrm{sp}(f(a))$, obtenemos

$$\mathrm{sp}(p - t1_{\widetilde{A}}) = \mathrm{sp}(p) - t = \{-t,\, 1 - t\}.$$

Si a es autoadjunto e invertible, entonces a^{-1} también es autoadjunto, además, para elementos autoadjuntos $r(a) = \|a\|$. Por tanto,

$$\|(p - t1_{\widetilde{A}})^{-1}\| = r\Big((p - t1_{\widetilde{A}})^{-1}\Big) = \text{máx}\{\, |-t|^{-1},\, |1 - t|^{-1}\,\} = d^{-1}.$$

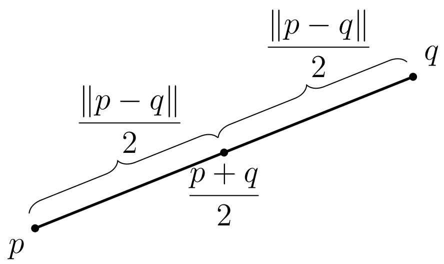
Luego

$$\begin{aligned} \|(p - t1_{\widetilde{A}})^{-1}(a - t1_{\widetilde{A}}) - 1_{\widetilde{A}}\| &= \|(p - t1_{\widetilde{A}})^{-1}\Big(a - t1_{\widetilde{A}} - (p - t1_{\widetilde{A}})\Big)\| \\ &= \|(p - t1_{\widetilde{A}})^{-1}(a - p)\| \leq d^{-1}\,\delta < 1. \end{aligned}$$

Por tanto $(p - t1_{\widetilde{A}})^{-1}(a - t1_{\widetilde{A}})$ es invertible, lo que implica que $a - t1_{\widetilde{A}}$ también lo es. Concluimos así que $t \notin \mathrm{sp}(a)$. □

Proposición 2.1.20. *Si p, q son proyecciones en la C*-álgebra A tales que $||p - q|| < 1$, entonces $p \sim_h q$.*

Demostración. Consideremos $a_t = (1 - t)p + tq$ donde t pertenece al intervalo $[0, 1]$.



Consecuentemente, a_t es autoadjunto, y se cumple

$$\text{mín}\{||a_t - p||, ||a_t - q||\} \leq \frac{||p - q||}{2} < \frac{1}{2},$$

y que la función $t \mapsto a_t$ es continua. Sea $\delta = \frac{||p-q||}{2} < \frac{1}{2}$, entonces definimos $K = [-\delta, \delta] \cup [1 - \delta, 1 + \delta]$. Según el lema 2.1.19, se tiene que $a_t \in \Omega_K$.

Consideremos $f : K \to \mathbb{C}$ una función tal que toma el valor 0 en $[-\delta, \delta]$ y el valor 1 en $[1 - \delta, 1 + \delta]$. Dado que estos intervalos son disjuntos porque $\delta < \frac{1}{2}$, la función es continua. Como además $f = \overline{f} = f^2$, tenemos que $f(a_t)$ es una proyección para todo valor de t en $[0, 1]$. Observando que $sp(p)$ y $sp(q)$ están contenidos en $\{0, 1\}$, la función f restringida al espectro de las proyecciones se reduce a la inclusión en $\mathbb{C}$, resultando en $f(q) = q$ y $f(p) = p$.

Entonces el camino $t \to f(a_t)$ es continuo por el lema 1.6.5 y

$$p = f(p) = f(a_0) \sim_h f(a_1) = f(q) = q \text{ en } P(A).$$

□

Proposición 2.1.21. *Consideremos $a, b \in A$ elementos autoadjuntos en una C^*-álgebra A con unidad, y supongamos que existe $z \in A$ invertible tal que*

$$b = zaz^{-1}.$$

Sea $z = u|z|$ la descomposición polar de z, con $u \in \mathcal{U}(A)$ y $|z| = (z^*z)^{1/2}$. Entonces

$$b = uau^*.$$

Demostración. La igualdad $b = zaz^{-1}$ implica que $bz = za$ y, como a y b son autoadjuntos, se obtiene $z^*b = az^*$. Entonces,

$$|z|^2 a = (z^*z)a = z^*bz = a(z^*z) = a|z|^2,$$

lo que muestra que a conmuta con $|z|^2$.

Usando el cálculo funcional, se tiene $C^*(1, |z|^2) \simeq C(\mathrm{sp}(|z|^2))$. El elemento $|z|^2$ es positivo e invertible (ya que z lo es), por tanto $\mathrm{sp}(|z|^2) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$.

Consideremos la función inclusión $i : \mathrm{sp}(|z|^2) \to \mathbb{C}$. Dado que $w \neq 0$ para todo $w \in \mathrm{sp}(|z|^2)$, la función

$$f : \mathrm{sp}(|z|^2) \to \mathbb{C}, \qquad f(w) = \frac{1}{\sqrt{w}},$$

pertenece a $C(\mathrm{sp}(|z|^2))$. Esta función es la raíz cuadrada de la inversa de la función i. Ahora, utilizando el isomorfismo entre $C^*(1, |z|^2)$ y $C(\mathrm{sp}(|z|^2))$, y el hecho de que i corresponde a $|z|^2$, se obtiene que $f(|z|^2)$ es la raíz cuadrada de $|z|^{-2}$. Por la unicidad de la raíz cuadrada concluimos que $f(|z|^2) = |z|^{-1}$, y por tanto $|z|^{-1} \in C^*(1, |z|^2)$.

Como a conmuta con $|z|^2$, también conmuta con todos los elementos de $C^*(1, |z|^2)$, en particular con $|z|^{-1}$. Por lo tanto,

$$uau^* = \left(z|z|^{-1}\right) a\, u^* = za|z|^{-1}u^* = bz|z|^{-1}u^* = b\, uu^* = b.$$

□

Proposición 2.1.22. *Sea A una C^*-álgebra y p, q proyecciones en $P(A)$. Entonces, $p \sim_h q$ en $P(A)$ si y solo si existe un elemento unitario u en $\mathcal{U}_0(\widetilde{A})$ tal que $q = upu^*$.*

Demostración. En esta prueba, 1 siempre denotará la unidad de $\widetilde{A}$.

Supongamos primero que $q = upu^*$ para algún $u \in \mathcal{U}_0(\widetilde{A})$. Sea $t \mapsto u_t$ un camino continuo en los unitarios de $\widetilde{A}$ que conecta 1 con u. Como A es un ideal de $\widetilde{A}$, el camino

$$t \longmapsto u_t p u_t^*$$

es un camino continuo en las proyecciones de A que va de p a q.

Por otro lado, supongamos $p \sim_h q$ y sea $f \colon [0,1] \to P(A)$ la homotopía entre ambas proyecciones, con $f(0) = p$ y $f(1) = q$.

Paso intermedio. Veamos que es suficiente probar la afirmación en el caso $\|p - q\| < 1/2$.

Como la homotopía viene del compacto $[0, 1]$ y es continua, es uniformemente continua. Por tanto, existe una partición

$$0 = i_1 < i_2 < \cdots < i_n = 1$$

del intervalo $[0,1]$ tal que $\|f(i_j) - f(i_{j+1})\| < 1/2$ para todo $j = 1, \ldots, n-1$. Sea $p_j = f(i_j)$ para $j = 1, \ldots, n$. Reparametrizando la homotopía, se tiene además $p_i \sim_h p_j$ para todo i, j. Entonces, si probamos la afirmación para proyecciones con $\|p' - q'\| < 1/2$ y $p' \sim_h q'$, obtendremos elementos unitarios u_{j+1} tales que

$$p_{j+1} = u_{j+1} p_j u_{j+1}^*.$$

De ello se sigue que

$$q = u_n u_{n-1} \ldots u_1 p u_1^* \ldots u_{n-1}^* u_n^*.$$

Volvamos a la prueba en el caso $\|p - q\| < 1/2$. Sea

$$z = pq + (1-p)(1-q).$$

Entonces $z \in \widetilde{A}$, se cumple $pz = pq = zq$ y

$$\|z - 1\| = \|p(q-p) + (1-q)((1-q) - (1-p))\| \leq 2\|q - p\| < 1.$$

Por tanto z es invertible y, por la proposición 2.1.11, $z \sim_h 1$ en $GL(\widetilde{A})$.

Sea $z = u|z|$ la descomposición polar de z. Por la proposición 2.1.21 se obtiene $p = uqu^*$. Utilizando la proposición 2.1.14 tenemos que $u \sim_h z \sim_h 1$ en $GL(\widetilde{A})$, por (3) de la misma proposición, esto implica $u \sim_h 1$ en $\mathcal{U}(\widetilde{A})$.

Así concluimos la demostración. □

Proposición 2.1.23. *Sean p, q proyecciones en la C^*-álgebra A.*

1. *Si $p \sim_h q$, entonces $p \sim_u q$.*
2. *Si $p \sim_u q$, entonces $p \sim q$.*

Demostración. La parte (1) es una consecuencia inmediata de la proposición 2.1.22.

Si $upu^* = q$ para un unitario $u \in \widetilde{A}$, entonces $v = up$ pertenece a A, $v^*v = p$, y $vv^* = q$. Esto prueba (2). □

Proposición 2.1.24. *Sean p, q proyecciones en la C^*-álgebra A.*

1. *Si $p \sim q$, entonces*
$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } M_2(A).$$
2. *Si $p \sim_u q$, entonces*
$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } P(M_2(A)).$$

Demostración. (1). En esta demostración 1 siempre es la unidad de $\widetilde{A}$.

Sea $p = v^*v$ y $q = vv^*$. Usando 2.2 vemos que

$$u = \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix} \quad y \quad w = \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

son elementos unitarios en $M_2(\widetilde{A})$. Tenemos

$$wu = \begin{pmatrix} v + (1-q)(1-p) & (1-q)v^* \\ q(1-p) & (1-q) + qv^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v - p - q + pq & (1-q)v^* \\ q(1-p) & qv^* - q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

como A es un ideal en $\widetilde{A}$ los elementos

$$(1-q)v^*,\ q(1-p)$$

pertenecen a A. Concluimos que $wu \in \widetilde{M_2(A)} \subseteq M_2(\widetilde{A})$, luego

$$wu \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^* w^* = w \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^* = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notar que la unidad de $M_2(\widetilde{A})$ y $\widetilde{M_2(A)}$ coinciden, por ende u y w son unitarios también en $\widetilde{M_2(A)}$.

(2). Si $u \in \mathcal{U}(\widetilde{A})$ tal que $q = upu^*$. El lema 2.1.7 nos da una homotopía $t \to w_t$ en $\mathcal{U}(M_2(\widetilde{A}))$ la cual cumple

$$w_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ w_1 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}.$$

Definimos $e_t = w_t diag(p, 0) w_t^*$. Luego, para todo t tenemos que e_t pertenece a $P(M_2(A))$ y la función $t \to e_t$ es continua. Observando $e_0 = diag(p, 0)$ y $e_1 = diag(q, 0)$, concluimos que e_t es la homotopía necesaria. $\square$

Comentario 2.1.25. Las siguientes implicaciones son validas entre las relaciones

$$\boxed{\sim_{\mathrm{h}} \Longrightarrow \sim_{\mathrm{u}} \Longrightarrow \sim}$$

pero las direcciones opuestas no se cumplen en general.

Ejemplo 2.1.26 ($\sim$ no implica $\sim_u$). Una isometría en una C*-álgebra A es un elemento s tal que $s^*s = 1$. Consideremos $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert H de dimensión numerable. Definimos v el operador Shift tal que $v(\xi_n) = \xi_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, vemos que $v^*(\xi_1) = 0$ y $v^*(\xi_n) = \xi_{n-1}$ para todo $n \geq 2$. Entonces $v^*v = Id$, pero $vv^*(\xi_1) = 0$ por ende $vv^* \neq Id$.

Sea A una C^*-álgebra con unidad que contiene una isometría no unitaria s. Por definición $s^*s \sim ss^*$.

El cero no es Murray–von Neumann equivalente a una proyección no nula: si $v^*v = 0$, entonces $v = 0$ y, por tanto, $vv^* = 0$.

En nuestro caso $1 - s^*s = 0$ y $1 - ss^* \neq 0$, como 0 no puede ser equivalente a una proyección no nula, $1 - s^*s$ no es Murray–von Neumann equivalente a $1 - ss^*$. Por la proposición 2.1.18 se deduce que s^*s no es equivalente unitariamente a ss^*.

Ejemplo 2.1.27. Un ejemplo de una C*-álgebra con unidad con proyecciones p, q tales que $p \sim_u q$ pero $p \not\sim_h q$ es el siguiente. Consideremos una C*-álgebra B con unidad, y supongamos que $M_2(B)$ tiene un elemento unitario u que no es homotópico a $\operatorname{diag}(v, 1)$ para ningún elemento unitario v de B (un ejemplo de esta situación se encuentra en [15, Ejemplo 11.3.4]).

Las proyecciones

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^*,$$

son elementos equivalentes unitariamente en $M_2(B)$, pero no son homotópicos. Supongamos que $p \sim_h q$, luego por la proposición 2.1.22 existe $w \in \mathcal{U}_0(M_2(B))$ tal que $wqw^* = p$, por ende $(wu)p = p(wu)$. Así,

$$wu = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

para ciertos elementos $a, b \in \mathcal{U}(B)$. Usando el lema de Whitehead 2.1.7 llegamos a una contradicción:

$$u \sim_h wu = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.3. Semigrupo de proyecciones

Definición 2.1.28 (El semigrupo $P_\infty(A)$)**.**
Definimos

$$P_n(A) = P(M_n(A)) \quad y \quad P_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(A),$$

donde A es una C-álgebra y n un entero positivo.*

Definimos la relación $\sim_0$ en $P_\infty(A)$ como sigue. Sea p una proyección en $P_n(A)$ y q una proyección en $P_m(A)$. Entonces $p \sim_0 q$ si existe $v \in M_{m,n}(A)$ con $p = v^*v$ y $q = vv^*$. Con $M_{m,n}(A)$ nos referimos al conjunto de matrices rectangulares $m \times n$ con coeficientes en A. El elemento v^* se obtiene transponiendo la matriz v y tomando el adjunto en cada entrada.

Definición 2.1.29. *Definimos la operación binaria $\oplus$ en $P_\infty(A)$ dada por*

$$p \oplus q = diag(p, q) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix},$$

entonces si $p \in P_n(A)$ y $q \in P_m(A)$, tenemos que $p \oplus q \in P_{n+m}(A)$.

Comentario 2.1.30. La relación $\sim_0$ es una relación de equivalencia en $P_\infty(A)$. Si $p, q \in P_n(A)$, entonces $p \sim_0 q$ si solo si p y q son Murray-von Nuemann equivalentes.

Proposición 2.1.31. *Dada una C*-álgebra A y p, q, r, p', q' proyecciones en $P_\infty(A)$.*

1. *$p \sim_0 p \oplus 0_n$ para todo n natural, donde 0_n es la matriz nula en $M_n(A)$,*

2. *si $p \sim_0 p'$ y $q \sim_0 q'$, entonces $p \oplus q \sim_0 p' \oplus q'$,*

3. *$p \oplus q \sim_0 q \oplus p$,*

4. *si p, q proyecciones en $P_n(A)$ tales que $pq = 0$, entonces $p + q$ es una proyección y $p + q \sim_0 p \oplus q$,*

5. *$(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r)$.*

Demostración. (1). Sean m, n enteros positivos, y sea p una proyección en $P_m(A)$. Sea

$$u_1 = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{n+m,m}(A).$$

Entonces

$$p = \begin{pmatrix} p^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = u_1^* u_1 \sim_0 u_1 u_1^* = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \end{pmatrix} = diag(p, 0) = p \oplus 0_n.$$

(2). Si $p \sim_0 p'$ y $q \sim_0 q'$ existen v, w tales que

$$p = v^* v \quad p' = vv^* \quad q = ww^* \quad q' = ww^*.$$

Sea $u_2 = diag(v, w)$. Entonces $p \oplus q = u_2^* u_2 \sim_0 u_2 u_2^* = p' \oplus q'$.
(3). Supongamos que $p \in P_n(A)$ y $q \in P_m(A)$, definimos

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0_{n,m} & q \\ p & 0_{m,n}. \end{pmatrix}$$

donde $0_{k,l}$ es la matriz 0 en $M_{k,l}(A)$. Luego, $u_3 \in M_{n+m}(A)$ y

$$p \oplus q = u_3^* u_3 \sim_0 u_3 u_3^* = q \oplus p$$

(4). Si $n = m$ y $pq = 0$, entonces $p + q$ es una proyección, ya que al ser autoadjuntas también se cumple $0 = (pq)^* = qp$. Por ende

$$(p + q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + q.$$

Sea

$$u_4 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in M_{2n,n}(A),$$

obtenemos $p + q = u_4^* u_4 \sim_0 u_4 u_4^* = p \oplus q$, concluyendo así la demostración. □

Definición 2.1.32. *Dada una C^*-álgebra A, definimos:*

$$D(A) = P_\infty(A)/ \sim_0 .$$

Para cada $p \in P_\infty(A)$, sea $[p]_D$ su clase de equivalencia mediante la relación $\sim_0$. Definimos una suma en $D(A)$ dada por

$$[p]_D + [q]_D = [p \oplus q]_D, \qquad p, q \in P_\infty(A).$$

Por la proposición anterior, esta operación está bien definida y $(D(A), +)$ es un semigrupo abeliano.

Comentario 2.1.33. Notar que, si dos proyecciones en $M_n(A)$, para un $n \in \mathbb{N}$, están relacionadas por alguna de las siguientes relaciones $\sim$, $\sim_u$ o $\sim_h$, sus clases en $D(A)$ coinciden. Esto se deduce de la proposición 2.1.24 junto con (1) de la proposición 2.1.31.

Lema 2.1.34. *Sean p, q proyecciones en una C*-álgebra A, son equivalentes:*

1. *p ortogonal a q,*
2. *$p{+}q$ es una proyección,*
3. *$p + q \leq 1$.*

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2). Notar que $(p+q)^* = p^* + q^* = p + q$. Como $pq = 0$, entonces $0 = (pq)^* = q^*p^* = qp$. Concluyendo así que

$$(p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + q.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3). Claramente $1 - (p+q)$ es autoadjunto. Como $p+q$ es una proyección tenemos que $\mathrm{sp}(p+q) \subseteq \{0,1\}$, por ende $\mathrm{sp}(1-(p+q)) = 1 - \mathrm{sp}(p+q) \subseteq \{1,0\}$. Concluyendo así que $1-(p+q)$ es un elemento positivo y luego $1 \geq p + q$.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Utilizaremos que si $0 \leq h_1 \leq h_2$ entonces $xh_1x^* \leq xh_2x^*$ para todo $x \in A$. Mediante la desigualdad recién mencionada se obtiene $p(q+p)p \leq p$, por ende $pqp \leq 0$. Ahora $pqp = (qp)^*(qp)$ concluyendo que $pqp \geq 0$. Luego $pqp = 0$ y $0 = ||pqp|| = ||(qp)^*(qp)|| = ||qp||^2$. □

Lema 2.1.35. *Sea A una C*-álgebra y $p_1, \ldots, p_N$ proyecciones en A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$p_1, \ldots, p_N$ son mutuamente ortogonales,*
2. *$p_1 + \cdots + p_N$ es una proyección,*
3. *$p_1 + \cdots + p_N \leq 1$.*

Demostración. Se prueba directamente del lema anterior. □

Lema 2.1.36. *Sea A una C*-álgebra con unidad. Si $v_1, \ldots, v_n$ isometrías parciales de A y*

$$\sum_{j=1}^{n} v_j^* v_j = \sum_{j=1}^{n} v_j v_j^* = 1_A,$$

entonces $\sum\limits_{j=1}^{n} v_j$ es unitario.

Demostración. Definimos $p_j = v_j^* v_j$ y $q_j = v_j v_j^*$, por el lema anterior tenemos que p_j son mutuamente ortogonales y q_j también lo son. Notar que

$$(\sum_{j=1}^{n} v_j)(\sum_{j=1}^{n} v_j^*) = \sum_{j,i}^{n} v_i v_j^*.$$

Utilizando las igualdades de (2.2) tenemos lo siguiente

$$\sum_{j,i}^{n} v_i v_j^* = \sum_{j,i}^{n} v_i p_i p_j v_j^* = \sum_{j=1}^{n} v_j p_j v_j^*.$$

Luego como $v_j = v_j v_j^* v_j$, vemos:

$$v_j p_j v_j^* = v_j v_j^* v_j v_j^* = v_j v_j^*.$$

Concluyendo asi

$$(\sum_{j=1}^{n} v_j)(\sum_{j=1}^{n} v_j^*) = \sum_{j=1}^{n} v_j v_j^* = 1.$$

Con una cuenta similar pero utilizando $v_j = v_j q_j$ concluimos que es unitario. $\square$

2.2. K_0 de C*-álgebras con unidad

2.2.1. Definición del grupo K_0 para C*-álgebras con unidad

Construcción del grupo de Grothendieck

En la sección anterior, partiendo de una C^*-álgebra A, obtuvimos un semigrupo abeliano. Ahora, a partir de éste, formaremos un grupo añadiendo los elementos inversos.

Sea $(S, +)$ un semigrupo abeliano. Definimos una relación de equivalencia $\sim$ en $S \times S$ dada por

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \textit{ si solo si existe } z \in S \textit{ tal que } x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z.$$

Veamos que $\sim$ es una relación de equivalencia. Claramente es reflexiva ya que en este caso $z = 0$ funciona. La simetría también es trivial, veamos la transitividad. Sean $x_i, y_i \in S$ tales que

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad y \quad (x_2, y_2) \sim (x_3, y_3),$$

entonces existen $z, w \in S$ tales que

$$x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z \quad y \quad x_2 + y_3 + w = x_3 + y_2 + w.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} x_1 + y_3 + (y_2 + z + w) &= x_1 + y_2 + z + (y_3 + w) \\ &= z + y_1 + x_2 + y_3 + w \\ &= z + y_1 + x_3 + y_2 + w \\ &= y_1 + x_3 + (z + y_1 + w), \end{aligned}$$

concluyendo así que $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$.

Definición 2.2.1. *Dado un semigrupo abeliano $(S, +)$ definimos el* ***grupo de Grothendieck*** *de S ($G(S)$) como el cociente $\frac{S \times S}{\sim}$. Denotamos $\langle x, y \rangle$ la clase de equivalencia en $G(S)$ de (x, y). La operación*

$$\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle,$$

le da estructura de grupo abeliano a $G(S)$.

Comentario 2.2.2. Veamos que la operación está definida y existen las inversas. Sean

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ y } (x_3, y_3) \sim (x_4, y_4),$$

existen $z, w \in S$ tales que

$$x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z \quad y \quad x_3 + y_4 + w = y_3 + x_4 + w.$$

Luego

$$\begin{aligned}(x_1 + x_3) + (y_2 + y_4) + (w + z) &= x_2 + y_1 + z + y_3 + x_4 + w \\ &= (y_1 + y_3) + (x_2 + x_4) + (z + w).\end{aligned}$$

Concluyendo así $(x_1 + x_3, y_1 + y_3) \sim (x_2 + x_4, y_2 + y_4)$.

Notar que el neutro en el grupo es $\langle x, x\rangle$ para $x \in S$ cualquiera, ya que

$$x_1 + y_2 + x = x_1 + x + y_2$$

entonces $\langle x_1 + x, y_2 + x\rangle = \langle x_1, y_2\rangle$. Obtenemos $-\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ ya que $\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \langle x + y, y + x\rangle$ el cual es el 0 en este grupo por lo anterior.

Tomando $y \in S$. El morfismo

$$\gamma_S : S \to G(S) : x \to \langle x + y, y\rangle,$$

es independiente de la elección de y, y γ_S es aditivo. Lo llamaremos el morfismo de Grothendieck.

Definición 2.2.3. *Un semigrupo $(S, +)$ se dice que tiene la **propiedad de cancelativa** si, siempre que x, y, z son elementos en S tales que $x + z = y + z$ entonces $x = y$.*

Proposición 2.2.4. *La construcción de Grothendieck cumple las siguientes propiedades*

1. *H grupo abeliano y $\varphi : S \to H$ es un morfismo aditivo, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\psi : G(S) \to H$ tal que*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\gamma_S"'] & & H \\ & G(S) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

   conmuta.

2. *Para todo morfismo aditivo $\varphi : S \to T$ entre dos semigrupos S y T, existe un homomorfismo de grupos $G(\varphi) : G(S) \to G(T)$ tal que*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma_S"'] & T \arrow[d, "\gamma_T"] \\ G(S) \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(T) \end{tikzcd}$$

   conmuta.

3. *$G(S) = \{\gamma_S(x) - \gamma_S(y) : x, y \in S\}$*

4. *Sean x, y elementos de S. Entonces $\gamma_S(x) = \gamma_S(y)$ si solo si $x + z = y + z$ para un $z \in S$.*

5. *El morfismo de Grothendieck $\gamma_S : S \to G(S)$ es inyectivo si solo si S tiene la propiedad cancelativa.*

6. *Sea $(H, +)$ un grupo abeliano, y sea S un subconjunto no vacío de H. Entonces si S es cerrado bajo la suma, entonces $(S, +)$ es un semigrupo abeliano con la propiedad cancelativa, $G(S)$ es isomorfo al subgrupo H_0 generado por S, y $H_0 = x - y : y \in S$.*

Demostración. Primero probaremos (3). Todo elemento en $G(S)$ es de la forma $\langle x, y\rangle$ con $x, y \in S$, y

$$\langle x, y\rangle = \langle x + y, y\rangle - \langle x + y, x\rangle = \gamma_S(x) - \gamma_S(y).$$

Veamos ahora (1). Si $\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle$, entonces $x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$ para un $z \in S$, luego

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(z) = \varphi(x_2) + \varphi(y_1) + \varphi(z)$$

en H, lo que implica $\varphi(x_1) - \varphi(y_1) = \varphi(x_2) - \varphi(y_2)$. Por ende el morfismo $S \times S \to H : (x, y) \to \varphi(x) - \varphi(y)$ baja al cociente $G(S)$ y hace conmutar al diagrama. La aditividad de ψ viene dada por la aditividad de φ. Y la unicidad del homomorifsmo en caso de que el diagrama conmute sigue de (3).

Veamos (2). Por (1) el morfismo aditivo $\gamma_T \circ \varphi : S \to G(T)$ se extiende a un homomorfismo de grupos $G(\varphi) : G(S) \to G(T)$ tal que el diagrama conmuta.

(4). Supongamos que $x + z = y + z$ para un $z \in S$, utilizando que γ_S es aditivo y que $G(S)$ es un grupo obtenemos $\gamma_S(x) = \gamma_S(y)$. Recíprocamente supongamos que $\gamma_S(x) = \gamma_S(y)$. Entonces $\langle x + y, y\rangle = \langle y + x, x\rangle$, por ende

$$(x + y) + x + w = (y + x) + y + w$$

para un $w \in S$. Esto muestra que

$$x + z = y + z$$

donde $z = x + y + w$.

(5) Es inmediato de (4).

(6) Aplicando (1) con el morfismo $i : S \to H$ existe un homomorfismo de grupos $\psi : G(S) \to H$ tal que $\psi(\gamma_S(x)) = x$ para todo $x \in S$. Por (3) la imagen de ψ es $x - y$ con $x, y \in S$. Si $\psi(\gamma_S(x) - \gamma_S(y)) = 0$ entonces $x = y$, entonces $\gamma_S(x) = \gamma_S(y)$. Concluyendo ψ es inyectivo. □

Ejemplo 2.2.5. Consideramos el semigrupo $\mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ con la suma usual en $\mathbb{Z}^+$ y $n + \infty = \infty + n = \infty$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y $\infty + \infty = \infty$, entonces $G(\mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}) = 0$.

Demostración. Para todo $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ tenemos que $x_1 + \infty = y_1 + \infty = \infty$, entonces $\langle x_1, y_1\rangle = \langle \infty, \infty\rangle = 0$. □

Definición 2.2.6 (El grupo K_0)**.** *Dada A una C*-álgebra con unidad, y sea $(D(A), +)$ el semigrupo abeliano dado en 2.1.32. Definimos $K_0(A)$ como el grupo de Grothendieck de $D(A)$:*

$$\boxed{K_0(A) = G(D(A)).}$$

Definimos $[,]_0 : P_\infty(A) \to K_0(A)$ *dado por*

$$[p]_0 = \gamma([p]_D) \in K_0(A),\ p \in P_\infty(A),$$

donde $\gamma : D(A) \to K_0(A)$ *es el morfismo de Grothendieck.*

Comentario 2.2.7 (El grupo $K_{00}(A)$). La definición de $K_0(A)$ prescinde de la unidad de A. Cuando hacemos la misma construcción para A una C*-álgebra sin unidad denominamos a este grupo $K_{00}(A)$.

Sea $[.]_{00} : P_\infty(A) \to K_{00}(A)$ el morfismo dado por $[p]_{00} = \gamma[p]_D$, para todo $p \in P_\infty(A)$. Luego daremos otra definición para $K_0(A)$ donde A no tiene unidad, la cual no será igual a $K_{00}(A)$. El funtor K_{00} tiene la debilidad de no ser escinde-exacto, propiedad definida más adelante.

Definición 2.2.8. *Dados* p, q *proyecciones en* $P_\infty(A)$*, entonces* $p \sim_s q$ *si solo si* $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$ *para una proyección* $r \in P_\infty(A)$*. La relación* $\sim_s$ *se llama relación estable.*

Comentario 2.2.9. Si A tiene unidad y p, q son proyecciones en $P_\infty(A)$. Denominamos a 1_n la unidad de $M_n(A)$. Entonces $p \sim_s q$ si solo si $p \oplus 1_n \sim_0 q \oplus 1_n$ para un entero positivo n. Ya que si $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$, para un $r \in P_n(A)$, tenemos

$$(1 - r)r = r - r^2 = r - r = 0.$$

Por la proposición 2.1.31 (4), obtenemos $1_n = (1_n - r) + r \sim_0 (1_n - r) \oplus r \sim_0 r \oplus (1_n - r)$. Lo anterior junto a la proposición 2.1.31 (2) nos da lo siguiente

$$p \oplus 1_n \sim_0 p \oplus r \oplus (1_n - r) \sim_0 q \oplus r \oplus (1_n - r) \sim_0 q \oplus 1_n.$$

Proposición 2.2.10 (Imagen estándar de K_0)**.** *Sea* A *una C*-álgebra con unidad. Entonces*

$$\begin{aligned} K_0(A) &= \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in P_\infty(A)\} \\ &= \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in P_n(A),\ n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

También tenemos

1. $[p \oplus q]_0 = [p]_0 + [q]_0$ *para todas las proyecciones* $p, q \in P_\infty(A)$,
2. $[0_A]_0 = 0$*, donde* 0_A *es la proyección cero en* A*.*
3. *Si* p, q *pertenecen a* $P_n(A)$ *para algún* n *y* $p \sim_h q$ *en* $P_n(A)$*, entonces* $[p]_0 = [q]_0$,
4. *si* p, q *son proyecciones mutuamente ortogonales en* $P_n(A)$*, entonces* $[p + q]_0 = [p]_0 + [q]_0$,
5. *para todos* $p, q \in P_\infty(A)$, $[p]_0 = [q]_0$ *si solo si* $p \sim_s q$*.*

Demostración. La primera igualdad de (2.3) se obtiene de la parte (3) de la proposición 2.2.4. Entonces, si $g \in K_0(A)$, existen $p' \in P_k(A)$ y $q' \in P_l(A)$ tales que $g = [p']_0 - [q']_0$. Tomemos n mayor que k y l, y definamos $p = p' \oplus 0_{n-k}$ y $q = q' \oplus 0_{n-l}$. Tenemos p, q proyecciones en $P_n(A)$ y, por la proposición 2.1.31 (1), conseguimos $p \sim_0 p'$ y $q \sim_0 q'$. Concluyendo así

$$g = [p]_0 - [q]_0.$$

(1). Tenemos $[p \oplus q]_0 = \gamma([p \oplus q]_D) = \gamma([p]_D + [q]_D) = \gamma([p]_D) + \gamma([q]_D) = [p]_0 + [q]_0$.

(2). Como $0_A \oplus 0_A \sim_0 0_A$, se sigue de (1) que $[0_A]_0 + [0_A]_0 = [0_A]_0$, por ende $[0_A]_0 = 0$.
(3). Esto viene de las siguientes implicaciones

$$p \sim_h q \Longrightarrow p \sim q \Longrightarrow p \sim_0 q \Longleftrightarrow [p]_D = [q]_D \Longrightarrow [p]_0 = [q]_0.$$

(4). Por la proposición 2.1.31 tenemos $p + q \sim_0 p \oplus q$, luego $[p+q]_0 = [p \oplus q]_0$.
(5). Si $[p]_0 = [q]_0$, existe una proyección r tal que $[p]_D + [r]_D = [q]_D + [r]_D$ por la proposición 2.2.4 (4). Entonces $[p \oplus r]_D = [q \oplus r]_D$. □

Proposición 2.2.11. *[Propiedad universal de K_0]*
Dada A una C-álgebra con unidad, G un grupo abeliano y $v : P_\infty(A) \to G$ un morfismo que cumple*

- $v(p \oplus q) = v(p) + v(q)$
- $v(0_A) = 0$
- *si $p, q \in P_n(A)$ para un n y $p \sim_h q$ en $P_n(A)$, entonces $v(p) = v(q)$.*

Entonces existe un único homomorfismo de grupos $\alpha : K_0(A) \to G$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
P_\infty(A) \arrow[d, "{[.]_0}"'] \arrow[dr, "v"] & \\
K_0(A) \arrow[r, "\alpha"'] & G
\end{tikzcd}$$

Demostración. Primero probaremos que dadas p, q proyecciones en $P_\infty(A)$ que $p \sim_0 q$ implica $v(p) = v(q)$. Sean $k, l \in \mathbb{N}$ tales que $p \in P_k(A)$ y $q \in P_l(A)$, y $n \geq max\{l, k\}$. Definimos $p' = p \oplus 0_{n-k}$, $q' = p \oplus 0_{n-l}$. Tenemos $p', q' \in P_n(A)$ tales que $p' \sim_0 p \sim_0 q \sim_0 q'$, por ende $p' \sim q'$. Por (1) de la proposición 2.1.24

$$\begin{pmatrix} p' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } M_{2n,2n}(A)$$

y por (2) de la misma proposición

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} p' & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} & 0_{2n} \\ 0_{2n} & 0_{2n} \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} q' & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} & 0_{2n} \\ 0_{2n} & 0_{2n} \end{pmatrix} \text{ en } P_{4n,4n}(A).$$

Concluimos que $v(p) = v(p) + \underbrace{v(0) + \cdots + v(0)}_{\text{4n-k}} = v(p' \oplus 0_n) = v(q' \oplus 0_n) = v(q)$.

Se sigue que el morfismo $\beta : D(A) \to G$ dado por $\beta([p]_D) = v(p)$ está bien definido. La aditividad para β viene de lo siguiente

$$\beta([p]_D + [q]_D) = \beta([p \oplus q]_D) = v(p \oplus q) = v(p) + v(q) = v([p]_D) + v([q]_D).$$

Utilizando (1) de la proposición 2.2.4 nos da un homomorfismo de grupos $\alpha : K_0(A) \to G$ que hace al diagrama conmutar, la unicidad viene dada por (3) de la proposición 2.2.4 . □

2.2.2. Funtorialidad de K_0

La categoría **C*-alg**, es la categoría de las C*-álgebras donde sus morfismos son los *-homomorfismos. También consideramos la categoría **Ab** de los grupos abelianos, donde sus morfismos son los homomorfismos de grupos.

Un objeto N en una categoría **C** es llamado el objeto cero si $Mor(A, N)$ consiste de solo un elemento para todo objeto A en **C**. Las categorías **C*-alg** y **Ab** ambas contienen un cero, para el cual usaremos la notación $\{0\}$.

El funtor K_0 para C*-álgebras unitales.

Dadas A, B dos C*-algebras unitales y $\varphi : A \to B$ un *-homomorfismo. Asociaremos a φ un homomorfismo de grupos $K(\varphi) : K_0(A) \to K_0(B)$. Primero extendemos φ a un *-homomorfismo $M_n(A) \to M_n(B)$, un *-homomorfismo lleva proyecciones en proyecciones, por ende φ lleva $P_\infty(A)$ en $P_\infty(B)$. Definimos $v : P_\infty(A) \to K_0(B)$ dado por $v(p) = [\varphi(p)]_0$. Entonces v cumple 1,2 y 3 de la proposición 2.2.11, luego v se extiende de forma única a un homomorfismo de grupos $K_0(\varphi) : K_0(A) \to K_0(B)$ dado por

$$K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0, \ p \in P_\infty(A).$$

En otras palabras, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P_\infty(A) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{[\cdot]_0}"'] & P_\infty(B) \arrow[d, "{[\cdot]_0}"] \\
K_0(A) \arrow[r, "K_0(\varphi)"'] & K_0(B)
\end{tikzcd}$$

Si A y B son C*-álgebras, entonces denominamos al *-homomorfismo $0_{B,A}$ de $A \to B$ al *-homorfismo que lleva todos los elementos 0_B. El *-homomorfismo identidad $A \to A$ es denominado Id_A.

Proposición 2.2.12 (Funtorialidad del K_0 para el caso unital)**.**

1. *Para toda C*-álgebra unital A,* $K_0(Id_A) = Id_{K_0(A)}$.

2. *Si* A, B *y* C *son C*-álgebras unital y* $\varphi : A \to B$ *y* $\psi : B \to C$ *son *-homomorfismos, entonces* $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$.

3. $K_0(\{0\}) = \{0\}$.

4. *Para todo par de C*-álgebras* A *y* B, $K_0(0_{B,A}) = 0_{K_0(B),K_0(A)}$.

Demostración. Por definición de $K_0()$ tenemos

$$K_0(Id_A)([p]_0) = [p]_0 \ \ y \ \ K_0(\psi \circ \varphi)([p]_0) = K_0(\psi(\varphi([p]_0))) = K_0(\psi)(K_0(\varphi)([p]_0)),$$

para todo $p \in P_\infty(A)$. Utilizando la imagen estándar de K_0 (2.3), concluimos (1) y (2).

(3). Tenemos que $P_n(\{0\}) = \{0_n\}$. Las proyecciones $0 = 0_1, \dots, 0_n, \dots$ son todas equivalentes, por ende $D(\{0\}) = \{[0]_D\}$. Luego $K_0(\{0\}) = G(\{0\}) = \{0\}$.

(4). Como $0_{B,A} = 0_{B,0} \circ 0_{0,A} : A \to \{0\} \to B$, (4) sigue de (3) y (2).

□

Definición 2.2.13 (Equivalencia homotópica)**.** *Sean A y B dos C*-álgebras. Dados dos *-homomorfismos $\psi, \varphi : A \to B$ se dice que son* ***homotópicos****, $\phi \sim_h \psi$, si existe un camino de *-homomorfismos $\varphi_t : A \to B$, $t \in [0,1]$, tales que $t \to \varphi_t(a)$ es un mapa continuo de $[0,1]$ a B, para todo $a \in A$, también se pide $\varphi_0 = \varphi$ y $\varphi_1 = \psi$.*

Definición 2.2.14. *Decimos que dos C*-álgebras A y B son* ***homotópicamente equivalentes*** *si existen *-homomorfismos $\varphi : A \to B$ y $\psi : B \to A$ tales que*

$$\varphi \circ \psi \sim_h Id_B \quad y \quad \psi \circ \varphi \sim_h Id_A.$$

Proposición 2.2.15 (Invarianza homotópica de K_0)**.** *Sean A y B dos C*-álgebras unitarias.*

1. *Si $\varphi, \psi : A \to B$ son dos *-homomorfismos homotópicos, entonces $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.*
2. *Si A y B son homotópicamente equivalentes, entonces $K_0(A)$ es isomorfo a $K_0(B)$.*

Demostración. (1). Sea $\varphi_t : A \to B$ la homotopía entre φ y ψ. Para cada $t \in [0,1]$ podemos extender este *-homomorfismo a $\varphi_t : M_n(A) \to M_n(B)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Luego utilizando las desigualdades (1.2) y fijando $a \in M_n(A)$, obtenemos que la función $[0,1] \to M_n(B) : t \to \varphi_t(a)$ es continua. Para toda proyección $p \in P_n(A)$, el camino $t \to \varphi_t(p)$ es continuo, entonces $\varphi(p) = \varphi_0(p) \sim_h \varphi_1(p) = \psi(p)$. Esto muestra que

$$K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0 = [\psi(p)]_0 = K_0(\psi)([p]_0).$$

Usando la igualdad (2.3) concluimos $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.

(2). Sean $\varphi : A \to B$ y $\psi : B \to A$ los *-homomorfismos dados por la definición de ser homotópicamente equivalentes. Entonces utilizando la parte (1) tenemos

$$K_0(\varphi) \circ K_0(\psi) = K_0(\varphi \circ \psi) = K_0(Id_B) = Id_{K_0(B)}$$
$$K_0(\psi) \circ K_0(\varphi) = K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(Id_A) = Id_{K_0(A)}.$$

□

Definición 2.2.16. *Sean $\varphi, \psi : A \to B$ dos *-homomorfismos entre C*-álgebras. Decimos que estos *-homomorfismos son mutuamente ortogonales, $\psi \perp \varphi$, si $\varphi(x)\psi(y) = 0$ para todo $x, y \in A$.*

Lema 2.2.17. *Si A y B son dos C*-álgebras con unidad, y si $\varphi, \psi : A \to B$ son *-homomorfismos mutuamente ortogonales, entonces $\varphi + \psi : A \to B$ es un *-homomorfismo y $K_0(\varphi + \psi) = K_0(\varphi) + K_0(\psi)$.*

Demostración. Es trivial verificar que $\psi + \varphi$ es un *-homomorfismo. Los *-homomorfismos $\varphi_n, \psi_n : M_n(A) \to M_n(B)$ inducidos por φ y ψ son ortogonales, y $(\varphi + \psi)_n = \varphi_n + \psi_n$. Utilizando (2.3) y 2.2.10 (4), tenemos que para todo $p \in P_n(A)$

$$\begin{aligned} K_0(\varphi + \psi)([p]_0) &= [(\psi + \varphi)_n(p)]_0 = [\varphi_n(p) + \psi_n(p)]_0 \\ &= [\varphi_n(p)]_0 + [\psi_n(p)]_0 \\ &= K_0(\varphi)([p]_0) + K_0(\psi)([p]_0). \end{aligned}$$

Esto muestra que $K_0(\psi + \varphi) = K_0(\psi) + K_0(\varphi)$. □

2.2.3. Ejemplos de K_0

Trazas y cálculos de grupos de K-teoría

Sea A una C*-álgebra. Una traza acotada en A es una funcional lineal acotado $\tau : A \to \mathbb{C}$ con la *propiedad de traza*:

$$\tau(ab) = \tau(ba), \ \forall \ a, b \in A.$$

La propiedad de traza implica $\tau(p) = \tau(q)$ cuando p, q son equivalentes Murray-von Neumann en A.

- Decimos que la traza τ es *positiva* si $\tau(a) \geq 0$ para todo elemento positivo $a \in A$.
- Cuando A es tiene unidad y τ es traza positiva con $\tau(1_A) = 1$, entonces τ es llamada *estado traza*.

Para toda traza τ en una C*-álgebra A existe una traza τ_n en $M_n(A)$ tal que $\tau_n(diag(a, 0, \ldots, 0)) = \tau(a) \ \ \forall \ a \in A$, este τ_n está dado por

$$\tau_n \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \tau(a_{i,i}).$$

Una traza τ en una C*-álgebra A da lugar a una función $\tau : P_\infty(A) \to \mathbb{C}$, esta función cumple las propiedades (1), (2) y (3) de la proposición 2.2.11. Para ver que (3) se cumple usamos que $p \sim_h q$ implica $p \sim q$. Luego existe un único homomorfismo de grupos $K_0(\tau) : K_0(A) \to \mathbb{C}$ tal que

$$K_0(\tau)([p]_0) = \tau(p), \ p \in P_\infty(A).$$

Si τ es positivo tenemos que $K_0(\tau)([p]_0) = \tau(p)$ es un número real positivo para todo $p \in P_\infty(A)$, y $K_0(\tau)$ lleva $K_0(A)$ en $\mathbb{R}$.

Lema 2.2.18. *Sea $\tau : A \to \mathbb{C}$ un funcional lineal en una C*-álgebra A. Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *τ es una traza,*
2. *$\tau(xx^*) = \tau(x^*x)$ para todo $x \in A$,*
3. *$\tau(uau^*) = \tau(a)$ para todo elemento unitario $u \in \widetilde{A}$ y $a \in A$ positivo.*

Demostración. Que la afirmación (1) implica (2) es trivial por definición de traza. Veamos (2) implica (3), tenemos que

$$\tau(uau^*) = \tau(ua^{1/2}a^{1/2}u^*) = \tau((ua^{1/2})(ua^{1/2})^*) = \tau((ua^{1/2})^*(ua^{1/2})) = \tau(a^{1/2}u^*ua^{1/2}) = \tau(a),$$

Para todo $u \in \widetilde{A}$ unitario y $a \in A$ positivo.

Ahora vamos a probar que (3) implica (1). Sea u un elemento unitario en $\widetilde{A}$ y $x \in A$. Podemos escribir x como suma de dos elementos autoadjuntos $x = v + iw$. A su vez, cada uno de estos autoadjuntos puede descomponerse como

$$v = v_1 - v_2, \qquad w = v_3 - v_4,$$

con v_1, v_2, v_3, v_4 positivos. Luego

$$\begin{aligned}\tau(uxu^*) &= \tau\Big(u(v_1 - v_2 + iv_3 - iv_4)u^*\Big)\\ &= \tau(uv_1u^*) - \tau(uv_2u^*) + i\tau(uv_3u^*) - i\tau(uv_4u^*)\\ &= \tau(v_1 - v_2 + iv_3 - iv_4) = \tau(x).\end{aligned}$$

Por tanto, para todo $x \in A$ y $u \in \widetilde{A}$ unitario tenemos:

$$\tau(ux) = \tau(uxuu^*) = \tau(xu).$$

Todo elemento autoadjunto x con $\|x\| \leq 1$ es combinación lineal de los elementos unitarios $x + i\sqrt{1 - x^2}$ y $x - i\sqrt{1 - x^2}$. Con esto y lo anterior concluimos que cualquier elemento $x \in A$ se puede escribir como combinación lineal de cuatro elementos unitarios de $\widetilde{A}$. De ello, y por lo recién probado, se sigue (1). □

Ejemplo 2.2.19. Sea $Tr : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ la traza estándar dada por

$$Tr \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i}.$$

Dado $g \in K_0(M_n(\mathbb{C}))$, entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y $p, q \in M_k(M_n(\mathbb{C}))$ tales que

$$g = [p]_0 - [q]_0.$$

Dado que p y q pertenecen a $M_k(M_n(\mathbb{C}))$ y son proyecciones, considerándolas como matrices en $M_{nk}(\mathbb{C})$, son autoadjuntas y poseen valores propios que son 1 o 0. Por el teorema espectral, existe una base ortonormal formada por vectores propios p, lo mismo pasa con q. Así, las imágenes de p y q están generadas por sus vectores propios correspondientes a valores propios distintos de 0. Utilizando que la traza de una matriz es igual a la suma de sus valores propios, podemos llegar a la conclusión de que

$$Tr(p) = dim(p(\mathbb{C}^{kn})) \quad y \quad Tr(q) = dim(q(\mathbb{C}^{kn})).$$

Se sigue

$$K_0(Tr)(g) = Tr(p) - Tr(q) = dim(p(\mathbb{C}^{kn})) - dim(q(\mathbb{C}^{kn})).$$

Por ende $K_0(Tr) : K_0(M_n(\mathbb{C})) \to \mathbb{Z}$. Si $K_0(Tr)(g) = 0$, entonces $Tr(p) = Tr(q)$. Ambas se pueden diagonalizar mediante la misma matriz D, dado que $Tr(p)$ representa la cantidad de valores propios iguales a 1. Por diagonalización tenemos:

$$p = QDQ^* \text{ y } q = ADA^*.$$

Por lo tanto

$$p = QA^* qAQ^*,$$

donde QA^* es un elemento unitario. De acuerdo con la proposición 2.1.18, tenemos que $p \sim q$, lo que implica que $g = [p]_0 - [q]_0 = 0$. Por lo tanto, $K_0(Tr)$ es inyectivo. Consideremos e como la matriz en $M_n(\mathbb{C})$ donde la entrada $e_{1,1} = 1$ y las demás son 0. Entonces, $K_0(Tr)([e]_0) = 1$, lo que implica que la imagen de $K_0(Tr)$ es $\mathbb{Z}$, y tenemos que $K_0(M_n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}$.

Ejemplo 2.2.20. Si H es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, entonces $K_0(B(H)) = 0$.

Demostración. Sea $H^n = \bigoplus_{i=1}^{n} H$. Usamos la identificación $M_n(B(H)) = B(H^n)$. El morfismo $dim : P_\infty(B(H)) \to \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$ dado por

$$dim(p) = dim(p(H^n)),\ p \in P_n(B(H)) = P(B(H^n))$$

es sobreyectivo.

Probaremos que para todo $p, q \in B(H^n)$ tenemos $p \sim q$ si solo si $dim(q) = dim(p)$. Si $p \sim q$, entonces $p = v^*v$ y $q = vv^*$. Consideremos el mapa $v : p(H^n) \to q(H^n)$, veamos que está bien definido

$$vp(h) = vv^*v(h) = qv(h),$$

entonces $Im(v \circ p) \subseteq Im(q)$. Como $q = vv^*$, tenemos que $Im(q) \subseteq Im(v)$. También obtuvimos

$$vp(h) = qv(h),$$

para todo $h \in H^n$. Definimos $h_1 = q(h)$ con $h \in H^n$, entonces existe $h_2 \in H^n$ tal que $v(h_2) = h_1$

$$vp(h_2) = qv(h_2) = q(q(h)) = q(h) = h_1,$$

concluyendo así que v es sobreyectiva. Ahora veamos que $v : p(H^n) \to q(H^n)$ es un isomorfismo entre espacios de Hilbert, eso es suficiente para concluir que sus dimensiones son iguales.

$$\langle vp(h), vp(h') \rangle = \langle p(h), v^*vp(h') \rangle = \langle p(h), p(h') \rangle.$$

Consideremos el caso en que $dim(p) = dim(q)$. Es un resultado conocido en análisis funcional que dos espacios de Hilbert H_1 y H_2 son isométricamente isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión. Supongamos este isomorfismo v entre pH y qH, y luego lo extendemos a un operador en H definiendo $v(x) = 0$ si x pertenece al complemento ortogonal de pH. Es fácil ver que $v^*v = p$ y $vv^* = q$, concluyendo así $p \sim q$.

Sigamos con la demostración de $K_0(B(H)) = 0$. Dado que $dim(p \oplus 0) = dim(p)$, podemos afirmar que para toda proyección $p, q \in P_\infty(B(H))$ se cumple $dim(p) = dim(q)$ si y solo si $p \sim_0 q$. La dimensión es aditiva, es decir, $dim(p \oplus q) = dim(p) + dim(q)$, por lo tanto, $d([p]_D) = dim(p)$ está bien definida y actúa como un isomorfismo de semigrupos $d : D(B(H)) \to \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$. Finalmente, concluimos que $K_0(B(H))$ es isomorfo al grupo de Grothendieck de $\{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$, que es 0. $\square$

Ejemplo 2.2.21. Para todo espacio X Hausdorff, compacto y conexo, existe un homomorfismo de grupos sobreyectivo
$$\dim\colon K_0(C(X)) \longrightarrow \mathbb{Z},$$
el cual cumple
$$\dim([p]_0) = \mathrm{Tr}(p(x)), \quad p \in P_\infty(C(X)),$$
donde $x \in X$ y Tr es la traza estándar en $M_n(\mathbb{C})$.

Demostración. Comenzamos probando que $\mathrm{Tr}(p(x))$ es independiente de x. La función $x \mapsto \mathrm{Tr}(p(x))$ pertenece a $C(X, \mathbb{Z})$, como X es conexo la función es constante.

El morfismo
$$\tau_x\colon C(X) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \tau_x(f) = f(x),$$
es una traza en $C(X)$ para todo $x \in X$. Por ende, τ_x induce un homomorfismo de grupos
$$K_0(\tau_x)\colon K_0(C(X)) \longrightarrow \mathbb{C},$$
el cual cumple
$$K_0(\tau_x)([p]_0) = \mathrm{Tr}(p(x)), \quad \forall\, p \in P_\infty(C(X)).$$

Entonces, utilizando la imagen estándar de K_0, concluimos que $K_0(\tau_x)$ no depende de x y tiene imagen en $\mathbb{Z}$. La unidad 1 en $C(X)$ es una proyección, y se cumple $1 = 1(x) = K_0(\tau_x)([1]_0)$, por ende, $K_0(\tau_x)$ es sobreyectiva. $\square$

Ejemplo 2.2.22. Un espacio Hausdorff compacto X es llamado contráctil si para un $x_0 \in X$ existe una función continua $\alpha : [0, 1] \times X \to X$ tal que $\alpha(1, x) = x$ y $\alpha(0, x) = x_0$, $\forall\ x \in X$. En este caso, el morfismo definido en el ejemplo anterior $dim : K_0(C(X)) \to \mathbb{Z}$ es un isomorfismo.

Demostración. Para todo $t \in [0, 1]$, definimos el *-homomorfismo
$$\varphi_t\colon C(X) \longrightarrow C(X), \quad \varphi_t(f)(x) = f(\alpha(t, x)).$$
Entonces $\varphi_0(f)(x) = f(x_0)$ y $\varphi_1(f)(x) = f(x)$.

Veamos que la función $t \mapsto \varphi_t(f)$ es continua para todo $f \in C(X)$. Fijamos $t_0 \in [0, 1]$ y $\epsilon > 0$. Entonces, para todo $(x, t) \in X \times I$, existen entornos $V \times B(t, r)$ donde se cumple
$$\|f(\alpha(x, t)) - f(\alpha(y, \lambda))\| < \epsilon/2, \quad \forall (y, \lambda) \in V \times B(t, r).$$
Como $X \times I$ es compacto, existe un cubrimiento finito de estos entornos
$$\{V_i \times B(t_i, r_i/2)\}_{i=1}^n.$$
Estos son entornos de ciertos (x_i, t_i), obtenidos por la continuidad de $f \circ \alpha$. Definimos
$$\delta = \min\{r_i : i = 1, \ldots, n\} > 0.$$
Sea $t \in [0, 1]$ tal que $|t - t_0| < \delta/2$. Para todo $x \in X$, existe β tal que $(x, t_0) \in V_\beta \times B(t_\beta, r_\beta/2)$. Entonces
$$|t_\beta - t| \leq |t_\beta - t_0| + |t_0 - t| < r_\beta/2 + \delta/2 \leq r_\beta.$$
Luego, $(x, t) \in V_\beta \times B(t_\beta, r_\beta)$, y por la construcción de los entornos, se cumple
$$\|f(\alpha(x_\beta, t_\beta)) - f(\alpha(x, t))\| < \epsilon/2.$$

Concluimos así que

$$\|f(\alpha(x,t)) - f(\alpha(x,t_0))\| \leq \|f(\alpha(x,t)) - f(\alpha(x_\beta,t_\beta))\| + \|f(\alpha(x_\beta,t_\beta)) - f(\alpha(x_0,t_0))\| < \epsilon, \quad \forall x \in X.$$

Por ende,

$$\|\varphi_t(f) - \varphi_{t_0}(f)\| < \epsilon.$$

Luego, por la continuidad obtenemos $\varphi_0 \sim_h \mathrm{Id}$. Definimos $\varphi\colon C(X) \to \mathbb{C}$ y $\psi\colon \mathbb{C} \to C(X)$ mediante

$$\varphi(f) = f(x_0), \quad \psi(\lambda) = \lambda 1.$$

Entonces $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ y $\psi \circ \varphi \sim_h \mathrm{Id}$, obteniendo así

$$C(X) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} \xrightarrow{\psi} C(X)$$

como homotopía. El diagrama

$$\begin{tikzcd} K_0(C(X)) \arrow[d, "K_0(\varphi)"'] \arrow[dr, "\dim"] & \\ K_0(\mathbb{C}) \arrow[r, "K_0(\mathrm{Tr})"'] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Además, $K_0(\varphi)$ y $K_0(\mathrm{Tr})$ son isomorfismos, por ende, dim es un isomorfismo. □

Comentario 2.2.23. Observemos que utilizamos la compacidad de X al decir que toda función continua en un compacto es uniformemente continua. La demostración depende fuertemente de esto, más adelante veremos que si X no es compacto, entonces $K_0(C_0(X))$ puede ser no nulo. Por ejemplo,

$$K_0(C_0(\mathbb{R}^2)) = \mathbb{Z}.$$

2.3. Exactitud de funtores

Sea F un funtor desde la categoría de C*-álgebras a la de grupos abelianos que preserva el objeto 0, $F(\{0\}) = \{0\}$. Entonces toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

de C*-álgebras, induce una sucesión (no necesariamente exacta)

$$0 \longrightarrow F(I) \xrightarrow{F(\varphi)} F(A) \xrightarrow{F(\psi)} F(B) \longrightarrow 0 \tag{2.5}$$

de grupos abelianos.

Definición 2.3.1.

- *Si la sucesión (2.5) es exacta para toda sucesión exacta corta (2.4), decimos que el funtor F es exacto.*

- *Cuando para toda sucesión exacta corta como en* (2.4) *que ademas escinde se cumple que la sucesión (2.5) es exacta y también escinde, decimos que F es un funtor escinde-exacto.*
- *Si la sucesión (2.5) es exacta en $F(A)$, es decir $Im(F(\varphi)) = Ker(F(\psi))$ para toda sucesión exacta corta (2.4), entonces F es semiexacto.*

Veamos ahora que el funtor K_0 es un funtor que escinde-exacto.

Lema 2.3.2. *Dada una C*-álgebra con unidad A, consideremos la sucesión exacta corta*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & \widetilde{A} \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{C} \arrow[l, bend right, "\lambda"'] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Induce la siguiente sucesión exacta corta que escinde

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(i)"] & K_0(\widetilde{A}) \arrow[r, "K_0(\pi)"'] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[l, bend right, "K_0(\lambda)"'] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Demostración. Consideremos $f := 1_{\widetilde{A}} - 1_A$, es una proyección en $\widetilde{A}$. Luego, $\widetilde{A} = A + \mathbb{C}f$ y $af = fa = 0$ para todo $a \in A$. Se define un *-homomorifsmo

$$\mu : \widetilde{A} \to A,\ \lambda' : \mathbb{C} \to \widetilde{A},$$

dado por $\mu(a + \alpha f) = a$ y $\lambda'(\alpha) = \alpha f$. Entonces

$$id_A = \mu \circ i,\ Id_{\widetilde{A}} = i \circ \mu + \lambda' \circ \pi,\ \pi \circ i = 0,\ \pi \circ \lambda = Id_{\mathbb{C}}.$$

También tenemos que los *-homomorfismos $i \circ \mu$ y $\lambda' \circ \pi$ son ortogonales. La funtorialidad de K_0, junto con el lema 2.2.17, nos da

$$\begin{aligned} 0 &= K_0(0) = K_0(\pi \circ i) = K_0(\pi) \circ K_0(i), \\ Id_{K_0(\mathbb{C})} &= K_0(Id_{\mathbb{C}}) = K_0(\pi \circ \lambda) = K_0(\pi) \circ K_0(\lambda), \\ Id_{K_0(A)} &= K_0(Id_A) = K_0(\mu \circ i) = K_0(\mu) \circ K_0(i), \\ Id_{K_0(\widetilde{A})} &= K_0(Id_{\widetilde{A}}) = K_0(i \circ \mu + \lambda' \circ \pi) \\ &= K_0(i) \circ K_0(\mu) + K_0(\lambda') \circ K_0(\pi). \end{aligned}$$

La inyectividad de $K_0(i)$ sigue de la tercera igualdad. Por la primera, tenemos que $\mathrm{Im}(K_0(i)) \subseteq \ker(K_0(\pi))$. Si $g \in \ker(K_0(\pi))$, entonces

$$g = K_0(i)(K_0(\mu)(g))$$

la última igualdad muestra que $g \in \mathrm{Im}(K_0(i))$. La sobreyectividad de $K_0(\pi)$ se deduce de la segunda igualdad, y la escisión también. □

El problema con K_{00}

El problema con la definición de K_{00} para C*-álgebras sin unidad es que no es un funtor escinde-exacto. Veamos un ejemplo en el que esto no se cumple.

Proposición 2.3.3. *Sea X espacio conexo, localmente compacto y Hausdorff, pero no compacto. Entonces $K_{00}(C_0(X)) = 0$.*

Demostración. Identificamos $M_n(C_0(X)) = C_0(X, M_n(\mathbb{C}))$, entonces $P_n(C_0(X))$ está identificado con $P(C_0(X, M_n(\mathbb{C})))$. Sea $p \in P_n(C_0(X))$ y definimos Tr como la traza estándar en $M_n(\mathbb{C})$. La función $x \mapsto Tr(p(x))$ es una función en $C_0(X, \mathbb{Z})$, pero $C_0(X, \mathbb{Z}) = \{0\}$, ya que X es conexo y no compacto. Concluyendo así que $P_n(C_0(X)) = 0$ y, por ende, $K_{00}(C_0(X)) = 0$. □

Consideremos la siguiente sucesión exacta que escinde

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_0(\mathbb{R}^{2+} - \{\infty\}) \arrow[r, "i"'] & C(\mathbb{R}^{2+}) \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[l, bend right, "\lambda"'] & 0 \end{tikzcd}$$

Donde $\mathbb{R}^{2+}$ es la compactificación por un punto de $\mathbb{R}^2$, $\pi(f) = f(\infty)$, i es la extensión de las funciones f a $\mathbb{R}^{2+}$ definiendo $f(\infty) = 0$, y λ manda α a la función constante α. De la prueba del ejemplo 2.2.21 tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} K_0(C(\mathbb{R}^{2+})) \arrow[d, "K_0(\pi)"'] \arrow[dr, "dim"] & \\ K_0(\mathbb{C}) \arrow[r, "K_0(Tr)"'] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

y $K_0(Tr)$ es un isomorfismo por ejemplo 2.2.19. Luego $Ker(dim) = Ker(K_0(\pi))$. Tenemos la siguiente sucesión

$$\begin{tikzcd} K_{00}(\mathbb{R}^{2+} - \{\infty\}) \arrow[r, "K_{00}(i)"] & K_{00}(C(\mathbb{R}^{2+})) \arrow[r, "K_{00}(\pi)"] \arrow[d, equal] & K_{00}(\mathbb{C}) \arrow[d, equal] \\ & K_0(C(\mathbb{R}^{2+})) \arrow[r, "K_0(\pi)"'] & K_0(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Utilizando la proposición anterior, obtenemos que $K_{00}(\mathbb{R}^{2+} - \{\infty\}) = 0$. Entonces, para que la sucesión sea exacta, necesitamos que $K_0(\pi)$ sea inyectivo. Pero como $Ker(dim) = Ker(K_0(\pi))$, vemos que si la sucesión es exacta, entonces dim sería un homomorfismo inyectivo de $K_0(C(S^2)) \to \mathbb{Z}$. Más adelante veremos que $K_0(C(S^2)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, por ende, la inyectividad de este morfismo no es posible.

2.4. K_0 de C*-álgebras sin unidad

Hemos visto las dificultades que surgen al intentar reproducir, en el caso general, el mismo enfoque empleado para definir el grupo K_0 en el contexto unitario: allí comprobamos que dejaba de ser un funtor escindido-exacto. Por ello al construir K_0 forzaremos esta propiedad.

2.4.1. Definición y funtorialidad de K_0

Definición 2.4.1 (Grupo K_0 para C*-álgebras no unitales)**.** *Sea A una C*-álgebra sin unidad, y consideremos la sucesión exacta corta que escinde*

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & \widetilde{A} \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{C} \arrow[l, bend right, "\lambda"'] \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}
\tag{2.6}
$$

Definimos $K_0(A)$ como el kernel del homomorfismo $K_0(\pi) : K_0(\widetilde{A}) \to K_0(\mathbb{C})$,

$$\boxed{K_0(A) = Ker(K_0(\pi)).}$$

Comentario 2.4.2. Sea $p \in P_\infty(A)$. Recordemos que $\pi(a) = 0$ para todo $a \in A$, donde $\pi\colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$ es la proyección canónica. Luego

$$K_0(\pi)([p]_0) = [\pi(p)]_0 = 0,$$

por ende se obtiene el morfismo $[\,\cdot\,]_0\colon P_\infty(A) \to K_0(A)$.

Para toda C^*-álgebra A, con o sin unidad, disponemos de la siguiente sucesión exacta corta

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(i)"] & K_0(\widetilde{A}) \arrow[r, "K_0(\pi)"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}
\tag{2.7}
$$

El morfismo $K_0(A) \to K_0(\widetilde{A})$ es $K_0(i)$ si A tiene unidad, y la inclusión en caso contrario. Luego, por el lema 2.3.2, la sucesión es exacta en el caso unital.

Si A tiene unidad, $K_0(A)$ es isomorfo a su imagen en $K_0(\widetilde{A})$ mediante el homomorfismo $K_0(i)$. Como la imagen de $K_0(i)$ coincide con $Ker(K_0(\pi))$, se tiene

$$K_0(A) \simeq Ker(K_0(\pi))$$

en el caso unital.

Funtorialidad de K_0

Sea $\varphi : A \to B$ un *-homomorfismo y $\widetilde{\varphi} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$ la extensión a las unitizaciones. Obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "\varphi"'] & \widetilde{A} \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"'] & \mathbb{C} \arrow[d, equal] \\
B \arrow[r, "i_B"'] & \widetilde{B} \arrow[r, "\pi_B"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

Luego por la funtorialidad de K_0 para C*-álgebras con unidad, (2.7) induce el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "K_0(\varphi)"'] & K_0(\widetilde{A}) \arrow[r, "K_0(\pi_A)"] \arrow[d, "K_0(\widetilde{\varphi})"'] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[d, equal] \\
K_0(B) \arrow[r] & K_0(\widetilde{B}) \arrow[r, "K_0(\pi_B)"'] & K_0(\mathbb{C})
\end{tikzcd}
\tag{2.8}
$$

Existe un único homomorfismo de grupos $K_0(\varphi) : K_0(A) \to K_0(B)$, tal que el diagrama conmuta. Lo definimos de la siguiente forma. sea $[p]_0 - [q]_0 \in K_0(A)$, luego por la conmutatividad del segundo cuadrante vemos:

$$K_0(\pi_B)(K_0(\widetilde{\varphi})([p]_0 - [q]_0)) = K_0(\pi_A)([p]_0 - [q]_0) = 0.$$

Entonces $K_0(\widetilde{\varphi})([p]_0 - [q]_0) \in K_0(B)$, concluyendo así que el morfismo

$$K_0(\varphi)([p]_0 - [q]_0) = K_0(\widetilde{\varphi})([p]_0 - [q]_0))$$

está bien definido entre $K_0(A)$ y $K_0(B)$. Notar que $K_0(\varphi)$ es la restricción de $K_0(\widetilde{\varphi})$ a $K_0(A)$, de esto obtenemos la unicidad.

Si A y B tienen unidad, entonces el diagrama (2.8) se cumple por la funtorialidad del K_0 unital. Por ende nuestra definición extiende el caso unitario.

Proposición 2.4.3 (Funtorialidad de K_0)**.**

1. *Para cualquier C*-álgebra A, se cumple que $K_0(Id_A) = Id_{K_0(A)}$.*
2. *Dadas C*-álgebras A, B y C, con *-homomorfismos $\varphi : A \to B$ y $\psi : B \to C$, se tiene que $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$.*
3. *Se cumple $K_0(\{0\}) = \{0\}$.*
4. *Para cualquier par de C*-álgebras A y B, tenemos $K_0(0_{B,A}) = 0_{K_0(A),K_0(B)}$.*

Demostración.

(1)

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "K_0(Id_A)"'] & K_0(\widetilde{A}) \arrow[r, "K_0(\pi_A)"] \arrow[d, "K_0(\widetilde{Id_A})"'] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[d, equal] \\
K_0(A) \arrow[r] & K_0(\widetilde{A}) \arrow[r, "K_0(\pi_A)"'] & K_0(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Utilizando $\widetilde{Id_A} = Id_{\widetilde{A}}$ y aplicando la funtorialidad de K_0 para C*-álgebras con unidad, obtenemos $K_0(\widetilde{Id_A}) = K_0(Id_{\widetilde{A}}) = Id_{K_0(\widetilde{A})}$. Por la funtorialidad unital de K_0 tenemos $K_0(Id_{\widetilde{A}}) = Id_{K_0(\widetilde{A})}$. Así, la conmutatividad del diagrama nos permite concluir que $K_0(Id_A) = Id_{K_0(A)}$.

(2).

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "K_0(\varphi)"'] & K_0(\widetilde{A}) \arrow[r, "K_0(\pi_A)"] \arrow[d, "K_0(\widetilde{\varphi})"'] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[d, equal] \\
K_0(B) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "K_0(\psi)"'] & K_0(\widetilde{B}) \arrow[r, "K_0(\pi_B)"'] \arrow[d, "K_0(\widetilde{\psi})"'] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[d, equal] \\
K_0(C) \arrow[r] & K_0(\widetilde{C}) \arrow[r, "K_0(\pi_C)"'] & K_0(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Tenemos $\widetilde{(\psi \circ \varphi)} = \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}$, aplicando la funtorialidad de K_0 en el caso unital junto con la conmutatividad del diagrama, obtenemos (2).

(3). Tenemos $\widetilde{\{0\}} = \mathbb{C}$, por lo tanto, la sucesión 2.6 aparece de la siguiente manera

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

donde $\pi = Id_{\mathbb{C}}$. Así se tiene que $K_0(\pi) = Id_{K_0(\mathbb{C})}$, y $Ker(Id_{K_0(\mathbb{C})}) = \{0\}$. Concluyendo entonces que $K_0(\{0\}) = \{0\}$.

(4) Se sigue de (3) igual que en la demostración de (4) proposición 2.2.12. $\square$

Proposición 2.4.4 (Invarianza homotópica de K_0)**.** *Sean A y B dos C*-álgebras.*

1. *Si ψ y $\varphi : A \to B$ son *-homomorfismos homotópicos entonces $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.*
2. *Sean A y B son C*-álgebras homotópicamente equivalentes, obtenemos que $K_0(A)$ es isomorfo a $K_0(B)$. Más específicamente, si*

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$$

es una homotopía, entonces $K_0(\varphi) : K_0(A) \to K_0(B)$ y $K_0(\psi) : K_0(B) \to K_0(A)$ son isomorfismos con $K_0(\varphi)^{-1} = K_0(\psi)$.

Demostración. (1). Si φ es homotópica a ψ, sea $f : [0,1] \times A \to A$ la homotopía. Definimos $H : [0,1] \times \widetilde{A} \to \widetilde{A}$ como $H_t(a + \lambda) = f_t(a) + \lambda$. Veamos que para todo $a + \lambda \in \widetilde{A}$ la función $H_t(a+\lambda) : [0,1] \to \widetilde{A}$ es continua. Esto se debe a que

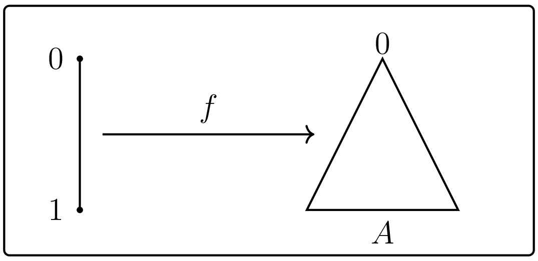
$$||H_t(a+\lambda) - H_{t_0}(a+\lambda)|| = ||f_t(a) - f_{t_0}(a)||.$$

El resto sigue de la continuidad de $f_t(a) : [0,1] \to A$, y de que la norma en $\widetilde{A}$ extiende a la de A. Entonces tenemos que $\widetilde{\psi}$ y $\widetilde{\varphi}$ son homotópicas, por la proposición 2.2.15 $K_0(\widetilde{\psi}) = K_0(\widetilde{\varphi})$. Como $K_0(\psi)$ y $K_0(\varphi)$ son la restricción de $K_0(\widetilde{\psi})$ y $K_0(\widetilde{\varphi})$ a $K_0(A)$ concluimos (1).

(2). Se sigue de (1) junto con (1) y (3) de la proposición 2.4.3. $\square$

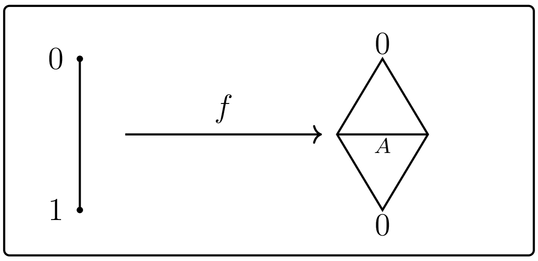
Ejemplo 2.4.5. El cono CA y la suspensión SA de una C*-álgebra se definen como:

$$CA = \{f \in C([0,1], A) : f(0) = 0\}$$



$f \in CA$

$$SA = \{f \in C([0,1], A) : f(0) = f(1) = 0\}.$$



$f \in SA$

Tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{\ i\ } CA \xrightarrow{\ \pi\ } A \longrightarrow 0$$

donde i es la inclusión y $\pi(f) = f(1)$. El cono CA es homotópicamente equivalente a la C*-álgebra nula mediante la siguiente homotopía:

$$\varphi_t : CA \to CA,\ \ \varphi_t(f)(s) = f(st),\ \ f \in CA, s, t \in [0,1].$$

La función $t \to \varphi_t(f)$ es continua para todo $f \in CA$, $\varphi_0 = 0$ y $\varphi_1 = Id$. Luego

$$CA \xrightarrow{\ 0\ } 0 \xrightarrow{\ 0\ } CA$$

es una homotopía. Por las proposiciones 2.4.3 y 2.4.4 concluimos $K_0(CA) = 0$.

2.4.2. Imagen estándar de $K_0(A)$

El morfismo escalar

Consideremos la siguiente sucesión exacta corta de C*-álgebras que escinde

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & \widetilde{A} \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{C} \arrow[l, bend right, "\lambda"'] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Definimos el *-homomorfismo escalar s

$$s = \lambda \circ \pi : \widetilde{A} \to \widetilde{A} : a + \alpha 1 \to \alpha 1,$$

para todo $a \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Notar que $\pi(s(x)) = \pi(x)$ y $x - s(x) \in A$ para todo $x \in \widetilde{A}$. Consideremos

$$s_n : M_n(\widetilde{A}) \to M_n(\widetilde{A})$$

los *-homomorfismos inducido por s. La imagen de s_n es el subconjunto $M_n(\mathbb{C})$ de $M_n(\widetilde{A})$ que consiste en todas las matrices con entradas escalares, y $x - s_n(x)$ pertenece a $M_n(A)$ para todo $x \in M_n(\widetilde{A})$. Ahora omitiremos el subíndice n y escribiremos s para referirnos también a s_n.

Definición 2.4.6. *Un elemento $x \in \widetilde{A}$ o $x \in M_n(\widetilde{A})$ es llamado **elemento escalar** si $s(x) = x$.*

Comentario 2.4.7. El morfismo escalar es natural en el siguiente sentido: dadas A y B dos C*-álgebras y $\varphi : A \to B$ un *-homomorfismo, el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \widetilde{A} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"'] & \widetilde{A} \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\ \widetilde{B} \arrow[r, "s"'] & \widetilde{B} \end{tikzcd}$$

Proposición 2.4.8. ***(Imagen estándar de*** K_0***)***
Dada una C-álgebra A tenemos:*

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [s(p)]_0 : p \in P_\infty(\widetilde{A})\}. \tag{2.9}$$

Además se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. *Para todo par de proyecciones $p, q \in P_\infty(\widetilde{A})$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

   a*)* $[p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0$,

   b*) existen naturales k, y l tales que $p \oplus 1_k \sim_0 q \oplus 1_l$ en $P_\infty(\widetilde{A})$,*

   c*) tenemos dos proyecciones escalares r_1 y r_2 que cumplen $p \oplus r_1 \sim_0 q \oplus r_2$.*

2. *Si $p \in P_\infty(\widetilde{A})$ cumple $[p]_0 - [s(q)]_0 = 0$, entonces existe un natural m tal que $p \oplus 1_m \sim s(p) \oplus 1_m$.*

3. *Si $\varphi : A \to B$ es un *-homomorfismo, entonces*

$$K_0(\varphi)([p]_0 - [s(p)]_0) = [\widetilde{\varphi}(p)]_0 - [s(\widetilde{\varphi}(p))]_0$$

   para todo $p \in P_\infty(\widetilde{A})$.

Demostración. Para probar (2.9), nótese que

$$K_0(\pi)([p]_0 - [s(p)]_0) = [\pi(p)]_0 - [(\pi \circ s)(p)]_0 = 0,$$

donde $p \in P_\infty(\widetilde{A})$, ya que $\pi = \pi \circ s$. De esto sigue $[p]_0 - [s(p)]_0 \in K_0(A)$ para todo $p \in P_\infty(\widetilde{A})$.

Por otro lado, dado $g \in K_0(A)$, existe $n \in \mathbb{N}$ y $e, f \in P_n(\widetilde{A})$ tales que $g = [e]_0 - [f]_0$. Definimos

$$p = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1_n - f \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}.$$

Observar: Utilizando $(1_n - f)f = 0$ junto con (4) de la proposición 2.1.31, se obtiene

$$[1_n - f]_0 + [f]_0 = [1_n - f + f]_0 = [1_n]_0,$$

por tanto $[1_n - f]_0 = [1_n]_0 - [f]_0$.

Luego, para todo $p, q \in P_{2n}(\widetilde{A})$, y por (1) de la proposición 2.2.10, tenemos

$$[p]_0 - [q]_0 = [e \oplus (1_n - f)]_0 - [0 \oplus 1_n]_0 = [e]_0 + [1_n - f]_0 - [1_n]_0 = [e]_0 - [f]_0 = g.$$

Como $s(q) = q$ y $K_0(\pi)(g) = 0$, deducimos que

$$[s(p)]_0 - [q]_0 = [s(p)]_0 - [s(q)]_0 = K_0(s)(g) = (K_0(\lambda) \circ K_0(\pi))(g) = 0.$$

De ello se concluye que $g = [p]_0 - [s(p)]_0$.

(1). $(a) \implies (c)$. Sean $p, q \in P_\infty(\widetilde{A})$. Si $[p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0$, entonces $[p \oplus s(q)]_0 = [q \oplus s(p)]_0$. Por (4) de la proposición 2.2.10, $p \oplus s(q) \sim_s q \oplus s(p)$ en $P_\infty(\widetilde{A})$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p \oplus s(q) \oplus 1_n \sim_0 q \oplus s(p) \oplus 1_n$.

$(c) \implies (b)$. Si $r_1 \in P_n(\widetilde{A})$ y $r_2 \in P_m(\widetilde{A})$ proyecciones escalares. Sean k y l las dimensiones de sus imagenes respectivamente, como son escalares podemos tratarlas como matrices con coeficientes en $\mathbb{C}$. Utilizando el teorema espectral obtenemos:

$$r_1 \sim_u 1_k \oplus 0_{n-k}, \quad r_2 \sim_u 1_l \oplus 0_{m-l},$$

en particular $r_1 \sim_0 1_k \oplus 0_{n-k} \sim_0 1_k$ y $r_2 \sim_0 1_l \oplus 0_{m-l} \sim_0 1_l$. Luego $p \oplus 1_k \sim_0 q \oplus 1_l$.

$(b) \implies (a)$. Tenemos lo siguiente

$$[p \oplus 1_k]_0 - [s(p \oplus 1_k)]_0 = [p]_0 + [1_k]_0 - [s(p)]_0 - [s(1_k)]_0 = [p]_0 - [s(p)]_0.$$

Por ende es suficiente mostrar que $p \sim_0 q$ implica $[p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0$. Supongamos $p = v^*v$ y $q = vv^*$ con $v \in M_{m,n}(\widetilde{A})$ una isometría parcial. Sea $s(v) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ visto como un subconjunto de $M_{m,n}(\widetilde{A})$. Entonces $s(v)^*s(v) = s(p)$ y $s(v)s(v)^* = s(q)$, luego $s(p) \sim_0 s(q)$. Por ende $[p]_0 = [q]_0$ y $[s(q)]_0 = [s(p)]_0$, lo cual prueba (a).

(2). Si $[p]_0 - [s(p)]_0 = 0$, entonces $p \sim_s s(p)$ por (5) de la proposición 2.2.10, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p \oplus 1_m \sim s(p) \oplus 1_m$.

(3). Por definición tenemos:

$$\begin{aligned} K_0(\varphi)([p]_0 - [s(p)]_0) &= K_0(\widetilde{\varphi})([p]_0 - [s(p)]_0) \\ &= [\widetilde{\varphi}(p)]_0 - [\widetilde{\varphi}(s(p))]_0 = [\widetilde{\varphi}(p)]_0 - [s(\widetilde{\varphi}(p))]_0. \end{aligned}$$

□

Lema 2.4.9. *Sean A, B dos C*-álgebras y $\varphi : A \to B$ un *-homomorfismo. Supongamos que $g \in K_0(A)$ pertenece al kernel de $K_0(\varphi)$.*

1. *Existe un número natural n, una proyección $p \in P_n(\widetilde{A})$ y un elemento unitario $u \in \mathcal{U}(M_n(\widetilde{B}))$ tales que $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ y $u\widetilde{\varphi}(p)u^* = s(\widetilde{\varphi}(p))$.*
2. *Si φ es sobreyectivo, entonces existe una proyección $p \in P_\infty(\widetilde{A})$ la cual cumple $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ y $\widetilde{\varphi}(p) = s(\widetilde{\varphi}(p))$.*

Demostración. (1). Por la imagen estándar de K_0 existe $k \in \mathbb{N}$ y una proyección $p_1 \in P_k(\widetilde{A})$ tales que

$$g = [p_1]_0 - [s(p_1)]_0 \quad \text{y} \quad [\widetilde{\varphi}(p_1)]_0 - [s(\widetilde{\varphi}(p_1))]_0 = 0.$$

Por (2) de la proposición 2.4.8 tenemos $\widetilde{\varphi}(p_1) \oplus 1_m \sim s(\widetilde{\varphi}(p_1)) \oplus 1_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Definimos $p_2 = p_1 \oplus 1_m$, entonces $p_2 \in P_{k+m}(\widetilde{A})$ y $g = [p_2]_0 - [s(p_2)]_0$.

Esto último se debe a que

$$s(p_2) = s(p_1) \oplus s(1_m) = s(p_1) \oplus 1_m,$$

y, por tanto,

$$[p_2]_0 - [s(p_2)]_0 = [p_1]_0 + [1_m]_0 - [s(p_1)]_0 - [1_m]_0.$$

Siguiendo con la demostración, observamos

$$\widetilde{\varphi}(p_2) = \widetilde{\varphi}(p_1) \oplus 1_m \sim s(\widetilde{\varphi}(p_1)) \oplus 1_m = s(\widetilde{\varphi}(p_2)). \tag{2.10}$$

Sea $n = 2(k+m)$, y sea 0_{k+m} la proyección nula en $M_{k+m}(\widetilde{A})$. Definimos $p = p_2 \oplus 0_{k+m}$; entonces $p \in P_n(\widetilde{A})$. Es claro que $g = [p]_0 - [s(p)]_0$. Aplicando la proposición 2.1.24 a $\widetilde{\varphi}(p_2)$ y $s(\widetilde{\varphi}(p_2))$, concluimos que existe $u \in \mathcal{U}(M_n(\widetilde{B}))$ tal que

$$u\,\widetilde{\varphi}(p)\,u^* = s(\widetilde{\varphi})(p).$$

(2). Por (1) existen $n \in \mathbb{N}$, $p_1 \in M_n(\widetilde{A})$ y $u \in \mathcal{U}(M_n(\widetilde{B}))$ tales que $g = [p_1]_0 - [s(p_1)]_0$ y $u\widetilde{\varphi}(p_1)u^* = s(\widetilde{\varphi}(p_1))$. Utilizando la parte (2) del lema 2.1.9, existe $v \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$ con $\widetilde{\varphi}(v) = \operatorname{diag}(u, u^*)$. Sea $p = v\ \operatorname{diag}(p_1, 0_n)\, v^*$, entonces p es una proyección en $M_{2n}(\widetilde{A})$ y

$$\widetilde{\varphi}(p) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}(p_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(\widetilde{\varphi}(p_1)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C}).$$

Obtenemos así $s(\widetilde{\varphi}(p)) = \widetilde{\varphi}(p)$. Por la proposición 2.1.18 se tiene $p \sim_u (p_1 \oplus 0_n)$ y $(p_1 \oplus 0_n) \sim_0 p_1$, por ende $p \sim_0 p_1$. Concluimos, por (1) de la proposición 2.4.8, que $g = [p]_0 - [s(p)]_0$. ☐

2.5. Escisión-exactitud de K_0

Lema 2.5.1. *Consideremos una sucesión exacta corta de C*-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\ \varphi\ } A \xrightarrow{\ \psi\ } B \longrightarrow 0,$$

y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, tenemos las siguientes afirmaciones.

1. *El *-homomorfismo $\widetilde{\varphi}_n : M_n(\widetilde{I}) \to M_n(\widetilde{A})$ es inyectivo.*
2. *Un elemento $a \in M_n(\widetilde{A})$ está en la imagen de $\widetilde{\varphi}_n$ si, y solo si, $\widetilde{\psi}_n(a) = s_n(\widetilde{\psi}_n(a))$.*

Demostración.
(1). Por definición de $\widetilde{\varphi_n}$ basta con ver la inyectividad para $n = 1$. Consideramos la formulación $\widetilde{I} = I \oplus \mathbb{C}$. Tomemos $i \in I$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que $\widetilde{\varphi}(i, \alpha) = 0$. Según la definición de $\widetilde{\varphi}$, se tiene que

$$0 = \widetilde{\varphi}(i, \alpha) = (\varphi(i), \alpha).$$

Por lo tanto, debido a la inyectividad de φ, deducimos que $\alpha = 0$ e $i = 0$.

(2). Si $a \in M_n(\widetilde{A})$ pertenece de la imagen de $\widetilde{\varphi}_n$, entonces existe un elemento $i \in M_n(\widetilde{I})$ tal que $\widetilde{\varphi}_n(i) = a$. Cada componente de i se puede expresar como:

$$(i)_{lk} = \hat{i}_{kl} + \alpha_{kl},\ \alpha_{kl} \in \mathbb{C},\ \hat{i}_{kl} \in I.$$

De manera similar, para a se tiene:

$$(a)_{lk} = \hat{a}_{kl} + \lambda_{kl},\ \lambda_{kl} \in \mathbb{C},\ \hat{a}_{kl} \in A.$$

Dado que $\widetilde{\varphi}_n(i) = a$, se sigue $\varphi(\hat{i}_{kl}) = \hat{a}_{kl}$. Por la exactitud de la sucesión, observamos:

$$(\widetilde{\psi}(a))_{kl} = \psi(\hat{a}_{kl}) + \lambda_{kl} = \psi(\varphi(\hat{i}_{kl})) + \lambda_{kl} = \lambda_{kl} = s((\widetilde{\psi}(a))_{kl}).$$

Además, si $\widetilde{\psi}_n(a) = s_n(\widetilde{\psi}_n(a))$, utilizando la misma notación, esto implica que $\psi(\hat{a}_{kl}) = 0$. Por la exactitud de la sucesión, existen $\hat{i}_{kl} \in I$ tales que $\varphi(\hat{i}_{kl}) = \hat{a}_{kl}$. Así, se cumple que:

$$\widetilde{\varphi}(\hat{i}_{kl} + \lambda_{kl}) = \varphi(\hat{i}_{kl}) + \lambda_{kl} = \hat{a}_{kl} + \lambda_{kl} = (a)_{kl}.$$

□

Proposición 2.5.2. ***(Semiexactitud de*** K_0***)***
Toda sucesión exacta corta de C-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta de grupos abelianos

$$K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B)$$

es decir, $Im(K_0(\varphi)) = Ker(K_0(\psi))$.

Demostración. La funtorialidad de K_0 nos da

$$K_0(\psi) \circ K_0(\varphi) = K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(0) = 0.$$

Así, obtenemos que $Im(K_0(\varphi)) \subseteq Ker(K_0(\psi))$. Por otro lado, si $g \in Ker(K_0(\psi))$, aplicando la parte (2) del lema 2.4.9 existe $n \in \mathbb{N}$ y $p \in P_n(\widetilde{A})$ tal que $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ y $\widetilde{\psi}(p) = s(\widetilde{\psi}(p))$. Luego, según (2) del lema 2.5.1, existe $e \in M_n(\widetilde{I})$ tal que $\widetilde{\varphi}(e) = p$, y el mismo lema nos asegura la inyectividad del homomorfismo $\widetilde{\varphi} : M_n(\widetilde{I}) \to M_n(\widetilde{A})$. Por lo tanto, e es una proyección. Así,

$$g = [\widetilde{\varphi}(e)]_0 - [s(\widetilde{\varphi}(e))]_0 = K_0(\varphi)([e]_0 - [s(e)_0]) \in Im(K_0(\varphi)).$$

□

Proposición 2.5.3 (Escisión exactitud de K_0)**.**
Toda sucesión exacta corta de C-álgebras que escinde*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[r, "\psi"'] & B \arrow[l, bend right, "\lambda"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

induce una sucesión exacta corta de grupos abelianos que escinde

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(I) \arrow[r, "K_0(\varphi)"] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\psi)"'] & K_0(B) \arrow[l, bend right, "K_0(\lambda)"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.11}$$

Demostración. La sucesión 2.11 es exacta en $K_0(A)$ por la proposición 2.5.2. De la funtorialidad de K_0 se desprende la siguiente igualdad

$$Id_{K_0(B)} = K_0(Id_B) = K_0(\psi) \circ K_0(\lambda).$$

Por ende $K_0(\psi)$ es sobreyectivo. Probaremos que $K_0(\varphi)$ es inyectiva, con esto obtendremos la exactitud en $K_0(I)$.

Sea $g \in \ker(K_0(\varphi))$. Por (1) del lema 2.4.9 existen $n \in \mathbb{N}$, $p \in P_n(\widetilde{I})$ y $u \in \mathcal{U}(M_n(\widetilde{A}))$ tales que $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ y $u\widetilde{\varphi}(p)u^* = s(\widetilde{\varphi}(p))$. Definimos $v = (\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u^*)\, u$. Entonces v es unitario en $M_n(\widetilde{A})$ y $\widetilde{\psi}(v) = 1$.

Aplicando (2) del lema 2.5.1, obtenemos $w \in M_n(\widetilde{I})$ con $\widetilde{\varphi}(w) = v$. Como $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva, w es unitario. Luego

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(wpw^*) &= v\, \widetilde{\varphi}(p)\, v^* \\
&= (\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u^*)\ s(\widetilde{\varphi}(p))\ (\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u) \\
&= (\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})\Big(u^*\, s(\widetilde{\varphi}(p))\, u\Big) \\
&= (\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})\Big(\widetilde{\varphi}(p)\Big) \\
&=^{5}\ s(\widetilde{\varphi}(p)) \ = \ \widetilde{\varphi}(s(p)).
\end{aligned}$$

Junto con la inyectividad de $\widetilde{\varphi}$, concluimos que $s(p) = wpw^*$. Por tanto $p \sim_u s(p)$ en $M_n(\widetilde{I})$, concluyendo así $g = 0$. □

Proposición 2.5.4. ***(Suma directa)***

Para todo par de C-álgebras A y B, tenemos:*

$$K_0(A \oplus B) \simeq K_0(A) \oplus K_0(B).$$

Siendo más específicos, si $i_A : A \to A \oplus B$ y $i_B : B \to A \oplus B$ son las inclusiones canónicas, entonces el morfismo

$$K_0(i_A) \oplus K_0(i_B) : K_0(A) \oplus K_0(B) \to K_0(A \oplus B),$$

que lleva $(g, f) \to K_0(i_A)(g) + K_0(i_B)(f)$, es un isomorfismo.

Demostración. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & K_0(A) \oplus K_0(B) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "K_0(i_A)\oplus K_0(i_B)"] & K_0(B) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(i_A)"'] & K_0(A \oplus B) \arrow[r, "K_0(\pi_B)"'] & K_0(B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $\alpha(g) = (g, 0)$, $\beta(g, h) = h$ y $\pi_B(a, b) = b$. Las filas son exactas, la de abajo, por la proposición 2.5.3. El diagrama es conmutativo, ya que $\pi_B \circ i_A = 0$ y $\pi_B \circ i_B = Id_B$. Por el lema de los cinco concluimos que $K_0(i_A) \oplus K_0(i_B)$ es un isomorfismo. □

Corolario 2.5.5. *Por la escisión y exactitud de K_0 (proposición 2.5.3) junto con $K_0(\mathbb{C})$ calculado en 2.2.19, para toda C*-álgebra A tenemos*

$$K_0(\widetilde{A}) \simeq K_0(A) \oplus \mathbb{Z}.$$

Comentario 2.5.6. El funtor K_0 no es exacto, es decir, no lleva sucesiones exactas cortas de C*-álgebras en sucesiones exactas cortas de grupos abelianos. Daremos dos ejemplos donde esto no sucede.

[5]Notar que, dados $i \in I$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, se tiene $(\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(\widetilde{\varphi}(i, \alpha)) = \alpha$.

Ejemplo 2.5.7. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C_0((0,1)) \xrightarrow{\quad i \quad} C([0,1]) \xrightarrow{\quad \psi \quad} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

donde $\psi(f) = (f(1), f(0))$. Por la proposición 2.5.4 y el ejemplo 2.2.19 tenemos $K_0(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Luego por el ejemplo 2.2.22 obtenemos $K_0(C([0,1])) \simeq \mathbb{Z}$, como no existen morfismos sobreyectivos de $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$ concluimos que el funtor K_0 no es exacto ya que $K_0(\psi)$ no puede ser sobreyectivo.

Ejemplo 2.5.8. Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, y $\mathcal{K}$ el ideal de $B(H)$ dado por los operadores compacto. El cociente $B(H)/\mathcal{K}$ se llama el **álgebra de Calkin**, usaremos la notación $\mathcal{Q}(H)$. Tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\quad i \quad} B(H) \xrightarrow{\quad \pi \quad} \mathcal{Q}(H) \longrightarrow 0$$

En el ejemplo 2.2.20 vimos $K_0(B(H)) = 0$. Más adelante probaremos $K_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$. Por ende $K_0(i)$ no puede ser inyectiva.

2.6. Continuidad de K_0

Lema 2.6.1. *Sea A una C^*-álgebra.*

1. *Si a es un elemento autoadjunto en A con $\delta = ||a - a^2|| < 1/4$, entonces existe una proyección p en A tal que $||a - p|| \leq 2\delta$.*

2. *Sean p, q proyecciones en A. Si existe un elemento $x \in A$ tal que $||x^*x - p|| < 1/2$ y $||xx^* - q|| < 1/2$, tenemos $p \sim q$.*

Demostración. Si $t \in sp(a)$, por [13, Teorema 1.2.1] tenemos $t - t^2 \in sp(a - a^2)$. Sea t número real que cumple $|t|\,|t-1| = |t - t^2| \leq \delta < 1/4$. Entonces $t \in [-2\delta, 2\delta] \cup [1 - 2\delta, 1 + 2\delta]$.

Por ende, si $\|a - a^2\| = \delta < 1/4$, se tiene

$$sp(a) \subseteq \{t \in \mathbb{R} : |t - t^2| \leq \delta\} \subseteq [-2\delta, 2\delta] \cup [1 - 2\delta, 1 + 2\delta].$$

Como $\delta < 1/4$, los dos intervalos anteriores son disjuntos, por tanto, podemos definir una función continua f en $sp(a)$ de la siguiente forma

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 2\delta, \\ 1, & \text{si } t \geq 1 - 2\delta. \end{cases} \tag{2.12}$$

Sea $p = f(a)$, notar que $p \in A$ por el comentario 1.6.4. Entonces p es una proyección, ya que f toma únicamente los valores 0 y 1 en $sp(a)$, en particular, $f^2 = f$. Además, $\|a - p\| \leq 2\delta$, ya que $|t - f(t)| \leq 2\delta$ para todo $t \in sp(a)$.

(2).Definimos

$$\delta = \tfrac{1}{2}\, \text{máx}\{\|x^*x - p\|, \|xx^* - q\|\} < \tfrac{1}{4},$$

y $\Gamma = sp(x^*x) \cup sp(xx^*)$. Por el lema 2.1.19 tenemos $\Gamma \subseteq [-2\delta, 2\delta] \cup [1-2\delta, 1+2\delta]$. Sea $f \in C(\Gamma)$ definida como en 2.12. Entonces $p_0 = f(x^*x)$ y $p_1 = f(xx^*)$ son proyecciones en A que cumplen $\|p - p_0\| \leq 4\delta < 1$ y $\|q - p_1\| \leq 4\delta < 1$. Esto se debe a que

$$|t - f(t)| \leq 2\delta,\ \forall\, t \in \Gamma \implies \|f(x^*x) - p\| \leq \|f(x^*x) - x^*x\| + \|x^*x - p\| < 4\delta,$$

y un argumento análogo vale para q y p_1. Utilizando la proposición 2.1.20 obtenemos $p \sim p_0$ y $q \sim p_1$.

Sea $h(t) = \sum_{k\geq 0} a_k t^k$ un polinomio de variable real con coeficientes en $\mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} x\, h(x^*x)\, x^* &= \sum_{k\geq 0} a_k\, x(x^*x)^k x^* = \sum_{k\geq 0} a_k\, (xx^*)^{k+1} \\ &= \Big(\sum_{k\geq 0} a_k (xx^*)^k\Big)\, xx^* = h(xx^*)\, xx^*. \end{aligned}$$

Por Stone–Weierstrass estos polinomios son densos en $C(\Gamma)$[6], de modo que la igualdad anterior se cumple para toda $h \in C(\Gamma)$.

Sea $g \in C(\Gamma)$ una función que verifica $t\, g(t)^2 = f(t)$ para todo $t \in \Gamma$. Definimos $v = x\, g(x^*x)$. Entonces

$$v^*v = g(x^*x)\, x^*x\, g(x^*x) = x^*x\Big(g(x^*x)\Big)^2 = f(x^*x) = p_0,$$

donde en la igualdad anterior usamos que x^*x y $g(x^*x)$ pertenecen a $C^*(1, x^*x)$ y, por tanto, conmutan. Análogamente,

$$vv^* = x\, g(x^*x)^2 x^* = g(xx^*)^2 xx^* = f(xx^*) = p_1.$$

Por tanto $p_0 \sim p_1$, y en consecuencia $p \sim q$.

Podemos elegir una función g definiéndola por partes (dado que los intervalos en Γ son disjuntos), por ejemplo:

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 2\delta, \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}}, & \text{si } t \geq 1 - 2\delta. \end{cases}$$

□

Teorema 2.6.2. *(Continuidad de K_0). Para toda sucesión inductiva de C^*-álgebras*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \ldots \tag{2.13}$$

tenemos:

$$\boxed{K_0(\varinjlim A_n) \simeq \varinjlim K_0(A_n).}$$

El isomorfismo es como grupos abelianos.

Más específicamente: si $(A, \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ es el límite inductivo de la sucesión 2.13 y $(G_0, \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ es el límite inductivo de la sucesión

$$K_0(A_1) \xrightarrow{K_0(\varphi_1)} K_0(A_2) \xrightarrow{K_0(\varphi_2)} K_0(A_3) \xrightarrow{K_0(\varphi_3)} \ldots \tag{2.14}$$

[6]Estamos utilizando que x^*x y xx^* son positivos, por ende sus espectros son reales.

entonces existe un único isomorfismo de grupos $\gamma\colon G_0 \to K_0(A)$ *tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & K_0(A_n) \arrow[dl, "\beta_n"'] \arrow[dr, "K_0(\mu_n)"] & \\ G_0 \arrow[rr, "\gamma"'] & & K_0(A) \end{tikzcd} \tag{2.15}$$

Además, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $K_0(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_0(\mu_n)\Big(K_0(A_n)\Big)$.

2. $\ker\Big(K_0(\mu_n)\Big) = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \ker\Big(K_0(\varphi_{m,n})\Big)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Probaremos primero (1) y (2). Para simplificar la notación, diremos que μ_n es el $*$-homomorfismo inducido $M_k(A_n) \to M_k(A)$ (para todo $k \in \mathbb{N}$), y denotaremos $\widetilde{\mu}_n$ al $*$-homomorfismo $M_k(\widetilde{A_n}) \to M_k(\widetilde{A})$.

Veamos que $(M_k(A), \{\mu_n\})$ y $(M_k(\widetilde{A}), \{\widetilde{\mu}_n\})$ son límites inductivos de las sucesiones

$$M_k(A_1) \xrightarrow{\varphi_1} M_k(A_2) \xrightarrow{\varphi_2} M_k(A_3) \xrightarrow{\varphi_3} \dots \tag{2.16}$$

y

$$M_k(\widetilde{A}_1) \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_1} M_k(\widetilde{A}_2) \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_2} M_k(\widetilde{A}_3) \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_3} \dots$$

La demostración es la misma para ambas sucesiones, probaremos la afirmación para la primera.

Sea $(B, \{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ el límite inductivo de la sucesión (2.6), construido como en la proposición 1.9.4. Por la propiedad universal del límite inductivo existe un $*$-homomorfismo $\lambda\colon B \to M_k(A)$ tal que, para todo n,

$$\lambda \circ \psi_n = \mu_n,$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & M_k(A_n) \arrow[dl, "\psi_n"'] \arrow[dr, "\mu_n"] & \\ B \arrow[rr, "\lambda"'] & & M_k(A) \end{tikzcd}$$

Utilizando que $\bigcup_n \mu_n\Big(M_k(A_n)\Big)$ es densa en $M_k(A)$ y la conmutatividad del diagrama anterior obtenemos la sobreyectividad de λ.

Para probar la inyectividad, consideremos la construcción de B y A dadas en la proposición 1.9.4. Si $a \in M_k(A_n)$ verifica $\mu_n(a) = 0$ en $M_k(A)$, entonces, por la definición de las μ_n, existe $m > n$ tal que $\varphi_{m,n}(a_{ij}) = 0$ para todas las entradas $1 \leq i, j \leq k$. Eso implica que la clase de a en B es cero, es decir, $\psi_n(a) = 0$. Luego de 4-2 de la proposición 1.9.4, se sigue que λ es inyectivo.

(1). Sea $g \in K_0(A)$. Utilizando la imagen estándar de $K_0(A)$, podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ y una proyección $p \in M_k(\widetilde{A})$ con $g = [p]_0 - [s(p)]_0$. Por (1) de la proposición 1.9.4 y lo que probamos recién, existe un número $n \in \mathbb{N}$ y un elemento $b_n \in M_k(\widetilde{A}_n)$ tal que $\|\widetilde{\mu_n}(b_n) - p\| < 1/5$. Definimos $a_n = (b_n + b_n^*)/2$ y $a_m = \widetilde{\varphi}_{m,n}(a_n)$ para $m > n$. Entonces a_m es autoadjunto y, para $m \geq n$,

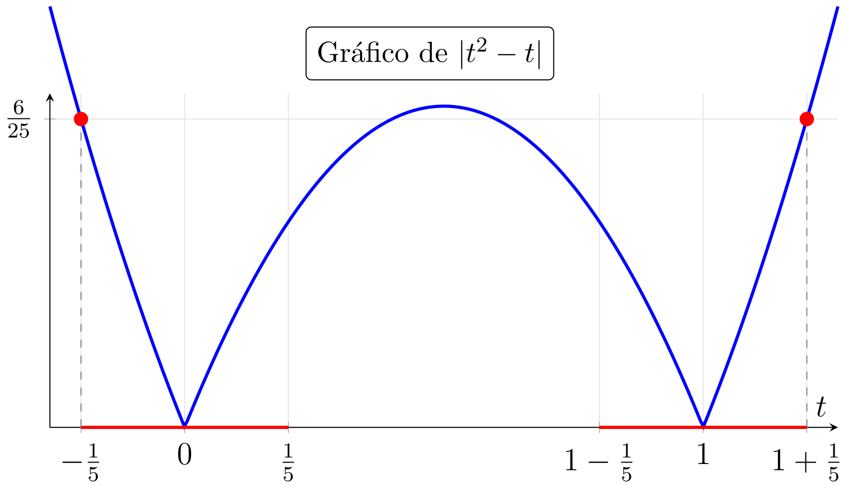
$$\|\widetilde{\mu_m}(a_m) - p\| = \|\widetilde{\mu_m}(\widetilde{\varphi}_{m,n}(a_n)) - p\| = \|\widetilde{\mu_n}\Big((b_n + b_n^*)/2\Big) - p\| < 1/5.$$

El lema 2.1.19 implica

$$sp\Big(\widetilde{\mu_n}(a_n)\Big) \subseteq [-1/5, 1/5] \cup [1 - 1/5, 1 + 1/5],$$

por ende

$$\|\widetilde{\mu_n}(a_n^2 - a_n)\| =^{7} \text{máx}\{|t^2 - t| : t \in sp(\widetilde{\mu_n}(a_n))\} < 1/4.$$



Luego, utilizando (2) de la proposición 1.9.4 existe $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, tal que $\|a_m^2 - a_m\| < 1/4$. Por (1) del lema 2.6.1 existe una proyección $q \in M_k(\widetilde{A}_m)$ con $\|a_m - q\| < 1/2$. Ahora

$$\|\widetilde{\mu_m}(q) - p\| \leq \|\widetilde{\mu_m}(a_m) - \widetilde{\mu_m}(q)\| + \|\widetilde{\mu_m}(a_m) - p\| \leq \|q - a_m\| + \|\widetilde{\mu_m}(a_m) - p\| < 1,$$

siendo la segunda desigualdad consecuencia de que los $*$-homomorfismos son decrecientes en norma. Con la desigualdad anterior y la proposición 2.1.20 obtenemos $\widetilde{\mu_m}(q) \sim p$.

Por la imagen estándar de K_0, se verifica que

$$g = [p]_0 - [s(p)]_0 = [\widetilde{\mu_m}(q)]_0 - [s(\widetilde{\mu_m}(q))]_0 = K_0(\mu_m)\Big([q]_0 - [s(q)]_0\Big),$$

concluyendo así (1).

[7] La igualdad viene de que para todo a elemento autoadjunto tenemos $r(a) = ||a||$, donde $r(a)$ es el radio espectral. Luego el supremo en el radio espectral es máximo ya que el espectro es compacto.

(2). Sea $m > n$, por la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd} K_0(A_n) \arrow[rr, "K_0(\varphi_{m,n})"] \arrow[dr, "K_0(\mu_n)"'] & & K_0(A_m) \arrow[dl, "K_0(\mu_m)"] \\ & K_0(A) & \end{tikzcd}$$

tenemos que el kernel de $K_0(\mu_n)$ contiene a $Ker(K_0(\varphi_{m,n}))$.

Sea $g \in K_0(A_n)$ un elemento de $\ker(\mu_n)$. Por (1) del lema 2.4.9 existen $k \in \mathbb{N}$ y una proyección $p \in M_k(\widetilde{A}_n)$ tales que $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ y $\widetilde{\mu_n}(p) \sim \widetilde{\mu_n}(s(p))$.

En otras palabras, $\widetilde{\mu_n}(p) = v^*v$ y $\widetilde{\mu_n}(s(p)) = vv^*$ para algún $v \in M_k(\widetilde{A})$. Por (1) de la proposición 1.9.4 existe $l \geq n$ y $x_l \in M_k(\widetilde{A}_l)$ tal que $\widetilde{\mu_l}(x_l)$ está suficientemente cerca de v para que se cumplan las siguientes desigualdades:

$$\|\widetilde{\mu_l}(x_l^* x_l) - \widetilde{\mu_n}(p)\| < \tfrac{1}{2}, \qquad \|\widetilde{\mu_l}(x_l x_l^*) - \widetilde{\mu_n}(s(p))\| < \tfrac{1}{2}.$$

Por (3) de la proposición 1.9.4 existe $m \geq l$ tal que

$$\|x_m^* x_m - \widetilde{\varphi}_{m,n}(p)\| < \tfrac{1}{2}, \qquad \|x_m x_m^* - \widetilde{\varphi}_{m,n}(s(p))\| < \tfrac{1}{2},$$

donde $x_m = \widetilde{\varphi}_{m,l}(x_l)$. Utilizando (2) del lema 2.6.1 obtenemos

$$\widetilde{\varphi}_{m,n}(p) \sim \widetilde{\varphi}_{m,n}(s(p)) = s\Big(\widetilde{\varphi}_{m,n}(p)\Big) \quad \text{en } M_k(\widetilde{A}_m).$$

Esto muestra que

$$K_0\Big(\varphi_{m,n}\Big)(g) = [\widetilde{\varphi}_{m,n}(p)]_0 - [s(\widetilde{\varphi}_{m,n}(p))]_0 = 0,$$

concluyendo (2).

Veamos ahora si la demostración del teorema. Como $K_0(\mu_n) = K_0(\mu_{n+1}) \circ K_0(\varphi_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la parte (2) de la definición 1.9.2, aplicada al sistema $(K_0(A), \{K_0(\mu_n)\})$, nos proporciona un único morfismo $\gamma\colon G_0 \to K_0(A)$ tal que el diagrama 2.15 conmuta para todo $n \in \mathbb{N}$. De (1) se sigue que γ es sobreyectiva.

Sea $g \in \ker(\gamma)$. Por (1) de la proposición 1.9.5 existe $n \in \mathbb{N}$ y $h \in K_0(A_n)$ tales que $g = \beta_n(h)$. Entonces

$$0 = \gamma(g) = K_0(\mu_n)(h),$$

y (2) implica que existe $m > n$ con $K_0(\varphi_{m,n})(h) = 0$. Por ende,

$$g = (\beta_m \circ K_0(\varphi_{m,n}))(h) = 0.$$

Concluyendo así que γ es inyectiva.

□

2.7. Estabilidad de K_0

2.7.1. Estabilidad matricial

Teorema 2.7.1. *Sea A una C*-álgebra y $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $K_0(A)$ es isomorfo a $K_0(M_n(A))$. Específicamente el *-homomorfismo*

$$\lambda_{n,A} : A \to M_n(A),\ a \to diag(a, 0_{n-1})$$

induce un isomorfismo $K_0(\lambda_{n,A}) : K_0(A) \to K_0(M_n(A))$.

Demostración. Veamos que es suficiente probarlo para C*-álgebras con unidad. Si A es una C*-álgebra sin unidad, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{n,A}"'] & \widetilde{A} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\lambda_{n,\widetilde{A}}"'] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{n,\mathbb{C}}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_n(A) \arrow[r] & M_n(\widetilde{A}) \arrow[r, "\pi_n"] & M_n(\mathbb{C}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las filas son sucesiones exactas cortas que se escinden. Luego, por la functorialidad de K_0 y puesto que es escinde-exacto, se sigue que el siguiente diagrama también es conmutativo y tiene sus filas son sucesiones exactas que escinden:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(\lambda_{n,A})"'] & K_0(\widetilde{A}) \arrow[r, "K_0(\pi)"] \arrow[d, "K_0(\lambda_{n,\widetilde{A}})"'] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(\lambda_{n,\mathbb{C}})"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0(M_n(A)) \arrow[r] & K_0(M_n(\widetilde{A})) \arrow[r, "K_0(\pi_n)"] & K_0(M_n(\mathbb{C})) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si demostramos que $K_0(\lambda_{n,\mathbb{C}})$ y $K_0(\lambda_{n,\widetilde{A}})$ son isomorfismos, entonces, por el lema de los cinco, $K_0(\lambda_{n,A})$ también lo es. Por tanto, basta probar el enunciado en el caso con unidad.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $\gamma_{n,k} : M_k(M_n(A)) \to M_{nk}(A)$ el *-isomorfismo dado por considerar los elementos de $M_k(M_n(A))$ como elementos en $M_{nk}(A)$ (borrar los paréntesis). Definimos $\gamma_n : P_\infty(M_n(A)) \to K_0(A)$ dado por $\gamma_n(p) = [\gamma_{n,k}(p)]_0$ para $p \in P_k(M_n(A))$. Es fácil verificar que estamos en las condiciones de aplicar la propiedad universal de K_0 (proposición 2.2.11) a γ_n, obteniendo así el homomorfismo de grupos $\alpha : K_0(M_n(A)) \to K_0(A)$ que cumple $\alpha([p]_0) = [\gamma_{n,k}(p)]$ para $p \in P_k(M_n(A))$.

Probemos que α es la inversa de $K_0(\lambda_{n,A})$, para ello es suficiente mostrar que

$$(\lambda_{n,A})_{kn}(\gamma_{n,k}(p)) \sim_0 p \ en\ P_\infty(M_n(A)),\ p \in P_k(M_n(A)),$$
$$\gamma_{n,k}((\lambda_{n,A})_k(p)) \sim_0 p \ en\ P_\infty(A),\ p \in P_k(A),$$

donde $(\lambda_{n,A})_m$ es el *-homomorfismo $M_m(A) \to M_m(M_n(A))$ inducido por $\lambda_{m,A}$. Probaremos la segunda afirmación, la primera es similar.

Sea $\{e_1, \ldots, e_{kn}\}$ la base estándar de $\mathbb{C}^{kn}$, y u la matriz unitaria en $M_{kn}(\mathbb{C}) \subseteq M_{kn}(A)$ dada por

$$u(e_l) = e_{n(l-1)+1},\ l = 1, 2, \ldots, k.$$

Veamos que se cumple la siguiente igualdad:

$$p \oplus 0_{(n-1)k} = u^* \gamma_{n,k}((\lambda_{n,A})_k(p))u.$$

Tenemos $\gamma_{n,k}((\lambda_{n,A})_k(p))u =$

$$\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix} p_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} p_{1k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\begin{pmatrix} p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} p_{2k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\begin{pmatrix} p_{k1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p_{k2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} p_{kk} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \vdots & \dots & 0 & ? & ? & \dots & ? \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & \vdots & ? & ? & \dots & ? \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & ? & ? & \dots & ? \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? & \dots & ?
\end{pmatrix}.$$

Estamos utilizando la notación $diag(p_{11}, 0_{n-1}) = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sin poner el tamaño de las matrices nulas para evitar confusión.

No quitamos los paréntesis de las matrices en el interior de la matriz izquierda para evitar confusiones, sin embargo, en realidad van sin paréntesis. Lo que aparece en los signos de interrogación de la matriz derecha no importa, ya que, al hacer la multiplicación de matrices, éstos se anulan. Esto se debe a que, al tomar el producto de una fila no nula de la matriz izquierda con una columna de la matriz derecha más allá de la k-ésima, tenemos

$$\begin{pmatrix} p_{a1} & 0 & \dots & 0 & p_{a2} & 0 & \dots & 0 & p_{ak} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ \vdots \\ ? \end{pmatrix}.$$

El primer vector tiene elementos no nulos únicamente en las entradas $n(l-1)+1$ con $l = 1, \dots, k$. Pero el segundo vector debe ser nulo en esas entradas, de lo contrario significaría que $u(e_t) = e_{n(l-1)+1}$ para algún $l \in \{1, \dots, k\}$ y $t > k$. Esto no puede ocurrir, ya que $u(e_l) = e_{n(l-1)+1}$ y, puesto que $t > k \geq l$, se tiene $e_t \neq e_l$, lo cual contradice la definición de u (es una permutación de la base). El resultado de este producto es la siguiente matriz

$$
\begin{pmatrix}
p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}.
$$

Donde p_{11} y p_{21} están separados por $n-1$ ceros, lo mismo ocurre entre p_{21} y p_{31}, y así sucesivamente. Luego,

$$
u^* = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & ? & \dots & 0 & ? & \dots & 0 & ? & \dots & ? \\
0 & ? & \dots & 0 & ? & \dots & 0 & ? & \dots & ? \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
0 & ? & \dots & 0 & ? & \dots & 0 & ? & \dots & ?
\end{pmatrix},
$$

al multiplicar la matriz anterior por u^* se agruparán todas las filas que contienen los p_{ij}. Por un argumento análogo al dado anteriormente, los elementos «?» no influyen en el producto. Concluyendo así:

$$
p \sim_0 p \oplus 0_{(n-1)k} = u^* \gamma_{n,k}((\lambda_{n,A})_k(p))u,
$$

para toda proyección $p \in P_k(A)$. □

2.7.2. Estabilidad mediante operadores compactos

Consideremos A una C*-álgebra, H un espacio de Hilbert de dimensión infinita numerable y p una proyección en $\mathcal{K}(H)$ cuya imagen es de dimensión 1. Luego, definimos el siguiente *-homomorfismo

$$
\varphi_p : A \to \mathcal{K}(H) \otimes A : a \to p \otimes a.
$$

Denominamos $p_* = K_0(\varphi_p) : K_0(A) \to K_0(\mathcal{K}(H) \otimes A)$. Sea q otra proyección sobre H con imagen de dimensión 1, definimos:

$$
\varphi_q : A \to \mathcal{K}(H) \otimes A : a \to q \otimes a,
$$

y $q_* = K_0(\varphi_q)$. Veamos que $q_* = p_*$. Dado que p y q tienen un rango de dimensión finita, se deduce que las imágenes de $1-q$ y $1-p$ tienen la misma dimensión. Según la proposición 2.1.18, existe un elemento unitario $u \in B(H)$ tal que $q = upu^*$. Utilizando [13, Teorema 2.5.8], podemos expresar u como e^{iv}, donde $v \in B(H)$ es autoadjunto. Consideremos los elementos unitarios en $B(H)$ dado por $u_t = e^{itv}$. Luego, definimos $\psi_t : \mathcal{K}(H) \otimes A \to \mathcal{K}(H) \otimes A : s \otimes a \to u_t s(u_t)^{-1} \otimes a$. Como resultado, $\varphi_t = \psi_t \circ \varphi_p : A \to \mathcal{K}(H) \otimes A$ se convierte en una homotopía. Por lo tanto, se verifica que $p_* = K_0(\varphi_p) = K_0(\varphi_0) = K_0(\varphi_1) = K_0(\varphi_q) = q_*$. Este morfismo p_* es conocido como el morfismo canónico.

Definición 2.7.2. *Consideremos H un espacio de Hilbert de dimension infinita numerable, y una base ortonormal $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H, denotaremos por e la proyección sobre* $\operatorname{span}\{\xi_1\}$. *Definimos*

$$\kappa : A \longrightarrow \mathcal{K}(H) \otimes A, \qquad \kappa(a) = e \otimes a.$$

Probamos que $K_0(\kappa)$ no depende de la elección de la base de H.

Teorema 2.7.3. *Sea A una C^*-álgebra y H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, el morfismo canónico es un isomorfismo entre $K_0(A)$ y $K_0(\mathcal{K}(H) \otimes A)$.*

Demostración. Usaremos la notación $\mathcal{K} = \mathcal{K}(H)$, considerando $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H, y e_{ij} el operador acotado definido por $e_{ij}(x) = \langle x, e_j \rangle e_i$. Consideremos $p_n = \sum_{j=1}^{n} e_{jj}$, y

$$\psi_n : M_n(A) \to p_n \mathcal{K} p_n \otimes_{\mathbb{C}} A, \quad (a_{ij}) \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} \otimes a_{ij},$$

el cual es un $*$-isomorfismo[8].

El morfismo

$$\pi^n : M_{2^{n-1}}(A) \to \mathcal{K} \otimes A, \quad a \mapsto \psi_{2^{n-1}}(a),$$

es un $*$-homomorfismo isométrico, y $\pi^n = \pi^{n+1} \circ \kappa_n$, donde $\kappa_n : M_{2^{n-1}}(A) \to M_{2^n}(A)$ es

$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea B el límite inductivo de la sucesión $(M_{2^{n-1}}(A), \kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $\kappa^n : M_{2^{n-1}}(A) \to B$ los morfismos del límite directo. Por definición de B, existe un único $*$-homomorfismo $\pi : B \to K \otimes A$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_{2^{n-1}}(A) \arrow[rr, "\kappa^n"] \arrow[dr, "\pi^n"'] & & B \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathcal{K} \otimes A & \end{tikzcd} \tag{2.17}$$

es conmutativo.

[8]La sobreyectividad es como en [13, Ejemplo 6.3.2]. Para la inyectividad, sea φ la representación universal de A en el espacio de Hilbert H', $a = (a_{ij}) \in M_n(A)$ y $x_1, \ldots, x_n \in H'$ arbitrarios. Definimos $x = \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes x_k \in H \otimes H'$. Entonces, $\sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} \otimes \varphi(a_{ij})(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \varphi(a_{ik})(x_k)$, y la norma de este elemento coincide con la de $\varphi(a) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Así, ψ_n es una isometría.

Tenemos $\mathcal{K} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} p_{2^{n-1}} K p_{2^{n-1}}}$ ya que que p_n es una unidad aproximada de $\mathcal{K}$. Luego,

$$\mathcal{K} \otimes A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} p_{2^{n-1}} \mathcal{K} p_{2^{n-1}} \otimes_{\mathbb{C}} A} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \pi^n(M_{2^{n-1}}(A))},$$

y π es sobreyectivo. Por la conmutatividad del diagrama (2.17) π es isométrico en cada $\kappa^n(M_{2^{n-1}}(A))$ [9], y la densidad de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \kappa^n(M_{2^{n-1}}(A))$ en B, nos dice que π es una isometría en B, concluyendo así que es un isomorfismo.

Sea G el límite inductivo de $(K_0(M_{2^{n-1}}(A)),\, K_0(\kappa_n))$, y $\tau^n \colon K_0(M_{2^{n-1}}(A)) \to G$ los morfismos del límite inductivo. Por continuidad de K_0, existe un único isomorfismo $\tau \colon G \to K_0(B)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K_0(M_{2^{n-1}}(A)) \arrow[rr, "\tau^n"] \arrow[dr, "K_0(\kappa^n)"'] & & G \arrow[dl, "\tau"] \\
& K_0(B) &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Luego, utilizando el teorema 2.7.1, $K_0(\kappa_n)$ es un isomorfismo, y por construcción del límite inductivo, τ^n lo es para todo n. Así, $K_0(\kappa^n)$ es un isomorfismo, y mediante la conmutatividad del diagrama (2.17) $K_0(\pi^n)$ también lo es para todo n. Dado que $\pi^1 \colon M_1(A) \to \mathcal{K} \otimes A,\ a \mapsto e_{11} \otimes a$, se concluye que $K_0(\pi^1)$ es el morfismo canónico. □

Ejemplo 2.7.4. Ahora podemos calcular $K_0(\mathcal{K}(H))$ para un espacio de Hilbert H de dimensión infinita numerable. Es sencillo demostrar que $\mathcal{K}(H) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathcal{K}(H)$. Luego, empleando la estabilidad mediante $\mathcal{K}(H)$, obtenemos:

$$K_0(\mathcal{K}(H)) \simeq K_0(\mathcal{K}(H) \otimes \mathbb{C}) \simeq K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}.$$

2.8. El funtor K_1

2.8.1. Definición del grupo K_1

Definición 2.8.1. *Sea A una C^*-álgebra con unidad, y denotemos por $\mathcal{U}(A)$ al grupo de elementos unitarios. Definimos*

$$\mathcal{U}_n(A) = \mathcal{U}(M_n(A)), \quad \mathcal{U}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n(A).$$

La operación $\oplus$ en $\mathcal{U}_\infty(A)$ se define como:

$$u \oplus v = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{n+m}(A),\ v \in \mathcal{U}_n(A),\ u \in \mathcal{U}_m(A).$$

[9] Notar que κ_n es una isometría, luego la proposición 1.9.4 nos dice que κ^n también lo es.

Procederemos a establecer una relación de equivalencia en $\mathcal{U}_\infty(A)$, utilizando la notación $\sim_1$. Para $u \in \mathcal{U}_n(A)$ y $v \in \mathcal{U}_m(A)$, escribimos $u \sim_1 v$ si existe un natural $k \geq m, n$ tal que

$$u \oplus 1_{k-n} \sim_h v \oplus 1_{k-m},$$

donde la homotopía se da en $\mathcal{U}_k(A)$.

Lema 2.8.2. *Dada A es una C^*-álgebra con unidad, entonces:*

1. *$\sim_1$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{U}_\infty(A)$,*
2. *$u \sim_1 u \oplus 1_n$ para todo $u \in \mathcal{U}_\infty(A)$ y $n \in \mathbb{N}$,*
3. *$u \oplus v \sim_1 v \oplus u$, para todo $u, v \in \mathcal{U}_\infty(A)$,*
4. *si $u, u', v, v' \in \mathcal{U}_\infty(A)$, con $u \sim_1 u'$ y $v \sim_1 v'$, entonces tenemos $u \oplus v \sim_1 u' \oplus v'$,*
5. *si $u, v \in \mathcal{U}_n(A)$ para un $n \in \mathbb{N}$, entonces $uv \sim_1 vu \sim_1 u \oplus v$*
6. *$(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ para todo $u, v, w \in \mathcal{U}_\infty(A)$.*

Demostración. (1),(2) y (6) son triviales. Para (5) recurrimos al lema de Whitehead 2.1.7, tenemos:

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}, \text{ en } \mathcal{U}(M_2(M_n(A))) = \mathcal{U}(M_{2n}(A)).$$

Para (3), sea $u \in \mathcal{U}_n(A)$ y $v \in \mathcal{U}_m(A)$. Definimos

$$z = \begin{pmatrix} 0_{m,n} & 1_m \\ 1_n & 0_{n.m} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{m+n}(A).$$

Vemos lo siguiente

$$\begin{pmatrix} v & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{m,n} & 1_m \\ 1_n & 0_{n.m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n,m} & 1_n \\ 1_m & 0_{m.n} \end{pmatrix} = z(u \oplus v)z^*,$$

utilizando la parte (5) con $z(u \oplus v)$ y z^* obtenemos: $v \oplus u = z(u \oplus v)z^* \sim_1 z^* z(u \oplus v) = u \oplus v$.

Para probar (4) es suficiente ver que

- si $u \sim_1 v$, entonces $w \oplus u \sim_1 w \oplus v$ para todo $u, v, w \in \mathcal{U}_\infty(A)$,
- $(u \oplus 1_k) \oplus (v \oplus 1_l) \sim_1 u \oplus v$ para todo $u, v \in \mathcal{U}_\infty(A)$ y todo $k, l \in \mathbb{N}$,
- $u \sim_h u'$ y $v \sim_h v'$ implican $u \oplus v \sim_h u' \oplus v'$ para todo $u, u' \in \mathcal{U}_n(A)$ y todo $v, v' \in \mathcal{U}_m(A)$.

Veamos que basta probar estos puntos. Supongamos

$$u \oplus 1_n \sim_h u' \oplus 1_l, \qquad v \oplus 1_m \sim_h v' \oplus 1_r,$$

con $n, m, l, r \in \mathbb{N}$. Entonces, por el tercer punto,

$$(u \oplus 1_n) \oplus (v \oplus 1_m) \sim_h (u' \oplus 1_l) \oplus (v' \oplus 1_r).$$

Por el segundo punto se tiene

$$u \oplus v \sim_1 u \oplus 1_n \oplus v \oplus 1_m.$$

Combinando ambas igualdades obtenemos

$$u \oplus v \sim_1 u \oplus 1_n \oplus v \oplus 1_m \sim_h u' \oplus 1_l \oplus v' \oplus 1_r \sim_1 u' \oplus v'.$$

Como la relación de homotopía es más fuerte que $\sim_1$, concluimos $u \oplus v \sim_1 u' \oplus v'$.

Ahora probamos los puntos auxiliares.

Primer punto. Si $u \sim_1 v$ entonces existen r, l tales que $u \oplus 1_r \sim_h v \oplus 1_l$. Extendiendo la homotopía colocando w a la izquierda, se obtiene

$$w \oplus u \oplus 1_r \sim_h w \oplus v \oplus 1_l,$$

por lo que $w \oplus u \sim_1 w \oplus v$.

Segundo punto. Usando la parte (2) del lema (que afirma $u \sim_1 u \oplus 1_k$ y $v \sim_1 v \oplus 1_l$) y aplicando repetidamente (3) y (6) del mismo lema, tenemos

$$u \oplus v \sim_1 (u \oplus v) \oplus (1_l \oplus 1_k) \sim_1 u \oplus (v \oplus (1_l \oplus 1_k)).$$

Aplicando el primer punto y las propiedades de conmutatividad/asociatividad (usando (3) y (6) varias veces) se obtiene

$$u \oplus (v \oplus (1_l \oplus 1_k)) \sim_1 u \oplus 1_k \oplus v \oplus 1_l,$$

y por tanto

$$(u \oplus 1_k) \oplus (v \oplus 1_l) \sim_1 u \oplus v.$$

Tercer punto. Sean $t \mapsto u_t$ y $t \mapsto v_t$ las homotopías entre u y u', y entre v y v', respectivamente. Entonces $t \mapsto u_t \oplus v_t$ es una homotopía entre $u \oplus v$ y $u' \oplus v'$, lo que demuestra el tercer punto.

$\square$

Definición 2.8.3. *Dada A una C^*-álgebra, definimos*

$$\boxed{K_1(A) = \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) / \sim_1}$$

Denominamos $[u]_1 \in K_1(A)$ la clase de equivalencia de $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$. Definimos la operación binaria $+$ en $K_1(A)$ por

$$[u]_1 + [v]_1 = [u \oplus v]_1,$$

donde $u, v \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$. El lema 2.8.2 muestra que $+$ está bien definida, es conmutativa y asociativa, y tiene elemento neutro $[1]_1$ (la clase de 1_n para cualquier $n \in \mathbb{N}$). Además,

$$0 = [1_n]_1 = [uu^*]_1 = [u]_1 + [u^*]_1$$

para todo $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$. En consecuencia $(K_1(A), +, [1]_1)$ es un grupo abeliano, y el inverso de $[u]_1$ viene dado por

$$-[u]_1 = [u^*]_1.$$

Proposición 2.8.4. *Dada A una C^*-álgebra, tenemos lo siguiente*

$$K_1(A) = \{[u]_1 : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})\}, \tag{2.18}$$

y la función $[.]_1 : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \to K_1(A)$ cumple las siguientes propiedades:

1. $[u \oplus v]_1 = [u]_1 + [v]_1$,
2. $[1]_1 = 0$,
3. *si* $u, v \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ *y* $u \sim_h v$, *entonces* $[v]_1 = [u]_1$,
4. *si* $u, v \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$, *entonces* $[uv]_1 = [vu]_1 = [u]_1 + [v]_1$,
5. *para* $u, v \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$, $[u]_1 = [v]_1$ *si solo si* $v \sim_1 u$.

Demostración. Inmediato del lema anterior y la definición de K_1. □

Proposición 2.8.5. *(Propiedad universal de K_1)*
Consideremos A una C^*-álgebra, G un grupo abeliano, y $\nu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \to G$ una función que satisface las siguientes propiedades:

1. $\nu(v \oplus u) = \nu(v) + \nu(u)$.
2. $\nu(1) = 0$, *donde* 1 *es la unidad de* $\widetilde{A}$.
3. *Si* $u, v \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ *y* $u \sim_h v$, *entonces* $\nu(v) = \nu(u)$.

Bajo estas condiciones, existe un único homomorfismo de grupos $\alpha : K_1(A) \to G$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \arrow[d, "{[\ \cdot\ ]_1}"'] \arrow[drr, "\nu"] & & \\ K_1(A) \arrow[rr, "\alpha"'] & & G \end{tikzcd} \tag{2.19}$$

es conmutativo.

Demostración. Mostraremos que dados $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ y $v \in \mathcal{U}_m(\widetilde{A})$ los cuales cumplen $u \sim_1 v$, entonces $\nu(u) = \nu(v)$. Sea $k \geq m, n$ con $u \oplus 1_{k-n} \sim_h v \oplus 1_{k-m}$ en $\mathcal{U}_k(\widetilde{A})$. Utilizando (1) y (2) tenemos que

$$\nu(u \oplus 1_{k-n}) = \nu(u) + \nu(\underbrace{1 \oplus \cdots \oplus 1}_{\text{k-n veces}}) = \nu(u) + \nu(1) + \cdots + \nu(1) = \nu(u),$$

lo mismo con $\nu(v \oplus 1_{k-m}) = \nu(v)$. Luego por (3) concluimos $\nu(u) = \nu(v)$. Concluyendo así que la función ν baja al cociente como un morfismo $\alpha : K_1(A) \to G$ tal que el diagrama conmuta. Vemos lo siguiente

$$\alpha([u]_1 + [v]_1) = \alpha([u \oplus v]_1) = \nu(u \oplus v) = \nu(u) + \nu(v) = \alpha([u]_1) + \alpha([v]_1),$$

entonces α es un homomorfismo de grupos. La unicidad de α se sigue por la sobreyectividad de $[.]_1$. □

Comentario 2.8.6. Sería natural definir, cuando A es una C*-álgebra con unidad, $K_1(A)$ como $\mathcal{U}_\infty(A)/\sim_1$. La siguiente proposición prueba que estos dos grupos son isomorfos.

Proposición 2.8.7. *Sea A una C*-álgebra con unidad. Existe un isomorfismo $\rho : K_1(A) \to \mathcal{U}_\infty(A)/\sim_1$ tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "{[\ \cdot\ ]_1}"'] & \mathcal{U}_\infty(A) \arrow[d, "\pi"] \\ K_1(A) \arrow[r, "\rho"'] & \mathcal{U}_\infty(A)/\sim_1 \end{tikzcd} \tag{2.20}$$

donde π es el morfismo cociente, es conmutativo.

*La función μ se define de la siguiente manera. Utilizando la identificación $\widetilde{A} = A + \mathbb{C}f$, donde $f = 1_{\widetilde{A}} - 1_A$, el homomorfismo $\mu : \widetilde{A} \to A$ dado por $\mu(a + \alpha f) = a$ es un *-homomorfismo que preserva la unidad. Extendemos μ a un *-homomorfismo que preserva la unidad de $M_n(\widetilde{A}) \to M_n(A)$, y luego a $\mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \to \mathcal{U}_\infty(A)$.*

Demostración. Notar que $\mu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \to \mathcal{U}_\infty(A)$ es sobreyectivo. Entonces es suficiente demostrar que

- $\mu(u) \sim_1 \mu(v)$ si solo si $u \sim_1 v$ para todo $u, v \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$,
- $\mu(u \oplus v) = \mu(u) \oplus \mu(v)$ para todo $u, v \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$.

Veamos que demostrar estos dos puntos nos proporciona el isomorfismo deseado. Si $u, v \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ son tales que $u \sim_h v$, entonces se tiene que $\mu(u) \sim_h \mu(v)$. Luego, dado que la homotopía es una relación más fuerte que $\sim_1$, concluimos que $\mu(u) \sim_1 \mu(v)$.

Como μ preserva la unidad, se cumple que $\mu(1_{\widetilde{A}}) = 1_A$, y por ende $\pi(\mu(1_{\widetilde{A}})) = 0$. Utilizando el segundo punto, obtenemos que

$$\pi(\mu(u \oplus v)) = \pi(\mu(u) \oplus \mu(v)) = \pi(\mu(u)) + \pi(\mu(v)),$$

para todo $u, v \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$.

Por la propiedad universal de K_1, existe un homomorfismo de grupos ρ tal que el diagrama conmuta. Además, por el primer punto, este homomorfismo es inyectivo.

Veamos la demostración de ambos puntos. El segundo es trivial por su definición. Ahora para mostrar el primero es suficiente ver que

$$\mu(u) \sim_h \mu(v) \text{ si solo si } u \sim_h v \text{ para todo } u, v \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A}) \text{ y todo } n \in \mathbb{N}.$$

Si $u \sim_h v$, deducimos que $\mu(u) \sim_h \mu(v)$ ya que μ preserva la unidad y es *-homomorfismo. Veamos la otra parte. Si $\mu(u) \sim_h \mu(v)$ en $\mathcal{U}_n(A)$, por definición de μ tenemos $u_0, v_0 \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}f)$ tales que

$$u = \mu(u) + u_0 \text{ y } v = \mu(v) + v_0.$$

Como u_0, v_0 se pueden interpretar como matrices en $M_n(\mathbb{C})$ tienen espectro finito, y utilizando (2) del lema 2.1.5 concluimos que $u_0 \sim_h 1 \sim_h v_0$, donde 1 es la unidad de $M_n(\mathbb{C}f)$ y la homotopía es en $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}f)$. Sean $t \to a_t$ y $t \to b_t$ las homotopías en $\mathcal{U}_n(A)$ y $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}f)$, entonces $t \to a_t + b_t$ es una homotopía en $\mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ entre u y v. $\square$

Comentario 2.8.8. Si A es una C*-álgebra con unidad y $u \in \mathcal{U}_\infty(A)$, utilizaremos la notación $[u]_1$ para referirnos al elementos de $K_1(A)$ que corresponda a $[u]_1$ mediante el isomorfismo de la proposición.

Nótese que, dado $u \in \mathcal{U}(A)$, este no será unitario en $\widetilde{A}$, ya que ningún elemento de A es invertible en $\widetilde{A}$. Por lo tanto, no tendría sentido definir directamente $[u]_1$ para $u \in \mathcal{U}(A)$ identificándolo como un elemento de $\widetilde{A}$ y llevándolo al cociente.

Ejemplo 2.8.9. $K_1(\mathbb{C}) = K_1(M_n(\mathbb{C})) = 0$. Más en general, $K_1(B(H)) = 0$ para todo espacio de Hilbert H.

Demostración. Por el comentario 2.1.6, tenemos que $\mathcal{U}(M_k(M_n(\mathbb{C}))) = \mathcal{U}(M_{kn}(\mathbb{C})) = \mathcal{U}_0(M_{kn}(\mathbb{C}))$. Esto implica que $\mathcal{U}_\infty(M_n(\mathbb{C}))/\sim_1$ es el grupo trivial.

Sea H un espacio de Hilbert. Mostraremos que $u \sim_h 1_n$ para todo $u \in \mathcal{U}(B(H))$. Esto implicará que $u \sim_1 1_n$, y por ende $\mathcal{U}_\infty(B(H))/\sim_1$ es el grupo trivial.

Definimos $\varphi : \mathbb{T} \to [0, 2\pi)$ dada por

$$\varphi(e^{i\theta}) = \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Luego, φ es una función de Borel medible y acotada, y además cumple $z = e^{i\varphi(z)}$ para todo $z \in \mathbb{T}$. Utilizando el cálculo funcional de Borel ([8, Teorema 2.1.3]), se establece un *-homomorfismo entre las funciones de Borel acotadas en $sp(u) \to \mathbb{C}$ y el álgebra de von Neumann generada por u. Dado que φ es una función acotada de Borel, existe el elemento $\varphi(u)$. Como esta función es real, concluimos que $\varphi(u)^* = \varphi(u)$. El cálculo funcional de Borel extiende el cálculo funcional continuo, por ende, la función inclusión de $sp(u)$ corresponde en $\mathbb{C}$ a u. Así, deducimos que $u = e^{i\varphi(u)}$, con $\varphi(u)$ autoadjunto. Por la proposición 2.1.8, concluimos que $u = e^{i\varphi(u)} \sim_h 1$. □

2.8.2. Funtorialidad de K_1

Definición 2.8.10. *Dadas A y B dos C*-álgebras, y sea $\varphi : A \to B$ un *-homomorfismo. Entonces, φ induce un *-homomorfismo $\widetilde{\varphi} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$. A su vez, este se extiende a un *-homomorfismo que preserva unidad $\widetilde{\varphi} : M_n(\widetilde{A}) \to M_n(\widetilde{B})$. Esto nos proporciona un morfismo $\widetilde{\varphi} : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \to \mathcal{U}_\infty(\widetilde{B})$.*

Definimos entonces $\nu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \to K_1(B)$ mediante

$$\nu(u) = [\widetilde{\varphi}(u)]_1, \quad \textit{para todo } u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}).$$

Esta función satisface las condiciones de la propiedad universal de K_1. Por lo tanto, se induce un homomorfismo de grupos

$$K_1(\varphi) : K_1(A) \to K_1(B),$$

tal que

$$K_1(\varphi)([u]_1) = [\widetilde{\varphi}(u)]_1, \quad u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}). \tag{2.21}$$

Comentario 2.8.11. Sean A y B son C*-álgebras con unidad y $\varphi : A \to B$ es un *-homomorfismo que preserva la unidad. Cuando utilizamos la identificación $\widetilde{A} = A + \mathbb{C}f$, estamos identificando $\widetilde{A}$ con $A \oplus \mathbb{C}$, donde el producto en esta última álgebra es coordenada a coordenada. Nótese que, A tiene unidad implica que $A \oplus \mathbb{C}$ con este producto también tiene unidad, siendo $(1_A, 1_\mathbb{C})$.

El *-isomorfismo entre $\widetilde{A}$ y esta álgebra está dado por

$$a + \alpha \;\longmapsto\; (a + 1_A, \alpha), \quad a \in A,\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Entonces, dado $a \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, tenemos que $\mu(a+\alpha) = a + 1_A$. Por ende, dado $u \in \mathcal{U}(A)$, la notación $[u]_1$ (ver comentario 2.8.8) se refiere a la clase $[u - 1_A]_1 \in K_1(A)$.

Así, se cumple que

$$K_1(\varphi)[u]_1 = [\widetilde{\varphi}(u - 1_A)]_1 = [\varphi(u - 1_A)]_1.$$

Si deseamos interpretar esta expresión como una clase en $\mathcal{U}_\infty(B)/\sim_1$, corresponde a

$$[\mu_B(\varphi(u - 1_A))]_1 = [(\varphi(u - 1_A)) - 1_B]_1 \in \mathcal{U}_\infty(B)/\sim_1 .$$

Entonces si φ preserva la unidad concluimos:

$$K_1(\varphi)[u]_1 = [\varphi(u)]_1$$

para todo $u \in \mathcal{U}_\infty(A)$.

Proposición 2.8.12 (Funtorialidad de K_1)**.** *Consideremos A y B dos C*-álgebras. Se cumplen los siguientes puntos:*

1. $K_1(Id_A) = Id_{K_1(A)}$.
2. $K_1(\psi \circ \varphi) = K_1(\psi) \circ K_1(\varphi)$, *si* $\varphi : A \to B$ *y* $\psi : B \to C$ *son *-homomorfismos.*
3. $K_1(\{0\}) = \{0\}$.
4. $K_1(0_{B,A}) = 0_{K_1(B),K_1(A)}$.
5. *Si* $\varphi, \psi : A \to B$ *son *-homomorfismos homotópicos, entonces* $K_1(\varphi) = K_1(\psi)$.
6. *Si A y B son homotópicamente equivalentes, entonces $K_1(A)$ es isomorfo a $K_1(B)$.*

Demostración. Mediante la igualdad (2.21) y $\widetilde{Id_A} = Id_{\widetilde{A}}$, $\widetilde{(\psi \circ \varphi)} = \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}$, podemos concluir (1) y (2).

(3). Notar que, para toda C*-álgebra A, se cumple

$$K_1(A) \simeq K_1(\widetilde{A}).$$

En particular, $K_1(\{0\})$ es isomorfo a $K_1(\mathbb{C}) = 0$.

(4). El *-homomorfismo $0_{B,A}$ es la composición de los morfismos $A \to \{0\} \to B$, utilizando (3) y (2) obtenemos el resultado.

(5). Dada $\varphi_t : A \to B$, $t \in [0,1]$, una homotopía entre φ y ψ, se induce $\widetilde{\varphi_t} : M_n(\widetilde{A}) \to M_n(\widetilde{B})$, *-homomorfismos que preserva unidad y da una homotopía entre $\widetilde{\varphi}$ y $\widetilde{\psi}$.

Entonces, para todo $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ se tiene $\widetilde{\varphi}(u) \sim_h \widetilde{\psi}(u)$ en $\mathcal{U}_n(\widetilde{B})$. Por ende,

$$K_1(\varphi)([u]_1) = [\widetilde{\varphi}(u)]_1 = [\widetilde{\psi}(u)]_1 = K_1(\psi)([u]_1).$$

(6). Es una consecuencia de (1), (2) y (5). □

Lema 2.8.13. *Consideremos A y B dos C*-álgebras, sea $\varphi : A \to B$ un *-homomorfismo y $g \in \ker\big(K_1(\varphi)\big)$. Entonces se cumplen los siguientes puntos:*

1. Existe $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$ *tal que* $g = [u]_1$ *y* $\widetilde{\varphi}(u) \sim_h 1$.

2. Si φ *es sobreyectiva, entonces existe* $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$ *tal que* $g = [u]_1$ *y* $\widetilde{\varphi}(u) = 1$.

Demostración. (1) Sea $v \in \mathcal{U}_m(\widetilde{A})$ con $g = [v]_1$. Como $[\widetilde{\varphi}(v)]_1 = 0 = [1_m]_1$, existe $n \geq m$ tal que

$$\widetilde{\varphi}(v) \oplus 1_{n-m} \sim_h 1_m \oplus 1_{n-m} = 1_n.$$

Definimos $u = v \oplus 1_{n-m}$. Entonces $[u]_1 = [v]_1$ y $\widetilde{\varphi}(u) = \widetilde{\varphi}(v) \oplus 1_{n-m} \sim_h 1_n$.

(2) Utilizando (1) encontramos $v \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ tal que $\widetilde{\varphi}(v) \sim_h 1$ y $g = [v]_1$. El lema 2.1.9 nos proporciona $w \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ que cumple $w \sim_h 1$ y $\widetilde{\varphi}(w) = \widetilde{\varphi}(v)$. Entonces $u = w^*v$ satisface las propiedades requeridas. □

Proposición 2.8.14. *(Semiexactitud de K_1)*
Consideremos una sucesión exacta corta de C-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\ \varphi\ } A \xrightarrow{\ \psi\ } B \longrightarrow 0.$$

Entonces la siguiente sucesión es exacta

$$K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(B).$$

Demostración. Utilizando que K_1 es un funtor que lleva el morfismo nulo en el morfismo nulo, y $\psi \circ \varphi = 0$. Obtenemos:

$$K_1(\psi) \circ K_1(\varphi) = 0.$$

Concluyendo así $Im(K_1(\varphi)) \subseteq Ker(K_1(\psi))$.

Sea $g \in Ker(K_1(\psi))$, utilizando (2) del lema 2.8.13 encontramos $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ con $g = [u]_1$ y $\widetilde{\psi}(u) = 1$. Ahora, por (2) del lema 2.5.1 existe $v \in \mathcal{U}_n(\widetilde{I})$ tal que $\widetilde{\varphi}(v) = u$. Luego

$$[v]_1 \in K_1(I) \quad y \quad K_1(\varphi)([v]_1) = [\widetilde{\varphi}(v)]_1 = [u]_1 = g.$$

□

2.8.3. Propiedades de K_1

A continuación enunciaremos propiedades de K_1. Sus demostraciones se darán posteriormente, tras probar el isomorfismo

$$\boxed{K_1(A) \simeq K_0(SA)}$$

y empleando que las proposiciones que se enuncian ya fueron demostradas para K_0.

Proposición 2.8.15 (Escisión-exactitud de K_1)**.**
Consideremos una sucesión exacta de C-álgebras que escinde*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"'] & B \arrow[l, bend right, "\varphi"'] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Luego, obtenemos la siguiente sucesión exacta de grupos que escinde

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_1(I) \arrow[r] & K_1(A) \arrow[r, "K_1(\psi)"'] & K_1(B) \arrow[l, bend right, "K_1(\varphi)"'] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Proposición 2.8.16 (Suma directa)**.**
Sean A y B dos C-álgebras, entonces*

$$K_1(A) \oplus K_1(B) \simeq K_1(A \oplus B).$$

Más específicamente, si $i_A\colon A \to A \oplus B$ y $i_B\colon B \to A \oplus B$ son las inclusiones, el morfismo

$$K_1(i_A) \oplus K_1(i_B)\colon K_1(A) \oplus K_1(B) \to K_1(A \oplus B), \qquad (g,h) \mapsto K_1(i_A)(g) + K_1(i_B)(h),$$

es un isomorfismo de grupos.

Proposición 2.8.17 (Continuidad de K_1)**.**
Sea una sucesión inductiva de C-álgebras*

$$A_1 \xrightarrow{\quad\varphi_1\quad} A_2 \xrightarrow{\quad\varphi_2\quad} A_3 \xrightarrow{\qquad\quad} \dots$$

Si su límite inductivo es $(A, \{\mu_n\})$, y sea $(G_1, \{\beta_n\})$ el límite inductivo de la sucesión de grupos abelianos

$$K_1(A_1) \xrightarrow{\quad K_1(\varphi_1)\quad} K_1(A_2) \xrightarrow{\quad K_1(\varphi_2)\quad} K_1(A_3) \xrightarrow{\qquad\quad} \dots$$

Entonces

$$\boxed{K_1(\varinjlim A_n) \simeq \varinjlim K_1(A_n).}$$

Donde el isomorfismo de grupos

$$\gamma\colon G_1 \longrightarrow K_1(A)$$

cumple lo siguiente:

$$\gamma \circ \beta_n = K_1(\mu_n), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 2.8.18 (Estabilidad de K_1)**.**
Dada A una C-álgebra, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{K}$ los operadores compactos sobre un espacio de Hilbert numerable de dimensión infinita. Consideremos*

$$\lambda_{n,A}\colon A \longrightarrow M_n(A) \quad y \quad \kappa\colon A \longrightarrow A \otimes \mathcal{K}$$

los morfismos definidos en los teoremas 2.7.1 y 2.7.3, respectivamente. Entonces,

$$K_1(\lambda_{n,A})\colon K_1(A) \longrightarrow K_1(M_n(A))$$

y

$$K_1(\kappa)\colon K_1(A) \longrightarrow K_1(A \otimes \mathcal{K})$$

son isomorfismos de grupos.

2.8.4. Ejemplos de K_1

Ejemplo 2.8.19. Dado X un espacio compacto Hausdorff y contráctil, entonces $K_1(C(X)) = 0$.

Demostración. Sea

$$H\colon X \times [0,1] \longrightarrow X$$

la homotopía tal que $H(x,0) = x_0$ y $H(x,1) = x$ para todo $x \in X$. Dado $f \in \mathcal{U}(C(X))$ definimos $f_t(x) = f(H(x,t))$, con $t \in [0,1]$. Al igual que en el ejemplo 2.2.22, puede probarse que esto es una homotopía en $\mathcal{U}(C(X))$. De este modo, $f \sim_h f(x_0)$.

Extendiendo esta homotopía a $u \in \mathcal{U}_n(C(X))$, tenemos

$$u = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} f(x_0)_{11} & \dots & f(x_0)_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_0)_{n1} & \dots & f(x_0)_{nn} \end{pmatrix} = u_0.$$

Por lo tanto, $u \sim_h u_0$ en $\mathcal{U}_n(C(X))$. Dado que u_0 es una matriz con coeficientes en $\mathbb{C}$, su espectro es finito. Por el corolario 2.1.6, se sigue que $u_0 \sim_h 1_n$ en $\mathcal{U}_n(C(X))$.

Concluimos, entonces, que $u \sim_h 1_n$, y por tanto $\mathcal{U}_\infty(C(X))/\sim_1$ es el grupo trivial. □

Ejemplo 2.8.20. Sea A es una C*-álgebra de dimensión finita, entonces $K_1(A) = 0$.

Demostración. Por [15, Proposición 7.1.5], se tiene el siguiente isomorfismo de C*-álgebras:

$$A \simeq M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}),$$

donde $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$K_1(A) \simeq K_1(M_{n_1}(\mathbb{C})) \oplus \cdots \oplus K_1(M_{n_k}(\mathbb{C})) = 0.$$

□

Ejemplo 2.8.21. Para toda AF-álgebra A (ver definición 4.2.5) se cumple $K_1(A) = 0$.

Demostración. Por definición de AF-álgebra, se tiene que

$$A \simeq \varinjlim A_n,$$

donde cada A_n es una C*-álgebra de dimensión finita para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por la continuidad de K_1 y el resultado del ejemplo anterior, obtenemos

$$K_1(A) \simeq K_1(\varinjlim A_n) \simeq \varinjlim K_1(A_n) = 0.$$

□

Ejemplo 2.8.22. Consideremos un espacio de Hilbert H, con dimensión infinita numerable. Entonces $K_1(\mathcal{K}(H)) = 0$.

Demostración. Es fácil ver que $\mathcal{K}(H) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathcal{K}(H)$. Luego, utilizando la estabilidad de K_1 junto con el hecho de que $K_1(\mathbb{C}) = 0$, obtenemos:

$$K_1(\mathcal{K}(H)) \simeq K_1(\mathcal{K}(H) \otimes \mathbb{C}) \simeq K_1(\mathbb{C}) = 0.$$

□

3 La sucesión exacta de seis términos

El teorema principal de este capítulo es la periodicidad de Bott, la cual establece que para toda C*-álgebra A se cumple

$$K_0(A) \simeq K_{2n}(A) \qquad \text{y} \qquad K_1(A) \simeq K_{2n+1}(A) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para demostrar esto comenzaremos relacionando K_0 con K_1 mediante el morfismo índice. Dada una sucesión exacta corta de C*-álgebras

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

el morfismo índice δ actuará como puente entre K_0 y K_1, dando la siguiente sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
K_1(I) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] & K_1(A) \arrow[r, "K_1(\psi)"] & K_1(B) \arrow[d, "\delta"] \\
K_0(B) & K_0(A) \arrow[l, "K_0(\psi)"] & K_0(I) \arrow[l, "K_0(\varphi)"]
\end{tikzcd}$$

Esta sucesión exacta nos permitirá probar que $K_0(SA) \simeq K_1(A)$, donde SA denota la suspensión de A.

Luego introduciremos la definición de los grupos K_n para $n \geq 1$, y probaremos que preservan sucesiones exactas que escinden y que son estables bajo tensorizar con $\mathcal{K}$, los operadores compactos. Estos grupos superiores de K-teoría nos permitirán obtener una sucesión exacta larga que involucra a todos los grupos K_n.

Finalizaremos el capítulo con la demostración de la periodicidad de Bott. En esta monografía daremos la demostración de Cuntz [6]. Existen diversas demostraciones de este teorema, la demostración de Cuntz es propia de la topología no conmutativa, ya que se basa en el uso del álgebra de Toeplitz, la cual es fuertemente no conmutativa. La periodicidad de Bott tendrá como consecuencia la sucesión exacta de seis términos, que completa la sucesión exacta inducida por el morfismo índice. Esto significa que, dada una sucesión exacta corta de C*-álgebras

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

obtenemos la siguiente sucesión exacta de seis términos:

$$\begin{tikzcd}
K_1(I) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] & K_1(A) \arrow[r, "K_1(\psi)"] & K_1(B) \arrow[d, "\delta_1"] \\
K_0(B) \arrow[u, "\delta_0"] & K_0(A) \arrow[l, "K_0(\psi)"] & K_0(I) \arrow[l, "K_0(\varphi)"]
\end{tikzcd}$$

Finalizaremos el capítulo calculando ejemplos de K_0 y K_1.

3.1. Morfismo índice

3.1.1. Definición del morfismo índice

Lema 3.1.1. *Consideremos una sucesión exacta corta de C^*-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

y sea $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B})$. Entonces:

1. *Existen $v \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$ y $p \in P_{2n}(\widetilde{I})$ tales que*

$$\widetilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*, \qquad s(p) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Suponiendo que v y p son como en (1), y dados $w \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$ y $q \in P_{2n}(\widetilde{I})$ que satisfacen*

$$\widetilde{\psi}(w) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\varphi}(q) = w \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^*,$$

entonces $s(q) = \operatorname{diag}(1_n, 0_n)$ y $p \sim_u q$ en $P_{2n}(\widetilde{I})$.

Demostración. (1). Aplicando el lema 2.1.9 obtenemos $v \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$ con $\widetilde{\psi}(v) = diag(u, u^*)$. Luego:

$$\widetilde{\psi}(v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando el lema 2.5.1 obtenemos que $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva, y también existe un elemento $p \in M_{2n}(\widetilde{I})$ tal que $\widetilde{\varphi}(p) = v \operatorname{diag}(1_n, 0)v^*$. Dado que $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva se deduce que p es una proyección. Luego,

$$\widetilde{\psi}(\widetilde{\varphi}(p)) = \widetilde{\psi}(v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y junto con la naturalidad de s podemos concluir $s(p) = diag(1_n, 0)$.

(2). Replicando el razonamiento anterior, pero aplicado a q, mostramos que $s(q) = \operatorname{diag}(1_n, 0_n)$. Observar que

$$\widetilde{\psi}(wv^*) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = 1_{2n}.$$

Utilizando el lema 2.5.1 se garantiza la existencia de $z \in M_{2n}(\widetilde{I})$ tal que $\widetilde{\varphi}(z) = wv^*$. Luego z es unitario, ya que $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva. Consideremos la igualdad

$$\widetilde{\varphi}(zpz^*) = wv^* \, \widetilde{\varphi}(p) \, vw^* = wv^*v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*vw^* = \widetilde{\varphi}(q).$$

Usando la inyectividad de $\widetilde{\varphi}$ concluimos que $q = zpz^*$. En consecuencia $p \sim_u q$ en $P_{2n}(\widetilde{I})$. $\square$

Comentario 3.1.2. El lema anterior nos permite definir:

$$\nu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{B}) \to K_0(I) : \nu(u) = [p]_0 - [s(p)]_0, \ \textit{para } u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A}).$$

Donde $p \in P_{2n}(\widetilde{I})$ se obtiene mediante (1) del lema 3.1.1. Este morfismo está bien definido por la parte (2) del mismo lema.

Lema 3.1.3. *El morfismo $\nu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{B}) \to K_0(I)$ tiene las siguientes propiedades:*

1. $\nu(u_1 \oplus u_2) = \nu(u_1) + \nu(u_2)$ *para todo* $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{B})$,
2. $\nu(1) = 0$,
3. *si* $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B})$ *y* $u_1 \sim_h u_2$, *entonces* $\nu(u_1) = \nu(u_2)$,
4. $\nu(\widetilde{\psi}(u)) = 0$ *para todo* $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$,
5. $K_0(\varphi)(\nu(u)) = 0$ *para todo* $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{B})$.

Demostración. (1). Consideremos $u_j \in \mathcal{U}_{n_j}(\widetilde{B})$, con $j = 1, 2$. Luego, al igual que en (1) del anterior lema, obtenemos $v_j \in \mathcal{U}_{2n_j}(\widetilde{A})$ y $p_j \in P_{2n_j}(\widetilde{I})$ tales que

$$\widetilde{\psi}(v_j) = \begin{pmatrix} u_j & 0 \\ 0 & u_j^* \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\varphi}(p_j) = v_j \begin{pmatrix} 1_{n_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_j^*.$$

Por definición $\nu(u_j) = [p_j]_0 - [s(p_j)]_0$. Luego definimos $y \in \mathcal{U}_{2(n_1+n_2)}(\mathbb{C})$, $v \in \mathcal{U}_{2(n_1+n_2)}(\widetilde{A})$ y $p \in \mathcal{U}_{2(n_1+n_2)}(\widetilde{I})$ dados por:

$$y = \begin{pmatrix} 1_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n_2} & 0 \\ 0 & 1_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n_2} \end{pmatrix}$$

$$v = y \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} y^*, \qquad p = y \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} y^*.$$

Veamos que v y p cumplen las igualdades del lema 3.1.1

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}(v) &= \begin{pmatrix} 1_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n_2} & 0 \\ 0 & 1_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n_1} & 0 \\ 0 & 1_{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n_2} & 0 \\ 0 & 1_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1^* & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_2^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora solo queda obtener:

$$\widetilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_{n_1+n_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*,$$

para ello hacemos explícitamente la cuenta

$$\widetilde{\varphi}(p) = \begin{pmatrix} 1_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n_2} & 0 \\ 0 & 1_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \begin{pmatrix} 1_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1^* & 0 \\ 0 & v_2 \begin{pmatrix} 1_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n_1} & 0 \\ 0 & 1_{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Veamos que se cumple la siguiente igualdad

$$\widetilde{\varphi}(p) = y \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} y^* \begin{pmatrix} 1_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} v_1^* & 0 \\ 0 & v_2^* \end{pmatrix} y^*. \tag{3.1}$$

Probaremos que el lado derecho de la igualdad es efectivamente $\widetilde{\varphi}$. Para ello hacemos el producto de matrices de la parte central del lado derecho, obtenemos lo siguiente

$$y^* \begin{pmatrix} 1_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^* & 0 \\ 0 & v_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \begin{pmatrix} 1_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1^* & 0 \\ 0 & v_2 \begin{pmatrix} 1_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2^* \end{pmatrix}.$$

Por ende probamos la igualdad (3.1). Utilizando $p \sim_u p_1 \oplus p_2$, concluimos:

$$\nu(u_1 \oplus u_2) = [p]_0 - [s(p)]_0 = [p_1 \oplus p_2]_0 - [s(p_1 \oplus p_2)]_0 = \nu(u_1) + \nu(u_2).$$

(3). Tomamos $v_1 \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$ y $p_1 \in P_{2n}(\widetilde{I})$ que satisfacen:

$$\widetilde{\psi}(v_1) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_1^* \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\varphi}(p_1) = v_1 \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1^*.$$

Por definición $\nu(u_1) = [p_1]_0 - [s(p_1)]_0$. Dado que $u_1^* u_2 \sim_h 1_n \sim_h u_1 u_2^*$, empleando el lema 2.1.9, obtenemos elementos unitarios $a, b \in M_n(\widetilde{A})$ tales que $\widetilde{\psi}(a) = u_1^* u_2$ y $\widetilde{\psi}(b) = u_1 u_2^*$. Definimos $v_2 = v_1 diag(a, b)$ en $\mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$, de modo que

$$\widetilde{\psi}(v_2) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* u_2 & 0 \\ 0 & u_1 u_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ 0 & u_2^* \end{pmatrix},$$

$$v_2 \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2^* = v_1 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & 0 \\ 0 & b^* \end{pmatrix} v_1^* = v_1 \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1^* = \widetilde{\varphi}(p_1).$$

Por definición de ν, tenemos $\nu(u_2) = [p_1]_0 - [s(p_1)]_0$.

(4). Consideremos el elemento $v = diag(u, u^*)$ de $\mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$, y $p = diag(1_n, 0)$ en $P_{2n}(\widetilde{I})$. Luego

$$\widetilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} \widetilde{\psi}(u) & 0 \\ 0 & \widetilde{\psi}(u^*) \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*.$$

Concluyendo así $\nu(\widetilde{\psi}(u)) = [p]_0 - [s(p)]_0 = 0$, ya que $s(p) = p$.

(2) Es inmediato de (4).

(5) Aplicamos (1) del lema 3.1.1, lo cual nos da $\widetilde{\varphi}(p) \sim_u s(p)$. Luego, dado que $\widetilde{\varphi}(s(p)) = s(p)$, obtenemos (5). □

Definición 3.1.4. ***(El morfismo índice)***
Dada una sucesión exacta corta de C-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\ \varphi\ } A \xrightarrow{\ \psi\ } B \longrightarrow 0. \tag{3.2}$$

Como en el comentario 3.1.2, definimos el morfismo $\nu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{B}) \to K_0(I)$. Utilizando la propiedad universal de K_1 junto con el lema 3.1.3 obtenemos un único homomorfismo de grupos

$$\delta_1 : K_1(B) \to K_0(I) \ \textit{tal que}\ \delta_1([u]_1) = \nu(u),\ \textit{para todo}\ u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{B}).$$

*El homomorfismo δ_1 es el denominado **morfismo índice** asociado a la sucesión exacta corta (3.2).*

La proposición siguiente es un resumen de las propiedades que hemos demostrado del morfismo índice.

Proposición 3.1.5. ***(Primera imagen estándar del morfismo índice)***
Consideremos una sucesión exacta corta de C-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\ \varphi\ } A \xrightarrow{\ \psi\ } B \longrightarrow 0.$$

Dados $n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B})$, $v \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$ y $p \in P_{2n}(\widetilde{I})$, que satisfacen:

$$\widetilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*, \qquad \widetilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}.$$

Entonces $\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [s(p)]_0$. También se cumplen las siguientes igualdades

$$\delta_1 \circ K_1(\psi) = 0 \quad \textit{y} \quad K_0(\varphi) \circ \delta_1 = 0.$$

Proposición 3.1.6. ***(Naturalidad del morfismo índice)***
Dado un diagrama conmutativo de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I' \arrow[r, "\varphi'"'] & A' \arrow[r, "\psi'"'] & B' \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

donde las filas son sucesiones exactas cortas de C-álgebras, y α, γ junto con β son *-homomorfismos. Consideramos $\delta_1 : K_1(B) \to K_0(I)$ y $\delta_1' : K_1(B') \to K_0(I')$ los morfismos índice vinculados a las sucesiones exactas cortas de las filas. De este modo, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
K_1(B) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "K_1(\beta)"'] & K_0(I) \arrow[d, "K_0(\gamma)"] \\
K_1(B') \arrow[r, "\delta_1'"'] & K_0(I').
\end{tikzcd}$$

Demostración. Fijamos $g \in K_1(B)$, luego sean $n \in \mathbb{N}$ y $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B})$ con $g = [u]_1$. Aplicando (1) del lema 3.1.1 obtenemos elementos $v \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$ y $p \in P_{2n}(\widetilde{I})$ tales que

$$\widetilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*.$$

Definimos $v' = \widetilde{\alpha}(v) \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A'})$ y $p' = \widetilde{\gamma}(p) \in P_{2n}(\widetilde{I'})$, entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi'}(v') &= (\widetilde{\psi' \circ \alpha})(v) = (\widetilde{\beta \circ \psi})(v) = \widetilde{\beta}(\widetilde{\psi}(v)) = \begin{pmatrix} \widetilde{\beta}(u) & 0 \\ 0 & \widetilde{\beta}(u)^* \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\varphi'}(p') &= (\widetilde{\varphi' \circ \gamma})(p) = (\widetilde{\alpha \circ \varphi})(p) = \widetilde{\alpha}(v) \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \widetilde{\alpha}(v)^* = v' \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (v')^*.
\end{aligned}$$

Por la definición del morfismo índice tenemos

$$\begin{aligned}
(\delta_1' \circ K_1(\beta))(g) &= \delta_1'([\widetilde{\beta}(u)]_1) = [p']_0 - [s(p')]_0 \\
&= [\widetilde{\gamma}(p)]_0 - [s(\widetilde{\gamma}(p))]_0 = K_0(\gamma)([p]_0 - [s(p)]_0) \\
&= K_0(\gamma)(\delta_1([u]_1)) = (K_0(\gamma) \circ \delta_1)(g).
\end{aligned}$$

Esto muestra que $\delta_1' \circ K_1(\beta) = K_0(\gamma) \circ \delta_1$. □

Levantados de elementos en una C*-álgebra

Definición 3.1.7. *Sean dos C*-álgebras A y B, junto con un *-homomorfismo sobreyectivo $\varphi : A \to B$. Se dice que $a \in A$ es un levantado de $b \in B$ si $\varphi(a) = b$. En este caso, el conjunto de todos los levantados de b es la coclase $a + Ker(\varphi)$.*

Proposición 3.1.8. *En las condiciones de la definición anterior, tenemos los siguientes resultados.*

1. *Todo elemento b tiene un levantado $a \in A$ tal que $||b|| = ||a||$.*

2. *Todo elemento autoadjunto b se puede levantar a un autoadjunto a. El autoadjunto a se puede tomar tal que $||a|| = ||b||$.*

3. *Todo elemento positivo b se levanta a un elemento positivo a. También se puede tomar a tal que es positivo y $||a|| = ||b||$.*

Demostración.

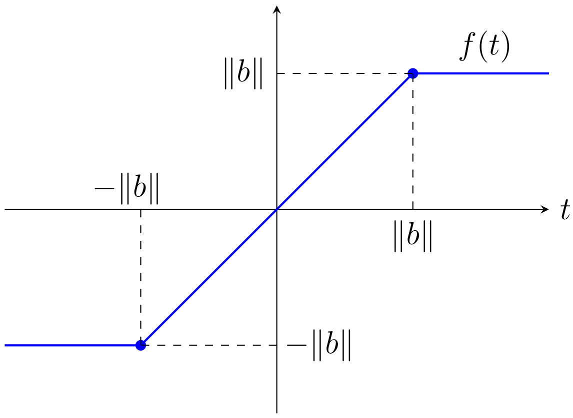
Probaremos primero (2) y luego pasaremos a probar (1).

(2). Sea $x \in A$ un levantado de b y definamos

$$a_0 = \frac{x + x^*}{2}.$$

Entonces a_0 es autoadjunto y $\varphi(a_0) = b$. Vamos a modificar a_0 para que además tenga la misma norma que b. Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua dada por

$$f(t) = \begin{cases} -\|b\|, & t \leq -\|b\|, \\ t, & -\|b\| \leq t \leq \|b\|, \\ \|b\|, & t \geq \|b\|. \end{cases}$$



Si $a = f(a_0)$, como f es real, a es autoadjunto. Además,

$$\operatorname{sp}(a) = \{\, f(t) : t \in \operatorname{sp}(a_0) \,\} \subseteq [-\|b\|, \|b\|],$$

por lo que $\|a\| = r(a) \leq \|b\|$. También tenemos

$$\varphi(a) = \varphi(f(a_0)) = f(\varphi(a_0)) = f(b) = b,$$ [1]

donde la última igualdad se debe a que $f(t) = t$ para todo $t \in [-\|b\|, \|b\|]$ y $\operatorname{sp}(b) \subseteq [-\|b\|, \|b\|]$, por cálculo funcional la imagen es exactamente b. Como φ es contractiva, $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$, entonces

$$\|b\| = \|\varphi(a)\| \leq \|a\| \leq \|b\|,$$

de donde se obtiene $\|a\| = \|b\|$, como queríamos.

(1). Dado $b \in B$, definimos

$$y = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, y es un elemento autoadjunto de $M_2(B)$, y

$$||y||^2 = ||y^*y|| = \left\| \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} \right\| = \text{máx}\{||bb^*||, ||b^*b||\} = ||b||^2.$$ [2]

[1] Si A tiene unidad, entonces, al ser φ sobreyectiva, este morfismo preserva la unidad y podemos aplicar el comentario 1.6.3. En caso de que A no tenga unidad, el argumento es análogo, pero utilizando el *-homomorfismo extendido a $\widetilde{A}$.

[2] La igualdad se debe a que existe un *-homomorfismo $A \oplus A \to M_2(A)$ dado por $(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Como este morfismo es inyectivo, resulta ser una isometría.

Por la parte (2), existe un levantado x de y autoadjunto,

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in M_2(A),$$

con $||x|| = ||y||$. El elemento $a = x_{12}$ es un levantado de b, y utilizando la desigualdad (1.2) obtenemos

$$||a|| \leq ||x|| = ||y|| = ||b||.$$

Finalmente, como φ es de norma decreciente, se cumple

$$||b|| = ||\varphi(a)|| \leq ||a||.$$

(3). Sea $x \in A$ un levantado de b. Definimos $a_0 = (x^*x)^{1/2}$, luego a_0 es positivo y

$$\varphi(a_0) = (\varphi(x)^*\varphi(x))^{1/2} = (b^*b)^{1/2} = b.$$

Al igual que en la demostración del punto (2), definimos $a = f(a_0)$. Como a_0 es positivo, su espectro está contenido en $\mathbb{R}_{\geq 0}$, y la función f restringida a dicho dominio es positiva. Esto implica que $f(a_0) = a$ es un elemento positivo. Por el mismo argumento utilizado en (2), obtenemos que $||a|| = ||b||$. □

Lema 3.1.9. *Dado $\psi : A \to B$ un *-homomorfismo sobreyectivo entre las C*-álgebras A y B. Si A tiene unidad, entonces B también la tiene y ψ preserva la unidad. Luego para todo elemento unitario $u \in B$, existe una isometría parcial $v \in M_2(A)$ tal que*

$$\psi(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Demostración. Tomamos un levantado $a \in A$ de u con $||a|| = 1$, y definimos

$$v = \begin{pmatrix} a & 0 \\ (1 - a^*a)^{1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $v^*v = diag(1, 0)$, consiguiendo así que v es una isometría parcial. Utilizando

$$\psi((1 - a^*a)^{1/2}) = (1 - u^*u)^{1/2} = 0$$

probamos el lema. □

Proposición 3.1.10. ***(Segunda imagen estándar del morfismo índice)***
Consideremos una sucesión exacta corta de C-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0.$$

Sean $n \leq m$ números naturales, $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B})$ y v una isometría parcial en $M_m(\widetilde{A})$ tal que

$$\widetilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Entonces existen proyecciones $p, q \in P_m(\widetilde{I})$ que cumplen

$$1_m - v^*v = \widetilde{\varphi}(p) \quad y \quad 1_m - vv^* = \widetilde{\varphi}(q),$$

y el morfismo índice $\delta_1 : K_1(B) \to K_0(I)$ está dado por

$$\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [q]_0. \tag{3.6}$$

Demostración.

Definimos $e = 1_m - v^*v$ y $f = 1_m - vv^*$ en $P_m(\widetilde{A})$, entonces $\widetilde{\psi}(e) = \widetilde{\psi}(f) = diag(0_m, 1_{m-n})$. Utilizando el lema 2.5.1 en las matrices escalares $\widetilde{\psi}(f)$ y $\widetilde{\psi}(e)$, obtenemos $p, q \in P_m(\widetilde{I})$ tales que

$$\widetilde{\varphi}(p) = e \quad \widetilde{\varphi}(q) = f \quad s(p) = s(q) = diag(0_n, 1_{m-n}).$$

Definimos

$$w = \begin{pmatrix} v & f \\ e & v^* \end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix} 1_m - q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1_n & 0 & 0_n & 0 \\ 0 & 0_{m-n} & 0 & 1_{m-n} \\ 0_n & 0 & 1_n & 0 \\ 0 & 1_{m-n} & 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix}.$$

Entonces r es una proyección en $M_{2m}(\widetilde{I})$, w es un unitario en $M_{2m}(\widetilde{A})$ y z es unitario autoadjunto en $M_{2m}(\mathbb{C})$. Luego

$$\widetilde{\psi}(zw) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 & 0_n & 0 \\ 0 & 0_{m-n} & 0 & 1_{m-n} \\ 0_n & 0 & 1_n & 0 \\ 0 & 1_{m-n} & 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 & 0_m & 0 \\ 0 & 0_{m-n} & 0 & 1_{m-n} \\ 0_m & 0 & u^* & 0 \\ 0 & 1_{m-n} & 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{m-n} & u^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{m-n} \end{pmatrix}.$$

Definimos $u_1 = diag(u, 1_{m-n}) \in U_m(\widetilde{B})$, mediante igualdad anterior obtenemos

$$\widetilde{\psi}(zw) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_1^* \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$zw \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^* z^* = z \begin{pmatrix} v & f \\ e & v^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^* & e \\ f & v \end{pmatrix} z^* = z \begin{pmatrix} vv^* & ve \\ ev^* & e \end{pmatrix} z^* = z \begin{pmatrix} 1_m - f & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} z^* = \widetilde{\varphi}(zrz^*).$$

Por definición del morfismo índice obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \delta_1([u]_1) = \delta_1([u_1]_1) &= [zrz^*]_0 - [s(zrz^*)]_0 = [r]_0 - [s(r)]_0 \\ &= [1_m - q]_0 + [p]_0 - [1_n]_0 - [1_{m-n}]_0 = [p]_0 - [q]_0. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.11.

Consideremos una sucesión exacta corta de C^*-álgebras

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0.$$

*Suponemos que A tiene unidad, por ende B también lo es y ψ preserva la unidad. Sea $\overline{\varphi} : \widetilde{I} \to A$ el *-homomorfismo dado por $\overline{\varphi}(x + \alpha 1_{\widetilde{I}}) = \varphi(x) + \alpha 1_A$, para todo $x \in I$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Fijamos u un elemento unitario en $M_n(B)$.*

1. *Si v es un elemento unitario de $M_{2n}(A)$, y p una proyección en $M_{2n}(\widetilde{I})$ tal que*

$$\overline{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*, \qquad \psi(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix},$$

   entonces $\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [s(p)]_0$.

2. *Si $m \geq n$ y v es una isometría parcial en $M_m(A)$ con $\psi(v) = \mathrm{diag}(u, 0_{m-n})$, entonces $1_m - v^*v = \overline{\varphi}(p)$ y $1_m - vv^* = \overline{\varphi}(q)$ para proyecciones $p, q \in M_m(\widetilde{I})$, y $\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [q]_0$.*

Demostración. (1). Para todo k natural definimos

$$f_k = 1_{M_k(\widetilde{A})} - 1_{M_k(A)}, \qquad g_k = 1_{M_k(\widetilde{B})} - 1_{M_k(B)}.$$

Luego $u_1 = u + g_n$ es un elemento unitario en $M_n(\widetilde{B})$, $v_1 = v + f_{2n}$ es unitario en $M_{2n}(\widetilde{A})$ y $\widetilde{\psi}(v_1) = diag(u_1, u_1^*)$.

Veamos que $s(p) = \begin{pmatrix} 1_{M_n(\widetilde{I})} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Podemos escribir $p = a + \lambda 1_{M_{2n}(\widetilde{I})}$, donde $a \in M_{2n}(I)$ y λ es una matriz con coeficientes en $M_{2n}(\mathbb{C})$. Utilizando $\psi \circ \varphi = 0$, tenemos

$$\psi(\overline{\varphi}(a + \lambda 1_{M_{2n}(\widetilde{I})})) = \psi(\varphi(a)) + \lambda 1_{M_{2n}(B)} = \lambda 1_{M_{2n}(B)} = \psi(\overline{\varphi}(\lambda 1_{M_{2n}(B)})) = \psi(\overline{\varphi}(s(p))).$$

Mediante la igualdad:

$$\psi(\overline{\varphi}(p)) = diag(1_{M_n(B)}, 0_n),$$

podemos concluir $\psi(\overline{\varphi}(s(p))) = diag(1_{M_n(B)}, 0_n)$. Con la notación anterior,

$$\lambda 1_{M_{2n}(B)} = diag(1_{M_n(B)}, 0_n),$$

por ende $s(p) = \begin{pmatrix} 1_{M_n(\widetilde{I})} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\overline{\varphi}(s(p)) = \begin{pmatrix} 1_{M_n(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Luego,

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(p) &= \varphi(p - s(p)) + \widetilde{\varphi}(s(p)) = \overline{\varphi}(p) - \overline{\varphi}(s(p)) + \widetilde{\varphi}(s(p)) \\ &= \overline{\varphi}(p) + \begin{pmatrix} f_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1_{M_n(\widetilde{A})} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1^*. \end{aligned}$$

Por la primera imagen estándar del morfismo índice concluimos

$$\delta_1([u_1]_1) = [p]_0 - [s(p)]_0.$$

Empleando lo ya demostrado en la proposición 2.8.7 con $\mu(u_1) = u = \mu(u)$, se deduce que $[u_1]_1 = [u]_1$. Concluyendo así

$$\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [s(p)]_0.$$

(2). Supongamos que $\varphi(I) \neq A$, lo que resulta en que $\overline{\varphi} : M_m(\widetilde{I}) \to M_m(A)$ sea inyectivo. Esto se debe a que $Im(\varphi) = Ker(\psi)$, así $Im(\varphi)$ forma un ideal en A. Dado que $\varphi(I) \neq A$, significa que $1_A \notin \varphi(I)$. Por lo tanto, si $\overline{\varphi}(x + \alpha 1_{\widetilde{I}}) = 0$, entonces $\varphi(x) + \alpha 1_A = 0$. Lo cual implica

$\varphi(x) = -\alpha 1_A$, y si $\alpha \neq 0$, entonces $1_A \in \varphi(I)$, llegando a una contradicción. Así, $\alpha = 0$, y de esta manera $\varphi(x) = 0$. Como φ es inyectiva, concluimos que $x = 0$ y, por ende, $x + \alpha 1_{\widetilde{I}} = 0$.

La imagen de $\overline{\varphi} : M_m(\widetilde{I}) \to M_m(A)$ consiste de los elementos x que cumplen $\psi(x) \in M_m(\mathbb{C}1_B)$. Entonces existen $p, q \in M_m(\widetilde{I})$ tales que

$$1_{M_m(A)} - v^*v = \overline{\varphi}(p), \quad 1_{M_m(A)} - vv^* = \overline{\varphi}(q).$$

Como $\overline{\varphi}$ es inyectivo p, q son proyecciones. Luego $\psi(\overline{\varphi}(p)) = diag(0_m, 1_{M_{m-n}}(B))$, obtenemos

$$s(p) = \begin{pmatrix} 0_n & 0 \\ 0 & 1_{M_{m-n}(\widetilde{I})} \end{pmatrix}.$$

Sean f_n y u_1 como en (1), definimos

$$w = v + \begin{pmatrix} f_n & 0 \\ 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix},$$

entonces w es una isometría parcial en $M_m(\widetilde{A})$ con $\widetilde{\psi}(w) = diag(u_1, 0_{m-n})$. Al igual que en la demostración de (1),

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(p) &= \overline{\varphi}(p) - \overline{\varphi}(s(p)) + \widetilde{\varphi}(s(p)) \\ &= 1_{M_m(A)} - v^*v + \begin{pmatrix} 0_n & 0 \\ 0 & f_{m-n} \end{pmatrix} = 1_{M_m(\widetilde{A})} - w^*w, \end{aligned}$$

de forma similar $\widetilde{\varphi}(q) = 1_{M_m(\widetilde{A})} - ww^*$. Por la segunda imagen estándar del morfismo índice concluimos que $\delta_1([u_1]_1) = [p]_0 - [q]_0$, utilizando esto junto con igualdad $[u]_1 = [u_1]_1$ concluimos la demostración.

Si $\varphi(I) = A$ podemos encontrar p, q tales que

$$1_{M_m(A)} - v^*v = \varphi(p), \quad 1_{M_m(A)} - vv^* = \varphi(q),$$

mediante la inyectividad de φ vemos que p, q son proyecciones. Luego la demostración es igual que el otro caso. □

Proposición 3.1.12. *Sea una sucesión exacta corta de C*-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xhookrightarrow{\ i\ } A \xrightarrow{\ \psi\ } B \longrightarrow 0,$$

*donde I es un ideal en A y i es el *-homomorfismo dado por la inclusión.*

1. *Consideramos u un elemento unitario de $M_n(\widetilde{B})$, el cual tiene un levantamiento que es una isometría parcial v en $M_n(\widetilde{A})$, es decir, $\widetilde{\psi}(v) = u$. Entonces $1_n - v^*v$ y $1_n - vv^*$ son proyecciones en $M_n(I)$, y*

$$\delta_1([u]_1) = [1_n - v^*v]_0 - [1_n - vv^*]_0. \tag{3.7}$$

2. *Supongamos que A tiene unidad (por ende también lo es B y ψ preserva unidad). Sea u un elemento unitario en $M_n(B)$ que tiene un levantado dado por una isometría parcial $v \in M_n(A)$. Entones $1_n - v^*v$ y $1_n - vv^*$ son proyecciones en $M_n(I)$, y*

$$\delta_1([u]_1) = [1_n - v^*v]_0 - [1_n - vv^*]_0. \tag{3.8}$$

Demostración.

(1). Como

$$\widetilde{\psi}(1_n - v^*v) = 1_n - u^*u = 0, \qquad \widetilde{\psi}(1_n - vv^*) = 1_n - uu^* = 0,$$

tenemos que $1_n - v^*v$ y $1_v - vv^*$ pertenecen a $M_n(I)$, y estos dos elementos son proyecciones ya que v es una isometría parcial. Luego, la igualdad (3.7) viene de la segunda imagen estándar del morfismo índice.

(2). Tenemos que $\psi(1_n - v^*v) = 1_n - u^*u = 0$, por ende $1_n - v^*v$ pertenece a $M_n(I)$, de forma similar obtenemos que $1_n - vv^*$ está en $M_n(I)$. Luego, la igualdad (3.8) viene dada por (2) de la proposición 3.1.11. □

3.2. Conexión entre las sucesiones exactas dadas por K_0 y K_1

En esta sección asumiremos que toda sucesión exacta corta de C*-álgebras

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0,$$

viene dada por I un ideal de A y φ la inclusión.

Comentario 3.2.1. No se pierde generalidad al suponer que I es un ideal de A y que φ es la inclusión. Esto se debe a que considerando una sucesión exacta corta de C*-álgebras

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0.$$

Como $\varphi(I) = Ker(\psi)$, esto implica que $\varphi(I)$ es un ideal de A. Además, la inyectividad de φ implica que $\varphi(I) \simeq I$. Esto lleva al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varphi(I) \arrow[r, hook, "i"'] & A \arrow[r, "\pi"'] & A/\varphi(I) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por ende las sucesiones exactas de cada fila son isomorfas.

Lema 3.2.2. *El kernel del morfismo índice $\delta_1 : K_1(B) \to K_0(I)$ está contenido en la imagen del homomorfismo $K_1(\psi) : K_1(A) \to K_1(B)$.*

Demostración. Sea $g \in K_1(B)$ que pertenece al kernel del morfismo índice. Tomamos $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B})$ con $g = [u]_1$, y utilizando el lema 3.1.9 podemos encontrar una isometría parcial $w_1 \in M_{2n}(\widetilde{A})$ tal que

$$\widetilde{\psi}(w_1) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por la segunda imagen estándar del morfismo índice tenemos

$$0 = \delta_1([u]_1) = [1_{2n} - w_1^* w_1]_0 - [1_{2n} - w_1 w_1^*]_0{}^3 \text{ en } K_0(I).$$

La parte (5) de la proposición 2.2.10 nos da la existencia de $k \in \mathbb{N}$ y una isometría parcial $w_2 \in M_m(\widetilde{I})$, donde $m = 2n + k$ y

$$w_2^* w_2 = (1_{2n} - w_1^* w_1) \oplus 1_k, \quad w_2 w_2^* = (1_{2n} - w_1 w_1^*) \oplus 1_k.$$

Luego

$$\widetilde{\psi}(w_2^* w_2) = \widetilde{\psi}(w_2 w_2^*) = \begin{pmatrix} 0_n & 0 \\ 0 & 1_{m-n} \end{pmatrix},$$

Dado que $w_2 \in M_n(\widetilde{I})$, observamos que está en la imagen de $\widetilde{\varphi}$. Luego aplicando el lema 2.5.1, vemos que $\widetilde{\psi}(w_2)$ resulta ser una matriz escalar. Así, tenemos que $\widetilde{\psi}(w_2) = diag(0_n, z)$ donde z es una matriz escalar unitaria en $M_{m-n}(\widetilde{B})$. Como z tiene un espectro finito, entonces es homotópico a 1_{m-n} en $\mathcal{U}_{m-n}(\widetilde{B})$. Definimos $v = diag(w_1, 0_k) + w_2$, luego v es unitario en $M_m(\widetilde{A})$ por lema 2.1.36 y

$$\widetilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1_{m-n} \end{pmatrix} \text{ en } \mathcal{U}_m(\widetilde{B}).$$

Esto prueba que

$$g = [u]_1 = [\widetilde{\psi}(v)]_1 = K_1(\psi)([v]_1).$$

□

Definición 3.2.3. *Decimos que un elemento $u \in A$ es un elemento parcialmente unitario si $uu^* = u^* u$ y uu^* es una proyección.*

Lema 3.2.4. *Si $u \in A$ un elemento parcialmente unitario y A tiene unidad entonces*

$$u + (1_A - u^* u)$$

es unitario.

Demostración. Primero expresamos explícitamente el producto. Luego utilizando que u es una isometría parcial tenemos $u = uu^* u$ (utilizamos el mismo resultado para u^*):

$$\begin{aligned}(u + 1_A - u^* u)(u^* + 1_A - u^* u) &= uu^* + u - uu^* u + u^* + 1_A - u^* u - u^* uu^* - u^* u + (u^* u)^2 \\ &= 1_A.\end{aligned}$$

□

Lema 3.2.5. *El kernel del homomorfismo $K_0(\varphi) : K_0(I) \to K_0(A)$ está contenido en la imagen del morfismo índice $\delta_1 : K_1(B) \to K_0(I)$.*

[3] Estamos utilizando que φ es la inclusión de I en A.

Demostración. Sea $g \in K_0(I)$ en el kernel de $K_0(\varphi)$. Por el lema 2.4.9 existen $n \in \mathbb{N}$, una proyección $p \in M_n(\widetilde{I})$ y un unitario $w \in M_n(\widetilde{A})$ tales que

$$g = [p]_0 - [s(p)]_0 \quad y \quad wpw^* = s(p).$$

El elemento $u_0 = \widetilde{\psi}(w(1_n - p))$ es una isometría parcial en $M_n(\widetilde{B})$ y

$$1_n - u_0^* u_0 = \widetilde{\psi}(p) = \widetilde{\psi}(s(p)) = 1_n - u_0 u_0^*.^4$$

Por ende, u_0 es un elemento parcialmente unitario y $u = u_0 + (1_n - u_0^* u_0)$ es un elemento unitario en $M_n(\widetilde{B})$.

Observar que la isometría parcial $v_1 = diag(w(1_n - p), s(p))$ en $M_{2n}(\widetilde{A})$ cumple $\widetilde{\psi}(v_1) = diag(u_0, s(p))$. Sea $z \in M_{2n}(\mathbb{C})$ la matriz unitaria autoadjunta dada por

$$z = \begin{pmatrix} 1_n - s(p) & s(p) \\ s(p) & 1_n - s(p) \end{pmatrix},$$

luego definimos $v = zv_1z^*$. Entonces

$$\widetilde{\psi}(v) = z\widetilde{\psi}(v_1)z^* = z \begin{pmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & s(p) \end{pmatrix} z^* = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix}.$$

Por la segunda imagen estándar del morfismo indice, obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta_1([u]_1) = [1_{2n} - v^*v]_0 - [1_{2n} - vv^*]_0 &= [1_{2n} - v_1^*v_1]_0 - [1_{2n} - v_1v_1^*]_0 \\ &= \left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1_n - s(p) \end{pmatrix}\right]_0 - \left[\begin{pmatrix} s(p) & 0 \\ 0 & 1_n - s(p) \end{pmatrix}\right]_0 \\ &= [p]_0 - [s(p)]_0. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.2.6. *Para toda sucesión exacta corta de C^*-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0,$$

el morfismo índice δ_1 induce la siguiente sucesión exacta

$$\begin{tikzcd} K_1(I) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] & K_1(A) \arrow[r, "K_1(\psi)"] & K_1(B) \arrow[d, "\delta_1"] \\ K_0(B) & K_0(A) \arrow[l, "K_0(\psi)"'] & K_0(I) \arrow[l, "K_0(\varphi)"'] \end{tikzcd}$$

[4]También el lema 2.4.9 nos da $\widetilde{\psi}(p) = \widetilde{\psi}(s(p))$.

3.3. Grupos de K-teoría superiores

3.3.1. El funtor suspensión

Recordar que dada una C*-álgebra A, definimos su suspensión SA como:

$$SA = \{f \in C([0,1], A) : f(0) = f(1) = 0\} \simeq C_0((0,1), A) \simeq A \otimes C_0(0,1),$$

el último isomorfismo viene de [13, Teorema 6.4.17].

Para todo *-homomorfismo $\varphi : A \to B$ entre dos C*-álgebras A y B podemos asociar el *-homomorfismo $S\varphi : SA \to SB$, definido como $S\varphi(f)(t) = \varphi(f(t))$.

Utilizaremos la notación $\mathcal{S}$ para el álgebra de las funciones continuas en S^1 tal que $f(1) = 0$. Notar que $\mathcal{S} \simeq C_0(0,1)$.

Teorema 3.3.1. *Sea A una C*-álgebra y γ la función dada por*

$$[0,1] \to S^1 : t \to e^{2\pi i t}.$$

*Existe entonces un único *-isomorfismo γ_A que va desde $A \otimes \mathcal{S}$ a SA cumpliendo*

$$\gamma_A(a \otimes f) = (f \circ \gamma)a, \ \forall \ f \in \mathcal{S} \ y \ a \in A.$$

*Además, este *-isomorfismo es natural en el sentido de que si $\varphi : A \to B$ es un *-homomorfismo entre C*-álgebras, el siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} A \otimes \mathcal{S} \arrow[r, "\varphi \otimes Id_S"] \arrow[d, "\gamma_A"'] & B \otimes \mathcal{S} \arrow[d, "\gamma_B"] \\ SA \arrow[r, "S\varphi"'] & SB \end{tikzcd}$$

Demostración. [13, Teorema 7.5.7] □

Lema 3.3.2. *Sean X un espacio Hausdorff localmente compacto y A una C*-álgebra. Fijando $f \in C_0(X)$ y $a \in A$, definimos $fa \in C_0(X, A)$ como la función dada por $fa(x) = f(x)a$. Entonces el conjunto*

$$\{fa : f \in C_0(X), a \in A\}$$

es denso en $C_0(X, A)$.

Demostración. Tomamos la compactificación un punto de X, denominada $X^+ = X \cup \{\infty\}$. Entonces

$$C_0(X, A) = \{f \in C(X^+, A) : f(\infty) = 0\}.$$

Fijamos $\epsilon > 0$ y $f \in C_0(X, A)$. Utilizando la compacidad de X^+ podemos obtener un cubrimiento finito de abiertos $U_1, \ldots, U_k$ de X^+, tales que para todo $x, y \in U_j$ tenemos $||f(x) - f(y)|| < \epsilon$, $\forall \ j = 1, \ldots, k$. Para cada abierto U_j seleccionamos un elemento $x_j \in U_j$, si $\infty \in U_j$ entonces tomamos $x_j = \infty$, en caso contrario seleccionamos cualquiera. Tomando una partición de la unidad $\{h_j\}_{j=1}^k$ subordinada a los abiertos $U_1, \ldots, U_k$, obtenemos lo siguiente

$$||f(x)h_j(x) - f(x_j)h_j(x)|| \leq h_j(x)\epsilon,$$

para todo $x \in X$ y j. Luego

$$||f(x) - \sum_{j=1}^{k} f(x_j)h_j(x)|| \leq \epsilon, \ \forall\ x \in X.$$

Definimos $a_j = f(x_j)$, como la función $f \in C_0(X, A)$ se cumple $a_j = 0$ si $x_j = \infty$. Estos últimos elementos no los consideramos, entonces para los otros tenemos que $h_j \in C_0(X)$. Como la última desigualdad de sigue cumpliendo sin los $x_j = \infty$, obtenemos la densidad. □

Proposición 3.3.3. *El funtor S es exacto.*

Demostración. Dada una sucesión exacta corta de C*-álgebras

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

debemos probar que la sucesión

$$0 \longrightarrow SI \xrightarrow{S\varphi} SA \xrightarrow{S\psi} SB \longrightarrow 0$$

es exacta. La única parte no trivial es la sobreyectividad de $S\psi$. Por el lema 3.3.2, tenemos que

$$\operatorname{span}\{fb : b \in B,\ f \in C_0((0,1))\}$$

es denso en SB, y todo elemento de este conjunto pertenece a la imagen de $S\psi$, ya que

$$S\psi(af) = \psi(a)f,$$

donde $f \in C_0((0,1))$ y $a \in A$. Como la imagen de un *-homomorfismo es cerrada, concluimos la proposición. □

Proposición 3.3.4. *Sea $(A_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema inductivo de C*-álgebras y*

$$A = \varinjlim_n A_n$$

su límite inductivo con los morfismos $\mu_n : A_n \to A$. Entonces

$$\varinjlim_n S(A_n) \simeq S(\varinjlim_n A_n).$$

Demostración. Para cada índice n tenemos

$$S\mu_n \colon C_0((0,1), A_n) \longrightarrow C_0((0,1), A), \qquad \Big(S\mu_n(f)\Big)(t) = \mu_n\Big(f(t)\Big).$$

Por la propiedad universal del límite inductivo existe un *-homomorfismo

$$\sigma\colon \varinjlim_n C_0((0,1), A_n) \longrightarrow C_0((0,1), A).$$

Que σ es sobreyectivo se prueba fácilmente con el lema 3.3.2.

Para la inyectividad, consideremos los *-homomorfismos

$$\lambda_n \colon C_0((0,1), A_n) \to \varinjlim_n C_0((0,1), A_n)$$

dados por la definición del límite inductivo. Sea $f \in \ker(S\mu_n)$. Como $\mu_n(f) = 0$, por proposición 1.9.4 tenemos:

$$0 = \sup_{t\in[0,1]} ||\mu_n(f(t))|| = \sup_{t\in[0,1]} \lim_{m\to\infty} \|\varphi_{m,n}(f(t))\|.$$

Aplicando el teorema de Dini se obtiene

$$\lim_{m\to\infty} \|S\varphi_{m,n}(f)\| = 0.$$

Por la proposición 1.9.4 esto implica $\|\lambda_n(f)\| = 0$, es decir $\lambda_n(f) = 0$. Por tanto $\ker(S\mu_n) \subseteq \ker(\lambda_n)$, y de nuevo por la proposición 1.9.4 se sigue que σ es inyectiva. □

Con lo visto hasta ahora sobre el funtor suspensión y asumiendo que $K_0(SA) \cong K_1(A)$, ya podemos deducir las propiedades enunciadas para K_1.

- **Continuidad de K_1.** Como el funtor suspensión S es continuo y K_0 es continuo, la composición que define K_1 es también continua, por tanto K_1 es continuo.
- K_1 **es escinde-exacto.** Puesto que S es exacto y K_0 satisface la propiedad de ser escinde-exacto, al aplicar S y luego K_0 se obtiene que K_1 hereda la exactitud escindida.
- **Estabilidad de K_1.** Empleando el isomorfismo del teorema 3.3.1 y la estabilidad ya conocida de K_0, se deduce que K_1 es estable.

3.3.2. Isomorfismo entre $K_1(A)$ y $K_0(SA)$

Teorema 3.3.5. *Los grupos $K_1(A)$ y $K_0(SA)$ son isomorfos para toda C*-álgebra A.*

Demostración. Consideramos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{\ i\ } CA \xrightarrow{\ \pi\ } A \longrightarrow 0. \tag{3.9}$$

Luego como CA es homotópicamente equivalente a 0, tenemos $K_0(CA) = K_1(CA) = 0$. Utilizando el morfismo índice con la sucesión 3.9, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
K_1(SA) \arrow[r] & K_1(CA)=0 \arrow[r] & K_1(A) \arrow[d, "\delta_1"] \\
K_0(A) & K_0(CA)=0 \arrow[l] & K_0(SA) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

por la exactitud de la sucesión concluimos que δ_1 es un isomorfismo. □

Proposición 3.3.6. *Para toda C*-álgebra A existe un isomorfismo $\theta_A : K_1(A) \to K_0(SA)$, tal que dadas dos C*-álgebras A y B, y un *-homomorfismo $\varphi : A \to B$ el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
K_1(A) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] \arrow[d, "\theta_A"'] & K_1(B) \arrow[d, "\theta_B"] \\
K_0(SA) \arrow[r, "K_0(S\varphi)"'] & K_0(SB)
\end{tikzcd}$$

También tenemos una descripción concreta para los isomorfismos θ_A. *Dado* $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ *con* $s(u) = 1_n$, *y* $v \in C([0,1], \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A}))$ *tal que* $v(0) = 1_{2n}$, $v(1) = diag(u, u^*)$ *y* $s(v(t)) = 1_{2n}$ *para todo* $t \in [0,1]$. *Definiendo*

$$p = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*,$$

es un elemento de $P_{2n}(\widetilde{SA})$, *con* $s(p) = diag(1_n, 0_n)$ *y*

$$\theta_A([u]_1) = [p]_0 - [s(p)]_0.$$

Comentario 3.3.7. Para la justificación de la formula anterior veamos que todo elemento $g \in K_1(A)$ puede ser representado por un $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ tal que $s(u) = 1_n$. Por definición existe un $n \in \mathbb{N}$ y $w \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ tal que $[w]_1 = g$, definimos $u = ws(w)^*$. Entonces $s(u) = 1_n$, luego $s(w) \sim_h 1_n$ ya que $sp(s(w)) \neq \mathbb{T}$ y utilizamos (2) del lema 2.1.5.

Fijando $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ tal que $s(u) = 1_n$, buscaremos $v \in C([0,1], \mathcal{U}_n(\widetilde{A}))$ con

$$v(0) = 1_{2n}, \quad v(1) = diag(u, u^*) \quad y \quad s(v(t)) = 1_{2n}.$$

Por el lema de Whitehead 2.1.7 podemos encontrar $z \in C([0,1], \mathcal{U}_n(\widetilde{A}))$ con $z(0) = 1_{2n}$ y $z(1) = diag(u, u^*)$. La función $v(t) = s(z(t))^* z(t)$ tiene las propiedades deseadas.

Demostración. Veamos la demostración de la proposición. Definimos $\theta_A = \delta_1$, donde δ_1 es el morfismo índice asociado la sucesión exacta corta (3.9). Todo *-homomorfismo $\varphi : A \to B$ induce el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & SA & \longrightarrow & CA & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle S\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle C\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \\ 0 & \longrightarrow & SB & \longrightarrow & CB & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde $C\varphi(f)(t) = \varphi(f(t))$. Utilizando la naturalidad del morfismo índice, proposición 3.1.6, nos dice que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_1(A) & \xrightarrow{K_1(\varphi)} & K_1(B) \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_A} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_B} \\ K_0(SA) & \xrightarrow[K_0(S\varphi)]{} & K_0(SA) \end{array}$$

es conmutativo.

Vamos a proporcionar una descripción explícita de θ_A. Es posible identificar las funciones en $C([0,1], M_{2n}(\widetilde{A}))$ que satisfacen que $s(f(t)) = f(0)$ para cada $t \in [0,1]$ con los elementos en $M_{2n}(\widetilde{CA})$. También identificamos los elementos $f \in C([0,1], M_{2n}(\widetilde{A}))$ que cumplen $s(f(t)) = f(0) = f(1), \forall\, t \in [0,1]$ con $M_{2n}(\widetilde{SA})$. Con estas identificaciones, v pertenece a $\mathcal{U}_{2n}(\widetilde{CA})$ y

$$\widetilde{\pi}(v)^5 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \quad p = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \in P_{2n}(\widetilde{SA}).$$

Por definición del morfismo índice tenemos $\theta_A([u]_1) = \delta_1([u]_1) = [p]_0 - [s(p)]_0$. □

[5] π es el *-homomorfismo de la sucesión exacta (3.9).

3.3.3. Sucesión exacta larga en los grupos de K-teoría

Definición 3.3.8. *Sea A una C*-álgebra. Para los enteros $n \geq 2$, definimos inductivamente*

$$K_n(A) = K_{n-1}(SA).$$

*Dado un *-homomorfismo $\varphi : A \to B$, definimos de manera inductiva*

$$K_n(\varphi) = K_{n-1}(S\varphi).$$

Proposición 3.3.9. *Para todo $n \geq 2$ el funtor K_n es semiexacto en la categoría de C*-álgebras a la de grupos abelianos.*

Demostración. Sabemos que S es un funtor exacto, luego inductivamente probamos que K_{n-1} es semiexacto. Concluyendo así que $K_n = K_{n-1}(S)$ es semiexacto. □

Morfismo índice para grupos de K-teoría superiores

Consideremos una sucesión exacta corta de C*-álgebras

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0.$$

Para $n \geq 1$ por la exactitud del funtor S^n (proposición 3.3.3) obtenemos la siguiente sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow S^nI \xrightarrow{S^n\varphi} S^nA \xrightarrow{S^n\psi} S^nB \longrightarrow 0 \tag{3.10}$$

Luego por el teorema 3.3.6 tenemos el isomorfismo

$$\theta_{S^{n-1}I} : K_n(I) = K_1(S^{n-1}I) \to K_0(S^nI).$$

Al ser $\theta_{S^{n-1}I}$ un isomorfismo existe un único homomorfismo δ_{n+1} tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} K_{n+1}(B) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, equal] & K_n(I) \arrow[d, "\theta_{S^{n-1}I}"] \\ K_1(S^nB) \arrow[r, "\overline{\delta}_1"'] & K_0(S^nI) \end{tikzcd}$$

donde $\overline{\delta_1}$ es el morfismo índice asignado a la sucesión (3.10). Explícitamente

$$\delta_{n+1} := \theta^{-1}_{S^{n-1}I} \circ \overline{\delta}_1 \circ Id_{K_{n+1}(B)}.$$

Veamos que los morfismos $\delta_1, \delta_2, \ldots$ son naturales en el siguiente sentido. Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I' \arrow[r, "\varphi'"'] & A' \arrow[r, "\psi'"'] & B' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{3.11}$$

donde las filas son sucesiones exactas de C*-álgebras. Probaremos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} K_{n+1}(B) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "K_{n+1}(\beta)"'] & K_n(I) \arrow[d, "K_n(\gamma)"] \\ K_{n+1}(B') \arrow[r, "\delta'_{n+1}"'] & K_n(I') \end{tikzcd} \tag{3.12}$$

Para ello, utilizando la exactitud del funtor S^n y aplicándolo al diagrama (3.11) tenemos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S^nI \arrow[r, "S^n\varphi"] \arrow[d, "S^n\gamma"] & S^nA \arrow[r, "S^n\psi"] \arrow[d, "S^n\alpha"] & S^nB \arrow[r] \arrow[d, "S^n\beta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & S^nI' \arrow[r, "S^n\varphi'"'] & S^nA' \arrow[r, "S^n\psi'"'] & S^nB' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Utilizando la naturalidad del morfismo índice de grado 1 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} K_1(S^nB) \arrow[r, "\overline{\delta_1}"] \arrow[d, "K_1(S^n\beta)"'] & K_0(S^nI) \arrow[d, "K_0(S^n\gamma)"] \\ K_1(S^nB') \arrow[r, "\overline{\delta_1}'"'] & K_0(S^nI'). \end{tikzcd}$$

Luego, por definición del funtor K_{n+1}, extendemos el anterior diagrama conmutativo al siguiente

$$\begin{tikzcd} K_{n+1}(B) \arrow[r, equal] \arrow[d, "K_{n+1}(\beta)"'] & K_1(S^nB) \arrow[r, "\overline{\delta_1}"] \arrow[d, "K_1(S^n\beta)"] & K_0(S^nI) \arrow[r, "\theta^{-1}_{S^{n-1}I}"] \arrow[d, "K_0(S^n\gamma)"] & K_n(I) \arrow[d, "K_n(\gamma)"] \\ K_{n+1}(B') \arrow[r, equal] & K_1(S^nB') \arrow[r, "\overline{\delta'}_1"'] & K_0(S^nI') \arrow[r, "\theta^{-1}_{S^{n-1}I}"'] & K_n(I') \end{tikzcd}$$

Tenemos que los bloques de la derecha y el central conmutan. Entonces concluimos que el diagrama izquierdo también lo hace. Concluyendo así que el diagrama (3.12) es conmutativo.

Proposición 3.3.10. *Toda sucesión exacta de C*-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\ \varphi\ } A \xrightarrow{\ \psi\ } B \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta larga con los grupos de K-teoría:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \vdots \arrow[dll, "\delta_{n+1}"'] \\
K_n(I) \arrow[r, "K_n(\varphi)"] & K_n(A) \arrow[r, "K_n(\psi)"] & K_n(B) \arrow[dll, "\delta_n"'] \\
K_{n-1}(I) \arrow[r, "K_{n-1}(\varphi)"] & K_{n-1}(A) \arrow[r, "K_{n-1}(\psi)"] & K_{n-1}(B) \arrow[dll, "\delta_{n-1}"'] \\
\vdots & & \vdots \arrow[dll, "\delta_1"'] \\
K_0(I) \arrow[r, "K_0(\varphi)"] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\psi)"] & K_0(B)
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Sean $\{\overline{\delta}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$los morfismos índices asociados a las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow S^nI \xrightarrow{S^n\varphi} S^nA \xrightarrow{S^n\psi} S^nB \longrightarrow 0$$

De la definición de los morfismos índices y junto con la proposición 3.3.6 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
K_2(I) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_2(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_2(B) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, equal] & K_1(I) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_I"] & K_1(A) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_A"] & K_1(B) \arrow[d, "\theta_B"] \\
K_1(SI) \arrow[r] & K_1(SA) \arrow[r] & K_1(SB) \arrow[r, "\overline{\delta}_1"'] & K_0(SI) \arrow[r] & K_0(SA) \arrow[r] & K_0(SB)
\end{tikzcd}
$$

Luego, para $n \geq 3$ de la definicion de K_n obtenemos el diagrama:

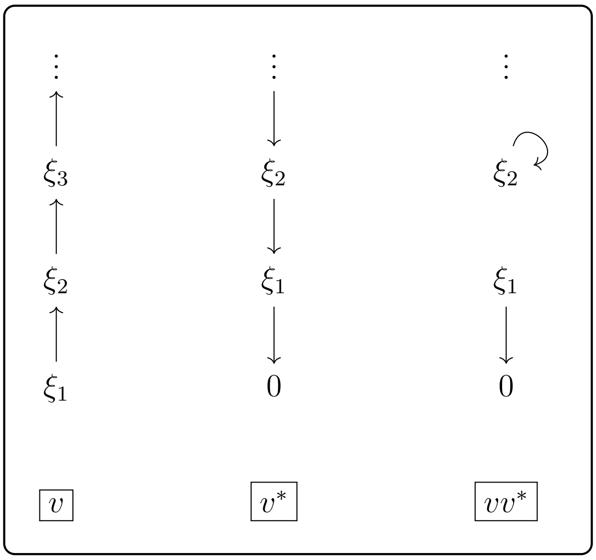
$$
\begin{tikzcd}
K_n(I) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_n(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_n(B) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, equal] & K_{n-1}(I) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_{n-1}(B) \arrow[d, equal] \\
K_{n-1}(SI) \arrow[r] & K_{n-1}(SA) \arrow[r] & K_{n-1}(SB) \arrow[r, "\overline{\delta}_{n-1}"'] & K_{n-2}(SI) \arrow[r] & K_{n-2}(SA) \arrow[r] & K_{n-2}(SB)
\end{tikzcd}
$$

En ambos diagramas, las filas inferiores son sucesiones exactas por la proposición 3.2.6, de ello se deduce la exactitud de la fila superior. Por inducción formamos la sucesión exacta larga. $\square$

3.4. Periodicidad de Bott

Álgebra de Toeplitz

Consideremos $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert H de dimensión numerable. Definimos v como el operador acotado que satisface $v(\xi_n) = \xi_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a v lo llamaremos el operador shift. Entonces $v^*v = Id$, lo que lo convierte en una isometría donde $v^*(\xi_1) = 0$ y $v^*(\xi_n) = \xi_{n-1}$ para todo $n \geq 2$. Denotamos con $\mathcal{T}$ al álgebra de Toeplitz, que es la C*-subálgebra de $B(H)$ generada por v.



Teorema 3.4.1. *[Propiedad universal del álgebra de Toeplitz] Dada una C*-álgebra A con unidad y $a \in A$ una isometría, existe un único *-homomorfismo $\varphi : \mathcal{T} \to A$ que satisface $\varphi(v) = a$ y preserva la unidad. Además, φ es una isometría si y solo si $aa^* \neq 1$.*

Demostración. [13, Teorema 3.5.18]. □

Comentario 3.4.2. Esto indica que la definición del álgebra de Toeplitz, a menos de *-isomorfismo, es independiente del espacio de Hilbert que empleemos.

Lema 3.4.3. *El álgebra de Toeplitz contiene a los operadores compactos de H.*

Demostración. Como $\mathcal{T}$ contiene el operador compacto no nulo $Id - vv^*$, la proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial generado por ξ_1, alcanza, por el corolario 2 de [1, Teorema 1.4.2], con probar que los únicos subespacios cerrados de H invariantes bajo $\mathcal{T}$ son H y $\{0\}$.

Dado un subespacio cerrado $H_0 \subseteq H$ invariante bajo $\mathcal{T}$, sea Q la proyección ortogonal sobre H_0. Se tiene entonces que $QT = TQ$ para todo $T \in \mathcal{T}$. Por lo tanto

$$Q\xi_1 = Q(Id - vv^*)\xi_1 = (Id - vv^*)Q\xi_1 = \lambda\xi_1$$

para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$Q\xi_2 = Qv\xi_1 = vQ\xi_1 = \lambda v\xi_1 = \lambda\xi_2,$$

y análogamente $Q\xi_k = \lambda\xi_k$ para todo $k \geq 2$. Por ende concluimos que $Q = \lambda Id$. Como Q es una proyección, se obtiene que $\lambda = 1$ y $H = H_0$, o bien $\lambda = 0$ y $H_0 = \{0\}$. □

Definición 3.4.4. *El espacio de Hardy $H^2(S^1)$ es el subespacio cerrado de $L^2(S^1)$ generado por las funciones z^n para $n \geq 0$. Un operador de Toeplitz en $H^2(S^1)$ es un operador acotado T_g de la forma*

$$T_g(f) = P(gf), \ f \in H^2(S^1),$$

donde P es la proyección ortogonal de $L^2(S^1)$ en $H^2(S^1)$, y $g \in L^\infty(S^1)$.

Proposición 3.4.5. *(*[11, Proposición 2.3.3]*) Sea $\mathcal{Q}(H^2(S^1))$ el álgebra de Calkin (ver ejemplo 2.5.8) asociado al espacio de Hilbert $H^2(S^1)$ y $\pi : B(H^2(S^1)) \to \mathcal{Q}(H^2(S^1))$ es el morfismo cociente. Entonces $\alpha : g \to \pi(T_g)$ es un *-homomorfismo inyectivo de $C(S^1)$ a $\mathcal{Q}(H^2(S^1))$*

Demostración. Veamos que es un *-homomorfismo. Para ello consideramos el operador $M_g : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$ dado por multiplicar $g \in L^\infty(S^1)$. Consideramos el conjunto de funciones g en $C(S^1)$ tales que $PM_g - M_gP$ es compacto, es fácil ver que la función $g(z) = z$ está en ese subconjunto y además es una C*-subálgebra de $C(S^1)$. Por el teorema de Stone-Weierstrass concluimos que para todo $g \in C(S^1)$ $PM_g - M_gP$ es compacto. Por definición $T_g = PM_g$, luego:

$$\begin{aligned} T_{g_1}T_{g_2} = PM_{g_1}PM_{g_2} &= PM_{g_1}M_{g_2}P + \ \textit{operador compacto} \\ &= PM_{g_1g_2} + \ \textit{operador compacto} \\ &= T_{g_1g_2} + \ \textit{operador compacto}, \end{aligned}$$

para todo $g_1, g_2 \in C(S^1)$. Luego es fácil ver que $T_g^* = T_{\overline{g}}$, concluyendo así que α es un *-homomorfismo.

Veamos que es inyectivo. El kernel de α es un ideal en $C(S^1)$, y todos estos ideales son de la forma $\{f \in C(S^1) : f_{|X} = 0\}$ para $X \subsetneq S^1$ cerrado. Sea $r_\theta(z) = ze^{i\theta}$ la rotación de ángulo θ. Definimos el operador $U_\theta : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$ dado por $U_\theta(f)(z) = f(ze^{-i\theta})$. Nótese que $H^2(S^1)$ es invariante por U_θ, por lo que U_θ define también un operador en $H^2(S^1)$, y

$$U_\theta T_g U_\theta^* = U_\theta PM_gPU_\theta^* = P\,U_\theta M_g U_\theta^* P.$$

Sea $e_n(z) = z^n$ la base de Hilbert de $H^2(S^1)$, entonces

$$U_\theta M_g U_\theta^*(e_n)(z) = U_\theta\Big(g(z)\,U_\theta^*(e_n(z))\Big) = g(ze^{-i\theta})\,e_n(z) = M_{g\circ r_{-\theta}}(e_n)(z).$$

Por ende $U_\theta T_g U_\theta^* = T_{g\circ r_{-\theta}}$. Tenemos

$$\pi(T_{f\circ r_{-\theta}}) = \pi(U_\theta T_f U_\theta^*) = \pi(U_\theta)\pi(T_f)\pi(U_\theta^*).$$

Esto implica $f \circ r_{-\theta} \in \ker(\alpha)$ si solo si $f \in ker(\alpha)$, por ende

$$ker(\alpha) = \{f \in C(S^1) : f_{|X} = 0\} = \{f \in C(S^1) : (f \circ r_{-\theta})_{|X} = 0\}.$$

Como la correspondencia entre ideales de $C(S^1)$ y cerrados de S^1 es inyectiva, obtenemos que $r_{-\theta}(X) = X$. De aquí se sigue que $X \subset S^1$ es un subconjunto invariante por rotaciones, lo que implica que $X = S^1$ o $X = \varnothing$. El caso $X = \varnothing$ no es posible, ya que no todo operador de Toeplitz es compacto: el operador de Toeplitz asociado a la función constante 1 es la identidad en $H^2(S^1)$, y que ésta fuera compacta implicaría que el espacio de Hardy tiene dimensión finita. Concluimos así $X = S^1$ y $ker(\alpha) = \{0\}$. □

Comentario 3.4.6. Notar que el operador de Toeplitz asignado a la función $g(z) = z$ es el shift en $H^2(S^1)$, luego como $C(S^1)$ es la C*-álgebra generada por g obtenemos que la C*-álgebra generada por los operadores de Toeplitz T_h con $h \in C(S^1)$ junto con los operadores compactos de $H^2(S^1)$ es el álgebra de Toeplitz.

En el álgebra de Toeplitz el símbolo de un operador se refiere a la función que se asigna cuando se toma el cociente por los operadores compactos. Es decir, si $a \in \mathcal{T}$, entonces el símbolo de a es $\alpha^{-1}(\pi(a))$.

Con la proposición 3.4.5 obtenemos que la imagen de $\mathcal{T}$ mediante la proyección $\pi : B(H^2(S^1)) \to \mathcal{Q}(H^2(S^1))$ es *-isomorfa a $C(S^1)$. Utilizando esta identificación obtenemos la siguiente sucesión exacta, denominada la extensión de Toeplitz

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H^2(S^1)) \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow C(S^1) \longrightarrow 0.$$

Demostración de periodicidad de Bott

El teorema de periodicidad de Bott nos dirá que los grupos de K-teoría satisfacen $K_2(A) \simeq K_{2n}(A)$ y $K_1(A) \simeq K_{2n+1}(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda C^*-álgebra A. Existen diversas demostraciones de este teorema, en [15] se encuentra la demostración de Atiyah, análoga a la demostración de periodicidad de Bott para la K-teoría topológica. En esta sección presentaremos una demostración más general del teorema dada por Cuntz [6], la cual se basa en el uso del álgebra de Toeplitz.

En toda la sección asumiremos que E es un funtor de la categoría **C*-alg** a **Ab** que cumple los siguientes puntos:

- **Invarianza homotópica**. Sean φ y ψ dos *-homomorfismos homotópicos, entonces $E(\varphi) = E(\psi)$.
- **Estabilidad de $\mathcal{K}$.** El *-homomorfismo $\kappa \colon A \to A \otimes \mathcal{K}$ de la definición 2.7.2 induce un isomorfismo $E(A \otimes \mathcal{K}) \simeq E(A)$.
- El funtor E es **semiexacto**: para toda sucesión exacta corta de C*-álgebras

  $$0 \longrightarrow I \xrightarrow[\psi]{} A \xrightarrow[\varphi]{} B \longrightarrow 0$$

  E induce la siguiente sucesión exacta

  $$E(I) \xrightarrow[E(\psi)]{} E(A) \xrightarrow[E(\varphi)]{} E(B)$$

Comentario 3.4.7. Notar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, el funtor K_n cumple las tres propiedades. La invarianza homotópica fue probada para K_0 en la proposición 2.4.4, se extiende a K_1 mediante el isomorfismo índice $K_1(A) \simeq K_0(SA)$ y que componer S con una homotopía produce otra homotopía. El caso general para K_n se deduce por inducción. La segunda propiedad se obtiene por inducción usando el isomorfismo $SA \simeq \mathcal{S} \otimes A$ del teorema 3.3.1. El último punto se deduce de la exactitud del funtor suspensión (proposición 3.3.3) y del hecho de que K_0 es semiexacto.

Comentario 3.4.8. Cuntz demuestra en [6, Proposición 4.1(b)] que todo funtor E que cumpla las tres condiciones anteriores es escinde-exacto, es decir, preserva sucesiones exactas cortas que se escinden. En nuestro caso, para $E = K_n$, esto puede demostrarse primero usando que el funtor suspensión es exacto y que K_0 es escinde-exacto (proposición 2.5.3).

Comentario 3.4.9. Un funtor que cumple con estas propiedades es aditivo, esto significa que si $\varphi, \psi \colon A \to B$ son *-homomorfismos ortogonales (es decir, $\varphi(a)\psi(b) = 0$ para todo $a, b \in A$), entonces

$$E(\varphi + \psi) = E(\varphi) + E(\psi).$$

Esto se demuestra en [6, Proposición 4.1]. Consideremos nuestro caso con $E = K_n$. Por la ortogonalidad de los morfismos, podemos identificar $\varphi(A)$ y $\psi(A)$ como subálgebras ortogonales de B; en particular $\varphi(A) \oplus \psi(A) \subseteq B$. Usando la identificación

$$K_n(\varphi(A)) \oplus K_n(\psi(A)) \simeq K_n(\varphi(A) \oplus \psi(A)),$$

obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & K_n(\psi(A)) \arrow[dr] & \\
K_n(A) \arrow[ur, "K_n(\psi)"] \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "K_n(\varphi)"'] & & K_n(\varphi(A)) \oplus K_n(\psi(A)) \\
 & K_n(\varphi(A)) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Existe un único morfismo β que hace conmutar el diagrama, y podemos ver que tanto $K_n(\varphi) + K_n(\psi)$ como $K_n(\varphi + \psi)$ hacen conmutar el diagrama. Por la unicidad de β se concluye que

$$K_n(\varphi + \psi) = K_n(\varphi) + K_n(\psi).$$

Lema 3.4.10. *Sea una sucesión exacta corta de C*-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0.$$

*Dados *-homomorfismos* $\varphi_i : C \to I$ *con* $i = 0, 1$, $\sigma : C \to B$ *y* $\overline{\sigma} : C \to A$ *tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
 & & & C \arrow[dll, bend right, "\varphi_i"'] \arrow[dl, "\overline{\sigma}"] \arrow[d, "\sigma"] & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] & A \arrow[r, "\pi"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si $\overline{\sigma}$ *es ortogonal a* φ_0 *y* φ_1, *y existe una homotopía* $\{\theta_t\}_{t\in[0,1]}$ *entre* $\theta_0 = \overline{\sigma} + \varphi_0$ *y* $\theta_1 = \overline{\sigma} + \varphi_1$ *tal que* $\pi \circ \theta_t = \sigma$ *para todo* $t \in [0, 1]$, *entonces* φ_1 *y* φ_0 *inducen los mismos morfismos* $E(C) \to E(I)$.

Demostración. La hipótesis nos permiten utilizar el pullback de C*-álgebras dado por

$$\overline{A} = \{(a, c) \in A \oplus C : \pi(a) = \sigma(c)\},$$

lo que nos da la siguiente sucesión exacta corta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, no head] & \overline{A} \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] & A \arrow[r, "\pi"] & B \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Luego, la existencia de $\overline{\sigma}$ nos induce una sección para la sucesión exacta corta superior dada por

$$\beta : C \to \overline{A} : \ c \mapsto (\overline{\sigma}(c), c).$$

Utilizando la escisión-exactitud del funtor E vemos que $E(i_1)$ es inyectivo. De forma similar, como las θ_t se levantan para σ, se inducen secciones

$$\chi_t : C \to \overline{A} : \ c \mapsto (\theta_t(c), c).$$

Por la invarianza homotópica, tenemos $E(\chi_0) = E(\chi_1)$. La ortogonalidad de $\overline{\sigma}$ y φ_i implica la ortogonalidad entre β e $i_1 \circ \varphi_i$. Por ende $\chi_i = \beta + i_1 \circ \varphi_i$ es un *-homomorfismo, y, utilizando la propiedad aditiva del funtor E, tenemos

$$E(\chi_i) = E(\beta) + E(i_1) \circ E(\varphi_i).$$

Utilizando $E(\chi_0) = E(\chi_1)$:

$$E(\beta) + E(i_1) \circ E(\varphi_1) = E(\beta) + E(i_1) \circ E(\varphi_0),$$

luego

$$E(i_1) \circ E(\varphi_1) = E(i_1) \circ E(\varphi_0)$$

y utilizando la inyectividad de $E(i_1)$ concluimos que $E(\varphi_1) = E(\varphi_0)$. □

Recordar que la imagen del morfismo $\pi : \mathcal{T} \to \mathcal{C}(H^2(S^1))$ es isomorfa a $C(S^1)$, de modo que podemos definir $ev_1 \circ \pi$, donde ev_1 consiste en evaluar la imagen de π tras identificarla con $C(S^1)$.

Teorema 3.4.11. *(*[9, Proposición 8]*) Consideremos los siguientes *-homomorfismos*

$$j : \mathbb{C} \to \mathcal{T} : 1 \to 1, \quad y \quad q : \mathcal{T} \to \mathbb{C} : q = ev_1 \circ \pi.$$

Se cumple que $E(j)$ y $E(q)$ son isomorfismos y uno es inverso del otro. Esto implica $E(\mathcal{T}) \simeq E(\mathbb{C})$.

Demostración. Utilizando la definición de $\mathcal{T}$ mediante los operadores de Toeplitz y los operadores compactos del espacio de Hardy, se observa que el operador de Toeplitz correspondiente a la función constante $1\colon S^1 \to \mathbb{C}$ es la identidad. Por lo tanto,

$$q \circ j = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}.$$

Por funtorialidad,

$$E(q) \circ E(j) = E(\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}).$$

Lo próximo es demostrar que $E(j) \circ E(q) = E(Id_{\mathcal{T}})$, sin embargo, este caso no es tan directo como el anterior. En primer lugar, observamos que $j \circ q$ no actúa como la identidad, por ejemplo, sabemos que $\pi(v)$ es la función inclusión de $S^1 \to \mathbb{C}$, así que al evaluar en 1 resulta que $j(q(v)) = 1 \neq v$. Una alternativa inicial podría ser utilizar la invarianza homotópica del funtor E, de modo que al demostrar que $j \circ q$ es homotópico a $Id_{\mathcal{T}}$ concluiríamos la prueba. El problema es que esto no es verdad. Supongamos que existe φ_t una homotopía entre $j \circ q$ e $Id_{\mathcal{T}}$. Tenemos que $\varphi_t(1)$ es una proyección para todo $t \in [0, 1]$, por lo tanto $\pi(\varphi_t(1))$ es una proyección en $C(S^1)$. Las proyecciones de $C(S^1)$ toman valores en $\{0, 1\}$, como S^1 es conexo, son funciones constantes 0 o 1. Así obtenemos una función continua $[0, 1] \to \{0, 1\}$ dada por $t \mapsto \pi(\varphi_t(1))$. Como $\pi(q(j(1))) = 1$ y $\pi(1) = 1$, y ya que $[0, 1]$ es conexo se sigue que $\pi(\varphi_t(1)) = 1$ para todo t. Definimos $w_t = \varphi_t(v)$, este es un camino continuo en $\mathcal{T}$, con $w_0 = v$ y $w_1 = j(q(v))$. Si existiese tal camino, $\pi(w_t) \in C(S^1)$ serían funciones continuas y

$$\|\pi(w_t)\|^2 = \|\pi(w_t)^*\pi(w_t)\| = \|\pi(w_t^* w_t)\| = \|\pi(\varphi_t(1))\| = 1,$$

Por ende, $\pi(w_t)$ son funciones continuas de $S^1 \to S^1$. Dado que w_t es un camino continuo, también lo es $\pi(w_t)$, estableciendo así una homotopía en S^1 entre $\pi(w_0) = \pi(v)$ (la inclusión) y $\pi(w_1) = \pi(1)$ (la constante 1). No puede existir una homotopía entre estas funciones ya que el número de vueltas de la inclusión es 1, mientras que el de la función constante es 0.

La prueba del teorema se basa en encontrar una homotopía en un espacio más grande que $\mathcal{T}$. Notamos que por la estabilidad $E(\kappa)$ es un isomorfismo, por ende bastaría con probar que $E(\kappa) \circ E(j \circ q) = E(\kappa) \circ E(Id_{\mathcal{T}})$. Luego, con demostrar que los *-homomorfismos $\mathcal{T} \to \mathcal{K} \otimes \mathcal{T}$ dados por $\kappa \circ j \circ q$ y $\kappa \circ Id_{\mathcal{T}}$ son homotópicos, completamos la demostración. Comenzamos por observar cómo actúan los operadores

$$\kappa(j(q(v))) = e \otimes 1 \quad y \quad \kappa(v) = e \otimes v$$

sobre la base de Hilbert $\{\xi_i \otimes \xi_j\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ de $H \otimes H$, definimos $\xi_{i,j} = \xi_i \otimes \xi_j$.

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccc}
\xi_{1,1} & \longrightarrow & \xi_{1,2} & \longrightarrow & \xi_{1,3} & \longrightarrow & \xi_{1,4} & \longrightarrow & \dots \\
\xi_{2,1} & & \xi_{22} & & \xi_{2,3} & & \xi_{2,4} & & \\
\xi_{3,1} & & \xi_{3,2} & & \xi_{3,3} & & \xi_{3,4} & & \\
\xi_{4,1} & & \xi_{4,2} & & \xi_{4,3} & & \xi_{4,4} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}}$$

$$\boxed{e \otimes v}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \xi_{1,3} & \xi_{1,4} & \cdots \\
\xi_{2,1} & \xi_{2,2} & \xi_{2,3} & \xi_{2,4} & \\
\xi_{3,1} & \xi_{3,2} & \xi_{3,3} & \xi_{3,4} & \\
\xi_{4,1} & \xi_{4,2} & \xi_{4,3} & \xi_{4,4} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

$$\boxed{e \otimes 1}$$

La única fila que no se anula al aplicar estos operadores es la primera, el resto se reduce a cero.

Notar que, por la propiedad universal del álgebra de Toeplitz, para encontrar una homotopía entre dos *-homomorfismos $\varphi_0, \varphi_1 : \mathcal{T} \to A$ (para cualquier C*-álgebra A con unidad), basta con dar un camino continuo por isometrías $w_t \in A$ definido para todo $t \in [0,1]$, tal que $w_0 = \varphi_0(v)$ y $w_1 = \varphi_1(v)$. Para encontrar la homotopía en $\mathcal{K} \otimes \mathcal{T}$, primero vamos a encontrar un camino continuo mediante isometrías en $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ y nos situaremos en las condiciones del lema anterior, de modo que podamos usarlo para obtener una homotopía entre $\kappa \circ Id_{\mathcal{T}}$ y $\kappa \circ j \circ q$ que resida en $\mathcal{K} \otimes \mathcal{T}$.

Definiendo $\overline{\sigma} : \mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathcal{T} : v \to v(1-e) \otimes 1$ [6], obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{T} \arrow[dll, bend right, "\kappa\circ Id_{\mathcal{T}}"'] \arrow[dll, "\kappa\circ j\circ q"'] \arrow[dl, "\overline{\sigma}"'] \arrow[d, "v\to\pi(v)\otimes 1"] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K} \otimes \mathcal{T} \arrow[r] & \mathcal{T} \otimes \mathcal{T} \arrow[r, "p:a\otimes b\to\pi(a)\otimes b"'] & C(S^1) \otimes \mathcal{T} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde la sucesión exacta es obtenida por nuclearidad[7]. Notar que este diagrama corresponde en notación del lema anterior con $\varphi_0 = \kappa \circ Id_{\mathcal{T}}$ y $\varphi_1 = \kappa \circ j \circ q$. Primero veamos que $\overline{\sigma}$ es ortogonal a $\kappa \circ Id_{\mathcal{T}}$ y $\kappa \circ j \circ q$, esto lo podemos deducir observando como actúa $\overline{\sigma}(v)$ en la base de Hilbert

[6] Para definir el *-homomorfismo $\overline{\sigma}$ utilizamos la propiedad universal del álgebra de Toeplitz. Definimos $p = (1-e) \otimes 1$, y observar que p es una proyección, por lo tanto $p(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T})p$ es una C*-álgebra con unidad p. Además, $((1-e) \otimes 1)(v \otimes 1) = (1-e)v \otimes 1 = (v - ev) \otimes 1 = v \otimes 1$, puesto que $ev = 0$. De aquí se sigue que $v(1-e) \otimes 1 = p(v \otimes 1)p \in p(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T})p$. También $(1-e)v^*v(1-e) \otimes 1 = (1-e) \otimes 1 = p$, por lo que $v(1-e) \otimes 1$ es una isometría en $p(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T})p$. Utilizando la propiedad universal del álgebra de Toeplitz existe un *-homomorfismo

$$\overline{\sigma} : \mathcal{T} \longrightarrow p(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T})p \subseteq \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$$

tal que $\overline{\sigma}(v) = v(1-e) \otimes 1$.

[7] $C(S^1)$ es nuclear ya que toda C*-álgebra conmutativa lo es, luego el teorema 1.10.8 nos da la exactitud.

y comparándolo con los otros dos.

$$\begin{tikzcd}
\xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \xi_{1,3} & \xi_{1,4} & \cdots \\
\xi_{2,1} \arrow[d] & \xi_{22} \arrow[d] & \xi_{2,3} \arrow[d] & \xi_{2,4} \arrow[d] & \\
\xi_{3,1} \arrow[d] & \xi_{3,2} \arrow[d] & \xi_{3,3} \arrow[d] & \xi_{3,4} \arrow[d] & \\
\xi_{4,1} \arrow[d] & \xi_{4,2} \arrow[d] & \xi_{4,3} \arrow[d] & \xi_{4,4} \arrow[d] & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{v(1-e)\otimes 1}$$

Observamos que $\overline{\sigma}(v) = v(1-e)\otimes 1$ actúa de forma nula en la primera fila, y ningún elemento de otra fila se envía a la primera. Por otro lado, los operadores $\kappa(v) = e\otimes v$ y $\kappa(j(q(v))) = e\otimes 1$ solo actúan de forma no nula en la primera fila, y los elementos de ésta son enviados a otro elemento dentro de la primera fila. Por ende, podemos concluir que $\overline{\sigma}(v)$ es ortogonal a $\kappa(v)$ y a $\kappa(j(q(v)))$. De forma similar se puede ver que $\overline{\sigma}(v^*)$ es ortogonal a $\kappa(v)$ y $\kappa(j(q(v))$, y como todo elemento de $\mathcal{T}$ es límite de polinomios de dos variables evaluados en v y v^* concluimos la ortogonalidad.

Lo único que nos falta para estar en las condiciones del lema anterior es tener una homotopía en $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}$ entre

$$\theta_0(v) = v(1-e)\otimes 1 + e\otimes v \quad y \quad \theta_1(v) = v(1-e)\otimes 1 + e\otimes 1.$$

Además, la homotopía debe satisfacer $p(\theta_t(v)) = \pi(v)\otimes 1$ para todo $t\in[0,1]$. Debido a la propiedad universal de $\mathcal{T}$, basta con construir un camino continuo de isometrías $\theta_t(v)$ en $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}$ con extremos $\theta_0(v)$ y $\theta_1(v)$, de manera que $p(\theta_t(v))$ permanezca constante. Veamos cómo actúan $\theta_0(v)$ y $\theta_1(v)$ en la base de Hilbert.

$$\begin{tikzcd}
\xi_{1,1} \arrow[r] & \xi_{1,2} \arrow[r] & \xi_{1,3} \arrow[r] & \xi_{1,4} \arrow[r] & \cdots \\
\xi_{2,1} \arrow[d] & \xi_{2,2} \arrow[d] & \xi_{2,3} \arrow[d] & \xi_{2,4} \arrow[d] & \\
\xi_{3,1} \arrow[d] & \xi_{3,2} \arrow[d] & \xi_{3,3} \arrow[d] & \xi_{3,4} \arrow[d] & \\
\xi_{4,1} \arrow[d] & \xi_{4,2} \arrow[d] & \xi_{4,3} \arrow[d] & \xi_{4,4} \arrow[d] & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\theta_0(v)}$$

$$
\begin{tikzcd}
\xi_{1,1} \arrow[loop above] & \xi_{1,2} \arrow[loop above] & \xi_{1,3} \arrow[loop above] & \xi_{1,4} \arrow[loop above] & \cdots \\
\xi_{2,1} \arrow[d] & \xi_{2,2} \arrow[d] & \xi_{2,3} \arrow[d] & \xi_{2,4} \arrow[d] & \\
\xi_{3,1} \arrow[d] & \xi_{3,2} \arrow[d] & \xi_{3,3} \arrow[d] & \xi_{3,4} \arrow[d] & \\
\xi_{4,1} \arrow[d] & \xi_{4,2} \arrow[d] & \xi_{4,3} \arrow[d] & \xi_{4,4} \arrow[d] & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{\theta_1(v)}$

Observamos que los dos operadores tiene el mismo comportamiento, excepto en la primera fila, donde $\theta_0(v)$ funciona como el shift y $\theta_1(v)$ como la identidad. Por lo tanto, procederemos a descomponer estos operadores de manera que nos permita modificar lo que ocurre en la primera fila, asegurando que esta modificación satisface las propiedades requeridas. Consideremos los siguientes elementos autoadjuntos unitarios en $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$

$$u_0 = v(1-e)v^* \otimes 1 + ev^* \otimes v + ve \otimes v^* + e \otimes e \quad y \quad u_1 = v(1-e)v^* \otimes 1 + ev^* \otimes 1 + ve \otimes 1,$$

veamos ahora en un diagrama como actúan sobre la base de Hilbert.

$$
\begin{tikzcd}
\xi_{1,1} \arrow[loop above] & \xi_{1,2} & \xi_{1,3} & \xi_{1,4} & \cdots \\
\xi_{2,1} \arrow[ur, leftrightarrow] & \xi_{2,2} \arrow[ur, leftrightarrow] & \xi_{2,3} \arrow[ur, leftrightarrow] & \xi_{2,4} \arrow[ur, leftrightarrow] & \\
\xi_{3,1} \arrow[loop above] & \xi_{3,2} \arrow[loop above] & \xi_{3,3} \arrow[loop above] & \xi_{3,4} \arrow[loop above] & \\
\xi_{4,1} \arrow[loop above] & \xi_{4,2} \arrow[loop above] & \xi_{4,3} \arrow[loop above] & \xi_{4,4} \arrow[loop above] & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{u_0}$

$$
\boxed{\begin{array}{ccccc}
\xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \xi_{1,3} & \xi_{1,4} & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
\xi_{2,1} & \xi_{2,2} & \xi_{2,3} & \xi_{2,4} & \\
\curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \\
\xi_{3,1} & \xi_{3,2} & \xi_{3,3} & \xi_{3,4} & \\
\curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \\
\xi_{4,1} & \xi_{4,2} & \xi_{4,3} & \xi_{4,4} & \\
 & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}}
$$

$$\boxed{u_1}$$

Observando que el operador $v \otimes 1$ actúa saltando a la siguiente fila pero manteniendo la columna obtenemos

$$\theta_0(v) = u_0(v \otimes 1) \quad y \quad \theta_1(v) = u_1(v \otimes 1).$$

El siguiente paso será conseguir una homotopía entre u_0 y u_1 formada por elementos unitarios u_t, y que la homotopía cumpla $p(u_t) = p(u_0)$ para todo t. Sean $E_{i,j} \in M_2(\mathbb{C})$ las matrices que envían la base canónica i-ésima a la j-ésima. Identificando $span\{\xi_1, \xi_2\}$ con $\mathbb{C}^2$ mediante $\xi_1 \mapsto (1,0)$ y $\xi_2 \mapsto (0,1)$, obtenemos un isomorfismo como C*-álgebras de $C^*(ev^*, ve, e, vev^*)$ con $M_2(\mathbb{C})$ definido de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{ccc}
e \longrightarrow E_{1,1} & \qquad & ve \longrightarrow E_{1,2} \\
 & & \\
ev^* \longrightarrow E_{2,1} & \qquad & vev^* \longrightarrow E_{2,2}.
\end{array}
$$

Definimos los siguientes elementos de $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$:

$$F_0 = ev^* \otimes v + ve \otimes v^* + e \otimes e \quad y \quad F_1 = ev^* \otimes 1 + ve \otimes 1,$$

notar que $F_0, F_1 \in M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{T}$ y

$$u_0 = v(1-e)v^* \otimes 1 + F_0 \qquad u_1 = v(1-e)v^* \otimes 1 + F_1.$$

Por definición, F_0 y F_1 actúan sobre las dos primeras filas de $(\xi_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ de la misma forma que u_0 y u_1 respectivamente, el resto de las filas se envían a 0. Con esta observación y mediante los diagramas de u_0 y u_1, podemos ver:

$$F_0^2 = F_1^2 = (e + vev^*) \otimes 1,$$

donde la parte derecha de la igualdad corresponde a la unidad en $M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{T}$, por ende F_0 y F_1 son unitarios en $M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{T}$. Además $F_0^* = F_0$ y $F_1^* = F_1$, por lo que los espectros de F_0 y F_1 en $M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{T}$ están contenidos en $\{1, -1\}$. De esto se deduce que existe una homotopía por unitarios en $M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{T}$ que conecta F_1 con la unidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes 1$ (lema 2.1.5), y otra homotopía que conecta F_0 con la misma unidad. Concatenando estas homotopías se obtiene una homotopía V_t formada por elementos unitarios de $M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{T}$ tal que $V_0 = F_0$ y $V_1 = F_1$. Como la homotopía V_t transcurre en $M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{T}$, la cual identificamos con $C^*(ev^*, ve, e, vev^*)$, y notando que esta última C*-algebra es una subálgebra de $\mathcal{K}$, obtenemos que $p(V_t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$. El próximo objetivo es utilizar esta homotopía V_t para construir una homotopía de unitarios U_t entre u_0 y u_1 tal que su imagen no varíe por el *-homomorfismo p. Definimos la siguiente homotopía

$$U_t = (1 - e - vev^*) \otimes 1 + V_t.$$

Veamos que U_t es unitario, esto lo haremos analizando como actúa sobre la base de Hilbert $\{\xi_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$. Tenemos que V_t es un elemento unitario en $M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{T}$ y la unidad en esta C*-álgebra es $(e + vev^*) \otimes 1$, además, como V_t pertenece a esa C*-álgebra, solo puede actuar de forma no nula en las dos primeras filas de $(\xi_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$. Con esto podemos observar

$$U_t^* U_t = 1,$$

ya que en las primeras dos filas $(1 - e - vev^*) \otimes 1$ se anula, quedando así en esas filas $U_t^* U_t = V_t^* V_t = (e + vev^*) \otimes 1$, la cual es la identidad en las dos primeras filas. Luego, en el resto de filas $V_t = 0$ y $e + vev^* = 0$, por ende $U_t^* U_t = 1 \otimes 1$. Con un argumento similar se obtiene que $U_t U_t^*$ es la identidad, concluyendo así que U_t es unitario en $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$. Notar que

$$p(U_t) = p((1-e-vev^*)\otimes 1) = p(1) = \pi(v^*v)\otimes 1 = \pi(v)^*\pi(v)\otimes 1 = \pi(vv^*)\otimes 1 = p(u_1) = p(u_0).^8$$

Definimos $\theta_t(v) = U_t(v \otimes 1)$. Como U_t es una homotopía formada por unitarios, $\theta_t(v)$ es un camino continuo formado por isometrías. Además,

$$p(\theta_t(v)) = p(U_t)\, p(v \otimes 1) = p(v \otimes 1),$$

por ende estamos en las condiciones del lema anterior. Concluyendo así $E(\kappa \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{T}}) = E(\kappa \circ j \circ q)$. Luego, utilizando que $E(\kappa)$ es un isomorfismo y la funtorialidad de E, se obtiene

$$E(\mathrm{Id}_{\mathcal{T}}) = E(j \circ q).$$

□

Corolario 3.4.12. *Para una C*-álgebra A, los morfismos $E(j \otimes Id_A)$ y $E(q \otimes Id_A)$ son inversos, estableciendo así un isomorfismos entre $E(A \otimes \mathcal{T})$ y $E(A \otimes \mathbb{C}) \simeq E(A)$.*

Demostración. La prueba sigue el mismo procedimiento que la proposición anterior, pero tensorizando con A a todos los diagramas, podemos demostrar que $E(j \otimes Id_A)$ y $E(q \otimes Id_A)$ son morfismos inversos. □

Teorema 3.4.13 (Periodicidad de Bott)**.** *(*[6, Teorema 4.4]*)*
Para cualquier C-álgebra A, se tiene $K_{n+1}(A) \simeq K_{n-1}(A)$. Esto implica que los grupos de K-teoría para valores pares de n son todos isomorfos, mientras que aquellos correspondientes a valores de n impares también son isomorfos.*

[8] Utilizamos que π tiene imagen en $C(S^1)$ y que esta última es conmutativa.

Demostración. Consideremos la C*-álgebra $\mathcal{T}_0 = ker(q)$. Obtenemos la siguiente sucesión exacta corta de C*-álgebras

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{T}_0 \arrow[r, "\rho"'] & \mathcal{T} \arrow[r, "q"'] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[l, bend right, "j"'] & 0, \end{tikzcd}$$

los morfismos j y q son los utilizados en el teorema 3.4.11. Luego, la nuclearidad de $\mathbb{C}$ nos da la siguiente sucesión exacta corta que escinde

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{T}_0 \otimes A \arrow[r, "\rho\otimes Id_A"'] & \mathcal{T} \otimes A \arrow[r, "q\otimes Id_A"'] & \mathbb{C} \otimes A \arrow[r] \arrow[l, bend right, "j\otimes Id_A"'] & 0. \end{tikzcd}$$

Por la exactitud-escisión de K_n, vemos que $K_n(\rho \otimes \mathrm{Id}_A)$ es inyectiva. Con esto, y el teorema 3.4.11 aplicado a $E = K_n$, obtenemos lo siguiente

$$K_n(\rho\otimes\mathrm{Id}_A) = K_n((j\otimes\mathrm{Id}_A)\circ(q\otimes\mathrm{Id}_A))\circ K_n(\rho\otimes\mathrm{Id}_A) = K_n((j\otimes\mathrm{Id}_A)\circ(q\otimes\mathrm{Id}_A)\circ(\rho\otimes\mathrm{Id}_A)) = 0.$$

Esto implica que $K_n(\mathcal{T}_0 \otimes A) = 0$. Por definición, $\mathcal{T}_0$ está formado por aquellos operadores de $\mathcal{T}$ cuya función símbolo se anula al evaluarla en 1. Obtenemos el morfismo $\pi : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{S}$, donde $\mathcal{S}$ es el álgebra de funciones en $C(S^1)$ tales que al evaluar en 1 se anulan. Por ende logramos la siguiente sucesión exacta corta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[r] & \mathcal{T}_0 \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{S} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

La nuclearidad de $\mathcal{S}$ y la identificación $\mathcal{S} \otimes A \simeq SA$ nos dan la siguiente sucesión exacta corta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{K} \otimes A \arrow[r] & \mathcal{T}_0 \otimes A \arrow[r, "\pi\otimes Id_A"] & SA \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Aplicando la proposición 3.3.10 a la sucesión exacta corta anterior nos da la siguiente sucesión exacta larga

$$\begin{tikzcd} K_n(\mathcal{T}_0 \otimes A) = 0 \arrow[r] & K_n(SA) \simeq K_{n+1}(A) \arrow[dl, "\delta_n"'] \\ K_{n-1}(\mathcal{K} \otimes A) \simeq K_{n-1}(A) \arrow[r] & K_{n-1}(\mathcal{T}_0 \otimes A) = 0. \end{tikzcd}$$

De la exactitud de la sucesión se concluye que

$$K_{n+1}(A) \simeq K_{n-1}(A) \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

3.5. La sucesión exacta de seis términos

Definición 3.5.1. *Sea A una C*-álgebra, definimos el morfismo de Bott de la siguiente forma:*

$$\begin{tikzcd} K_1(\mathcal{S} \otimes A) \arrow[r, "\delta_1"'] \arrow[rr, bend left, "\beta_A"] & K_0(\mathcal{K} \otimes A) \arrow[r, "K_0(\kappa_A)^{-1}"'] & K_0(A) \end{tikzcd}$$

donde $\kappa_A : A \to \mathcal{K} \otimes A$ es el morfismo canónico.

Comentario 3.5.2. El teorema de periodicidad de Bott implica que β_A es un isomorfismo.

Comentario 3.5.3. Notar que el morfismo de Bott es natural, dadas dos C*-álgebras A y B junto con un *-homomorfismo $\varphi : A \to B$, se cumple el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
K_1(\mathcal{S} \otimes A) \arrow[r, "K_1(Id_{\mathcal{S}} \otimes B)"] \arrow[d, "\beta_A"'] & K_1(\mathcal{S} \otimes B) \arrow[d, "\beta_B"] \\
K_0(A) \arrow[r, "K_0(\varphi)"'] & K_0(B).
\end{tikzcd}$$

Esto se debe a la conmutatividad el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
K_1(\mathcal{S} \otimes A) \arrow[r, "K_1(Id_{\mathcal{S}} \otimes B)"] \arrow[d, "\delta_1"] \arrow[dd, bend right, "\beta_A"'] & K_1(\mathcal{S} \otimes B) \arrow[d, "\delta_1'"] \arrow[dd, bend left, "\beta_B"] \\
K_0(\mathcal{K} \otimes A) \arrow[r, "K_0(Id_{\mathcal{K}} \otimes B)"'] \arrow[d, "K_0(\kappa_A^{-1})"] & K_0(\mathcal{K} \otimes B) \arrow[d, "K_0(\kappa_B^{-1})"] \\
K_0(A) \arrow[r, "K_0(\varphi)"'] & K_0(B)
\end{tikzcd}$$

El cuadrado superior es conmutativo por la naturalidad del morfismo δ_1 y el cuadrado inferior por naturalidad del morfismo κ.

Definición 3.5.4. *Para toda sucesión exacta corta de C*-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

definimos el morfismo exponencial $\delta_0 : K_0(B) \to K_1(I)$ *siendo la composición de los siguientes morfismos*

$$\begin{tikzcd}
K_0(B) \arrow[r, "\beta_B^{-1}"] \arrow[rr, bend left, "\delta_0"] & K_2(A) \arrow[r, "\delta_1'"] & K_1(I)
\end{tikzcd}$$

donde δ_1' *es el morfismo de conexión en la sucesión exacta larga asociado a la siguiente sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow SI \xrightarrow{S\varphi} SA \xrightarrow{S\psi} SB \longrightarrow 0.$$

Teorema 3.5.5. *Para toda sucesión exacta corta de C*-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

tenemos la siguiente sucesión exacta de seis términos

$$\begin{tikzcd}
K_0(I) \arrow[r, "K_0(\varphi)"] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\psi)"] & K_0(B) \arrow[d, "\delta_0"] \\
K_1(B) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(\psi)"] & K_1(I) \arrow[l, "K_1(\varphi)"]
\end{tikzcd}$$

Demostración. Solo resta probar la exactitud del lado de $\delta_0 : K_0(B) \to K_1(I)$. El resto se deduce de la sucesión exacta larga. Utilizando que el morfismo de Bott es un isomorfismo, observamos:

$$\mathrm{Ker}(\delta_0) = \beta_B(\mathrm{Ker}(\delta_1')) = \beta_B(\mathrm{Im}(K_1(S\varphi))),$$

donde la última igualdad viene de la sucesión exacta larga correspondiente a la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow SI \xrightarrow{S\varphi} SA \xrightarrow{S\psi} SB \longrightarrow 0.$$

Luego, gracias a la naturalidad del morfismo de Bott, tenemos que

$$\beta_B(\mathrm{Im}(K_1(S\varphi))) = \mathrm{Im}(K_0(\varphi)),$$

consiguiendo así la exactitud en $K_0(B)$. Dado que

$$\mathrm{Im}(\delta_0) = \mathrm{Im}(\delta_1') = \mathrm{Ker}(K_1(\varphi))$$

se concluye la demostración del teorema. □

3.5.1. Ejemplos de K_0 y K_1

Ejemplo 3.5.6.

$$K_0(C_0(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si n par} \\ 0 & \text{si n impar.} \end{cases} \tag{3.13}$$

y

$$K_1(C_0(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \mathbb{Z}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Utilizando que $C_0(X \times Y) \simeq C_0(X, C_0(Y))$ para X y Y Hausdorff localmente compactos, se tiene

$$C_0(\mathbb{R}^2) = C_0(\mathbb{R}, C_0(\mathbb{R})) \simeq SC_0(\mathbb{R}) \simeq S^2\mathbb{C}.$$

Por inducción, $C_0(\mathbb{R}^n) \simeq S^n\mathbb{C}$. Utilizando la definición de K_n, la periodicidad de Bott y los valores de $K_n(\mathbb{C})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos

$$K_0(C_0(\mathbb{R}^n)) \simeq K_0(S^n\mathbb{C}) \simeq K_n(\mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

De forma similar, tenemos

$$K_1(C_0(\mathbb{R}^n)) \simeq K_{n+1}(\mathbb{C}) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \mathbb{Z}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

□

Ejemplo 3.5.7.

$$K_0(C(S^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \mathbb{Z}, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

y

$$K_1(C(S^n)) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \mathbb{Z}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Utilizando que S^n es la compactificación por un punto de $\mathbb{R}^n$, por ende $C(S^n)$ es isomorfa a la unitización de $C_0(\mathbb{R}^n)$ (ver [12, lema C.38]), tenemos

$$K_0(C(S^n)) \simeq K_0(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{Z} = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \mathbb{Z}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Además, el K_1 de una C*-álgebra coincide con el de su unitización, obteniendo así:

$$K_1(C(S^n)) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \mathbb{Z}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

□

Ejemplo 3.5.8. $K_0(\mathcal{T}) \simeq \mathbb{Z}$ y $K_1(\mathcal{T}) \simeq 0$.

Demostración. En la demostración de periodicidad de Bott vimos que $K_n(\mathcal{T}) \simeq K_n(\mathbb{C})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Ejemplo 3.5.9. $K_0(\mathbb{T}^n) = K_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^{2^{n-1}}$

Demostración. Podemos identificar SA con las funciones $f \in C(S^1, A)$ tales que $f(1) = 0$. Utilizando la notación $\mathbb{T}A = C(S^1, A)$, obtenemos la siguiente sucesión exacta de C*-álgebras que escinde:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & SA \arrow[r] & \mathbb{T}A \arrow[r, "f \mapsto f(1)"'] & A \arrow[l, bend right] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde el morfismo $A \to \mathbb{T}A$ manda a a la función constante $f(z) = a$ para todo $z \in S^1$. De ello se sigue

$$K_0(\mathbb{T}A) \simeq K_0(SA) \oplus K_0(A) \simeq K_1(A) \oplus K_0(A).$$

De forma análoga obtenemos

$$K_1(\mathbb{T}A) \simeq K_1(SA) \oplus K_1(A) \simeq K_0(A) \oplus K_1(A).$$

Luego, por inducción y utilizando $\mathbb{T}^n\mathbb{C} \simeq C(\mathbb{T}^n)$, se obtiene

$$K_0(\mathbb{T}^n) = K_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^{2^{n-1}}.$$

□

Comentario 3.5.10. Hasta ahora, los ejemplos que hemos calculado de grupos de K-teoría siempre resultan en grupos finitamente generados y con torsión nula. Esto no es cierto para toda C^*-álgebra.

Denotamos, para $n \geq 2$, $\mathcal{O}_n$ el álgebra de Cuntz: es la C^*-álgebra universal generada por isometrías $s_1, \ldots, s_n$ que satisfacen la relación

$$\sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = 1.$$

En [7, Capítulo V] se muestra que esta C^*-álgebra, a menos de isomorfismo, no depende de la elección de las isometrías. En [5, Teorema 3.7] se demuestra que

$$K_0(\mathcal{O}_n) = \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z},$$

obteniéndose así un ejemplo de C^*-álgebra cuyo K_0 tiene torsión no nula.

Para dar un ejemplo de una C^*-álgebra cuyo K_0 no sea finitamente generado, consideremos A una álgebra de von Neumann de tipo II_1 (ver [13, Capítulo 4]). En este caso se puede probar que

$$K_0(A) = \mathbb{R}.$$

4 Aplicaciones de la K-teoría

Comenzaremos el capítulo enunciando la sucesión de Pimsner–Voiculescu, esta permite calcular la K-teoría de productos cruzados[1] por $\mathbb{Z}$. Un ejemplo fundamental de producto cruzado discreto son las denominadas *álgebras de rotación irracional*. Dado $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y dos operadores unitarios U, V en un espacio de Hilbert H que satisfacen

$$UV = e^{2\pi i\theta} VU,$$

definimos la C^*-álgebra de rotación A_θ como la C^*-álgebra generada por U y V. Esta álgebra es isomorfa a un producto cruzado $C(S^1) \times_\alpha \mathbb{Z}$, donde α es el automorfismo en $C(S^1)$ inducido por la rotación de ángulo θ, mediante la sucesión de Pimsner–Voiculescu se pueden calcular explícitamente sus grupos $K_0(A_\theta)$ y $K_1(A_\theta)$.

Luego trataremos la clasificación de las AF-álgebras con unidad mediante la K-teoría. Una AF-álgebra es una C^*-álgebra isomorfa al límite inductivo de una sucesión de C^*-álgebras de dimensión finita. Para la clasificación basta con K_0 provisto de la estructura adicional adecuada: grupo ordenado con unidad. Más precisamente, el invariante completo es el grupo ordenado con unidad

$$\Big(K_0(A),\ K_0(A)^+,\ [1_A]_0\Big),$$

y el teorema de Elliott afirma que, para AF-álgebras con unidad, este invariante es total, es decir, dos AF-álgebras con unidad son isomorfas si y solo si sus invariantes ordenados K_0 son isomorfos.

[1] La definición de producto cruzado se puede encontrar en [20, Lema 2.27] o en [7, Capítulo VIII].

4.1. K-teoría de productos cruzados discretos

Sucesión Pimsner–Voiculescu

Teorema 4.1.1. *Consideremos A una C^*-álgebra y sea $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ un automorfismo. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta de seis términos:*

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r, "1-K_0(\alpha)"] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(i)"] & K_0(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[d] \\
K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[u] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(i)"] & K_1(A) \arrow[l, "1-K_1(\alpha)"]
\end{tikzcd}$$

donde $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ es el producto cruzado de A con $\mathbb{Z}$ dada por la acción α.

Demostración. [3, Teorema 10.2.1]. □

Álgebras de rotación irracional

Consideremos S^1 como $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Fijado un número irracional θ, sea $H = L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Definimos en H los siguientes operadores unitarios: U como operador de multiplicación por la función $z(t) = e^{2\pi it}$ y V como la rotación por θ,

$$(Uf)(t) = z(t)f(t), \qquad (Vf)(t) = f(t-\theta).$$

Es fácil ver que

$$(VUf)(t) = (Uf)(t-\theta) = z(t-\theta)f(t-\theta) = e^{-2\pi i\theta}z(t)\,(Vf)(t) = e^{-2\pi i\theta}\,UVf(t),$$

y por lo tanto

$$UV = e^{2\pi i\theta}\,VU. \tag{4.1}$$

Definición 4.1.2. *La C^*-álgebra de rotación irracional se define como*

$$A_\theta = C^*(U,V),$$

es decir, la C^*-subálgebra de $B(H)$ generada por U y V.

Comentario 4.1.3. Esta C^*-álgebra tiene una propiedad universal, cualquier C^*-álgebra generada por un par de elementos unitarios U, V que satisfagan la relación (4.1) es isomorfa a A_θ, ver [7, capítulo VI].

Consideremos $\tau_\theta \in \mathrm{Aut}(C(S^1))$ el automorfismo dado por

$$\tau_\theta(f)(z) = f(e^{-2\pi i\theta}z) = f \circ R_{-\theta}(z).$$

Se puede probar

$$A_\theta \simeq C(S^1) \times_{\tau_\theta} \mathbb{Z},$$

ver [7, ejemplo VIII.1.2].

Veamos sucesión exacta de Pimsner–Voiculescu para $C(S^1) \rtimes_{\tau_\theta} \mathbb{Z}$. Como τ_θ es homotópico a la identidad, tenemos que $1 - K_i(\tau_\theta) = 0$ para $i = 0, 1$. De ello se sigue que la sucesión de Pimsner–Voiculescu se descompone en dos sucesiones cortas exactas

$$0 \longrightarrow K_0(C(S^1)) \longrightarrow K_0(A_\theta) \longrightarrow K_1(C(S^1)) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow K_1(C(S^1)) \longrightarrow K_1(A_\theta) \longrightarrow K_0(C(S^1)) \longrightarrow 0.$$

Luego,

$$\boxed{K_0(A_\theta) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \qquad K_1(A_\theta) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.}$$

Esto nos indica que el cálculo directo de la K-teoría no es suficiente para distinguir entre A_θ y A_β cuando θ y β son irracionales. Sin embargo Rieffel [14] demuestra, mediante el uso de una traza sobre K_0, que A_θ y A_β son isomorfas si solo si $\theta - \beta \in \mathbb{Z}$ o $\theta + \beta \in \mathbb{Z}$.

4.2. Clasificación de AF-álgebras con unidad

Definición 4.2.1. *Un par (G, G^+) se denomina* **grupo abeliano ordenado** *si G es un grupo abeliano y $G^+ \subseteq G$ es un subconjunto que cumple:*

$$(1)\ G^+ + G^+ \subseteq G^+, \quad (2)\ G^+ \cap (-G^+) = \{0\}, \quad (3)\ G^+ - G^+ = G. \tag{4.2}$$

Definimos un orden $\leq$ en G por $x \leq y$ si y sólo si $y - x \in G^+$.

Definición 4.2.2.

Un elemento $u \in G^+$ de un grupo abeliano ordenado (G, G^+) se denomina unidad del orden *si, para todo $g \in G$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $-nu \leq g \leq nu$.*

Una terna (G, G^+, u), donde (G, G^+) es un grupo abeliano ordenado y u es una unidad del orden, se llama grupo abeliano ordenado con unidad del orden distinguida.

Definición 4.2.3.

- *Sean (G, G^+) y (H, H^+) grupos abelianos ordenados. Un homomorfismo de grupos $\alpha\colon G \to H$ se dice* positivo *si $\alpha(G^+) \subseteq H^+$. Decimos que α es un* isomorfismo de grupos abelianos ordenados *si es un isomorfismo de grupos y $\alpha(G^+) = H^+$.*

- *Dados (G, G^+, u) y (H, H^+, v), grupos abelianos ordenados con unidades del orden distinguidas, un homomorfismo de grupos positivo $\alpha\colon G \to H$* preserva la unidad del orden *si $\alpha(u) = v$. Las ternas (G, G^+, u) y (H, H^+, v) se dicen* isomorfos *si existe un isomorfismo de orden que además preserva la unidad del orden.*

Definición 4.2.4. *Para una C^*-álgebra A, el* ***cono positivo*** *de $K_0(A)$ se define como*

$$K_0(A)^+ = \{[p]_0 : p \in P_\infty(A)\} \subseteq K_0(A).$$

Definición 4.2.5. *Decimos que una C^*-álgebra es AF-álgebra si es isomorfa al límite inductivo de una sucesión de C^*-álgebras de dimensión finita.*

Proposición 4.2.6. *Sea A una AF-álgebra con unidad. Entonces*

$$\Big(K_0(A),\, K_0(A)^+,\, [1_A]_0\Big)$$

es un grupo abeliano ordenado con unidad de orden distinguida.

Demostración. [15, Proposición 5.1.5]. □

Comentario 4.2.7. Dadas dos AF-álgebras con unidad A y B, y un *-homomorfismo $\varphi\colon A \to B$, sabemos que φ induce un homomorfismo

$$K_0(\varphi)\colon K_0(A) \to K_0(B).$$

Como $K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0$ para todo $p \in P_\infty(A)$, tenemos que

$$K_0(\varphi)\Big(K_0^+(A)\Big) \subseteq K_0^+(B).$$

Por tanto, $K_0(\varphi)$ es un homomorfismo de grupos positivo.

Si $\varphi\colon A \to B$ es un isomorfismo, entonces, por la functorialidad de K_0, $K_0(\varphi)\colon K_0(A) \to K_0(B)$ es un isomorfismo de grupos y

$$K_0(\varphi)\Big(K_0(A)^+\Big) = K_0(B)^+.$$

De ello se concluye que $K_0(\varphi)$ es un isomorfismo de grupos ordenados. Además, se tiene

$$K_0(\varphi)([1_A]_0) = [1_B]_0,$$

y por tanto la terna $\Big(K_0(A), K_0(A)^+, [1_A]_0\Big)$ es un invariante mediante isomorfismos.

Teorema 4.2.8 (Clasificación de Elliot)**.**
Dos AF-álgebras con unidad A y B son isomorfas si y sólo si

$$\Big(K_0(A),\, K_0(A)^+,\, [1_A]_0\Big) \quad y \quad \Big(K_0(B),\, K_0(B)^+,\, [1_B]_0\Big)$$

son isomorfos como grupos abelianos ordenados con unidad de orden distinguida, es decir, si y sólo si existe un isomorfismo de grupos $\alpha\colon K_0(A) \to K_0(B)$ *tal que* $\alpha\Big(K_0(A)^+\Big) = K_0(B)^+$ *y* $\alpha([1_A]_0) = [1_B]_0$.

Además, para todo isomorfismo de grupos α *que cumpla esto, existe un* $*$*-isomorfismo* $\varphi\colon A \to B$ *tal que* $K_0(\varphi) = \alpha$.

Demostración. [15, Teorema 7.3.4]. □

El teorema recién mencionado fue demostrado por Elliot en la década de los 70. Recientemente, en una búsqueda por clasificar una familia más amplia de C*-álgebras utilizando K-teoría, se inició el conocido programa de clasificación Elliot, lo que condujo al desarrollo de un teorema de clasificación más complejo de enunciar pero que abarca una mayor cantidad de C*-álgebras, ver [17, Teorema 18.0.12].

Bibliografía

[1] William Arveson, *An invitation to c*-algebras*, Vol. 39, Springer Science & Business Media, 1998.

[2] Michael Atiyah, *K-theory*, CRC press, 2018.

[3] Bruce Blackadar, *K-theory for operator algebras*, Vol. 5, Cambridge University Press, 1998.

[4] Nathanial P. Brown and Narutaka Ozawa, *C*-Algebras and Finite-Dimensional Approximations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 88, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[5] Joachim Cuntz, *K-theory for certain c*-algebras*, Annals of Mathematics **113** (1981), no. 1, 181–197.

[6] ———, *K-theory and c*-algebras*, Algebraic k-theory, number theory, geometry and analysis (bielefeld, 1982), 1984, pp. 55–79.

[7] Kenneth R Davidson, *C*-algebras by example*, Vol. 6, American Mathematical Soc., 1996.

[8] Rolando De Santiago and Brent Nelson, *Lecture notes in von neumann algebras*, 2013. Disponible en línea: `https://users.math.msu.edu/users/banelson/conferences/GOALS/notes/vNa_notes.pdf`.

[9] Tobias Fritz, *Cuntz' proof of Bott periodicity for C*-algebras*, 2010. Disponible en línea: `http://tobiasfritz.science/2010/bott_periodicity.pdf`.

[10] Jonathan James Gleason, *The c*-algebraic formalism of quantum mechanics, 2009.*

[11] Nigel Higson and John Roe, *Analytic k-homology*, OUP Oxford, 2000.

[12] Klaas Landsman, *Foundations of quantum theory: From classical concepts to operator algebras*, Springer Nature, 2017.

[13] Gerald J Murphy, *C*-algebras and operator theory*, Academic press, 2014.

[14] Marc Rieffel, *C*-algebras associated with irrational rotations*, Pacific Journal of Mathematics **93** (1981), no. 2, 415–429.

[15] Mikael Rørdam, Flemming Larsen, and Niels Laustsen, *An introduction to k-theory for c*-algebras*, Vol. 49, Cambridge University Press, 2000.

[16] Herbert Schröder, *K-theory for real c*-algebras and applications* (1993).

[17] Karen R Strung, Francesc Perera, et al., *An introduction to c*-algebras and the classification program*, Springer, 2021.

[18] Richard G Swan, *Vector bundles and projective modules*, Transactions of the American Mathematical Society **105** (1962), no. 2, 264–277.

[19] N. E. Wegge-Olsen, *K-Theory and C*-Algebras: A Friendly Approach*, 1st ed., Oxford University Press, Oxford, 1993. Online edition (Oxford Academic), 31 Oct. 2023.

[20] Dana P Williams, *Crossed products of c*-algebras*, American Mathematical Soc., 2007.