

Tesis de Maestría  
Estructura de conjuntos hiperbólicos en  
toros

Adriana da Luz  
Orientador: Martin Sambarino

Maestría en Matemática  
PEDECIBA  
Universidad de la República  
Uruguay

## Resumen

En esta tesis presentaremos varios resultados acerca de conjuntos hiperbólicos invariantes. En particular nos interesa estudiar la siguiente pregunta planteada por Katok y Hasselblatt en [[KH], p. 272]

**Pregunta.** *Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico, y  $V$  un entorno de  $\Lambda$ . ¿Existe un conjunto con estructura de producto local  $\tilde{\Lambda}$  tal que  $\Lambda \subset \tilde{\Lambda} \subset V$ ?*

Construiremos nuevos contra-ejemplos para esta pregunta. Mostraremos que hay ejemplos de conjuntos que no cumplen lo anterior en automorfismos lineales del  $\mathbb{T}^n$  y por lo tanto estos ejemplos son robustos.

También construiremos ejemplos de conjuntos transitivos que no están contenidos en ningún conjunto con estructura de producto local. Los ejemplos de este tipo construidos hasta ahora por Crovisier en [C] y por Fisher en [Fi], ó eran en dimensión mayor o igual a 4, ó no eran transitivos. Construiremos ejemplos transitivos y robustos en  $\mathbb{T}^3$  y probaremos que en dimensión 2 no es posible generar ejemplos transitivos.

## Abstract

In this work, we study several results regarding the structure of hyperbolic sets. In particular we will be interested in the following question posed by Katok and Hasselblatt in [[KH], p. 272]

**Question.** *Let  $\Lambda$  be a hyperbolic set, and let  $V$  be an open neighborhood of  $\Lambda$ . Does there exist a locally maximal hyperbolic set  $\tilde{\Lambda}$  such that  $\Lambda \subset \tilde{\Lambda} \subset V$ ?*

We construct new examples answering in the negative this question. We show that such examples are present in linear Anosov diffeomorphisms of the  $\mathbb{T}^n$ , and are therefore robust. Also we construct a new examples of set that is not contained in any locally maximal hyperbolic set. The examples known until now were constructed by Crovisier in [C] and by Fisher in [Fi], and these were either in dimension bigger than 4 or they were not transitive. We give a transitive and robust example in  $\mathbb{T}^3$ . And show that such examples cannot be build in dimension 2.

## Agradecimientos

No tengo palabras para agradecerle a Martín Sambarino por la paciencia y la dedicación que tuvo conmigo como tutor, siempre impulsándome a tratar de mejorar, muchas veces contra mi propia voluntad. Si bien me escucho quejarme muchas veces, la realidad es que lo admiro profundamente como matemático y como formador. En fin, por esto y por mil cosas más, GRACIAS!!

Al Gordo mil infinitas gracias! por siempre escucharme súper desinteresadamente, en cualquier momento y sugerirme distintas maneras de ver las cosas. Gracias por la paciencia, el interés y la dedicación! Tanto al Gordo como al Leva, gracias por el esfuerzo que supone leer esta tesis, por las sugerencias y la paciencia!

No quiero perder la oportunidad de agradecerle a Claudia, a Sandra y sobre todo a Lydia, que siempre están ahí ayudándome a saber donde tengo qué firmar, ¿qué tengo que hacer ahora? ¿A donde tengo que mandar una carta? ¿Cuántos créditos me faltan? Sin ellas quien saber que disparates hubiera hecho!

También quiero agradecer a todo el ambiente fantástico de compañeros de trabajo y amigos que siempre te escuchan y te dan una mano, a Javier Correa (por escucharme, leer mis cosas etc.) a Carolina y el Rambo (que sufrieron ser mis compañeros de sala en todo este proceso y no les quedo otra que bancarme je) a Pilar Lorenzo (esta tesis tendría el triple de errores ortográficos si no fuera por ella) al Illa que si bien es un traicionero igual siempre me presta su tiempo para que lo atomice con las cosas que pienso, al Frodo por siempre estar abierto a pensar algo conmigo y a todo el grupete en general! se hace todo mucho mas cuesta abajo con compañeros así!

Quiero agradecer a mi familia, especialmente a mis padres, mis suegros, mi hermano y mis cuñados por siempre darme para adelante! Y a al amor de mi vida, Andrés por hacer que todo valga la pena y tenga sentido.

Finalmente quiero agradecer a mi abuela Perla Carrión por ser una fuente de inspiración constante en mi vida. Su recuerdo siempre está conmigo y me acompaña en todo lo que hago.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Subconjuntos invariantes hiperbólicos . . . . .	7
1.2. Conjuntos hiperbólicos y estructura de producto local .	8
<b>2. Conjuntos invariantes de un Anosov en <math>\mathbb{T}^n</math></b>	<b>14</b>
2.1. Ejemplo de Hancock . . . . .	16
<b>3. Conjuntos localmente maximales de un Anosov lineal en <math>\mathbb{T}^n</math></b>	<b>20</b>
3.1. Conjuntos maximales invariantes conexos . . . . .	20
3.2. Un conjunto que no es localmente premaximal, prueba del teorema A . . . . .	25
<b>4. El ejemplo de Mañé</b>	<b>27</b>
4.1. Semiconjugación de $g$ con el difeomorfismo de Anosov lineal $f_A$ . . . . .	29
4.2. Transitividad del conjunto $\Gamma$ . . . . .	32
<b>5. Conjuntos que no son premaximales</b>	<b>35</b>
5.1. El ejemplo de Crovisier . . . . .	35
5.2. El ejemplo de Fisher . . . . .	39
5.3. Ejemplo robusto y transitivo en dimensión 3, prueba del teorema B . . . . .	45
<b>6. En dimensión 2 los conjuntos transitivos son localmente premaximales, prueba del teorema C</b>	<b>53</b>

# 1. Introducción

El estudio de los sistemas dinámicos consiste en el análisis del comportamiento del "movimiento" de algún conjunto importante de puntos bajo la acción de una ley (que en nuestro caso será un difeomorfismo aunque se estudian variados contextos). Los conjuntos de puntos que consideramos habitualmente son aquellos que son invariantes bajo la acción de la ley y que tienen alguna propiedad de recurrencia (como ser un subconjunto invariante del no errante de un difeomorfismo). Dentro de estos sistemas, los sistemas caóticos tienen una gran importancia ya que presentan una riqueza particular.

En los '60, Anosov ([A2]) y Smale ([S]) comienzan a estudiar conjuntos compactos e invariantes a los que llaman conjuntos hiperbólicos, que cumplen que en cada punto del conjunto, el espacio tangente en ese punto se divide en direcciones invariantes de contracción y expansión uniforme. Más precisamente, si  $M$  es una variedad compacta y  $f : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo, decimos que  $\Lambda \subset M$  es conjunto hiperbólico, si es compacto e invariante y para cada  $x \in \Lambda$  el espacio tangente admite una separación en subespacios que cumplen:

- $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$
- $Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$  y  $Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$
- existen constantes  $C > 0$  y  $\lambda \in (0, 1)$  tales que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $\| Df^n(v) \| \leq C\lambda^n \| v \|$  para  $v \in E^s(x)$  y  $\| Df^{-n}(v) \| \leq C\lambda^{-n} \| v \|$  con  $v \in E^u(x)$ .

En el contexto de variedades compactas estos sistemas muestran dinámicas caóticas que a pesar de ser ricas y complejas, al día de hoy tienen una descripción bastante amplia y completa, ver por ejemplo [KH], o [Sa].

Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño y  $x \in \Lambda$ , un conjunto hiperbólico, podemos definir las variedades estables e inestables locales, respectivamente de la siguiente manera:

$$W_\varepsilon^s(x, f) = \{ y \in M \mid \text{para todo } n \in \mathbb{N}, d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon \},$$

y

$$W_\varepsilon^u(x, f) = \{ y \in M \mid \text{para todo } n \in \mathbb{N}, d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \varepsilon \} .$$

Tambien definimos las variedades estables e inestables globales como:

$$W^s(x, f) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\varepsilon^s(f^n(x), f)) ,$$

y

$$W^u(x, f) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_\varepsilon^u(f^{-n}(x), f)) .$$

Las variedades estables e inestables son subvariedades (inmersas) que varían continuamente con  $x$ . Si dos puntos de  $\Lambda$  están lo suficientemente cerca, las variedades estables e inestables locales se cortan transversalmente en un solo punto ( ver por ejemplo, [KH], ó [Sa].).

**Definición.** Si  $f : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo tal que  $M$  es un conjunto hiperbólico diremos que  $f$  es de Anosov.

En todo lo que sigue  $M$  denotará una variedad compacta conexa y sin borde.

Un caso especial de sistemas con conjuntos hiperbólicos es cuando el conjunto hiperbólico es el no errante y además los puntos periódicos son densos en este conjunto. A los difeomorfismos con esta propiedad los llamamos Axioma A. Estos sistemas tienen una importancia particular ya que por un lado tenemos una muy buena descripción de su dinámica dada por el siguiente teorema:

**Teorema** (Espectral [S]). *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo Axioma A. Entonces  $\Omega(f) = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_m$  donde  $\Delta_i$  con  $i = 1, \dots, m$  son conjuntos compactos,  $f$ -invariantes, dos a dos disjuntos y transitivos (llamadas piezas básicas). Además, cada  $\Delta_i$  con  $i = 1, \dots, m$  se descompone a su vez en una unión disjunta de conjuntos compactos  $\Delta_i = \Delta_{i1} \cup \dots \cup \Delta_{in_i}$  tal que  $f(\Delta_{ij}) = \Delta_{i(j+1)}$  con  $j = 1, \dots, n_i - 1$  y  $f(\Delta_{in_i}) = \Delta_{i1}$ ,  $f^{n_i}|_{\Delta_{ij}}$  es topológicamente mixing y  $W^s(x)$  es densa en  $\Delta_{ij}$  para todo  $x \in \Delta_{ij}$ .*

Por otro lado, cuando no hay ciclos entre las piezas, se tiene que estos sistemas cumplen con algún tipo de estabilidad en el siguiente sentido:

**Definición.** Decimos que  $f$  es  $C^r$   $\Omega$ -estable si existe un entorno de  $f$ ,  $U(f) \subset \text{Diff}^r(M)$  tal que si  $g \in U(f)$  entonces existe un homeomorfismo  $h : \Omega(f) \rightarrow \Omega(g)$  tal que  $h \circ f / \Omega(f) = g / \Omega(g) \circ h$ .

En la topología  $C^1$  los Difeomorfismos Axioma A sin ciclos son los únicos  $\Omega$ -estables.

**Teorema** (Estabilidad [S2] [M3][P]).  $f : M \rightarrow M$  es  $C^1$   $\Omega$ -estable si y solo si  $f$  es Axioma A sin ciclos.

Dada la relevancia que tienen estos difeomorfismos en el estudio de la dinámica hiperbólica, es natural preguntarse que tipo de conjuntos pueden o no ser piezas básicas en alguna descomposición espectral.

### 1.1. Subconjuntos invariantes hiperbólicos

Al preguntarse que tipo de conjuntos pueden o no ser piezas básicas en alguna descomposición espectral, es natural empezar preguntándose, ¿qué tipo de conjuntos pueden ser invariantes bajo la acción de un determinado difeomorfismo?

En el caso de que el sistema con el que trabajamos sea un automorfismo de algún toro, o más en general, un Anosov en un toro, Hirsch muestra que en algunas condiciones sobre el automorfismo y sobre el conjunto, los conjuntos conexos invariantes deben ser subgrupos del toro (ver [H]). En este trabajo estudiaremos algunos de estos resultados en la sección (2). En particular veremos lo siguiente:

**Teorema.** Si  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  es un difeomorfismo de Anosov, entonces no hay conjuntos compactos e invariantes de dimensión topológica  $n - 1$ .

En el mismo trabajo Hirsch plantea la siguiente pregunta:

**Pregunta.** Si  $f : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo de Anosov y  $\Lambda \subset M$  es una subvariedad hiperbólica de  $f$ , ¿Es cierto que  $f|_{\Lambda}$  es Anosov?

En [FrR] se da una respuesta negativa a esta pregunta, pero seguía abierta la siguiente pregunta relacionada:

**Pregunta.** Si  $f : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo de Anosov y  $\Lambda \subset M$  es una subvariedad  $C^1$  compacta e hiperbólica de  $f$  ¿Es cierto que  $f|_{\Lambda}$  es Anosov?

En la dirección de esta pregunta, hay varias contribuciones por ejemplo de Franks y Mañé (ver [Fr], [M2]). En [M2] R. Mañé muestra que esto es cierto si  $M = \mathbb{T}^n$ , y muestra que los únicos conjuntos  $C^1$  conexos compactos e invariantes de  $\mathbb{T}^n$  son subgrupos del toro.

También en el trabajo de Hirsch queda abierta la siguiente pregunta

**Pregunta.** Si  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  es un difeomorfismo de Anosov ¿Existen subconjuntos  $\Lambda \in \mathbb{T}^n$  compactos e invariantes y tales que  $\dim(\Lambda) = 1$ ?

Esta pregunta es respondida por Hancock en [Ha], donde construye curvas de modo que la órbita de la imagen de estas curvas no es densa. En particular en el toro  $\mathbb{T}^3$ , este conjunto deberá tener dimensión 1.

Estudiaremos este resultado también en la sección (2).

## 1.2. Conjuntos hiperbólicos y estructura de producto local

Las piezas básicas de una descomposición espectral son conjuntos compactos hiperbólicos con la propiedad extra de que las variedades estables e inestables locales de dos puntos del conjunto que se encuentren suficientemente cerca se intersectan en un punto del conjunto. Nos concentraremos ahora en cuando un conjunto tiene esta propiedad y si no la tiene, cuando puede encontrarse un conjunto que lo contenga y que si tenga esta propiedad.

Empezaremos por definir formalmente la propiedad que nos proponemos estudiar:

**Definición 1.2.1.** Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo y  $\Delta$  un conjunto compacto invariante hiperbólico. Decimos que  $\Delta$  tiene estructura de

producto local, si existe  $\delta > 0$  tal que si  $x, y \in \Delta$ , y  $d(x, y) < \delta$  entonces  $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y) \in \Delta$  donde  $\varepsilon$  es suficientemente chico.

Nos centraremos ahora en si un conjunto tiene esta propiedad. Si no lo hace, estaremos interesados en el estudio de si el conjunto está contenido en un conjunto que tenga esta propiedad, o no.

Los conjuntos que tienen esta propiedad son interesantes en sí mismos, ya que se puede considerar, localmente, en coordenadas de la variedad estable e inestable de un punto. También esta propiedad es equivalente a otras que son muy útiles para entender la dinámica de una vecindad del conjunto, como ser la propiedad de sombreado o ser localmente maximal (que expondremos siguiendo [Sa]). Para ver esto definimos :

**Definición 1.2.2.** Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo y  $\alpha > 0$ . Decimos que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una  $\alpha$ -pseudo órbita (de  $f$ ) si  $d(f(x_n), x_{n+1}) \leq \alpha$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Teorema 1.2.3.** (*Shadowing Lemma*). Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo y  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico. Dado  $\beta > 0$ , existe  $\alpha > 0$  tal que toda  $\alpha$ -pseudo órbita en  $\Lambda$  es  $\beta$  sombreada por una órbita de  $f$  (no necesariamente en  $\Lambda$ ). Es decir si  $x_n \in \Lambda$  es una  $\alpha$ -pseudo órbita, entonces existe  $y \in M$  tal que  $d(f^n(y), x_n) \leq \beta$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Como consecuencia del Shadowing Lemma tenemos:

**Corolario 1.2.4.** Existe  $\beta_0$  tal que para todo  $\beta < \beta_0$  la órbita que  $\beta$  sombrea a la  $\alpha$ -pseudo órbita es única.

**Corolario 1.2.5.** Si además tenemos que  $\Lambda$  tiene estructura de producto local, entonces cada  $\alpha$  pseudo-órbita en  $\Lambda$  es  $\beta$  sombreada por una órbita en  $\Lambda$ .

Con esto podemos demostrar una equivalencia muy importante con tener estructura de producto local, que es ser localmente maximal:

**Definición 1.2.6.** Un conjunto hiperbólico  $\Lambda$  se denomina localmente maximal (o aislado), si existe un entorno  $V$  de  $\Lambda$  en  $M$  tal que

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^n} f^n(V)$$

**Corolario 1.2.7.** *Un conjunto hiperbólico  $\Lambda$  es localmente maximal si y solo si  $\Lambda$  tiene estructura de producto local.*

Muchos de los ejemplos más conocidos de conjuntos compactos hiperbólicos tienen estructura de producto local, por ejemplo el solenoide o una herradura, pero hay ejemplos sencillos de conjuntos que no verifican esta propiedad. Por ejemplo sea  $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$  con  $p$  fijo y  $p \neq q$ , la órbita de  $q$  unión  $p$  es un conjunto hiperbólico compacto pero hay puntos muy cerca de  $p$  en la órbita de  $q$  cuyas variedades estables e inestables locales se intersectan en puntos que no están en la órbita de  $q$  y son distintos de  $p$ .

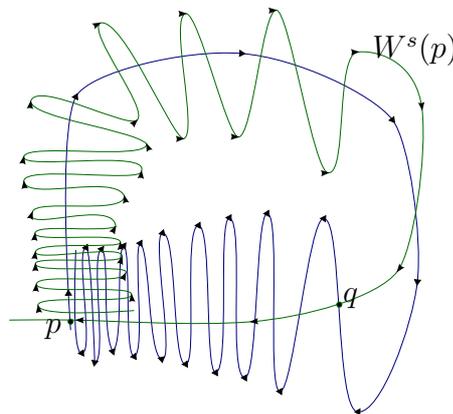


Figura 1:  $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$

Sin embargo ese conjunto  $\overline{\mathcal{O}(q)}$  cumple lo siguiente: Existe  $\Delta$  compacto hiperbólico, invariante y con estructura de producto local, tal que  $\overline{\mathcal{O}(q)} \subset \Delta$ . Mas aún, dado  $U$  un entorno de  $\overline{\mathcal{O}(q)}$  existe  $\Delta$  tal que,  $\Delta$  es hiperbólico, compacto, invariante y con estructura de producto local, y  $\overline{\mathcal{O}(q)} \subset \Delta \subset U$ .

Por comodidad daremos un nombre a estas propiedades, como propone Anosov en [A].

**Definición 1.2.8.** Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico, decimos que  $\Lambda$  es **premaximal** si existe  $\tilde{\Lambda}$  un conjunto compacto hiperbólico e invariante, con estructura de producto local, tal que  $\Lambda \subset \tilde{\Lambda}$ .

También definimos la siguiente noción relacionada con 1

**Definición 1.2.9.** Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico, y  $V$  un entorno abierto de  $\Lambda$ . Decimos que  $\Lambda$  es **localmente premaximal** si existe  $\tilde{\Lambda}$  un conjunto compacto hiperbólico e invariante, con estructura de producto local, tal que

$$\Lambda \subset \tilde{\Lambda} \subset V$$

.

Por mucho tiempo se creía que todos los conjuntos hiperbólicos eran localmente premaximales. En la década de 1960, Alexseyev hizo la siguiente pregunta: (esto se planteó más tarde por Katok y Hasselblatt en [[KH], p. 272])

**Pregunta 1.** *Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico, y  $V$  un entorno abierto de  $\Lambda$  ¿Existe un conjunto hiperbólico localmente máximo  $\tilde{\Lambda}$  tal que  $\Lambda \subset \tilde{\Lambda} \subset V$ ?*

La siguiente pregunta, muy relacionada con la anterior, también estaba sin responder:

**Pregunta 2.** *Dado un conjunto hiperbólico  $\Lambda$  ¿Existe un conjunto  $\tilde{\Lambda}$  compacto, invariante, hiperbólico y con estructura de producto local que contiene a  $\Lambda$ ?*

Ambas preguntas se mantuvieron abiertas hasta 2001, cuando Crovisier [C] construye un ejemplo basado en un ejemplo de Shub en [Sh] que responde negativamente a la pregunta 2, (y por lo tanto la pregunta 1). Este ejemplo es en el toro  $\mathbb{T}^4$ .

Más tarde, Fisher [Fi] construye varios ejemplos de este tipo. Él construyó ejemplos persistentes de cualquier dimensión y un ejemplo

transitivo y persistente en dimensión topológica 4, en el producto de un toro con una superficie.

A pesar de ello todavía quedan preguntas naturales sin respuesta.

- ¿Existe un conjunto abierto  $\mathcal{U}$  (en la topología  $C^1$ ) de difeomorfismos tales que cada  $f \in \mathcal{U}$  posee un conjunto transitivo invariante e hiperbólico que no es premaximal, en cualquier variedad?
- ¿Existe ejemplos robustos y transitivos que no sean premaximales o localmente premaximales en dimensión topológica menor a 4?
- ¿Existe un ejemplo de un conjunto premaximal que no sea localmente premaximal?

En la sección (3) mostraremos lo siguiente:

**Teorema A.** *Sea  $n > 2$  y  $f_A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  un difeomorfismo de Anosov irreducible. Si  $\Lambda$  es un conjunto compacto conexo invariante y no trivial, y  $\Delta$  es tal que es localmente maximal y  $\Lambda \subset \Delta$ , entonces  $\Delta = \mathbb{T}^n$ . En particular si  $n = 3$  hay un subconjunto, compacto propio e inavriante de  $\mathbb{T}^3$ , de modo que el único conjunto localmente maximal que lo contiene es  $\mathbb{T}^3$ .*

**Definición 1.2.10.** Decimos que  $f_A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  un difeomorfismo de Anosov es irreducible si  $\mathbb{T}^n$  no tiene subtoros invariantes.

Esto responde a nuestra ultima pregunta. Observamos que lo mismo será cierto para cualquier  $g$  lo suficientemente cerca de  $f_A$  en virtud de la estabilidad estructural de los difeomorfismos de Anosov (ver [KH] ó [Sa]). Observamos también que la construcción de este tipo de ejemplos no es posible en  $\mathbb{T}^2$  ya que todos los conjuntos invariantes tienen dimensión topoógica 0, y por [A1], en cualquier entorno hay un conjunto localmente máximo que los contiene.

En la sección (4) estudiaremos un ejemplo de Mañe en [M], que modifica un difeomorfismo de Anosov lineal, para obtener un difeomorfismo parcialmente hiperbólico en la misma clase de homotopía, este difeomorfismo es robustamente transitivo y semiconjugado a el Anosov lineal original.

En la sección (5) estudiaremos los ejemplos de Crovisier y Fisher.

También en esta sección, usando el ejemplo de Mañé en [M] que estudiamos en la sección (4), construimos un nuevo ejemplo de un conjunto que no está incluido en ningún otro conjunto con estructura de producto local. Este ejemplo es persistente, transitivo, y es un ejemplo en dimension 3, lo que muestra que hay ejemplos de este tipo en dimensiones menores a 4.

Los ejemplos anteriores, no eran transitivos o eran en variedades  $M$  con  $\dim(M) \geq 4$ . Probaremos lo siguiente:

**Teorema B.** *Existe  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(\mathbb{T}^3)$  tal que para toda  $g \in \mathcal{U}$  hay un subconjunto hiperbólico de  $\mathbb{T}^3$ , que no puede ser incluido en otro localmente maximal.*

La condición de que nuestro ejemplo sea transitivo es muy relevante ya que las piezas de una descomposición espectral lo son. Naturalmente uno se pregunta si en dimensión 2 también hay ejemplos de conjuntos que no son premaximales.

En la sección (6) mostraremos que en dimensión 2, si pedimos algún tipo de recurrencia, todos los conjuntos hiperbólicos, y recurrentes están contenidos en un conjunto localmente premaximal.

**Teorema C.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo,  $M$  una superficie y  $\Lambda \subset M$  hiperbólico tal que  $\Omega(f|_{\Lambda}) = \Lambda$ , entonces  $\Lambda$  es localmente premaximal. Es decir, para todo entorno  $V$  de  $\Lambda$ , existe  $\tilde{\Lambda}$  tal que  $\tilde{\Lambda}$  es compacto hiperbólico invariante y con estructura de producto local y*

$$\Lambda \subset \tilde{\Lambda} \subset V.$$

## 2. Conjuntos invariantes de un Anosov en $\mathbb{T}^n$

Antes de estudiar en que condiciones un subconjunto compacto e invariante del Toro  $\mathbb{T}^n$ , bajo un difeomorfismo de Anosov, puede ser incluido o no en otro que sea maximal invariante, es natural y necesario estudiar como son los posibles conjuntos invariantes. Uno podría preguntarse de que forma y que dimensión puede o no tener un conjunto invariante en el toro.

Para esto seguiremos algunas partes del trabajo de Hirsch ([H]) y Hancock ([Ha]).

Observemos que hay conjuntos invariantes de dimensión 0 y que no puede haber conjuntos invariantes con interior.

Ejemplos de conjuntos invariantes de dimensión 0 pueden ser por ejemplo, los puntos fijos, los puntos periódicos (siendo estos ejemplos de conjuntos con estructura de producto local) y vimos ya también la órbita de un punto homoclínico clausurada.

Con respecto a los conjuntos con interior, si  $f$  es transitiva, esto no puede ser posible a menos que el conjunto sea el mismo  $\mathbb{T}^n$  (ver [ABD]) Veamos ahora un teorema de Hirsch que nos muestra que en particular en nuestro caso tampoco puede haber conjuntos invariantes de dimensión  $n-1$ . Hirsch lo prueba con mas generalidad pero nosotros nos centraremos en el caso de los toros.

**Teorema 2.0.11.** *Si  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  es un difeomorfismo de Anosov, entonces no hay conjuntos compactos e invariantes de dimensión topológica  $n-1$ .*

*Demostración.* Sea  $\Lambda$  un subconjunto compacto e invariante tal que la dimensión topológica de  $\Lambda$  es menor que  $n$ . El conjunto  $\mathcal{P}$  de los puntos periódicos de  $M \setminus \Lambda$  es denso en  $M$ . Definimos

$$W^s(\mathcal{P}) = \bigcup_{x \in \mathcal{P}} W^s(x) \quad \text{y}$$

$$W^u(\mathcal{P}) = \bigcup_{x \in \mathcal{P}} W^u(x).$$

Como  $\Lambda$  es compacto e invariante,  $\Lambda \cap W^u(\mathcal{P}) = \emptyset$  y  $\Lambda \cap W^s(\mathcal{P}) = \emptyset$ .

En un entorno de cualquier punto  $y \in \Lambda$ , que llamamos  $N_u(y)$  podemos definir

$$p_y^s : N_u(y) \rightarrow W_{loc}^u(y)$$

la proyección a lo largo de la variedad estable y análogamente

$$p_y^u : N_s(y) \rightarrow W_{loc}^s(y)$$

la proyección a lo largo de la variedad inestable.

Definimos  $\Lambda_0 = \Lambda \cap N_u(y) \cap N_s(y)$  de modo que el mapa

$$\phi = (p^u, p^s) |_{\Lambda_0} : \Lambda_0 \rightarrow W_{loc}^u(y) \times W_{loc}^s(y)$$

es un encaje.

Como  $\Lambda \cap W^u(\mathcal{P}) = \emptyset$  y  $\Lambda \cap W^s(\mathcal{P}) = \emptyset$ , tenemos que la imagen de  $\phi$  esta en

$$[W_{loc}^u(y) - W^s(\mathcal{P})] \times [W_{loc}^s(y) - W^u(\mathcal{P})].$$

Como  $\mathcal{P}$  es denso en  $M$ , tenemos que  $W^s(\mathcal{P}) \cap W_{loc}^u(y)$  es denso en  $W_{loc}^u(y)$ , y por lo tanto  $\dim(W_{loc}^u(y) - W^s(\mathcal{P})) \leq \dim(E^u(y)) - 1$ . Análogamente  $\dim(W_{loc}^s(y) - W^u(\mathcal{P})) \leq \dim(E^u(y)) - 1$  y por lo tanto  $\dim(\Lambda) \leq n - 2$   $\square$

En particular en el caso del  $\mathbb{T}^3$  esto nos dice que los conjuntos invariantes propios tienen dimensión menor a 2. Conocemos ejemplos de dimensión 0 ¿Podemos construir conjuntos invariantes y compactos de dimensión 1? El trabajo de Hirsch ([H]) nos dice muchas más cosas sobre qué tipo de conjuntos invariantes podemos tener. Por ejemplo en nuestro caso, como la variedad estable o la inestable deben tener dimensión 1, tenemos que los únicos conjuntos compactos, invariantes conexos y localmente conexos son puntos fijos o todo el toro.

**Teorema 2.0.12.** *Si  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  es un difeomorfismo de Anosov con variedad estable o inestable de dimensión 1 y si  $K \subset \mathbb{T}^n$ , es compacto, conexo, localmente conexo, propio e invariante, entonces  $K$  es un punto fijo.*

Esto nos dice que si hay esperanza de encontrar algún conjunto compacto, invariante conexo y no trivial, seguramente va a tener una forma compleja, en particular no puede ser localmente conexo.

## 2.1. Ejemplo de Hancock

Consideremos ahora un automorfismo lineal hiperbólico de  $\mathbb{T}^3$ , al que llamamos  $f$  y llamamos  $x_0$  a un punto fijo de  $f$ . Supongamos también que la variedad inestable de  $f$  tiene dimensión 2. En [Ha] Hancock muestra la existencia de conjuntos invariantes que no son densos en  $\mathbb{T}^n$  construidos como la unión iterados de la imagen de alguna función continua de  $I^m$  en  $\mathbb{T}^n$  para  $m$  apropiado (donde  $I = [0, 1]$ ). A nosotros nos interesa particularmente el caso en que  $m = 1$  y  $n = 3$ , ya que en este caso, el conjunto invariante resultante, no será trivial ni denso y por lo tanto su clausura será compacta y de dimensión 1. Además, podremos construir la función continua de modo que la curva pase por  $x_0$  y de este modo el conjunto resultante será conexo.

**Teorema 2.1.1.** *Sea  $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  un automorfismo lineal hiperbólico con variedad inestable de dimensión 2. Llamemos  $x_0$  a un punto fijo de  $f$ . Existe  $\phi : I \rightarrow \mathbb{T}^3$  continua, con  $x_0 \in \phi(I)$ , y tal que*

$$\mathcal{O}(\phi) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\phi(I))$$

no es denso en  $\mathbb{T}^3$ .

*Demostración.* Para  $\varepsilon > 0$ , comenzamos con  $\theta : I \rightarrow \mathbb{T}^3$  una función  $\mathcal{C}^1$ , tal que

$$\theta(I) \in W_\gamma^u(x_0) \text{ para algún } \gamma > 0 \text{ apropiado,} \quad (1)$$

$$\text{diam}(\theta(I)) > 4\varepsilon, \quad (2)$$

$$x_0 \in \theta(I). \quad (3)$$

Tomemos primero una potencia de  $f$  a la que llamamos  $g$ , de modo que el factor de expansión y contracción de  $g$  sea mayor que 5 y menor que  $1/5$  respectivamente.

Como  $\theta$  es  $\mathcal{C}^1$ , existe  $x_1$  tal que  $x_1 \notin \mathbb{T}^3/\theta(I)$ .

Definimos un entorno  $V$  de  $x_1$  de la siguiente manera:

$$V = \bigcup_{y \in W_\alpha^u(x_1)} W_\alpha^s(y),$$

con  $\alpha$  suficientemente pequeño. Definido así, podemos escribir los puntos de  $V$  en coordenadas de la estable e inestable local de  $x_1$ . Si  $x, y \in V$  y  $x = (x^u, x^s)$ ,  $y = (y^u, y^s)$ , entonces definimos una métrica en  $V$ , que llamamos  $d^v$  de la siguiente manera:  $d^v(x, y) = \max \{ d(x^u, y^u), d(x^s, y^s) \}$ . Con esta métrica, tomamos  $\delta$  tal que  $0 < \delta < \varepsilon/2$  y  $\theta(I) \cap B_{2\delta}(x_1) = \emptyset$ .

La idea ahora es definir una sucesión de funciones  $\mathcal{C}^1$ ,  $\{ \theta_r \}_{r \in \mathbb{N}}$  tales que

$$g^r \theta_r(I) \cap B_\delta(x_1) = \emptyset \quad (4)$$

$$g^r \theta_r(t) \in W_{2\delta}^u(g^r \theta_{r-1}(t)), \quad (5)$$

para todo  $t \in I$  y  $r \geq 0$ .

Construiremos la sucesión por inducción. Supongamos que ya construimos la sucesión hasta  $\theta_{r-1}$ , cumpliendo (4) y (5). Si  $\delta$  es lo suficientemente chico podemos definir la proyección a lo largo de la estable:

$$p_{x_1}^s : B_{2\delta}(x_1) \rightarrow W_{2\delta}^u(x_1),$$

que también es  $\mathcal{C}^1$ .

Definimos el mapa

$$p_{x_1}^s \circ g^r \circ \theta_{r-1} : \theta_{r-1}^{-1} \circ g^{-r}(B_{2\delta}(x_1)) \rightarrow W_{2\delta}^u(x_1),$$

que también es  $\mathcal{C}^1$  y por lo tanto, la imagen tiene medida 0 en  $W_{2\delta}^u(x_1)$ , porque  $\dim(W_{2\delta}^u(x_1)) = 2$ . Por lo tanto podemos encontrar un  $z_r$  en  $W_{\delta}^u(x_1)$  tal que  $W_{2\delta}^s(z_r) \cap g^r \theta_{r-1}(I) = \emptyset$ .

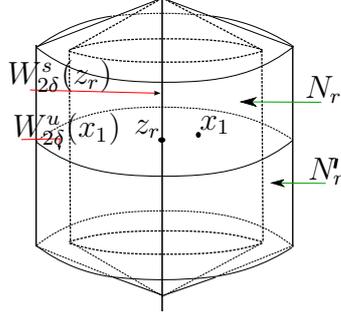


Figura 2:  $N_r$  y  $N'_r$

Definimos  $N_r$  y  $N'_r$  con

$$B_\delta(x_1) \subset N_r \subset N'_r \subset B_{2\delta}(x_1),$$

de la siguiente manera:  $N_r$  es la cápsula convexa de  $B_\delta(x_1) \cup W_{2\delta}^s(z_r)$  y  $N'_r$  es la cápsula convexa de  $B_{2\delta}(x_1) \cup W_{2\delta}^s(z_r)$  (observar que todo esto sucede dentro de  $V$  así que si  $\alpha$  y  $\delta$  son apropiadamente pequeños,  $N_r$  y  $N'_r$  están bien definidos). Definimos en estos entornos una función  $q_r : \mathbb{T}^3 \setminus W_{2\delta}^s(z_r) \rightarrow \mathbb{T}^3$  que en  $N_r$  empuja a todos los puntos radialmente con respecto a  $W_{2\delta}^s(z_r)$  hacia el borde de  $N_r$ , afuera de  $N'_r$  es la identidad y en  $N'_r$  vale lo que deba valer para ser  $\mathcal{C}^1$ .

Si definimos

$$\theta_r = g^{-r} \circ q^r \circ g^r \circ \theta_{r-1},$$

entonces  $\theta_r$  será  $\mathcal{C}^1$  y cumplirá las condiciones (4) y (5). Además, como  $x_0 \notin g^r(B_{2\delta}(x_1))$  para todo  $r \in \mathbb{Z}$ , tenemos que  $x_0 \in \theta_r(I)$ .

La condición (5) nos asegura que

$$d(\theta_r, \theta_{r-1}) \leq \frac{1}{5^r} d(g^r \theta_r, g^r \theta_{r-1}) \leq \frac{2\delta}{5^r}$$

por lo que la sucesión que construimos converge uniformemente a una función que llamamos  $\phi$ . Además

$$\begin{aligned} d(\theta, \phi) &\leq d(\theta, \theta_0) + d(\theta_0, \theta_1) + d(\theta_1, \theta_2) + \dots \\ &\leq \varepsilon + 2\delta(1/5 + 1/5^2 + \dots) < \varepsilon + \delta < 2\varepsilon \end{aligned}$$

Por lo que además por (1) y por construcción, tenemos que  $\phi(I) \in W_{\gamma+2\varepsilon}^u(x_0)$ . La condición (2) nos asegura que  $\phi(I)$  no es trivial ya que  $\text{diam}(\phi(I)) > 2\varepsilon$ .

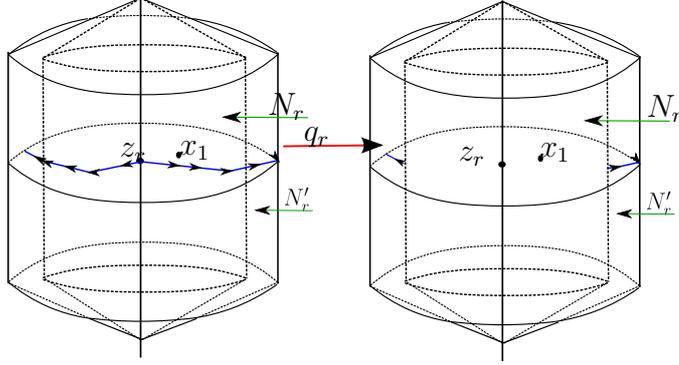


Figura 3: imagen de una curva en  $W_{2\delta}^u(z_r)$ , que pasa por  $z_r$  al aplicarle  $q_r$

Nos queda ver ahora que  $\mathcal{O}(\phi)$  no es densa. Para todo  $t$  en  $I$  tenemos:

$$\begin{aligned} d(\phi(t), x_1) &\geq d(\theta_0(t), x_0) - (d(\theta_0, \theta_1) + d(\theta_1, \theta_2) + \dots) \\ &\geq 2\delta - 2\delta(1/5 + 1/5^2 + \dots) \geq \delta \end{aligned}$$

Además para todo  $r > 0$ ,

$$\begin{aligned} d(g^r \phi(t), x_1) &\geq d(g^r \theta_r(t), x_1) - (d(g^r \theta_r, g^r \theta_{r+1}) + d(g^r \theta_{r+1}, g^r \theta_{r+2}) + \dots) \\ &\geq \delta - 2\delta(1/5 + 1/5^2 + \dots) = \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

La órbita futura de  $\phi$ ,  $\mathcal{O}^+(\phi)$ , no pasa por un abierto de tamaño  $\delta/2$  alrededor de  $x_1$ . Como además  $\phi(I) \in W_{\gamma+2\varepsilon}^u(x_0)$  el tamaño de la órbita pasada también está controlada, y  $\mathcal{O}(\phi) \cap B_{\delta/2}(x_1) = \emptyset$ .  $\square$

### 3. Conjuntos localmente maximales de un Anosov lineal en $\mathbb{T}^n$

En la sección anterior vimos un ejemplo de un conjunto compacto, conexo, invariante y no trivial que no es todo  $\mathbb{T}^3$ . En esta sección estudiaremos un resultado de Mañé de [M2]. En él se prueba, que si  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  es un automorfismo lineal hiperbólico, los únicos conjuntos localmente maximales y conexos son los subgrupos compactos de  $\mathbb{T}^n$  es decir, toros. En particular en el caso de  $n = 3$  son los puntos fijos y  $\mathbb{T}^3$ .

Valiéndonos de las técnicas en la prueba de ese teorema, veremos además que si  $f$  tiene 2 puntos fijos  $x_0$  y  $x_1$ , y si llamamos  $\Lambda$  al conjunto en 2.1.1, ( $x_0 \in \Lambda$ ), entonces el menor conjunto localmente maximal que lo contiene es todo  $\mathbb{T}^3$ .

#### 3.1. Conjuntos maximales invariantes conexos

El objetivo de esta sección es probar el siguiente teorema debido a Mañé [M2]:

**Teorema 3.1.1.** *Sea  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  un difeomorfismo de Anosov lineal. Si  $C \subset \mathbb{T}^n$  es compacto, conexo, invariante y tiene estructura de producto local entonces  $C$  es un toro, ó  $C$  es un punto fijo.*

Este resultado es de alguna manera similar al teorema 2.0.12. No se requiere ninguna condición sobre la dimensión de las variedades estables e inestables pero si la estructura de producto local y de hecho el teorema no es cierto sin esta hipótesis (ver teorema 2.1.1).

Demostraremos el teorema dividiéndolo en una serie de lemas. Tendremos especial cuidado en ver que es lo que se necesita de las hipótesis del conjunto  $C$ , para cada lema, y así podremos ver fácilmente cuales se pueden usar en otro contexto.

Para comenzar, supongamos que  $C$  tiene un punto fijo  $x_0$  que es la identidad del  $\mathbb{T}^n$  como grupo (de no ser así podemos tomar un punto periódico  $x$  de  $C$ , tomar potencia en  $f$ ).

**Definición 3.1.2.** Sea  $C \subset \mathbb{T}^n$  un conjunto compacto, conexo e invariante, tal que  $x_0 \in C$ . Decimos que una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^n$  es  $\delta$ -adaptada a  $C$ , si existen  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  tales que  $\gamma(t_j) \in C$ , y  $d(\gamma(t), \gamma(t_j)) < \delta$  para todo  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$  y  $0 \leq j \leq m$

Definimos  $\Gamma_\delta$  como el subgrupo de  $\pi_1(\mathbb{T}^n, x_0) = \mathbb{Z}^n$  generado por los arcos  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^n$   $\delta$ -adaptados tales que  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ . Observemos que si  $\delta_1 < \delta_2$  entonces  $\Gamma_{\delta_1} \subset \Gamma_{\delta_2}$ .

Sea  $L$  el levantado de  $f$  a  $\mathbb{R}^n$ . Usando la continuidad de  $L$  tenemos que, dado  $\delta$  existe un  $\delta_1$ , tal que  $L(\Gamma_{\delta'}) \subset \Gamma_\delta$  para todo  $0 < \delta' < \delta_1$ .

La idea ahora es definir  $\Gamma_0$  que intuitivamente sería como  $\Gamma_\delta$  con  $\delta$  tendiendo cero. Un primer intento para definirlo sería considerar  $\bigcap_{\delta > 0} \Gamma_\delta$  pero corremos el riesgo de que nos de vacío. Definimos entonces  $N_\delta$  como el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$  generado por  $\Gamma_\delta$ . Definimos

$$N_0 = \bigcap_{\delta > 0} N_\delta \quad \text{y} \quad \Gamma_0 = N_0 \cap \mathbb{Z}^n.$$

Observamos que  $L(N_0) = N_0$ .

**Lema 3.1.3.** Sea  $C \subset \mathbb{T}^n$  compacto, conexo, invariante y tal que  $x_0 \in C$  y sea  $\Gamma_0$  como antes. Sea  $\rho : (\mathbb{R}^n/\Gamma_0, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, x_0)$  el mapa de cubrimiento canónico y sea  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n/\Gamma_0, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n/\Gamma_0, x_0)$  el levantado de  $f$ . Entonces existe una función continua  $\varphi : (C, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n/\Gamma_0, x_0)$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (\mathbb{R}^n/\Gamma_0, x_0) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\mathbb{R}^n/\Gamma_0, x_0) \\
 & \nearrow \varphi & \downarrow p & & \downarrow p \\
 (\mathbf{C}, x_0) & \xrightarrow{i} & (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, x_0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, x_0)
 \end{array}$$

*Demostración.* Como  $N_{\delta_1} \subset N_{\delta_2}$  si  $\delta_1 < \delta_2$ , tenemos que para algún  $\delta_0$  la cadena se estaciona, es decir que existe  $\delta_0$  tal que  $N_\delta = N_0$  para todo  $\delta < \delta_0$ .

También para  $\delta < \delta_0$  tenemos que

$$\Gamma_\delta \subset \mathbb{Z}^n \cap N_\delta = \mathbb{Z}^n \cap N_0 = \Gamma_0,$$

osea  $\Gamma_\delta \subset \Gamma_0$ . Para definir  $\varphi(x)$  tomamos  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^n$ ,  $\delta$ -adaptada a  $C$  con  $\Gamma_\delta \subset \Gamma_0$  y tal que  $\gamma(0) = x_0$  y  $\gamma(1) = x$ .

Sea  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma_0$  tal que  $\tilde{\gamma}(0) = x_0$  y  $\rho \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ . Como  $\Gamma_\delta \subset \Gamma_0$  tenemos que  $\tilde{\gamma}(1)$  no depende de la curva  $\gamma$ ,  $\delta$ -adaptada que elija para unir  $x$  con  $x_0$ .

Definimos entonces  $\varphi(x) = \tilde{\gamma}(1)$

□

**Lema 3.1.4.** *En las condiciones del lema anterior  $\varphi(C) \subset N_0/\Gamma_0$ .*

*Demostración.* Sea  $\pi : \mathbb{R}^n/\Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}^n/N_0$  la proyección canónica y  $\hat{f}$  el automorfismo que cumple que

$$\hat{f} \circ \pi = \pi \circ \tilde{f}.$$

Entonces  $\hat{f}$  es hiperbólico. Sea  $C_0 = \pi(\varphi(C))$ , que es compacto, conexo e invariante ya que

$$\hat{f}(C_0) = \hat{f} \circ \pi(\varphi(C)) = \pi \circ \tilde{f}(\varphi(C)) = \pi(\varphi(C)) = C_0.$$

Pero el único conjunto compacto e invariante de un subespacio vectorial es un punto fijo, por lo tanto  $\varphi(C) \subset N_0/\Gamma_0$ .

□

**Observación 3.1.5.** En las hipótesis de los lemas anteriores,  $(N_0/\Gamma_0)$  es un toro ó  $x_0$ .

*Demostración.* Observamos primero que  $\tilde{f}|_{N_0/\Gamma_0}$  es un automorfismo hiperbólico. Tanto  $N_0$  como  $\Gamma_0$  son invariantes para  $L$ .

Como  $\text{ran}(\Gamma_\delta) = \text{dim}N_\delta$  tenemos que  $N_0/\Gamma_0$  es un toro invariante.

□

Recordamos que  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  es irreducible si no admite subtoros invariantes.

**Observación 3.1.6.** Si  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  es irreducible,  $(N_0/\Gamma_0)$  es  $\mathbb{T}^n$  ó  $x_0$ .

**Lema 3.1.7.** Sea  $\pi^s : N_0 \rightarrow E^s$  la proyección asociada a  $N_0 = E^s \oplus E^u$ , entonces  $\pi^s(\Gamma_\delta)$  es denso en  $E^u$  para todo  $0 < \delta < \delta_0$ .

*Demostración.* Si  $C$  tiene más de un punto, entonces  $C \subset N_0/\Gamma_0 = \mathbb{T}^n$ . Primero observamos que  $N_{\delta_1} \subset N_{\delta_2}$  si  $\delta_1 \leq \delta_2$ , lo que implica que existe  $\delta_0$  tal que,  $N_\delta = N_0$  para todo  $0 < \delta \leq \delta_0$ . Por lo tanto

$$\Gamma_\delta \subset \mathbb{Z}^n \cap N_\delta = \mathbb{Z}^n \cap N_0 = \Gamma_0.$$

Por otra parte :  $\dim(N_0) = \dim(N_\delta) = \text{ran}(\Gamma_\delta)$  entonces existe un isomorfismo  $\phi : \Gamma_\delta \rightarrow \Gamma_0$ .

Si  $a \in \pi^s(\Gamma_\delta)$ , y dado que  $E^u + a$  es totalmente irracional, existe un único  $a' \in \Gamma_\delta$  tal que  $\pi^s(a') = a$ .

Si esto no fuera así, y existen  $a'$  y  $a''$  tales que  $\pi^s(a'') = \pi^s(a') = a$  entonces  $a'' \in E^s + a'$ . Esto no es posible ya que  $a'$  y  $a'' \in \Gamma_\delta \subset \mathbb{Z}^n$  y  $E^s + a'$  es irracional.

Definimos ahora  $\varphi : \pi^s(\Gamma_\delta) \rightarrow \pi^s(\mathbb{Z}^n)$  como  $\varphi(a) = \pi^s(\phi(a'))$  y es un isomorfismo.  $\square$

Definimos  $q : N_0 \rightarrow N_0/\Gamma_0$  la proyección natural y  $N_0 = E^s \oplus E^u$ , por lo que  $q(E^u)$  es denso en  $N_0/\Gamma_0$ . Llamamos  $\widehat{C}$  al levantado de  $\varphi(C)$ . La estrategia ahora es ver que, si además  $\varphi(C)$  tiene estructura de producto local entonces  $E^u \subset \widehat{C}$ . Como además es compacto entonces  $\varphi(C) = N_0/\Gamma_0$ .

**Definición 3.1.8.** Decimos que  $x$  e  $y$  están  $n$ - $\varepsilon$ -relacionados en  $\widehat{C}$  si existe una sucesión de puntos  $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$  tales que:

- $x_i \in \widehat{C}$  para  $i = 1 \dots n$
- $\pi^s(x_{i+1} - x_i) \leq \varepsilon$  para  $1 \leq i \leq n$
- $\pi^u(x_{i+1} - x_i) \leq \varepsilon$  para  $1 \leq i \leq n$

**Lema 3.1.9.** Supongamos ahora que  $C$  es compacto, invariante, distinto de  $x_0 \in C$  y con estructura de producto local. Si  $x, y \in \widehat{C}$  están  $n$ - $\varepsilon$ -relacionados para un  $\varepsilon$  suficientemente chico, entonces  $(x + E^s) \cap (y + E^u) \in \widehat{C}$ .

*Demostración.* Tomamos  $\varepsilon < \delta$  con  $\delta$  de la estructura de producto local. Probaremos este lema por inducción, para  $n = 1$  se cumple por la estructura de producto local. Supongamos ahora que  $x, y \in \widehat{C}$  están  $n$ - $\varepsilon$ -relacionados. Tenemos  $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$  como en la definición. Definimos  $\overline{x_j} = (x_j + E^s) \cap (x_{j+1} + E^u)$  para  $0 \leq j \leq n - 1$ . Observamos que  $\overline{x_0}$  y  $\overline{x_{n-1}}$  están  $(n - 1)$ - $\varepsilon$ -relacionados ya que:

- $x_j \in \widehat{C}$  para  $j = 1 \dots n - 1$  por hipótesis inductiva,
- $\pi^s(\overline{x_{j+1}} - \overline{x_j}) = \pi^s(x_{j+1} - x_j) \leq \varepsilon$  para  $1 \leq j \leq n - 1$ ,
- $\pi^u(\overline{x_{j+1}} - \overline{x_j}) = \pi^u(x_{j+1} - x_j) \leq \varepsilon$  para  $1 \leq j \leq n - 1$ .

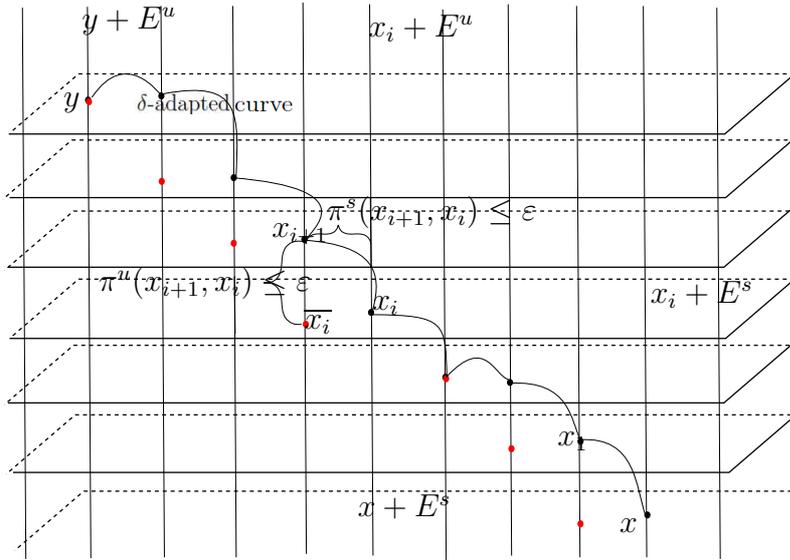


Figura 4:  $x$  e  $y$ ,  $n$ - $\varepsilon$ -relacionados.

Tenemos entonces que  $(\overline{x_0} + E^s) \cap (\overline{x_{n-1}} + E^u) = z \in \widehat{C}$ .

Como además  $(\overline{x_0} + E^s) = (x_0 + E^s)$  y  $(\overline{x_{n-1}} + E^u) = (x_n + E^u)$ , concluimos que  $(x_0 + E^s) \cap (x_n + E^u) = z \in \widehat{C}$ .  $\square$

**Lema 3.1.10.** *En las condiciones anteriores  $E^u \subset \widehat{C}$  por lo tanto entonces  $\varphi(C) = N_0/\Gamma_0$ .*

*Demostración.* Para  $\delta$  lo suficientemente chico, puedo unir  $x_0$  con sigo mismo por una curva  $\delta$ -adaptada de manera que cuando la levanto, uno

$(0, 0, 0)$  con cualquier punto de  $\Gamma_\delta$  (siempre que levante  $x_0$  a  $(0, 0, 0)$ ). Para un  $\delta$  apropiado y  $x \in \Gamma_\delta$ , tenemos que  $(0, 0, 0)$  y  $x$  están  $n$ - $\delta'$ -relacionados para algún  $n$ . Del lema anterior tenemos que  $(x + E^s) \cap (E^u) \in \widehat{C}$ . Por lo tanto  $p^s(\Gamma_\delta) \subset \widehat{C}$ , donde  $p^s : \mathbb{R}^n \rightarrow E^u$  es la proyección sobre el espacio inestable de  $(0, 0, 0)$ . De 3.1.7 concluimos que

$$N_0/\Gamma_0 = \overline{q(p^s(\Gamma_\delta))} \subset \varphi(C) \subset N_0/\Gamma_0.$$

□

**Observación 3.1.11.** Si  $n = 3$  lo anterior implica que el conjunto  $C$  o es el punto fijo o es todo  $\mathbb{T}^3$ .

### 3.2. Un conjunto que no es localmente premaximal, prueba del teorema A

Consideramos ahora el conjunto  $\Lambda$  de la sección 2.1. Como en [Ha], este tipo de conjuntos se pueden construir en cualquier  $n$ -toro con  $n > 2$  y siempre contiene arcos así que siempre tienen dimensión topológica mayor o igual a 1. Recordamos que este conjunto es compacto, conexo, invariante y no trivial. En particular si  $f$  tiene 2 puntos fijos  $x_0$  y  $x_1$ , con  $x_0 \in \Lambda$ , tenemos que para algún entorno  $B(x_1, \epsilon)$   $\Lambda \subset \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B(x_0, \epsilon)^c)$ .

Si  $\mathbb{T}^n$  es irreducible, probaremos que el menor conjunto localmente maximal que contiene a  $\Lambda$  es  $\mathbb{T}^n$ . Es fácil ver que como consecuencia lo mismo ocurre con  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B(x_0, \epsilon)^c)$ .

Probaremos ahora el Teorema A

**Teorema 3.2.1.** *Sea  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  un difeomorfismo de Anosov lineal e irreducible, y  $x_0$  un puntos fijo. Sea  $\Lambda$  un compacto, conexo, invariante, no trivial y tal que  $x_0 \in \Lambda$ . Supongamos que existe  $\Delta$  es compacto, invariante y con estructura de producto local, que contiene a  $\Lambda$ . Entonces  $\Delta = \mathbb{T}^n$ .*

*Demostración.* Sean  $\widehat{\Delta}$  y  $\widehat{\Lambda}$  los levantados de  $\Delta$  y  $\Lambda$  respectivamente.

Si  $\Delta$  es compacto, invariante, no trivial y con estructura de producto local, entonces por el lema 3.1.9, si tenemos dos puntos  $x, y \in \widehat{\Delta}$  que estén  $n$ - $\varepsilon$ -relacionados, tenemos que  $(x + E^s) \cap (y + E^u) \in \widehat{\Delta}$ .

Observar que el conjunto  $\Lambda$  esta en las hipótesis de los lemas 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6 y 3.1.7. Para  $\delta$  lo suficientemente chico, puedo unir  $x_0$  con síg mismo por una curva  $\delta$ -adaptada de manera que cuando la levanto, une  $(0, 0, 0)$  con cualquier punto de  $\Gamma_\delta$  (si levanto  $x_0$  a  $(0, 0, 0)$ ). Para un  $\delta$  apropiado y  $x \in \Gamma_\delta$ , tenemos que  $(0, 0, 0)$  y  $x$  están  $n$ - $\delta'$ -relacionados para algún  $n$ . De 3.1.7 concluimos que

$$N_0/\Gamma_0 = \overline{q(p^s(\Gamma_\delta))} \subset \Delta.$$

Por último de la observación 3.1.6 tenemos que

$$\Delta = N_0/\Gamma_0 = \mathbb{T}^n.$$

□

## 4. El ejemplo de Mañe

Esta sección estara dedicada a estudiar un ejemplo debido a Mañe [M]. Es un ejemplo de un difeomorfismo robustamente transitivo en el  $\mathbb{T}^3$ , en la misma clase de isotopía que un Anosov lineal. Este ejemplo es descrito en varias referencias como ser: [BDV], [BFSV],[PuS], o [PS], pero por completitud, incluiremos una descripción del ejemplo enfatizando particularmente en los aspectos del mismo que nos serán útiles para la próxima sección.

Empecemos con un difeomorfismo de Anosov  $f_A : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  inducido por  $A \in GL(3, \mathbb{Z})$ , un automorfismo hiperbólico que se proyecta al toro. Supongamos que  $A$  tiene todos sus valores propios,  $\lambda^u, \lambda^c$  y  $\lambda^s$ , reales, positivos, simples e irracionales y tales que

$$0 < \lambda^s < \lambda^c < 1 < \lambda^u.$$

Sea  $\mathcal{F}^c$  la foliación correspondiente al valor propio  $\lambda^c$ , y análogamente definimos  $\mathcal{F}^s$  y  $\mathcal{F}^u$ . Toda hoja de cualquiera de estas foliaciones es densa. Supongamos además que  $f_A$  tiene dos puntos fijos,  $x_0$  y  $x_1$ , y que el modulo de  $\lambda^s$  y  $\lambda^u$ , es mayor que 3 (si no fuera así alcanza con reemplazar  $A$  por una potencia).

Definimos un nuevo difeomorfismo  $f$ , modificando  $f_A$  en un pequeño entorno  $C$  contenido en  $B_{\frac{\rho}{2}}(x_1)$  con  $\rho > 0$  suficientemente pequeño y de modo que la foliación  $\mathcal{F}^c$  se mantenga invariante. observemos que  $f_A|_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_1)^c} = f|_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_1)^c}$  y por lo tanto

$$\Gamma = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B_{\frac{\rho}{2}}(x_1)^c) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f_A^n(B_{\frac{\rho}{2}}(x_1)^c). \quad (6)$$

Podeos tomar  $\rho$  lo suficientemente chico, para que  $x_0 \in \Gamma$ . En  $C$  el punto  $x_1$  es modificado como se ve en la figura 5, en la dirección de  $\mathcal{F}^c$ , que como resultado aumenta en 1 el índice inestable de  $x_1$ . Como consecuencia aparecen dos nuevos puntos periódicos,  $x_2$  y  $x_3$ .

El difeomorfismo  $f$  resultante, es pacialmente hiperbólico (ver [BDV]), es decir,

$$T\mathbb{T}^3 = E_f^s \oplus E_f^c \oplus E_f^u,$$

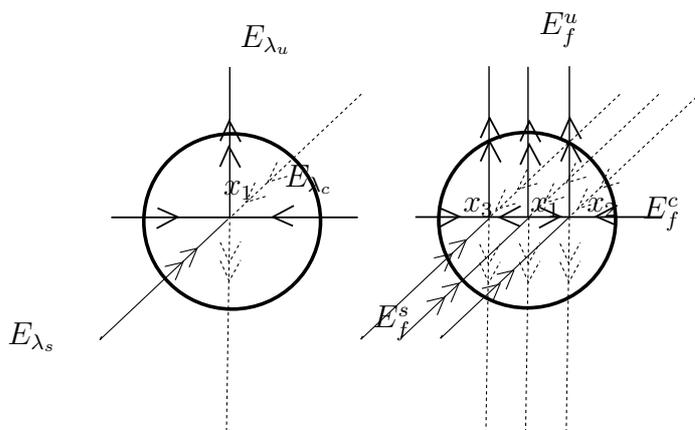


Figura 5: Perturbación en un entorno de  $x_1$

$E_f^s$  y  $E_f^u$  están contenidos en pequeños conos en torno a  $E^s$  y  $E^u$  respectivamente,  $E_f^s$  contrae uniformemente y  $E_f^u$  expande uniformemente. Estos subespacios son únicamente integrables (ver [HPS]) a foliaciones estables  $\mathcal{F}_f^s$  e inestables  $\mathcal{F}_f^u$ .

Como además la foliación central se mantuvo invariante,  $\mathcal{F}_f^c = \mathcal{F}^c$ , tenemos que  $E_f^s \oplus E_f^c$  y  $E_f^u \oplus E_f^c$  también son únicamente integrables, a las foliaciones centro-estables y centro-inestables.

Las hojas de  $\mathcal{F}_f^c$  son densas en  $\mathbb{T}^3$ , y que esto se mantiene en un entorno  $\mathcal{C}^1$  de  $f$  (ver [HPS]).

A nosotros nos interesara particularmente que además la foliación inestable fuerte también tiene esta propiedad de que todas sus hojas son densas y que esto se mantiene por perturbaciones como se muestra en [PS] (pagina 5).

**Teorema 4.0.2.** (2.0.1 in [PS]). *Existe un entorno  $\mathcal{U}$  de  $f$  en la topología  $\mathcal{C}^1$  tal que para toda  $g \in \mathcal{U}$ , los espacios  $E_g^c$ ,  $E_g^s$  y  $E_g^u$ , son únicamente integrables a foliaciones  $\mathcal{F}_g^c$ ,  $\mathcal{F}_g^s$  y  $\mathcal{F}_g^u$ , respectivamente. Además, las foliaciones central e inestable fuerte son minimales, es decir todas las hojas son densas.*

Con respecto a la integrabilidad de los espacios estables e inestables fuertes de  $g \in \mathcal{U}$ , esta se obtiene de la misma manera que para  $f$ , ya que estos espacios siguen estando en pequeños conos alrededor de  $E^s$  y  $E^u$ . La integrabilidad del espacio central en este caso si requiere un poco más de trabajo. En [PS] hay una prueba directa de esto para este caso particular.

#### 4.1. Semiconjugación de $g$ con el difeomorfismo de Anosov lineal $f_A$

Nuestro objetivo ahora es mostrar algunas consecuencias útiles de el hecho de que los difeomorfismos en la misma clase de isotopía de  $f_A$  son semiconjugados a este. Como  $g \in \mathcal{U}$  son isotópicas a  $f_A$ , la idea es tratar de comprender mejor a travez de la semiconjugación el comportamiento de las foliaciones de  $g$ .

El siguiente lema es un corolario del shadowing lema (ver [Sa] ó [BDV]).

**Lema 4.1.1.** *Sea  $A \in GL(3, \mathbb{Z})$  un automorfismo lineal e hiperbólico que baja al toro, y  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un homeomorfismo que cumple que  $\|A(x) - G(x)\| \leq r$  para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ . Entonces existe  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua y sobreyectiva, tal que  $A \circ H = H \circ G$ . Además  $\|H(x) - x\| < C.r$  para todo  $x$ .*

*Demostración.* Este resultado se deduce fácilmente del shadowing lema ya que cualquier órbita de  $G$  es una  $r$  pseudo órbita de  $A$ . Así que definimos  $H(x)$  como el único punto que  $C.r$  sombrea a la pseudo órbita  $\{G^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Veamos que es continua: Supongamos por absurdo que no. Entonces debe existir una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , que converge en  $\mathbb{R}^n$  a  $x$ , pero tal que  $H(x_n)$  acumula en algún  $z \neq y = H(x)$ . Pero entonces tenemos que

$$d(A^n(z), G^n(x)) < K \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{and} \quad d(A^n(y), G^n(x)) < K_1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Esto es una contradicción ya que implicaría que

$$d(A^n(y), A^n(z)) < K_1 + K \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

y contradice la expansividad infinita de  $A$ .

Falta ver ahora la sobreyectividad:

Si  $y \notin H(\mathbb{R}^3)$  como  $\|H(y) - y\| < C.r$  la bola  $B_r(H(y))$  contiene a  $y$  en su interior. Esto implica que  $H^{-1}(B_r(H(y)))$  debe contener un punto cuya imagen es  $y$ .

Observamos que  $H(x) = H(y)$  si y solo si  $\|G^n(x) - G^n(y)\| \leq 2Cr \forall n \in \mathbb{Z}$ . Esto es una consecuencia de la unicidad en el shadowing lema 1.2.4.  $\square$

Como  $G$  es isotópica a  $A$ , tenemos que  $G = A + p$  donde  $p(x + \mathbb{Z}^n) = p(x)$ . Nuestra observacion previa y el hecho de que  $\|H(x) - x\| < C.r$  implica que  $H$  induce una  $h : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  continua y sobre, tal que  $f_A \circ h = h \circ g$  y  $d_{C_0}(h, id) = k d_{C_0}(f_A, g)$ .

**Lema 4.1.2.** *En las condiciones anteriores,  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es uniformemente continua.*

*Demostración.* Supongamos por absurdo que existe  $\varepsilon_0$  tal que para todo  $\delta$ ,  $x$ , existe  $y$  tal que  $d(x, y) < \delta$  pero  $d(H(x), H(y)) \geq \varepsilon_0$ .

Consideramos  $\delta = 1/n$  y dos sucesiones  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que cumplen con lo anterior. A partir de estas sucesiones definimos dos nuevas sucesiones  $\{\widetilde{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  and  $\{\widetilde{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que cada punto de estas este en el mismo dominio fundamental y  $x_n = \widetilde{x}_n + q_n$ . También,  $y_n = \widetilde{y}_n + q_n$  ya que la intención es que  $d(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) < \delta = 1/n$ .

Como todos los puntos de estas nuevas sucesiones están en un compacto, podemos extraer subsucesiones convergentes :  $\{ \widetilde{x}_{kn} \}_{k \in \mathbb{N}}$  que converge a  $z$  y  $\{ \widetilde{y}_{kn} \}_{k \in \mathbb{N}}$  que converge a  $z$ .

Pero como  $H$  es continua, para  $\varepsilon_0/2$  debe existir  $\delta_0$  tal que si  $d(z, y) < \delta_0$ , entonces  $d(H(z), H(y)) < \varepsilon_0/2$ . Esto es absurdo ya que existe  $n_0$  tal que

$$d(\widetilde{x}_{n_0}, \widetilde{y}_{n_0}) < 1/n_0 < \delta_0, d(\widetilde{x}_{n_0}, z) < 1/n_0 \text{ and } d(\widetilde{y}_{n_0}, z) < 1/n_0,$$

pero entonces tendríamos que

$$\varepsilon_0 \leq d(H(x_{n_0}), H(y_{n_0})) = d(H(\widetilde{x}_{n_0}), H(\widetilde{y}_{n_0})) \leq d(\widetilde{x}_{n_0}, z) + d(\widetilde{y}_{n_0}, z) < \varepsilon_0.$$

□

Ahora veamos cómo se comporta  $H$  con respecto a las foliaciones invariantes. La prueba de el siguiente lema puede encontrarse en [PS]

**Lema 4.1.3.** *Para  $H$ ,  $A$  y  $G$  como antes tenemos que:*

1. *Para todo  $x, y \in \mathbb{R}^3$ ,*

$$\# \left\{ \widehat{\mathcal{F}}_G^{cs}(x) \cap \widehat{\mathcal{F}}_G^u(y) = 1 \right\} \text{ y } \# \left\{ \widehat{\mathcal{F}}_G^{cu}(x) \cap \widehat{\mathcal{F}}_G^s(y) \right\} = 1.$$

2.  $H(\widehat{\mathcal{F}}_G^{cu}(x)) = \widehat{\mathcal{F}}_A^{cu}(H(x))$  y  $H(\widehat{\mathcal{F}}_G^{cs}(x)) = \widehat{\mathcal{F}}_A^{cs}(H(x))$ .

3.  $H(\widehat{\mathcal{F}}_G^c(x)) = \widehat{\mathcal{F}}_A^c(H(x))$ .

4.  $H(\widehat{\mathcal{F}}_G^u(x)) = \widehat{\mathcal{F}}_A^u(H(x)) = H(x) + E_A^u$  y  $H|_{\widehat{\mathcal{F}}_G^c(x)}$  es un homeomorfismo para todo  $x$ .

5. Si  $H(x) = H(y)$ , entonces  $x$  e  $y$  pertenecen a la misma hoja central.

Es fácil ver que  $h : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  hereda propiedades similares.

## 4.2. Transitividad del conjunto $\Gamma$

En esta sección probaremos que el conjunto

$$\Gamma = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B_{\frac{\rho}{2}}(x_1)^c) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f_A^n(B_{\frac{\rho}{2}}(x_1)^c).$$

Es transitivo. Para esto será necesario introducir varias definiciones y resultados sobre particiones de Markov y subshifts de tipo finito. Para ver las pruebas de los resultados que mencionamos o leer mas sobre el tema, hay numerosas referencias pero pueden ver por ejemplo [KH] ó [Ca].

**Definición 4.2.1.** Para un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  y un conjunto hiperbólico  $\Lambda$ , decimos que  $R \subset \Lambda$  es un rectángulo, si su diámetro es menor que la constante de expansividad de  $f$  en  $\Lambda$ , y si  $x, y \in R$  entonces, y  $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y) = z$  entonces  $z \in R$ .

Observamos que

$$R \cong W_\varepsilon^s(x, R) \times W_\varepsilon^u(x, R),$$

donde

$$W_\varepsilon^s(x, R) = W_\varepsilon^s(x) \cap R \text{ y } W_\varepsilon^u(x, R) = W_\varepsilon^u(x) \cap R.$$

**Definición 4.2.2.** Una partición de Markov de  $\Lambda$  es una colección finita de rectángulos  $\{R_i\}_{i=1}^m$  que cumplen las siguientes propiedades:

- $\Lambda = \bigcup_{i=1}^m R_i$
- $R_i = \overline{\text{int}(R_i)}$  para todo  $i$
- Si  $i \neq j$  entonces  $\text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset$ .
- Si  $z \in \text{int}(R_i) \cap f^{-1}(\text{int}(R_j))$  entonces:

$$\begin{aligned} f(W^u(x, R_i)) &\supset W^u(f(x), R_j) \text{ y} \\ f(W^s(x, R_i)) &\subset W^s(f(x), R_j) \end{aligned}$$

Para una partición de Markov definimos la matriz de transición de la siguiente manera.

**Definición 4.2.3.** Llamamos matriz de transición  $B$  de la partición de Markov  $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i=1}^m$  a una matriz  $m \times m$  tal que

- $B_{i,j} = 1$  si  $\text{int}(R_i) \cap f^{-1}(\text{int}(R_j))$  y
- $B_{i,j} = 0$  en caso contrario

**Definición 4.2.4.** ■ Si  $B$  es la matriz de transición de la partición  $\mathcal{R}$  llamamos  $\Sigma_B$  al conjunto de sucesiones bi-infinitas dadas por:

$$\Sigma_B = \left\{ b \in \{1, 2, \dots, m\}^{\mathbb{Z}} : B_{b_i, b_{i+1}} = 1 \right\}.$$

- Sea  $\sigma_B : \Sigma_B \rightarrow \Sigma_B$  el shift definido por  $\sigma_B(b)_i = b_{i+1}$  llamamos subshift de tipo finito al par  $(\Sigma_B, \sigma_B)$ .

**Teorema 4.2.5.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo y  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico con una partición de Markov  $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i=1}^m$ , entonces:*

- *Para todo  $a \in \Sigma_B$  existe un único  $x = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f^{-j}(R_{a_j})$ .*
- *La función  $\beta : \Sigma_B \rightarrow \Lambda$  definida por  $\beta(a) = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f^{-j}(R_{a_j})$  es una semiconjugación de  $f$  con el shift  $\sigma_B$  en  $\Sigma_B$ .*

Ahora veamos cómo podemos usar los subshifts de tipo finito para identificar cuándo  $\Lambda$  es transitivo.

**Definición 4.2.6.** Decimos que la matriz de transición  $B$  es irreducible si existe  $k$  tal que todas las entradas de  $B^k$  son positivas.

**Lema 4.2.7.** *Si la matriz de transición  $B$  es irreducible, el subshift de tipo finito  $(\Sigma_B, \sigma_B)$  es transitivo.*

**Lema 4.2.8.** *Si la matriz de transición  $B$  es irreducible, entonces  $\Lambda$  es un conjunto transitivo para  $f$ .*

Lo último que necesitamos es tener control sobre el tamaño de los rectángulos, de modo que si tomamos una partición lo suficientemente chica, las sacar una bola  $B_{\frac{\rho}{2}}(x_1)$  podamos pensar que sacamos una cantidad entera de rectángulos. Para esto tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 4.2.9.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de Anosov, entonces, dado  $\beta > 0$  existe una partición de Markov de  $M$  para  $f$  con diámetro menor que  $\beta$*

**Lema 4.2.10.** *Si  $f : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo de Anosov, la matriz de transición  $B$  es irreducible.*

**Lema 4.2.11.** *Eligiendo un  $A$  y un  $B_{\frac{\rho}{2}}(x_1)$  apropiado,  $\Gamma$  es transitivo ya que  $f_A|_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_1)^c} = f|_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_1)^c}$ .*

*Demostración.* Como  $f_A$  es de Anosov admite una partición de Markov con rectángulos arbitrariamente pequeños (4.2.9). Podemos entonces tomar la bola  $B_{\frac{\rho}{2}}(x_1)$  como un rectángulo (o la unión de varios)  $R_i$  de esta partición. Como además  $f_A$  es Anosov, entonces matriz de transición  $B$  es irreducible, es decir, existe  $n$  tal que las entradas de  $B^n$  son todas positivas, 4.2.10. Si eliminamos el rectángulo  $R_i$  obtenemos una partición de Markov para el complemento de la unión de los iterados de  $R_i$ , es decir, una partición de  $\Gamma$ . Si eliminamos la fila y la columna  $i$  de la matriz  $B$ , y la llamamos  $B_0$ , se sigue cumpliendo que existe un  $n$  tal que las entradas de  $B_0^n$  son todas positivas, por lo tanto  $\Gamma$  es transitivo.  $\square$

## 5. Conjuntos que no son premaximales

Esta sección está dedicada a estudiar las respuestas a la Pregunta 2 que estuvo abierta 40 años, hasta que en el 2001 Crovisier [C] publica el primer ejemplo de un conjunto que no está incluido en ningún conjunto con estructura de producto local.

Este ejemplo es construido a partir de un ejemplo de Shub en el  $\mathbb{T}^4$  de un difeomorfismo, que es robustamente transitivo y no es Anosov.

Más tarde Fisher (en [Fi]) construye varios otros ejemplos, en particular construye ejemplos en variedades de dimensión mayor o igual a 2. Estos ejemplos son persistentes bajo perturbaciones pero contienen puntos errantes. También construye ejemplos en dimensión 4 que son el producto de un toro con una superficie. Estos son transitivos y persistentes por perturbaciones. Estudiaremos el primer tipo de ejemplos ya que el segundo es similar al de Crovisier.

Finalmente en la última parte de este capítulo se construirá un ejemplo robusto y transitivo en  $\mathbb{T}^3$ .

### 5.1. El ejemplo de Crovisier

En esta sección estudiaremos el de Crovisier [C]. Empezaremos por describir brevemente el ejemplo de Shub [Sh] de un difeomorfismo robustamente transitivo que no es Anosov.

Sea  $A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  un difeomorfismo de Anosov del toro. Para  $A$  tenemos una inmersión estable de  $\phi^s(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$  cuya imagen es la variedad estable por  $x$  y análogamente para la inestable. Definimos  $F_0 : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{T}^4$  de la siguiente manera

$$F_0(x, y) = (A^2(x), A(y)).$$

Observamos que la expansión y contracción en la dirección de  $x$  es más fuerte que la contracción y expansión en la dirección de  $y$ . En este contexto tenemos  $\phi^s : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  tal que la imagen de  $\phi^s(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$  es la variedad estable por  $x$  en uno de los toros.

Definimos  $p_1 : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  la proyección sobre el primero de los

toros,  $p_1(x, y) = x$ ,  $p_2 : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , la proyección sobre el segundo, y  $\phi'^s$  y  $\phi'^u$  como:

$$\forall (x, x') \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \text{ y } t \in \mathbb{R} \begin{cases} \phi'_t{}^s(x, x') = (x, \phi^s(t, x')), \\ \phi'_t{}^u(x, x') = (\phi^u(t, x), x'). \end{cases}$$

Ahora queremos cambiar el mapa  $F_0$  para que el resultante ya no sea Anosov.

Sea

$$F(x, y) = (A^2(x), f_x(y))$$

donde  $f_x \in \text{Diff}(\mathbb{T}^2)$  y depende diferenciablemente de  $x$ . Este tipo de mapas son llamados "skew product". El espacio  $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$  se llama base y  $\{x\} \times \mathbb{T}^2$  se llama fibra.

Ahora pondremos algunas condiciones para que  $f_x$  haga que  $F$  tenga las propiedades que buscamos.

Sea  $p$  un punto fijo para  $A$  y  $q$  un punto fijo de  $A^2$ , distinto de  $p$ . Sea  $U$  un entorno muy pequeño en  $\mathbb{T}^2$  que contiene a  $q$  (y no contiene a  $p$ ). Definimos  $f_x$  talque:

- Si  $(x, x') \notin U \times U$  definimos  $f_x(x') = A(x')$ .
- En  $q$  queremos que  $f_q$  sea un difeomorfismo Derivado de Anosov que deje a  $q$  como repulsor.

Definiendolo así no es difícil ver que nuestro nuevo difeomorfismo  $F(x, y)$  es parcialmente hiperbólico. Para evitar confusiones, notaremos  $W^s(x, h)$  a la variedad estable de  $x$  con respecto a la transformación  $h$ , a menos que quede claro quien es  $h$ .

Se puede probar que

$$W^s(p \times \mathbb{T}^2, F) = \bigcup_{z \in \mathbb{T}^2} W^s((p, z)) = W^s(p, A^2) \times \mathbb{T}^2$$

Por lo tanto, se ve que  $W^s(p \times \mathbb{T}^2, F)$  es denso en  $\mathbb{T}^4$  por que  $W^s(p, A^2)$  lo es en  $\mathbb{T}^2$ .

Se puede ver también que  $W^s((p, p), F)$  es denso en  $W^s(p \times \mathbb{T}^2, F)$ . esto es porque  $f_p(x)$  es Anosov  $W^s(p, f_p)$  es denso en  $\mathbb{T}^2$ , y por lo

tanto  $W^s((p, p), F)$  es denso en  $W^s(p \times \mathbb{T}^2, F)$ . De la igualdad anterior  $W^s((p, p), F)$  es denso en  $W^s(p, A^2) \times \mathbb{T}^2$  y como  $W^s(p, A^2)$  es denso en  $\mathbb{T}^2$   $W^s((p, p), F)$  es denso en  $\mathbb{T}^4$ . De manera similar  $W^u((p, p), F)$  es denso en  $\mathbb{T}^4$ .

Con esto podemos probar facilmente que  $F$  es transitivo y también se puede ver que esta situación persiste en un entorno  $\mathcal{C}^1$  de  $F$  ver por ejemplo [HPS].

Sabemos  $F$  no es Anosov ya que tiene puntos fijos de distinto índice.

Sea  $V$  un entorno de  $q$  en  $\mathbb{T}^2$  tal que  $\bar{U} \subset V$  y  $p \notin V$ . Definimos ahora

$$k = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^n(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \setminus V \times V),$$

Observamos que  $F$  y  $F_0$  coinciden en un entorno de  $k$ , por lo que  $k$  es hiperbólico y que debe existir un  $\varepsilon_0$  tal que

$$W_{\varepsilon_0}^u(x, F) = W_{\varepsilon_0}^u(x, F_0) \quad \text{para todo } x \in k.$$

Por lo tanto existe  $\theta_0 > 0$  tal que:

$$\forall x \in k, \quad \{ \phi_t^s(x) : |t| < \theta_0 \} \subset W_{\varepsilon_0}^s(x, F), \quad (7)$$

$$\{ \phi_{t'}^u(x) : |t'| < \theta_0 \} \subset W_{\varepsilon_0}^u(x, F). \quad (8)$$

Observar que los subconjuntos invariantes  $\mathbb{T}^2 \times \{p\}$  y  $\{p\} \times \mathbb{T}^2$  están en  $k$ .

Supongamos por absurdo que existe  $\Lambda$  con estructura de producto local tal que  $k \subset \Lambda$ .

Disminuyendo tal vez  $\theta_0$  y  $\varepsilon_0$  tenemos que existe  $\delta_0 > 0$  tal que si  $x, y \in \Lambda$  y  $d(x, y) < \delta_0$  entonces  $W_{\varepsilon_0}^s(x, F) \cap W_{\varepsilon_0}^u(y, F) \in \Lambda$ .

Supongamos también que para todo  $x$  en  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$  y para todo  $t, t' \in (-\theta_0, \theta_0)$ ,

$$d(\phi_t^s(x), \phi_{t'}^u(x)) < \delta_0. \quad (9)$$

Fijamos  $t' \in (-\theta_0, \theta_0)$  y para este  $t'$  definimos  $I$  como el intervalo más grande que cumple que para todo  $t \in I$ , el punto  $z \in \phi_t^s \circ \phi_{t'}^u(p)$  está en  $\Lambda$ . Observemos que para todo  $t' \in (-\theta_0, \theta_0)$  el intervalo  $I$  es no vacío, ya que contiene a  $t = 0$ . En  $t = 0$   $\phi_t^s \circ \phi_{t'}^u(p) \mathbb{T}^2 \times \{p\} \in k$ .

Como la foliaciones estables en  $k$  son continuas y  $\Lambda$  es cerrado entonces  $I$  es cerrado, queremos mostrar que  $I$  es abierto y con eso tenemos que  $I = \mathbb{R}$ .

Sea  $t_0 \in I$ , tenemos que  $\gamma = \{ \phi_t'^s \circ \phi_{t'}'^u(p) : 0 \leq t \leq t_0 \}$  es una curva estable en  $\Lambda$ . Por la contracción tenemos que existe  $n \geq 0$  tal que

$$F^n(\gamma) \subset \left\{ \phi_t'^s \circ \phi_{t'}'^u(p) \mid |t| < \frac{\varepsilon_0}{2} \right\},$$

Y por lo tanto

$$\gamma \subset F^{-n} \left( \left\{ \phi_t'^s \circ \phi_{t'}'^u(p) \mid |t| < \frac{\varepsilon_0}{2} \right\} \right).$$

Deducimos que existe  $0 < \varepsilon \leq \theta_0$  tal que:

$$\{ \phi_t'^s \circ \phi_{t'}'^u(p) \mid |t - t_0| < \varepsilon \} \subset W_{\varepsilon_0}^s(\phi_{t_0}'^s \circ \phi_{t'}'^u(p)).$$

El punto  $\phi_t'^s(p) = \phi_{t-t_0}'^s \circ \phi_{t_0}'^s(p)$  está en  $\{p\} \times \mathbb{T}^2 \subset k$  y la distancia de  $\phi_t'^s(p)$  a  $\phi_t'^s \circ \phi_{t'}'^u(p)$  es menor que el  $\delta_0$  de la estructura de producto local, y entonces  $\phi_t'^s \circ \phi_{t'}'^u(p) \in \Lambda$ . Esto vale para todo

$$t : |t - t_0| < \varepsilon \text{ y } t' \in (-\theta_0, \theta_0)$$

por lo tanto  $I$  es abierto, es decir:

$$\forall t' \in (-\theta_0, \theta_0) \quad \{ \phi_t'^s \circ \phi_{t'}'^u(p) : t \in \mathbb{R} \} \subset \Lambda.$$

Como las hojas estables son densas en la fibra tenemos que

$$\bigcup_{t' \in (-\theta_0, \theta_0)} \phi_{t'}'^u(p) \times \mathbb{T}^2 \subset \Lambda.$$

Iterando para el futuro obtenemos que

$$\bigcup_{t' \in \mathbb{R}} \phi_{t'}'^u(p) \times \mathbb{T}^2 \subset \Lambda.$$

Con esto tenemos que  $\Lambda = \mathbb{T}^4$  lo cual es imposible porque  $F$  no es Anosov.

## 5.2. El ejemplo de Fisher

El ejemplo anterior si bien muestra que puede haber conjuntos que no son premaximales, está lejos de cerrar por completo el asunto. En el 2004 Fisher extiende un poco más el entendimiento sobre este tema. En [Fi] Fisher construye varios ejemplos. En particular construye ejemplos en un toro por una superficie, similares al anterior, que son robustos y transitivos. También construye ejemplos en cualquier variedad de dimensión mayor o igual a dos, pero estos si bien son robustos, contienen puntos errantes. Nos centraremos especialmente en la construcción del último tipo de ejemplos.

En la sección 6 mostraremos que en dimensión dos, los conjuntos con alguna clase de recurrencia, son premaximales. Esto nos dice que no podemos construir ejemplos como este pero que además sean, por ejemplo transitivos. En dimensión mayor o igual que 4 ya vimos que sí es posible encontrar conjuntos no premaximales transitivos, así que en la sub-sección 5.3 veremos que en dimensión tres también hay conjuntos transitivos que no son localmente premaximales.

Volviendo al ejemplo probaremos lo siguiente:

**Teorema 5.2.1.** *Sea  $M$  una variedad compacta. Existe  $\mathcal{U}$  un abierto de  $\text{Diff}(M)$  tal que para toda  $f \in \mathcal{U}$ , existe un conjunto hiperbólico compacto y  $f$ -invariante,  $\Lambda$ , que no es premaximal.*

La idea es construir un conjunto hiperbólico  $\Lambda$ , que contiene dos puntos  $p$  y  $q$  con una tangencia cuadrática. Construimos  $\Lambda$  de manera que si hubiera un conjunto hiperbólico con estructura de producto local  $\tilde{\Lambda}$  tal que  $\Lambda \subset \tilde{\Lambda}$  Entonces  $\tilde{\Lambda}$  contendría el punto de tangencia, lo que sería una contradicción.

Usaremos la siguiente construcción para demostrar el teorema:

Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de una variedad diferenciable  $M$  compacta, que contiene subvariedad compacta de dos dimensiones que contrae normalmente  $U$  ( $U = M$  si  $\dim(M) = 2$ ) de manera que  $f|_U$  satisface:

- $f|_U$  tiene un atractor  $\Lambda_a$  con cuenca de atracción  $V$ ,

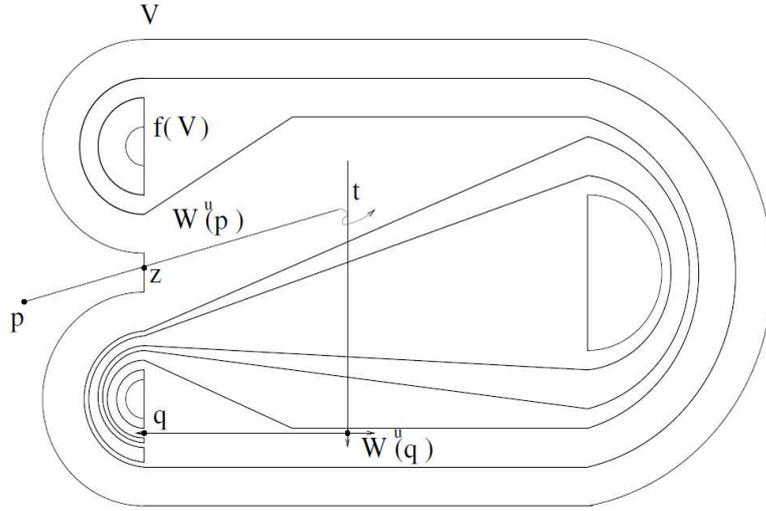


Figura 6: Como es  $f|_U$

- un punto fijo  $q \in \Lambda_a$ ,
- un punto fijo silla  $p \notin \Lambda_a$ ,
- un punto  $z$  tal que  $z \in W^u(p) \cap W^s(q)$ .
- y existen intervalos cerrados  $J \subset W_{loc}^u(q)$  con  $q \in J$ , e  $I \subset W^u(p)$ , tal que  $z \in I$  con las siguientes propiedades:
  - Cada  $x \in I$  que está conectado por una variedad estable a un punto  $y \in J$ .
  - El intervalo cerrado  $I$  contiene un punto  $w$  de tangencia cuadrática entre  $W^u(p)$  y  $W^s(t)$ , para algún  $t \in J$ .

Las siguientes 3 proposiciones implicaran el teorema.

**Proposición 5.2.2.** *Si  $M$  es variedad compacta con  $\dim(M) \geq 2$ , existe un difeomorfismo  $f$  con las propiedades anteriores.*

*Demostración.* Empezamos con un atractor de Plykin  $\Lambda_a$  para un difeomorfismo  $f : S^2 \rightarrow S^2$  (en [[KH], p. 540] se puede ver una construcción).

El conjunto  $W^s(\Lambda_a)$  consiste en  $S^2$  menos cuatro puntos periódicos repulsores siendo uno de ellos fijo. Llamamos al punto fijo repulsor  $p_0$ .

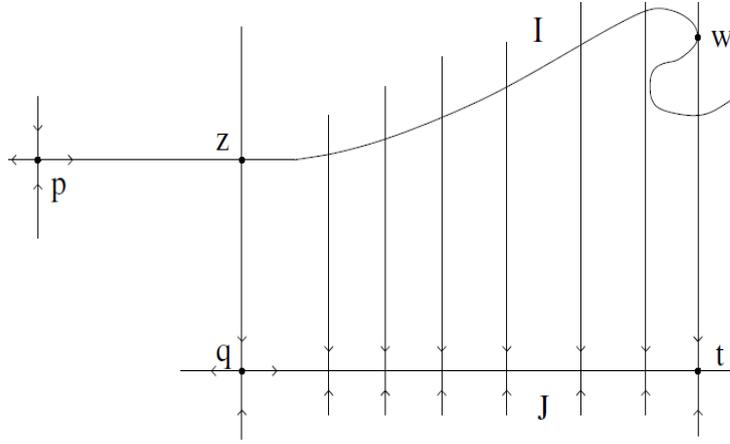


Figura 7:  $I$  contiene un punto  $w$  de tangencia cuadrática entre  $W^u(p)$  y  $W^s(t)$

Fijamos un punto periódico  $q$  contenido en  $\Lambda_a$ . Puesto que  $\Lambda_a$  es un conjunto con estructura de producto local, transitivo, hiperbólico, con puntos periódicos densos, tenemos que:

$$\bigcup \overline{W^s(\mathcal{O}(q))} = W^s(\Lambda_a).$$

Por lo tanto, existen dos puntos  $q_0 \in \mathcal{O}(q)$  y  $z \in W^s(q_0)$  tal que  $p_0 \in \alpha(z, f)$  (es decir, tomo un punto de  $W^s(\Lambda_a)$  intersección la cuenca de repulsión de  $p_0$ , este punto es un  $z \in W^s(q_0)$  para algún  $q_0 \in \mathcal{O}(q)$ ). Ahora pinchamos la esfera en  $p_0$  y reemplazamos  $p_0$  con un círculo cerrado obteniendo un disco cerrado  $D$ . El homeomorfismo inducido por  $f$  en  $D$  no es una difeomorfismo, pero se puede deformar cerca de  $\partial D$  para obtener un difeomorfismo  $\tilde{f}$  en  $D$  de tal manera que:

- $\tilde{f}|_{\partial D} = Id$ ,
- $W^s(\Lambda_a) = D \setminus \partial D$ ,
- existe un punto periódico  $q_0 \in \Lambda_a$ , un punto fijo  $p \in \partial D$ , y un punto  $z \in W^s(q_0)$  tal que  $p \in \alpha(z, \tilde{f})$ .

Por construcción, la derivada de  $\tilde{f}$  en  $p$  en la dirección tangente a  $\partial D$  es 1. Además, la derivada de  $p$  en la dirección tangente a  $W^s(y)$  es mayor o igual a 1. Por lo tanto, podemos perturbar  $\tilde{f}$  en un entorno de  $p$ , de modo que  $p$  sea un punto fijo, hiperbólico, silla con espacio

estable tangente a  $\partial D$  y espacio inestable perpendicular a  $\partial D$ . Fijamos  $n \in \mathbb{N}$  de tal manera que  $q_0$  sea fijo para  $\tilde{f}^n = \hat{f}$ .

Por construcción,  $z \in W^u(p) \cap W^s(q_0)$ . Observamos que una perturbación cerca del punto  $\hat{f}^{-1}(z)$  no cambia  $W^s(q_0)$  cerca de  $z$ . Así, perturbando  $\hat{f}$  posiblemente en un entorno suficientemente pequeño de  $\hat{f}^{-1}(z)$  podemos conseguir que

$$z \in W^u(p) \pitchfork W^s(q_0).$$

La transversalidad de  $W^u(p)$  y  $W^s(q_0)$  en  $z$  ahora implican la existencia de un entorno  $J_0$  de  $q_0$  en  $W_{loc}^u(q_0)$  y un  $I_0$  entorno de  $z$  en  $W^u(p)$  tal que cada  $x \in I_0$  se conecta por una variedad estable con un punto  $y \in J_0$ .

Sea  $z' \in I_0 - z$ . A continuación, deformando  $\hat{f}$  en un entorno suficientemente pequeño de  $\hat{f}^{-1}(z)$ , creamos un punto de tangencia cuadrática,  $w \in I_0$  entre  $W^u(p)$  y  $W^s(t)$ , para algún  $t \in J_0$ .

Sea  $I$  el segmento de  $W^u(p)$  de  $z$  a  $w$ , y sea  $J$  el segmento de  $W^u(q_0)$  desde  $q_0$  a  $t$ . Ahora es simple construir un difeomorfismo  $f$  que satisface las condiciones de la proposición, si  $M$  es una superficie compacta y sin borde.

Tomamos una carta local  $\varphi : D \rightarrow M$  tal que el difeomorfismo  $\varphi \circ \hat{f} \circ \varphi^{-1}$ , satisface las condiciones de la proposición, y lo extendemos a un difeomorfismo  $f$  de  $M$ .

Supongamos que  $\dim(M) = n \geq 3$  y sea  $f_1 : D^2 \rightarrow D^2$  un difeomorfismo que satisface de las condiciones de la proposición. Extendemos  $f_1$  a un difeomorfismo  $f_2$  de un disco abierto  $n$ -dimensional,  $D_n$ , de manera que se cumple lo siguiente:

- en un entorno de la frontera  $\partial D_n$ , el difeomorfismo  $f_2$  es la identidad,
- $D^2$  es una subvariedad que contrae normalmente, invariante bajo  $f_2$ , y
- $f_2|_{D^2} = f_1$ .

Ahora toma una carta local,  $\varphi : D_n \rightarrow M$  tal que  $\varphi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}$ , cumple con las conclusiones de la Proposición 3.1. Por último, vamos a extender  $\varphi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}$  a todo  $M$ .  $\square$

**Proposición 5.2.3.** *Sea  $f$  la función definida en la proposición anterior. Existe un entorno de  $f$ ,  $\mathcal{U}$ , tal que para toda  $g \in \mathcal{U}$ ,  $g$  cumple las mismas propiedades que  $f$ .*

*Demostración.* En primer lugar, si  $\mathcal{U}$  es suficientemente pequeño, la hiperbolicidad normal implica la existencia de una subvariedad  $C^1$ , notada  $U(g)$ , que esté  $C^1$  cerca de  $U$ . Para  $\mathcal{U}$  quizás más pequeño, la estabilidad estructural de los conjuntos hiperbólicos implica que existe una continuación  $\Lambda_a(g)$  del atractor de Plykin, y  $p(G)$  del punto fijo silla. La hiperbolicidad normal implica que existe un difeomorfismo  $h : U(g) \rightarrow U$  con la derivada de  $h$  y  $h^{-1}$  uniformemente acotadas cerca de la identidad. Entonces  $f' = h \circ (g|_{U(g)}) \circ h^{-1}$  es un difeomorfismo de  $U$  que es  $C^1$  cerca de  $f|_U$ .

Por lo tanto, es suficiente mostrar que las propiedades de  $f$  son robustas bajo perturbaciones  $C^1$  de  $f|_U$  en  $Diff^1(U)$ . La estabilidad estructural fuerte de conjuntos hiperbólicos implica que existe un entorno  $\mathcal{V}$  de  $f$  en  $Diff^1(U)$  de tal manera que cualquier  $g \in \mathcal{V}$  contiene una continuación  $\Lambda_a(g)$  del atractor de Plykin, y  $p(G)$  del punto fijo silla  $p$ .

Vamos a demostrar que existen continuaciones de  $z$ ,  $w$ ,  $I$ , y  $J$ . La continuidad de las variedades estable e inestable implica para un  $\mathcal{V}$  quizás más pequeño que los puntos  $p(g)$  y  $q(g)$  tendrán un punto  $z(g) \in W^u(p, g) \cap W^s(q, g)$  que es una continuación de  $z$ . La existencia de la continuación de  $w$  se debe a que  $w$  es un punto de tangencia cuadrática para  $p$  y  $t$  bajo la acción de  $f$ .

Para ver esto elegimos una carta local  $C^2$  tal que en esas coordenadas, si estamos lo suficientemente cerca de  $w$ , las subvariedades  $W^s(t)$  y  $W^u(p)$  se pueden expresar como:

$$W^s(t) = \{ (x_1, x_2) | x_2 = 0 \}, \quad \text{y} \quad W^u(p) = \{ (x_1, x_2) | x_2 = ax_1^2 \},$$

donde  $a$  es una constante no nula. Sea  $g$  una perturbación suficientemente  $C^1$  cerca de  $f|_U$ . Entonces, la continuación

$$W^u(p, g) = \{ (x_1, x_2) | x_2 = \mu(x_1) \}$$

donde  $\mu$  está  $C_1$  cerca de  $ax_1^2$  y

$$W^s(y, g) \cap D(g) = \{ (x_1, x_2) | x_2 = y(x_1) \}$$

donde  $y$  está  $C^1$  cerca de  $x_2 = 0$ . Luego, en un punto cerca del final del intervalo, la variedad estable cruza a  $W^u(p, g)$  transversalmente dos veces en el sistema de coordenadas local. Además, en el otro extremo la variedad estable no interseca a  $W^u(p, g)$  en el sistema de coordenadas local. De esto, se deduce que existe algún  $y \in U$  de tal manera que  $W^s(y, g)$  y  $W^u(p, g)$  son tangentes, y la tangencia está cerca de  $w$ . Dado que las variedades estables e inestables varían de forma continua en  $\mathcal{V}$  se deduce la existencia de intervalos  $I(g) \subset W^u(p, g)$  y  $I(g) \subset W^u(q, g)$  como los definidos para  $f$ .  $\square$

**Proposición 5.2.4.** *Sea  $g$  como en la proposición 5.2.3, y sea*

$$\Lambda(g) = \Lambda_a(g) \cup \{ p(g) \} \cup \mathcal{O}(z(g)).$$

*Entonces  $\Lambda$  es hiperbólico y no está incluido en ningún conjunto con estructura de producto local.*

*Demostración.* Como  $z(g) \in W^u(p, g) \pitchfork W^s(q, g)$ ,  $\Lambda(g)$  es un conjunto hiperbólico. Supongamos, por absurdo que existe un conjunto hiperbólico localmente maximal  $\Lambda(g) \subset \Lambda'$ . Vamos a probar que  $w(g) \in \Lambda'$ , donde  $w(g)$  es como en la Proposición 5.2.2. El punto  $w(g)$  es un punto de tangencia entre  $W^u(p, g)$  y  $W^s(t, g)$ , y por lo tanto esto contradice que  $\Lambda'$  sea hiperbólico.

Sea  $I_0 \subset I(g)$  el subintervalo cerrado cuyos extremos son  $z(g)$  y  $w(g)$ . Veamos que  $I_0 \subset \Lambda'$ .

Existe  $n > 0$  tal que para todo  $x \in I(g)$ , hay un punto  $y \in J(g) \cap W^s(x)$  de modo que  $d(f^n(x), f^n(y)) < \delta/2$ , con  $\delta$  de la estructura de

producto local. El conjunto  $f^n(I_0) \cap \Lambda'$  es cerrado ya que  $I_0$  y  $\Lambda'$  son cerradas.

Observemos que la variedad inestable  $W^u(y)$  restringida a  $U(g)$  está contenida en  $\Lambda_a(g) \subset \Lambda'$ , ya que  $\Lambda_a(g)$  restringida a  $U(g)$  es un atractor. Esto y la estructura de producto local implican que  $f^n(I_0) \cap \Lambda'$  es no vacío. También podemos ver que debe ser abierta dado que si tomo un entorno  $B_x^u$  de  $x$  en  $W^u(x)$ , tenemos que para todo  $t \in B_x^u \subset I_0$ ,  $W^s(t, g) \cap J(g) = s$  está cerca de  $y$ . Por lo tanto  $d(f^n(t), f^n(s)) < \delta/2$  y como  $s \in \Lambda'$ , la estructura de producto local nos da que  $t \in \Lambda'$ .

Como  $I_0$  es conexo también lo es  $f^n(I_0)$ , por lo tanto  $f^n(I_0) \subset \Lambda'$  y la invariancia de  $\Lambda'$  nos da que  $I_0 \subset \Lambda'$ .  $\square$

### 5.3. Ejemplo robusto y transitivo en dimensión 3, prueba del teorema B

El objetivo de esta sub sección es mostrar que si  $g : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  con  $g \in \mathcal{U}(f)$ , y  $f$  el derivado de Anosov de Mañe (ver 4), hay un conjunto en el  $\mathbb{T}^3$  que no es premaximal (es decir que no existe otro conjunto que lo contenga y que tenga estructura de producto local). Para esto nos apoyaremos en los resultados de Mañe ([M2]) que estudiamos en la sección 4.

Observamos que el conjunto  $\Lambda$  de el teorema 2.1.1 no intersecta una bola entorno a  $x_1$ , es decir que

$$\Lambda \subset \Gamma = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B_{\frac{\rho}{2}}(x_1)^c).$$

Recordamos que puedesuponer se que  $\Gamma$  es transitivo 4.2.11.

Por lo tanto  $\Lambda$  es un conjunto compacto y es  $f$ -invariante, ya que es invariante por  $f_A$  y por la ecuación (6). Para todo  $g$  suficientemente cerca de  $f$ , hay un conjunto  $g$ -invariante  $\Lambda_g$  hiperbólico conexo y no trivial (ver porejemplo [Sa] corolario 2.1.1). Por simplicidad también llamaremos a ese conjunto  $\Lambda$ .

El objetivo es probar que si existe un conjunto  $\Delta$  que contiene a  $\Lambda$  y tiene estructura de producto local, entonces  $\Delta \cap \mathcal{F}_g^u(x_0)$  es denso en

algún pequeño intervalo de  $\mathcal{F}_g^u(x_0)$ , y por lo tanto  $\Delta$  es denso en  $\mathbb{T}^3$  en virtud de la minimalidad de  $\mathcal{F}_g^u$  (4.0.2). Esto es absurdo ya que  $g$  no es Anosov.

Como en este contexto, las hojas de las foliaciones invariantes no son paralelas, será conveniente re definir el concepto que dos puntos estén  $n$ - $\varepsilon$ -relacionados.

Sea  $p_x^{cs} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}_G^u(x)$  y  $p_x^u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}_G^{cs}(x)$  las proyecciones a lo largo de la foliación centro estable inestable respectivamente.

Llamamos  $\widehat{\Delta}$  al levantado de  $\Delta$ .

**Definición 5.3.1.** Decimos que  $x$  e  $y$  están  $n$ - $\varepsilon$ -relacionado en  $\widehat{\Delta}$  si existe una sucesión de puntos  $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$  tal que:

- $x_i \in \widehat{\Delta}$  for  $i = 1, \dots, n$
- $d(p_{x_i}^u(x_{i+1}), x_{i+1}) \leq \varepsilon$  for  $1 \leq i \leq n$
- $d(p_{x_{i+1}}^{cs}(x_i), x_i) \leq \varepsilon$  con  $1 \leq i \leq n$

El principal problema con el que nos enfrentamos es que , el lema (3.1.9) depende fuertemente de la linealidad de  $A$ . Arreglaremos este problema encontrando un tubo  $V$  en torno a  $x_0$  de modo que la distancia entre las hojas centro-estables de  $x$  y de  $y$  y la distancia entre las hojas inestables de  $x$  y de  $y$  en  $V$  sea chica si  $x$  e  $y$  están en  $V$  y están lo suficientemente cerca. El intervalo de la hoja inestable del 0 en el que  $\widehat{\Delta} \cap \widehat{\mathcal{F}}_G^u((0, 0, 0))$  será denso, estará contenido en este  $V$ .

Otra diferencia importante es que 3.1.7 también hace fuerte uso de la linealidad, por lo tanto no trataremos de probar que la proyección de  $\Gamma_\delta$  esta en  $\widehat{\Delta}$  sino que nos alcanzará con encontrar un  $q \in \Gamma_\delta$  tal que  $q \notin V$  y proyectaremos los puntos de la  $\delta$ -cadena que une  $(0, 0, 0)$  con  $q$ .

Si  $x$  e  $y$  están en la misma hoja inestable, definimos  $l^u(x, y)$  como el largo de la curva que une  $x$  con  $y$ .

Fijamos un  $\varepsilon > 0$ , queremos probar que existe  $\delta$  tal que si  $x$  e  $y$ , cumplen que  $d(x, y) < \delta$  y  $z \in \widehat{\mathcal{F}}^{cs}(x)$ , entonces  $l^u(z, p_y^u(z)) < \varepsilon$ .

**Lema 5.3.2.** Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta$  tal que para todo  $x$  e  $y \in \widehat{\mathcal{F}}_G^u(x)$  tales que  $l^u(x, y) \leq \delta$ , entonces  $l^u(z, p_y^u(z)) < \varepsilon$ , para todo  $z$  en  $\widehat{\mathcal{F}}_G^{cs}(x)$ .

*Demostración.* Supongamos por absurdo que existe  $\varepsilon_0$  tal que existen sucesiones  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \widehat{\mathcal{F}}_G^u(x)$  y  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $l^u(x_n, y_n) \leq 1/n$  y  $l^u(z_n, p_y^u(z_n)) \geq \varepsilon_0$ .

Por el lema (4.1.3) tenemos que  $H|_{\widehat{\mathcal{F}}_G^u(x)}$  es un homeomorfismo, por simplicidad notamos  $H|_{\widehat{\mathcal{F}}_G^u(x)} = H_{ux}$ .

Como  $H_u$  es un homeomorfismo, dado  $\delta'$  podemos encontrar un  $\delta_0$  independiente de  $x$  tal que si  $x$  e  $y$  son tales que  $y \in \widehat{\mathcal{F}}_G^u(x)$  y  $d(H_{ux}(x), H_{ux}(y)) \leq \delta_0$ , entonces  $l^u(x, y) \leq \delta'$ .

Consideramos  $n_0$  tal que  $1/n_0 < \delta'$ , y  $z' = H(z_{n_0})$ . Observamos que

$$z' \in \widehat{\mathcal{F}}_A^{cs}(H(x_{n_0})).$$

Para un  $n$  tal vez mayor, tenemos que  $l^u(x_n, y_n) \leq 1/n$ , y  $d(H(x_n), H(y_n)) \leq$

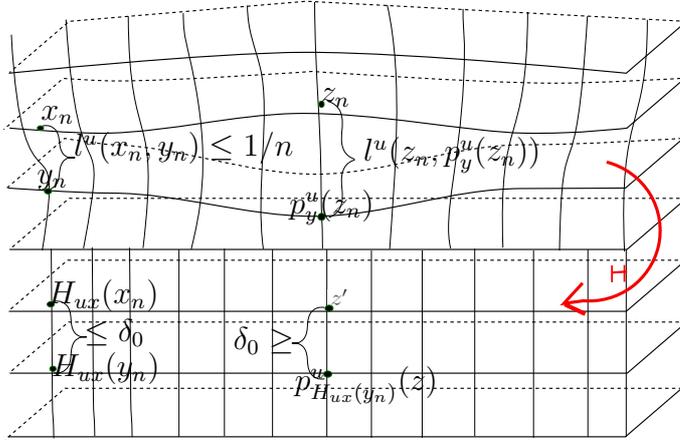


Figura 8: El efecto de  $H$  en las hojas inestables y centro-estables

$\delta_0$ , de la continuidad uniforme de  $H$ . Pero para  $A$ ,  $\widehat{\mathcal{F}}_A^{cs}$  son planos paralelos y por lo tanto el largo de los segmentos inestables entre  $z'$  y  $p_{H(y_n)}^u(z')$  es menos de  $\delta_0$  (ver figura 8) y por lo tanto

$$\varepsilon_0 > \delta' > l^u(z_n, H_{ux}^{-1}(p_{H(y_n)}^u(z'))) = l^u(z_n, p_y^u(z_n)) \geq \varepsilon_0.$$

□

La continuidad de la foliación inestable nos da que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\beta > 0$  y un  $\eta > 0$  tales que si  $x, y$  cumplen  $d(x, y) < \eta$ , entonces para todo  $z \in \widehat{\mathcal{F}}_G^u(x)$  tal que  $l^u(x, z) < \beta$ , tenemos que  $d(z, p_y^{cs}(z)) < \varepsilon$  (ver figura 9). Podemos tomar  $\beta$  uniforme dado que la foliación baja al toro.

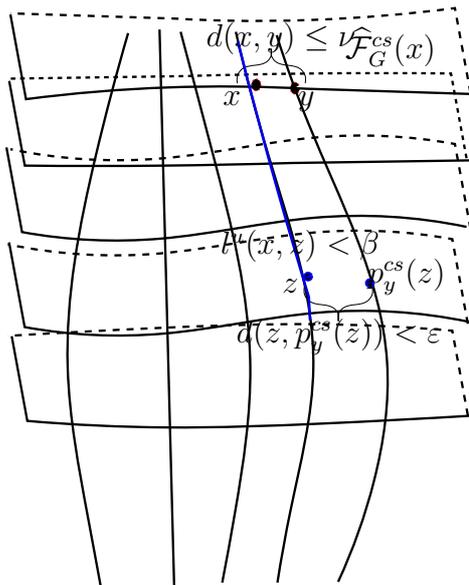


Figura 9: Separación entre las hojas inestables

Ahora juntando la proposición anterior con lo que acabamos de observar, tenemos lo siguiente: Consideramos un entorno compacto de  $(0, 0, 0)$  en  $\widehat{\mathcal{F}}^u((0, 0, 0))$  al que llamamos  $V^u$ .

Sea  $\varepsilon = \delta_p$  de la estructura de producto local de  $\widetilde{\Delta}$  y para este  $\delta_p$ , encontramos un  $\eta > 0$  y un  $\beta$  como en lo que acabamos de observar. Esto nos asegura que si  $d(x, y) < \eta$  las variedades inestables locales de tamaño  $\beta$  no se separan más que  $\delta_p$ .

Para controlar también la separación de las hojas centro estables elegimos el  $\varepsilon_0$  en el lema (5.3.2) de modo que sea más chico que  $\delta_p$  y  $\beta$ , y este  $\varepsilon_0$  determina un  $\delta_0$ . De este modo si  $d(x, y) < \delta_0$  entonces, hojas centro estables no se separan más que  $\varepsilon_0 < \beta$ . Por lo tanto si tomo dos puntos  $z$  y  $z'$  en la hoja centro estable de  $x$  tales que  $d(z, z') < \eta$ , la proyección de estos sobre la hoja centro estable de  $y$  distarán menos

de  $\delta_p$  (ver figura 10).

Consideramos  $\text{diam}(V^u) < \delta_0$  En estas condiciones definimos:

$$V = \bigcup_{x \in V^u} \widehat{\mathcal{F}}_G^{cs}(x).$$

Hemos probado lo siguiente para  $V$ .

**Lema 5.3.3.** *Existe un entorno  $(0, 0, 0)$ ,  $V^u$ , en  $\widehat{\mathcal{F}}^u((0, 0, 0))$ , tal que el conjunto  $V$  definido como*

$$V = \bigcup_{x \in U^u} \widehat{\mathcal{F}}_G^{cs}(x),$$

satisface:

- Si  $x \in V$  y  $y \in \widehat{\mathcal{F}}_G^u(x) \cap V$ , entonces  $d(x, y) < \delta_p$  y  $d(x, y) < \beta$ .
- Para todo  $\varepsilon$  existe  $\delta$  tal que si  $x \in V$  y  $d(x, y) < \delta$  entonces  $d(z, p_y^u(z)) < \varepsilon$ , para todo  $z$  en  $\widehat{\mathcal{F}}_G^{cs}(x)$ .
- Para todo  $\varepsilon$  existe  $\delta$  tal que si  $x \in V$  y  $d(x, y) < \delta$  entonces  $d(z, p_y^{cs}(z)) < \varepsilon$ , para todo  $z$  en  $\widehat{\mathcal{F}}_G^u(x) \cap V$ .

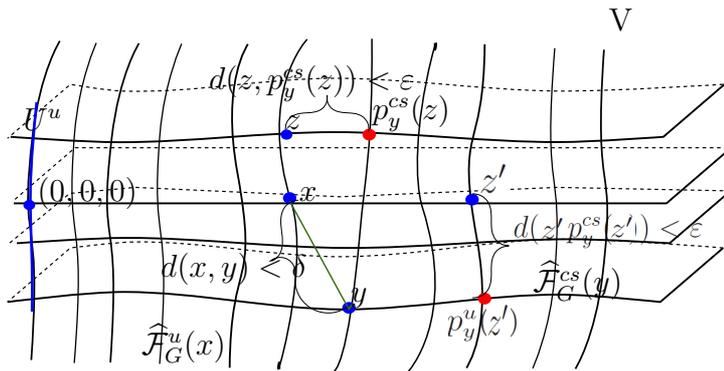


Figura 10: El tubo  $V$

Con el siguiente teorema quedará probado el Teorema B

**Teorema 5.3.4.** *Sea  $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  como en el ejemplo de Mañé y sea  $g \in \mathcal{U}(f)$ , un difeomorfismo lo suficientemente cerca de  $f$ . Sea  $\Lambda \subset \Gamma = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1)^c)$  un conjunto compacto conexo hiperbólico invariante y no trivial, tal que  $x_0 \in \Lambda$ . Entonces  $\Lambda$  no está incluido en ningún conjunto con estructura de producto local.*

*Demostración.* Al igual que antes empezamos por suponer que existe un conjunto  $\Delta$  con estructura de producto local que contiene a  $\Lambda$ . Sea  $\widehat{\Delta}$  el levantado de  $\Delta$  (recordar que levantamos  $x_0$  al  $(0,0,0)$ ). Recordemos que la estrategia para ver que tal  $\Delta$  no puede existir, es encontrar un intervalo de la foliación inestable en el que  $\widehat{\Delta} \cap \widehat{\mathcal{F}}_G^u((0,0,0))$  sea denso.

**Afirmación.** *Supongamos que  $x_0, \dots, x_n \in \widehat{\Delta} \cap V$  están  $n$ - $\varepsilon$ -relacionados, y :*

- *Si  $z$  en  $\widehat{\mathcal{F}}_G^{cs}(x_{i+1})$ ,  $d(z, p_{x_i}^u(z)) < \varepsilon$ , para todo  $0 \leq i \leq n-1$ .*
- *Si  $z$  in  $\widehat{\mathcal{F}}_G^u(x_i) \cap V$ ,  $d(z, p_{x_{i+1}}^{cs}(z)) < \varepsilon$ , para todo  $0 \leq i \leq n-1$ .*

*Entonces  $p_{x_0}^{cs}(x_i) \in \widehat{\Delta}$  para todo  $0 \leq i \leq n-1$ .*

*Demostración.* Probaremos esto por inducción. El caso base está dado por el hecho de que elegimos  $0 < \varepsilon$  más chico que  $\delta_p/2$ , con  $\delta_p$  de la estructura de producto de  $\widehat{\Delta}$ . Supongamos ahora que  $x, y \in \widehat{\Delta} \cap V$  están  $n$ - $\varepsilon$ -relacionados. Tenemos que  $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$  como en la definición. Definimos  $\overline{x}_j = \widehat{\mathcal{F}}_G^u(x_j) \cap \widehat{\mathcal{F}}_G^{cs}(x_{j+1})$  para  $0 \leq j \leq n-1$ . Observamos que  $\overline{x}_0$  y  $\overline{x}_{n-1}$  están  $(n-1)$ - $\varepsilon$ -relacionados ya que:

- $\overline{x}_j \in \widehat{\Delta}$  para  $j = 1, \dots, n-1$  por hipótesis de inducción,
- Como  $\overline{x}_j$  están en  $\widehat{\mathcal{F}}_G^{cs}(x_{j+1})$ , por hipótesis tenemos que  $d(\overline{x}_j, p_{x_j}^u(\overline{x}_j)) < \varepsilon$ . Por otra parte  $\overline{x}_{j-1} \in \widehat{\mathcal{F}}_G^{cs}(x_j)$  entonces,  $d(\overline{x}_j, p_{x_{j-1}}^u(\overline{x}_j)) < \varepsilon$ .
- Como  $\overline{x}_j = \widehat{\mathcal{F}}_G^u(x_j) \cap \widehat{\mathcal{F}}_G^{cs}(x_{j+1})$ , tenemos que  $\overline{x}_j \in \widehat{\mathcal{F}}_G^u(x_j) \cap V$ . por hipótesis tenemos que  $d(\overline{x}_j, p_{x_{j+1}}^{cs}(\overline{x}_j)) < \varepsilon$  Por otra parte,  $\overline{x}_{j+1} = \widehat{\mathcal{F}}_G^u(x_{j+1})$ , entonces  $d(\overline{x}_j, p_{x_{j+1}}^{cs}(\overline{x}_j)) < \varepsilon$ .

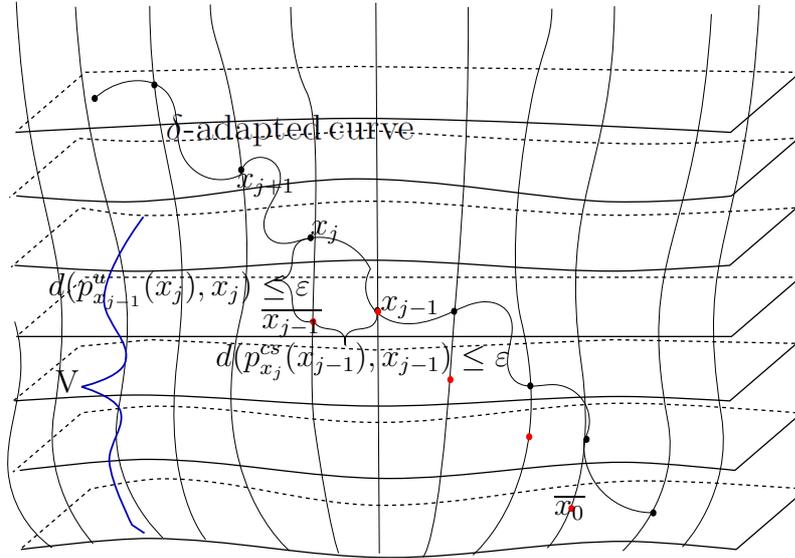


Figura 11:  $n$ - $\varepsilon$ -relación entre  $(0, 0, 0)$  y  $x_j$ .

Con esto concluimos que  $p_{x_0}^{cs}(x_i) \in \widehat{\Delta}$ . Lo que concluye la prueba de nuestra afirmación.  $\square$

Volviendo a la prueba del teorema, fijado  $\varepsilon < \delta_p/2$  tomamos  $\delta < \varepsilon$  de la definición de  $V$  (5.3.3).

Tomemos ahora un punto  $q$  de  $\Gamma_{\delta/2}$  que no esté en  $V$ . Tenemos que  $(0, 0, 0)$  está  $n$ - $\delta/2$ -relacionado con  $q$ . Llamemos  $x_{j+1}$  Al primer elemento de la sucesión que relaciona  $(0, 0, 0)$  con  $q$ , que no está en  $V$ . De igual modo que en la afirmación, podemos construir una nueva sucesión de puntos tales que  $(0, 0, 0)$  y  $x_j$  están  $j$ - $\varepsilon$ -relacionados. (ver figura 11).

Definimos  $\overline{x}_i = \mathcal{F}^u(x_i) \cap \mathcal{F}^{cs}(x_{i+1})$  para  $0 \leq i \leq j-1$ . Observamos que  $\overline{x}_0$  y  $\overline{x}_{j-1}$  están  $(j-1)$ - $\varepsilon$ -relacionados porque:

- $\overline{x}_i \in \widehat{\Delta}$  para  $i = 1, \dots, j-1$  dado que  $\delta/2 < \varepsilon < \delta_p/2$  de la estructura de producto local.
- $\overline{x}_i \in \mathcal{F}^{cs}(x_{i+1})$ , y  $x_i, x_{i+1} \in V$  con  $d(x_i, x_{i+1}) < \delta$ . Entonces de el lema 5.3.3 tenemos que  $d(\overline{x}_i, p_{x_i}^u(\overline{x}_i)) < \varepsilon$ . De igual modo que en la afirmación esto implica que :  $d(\overline{x}_i, p_{x_{i-1}}^u(\overline{x}_i)) < \varepsilon$  for  $i = 1, \dots, j-1$ .

- Como  $\overline{x}_i = \widehat{\mathcal{F}}_G^u(x_i) \cap \widehat{\mathcal{F}}_G^{cs}(x_{j+1})$ , tenemos que,  $\overline{x}_i \in \widehat{\mathcal{F}}_G^u(x_i) \cap V$ . Como  $d(x_i, x_{i+1}) < \delta$ , de el lema 5.3.3 tenemos que  $d(\overline{x}_i, p_{x_{i+1}}^{cs}(\overline{x}_j)) < \varepsilon$ . Por otra parte,  $\overline{x}_{j+1} = \widehat{\mathcal{F}}_G^u(x_{i+1})$ , entonces  $d(\overline{x}_i, p_{x_{i+1}}^{cs}(\overline{x}_j)) < \varepsilon$  para  $i = 1, \dots, j-1$ .

Además,  $\widehat{\mathcal{F}}^u(\overline{x}_i) \cap V = \widehat{\mathcal{F}}^u(x_i) \cap V$  para  $1 \leq i \leq j-1$  y  $\widehat{\mathcal{F}}_G^{cs}(\overline{x}_i) = \widehat{\mathcal{F}}_G^{cs}(x_{i+1})$ . Observamos que como  $x_i \in V$  para  $i = 1, \dots, j$  y  $d(x_i, x_{i+1}) \leq \delta$ , entonces por 5.3.3 tenemos que :

- Para todo  $z$  in  $\widehat{\mathcal{F}}_G^{cs}(\overline{x}_i)$ ,  $d(z, p_{x_i}^u(z)) = d(z, p_{x_{i-1}}^u(z)) < \varepsilon$ , para todo  $0 \leq i \leq j-1$ .
- Para todo  $z$  in  $\widehat{\mathcal{F}}^u(\overline{x}_i) \cap V$ ,  $d(z, p_{x_{i+1}}^{cs}(z)) = d(z, p_{x_{i+1}}^{cs}(z)) < \varepsilon$ , para todo  $0 \leq i \leq j-1$ .

Esto implica que la nueva sucesión que definimos esta en las hipótesis de nuestra afirmación, y por lo tanto  $p_{x_0}^{cs}(\overline{x}_i) \in \widehat{\Delta}$  para  $i = 0, \dots, j-1$ . Pero entonces  $p_{x_0}^{cs}(x_i) \in \widehat{\Delta}$  para  $i = 0, \dots, j$ .

Sean  $V^{u+}$  y  $V^{u-}$ , Los intervalos positivos y negativos de  $V^u$ . Supondremos por absurdo que  $\widehat{\Delta} \cap V^u$  no es denso en ninguno de estos subintervalos. En este caso, existirían gaps de tamaño  $\gamma$  en cada subintervalo, los cuales no contienen ningún punto de  $\widehat{\Delta} \cap V^u$ . Eligiendo  $\varepsilon \leq \gamma/2$ ,  $\delta$  para este  $\varepsilon$  y  $q \in \Gamma_\delta$ , tenemos que  $(0, 0, 0)$  está  $n\text{-}\delta/2$ -relacionado con  $q$ .

Entonces existe un  $j$  como antes y  $p_e^{cs}(x_i) \in \widehat{\Delta}$  para  $i = 0, \dots, j$ . Como  $x_{j+1}$  está fuera de  $V$ , uno de estos subintervalos,  $V^{u+}$  ó  $V^{u-}$  tiene al menos un punto de  $\widehat{\Delta}$  en cada gap de tamaño  $2\varepsilon$ , llegando así a una contradicción.  $\square$

## 6. En dimensión 2 los conjuntos transitivos son localmente premaximales, prueba del teorema C

En esta sección probaremos el Teorema C, que nos permitirá completar la pregunta sobre si es posible construir conjuntos transitivos que no sean premaximales en dimensiones menores que 4. Para esto nos apoyaremos en un resultado de Anosov de [A1] y uno de Fisher en [Fi], que enunciaremos a continuación.

**Teorema 6.0.5.** (*Anosov*) Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de una variedad compacta y sea  $F \subset M$  un conjunto compacto invariante e hiperbólico de dimensión topológica cero. Para todo  $U$  entorno de  $F$  existe  $\Lambda$  un conjunto compacto invariante e hiperbólico con estructura de producto local, tal que  $F \subset \Lambda \subset U$ .

**Teorema 6.0.6.** (*Fisher*) Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de una superficie  $M$  compacta. Si  $\Lambda$  tiene estructura de producto local y tiene interior entonces  $\Lambda = M = \mathbb{T}^2$ .

**Observación 6.0.7.** Como  $M$  es una superficie los conjuntos con dimensión topológica cero son los totalmente desconexos (ver [HW]).

Probaremos una serie de lemas que implicarán el Teorema C

En adelante  $f : M \rightarrow M$  será un difeomorfismo,  $M$  una superficie compacta y  $\Lambda \subset M$  será un subconjunto compacto, hiperbólico e invariante, tal que  $\Omega(f|_{\Lambda}) = \Lambda$

**Definición 6.0.8.** Sea  $\Lambda \subset M$  un subconjunto compacto, hiperbólico e invariante. Definimos  $\Lambda_0$  como la unión de todos los puntos  $p$  en  $\Lambda$  tales que la component conexa de  $p$  en  $\Lambda$  es solo  $p$ . Definimos también  $\Lambda_1$  como  $\Lambda_1 = \Lambda \setminus \Lambda_0$ .

Observamos que  $\Lambda_0$  es totalmente desconexo y por lo tanto tiene dimensión topológica 0.

Nuevamente, para un entorno lo suficientemente pequeño de  $x \in \Lambda_1$  definimos  $p_x^s : U(x) \cap \Lambda_1 \rightarrow W_{loc}^u(x)$  la proyección local a lo largo de la foliación estable. Análogamente definimos  $p_x^u : U(x) \cap \Lambda_1 \rightarrow W_{loc}^s(x)$ . Es importante destacar que en este contexto las hojas estables e inestables tienen dimensión 1.

**Lema 6.0.9.** *Los puntos periódicos son densos en  $\Lambda_1$ . Además si  $x \in \Lambda_1$  tenemos que  $W_{loc}^u(x) \subset \Lambda_1$  ó  $W_{loc}^s(x) \subset \Lambda_1$  (o ambas).*

*Demostración.* Para abreviar, llamaremos  $lcc(x)$  a la componente localmente conexa de  $x$  en  $\Lambda_1$ .

Si  $x \in \Lambda_1$  entonces  $x \notin \Lambda_0$ , y por lo tanto  $lcc(x)$  es no trivial. Por lo tanto para un entorno suficientemente chico de  $x$ ,  $U(x)$ , alguna de las proyecciones  $p_x^s(U(x) \cap \Lambda_1)$  ó  $p_x^u(U(x) \cap \Lambda_1)$  contiene un arco.

Como  $\Omega(f|_\Lambda) = \Lambda$ , usando el shadowing lema tenemos que si  $x \in \Lambda$  entonces  $x$  es aproximado por puntos periódicos hiperbólicos (que a priori podrían no estar en  $\Lambda$ ).

Supongamos que  $p_x^s(lcc(x))$  contiene un arco. En este caso definimos:

$$V = \bigcup_{y \in lcc(x)} W_{loc}^s(y)$$

y tenemos que  $\overset{\circ}{V}$  es no vacío. Tomamos un  $z \in \overset{\circ}{V} \cap lcc(x)$  (ver figura 12) y por lo tanto  $p^s(z)$  queda en el interior de  $p_x^s(lcc(x))$  con la topología relativa a  $W^u(x)$ .

Si  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es tal que  $p_n \rightarrow z$  (con  $p_n$  una sucesión de puntos periodicos), entonces  $p_n \in \overset{\circ}{V}$  para todo  $n$  mayor que algún  $n_0$ .

Como  $\Lambda$  es invariante, y  $f$  es un difeomorfismo tenemos que  $\Lambda_1$  también es invariante. De lo contrario  $f$  llevaría componentes conexas no triviales a puntos. Como  $p_n \in \overset{\circ}{V}$  tenemos entonces que  $\omega(p_n) \in \Lambda_1$  pero entonces  $p_n \in \Lambda_1$  para todo  $n > n_0$ .

Tomamos ahora  $p_n$  lo suficientemente cerca de  $z$  de modo que  $p_x^s(p_n)$  esté en el interior de  $p_x^s(lcc(x))$ . Entonces  $W_{loc}^u(p_n) \cap lcc(x) \neq \emptyset$  (o de otro modo tendríamos que  $lcc(x)$  no sería conexo). Iterando

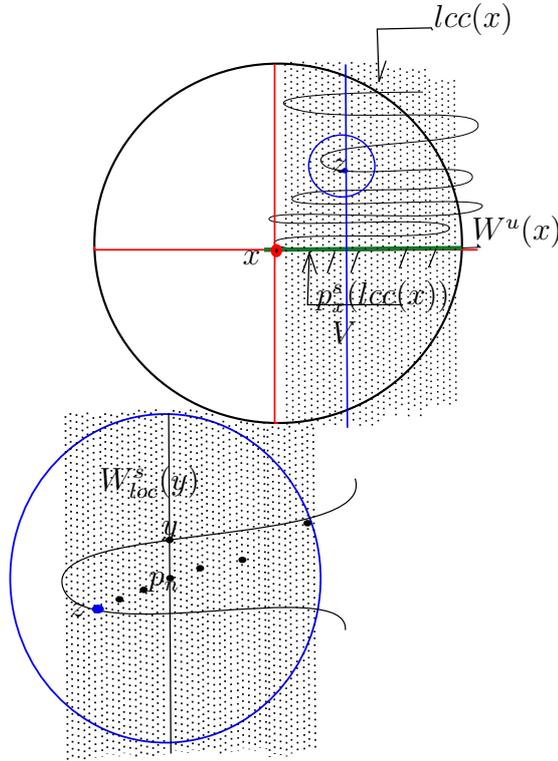


Figura 12: la componente conexa local dem  $x$  y  $p_x^s(lcc(x))$

para el futuro  $f^n(lcc(x))$  acumula contra la variedad inestable de  $p_n$  y como  $diam(lcc(x)) > 0$ , entonces  $f^n(lcc(x))$  acumula contra un arco de  $W_{loc}^u(p_n)$ . Concluimos que un arco de  $W_{loc}^u(p_n)$  está contenido en  $\Lambda$ , como consecuencia de la compacidad de  $\Lambda$ . Este arco debe además estar en  $\Lambda_1$  ya que no puede estar en  $\Lambda_0$ . Como  $\Lambda_1$  es invariante tenemos que  $W^u(p_n) \subset \Lambda_1$  y si  $p_n \rightarrow z$ , la compacidad nuevamente implica que  $W^u(z) \subset \Lambda_1$ .

Tomamos una sucesión  $z_n$  en las mismas condiciones que  $z$ , tomando uno en cada entorno  $U_n(x)$  los cuales tomamos cada vez más chicos. De este modo nos queda que  $z_n \rightarrow x$  y la continuidad de las variedades inestables implica que  $W^u(x) \subset \Lambda_1$ .

La situación es analoga si  $p_x^u(lcc(x))$  contiene un arco estable. □

**Lema 6.0.10.** Definimos los subconjuntos  $\Lambda_1^u = \{x \in \Lambda_1 \mid W^u(x) \subset \Lambda_1\}$

y  $\Lambda_1^s = \{x \in \Lambda_1 \mid W^u(x) \subset \Lambda_1\}$ . Ambos conjuntos son compactos con estructura de producto local.

*Demostración.* Veremos primero que  $\Lambda_1^u$  es cerrado y por lo tanto compacto (ya que es un subconjunto de  $\Lambda$ ). Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda_1^u$  tal que  $x_n \rightarrow y$ , entonces la variedad inestable de  $y$  está en  $\Lambda$  y por lo tanto  $y \in \Lambda_1^u$ .

Sean  $x, y \in \Lambda_1^u$  tales que  $d(x, y) < \delta$  para algún  $\delta$  apropiado (por ejemplo tal que tal que  $W_{loc}^u(x) \cap W_{loc}^u(y) \neq \emptyset$ ). Como  $W^u(x) \subset \Lambda_1^u$ , y  $W^u(y) \subset \Lambda_1^u$ , entonces,

$$W_{loc}^u(x) \cap W_{loc}^s(y) \in W^u(x) \subset \Lambda_1^u.$$

la situación es análoga para  $\Lambda_1^s$ . □

**Corolario 6.0.11.** *El conjunto  $\Lambda_1$  es compacto, invariante y tiene estructura de producto local.*

*Demostración.* Los conjuntos  $\Lambda_1^u$  y  $\Lambda_1^s$  definidos en el lema 6.0.10 cumplen que

$$\Lambda_1 = \Lambda_1^u \cup \Lambda_1^s,$$

como consecuencia del lema 6.0.9. Por lo tanto  $\Lambda_1$  es compacto, invariante y tiene estructura de producto local. □

**Corolario 6.0.12.** *O  $\Lambda_1$  es la unión disjunta de atractores  $\Lambda_1^s$  y repulsores  $\Lambda_1^u$ , ó  $\Lambda = \Lambda_1^s = \mathbb{T}^2$  y  $f$  es Anosov.*

*Demostración.* Supongamos que existe  $x \in \Lambda_1^u \cap \Lambda_1^s$ . Entonces  $W^u(x)$  y  $W^s(x) \in \Lambda_1$ . Como  $\Lambda_1$  tiene estructura de producto local, tenemos que

$$\bigcup_{y \in W_{loc}^s(x)} W_{loc}^u(y) \subset \Lambda_1,$$

y entonces  $\Lambda_1$  tiene interior no vacío. Concluimos a partir del Teorema 6.0.6 que  $\Lambda = \Lambda_1 = \mathbb{T}^2$  y  $f$  es Anosov. □

**Lema 6.0.13.** *El conjunto  $\Lambda_0$  es compacto y disjunto de  $\Lambda_1$ . Más aún, si  $V$  es un entorno de  $\Lambda_0$ , podemos encontrar otro conjunto  $\Lambda'_0$  con estructura de producto local tal que  $\Lambda'_0 \cap \Lambda_1 = \emptyset$  y  $\Lambda_0 \subset \Lambda'_0 \subset V$ .*

*Demostración.* De la definición de  $\Lambda_0$  tenemos que es disjunto de  $\Lambda_1$ . Supongamos que  $\Lambda_0$  es no vacío y definimos una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda$  tal que  $x_n \rightarrow y \in \Lambda$ . Por el corolario 6.0.12, si  $\Lambda_0$  es no vacío  $\Lambda_1$  es union disjunta de  $\Lambda_1^s$  y  $\Lambda_1^u$ . Supongamos que  $y \in \Lambda_1^s$ , entonces para un  $n$  suficientemente grande,  $x_n$  esta en la cuenca de atracción de  $\Lambda_1^s$  y por lo tanto  $f^m(x_n)$  no vuelve a ningún entorno suficientemente chico de  $x_n$ , lo que contradice que  $\Omega(f|_\Lambda) = \Lambda$ .

La situación es análoga pero para el pasado si  $y \in \Lambda_1^u$ . □

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema:

**Teorema 6.0.14.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo,  $M$  una superficie compacta y  $\Lambda \subset M$  un conjunto hiperbólico compacto e invariante. Si además tenemos que  $\Omega(f|_\Lambda) = \Lambda$  entonces para todo entorno  $V$  de  $\Lambda$ , existe  $\tilde{\Lambda}$  tal que  $\tilde{\Lambda}$  es compacto hiperbólico, invariante, con estructura de producto local y,*

$$\Lambda \subset \tilde{\Lambda} \subset V.$$

*Demostración.* Sea  $V$  un entorno de  $\Lambda$  y  $V' = V \setminus \Lambda_1$  un entorno de  $\Lambda_0$ . Del lema 6.0.13, tenemos que existe  $\Lambda'_0$  con estructura de producto local tal que  $\Lambda'_0 \cap \Lambda_1 = \emptyset$  y  $\Lambda_0 \subset \Lambda'_0 \subset V'$ . Por otra parte  $\Lambda_1$  tiene estructura de producto local por el corolario 6.0.11.

Concluimos que  $\tilde{\Lambda} = \Lambda'_0 \cup \Lambda_1$  tiene estructura de producto local, está contenido en  $V$  y contiene a  $\Lambda$ . □

## Referencias

- [A] D. V. Anosov, *On certain hyperbolic sets*, Mat. Zametki, 2010, Volume 87, Numbers 5-6 (2010), 608-622.
- [A1] D. V. Anosov, *Extension of zero-dimensional hyperbolic sets to locally maximal ones*. Mat. Sb., 2010, Volume 201, Number 7, 3-14.
- [A2] D. V. Anosov, *Geodesic flows on Riemannian manifolds with negative curvature*, In Proc. Steklov Inst. Math., volume 90. American Mathematical Society, Providence, RI, 1967.
- [B] Brin, Michael; *On dynamical coherence*. Ergodic Theory Dynam. Systems 23 (2003), no. 2, 395-401.
- [BDV] C. Bonatti, L. J. Díaz, and M. Viana. *Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective*, volume 102 of Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [ABD] Abdenur, F. Bonatti, C. and Diaz, L. *Nonwandering Sets with Non-empty Interior*, Informes de matemática. <http://books.google.com.uy/books?id=v-dUHAAACAAJ>. Inst. de Matemática Pura e Aplicada, 2003.
- [BFSV] J. Buzzi, T. Fisher, M. Sambarino, C. Vasquez, *Maximal Entropy Measures for certain Partially Hyperbolic, Derived from Anosov systems*, to appear in Ergodic Theory Dynam. Systems.
- [C] S. Crovisier, *Une remarque sur les ensembles hyperboliques localement maximaux*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 334(5):401-404, 2001.
- [Ca] E. Catsigeras *Particiones de Markov Para Difeomorfismos de Anosov*. InnovaLibros, 2011
- [DR] L. J. Diaz and J. Rocha. *Partial hyperbolicity and transitive dynamics generated by heteroclinic cycles*. Ergodic Theory Dynam. Systems., 21:25-76, 2001.

- [Fi] Todd Fisher, *Hyperbolic sets that are not locally maximal*, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Volume 26, Issue 05, pp 1491-1509, 2006.
- [Fr] J. Franks, *Invariant Sets of Hyperbolic Toral Automorphisms*, *American Journal of Mathematics* Vol. 99, No. 5 (Oct., 1977), pp. 1089-1095.
- [FrR] J. Franks and C. Robinson, *A quasi-Anosov diffeomorphism that is not Anosov*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 223 (1976), 267-278.
- [H] Hirsch, M. *On invariant subsets of hyperbolic sets*, *Manuscripta Math.* 68(1990), 271-293.
- [HW] Witold Hurewicz, Henry Wallman *Dimension Theory*. Volumen 4, Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, 1969.
- [Ha] Hancock, S.G. *Construction of Invariant Sets for Anosov Diffeomorphisms*, *J. London Math. Soc.* (1978) s2-18 (2): 339-348.
- [KH] B. Hasselblatt and A. Katok. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [HPS] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds*, Springer Lecture Notes in Math., 583 (1977).
- [M] Mañé, Ricardo *Contributions to the stability conjecture*, *Topology* 17 (1978), no. 4, 383-396.
- [M2] Mañé, Ricardo *Invariant sets of Anosov diffeomorphisms*, *Inventiones mathematicae* (1978), Volume 46, Issue 2, pp 147-152
- [M3] Mañé, Ricardo, *A proof of the  $C^1$  stability conjecture*, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 66 (1988) 161-210.
- [P] J. Palis, *On the  $\Omega$ -stability conjecture*, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 66(1988) 211-215.

- [Pa] W. Parry. *Intrinsic Markov chains*, Trans. Amer. Math. Soc., 112:55-56, 1964.
- [PuS] Pujals, Enrique R.; Sambarino, Martín *A sufficient condition for robustly minimal foliations*. Ergodic Theory Dynam. Systems 26 (2006), no. 1, 281-289.
- [PS] A.Passeggi, M.Sambarino, *Examples of Minimal Diffeomorphisms on the two torus Semiconjugated to an Ergodic Translation*, preprint (2010).
- [S] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*. Bull. Amer. Math. Soc., 73:747-817, 1967.
- [Sh] M. Shub, *Topologically Transitive Diffeomorphisms on  $\mathbb{T}^4$* . Lecture Notes in Math., Vol. 206, Springer-Verlag, 1971.
- [S2] S. Smale, *The  $\Omega$ -stability theorem*, Proc. A.M. S. Symp Pure Math 14 (1970),
- [Sa] Sambarino, M. *Hiperbolicidad y Estabilidad*. Ediciones IVIC, Venezuela, ISBN 978-980-261-108-9. 289-297.