

TRABAJO MONOGRÁFICO

**Piezas Elementales de la Dinámica
Genérica**

Por: Andrés Sambarino

Orientador: Dr. Álvaro Rovella

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

URUGUAY

Resumen

El connecting lemma para pseudo órbitas es el último de una serie de lemas de conexión de órbitas, desde el closing lemma de Pugh en 1967, pasando por la versión refinada del connecting lemma de Hayashi enunciada por Wen-Xia en el año 2000. En esta monografía exponemos una prueba del connecting lemma para pseudo órbitas y estudiamos algunas consecuencias al estudio de la dinámica genérica, en particular, al estudio de las piezas elementales. La exposición que presentamos aquí es debida a Bonatti-Crovisier y puede encontrarse originalmente en [3]. El estudio sobre las clases de recurrencia sin puntos periódicos es extraído de [6].

Abstract

The connecting lemma for pseudo orbits is the last of a series of connecting orbit like lemmas, from the closing lemma of Pugh to the refined version of Hayashi's connecting lemma proved by Wen-Xia in the year 2000. Here we give an exposition of the proof of the connecting lemma for pseudo orbits and study its consequences to C^1 generic dynamics, in particular to the study of basic pieces. The exposition we present here is due to Bonatti-Crovisier in [3]. The results on aperiodic classes is extracted from [6].

Índice general

Introducción	II
1. Recurrencia por cadenas	1
1.1. Conceptos básicos	1
1.2. $\mathcal{R}(f)$ versus $\Omega(f)$	4
1.3. El teorema de Conley	9
2. El connecting lemma para pseudo órbitas	14
2.1. Una versión uniforme del connecting lemma	14
2.2. Idea de la prueba	18
2.3. Existencia de un tour topológico	19
2.4. Cajas cubriendo el espacio de órbitas	26
2.5. Prueba del teorema 2.1	30
3. Piezas elementales	35
3.1. Introducción	35
3.2. Conjuntos débilmente transitivos y órbitas periódicas	38
3.3. El teorema espectral genérico	46
A. La topología de Hausdorff y un teorema de Takens	50

Introducción

Uno de los objetivos principales de los dinamistas es entender el comportamiento asintótico de toda, o casi toda, órbita. Más precisamente, se busca entender la estructura del conjunto límite (i.e. los puntos de acumulación de toda órbita) de un difeomorfismo, o de un difeomorfismo genérico. El objetivo ideal sería descomponer este conjunto en compactos invariantes maximales según la inclusión, y dinámicamente indescomponibles. El ω -límite de un punto verifica la última condición, pero no necesariamente la primera. Llamariamos a tales conjuntos piezas elementales de la dinámica.

Cuáles son los conceptos o definiciones relevantes en una teoría es casi siempre uno de los últimos problemas que se resuelven. Así, se ha visto fuertemente en el proceso creativo de la matemática que la definición del concepto a estudiar termina siendo el corolario del trabajo, y no al revés, como parece cuando uno lee un libro. La búsqueda de una pieza básica ha sido uno de los objetivos de los especialistas en las últimas décadas. Se busca entonces definir dinámicamente conjuntos Λ dentro del conjunto límite que cumplan:

- Λ es compacto invariante y no es unión de compactos invariantes disjuntos.
- Si $\Lambda' \subset L(f)$ verifica la primer condición y $\Lambda' \cap \Lambda \neq \emptyset$ entonces $\Lambda' \subset \Lambda$.
- Para un residual de difeomorfismos C^1 el conjunto límite es unión de conjuntos con las dos propiedades anteriores.

El ejemplo más claro de una descomposición como la que buscamos se da cuando la dinámica es axioma A, el teorema espectral de Smale afirma que si el conjunto límite es hiperbólico entonces se descompone en una cantidad finita de compactos

invariantes maximales según la inclusión, y la dinámica en cada uno de estos compactos es transitiva, en particular cada compacto es el ω -límite de un punto y por tanto indescomponible. Como los axioma A no son densos en dimensión mayor que dos (ver [1]) no tenemos una respuesta total al problema original.

El conjunto invariante con una descomposición más natural, es probablemente el conjunto recurrente por cadenas. Una ε -pseudo órbita de x a y es una colección finita de puntos, cada uno a menos de ε de la imagen del anterior, de forma que el primero es x y el último es y . Si hay ε -pseudo órbitas de x a y para todo $\varepsilon > 0$ escribimos $x \dashv y$. El conjunto recurrente por cadenas, $\mathcal{R}(f)$, es el conjunto de puntos tales que $x \dashv x$. En él podemos definir una relación de equivalencia: dos puntos son equivalentes si podemos ir de uno a otro por pseudo órbitas de saltos arbitrariamente pequeños, y viceversa ($x \dashv y \Leftrightarrow x \dashv y$ e $y \dashv x$). Llamamos a estas clases de equivalencia *clases de recurrencia*. La clase de recurrencia de un punto no se puede escribir como unión de compactos invariantes disjuntos.

El teorema de Conley asegura la existencia de una función continua, $\phi : M \rightarrow [0, 1]$, decreciente sobre órbitas fuera de $\mathcal{R}(f)$, constante en órbitas dentro de $\mathcal{R}(f)$ e inyectiva en el conjunto de las clases de recurrencia, mas aún, la imagen por ϕ de $\mathcal{R}(f)$ es un compacto totalmente desconexo de $[0, 1]$. A partir de este teorema podemos construir una sucesión de filtraciones para el conjunto recurrente por cadenas que separa las clases de recurrencia, tenemos así la maximalidad de la descomposición en clases de recurrencia desde el punto de vista dinámico y la dinámica fuera de $\mathcal{R}(f)$ queda ordenada gracias a la filtración, en particular, no hay ciclos entre las clases de recurrencias.

El problema es que carecemos de información de la dinámica dentro de cada clase de recurrencia. A priori, el conjunto $\mathcal{R}(f)$ contiene información irrelevante desde el punto de vista dinámico, por ejemplo podría contener órbitas errantes. Mas aún, aunque el conjunto límite coincida con el conjunto recurrente por cadenas (como vale en el contexto genérico) la descomposición en clases de recurrencia puede no ser conveniente, como muestra el ejemplo de una rotación irracional en S^2 . En este caso tenemos una sola clase de recurrencia que es toda la esfera, sin embargo las piezas elementales en este caso deberían ser los círculos invariantes.

Mostramos ahora otro enfoque al problema, principalmente debido a M.-C. Arnaud en [2] y a Gan-Wen en [10]. Un compacto invariante Λ es débilmente transitivo si dados abiertos U, V que lo intersectan, algún iterado futuro de U intersecta V (no necesariamente dentro de Λ). Estamos interesados en buscar conjuntos débilmente transitivos maximales según la inclusión. Los ejemplos más claros de conjuntos débilmente transitivos son: conjuntos transitivos, ω -límites y el límite en la topología de Hausdorff de órbitas periódicas.

Para cada punto periódico hiperbólico p tenemos asociado naturalmente un conjunto invariante transitivo: su clase homoclínica¹ $H(p, f)$. Este conjunto, por ser transitivo es débilmente transitivo, pero a priori, el conjunto débilmente transitivo maximal que contiene a $H(p, f)$ podría ser mayor. Es una consecuencia de [5] que esto no ocurre genéricamente.

Tenemos entonces que genéricamente si un conjunto débilmente transitivo maximal contiene un punto periódico hiperbólico entonces es su clase homoclínica. Lo inesperado es que exhibir conjuntos débilmente transitivos maximales sin puntos periódicos es una propiedad localmente genérica en dimensión tres, como muestran los ejemplos de Bonatti y Díaz en [4]. En este artículo se muestra la existencia de un conjunto residual \mathcal{F} , en un abierto de $\text{Diff}^1(M^3)$, tal que si $f \in \mathcal{F}$ entonces f presenta conjuntos de Cantor transitivos maximales que no contienen órbitas periódicas. Más aún, estos conjuntos de Cantor son estables Lyapunov para f y para f^{-1} , lo que implica que son débilmente transitivos maximales. Cualquier conjunto genérico de $\text{Diff}^1(M^3)$ deberá intersectar \mathcal{F} .

Lo que podemos decir sobre los conjuntos débilmente transitivos, contengan puntos periódicos o no, es el siguiente teorema de Crovisier en [6] cuya prueba exponemos en el capítulo 3 (corolario 3.14).

Teorema. *Existe un conjunto residual \mathcal{G} de $\text{Diff}^1(M)$ tal que si $f \in \mathcal{G}$ y Λ es un conjunto débilmente transitivo para f entonces dado \mathcal{V} entorno de Λ en la topología de Hausdorff hay un órbita periódica de f en \mathcal{V} .*

Esto puede no parecer sorprendente ya que los conjuntos débilmente transitivos están contenidos en el no errante, y este es genéricamente la clausura de los puntos

¹La clase homoclínica de un punto periódico hiperbólico p es $H(p, f) = \overline{W^u(p)} \cap \overline{W^s(p)}$ donde solo tomamos intersecciones transversales.

periódicos. Lo interesante es que encontramos órbitas periódicas, cada una cerca de todos los puntos del conjunto. Tenemos, como inmediata consecuencia, una sucesión de órbitas periódicas γ_n tales que $\gamma_n \rightarrow \Lambda$ en la topología de Hausdorff.

La siguiente dicotomía se hace presente. A partir del teorema de Conley tenemos información sobre cómo es la dinámica fuera de las clases de recurrencia: no hay ciclos entre las clases de recurrencia. Con lo expuesto en los últimos párrafos tenemos (algo de) información sobre cómo es la dinámica dentro de los conjuntos débilmente transitivos maximales en el contexto genérico: son acumulados por órbitas periódicas en la topología de Hausdorff y si contienen un punto periódico son su clase homoclínica. Es aquí cuando el siguiente teorema de Bonatti-Crovisier en [3] toma suma importancia.

Teorema. *Para una variedad compacta M se tiene que genéricamente en $\text{Diff}^1(M)$, las clases de recurrencia y los conjuntos débilmente transitivos maximales coinciden.*

Esto daría una descripción razonable de la dinámica de un difeomorfismo C^1 genérico, sin embargo en el capítulo 3 mostramos, como consecuencia de los teoremas enunciados anteriormente y de ciertas propiedades de las clases de recurrencia, que en todo entorno de una clase de recurrencia en la topología de Hausdorff hay clases homoclínicas.

El teorema precedente lo mostramos en esta monografía (corolario 3.4) y se deduce del siguiente connecting lemma para pseudo órbitas cuya prueba original es debida a Bonatti-Crovisier en [3] y exponemos en el capítulo 2 (teorema 2.1).

Teorema. *Si podemos ir de x a y por pseudo órbitas de saltos arbitrariamente pequeños para un difeomorfismo f de una variedad compacta con todas sus órbitas periódicas hiperbólicas, entonces existe g , C^1 arbitrariamente cerca de f , tal que la g -órbita futura de x contiene a y .*

A modo de conclusión enunciamos el siguiente teorema.

Teorema. *El conjunto límite de un difeomorfismo genérico coincide con el conjunto recurrente por cadenas. Las clases de recurrencia nos dan entonces una descomposición de $L(f)$ en compactos invariantes maximales dinámicamente indescomponibles. Las clases de recurrencia que contienen puntos periódicos son clases homoclínicas, estas clases son densas en el conjunto de las clases de recurrencia en la topología de*

Hausdorff. Las clases que no contienen puntos periódicos verifican una forma débil de transitividad: son débilmente transitivos maximales.

Capítulo 1

Recurrencia por cadenas

1.1. Conceptos básicos

Un *sistema dinámico discreto* es una acción continua del grupo \mathbb{Z} en un espacio topológico. Esta acción queda determinada por un homeomorfismo f del espacio, y el entero n actúa simplemente como f^n . Acciones de otros grupos no compactos pueden ser consideradas, el ejemplo más estudiado, después de \mathbb{Z} , es \mathbb{R} . El flujo asociado a un campo vectorial en una variedad diferenciable nos da una acción de \mathbb{R} en la variedad: $f_t : M \rightarrow M$ con $f_0 = \text{Id}$ y $f_{t+s} = f_t \circ f_s$.

Aún cuando el grupo es \mathbb{Z} , el estudio de la dinámica puede ser muy complicado, esto nos lleva a definir diferentes tipos de recurrencia. La *órbita* de un punto es $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$. Un punto es *periódico* si su órbita es finita, o sea, existe n tal que $f^n(x) = x$, el *período* es el menor entero positivo que verifica esta condición. Escribimos $\text{Per}(f)$ al conjunto de los puntos periódicos de f , y $\text{Per}_n(f)$ a los puntos de período menor o igual a n . Un punto periódico p de período n es *hiperbólico* si $d_p f^n : T_p M \rightarrow T_p M$ tiene sus valores propios de módulo distinto de 1. Esta es una propiedad abierta en la topología C^r . Los puntos periódicos hiperbólicos de cada período son finitos en una variedad compacta por ser aislados, esto es una consecuencia del teorema de Hartman-Großman (ver [8]), que conjuga el mapa en un pequeño entorno del punto periódico, con la diferencial en ese punto. El teorema de Kupka-Smale asegura que en la topología C^r los difeomorfismos que presentan todos sus puntos periódicos hiperbólicos

son genéricos (i.e. esta propiedad se verifica en una intersección numerable de abiertos densos de $\text{Diff}^r(M) \forall r \geq 1$). De hecho asegura un poco más, por su enunciado preciso ver [8]. Llamamos a este residual \mathcal{KS} .

Asociado al comportamiento asintótico de un punto definimos su ω -límite y α -límite como los puntos de acumulación de la órbita futura y pasada respectivamente, más precisamente

$$\omega(x) = \{y : f^{n_k}(x) \rightarrow y \text{ con } n_k \rightarrow \infty\}$$

y $\alpha(x)$ se define análogamente tomando $n_k \rightarrow -\infty$. Decimos que un punto es *recurrente* (para el futuro) si está en su propio ω -límite. El conjunto *límite* de un sistema dinámico es la unión de los ω y α -límites de todos los puntos del espacio:

$$L(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x)} \cup \overline{\bigcup_{x \in X} \alpha(x)}.$$

Es inmediato observar que si el espacio es compacto entonces $\omega(x)$ no es vacío, por tanto $L(f) \neq \emptyset$.

Una noción más débil que la de ser recurrente fue introducida por Birkhoff en 1927. Decimos que un punto x es *errante* si existe un entorno U de x disjunto de todos sus iterados. Un punto es no errante si no es errante, esto es, en todo entorno U de x hay algún punto y tal que $f^n(y) \in U$ para algún $n > 0$. Notamos $\Omega(f)$ al conjunto de los puntos no errantes. Podemos definir una relación en el espacio de la siguiente forma, decimos que $x \prec y$ si dados entornos U de x y V de y existe $n > 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Esta relación no es necesariamente simétrica ni transitiva. Remarcamos que $\Omega(f) = \{x : x \prec x\}$.

Desde un enfoque más perturbativo de la dinámica, tenemos el conjunto recurrente por cadenas. Para cada $\varepsilon > 0$, una ε -pseudo órbita de x a y es una sucesión de puntos $x = x_0, \dots, x_k = y$ tales que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$. Si hay una ε -pseudo órbita de x a y notamos $x \dashv_{\varepsilon} y$. Las pseudo órbitas son las órbitas del mapa si uno no distingue puntos a menos de ε . Definimos una relación en el espacio de la siguiente forma, $x \dashv y$ si $x \dashv_{\varepsilon} y$ para todo $\varepsilon > 0$. Definimos el conjunto *recurrente por cadenas*, $\mathcal{R}(f)$, como el conjunto de puntos tales que $x \dashv x$. La relación \dashv no es una relación de equivalencia en $\mathcal{R}(f)$ por no ser simétrica, definimos entonces la simetrización: $x \dashv\!\!\!\dashv y$ si y solo si $x \dashv y$

e $y \dashv x$. Las clases de equivalencia de esta relación son llamadas *clases de recurrencia*. Remarcamos que si el espacio no es compacto el conjunto $\mathcal{R}(f)$ depende de la métrica.

Si y es el iterado n -ésimo de x para un mapa g , C^0 cercano a f , entonces el segmento de órbita $x_i = g^i(x)$ con $i = 1, \dots, n$, es una ε -pseudo órbita de x a y para f , ya que $d(f(x_i), x_{i+1}) = d(f(x_i), g(x_i)) < \varepsilon$. Más aún, si g puede elegirse arbitrariamente cerca de f entonces tenemos $x \dashv y$. Esto muestra que si x es periódico para una sucesión de homeomorfismos convergente a f entonces $x \in \mathcal{R}(f)$. El teorema 2.1 muestra que la otra inclusión es también válida, o sea, los puntos que pueden ser unidos por pseudo órbitas de saltos arbitrariamente pequeños, son puntos de una misma órbita para mapas arbitrariamente cercanos a f , siempre que f sea un difeomorfismo C^1 de una variedad compacta con todos sus puntos periódicos hiperbólicos, dotando a $\text{Diff}^1(M)$ con la topología C^1 . El caso C^0 es trivial y el caso C^r con $r \geq 2$ está abierto.

Tenemos entonces la siguiente cadena de desigualdades:

$$\overline{\text{Per}(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{R}(f).$$

Fijados dos conjuntos cualesquiera de la inclusión arriba pueden encontrarse ejemplos que muestran que la inclusión es estricta. Mostramos ahora que, como consecuencia del teorema 2.1, genéricamente todos estos conjuntos coinciden.

Corolario 1.1. *Sea M una variedad compacta. Genéricamente en $\text{Diff}^1(M)$ tenemos que $\mathcal{R}(f) = \overline{\text{Per}(f)}$.*

Demostración. Sea $\{U_n\}$ una base numerable de la topología de M . Para cada U_n consideramos

$$\mathcal{A}_n = \{f \in \text{Diff}^1(M) : f \text{ tiene un punto periódico hiperbólico en } U_n\}$$

y $\mathcal{B}_n = \text{Diff}^1(M) - \overline{\mathcal{A}_n}$. Claramente $\mathcal{A}_n \cup \mathcal{B}_n$ es un abierto y denso de $\text{Diff}^1(M)$. Sea $\mathcal{K}\mathcal{S}$ el residual de los difeomorfismos Kupka-Smale. Afirmamos que si $f \in \mathcal{K}\mathcal{S} \cap \bigcap (\mathcal{A}_n \cup \mathcal{B}_n)$ entonces $\mathcal{R}(f) = \overline{\text{Per}(f)}$.

De no ser así tenemos un punto recurrente por cadenas, x , lejos de $\overline{\text{Per}(f)}$. Sea U_n un elemento de la base tal que $x \in U_n$ y $U_n \cap \text{Per}(f) = \emptyset$. Entonces $f \notin \mathcal{A}_n$, pero aplicando el teorema 2.1 podemos aproximar f por un difeomorfismo que contiene

puntos periódicos hiperbólicos en U_n , por tanto $f \notin \mathcal{B}_n$, o sea, $f \notin \mathcal{A}_n \cup \mathcal{B}_n$. Esto es una contradicción.

□

1.2. $\mathcal{R}(f)$ versus $\Omega(f)$

Hiperbolicidad

Probablemente, la mejor forma de entender la diferencia entre el conjunto no errante y el recurrente por cadenas es tomando el ejemplo de los difeomorfismos axioma A. Consideramos un difeomorfismo f de una variedad Riemanniana compacta M .

Un conjunto cerrado invariante Λ es *hiperbólico* si el fibrado tangente de M restringido a Λ , $T_\Lambda M$, se escribe como suma directa de dos subfibrados $E^u \oplus E^s$ invariantes por el diferencial de f tales que, en E^s , df contrae exponencialmente, y en E^u , df^{-1} contrae exponencialmente. Podríamos pedir que df expanda exponencialmente en E^u , pero si Λ es hiperbólico, esto ocurre en todos los vectores de $TM - E^s$. O sea, no habría una forma de identificar E^u . A continuación escribimos la definición formal.

Definición 1.1. Sea Λ un subconjunto cerrado e invariante, decimos que Λ es *hiperbólico* si para todo punto $x \in \Lambda$, $T_x M$ se descompone como $E_x^s \oplus E_x^u$, y esta descomposición verifica las siguientes condiciones: $df(E_x^{s,u}) = E_{f(x)}^{s,u}$ y además existen $c > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que

$$\|(d_x f)^n v\| \leq c \lambda^n \quad \forall v \in E^s$$

y

$$\|(d_x f)^{-n} v\| \leq c \lambda^n \quad \forall v \in E^u.$$

Para cada x , tenemos los conjuntos estables e inestables locales:

$$W_\delta^s(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) < \delta \quad \forall n > 0\}$$

$$W_\delta^u(x) = \{y \in M : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \delta \quad \forall n > 0\}$$

y los conjuntos estables e inestables como $W^s(x) = \{y : d(f^n(y), f^n(x)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$ y $W^u(x) = \{y : d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$.

Si x pertenece a un conjunto hiperbólico Λ entonces los conjuntos estable e inestable locales, definidos dinámicamente, tienen fuertes propiedades topológicas: son discos encajados de igual dimensión que E^s y E^u respectivamente. No es trivial observar que en este caso $W_\delta^s(x) \subset W^s(x)$ y $W_\delta^u(x) \subset W^u(x)$. A partir de aquí obtenemos los conjuntos estable e inestable de la siguiente forma

$$W^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\delta^s(f^n(x))) \quad W^u(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_\delta^u(f^{-n}(x))).$$

Para un cerrado invariante Λ , definimos $W^s(\Lambda)$ como

$$\{y : d(f^n(y), \Lambda) \rightarrow 0 \text{ } n \rightarrow \infty\}$$

Puede probarse que, si Λ es hiperbólico y *aislado* (i.e. existe un entorno compacto U_0 de Λ tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_0) = \Lambda$), este conjunto es igual a la unión $\bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x)$. O sea, cualquier punto que muere en Λ es pescado por un punto de Λ .

Decimos que una ε -pseudo órbita de f , $\{x_i\}_0^k$, es δ -*sombreada* por y si $d(x_i, f^i(y)) < \delta$ para todo $i = 1 \dots k$. Enunciamos ahora el shadowing lemma.

Lema 1.2 (Shadowing lemma). *Sea Λ un conjunto hiperbólico. Existe U entorno de Λ y existen $\alpha > 0$ y $K > 0$, tales que toda α_1 -pseudo órbita contenida en U , con $\alpha_1 < \alpha$, es $K\alpha_1$ -sombreada por una órbita de f .*

De hecho, podemos asegurar que la órbita que sombrea está en Λ y es única, si la pseudo órbita está indexada en \mathbb{Z} y el conjunto Λ es aislado. Esto es clave, por ejemplo para probar la estabilidad (i.e. dada $g \in C^r$ cercana a f , existe un homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que $hf = gh$) de los difeomorfismos de Anosov, o sea, toda la variedad es un conjunto hiperbólico: la órbita de un difeomorfismo cercano, $g^n(x)$ con $n \in \mathbb{Z}$, es un pseudo órbita para nuestro Anosov, f , entonces tenemos una única órbita de f , $f^n(y)$ con $n \in \mathbb{Z}$ que sombrea la órbita de g . El mapa $x \mapsto y$ es una conjugación entre g y f .

Un homeomorfismo f es *topológicamente mixing* si dados dos abiertos U y V existe n tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $m \geq n$. Observar que si f es topológicamente mixing entonces f tiene órbitas densas. El teorema espectral de Smale afirma precisamente lo siguiente.

Teorema 1.3 (Espectral). Si $\overline{\text{Per}(f)}$ es hiperbólico entonces $\overline{\text{Per}(f)}$ se escribe como unión disjunta de compactos invariantes $\Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k$ tales que: cada Λ_i se descompone en unión de compactos periódicos, $\Lambda_{i,j}$, de período p_i y $f^{p_i}|_{\Lambda_{i,j}} : \Lambda_{i,j} \rightarrow \Lambda_{i,j}$ es topológicamente mixing.

Definición 1.2. Definimos la *clase homoclínica* asociada a un punto periódico hiperbólico p , que notamos por $H(p, f)$, como la clausura de las intersecciones transversales de la variedad estable de p con la inestable.

Observación. Los conjuntos Λ_i del teorema espectral se llaman piezas básicas. La transitividad de la dinámica en cada pieza básica nos dice que no podemos obtener una mejor descomposición de la dinámica. De la prueba del teorema, y del λ -lema, se deduce que estas piezas son clases homoclínicas. Para un enunciado preciso del λ -lema ver [8].

Definición 1.3. Decimos que f es *Axioma A* si el conjunto no errante es hiperbólico y es la clausura de los puntos periódicos.

Supongamos que tenemos un difeomorfismo axioma A y sea $\Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k$ la descomposición espectral de $\Omega(f)$. Como $L(f) \subset \Omega(f)$ tenemos que

$$M = \bigcup_{x \in \Omega(f)} W^s(x) = \bigcup_{x \in \Omega(f)} W^u(x).$$

Podemos definir un preorden en el conjunto $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$: decimos que $\Lambda_i > \Lambda_j$ si $(W^u(\Lambda_j) - \Lambda_j) \cap (W^s(\Lambda_i) - \Lambda_i) \neq \emptyset$, o sea existe $x \in M$ tal que $\alpha(x) \subset \Lambda_j$ y $\omega(x) \subset \Lambda_i$. Decimos que $\Lambda_{j_1}, \dots, \Lambda_{j_l}$ es un *ciclo* si

$$\Lambda_{j_1} > \Lambda_{j_2} > \dots > \Lambda_{j_l} > \Lambda_{j_1}.$$

Observación. La noción de ciclo definida anteriormente para axioma A puede definirse de forma totalmente análoga siempre que tengamos un compacto invariante Λ que contiene al conjunto límite y es unión disjunta de compactos invariantes.

Es aquí donde el conjunto recurrente por cadenas aparece como el crecimiento potencial del conjunto no errante. Si $\Omega(f)$ presenta ciclos entonces tenemos puntos recurrentes por cadenas lejos de $\Omega(f)$, a partir del corolario 1.1 tenemos que genéricamente

$\Omega(f) = \mathcal{R}(f)$, y como veremos en esta sección, la función $f \mapsto \mathcal{R}(f)$ es semicontinua superiormente en la topología de Hausdorff. O sea, si tenemos un ciclo, el conjunto no errante explota al perturbar la dinámica, esto no ocurre con el conjunto recurrente por cadenas.

Mañé probó en [13] que la condición de ser axioma A es necesaria para la C^1 estabilidad. Uno podría considerar nociones mas débiles de estabilidad, por ejemplo la Ω -estabilidad o \mathcal{R} -estabilidad (i.e. dada g C^1 cercana a f existe $h : \Omega(f) \rightarrow \Omega(g)$ (resp. $h : \mathcal{R}(f) \rightarrow \mathcal{R}(g)$) tal que $hf = gh$). Sabemos que la condición de no ciclos es necesaria para la Ω -estabilidad. Más precisamente, f es Ω -estable si y solo si f es axioma A y la descomposición espectral no presenta ciclos (ver [14] y [16]). Mostramos ahora que la hiperbolicidad de $\mathcal{R}(f)$ es equivalente a la Ω -estabilidad, de hecho obtenemos que la Ω -estabilidad y la \mathcal{R} -estabilidad son equivalentes. Para esto necesitamos la noción de filtración que nos será útil en otros contextos.

Filtraciones y sucesiones de filtraciones

Una *filtración* \mathbf{M} , asociada a un homeomorfismo f de una variedad M , es una partición $\emptyset = M_0 \subset \dots \subset M_n = M$ donde cada M_i es una subvariedad con borde de igual dimensión que M y $f(M_i) \subset \text{int } M_i$. Decimos que una filtración \mathbf{N} refina \mathbf{M} , si para cada i existe j tal que $N_{i+1} - N_i \subset M_{j+1} - M_j$. Una *sucesión* de filtraciones es una colección $\{\mathbf{M}_i\}$ tal que \mathbf{M}_{i+1} refina \mathbf{M}_i .

Dada una filtración \mathbf{M} definimos K_i como el mayor compacto invariante de $M_{i+1} - M_i$:

$$K_i(\mathbf{M}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_{i+1} - M_i).$$

y definimos $K(\mathbf{M})$ como la unión de los conjuntos $K_i(\mathbf{M})$.

Las filtraciones nos dan una idea de cómo se comporta la dinámica globalmente. Si una órbita entra en M_i no sale de M_i . Además, aquellos puntos cuyas órbitas futuras se mantienen, a partir de un momento, en $M_{i+1} - M_i$ necesariamente están en el conjunto estable de K_i .

Tomando ε menor que la distancia de $f(M_i)$ al complemento de M_i tenemos que una ε -pseudo órbita que entra en M_i no sale de M_i . A partir de aquí podemos mostrar

que $\mathcal{R}(f) \subset K(\mathbf{M})$ para cualquier filtración \mathbf{M} . Si $x \in \mathcal{R}(f)$ y $x \in M_{i+1} - M_i$ entonces por lo observado anteriormente tenemos que hay pseudo órbitas de x a x contenidas en $M_{i+1} - M_i$. Esto muestra que toda la órbita, futura y pasada, de x está contenida en $M_{i+1} - M_i$, por tanto $x \in K_i(\mathbf{M})$.

Tenemos el siguiente teorema cuya prueba puede encontrarse en [16].

Teorema 1.4. *Sea $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k$ una unión de compactos invariantes disjuntos tales que $L(f) \subset \Lambda$. Entonces existe un filtración para f , \mathbf{M} , tal que $K_i(\mathbf{M}) = \Lambda_i$ (módulo reordenación de índices) si y solo si la descomposición de Λ no presenta ciclos.*

Decimos que una filtración \mathbf{M} es *adaptada* a un compacto invariante Λ si $\Lambda = K(\mathbf{M})$. Decimos que una sucesión de filtraciones, $\{\mathbf{M}_i\}$, es adaptada a Λ si $K(\{\mathbf{M}_i\}) = \bigcap_i K(\mathbf{M}_i) = \Lambda$. Si Λ_1 y Λ_2 son compactos invariantes disjuntos, decimos que una filtración los *separa* si $\Lambda_1 \subset K_i(\mathbf{M})$ y $\Lambda_2 \subset K_j(\mathbf{M})$ con $i \neq j$. Cuando dos compactos están separados por una filtración, no podemos obtener un compacto invariante indescomponible que los contenga. Una sucesión de filtraciones separa dos compactos invariantes dados, si algún elemento de la sucesión lo hace.

El teorema que sigue lo obtenemos como una consecuencia del teorema de Conley que mostramos en la siguiente sección (ver el corolario 1.14).

Teorema 1.5. *Hay una sucesión de filtraciones adaptada a $\mathcal{R}(f)$ que separa las clases de recurrencia.*

Obtenemos de aquí los siguientes corolarios.

Corolario 1.6. *La función $f \mapsto \mathcal{R}(f)$, de los homeomorfismos de M en subconjuntos compactos de M , es semicontinua superiormente con la topología de Hausdorff.*

Demostración. Tenemos que probar que dado U entorno de $\mathcal{R}(f)$ en M existe \mathcal{V} entorno de f tal que $\mathcal{R}(g) \subset U$ para toda $g \in \mathcal{V}$. Tomamos una sucesión de filtraciones para $\mathcal{R}(f)$, $\{\mathbf{M}_i\}$. Para i suficientemente grande, $K(\mathbf{M}_i) \subset U$, si g es suficientemente cercano a f , entonces \mathbf{M}_i es también una filtración para g y $K(\mathbf{M}_i, g) \subset U$, por tanto, $\mathcal{R}(g) \subset K(\mathbf{M}_i, g) \subset U$. \square

El siguiente corolario es también una consecuencia del teorema de Conley y lo probamos en 1.15.

Corolario 1.7. Sean $x, y \in \mathcal{R}(f)$ tales que $x \dashv\vdash y$, entonces, para ε suficientemente pequeño, las ε -pseudo órbitas de x a y pueden tomarse en $\mathcal{R}(f)$.

Esta es una diferencia esencial entre el conjunto no errante y el conjunto recurrente por cadenas. Por ejemplo, este resultado, junto el shadowing lema, nos permite mostrar que si $\mathcal{R}(f)$ es hiperbólico entonces es la clausura de los puntos periódicos, resultado falso para $\Omega(f)$ (un contraejemplo puede encontrarse en [7]). Estamos ahora en condiciones de probar que la Ω -estabilidad es equivalente a la hiperbolicidad de $\mathcal{R}(f)$.

Corolario 1.8. $\mathcal{R}(f)$ es hiperbólico si y solo si f es axioma A y no presenta ciclos.

Demostración. Si f es axioma A y no presenta ciclos, el teorema 1.4 nos permite encontrar una filtración adaptada a $\Omega(f)$, esto nos muestra que $\mathcal{R}(f) \subset \Omega(f)$, por tanto $\mathcal{R}(f)$ es hiperbólico.

Supongamos ahora que $\mathcal{R}(f)$ es hiperbólico, el shadowing lemma nos da un entorno U de $\mathcal{R}(f)$ donde pseudo órbitas que no salen de U son sombreadas por órbitas. Como siempre podemos elegir las pseudo órbitas de $\mathcal{R}(f)$ dentro de $\mathcal{R}(f)$, obtenemos que $\overline{\text{Per}(f)} = \mathcal{R}(f)$.

Tenemos entonces probado que f es axioma A. Si tenemos un ciclo encontramos un punto recurrente por cadenas lejos de las piezas básicas, esto es absurdo ya que $\mathcal{R}(f) = \overline{\text{Per}(f)}$. \square

1.3. El teorema de Conley

Esta sección es dedicada a la prueba del teorema de Conley, también conocido como el teorema fundamental de los sistemas dinámicos. Esta prueba puede encontrarse en [9].

Sea U un abierto tal que $f(\overline{U}) \subset U$, llamamos a $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(\overline{U})$ un *atractor topológico* y decimos que U es un entorno adaptado a A . Dado un atractor topológico A definimos su *repulsor dual* A^* como

$$A^* = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(X - \overline{U})$$

donde U es un entorno adaptado a A . Un atractor topológico es un compacto invariante. Observamos que el espacio es la unión de A^* con $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(U)$.

La relación entre los atractores topológicos y las filtraciones es la siguiente. Sea \mathbf{M} una filtración adaptada a $f : M \rightarrow M$, con M variedad, dada por $\emptyset = M_0 \subset \dots \subset M_n = M$. Sea A_i el atractor topológico asociado a M_i y A_i^* su repulsor dual, entonces $K_i(\mathbf{M}) = A_{i+1} \cap A_i^*$.

Volviendo al contexto de esta sección, $f : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo de un espacio métrico compacto X . Para probar el teorema de Conley necesitamos una serie de lemas.

Lema 1.9. *La cantidad de atractores de f es numerable.*

Demostración. Sea $\{U_n\}$ una base numerable de la topología de X y sea A un atractor con entorno adaptado U . Escribimos U como unión numerable de elementos de la base $\{U_n\}$, $U = \bigcup U_{i_j}$, ahora, como A es compacto $A \subset U_{i_{j_1}}, \dots, U_{i_{j_l}}$. A cada atractor le asociamos un elemento de las partes finitas de \mathbb{N} de forma inyectiva, por tanto la cantidad de atractores es numerable. \square

Lema 1.10. *Sean $\{A_n\}$ los atractores de f , entonces $\mathcal{R}(f) = \bigcap_n (A_n \cup A_n^*)$.*

Demostración. Mostramos primero que $\bigcap_n (A_n \cup A_n^*) \subset \mathcal{R}(f)$. Dado $x \in \bigcap_n (A_n \cup A_n^*)$ y $\varepsilon > 0$ vamos a construir una ε -pseudo órbita de x a x . Sea

$$V = \{y \in X : x \dashv_{\varepsilon} y\},$$

entonces V es abierto y $f(\overline{V}) \subset V$: de hecho, si $w \in \overline{V}$ entonces existe $z \in V$ tal que $d(f(w), f(z)) < \varepsilon$, si $x = x_0, \dots, x_n = z$ es una ε -pseudo órbita de x a z entonces $x = x_0, \dots, x_n = z, f(w)$ es una ε -pseudo órbita de x a $f(w)$, o sea $f(w) \in V$. Sea A el atractor asociado a V , $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(V)$. Ahora, $x \in A \cup A^*$, pero es claro que $\omega(x) \subset A$, de donde $x \notin A^*$ por ser este compacto e invariante, por tanto $x \in A \subset V$ y entonces existe una ε -pseudo órbita de x a x .

Resta ver que $\mathcal{R}(f) \subset \bigcap_n (A_n \cup A_n^*)$. Supongamos que $x \notin A_n \cup A_n^*$, mostramos que en este caso $x \notin \mathcal{R}(f)$. Sea U un entorno adaptado a A_n , entonces, como $x \notin A_n^*$ tenemos que $x \in f^{-n}(U)$, para algún n , podemos entonces suponer, reemplazando U por $f^{-n}(U)$, que $x \in U - f(U)$. Luego tomamos ε suficientemente pequeño para que

ninguna ε -pseudo órbita que entra en $f(U)$ pueda salir de $f(U)$. Tenemos entonces que no hay una ε -pseudo órbita de x a x . \square

Lema 1.11. *Sean $x, y \in \mathcal{R}(f)$, entonces $x \dashv y$ si y solo si no existe un atractor A tal que $x \in A$ e $y \in A^*$, o viceversa.*

Demostración. Si $x \dashv y$ y $x \in A$ entonces tomamos un entorno U adaptado a A . Para un ε suficientemente pequeño, ninguna ε -pseudo órbita desde x puede escaparse de U , por tanto $y \notin A^*$.

Tenemos que mostrar que la condición $x \in A \Leftrightarrow y \in A$ para todo atractor A implica $x \dashv y$. Mostramos que dado $\varepsilon > 0$ hay una ε -pseudo órbita de x a y , razonando análogamente obtenemos el resultado para $y \dashv x$. Dado $\varepsilon > 0$ consideramos $V = \{z : x \dashv_\varepsilon z\}$. Como mostramos anteriormente, $f(\bar{V}) \subset V$; consideramos entonces el atractor asociado a V , A_V . Como x es recurrente por cadenas, tenemos que $x \in V$, por tanto $x \in A_V$, por tanto $y \in A_V$, de donde hay una ε -pseudo órbita de x a y . \square

Lema 1.12. *Sean A un atractor y A^* su repulsor dual, entonces existe $g_A : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $g_A^{-1}(0) = A$, $g_A^{-1}(1) = A^*$ y es estrictamente decreciente en las orbitas de $X - A \cup A^*$.*

Demostración. Sea $g_0 : X \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$g_0(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, A^*)}$$

entonces $g_0^{-1}(0) = A$ y $g_0^{-1}(1) = A^*$. Consideramos $g_1(x) = \sup\{g_0(f^n(x)) : n \in \mathbb{N}\}$. Tenemos entonces que $g_1(f(x)) \leq g_1(x)$. Mostramos ahora que g_1 es continua. Si $x_i \rightarrow x \in A$ entonces a partir de un i_0 , $\omega(x_j) \subset A$ para todo $j \geq i_0$, por tanto, si j es suficientemente grande, toda la órbita futura de x_j está contenida en un pequeño entorno de A donde g_0 es pequeña, por tanto g_1 es pequeña. Con esto mostramos que g_1 es continua en A . Análogamente, g_1 es continua en A^* . Sea U un entorno adaptado a A y $N = U - f(\bar{U})$ y sea $r = \inf\{g_0(y) : y \in N\}$. Como $f^n(N) \subset f^n(\bar{U})$ y $\bigcap_{n \geq 0} f^n(\bar{U}) = A$ tenemos que para todo n mayor que cierto n_0 $g_0(f^n(N)) \subset [0, r/2]$, o sea que en N vale que $g_1(x) = \max\{g_0(f^n(x)) : 0 \leq n \leq n_0\}$ por tanto g_1 es continua en N , como $\bigcup_{-\infty}^{\infty} f^n(N) = X - A \cup A^*$, tenemos que g_1 es continua en X . Finalmente definimos

$$g_A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_1(f^n(x))}{2^n}.$$

□

Estamos ahora en condiciones de probar el teorema de Conley.

Teorema 1.13 (Conley). *Sea f un homeomorfismo de un espacio métrico compacto X , entonces existe $\phi : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que:*

1. $\phi(f(x)) < \phi(x)$ si $x \notin \mathcal{R}(f)$,
2. para $x, y \in \mathcal{R}(f)$, $x \dashv\vdash y$ si y solo si $\phi(x) = \phi(y)$,
3. $\phi(\mathcal{R}(f))$ es un compacto totalmente desconexo de $[0, 1]$.

Demostración. Sean $\{A_n\}$ los atractores de f . Para cada A_n consideramos $g_n = g_{A_n}$ dada por el lema anterior y definimos

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2g_n(x)}{3^n}.$$

Como $\mathcal{R}(f) = \bigcap (A_n \cup A_n^*)$ tenemos que si $x \in \mathcal{R}(f)$ entonces $g_n(x) \in \{0, 1\}$ para todo n , por tanto la imagen de $\mathcal{R}(f)$ por ϕ está contenida en el conjunto de Cantor de los tercios centrales, por tanto $\phi(\mathcal{R}(f))$ es compacto totalmente desconexo. Es claro que ϕ es estrictamente decreciente en las órbitas de f , ya que cada g_n lo es. Ahora, del lema 1.11, si $x \dashv\vdash y$ entonces $g_n(x) = 0$ si y solo si $g_n(y) = 0$, y $g_n(x) = 1$ si y solo si $g_n(y) = 1$, esto muestra que $x \dashv\vdash y$ implica $\phi(x) = \phi(y)$. Recíprocamente, si $\phi(x) = \phi(y)$, o sea, $\phi(x)$ y $\phi(y)$ tienen la misma expansión ternaria en $[0, 1]$, entonces no existe un atractor A tal que $x \in A$ e $y \in A^*$, o sea, $x \dashv\vdash y$. □

Una implicancia trivial del teorema de Conley que vale la pena observar es que cada componente conexa de $\mathcal{R}(f)$ está contenida en una clase de recurrencia. Tenemos además los siguientes corolarios anunciados en la sección anterior.

Corolario 1.14. *Existe una sucesión de filtraciones adaptada a $\mathcal{R}(f)$ que separa las clases de recurrencia.*

Demostración. A partir del teorema de Conley la prueba es muy simple, basta tomar particiones finitas de $[0, 1]$, $P^i = \{p_1^i, \dots, p_{i_i}^i\}$, cada una refinando la siguiente, de forma que separen las componentes de $\phi(\mathcal{R}(f))$. La sucesión de filtraciones anunciada es

$$\mathbf{M}_i = \{\phi^{-1}[0, p_j^i] : j = 1, \dots, i_i\}.$$

□

Corolario 1.15. *Sean $x, y \in \mathcal{R}(f)$ tales que $x \dashv\vdash y$, entonces las ε -pseudo órbitas de x a y pueden tomarse en la clase de recurrencia de x .*

Demostración. Dado un entorno de la clase de recurrencia de x , U , podemos encontrar una filtración $\mathbf{M} = \{M_i\}$ tal que $M_{i+1} - M_i \subset U$ para algún i y $\mathfrak{C}(x) \subset K_i(\mathbf{M})$ donde $\mathfrak{C}(x)$ es la clase de recurrencia de x , esto es consecuencia directa del corolario anterior. Esto muestra que dado un entorno de $\mathfrak{C}(x)$ podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que toda ε -pseudo órbita de x a y está totalmente contenida en ese entorno.

Sea ahora $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ dado por la continuidad uniforme de f para $\varepsilon/3$, podemos tomar $\delta < \varepsilon/3$. Consideramos ahora una $\varepsilon/3$ -pseudo órbita de x a y , $\{x_i\}$, contenida en el δ entorno de la clase de x , $\mathfrak{C}(x)$. Para cada x_i tomamos $y_i \in \mathfrak{C}(x)$ a menos de δ de x_i . Afirmamos que $\{y_i\}$ es una ε -pseudo órbita de x a y contenida en $\mathfrak{C}(x)$. De hecho,

$$d(f(y_i), y_{i+1}) \leq d(f(y_i), f(x_i)) + d(f(x_i), x_{i+1}) + d(x_{i+1}, y_{i+1}) < \varepsilon.$$

□

Capítulo 2

El connecting lemma para pseudo órbitas

En este capítulo mostramos el siguiente teorema que nos permitirá relacionar los conjuntos débilmente transitivos de un difeomorfismo genérico con las clases de recurrencia.

Teorema 2.1 (Connecting lemma para pseudo órbitas). *Sea f un difeomorfismo C^1 de una variedad compacta M con todos sus puntos periódicos hiperbólicos. Sean $x, y \in M$ dos puntos tales que $x \dashv y$. Entonces dado \mathcal{U} entorno de f en $\text{Diff}^1(M)$ existe $g \in \mathcal{U}$ tal que $g^n(x) = y$ para algún $n > 0$.*

Este teorema es conceptualmente interesante ya que muestra que si f tiene todos sus puntos periódicos hiperbólicos entonces $x \in \mathcal{R}(f)$ si y solo si existe $f_n \rightarrow f$ en la topología C^1 tal que $x \in \text{Per}(f_n)$.

2.1. Una versión uniforme del connecting lemma

En esta sección enunciamos una versión uniforme del connecting lemma de Hayashi. Para las pruebas de lo enunciado en esta sección recomendamos las siguientes referencias: [2], [3] (el apéndice), [11], [18] y [19].

El connecting lemma de Wen-Xia en su versión uniforme es el siguiente.

Teorema 2.2. *Sea $f \in \text{Diff}^1(M)$, entonces para todo \mathcal{U} entorno de f en la topología C^1 existen $L \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ entorno de f tales que, para todo $f_1 \in \mathcal{U}_1$, dado $z \in M$ y U_z entorno de z disjunto de sus L primeros iterados por f_1 , existe $V_z \subset U_z$, entorno de z , tal que $\forall p, q \notin \Delta = \bigcup_0^L f_1^i(U_z)$, si la f_1 -órbita futura de p interseca V_z y la f_1 -órbita pasada de q interseca el mismo entorno, entonces $\exists g \in \mathcal{U}$ tal que q está en la órbita futura de p por g , y además, $g = f_1$ afuera de Δ .*

El teorema anterior simplemente dice que si un punto entra, en el futuro, en un pequeño entorno de z , y otro punto entra en el pasado en ese mismo entorno, entonces podemos perturbar la dinámica y obtener estos puntos en una misma órbita. El perturbado g coincide con el mapa original f_1 fuera de L -iterados del entorno U_z . Es importante observar que el largo del tubo no depende del mapa siempre que sea suficientemente cercano al original, y tampoco depende del punto z , siempre que U_z sea disjunto de sus L -primeros iterados. Por ejemplo, si z es periódico de período suficientemente largo, podemos aplicar el teorema en un entorno de z . De la prueba se deduce que el segmento de órbita de p a q por g consta de tres segmentos diferenciados (ver figura 2.1):

Sea $f_1^{n_0}(p)$ el primer iterado de p por f_1 en V_z , y sea $f_1^{-j_0}(q)$ el primer iterado de q por f_1^{-1} en V_z , entonces,

- el primer segmento de g -órbita de p resulta de conectar ciertos iterados futuros de p entre sí: este segmento va desde p hasta $g^{n_1}(p)$ y está contenido en

$$\{f_1^i(p)\}_0^{n_0} \cup U_z \cup \dots \cup f_1^L(U_z),$$

- el segundo segmento proviene de la conexión de algún iterado futuro de p con algún iterado pasado de q , este segmento consta de los puntos $g^{n_1}(p), \dots, g^{n_1+L}(p) = f_1^{-j_1}(q)$ y está contenido en $U_z \cup \dots \cup f_1^L(U_z)$, donde $f_1^{-j_1}(q)$ es algún iterado pasado de q en $f_1^L(U_z)$ con $j_1 + L \leq j_0$,

- y el tercer segmento de órbita resulta de conectar ciertos iterados pasados de q entre sí: este segmento va desde $f_1^{-j_0}(q) = g^{n_1+L}(p)$ hasta q y está contenido en

$$\{f_1^{-j}(q)\}_0^{j_1} \cup U_z \cup \dots \cup f_1^L(U_z).$$

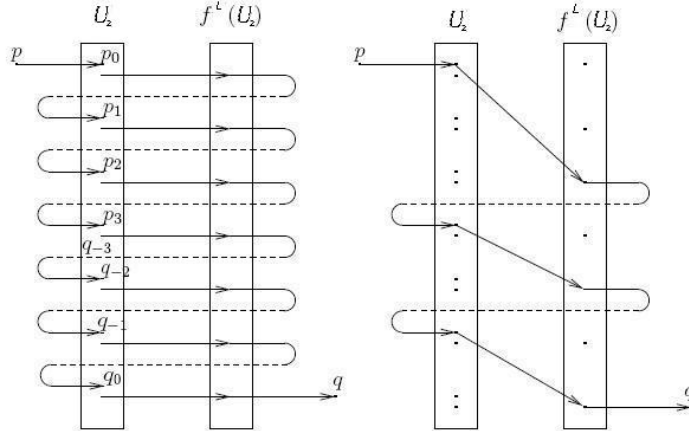


Figura 2.1: A la izquierda tenemos la dinámica antes de realizar la perturbación. A la derecha tenemos la dinámica luego de perturbar.

Esta distinción en los segmentos de la nueva órbita es un tecnicismo que nos será útil en el capítulo 3. Para el presente capítulo utilizaremos otra versión del connecting lemma que enunciamos a continuación.

Cajas de perturbación

De la prueba del connecting lemma surge un nuevo concepto: el de caja de perturbación. Sea V un espacio vectorial con producto interno y $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal. Un e -cuadrado centrado en x , de tamaño $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, es un conjunto de la forma

$$Q = \{y : |y_i - x_i| < \lambda_i\},$$

donde $x = \sum x_i e_i$ e $y = \sum y_i e_i$. Para $\alpha > 0$ definimos

$$\alpha Q = \{y : |y_i - x_i| < \alpha \lambda_i\}.$$

Dos e -cuadrados son del mismo tipo si se puede obtener uno a partir del otro mediante homotecias y traslaciones, o sea, $Q' = z + \alpha Q$ para algún z y algún α . Dado un tipo de cuadrado A , consideramos la siguiente construcción. Fijamos H_0 un e -cuadrado de tipo A , podemos rodear H_0 con cuadrados de tamaño $1/2H_0$ como muestra la figura 2.2.

Obtenemos un nuevo ε -cuadrado de tipo A , precisamente obtenemos $2H_0$. Recubrimos nuevamente este cuadrado, pero con cuadrados de tamaño $1/4H_0$ y obtenemos $(2 + 1/2)H_0$, y así sucesivamente. La unión de todos los cuadrados nos da el interior de $3H_0$. Esto es lo que llamamos un *cubo cuadrículado*.

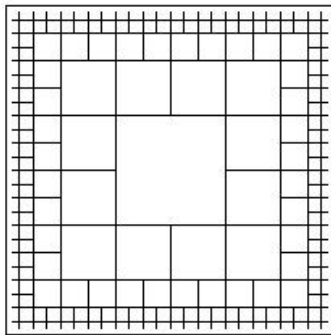


Figura 2.2: Un cubo cuadrículado.

Por un cubo cuadrículado en una variedad M , nos referimos a la imagen de un cubo cuadrículado de \mathbb{R}^n , con $n = \dim M$, por una carta local.

Definición 2.1. Sean \mathcal{U} un entorno de f en $\text{Diff}^1(M)$ y L un entero positivo. Una *caja de perturbación* para (f, \mathcal{U}) de largo L , B , es un cubo cuadrículado en M disjunto de sus L primeros iterados, que verifica las siguientes condiciones. Sea $\{(x_i, y_i)\}_1^k$ una sucesión de pares de puntos distintos, tales que x_i e y_i están en un mismo cuadrado del cubo, entonces existe una subsucesión $i_0 = 1 < \dots < i_s \leq k$, y un difeomorfismo $g \in \mathcal{U}$, que coincide con f fuera de los L iterados del cubo cuadrículado, tales que $g^L(x_{i_j}) = f^L(y_{i_{j+1}-1})$ y $g^L(x_{i_s}) = f^L(y_k)$.

El *soporte* de una caja de perturbación de largo L , B , es $\text{sop } B = \bigcup_0^L f^i(B)$. Lo único importante a entender sobre la definición de caja de perturbación es la siguiente observación.

Observación. Sea B una caja de perturbación de largo L y $x = x_0, \dots, x_k = y$ una ε -pseudo órbita de x a y donde x e y no pertenecen al soporte de B . Supongamos que la intersección de $\{x_i\}_1^k$ con $\text{sop } B$ consta de segmentos de la forma x_i, \dots, x_{i+L} y que

$x_{i+L} = f^L(y_i)$ donde y_i es un punto en el mismo cuadrado que x_i . Cuando esto ocurre decimos que la pseudo órbita *preserva la cuadrilla*. A partir de la definición de caja de perturbación encontramos un difeomorfismo g , que coincide con f fuera del soporte de B , que conecta el primer punto de la pseudo órbita en $\text{sop } B$ con el último. Tenemos así una ε -pseudo órbita para g de x a y que no realiza saltos en $\text{sop } B$. Observamos que muchos segmentos de la pseudo órbita original pueden haber sido cortados, es decir, la nueva pseudo órbita es, en general, más corta que la pseudo órbita original.

Enunciamos nuevamente el connecting lemma como un teorema de existencia.

Teorema 2.3 (Versión uniforme del connecting lemma). *Sean M una variedad compacta, f un difeomorfismo C^1 y \mathcal{U} un entorno de f en $\text{Diff}^1(M)$. Entonces existe un natural L tal que para todo $x \in M$ y U un entorno de x contenido en el dominio de una carta local, existe $V_x \subset U$ entorno de x , y una carta local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que todo cubo cuadrículado de V_x disjunto de sus L primeros iterados, es una caja de perturbación para (f, \mathcal{U}) de largo L . Mas aún, esta propiedad se verifica también para las cartas suficientemente C^1 cercanas a φ .*

2.2. Idea de la prueba

La idea fundamental de la prueba es la siguiente. Sea B una caja de perturbación y supongamos que tenemos una pseudo órbita de x a y que preserva la cuadrilla. De la definición de caja de perturbación obtenemos un difeomorfismo g arbitrariamente cercano a f en la topología C^1 , que coincide con f fuera de $\text{sop } B$, y una nueva pseudo órbita de x a y para g que no realiza saltos en $\text{sop } B$. O sea, la intersección de la pseudo órbita con $\text{sop } B$ consta de segmentos de órbita de g . Aplicaciones sucesivas de esta idea nos permitirán conectar a x con y .

Tenemos entonces que asegurarnos que una pseudo órbita de x a y entra sucesivamente en cajas de perturbación y controlar de alguna forma los saltos que no. Para esto mostramos la existencia de un *tour topológico*, esto es, dado un natural N , un abierto U de componentes conexas arbitrariamente pequeñas, disjunto de sus N primeros iterados y tal que toda órbita encuentra a U en el futuro y en el pasado. Obviamente los

puntos periódicos de período menor a N , y sus variedades locales, deben ser tratados separadamente. Una definición precisa de tour topológico es el teorema 2.4.

A partir de aquí, usando la versión uniforme del connecting lemma (teorema 2.3), podemos encontrar una familia de cajas de perturbación \mathcal{B} , de soportes disjuntos dos a dos, que encuentran toda órbita. A saber, en las componentes de U (argumentos más finos nos permitirán elegir una familia finita de cajas). Supongamos que $\{x, y\} \not\subseteq \text{sop } \mathcal{B} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \text{sop } B$. Usando la compacidad de M tenemos una cota n_0 tal que dado un punto z , el segmento de órbita $z, f(z), \dots, f^{n_0}(z)$ intersecta al soporte de alguna de las cajas de la familia \mathcal{B} . Como podemos elegir una pseudo órbita de saltos arbitrariamente pequeños, podemos suponer que cualquier segmento de la pseudo órbita de longitud menor a n_1 es sombreado por una órbita de f (n_1 dependerá de n_0 y de las órbitas periódicas de período menor a $k_d N$ donde k_d es un entero que depende solamente de la dimensión de M). Esto nos permite asegurar que la cantidad de saltos de una pseudo órbita de x a y , desde que sale del soporte de una caja de la familia \mathcal{B} hasta el siguiente es menor que n_1 , siempre que el segmento no pase cerca de $\text{Per}_{k_d N}(f)$ (esto es el lema 2.12), también nos permite reemplazar los segmentos de pseudo órbita fuera de los soportes de las cajas de \mathcal{B} por segmentos de órbita. Obtenemos así una pseudo órbita de x a y que no realiza saltos fuera de los soportes de los elementos de \mathcal{B} .

Agrupando los saltos de la pseudo órbita dentro de los soportes de \mathcal{B} tenemos una pseudo órbita que preserva la cuadrilla de todas las cajas de \mathcal{B} . Aplicando la definición de caja de perturbación obtenemos un difeomorfismo cercano a f en la topología C^1 tal que la órbita futura de x contiene a y .

2.3. Existencia de un tour topológico

En esta sección mostramos el siguiente teorema clave en la prueba del connecting lemma para pseudo órbitas. Esencialmente, encontramos un abierto disjunto de sus N primeros iterados, para N dado, que encuentra toda órbita.

Teorema 2.4 (Existencia de un tour topológico). *Sea d un entero positivo, entonces existe $k_d \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $N \in \mathbb{N}$ y $\delta_0 > 0$, si f es un difeomorfismo de una variedad compacta M de dimensión d tal que los puntos periódicos de período*

menor a $k_d N$ son hiperbólicos, entonces, para todo $\delta < \delta_0$, existe un abierto U que verifica las siguientes condiciones:

1. para todo $x \notin W_\delta^s(\text{Per}_{k_d N}(f))$ se tiene que $f^n(x) \in U$ para algún $n > 0$,
2. para todo $x \notin W_\delta^u(\text{Per}_{k_d N}(f))$ se tiene que $f^{-n}(x) \in U$ para algún $n > 0$,
3. los conjuntos $\bar{U}, f(\bar{U}), \dots, f^N(\bar{U})$ son disjuntos dos a dos y de componentes conexas arbitrariamente pequeñas.

Es clave en la prueba de este teorema la siguiente idea. Supongamos que tenemos dos abiertos U_0 y V_0 , cada uno disjuntos de sus N primeros iterados (de hecho tenemos que pedirle más a V_0 , esto será más adelante). Su unión no necesariamente verifica esta condición. Nos gustaría entonces reemplazar $U_0 \cup V_0$ por un abierto W disjunto de sus N primeros iterados, que contenga a U_0 , y que la órbita futura de todo punto de V_0 entre en W . Para esto, cortamos V_0 en abiertos que lo cubran, V_j , y reemplazamos $V_0 \cup U_0$ por ciertos iterados de V_j . Este es el lema 2.7. Todo el trabajo de la siguiente sección es dedicado a la prueba de este lema.

Un lema de coloración

Decimos que una familia de subespacios de codimensión 1, E_i , de un espacio vectorial S , está en *posición general* si la suma de las codimensiones es la codimensión de la intersección. Equivalentemente, E_1, \dots, E_{i+1} están en posición general si y solo si E_1, \dots, E_i lo están y E_{i+1} es transversal a la intersección $\bigcap_1^i E_j$. Lo importante a entender de esta definición es que la intersección de k subespacios de la familia, tiene dimensión $\dim S - k$.

Una familia de subvariedades está en posición general si cada vez que se intersectan, sus espacios tangentes lo están. Decimos que están en posición general en un entorno de V , si solo tomamos las intersecciones dentro de un entorno de V .

Sea M una variedad de dimensión d y V, U_1, \dots, U_l subvariedades con borde, de igual dimensión que M . Consideramos el conjunto

$$W = V - \bigcup \text{int } U_i.$$

Si los bordes $\partial V, \partial U_1, \dots, \partial U_l$ están en posición general, W es una subvariedad de dimensión d con esquinas, esto es, modelada en $[0, +\infty)^d$. La intersección de i -elementos de la familia $\partial V, \partial U_1, \dots, \partial U_l$ con W es una subvariedad, de dimensión a lo sumo $d - i$. Llamamos a estas subvariedades *caras* de dimensión $d - i$.

Cada cara de dimensión j está contenida en una cara de dimensión $j + 1$, y contiene caras de dimensión i para todo $i < j$. Tenemos el siguiente lema.

Lema 2.5. *Sean V, U_1, \dots, U_l subvariedades de M^d , con borde, de dimensión d , tales que $\partial V, \partial U_1, \dots, \partial U_l$ están en posición general en un entorno de V . Para todo $j \in \{0, \dots, d\}$ existe una subvariedad con borde de dimensión d , O_j , que verifica las siguientes condiciones.*

i) Para cada componente Δ de O_j , el abierto $\Delta \cup \bigcup_0^{j-1} O_i$ contiene exactamente una cara de dimensión j de $W = V - \bigcup \text{int } U_i$. Más aún, cada cara de dimensión j de W intersecciona exactamente en una componente de O_j . Llamamos a esta biyección

$$\Sigma : \{\text{componentes de } O_j\} \rightarrow \{\text{caras de dimensión } j\}.$$

ii) Sea $j' < j$, entonces $\Delta' \cap \Delta \neq \emptyset$ si y solo si $\Sigma(\Delta') \subset \Sigma(\Delta)$.

iii) Si $\Delta \cap U_i \neq \emptyset$ entonces $\Sigma(\Delta) \subset \partial U_i$.

Demostración. Construimos las subvariedades O_j por inducción. Tomamos O_0 como un pequeño entorno centrado en cada cara de dimensión 0, que son puntos aislados. Si tenemos O_{j-1} construimos O_j de la siguiente forma. Cada cara de dimensión j , Σ , contiene un compacto conexo Σ' que contiene al compacto $\Sigma - \bigcup_0^{j-1} O_i$. Tomamos entonces un entorno de Σ' en M suficientemente pequeño para que verifique las condiciones pedidas (ver figura 2.3). \square

Una *coloración* de $V - \bigcup \text{int } U_i$ a valores en $\{1, \dots, k\}$, es un par (\mathbf{V}, c) donde \mathbf{V} es una familia de subvariedades con borde de igual dimensión que M , $\{V_j\}$, tales que su unión cubre $V - \bigcup \text{int } U_i$, y $c : \mathbf{V} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ verifica que $c(V_j) \neq c(V_{j'})$ cada vez que $V_j \cap V_{j'}$ no es vacío.

Una γ -*pintura* de U_1, \dots, U_l a valores en $\{0, \dots, k\}$ es un mapa $c_0 : \{U_i\} \rightarrow P(\{0, \dots, k\})$, donde $P(\{0, \dots, k\})$ denota las partes de $\{0, \dots, k\}$, de forma que el cardinal de $c_0(U_i)$ es menor o igual que γ .

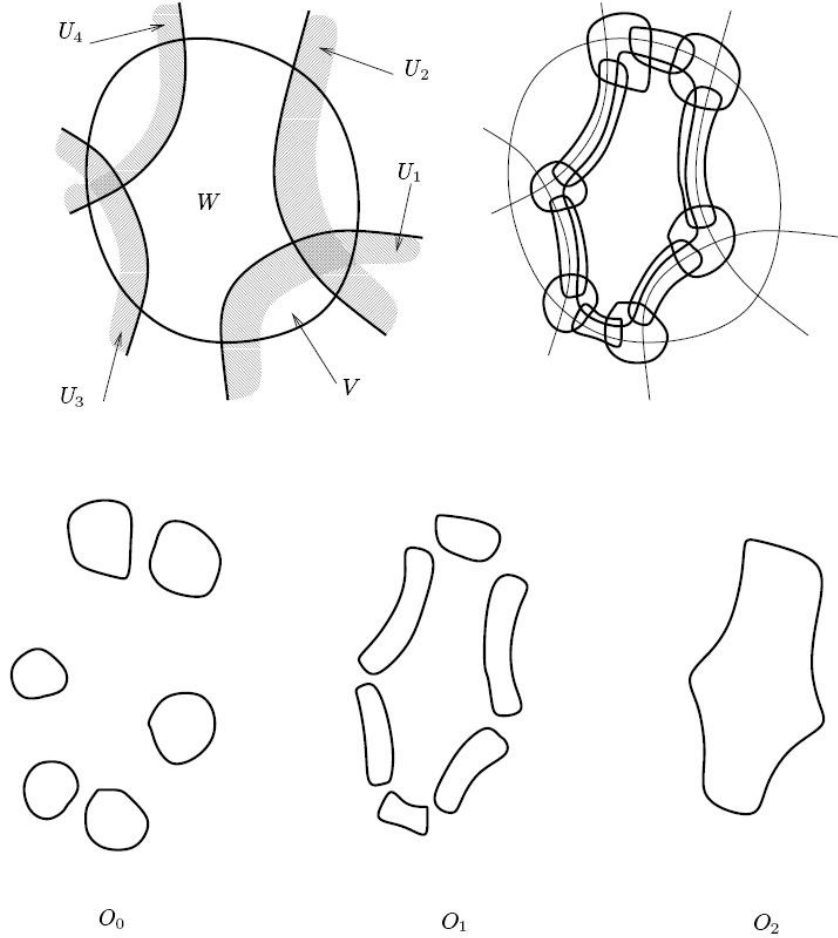


Figura 2.3: Construcción de los abiertos O_j .

Decimos que una coloración (\mathbf{V}, c) , respeta una pintura c_0 si $c(V_j) \notin c_0(U_i)$ cada vez que V_j y U_i se intersectan.

Lema 2.6 (del coloreado). *Para todo $d \in \mathbb{N}$ existe $K_d \in \mathbb{N}$ que verifica lo siguiente. Sean V, U_1, \dots, U_l subvariedades de M^d , con borde, de dimensión d , tales que*

$$\partial V, \partial U_1, \dots, \partial U_l$$

están en posición general en un entorno de V . Entonces, para todo $k \geq K_d$ y toda 2-pintura c_0 de U_1, \dots, U_l a valores en $\{0, \dots, k\}$ existe una coloración (\mathbf{V}, c) a valores en $\{1, \dots, K_d\}$ que respeta c_0 .

Demostración. Mostramos que $K_d = (2d + 1)^2$ sirve a nuestros propósitos. Fijamos entonces una 2-pintura c_0 a valores en $\{0, \dots, k\}$ con $k \geq (2d + 1)^2$. Sea $i \in \{0, \dots, d\}$ y sea Δ una componente de O_i asociada a una cara $\Sigma(\Delta)$ de dimensión i . Sabemos que Δ interseca, a lo sumo, $d - i$ U_j 's (esto se deduce del item iii) del lema 2.5 y de que los bordes $\partial U_1, \dots, \partial U_l$ están en posición general), por tanto la unión

$$\bigcup_{j: \Delta \cap U_j \neq \emptyset} c_0(U_j)$$

tiene cardinal menor que $2d$. Como el conjunto $\{i(2d + 1) + 1, \dots, (i + 1)(2d + 1)\}$ tiene cardinal $2d + 1$ podemos asociarle a Δ un color en este conjunto, $c(\Delta)$, que respeta c_0 . Obtenemos entonces una coloración que respeta c_0 , a saber

$$\mathbf{V} = \{\text{componentes de } O_j, \text{ para } j \in \{0, \dots, d\}\}$$

y el mapa c . □

Lema 2.7. Sean $N, d \in \mathbb{N}$ y K_d dado por el lema del coloreado. Sean U un abierto disjunto de sus N primeros iterados y V un abierto disjunto de sus $2(K_d + 1)N$ primeros iterados para un difeomorfismo f con $\text{Per}_{2(K_d + 1)N}(f)$ finito, entonces existe W abierto disjunto de sus N primeros iterados tal que, $U \subset W$ y

$$V \subset \bigcup_0^{2(K_d + 1)N} f^{-i}(W).$$

Demostración. Consideramos la familia $U_i = f^{-i}(U)$ con $i = 0, \dots, 2(K_d + 1)N$ y una 2-pintura dada por $c_0(U_i) = \{[i/2N], [i/2N] + 1\}$, que pertenece a $\mathcal{P}(\{0, \dots, K_d + 2\})$, donde $[i/2N]$ es la parte entera de $i/2N$. Podemos suponer, reemplazando U y V por abiertos muy cercanos, que los bordes $\partial V, \partial U_1, \dots, \partial U_{2(K_d + 1)N}$ están en posición general (esto es el lema 2.8 más abajo). Aplicamos el lema del coloreado para V, U_i y obtenemos una coloración (\mathbf{V}, c) a valores en $\{1, \dots, K_d\}$ que respeta c_0 con $\mathbf{V} = \{V_j\}$. Escribimos $c(j)$ para notar $c(V_j)$. Como V es disjunto de sus primer $2(K_d + 1)N$ primeros iterados, podemos suponer que $\bigcup V_j$ también. Definimos W entonces de la siguiente forma

$$W = U \cup \bigcup_j f^{2c(j)N}(V_j).$$

Mostramos ahora que W es disjunto de sus primeros N iterados. Supongamos que x e $y = f^t(x)$ están en W , con $t \leq N$. Es obvio que x e y no pueden pertenecer ambos a U o a algún $f^{2c(j)N}(V_j)$. Supongamos primero que $x \in f^{2c(j_1)N}(V_{j_1})$ e $y \in f^{2c(j_2)N}(V_{j_2})$.

Entonces $f^{-2c(j_1)N}(x)$ y $f^{t-2c(j_2)N}(x)$ pertenecen ambos a $\bigcup V_j$. Ahora, $|c(j_1) - c(j_2)| \leq K_d$. Supongamos que $c(j_1) > c(j_2)$, y sea $0 < h = 2(c(j_1) - c(j_2))N + t \leq 2K_dN + N < 2(K_d + 1)N$, entonces

$$f^h \circ f^{-2c(j_1)N}(x) = f^{t-2c(j_2)N}(x) \in \bigcup V_j.$$

O sea, encontramos un punto en $\bigcup V_j$ con un iterado anterior a $2(K_d + 1)N$ en $\bigcup V_j$, esto es absurdo porque $\bigcup V_j$ es disjunto de sus $2(K_d + 1)N$ primeros iterados.

Si $c(j_2) > c(j_1)$ razonamos análogamente tomando $h = 2(c(j_2) - c(j_1))N - t$.

Resta entonces eliminar el caso en que $x \in U$ e $y \in f^{2c(j)N}(V_j)$, o sea, V_j y $f^{-(2c(j)N-t)}(U) = U_{2c(j)N-t}$ se encuentran. La 2-pintura asociada a $U_{2c(j)N-t}$ es

$$c_0(U_{2c(j)N-t}) = \{c(j) - 1, c(j)\},$$

como la coloración c respeta la pintura c_0 tenemos una contradicción, de donde $U_{2c(j)N-t}$ y V_j no pueden intersectarse. \square

Lema 2.8. *Sean n un entero positivo, M una variedad compacta de dimensión d y f un difeomorfismo de M tal que $\text{Per}_n(f)$ es finito. Sea S una variedad compacta de dimensión $d - 1$ y $\psi : S \rightarrow M$ un encaje, entonces existe $\psi' : S \rightarrow M$ un encaje arbitrariamente cerca de ψ en la topología C^r tal que la familia de subvariedades $f^i \circ \psi'(S)$ está en posición general, para $i = 1, \dots, n$.*

Prueba del teorema 2.4

Demostración. Ponemos $k_d = 2(K_d + 1)$ siendo K_d el entero dado por el lema del coloreado y recordamos que N es dado. Cada punto en la variedad estable de un punto periódico hiperbólico p , admite un entorno compacto en $W^s(p)$, disjunto de sus N primeros iterados. Cubrimos un dominio fundamental contenido en $W_\delta^s(p)$ con una cantidad finita de estos entornos V_1, \dots, V_n . Podemos encontrar un iterado futuro de V_2 , $f^{n_2}(V_2)$ de forma que $V_1 \cup f^{n_2}(V_2)$ es disjunto de sus N primeros iterados. Con

esta idea podemos encontrar para cada V_i un iterado futuro, $f^{n_i}(V_i)$ de forma que $V_1 \cup \bigcup f^{n_i}(V_i)$ es disjunto de sus N primeros iterados. Si engordamos un poco cada $f^{n_i}(V_i)$ obtenemos un abierto de M , que llamamos $U^s(p)$ disjunto de sus N primeros iterados. Razonamos análogamente con $W^u(p)$ y obtenemos un entorno $U^u(p)$ disjunto de sus N primeros iterados, podemos construir $U^u(p)$ de forma que $U^s(p) \cup U^u(p)$ sea disjunto de sus N primeros iterados.

Como $\text{Per}_{k_d N}(f)$ es finito (por ser todos ellos hiperbólicos) podemos realizar la construcción anterior con suficiente cuidado de forma que

$$U_0 = \bigcup_{p \in \text{Per}_{k_d N}(f)} U^s(p) \cup U^u(p)$$

sea disjunto de sus N primeros iterados.

La unión de los iterados futuros de U_0 con $W_\delta^u(\text{Per}_{k_d N}(f))$ contiene un entorno O_u , de $\text{Per}_{k_d N}(f)$, o sea, todo punto de $O_u - W_\delta^u(\text{Per}_{k_d N}(f))$ en el pasado entra a U_0 . De la misma forma, los iterados pasados de U_0 unidos con $W_\delta^s(\text{Per}_{k_d N}(f))$ contienen un entorno O_s de $\text{Per}_{k_d N}(f)$. Todo punto de $O_s - W_\delta^s(\text{Per}_{k_d N}(f))$ en el futuro entra a U_0 .

Tomamos un pequeño entorno de $\text{Per}_{k_d N}(f)$, O_0 , tal que los primeros $k_d N$ iterados de O_0 estén contenidos en $O_u \cap O_s$. Todo punto x de $M - O_0$ posee un entorno disjunto de sus $k_d N$ primeros iterados V_x . Como $M - O_0$ es compacto, puede ser cubierto con una cantidad finita de estos entornos V_{x_j} $j = 0, \dots, n$. Aplicamos el lema 2.7 primero para U_0 y V_0 , obtenemos así un abierto W_1 . Luego lo aplicamos nuevamente para W_1 y V_1 . Repitiendo este procedimiento para toda la familia V_j obtenemos el abierto U deseado. \square

El siguiente corolario nos permite asegurar la existencia de un tour topológico compacto.

Corolario 2.9. *Sea f como en el teorema 2.4 y U un tour topológico para f con $N \in \mathbb{N}$ dado, entonces existe un compacto $V \subset U$ que verifica las siguientes condiciones:*

1. *Para todo $x \notin W_\delta^s(\text{Per}_{k_d N}(f))$ se tiene que $f^n(x) \in V$ para algún $n > 0$.*
2. *Para todo $x \notin W_\delta^u(\text{Per}_{k_d N}(f))$ se tiene que $f^{-n}(x) \in V$ para algún $n > 0$.*

3. los conjuntos $V, f(V), \dots, f^N(V)$ son disjuntos dos a dos y de componentes arbitrariamente pequeñas.

donde k_d viene dado por el teorema de existencia de un tour topológico.

Demostración. Tomamos un dominio fundamental compacto de las variedades estables de $\text{Per}_{k_d N}(f)$. Estos puntos en algún iterado entran en un compacto de U , también lo hace entonces un pequeño entorno en M de este dominio fundamental. Llamamos a este compacto $V_1^s \subset U$. Los iterados futuros de estos pequeños entornos de los dominios fundamentales junto con las variedades inestables locales contienen un entorno de $\text{Per}_{k_d N}(f)$, O_s . Todos los puntos de $O_s - W_{\delta/2}^u(\text{Per}_{k_d N}(f))$ en el pasado entran al compacto V_1^s . Razonando análogamente con las variedades inestables obtenemos un compacto V_1^u dentro de U , y un entorno O_u de $\text{Per}_{k_d N}(f)$ tal que todo punto de $O_u - W_{\delta/2}^s(\text{Per}_{k_d N}(f))$ entra en el compacto V_1^u . Tomamos un abierto $O \subset O_s \cap O_u$ entorno de $\text{Per}_{k_d N}(f)$. Como $M - O$ es compacto y todo punto de $M - O$ en algún momento entra a U tenemos un nuevo compacto $V_2 \subset U$ tal que todo punto de $M - O$ en algún iterado entra en V_2 . $V_1^s \cup V_1^u \cup V_2$ es el compacto buscado. \square

2.4. Cajas cubriendo el espacio de órbitas

Como consecuencia de la existencia de un tour topológico compacto, obtenemos una familia finita de cajas de perturbación que encuentran toda órbita lejos de los puntos periódicos.

Fijamos notación para el resto de la sección: f es un difeomorfismo de una variedad compacta M de dimensión d , con todos sus puntos periódicos hiperbólicos. \mathcal{U} es un entorno de f en la topología C^1 , L es el entero asociado al entorno \mathcal{U} , dado por la versión uniforme del connecting lemma (teorema 2.3), k_d es el entero dado por el teorema de existencia de un tour topológico (teorema 2.4), y $N = 10dL$.

Corolario 2.10. *Existen una familia finita de cajas de perturbación \mathcal{B}_0 de largo L de soportes disjuntos dos a dos, asociadas a (f, \mathcal{U}) , una familia finita de cuadrados de \mathcal{B}_0 , \mathcal{C}_0 , y una familia de compactos, \mathcal{D}_0 , tales que*

1. cada cuadrado de \mathcal{C}_0 contiene exactamente un compacto de \mathcal{D}_0 ,

2. si $x \notin W_\delta^s(\text{Per}_{k_d N}(f))$ entonces $f^n(x)$ pertenece al interior de algún compacto de la familia \mathcal{D}_0 , para algún $n > 0$,
3. si $x \notin W_\delta^u(\text{Per}_{k_d N}(f))$ entonces $f^{-n}(x)$ pertenece al interior de algún compacto de la familia \mathcal{D}_0 , para algún $n > 0$,
4. para todo x , existe $t \in \{0, \dots, N\}$ tal que $f^t(x) \notin \text{sop } \mathcal{B}_0 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} \text{sop } B$.

Demostración. Sea U un tour topológico para N dado por el teorema 2.4, y sea $V \subset U$ un tour topológico compacto dado por el corolario 2.9. Sea U_0 una componente conexa de U y $V_0 = U_0 \cap V$. Como las componentes de U son arbitrariamente pequeñas podemos suponer que tenemos una carta local $\varphi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$ dada por la versión uniforme del connecting lemma.

Cubrimos \mathbb{R}^d con cubos cuadrículados de igual largo de forma que el cubo cuadrículado de todo cuadrado que intersecta $\varphi_0(V_0)$ está contenido en $\varphi_0(U_0)$. Estos cubos cuadrículados son cajas de perturbación. Obtenemos entonces una cantidad finita de cajas de perturbación de largo L , \mathcal{P}_0 , de soportes disjuntos dos a dos (recordamos que una caja de perturbación es un cubo abierto) cuyas clausuras tienen a V_0 en su interior. Repetimos este proceso para $f^{2iL}(U_0)$ para cada $i \in \{1, \dots, 5d - 1\}$, y obtenemos una familia finita de cajas de perturbación \mathcal{P}_i .

Las familias $\{f^{-2iL}(\mathcal{P}_i)\}_0^{5d-1}$ están contenidas en U_0 y cada una contiene a V_0 en su interior. Podemos modificar un poco cada \mathcal{P}_i y suponer que los bordes de los cubos cuadrículados de las familias $f^{-2iL}(\mathcal{P}_i)$ están en posición general. Hecho este supuesto, obtenemos que un punto de V_0 puede pertenecer a lo sumo al borde de d cubos cuadrículados de $\{f^{-2iL}(\mathcal{P}_i)\}$. Como tenemos $5d$ familias de cajas de perturbación, cada punto de V_0 pertenece al interior de al menos $4d$ cubos cuadrículados de las familias.

Preocupándonos por los puntos que están en los bordes de alguno de los cuadrados reemplazamos cada cubo cuadrículado de \mathbb{R}^d por un cubo del mismo centro homotético de razón ρ , con ρ muy cercano a 1. Obtenemos así, repitiendo el proceso anterior, familias de cajas $\mathcal{P}_{i,\rho}$ de clausuras dos a dos disjuntas. Para ρ suficientemente cercano a 1 cada punto de V_0 pertenece al interior de al menos $4d$ cuadrados de las familias $f^{-2iL}(\mathcal{P}_{i,\rho})$.

Como V_0 es compacto, obtenemos una familia finita de cuadrados, Γ_i , de $\mathcal{P}_{i,\rho}$ tal que su unión Σ_i verifica que todo punto de V_0 está en el interior de al menos $4d$ compactos de $\{f^{-2iL}(\Sigma_i)\}$. Podemos suponer que los bordes de los cuadrados de familias $f^{-2iL}(\Gamma_i)$ dos a dos diferentes están en posición general, entonces, un punto de V_0 puede estar en el borde de, a lo sumo, d cuadrados. En particular, todo punto pertenece al interior de al menos a $4d$ cuadrados de las familia $f^{-2iL}(\Gamma_i)$. En particular, todo punto de V_0 está en el interior de algún cuadrado de la familia $f^{-2iL}(\Gamma_i)$.

Repetiendo este proceso para cada componente de U que intersecta V , que son finitas por ser V compacto, obtenemos la familia de cajas \mathcal{B}_0 y de cuadrados \mathcal{C}_0 buscadas. Aplicando la definición de tour topológico obtenemos que todo punto de $M - W_\delta^s(\text{Per}_{k_d N})$ tiene un iterado futuro en el interior de algún cuadrado de las familias Γ_i . De la misma forma todo punto de $M - f^N(W_\delta^u(\text{Per}_{k_d N}(f)))$ en algún iterado pasado entra en $f^N(V)$, por tanto en el interior de algún cuadrado de la familia Γ_i .

Remarcamos que por construcción, los soportes de las cajas son dos a dos disjuntos y todo punto de M tiene algún iterado entre 0 y N fuera de $\text{sop } \mathcal{B}_0$.

Para obtener la familia \mathcal{D}_0 tomamos un compacto dentro de cada cuadrado de $f^{-2iL}(\Gamma_i)$ tales que la unión de sus interiores siga cubriendo V . \square

Estudiamos ahora la existencia de cajas de perturbación cerca de los puntos periódicos.

Proposición 2.11. *Sea γ una órbita periódica hiperbólica y V un entorno de ella. Existen un entorno W de γ , dos familias de cajas de perturbación, $\mathcal{E}(\gamma)$ y $\mathcal{S}(\gamma)$ de largo L , de soportes contenidos en V y dos a dos disjuntos, dos familias de cuadrados de \mathcal{E} y \mathcal{S} respectivamente, $\mathcal{C}(\mathcal{E}, \gamma)$ y $\mathcal{C}(\mathcal{S}, \gamma)$, dos familias de compactos $\mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ y $\mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$, y un entero $n_0 = n_0(\gamma)$ tal que:*

1. $\overline{W} \subset V$,
2. cada cuadrado de $\mathcal{C}(\mathcal{E}, \gamma)$ (resp. $\mathcal{C}(\mathcal{S}, \gamma)$) contiene exactamente un compacto de $\mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ (resp. $\mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$),
3. para todo par $D_e \in \mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ y $D_s \in \mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$ existe $n \leq n_0$ tal que $f^n(D_e) \cap D_s \neq \emptyset$,

4. para todo punto x de $W - W^s(\gamma)$ existe n tal que $f^n(x) \in \text{int } D$, para algún compacto $D \in \mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$ y $f^t(x) \in V$ para $0 \leq t \leq n$. Además, si $f(x) \notin W$ entonces $n \leq n_0$,
5. para todo punto x de $W - W^u(\gamma)$ existe n tal que $f^{-n}(x) \in \text{int } D$, para algún compacto $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ y $f^{-t}(x) \in V$ para $0 \leq t \leq n$. Además, si $f^{-1}(x) \notin W$ entonces $n \leq n_0$.

Demostración. Razonando análogamente a la prueba del teorema 2.4 podemos encontrar en pequeño abierto disjunto de sus $N = 10dL$ primeros iterados, $U^s \cup U^u \subset V$, tal que los iterados futuros de U^s unidos con $W_\delta^u(\gamma)$ contienen un pequeño entorno de γ , y la unión de los iterados pasados de U^u con $W_\delta^s(\gamma)$ contiene un pequeño entorno de γ .

De la misma forma que en el corolario anterior encontramos una familia de cajas, $\mathcal{E} \subset \text{int} \bigcup_0^N f^i(U^s)$ de soportes disjuntos dos a dos. Además encontramos una familia finita de cuadrados $\mathcal{C}(\mathcal{E}, \gamma)$ y una familia de compactos $\mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ con cada compacto contenido en el interior de un cuadrado de $\mathcal{C}(\mathcal{E}, \gamma)$ tal que el interior de cada compacto de $\mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ interseca $W_\delta^s(\gamma)$.

Razonamos análogamente para U^u y encontramos la familia de cajas \mathcal{S} , la familia finita de cuadrados $\mathcal{C}(\mathcal{S}, \gamma)$ y la familia de compactos $\mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$ tal que el interior de cada compacto interseca a $W_\delta^u(\gamma)$.

A partir de λ -lema, si $D_e \in \mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ y $D_s \in \mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$ existe algún $n = n(D_e, D_s)$ tal que $f^n(D_e) \cap D_s \neq \emptyset$.

Sean $D(\mathcal{E}, \gamma)$ y $D(\mathcal{S}, \gamma)$ la union de todos los elementos de las familias $\mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ y $\mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$ respectivamente. Para cada n consideramos $D_n(\mathcal{E})$ como la imagen por f^n de los puntos en $\text{int } D$ para cada $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$, tal que sus primeros iterados están en V . Mas precisamente,

$$D_n(\mathcal{E}) = f^n \left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)} \text{int } D \right) \cap \bigcap_0^{n-1} f^{-j}(V).$$

Sea

$$W_e = W_\delta^u(\gamma) \cup \bigcup_{n \geq 0} D_n.$$

W_e contiene un entorno de γ , V_e . Por construcción si $x \in V_e - W_\delta^u(\gamma)$ entonces x posee un iterado negativo $f^{-n}(x)$ en el interior de un compacto de $\mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ tal que $f^{-i}(x) \in V$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.

Razonando de la misma forma para la familia \mathcal{S} obtenemos un conjunto W_s de γ que contiene un entorno de γ tal que todo punto en ese entorno, fuera de la variedad estable local de γ , posee un iterado positivo en el interior de algún elemento de $\mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$ y todos los iterados anteriores en V .

Sea W_0 un entorno de γ contenido en $W_s \cap W_e$. Todo punto de W_0 fuera de la variedad estable local de γ entra, en el futuro, al interior de algún elemento de $\mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$ antes de salir de V , y todo punto de W_0 fuera de la variedad inestable local de γ , entra, en el pasado, al interior de algún elemento de $\mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ antes de salir de V . Si pudiéramos acotar el tiempo de llegada a $\mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$ uniformemente para todo $z \in W_0$ tal que $f(z) \notin W_0$, y lo mismo para el pasado y $\mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$, W_0 sería nuestro candidato. Para asegurar esto elegimos W mas pequeño como sigue.

Tenemos dominios fundamentales de las variedades estables e inestables locales, Γ_e y Γ_s , contenidos en W_0 , tal que el tiempo que demoran los puntos de $\bar{\Gamma}_e$ y $\bar{\Gamma}_s$ en encontrar $\text{int } \mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ y $\text{int } \mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$ es acotado. Esta misma acotación sirve para un pequeño entorno tubular Δ_e y Δ_s de $\bar{\Gamma}_e$ y $\bar{\Gamma}_s$ respectivamente. Elegimos ahora W entorno de γ tal que si un punto en el primer iterado futuro sale de W , o en el primer iterado pasado sale de W , necesariamente pertenece a $\Delta_e \cup \Delta_s$. Para concluir la prueba tomamos n_0 mayor que esta acotación y que todos los $n(D_e, D_s)$. \square

2.5. Prueba del teorema 2.1

Recordamos que M es una variedad compacta, f es un difeomorfismo C^1 con todos sus puntos periódicos hiperbólicos, y $x \dashv y$. Tenemos de la sección anterior una familia de cajas de perturbación \mathcal{B} de largo L , asociadas a un entorno \mathcal{U} de f en la topología C^1 , de soportes disjuntos dos a dos. A saber

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \bigcup_{\gamma \in \text{Per}_{k_d N}(f)} \mathcal{E}(\gamma) \cup \mathcal{S}(\gamma),$$

donde $N = 10dL$. Consideramos también la familia finita de cuadrados \mathcal{C} , definida análogamente. Cada compacto

$$\tilde{D} \in \tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D}_0 \cup \bigcup_{\gamma \in \text{Per}_{k_d N}(f)} \mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma) \cup \mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$$

está contenido en un cuadrado C de \mathcal{C} , como C es abierto podemos encontrar un compacto $D \subset C$ que contiene \tilde{D} en su interior. Llamamos \mathcal{D} a esta familia de compactos. Esta distinción entre las familias \mathcal{D} y $\tilde{\mathcal{D}}$ es clave en la prueba del lema 2.12.

Estamos ahora en condiciones de probar el connecting lemma para pseudo órbitas. Esta sección esta dedicada a asegurar que podemos encontrar una pseudo órbita de x a y que preserva la cuadrilla de todas las cajas de \mathcal{B} y no realiza saltos fuera de ellas.

Podemos asumir lo siguiente:

- y no está en la órbita futura de x : de ser así no hay nada que probar.
- $x, y \notin \text{Per}(f)$: si $x \in \text{Per}(f)$ podemos encontrar un punto arbitrariamente cerca de x , x_0 , tal que $x_0 \dashv y$: por simplicidad supongamos que x es fijo, tomamos dos pequeños entornos de x , $B(x, \delta)$ y $B(x, 2\delta)$. Si ε es suficientemente pequeño toda ε -pseudo órbita de x a y tiene algún punto en el anillo $B(x, 2\delta) - B(x, \delta)$, tomando un punto de acumulación de estos puntos obtenemos x_0 .
- $x, y \notin \text{sop } \mathcal{B}$: como $x \dashv y$ tenemos que $f^i(x) \dashv f^j(y)$, podemos elegir i y j , ambos menores que N , tales que $f^i(x), f^j(y) \notin \text{sop } B$, si podemos conectar $f^i(x)$ con $f^j(y)$ por perturbaciones arbitrariamente pequeñas, entonces también podemos hacerlo con x e y .
- El entorno \mathcal{U} de f verifica la siguiente condición: si g_1, \dots, g_l es una familia de perturbados f de soportes disjuntos entonces $g_1 \circ \dots \circ g_l \in \mathcal{U}$.

El siguiente lema nos asegura una cota de tiempo para el cual una pseudo órbita de saltos suficientemente pequeños entra a una caja de perturbación de la familia \mathcal{B} . Es importante remarcar que el tiempo no depende de la pseudo órbita elegida, si no que solamente depende del tamaño de los saltos.

Lema 2.12. *Existen n_1 y $\varepsilon_0 > 0$ tales que si $x = x_0, \dots, x_k = y$ es una ε_0 -pseudo órbita de x a y entonces existe una sucesión de índices $0 = t_0 < \dots < t_r = k$ tales que para todo $s \in \{1, \dots, r-1\}$ se tiene x_{t_s} pertenece a un compacto D_s de la familia \mathcal{D} . Mas aún, para todo $s \in \{0, \dots, r-1\}$ se tiene que $t_{s+1} - t_s \leq n_1$ o existe una órbita periódica γ de $\text{Per}_{k_d N}(f)$ tal que $D_s \in \mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ y $D_{s+1} \in \mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$.*

Demostración. Elegimos $\delta > 0$ suficientemente pequeño para que $W_\delta^s(p) \cap W_\delta^u(q) = \emptyset$ si $p, q \in \text{Per}_{k_d N}(f)$, y tomamos entornos disjuntos de cada órbita periódica γ de período menor a $k_d N$, $V(\gamma)$, que no contengan a x y a y . Esto es posible porque, como f tiene todos sus puntos periódicos hiperbólicos, $\text{Per}_{k_d N}(f)$ es finito. Para cada $V(\gamma)$ consideramos el entorno $W(\gamma)$ dado por la proposición 2.11.

Como M es compacta, tenemos una cota para el tiempo que una órbita demora en entrar al interior de

$$\mathbf{R} = \bigcup_{\gamma \in \text{Per}_{k_d N}(f)} W(\gamma) \cup \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$$

(sabemos que necesariamente toda órbita lo hace), llamemos a esta cota n_1 , que la elegimos también mayor que todos los enteros $n_0(\gamma)$ para cada elemento de $\text{Per}_{k_d N}(f)$. Es claro que

$$\tilde{\mathbf{R}} = \bigcup_{\gamma \in \text{Per}_{k_d N}(f)} \tilde{W}(\gamma) \cup \bigcup_{D \in \tilde{\mathcal{D}}} \tilde{D} \subset \mathbf{R}$$

donde $\tilde{W}(\gamma)$ se define análogamente que $W(\gamma)$ pero para los compactos \tilde{D} . La elección de \mathbf{R} y $\tilde{\mathbf{R}}$ es para asegurarnos que las pseudo órbitas entran al interior de los compactos de \mathcal{D} como sigue. Consideramos η como la distancia de $\tilde{\mathbf{R}}$ al complemento de \mathbf{R} , o sea,

$$\eta = d(\tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{R}^c).$$

Tenemos entonces un ε_0 suficientemente pequeño tal que toda pseudo órbita de longitud n_1 sea η sombreada por un un segmento de órbita. Más aún, si z_0, \dots, z_{n_1} es una ε_0 -pseudo órbita entonces $d(f^i(z_0), z_i) < \eta$ y $d(z_0, f^{-i}(z_i)) < \eta$ para todo $i \in \{1, \dots, n_1\}$.

Por otro lado, sea x_0, \dots, x_k una ε_0 -pseudo órbita de x_0 a x_k totalmente contenida en $V(\gamma)$. Si x_j pertenece a $W(\gamma)$ y $f(x_j) \notin W(\gamma)$ tenemos que existe j' con $0 \leq j - j' \leq n_1$ tal que $x_{j'}$ pertenece al interior de algún compacto de la familia $\mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma) \subset \mathcal{D}$.

Consideramos ahora una ε_0 -pseudo órbita de x a y , x_0, \dots, x_k . Si $x_j \in W(\gamma)$ definimos el segmento de pseudo órbita $x_{e(j)}, \dots, x_{s(j)}$ como el segmento maximal, de la pseudo órbita original, que contiene a x_j , totalmente contenido en $V(\gamma)$, de hecho, $e(j)$ es el menor índice de este segmento que pertenece a $\mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ y $s(j)$ es el mayor índice que pertenece a $\mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$.

Es claro que dos subconjuntos de índices de la forma

$$\{e(j), \dots, s(j)\}, \{e(j'), \dots, s(j')\}$$

coinciden o son disjuntos. Elegimos ahora el subconjunto de índices, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = k$, de la siguiente forma. En nuestro subconjunto ponemos todos los elementos de la forma $e(j)$ y $s(j)$, y agregamos también un índice j cada vez que x_j pertenece al interior de algún compacto de \mathcal{D} , pero no existe j' tal que $e(j') < j < s(j')$. Resta mostrar que los intervalos de tiempo $\{t_s, \dots, t_{s+1}\}$ que no son de la forma $\{e(j), \dots, s(j)\}$ son de longitud menor que n_1 . Sabemos que todo segmento de órbita de longitud menor que n_1 entra en $\tilde{\mathcal{R}}$, por tanto, todo segmento de ε_0 -pseudo órbita de longitud menor que n_1 entra a \mathcal{R} , por la propiedad de sombreado elegida y la elección de η . Pero como el segmento considerado no es de la forma $\{e(j), \dots, s(j)\}$, tenemos que el segmento entra al interior de algún compacto de la familia \mathcal{D}_0 , de donde $t_{s+1} - t_s \leq n_1$. Esto culmina la prueba. \square

Construimos ahora una pseudo órbita de x a y que preserva la cuadrilla de todas las cajas de \mathcal{B} , y no realiza saltos fuera de $\text{sop } \mathcal{B}$.

Proposición 2.13. *Existe una ε_1 -pseudo órbita de x a y , preservando la cuadrilla, que no realiza saltos fuera de $\text{sop } \mathcal{B}$ si ε_1 es suficientemente pequeño.*

Demostración. Tomamos η_1 menor que la distancia de cada compacto D de \mathcal{D} al complemento del cuadrado que lo contiene. Tenemos un entero n_1 dado por el lema anterior, tomamos entonces $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ tal que todo segmento de ε_1 -pseudo órbita, z_0, \dots, z_m , de longitud menor a n_1 verifica la siguiente condición de sombreado:

$$d(f^i(z_0), z_i) < \eta_1 \text{ y } d(f^{-i}(z_i), z_0) < \eta_1.$$

Sea ahora una ε_1 -pseudo órbita de x a y dada, $x = x_0, \dots, x_k = y$. Del lema anterior obtenemos una familia de índices $0 = t_0 < \dots < t_r = k$ tales que cada x_{t_s} pertenece

a un compacto D_s de la familia \mathcal{D} , y cada vez que $t_{s+1} - t_s > n_1$ existe una órbita periódica γ de período menor a $k_d N$, tal que $D_s \in \mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ y $D_{s+1} \in \mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$.

Es clave observar que, por cómo elegimos η_1 y ε_1 , si $t_{s+1} - t_s \leq n_1$ entonces $f^{t_s - t_{s+1}}(x_{t_{s+1}})$ y x_{t_s} pertenecen al interior del mismo cuadrado de \mathcal{C} , y lo mismo acontece con $f^{t_{s+1} - t_s}(x_{t_s})$ y $x_{t_{s+1}}$.

Sabemos que $t_1 - t_0 \leq n_1$, reemplazamos entonces los puntos x_i para $i = 0, \dots, t_1$ por $\tilde{x}_i = f^i(x)$. Cada vez que $t_{s+1} - t_s \leq n_1$ consideramos el nuevo segmento de pseudo órbita $\tilde{x}_{t_s+1}, \dots, \tilde{x}_{t_{s+1}}$ dado por $\tilde{x}_i = f^{i-t_{s+1}}(x_{t_{s+1}})$ para $i = 1, \dots, t_{s+1}$. Este segmento de pseudo órbita realiza un solo salto en $\text{sop } \mathcal{B}$, a saber de \tilde{x}_{t_s} a $\tilde{x}_{t_{s+1}}$.

Si $t_{s+1} - t_s > n_1$ entonces tenemos una órbita periódica γ tal que $D_s \in \mathcal{D}(\mathcal{E}, \gamma)$ y $D_{s+1} \in \mathcal{D}(\mathcal{S}, \gamma)$. Ahora, como $n_1 > n_0(\gamma)$ tenemos un segmento de órbita, $z, \dots, f^n(z)$ con $n \leq n_1$ tal que z pertenece al interior del mismo cuadrado de x_{t_s} y $f^n(z)$ pertenece al interior del mismo cuadrado que $x_{t_{s+1}}$, reemplazamos entonces el segmento de pseudo órbita $x_{t_s}, \dots, x_{t_{s+1}}$ por el segmento de órbita $z, \dots, f^n(z)$ contenido en $W(\gamma)$.

La pseudo órbita así obtenida es una pseudo órbita de x a y que preserva la cuadrilla de las cajas de \mathcal{B} y no realiza saltos fuera de $\text{sop } \mathcal{B}$. \square

Para culminar la prueba del teorema solo resta aplicar sucesivamente la definición de caja de perturbación. Remarcamos que, como los soportes de los elementos de \mathcal{B} son disjuntos dos a dos, un segmento de órbita creado al perturbar en un elemento de \mathcal{B} , no se rompe al perturbar en otro. Esto finaliza la prueba.

Capítulo 3

Piezas elementales

3.1. Introducción

A partir del corolario 1.1 tenemos que genéricamente $\overline{\text{Per}(f)} = L(f) = \Omega(f) = \mathcal{R}(f)$. Las clases de recurrencia nos dan entonces una descomposición de $L(f)$ en compactos invariantes con los dos requisitos principales de una pieza elemental:

- Dadas dos clases de recurrencia tenemos una filtración que las separa (corolario 1.14). Esto implica la maximalidad según la inclusión ya que la dinámica fuera de $\mathcal{R}(f)$ es errante, e implica la no existencia de ciclos entre las clases.
- Como las pseudo órbitas de puntos de una clase de recurrencia pueden elegirse dentro de la clase (corolario 1.15), esta no puede escribirse como unión de dos compactos invariantes disjuntos.

El siguiente paso es dar una descripción lo mas detallada posible de la dinámica en cada clase de recurrencia.

Definición 3.1. Un conjunto cerrado e invariante Λ es *débilmente transitivo* si dado un entorno W de Λ y abiertos U, V que intersectan Λ , hay un segmento de órbita $z, \dots, f^n(z)$ ($n \geq 1$) totalmente contenido en W , tal que $z \in U$ y $f^n(z) \in V$.

Obviamente un conjunto transitivo es débilmente transitivo: una equivalencia de la transitividad es que el segmento de órbita de la definición anterior puede elegirse *dentro*

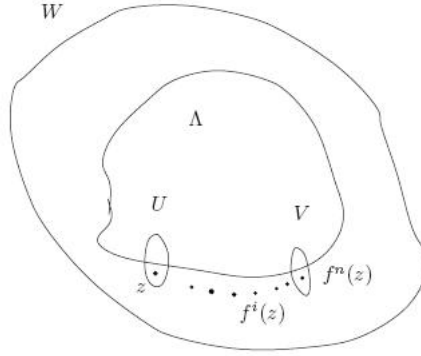


Figura 3.1: Un conjunto débilmente transitivo Λ .

de Λ . El ω -límite de un punto es también débilmente transitivo: dados $x, y \in \omega(z)$ y entornos $U(x)$ y $V(y)$ tenemos un iterado futuro de z en U , $f^{n_1}(z)$, y tenemos también $f^{n_2}(z) \in V$. Podemos suponer que $n_2 > n_1$. El iterado $n_2 - n_1$ de U intersecta V , y el segmento de órbita $f^{n_1}(x), \dots, f^{n_2}(x)$ puede elegirse dentro de un entorno W de $\omega(z)$ dado.

El límite en la topología de Hausdorff de órbitas periódicas es también débilmente transitivo. Si γ_n son órbitas periódicas que convergen a Λ en la topología de Hausdorff entonces dado un entorno W de Λ tenemos una órbita periódica γ_{n_0} cerca de *todos* los puntos de Λ , en particular podemos elegir γ_{n_0} para que intersecte dos abiertos dados que intersectan Λ .

Como consecuencia del trabajo en este capítulo quedará demostrado el siguiente teorema espectral C^1 genérico.

Teorema 3.1 (Espectral genérico). *Sea f un difeomorfismo C^1 genérico de una variedad compacta, entonces:*

1. *Las clases de recurrencia de f son débilmente transitivos maximales y viceversa.*
2. *Las clases homoclínicas son clases de recurrencia.*
3. *Si \mathcal{C} es una clase de recurrencia y \mathcal{U} es un entorno de \mathcal{C} en la topología de Hausdorff entonces hay una clase homoclínica en \mathcal{U} .*

Del item 2 tenemos que genéricamente las clases de recurrencia que contienen puntos periódicos son la clase homoclínica de cualquiera de ellos, en particular dos clases homoclínicas coinciden o son disjuntas. A partir del item 3 tenemos que las clases de recurrencia sin puntos periódicos nunca son aisladas e implican la existencia de infinitas clases homoclínicas diferentes. Uno podría esperar que esto último no aconteciera genéricamente, sin embargo el siguiente teorema de Bonatti-Diaz en [4] muestra lo contrario.

Teorema 3.2. *Sea M una variedad compacta de dimensión 3. Existe un abierto no vacío \mathcal{U} de $\text{Diff}^1(M)$ y un subconjunto residual de \mathcal{U} , \mathfrak{R} , tal que si $f \in \mathfrak{R}$ entonces f presenta conjuntos de Cantor minimales estables Lyapunov para f y f^{-1} , sin puntos periódicos.*

Como queda claro a partir de la prueba del corolario 3.13 los conjuntos de Cantor del teorema anterior son débilmente transitivos maximales. Cualquier residual de $\text{Diff}^1(M^3)$ presenta ejemplos como el anterior ya que necesariamente intersecta \mathfrak{R} .

Mostramos ahora, como consecuencia del connecting lemma para pseudo órbitas (teorema 2.1) el item 1 del teorema espectral genérico.

Teorema 3.3. *Existe un conjunto residual de $\text{Diff}^1(M)$, \mathcal{G} , tal que si $f \in \mathcal{G}$ entonces $x \dashv y$ si y solo si $x \prec y$.*

Demostración. Es claro que $x \prec y$ implica $x \dashv y$ para todo $f \in \text{Diff}^1(M)$. Para mostrar la otra implicancia consideramos una base numerable de la topología de M , \mathcal{V} . Para cada $U, V \in \mathcal{V}$ consideramos $\mathcal{O}(U, V) = \bigcup_n \mathcal{O}_n(U, V)$ donde $\mathcal{O}_n(U, V)$ son los difeomorfismos que verifican $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Este conjunto es abierto por serlo U y V . Consideramos ahora $\mathcal{O}_\infty(U, V) = \text{Diff}^1(M) - \overline{\mathcal{O}(U, V)}$. Sea \mathcal{KS} el residual de los difeomorfismos Kupka-Smale. Afirmamos que el conjunto

$$\mathcal{G} = \mathcal{KS} \cap \bigcap_{U, V \in \mathcal{V}} (\mathcal{O}_\infty(U, V) \cup \mathcal{O}(U, V))$$

es el residual buscado. En efecto, sean $f \in \mathcal{G}$ y x, y dos puntos tales que $x \dashv y$. Tomamos $x \in U \in \mathcal{V}$ e $y \in V \in \mathcal{V}$. Ahora, a partir del teorema 2.1, f es aproximado por difeomorfismos tales que y está en la órbita futura de x , o sea f es aproximado por

difeomorfismos en $\mathcal{O}(U, V)$, por tanto $f \notin \mathcal{O}_\infty(U, V)$, o sea, como $f \in \mathcal{G}$, tenemos que $f \in \mathcal{O}(U, V)$ de donde $x \prec y$. \square

Corolario 3.4. *Genéricamente en $\text{Diff}^1(M)$ las clases de recurrencia son débilmente transitivos maximales.*

Demostración. Es inmediato de la definición que si Λ es débilmente transitivo y $x, y \in \Lambda$ entonces $x \prec y$, en particular $x \prec x$, de donde $\Lambda \subset \Omega(f)$. Mas aún, un conjunto débilmente transitivo está contenido en una clase de recurrencia, esto es obvio ya que $x \prec y$ implica $x \dashv y$.

Sea \mathcal{G} el residual dado por el teorema anterior y sea $f \in \mathcal{G}$. Para f las relaciones \dashv y \prec coinciden, de donde sus simetrizaciones también. En particular la relación \succ es una relación de equivalencia en $\Omega(f) = \mathcal{R}(f)$. Las clases de \vdash son las clases de recurrencia, las clases de \succ son los conjuntos débilmente transitivos maximales. \square

3.2. Conjuntos débilmente transitivos y órbitas periódicas

En esta sección probamos el siguiente teorema que nos permite aproximar conjuntos débilmente transitivos por órbitas periódicas en la topología de Hausdorff.

Teorema 3.5. *Sea f un difeomorfismo de una variedad compacta M , con $\text{Per}_n(f)$ finito para todo n y sea Λ un conjunto débilmente transitivo. Dado $\eta_0 > 0$ y \mathcal{U} entorno de f en $\text{Diff}^1(M)$ existe $g \in \mathcal{U}$, y una órbita periódica para g , γ , tal que $d_H(\Lambda, \gamma) < \eta_0$.*

El teorema anterior enuncia que via una pequeña perturbación C^1 , podemos encontrar una órbita periódica cercana a todos los puntos de Λ . Para encontrar esta órbita la siguiente idea es clave. Dados dos puntos $x, x' \in \Lambda$ tenemos segmentos de órbita que comienzan en entornos arbitrariamente pequeños de x y terminan en entornos arbitrariamente pequeños de x' . De la misma forma tenemos la misma propiedad de x' a x , eso es simplemente la definición de transitividad débil. Aplicando el connecting lemma podemos conectar y obtener una órbita periódica. Surgen entonces dos problemas:

- hay que realizar con cuidado las perturbaciones para no romper órbitas previamente conectadas,
- tenemos que elegir convenientemente las órbitas a conectar para asegurarnos que luego de la perturbación la órbita periódica encontrada sea cercana a todos los puntos de Λ .

Proposición 3.6. *Sea Λ un conjunto débilmente transitivo que no es una órbita periódica. Si $\text{Per}_n(f)$ es finito para todo n entonces los puntos no periódicos de Λ son densos en Λ .*

Demostración. Si γ es una órbita periódica aislada de Λ entonces podemos encontrar entornos disjuntos U de γ y V de $\Lambda - \gamma$ tales que $f(U) \cap V = \emptyset$ y $f(V) \cap U = \emptyset$, esto es una contradicción con la definición de transitividad débil.

El conjunto $\text{Per}_n(f) \cap \Lambda$ es finito y de puntos no aislados de Λ , por tanto su unión es magra en Λ . Aplicando el teorema de Baire tenemos que los puntos no periódicos de Λ son densos. \square

Proposición 3.7. *Sea Λ un conjunto débilmente transitivo y $\eta_0 > 0$. Entonces existe $X \subset \Lambda$ finito con al menos dos puntos tal que:*

1. $d_H(\mathcal{O}(X), \Lambda) < \eta_0$,
2. si $x, y \in X$ entonces $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) = \emptyset$.

Demostración. Como Λ es compacto obtenemos una cantidad finita de puntos $X' \subset \Lambda$ que verifica $d_H(X', \Lambda) < \eta_0$. A partir de la proposición anterior podemos suponer que X' consta de puntos no periódicos. Basta entonces eliminar ciertos puntos de X' para obtener las propiedades buscadas. \square

De aquí en más estamos en las hipótesis del teorema 3.5.

El conjunto $X_{x,x'}$

El conjunto X dado por la proposición 3.7 quedará fijo hasta el final de la sección. Dados $x, x' \in X$ queremos encontrar los puntos de X que son necesariamente visitados

por órbitas de entornos de x a entornos de x' . Este será el conjunto $X_{x,x'}$ que definimos a seguir. Fijamos un natural L .

Sean U, U' entornos de x y x' respectivamente, decimos que un segmento de órbita $z_0, \dots, z_n = f^n(z_0)$ conecta U y U' si $z_0 \in f^L(U)$ y $z_n \in U'$. Siempre existe tal órbita ya que Λ es débilmente transitivo. Además podemos elegir esta órbita dentro de un entorno de Λ dado y disjunta de X . Exigimos que $z_0 \in f^L(U)$ porque luego aplicaremos el connecting lemma de largo L en el tubo $U \cup f(U) \cup \dots \cup f^L(U)$. Decimos también que el segmento de órbita z_0, \dots, z_n ε -visita $y \in X$, si $d(z_i, y) < \varepsilon$ para algún $i \in \{0, \dots, n\}$.

Fijados U, U', ε y z_0, \dots, z_n un segmento de órbita que conecta U y U' definimos $N(z_0, \dots, z_n, \varepsilon)$ como el número de puntos de X que son ε -visitados por z_0, \dots, z_n , es obviamente finito porque X lo es. Minimizando $N(z_0, \dots, z_n, \varepsilon)$ en las órbitas que conectan U y U' definimos $N(U, U', \varepsilon)$.

Si tomamos U y U' cada vez mas pequeños, el número $N(U, U', \varepsilon)$ aumenta ya que si $V \subset U$ y $V' \subset U'$ entonces toda órbita que conecta V con V' necesariamente conecta U con U' . De cualquier forma $N(U, U', \varepsilon)$ está acotado por el cardinal de X . Llamamos entonces $N(x, x', \varepsilon)$ el máximo de $N(U, U', \varepsilon)$ cuando U y U' decrecen.

Si tomamos ε mas pequeño el número $N(x, x', \varepsilon)$ decrece, llamamos $N(x, x')$ al mínimo de $N(x, x', \varepsilon)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Es claro que existe un ε' tal que para todo $\varepsilon < \varepsilon'$ se tiene que $N(x, x') = N(x, x', \varepsilon)$ y los conjuntos $f^k(B(y, \varepsilon'))$ con $y \in X$ y $k \in \{0, \dots, L\}$ son disjuntos dos a dos.

Proposición 3.8. *Dados $x, x' \in X$ y ε' definido en el párrafo anterior existen entornos $U = U(x, x', \varepsilon)$ y $U' = U'(x, x', \varepsilon)$ con $\varepsilon < \varepsilon'$ tales que para todos V, V' entornos de x y x' respectivamente con $V \subset U$ y $V' \subset U'$ existe un segmento de órbita z_0, \dots, z_n que conecta V y V' , y ε -visita exactamente $N(x, x')$ puntos de X . Si llamamos $X_{x,x'}$ al conjunto de puntos ε -visitados por este segmento, entonces cualquier subórbita de z_0, \dots, z_n que conecta V con V' ε -visita exactamente $X_{x,x'}$.*

Demostración. A partir de las definiciones de $N(x, x', \varepsilon)$ es clara la existencia de los entornos $U(x, x', \varepsilon), U'(x', x, \varepsilon)$ y también es clara la existencia del segmento de órbita que conecta V y V' . Como X es finito existen finitos subconjuntos con cardinal $N(x, x')$, obtenemos así la existencia de $X_{x,x'}$. La última propiedad se deduce de la minimalidad de $N(x, x')$. \square

La elección del conjunto $X_{x,x'}$ no es única pero quedará fija de aquí en mas.

Elección de órbitas

Proposición 3.9. *Existen puntos $\{x_0, \dots, x_s\} \subset X$ con $s \geq 2$ tales que:*

1. $X = \{x_0, \dots, x_s\} \cup X_{0,1} \cup X_{1,2} \cup \dots \cup X_{s-1,s}$ donde $X_{i,j} = X_{x_i,x_j}$,
2. $\forall k \geq 2$ el punto x_k no pertenece a $\{x_0, \dots, x_{k-1}\} \cup X_{0,1} \cup \dots \cup X_{k-2,k-1}$,
3. hay algún punto en $\{x_0\} \cup X_{0,1}$ que no está en

$$\{x_1, \dots, x_s\} \cup X_{1,2} \cup \dots \cup X_{s-1,s}.$$

Llamamos Y al conjunto de puntos de X que verifican la última condición.

Demostración. Construimos una sucesión de puntos que verifican las primeras dos condiciones de la forma siguiente. Fijamos un punto $x_0 \in X$. Si tenemos construido el punto x_{k-1} tomamos

$$x_k \in X - \{x_0, \dots, x_{k-1}\} \cup X_{0,1} \cup \dots \cup X_{k-2,k-1}.$$

Para obtener la última condición consideramos, de todas las sucesiones $\{x_0, \dots, x_k\}$ que verifican las 2 primeras condiciones, aquella que minimice el cardinal. Sea x_0, \dots, x_s tal sucesión, entonces la última propiedad es satisfecha, si no $\{x_1, \dots, x_s\}$ verifica las 2 primeras condiciones y tiene menos elementos. \square

Tenemos un $\varepsilon' > 0$ dado por la proposición 3.8. Hacemos ahora tres elecciones de ε 's, $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0 = \varepsilon'$ de la siguiente forma. Definido ε_i elegimos ε_{i+1} para que se verifiquen las siguientes dos condiciones.

- Para cada $x \in X$ el connecting lemma asocia un entorno $V_x \subset B(x, \varepsilon_i)$. Tomamos ε_{i+1} para que $B(x, \varepsilon_{i+1}) \subset V_x$ para todo $x \in X$.
- Para cada $x, x' \in X$, la proposición 3.8 vale con $U = B(x, \varepsilon_{i+1})$ y $U' = B(x', \varepsilon_{i+1})$.

Estas condiciones son satisfechas para algún ε_{i+1} porque X es finito. La primer condición nos dice que si un punto p en el futuro entra en $B(x, \varepsilon_{i+1})$ y un punto q en el pasado entra en $f^L(B(x, \varepsilon_{i+1}))$ entonces podemos perturbar f para conectar la órbita de p con q . La segunda condición nos dice que dados $x, x' \in X$ entonces existe un segmento de órbita que conecta $B(x, \varepsilon_{i+1})$ con $B(x', \varepsilon_{i+1})$ y ε_i -visita exactamente $X_{x,x'}$. Con esto tenemos casi probada la siguiente proposición. Hacemos una distinción para los puntos x_0 y x_1 porque necesitamos primero perturbar f cerca de ellos.

Proposición 3.10. *Consideramos los conjuntos $\{x_0, \dots, x_s\}$ e Y dados por la proposición anterior. Para cada $k \in \{0, \dots, s\}$ existen entornos de x_k , $V_k \subset U_k \subset B(x_k, \varepsilon_2)$ y un segmento de órbita $z_k(0), \dots, z_k(n_k)$ que conecta V_k con V_{k+1} ($k < s$). Existen además para cada $y \in Y$ un entorno de y , $V_y \subset U_y = B(y, \varepsilon_1)$ y segmentos de órbita $z_y(0), \dots, z_y(n_y)$ que conectan V_s con V_y tales que:*

1. $V_0 \subset B(x_0, \varepsilon_3)$ y $U_1 \subset B(x_1, \varepsilon_3)$,
2. el connecting lemma uniforme de largo L puede aplicarse en cada V_k y en cada V_y ,
3. para cada $y \in Y$ el segmento $z_y(0), \dots, z_y(n_y)$ ε_0 -visita exactamente $X_{x_s, y}$ y no interseca U_l para todo $l \in \{1, \dots, s\}$,
4. para cada $k \in \{1, \dots, s-1\}$ el segmento $z_k(0), \dots, z_k(n_k)$ ε_0 -visita exactamente el conjunto $X_{k, k+1}$ y no interseca U_l para $l \neq k, k+1$, ni interseca U_y para $y \in Y$,
5. $z_0(0), \dots, z_0(n_0)$ no interseca U_l para $l \in \{2, \dots, s\}$ y ε_2 -visita exactamente $X_{0,1}$.

Ver figura 3.2

Demostración. Ponemos $U_y = B(y, \varepsilon_1)$ y $V_y = B(y, \varepsilon_2)$ para cada $y \in Y$ y ponemos $U_s = B(x_s, \varepsilon_2)$ y $V_s = B(x_s, \varepsilon_3)$. Tenemos para cada $y \in Y$ un segmento de órbita $Z_y = \{z_y(0), \dots, z_y(n_1)\}$ que conecta V_s con V_y y ε_0 -visita exactamente $X_{x_s, y}$.

Definimos los entornos U_k y V_k por inducción. Supongamos que ya están definidos para todo l con $k+1 \leq l \leq s$. Tenemos para cada l un segmento de órbita $Z_l =$

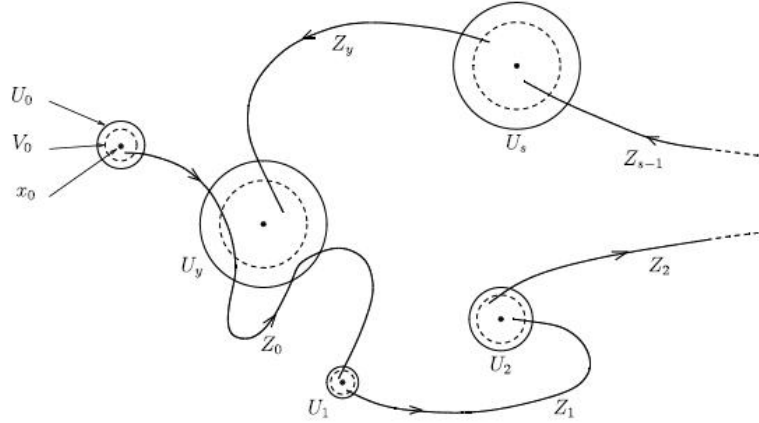


Figura 3.2: Los entornos U_i, V_i y los segmentos de órbita Z_i .

$\{z_l(0), \dots, z_l(n_l)\}$ que conecta V_l con V_{l+1} que podemos tomar fuera de X . Elegimos entonces $U_k \subset B(x_k, \varepsilon_2)$ entorno de x_k que sea disjunto de

$$Z_{k+1} \cup \dots \cup Z_s \cup \bigcup_{y \in Y} Z_y.$$

El connecting lemma asocia a U_k un entorno de x_k , $V_k \subset U_k$. Tenemos entonces un segmento de órbita $Z_k = \{z_k(0), \dots, z_k(n_k)\}$ que conecta V_k con V_{k+1} que ε_0 -visita exactamente $X_{k,k+1}$, como $x_l \notin X_{k,k+1}$ si $l > k + 1$ tenemos que el segmento de órbita no interseca U_l para $l > k + 1$.

Luego de s pasos tenemos definidos $V_1 \subset U_1$ y podemos pedir en el último paso que $U_1 \subset B(x_1, \varepsilon_3)$.

Elegimos ahora un entorno $U_0 \subset B(x_0, \varepsilon_2)$ disjunto de $Z_1 \cup \dots \cup Z_s$ y llamamos $V_0 \subset U_0 \cap B(x_0, \varepsilon_3)$ al entorno dado por el connecting lemma. Llamamos $Z_0 = \{z_0(0), \dots, z_0(n_0)\}$ al segmento de órbita que conecta V_0 con V_1 y ε_2 -visita exactamente $X_{0,1}$. Es claro que este segmento de órbita no interseca U_l con $l \in \{2, \dots, s\}$. Todas las condiciones pedidas son entonces satisfechas. Esto culmina la prueba. \square

Nos resta solamente seleccionar un punto del conjunto Y , que llamaremos x_{s+1} , que nos permitirá cerrar las órbitas encontradas para obtener una órbita periódica cerca del conjunto débilmente transitivo Λ , para un mapa cercano a f . Los segmentos Z_y para $y \in Y - \{x_{s+1}\}$ serán olvidados.

Primero necesitamos conectar los segmentos $Z_0 = \{z_0(0), \dots, z_0(n_0)\}$ y $Z_1 = \{z_1(0), \dots, z_1(n_1)\}$. Recordamos que Z_0 conecta V_0 con V_1 y Z_1 conecta V_1 con V_2 , de donde $z_0(0)$ tiene algún iterado futuro en V_1 y $z_1(0) \in f^L(V_1)$. El connecting lemma nos permite encontrar un difeomorfismo C^1 cercano a f , g_0 , que coincide con f fuera de $U_1 \cup \dots \cup f^L(U_1)$ y tal que $g_0^{m_0}(z_0(0)) = z_1(n_1)$. Como fue explicado en la sección 2.1 el nuevo segmento de órbita consta de tres partes:

- un segmento inicial desde $z_0(0)$ hasta $g_0^{n_a}(z_0(0))$ contenido en

$$Z_0 \cup U_1 \cup \dots \cup f^L(U_1),$$

que conecta V_0 con U_1 y ε_2 -visita exactamente $X_{0,1}$

- un segmento central $g_0^{n_a}(z_0(0)), \dots, g_0^{n_a+L}(z_0(0))$ contenido en $U_1 \cup \dots \cup f^L(U_1)$,
- y el último segmento de órbita, desde $g_0^{n_a+L}(z_0(0))$ hasta $z_1(n_1)$ contenido en

$$Z_1 \cup U_1 \cup \dots \cup f^L(U_1),$$

que conecta U_1 con V_2 y ε_0 -visita exactamente $X_{1,2}$.

De ahora en más escribimos $p = g_0^{n_a}(z_0(0)) \in U_1$. Observamos que algún iterado futuro de p por g_0 es $z_1(n_1)$.

Proposición 3.11. *Existe $x_{s+1} \in Y$ y $n_q \in \{1, \dots, n_a\}$ tal que el segmento de órbita $g_0^{-n_q}(p), \dots, p$ conecta $V_{x_{s+1}}$ con U_1 , y no interseca $U_k \cup \dots \cup f^L(U_k)$ para $k \in \{2, \dots, s\}$. Mas aún, cualquier segmento de la forma $g_0^{-l}(p), \dots, p$ que conecta $U_{x_{s+1}}$ con U_1 ε_0 -visita exactamente el conjunto $Y - \{x_{s+1}\}$.*

Demostración. Consideramos $n_b \in \{0, \dots, n_a\}$ el entero más grande tal que el segmento $g_0^{-n_b}(p), \dots, p$ interseca $f^L(B(y, \varepsilon_0))$ para todo $y \in Y$. n_b existe porque el segmento de órbita $z_0(0), \dots, g_0^{n_a}(z_0(0)) = p$ ε_2 -visita exactamente $X_{0,1}$. El punto $g_0^{-n_b}(p)$ pertenece a $f^L(B(x_{s+1}, \varepsilon_0))$ para algún $x_{s+1} \in Y$. Ahora, necesariamente existe algún entero $n_c \leq n_b$ tal que $g_0^{n_c}(z_0(0)) \in f^L(B(x_{s+1}, \varepsilon_2))$. Ponemos $n_q = n_a - n_c$, entonces $g_0^{-n_q}(p) = g_0^{n_c}(z_0(0)) \in f^L(V_{x_{s+1}})$ y $p \in U_1$ (recordamos que $V_{x_{s+1}} = B(x_{s+1}, \varepsilon_2)$) por tanto el segmento $g_0^{-n_q}(p), \dots, p$ conecta $V_{x_{s+1}}$ con U_1 . Es claro que este segmento no interseca $U_k \cup \dots \cup f^L(U_k)$ para $k \in \{2, \dots, s\}$ ya que está contenido en $Z_0 \cup U_1 \cup \dots \cup f^L(U_1)$.

Ahora, si $g_0^{-l}(p), \dots, p$ es un segmento de órbita que conecta $U_{x_{s+1}}$ con U_1 necesariamente se tiene que $l \leq n_b$, entonces este segmento interseca necesariamente $f^L(B(y, \varepsilon_0))$ para todo $y \in Y$, de donde obtenemos que ε_0 -visita exactamente $Y - \{x_{s+1}\}$. \square

Prueba del teorema 3.5

Enunciamos nuevamente el teorema.

Teorema. *Sea f un difeomorfismo de una variedad compacta M , con $\text{Per}_n(f)$ finito para todo n y sea Λ un conjunto débilmente transitivo. Dado $\eta_0 > 0$ y \mathcal{U} entorno de f en $\text{Diff}^1(M)$ existe $g \in \mathcal{U}$, y una órbita periódica para g , γ , tal que $d_H(\Lambda, \gamma) < \eta_0$.*

Demostración. Fijamos η_0 y consideramos η suficientemente pequeño tal que todo compacto invariante para un mapa cercano a f , que interseca todas las bolas $B(x, \eta)$ con $x \in X$, está necesariamente a menos de η_0 de Λ en la topología de Hausdorff. Esto es posible porque el segmento de órbita de X necesario para estar cerca de Λ es finito (esto es claro a partir de la prueba de la proposición 3.7).

Tenemos de la sección anterior s puntos $\{x_1, \dots, x_{s+1}\}$ y entornos de esos puntos, $V_k \subset U_k$, para cada $k \in \{1, \dots, s+1\}$ y segmentos de órbita Z_k con $k \geq 2$ que conectan V_k con V_{k+1} y ε_0 -vistan exactamente $X_{k,k+1}$, y un segmento de órbita $g_0^{-n_q}(p), \dots, p$ que conecta V_{s+1} con U_1 .

Vamos a construir $s - 1$ perturbaciones por inducción. Dada g_k vamos a construir un perturbado, g_{k+1} , que verifica las siguientes condiciones:

- g_{k+1} coincide con g_k fuera de $U_{k+1} \cup \dots \cup f^L(U_{k+1})$,
- $g_{k+1}^{m_{k+1}}(p) = z_{k+2}(n_{k+2})$ y $g_{k+1}^{-n_q}(p) \in V_{s+1}$,
- cualquier subórbita de $p, \dots, z_{k+1}(n_{k+1})$ ε_0 -vista exactamente $\{x_2, \dots, x_{k+1}\} \cup X_{1,2} \cup \dots \cup X_{k,k+1}$.

Estas perturbaciones se obtienen fácilmente razonando análogamente a la construcción de g_0 .

La última perturbación a realizar, g_{s+1} , es un perturbado de g_s con soporte en $U_{s+1} \cup \dots \cup f^L(U_{s+1})$ que conecta $z_s(n_s)$ con p por tanto p es periódico para g_{s+1} . El último segmento de órbita que conecta $z_s(n_s)$ con p contiene un segmento de órbita de la forma g_0^{-l}, \dots, p que conecta U_{s+1} con U_1 , por tanto ε_0 -vista exactamente $Y - \{x_{s+1}\}$

Lo importante a remarcar es que la órbita de p por g_{s+1} ε_0 -visita X , ya que $p \in U_1$ y $g_{s+1}^{-l}(p) \in f^L(U_{s+1})$. A partir de la suposición inicial obtenemos que la órbita de p por g_{s+1} está a menos de η_0 de Λ en la topología de Hausdorff. \square

3.3. El teorema espectral genérico

Clases de recurrencia con puntos periódicos

Mencionamos anteriormente que un conjunto transitivo es débilmente transitivo. Para cada punto periódico hiperbólico p la clase homoclínica $H(p, f)$ es un conjunto transitivo invariante. Es claro que $H(p, f)$ podría estar contenido estrictamente en un conjunto débilmente transitivo maximal Λ . Esto no ocurre en el contexto genérico como consecuencia del siguiente teorema de Carballo-Morales-Pacífico en [5] (como en el artículo [5] el enunciado es para flujos recomendamos también la referencia [11]). Recordamos que un conjunto invariante Λ es *estable Lyapunov* si dado U abierto que contiene Λ entonces existe V entorno de Λ contenido en U tal que $f^n(V) \subset U$ para todo $n \geq 0$.

Teorema 3.12. *Sea f un difeomorfismo C^1 genérico y p un punto periódico hiperbólico. Entonces $\overline{W^u(p)}$ es estable Lyapunov para f y $\overline{W^s(p)}$ lo es para f^{-1} , además la clase homoclínica de p se obtiene como $H(p, f) = \overline{W^u(p)} \cap \overline{W^s(p)}$.*

Corolario 3.13. *Sea f un difeomorfismo C^1 genérico y sea Λ un conjunto débilmente transitivo maximal que contiene un punto periódico hiperbólico p , entonces $\Lambda = H(p, f)$.*

Demostración. Probaremos que la clase homoclínica de p contiene cualquier conjunto débilmente transitivo que interseca, dado que $H(p, f)$ es transitivo esta última afirmación prueba el corolario. Sea Λ_0 tal conjunto y supongamos que $x \in \Lambda_0 - H(p, f)$.

Como $x \notin H(p, f)$, asumiendo que f pertenece al residual dado por el teorema anterior, tenemos que $x \notin \overline{W^u(p)}$ o $x \notin \overline{W^s(p)}$. Supongamos que $x \notin \overline{W^u(p)}$, el otro caso es totalmente análogo.

Como $\overline{W^u(p)}$ es estable Lyapunov para f , dado W entorno de $\overline{W^u(p)}$, que podemos asumir no contiene a x , tenemos un entorno V de $\overline{W^u(p)}$ tal que $f^n(V) \subset W$ para todo $n \geq 0$, en particular ningún iterado futuro de V intersecta un entorno de x , U , suficientemente pequeño. Como $\Lambda_0 \cap H(p, f) \neq \emptyset$, tenemos que $V \cap \Lambda_0 \neq \emptyset$. Encontramos entonces dos abiertos U, V que intersectan Λ_0 pero $U \cap f^n(V) = \emptyset$ para todo $n \geq 0$, esto viola la transitividad débil de Λ_0 , por tanto $\Lambda_0 \subset H(p, f)$. \square

La dinámica dentro de las clases homoclínicas es conocida: son la clausura de los puntos periódicos que contienen y son transitivas (ver [8]), mas aún, a partir del teorema 3.12, se prueba en [5] que las clases homoclínicas son transitivos saturados, i.e. contienen cualquier conjunto transitivo que intersectan. Este hecho, junto con el corolario anterior nos da una descripción razonable de la dinámica C^1 genérica dentro de los conjuntos débilmente transitivos maximales que contienen órbitas periódicas.

El corolario anterior junto con el item 1 del teorema espectral genérico nos dan que las clases homoclínicas son clases de recurrencia. Esto muestra el item 2.

Clases homoclínicas y topología de Hausdorff

Comenzamos mostrando un corolario del teorema 3.5 que demostramos en la sección anterior.

Corolario 3.14. *Existe un conjunto residual $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$, con M compacta, tal que si $f \in \mathcal{G}$ entonces Λ es un conjunto débilmente transitivo si y solo si es acumulado por órbitas periódicas en la topología de Hausdorff.*

Demostración. Consideramos el residual $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{Per}} \cap \mathcal{KS}$, donde \mathcal{KS} es el conjunto de los difeomorfismos Kupka-Smale y \mathcal{G}_{Per} es el residual del teorema de Takens (teorema A.2 del apéndice). Supongamos que para $f \in \mathcal{G}$ hay algún conjunto débilmente transitivo, Λ , que no es acumulado por órbitas periódicas. A partir del teorema 3.5, f es acumulado por difeomorfismos que tienen una órbita periódica cerca de Λ en la topología de Hausdorff. Como $f \in \mathcal{G}_{\text{Per}}$ tenemos una contradicción. \square

Como, a partir del teorema 3.3, tenemos que genéricamente los conjuntos débilmente transitivos maximales son las clases de recurrencia, tenemos que genéricamente las clases de recurrencia son acumuladas por órbitas periódicas en la topología de Hausdorff.

Corolario 3.15. *Genéricamente las clases de recurrencia son acumuladas por órbitas periódicas en la topología de Hausdorff.*

Si tenemos una clase de recurrencia sin puntos periódicos \mathfrak{C} , para un difeomorfismo genérico, las órbitas periódicas que acumulan sobre \mathfrak{C} están necesariamente fuera de la clase de recurrencia. La clase homoclínica de estas órbitas podría estar lejos de \mathfrak{C} en la topología de Hausdorff. El siguiente teorema impide que esto suceda en el contexto genérico y prueba el ítem 3 del teorema espectral genérico.

Teorema 3.16. *Para un difeomorfismo C^1 genérico de una variedad compacta, las clases homoclínicas son densas en las clases de recurrencia con la topología de Hausdorff.*

Necesitamos el siguiente lema que es una simple propiedad de las clases de recurrencia.

Lema 3.17. *Sea \mathfrak{C} una clase de recurrencia para f , entonces dado $\varepsilon > 0$ existe U entorno de \mathfrak{C} tal que si una clase de recurrencia \mathfrak{C}' intersecta U , entonces está en el ε -entorno de \mathfrak{C} .*

Demostración. Supongamos que no. O sea que existe una sucesión de clases de recurrencia \mathfrak{C}_n que entran en U 's arbitrariamente pequeños que no están a menos de ε de \mathfrak{C} . Por compacidad de $\mathbf{K}(M)$ (ver apéndice) podemos suponer que \mathfrak{C}_n converge a cierto K en $\mathbf{K}(M)$. Si mostramos que K está contenido en \mathfrak{C} obtenemos una contradicción. Tenemos que mostrar simplemente que dados $x, y \in K$ se tiene que $x \dashv y$, ya que K necesariamente contiene algún punto de \mathfrak{C} .

Fijamos $\varepsilon > 0$. Tomamos $x_n, y_n \in \mathfrak{C}_n$ tales que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$, y tomamos una pseudo órbita de x_n a y_n , $\{x_i^n\}$. Si n es suficientemente grande esta pseudo órbita nos sirve como pseudo órbita de x a y . □

Estamos ahora en condiciones de probar el teorema 3.16.

Demostración. Fijamos una clase sin puntos periódicos \mathfrak{C} de f . Fijamos $\varepsilon > 0$, y U el entorno dado por el lema anterior. Queremos encontrar una clase homoclínica a menos de ε de \mathfrak{C} en la topología de Hausdorff. Tomamos entonces una órbita periódica γ , que podemos asumir hiperbólica, a menos de ε de \mathfrak{C} (esto es una propiedad genérica por el corolario 3.15). La clase de recurrencia de γ intersecta U , por tanto está en el ε -entorno de \mathfrak{C} . Como además \mathfrak{C} está en el ε -entorno de γ , tenemos que \mathfrak{C} está en el ε -entorno de $H(\gamma, f)$. Pero $H(\gamma, f)$ es genéricamente la clase de recurrencia de γ , por tanto $d_H(\mathfrak{C}, H(\gamma, f)) < \varepsilon$. \square

Apéndice A

La topología de Hausdorff y un teorema de Takens

Sea M un espacio métrico compacto. La topología de Hausdorff es una topología metrizable en el espacio de los subconjuntos compactos de M , que denotamos $\mathbf{K}(M)$.

Dados X y X' compactos definimos $d_X(X') = \text{máx}\{d(x, X') : x \in X\}$. La *distancia de Hausdorff* entre X y X' es

$$d_H(X, X') = \text{máx}\{d_X(X'), d_{X'}(X)\}.$$

Equivalentemente, dado $X \subset M$ compacto y $r \in \mathbb{R}$ el r -entorno de X es $\{z \in M : d(z, X) < r\}$. Es claro entonces que $d_X(X') < r$ si y solo si X está contenido en el r -entorno de X' . Tenemos probada entonces la siguiente observación.

Observación. $d_H(X, X') < r$ si y solo si X está en el r -entorno de X' y viceversa.

Si una sucesión de compactos no tiene subsucesiones de Cauchy uno puede construirse una sucesión de puntos en M sin subsucesiones de Cauchy. A partir de aquí, dada una sucesión de compactos $\{K_n\}$ de Cauchy con d_H , el límite es

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} K_i}.$$

Esto prueba que el espacio $\mathbf{K}(M)$ es compacto si M lo es.

Sea Y un espacio topológico, decimos que $F : Y \rightarrow \mathbf{K}(M)$ es *semicontinua superiormente* en $y \in Y$ si dado U entorno de $F(y)$ en M existe \mathcal{V} entorno de y tal que

$F(z) \subset U$ para todo $z \in \mathcal{V}$. Ya vimos en el primer capítulo que si M es una variedad compacta entonces el conjunto recurrente por cadenas varía de forma semicontinua en los homeomorfismos de M . Con otras palabras, un mapa es semicontinuo superiormente en y si cuando z es cercano a y se tiene que $F(z)$ está en el ε -entorno de $F(y)$.

El siguiente teorema, cuya prueba puede encontrarse en [12], nos da una herramienta para probar propiedades genéricas.

Teorema A.1. *Sean Y un espacio topológico, M un espacio métrico compacto y $F : Y \rightarrow \mathbf{K}(M)$ un mapa semicontinuo superiormente, entonces F es continuo en un residual de Y .*

Por ejemplo, Pugh prueba en [15] que el mapa $f \mapsto \overline{\text{Per}(f)}$ es semicontinuo superiormente de $\text{Diff}^1(M)$ en $\mathbf{K}(M)$. A partir de aquí, junto con el teorema anterior y el closing lemma, Pugh muestra la igualdad genérica $\Omega(f) = \overline{\text{Per}(f)}$.

En vez de considerar $\overline{\text{Per}(f)}$ como un elemento de $\mathbf{K}(M)$ podemos considerar, para cada punto periódico, su órbita como elemento de $\mathbf{K}(M)$. El subconjunto de $\mathbf{K}(M)$ que consta de órbitas periódicas no es necesariamente cerrado: ya mencionamos que el límite de órbitas periódicas en la topología de Hausdorff es débilmente transitivo. Consideramos entonces su clausura en $\mathbf{K}(M)$ y obtenemos un punto en $\mathbf{K}(\mathbf{K}(M))$. El siguiente teorema de Takens muestra que esta dependencia es continua en un residual de $\text{Diff}^1(M)$. Su prueba utiliza argumentos de semicontinuidad y puede encontrarse en [17].

Teorema A.2 (Takens). *El mapa $f \mapsto \overline{\{\mathcal{O}(p) : p \in \text{Per}(f)\}}$ de $\text{Diff}^1(M)$ en $\mathbf{K}(\mathbf{K}(M))$ es continuo en un conjunto residual.*

Índice alfabético

- \dashv , 2
- ε -visita, 40
- \prec , 2

- atractor topológico, 9
- axioma A, 6

- caja de perturbación, 17
 - soporte de, 17
- ciclo, 6
- clase de recurrencia, 3
- clase homoclínica, 6
- coloración, 21
- conecta, 40
- conjunto
 - aislado, 5
- cuadrado, 16
- cubo cuadrículado, 17

- distancia de Hausdorff, 50
- débilmente transitivo, 35

- estable Lyapunov, 46

- filtración, 7
 - adaptada, 8
 - separa, 8
 - sucesión de, 7

- hiperbólico
 - conjunto, 4
 - punto periódico, 1

- lema
 - connecting, 18
 - del coloreado, 22
 - shadowing, 5

- pintura, 21
- posición general, 20
- preserva la cuadrilla, 18
- propiedad genérica, 2
- pseudo órbita, 2
- punto
 - órbita de un, 1
 - errante, 2
 - período de un, 1
 - periódico, 1
 - recurrente, 2

- recurrencia por cadenas, 2
- repulsor dual, 9

- semicontinua, 50
- sistema dinámico, 1
- sombreada, 5

Teorema

Conley, 12

connecting lemma para pseudo órbitas,

14

espectral, 6

espectral genérico, 36

Takens, 51

topológicamente mixing, 5

tour topológico, 18

Teorema de existencia, 19

Bibliografía

- [1] R. Abraham and S. Smale. Non-genericity of Ω -stability. *Global Analysis, Proc. Symp. in pure Math. A.M.S.*, 14, 1980.
- [2] M. C. Arnaud. Création de connexions en topologie C^1 . *Erg. Th. & Dyn. Syst.*, 21:339–381, 2001.
- [3] C. Bonnati and S. Crovisier. Récurrence et genericité. *Invent. Math.*, 158:33–104, 2004.
- [4] C. Bonnati and L. Díaz. On maximal transitive sets of generic diffeomorphisms. *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.*, 96:171–197, 2003.
- [5] C. Carballo, C. Morales, and M.C. Pacífico. Homoclinic classes for generic C^1 vector fields. *Ergod. Th. & Dynam. Syst.*, 23, 2003.
- [6] S. Crovisier. Periodic orbits and chain transitive sets for C^1 -diffeomorphisms. Institut de Math. de Bourgogne, 2004.
- [7] A. Dankner. On Smale’s axiom A dynamical systems. *Ann. of Math.*, 107, 1978.
- [8] W. de Melo and J. Palis. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. IMPA, Projeto Euclides, 1978.
- [9] J. Franks. A variation of the Poincaré-Birkhoff theorem. *Contemporary Mathematics*, 8, 1988.
- [10] S. Gan and L. Wen. Heteroclinic cycles and homoclinic closures for generic diffeomorphisms. *Journ. of Dyn. and Diff. Equ.*, 15, 2003.

- [11] P. Guarino. Perturbaciones de sistemas dinámicos en la topología C^1 . Monografía de Licenciatura, CMAT, 2007.
- [12] F. Hausdorff. *Set Theory*. Chelsea Publishing Company, 1962.
- [13] R. Mañé. A proof of the C^1 stability conjecture. *Publ. Math. de L'I.H.E.S.*, 66, 1988.
- [14] J. Palis. On the C^1 Ω -stability conjecture. *Publ. Math. de L'I.H.E.S.*, 66:211–215, 1987.
- [15] C. Pugh. The closing lemma. *Amer. Journ. of Math.*, 89:956–1009, 1967.
- [16] M. Shub. *Global stability of dynamical systems*. Springer Verlag, 1987.
- [17] F. Takens. On Zeeman's tolerance stability conjecture. *Lecture notes in Math.*, 197:209–219, 1971.
- [18] L. Wen. A uniform C^1 connecting lemma. *Discrete and Cont. Dynam. Syst.*, 8:257–265, 2002.
- [19] L. Wen and Z. Xia. C^1 connecting lemmas. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352:5213–5230, 2000.