

# Introducción

Esta monografía versa sobre dinámica de endomorfismos en  $\mathbb{R}^n$ . El asunto central es el desarrollo del concepto de órbita homoclínica asociada a una órbita periódica repulsora. Como el concepto es de naturaleza local, no representa una pérdida de generalidad el considerar que el espacio ambiente es  $\mathbb{R}^n$  y no una variedad diferenciable arbitraria. La existencia de una órbita homoclínica asociada a un repulsor implica que la transformación no puede ser invertible, por lo tanto este concepto es exclusivo de los endomorfismos que no son difeomorfismos. Por comodidad consideraremos apenas órbitas homoclínicas asociadas a puntos fijos repulsivos, ya que esto no implica una pérdida de generalidad. Si  $p$  es un punto fijo repulsor, decimos que  $x \neq p$  es homoclínico a  $p$  si  $x$  tiene una preórbita que converge a  $p$  (es decir que  $x$  está en el conjunto inestable de  $p$ ) y un iterado futuro es  $p$  (o sea que  $x$  está en el conjunto estable de  $p$ ). Por lo tanto este concepto extiende al de órbita homoclínica para difeomorfismos. La órbita homoclínica se dice regular si todos sus puntos son regulares y crítica si contiene algún punto crítico. Las órbitas homoclínicas regulares extienden el concepto de órbita homoclínica transversal para un difeomorfismo y las críticas el de órbita homoclínica tangencial. En el transcurso de este trabajo demostraremos varios resultados que sustentan esta comparación.

El concepto de órbita homoclínica asociada a un punto fijo repulsor tiene una brevísima historia. Lo introdujo Marotto en [Ma], donde se demostró que en cualquier entorno de una órbita homoclínica regular existen infinitos puntos periódicos. Una órbita homoclínica es regular si ningún punto de la órbita es crítico (y es crítica en caso contrario). En el capítulo 3 se generaliza el teorema de Marotto, demostrando que el invariante maximal de un entorno de la órbita homoclínica regular es un conjunto de Cantor expansor. Se prueba también que toda órbita homoclínica regular es  $C^1$  persistente, que el invariante maximal varía continuamente y que el mapa es localmente estable en un entorno de la órbita homoclínica regular. Más adelante, Gardini ([G]), consideró órbitas homoclínicas críticas, estudiando algunas de las bifurcaciones creadas al perturbar una tal órbita. También Mora (ver [Mo]) estudió vía normalizaciones el comportamiento local.

El resultado más interesante que involucra ó.h.c. se debe a [BC] que demostraron que para la familia cuadrática unidimensional  $1 - ax^2$  el conjunto de parámetros  $a$  para los cuales hay un intervalo tal que el exponente de Lyapunov es positivo c.t.p. es de densidad  $1/2$  en  $a = 2$ . De hecho, la observación de

que este resultado se extiende a órbitas homoclínicas no degeneradas en mapas unidimensionales se debe a [MV]. En el capítulo 2 presentamos algunos resultados en dinámica unidimensional. En el capítulo 4 estudiamos las ó.h.c. Se demuestra en primer lugar que la ó.h.c. no degeneradas son un fenómeno de codimensión 1. Ésto significa que si  $f$  exhibe una tal ó.h., entonces el conjunto de mapas  $g$  en un entorno  $\mathcal{U}$  de clase  $C^2$  de  $f$  que tienen una ó.h.c asociada al mismo repulsor y próxima a la de  $f$ , forman una subvariedad de codimensión 1 que separa el entorno  $\mathcal{U}$  en dos componentes: las  $g$  en una de ellas no tienen ó.h. asociada a  $p$  (cerca de la de  $f$ ) y las  $g$  en la otra tienen ó.h.r. asociada a  $p$  (cerca de la de  $f$ ).

La presentación es bastante autocontenida, no es necesario saber dinámica para entender, aunque algunos resultados que usamos serán enunciados, como el teorema de Hartman-Grobman o la persistencia de una órbita periódica hiperbólica. Se asumen también algunas básicas de topología diferencial, como el teorema de Sard y algunos teoremas de transversalidad, aún en dimensión infinita. Las demostraciones de los teoremas son responsabilidad del autor.

# Capítulo 1

## Preliminares

En general se considera como un sistema dinámico discreto a la acción del grupo de los enteros, sobre un espacio topológico  $X$ , asociada a un homeomorfismo  $f: X \rightarrow X$ . Dicha acción se define de la siguiente forma

$$nx = f^n(x), x \in X, n \in \mathbb{Z}$$

Nuestro caso es distinto. Por ejemplo, la existencia de una órbita homoclínica asociada a un punto fijo repulsor implica la no inyectividad de la función considerada, como veremos en la observación 1.1. En esta monografía estudiaremos algunos aspectos de la dinámica que genera una función de clase  $C^1$  (o  $C^2$ ) que no tiene por qué ser invertible. Si se quiere, se puede pensar ésto como una acción del semigrupo de los enteros no negativos sobre el espacio  $X$ , definida de manera similar a la anterior

$$nx = f^n(x), x \in X, n \geq 0$$

Naturalmente se verifican las propiedades esperadas de que  $0x = x$  y  $(m+n)x = m(nx)$ , para todo  $m, n \geq 0$  y  $x \in X$ .

En las siguientes secciones veremos los conceptos generales sobre la dinámica de endomorfismos que necesitaremos para los capítulos siguientes. Veremos también el ejemplo del shift unilateral, no sólo como ilustración de lo que exponemos, sino porque lo usaremos en el capítulo 3.

### 1.1 Dinámica topológica

Sea  $X$  un espacio topológico cualquiera. Denominamos como *endomorfismo* de  $X$  a cualquier función continua  $f: X \rightarrow X$ . En los capítulos siguientes parte de nuestra hipótesis será un endomorfismo no invertible y habrá puntos con más de una preimagen. Quedan así esencialmente distinguidos, para cada punto, el futuro del pasado. Es por eso que los conceptos referidos al pasado serán a menudo más complejos que los referidos al futuro. Comencemos a distinguir ésto.

Si  $f$  es un endomorfismo de  $X$ , decimos que la *órbita (futura)* de  $x \in X$  es el conjunto  $\{f^n(x) : n \geq 0\}$ . Decimos que una *preórbita* (o una *sucesión de preimágenes*) de  $x$  es una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0} \subset X$  tal que  $x_0 = x$  y  $f(x_{n+1}) = x_n$  para todo  $n \geq 0$ . Debemos observar que un punto puede tener una cantidad finita o infinita de preórbitas (también puede no estar en la imagen del endomorfismo y por tanto no tener ninguna preórbita).

Los conceptos de conjugación y semiconjugación, de los cuales nos ocuparemos rápidamente ahora, dan relaciones entre dinámicas. En particular la equivalencia está dada por la conjugación. Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y  $f: X \rightarrow X$  y  $g: Y \rightarrow Y$  funciones continuas. Decimos que  $h: X \rightarrow Y$  es una *semiconjugación* sii es continua, sobreyectiva y conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Si además es un homeomorfismo,  $h$  es una *conjugación (global)* entre  $f$  y  $g$  y ambos endomorfismos son conjugados entre sí. Es fácil verificar que ésta es una relación de equivalencia. Si el diagrama anterior conmuta en un abierto de  $X$  decimos que  $h$  es una *conjugación local*. Naturalmente las conjugaciones globales preservan órbitas, preórbitas, puntos fijos, conjuntos estables e inestables y órbitas homoclínicas (estos últimos conceptos serán definidos más adelante).

## 1.2 Dinámica diferenciable

Antes de tratar sobre la dinámica diferenciable, fijemos algunas notaciones y términos que usaremos frecuentemente. Decimos que un endomorfismo  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de *clase  $C^r$*  si sus derivadas parciales de orden  $r$  son continuas. Denotamos por  $C^r(\mathbb{R}^n)$  al conjunto de las funciones de clase  $C^r$  con dominio y codominio  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.1** Sea  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  con un punto fijo  $p$ . Decimos que  $p$  es *repulsor* si todos los valores propios del  $d_p f$  tienen módulo mayor que 1, que  $p$  es *atractor* si los valores propios son de módulo menor que 1 e *hiperbólico* si no tienen módulo 1 ni 0.

Notaremos como  $C_p^r(\mathbb{R}^n)$  al conjunto de los endomorfismos de  $\mathbb{R}^n$  de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , que tienen a  $p$  como punto fijo repulsor y como  $C_p^0(\mathbb{R}^n)$  al de los que tienen a  $p$  como punto fijo.

Las dos proposiciones que siguen nos permiten saber lo que necesitaremos en los siguientes capítulos sobre la dinámica cerca de un punto fijo repulsor. Para demostrarlas usaremos dos resultados conocidos. El primero es el teorema de *Hartman-Grobman* que dice lo siguiente: si  $p$  es un punto fijo hiperbólico de  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces existen entornos abiertos  $U(p)$  y  $V(0)$  y un homeomorfismo  $h: V \rightarrow U$  tal que  $h \circ d_p f = f \circ h$ ; es decir  $h$  conjuga localmente a

$f$  con su diferencial. Y el segundo afirma que: si 0 es repulsor (atractor) de  $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ , existe una norma en  $\mathbb{R}^n$  que hace que  $A$  sea una expansión (contracción). Cuando decimos que  $A$  es una expansión nos referimos a que para todo  $v \neq 0$ ,  $\|Av\| > \|v\|$  y alrevés para una contracción. Las demostraciones de ambos resultados pueden encontrarse en [PM]. A la luz de ésto veamos qué encontramos cerca de un punto fijo repulsor.

**Proposición 1.1** *Si  $f \in C_p^r(\mathbb{R}^n)$  entonces existe  $\mathbb{U}$ , una base de entornos abiertos de  $p$ , tal que para todo  $W \in \mathbb{U}$  se verifica que:*

1. La clausura de  $W$  es compacta.
2. El mapa  $f|_{\overline{W}}$  es un difeomorfismo sobre su imagen.
3. El conjunto  $\overline{W}$  está incluido en  $f(W)$ .
4. Para todo  $x \in W$  las siguientes ecuaciones definen una sucesión en  $W$  que converge a  $p$ .

$$\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = f^{-1}(x_n) \cap W \end{cases}$$

**Demostración.** Consideremos una norma en  $\mathbb{R}^n$  tal que el  $d_p f$  sea una expansión y entonces todas las bolas que tomemos estarán asociadas a esa norma. Tomemos del teorema de Hartman-Grobman un homeomorfismo  $h: V(0) \rightarrow U(p)$  tal que

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{d_p f} & d_p f(V) \cap V \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ U & \xrightarrow{f} & f(U) \cap U \end{array}$$

Como  $d_p f$  es invertible (ya que sus valores propios son distintos de 0) existe  $B_r(0) \subset V$  tal que  $f|_{h(B_r(0))}$  es un difeomorfismo sobre su imagen, para algún  $r > 0$ . Definimos

$$\mathbb{U} = \{h(B_s(0)) : 0 < s < r\}$$

La familia  $\mathbb{U}$  es una base de entornos de  $p$  ya que  $h$  es un homeomorfismo y el conjunto  $\{B_s(0) : 0 < s < r\}$  es una base de entornos de  $0 \in V$ . Demostraremos cada ítem del enunciado para  $W = h(B_s(0)) \in \mathbb{U}$ .

1. Como  $\overline{B_s(0)} \subset B_r(0)$  es compacto y  $h$  es un homeomorfismo  $\overline{W}$  es compacto.
2. Este ítem es cierto simplemente porque  $f|_{h(B_r(0))}$  es un difeomorfismo sobre su imagen.
3. Como la transformación  $d_p f$  expande tenemos que  $\overline{B_s(0)} \subset d_p f(B_s(0))$ . Y como  $h$  es una conjugación deducimos que  $h(\overline{B_s(0)}) \subset h \circ d_p f(B_s(0)) = f \circ h(B_s(0))$ ; obteniendo que  $\overline{W} \subset f(W)$ .

4. Primero observemos que el mapa  $f|_W$  es inyectivo y por tanto la sucesión  $x_n$  está bien definida. Como  $d_p f$  expande, la sucesión  $y_n = (d_p f)^{-n}(h^{-1}(x))$  converge a 0. Y finalmente  $x_n = h(y_n)$  converge a  $p$ .

□

La proposición 1.2 es bien conocida y la usaremos más adelante. Pero primero veamos un lema.

**Lema 1.1** *Si  $f \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$  entonces existe  $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\alpha > 1$ ,  $U \in \mathbb{U}$  y  $m > 0$ , tales que para todo  $k \in \mathbb{Z}^+$ , si  $u, f(u), \dots, f^k(u) \in U$  y  $k = qk_0 + r$  (división entera), entonces para todo  $v \neq 0$*

$$\|d_u f^k(v)\| > m\alpha^q \|v\|$$

**Demostración.** Sea  $N$  la norma en  $\mathbb{R}^n$  que hace que  $d_p f$  expanda. Sean  $k_0$  y  $s$  tales que

$$d_p f^{-k_0}(B_s^N(0)) \subset B_1(0) \subset B_s^N(0).$$

Donde  $B^N$  es la bola asociada a la norma  $N$ . Aplicando  $f^{k_0}$  en la ecuación anterior obtenemos que

$$B_s^N(0) \subset d_p f^{k_0}(B_1(0)) \subset d_p f^{k_0}(B_s^N(0)),$$

y luego

$$B_1(0) \subset d_p f^{k_0}(B_1(0)).$$

Si  $v \neq 0$  tenemos que

$$\|d_p f^{k_0}(v)\| > \alpha \|v\|.$$

Observemos que para todo entero no negativo  $q$

$$\|d_p f^{qk_0}(v)\| > \alpha^q \|v\|.$$

Sea  $g: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(u, v) = \|d_u f^{k_0}(v)\|$ . Como  $g(p, v) > \alpha$ , para todo  $v$ , existe  $U \in \mathbb{U}$  tal que para todo  $u \in U$ ,  $g(u, v) > \alpha$ , es decir,  $\|d_u f^{k_0}(v)\| > \alpha \|v\|$ . Eventualmente achicando  $U \in \mathbb{U}$  tenemos que para cualquier  $r = 0, 1, \dots, k_0 - 1$ , existe  $m > 0$  tal que

$$\|d_u f^r(v)\| > m \|v\|$$

ya que  $d_u f$  es invertible en  $U$ . Ahora bien, si  $k = qk_0 + r$ , con  $0 \leq r \leq k_0 - 1$ , aplicando la regla de la cadena obtenemos:

$$\|d_u f^k(v)\| = \|d_{f^r(u)} f^{qk_0}(d_u f^r(v))\| > \alpha^q \|d_u f^r(v)\| > m\alpha^q \|v\|$$

que es lo que buscábamos.

□

### 1.3. ÓRBITA HOMOCLÍNICA ASOCIADA A UN PUNTO FIJO REPULSOR

**Proposición 1.2** Si  $f \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$  entonces existe  $\lambda > 1$ ,  $U \in \mathbb{U}$  y  $\mu > 0$ , tales que para todo  $k \geq 0$ , si  $u, f(u), \dots, f^k(u) \in U$ , entonces para todo  $v \in \mathbb{R}^n - 0$

$$\|d_u f^k(v)\| > \mu \lambda^k \|v\|$$

**Demostración.** Tomemos lo que nos da el lema anterior y definamos  $\lambda = \sqrt[k_0]{\alpha}$  y  $\mu = m/\alpha$ . Usando que  $k = qk_0 + r$  ( $0 \leq r < k_0$ ) y operando obtenemos que  $m\alpha^q > \mu\lambda^k$  con lo que concluye la demostración.  $\square$

Para concluir esta parte definiremos conjunto expansor.

**Definición 1.2** Si  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  y  $K \subset \mathbb{R}^n$  es compacto e invariante ( $f(K) \subset K$ ) decimos que  $f$  es expansora en  $K$  sii existen  $c > 0$  y  $\lambda > 1$  tales que para todo  $x \in K$  entonces

$$c\lambda^n \|v\| \leq \|d_x f^n(v)\|$$

## 1.3 Órbita homoclínica asociada a un punto fijo repulsor

Para comenzar daremos definiciones que son puramente topológicas. Si  $f \in C_p^r$  definimos el *conjunto estable* y el *conjunto inestable* de  $p$  como

- $W_p^s(f) = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p\}$
- $W_p^u(f) = \{x_0 \in X : \exists x_n \text{ tal que } f(x_{n+1}) = x_n, n \geq 0, x_n \rightarrow p\}$

Si el mapa  $f$  está claro por el contexto indicaremos  $W_p^u$  en lugar de  $W_p^u(f)$  y lo mismo para el conjunto estable. La siguiente definición será parte de la hipótesis de la mayoría de los resultados que expondremos.

**Definición 1.3** Dados  $f \in C_p^0(\mathbb{R}^n)$  y  $x \neq p$  decimos que  $x$  tiene órbita homoclínica asociada a  $p$  sii  $x \in W_p^u \cap W_p^s$ .

Si se quiere ser más sensible, podemos pensar que el punto  $x$  nace en  $p$ , hace su vida por ahí y al final retorna a  $p$ .

La siguiente es una observación general, que en particular se aplica a las órbitas homoclínicas. Supongamos un punto  $p$  periódico (es decir  $f^j(p) = p$ ), entonces decimos que  $x$  tiene órbita homoclínica asociada a  $p$  sii  $x$  tiene órbita homoclínica asociada a  $p$  para  $f^j$ . De esta manera podemos generalizar todos los resultados (y definiciones) relacionados a puntos fijos al caso de puntos periódicos. Por ejemplo, decimos que la órbita periódica de  $p$  es repulsora sii  $p$  es repulsor como punto fijo de  $f^j$ .

Veamos en la siguiente observación como son las órbitas homoclínicas asociadas a puntos fijos repulsores.

**Observación 1.1** Si  $f \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$  y  $x \neq p$  tiene órbita homoclínica a  $p$  entonces existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  tal que:

1.  $x \in \{x_n\}$ ;
2.  $f(x_{n+1}) = x_n, \forall n \geq 0$ ;
3.  $x_0 = p$ ;
4.  $x_n \rightarrow p$ ;
5.  $x_1 \neq p$ .

**Demostración.** Como  $p$  es repulsor y distinto de  $x$  y  $x \in W_p^s$ , no puede ser que la órbita de  $x$  converja a él sin que algún iterado de  $x$  sea  $p$ . Es decir existe  $n_0 \geq 1$  tal que  $f^{n_0}(x) = p$ . A su vez, como  $x$  es distinto de  $p$  podemos suponer que  $f^{n_0-1}(x) \neq p$ . Definimos entonces  $x_n = f^{n_0-n}(x)$ , para  $0 \leq n \leq n_0$ . Así tenemos que  $x_{n_0} = x$ ,  $x_0 = p$ ,  $x_1 \neq p$  y  $f(x_{n+1}) = x_n$  para  $0 \leq n < n_0$ . Luego como  $x \in W_p^u$ , existe una preórbita de  $x$  que converge a  $p$ , es decir existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq n_0}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$  y  $f(x_{n+1}) = x_n$  para  $n \geq n_0$ . Con esto queda completa la sucesión  $x_n$  y verifica todo lo que queríamos.  $\square$

Observemos que los puntos  $x_n$  también tienen órbita homoclínica a  $p$ . La nomenclatura que usó Marotto en [?] es la siguiente. Si  $f \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$  decimos que  $p$  es SBR (snap-back repeller) sii  $W_p^u \cap f^{-1}(p) \neq \{p\}$ . La siguiente proposición relaciona a los SBR con las órbitas homoclínicas.

**Proposición 1.3** *Si  $f \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$  entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *El punto  $p$  es SBR.*
- *Existe  $x \neq p$  que tiene órbita homoclínica asociada a  $p$ .*

La demostración de esto es evidente y la ventaja de la notación de Marotto es que al no hacer referencia a la órbita homoclínica ésta queda más corta. En la siguiente definición daremos algunos nombres que usaremos.

**Definición 1.4** *Si  $f \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$  y  $x \neq p$  es homoclínico a  $p$  y  $\{x_n\}$  es una sucesión como en la observación 1.1 entonces diremos sobre la sucesión  $\{x_n\}$  que:*

1. *Es regular sii  $d_{x_n}f$  es invertible para todo  $n \geq 0$ .*
2. *Es crítica sii no es regular.*

Primero observemos que toda órbita homoclínica asociada a un punto fijo repulsor es regular de un momento determinado en adelante ya que  $d_p f$  es invertible y la derivada de  $f$  es continua. Luego una órbita homoclínica puede contener solo una cantidad finita de puntos críticos. Por eso supondremos que una tal órbita crítica es regular salvo en la primagen de  $p$  (de otra forma basta considerar un iterado de  $f$  para que esto suceda). Y por último haremos la siguiente

**Definición 1.5** Decimos que  $\{x_n\}$  es crítica no degenerada si  $x_1$  (preimagen de  $p$ ) es un punto crítico no degenerado (según la definición 4.1) y es el único punto crítico en la sucesión  $\{x_n\}$ .

## 1.4 Persistencia y estabilidad

Los conceptos persistencia y estabilidad dependen de la topología del conjunto de endomorfismos. A cada espacio  $C^r(\mathbb{R}^n)$ ,  $r \geq 0$ , le asociaremos la  $C^r$ -topología débil. Ésta es la que tiene como base de entornos de una función  $f \in C^r(\mathbb{R}^n)$  a los conjuntos

$$\mathcal{U}_\epsilon^l = \{g \in C^r(\mathbb{R}^n) : \|d_x^s g - d_x^s f\| < \epsilon, \forall x \in B_l, s = 0, \dots, r\}$$

donde  $\epsilon > 0$  y  $B_l$  es una bola de radio  $l > 0$ .

Para  $f \in C_p^r(\mathbb{R}^n)$  es cierto el siguiente resultado: para todo  $C^1$ -entorno  $\mathcal{U}(f)$ , existe un  $C^1$ -entorno  $\mathcal{V}(f) \subset \mathcal{U}$  tal que para toda  $g \in \mathcal{V}$ , existe  $h \in \mathcal{V} \cap C_p^1(\mathbb{R}^n)$  tal que  $g$  es conjugada a  $h$ . Por lo tanto podemos suponer que el punto fijo no varía con la función. O lo que es lo mismo, no perdemos generalidad si consideramos entornos en  $C_p^1$  en lugar de tomarlos en  $C^1$ .

Ahora daremos la definición de persistencia y enunciaremos algunas propiedades que son persistentes.

**Definición 1.6** Diremos que una propiedad  $\mathcal{P}$  es  $C^r$ -persistente sii el conjunto  $\{f \in C^r(\mathbb{R}^n) : \mathcal{P}(f)\}$  es abierto.

Es fácil ver que, dado un compacto  $K$  las siguientes propiedades son  $C^1$ -persistentes.

1. Para todo  $x \in K$ ,  $d_x f$  es invertible.
2. Para todo  $x \in K$ ,  $d_x f$  tiene todos sus valores propios de módulo mayor que 1.

No daremos una demostración de la siguiente proposición, ya que nos distraería de nuestros objetivos. De todas maneras no presentan dificultades.

**Proposición 1.4** Para toda  $f \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$  existe un entorno compacto  $U(p)$  y un  $C^1$ -entorno  $\mathcal{U}(f)$  tal que para toda  $g \in \mathcal{U}$

1. Existe  $p_g \in U$  punto fijo repulsor de  $g$ .
2.  $U \subset W_{p_g}^u(g)$
3. Todo  $x \in U$  tiene una preórbita regular, por  $g$ , contenida en  $U$ , que converge a  $p_g$ .

También es cierto que los entornos  $U$  y  $\mathcal{U}$  se pueden tomar arbitrariamente chicos. Ahora daremos la definición de conjunto invariante maximal y de estabilidad.

**Definición 1.7** Para  $f: A \rightarrow A$  cualquiera y  $U \subset A$  definimos

$$\Lambda^U(f) = \{x \in U : f^n(x) \in U, \forall n \geq 0\}$$

como el conjunto invariante maximal de  $f$  en  $U$ .

Hagamos un comentario trivial: todo conjunto  $f$ -invariante incluido en  $U$ , está incluido en el invariante maximal de  $f$  en  $U$  y por eso el nombre. Veamos otra manera de definir dicho conjunto. Sea  $U$  como en la definición anterior y definimos la sucesión de conjuntos  $U_n$  como

- $U_0 = U$
- $U_{n+1} = f^{-1}(U_n) \cap U_n$

entonces tenemos trivialmente que

$$\Lambda^U(f) = \bigcap_{n \geq 0} U_n$$

**Definición 1.8** Decimos que un endomorfismo  $f$  es  $C^r$ -estable en  $U$  sii para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $C^r$ -entorno  $\mathcal{U}(f)$  tal que para toda  $g \in \mathcal{U}$  existe un homeomorfismo

$$h: \Lambda^U(f) \rightarrow \Lambda^U(g)$$

que conjugue a  $f$  con  $g$  en dichos invariantes maximales y  $h$  está a menos de  $\epsilon$  de la identidad.

## 1.5 Conjunto inestable

Ahora nos concentraremos brevemente en el conjunto inestable de un punto fijo repulsor porque necesitamos saber algo más sobre él. La siguiente proposición y su corolario lo describen de una manera que nos será útil.

**Proposición 1.5** Si  $p$  es un punto fijo repulsor consideremos un entorno  $W \in \mathbb{U}$  como en la proposición 1.1. Por el ítem 4 de dicha proposición tenemos que  $W \subset W_p^u$ . Lo que afirmamos es que

$$W_p^u = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W)$$

**Demostración.** Ésto es simplemente porque todo punto del conjunto inestable de  $p$  tiene una preimagen por algún iterado de  $f$  que pertenece a  $W$ . □

La dinámica unidimensional tiene algunos aspectos muy particulares. Por ejemplo, del siguiente corolario se desprende que el conjunto inestable de un punto fijo repulsor (unidimensional) es, simplemente, un intervalo.

**Corolario 1.1** *Si  $f \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$  entonces el conjunto inestable de  $p$  es conexo.*

**Demostración.** Simplemente porque toda unión de conexos con un punto en común es conexa y  $W_p^u(f)$  lo es por la proposición anterior ya que: podemos considerar a  $W$  conexo y por tanto sus imágenes también lo serán por la continuidad de  $f$ , además como  $p$  es fijo pertenece a todos estos conjuntos.  $\square$

Como vimos en la sección 1.4, si  $f \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$ , hay entornos de  $p$  que se mantienen en el conjunto inestable de cualquier  $C^1$ -perturbación pequeña de  $f$ . En el capítulo 2 veremos que si  $f \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$  entonces cualquier compacto que esté incluido en el interior de  $W_p^u(f)$  se mantendrá en el interior de  $W_p^u(g)$ , si  $g$  es un endomorfismo suficientemente  $C^1$ -cerca de  $f$ . Esta propiedad no es cierta en dimensiones mayores que 1. Pero vamos a probar ahora que hay un abierto  $\mathbb{W}_p^u(f) \subset W_p^u(f)$  en donde sí se cumple dicha propiedad y además la medida de Lebesgue de  $W_p^u(f) \setminus \mathbb{W}_p^u(f)$  es nula. Antes de continuar fijemos como notación  $VR$ ,  $VC$ ,  $PR$  y  $PC$  para los conjuntos de valores regulares, valores críticos, puntos regulares y puntos críticos, respectivamente.

**Definición 1.9** *Sea  $f \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$  y  $U$  un entorno abierto de  $p$  de la familia de la proposición 1.1. Entonces definimos el conjunto*

$$\mathbb{W}_p^u(f) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in U, k \geq 0 / f^k(x) = y \text{ y } x \in PR(f^k)\}.$$

Una primera observación que debemos hacer es que esta definición no depende del conjunto  $U$  elegido. Dos comentarios, que también se desprenden de la definición, son que  $\mathbb{W}_p^u \subset W_p^u$  y que  $\mathbb{W}_p^u$  es abierto. Hay una descripción muy sencilla de  $\mathbb{W}_p^u$ . Los puntos que están en él son exactamente los que tienen una preórbita regular que converge al punto fijo. Antes de continuar veamos un lema.

**Lema 1.2** *Sean  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un homeomorfismo sobre su imagen y  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces para todo compacto  $K \subset V = f(U)$  existe un  $C^0$ -entorno  $\mathcal{U}(f)$  tal que para toda  $g \in \mathcal{U}$ ,  $K \subset g(U)$ .*

**Demostración.** Tomemos  $y = f(x) \in K$  y sea  $\epsilon > 0$  tal que  $B_{\frac{\epsilon}{2}}(y) \subset V$ . Entonces el conjunto  $S = f^{-1}(\{z \in V : \|z - y\| = \epsilon\})$  es homeomorfo a  $S^{n-1}$ . Sea

$$\mathcal{U}^y(f) = \{g: U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ continua} : \|f(z) - g(z)\| < \epsilon/2, \forall z \in S\}$$

Lo que vamos a probar ahora es que  $B_{\frac{1}{2}\epsilon}(y) \subset g(U)$  para toda  $g \in \mathcal{U}^y$ . Sea  $h: [0, 1] \times S \rightarrow B_{\frac{3}{2}\epsilon}(y) \setminus B_{\frac{1}{2}\epsilon}(y)$  dada por

$$h(t, z) = tg(z) + (1 - t)f(z)$$

Este mapa es una homotopía entre  $f|_S$  y  $g|_S$  que no pasa por ningún punto de  $B_{\frac{1}{2}\epsilon}(y)$ . Como para todo  $y' \in B_{\frac{1}{2}\epsilon}(y)$  el mapa  $f|_S$  no es homotópico a una

constante (en  $B_{\frac{1}{2}\epsilon}(y) \setminus \{y'\}$ ) deducimos que  $g|_S$  tampoco lo es. A su vez, la función  $h': [0, 1] \times S \rightarrow B_{\frac{3}{2}\epsilon}(y)$  dada por

$$h'(t, z) = g \circ f^{-1}(tf(z) + (1-t)y)$$

es una homotopía entre  $g|_S (= h'_1)$  y la función constante  $h'_0$  ( $h'_0(z) = g(x)$ ). Entonces, necesariamente,  $h'$  pasa por  $y'$ , es decir,  $y' = h'(t, z)$  para algún  $t$  y algún  $z$ . O lo que es lo mismo  $g \circ f^{-1}(tf(z) + (1-t)y) = y'$  con lo cual  $y' \in g(U)$ . Finalmente tenemos que  $B_{\frac{1}{2}\epsilon}(y) \subset g(U)$  para toda  $g \in \mathcal{U}^y$ . Para continuar observemos que  $\epsilon$  depende del punto  $y$ . Entonces  $\{B_{\frac{\epsilon(y)}{2}}(y) : y \in K\}$  es un cubrimiento abierto de  $K$ . Como  $K$  es compacto podemos tomar un subcubrimiento finito definido por los puntos  $y_1, \dots, y_j \in K$ . Si definimos  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{y_1} \cap \dots \cap \mathcal{U}^{y_j}$  el resto de la demostración es trivial.  $\square$

Ahora probemos los resultados que prometimos.

**Proposición 1.6** *Si  $f \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$  entonces para todo compacto  $K \subset \mathbb{W}_p^u(f)$  existe un  $C_p^1$ -entorno  $\mathcal{U}(f)$  tal que para toda  $g \in \mathcal{U}$ ,  $K \subset \mathbb{W}_{p_g}^u(g)$ .*

**Demostración.** Sean  $U(p)$  un entorno abierto de  $p$  y  $\mathcal{U}'$  un  $C_p^1$ -entorno de  $f$  como en la proposición 1.4. Entonces para todo  $y \in K$  existe  $x_y \in U$  y  $k_y \geq 0$  tal que  $f^{k_y}(x_y) = y$  y  $x_y$  es punto regular de  $f^{k_y}$ . Por el teorema de la función inversa existen  $U_y(x_y) \subset U(p)$  y  $B_{\epsilon_y}(y)$  abiertos tales que  $f^{k_y} : U_y(x_y) \rightarrow B_{\epsilon_y}(y)$  es un difeomorfismo. Por el lema 1.2 existe  $\mathcal{U}_y(f) \subset \mathcal{U}'$ ,  $C_p^1$ -entorno de  $f$  tal que para toda  $g \in \mathcal{U}_y$ ,  $\overline{B_{\epsilon_y/2}}(y) \subset g(U_y(x))$ . Como las bolas  $B_{\epsilon_y/2}(y)$  cubren a  $K$  y  $K$  es compacto existen  $y_1, \dots, y_r$  tales que  $K \subset \cup_{i=1}^r B_{\epsilon_{y_i}/2}(y_i)$ . Para que se verifique la tesis basta definir  $\mathcal{U} = \cap_{i=1}^r \mathcal{U}_{y_i}$ .

Naturalmente la siguiente proposición es una aplicación del teorema de Sard.

**Proposición 1.7** *El conjunto  $W_p^u \setminus \mathbb{W}_p^u$  tiene medida de Lebesgue 0.*

**Demostración.** Sea  $U \subset W_p^u \cap PR(f)$  un entorno abierto de  $p$ . Entonces

$$\bigcup_{n \geq 0} \text{VR}(f|_U^n) \subset \mathbb{W}_p^u$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned} W_p^u \setminus \mathbb{W}_p^u &\subset W_p^u \setminus \bigcup_{n \geq 0} \text{VR}(f|_U^n) \\ &= \bigcup_{n \geq 0} (f^n(\overline{U}) \setminus \text{VR}(f|_U^n)) \\ &= \bigcup_{n \geq 0} \text{VC}(f|_U^n) \end{aligned}$$

Que por el teorema de Sard cada uniendo tiene medida nula y entonces su unión también, ya que es numerable.  $\square$

## 1.6 Shift unilateral de dos símbolos

El shift unilateral de dos símbolos es un ejemplo de dinámica topológica en el conjunto  $2^{\mathbb{N}}$  (las sucesiones en  $\{0, 1\}$ ) siendo  $\mathbb{N}$  el conjunto de los enteros no negativos. A este espacio le llamaremos  $\Sigma$  y le daremos la topología producto, teniendo  $2 = \{0, 1\}$  la topología discreta. Al shift, que definiremos más adelante, lo denominamos como unilateral de dos símbolos en contraposición al shift bilateral de  $k$  símbolos que tiene como dominio al conjunto  $k^{\mathbb{Z}}$ . Un resultado conocido es que el conjunto  $\Sigma$  con esta topología es homeomorfo al conjunto de Cantor usual de  $\mathbb{R}$ , es decir el conjunto de los números reales del intervalo  $[0, 1]$  que se pueden expresar en base 3 sin usar la cifra 1. En general diremos que un espacio topológico es un conjunto de Cantor si éste es homeomorfo al conjunto de Cantor usual. Por tanto  $\Sigma$  es un conjunto de Cantor. Para comprender mejor la topología de  $\Sigma$  consideremos la proyección  $\Pi_m: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^m$  definida por  $\Pi_m(x_1, x_2, \dots) = (x_1, \dots, x_m)$  y veamos la siguiente proposición.

**Proposición 1.8** *Dados  $\{l_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  y  $l$ , una sucesión y un elemento en  $\Sigma$ , les asociamos una sucesión de números naturales  $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $q_i$  es el más grande que verifica  $\Pi_{q_i}(l_i) = \Pi_{q_i}(l)$ . Entonces*

$$l_i \rightarrow l \text{ sii } q_i \rightarrow \infty$$

**Demostración.** Primero debemos observar que el conjunto

$$\{\Pi_p^{-1}(\Pi_p(l)) : p = 1, 2, 3, \dots\}$$

es una base de entornos de  $l$ . Luego, los siguientes enunciados son evidentemente equivalentes

- $l_i \rightarrow l$
- $\forall$  entorno de  $l$  de la forma  $\Pi_p^{-1}(\Pi_p(l))$ ,  $\exists i_0 / \forall i > i_0, l_i \in \Pi_p^{-1}(\Pi_p(l))$
- $\forall p \exists i_0 / \forall i > i_0, l_i \in \Pi_p^{-1}(\Pi_p(l))$
- $\forall p \exists i_0 / \forall i > i_0, q_i > p$
- $q_i \rightarrow \infty$

□

En  $\Sigma$  consideramos el endomorfismo  $\sigma$  dado por  $\sigma(x)_i = x_{i+1}$ , mejor conocido como “el shift”. La proposición anterior hace trivial al hecho de que el shift es continuo. Otra propiedad importante de dicho endomorfismo es que tiene una órbita homoclínica asociada a un punto fijo. Para ver esto definamos  $e^j \in \Sigma$  por  $e_i^j = \delta_{i+1, j}$ , para  $i, j \geq 0$ . El elemento  $e^0$  es la sucesión que siempre vale 0 y  $e^j$ ,  $j > 0$ , es la que tiene 0 en todos lados salvo en la posición  $j$  que tiene un 1 (o sea  $e_j^{j+1} = 1$ ).

**Observación 1.2** *El punto  $e^1$  tiene órbita homoclínica asociada al punto fijo  $e^0$ .*

**Demostración.** Ésto es porque  $\sigma(e^{j+1}) = e^j$  para todo  $j \geq 0$  y además  $\lim_{j \rightarrow \infty} e^j = e^0$  (siendo trivial que  $\sigma(e^0) = e^0$ ).

## Capítulo 2

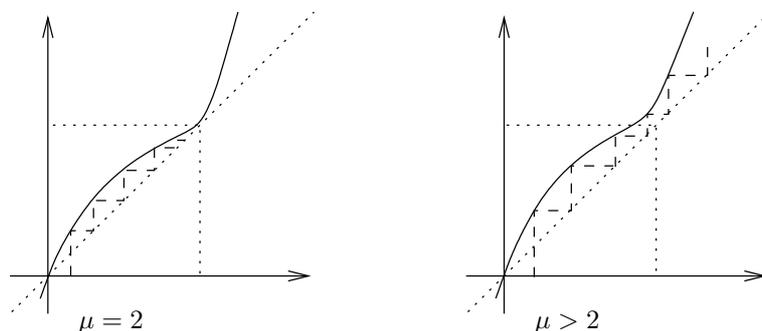
# La última órbita homoclínica (caso unidimensional)

Sea  $f_\mu \in C_p^1(\mathbb{R})$  una familia de funciones,  $\mu \in [0, 1]$ , continua respecto de  $\mu$ . Supongamos que  $f_0$  tiene por lo menos una órbita homoclínica regular asociada a  $p$  y que  $f_1$  no tiene ninguna órbita homoclínica (ni regular ni crítica) asociada a  $p$ . Sea  $\mu_0 = \sup \{ \mu \text{ tal que } f_\mu \text{ tiene por lo menos una órbita homoclínica regular asociada a } p \}$ . Entonces, imponiendo una hipótesis genérica sobre  $f_{\mu_0}$ , concluiremos que  $f_{\mu_0}$  tiene por lo menos una órbita homoclínica crítica y ninguna regular. La hipótesis que le pediremos a  $f_{\mu_0}$  es sobre la continuidad del conjunto inestable del punto fijo repulsor.

### 2.1 Discontinuidades del conjunto inestable

Supongamos que una función  $f \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$  no tiene ninguna órbita homoclínica asociada a  $p$ . Lo que queremos estudiar es si toda función suficientemente cercana a  $f$  tampoco tiene ninguna órbita homoclínica asociada a  $p$ . Recordemos que  $p$  no tiene ninguna órbita homoclínica sii  $W_p^u \cap f^{-1}(p) = \{p\}$ . Por tanto lo que debemos hacer es cuidar que ambos conjuntos no “exploten” en funciones cercanas a  $f$ . Por un lado la preimagen de  $p$  se puede controlar con un entorno  $C^0$  de  $f$ . Pero como mostraremos en los siguientes ejemplos unidimensionales los conjuntos inestables pueden ‘explotar’ cerca de  $f$ .

**Ejemplo 2.1** Consideremos la familia  $f_\mu \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\mu \geq 2$ , dada por  $f_\mu(x) = x^3 - 2x^2 + \mu x$ . Haciendo un par de cálculos vemos que el 0 es un punto fijo repulsor de todas las  $f_\mu$ ,  $f'_\mu(0) = \mu$  y que el único valor de  $\mu$  para el cual existe otro punto fijo es para  $\mu = 2$ , en donde el 1 es otro punto fijo de  $f_2$  (ésta función tiene sólo esos dos puntos fijos).



La última observación antes de sacar algunas conclusiones es que las  $f_\mu$  son crecientes y como el 0 es un punto fijo deducimos que  $\mathbb{R}^+$  y  $\mathbb{R}^-$  son siempre invariantes. Calculemos los conjuntos inestables de las funciones de esta familia en los siguientes casos:

- Caso  $\mu = 2$ : Como  $f_2$  es creciente y el 1 y el 1 son puntos fijos entonces  $f_2([0, 1]) = [0, 1]$  y como la semirrecta negativa es también invariante tenemos que  $W_0^u(f_2)$  está acotado superiormente por 1. En realidad el conjunto inestable de 0 por  $f_2$  es el intervalo  $(-\infty, 1)$ .
- Caso  $\mu > 2$ : Tomemos  $t > 0$  cualquiera y definamos la sucesión  $x_n = f^n(t)$ . Ésta es creciente y divergente porque si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$  entonces  $f(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = l$ , luego  $l$  sería un punto fijo positivo de  $f_\mu$ . Ésto es absurdo ya que para  $\mu > 2$  el único punto fijo repulsor es el 0. Entonces  $W_0^u(f_\mu)$  no tiene cota superior. En este caso lo cierto es que  $W_0^u(f_\mu) = \mathbb{R}$ .

Lo que tenemos entonces es que para  $\mu = 2$  el conjunto inestable está acotado superiormente y para cualquier  $\mu > 2$  no. Este ejemplo muestra cómo el conjunto inestable puede “explotar”. Lo único que resta observar es que  $f_\mu$  converge a  $f_2$  cuando  $\mu$  va para 2; esto es cierto incluso en topología  $C^\infty$  y es fácil de probar.

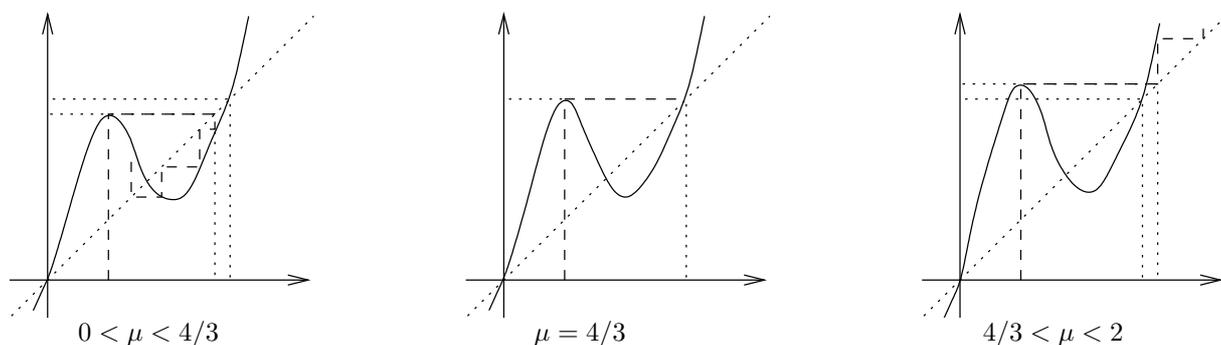
Intuitivamente lo que sucede en este ejemplo es que, para  $\mu > 2$ , 1 desaparece como punto fijo (que no es repulsor pero sí tiene conjunto inestable no vacío) y el 0 absorbe al conjunto inestable del 1. En el siguiente ejemplo veremos como el 0 absorbe al conjunto inestable del punto fijo repulsor 2, sin que éste desaparezca.

**Ejemplo 2.2** Consideremos la familia polinómica a un parámetro

$$f_\mu(x) = \frac{3x(x-2)(x-\mu)}{4-2\mu} + x$$

para  $\mu \in (0, 2)$ . Es trivial que 0 y 2 son puntos fijos de todas las  $f_\mu$ . Como  $f'_\mu(0) = \frac{2\mu+2}{2-\mu} > 1$  y  $f'_\mu(2) = 4$  ambos son repulsores (siempre que  $0 < \mu <$

2). Además, el punto  $2/3$  es siempre un máximo local,  $f_\mu(2/3) = \frac{6\mu+4}{9(2-\mu)}$  y  $f_{4/3}(2/3) = 2$ . Si también observamos que  $\frac{d}{d\mu}f_\mu(2/3)|_{\mu=4/3} > 0$ , tenemos que el máximo local atraviesa al punto fijo 2. Esto, junto con las gráficas, nos da las siguientes conclusiones.



- Caso  $0 < \mu < 4/3$ : Es sencillo probar que  $f_\mu((-\infty, 2)) = (-\infty, 2)$  y por tanto el conjunto inestable de 0 termina antes que 2. En realidad termina en la imagen del máximo local  $f_\mu(2/3)$ .
- Caso  $\mu = 4/3$ : Para este valor de  $\mu$  tenemos que  $W_0^u(f_{4/3}) = (-\infty, 2]$ .
- Caso  $4/3 < \mu < 2$ : Acá sucede que el conjunto inestable del 2 no tiene cota superior y el 2 está en el conjunto inestable del 0 por tanto el conjunto inestable del 0 tampoco tiene cota superior.

Igual que en el ejemplo anterior  $f_\mu$   $C^\infty$ -converge a  $f_{4/3}$ .

## 2.2 Continuidad del conjunto inestable

En los ejemplos anteriores vimos como el conjunto inestable puede explotar. La siguiente proposición muestra que éste no puede implotar y generaliza a la proposición 1.6 en el caso unidimensional.

**Proposición 2.1** Sea  $f \in C_p^1(\mathbb{R})$  entonces para todo  $K \subset \overset{\circ}{W}_p^u(f)$  compacto existe  $\mathcal{U}(f)$ ,  $C_p^1$  entorno, tal que toda  $g \in \mathcal{U}$  verifica  $K \subset \overset{\circ}{W}_p^u(g)$ .

**Demostración.** Sea  $I$  un intervalo compacto entorno de  $p$  de forma que  $|f'(x)| > 1$  para todo  $x \in I$ , el cual existe porque  $f'$  es continua y porque  $p$  es repulsor. Luego tomemos  $\mathcal{U}^1$ , un  $C_p^1$  entorno de  $f$  tal que toda  $g \in \mathcal{U}^1$  verifique que  $|g'(x)| > 1$  para todo  $x \in I$ .

18CAPÍTULO 2. LA ÚLTIMA ÓRBITA HOMOCLÍNICA (CASO UNIDIMENSIONAL)

Sea  $n$  tal que  $K$  está incluido en el interior de  $J = f^n(I)$ . Sea  $\epsilon > 0$  menor que la distancia de  $K$  al borde de  $J$ . Tomemos  $\mathcal{U}^2$ , entorno  $C_p^0$  de  $f$ , tal que

$$\forall g \in \mathcal{U}^2, |f^n(x) - g^n(x)| < \epsilon, \forall x \in I$$

Luego  $K \subset g^n(I)$  para toda  $g \in \mathcal{U}^2$ . Y como  $I \subset W_p^u(g)$ , para toda  $g \in \mathcal{U}^1$ , tenemos que,  $K \subset W_p^u(g)$  para toda  $g \in \mathcal{U}^1 \cup \mathcal{U}^2$ , como queríamos demostrar.  $\square$

Para dar un sentido formal al concepto de continuidad del conjunto inestable tomaremos en cuenta los mapas que a cada función le asocian los extremos del conjunto  $W_p^u$ . Consideremos

$$W^+ : C_p^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$W^- : C_p^1(\mathbb{R}) \rightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$$

definidos por la siguiente ecuación

$$\overline{W_p^u(f)} = [W^-(f), W^+(f)]$$

La noción de continuidad que buscamos es la siguiente.

**Definición 2.1** Decimos que  $f \in C_p^1(\mathbb{R})$  es un punto de continuidad del conjunto inestable sii los mapas  $W^-$  y  $W^+$  son continuos en  $f$ .

Ahora podemos reescribir la proposición 2.1 en estos nuevos términos.

**Proposición 2.2** Los mapas  $W^-$  y  $W^+$  son continuos por arriba y por abajo respectivamente.

Decimos que  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  es continua por abajo en  $x \in X$  sii para todo  $\epsilon > 0$  existe  $U$  entorno de  $x$ , tal que  $\varphi(y) - \varphi(x) > \epsilon$ , siempre que  $y \in U$ . Y alrevés es la continuidad por arriba. Es facil ver que una función es continua sii lo es por arriba y por abajo. Lo que probaremos a continuación es que el conjunto de los mapas  $f \in C_p^1(\mathbb{R})$  que son de continuidad para  $W_p^u$  tiene interior denso. Para eso mostraremos que existe un conjunto  $C_p^1$ -abierto y  $C_p^1$ -denso que es de continuidad para  $W_p^u$ . Usaremos el hecho de que

$$\mathcal{A} = \{f \in C_p^1(\mathbb{R}) : f^n(x) = x, n = 2, 3 \Rightarrow |(f^n)'(x)| \neq 1 \text{ y } x \text{ es valor regular de } f^n\}$$

es abierto y denso. Antes de continuar demostremos el siguiente lema.

**Lema 2.1** Si  $f \in C_p^1(\mathbb{R})$  y  $f(\partial W_p^u) \subset \overset{\circ}{W}_p^u$  entonces  $f$  es un punto de continuidad de  $W_p^u$ .

**Demostración.** Como  $W_p^u$  es un entorno de  $f(\partial W_p^u)$  y  $f$  es continua existe  $\delta_0 > 0$  tal que para todo  $\delta_0 > \delta > 0$ ,  $f(B_\delta(\partial W_p^u)) \subset W_p^u$ . Como  $f(W_p^u) = W_p^u$  y  $B_\delta(W_p^u) = W_p^u \cup B_\delta(\partial W_p^u)$  tenemos que

$$f(B_\delta(W_p^u)) = W_p^u$$

para todo  $0 < \delta < \delta_0$ . Ahora solo resta observar que si  $g \in C^1(\mathbb{R})$  y verifica que  $|g(x) - f(x)| < \delta$  para los  $x$  de  $B_\delta(W_p^u)$  entonces  $g(B_\delta(W_p^u(f))) \subset B_\delta(W_p^u(f))$  y luego

$$W_p^u(g) \subset B_\delta(W_p^u(f))$$

con lo que se concluye esta demostración.  $\square$

**Teorema 2.1** Si  $f \in \mathcal{A}$  entonces  $f$  es un punto de continuidad de  $W_p^u$ .

**Demostración.** Por el lema anterior podemos suponer que  $f(\partial W_p^u) \cap \partial W_p^u \neq \emptyset$ . Estudiaremos cada caso:

1.  $\partial W_p^u = \emptyset$ : El conjunto inestable no puede explotar ya que éste es todo  $\mathbb{R}$ .
2.  $\partial W_p^u = \{r\}$ : Podemos suponer sin perder generalidad que  $r > p$ , en caso contrario bastaría considerar  $-f(-x)$ . Por lo que vimos anteriormente  $r$  es un punto fijo (ya que no cae en el interior de  $W_p^u$ ). Como  $f \in \mathcal{A}$ ,  $r$  es valor regular e hiperbólico y no tiene preimágenes en  $W_p^u$  porque éstas tendrían que ser puntos críticos ya que serían interiores a  $W_p^u$ . El punto fijo  $r$  es el supremo de  $f|_{W_p^u}$  por tanto  $f'(r) \geq 0$ . Si  $f'(r) > 1$  el conjunto inestable de  $p$  terminaría en el punto fijo anterior a  $r$  o en el mayor valor crítico de  $f$  en  $W_p^u$  y no en  $r$ . Luego  $f'(r) \in (0, 1)$ . Sea  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $f'(x) \in (0, 1)$  en  $\overline{B}_{\epsilon_0}(r)$  y el mayor valor crítico de  $f|_{W_p^u}$  sea menor que  $r - \epsilon_0$ . Sea  $\mathcal{U}(f)$  entorno  $C_p^1$  tal que toda función en  $\mathcal{U}$  cumpla las dos propiedades anteriores. Para  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  sea  $\mathcal{V}_\epsilon(f)$  un entorno  $C_p^1$  tal que toda  $g \in \mathcal{V}_\epsilon$  tenga un único punto fijo  $r_g$  en  $B_\epsilon(r)$ . Luego

$$g(-\infty, r + \epsilon) \not\subset (-\infty, r + \epsilon)$$

Y luego para toda  $g \in \mathcal{V}_\epsilon$

$$\overline{W}_p^u(g) \subset B_\epsilon(W_p^u(f))$$

3.  $\partial W_p^u = \{r, s\}$ : Por la simetría respecto de  $r$  y  $s$  hay que estudiar cinco casos.
  - (a)  $f(r) \in \overset{\circ}{W}_p^u$  y  $f(s) = s$ : Argumentamos en forma análoga al caso en que  $\partial W_p^u$  es un punto.
  - (b)  $f(r) \in \overset{\circ}{W}_p^u$  y  $f(s) = r$ : Entonces  $f^2(s) \in \overset{\circ}{W}_p^u$ . Si  $f^2(r) \in \overset{\circ}{W}_p^u$  entonces  $f^2$  es de continuidad y por tanto  $f$  es de continuidad. Si  $f^2(r) = r$  entonces  $f^2(r)$  es un punto crítico de  $f^2$  y  $f \notin \mathcal{A}$ . Si  $f^2(r) = s$  entonces  $f^3(r) = r$  y  $r$  es valor crítico de  $f^3$ , absurdo.

- (c)  $f(s) = s$  y  $f(r) = r$ : Argumentamos en forma análoga al caso en que  $\partial W_p^u$  es un punto.
- (d)  $f(s) = r$  y  $f(r) = r$ : Lo que sucede es que  $s$  es un valor crítico de  $f$  y por tanto  $r$  es valor crítico de  $f^2$ .
- (e)  $f(s) = r$  y  $f(r) = s$ : Considerando  $f^2$  estamos en caso 3c.

□

## 2.3 Cuando no hay órbitas homoclinicas

Ahora mostraremos como, con la hipótesis de continuidad de  $W_p^u$ , la no existencia de órbitas homoclinicas es  $C^1$ -persistente. El ejemplo 2.4 muestra la necesidad de dicha hipótesis.

**Lema 2.2** *Si  $p$  no tiene ninguna órbita homoclinica entonces  $p$  no tiene ninguna preimagen en el borde de  $W_p^u(f)$ .*

**Demostración.** Separaremos la demostración en varios casos.

1. Caso  $W_p^u$  acotado: Sea  $r \in \partial W_p^u \setminus W_p^u$ . Siempre es cierto que  $f: W_p^u \rightarrow W_p^u$  es sobreyectiva luego  $f: \overline{W}_p^u \rightarrow \overline{W}_p^u$  también es sobreyectiva ya que  $f(\overline{W}_p^u)$  es compacto. Entonces  $r$  tiene preimagen en  $\overline{W}_p^u$ , digamos que  $s$  sea dicha preimagen. Como  $r \notin W_p^u$ ,  $s \notin W_p^u$ . Dos casos más.
  - (a) Caso  $W_p^u$  semiabierto: Simplemente  $s = r$  y por tanto  $r$  no es preimagen de  $p$ .
  - (b) Caso  $W_p^u$  abierto: Si  $r = s$ ,  $r$  no es preimagen de  $p$ . Supongamos  $r \neq s$ . Luego  $f(r) = s$ , es decir  $r$  es de período 2, ésto es porque  $f(W_p^{u\pm}) = W_p^{u\mp}$  ya que no hay preimágenes de  $p$  en  $W_p^u$  salvo  $p$ , donde  $W_p^{u+} = \{x \in W_p^u : x > p\}$  y  $W_p^{u-} = \{x \in W_p^u : x < p\}$ .
2. Caso  $W_p^u$  no acotado: El caso  $W_p^u = \mathbb{R}$  es fácil. Supongamos que  $W_p^u = (a, +\infty)$ , es lo mismo para  $W_p^u = (-\infty, a)$ . La derivada de  $f$  en  $p$  no puede ser negativa porque  $f([a, p])$  tendría que ser  $[p, +\infty)$  que no es compacto. Luego  $f'(p) > 1$  y hacemos igual que antes,  $f: [a, p] \rightarrow [a, p]$  es sobreyectiva y  $a$  no tiene preimagen en  $(a, p]$ , por tanto  $f(a) = a$ .

□

En realidad probé que si  $x \in \partial W_p^u \setminus W_p^u$  entonces si  $f'(p) > 1$  entonces  $x$  es fijo y si  $f'(p) < -1$  entonces  $x$  es de periodo 2. Ésto con la hipótesis de que no haya preimágenes de  $p$  en  $W_p^u$  salvo  $p$ .

**Proposición 2.3** *Si  $f$  es de continuidad para  $W_p^u$  y  $f$  no tiene ninguna órbita homoclinica asociada a  $p$  entonces existe un  $C_p^1$ -entorno  $\mathcal{V}$  de  $f$  tal que toda  $g \in \mathcal{V}$  no tiene ninguna órbita homoclinica asociada a  $p$ .*

**Demostración.** Sabemos que  $p$  no tiene ninguna órbita homoclínica asociada a  $p$  sii  $W_p^u \cap f^{-1}(p) = \{p\}$ . Por el lema 2.2 deducimos que  $\overline{W_p^u} \cap f^{-1}(p) = \{p\}$ . Sean  $U_1$  y  $U_2$ , disjuntos, entornos de  $f^{-1}(p) \setminus p$  y  $\overline{W_p^u}$ , respectivamente. Sea  $\mathcal{U}_1$  un  $C^1$ -entorno de  $f$  tal que para toda  $g \in \mathcal{U}_1$ ,  $\overline{W_p^u}(g) \subset U_1$ , esto es porque  $f$  es de continuidad para  $W_p^u$ . Sea  $\mathcal{U}_2$  un  $C^0$ -entorno de  $f$  tal que toda  $g \in \mathcal{U}_2$  no tenga preimágenes de  $p$  en  $U_2$ , salvo  $p$ . Luego  $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$  verifica la tesis.  $\square$

## 2.4 La última órbita homoclínica

Probaremos ahora que cuando se da la última órbita homoclínica, ésta es crítica o se presenta una discontinuidad del conjunto inestable.

**Proposición 2.4** *Sea*

$$\mathcal{H} = \{f \in C_p^1(\mathbb{R}) : f \text{ tiene por lo menos una o.h. asociada a } p\}$$

*Si  $f$  está en el borde de  $\mathcal{H}$  y es de continuidad de  $W_p^u$ , entonces  $f$  tiene por lo menos una órbita homoclínica crítica asociada a  $p$  y no tiene ninguna órbita homoclínica regular asociada a  $p$ .*

**Demostración.** Si  $f$  tuviera alguna o.h.r. asociada a  $p$  entonces por la proposición 3.1  $f$  sería interior a  $\mathcal{H}$ , absurdo. Y si  $f$  no tuviera ninguna órbita homoclínica por la proposición 2.3, usando la hipótesis de que  $W_p^u$  es continua en  $f$ , tenemos que  $f$  es interior al complemento de  $\mathcal{H}$ , absurdo.  $\square$

Entonces ya estamos en condiciones de decir cómo es la última órbita homoclínica. Supongamos que  $f: [0, 1] \rightarrow C_p^1(\mathbb{R})$  es una función continua (escribiremos  $f_\mu$  en lugar de  $f(\mu)$ ). Entonces si  $f_0$  tiene alguna órbita homoclínica regular asociada a  $p$  y  $f_1$  no tiene ninguna órbita homoclínica asociada a  $p$  definimos

$$\mu_0 = \sup\{\mu \in [0, 1] : f_\mu \text{ tiene alguna órbita homoclínica asociada a } p\}$$

Entonces deducimos el siguiente teorema.

**Teorema 2.2** *El endomorfismo  $f_{\mu_0}$  verifica alguna de las dos siguientes propiedades:*

- *El conjunto inestable de  $p$  es discontinuo en  $f_{\mu_0}$ .*
- *Para  $f_{\mu_0}$  no hay ninguna órbita homoclínica regular asociada a  $p$  y sí hay por lo menos una órbita homoclínica crítica asociada a  $p$ .*

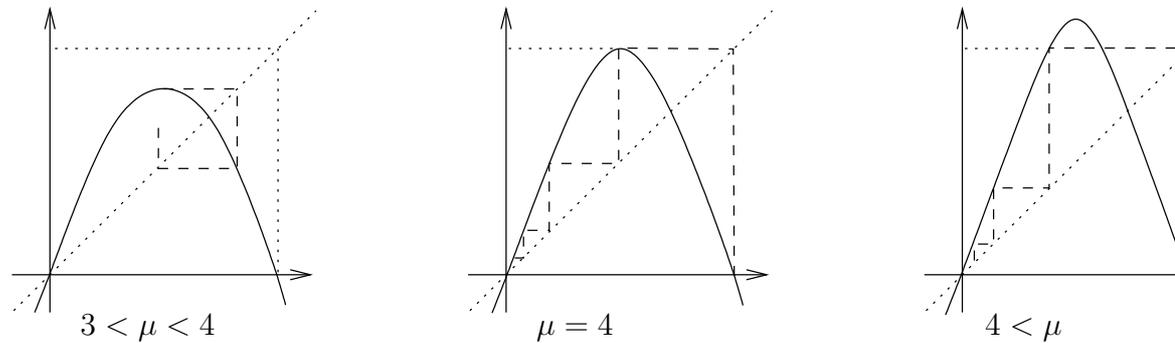
**Demostración.** Supongamos que  $f_{\mu_0}$  fuera un punto de continuidad de  $W_p^u$ . Si  $f_{\mu_0}$  no tuviera ninguna órbita homoclínica asociada a  $p$ , por la proposición 2.3, habría un  $C_p^1$ -entorno  $\mathcal{V}$  de  $f$  tal que ninguna  $g \in \mathcal{V}$  tenga alguna órbita homoclínica asociada a  $p$ . Como  $f$  es continua  $f^{-1}(\mathcal{V})$  es un entorno de  $\mu_0$

y entonces para todo  $\mu \in f^{-1}(\mathcal{V})$ ,  $f_\mu$  no tendría ninguna órbita homoclínica asociada a  $p$ , lo cual es absurdo. El otro caso es que  $f_{\mu_0}$  tuviera alguna órbita homoclínica regular asociada a  $p$ . Pero aplicando el teorema 3.1 y razonando de forma análoga llegamos a un absurdo similar al anterior.

□

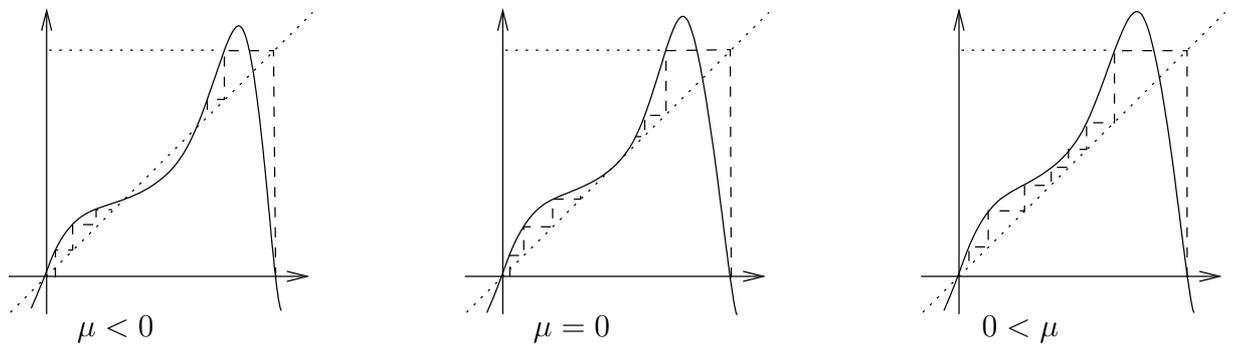
Para culminar veamos dos ejemplos que muestran que puede no suceder alguna de las propiedades del teorema anterior (naturalmente no de forma simultánea).

**Ejemplo 2.3** *Mostraremos que  $f_{\mu_0}$  es de continuidad del conjunto inestable de 0 y las únicas órbitas homoclínicas son críticas. Sea  $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$  con  $\mu > 3$  y  $\mu_0 = 4$ . Estas funciones tienen todas al 0 como punto fijo repulsor, al 0 y al 1 como raíces y a  $1/2$  como punto crítico. Veamos que sucede.*



1. Caso  $3 < \mu < 4$ : El 0 no tiene ninguna órbita homoclínica asociada.
2. Caso  $\mu = 4$ : El 1 tiene órbita homoclínica crítica asociada al 0 y no hay ninguna órbita homoclínica regular asociada a 0. Además  $f_4$  es de continuidad del conjunto inestable del 0.
3. Caso  $\mu > 4$ : El 1 tiene órbita homoclínica regular asociada a 0.

**Ejemplo 2.4** *Veremos un ejemplo en el que  $f_{\mu_0}$  no tiene ninguna órbita homoclínica siendo ésta un punto de discontinuidad del conjunto inestable. Consideremos una familia  $f_\mu$ , con  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\mu_0 = 0$ , que tenga gráficos como en la siguiente figura.*



1. Caso  $\mu < 0$ : No hay ninguna órbita homoclínica asociada al 0 ya que  $W_0^u$  termina antes que la primagen del 0.
2. Caso  $\mu = 0$ : Sucede que  $f_0$  es de discontinuidad de  $W_0^u$  y ésta no tiene ninguna órbita homoclínica asociada a 0.
3. Caso  $0 < \mu$ : El 0 tiene órbitas homoclínicas regulares asociadas.



## Capítulo 3

# Órbita Homoclínica Regular

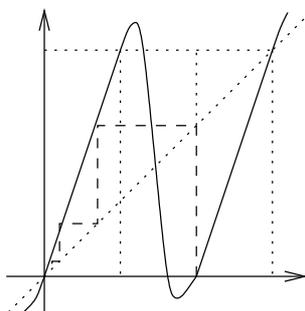
En la primera sección de este capítulo vamos a probar que si un endomorfismo  $f \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$  tiene una órbita homoclínica regular asociada a un punto fijo repulsor  $p$  entonces existe  $n \geq 1$  un entorno  $K^0$  de la órbita homoclínica de  $f^n$  de forma que el invariante maximal de  $f^n$  en  $K^0$  (concepto dado en la definición 1.7) es un conjunto de Cantor y  $f|_{\Lambda_{K^0}}^n(f^n)$  es conjugado al shift unilateral de dos símbolos (que fue introducido en el capítulo 1). En la primera parte del capítulo 2 ya mostramos algunas de estas propiedades en un ejemplo concreto. Ahora lo haremos para una órbita homoclínica regular de un endomorfismo cualquiera de  $\mathbb{R}^n$ . En la segunda sección mostraremos la  $C^1$ -persistencia de las órbitas homoclínicas regulares asociadas a un punto fijo repulsor. Y finalmente, en la tercera sección, probaremos la estabilidad de  $f^n$  en el conjunto de Cantor y también que este conjunto varía continuamente con el endomorfismo.

### 3.1 Ejemplo de órbita homoclínica regular

El siguiente es un ejemplo unidimensional en el que se satisfacen las hipótesis del teorema 3.1 que demostraremos en esta monografía. Veremos en este caso particular algunas de las propiedades que promete dicho teorema. Consideremos una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que verifique las siguientes condiciones

1.  $f(x) = 3x$  si  $x \in [0, \frac{1}{3}]$
2.  $f(x) = 3x - 2$  si  $x \in [\frac{2}{3}, 1]$

La continuidad y la diferenciabilidad de esta función no son imprescindibles para lo que queremos hacer ahora, pero sabemos que si queremos podemos considerarla de clase  $C^\infty$ . Imaginemos una tal  $f$  con un gráfico como el de la siguiente figura.



Si definimos la sucesión  $y_0 = 0$  e  $y_n = 2/3^n$  para  $n \geq 1$ , es fácil verificar que  $f(y_{n+1}) = y_n$  para todo  $n \geq 0$ . Por tanto cualquier  $y_n$ ,  $n \geq 1$ , tiene órbita homoclínica regular asociada al punto fijo repulsor  $y_0$ . Definamos una familia de conjuntos  $K_n$  recursivamente de la siguiente manera

1.  $K_0 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$
2.  $K_{n+1} = f^{-1}(K_n) \cap K_n$

Es inmediato verificar que son compactos y que  $K_{n+1} \subset K_n$ . Describámoslos más precisamente. Estos conjuntos son uniones finitas de intervalos compactos. Y para calcular uno a partir del anterior basta sacarle el intervalo abierto  $\frac{1}{3}$ -central a cada intervalo que lo compone. Esto es simplemente por cómo está definida  $f$  en  $K_0$ . Luego el conjunto

$$K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$$

es el conjunto de Cantor usual que se puede describir como los números reales en el intervalo  $[0, 1]$  que se pueden expresar en base 3 sin usar la cifra 1. También es cierto que todo  $x \in K$  tiene una única forma de ser expresado de esa manera. A los puntos de  $K$  les asociamos la sucesión en  $\{0, 1\}$ ,  $\hat{x} \in \Sigma$  (definido en la sección 1.6), que verifica:

$$x = \sum_{n \geq 1} \frac{2\hat{x}_n}{3^n}.$$

Ahora veremos que la dinámica de  $f$  en  $K$  es la misma que la del shift unilateral de dos símbolos. Por cómo está definido  $K$  se desprende que es invariante, es decir  $f(K) \subset K$  (en realidad  $K$  es el invariante maximal de  $K_0$ ). Definamos la función  $h: K \rightarrow \Sigma$  como  $h(x) = \hat{x}$ . Probar que  $h$  es un homeomorfismo es algo que haremos adelante en forma más general. Para ver que  $h$  es una conjugación falta probar que  $\sigma \circ h = h \circ f|_K$ . El siguiente cálculo lo demuestra. (En todas las sumatorias no está indicado que van de  $n$  igual 1 a infinito para no saturar más la notación).

### 3.2. CONJUGACIÓN CON EL SHIFT UNILATERAL DE DOS SÍMBOLOS 27

1. Si  $x \in [0, \frac{1}{3}]$  entonces  $\hat{x}_1 = 0$  y

$$\begin{aligned} h \circ f(x) &= h\left(3 \sum \frac{2\hat{x}_n}{3^n}\right) \\ &= h\left(\sum \frac{2\hat{x}_{n+1}}{3^n}\right) \\ &= \sigma(\hat{x}) \\ &= \sigma \circ h(x) \end{aligned}$$

2. Si  $x \in [\frac{2}{3}, 1]$  entonces  $\hat{x}_1 = 1$  y

$$\begin{aligned} h \circ f(x) &= h\left(3 \sum \frac{2\hat{x}_n}{3^n} - 2\right) \\ &= h\left(\sum \frac{2\hat{x}_{n+1}}{3^n}\right) \\ &= \sigma(\hat{x}) \\ &= \sigma \circ h(x) \end{aligned}$$

Analicemos estas operaciones. Sean  $W_0 = [0, \frac{1}{3}]$  y  $W_1 = [\frac{2}{3}, 1]$ . Afirmamos que si  $h(x)_{i+1} = j$  entonces  $f^i(x)$  está en el conjunto  $W_j$ . Es decir  $h(x)$  es el itinerario del punto  $x$ , o de otra manera,  $h(x)$  indica por cuales de los  $W_j$  deben pasar los iterados de  $x$ . Es más, como veremos, cada itinerario caracteriza a los puntos de  $K$ , ya que  $h$  es biyectiva. Finalicemos este ejemplo probando que para todo  $i \geq 0$  se verifica que,  $f^i(x) \in W_{h(x)_{i+1}}$ . Hagámoslo por inducción en  $i$ . El caso  $i = 0$  es evidente ya que  $x \in W_{h(x)_1}$ . Sabemos que  $h \circ f^i|_K = \sigma^i \circ h$  porque  $h$  es una conjugación. Entonces  $f^i(x) \in W_{h(f^i(x))_1} = W_{\sigma^i(h(x))_1} = W_{h(x)_{i+1}}$ . Que es lo que queríamos probar.

## 3.2 Conjugación con el Shift unilateral de dos símbolos

En la primera parte del siguiente teorema vamos a construir una sucesión de conjuntos compactos  $K_n^0$  de forma que  $f|_{\Lambda^{K_n^0}(f^n)}$  sea semiconjugado al shift unilateral de dos símbolos. Y la segunda parte demostrará que, para todo  $n$  suficientemente grande, el conjunto  $\Lambda^{K_n^0}(f^n)$  es un conjunto de Cantor y las dinámicas son conjugadas.

**Teorema 3.1** Sean  $f \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$  y  $x \neq p$  con órbita homoclínica regular asociada a  $p$ . Entonces concluimos lo siguiente.

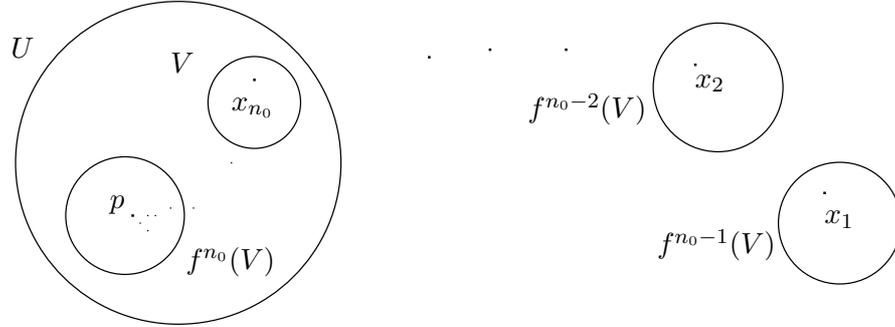
(Parte I) Existe  $r_1 > 0$  tal que para todo  $n \geq r_1$  existe un entorno  $K_n^0$  de la órbita homoclínica de  $f^n$  y una semiconjugación  $h_n : \Lambda^{K_n^0}(f^n) \rightarrow \Sigma$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{K_n^0}(f^n) & \xrightarrow{f^n} & \Lambda^{K_n^0}(f^n) \\ h_n \downarrow & & \downarrow h_n \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array}$$

donde  $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$  es el shift unilateral de dos símbolos.

(Parte II) Existe  $r_2 > 1$  tal que para todo  $n \geq r_2$ ,  $\Lambda^{K_n^0}(f^n)$  es un conjunto de Cantor expansor para  $f^n$  y  $h_n$  es una conjugación.

**Demostración. (Parte I)** Tomemos un entorno  $U(p)$  como en las proposiciones 1.1 y 1.2 y una sucesión  $x_n$  como en la proposición 1.1. Como  $x_n \rightarrow p$  existe  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,  $x_n \in U$ . Llamémosle  $x$  a  $x_{n_0}$ . Tomemos un entorno  $V$  de  $x$  tal que  $\overline{V} \subset U$  y  $p \notin \overline{V}$ . Pero por el ítem 2 de la proposición 1.1  $f$  es un difeomorfismo local en  $x$  y podemos suponer que  $f|_V$  es un difeomorfismo sobre su imagen. Más aún, como la órbita de  $x$  es regular podemos suponer que  $f^{n_0}|_V$  es un difeomorfismo sobre su imagen. Como  $f^{n_0}(x) = p$ ,  $f^{n_0}(V)$  es un entorno de  $p$ .



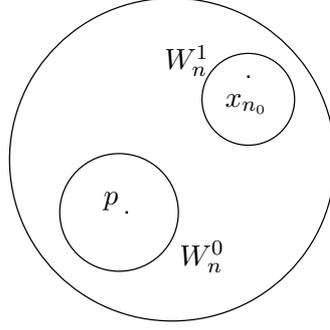
Definamos unos conjuntos  $U_n$  recursivamente por las siguientes igualdades

- $U_0 = \overline{U}$
- $U_{n+1} = f^{-1}(U_n) \cap U_n$

Es claro que  $f^n: U_n \rightarrow U_0$  es un difeomorfismo para todo  $n \geq 1$ . Como  $U_0 = \overline{U}$  es compacto tenemos que los  $U_n$  son compactos. Entonces es fácil probar que existe  $n_1$  tal que para todo  $n \geq n_1$ ,  $U_n \subset f^{n_0}(V)$  y  $U_n \cap V = \emptyset$  ya que como dijimos  $f^{n_0}(V)$  es entorno de  $p$  y  $p \notin \overline{V}$ .

Para  $n \geq n_1$  definimos  $W_{n+n_0}^1 = f^{-n_0}(U_n) \cap V$ , por tanto  $W_{n+n_0}^1$  es compacto ya que  $f|_{V^{n_0}}$  es un homeomorfismo sobre su imagen y  $U_n \subset f^{n_0}(V)$  es compacto. También definimos, para  $n \geq n_1$ ,  $W_{n+n_0}^0 = U_{n+n_0}$ . Entonces tenemos definido, para todo  $n \geq r_1 = n_1 + n_0$ , los conjuntos compactos  $W_n^0, W_n^1 \subset U$  que por cómo están definidos se desprende que para  $n \geq r_1$ ,  $f^n(W_n^0) = f^n(W_n^1) = \overline{U}$

3.2. CONJUGACIÓN CON EL SHIFT UNILATERAL DE DOS SÍMBOLOS 29



$$\bar{U} = f^n(W_n^0) = f^n(W_n^1)$$

Del hecho de que  $U_n \cap V = \emptyset$  se desprende que  $W_n^0 \cap W_n^1 = \emptyset$ . Es evidente también que  $\{W_n^0\}$  es una base monótona de entornos de  $p$ . Y como  $\{U_n\}$  es base monótona de entornos de  $p$  y  $f^n|_V$  es un homeomorfismo sobre su imagen,  $\{W_n^1\}$  es base monótona de entornos de  $x$ .

Construyamos una sucesión  $K_n^i$  para  $i \geq 0$  y  $n \geq r_1$  recursivamente por

$$\begin{cases} K_n^0 = W_n^0 \cup W_n^1 \\ K_n^{i+1} = f^{-n}(K_n^i) \cap K_n^i \end{cases}$$

Entonces siempre es cierto que

$$\Lambda^{K_n^0}(f^n) = \bigcap_{i \geq 0} K_n^i$$

Que es compacto porque es intersección de compactos encajados. Definamos  $h_n: \Lambda^{K_n^0}(f^n) \rightarrow \Sigma$  por

$$h_n(x)_i = t \text{ sii } f^{in}(x) \in W_n^t$$

lo anterior es una definición ya que  $\Lambda^{K_n^0}(f^n) \subset W_n^0 \cup W_n^1$ ,  $\Lambda^{K_n^0}(f^n)$  es invariante para  $f^n$  y los conjuntos  $W_n^0$  y  $W_n^1$  son disjuntos. Esta función le asocia a cada punto de  $\Lambda^{K_n^0}(f^n)$  la sucesión en  $\{0, 1\}$  correspondiente a cual de los  $W_n^i$  visita cada iterado del punto por  $f^n$ . Por ejemplo  $h(p) = (0, 0, \dots)$  ya que  $p \in W_n^0$  es fijo y  $h(x) = (1, 0, 0, \dots)$  ya que  $x \in W_n^1$  y  $f^{in}(x) = p \in W_n^0$  para  $i > 0$ . Esto muestra que vamos por buen camino ya que  $x$  tiene órbita homoclínica asociada a  $p$  y  $h_n(x)$  tiene órbita homoclínica asociada a  $h_n(p)$  para el shift, como vimos cuando estudiamos esta dinámica en los preliminares. Comencemos por probar que  $h_n$  es una semiconjugación. Las siguientes afirmaciones son evidentes por la definición de  $h_n$ .

$$\sigma(h(x))_i = h(x)_{i+1} = t \text{ sii } f^{(i+1)n}(x) \in W_n^t$$

$$h(f^n(x))_i = t \text{ sii } f^{in}(f^n(x)) \in W_n^t \text{ sii } f^{(i+1)n}(x) \in W_n^t$$

por lo tanto  $\sigma(h_n(x))_i = t$  si  $h_n(f^n(x))_i = t$  y entonces  $\sigma(h_n(x))_i = h_n(f^n(x))_i$  para todo  $i \geq 0$ , lo cual prueba que  $\sigma \circ h = h \circ f^n$  y por tanto el diagrama conmuta. Probemos que  $h_n$  es sobreyectiva. Para todo  $l \in 2^m$ ,  $m \geq 1$ , definimos el conjunto  $K_n^l$  recursivamente por

- $K_n^i = W_n^i$ ,  $i = 0, 1$
- $K_n^{il} = W_n^i \cap f^{-n}(K_n^l)$ ,  $i = 0, 1$  y  $l \in 2^m$

donde si  $l = (l_0, l_1, \dots, l_{m-1}) \in 2^m$  e  $i = 0, 1$  entonces  $il = (i, l_0, l_1, \dots, l_{m-1}) \in 2^{m+1}$ . Por inducción en  $m$  es fácil ver que si  $x \in K_n^l$ ,  $l \in 2^m$  entonces  $f^{ni}(x) = W_n^{li}$ , para  $i = 0, 1, \dots, m-1$ . Los conjuntos  $K_n^l$  son compactos y verifican que si  $l \neq l'$  ambos en  $2^m$  entonces  $K_n^l \cap K_n^{l'} = \emptyset$ . Para  $l \in 2^N$  definimos

$$K_n^l = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_n^{\Pi_i(l)}$$

estos conjuntos son compactos, no vacíos y verifican que si  $x \in K_n^l$  entonces  $f^{ni}(x) \in W_n^{li}$ , para todo  $i \geq 0$ . También tenemos que si  $l \neq l'$  entonces  $K_n^l \cap K_n^{l'} = \emptyset$ . Entonces  $h_n$  es sobreyectiva ya que  $h_n(K_n^l) = l$ , para cualquier  $l \in 2^N$ .

Para probar que  $h_n$  es continua observemos que si  $m \geq 0$

$$K_n^m = \bigcup_{l \in 2^{m+1}} K_n^l$$

como el segundo miembro de la anterior igualdad es la unión finita de compactos disjuntos dos a dos existe una familia  $\{U_n^l\}_{l \in 2^m}$ , de abiertos disjuntos dos a dos tal que  $K_n^l \subset U_n^l$ ,  $l \in 2^m$ ,  $m \geq 1$ . Luego si  $y_m$  es una sucesión en  $\Lambda^{K_n^0}(f^n)$ , con límite  $y$ , para todo  $m_1$  existe  $m_0$  tal que para todo  $m > m_0$ ,

$$y_m \in U_n^{\Pi_{m_1}(h_n(y))}$$

O de otra manera: para todo  $m_1$  existe  $m_0$  tal que para todo  $m > m_0$ ,  $\Pi_{m_1}(h_n(y_m)) = \Pi_{m_1}(h_n(y))$ . Entonces  $h_n(y_m) \rightarrow h_n(y)$  y  $h$  es continua.

**(Parte II)** Veamos primero un sencillo lema.

**Lema 3.1** *Sea  $T: V \rightarrow W$  un isomorfismo de espacios vectoriales de dimensión  $n$ . Supongamos a  $V$  y  $W$  normados. Entonces existe  $m > 0$  tal que para todo  $v \in V$  no nulo se verifica*

$$m\|v\| < \|T(v)\|$$

**Demostración.** Podemos suponer que  $\|v\| = 1$ . Como  $S^{n-1} \subset V$  es compacto, la función  $g: S^{n-1} \rightarrow R$ , dada por  $g(v) = \|T(v)\|$ , tiene un mínimo en  $v_0$ . Como  $T$  es invertible  $T(v_0) \neq 0$ . Luego si tomamos  $0 < m < g(v_0)$  tenemos que para todo  $v$  de norma 1 se cumple que  $m < g(v)$ , o sea  $m\|v\| < \|T(v)\|$ .

### 3.2. CONJUGACIÓN CON EL SHIFT UNILATERAL DE DOS SÍMBOLOS 31

□

Primero probaremos que existen  $n_3 \geq r_1$  y  $\gamma > 1$  de forma que para todo  $n \geq n_3$ ,  $u \in W_n^0 \cup W_n^1$  y  $v \neq 0$  se cumpla que

$$\gamma \|v\| < \|d_u f^n(v)\| \quad (3.1)$$

Lo cual implica que  $f^n$  es expansora en  $\Lambda^{K_n^0}(f^n)$ .

**Demostración.** Dividámosla en dos casos.

1. Caso  $u \in W_n^0$ : Por la definición de  $W_n^0$  tenemos que  $u, f(u), \dots, f^n(u) \in U$ ; luego por la proposición 1.2 tenemos que

$$\mu \lambda^n \|v\| < \|d_u f^n(v)\|, \mu > 0, \lambda > 1$$

Entonces tomemos  $n_2 \geq r_1$  tal que para todo  $n \geq n_2$ ,  $\mu \lambda^n > 1$ . Luego  $\gamma_1 = \mu \lambda^n$  verifica la ecuación (3.1).

2. Caso  $u \in W_n^1$ : Por la regularidad de la órbita homoclínica tenemos que el diferencial de  $f$  es invertible en los puntos  $u, f(u), \dots, f^{(n_0-1)}(u)$  y por la definición de  $W_n^1$ , tenemos que  $f^{n_0}(u), \dots, f^n(u) \in U$ . Entonces por el lema 3.1 existe  $\beta > 0$  tal que para todo  $v \neq 0$

$$\beta \|v\| < \|d_u f^{(n_0-1)}(v)\|$$

y por la proposición 1.2, para todo  $w \neq 0$  se verifica

$$\mu \lambda^{n-n_0+1} \|w\| < \|d_{f^{(n_0-1)}(u)} f^{(n-n_0+1)}(w)\|$$

donde  $\mu > 0$  y  $\lambda > 1$ . Juntando ambas desigualdades obtenemos

$$\beta \mu \lambda^{n-n_0+1} \|v\| < \|d_u f^n(v)\|$$

Finalmente tomemos  $n_3 \geq n_2$  tal que para todo  $n \geq n_3$ ,  $\gamma_2 = \beta \mu \lambda^{n-n_0+1}$  sea mayor que 1.

Naturalmente, si tomamos  $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$  se verifica la ecuación (3.1) en ambos casos.

□

Sean  $C_0 \subset W_{n_3}^0$  y  $C_1 \subset W_{n_3}^1$  entornos convexos de  $p$  y de  $x$ , respectivamente. Como los  $W_n^0 \cup W_n^1$  es base monótona de entornos de  $\{p, x_{n_0}\}$  sea  $r_2$  tal que para todo  $n \geq r_2$ ,  $W_n^i \subset C_i$ , para  $i = 0, 1$ . Para probar que  $h$  es inyectiva debemos probar primero lo siguiente: para todo  $n \geq r_2$ , si  $y \neq z \in W_n^i$  y  $f^n(y), f^n(z) \in W_n^j$  entonces

$$\gamma \text{dist}(y, z) < \text{dist}(f^n(y), f^n(z)) \quad (3.2)$$

donde  $\gamma > 1$  es el de la ecuación (3.1).

**Demostremoslo.** Sean  $l = \text{dist}(f^n(y), f^n(z))$ ,  $y \neq z$ , ( $l$  es positivo, ya que  $f^n$  es inyectiva en  $W_n^i$ ) y  $\alpha: [0, l] \rightarrow W^j$  el segmento que conecta a  $f^n(y)$  con

$f^n(z)$ ; como los  $C_i$  son convexos el segmento  $\alpha$  está contenido en  $C_i \subset W_{n_3}^i$  y la curva  $f|_{W_n^i}^{-n} \circ \alpha$  conecta a  $y$  con  $z$ , podemos hacer las siguientes cuentas

$$\text{dist}(y, z) \leq \int_0^l \|(f|_{W_n^i}^{-n} \circ \alpha(t))'\| dt = \int_0^l \|d_{\alpha(t)} f|_{W_n^i}^{-n}(\dot{\alpha}(t))\| dt$$

luego, por la ecuación (3.1)

$$\gamma \|d_{\alpha(t)} f|_{W_n^i}^{-n}(\dot{\alpha}(t))\| < \|\dot{\alpha}(t)\|$$

y entonces

$$\text{dist}(y, z) < \frac{1}{\gamma} \int_0^l \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \frac{1}{\gamma} \text{dist}(f^n(y), f^n(z))$$

Supongamos entonces  $y \neq z$ . Si  $h_n(y) = h_n(z)$  tendríamos, por la definición de  $h_n$ , que  $f^{ni}(y), f^{ni}(z) \in W_n^{h(y)i}$  para todo  $i \geq 0$ . Pero por la ecuación (3.2) tenemos que  $\gamma^i \text{dist}(y, z) < \text{dist}(f^{ni}(y), f^{ni}(z))$ ,  $i \geq 0$ . Luego  $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{dist}(f^{ni}(y), f^{ni}(z)) = \infty$ . Esto es absurdo ya que  $f^{ni}(y)$  y  $f^{ni}(z)$  pertenecen ambos a  $W_n^0$  o a  $W_n^1$ , que son compactos y por tanto de diámetro finito. Concluimos entonces que  $h_n$  es inyectiva.

Finalmente veamos que la inversa de  $h_n$  es continua. Como  $h$  es biyectiva, toda sucesión en  $\Sigma$  se puede escribir, de una sola manera, como  $h_n(y_k)$  siendo  $y_k$  una sucesión en  $K_n$ . Digamos entonces que  $\lim_{k \rightarrow \infty} h_n(y_k) = h_n(y)$ . Por la inyectividad de  $h_n$  se deduce que

$$K_n^{h_n(y)} = \bigcap_{i \geq 1} K_n^{\Pi_i(h_n(y))} = \{y\}$$

Entonces para todo  $U_y$  entorno de  $y$ , existe  $i$  tal que  $K_n^{\Pi_i(h_n(y))} \subset U_y$ . Pero como  $h_n(y_k)$  converge a  $h_n(y)$ , existe  $k_0$  tal que, para todo  $k \geq k_0$ ,  $\Pi_i(h_n(y_k)) = \Pi_i(h_n(y))$ . Luego para todo  $k \geq k_0$ ,  $y_k \in K_n^{\Pi_i(h_n(y_k))} \subset U_y$ .  $\square$

### 3.3 Persistencia

En esta sección probaremos primero la persistencia de las órbitas homoclínicas regulares asociadas a puntos fijos repulsores. Luego refinaremos este resultado probando que toda órbita homoclínica regular varía continuamente con el endomorfismo.

**Proposición 3.1** *Las órbitas homoclínicas regulares asociadas a puntos fijos repulsores son  $C^1$ -persistentes.*

**Demostración.** Sea  $f \in C_p^1(\mathbb{R}^n)$  con  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  una órbita homoclínica regular asociada a  $p$ , donde  $x_1 \neq p$  es una preimagen de  $p$ . Por la regularidad de  $x_1$  podemos tomar un entorno abierto  $U_1(x_1)$ , con clausura compacta, de forma que  $f: \overline{U}_1 \rightarrow f(\overline{U}_1)$  sea un difeomorfismo y sin perder generalidad supongamos que  $\overline{U}_1 \cap f(\overline{U}_1) = \emptyset$ ; además, como la órbita es regular,  $x_1 \in \mathbb{W}_p^u(f)$  y como este último conjunto es abierto, podemos suponer que  $\overline{U}_1 \subset \mathbb{W}_p^u(f)$ . Entonces existe un  $C^1$ -entorno  $\mathcal{U}(f)$  y un entorno compacto  $U_p(p) \subset f(U_1)$  tal que para toda  $g \in \mathcal{U}$  se verifican las siguientes propiedades:

- (1) Por el ítem 1 de la proposición 1.4, existe  $p_g \in U_p$ , punto fijo repulsor de  $g$ .
- (2) Por el lema 1.2,  $U_p \subset g(U_1)$ .
- (3) Como  $f$  es un difeomorfismo (sobre su imagen) en  $\overline{U}_1$ , podemos suponer que  $U_1 \subset PR(g)$ .
- (4) Como los conjuntos compactos  $\overline{U}_1$  y su imagen por  $f$  son disjuntos, asumamos (propiedad  $C^0$ ) que  $\overline{U}_1 \cap g(\overline{U}_1) \neq \emptyset$ .
- (5) Finalmente por la proposición 1.6, digamos que  $\overline{U}_1 \subset \mathbb{W}_{p_g}^u(g)$ .

Estas condiciones son suficientes para construir una órbita homoclínica regular asociada a  $p_g$ . Veamos. Por (1) y (2) tenemos que el punto fijo repulsor  $p_g$  pertenece a  $g(U_1)$ , por tanto existe  $y_1 \in U_1$  preimagen de  $p_g$ . Por (3),  $y_1$  es un punto regular de  $g$  y por (4)  $y_1 \neq p_g$ . Luego por (5), sabemos que  $y_1 \in \mathbb{W}_{p_g}^u(g)$  entonces existe una preórbita regular de  $y_1$  que converge a  $p_g$  con la cual terminamos de construir la órbita homoclínica regular asociada a  $p_g$  para cada  $g \in \mathcal{U}$ . □

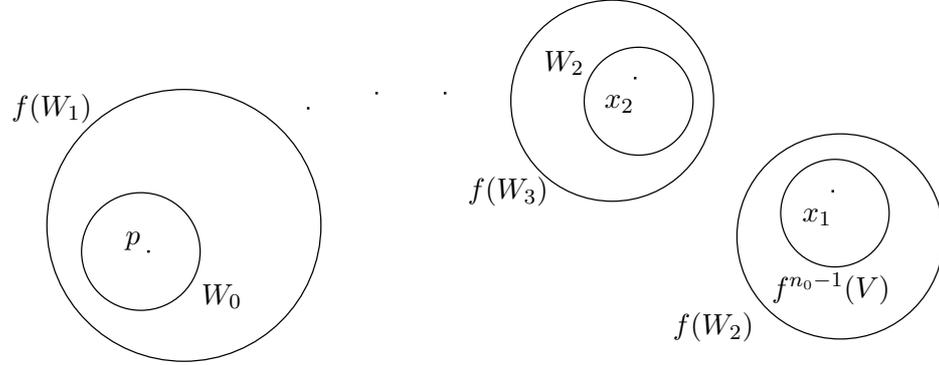
Veamos ahora que podemos achicar a  $\mathcal{U}$  de forma que  $y_n$  esté arbitrariamente cerca de  $x_n$ . En realidad la siguiente proposición implica a la anterior.

**Proposición 3.2** *Sea  $f \in C_{x_0}^1(\mathbb{R}^n)$  con  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  órbita homoclínica regular asociada a  $x_0$ . Entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $C^1$ -entorno  $\mathcal{U}(f)$  tal que para toda  $g \in \mathcal{U}$  existe una órbita homoclínica regular de  $g$ ,  $\{y_n\}_{n \geq 0}$ , asociada a  $y_0$  (punto fijo repulsor de  $g$ ) de forma que  $\|x_n - y_n\| < \epsilon$ , para todo  $n \geq 0$ .*

**Demostración.** Usando la regularidad de la órbita homoclínica  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  y la proposición 1.1 es fácil construir entornos abiertos,  $V_n(x_n)$ , de diámetro menor que  $\epsilon$  y clausura compacta, de forma que

$$f: \overline{V}_{n+1} \rightarrow \overline{V}_n$$

sea un difeomorfismo,  $\forall n \geq 0$ . Podemos suponer que  $x_1 \neq p$  y que  $x_0 = p \notin \overline{V}_0$ . Es trivial también construir entornos compactos  $W_n(x_n) \subset V_n$ , para que  $W_n \subset f(\overset{\circ}{W}_{n+1})$ , con  $n \geq 0$ .



Por el lema 1.2, existe un  $C^1$ -entorno,  $\mathcal{U}^n(f)$ , para cada  $n \geq 0$ , tal que  $\forall g \in \mathcal{U}^n$

$$W_n \subset g(\overset{\circ}{W}_{n+1})$$

Además, como  $\overline{V}_n$  es compacto y  $\overline{V}_n \subset PR(f)$ , podemos suponer que  $\overline{V}_n \subset PR(g)$ . Sean  $U_p \subset W_0$ , entorno de  $p$  y  $\mathcal{U}^p$ ,  $C^1$ -entorno de  $f$ , tales que  $U_p \cap \overline{V}_1 = \phi$  (ya que  $p \notin \overline{V}_0$ ) y para toda  $g \in \mathcal{U}^p$  se verifica que

- Existe  $p_g \in U_p$ , punto fijo repulsor de  $g$ .
- Para todo  $x \in U_p$ , existe una preórbita regular de  $x$ , por  $g$ , contenida en  $U_p$ .

Estas dos condiciones son por la proposición 1.4. Sea  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $V_n \subset U_p$ . Definamos entonces  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^p \cap \mathcal{U}^0 \cap \dots \cap \mathcal{U}^{n_0+1}$  y veamos por que este entorno de  $f$  verifica la tesis de la proposición.

Tomemos  $g \in \mathcal{U}$ . Como  $g \in \mathcal{U}^p$ , existe  $p_g \in U_p \subset W_0 \subset V_0$ , punto fijo repulsor de  $g$  y como el diámetro de  $V_0$  es menor que  $\epsilon$ ,  $\text{dist}(p_g, p) < \epsilon$ . Llamémosle  $y_0$  a  $p_g$ . Como  $W_0 \subset g(\overset{\circ}{W}_1)$ , existe  $y_1 \in \overset{\circ}{W}_1$  tal que  $g(y_1) = y_0$ . Y además  $W_1 \subset V_1 \subset PR(g)$ , por tanto,  $y_1$  es un punto regular de  $g$ . También tenemos que  $U_p \cap V_1 = \phi$ , lo cual implica que  $y_0 \neq y_1$  (ésto en realidad no es necesario, pero es gratis). El hecho de que  $y_1, x_1 \in W_1 \subset V_1$  nos da que  $\text{dist}(x_1, y_1) < \epsilon$ . Inductivamente construimos, de la misma manera, los puntos  $y_1, \dots, y_{n_0}$ , de forma que sean regulares para  $g$ ,  $y_i \in \overset{\circ}{W}_i$ ,  $g(y_{i+1}) = y_i$ ,  $\text{dist}(y_i, x_i) < \epsilon$ , para  $i = 1, \dots, n_0$ . Finalmente, como  $y_{n_0} \in V_{n_0} \subset U_p$ , existe,  $\{y_n\}_{n \geq n_0}$ , una preórbita regular de  $y_{n_0}$  (es decir  $g(y_{n+1}) = y_n$ ), contenida en  $U_p$  tal que  $y_n \rightarrow y_0$ . Y como  $\{x_n, y_n\}_{n \geq n_0} \subset U_p \subset W_0 \subset V_0$  tiene diámetro menor que  $\epsilon$ , concluimos que  $\text{dist}(x_i, y_i) < \epsilon$ , para todo  $i \geq n_0$ . □

### 3.4 Estabilidad

Ya sabemos que la órbita homoclínica regular (asociada a un punto fijo repulsor) es persistente. Ahora probaremos que si el endomorfismo  $f$  tiene una órbita homoclínica regular asociada a un punto fijo repulsor, entonces toda pequeña  $C^1$ -perturbación de  $f$ ,  $g$ , admite la misma construcción del conjunto de Cantor invariante para  $g^n$ . Además los conjuntos  $\Lambda^{K_n^0}(f^n)$  y  $\Lambda^{K_n^0}(g^n)$  están cerca y las dinámicas de  $f^n$  y  $g^n$  son conjugadas en dichos conjuntos. Antes de enunciar el teorema de manera formal, repasemos los mejores momentos de la demostración del teorema 3.1.

1.  $W_n^0 \cup W_n^1 = K_n^0 \subset U$ , unión disjunta y  $U$  entorno abierto de  $p$ ,
2.  $p \in W_n^0$ ,  $x \in W_n^1$ ,  $f^n(x) = p$ ,
3.  $f^n(W_n^i) = \bar{U}$ ,  $i = 0, 1$ ,
4. si  $m \geq 0$  y  $l \in 2^m$  entonces  $K^l = h_n^{-1}(\Pi_m^{-1}(l))$ .

Donde  $h_n: \Lambda^{K_n^0}(f) \rightarrow \Sigma$  es el homeomorfismo que conjuga a  $f^n|_{\Lambda^{K_n^0}}$  con el shift y  $\Pi_m: \Sigma \rightarrow 2^m$  es la proyección en las primeras  $m$  coordenadas. Para no saturar más la notación llamaremos  $f$  a  $f^n$  y omitiremos los índices  $n$  cada vez.

**Teorema 3.2** *Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\mathcal{U}(f)$ ,  $C^1$ -entorno, tal que para toda  $g \in \mathcal{U}$ , existe  $h: \Lambda^{K^0}(f) \rightarrow \Lambda^{K^0}(g)$  homeomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{K^0}(f) & \xrightarrow{h} & \Lambda^{K^0}(g) \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \Lambda^{K^0}(f) & \xrightarrow{h} & \Lambda^{K^0}(g) \end{array}$$

es decir,  $h$  es una conjugación. Además se verifica que  $\text{dist}(x, h(x)) < \epsilon$  para todo  $x \in \Lambda^{K^0}(f)$ .

**Demostración.** Como  $f: W^0 \rightarrow \bar{U}$  y  $f: W^1 \rightarrow \bar{U}$  son difeomorfismos y  $K^0 \subset U$ , existe un  $C^1$ -entorno,  $\mathcal{U}^1(f)$ , tal que para toda  $g \in \mathcal{U}^1$ ,  $K^0 \subset g(W^i)$  para  $i = 0, 1$ . Además podemos suponer que  $g$  es un difeomorfismo sobre su imagen en cada  $W^i$ . Ésto es suficiente para construir una función,  $h_g: \Lambda^{K^0}(g) \rightarrow \Sigma$ , que sea una semiconjugación entre  $g$  y el shift.

Tomemos ahora  $\mathcal{U}^2 \subset \mathcal{U}^1$  de forma que toda  $g \in \mathcal{U}^2$  sea expansora en  $\Lambda^{K^0}(g)$ . Al igual que como hicimos en el teorema 3.1 tenemos que  $h_g$  es una conjugación. Y por tanto tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^{K^0}(f) & \xrightarrow{h_f} & \Sigma & \xleftarrow{h_g} & \Lambda^{K^0}(g) \\ f \downarrow & & \downarrow \sigma & & \downarrow g \\ \Lambda^{K^0}(f) & \xrightarrow{h_f} & \Sigma & \xleftarrow{h_g} & \Lambda^{K^0}(g) \end{array}$$

naturalmente definiremos  $h = h_g^{-1} \circ h_f$  que es trivialmente un homeomorfismo. Si  $m \geq 0$  y  $l \in 2^m$  entonces definimos  $d_l$  como el diámetro de  $K^l(f)$ . Como ya vimos antes  $\lim_{m \rightarrow \infty} d_l = 0$ . Por tanto podemos elegir un valor de  $m$  de forma que para todo  $l \in 2^m$ ,  $d_l < \epsilon/2$ . También existe  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^2$  tal que para toda  $g \in \mathcal{U}$ ,  $K^l(g) \subset B_{\epsilon/2}(K^l(f))$ . Entonces si  $l = \Pi_m(h_f(x))$ , tenemos que  $h(x) \in K^l(g) \subset B_{\epsilon/2}(K^l(f))$  y a su vez,  $x \in K^l(f)$ . Luego como  $\text{diam}(K^l(f)) < \epsilon/2$  tenemos que  $\text{dist}(x, h(x)) < \epsilon$ .

□

Una manera interesante de pensar a  $h$  es la siguiente: si  $f^n(x) \in W^{i_n}$ , para todo  $n \geq 0$ , entonces  $h(x)$  es el único punto  $y$  que verifica que  $g^n(y) \in W^{i_n}$ , para todo  $n \geq 0$ .

## Capítulo 4

# Órbita Homoclínica Crítica

En este capítulo nos ocuparemos de las órbitas homoclínicas críticas asociadas a puntos fijos repulsores. Supongamos un endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  y un punto  $x$  con órbita homoclínica crítica asociada a  $p$  (punto fijo repulsor). Nuestra hipótesis será que  $x$  sea crítico no degenerado. Ésto será explicado en la siguiente sección e implica que  $x$  es del tipo “empanada”. Es decir que existe un cambio de cartas local de forma que, en estas nuevas cartas, el endomorfismo sea del tipo  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^2)$ . Para poder hacer ésto necesitamos poner condiciones de transversalidad de la derivada de  $f$ . Por tanto consideraremos nuestro endomorfismo de clase  $C^2$ .

En la segunda sección probaremos que las órbitas homoclínicas crítica no degeneradas son un fenómeno de codimensión 1 en  $C_p^2(\mathbb{R}^n)$ . Y en la tercera mostraremos que si  $f$  tiene una órbita homoclínica crítica no degenerada es posible perturbar a  $f$  y conseguir una órbita periódica crítica y por lo tanto habrá también una pequeña perturbación de  $f$  que tenga una órbita periódica hiperbólica con al menos un valor propio de módulo menor que 1. Esto muestra que la bifurcación producida por la existencia de una órbita homoclínica crítica es muy rica puesto que hay perturbaciones con sólo órbitas periódicas repulsoras y otras con órbitas periódicas hiperbólicas no expansoras.

### 4.1 Puntos críticos de endomorfismos $C^2$

La siguiente es una brevísima recopilación de resultados que usaremos. Éstos están desarrollados en [?] junto con sus demostraciones. Fijemos primero algunas notaciones. Dada  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  decimos que  $x$  es un punto crítico de orden  $k$  de  $f$  si el núcleo de  $d_x f$  tiene dimensión  $k$ . Llamaremos  $l_k(f)$  al conjunto de puntos críticos de  $f$  de orden  $k$ . Es un hecho conocido que el conjunto  $R_r = \{T \in L(\mathbb{R}^n) : \dim(\text{Im } T) = r\}$  es una subvariedad de  $L(\mathbb{R}^n)$  de codimensión  $(n - r)^2$ . Consideremos  $d$  el operador que a  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  le asigna  $df : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ . Sea

$$S = \{f \in C^2(\mathbb{R}^n) : df \text{ es transversal a } R_r, \text{ si } 0 \leq r \leq n - 1\}$$

Entonces  $S$  es abierto y denso y además para toda  $f \in S$ ,  $l_k(f)$  es una subvariedad de codimensión  $(n - k)^2$ . Si además  $g$  está  $C^2$  próxima de  $f$  entonces  $l_k(g)$  y  $l_k(f)$  están localmente  $C^1$  próximos, concepto que explicaremos a continuación. Sea  $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $S$  una variedad de dimensión  $k$ . Decimos que  $S'$  está localmente (en  $x$ )  $C^r$  próxima de  $S$  si existe un entorno  $V(x)$  tal que  $S \cap V$  y  $S' \cap V$  son gráficos (de  $\varphi$  y  $\varphi'$ ) de las mismas variables y  $\varphi$  y  $\varphi'$  están  $C^r$  próximas.

En las siguientes secciones usaremos el siguiente hecho: para todo  $x \in l_1(f)$  no degenerado existe un  $C^2$ -entorno  $\mathcal{U}(f)$  tal que para toda  $g \in \mathcal{U}$ , el conjunto  $g(l_1(g) \cap U)$ , donde  $U$  es un entorno suficientemente pequeño de  $x$ , es un gráfico de las variables  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Pi(f(l_1(f) \cap U))$ . Donde  $\Pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  es la proyección sobre las primeras  $n - 1$  coordenadas. Estamos suponiendo, sin perder generalidad, que  $f(l_1(f) \cap U)$  es transversal en el punto  $f(x)$  a la  $n$ -ésima dirección de  $\mathbb{R}^n$ . También podemos suponer que los puntos críticos de  $g$  en  $U$  son no degenerados.

**Definición 4.1** Decimos que  $x \in l_1(f)$  es no degenerado si  $df$  es transversal a  $\mathbb{R}^{n-1}$  en  $x$  y  $\ker(d_x f) \pitchfork T_x(l_1(f))$ .

La propiedad de que  $\ker(d_x f) \pitchfork T_x(l_1(f))$  implica que  $f|_{l_1(f) \cap U}$  es un encaje y por tanto  $f(l_1(f) \cap U)$  es también una subvariedad de codimensión 1 de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 4.1** Si  $x \in l_1(f)$  es no degenerado, entonces existe  $U(x)$ ,  $V(f(x))$  y difeomorfismos  $C^1$ ,  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow U$  y  $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que  $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi$  siendo  $\hat{f}$  el endomorfismo dado por  $\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^2)$ .

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \varphi \uparrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

## 4.2 $C^2$ -subvariedad de codimensión 1

Sea  $f \in C_p^2(\mathbb{R}^n)$  un endomorfismo y  $x$  un punto con órbita homoclínica crítica no degenerada asociada a  $p$ . Entonces probaremos que un entorno de  $f$  se divide en tres regiones  $\mathcal{C}^-$ ,  $\mathcal{C}^0$  y  $\mathcal{C}^+$  de manera que  $\mathcal{C}^-$  es abierto y hay una órbita homoclínica regular asociada a  $p$ ,  $\mathcal{C}^0$  es una subvariedad de codimensión 1 y hay una órbita homoclínica crítica asociada a  $p$  y  $\mathcal{C}^+$  es abierto y no hay ninguna órbita homoclínica asociada a  $p$  cerca de  $x$ . Para comenzar necesitamos el siguiente lema y en su demostración usaremos el siguiente resultado.

Si  $\mathcal{F}: C^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable y el 0 es un valor regular de  $\mathcal{F}$  entonces  $\mathcal{F}^{-1}(0)$  es una subvariedad de  $C^2(\mathbb{R}^n)$  de codimensión 1.

**Lema 4.1** Si  $f \in C_p^2(\mathbb{R}^n)$  y  $x$  es una primagen de  $p$  crítica no degenerada entonces existe un  $C^2$ -abierto  $\mathcal{U}(f)$  y un entorno  $V(x)$ , tal que el conjunto

$$\mathcal{C}^0 = \{g \in \mathcal{U} : p \text{ es valor crítico de } g|_V\}$$

es una subvariedad de  $\mathcal{U}$  de codimensión 1.

**Demostración.** Sea  $U$  un entorno de  $x$  de forma que el conjunto  $l_1(f) \cap U$  y su imagen por  $f$  sean variedades. Podemos suponer sin perder generalidad que  $T_{f(x)}f(l_1(f) \cap U)$  es un subespacio lineal transversal a la  $n$ -ésima dirección de  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto existe otro entorno  $V \subset U$  de  $x$  tal que  $f(l_1(f) \cap V)$  es el gráfico de una función  $R_f: \Pi(f(l_1(f) \cap V)) \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\Pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  es la proyección sobre las primeras  $n-1$  coordenadas. Sea  $\mathcal{U}(f)$  un  $C^2$ -entorno tal que para toda  $g \in \mathcal{U}$ , el conjunto  $g(l_1(g) \cap V)$  es el gráfico de  $R_g: \Pi(f(l_1(g) \cap V)) \rightarrow \mathbb{R}$ . Como los puntos críticos de  $g$  en  $V$  son no degenerados el mapa  $g \in C^2 \mapsto R_g \in C^1$  es continuo.

Definimos  $\mathcal{F}: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\mathcal{F}(g) = R_g(\Pi(p))$ . Sin perder generalidad podemos suponer que  $R_f(\Pi(p)) = 0$ . Lo que haremos ahora es probar que  $\mathcal{C}^0$  es la preimagen por  $\mathcal{F}$  de un valor regular. Veamos que el 0 es un valor regular de  $\mathcal{F}$ . Para eso sea  $f_0$  tal que  $\mathcal{F}(f_0) = 0$  y consideremos la familia a un parámetro,  $f_t$ , definida por  $f_t(x) = f_0(x) + te_n$ . Ésta es una curva diferenciable en  $\mathcal{U}$  que en 0 pasa por  $f_0$ . El siguiente cálculo muestra que  $d_{f_0}\mathcal{F}$  es no nulo y por tanto sobreyectivo.

$$d_{f_0}\mathcal{F} \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f_t \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{F}(f_t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} R_{f_t}(\Pi(p)) = 1$$

donde la última igualdad es por que  $R_{f_t}(\Pi(p)) = t$ . Por lo tanto 0 es valor regular de  $\mathcal{F}$ . Luego  $\mathcal{F}^{-1}(0)$  es una subvariedad de  $\mathcal{U}$  de codimensión 1. Solo resta ver que  $\mathcal{C}^0 = \mathcal{F}^{-1}(0)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(0) &= \{g \in \mathcal{U} : R_g(\Pi(p)) = 0\} \\ &= \{g \in \mathcal{U} : p \in g(l_1(g) \cap V)\} \\ &= \{g \in \mathcal{U} : p \text{ es valor crítico de } g|_V\} \\ &= \mathcal{C}^0 \end{aligned}$$

□

El siguiente lema tiene las mismas hipótesis que el anterior y usaremos a los entornos  $\mathcal{U}$  y  $V$  de su enunciado y a la función  $R_g$  de su demostración.

**Lema 4.2** *Existen entornos  $\mathcal{U}_1(f) \subset \mathcal{U}$  y  $V_1(x) \subset V$  tales que si definimos  $\mathcal{C}^+ = \{g \in \mathcal{U}_1 : R_g(\Pi(p)) > 0\}$  y  $\mathcal{C}^- = \{g \in \mathcal{U}_1 : R_g(\Pi(p)) < 0\}$  entonces:*

1. Si  $g \in \mathcal{C}^+$  entonces  $p$  es valor regular de  $g|_{V_1}$  porque no está en la imagen de  $g|_{V_1}$ .
2. Si  $g \in \mathcal{C}^-$  entonces  $p$  es valor regular de  $g|_{V_1}$  y está en la imagen  $g|_{V_1}$ .

**Demostración.** Para el caso en que  $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^2)$ , tomando  $p = x = 0$ , el enunciado es cierto ya que en cada caso tenemos lo siguiente.

1.  $g \in \mathcal{C}^+$ : Como  $f_n(x_1, \dots, x_n) = x_n^2$  (la última coordenada de  $f$ ),  $g_n|_{\{x_1=\dots=x_{n-1}=0\}}$  tiene un mínimo que se da en  $l_1(g) \cap \{x_1 = \dots = x_{n-1} = 0\}$  y su imagen es  $R_g(0)$ . Y como  $R_g(0) > 0$  entonces el 0 no tiene preimagen en  $V$ .

2.  $g \in \mathcal{C}^-$ : Tenemos que  $R_g(0) < 0$  y el 0 tiene dos preimágenes en  $V$  que son regulares. Para ésto eventualmente deberemos considerar un entorno  $\mathcal{U}$  más pequeño y usar que  $g(V)$  varía continuamente con  $g$ .

Luego tomando las cartas del teorema 4.1 obtenemos lo que queríamos para el endomorfismo  $f$  original. □

Ahora probaremos lo que prometimos en el principio de esta sección.

**Proposición 4.1** *Sea  $f \in C_p^2(\mathbb{R}^n)$  con  $x$  punto crítico no degenerado y con órbita homoclínica crítica a  $p = f(x)$  (suponemos que  $x$  tiene una preórbita regular que converge a  $p$ ). Entonces existen un entorno  $V$  de  $x$  y un  $C_p^2$ -entorno abierto  $\mathcal{U}(f)$  que se descompone en unión disjunta de  $\mathcal{C}^-$ ,  $\mathcal{C}^0$  y  $\mathcal{C}^+$ ; de forma que*

1. El conjunto  $\mathcal{C}^0$  es una subvariedad de codimensión 1 de  $\mathcal{U}$  en donde toda  $g \in \mathcal{C}^0$  tiene órbita homoclínica crítica asociada a  $p$  en  $V$ .
2. Toda  $g \in \mathcal{C}^-$  tiene una órbita homoclínica regular asociada a  $p$  en  $V$ .
3. Toda  $g \in \mathcal{C}^+$  no tiene ninguna órbita homoclínica asociada a  $p$  en  $V$ .

**Demostración.** Consideremos un entorno  $\mathcal{V}(f)$  de clase  $C_p^1$  de forma que para toda  $g \in \mathcal{V}$  y todo  $y \in V$  existe una preórbita regular de  $y$  que converge a  $p$ . Entonces si  $\mathcal{U}_1$  es el entorno de  $f$  de los lemas anteriores definimos  $\mathcal{U}$  como  $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}_1$  y los tres items a probar son triviales. □

### 4.3 Órbita periódica crítica

Consideremos una familia a un parámetro  $f_t \in C_p^2(\mathbb{R}^n)$ , con  $t$  en un entorno de 0. Supongamos que  $x$  tiene órbita homoclínica crítica no degenerada asociada a  $p$  para  $f_0$ . Entonces probaremos que para todo  $t$  arbitrariamente cerca de 0 y todo  $r$  tan grande como se quiera, existe una órbita crítica de período  $r$  para  $f_t$ . Para ésto usaremos los entornos  $\mathcal{U}(f_0)$  y  $V(x)$  del lema 4.1 y el mapa  $R_g$  de su demostración. Recordemos que para toda  $g \in \mathcal{U}$ , el conjunto  $g(l_1(g) \cap V)$  es el gráfico de  $R_g: \Pi(f(l_1(f) \cap V)) \rightarrow \mathbb{R}$ . Donde  $\Pi$  es la proyección sobre las primeras  $n - 1$  coordenadas.

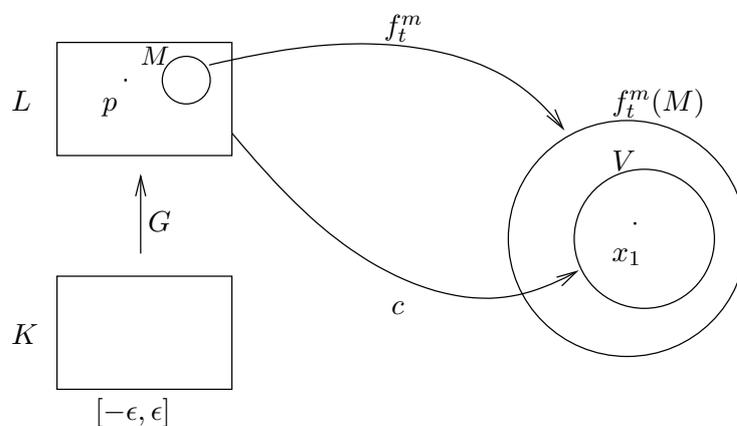
**Teorema 4.2** *Si  $\frac{d}{dt}|_{t=0} R_{f_t}(\Pi(p)) \neq 0$  entonces tenemos que:*

1. Existe  $m > 0$  tal que para todo  $r \geq m$  existe  $t_r$  tal que  $f_{t_r}$  tiene un punto crítico no degenerado de período  $r$ .
2. Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $t_\epsilon$  tal que  $|t_\epsilon| < \epsilon$  y  $f_{t_\epsilon}$  tiene una órbita periódica crítica.

**Demostración.** Supongamos que  $f_t \in \mathcal{U}$  para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ . Sea  $G : \Pi(f(l_1(f) \cap V)) \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por

$$G(\Pi(y), t) = (\Pi(y), R_{f_t}(\Pi(y)))$$

El mapa  $R_{f_t}$  es de clase  $C^1$  (respecto de  $t$ ) ya que  $f_t \in C^2$  es continuo respecto de  $t$ . Por tanto  $G$  es de clase  $C^1$ . Observemos que  $G(\Pi(y), t)$  es siempre un valor crítico de  $f_t$ , con una única preimagen crítica no degenerada, por  $f_t$ , en  $V$  que llamaremos  $c(y, t) \in V$ . Como por hipótesis  $\frac{d}{dt}|_{t=0} R_{f_t}(\Pi(p)) \neq 0$ ,  $d_{(\Pi(p), 0)} G$  es invertible y por el teorema de la función inversa  $G$  es un difeomorfismo local. Observemos que  $G(\Pi(p), 0) = p$ . Sean  $K \times [-\epsilon, \epsilon]$  y  $L(p)$  conjuntos homeomorfos a bolas compactas de forma que  $G : K \times [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow L$  sea un difeomorfismo.



Sea  $M \subset L$  tal que para todo  $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ ,  $V \subset f_t^m(M)$  y  $f_t^m : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo sobre su imagen. Sea

$$H : K \times [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow K \times [-\epsilon, \epsilon]$$

dado por

$$H(\Pi(y), t) = G^{-1} \circ (f_t^m|_M)^{-1} \circ c \circ G(\Pi(y), t)$$

Este mapa es continuo ya que es composición de funciones continuas y su dominio fue elegido homeomorfo a una bola compacta. Luego por el teorema de Brouwer tenemos un punto fijo  $(\Pi(z), u)$ . Entonces afirmamos que  $G(\Pi(z), u)$  es el punto crítico periódico que buscamos. Como  $(\Pi(z), u)$  es un punto fijo de  $H$  tenemos que

$$G^{-1} \circ (f_t^m|_M)^{-1} \circ c \circ G(\Pi(z), u) = (\Pi(z), u)$$

y luego

$$c \circ G(\Pi(z), u) = f_t^m \circ G(\Pi(z), u)$$

pero por como fue definida la función  $c$ ,  $c \circ G(\Pi(z), u)$  es una preimagen crítica de  $G(\Pi(z), u)$  en  $V$  por  $f_u$ , es decir  $f_u \circ c \circ G(\Pi(z), u) = G(\Pi(z), u)$ . Entonces

$$f_t^{m+1}(G(\Pi(z), u)) = G(\Pi(z), u)$$

Para terminar debemos observar que podríamos haber escogido  $\epsilon$  tan pequeño y  $m$  tan grande como quisiéramos.

□

# Bibliografía

- [BC] Bendicks, Carleson - “On the iterations of  $1 - ax^2$ ” *Ann. of Math.*, 122, 1985
- [CH] D. Castrigiano, S. Hayes - “Catastrophe theory”, Addison Wesley, 1993
- [G] L. Gadini - “Homoclinic Bifurcations in  $n$ -Dimensional Endomorphisms, due to Expanding Periodic Points”, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, Vol. 23, No. 8, pp. 1039-1089, 1994
- [GG] Golubitski, Guillemin “Stable mappings and their singularities”, Springer, Ney York, 1973
- [Ma] F. Marotto - “Snap-Back Repellers Imply Chaos in  $\mathbb{R}^n$ ”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **63**, 199-223 (1978)
- [Mo] Mora - “Homoclinic bifurcations, fat attractors and invariant curves”, *Disc. and Cont. Dyn. Syst.* Vol 9, No. 5, 2003
- [MV] Mora, Viana - “Abundance of strange attractors” *Acta Math.*, 171, 1-17, 1993
- [PM] J. Palis, W. Melo - “Introdução aos Sistemas Dinâmicos”, IMPA, 1978



# Índice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Preliminares</b>  | <b>3</b>  |
| 1.1      | Dinámica topológica . . . . .                                  | 3         |
| 1.2      | Dinámica diferenciable . . . . .                               | 4         |
| 1.3      | Órbita homoclínica asociada a un punto fijo repulsor . . . . . | 7         |
| 1.4      | Persistencia y estabilidad . . . . .                           | 9         |
| 1.5      | Conjunto inestable . . . . .                                   | 10        |
| 1.6      | Shift unilateral de dos símbolos . . . . .                     | 13        |
| <b>2</b> | <b>La última órbita homoclínica (caso unidimensional)</b>      | <b>15</b> |
| 2.1      | Discontinuidades del conjunto inestable . . . . .              | 15        |
| 2.2      | Continuidad del conjunto inestable . . . . .                   | 17        |
| 2.3      | Cuando no hay órbitas homoclínicas . . . . .                   | 20        |
| 2.4      | La última órbita homoclínica . . . . .                         | 21        |
| <b>3</b> | <b>Órbita Homoclínica Regular</b>                              | <b>25</b> |
| 3.1      | Ejemplo de órbita homoclínica regular . . . . .                | 25        |
| 3.2      | Conjugación con el Shift unilateral de dos símbolos . . . . .  | 27        |
| 3.3      | Persistencia . . . . .   | 32        |
| 3.4      | Estabilidad . . . . .  | 35        |
| <b>4</b> | <b>Órbita Homoclínica Crítica</b>                              | <b>37</b> |
| 4.1      | Puntos críticos de endomorfismos $C^2$ . . . . .               | 37        |
| 4.2      | $C^2$ -subvariedad de codimensión 1 . . . . .                  | 38        |
| 4.3      | Órbita periódica crítica . . . . .                             | 40        |