



COMISIÓN
ACADÉMICA
DE POSGRADO



Dinámica de planetas y cuerpos menores en resonancias de alta excentricidad e inclinación

Nicolas Pan Rivero

Programa de Maestría en Física (Opción Astronomía)
Facultad de Ciencias, PEDECIBA
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Noviembre de 2025



COMISIÓN
ACADÉMICA
DE POSGRADO



Dinámica de planetas y cuerpos menores en resonancias de alta excentricidad e inclinación

Nicolas Pan Rivero

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado de Maestría en Física (Opción Astronomía), Facultad de Ciencias de la Universidad de la República - PEDECIBA, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Física (Opción Astronomía).

Director:

Tabaré Gallardo

Montevideo – Uruguay

Noviembre de 2025

Pan Rivero, Nicolas

Dinámica de planetas y cuerpos menores en resonancias de alta excentricidad e inclinación / Nicolas Pan Rivero.
- Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ciencias, PEDECIBA, 2025.

XX, 100 p.: il.; 29, 7cm.

Director:

Tabaré Gallardo

Tesis de Maestría – Universidad de la República,
Programa de Maestría en Física (Opción Astronomía),
2025.

Referencias bibliográficas: p. 88 – 97.

1. Mecánica Celeste, 2. Evolución Resonante,
3. Exoplanetas, 4. Sistema Solar, 5. Cuerpos Menores.
I. Gallardo, Tabaré, . II. Universidad de la República,
Programa de Posgrado de Maestría en Física (Opción
Astronomía). III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Dr. Gonzalo Tancredi

Dr. Cristian Beaugé

Dra. Cecilia Mateu

Dr. Miguel Campiglia

Dr. Pablo Lemos

Montevideo – Uruguay
Noviembre de 2025

*Pick an amazing dream and go
for it. Don't merely make a
living; make a life. Launch out
farther than you've ever gone
before. Today, you have a shot at
forever.*

Buzz Aldrin

RESUMEN

Las resonancias de movimientos medios (MMRs) juegan un papel fundamental en la arquitectura de los sistemas planetarios, afectando la distribución y estabilidad de diversas poblaciones de cuerpos menores y sistemas de exoplanetas. Si bien se han desarrollado modelos válidos para excentricidades e inclinaciones arbitrarias, el estudio de las resonancias se ha basado en su mayoría en desarrollos analíticos de la función perturbadora, adecuados para estudiar resonancias particulares o sistemas de baja excentricidad y baja inclinación. Sin embargo, el descubrimiento reciente de arquitecturas con alta excentricidad e inclinación abre la puerta a una dinámica aún poco explorada.

El objetivo de este trabajo es estudiar resonancias de movimientos medios entre dos cuerpos que presenten órbitas de alta excentricidad y/o alta inclinación tanto en el caso asteroidal como en el caso planetario. Para ello, utilizamos un modelo semianalítico en el cual la función perturbadora se calcula numéricamente, lo que permite determinar propiedades resonantes como los puntos de equilibrio, los períodos de libración y el ancho de la resonancia. Este método evita problemas de convergencia en los desarrollos perturbativos y permite estudiar resonancias sin restricciones en los elementos orbitales. Realizamos integraciones numéricas para verificar los resultados obtenidos.

Aplicamos el modelo a una amplia diversidad de situaciones dinámicas. En particular, analizamos en detalle la resonancia 1:1 con todos los planetas del Sistema Solar (excluyendo Júpiter), construyendo un catálogo actualizado de objetos coorbitales con más de 150 objetos, varios de los cuales son estables por miles de períodos de libración. Además, estudiamos resonancias internas con Júpiter, resonancias externas con Marte y Neptuno, la población de Hildas y cuerpos menores resonantes de alta inclinación. Finalmente, aplicamos el modelo a sistemas de exoplanetas recientemente descubiertos en arquitecturas inusuales.

Mostramos que el número y la ubicación de los puntos de equilibrio dependen únicamente de la geometría del sistema y no de las masas involucradas. Considerando ambos cuerpos en órbitas excéntricas y con inclinación mutua, encontramos puntos de equilibrio asimétricos en todas las resonancias estu-

diadas. Esto cambia la forma tradicional en la que se piensan las resonancias donde solamente las de la forma $1:N$ sufren bifurcaciones de las que nacen puntos de equilibrio asimétricos.

Palabras claves:

Mecánica Celeste, Evolución Resonante, Exoplanetas, Sistema Solar, Cuerpos Menores.

ABSTRACT

Mean-motion resonances (MMRs) play a fundamental role in shaping the architecture of planetary systems, influencing the distribution and stability of small-body populations as well as exoplanetary systems. Although some models have been developed for arbitrary eccentricities and inclinations, the study of MMRs has generally focused on analytical expansions of the disturbing function, suited to particular resonances or to systems with low eccentricity and coplanar configurations. However, recent discoveries of planetary systems with high eccentricities and inclinations reveal a dynamical regime that remains poorly explored yet.

The objective of this work is to study mean-motion resonances between two bodies on eccentric and/or mutually inclined orbits, in both the asteroidal and the planetary case. We employ a semi-analytical model in which the disturbing function is computed numerically, allowing us to determine resonant properties such as the equilibrium points, libration periods, and resonant widths. This approach avoids convergence issues of the perturbative expansions and enable us to study resonances without restrictions on the orbital elements. The results are validated with numerical integrations.

We apply this model to a wide range of dynamical configurations. In particular, we analyze the 1:1 resonance with all Solar System planets (excluding Jupiter), building a present-day catalog of co-orbital objects with over 150 bodies, several of which remain stable for at least thousands of libration periods. Additionally, we studied inner resonances with Jupiter, outer resonances with Mars and Neptune, the Hilda population, and high-inclination resonant asteroids. Finally, we apply the model to recently discovered exoplanetary systems in unusual configurations.

We show that the number and location of the equilibrium points are only dependant on the geometry of the orbital configuration and not on the masses involved. Moreover, when both bodies have eccentric and mutually inclined orbits, asymmetric equilibrium points appear in all the studied resonances. This changes the traditional view in which asymmetric bifurcation are expected

only in resonances of the shape $1:N$.

Keywords:

Celestial Mechanics, Resonant Evolution, Exoplanets, Solar System, Minor bodies.

Lista de figuras

1.1	Ilustración de una órbita Kepleriana. La posición de un objeto sobre una órbita se expresa con los seis elementos orbitales $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$. Fuente: Pons Vuolo (2022).	4
1.2	(izquierda) Diagrama de las órbitas del planeta Júpiter (color marrón) y del asteroide (153) Hilda (color negro) en la resonancia 3:2. (derecha) Diagrama de las órbitas del planeta Neptuno (color azul) y del transneptuniano (208996) Achlys (color negro) en la resonancia 2:3.	6
1.3	Evolución temporal del ángulo crítico σ para dos partículas en resonancia con un planeta de excentricidad $e_p = 0.05$. En la izquierda para una partícula con elementos orbitales $e = 0.5$, $i = 5^\circ$ y $M = 60^\circ$ en la resonancia 2:3. En la derecha, con elementos orbitales $e = 0.5$, $i = 30^\circ$ y $M = 28^\circ$ o $M = 151^\circ$. . .	10
2.1	Evolución temporal del semieje para distintos tipos de evolución orbital de una partícula con diversas condiciones iniciales y un planeta con excentricidad $e_p = 0.05$	13
2.2	Histograma de semiejes y distribución en el plano (e, i) de todos los cuerpos menores con semiejes $2.0 \text{ au} < a < 3.2 \text{ au}$. Datos tomados de NASA Horizons System.	15
2.3	Histograma de semiejes y distribución en el plano (e, i) de todos los cuerpos menores con semiejes $4.7 \text{ au} < a < 5.5 \text{ au}$. Datos tomados de NASA Horizons System.	17
2.4	Histograma de semiejes y distribución en el plano (e, i) de todos los cuerpos menores con semiejes $30.0 \text{ au} < a < 100.0 \text{ au}$. Datos tomados de NASA Horizons System.	17

2.5	En la izquierda un histograma de cocientes de períodos para todos los pares de planetas consecutivos en los sistemas extra-solares conocidos con los picos mas prominentes identificados con resonancias de movimientos medios. En la derecha un histograma de excentricidades de los planetas detectados mediante la técnica de velocidad radial con los planetas mas excéntricos del Sistema Solar marcados.	18
2.6	Mapas dinámicos en los entornos de los planetas gigantes del Sistema Solar. Notamos estructuras relacionadas con resonancias de movimientos medios entre los planetas. Todos los planetas se encuentran cerca pero fuera de las mismas.	20
3.1	Función perturbadora $\mathcal{R}$ para la resonancia 1:3 con Neptuno calculada numéricamente con el modelo semianalítico. Además, curvas de nivel de Hamiltoniano constante con los puntos de equilibrio marcados con cruces rojas calculados como mínimos de $\mathcal{R}$	25
3.2	Evolución temporal del error fraccional en la energía para una integración numérica de los cuatro planetas gigantes del Sistema Solar con distintos integradores incluidos en el paquete REBOUND. En este trabajo usamos mayoritariamente el integrador <i>ias15</i>	30
4.1	Número de puntos de equilibrio estable en el plano (e,i) para las resonancias 1:2 y 2:3 con un planeta circular para distintos valores del argumento del perihelio de la partícula.	34
4.2	Curvas de nivel de Hamiltoniano para la resonancia 2:3 con dos valores excentricidad asumiendo un planeta en órbita circular.	35
4.3	Índice de variación topológica en el plano (e,i) para las resonancias 1:2 y 2:3. Este índice fue calculado variando ω cada 10° en todo su rango $(0^\circ, 360^\circ)$ y calculando la desviación estándar para cada punto del plano.	36
4.4	Valor del punto de equilibrio σ_0 para la resonancia 1:2 en una región del plano (e,i) . En la izquierda los resultados de un modelo analítico presentado en H. Li y Zhou (2024a) y en la derecha los resultados de este modelo.	38

4.5	Gráfico en escalera del valor que toma σ_0 en todo el plano (e,i) para la resonancia 1:2 de una partícula con $\omega = 0$ y un planeta circular. Para contemplar el distinto número de puntos en diferentes regiones del espacio dividimos en filas las regiones con distintos números de puntos de equilibrio.	39
4.6	Gráfico en escalera del valor que toma σ_0 en todo el plano (e,i) para la resonancia 2:3 de una partícula con $\omega = 90$ y un planeta circular. Para contemplar el distinto número de puntos en diferentes regiones del espacio dividimos en filas las regiones con distintos números de puntos de equilibrio.	40
4.7	Ancho de la resonancia en el plano (e,i) para dos resonancias entre un planeta circular y una partícula. En la izquierda los resultados del modelo para la resonancia 1:2. En la derecha los resultados del modelo para la resonancia 2:3. En ambos se pueden identificar cuellos donde el ancho llega hasta valores mínimos.	41
4.8	Comparación entre la fragilidad f y el índice de fragilidad $\hat{f}$ para la resonancia 1:2.	42
4.9	Comparación entre la fragilidad f y el índice de fragilidad $\hat{f}$ para la resonancia 2:3.	42
4.10	Trayectorias en el espacio de fase (σ,a) de los tipos de órbitas coorbitales sobrepuestas sobre las curvas de nivel del Hamiltoniano. En azul se encuentra la órbita tipo cuasisatélite, mientras que en naranja y verde se encuentran las órbitas tipo renacuajo.	45
4.11	Catálogo a Enero 2025 de coorbitales en el Sistema Solar en el plano (e,i) . Presentamos en diferentes colores los diferentes planetas. Fuente: Pan y Gallardo (2025).	48
4.12	Estructura de las resonancias en el cinturón de objetos transneptunianos en los planos (a,e) y (a,i) superpuesto con el catálogo conocido de objetos menores en dicha región. En color naranja se representan todos los objetos dentro de la estructura resonante, potenciales candidatos a ser objetos en libración. Para el primer plano se utilizó la inclinación media y para el segundo la excentricidad media de la población.	50

4.13	Evolución temporal numérica en coordenadas baricéntricas de objetos transneptunianos mostrando el ángulo crítico (arriba) y la misma integración superpuesta con las curvas de nivel del Hamiltoniano. Podemos ver que el ángulo resonante libra alrededor del valor predicho por la teoría. A la izquierda para el Transneptuniano 2012 HH ₂ ($e \sim 0.16$, $i \sim 29^\circ$) en resonancia 4:5 y a la derecha para el Transneptuniano 2014 GM ₅₄ ($e \sim 0.39$, $i \sim 54^\circ$) en resonancia 2:3.	50
4.14	Evolución temporal numérica de objetos con alta inclinación mostrando el ángulo crítico (arriba) y la misma integración superpuesta con las curvas de nivel del Hamiltoniano (abajo). Podemos ver que el ángulo resonante libra alrededor del valor predicho por la teoría. A la izquierda para el objeto Ka'epaoka'awela ($e \sim 0.38$, $i \sim 163^\circ$) y a la derecha para el objeto 1999 VV ($e \sim 0.42$, $i \sim 58^\circ$).	51
4.15	En la izquierda la evolución temporal numérica de una partícula en resonancia con una órbita polar, mostrando el ángulo crítico (arriba) y la misma integración superpuesta con las curvas de nivel del Hamiltoniano (abajo). Podemos ver que el ángulo resonante libra alrededor del valor predicho por la teoría aunque sufre cambios de centro de libración. En la derecha la evolución de los elementos orbitales de la partícula en función del tiempo de la integración.	52
4.16	Espacios de fase del Hamiltoniano para la evolución resonante de una partícula en resonancia con una órbita polar. Distintos cuadros representan distintos instantes de tiempo en la evolución de la integración. Notamos que la topología de la resonancia cambia así como el centro de libración de la partícula.	53
4.17	Histograma de semiejes de todos los cuerpos menores con semiejes $2.0 \text{ au} < a < 3.2 \text{ au}$ y excentricidades $e > 0.6$	55
4.18	Número de centros de libración en el plano (e, i) para alta excentricidad para algunas resonancias internas con Júpiter. Sobrepuesto como puntos negros se encuentran objetos confirmados en dichas resonancias.	55

4.19	Evolución temporal numérica de objetos con alta excentricidad mostrando el ángulo crítico (arriba) y la misma integración superpuesta con las curvas de nivel del Hamiltoniano (abajo). Podemos ver que el ángulo resonante libra alrededor del valor predicho por la teoría. A la izquierda para el objeto 2005 UN ₁₅₇ ($e \sim 0.86$, $i \sim 44^\circ$) en la resonancia 3:1 con Júpiter y a la derecha para el objeto 2007 CA ₁₉ ($e \sim 0.59$, $i \sim 4^\circ$) en la resonancia 5:2 con Júpiter.	56
4.20	Evolución temporal numérica del asteroide 2024 YR ₄ ($e \sim 0.66$, $i \sim 3^\circ$) mostrando el ángulo crítico (arriba) y la misma integración superpuesta con las curvas de nivel del Hamiltoniano (abajo).	57
4.21	Índice de variación topológica para la resonancia 3:2 con Júpiter en el plano (e, i) con la superposición en color blanco de los objetos con semiejes entre $3.942 \text{ au} < a < 3.996 \text{ au}$ y órbita bien determinada ($CC = 0$).	58
4.22	Evolución temporal numérica de Hildas, mostrando el ángulo crítico (arriba) y la misma integración superpuesta con las curvas de nivel del Hamiltoniano (abajo). Podemos ver que el ángulo resonante libra alrededor del valor predicho por la teoría. A la izquierda para el objeto 2007 TP ₃₈₃ ($e \sim 0.36$, $i \sim 8^\circ$) y a la derecha para el objeto 2017 AQ ₂₀ ($e \sim 0.85$, $i \sim 51^\circ$).	59
4.23	Evolución temporal numérica del cuerpo menor 2018 RV ₃₂ ($e \sim 0.35$, $i \sim 9^\circ$) en resonancia 3:2 con Júpiter, mostrando el ángulo crítico en función del tiempo (izquierda) y la evolución del semieje, la excentricidad y la inclinación (derecha).	59
5.1	Ubicación en el plano (e_p, m_p) de los planetas del Sistema Solar. El ancho máximo de la resonancia 1:2 se representa como el radio de los puntos.	61
5.2	Ancho máximo de las resonancias 1:2 (izquierda) y 2:3 (derecha) en función de la excentricidad del planeta. El ancho máximo fue calculado variando en todos los posibles valores de (e, i, ω, Ω)	61
5.3	Número de puntos de equilibrio en el plano (e, i) para las resonancias 1:2 y 2:3 variando la excentricidad del planeta perturbador y tomando a la partícula con $\omega = 30^\circ$ y $\Omega = 0^\circ$	63

5.4	Puntos de equilibrio en función de la excentricidad para las resonancias 1:2 y 2:3 con un planeta en el mismo plano y órbita circular.	64
5.5	Excentricidad de la bifurcación para resonancias 1: N con un planeta circular y orbitas en el mismo plano.	64
5.6	(izquierda) Puntos de equilibrio en función de la excentricidad del planeta exterior para la resonancia 3:2. (derecha) Número de puntos de equilibrio para la resonancia 2:1 en el plano (e_{out}, e_{int}) con ambos cuerpos en el mismo plano. Se superpone la línea de $e_{out} = e_{int}$	65
5.7	Número de puntos de equilibrio en el plano (e, ω) para la resonancia 2:3.	66
5.8	(izquierda) evolución temporal asimétrica de una partícula en resonancia 2:3, en color azul se representa la integración numérica mientras que en color negro se representa el valor de los centros de libración predichos por la teoría. (derecha) lo mismo en el espacio del Hamiltoniano (σ, a)	67
5.9	Número de puntos de equilibrio en el plano (e, i) para las resonancias 1:2, 2:1, 2:3 y 3:2 con un planeta de excentricidad $e_p = 0.6$	68
5.10	Atlas de resonancias de movimientos medios generadas por un planeta de alta excentricidad, semieje $a_p = 5.0$ au y masa $m_p = 0.001M_\odot$, tomando una partícula de $i = 30^\circ$ y $\Delta\varpi = 0$. Se muestran varios valores de e_p	70
6.1	Ancho de la resonancia 2:1 para el caso planetario en el plano (e, i)	72
6.2	Ancho de la resonancia 3:2 para el caso planetario en el plano (e, i)	73
6.3	Índice de variación topológica para las resonancias 2:1 y 3:2 . . .	74
6.4	Índice de variación topológica para las resonancias 3:1 y 5:2 . . .	74
6.5	Período de libración para dos resonancias en función del cociente de masas de los planetas.	75

6.6	Evolución temporal del ángulo crítico para dos planetas de la masa de Neptuno en el mismo plano y excentricidad 0.1, en resonancia 3:1. A la izquierda, mostramos la evolución temporal a corto plazo mientras que a la derecha mostramos la evolución en escalas de tiempo tres órdenes de magnitud superior.	75
6.7	(izquierda) Mapa dinámico y (derecha) mapa de caos del sistema HD 31527. Notemos que la solución obtenida en Gallardo et al. (2021) cae dentro de la resonancia y una zona no caótica.	77
6.8	(izquierda) Mapa dinámico en la zona cercana a la resonancia 2:1. (derecha) Zoom en bajas excentricidades.	77
6.9	Atlas de resonancias de movimientos medios en el sistema TOI-1408. Mostramos las resonancias generadas por el planeta externo sobre el planeta interno. Los planetas se encuentran en la resonancia 2:1.	78
6.10	Evolución temporal del ángulo crítico en función del tiempo y en el espacio de fases (σ, a) para el sistema KOI-134. A la izquierda la evolución a corto plazo y a la derecha a largo plazo.	79
6.11	Número de puntos de equilibrio para la resonancia 2:1 en el plano de excentricidades. Sobrepuesto en color negro la evolución temporal de las excentricidades.	80
6.12	Evolución temporal a corto plazo del ángulo crítico de la resonancia 2:1 para dos pares de valores iniciales de excentricidad e inclinación.	81
6.13	Evolución temporal a corto plazo del ángulo crítico para la resonancia 3:2 y diferentes valores de excentricidad e inclinación $i = 60^\circ$ iniciales. A la izquierda puntos de equilibrio asimétricos y a la derecha un punto simétrico.	82
6.14	Evolución temporal a largo plazo del ángulo crítico para la resonancia 3:2 y diversos valores de inclinación y $e_{outer} = 0.4$	83

Lista de tablas

2.1	Condiciones iniciales para los distintos tipos de evolución orbital entre una partícula y un planeta de excentricidad $e_p = 0.05$ mostradas en la Figura 2.1.	12
4.1	Comparación del período de libración para una lista de diferentes cuerpos menores del Sistema Solar en resonancia con diversos valores de excentricidad e inclinación. El valor teórico fue calculado con el modelo y el numérico con integraciones incluyendo todos los planetas del Sistema Solar.	43
4.2	Semieje nominal y ancho máximo para la resonancia 1:1 con cada planeta, período de libración para orbita Cuasi-satélite y orbita Troyano para un asteroide de elementos orbitales $e = 0.2$, $i = 15^\circ$, $\omega = 60^\circ$, $\Omega = 0^\circ$. La última columna muestra el número de objetos en el catálogo que tienen semiejes dentro de dos anchos de la resonancia. Los datos fueron obtenidos de la base de datos de NASA Horizons en Julio de 2024.	46
4.3	Numero de objetos resonantes confirmados en este trabajo en resonancias externas a Neptuno.	49
4.4	Numero de objetos resonantes confirmados de excentricidad $e > 0.6$ para las resonancias 3:1, 4:1, y 5:2, y excentricidad $e > 0.5$ para la resonancia 7:3.	54
6.1	Número de sistemas extrasolares tal que el cociente de períodos orbitales entre ambos planetas se encuentra dentro de un cierto porcentaje (5 %, 2 % y 1 %) del valor exacto de la resonancia. . .	71

Tabla de contenidos

Lista de figuras	x
Lista de tablas	xvii
1 Introducción	1
1.0.1 Resonancias de movimientos medios	4
1.0.2 Período de libración	7
1.0.3 Ancho de la resonancia	8
1.0.4 Centro de libración	9
1.0.5 Objetivos	11
2 Dinámica resonante	12
2.1 Evolución orbital	12
2.2 Poblaciones resonantes	14
2.2.1 Cinturón de asteroides	15
2.2.2 Asteroides Troyanos	16
2.2.3 Cinturón de Transneptunianos	17
2.2.4 Exoplanetas	18
3 Metodología	22
3.1 Modelo semi-analítico	22
3.1.1 Caso restringido	23
3.1.2 Caso planetario	26
3.2 Catálogos de objetos astronómicos	27
3.2.1 Cuerpos menores	27
3.2.2 Exoplanetas	28
3.3 Integraciones numéricas	28

4	Caso restringido con planeta en órbita circular	32
4.1	Propiedades de las resonancias	32
4.1.1	Número de centros de libración	33
4.1.2	Centros de libración	37
4.1.3	Ancho de la resonancia	41
4.1.4	Períodos de libración	43
4.2	Aplicación a objetos conocidos	44
4.2.1	Coorbitales	44
4.2.2	Objetos Transneptunianos	48
4.2.3	Objetos de alta inclinación	51
4.2.4	Objetos de alta excentricidad	54
4.2.5	Hildas	58
5	Caso restringido con planeta en órbita excéntrico	60
5.1	Propiedades de las resonancias	60
5.1.1	Ancho de la resonancia	60
5.1.2	Centros de libración	62
5.1.3	Asimétricas	62
5.2	Aplicación a casos conocidos	66
5.2.1	Hungarias	66
5.2.2	El Hipotético Planeta 9	68
5.2.3	Exoplanetas de muy alta excentricidad	69
6	Caso Planetario	71
6.1	Sistemas resonantes	71
6.2	Propiedades de las resonancias	72
6.2.1	Anchos de las resonancias	72
6.2.2	Centros de libración	73
6.2.3	Períodos de libración	74
6.3	Aplicación a sistemas extrasolares	76
6.3.1	El sistema HD 31527: Una resonancia de alto orden . . .	76
6.3.2	El sistema TOI-1408: Ley de estructura	77
6.3.3	El sistema KOI-134: Inclinación mutua	78
6.4	Aplicación a dos planetas ficticios	80
7	Conclusiones y perspectivas	84

Referencias bibliográficas	88
Anexos	98
Anexo 1 Implementación en Python del modelo resonante restringido.	99
Anexo 2 Resonancia 1:1 en el Sistema Solar	100

Capítulo 1

Introducción

Las resonancias de movimientos medios son clave al momento de entender la arquitectura de los sistemas planetarios. La evolución orbital de planetas y cuerpos menores puede verse afectada por dichas resonancias en una amplia variedad de formas.

En este trabajo, buscaremos entender mejor el efecto global que pueden tener las resonancias en configuraciones orbitales de alta excentricidad y/o alta inclinación.

Utilizando las Leyes de Newton y la Ley de Gravitación Universal se puede demostrar que el movimiento de un objeto con masa en torno a otro puede ser descrito en forma analítica por una cónica. Es decir, una elipse, una parábola o una hipérbola, según la energía del sistema.

Sin embargo, al agregar un tercer objeto con masa la complejidad del problema crece enormemente. De hecho, no es posible escribir de forma analítica una solución que describa la evolución temporal del sistema. Se puede demostrar ya que no existen suficientes integrales de movimiento para equiparar el número de grados de libertad del sistema (Poincaré, [1890](#)). Por lo tanto, es necesario recurrir a aproximaciones o estudios numéricos.

En el contexto de la Mecánica Celeste, nos es de particular interés entender la evolución de un sistema jerárquico como lo son los sistemas planetarios. En este trabajo, nos enfocaremos en un sistema conformado por una masa central (una estrella), y dos cuerpos con menor masa que orbitan a su alrededor. La evolución dinámica de este sistema se enmarca en lo que se denomina el problema de los tres cuerpos. Nos interesarán las órbitas ligadas, por lo que siempre que mencionemos la palabra “órbita” nos estaremos refiriendo a una

elipse, a menos que se diga lo contrario en forma explícita.

Este par de cuerpos orbitando alrededor de la masa central pueden o no tener masa. Si ambos carecen de masa entonces cada uno seguirá la trayectoria dada por un problema de dos cuerpos, por lo que el problema está resuelto. Por otro lado, si uno de ellos tiene masa, diremos que estamos en el caso restringido del problema de tres cuerpos y si ambos tienen masa diremos que estamos en el caso general del mismo.

Un ejemplo para el caso restringido del problema sería la evolución de un asteroide en torno a una estrella, afectado por un planeta. En este caso, el asteroide tiene una masa que puede ser considerada despreciable al compararla con la del planeta. De esta forma, el planeta no sentirá la partícula y su orbita seguirá un problema de dos cuerpos. La evolución de la partícula será entonces una elipse dominada por la masa central pero que siente la presencia del planeta como una perturbación.

En el caso general, un ejemplo sería la evolución de un par de planetas como Júpiter y Saturno. En este caso, ambos planetas siguen una orbita al rededor de la estrella perturbada por la presencia del otro planeta.

La palabra perturbación no es casual, al tener los planetas una masa bastante menor que la estrella, la fuerza que los planetas sienten entre sí (o la fuerza que una partícula siente del planeta) es mucho más pequeña que la que sienten de la masa central. Así, esta fuerza se puede tratar en forma perturbativa.

Preocupados por la estabilidad del Sistema Solar, estos problemas han sido atacados varias veces a lo largo de la historia. Laplace y Lagrange desarrollaron una teoría en la cual lograron mostrar que los semiejes de un par de planetas pueden evolucionar en valores constantes (Laplace, 1799). Por lo tanto, el Sistema Solar podría ser estable.

La ecuación de movimiento para un objeto perturbado de masa m en torno a una estrella de masa M se puede escribir como

$$\ddot{\mathbf{r}} + \kappa^2(M + m)\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \sum_j \nabla \mathcal{R}_j \quad (1.1)$$

donde κ es la constante de Gauss y los $\mathcal{R}_j$ son las funciones perturbadoras. Debemos notar que su gradiente nos da la aceleración causada por la perturbación. Esta forma de escribir la perturbación solamente es válida cuando la misma puede ser escrita como el gradiente de un potencial perturbador. En

nuestro caso, podemos escribir la perturbación generada por un planeta en coordenadas cartesianas de la siguiente forma

$$\nabla \mathcal{R}_j = \kappa^2 m_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (1.2)$$

Sin embargo, tanto por razones históricas como por conveniencia analítica, en mecánica celeste se suele trabajar con elementos orbitales (ver Figura 1.1). A diferencia de las coordenadas cartesianas, que cambian rápidamente a medida que el cuerpo se desplaza a lo largo de su órbita, los elementos orbitales evolucionan de forma mucho más lenta. Utilizando la posición $\mathbf{r}$ y la velocidad $\mathbf{v}$ en un tiempo dado, se pueden calcular los elementos orbitales (a, e) que describen la forma de la órbita al rededor de la masa central, (i, ω, Ω) que describen la orientación de la órbita en el espacio y M que describe la posición a lo largo de la elipse donde se encuentra orbitando el objeto¹. Así, el estado de los sistemas que nos interesan estarán completamente dados por la masa central, la masa de los otros dos cuerpos y los doce elementos orbitales de los dos cuerpos.

Gran parte de la mecánica celeste se ha centrado en escribir en forma conveniente la función perturbadora $\mathcal{R}$ en función de los elementos orbitales. Así, entender la evolución orbital ese reduce a utilizar las ecuaciones planetarias de Lagrange con una función perturbadora expresada en función de los elementos orbitales. El origen de las perturbaciones a la órbita Kepleriana puede ser diversa, pero no todas pueden escribirse como el gradiente de una función perturbadora. En este trabajo, nos centraremos en casos especiales de la perturbación dada por un planeta lejano, cuando dicha perturbación causa una resonancia en el sistema. Retomaremos más adelante qué significa resonancia en el contexto de este trabajo. Cuando la perturbación que nos interesa es la dada por una resonancia le daremos el nombre de función perturbadora resonante. Históricamente, se recurrió a expansiones de $\mathcal{R}$ porque se buscaba obtener soluciones analíticas y no se contaba con los recursos computacionales necesarios para abordar el problema numéricamente. Sin embargo, este enfoque presenta limitaciones cuando se intenta aplicar a distintos casos o configuraciones.

Algunas expansiones solamente son validas para una región del espacio de

¹Nombramos a semieje mayor, e excentricidad, i inclinación, ω argumento del perihelio, Ω longitud del nodo ascendente y M anomalía media

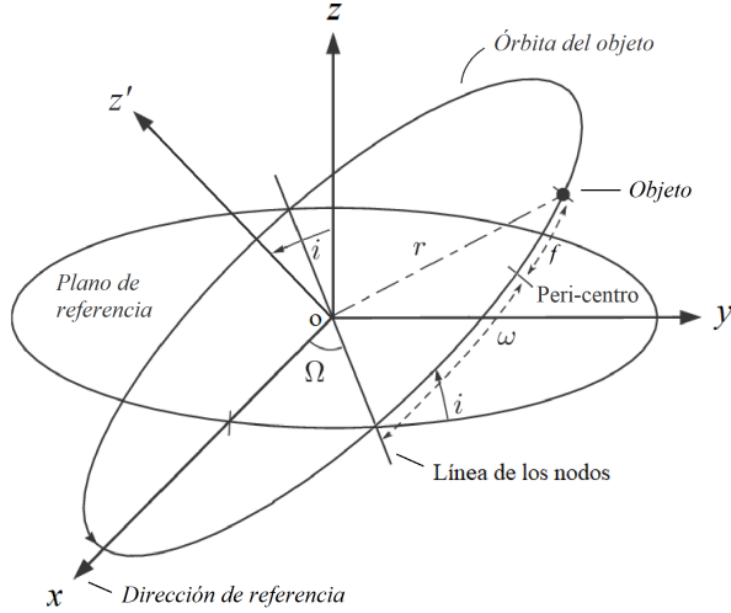


Figura 1.1: Ilustración de una órbita Kepleriana. La posición de un objeto sobre una órbita se expresa con los seis elementos orbitales $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$. Fuente: Pons Vuolo (2022).

fase, otras solamente son válidas cuando el perturbador es muy lejano, y otras solamente son válidas para resonancias particulares (Gallardo, 2020).

1.0.1. Resonancias de movimientos medios

Un desarrollo clásico es el presentado en Murray y Dermott (1999), donde la función perturbadora toma la siguiente forma

$$\mathcal{R} \propto \sum f(a, a', e, e', i, i') \cos(\varphi) \quad (1.3)$$

donde f es una función de los semiejes, las excentricidades y las inclinaciones de ambas órbitas y φ es una combinación de los elementos orbitales angulares.

Sin entrar en los detalles, una forma de entender por qué las resonancias de movimientos medios afectan a la evolución orbital es notar que algunos términos de la sumatoria anterior son relevantes solamente al estar los cuerpos en una configuración resonante.

Un proceso usual en mecánica celeste es eliminar las variables rápidas del problema, es decir, las que tienen períodos de oscilación pequeños. En una primera aproximación esto equivale a promediar en las variables rápidas (Mor-

bidelli, 2002). De esta forma, obtenemos una función perturbadora media que nos describe la evolución sin los términos de corto período que no afectan significativamente.

Al desarrollar la función perturbadora, los términos pueden dividirse en seculares y de corto período. Para estudiar la evolución secular del sistema, se promedia en todas las variables rápidas, dejando únicamente contribuciones de variación lenta. Por otro lado, para estudiar la evolución resonante, no se promedian los términos resonantes en el proceso de eliminación de variables rápidas cuando el sistema está cerca de una resonancia.

Aquí debemos definir uno de los objetos centrales del estudio de las resonancias de movimientos medios, el ángulo crítico. Utilizaremos el subíndice p para el planeta. En general, podemos definir el ángulo crítico como

$$\sigma = k\lambda - k_p\lambda_p + (k_p - k)\varpi \quad (1.4)$$

donde k y k_p son números enteros, $\lambda = \omega + \Omega + M$, $\lambda_p = \omega_p + \Omega_p + M_p$ y $\varpi = \omega + \Omega$ ¹. Llamaremos orden de la resonancia a la diferencia $q = |kp - k|$. Notemos que los términos resonantes del desarrollo perturbativo contienen el ángulo crítico correspondiente a una resonancia dada.

Así, cuando dos cuerpos están cerca de una resonancia el término de la sumatoria que incluye a σ deja de ser un término promediado al eliminar las variables rápidas.

Decimos que dos objetos estén en resonancia de movimientos medios si existe una conmensurabilidad entre sus períodos. En otras palabras, dichos cuerpos están en una resonancia $k_p:k$. Esta conmensurabilidad se puede expresar de la siguiente manera

$$kn - k_p n_p \approx 0 \quad (1.5)$$

donde $n = 2\pi/T$, $n_p = 2\pi/T_p$ y T, T_p son los períodos orbitales. Integrando la ecuación 1.5 obtenemos una característica clave de la evolución resonante, el ángulo crítico definido en la ecuación 1.4 debe variar lentamente. Si el objeto se encuentra en resonancia, σ oscila con cierta amplitud (si la amplitud es cero, el objeto está en la resonancia exacta). De esta forma, en una evolución orbital resonante real tendremos que el ángulo crítico σ oscila en torno a cierto punto de equilibrio σ_0 . Este valor tomará más sentido cuando hablemos más

¹Nombramos ϖ longitud del perihelio y λ longitud media

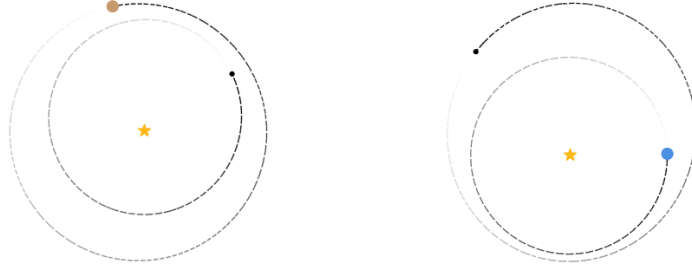


Figura 1.2: (izquierda) Diagrama de las órbitas del planeta Júpiter (color marrón) y del asteroide (153) Hilda (color negro) en la resonancia 3:2. (derecha) Diagrama de las órbitas del planeta Neptuno (color azul) y del transneptuniano (208996) Achlys (color negro) en la resonancia 2:3.

en detalle sobre las propiedades de una resonancia, así como dicho período de movimiento.

Utilizando la tercera ley de Kepler se puede demostrar que dado un planeta de masa m_p en una orbita de semieje a_p las resonancias $k_p:k$ para una partícula de masa m se encuentran en los semiejes

$$a_{k_p:k} = a_p \left(\frac{k^2 \mu}{k_p^2 \mu_p} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.6)$$

donde $\mu = \kappa^2(M + m)$ y $\mu_p = \kappa^2(M + m_p)$. Es importante notar entonces que para que dos objetos estén efectivamente en resonancia no solo debe cumplirse la condición de que tengan los semiejes adecuados sino que además deben tener la configuración angular apropiada para estar cerca de un centro de libración σ_0 . Esto quedará más claro al momento de trabajar con el Hamiltoniano de la resonancia.

Para evitar confusiones, debemos dejar en claro una nomenclatura para distinguir entre resonancias internas y externas. Esto será importante solamente al hablar de resonancias entre un planeta y una partícula. Veremos que para algunas propiedades de las resonancias esto no es relevante.

Así, dada una resonancia $k_p:k$ si $k_p < k$ entonces la partícula es externa al planeta. Por otro lado, si $k_p > k$ la partícula es interna al planeta.

Veremos que para algunos resultados obtenidos en este trabajo no es relevante si la resonancia es externa o interna pero es vital tenerlo en mente al momento de referirse a ciertas resonancias en relación a un planeta u objeto dado. Si bien entraremos en más detalle en las próximas secciones, podemos

tomar como ejemplo de esta distinción dos poblaciones resonantes del Sistema Solar: los Plutinos en resonancia 2:3 con Neptuno (órbitas externas al planeta) y los Hildas en resonancia 3:2 con Júpiter (órbitas internas al planeta). Incluimos en la Figura 1.2 un esquema de estas dos situaciones.

Como mencionamos anteriormente, el enfoque tradicional para estudiar el efecto de diversas perturbaciones ha sido analítico. No debemos olvidar que estos modelos tienen fuertes limitaciones, generalmente son válidos para ciertos rangos de excentricidades, inclinaciones, cocientes de semiejes o resonancias en específico. Por ejemplo, el desarrollo presentado en Ellis y Murray (2000) no es útil si las órbitas son muy próximas o si toman valores muy altos de excentricidad. Un límite general en excentricidad para estos desarrollos es 0.6. Muchas veces estos desarrollos han estado ligados a problemas de investigación concretos o sistemas reales. Como ejemplo de esto, muchos de estos modelos son válidos para el caso plano y/o para bajas excentricidades ya que la mayor parte de nuestro Sistema Solar es plano y cuasi-circular. Esto ha cambiado a medida que se han descubierto objetos en orbitas extremas o sistemas de exoplanetas con arquitecturas previamente no estudiadas.

El modelo semi-analítico que usaremos en este trabajo, en principio no tiene ninguna limitación ya que integramos la función perturbadora numéricamente. Más adelante volveremos sobre este punto.

Ahora pasaremos a definir las propiedades de cada resonancia. Llamamos propiedades al ancho de la resonancia, al período y al centro de libración.

1.0.2. Período de libración

Como vimos anteriormente, cuando un objeto se encuentra en resonancia de movimientos medios, el ángulo crítico correspondiente a dicha resonancia oscila. El período de dicha oscilación recibe el nombre de período de libración y es un elemento clave al momento de identificar una evolución resonante. No debemos olvidar que existen perturbaciones de corto período que siempre están presentes. Es usual eliminar promediando sobre ellos al momento de hacer una teoría mediante algún promedio y así eliminar grados de libertad.

Así, en la evolución del semieje de un objeto en resonancia podemos identificar un movimiento de alta frecuencia y un movimiento debido a la resonancia de período mas alto. Además, conocer el período de la resonancia nos permite distinguir uno del otro y entender si realmente cierto elemento orbital está

oscilando debido a la resonancia o debido a otro efecto.

Por último, debemos mencionar que existen períodos seculares de más largo tiempo los cuales no trataremos en detalle ya que está fuera del alcance de este trabajo. Sin perjuicio de esto, durante en análisis de los resultados obtenidos en este trabajo se mencionarán algunos aspectos importantes respecto a la evolución resonante a largo plazo.

1.0.3. Ancho de la resonancia

Si bien vimos anteriormente que utilizando la tercera ley de Kepler podemos obtener el semieje para el cual cierto objeto está en resonancia, dicho valor no tiene que ser exacto. Existe un rango de semiejes para los cuales la resonancia tiene influencia en la evolución orbital. Este rango recibe el nombre de *ancho de la resonancia* y el símbolo Δa . Además, este valor corresponde a la máxima amplitud de libración que puede tener un objeto en resonancia.

Este concepto está directamente relacionado con la amplitud de oscilación de σ , y dependerá de la forma que tenga el punto de equilibrio. Esto tomará mas sentido en la sección 3 cuando analicemos el Hamiltoniano de la resonancia estudiado en este trabajo. Mientras más lejos del valor nominal de la resonancia estemos, más grande será la amplitud de oscilación del angulo crítico y del semieje mayor. Δa es altamente dependiente de la configuración del sistema.

Si buscamos objetos en cierta resonancia, conocer el ancho nos permite descartar rápidamente objetos con semiejes por fuera del mismo. Sin embargo, no debemos olvidar que además de tener el semieje adecuado dicho objeto debe tener un angulo critico cercano a un punto de equilibrio. Si bien para el caso restringido solamente hablamos de un ancho resonante, para el caso general tenemos dos anchos, uno asociado a cada planeta.

Estudiar la variación del ancho nos permite clasificar resonancias según su forma y podemos hacer cierta morfología de cada una. Se suele dar el ancho como función de la excentricidad como principal influencia, pero en este trabajo veremos que otras variables como la inclinación pueden afectar de gran manera al ancho resonante.

La forma que toma una resonancia depende del orden de la misma. En general, las resonancias de más alto orden son menos anchas que las de más bajo orden. Algunas resonancias crecen su ancho con la excentricidad, esto puede ser problemático para valores grandes de excentricidad ya que pueden suceder

encuentros. Cuando hablemos en detalle del modelo resonante retomaremos esta discusión. Otra característica importante que suelen mostrar las formas de las resonancias son los cuellos, regiones donde el ancho de la resonancia decrece hasta ser casi nulo y luego vuelve a crecer. En la sección de resultados hablaremos mas en detalle de esta y otras propiedades que podemos obtener de la forma de una resonancia en función del orden y de la configuración resonante del sistema.

1.0.4. Centro de libración

Ya mencionamos indirectamente al centro de libración. No es más que el o los valores que toma σ_0 . Es decir, el valor en torno al cual el ángulo crítico oscila cuando dos objetos están en una configuración resonante. Estos valores corresponden a mínimos de la función perturbadora y del Hamiltoniano de la partícula. Notemos que estamos hablando en plural de los valores que puede tomar σ_0 . Esto se debe a que cada resonancia puede tener un numero distinto de puntos de equilibrio. Además, como veremos en la sección de resultados, este número no es identificatorio de cada resonancia, sino que puede cambiar según la configuración del sistema.

Históricamente, se han clasificado a las resonancias según los valores que toman los centros de libración (ver por ejemplo Gallardo (2018)). Decimos que una resonancia es simétrica (o que tiene soluciones simétricas) si σ_0 toma valores de 0° y/o 180° . Por otro lado, decimos que una resonancia es asimétrica (o tiene soluciones asimétricas) si σ_0 puede tomar dos valores distintos a los mencionados para las resonancias simétricas. Esto se ha desarrollado así ya que para el caso cuasi-plano con un planeta cuasi-circular, la mayoría de resonancias parecen ser simétricas con excepciones de algunas. En estas condiciones, las resonancias asimétricas son las del tipo $1:N$ (Beauge, 1994), donde N puede tomar cualquier valor entero mayor o igual a 1. Retomaremos esta clasificación de los puntos de equilibrio en la sección 5.1.3.

Como ejemplo de esto, presentamos en la Figura 1.3 la evolución temporal del ángulo crítico para una partícula en una resonancia simétrica (2:3) y una asimétrica (1:2) con un planeta tipo Júpiter.

para la resonancia 1:2, solamente existe un punto de equilibrio en $\sigma_0 = 180^\circ$. Por otro lado, podemos ver que en el caso de la resonancia 2:3, σ puede oscilar en torno a dos valores. En otras palabras, existen dos puntos de equilibrio para

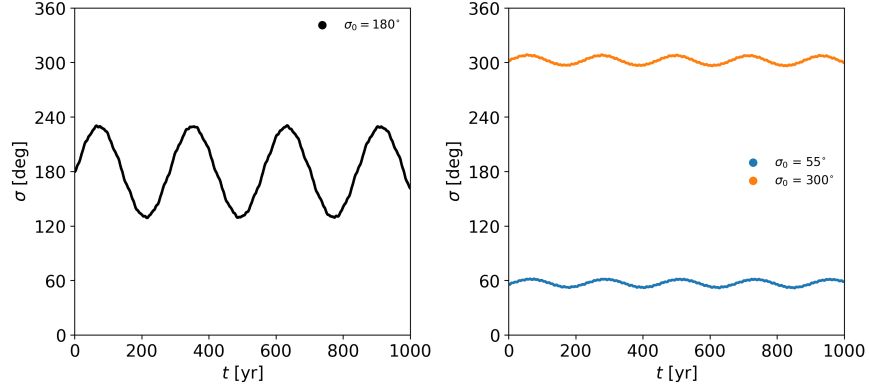


Figura 1.3: Evolución temporal del ángulo crítico σ para dos partículas en resonancia con un planeta de excentricidad $e_p = 0.05$. En la izquierda para una partícula con elementos orbitales $e = 0.5$, $i = 5^\circ$ y $M = 60^\circ$ en la resonancia 2:3. En la derecha, con elementos orbitales $e = 0.5$, $i = 30^\circ$ y $M = 28^\circ$ o $M = 151^\circ$ en la resonancia 1:2.

esta configuración resonante. Cabe mencionar que estos centros de libración son puntos de equilibrio estable, también pueden existir puntos de equilibrio inestable o puntos silla los cuales en principio no son de relevancia para la evolución orbital pero veremos durante este trabajo que los mismos pueden causar cambios abruptos en la evolución dinámica de los objetos.

Durante esta tesis, nos centramos en estudiar en detalle las propiedades de varias resonancias.

1.0.5. Objetivos

El objetivo general de este trabajo es realizar un estudio exhaustivo de las resonancias de movimientos medios en configuraciones de alta excentricidad y/o alta inclinación, con el fin de mejorar nuestro entendimiento de las arquitecturas observadas y de las hipotéticas poblaciones de cuerpos menores en sistemas extrasolares.

Además, se proponen los siguientes objetivos específicos:

1. Analizar de forma global las propiedades de las resonancias en función de los parámetros orbitales que definen al sistema.
2. Estudiar catálogos de exoplanetas y cuerpos menores para identificar el efecto de las resonancias en sus arquitecturas orbitales.
3. Implementar y validar el modelo semianalítico resonante desarrollado en Gallardo (2020) y Gallardo et al. (2021), evaluando su aplicabilidad a distintos sistemas.
4. Aplicar el modelo a casos reales de cuerpos menores y sistemas extrasolares en resonancia, evaluando su capacidad predictiva.

Capítulo 2

Dinámica resonante

2.1. Evolución orbital

La evolución de las orbitas en un sistema planetario como el Sistema Solar puede ser de diferentes tipos. En esta sección entenderemos cómo diferenciarlas y nos centraremos en la que nos interesa en este trabajo. Tomemos como sistema modelo una estrella de $M_\star = M_\odot$, un planeta de $m_p = 0.001 M_\odot$ con una orbita de elementos orbitales $a_p = 5.0$ au, $e_p = 0.05$ y el resto de elementos orbitales nulos.

Además, incluiremos tres cuerpos sin masa con orbitas según se muestran en la Tabla 2.1.

Objeto	a [au]	e	i [deg]	ω [deg]	Ω [deg]	M [deg]
Resonante	6.50	0.50	0	0	0	60
Caótico	9.01	0.85	0	0	0	100
Secular	10.0	0.05	0	0	0	0

Tabla 2.1: Condiciones iniciales para los distintos tipos de evolución orbital entre una partícula y un planeta de excentricidad $e_p = 0.05$ mostradas en la Figura 2.1.

Tal como vemos en la Figura 2.1, la evolución de los semiejes de las órbitas es muy distinto para las distintas orbitas. Por un lado, tenemos la evolución del planeta, el cuál evoluciona con semieje constante ya que se encuentra en un problema de dos cuerpos con la masa central. Por otro lado, tenemos a las tres partículas sin masa. La evolución secular mantiene el semieje constante a menos de una pequeña oscilación de corto período, esta oscilación es debida a nada mas que los términos de corto período que mencionamos anteriormente causados por la perturbación del planeta. Además, tenemos un objeto en una

resonancia 2:3, en el cual podemos identificar esta oscilación de corto período incluida en una oscilación de período mas grande causada por la resonancia. Este período resonante debería tener un valor cercano a 302 yr. Explicaremos más adelante cómo calculamos este valor.

Por último, tenemos a la partícula caótica. Este es un punto en el que vale la pena hacer un comentario importante. Todo sistema gravitacional de 3 o más cuerpos (con masa) es caótico pero en algunas configuraciones el caos es mucho mas claro o aparece mas rápido. Este es el caso de los encuentros orbitales, en los que la partícula pasa muy cerca de un planeta, ya no podemos considerar la fuerza como una perturbación. Este es el caso de la partícula caótica en nuestro ejemplo, ya que los encuentros son mucho mas caóticos que los otros tipos de evolución orbital. En este trabajo, nos centraremos solamente en la evolución resonante.

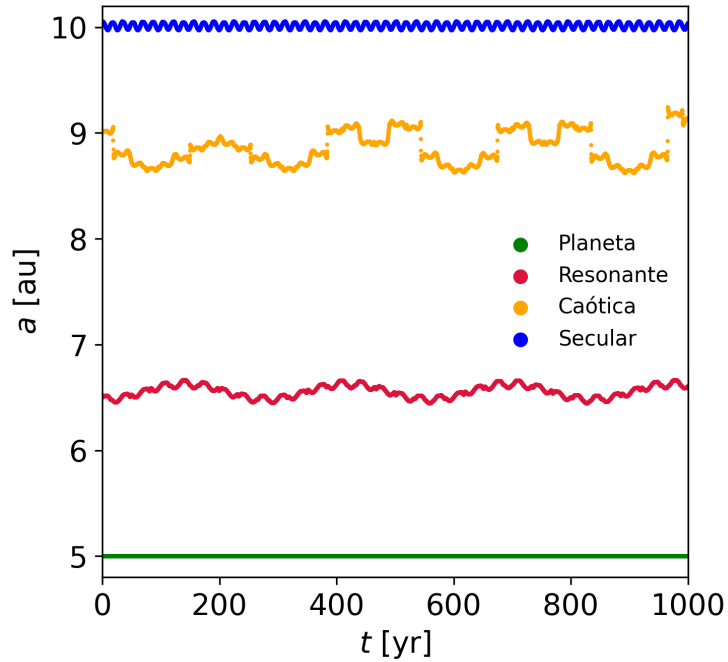


Figura 2.1: Evolución temporal del semieje para distintos tipos de evolución orbital de una partícula con diversas condiciones iniciales y un planeta con excentricidad $e_p = 0.05$.

Más allá de los dos períodos mencionados anteriormente, si estudiamos la evolución a largo plazo de un sistema planetario en resonancia puede aparecer otro período adicional. A medida que el sistema evoluciona, el centro de libración se puede desplazar y oscilar en torno a un valor concreto. Por lo tanto,

no debemos confundir el período de oscilación del ángulo crítico en torno a σ_0 con el período de oscilación o circulación del valor de σ_0 .

Una característica fundamental que debemos mencionar de un sistema gravitacional de N cuerpos es el caos. Anteriormente, ya mencionamos que los encuentros cercanos son muy aleatorios, pero las resonancias de movimientos medios evitan que dos objetos se encuentren. Sin embargo, no es necesario que tengamos encuentros cercanos para que aparezca la sensibilidad en las condiciones iniciales. Esto se hace evidente cuando estudiamos la evolución a largo plazo de un objeto o del sistema en general. Por ejemplo, se ha mostrado que el Sistema Solar es caótico (Laskar, 1994). En otras palabras, podemos predecir la forma que tendrá una órbita pero no en qué lugar de la misma estará la partícula.

Existen muchas formas e indicadores para medir el caos de un sistema, en la sección de metodología mencionaremos los utilizados en este trabajo. Es importante notar que se suelen confundir los conceptos de caos y estabilidad ya que muchas veces están directamente relacionados. Durante este trabajo, intentaremos ser claros respecto a esto según el siguiente criterio. Diremos que un sistema u órbita es estable cuando la configuración orbital no cambia significativamente con el tiempo y diremos que un sistema u órbita es caótico cuando un indicador de caos así lo diga. Esto corresponde a una alta sensibilidad a las condiciones iniciales.

2.2. Poblaciones resonantes

En esta sección hablaremos sobre las distintas poblaciones conocidas de objetos resonantes tanto en el sistema solar como en sistemas extrasolares. Además, identificaremos una serie de resultados interesantes a estudiar o centrales en el efecto de las resonancias en las arquitecturas de exoplanetas

La arquitectura de las poblaciones de cuerpos menores en el Sistema Solar está altamente influenciada por resonancias de movimientos medios (Murray y Dermott, 1999). Existe una gran variedad de resonancias de varios órdenes. Algunas veces las resonancias de movimientos medios se manifiestan como concentraciones y otras veces como falta de objetos en ciertos semiejes. Veremos un par de ejemplos relevantes para nuestro trabajo. Con la pronta puesta en funcionamiento del Vera Rubin Observatory (LSST) se espera que el número de objetos conocidos en algunas de estas poblaciones se incremente notablemente

(Ivezić et al. 2019; Kurlander et al. 2025).

2.2.1. Cinturón de asteroides

Uno de los casos mas estudiados sobre el efecto de las resonancias, aparece en el cinturón de asteroides. Haciendo un histograma de los semiejes de estos objetos, notamos que para ciertos semiejes el numero de objetos decae notablemente. Estos son los conocidos huecos de Kirkwood (Kirkwood, 1867).

Cabe mencionar que los objetos del cinturón principal se definen tal que tengan un perihelio mayor al afelio de Marte. Sin embargo, en la Figura 2.2 incluimos todos los objetos con semiejes $2.0 \text{ au} < a < 3.2 \text{ au}$ ya que algunos de los objetos de alta excentricidad (clasificados como asteroides que cruzan la órbita de Marte) serán estudiados en este trabajo. Tal como vemos en la Figura 2.2 los huecos corresponden con resonancias de movimientos medios internas a Júpiter. La razón por la cual existen es debido a evoluciones seculares dentro de las resonancias (Moons, 1996). Esta causa que la excentricidad de la órbita crezca hasta que la partícula tiene un encuentro cercano con algún planeta, lo cual cambia su semieje o termina chocando con el Sol (Ferraz-Mello y Klafke, 1991; Hadjidemetriou, 1993; Farinella et al. 1994; Gladman et al. 1997; Bottke et al. 2000). Estos objetos pueden ser fuente de Sungrazers (Bailey et al. 1992). Volveremos a esto en la sección de resultados.

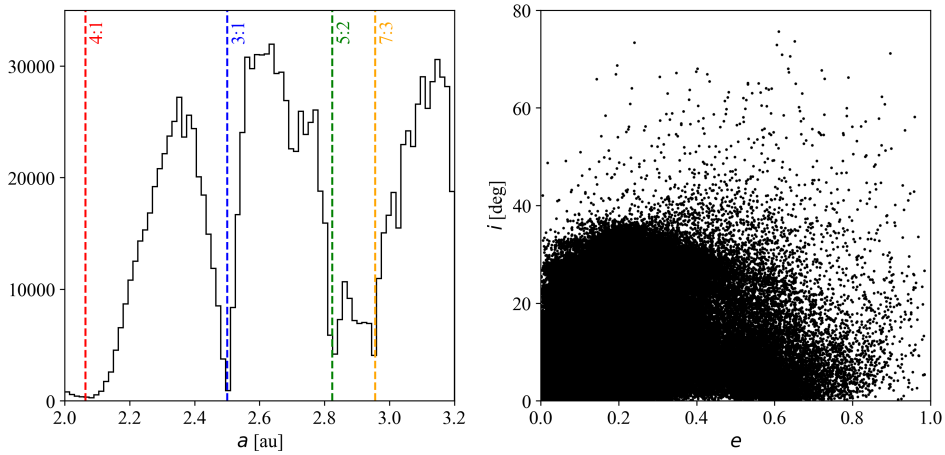


Figura 2.2: Histograma de semiejes y distribución en el plano (e, i) de todos los cuerpos menores con semiejes $2.0 \text{ au} < a < 3.2 \text{ au}$. Datos tomados de NASA Horizons System.

Sin embargo, las resonancias también pueden manifestarse como concen-

tracciones de objetos. Como ejemplo, una población numerosa de objetos en resonancia 1:2 con Marte fue descubierta como un pico de objetos en el histograma, en contraste con los conocidos huecos (Gallardo, 2007).

2.2.2. Asteroides Troyanos

Otra población resonante de gran interés son los Troyanos de Júpiter. Estos objetos tienen semiejes cercanos al de Júpiter por lo que se encuentran en la resonancia 1:1 con este planeta. Han sido de gran interés ya que muchos de estos objetos son estables por la edad del Sistema Solar por lo que se piensa fueron capturados en resonancia al momento de la formación del sistema (Levison et al. 1997; Robutel y Gabern, 2006). La misión Lucy se encuentra en camino a estudiar algunos de estos objetos (Levison et al. 2021). Algunos de estos objetos tienen orbitas extrañas, un ejemplo es Ka'epaoka'awela (Wiegert et al. 2017) ya que se encuentra en una órbita de muy alta inclinación. Podemos identificar tanto este objeto como los Troyanos que visitará la misión Lucy en la Figura 2.3 donde presentamos un histograma de semiejes y la distribución en el plano (e,i) de los cuerpos menores con $4.7 \text{ au} < a < 5.5 \text{ au}$. Vemos que la mayoría de estos objetos se encuentran en orbitas de baja excentricidad y baja inclinación. Existen una literatura muy amplia respecto a esta población. Di Sisto et al. (2014) estudió el escape de estos objetos y el problema de la asimetría, mostrando que esta debe ser una característica de su proceso de captura. Además, se ha mostrado que la población actual de Troyanos puede dar indicios sobre los procesos de migración que sufrieron los planetas en el Sistema Solar (Lykawka y Horner, 2010; Pirani et al. 2019). Existen otros planetas con objetos coorbitales a su alrededor. Entraremos mas en detalle en la sección de Resultados.

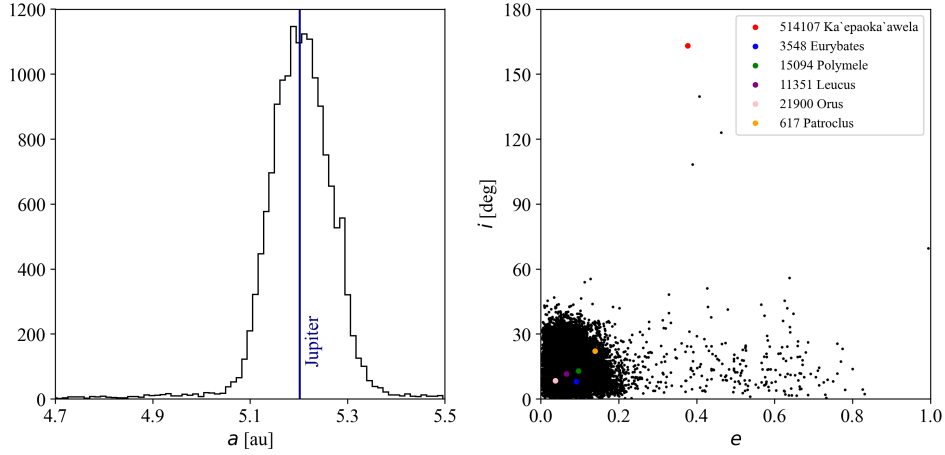


Figura 2.3: Histograma de semiejes y distribución en el plano (e, i) de todos los cuerpos menores con semiejes $4.7 \text{ au} < a < 5.5 \text{ au}$. Datos tomados de NASA Horizons System.

2.2.3. Cinturón de Transneptunianos

En las ultimas décadas se han descubierto miles de objetos orbitando al Sol en órbitas con semiejes mayores al semieje de Neptuno. Si bien existen varias formas de subdividir a este grupo, son de especial interés para este trabajo los transneptunianos resonantes. Existe una gran diversidad de objetos en resonancia, principalmente con Neptuno, en esta zona del Sistema Solar.

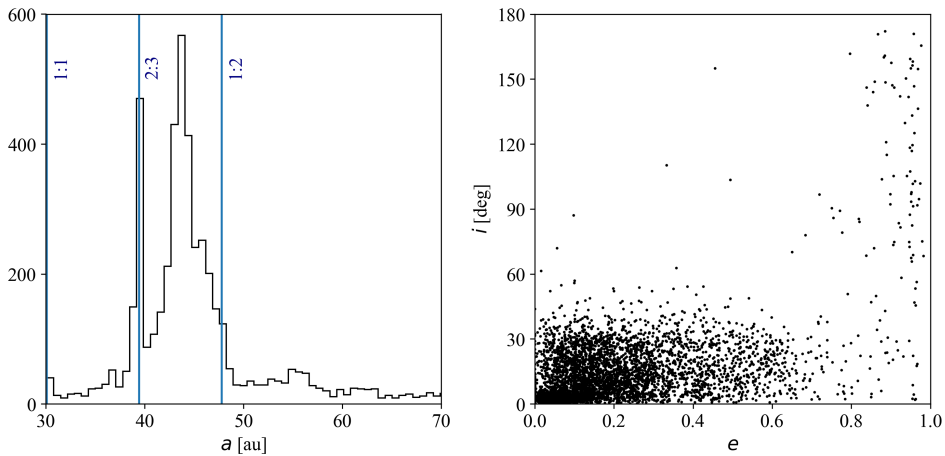


Figura 2.4: Histograma de semiejes y distribución en el plano (e, i) de todos los cuerpos menores con semiejes $30.0 \text{ au} < a < 100.0 \text{ au}$. Datos tomados de NASA Horizons System.

Tal como podemos ver en la Figura 2.4, existe una clara concentración de

objetos cerca de la resonancia 2:3 con Neptuno (reciben el nombre de plutinos). De hecho, el primer TNO descubierto fue Plutón, el cual se encuentra en una resonancia 2:3 con Neptuno, esto permite que el planeta este en una orbita estable a pesar de tener una excentricidad alta, y que su orbita se cruce con la del planeta. Además, algo interesante a notar en la distribución de elementos orbitales (e, i) es que estos objetos pueden llegar a tener orbitas bastante inclinadas lo que los hace ideales para testear el modelo semianalítico.

2.2.4. Exoplanetas

En los últimos 30 años los avances en las técnicas de detección de exoplanetas han aumentado de forma exponencial el número de sistemas extrasolares confirmados. Al momento de escribir este trabajo se conocen más de 6000 exoplanetas confirmados entre los cuales hay mas de mil sistemas multiplanetarios. Tal como podemos ver en la Figura 2.5, la distribución de los cocientes de períodos muestra que dichos sistemas tienden a concentrarse en configuraciones conmensurables, cerca de resonancias de movimientos medios. Así, el estudio de la evolución planetaria resonante ha tomado gran importancia en el estudio de la estabilidad de estos sistemas.

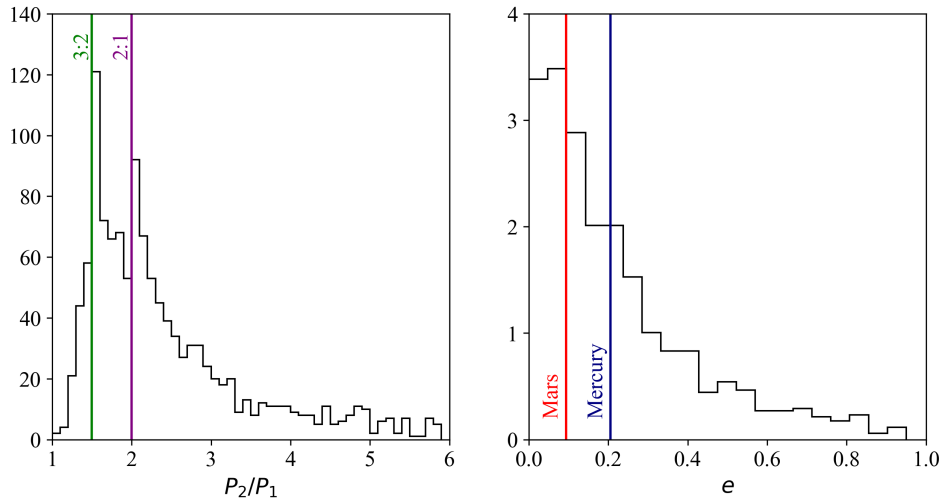


Figura 2.5: En la izquierda un histograma de cocientes de períodos para todos los pares de planetas consecutivos en los sistemas extrasolares conocidos con los picos mas prominentes identificados con resonancias de movimientos medios. En la derecha un histograma de excentricidades de los planetas detectados mediante la técnica de velocidad radial con los planetas mas excéntricos del Sistema Solar marcados.

Este resultado es algo esperable de la población de exoplanetas ya que al

momento de su formación, los sistemas planetarios migran dentro del disco protoplanetario. La migración planetaria se puede detener por una captura resonante entre los planetas (Masset y Snellgrove, 2001; Lee y Peale, 2002; Papaloizou y Szuszkiewicz, 2005). Así, podríamos esperar que muchos sistemas sean resonantes. Algunos de los sistemas resonantes conocidos son cadenas resonantes. Es decir, varios pares planetas en resonancia entre sí. Estos sistemas suelen ser compactos y tener orbitas de baja excentricidad ya que algunos efectos de interacción con la estrella causa que las orbitas se circularice (Jackson et al. 2008; Goździewski et al. 2010; Pont et al. 2011; Rodríguez et al. 2011; Ferraz-Mello, 2013; Valsecchi y Rasio, 2014). Sin embargo, aún no conocemos la población completa de exoplanetas por lo que podrían existir sistemas resonantes en orbitas de interés para este trabajo. Como veremos mas adelante, algunos sistemas necesitan estar en resonancia para evolucionar de forma estable. En la sección de resultados retomaremos este tema.

Por otro lado, en el Sistema Solar ocurre lo contrario en cuanto a la estabilidad. Como lo demostraron Michtchenko y Ferraz-Mello (2001) y podemos ver en la Figura 2.6, los cuatro planetas gigantes del Sistema Solar se encuentran cerca de resonancias entre sí pero justo por fuera. Es de particular interés notar la casi resonancia entre Júpiter y Saturno ya que esta causó conflictos en el entendimiento de la mecánica celeste del siglo 18. Este problema se llamó la gran desigualdad (Wilson, 1985). Tal como se puede apreciar en la Figura 2.5 se ha encontrado evidencia de un comportamiento similar en muchos otros sistemas, donde los exoplanetas se concentran a la derecha de las resonancias (Fabrycky et al. 2014). Por lo tanto, debe existir algún mecanismo físico que saque a los planetas de dentro de las resonancias (Batygin y Morbidelli, 2012; Lithwick y Wu, 2012; Charalambous et al. 2018).

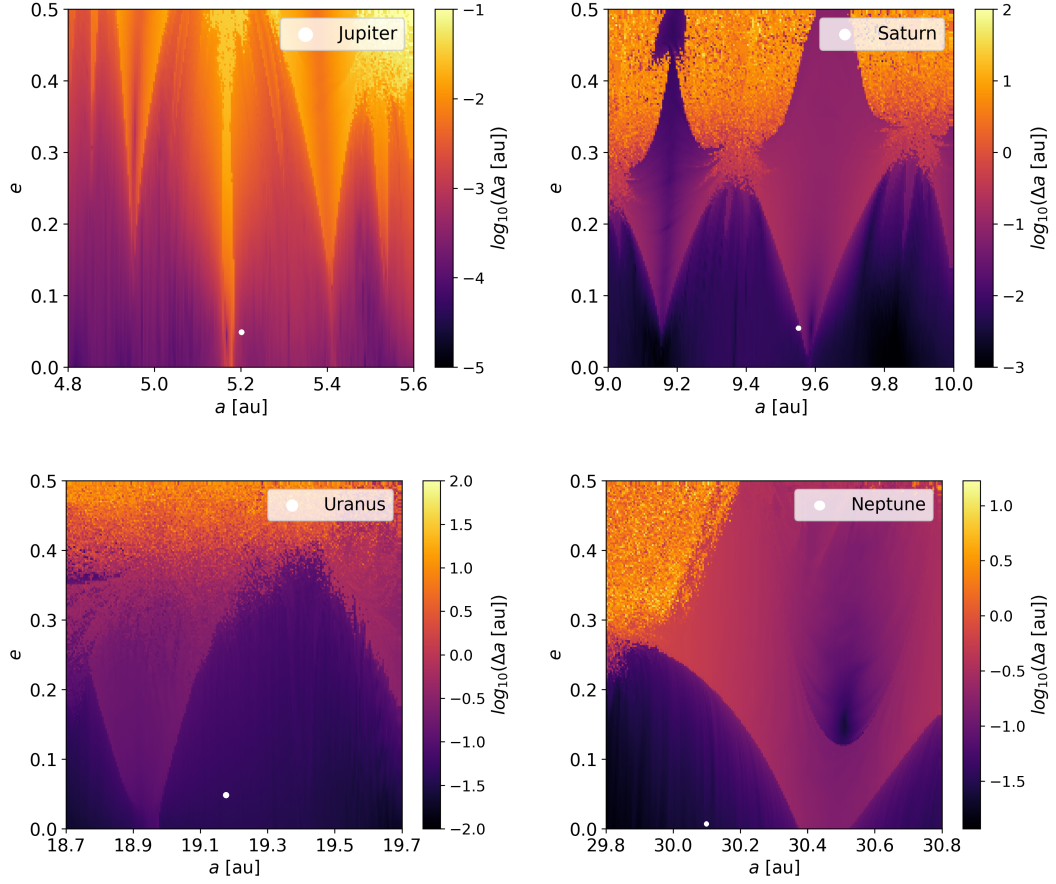


Figura 2.6: Mapas dinámicos en los entornos de los planetas gigantes del Sistema Solar. Notamos estructuras relacionadas con resonancias de movimientos medios entre los planetas. Todos los planetas se encuentran cerca pero fuera de las mismas.

Como ya mencionamos previamente, la resonancia modifica la evolución secular, volviéndola en algunos casos mas extrema. La evolución orbital a largo plazo dentro de la resonancia puede ser muy diferente que fuera de la misma. Al igual que sucede con las poblaciones de cuerpos menores resonantes, algunas resonancias pueden generar estabilidad y otras inestabilidad según cada caso particular y la evolución secular dentro de cada resonancia. Por lo tanto, es necesario comprender en detalle cada resonancia para entender su efecto en las poblaciones de objetos reales.

Además, el descubrimiento de sistemas con orbitas extremas causa que sea de interés estudiar la estructura resonante de estos sistemas. Entre estos sistemas extremos encontramos sistemas con orbitas muy excéntricas (Kipping, 2013; Stevenson et al. 2025).

Entre los diferentes métodos para detectar exoplanetas. La amplia mayoría

se han detectado mediante la técnica de tránsitos. Esta técnica consiste en tomar fotometría de una estrella hasta que su brillo aparente disminuye debido a un planeta eclipsante. Esta técnica permite obtener cierta información de la órbita del planeta como su semieje pero no permite obtener parámetros importantes para la dinámica como su masa o su excentricidad (Winn, 2010). Además, la necesidad de que los planetas descubiertos por esta técnica eclipsen la estrella hace que las inclinaciones mutuas entre los planetas descubiertos sea cercana a cero.

Por otro lado, existe la técnica de la velocidad radial. Con la utilización de la misma se logró detectar el primer exoplaneta en torno a una estrella de tipo solar (Mayor y Queloz, 1995). Nos permite obtener otros parámetros de la órbita que no obtenemos con los tránsitos como la masa, la excentricidad o el argumento del perihelio.

Existen otras técnicas con las que se han descubierto menos planetas pero que son útiles para revelar poblaciones en otras zonas del espacio de fase de exoplanetas. Algunas de estas técnicas son la imagen directa, los microlentes gravitacionales o la astrometría. En el futuro, avances en estas técnicas y nuevas metodologías permitirán descubrir mas planetas. Usando el efecto de Rossiter–McLaughlin (Triaud, 2018) se ha logrado detectar sistemas en los que la inclinación orbital en relación al espín estelar toma valores cercanos a 90° (Albrecht et al. 2012; Sanchis-Ojeda et al. 2013; Borsa et al. 2021; Stefánsson et al. 2022; Knudstrup et al. 2023).

Por lo tanto, vemos que es difícil conocer la configuración orbital completa de un sistema particular. Si es posible obtener información de un sistema con múltiples técnicas entonces podemos realizar un estudio dinámico detallado. Esto se vuelve complicado al tener información limitada sobre los sistemas. También podemos restringir los parámetros orbitales del sistema haciendo un estudio dinámico de estabilidad (Marshall et al. 2020). Debemos hacer especial mención a la técnica de TTV ya que es especialmente útil en sistemas cuasi resonantes (Agol et al. 2005; Holman y Murray, 2005; Steffen et al. 2013; Xie, 2013).

Capítulo 3

Metodología

En este capítulo explicaremos el enfoque metodológico utilizado para investigar sobre las resonancias de movimientos medios. Nos basamos en la combinación de tres enfoques complementarios:

1. Modelo semi-analítico: Utilizamos un modelo semi-analítico que integra numéricamente la función perturbadora, lo cual nos permite obtener las propiedades de cualquier resonancia.
2. Análisis de catálogos: Explorando bases de datos de exoplanetas y cuerpos menores, identificamos objetos en resonancia que nos permitan validar el modelo.
3. Experimentos numéricos: Realizamos integraciones de N cuerpos para estudiar la evolución resonante en forma detallada de una amplia variedad de sistemas reales, así como sistemas modelo para explorar las propiedades halladas con el modelo.

Algunas de las propiedades de las resonancias fueron primero identificadas en objetos reales, para luego entender dicha propiedad utilizando el modelo e integraciones numéricas. Por otro lado, los resultados del modelo fueron verificados mediante experimentos numéricos mientras que los catálogos no siempre muestran una completitud de ejemplos.

3.1. Modelo semi-analítico

Como ya mencionamos anteriormente, existen muchos modelos analíticos donde se hacen expansiones de $\mathcal{R}$. Particularmente, algunos modelos son

válidos para el caso inclinado (Namouni y Morais, 2018; Lei, 2019). Otros son válidos para altas excentricidades en el caso plano (Ferraz-Mello y Sato, 1989; Beaugé, 1996). La idea fundamental del modelo desarrollado en Gallardo (2020) y en Gallardo et al. (2021) se basa en tratar al Hamiltoniano de forma híbrida. Parte del Hamiltoniano es calculado de forma analítica pero la perturbación es integrada numéricamente promediando en las variables rápidas del problema. Esto permite no solamente evitar la matemática compleja detrás de los desarrollos sino que permite abarcar todo el espacio de parámetros sin restricciones. De esta forma, podremos estudiar cualquier resonancia de movimientos medios para cualquier configuración resonante sin importar el valor de excentricidad e inclinación.

Los códigos fundamentales del modelo fueron escritos en FORTRAN y se pueden encontrar [aquí](#). Como parte de este trabajo, desarrollamos una clase de Python que encapsula los códigos fundamentales del modelo y corre los ejecutables encapsulando toda la información en un objeto. Así, con una simple línea de Python podemos acceder a los resultados del modelo con métodos de la clase, tanto a las propiedades de cualquier resonancia como a las curvas de nivel. En el anexo 1 se adjunta una documentación detallada de esta clase y sus métodos.

3.1.1. Caso restringido

El razonamiento que sigue fue desarrollado en Gallardo (2020) para el caso restringido. Consideremos una resonancia de movimientos medios $k_p:k$. Para una partícula en esta resonancia, podemos escribir el Hamiltoniano como

$$H(a, e, i, \omega, \sigma) = -\frac{\mu}{2a} - n_p \frac{k_p}{k} \sqrt{\mu a} - R(a, e, i, \omega, \sigma) \quad (3.1)$$

donde σ es el ángulo crítico correspondiente a cierta resonancia y $\mu = GM_\star$. Un punto clave al momento de usar este modelo, es que estamos asumiendo que (e, i, ω) son parámetros constantes. Esto en general es algo razonable de asumir ya que los tiempos en los que estos elementos orbitales cambian suelen ser mayores que el tiempo de una libración resonante. Además, el semieje a al calcular la función perturbadora $R(a, e, i, \omega)$ se asume que está dado por el semieje nominal de la resonancia. Así, asumiendo dichos parámetros como constantes evaluamos $\mathcal{R}$ de la siguiente forma

$$\mathcal{R}(\sigma) = \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} R(\lambda_p, \lambda(\lambda_p, \sigma)) d\lambda_p \quad (3.2)$$

donde R se calcula expresada en coordenadas cartesianas tal que

$$R = Gm_p \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_p}{r_p^3} \right) \quad (3.3)$$

También podemos obtener curvas de nivel del Hamiltoniano. Este solamente queda dependiendo de dos variables (a, σ) y de los demás parámetros.

$$\mathcal{H}(a, \sigma) = -\frac{\mu}{2a} - n_p \frac{k_p}{k} \sqrt{\mu a} - \mathcal{R}(a_0, \sigma) \quad (3.4)$$

Como $\mathcal{H}$ no depende explícitamente del tiempo, la energía de una partícula se debe conservar. Entonces, un objeto en resonancia evolucionará siguiendo las curvas de nivel de este Hamiltoniano. No debemos nunca olvidar las perturbaciones de corto período que en el modelo son promediadas. Así, analizando las curvas de nivel de Hamiltoniano constante, podemos identificar las propiedades de la resonancia.

Se puede demostrar que los centros de libración cumplen la siguiente condición

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma} = 0 \quad (3.5)$$

por lo que conociendo $\mathcal{R}(\sigma)$ con la ecuación 3.2 podemos encontrar los centros de libración con un algoritmo de búsqueda de mínimos. Podemos notar en la ecuación 3.3 que la masa del planeta solamente aparece como un factor multiplicativo por lo que la ubicación de los centros de libración será independiente de cuál objeto tiene masa. En otras palabras, no es importante si el planeta es el objeto interno o el externo.

Además, en el artículo se muestra que el período de libración se puede calcular como

$$T = \frac{a}{k} \frac{2\pi}{\sqrt{3R_{\sigma\sigma}}} \quad (3.6)$$

donde $R_{\sigma\sigma}$ es la derivada segunda calculada numéricamente en el punto de equilibrio. Por último, el medio-ancho de la resonancia en unidades astronómicas se puede calcular de la siguiente manera

$$\Delta a \sim \frac{\sqrt{8/3}}{n} \sqrt{\Delta \mathcal{R}} \quad (3.7)$$

donde $\Delta \mathcal{R}$ es la máxima amplitud de $\mathcal{R}(\sigma)$. Si el ancho de una resonancia es muy grande, la misma puede superponerse con otra, lo cual genera caos. Además, si la excentricidad es muy grande, la partícula puede tener encuentros cercanos con el planeta. En ambos casos, la libración no es estable. Esto es contemplado por el modelo por lo que de aquí en adelante cuando hablemos del ancho, siempre nos referiremos al ancho de las libraciones estables.

Una forma sencilla de entender el ancho de una resonancia y los centros de libración es la inspección visual del Hamiltoniano. Como podemos ver en la Figura 3.1, los mínimos de $\mathcal{R}(\sigma)$ corresponden con los puntos de equilibrio en el Hamiltoniano.

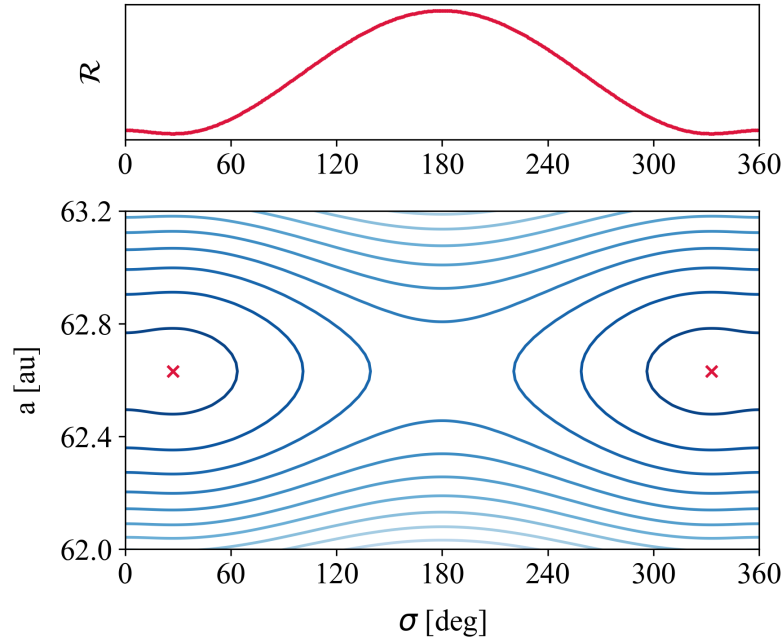


Figura 3.1: Función perturbadora $\mathcal{R}$ para la resonancia 1:3 con Neptuno calculada numéricamente con el modelo semianalítico. Además, curvas de nivel de Hamiltoniano constante con los puntos de equilibrio marcados con cruces rojas calculados como mínimos de $\mathcal{R}$.

Notemos que el ancho de cada centro de libración (vinculado a la separatriz) puede ser distinto. Aquí encontramos una limitación de esta implementación del modelo, ya que el mismo solamente devuelve el ancho máximo de la resonancia cuando en realidad cada punto de equilibrio tiene un ancho independiente.

Tal como hemos mencionado, un objeto en resonancia evolucionará siguiendo las curvas de nivel a menos de las perturbaciones de corto período. Recordemos que estamos asumiendo ciertos parámetros constantes, por lo que esto cambiará a medida que los mismos tengan alguna variación. Por lo tanto, si vemos la evolución a largo plazo (mas allá de algunos períodos de libración) veremos que las propias curvas de nivel cambiarán. En el capítulo de resultados discutiremos que incluso la topología de la resonancia puede variar, con aparición y desaparición abrupta de puntos de equilibrio. Por lo tanto, otra limitación fundamental del modelo es que si bien podemos explicar y seguir la evolución resonante de un objeto, no tenemos poder predictivo sobre cómo este evolucionará. Para ello, necesitaríamos contar con una teoría resonante secular como la desarrollada en Pons y Gallardo (2022) y Pons y Gallardo (2024). Los enfoques seculares tienen sus propias limitaciones ya que muchas veces recurren al principio de invariancia adiabática (Henrard, 1993), donde es necesario asumir variaciones lentas de los parámetros, lo cual no ocurre en todos los casos. Mas allá de esto, esta discusión queda por fuera del objetivo de este trabajo.

3.1.2. Caso planetario

En el caso planetario del problema estudiado, ambos cuerpos orbitando al rededor de la masa central tienen masa no despreciable en comparación con la otra. Por lo tanto, ambos sienten una perturbación mutua. La idea básica detrás del modelo resonante restringido se mantiene, integramos numéricamente la perturbación y con la función perturbadora numéricamente calculada podemos obtener las propiedades de la resonancia.

Sin embargo, algunas cosas cambian. Por ejemplo, es necesario utilizar otros sistemas de coordenadas para que el Hamiltoniano quede escrito en coordenadas canónicas. Las coordenadas heliocéntricas utilizadas en el caso restringido ya no son canónicas para este caso más general. Los detalles de estos cambios se encuentran explicados en Gallardo et al. (2021). Además, el ancho de la resonancia ya no es único (mas allá de la dependencia del punto de equilibrio que discutiremos mas adelante) sino que tenemos un ancho resonante para cada planeta. Estos van a ser función de la masa de tal forma que la resonancia es mas ancha para el planeta de menor masa, que sufre en mayor medida los efectos de la resonancia. También serán función de los semiejes, donde a mayor

semieje, mayor ancho.

Debemos mencionar otra característica importante del caso general, aparece un nuevo parámetro a tener en consideración, el cociente de masas entre los planetas. Tal como discutimos anteriormente, el número de centros de libración será independiente de este parámetro nuevo pero sí será importante al momento de estudiar los anchos de la resonancia, los períodos de libración y en el estudio de la evolución secular de estos sistemas en resonancia.

Los códigos originales fueron escritos en Fortran al igual que los del modelo de caso restringido. Como parte de este trabajo, adaptamos los mismos a una interfaz simple de uso en Python. En el Anexo 1 se puede encontrar una descripción de los mismos.

3.2. Catálogos de objetos astronómicos

Parte de los objetivos de este trabajo fueron comparar nuestros resultados con objetos reales. Para ello, no realizamos observaciones propias sino que utilizamos información libre disponible en diversos catálogos de objetos.

3.2.1. Cuerpos menores

El catálogo principal utilizado para obtener información de los Cuerpos Menores del Sistema Solar es NASA Horizons. Este es un sistema en línea que nos permite acceder a una gran variedad de información sobre cuerpos menores. A junio de 2025, se conocen al rededor de 1.5×10^6 cuerpos menores. La base de datos permite obtener los seis elementos orbitales para cierta época. Sin embargo, muchas de las determinaciones orbitales están basadas en observaciones de una porción muy pequeña de arco de órbita, resultando en una mala calidad en la determinación de la órbita. Usualmente esto se encara generando clones dentro de los rangos de incertidumbre -o utilizando la matriz de covarianza si está disponible- para hacer un estudio estadístico de cómo podría evolucionar la órbita de un objeto particular.

Además, para algunos objetos, se encuentra disponible información complementaria si queremos agregar en detalle diversos aspectos físicos que afectan a la evolución orbital de un objeto. Sin entrar en detalle, el efecto Efecto Yarkovsky es particularmente relevante para asteroides de escala kilométrica y subkilométrica (Bottke et al. 2006). Una determinación precisa de su magni-

tud requiere conocer, entre otros parámetros físicos, el período de rotación y el albedo del objeto. Estos efectos no fueron considerados en este trabajo. Sin embargo, se indica explícitamente en el texto cuando se estima que podrían influir de manera relevante en los resultados o en su interpretación.

3.2.2. Exoplanetas

El gran crecimiento que han tenido las técnicas de detección de exoplanetas en las últimas dos décadas ha resultado en una muy amplia diversidad en los datos disponibles para cada sistema extrasolar confirmado. Muchas veces la información disponible para cierto sistema es muy reducida debido a las limitaciones de las técnicas utilizadas y no siempre siguen un formato estándar. Sin embargo, los grandes sondeos de descubrimiento han permitido homogeneizar las muestras.

Existen dos catálogos en línea que recopilan resultados de todos los artículos que se han publicado por sistema. Estos son el mantenido por la NASA, llamado Nasa Exoplanet Archive (Christiansen et al. 2025) y el disponible en la web exoplanet.eu The Extrasolar Planets Encyclopaedia. En ellos, podemos hallar tanto información física como dinámica de los sistemas con sus correspondientes referencias. Como mencionamos previamente, al momento de hacer estudios dinámicos es importante tener en cuenta las incertidumbres de los parámetros de cada sistema. El número de exoplanetas confirmados a junio de 2025 varía levemente entre los dos catálogos, situándose en más de 6000 tanto para NASA Exoplanet Archive como para The Extrasolar Planets Encyclopaedia.

3.3. Integraciones numéricas

Además de los métodos mencionados en las secciones anteriores, parte fundamental de esta tesis está basada en el resultado de integraciones numéricas de las ecuaciones exactas de movimiento. Esta es la forma mediante la cual podemos experimentar con un sistema de N cuerpos. En esta subsección presentaremos el fin de los integradores numéricos, daremos una breve descripción de su funcionamiento y cómo los usamos en este trabajo. Por último, daremos una breve comparación entre los diferentes integradores numéricos utilizados y una justificación de su uso.

El objetivo fundamental de un integrador numérico es resolver las ecuaciones diferenciales que rigen la evolución temporal del sistema. En el caso de dos cuerpos celestes orbitando un cuerpo central, las mismas están dadas por las leyes de Newton y la Ley de Gravitación Universal. Así, obtenemos para cada masa i una ecuación diferencial como la siguiente

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} G \frac{m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} \quad (3.8)$$

Existen varios métodos para construir una solución numérica para estas ecuaciones. Al momento de elegir una forma de solucionar un problema numérico debemos tener un balance en cuanto a la precisión que necesitamos, el error que acumulamos y el tiempo de cómputo que lleve obtener el resultado buscado. Hoy en día, uno de los algoritmos más usados para este problema es la implementación de Wisdom y Holman (1991). En la historia de los integradores numéricos, ha permitido un gran salto en la rapidez de los algoritmos con los que podemos integrar un sistema planetario. Así, en los últimos 30 años los integradores numéricos han mejorado notablemente en cuanto a la velocidad y la capacidad de cómputo. Morbidelli (2002) presenta un buen resumen de la historia y los avances mas importantes en el desarrollo de los integradores numéricos.

Uno de los integradores mas utilizados hoy en día en el contexto de la astronomía dinámica son los integradores que forman parte del paquete REBOUND (Rein y Liu, 2012; Rein y Spiegel, 2015). Estos programas fueron escritos en C pero pueden ser fácilmente usados desde una interfaz de Python. La mayoría de los resultados en este trabajo fueron obtenidos utilizando este paquete. Dentro del mismo hay una gran variedad de integradores útiles para distintos problemas. Esto logra optimizar la operación para distintos casos. En cada caso dejaremos en claro qué integrador fue utilizado.

Otros integradores que aparecen en este trabajo -de forma minoritaria- son Mercury (Chambers, 1999, 2012) y EVORB (Fernández et al. 2002). Particularmente EVORB, fue utilizado para verificar muchos de los resultados aunque no se deje constancia explícita de ello en el cuerpo del trabajo.

Una duda válida que podemos tener al momento de pensar en integraciones de mucho tiempo es ¿cómo testear la calidad de un integrador? ¿no se acumula error en integraciones largas? Una forma razonable de testear la calidad de una integración numérica es chequear la conservación de alguna cantidad

conservada en el sistema a lo largo de la evolución temporal. Asumiendo que no hay un cambio de momento lineal, la energía de los sistemas trabajados en esta tesis deberían conservar su energía total E . Al integrar el caso planetario, también se debe conservar el momento angular total del sistema.

Así, como ejemplo, presentamos una comparación entre la conservación de la energía para distintos integradores incluidos en el paquete REBOUND en la Figura 3.2, integrando Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno. Podemos observar que el error fraccional en la energía varía entre los distintos integradores. Estas diferencias dependen tanto del esquema numérico empleado como del paso de integración adoptado. En particular, en los integradores simplécticos el error en la energía se mantiene acotado, con una amplitud que depende del paso de integración. Notemos que *ias15* se mantiene con un error menor al 10^{-14} durante un período de tiempo significativo.

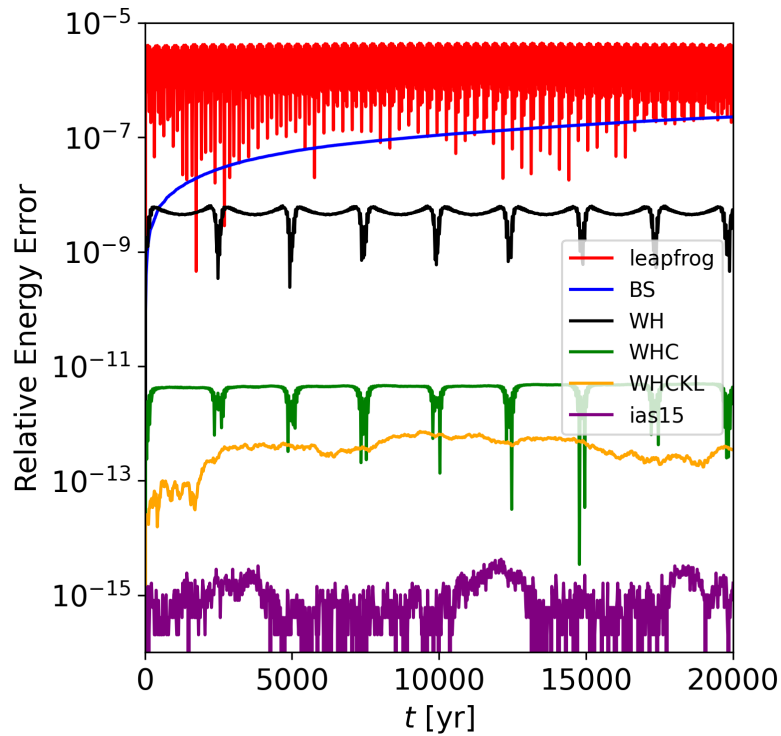


Figura 3.2: Evolución temporal del error fraccional en la energía para una integración numérica de los cuatro planetas gigantes del Sistema Solar con distintos integradores incluidos en el paquete REBOUND. En este trabajo usamos mayoritariamente el integrador *ias15*.

No pretendemos dar una descripción detallada de cada uno. El integrador multiuso mas usado en este trabajo fue *ias15* (Rein y Spiegel, 2015). Este

integrador de paso adaptativo permite manejar encuentros cercanos de forma correcta. Algunos integradores como EVORB son híbridos, en el sentido que cambian el algoritmo utilizado para lograr eficiencia de cómputo y de precisión al momento de tener encuentros cercanos entre los cuerpos en la simulación.

Con estos integradores podemos integrar una órbita dada o hacer varias integraciones para ver una tendencia estadística cuando la configuración inicial de un sistema inicial es incierta. Esto es una práctica usual debido a la alta caoticidad del sistema.

Por último, hemos mencionado que existen indicadores que nos dicen que tan caótico es un sistema dado. En este trabajo hemos usado el indicador de caos MEGNO, incluido en REBOUND (Rein y Tamayo, 2016). Este indicador es similar a los conocidos estimadores de exponentes de Lyapunov. La idea básica es verificar si dos soluciones cercanas se alejan en forma exponencial entre sí a medida que pasa el tiempo. Siguiendo las instrucciones del indicador, diremos que un sistema o una configuración orbital es caótica si el indicador devuelve un valor mayor a 2 (Cincotta y Simó, 2000; Maffione et al. 2011).

Durante este trabajo recurrimos a varios gráficos típicos sin explicar reiteradamente que representan. Este es el caso de los mapas dinámicos, grillas de $m \times n$ donde en los ejes variamos dos parámetros del sistema y cada punto de la misma representa alguna salida de una integración numérica o modelo. Esto lo usaremos por ejemplo, para estudiar la caoticidad de una región orbital o la estabilidad de un sistema. En la sección de resultados notaremos rápidamente que la cantidad de variables de estos problemas es muy grande para tener una representación gráfica que contenga toda la información por lo que recurriremos a ejemplos de situaciones estudiadas.

Capítulo 4

Caso restringido con planeta en órbita circular

Como ya mencionamos anteriormente, el caso restringido del problema que estamos estudiando consiste en un objeto con masa -como un planeta- y otro objeto que pueda ser considerado sin masa, ambos en torno a una masa central. De esta forma, solamente nos interesa la dinámica de la partícula ya que el planeta no se ve afectado por el objeto sin masa. Así, dado un planeta de masa m_p ubicado en una órbita con semieje a_p y excentricidad e_p podemos estudiar las propiedades de diversas resonancias. La mayoría de los planetas del Sistema Solar tienen órbitas de muy baja excentricidad, tomando valores menores a 0.1 en la actualidad. Por lo tanto, las poblaciones de cuerpos menores en resonancias de movimientos medios con los distintos planetas se ven influenciadas por este caso cuasi-circular del problema. Por lo tanto, tomaremos la excentricidad del planeta tal que $e_p = 0$.

4.1. Propiedades de las resonancias

El problema no solo se simplifica ya que se elimina a e_p como variable, sino que hace que el valor de Ω sea irrelevante, debido a la simetría espacial de la órbita. De esta manera, dado un planeta de masa m_p en una órbita circular de semieje a_p , el problema queda reducido a 3 variables, los elementos orbitales de la partícula (e, i, ω) . Tomaremos sin pérdida de generalidad nula la inclinación del planeta así como también nulos los otros elementos orbitales angulares. Este es el único caso en el que podemos representar los resultados

completos de forma gráfica ya que considerar cualquier otra dependencia en otro de los parámetros nos obligará a tener que fijar alguno de ellos al momento de presentar los resultados visualmente.

En las siguientes subsecciones presentamos los resultados obtenidos para este tipo de planeta perturbador, caracterizando las propiedades de diferentes resonancias. A pesar de que en la realidad la mayoría de los planetas tienen una excentricidad, esta suele ser mínima por lo que podemos aproximarlos como planetas circulares, en especial cuando la excentricidad de la partícula e es grande comparada con e_p .

4.1.1. Número de centros de libración

Como vimos anteriormente, cuando un objeto está en resonancia el ángulo crítico $\sigma_{k_p:k}$ correspondiente a la resonancia $k_p:k$ debe oscilar en torno a un punto de equilibrio o centro de libración σ_0 . Para el caso de bajas excentricidades y plano, los puntos de equilibrio son relativamente regulares. Por ejemplo, todas las resonancias que no son de la forma $1:N$ tienen sus puntos de equilibrio en 0° o 180° . Un resultado interesante es que el número de σ_0 de una resonancia no es algo global, sino que depende de la configuración orbital del sistema. Particularmente, el número de puntos de equilibrio puede ir desde cero hasta un máximo de tres. Este número puede cambiar incluso en la evolución orbital de un objeto, por lo que la resonancia que el mismo “siente” puede cambiar a medida que el objeto evoluciona temporalmente y los puntos de equilibrio se mueven, aparecen y desaparecen.

Veremos en las siguientes subsecciones ejemplos para distintas resonancias y cómo las orbitas resonantes en torno a cada valor individual de σ_0 son distintas. Presentamos en la Figura 4.1 la dependencia del número de puntos de equilibrio en función de las tres variables del problema para las resonancias 1:2 y 2:3 con un planeta circular de masa $m_p = 0.001M_\odot$ ubicado en $a_p = 5.0$ au. Cabe mencionar que tanto la masa como el semieje del planeta son irrelevantes al momento de estudiar el número y el valor de los puntos de equilibrio.

El número de puntos de equilibrio puede variar notablemente en el espacio de elementos estudiado. Además, notemos la sensibilidad con el valor del argumento del perihelio. Hay zonas del plano donde el número de σ_0 varía enormemente, esto puede causar que un objeto inicialmente en un punto de equilibrio de la resonancia, no sienta el efecto de la misma ya que el mismo

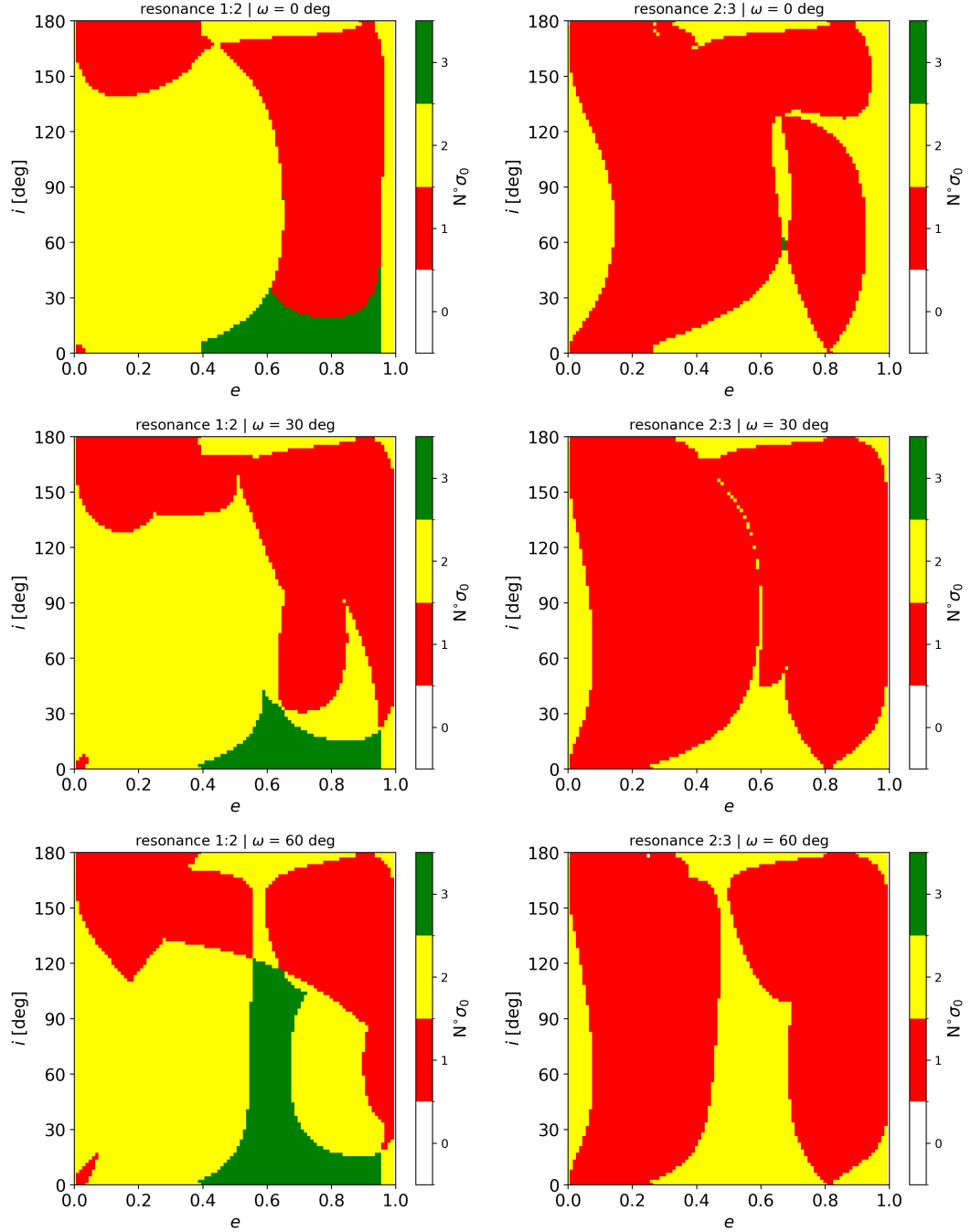


Figura 4.1: Número de puntos de equilibrio estable en el plano (e,i) para las resonancias 1:2 y 2:3 con un planeta circular para distintos valores del argumento del perihelio de la partícula.

punto puede moverse o desaparecer a medida que los elementos orbitales evolucionan. Un resultado importante es que el número de puntos de equilibrio de la resonancia siempre está entre 1 y 3. No siempre la topología de la resonancia es la misma cuando tenemos 2 puntos de equilibrio. Como mencionamos anteriormente, cuando tenemos dos puntos de equilibrio, pueden ser simétricos si σ_0 toma valores de 0° o 180° o asimétricos si se encuentran separados por menos de 180° . Como ejemplo de esto, tomemos la resonancia 2:3 con un argumento del perihelio $\omega = 0^\circ$ (panel superior derecho de la Figura 4.1). Para una inclinación de $i = 30^\circ$ la resonancia tiene, para $e = 0.05$, dos puntos de equilibrio situados en $\sigma_0 = 115^\circ$ y $\sigma_0 = 245^\circ$. Aumentando la excentricidad hasta $e = 0.2$, la resonancia tiene solo un punto de equilibrio ubicado en $\sigma_0 = 180^\circ$. Al aumentar aún más la excentricidad hasta $e = 0.7$, la resonancia tiene dos puntos de equilibrio ubicados en $\sigma_0 = 0^\circ$ y $\sigma_0 = 180^\circ$. Por último, para $e = 0.8$ la resonancia tiene solo un punto de equilibrio en $\sigma_0 = 0^\circ$. Como vemos en este ejemplo, hablar de que la resonancia es globalmente simétrica o asimétrica pierde el sentido al considerar todo el espacio (e, i) . Para ilustrar esto, mostramos en la Figura 4.2 ejemplos de Hamiltoniano con distintos valores de (e, i, ω) .

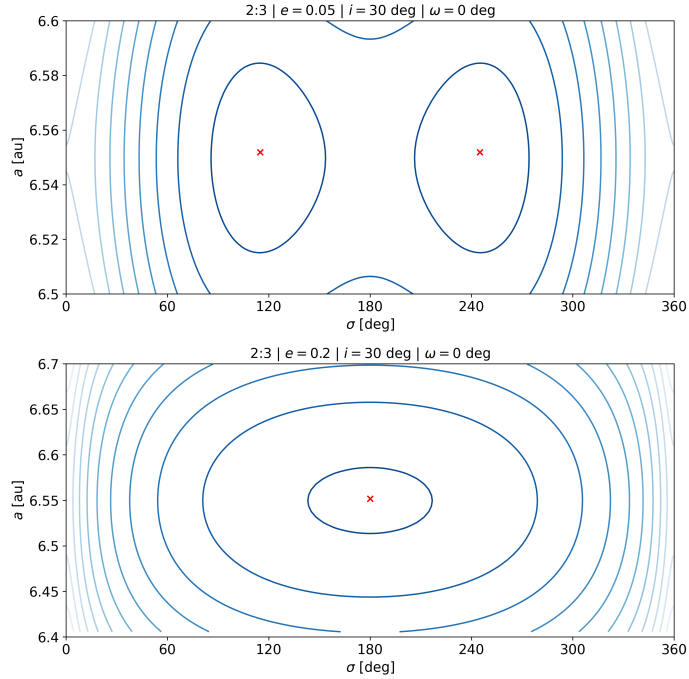


Figura 4.2: Curvas de nivel de Hamiltoniano para la resonancia 2:3 con dos valores excentricidad asumiendo un planeta en órbita circular.

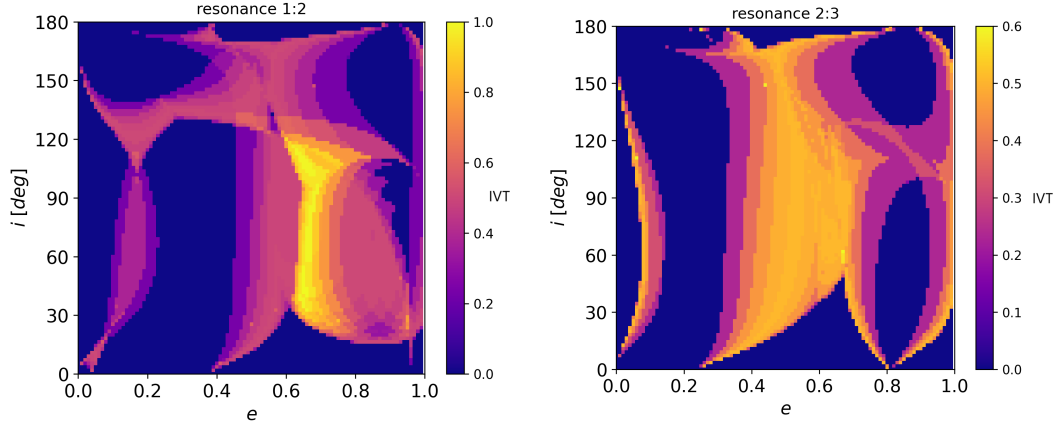


Figura 4.3: Índice de variación topológica en el plano (e, i) para las resonancias 1:2 y 2:3. Este índice fue calculado variando ω cada 10° en todo su rango ($0^\circ, 360^\circ$) y calculando la desviación estándar para cada punto del plano.

Mostraremos más adelante en la subsección 4.1.2 cómo cambia el valor de σ_0 . Algo difícil de entender de estos diagramas son las transiciones en el número de puntos de equilibrio. Para que el número de centros de libración cambie, es necesario que aparezcan o desaparezcan puntos de equilibrio. En algunas situaciones, la génesis de puntos de equilibrio asimétricos está ligada a una bifurcación de un punto de equilibrio simétrico. Otras veces, la desaparición de un punto de equilibrio estable está ligada a un choque con un punto silla. Entender en detalle la dinámica de la topología de la resonancia queda por fuera de los objetivos de este trabajo. Otro resultado para el caso de planeta circular, es que a menos de las resonancias $1:N$, las resonancias de primer orden no tienen nunca tres puntos de equilibrio. Además, para las resonancias que sí presentan tres puntos de equilibrio, es importante notar que siempre uno de ellos se encuentra en torno a $\sigma_0 = 0^\circ$ o $\sigma_0 = 180^\circ$. La sensibilidad al ω puede ser grande en algunas regiones del espacio (e, i) . Sin embargo, hay zonas en las que dicho cambio no es tan grande. Para mostrar esto, graficamos en el mismo plano, la desviación estándar del número de puntos de equilibrio variando el argumento del perihelio desde $\omega = 0^\circ$ hasta $\omega = 350^\circ$ en intervalos de 10° . Así, presentamos en la Figura 4.3 el valor de la desviación estándar del número de puntos de equilibrio al variar el argumento del perihelio. Llamaremos a este indicador índice de variación topológica (IVT) ya que un valor de cero nos indica una zona del espacio de fase en la cual la topología de la resonancia no cambia al circular ω .

Podemos diferenciar dos zonas claras. Las zonas donde la desviación estándar es nula corresponden a zonas donde la topología de la resonancia no sufre cambios a medida que ω circula. Las partículas en dichas zonas podrían ser mas estables que las que se encuentran en otras zonas sin importar que tengan su argumento del perihelio circulando. Esto no quiere decir que el valor propio de σ_0 no vaya a verse modificado, sino que simplemente el número de puntos de equilibrio se mantiene constante sugiriendo una continuidad en la topología del Hamiltoniano. Los cambios en el número de puntos de equilibrio no implica directamente que el objeto se encuentre en una orbita inestable pero podría ser más difícil mantener al objeto dentro de la resonancia. Estos cambios o transiciones entre los puntos de equilibrio implican cambios en la amplitud y en el período de las libraciones resonantes.

Además de estas zonas donde la circulación de ω no afecta a la topología de la resonancia, es posible que el argumento del perihelio se mantenga oscilando por efectos seculares como el mecanismo de von Zeipel-Lidov-Kozai (Ito y Ohtsuka, 2019). Este mecanismo causa que la inclinación y la excentricidad se intercambien de forma que se mantenga constante la componente z del momento angular de la partícula. La característica principal de este efecto es que mantiene al ω oscilando en torno a valores de equilibrio lo que implica que, aunque estemos en una zona del espacio (e, i) para el cual el IVT toma un valor distinto a cero, la resonancia puede mantener su topología sin grandes cambios al evolucionar en el tiempo el sistema. Un ejemplo clásico de esto es Plutón, que mantiene su argumento de perihelio oscilando en torno a 90° (Malhotra y Ito, 2025). Sin embargo, la amplitud de esta oscilación suele ser lo suficientemente grande para causar que el cuerpo menor sienta cambios en la topología de la resonancia. No olvidemos que también evolucionaran la excentricidad y la inclinación del objeto, moviendo en el espacio de fase a la partícula.

4.1.2. Centros de libración

Además de conocer el número de centros de libración, nos puede interesar conocer qué valor toman los mismos. Tal como vemos en la Figura 4.4, el valor de σ_0 no es fijo, sino que depende de los elementos orbitales que tenga la partícula.

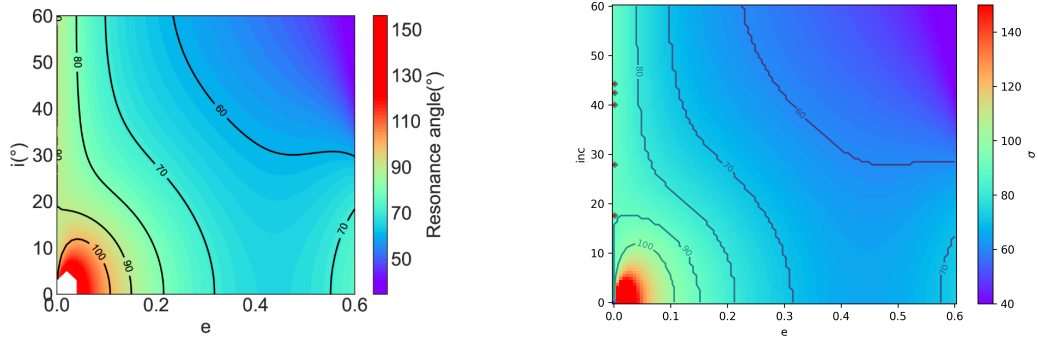


Figura 4.4: Valor del punto de equilibrio σ_0 para la resonancia 1:2 en una región del plano (e, i) . En la izquierda los resultados de un modelo analítico presentado en H. Li y Zhou (2024a) y en la derecha los resultados de este modelo.

Debemos de tener en cuenta que en los puntos donde $N_{\sigma_0} > 1$, debemos elegir uno de dichos valores para representar gráficamente. En este caso, tomando el menor de los valores en una zona del espacio (e, i) con varios puntos de equilibrio para la resonancia 1:2, presentamos en la Figura 4.4 una comparación entre los resultados de un modelo analítico presentado en H. Li y Zhou (2024b) y los resultados de este trabajo sobre la ubicación de σ_0 . Vemos que ambos modelos reproducen resultados muy similares. Cabe destacar que el modelo semi-analítico no se tiene por qué restringir a una zona del espacio de fase como las teorías analíticas, sino que podemos considerar todo el rango de valores que pueden tomar la excentricidad y la inclinación. Una forma interesante de ver esto de forma completa, es hacer una grilla de los valores que toma σ_0 . En las Figura 4.5 y 4.6, presentamos un gráfico de escalera, dividiendo las regiones del espacio (e, i) según el número de puntos de equilibrio de la resonancia y mostrando en color la ubicación del punto de equilibrio para las resonancias 1:2 y 2:3 respectivamente. En dichos gráficos, se ordenan los puntos de equilibrio de menor a mayor en las zonas del espacio de fase donde aparecen múltiples puntos de equilibrio.

Podemos notar nuevamente como algunas zonas del espacio de fase las soluciones se comportan como asimétricas y en otras se comportan como simétricas. Nuevamente, no olvidemos que este plano de la resonancia depende también del valor del argumento del perihelio. Tal como vemos en la Figura 4.5, para la resonancia 1:2, la mayoría del espacio de fase está ocupado por puntos de equilibrio asimétricos, especialmente para bajos valores de excentricidad e inclinación. Esto está en concordancia con los valores de σ_0 en torno a los cua-

Resonance 1:2 | $\omega = 0^\circ$

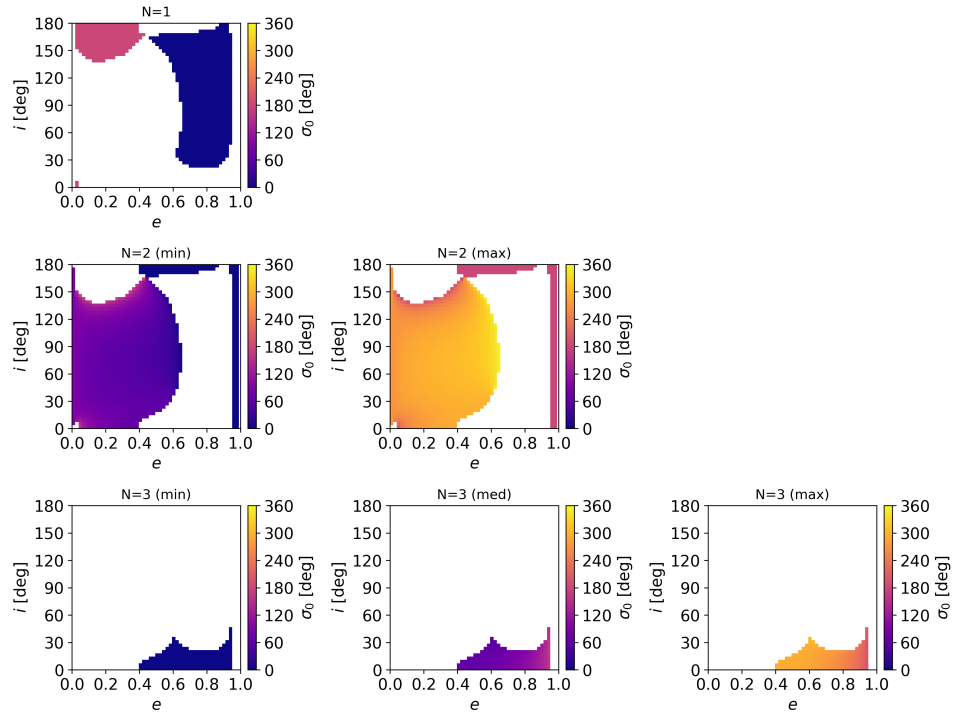


Figura 4.5: Gráfico en escalera del valor que toma σ_0 en todo el plano (e, i) para la resonancia 1:2 de una partícula con $\omega = 0$ y un planeta circular. Para contemplar el distinto número de puntos en diferentes regiones del espacio dividimos en filas las regiones con distintos números de puntos de equilibrio.

Resonance 2:3 | $\omega = 90^\circ$

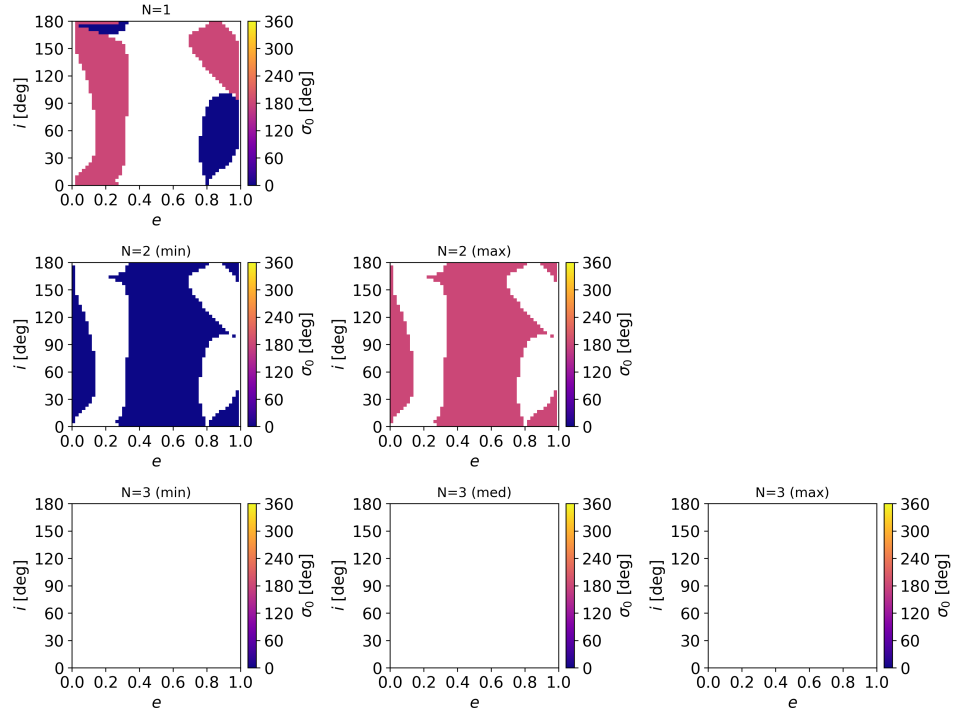


Figura 4.6: Gráfico en escalera del valor que toma σ_0 en todo el plano (e, i) para la resonancia 2:3 de una partícula con $\omega = 90$ y un planeta circular. Para contemplar el distinto número de puntos en diferentes regiones del espacio dividimos en filas las regiones con distintos números de puntos de equilibrio.

les oscilan los objetos atrapados en esta resonancia en el Sistema Solar como los Twotinos. Por lado, en la Figura 4.6, para la resonancia 2:3, vemos que la mayor parte del espacio de fase está ocupado por soluciones en $\sigma_0 = 0^\circ$ o $\sigma_0 = 180^\circ$ lo cual está en acuerdo con lo conocido en poblaciones de cuerpos menores en esta resonancia como los Plutinos. Notemos también que esta resonancia no presenta en ninguna configuración tres puntos de equilibrio.

4.1.3. Ancho de la resonancia

Determinar el ancho de una resonancia Δa es de vital importancia al momento de determinar si un objeto en encuentra en resonancia o no. Como ya vimos, el número de puntos de equilibrio en el plano (e, i) puede cambiar por lo que podemos ver cambios abruptos al momento de graficar el ancho de una resonancia en este plano. Esto sucede ya que el modelo semianalítico devuelve el ancho máximo de la resonancia, el cual puede variar rápidamente si la topología de la resonancia cambia abruptamente. El ancho de la resonancia se vuelve mas grande al aumentar la excentricidad.

Presentamos en la Figura 4.7 el ancho de la resonancia en el espacio (e, i) .

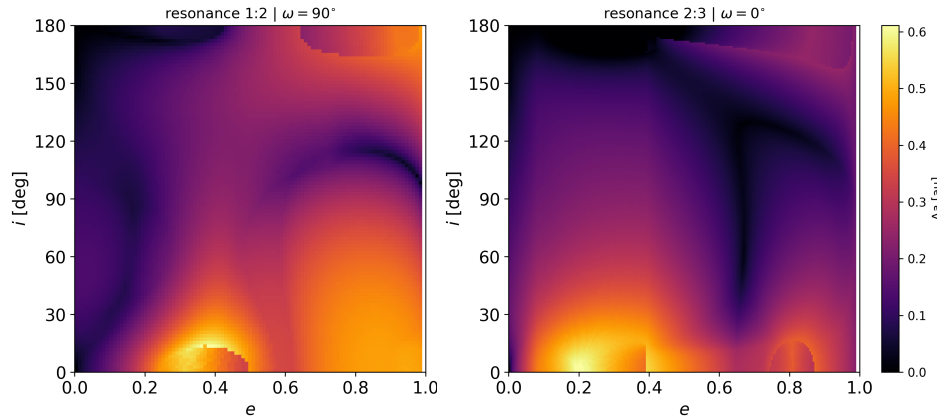


Figura 4.7: Ancho de la resonancia en el plano (e, i) para dos resonancias entre un planeta circular y una partícula. En la izquierda los resultados del modelo para la resonancia 1:2. En la derecha los resultados del modelo para la resonancia 2:3. En ambos se pueden identificar cuellos donde el ancho llega hasta valores mínimos.

Podemos identificar curvas donde la resonancia tiene ancho cero. Sin embargo, nos encontramos nuevamente con el problema de que este plano del ancho de la resonancia es función de ω . Para considerar esto, Gallardo (2020) definió la fragilidad f en un punto del plano (e, i) como

$$f = \frac{\Delta a_{max} - \Delta a_{min}}{\Delta a_{min}}$$

donde Δa_{max} y Δa_{min} son el valor máximo y mínimo del ancho de la resonancia variando ω . Además de la fragilidad definida de esa manera, podemos calcular un índice similar $\hat{f}$ que mida la desviación estándar del ancho resonante al variar ω , análogo al IVT. Presentamos en las Figuras 4.8 y 4.9, una comparación entre estas fragilidades para las resonancias 1:2 y 2:3.

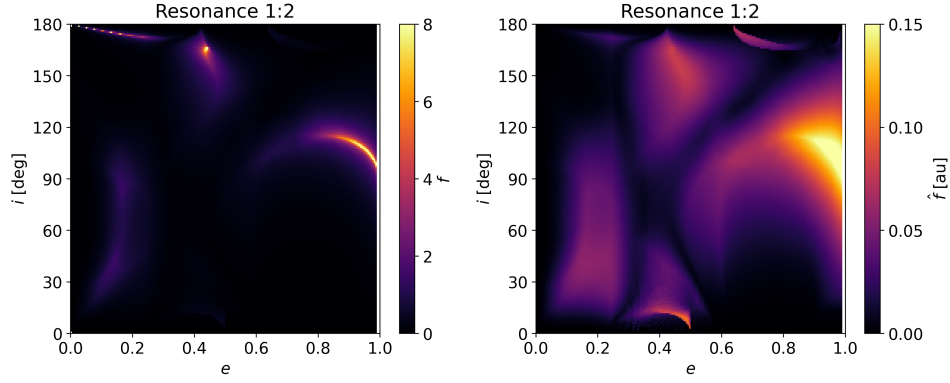


Figura 4.8: Comparación entre la fragilidad f y el índice de fragilidad $\hat{f}$ para la resonancia 1:2.

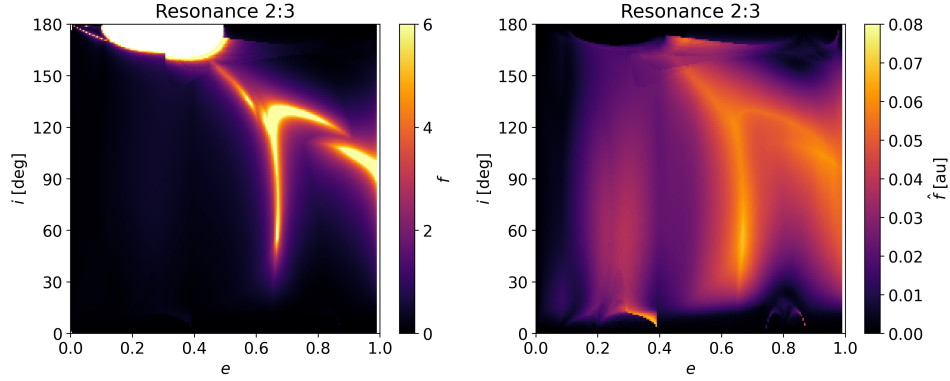


Figura 4.9: Comparación entre la fragilidad f y el índice de fragilidad $\hat{f}$ para la resonancia 2:3.

Estos indicadores permiten identificar las zonas del espacio de fases donde el ancho de la resonancia cambia más. En conjunto con los indicadores que marcan el cambio en el número de puntos de equilibrio nos permite tener una idea sobre el comportamiento de la estructura de la resonancia. Estos indicadores muestran la dependencia con el argumento del perihelio si el asteroide

permanece con valores de (e,i) constantes. Sin embargo, no debemos olvidarnos que la evolución real hará que la partícula se mueva en este plano.

4.1.4. Períodos de libración

Algo importante que debemos recordar del modelo, es que este calcula el período resonante asumiendo que la partícula se encuentra en el centro de la resonancia. Sin embargo, veremos que los objetos reales que estudiaremos oscilan con un período de libración ligeramente distinto. Esto se debe a que las partículas reales no necesariamente están en el centro exacto de la resonancia debido a las perturbaciones planetarias en el caso de sistemas reales.

En la Tabla 4.1 presentamos distintos objetos resonantes reales en diversas resonancias, así como los períodos calculados con el modelo semianalítico como los períodos obtenidos mediante un análisis de Fourier de su ángulo crítico en una integración numérica. Los objetos con mayor diferencia entre el período del modelo y el período numérico corresponden a aquellos más alejados del centro de la resonancia. Así como los valores de σ_0 pueden ser múltiples para un punto en el plano (e,i) , lo mismo ocurre con el P_{lib} .

Objeto	$k_p:k$	Pla.	e	i [°]	$P_{lib\ teo}$ [yr]	$P_{lib\ num}$ [yr]	$\Delta\sigma$ [°]
624 Hektor	1:1	Júp	0.02	18.2	153	155	39
153 Hilda	3:2	Júp	0.14	7.8	290	271	43
2002 WC_{19}	1:2	Nep	0.40	12.4	19263	21062	62
385571 Otrera	1:1	Nep	0.033	1.4	8838	8892	22
2002 PD ₄₃	3:1	Júp	0.96	25.9	313	320	94
1993 SB	2:3	Nep	0.33	1.9	21602	20522	120
2003 UL ₃	7:2	Júp	0.79	14.4	255	267	226
11055 Honduras	1:2	Mar	0.23	11.4	3070	3201	70
1997 AQ ₁₈	1:2	Ven	0.47	17.4	235	258	75
2005 NP ₈₂	5:6	Júp	0.48	130.5	407	485	155
2000 DG ₈	1:3	Júp	0.79	129.5	663	715	81
2015 BZ ₅₀₉	1:1	Júp	0.38	163.1	787	667	265

Tabla 4.1: Comparación del período de libración para una lista de diferentes cuerpos menores del Sistema Solar en resonancia con diversos valores de excentricidad e inclinación. El valor teórico fue calculado con el modelo y el numérico con integrales incluyendo todos los planetas del Sistema Solar.

4.2. Aplicación a objetos conocidos

Podemos aplicar los resultados de las subsecciones anteriores a casos particulares para entender el funcionamiento de algunas poblaciones de cuerpos menores en el Sistema Solar.

4.2.1. Coorbitales

Los resultados presentados en esta subsección fueron publicados en primera instancia en Pan y Gallardo (2025). Basándonos en la forma que toma el ángulo crítico σ , comencemos estudiando la resonancia que parece mas simple en un principio. Estudiar en detalle la resonancia 1:1 es de vital importancia para entender el movimiento coorbital. Decimos que un objeto es coorbital a otro si comparten el mismo valor de semieje mayor a . Para esta resonancia, el ángulo crítico toma la forma $\sigma = \lambda - \lambda_p$.

Históricamente, se conoce que la resonancia 1:1 tiene puntos de equilibrio asimétricos donde σ_0 toma valores de 60° y 300° . Sin embargo, esto es válido solamente para objetos de baja excentricidad y baja inclinación. El estudio de coorbitales de alta excentricidad y/o inclinación nace de estudios teóricos (Nesvorný et al. 2002). Recientemente, el descubrimiento de varios objetos de muy alta excentricidad en resonancia coorbital con Venus o objetos de muy alta inclinación en resonancia coorbital motivaron a trabajar en más detalle con esta resonancia. Un ejemplo es Ka'epaoka'awela, el cual es coorbital resonante de Júpiter y tiene una inclinación $i \sim 163^\circ$.

Los objetos en resonancia pueden tener distintos tipos de orbitas que podemos clasificar según su trayectoria en el espacio de fase del Hamiltoniano $\mathcal{H}(\sigma, a)$. Usaremos este caso como ejemplo para estudiar los tipos de órbita en resonancia. Esto será análogo en otras resonancias. Particularmente, para la 1:1 se suelen clasificar las orbitas en 3 tipos: Troyanos (o Renacuajos), Cuasi-satélites y Herraduras. En las órbitas renacuajo, los ángulos críticos oscilan en torno a las soluciones asimétricas, mientras que en el caso de Cuasi-satélites oscila en torno a 0° . El caso de la Herradura es particular ya que el objeto no oscila en torno a un solo punto de equilibrio sino que sigue una trayectoria que envuelve a mas de un punto de equilibrio.

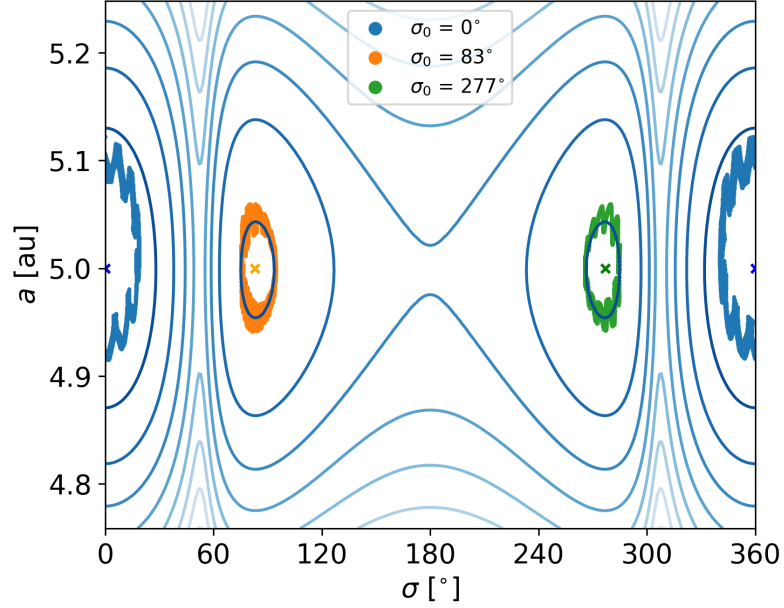


Figura 4.10: Trayectorias en el espacio de fase (σ, a) de los tipos de órbitas coorbitales sobrepuestas sobre las curvas de nivel del Hamiltoniano. En azul se encuentra la órbita tipo cuasisatélite, mientras que en naranja y verde se encuentran las órbitas tipo renacuajo.

Mostramos en la Figura 4.10 tres tipos de órbita que puede tener una partícula en resonancia 1:1. Estas órbitas corresponden a una partícula en una órbita de elementos orbitales osculantes iniciales $a = 5.05$ au, $e = 0.5$, $i = 5^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$ y M correspondiente a cada órbita en resonancia con un planeta de $m_p = 0.001 M_\odot$ en una órbita de $a_p = 5.0$ au y $e_p = 0.05$. Para obtener la anomalía media inicial para cada órbita es necesario utilizar la expresión del ángulo crítico, los valores de los elementos orbitales angulares y el valor de σ_0 en el cual buscamos colocar la partícula en resonancia.

La población de coorbitales en el Sistema Solar mas estudiada son los Troyanos de Júpiter. Se cree que muchos de estos objetos podrían ser primordiales. Es decir, fueron capturados en esas órbitas en épocas tempranas de la formación de los planetas. Además, algunos trabajos han mostrado que coorbitales de Marte y Neptuno también podrían ser primordiales. Dadas las bajas excentricidades de los planetas, aplicaremos la teoría semianalítica para identificar y clasificar los objetos coorbitales en todos los planetas del Sistema Solar exceptuando Júpiter debido al gran número de coorbitales conocidos. Para ello, calcularemos el ancho máximo de cada resonancia explorando todo el espacio de parámetros (e, i, ω, Ω) que pueden tener posibles objetos en resonancia con

cada planeta. Luego, filtraremos todo el catálogo de cuerpos menores de NASA Horizons y nos quedaremos solamente con los objetos cuyo semieje está dentro de dos anchos máximos de cada resonancia.

Presentamos en la Tabla 4.2 el ancho máximo de las resonancias 1:1 con los planetas así como el número de candidatos coorbitales dentro de dos anchos máximos de la resonancia. Esto nos permitirá obtener todos los objetos resonantes minimizando los falsos positivos. Todos los falsos positivos serán descartados luego con integraciones numéricas. Los períodos de libración solamente están como una referencia y fueron calculados para cada planeta (considerando su excentricidad real) en resonancia con una partícula ficticia de elementos orbitales $e = 0.2$, $i = 15^\circ$, $\omega = 60^\circ$, $\Omega = 0^\circ$.

Planeta	a_0 [au]	Δa_{max} [au]	P_{lib} QS [yr]	P_{lib} T [yr]	N° cand
Venus	0.723	0.016	75	150	88
Tierra	1.000	0.023	105	220	657
Marte	1.524	0.015	517	1258	687
Júpiter	5.202	0.854	64	147	14484
Saturno	9.551	1.099	286	669	114
Urano	19.176	1.235	2115	2870	87
Neptuno	30.099	2.000	4382	8772	107

Tabla 4.2: Semieje nominal y ancho máximo para la resonancia 1:1 con cada planeta, período de libración para orbita Cuasi-satélite y orbita Troyano para un asteroide de elementos orbitales $e = 0.2$, $i = 15^\circ$, $\omega = 60^\circ$, $\Omega = 0^\circ$. La última columna muestra el número de objetos en el catálogo que tienen semiejes dentro de dos anchos de la resonancia. Los datos fueron obtenidos de la base de datos de NASA Horizons en Julio de 2024.

Muchos de los candidatos, aún no tienen orbitas bien determinadas por lo que la órbita nominal puede no ser representativa de la evolución orbital real de dicho objeto. Luego, integraremos numéricamente las ecuaciones exactas de movimiento para cada objeto. La forma mas simple de verificar si el objeto está en resonancia es calcular el ángulo crítico σ y verificar si oscila en torno al punto de equilibrio con el período de libración. Sin embargo, este criterio puede dejar fuera algunos objetos que si bien no son estrictamente resonantes, veremos que su evolución orbital está influenciado por la resonancia. Como ya vimos, el movimiento de una partícula en resonancia está restringido a trayectorias de $\mathcal{H}$ constante. Así, la mejor opción para verificar si un objeto está en resonancia seguir la trayectoria del objeto en el espacio de fases (a, σ) .

Para verificar el comportamiento resonante de cada candidato, integramos

su órbita por algunos períodos de libración y graficamos la evolución temporal de σ , comparando con el Hamiltoniano. Esto nos permite descartar los objetos no resonantes y clasificar cada objeto en las distintas órbitas posibles para esta resonancia. Solamente consideramos como objetos resonantes aquellos que se mantienen en resonancia por lo menos un período de libración. Esto no quiere decir que los mismos seguirán en dicha órbita por períodos largos de tiempo ya que las perturbaciones de los otros planetas, así como la propia evolución orbital lo puede llevar a salir de la resonancia. Por eso, el catálogo de objetos coorbitales que construimos es instantáneo. Para analizar la evolución resonante a escalas mayores de tiempo deberíamos considerar otros efectos como resonancias secundarias, resonancias seculares y fuerzas no gravitacionales que no fueron tomadas en cuenta en este trabajo. Todas las integraciones numéricas se hicieron con el integrador REBOUND ya que maneja eficientemente encuentros cercanos. Se incluyeron en la simulación todos los planetas del Sistema Solar. Respecto a la calidad de las integraciones, es importante mencionar que todas mantuvieron un error fraccional en la energía menor a 10^{-14} .

Con este procedimiento, logramos construir un catálogo de 173 objetos en resonancia 1:1 con todos los planetas del Sistema Solar con la excepción de Mercurio, para el cual no se conocen coorbitales. Recordemos que este número no incluye los miles de coorbitales conocidos de Júpiter, los cuales fueron excluidos de este trabajo. Presentamos en la Figura 4.11, la distribución de estos objetos en el espacio (e, i) . Esta figura fue presentada por primera vez en Pan y Gallardo (2025). Incluimos en un Anexo, una lista con todos los objetos incluyendo su clasificación orbital.

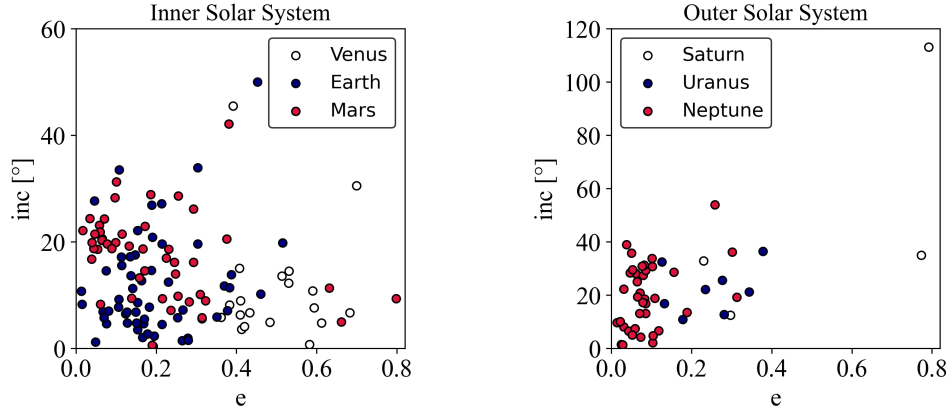


Figura 4.11: Catálogo a Enero 2025 de coorbitales en el Sistema Solar en el plano (e, i) . Presentamos en diferentes colores los diferentes planetas. Fuente: Pan y Gallardo (2025).

De estas figuras y de la lista de objetos se desprenden varios resultados interesantes. Podemos notar que el catálogo tiene un fuerte sesgo observacional. Por ejemplo, los coorbitales conocidos de Venus tienen alta excentricidad, esto es algo necesario para que puedan ser observados. La mayoría de estos objetos se descubren cerca de su afelio, cuando están a distancias al Sol mayores que la Tierra. También podemos notar que hay una clara concentración de coorbitales de Marte de baja excentricidad cerca de $i \sim 20^\circ$. Esta concentración ha sido estudiada y se ha propuesto que es una familia colisional. Hemos confirmado que Neptuno tiene la segunda población mas grande de Troyanos, con 34 identificados. Además, Marte y la Tierra también tienen un numero grande de objetos coorbitales, con 48 y 56 respectivamente. Algunas orbitas permanecen sin coorbitales conocidos como Troyanos en el punto L5 de la Tierra y Urano.

4.2.2. Objetos Transneptunianos

Como ya mencionamos anteriormente, el cinturón de cuerpos menores ubicado más allá de la órbita de Neptuno, es una de las poblaciones mayor afectadas por resonancias de movimientos medios. Puede ser de interés en el marco de este trabajo aplicar la teoría semianalítica para identificar objetos en estas resonancias, con especial interés a los objetos mas inclinados y excéntricos. Así, podemos identificar los objetos que se encuentran dentro de un ancho de la resonancia, tanto para el plano (a, e) como para el plano (a, i) . Como ya discutimos anteriormente, no es suficiente con que un objeto tenga el semieje

$k_p:k$	N° reso	$k_p:k$	N° reso
1:2	119	4:7	41
1:3	14	4:9	4
1:4	5	5:7	1
1:5	5	5:8	5
1:6	2	5:9	1
2:3	504	6:7	3
2:5	47	6:11	6
2:7	8	7:8	2
3:4	46	7:9	5
3:5	47	7:10	1
3:7	9	7:12	4
3:8	5	7:13	1
4:5	16	8:15	1

Tabla 4.3: Numero de objetos resonantes confirmados en este trabajo en resonancias externas a Neptuno.

correcto para que esté en resonancia, sin oque sus elementos orbitales angulares deben ser tales que el ángulo crítico correspondiente a la resonancia esté oscilando en un punto de equilibrio. Los objetos marcados en color naranja en la Figura 4.12 deben ser integrados numéricamente para verificar si están o no en resonancia con Neptuno. Este procedimiento nos permite obtener una lista de objetos en cada resonancia. Presentamos los resultado en la tabla 4.3.

Las resonancias con mayor número de objetos son la 1:2 ($a \sim 47.8$ au) y la 2:3 ($a \sim 39.5$ au) con Neptuno. El número de objetos capturados en resonancia no parece depender explícitamente del área de la resonancia. En este caso, en el plano (a, e) la resonancia 1:2 tiene un área de $A_{reso} \sim 0.85$ au mientras que la resonancia 2:3 tiene un área de $A_{reso} = 0.53$ au. Estas áreas se estimaron con el ancho para cada valor de excentricidad. Como ejemplos de evoluciones excéntricas e inclinadas en resonancias en la región transneptuniana, presentamos en la Figura 4.13 la evolución orbital de 2012 HH₂ y 2014 GM₅₄. Estos objetos se encuentran en las resonancias 4:5 y 2:3 con Neptuno respectivamente. El ángulo crítico de ambos evoluciona cerca de $\sigma_0 = 180^\circ$. Solamente los objetos en resonancias de la forma 1: N tienen su ángulo crítico oscilando en torno a puntos de equilibrio asimétricos. El resto de los objetos presentados en la Tabla 4.3 oscilan en torno a $\sigma_0 = 180^\circ$ con alguna excepción cerca de $\sigma_0 = 0^\circ$. Estos objetos muestran que a pesar de su gran excentricidad e inclinación pueden mantenerse dentro de la resonancia.

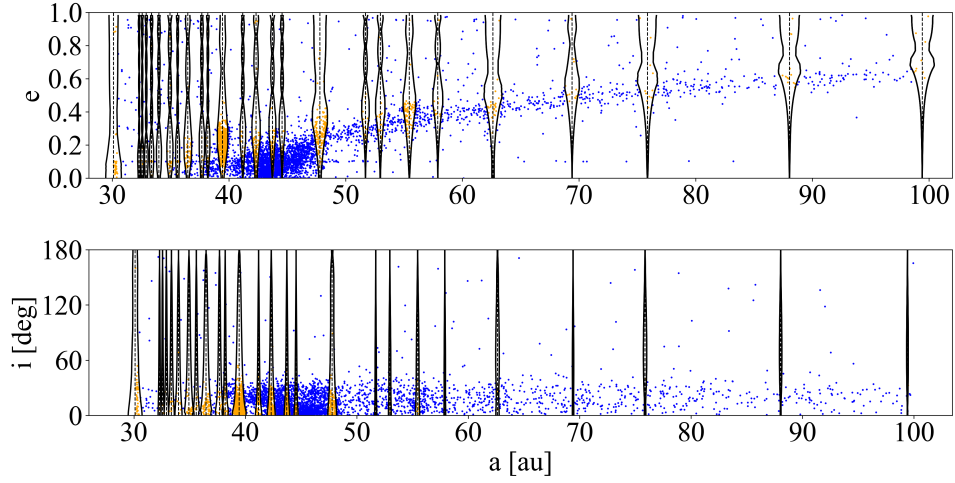


Figura 4.12: Estructura de las resonancias en el cinturón de objetos transneptunianos en los planos (a,e) y (a,i) superpuesto con el catálogo conocido de objetos menores en dicha región. En color naranja se representan todos los objetos dentro de la estructura resonante, potenciales candidatos a ser objetos en libración. Para el primer plano se utilizó la inclinación media y para el segundo la excentricidad media de la población.

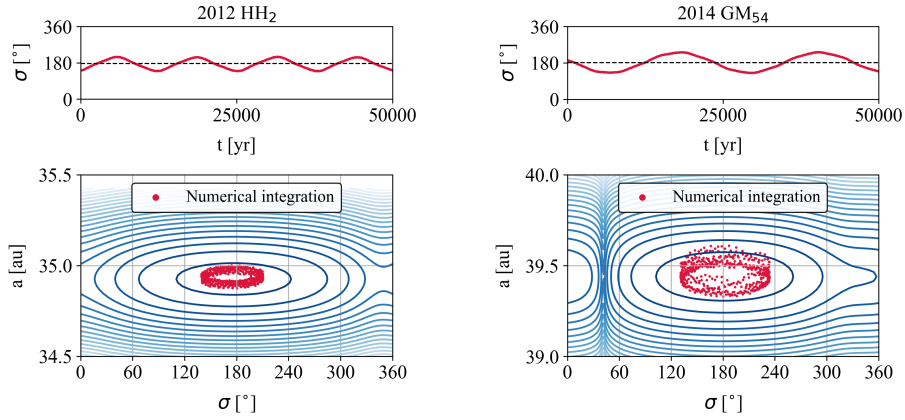


Figura 4.13: Evolución temporal numérica en coordenadas baricéntricas de objetos transneptunianos mostrando el ángulo crítico (arriba) y la misma integración superpuesta con las curvas de nivel del Hamiltoniano. Podemos ver que el ángulo resonante libra alrededor del valor predicho por la teoría. A la izquierda para el Transneptuniano 2012 HH₂ ($e \sim 0.16$, $i \sim 29^\circ$) en resonancia 4:5 y a la derecha para el Transneptuniano 2014 GM₅₄ ($e \sim 0.39$, $i \sim 54^\circ$) en resonancia 2:3.

4.2.3. Objetos de alta inclinación

Algunos trabajos han estudiado objetos resonantes en órbitas de alta inclinación, incluso en órbitas polares o retrógradas (M. Li et al. 2019a). Un ejemplo que ya mencionamos en este trabajo es el caso de Ka'epaoka'awela, un objeto resonante con Júpiter con una inclinación $i \sim 163^\circ$. (Wiegert et al. 2017). Tomemos este objeto como ejemplo de que podemos aplicar el modelo semianalítico a órbitas de cualquier inclinación o excentricidad.

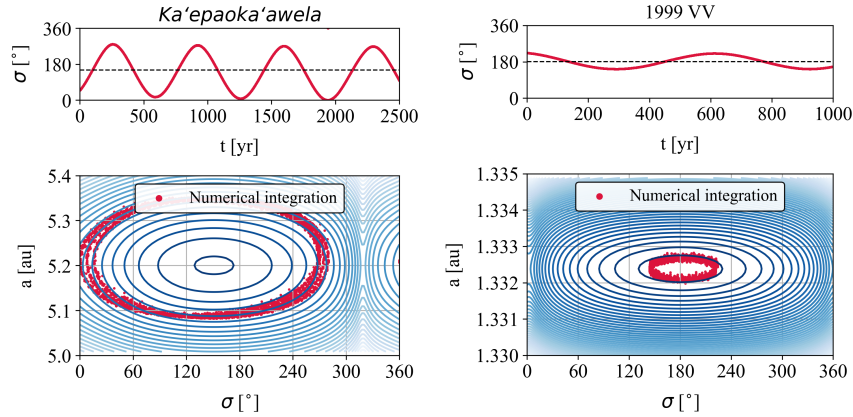


Figura 4.14: Evolución temporal numérica de objetos con alta inclinación mostrando el ángulo crítico (arriba) y la misma integración superpuesta con las curvas de nivel del Hamiltoniano (abajo). Podemos ver que el ángulo resonante libra alrededor del valor predicho por la teoría. A la izquierda para el objeto Ka'epaoka'awela ($e \sim 0.38$, $i \sim 163^\circ$) y a la derecha para el objeto 1999 VV ($e \sim 0.42$, $i \sim 58^\circ$).

En la Figura 4.14 mostramos en rojo la solución numérica de las ecuaciones exactas de movimiento incluyendo las perturbaciones de todos los planetas. Superponemos la trayectoria sobre las curvas de nivel del Hamiltoniano calculadas con el modelo. De acuerdo al modelo, el período de libración para esta configuración resonante es 787 años. Sin embargo, en la integración numérica la partícula libra con un período de 685 años. Esta discrepancia se debe a que el objeto no se encuentra en el centro de la resonancia, lo que resulta en libraciones de mayor amplitud que tienen un período menor. A pesar de esto, el Hamiltoniano reproduce con bastante similitud la evolución del objeto a pesar de las perturbaciones de los otros planetas.

Podemos dar un panorama general de los objetos resonantes de alta inclinación en el Sistema Solar y aplicar el modelo semianalítico a dichos objetos. En M. Li et al. (2019b) podemos encontrar una lista de objetos en resonancias de movimientos medios con órbitas retrógradas. Existen muchos objetos

resonantes de alta inclinación, mostramos como en la Figura 4.14 la evolución orbital de 1999 VV, el cual se encuentra en resonancia 2:5 con Venus.

Debemos mencionar nuevamente algo clave sobre el modelo utilizado en este trabajo. Si bien podemos estudiar la evolución temporal de objetos en resonancia, los resultados son válidos mientras que los elementos orbitales (e, i, ω, Ω) se mantengan relativamente constantes. Cuando tenemos la evolución orbital resonante de objetos muy inclinados la topología de la resonancia puede cambiar enormemente, causando que la partícula salte entre puntos de equilibrio. Para ejemplificar esto, mostramos en la Figura 4.15 la evolución temporal de una partícula en resonancia 1:1 en una órbita polar con un planeta tipo Júpiter.

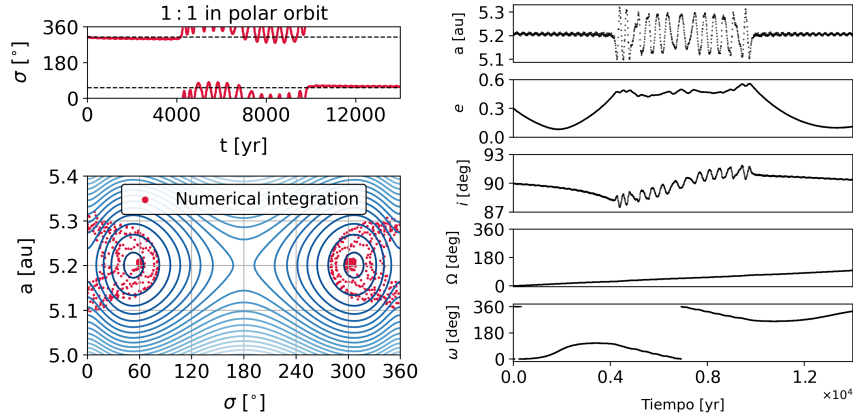


Figura 4.15: En la izquierda la evolución temporal numérica de una partícula en resonancia con una órbita polar, mostrando el ángulo crítico (arriba) y la misma integración superpuesta con las curvas de nivel del Hamiltoniano (abajo). Podemos ver que el ángulo resonante libra alrededor del valor predicho por la teoría aunque sufre cambios de centro del libración. En la derecha la evolución de los elementos orbitales de la partícula en función del tiempo de la integración.

Podemos ver que inicialmente, la partícula comienza en un punto de equilibrio asimétrico hasta que los elementos orbitales cambian de tal manera que la forma de la resonancia cambia y la partícula comienza a oscilar en un punto de equilibrio en torno a $\sigma_0 = 0^\circ$. Mas adelante en la integración, la partícula cae en el otro punto de equilibrio asimétrico, donde se mantiene por varios miles de años. Estas transiciones entre puntos de equilibrio son comunes en este tipo de resonancias de alta excentricidad e inclinación. Nuevamente, con el modelo nos podemos limitar a seguir la evolución del sistema, sin poder predictivo.

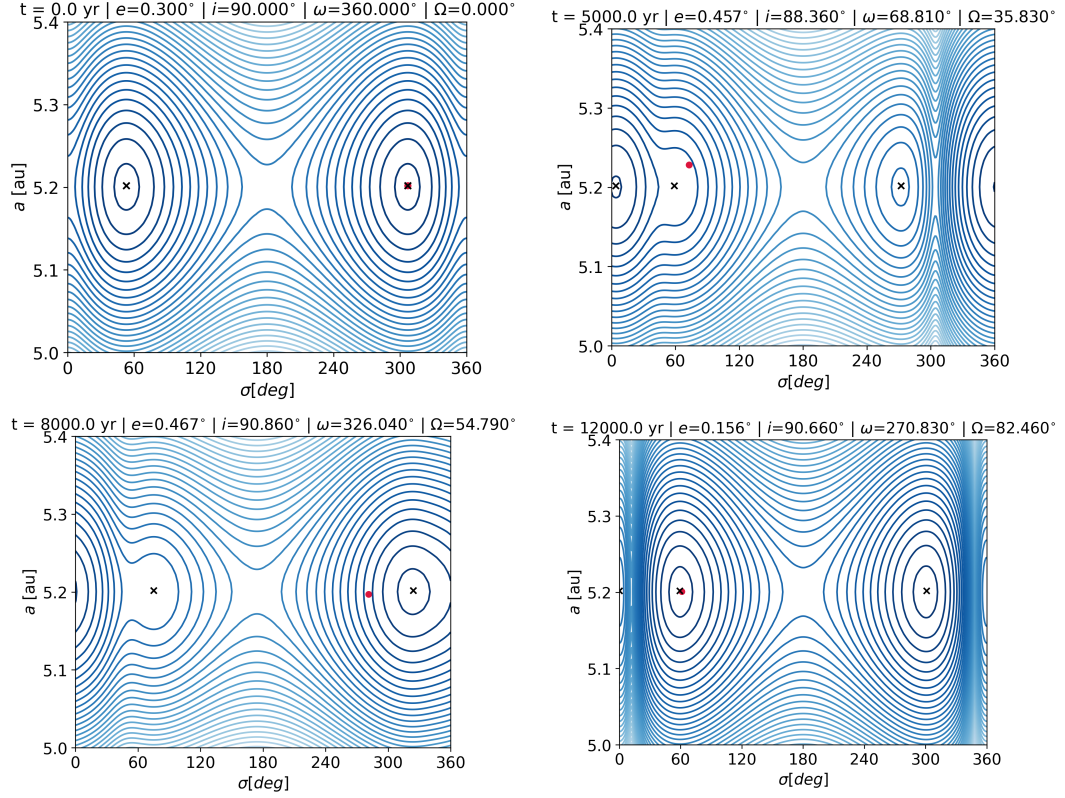


Figura 4.16: Espacios de fase del Hamiltoniano para la evolución resonante de una partícula en resonancia con una órbita polar. Distintos cuadros representan distintos instantes de tiempo en la evolución de la integración. Notamos que la topología de la resonancia cambia así como el centro de libración de la partícula.

Una manera de clarificar esta evolución es observando la trayectoria de la partícula en el espacio de fases. Presentamos en la Figura 4.16 cuatro cuadros de la evolución orbital de la partícula. Observamos que a medida que los elementos orbitales de la partícula evolucionan, la topología de la resonancia también cambia. Los puntos de equilibrio se pueden mover, aparecer o desaparecer.

4.2.4. Objetos de alta excentricidad

Como mostramos en la sección 2.2.1 una de los efectos mas conocidos y estudiados de las resonancias en la arquitectura del Sistema Solar aparece en el Cinturón de Asteroides. En esta sección, nos proponemos estudiar la estructura resonante de esta población aplicando la teoría semianalítica para estudiar objetos en resonancias de alta excentricidad con el fin de comprobar si las predicciones de la teoría se ajustan a las orbitas de dichos objetos reales.

En la Figura 4.17 presentamos el mismo histograma donde se presentaron los huecos de Kirkwood pero incluyendo solamente objetos con excentricidad mayor o igual a 0.6. Podemos ver que en los semiejes donde aparecían los huecos, ahora aparecen concentraciones. Esto es un indicio de los mecanismos dinámicos que aumentan la excentricidad de los objetos dentro de las resonancias. Al crecer la excentricidad, aumenta la probabilidad de colisión con los planetas internos e incluso con el Sol, generando Sungrazers. Seleccionamos las resonancias 3:1, 4:1, 5:2 y 7:3 para estudiar en detalle. Notemos que son todas resonancias internas a Júpiter. Calculando el ancho de la resonancia para un objeto de alta excentricidad, filtramos el catálogo de cuerpos menores tal que los objetos estuvieran dentro de la resonancia, tuvieran una órbita bien determinada ($CC = 0$) y $e > 0.6$ para las resonancias 5:2, 3:1 y 4:1 y $e > 0.5$ para la resonancia 7:3. Luego, integrando cada objeto individualmente verificamos cuántos objetos de alta excentricidad hay en cada resonancia.

Presentamos en la Tabla 4.4 el número de objetos de alta excentricidad en las resonancias mencionadas anteriormente con Júpiter. Además, presentamos en la Figura 4.19 dos ejemplos de estos objetos de excentricidad extrema.

$k_p:k$	a_0	N° reso
3:1	2.50036	52
4:1	2.06400	53
5:2	2.82351	69
7:3	2.95641	40

Tabla 4.4: Numero de objetos resonantes confirmados de excentricidad $e > 0.6$ para las resonancias 3:1, 4:1, y 5:2, y excentricidad $e > 0.5$ para la resonancia 7:3.

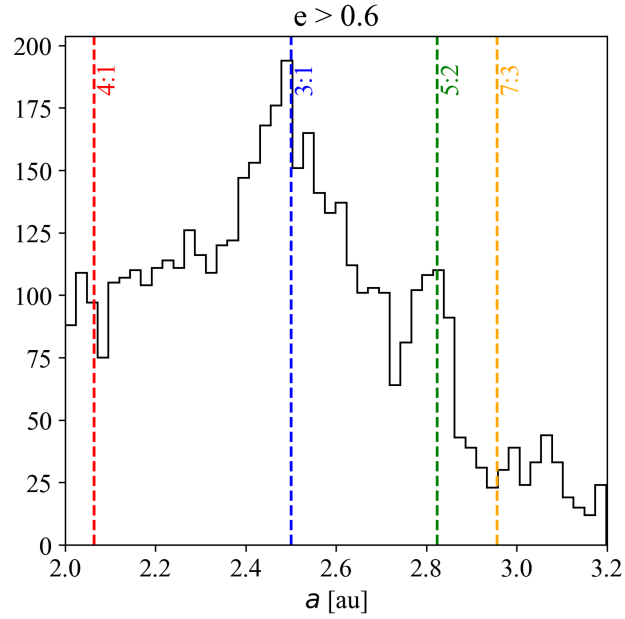


Figura 4.17: Histograma de semiejes de todos los cuerpos menores con semiejes 2.0 au $< a < 3.2$ au y excentricidades $e > 0.6$.

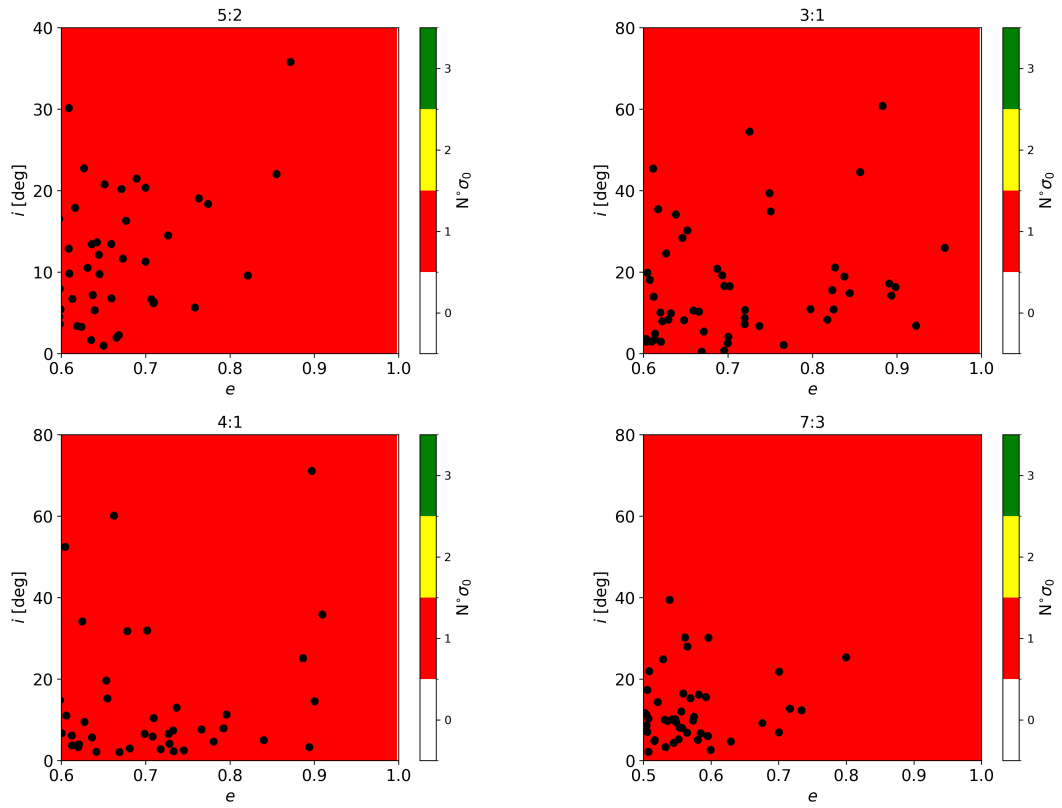


Figura 4.18: Número de centros de libración en el plano (e, i) para alta excentricidad para algunas resonancias internas con Júpiter. Sobrepuesto como puntos negros se encuentran objetos confirmados en dichas resonancias.

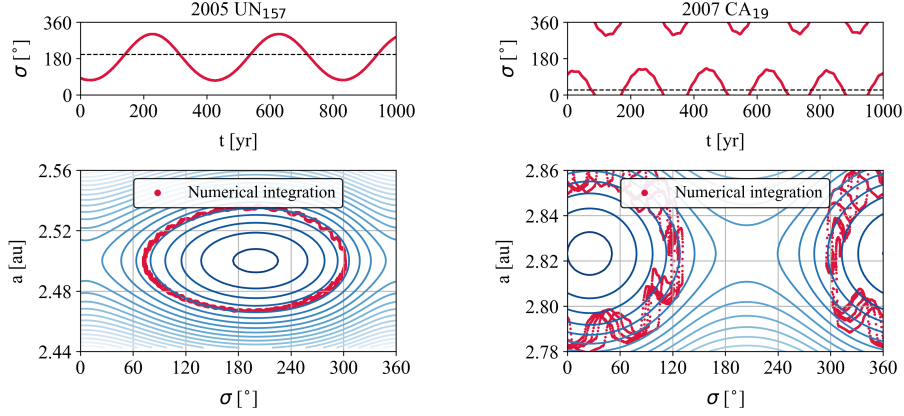


Figura 4.19: Evolución temporal numérica de objetos con alta excentricidad mostrando el ángulo crítico (arriba) y la misma integración superpuesta con las curvas de nivel del Hamiltoniano (abajo). Podemos ver que el ángulo resonante libra alrededor del valor predicho por la teoría. A la izquierda para el objeto 2005 UN₁₅₇ ($e \sim 0.86$, $i \sim 44^\circ$) en la resonancia 3:1 con Júpiter y a la derecha para el objeto 2007 CA₁₉ ($e \sim 0.59$, $i \sim 4^\circ$) en la resonancia 5:2 con Júpiter.

Por último, estudiamos en el plano (e, i) el comportamiento del número de puntos de equilibrio para estas resonancias en altos valores de excentricidad. Presentamos estos resultados en la Figura 4.18 donde vemos que todas estas resonancias tienen un solo punto de equilibrio para alta excentricidad. Esto muestra que muchos de los objetos que caen en las resonancias pueden evolucionar dentro de ella hasta excentricidades extremas.

Tal como vemos en la Figura 4.19, cada resonancia tienen distintos puntos de equilibrio para estos altos valores de excentricidad. Particularmente, para las resonancias 3:1 y la 7:3 σ_0 oscila cerca de $\sigma_0 = 180^\circ$, mientras que para las resonancias 4:1 y la 5:2 cerca de $\sigma_0 = 0^\circ$. Las líneas punteadas en la Figura 4.19 representan el valor de σ_0 para las condiciones iniciales de la integración, las cuales marcan un $\sigma_0 = 200^\circ$ con un período de libración de 381 años para el objeto 2005 UN₁₅₇ en la resonancia 3:1 y un $\sigma_0 = 24^\circ$ con un período de libración de 249 años para el 2005 UN₁₅₇ en la resonancia 5:2.

4.2.4.1. 2024 YR₄

Como ya discutimos anteriormente, la evolución resonante dentro de una resonancia de movimientos medios puede causar que la excentricidad de las partículas crezca enormemente. De esta forma, Júpiter envía objetos hacia el Sistema Solar interior, los cuales tienen una probabilidad no nula de colisión con la Tierra. Un ejemplo reciente es el descubrimiento del aclamado asteroide

2024 YR₄, que tendrá un encuentro cercano a solo 10 mil kilómetros de la Luna en diciembre de 2032.

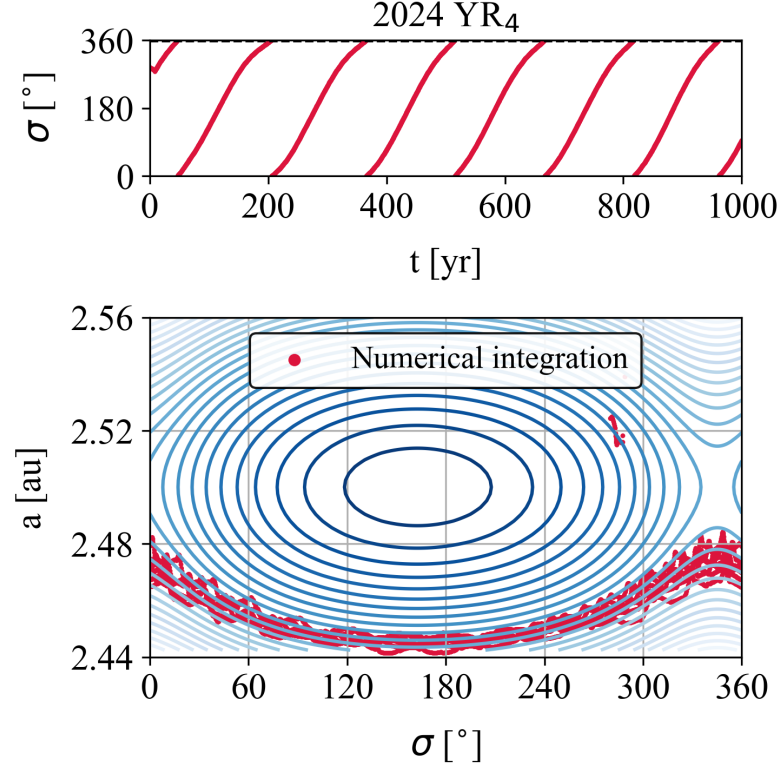


Figura 4.20: Evolución temporal numérica del asteroide 2024 YR₄ ($e \sim 0.66$, $i \sim 3^\circ$) mostrando el ángulo crítico (arriba) y la misma integración superpuesta con las curvas de nivel del Hamiltoniano (abajo).

Mostramos la evolución resonante de este objeto en la Figura 4.20, donde vemos que se encuentra muy cerca de la resonancia 3:1 con Júpiter, en sticking. Encontramos este mismo tipo de comportamiento cuasi resonante en los co-orbitales discutidos en la sección 4.2.1. Seguramente este objeto fue removido de la resonancia en algún encuentro cercano con los planetas internos con los cuales cruza su órbita (Smirnov, 2025).

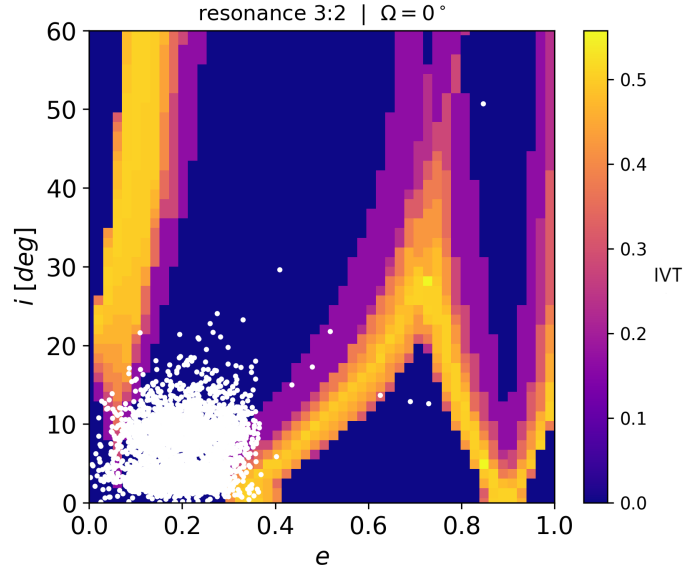


Figura 4.21: Índice de variación topológica para la resonancia 3:2 con Júpiter en el plano (e, i) con la superposición en color blanco de los objetos con semiejes entre $3.942 \text{ au} < a < 3.996 \text{ au}$ y órbita bien determinada ($CC = 0$).

4.2.5. Hildas

Al contrario de los ya mencionados huecos de Kirkwood, la resonancia 3:2 de Júpiter alberga una población de cuerpos menores resonantes estable. En la Figura 4.21, presentamos la distribución en el plano (e, i) de los objetos cerca del valor nominal de esta resonancia con el índice de variación topológica para esta resonancia. Notemos que la mayoría de objetos se encuentran en la zona de baja excentricidad y baja inclinación. Esto tiene su contrapartida con el ángulo crítico con el cual evolucionan estos objetos. Casi todos se encuentran en un punto de equilibrio cerca de $\sigma_0 = 0^\circ$. Presentamos en la Figura 4.22 (izquierda) la evolución del objeto 2007 TP₃₈₃, el cual presenta una evolución típica para estos objetos, con su ángulo crítico oscilando en torno a cero.

Sin embargo, no todos los objetos están en este punto de equilibrio. El objeto mas excéntrico e inclinado de los mostrados es 2017 AQ₂₀, el cuál tiene una excentricidad de $e \sim 0.85$ y una inclinación de $i \sim 50.7^\circ$. Según el modelo, con esos elementos orbitales, esta resonancia tiene un punto de equilibrio ubicado en $\sigma_0 = 183^\circ$ y un período de libración de 427 años. Podemos ver que la integración numérica mostrada en la Figura 4.22 (derecha) se ajusta al comportamiento del modelo.

Al integrar por más tiempo podemos notar una característica clave de la

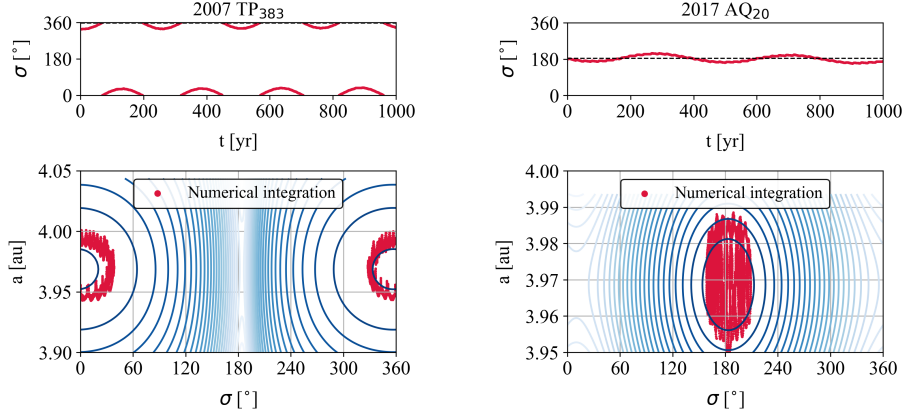


Figura 4.22: Evolución temporal numérica de Hildas, mostrando el ángulo crítico (arriba) y la misma integración superpuesta con las curvas de nivel del Hamiltoniano (abajo). Podemos ver que el ángulo resonante libra alrededor del valor predicho por la teoría. A la izquierda para el objeto 2007 TP₃₈₃ ($e \sim 0.36$, $i \sim 8^\circ$) y a la derecha para el objeto 2017 AQ₂₀ ($e \sim 0.85$, $i \sim 51^\circ$).

evolución orbital resonante de estos objetos. Presentamos en la Figura 4.23 la evolución temporal por 50 mil años del objeto resonante 2018 RV₃₂ ($e \sim 0.35$, $i \sim 9^\circ$).

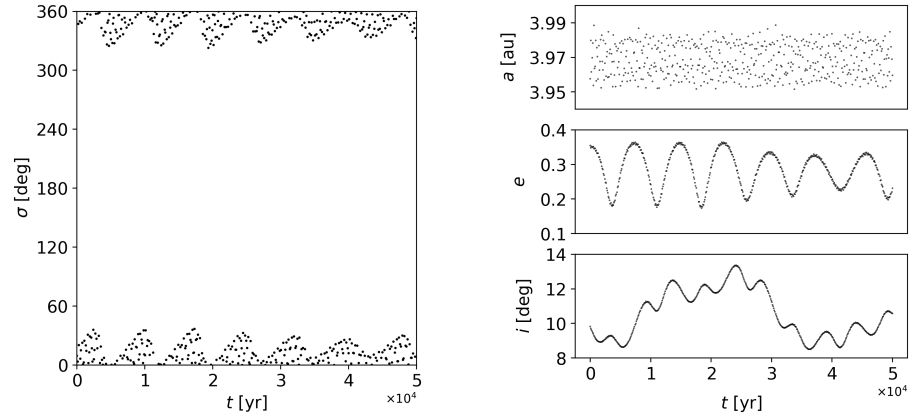


Figura 4.23: Evolución temporal numérica del cuerpo menor 2018 RV₃₂ ($e \sim 0.35$, $i \sim 9^\circ$) en resonancia 3:2 con Júpiter, mostrando el ángulo crítico en función del tiempo (izquierda) y la evolución del semieje, la excentricidad y la inclinación (derecha).

Podemos notar que a medida que la órbita evoluciona, el centro de libración σ_0 cambia de posición ligeramente. La variación parece estar dominada por las variaciones en excentricidad. Así, el mismo punto de equilibrio oscila con un período mucho mayor al período de libración.

Capítulo 5

Caso restringido con planeta en órbita excéntrico

5.1. Propiedades de las resonancias

Si bien la mayoría de los planetas en nuestro sistema tienen baja excentricidad, la excentricidad de Marte (~ 0.1) y la de Mercurio (~ 0.2) pueden tener efectos en las resonancias que generan. En esta sección aplicaremos el modelo semianalítico para estudiar qué sucede si el planeta perturbador no tiene órbita circular. Además de los dos planetas mencionados, muchos de los exoplanetas conocidos tienen excentricidades grandes por lo que estos resultados pueden ser aplicables a hipotéticas poblaciones resonantes en sistemas extrasolares.

5.1.1. Ancho de la resonancia

Dado un planeta de excentricidad e_p y masa m_p en resonancia con una partícula excéntrica e inclinada, tenemos cuatro variables que determinan la configuración orbital (e, i, ω, Ω) . De esta forma, representar cómo varía el ancho de la resonancia no es cómodo debido al gran número de variables que tenemos. Sin embargo, podemos calcular el ancho máximo de la resonancia. Esto significa variar (e, i, ω, Ω) fijando (a_p, m_p, e_p) y calcular un ancho para cada conjunto de valores, quedándonos con el valor máximo. Para usar como referencia, mostramos en la Figura 5.1 la ubicación de los ocho planetas del Sistema Solar en el plano (e_p, m_p) donde el radio de cada punto representa el ancho máximo para una partícula en resonancia.

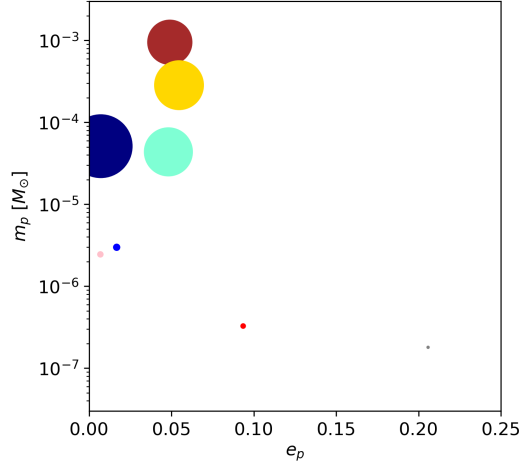


Figura 5.1: Ubicación en el plano (e_p, m_p) de los planetas del Sistema Solar. El ancho máximo de la resonancia 1:2 se representa como el radio de los puntos.

Podemos ver que los cuatro planetas gigantes tienen los anchos más grandes, esto se debe a que la masa del planeta perturbador aparece como un factor multiplicativo al momento de hacer el cálculo y que los planetas externos se encuentran a semiejes mas grandes del Sol, lo que causa que el ancho de sus resonancias también crezca.

Por otro lado, nos puede interesar cómo afecta la excentricidad del planeta al ancho máximo. En la Figura 5.2 presentamos cómo cambia el ancho máximo de dos resonancias con un planeta tipo Júpiter en función de la excentricidad del planeta.

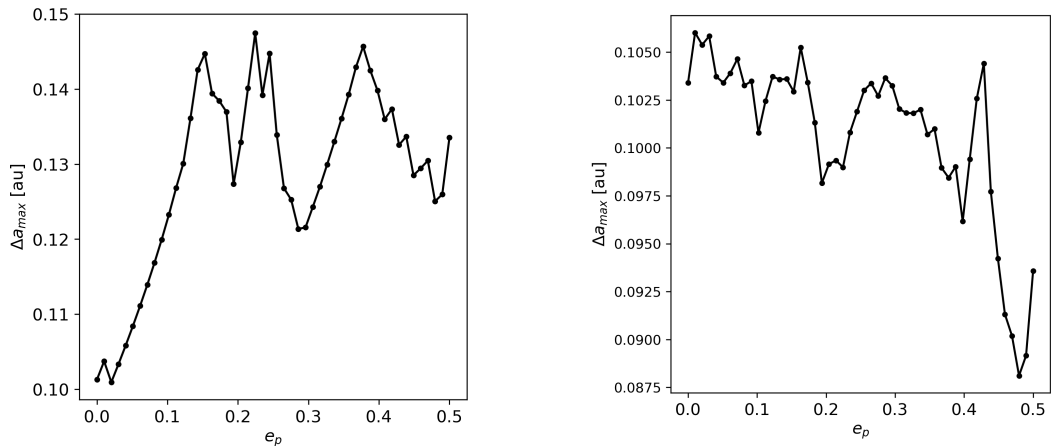


Figura 5.2: Ancho máximo de las resonancias 1:2 (izquierda) y 2:3 (derecha) en función de la excentricidad del planeta. El ancho máximo fue calculado variando en todos los posibles valores de (e, i, ω, Ω) .

Podemos ver que no hay una tendencia clara, para algunos valores el ancho crece monótonamente con la excentricidad del planeta pero para otras decrece. Esto es esperable ya que estamos mezclando órbitas de alta y baja excentricidad para la partícula. Tampoco encontramos una dependencia directa de este comportamiento con el orden de la resonancia.

5.1.2. Centros de libración

Aumentar la excentricidad del planeta afecta directamente el número de σ_0 de una resonancia, así como su ubicación en el espacio de parámetros. Así, mostramos en la Figura 5.3 el número de puntos de equilibrio en el plano (e, i) para las resonancias 1:2 y 2:3 cambiando la excentricidad del planeta. Estos puntos de equilibrio fueron calculados asumiendo que la partícula tiene $\omega = 30^\circ$ y $\Omega = 0^\circ$.

Notemos que la excentricidad del planeta causa que la zona de soluciones asimétricas cambie. El efecto mas importante que puede suceder es que aparecen dos puntos de equilibrio en zonas donde no los esperaríamos. Por ejemplo, no esperamos tener dos puntos de equilibrio fuera de 0 y 180 para la resonancia 2:3. Daremos un ejemplo en más detalle en la subsección siguiente.

5.1.3. Asimétricas

Históricamente, las resonancias entre planetas en órbitas circulares y partículas coplanares han sido ampliamente estudiadas. En este marco, Message (1959) descubrió que, para la resonancia 1:2, el punto de equilibrio ubicado en $\sigma_0 = 180^\circ$ puede bifurcarse en dos puntos de equilibrio asimétricos. Esta bifurcación ocurre cuando la partícula exterior tiene excentricidad $e = 0.0367$.

Esta idea evolucionó con el tiempo, Beauge (1994) mostró que las resonancias externas de la forma 1: N tienen bifurcaciones. De esta forma, en principio se esperaban puntos de equilibrios asimétricos solamente en estas resonancias. Como ejemplo de esto, mostramos en la Figura 5.4 una comparación de la forma estándar en la cual se piensan las resonancias para el caso plano con planeta circular, donde las resonancias de la forma 1: N sufren una bifurcación para un valor de excentricidad e_{bif} donde nacen dos puntos asimétricos a partir de uno simétrico.

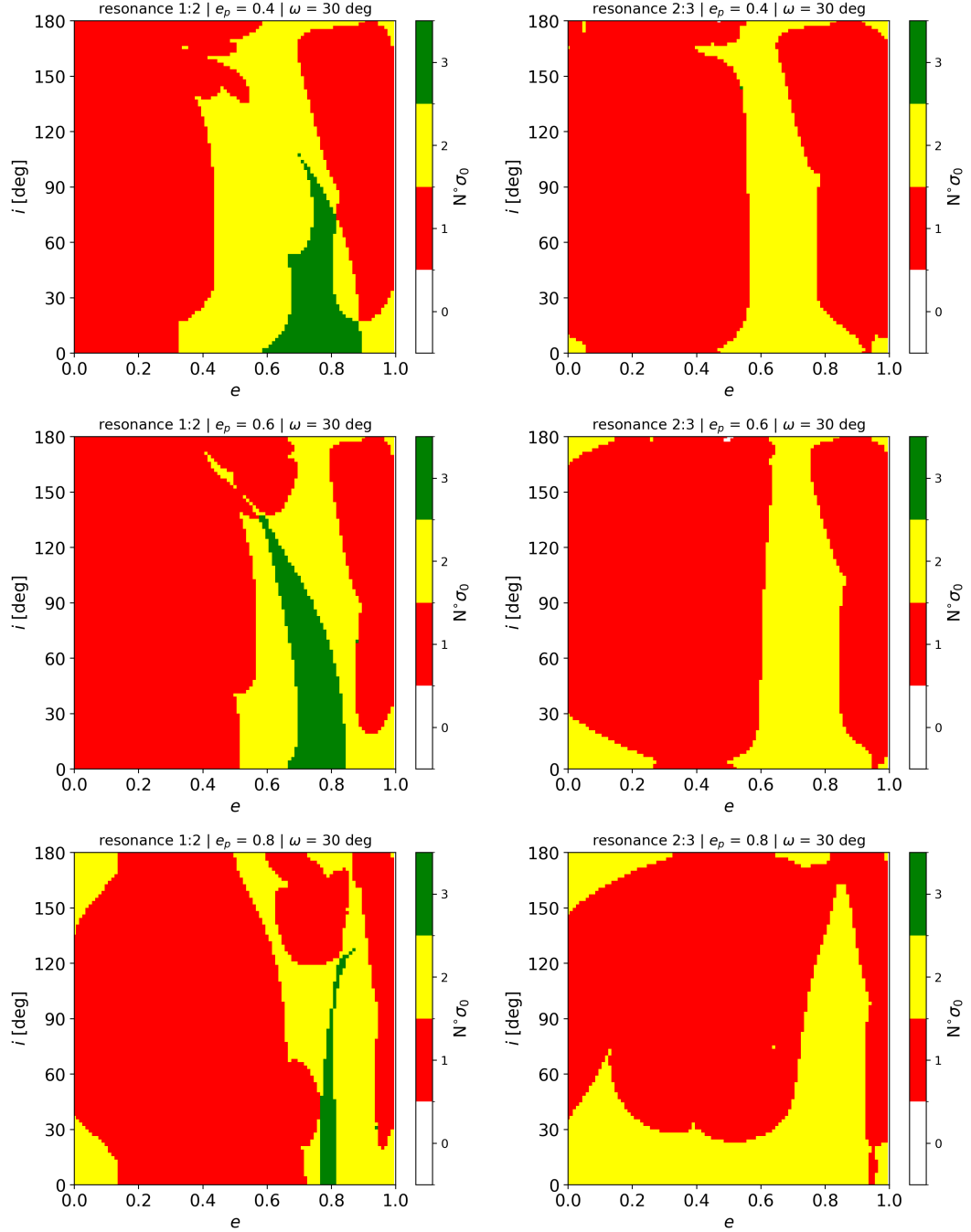


Figura 5.3: Número de puntos de equilibrio en el plano (e, i) para las resonancias 1:2 y 2:3 variando la excentricidad del planeta perturbador y tomando a la partícula con $\omega = 30^\circ$ y $\Omega = 0^\circ$.

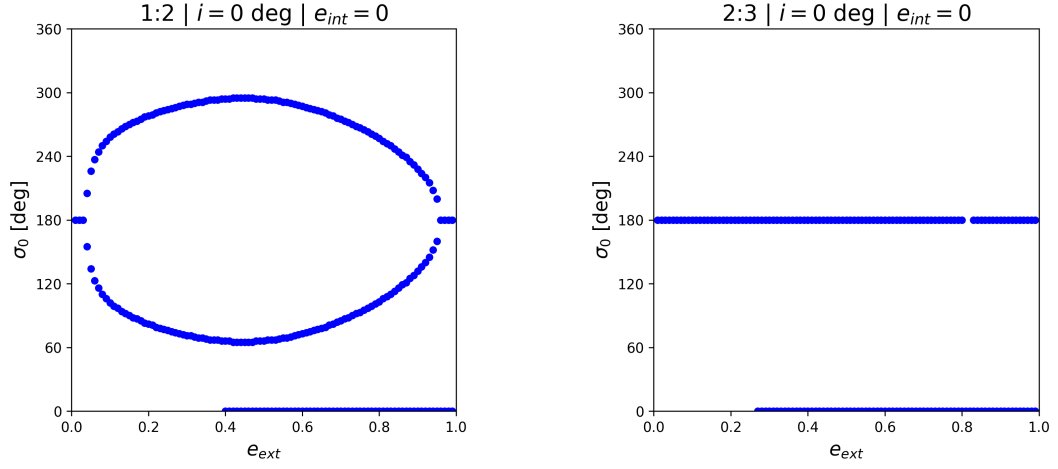


Figura 5.4: Puntos de equilibrio en función de la excentricidad para las resonancias 1:2 y 2:3 con un planeta en el mismo plano y órbita circular.

El valor de la bifurcación $e_{bif} = 0.0367$ solamente es válido para la resonancia 1:2 con un planeta circular en el mismo plano. Este valor varía con el orden q de la resonancia de forma creciente tal cual presentamos para resonancias de la forma $1 : N$ en la Figura 5.5.

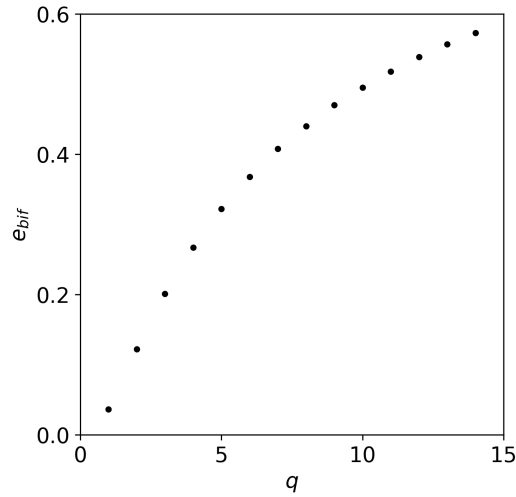


Figura 5.5: Excentricidad de la bifurcación para resonancias 1: N con un planeta circular y orbitas en el mismo plano.

Sin embargo, esta clasificación de los puntos de equilibrio está ligada a una visión histórica de estudiar sistemas de baja excentricidad y cuasi coplanares como nuestro Sistema Solar. Para el caso plano y considerando un planeta en órbita excéntrica, se han encontrado puntos de equilibrio asimétricos para

las resonancias internas 3:2, 5:2, 3:1, 4:1 y 5:1 (Antoniadou y Libert, 2018a, 2018b). En la Figura 5.6 (izquierda) presentamos un ejemplo de esto para el caso general con ambos cuerpos con órbitas excéntricas e inclinación mutua.

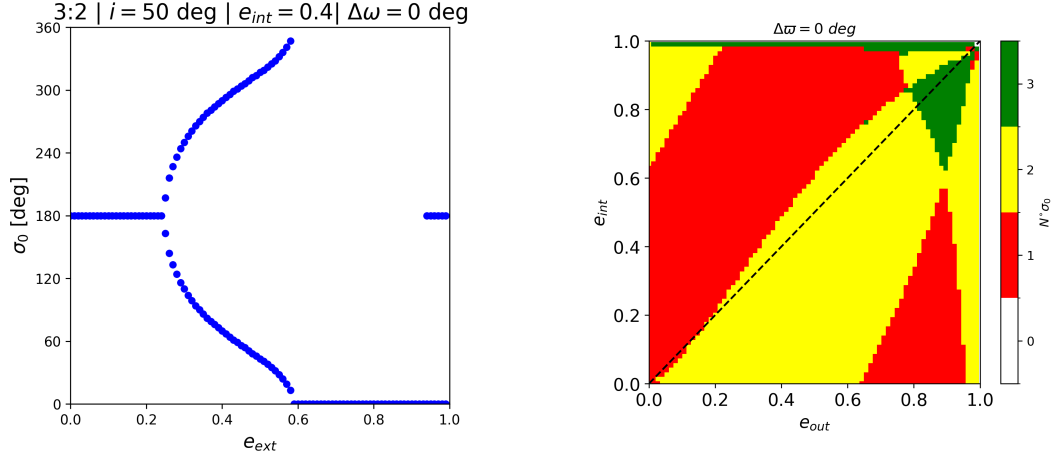


Figura 5.6: (izquierda) Puntos de equilibrio en función de la excentricidad del planeta exterior para la resonancia 3:2. (derecha) Número de puntos de equilibrio para la resonancia 2:1 en el plano (e_{out}, e_{int}) con ambos cuerpos en el mismo plano. Se superpone la línea de $e_{out} = e_{int}$.

Notemos que los puntos de equilibrio asimétricos convergen a uno simétrico tal cual mostramos sucede con la resonancia 1:1 a alta excentricidad en las secciones anteriores. Mas allá de esto, para el caso general con inclinación podemos obtener soluciones asimétricas. Este es un ejemplo de bifurcación para una resonancia que no es de la forma 1: N . Si bien no lo demostramos, hemos encontrado estas bifurcaciones para todas las resonancias estudiadas. Particularmente, tiene esta forma para valores bajos de inclinación y cuando los elementos orbitales angulares colocan a las órbitas en configuraciones geométricas particulares.

Tomando ambos objetos en el mismo plano, mostramos en la Figura 5.6 (derecha) el número de puntos de equilibrio en el plano de excentricidades. En particular, podemos notar que tenemos dos puntos de equilibrio (bifurcación) siempre que el objeto externo tiene mayor excentricidad que el objeto interno. Superponemos la recta e_{out}, e_{int} para más claridad.

5.2. Aplicación a casos conocidos

5.2.1. Hungarias

Marte tiene la suficiente masa y la suficiente excentricidad para generar efectos en las resonancias que genera. Un ejemplo de aplicación es la población de los Hungarias, una población de cuerpos menores mas cercana al Sol que el cinturón principal de asteroides, afectada por varias resonancias externas con Marte. Esta población de cuerpos menores tiene semiejes entre 1.78 au $< a < 2.0$ au. Algunas resonancias importantes con Marte son la 2:3 o la 3:4. Algo interesante de esta población es que poseen alta inclinación lo que nos motiva a aplicar el modelo. En la Figura 5.7 graficamos el número de puntos de equilibrio para la resonancia 2:3 con Marte en el plano (e, ω) tomando una inclinación representativa de la población de Hungarias. Vemos que aparecen soluciones asimétricas en zonas de baja excentricidad y alta inclinación para rangos específicos de ω .

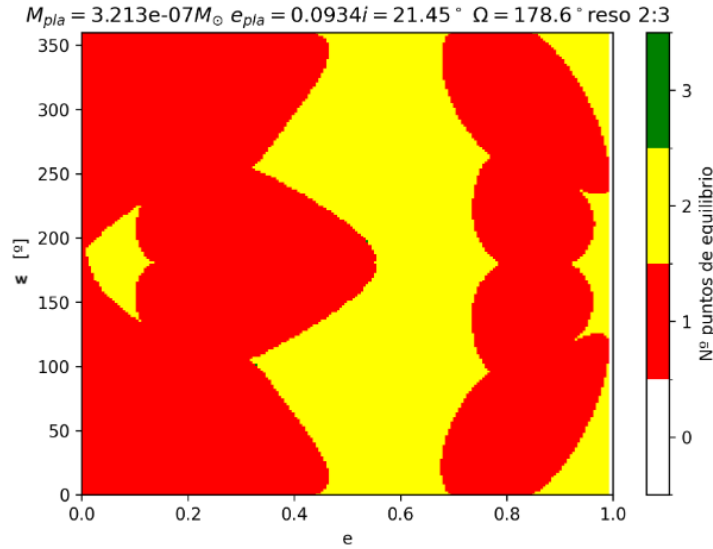


Figura 5.7: Número de puntos de equilibrio en el plano (e, ω) para la resonancia 2:3.

Aquí debemos diferenciar entre los valores que toma σ_0 en las distintas zonas amarillas. En la región en torno a $e \sim 0.6$ los dos puntos de equilibrio se encuentran en $\sigma_0 = 0^\circ$ y $\sigma_0 = 180^\circ$ mientras que en la región de baja excentricidad y en torno a $\omega \sim 180$ los puntos de equilibrio parecen ser asimétricos. Por ejemplo, para valores de $(e = 0.05, i = 21.45^\circ, \omega = 180^\circ, \Omega = 180^\circ)$ los

dos puntos de equilibrio se encuentran en $\sigma_0 = 69^\circ$ y $\sigma_0 = 291^\circ$. Al variar ω estos valores circulan, a diferencia de las soluciones asimétricas tradicionales en resonancias 1: N donde la ubicación de σ_0 oscila al variar ω .

No hemos encontrado objetos reales en estos puntos de equilibrio lo que da indicios de que estas soluciones asimétricas son temporales y que un objeto dentro de ellas no podrá evolucionar en largos plazos de tiempo en dichos puntos de equilibrio. Para comprobar esto, integramos una partícula ficticia con un planeta análogo a Marte. Presentamos los resultados en la Figura 5.8.

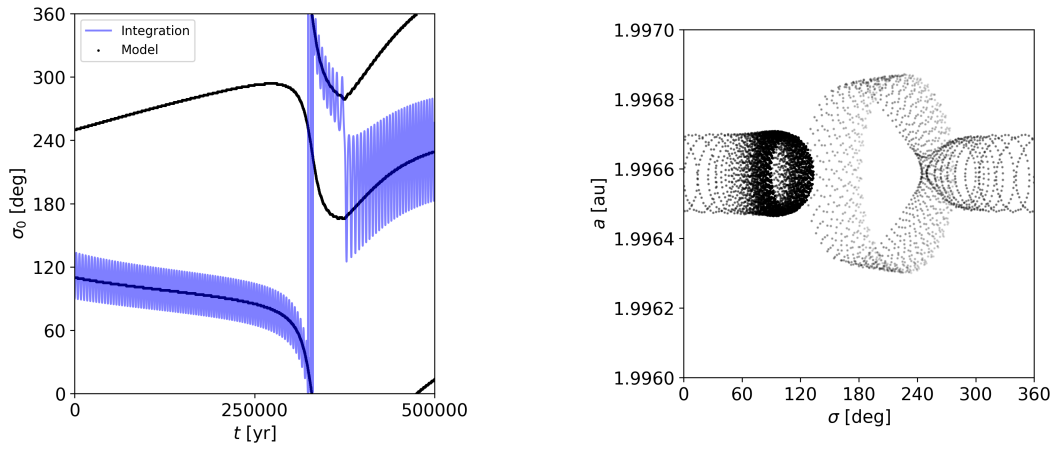


Figura 5.8: (izquierda) evolución temporal asimétrica de una partícula en resonancia 2:3, en color azul se representa la integración numérica mientras que en color negro se representa el valor de los centros de libración predichos por la teoría. (derecha) lo mismo en el espacio del Hamiltoniano (σ, a) .

En la Figura 5.8 (izquierda) mostramos la evolución de la integración numérica (en color azul) sobrepuesta sobre el resultado del modelo (en color negro) siguiendo paso a paso la integración numérica. En otras palabras, para cada instante de la simulación calculamos $\sigma_0 = \sigma_0(e, i, \omega, \Omega)$. Vemos que con el paso del tiempo, la posición del punto de equilibrio se desplaza hacia valores mas pequeños. La integración numérica acompaña al movimiento del punto de equilibrio hasta que, alrededor de los 380000 años la partícula salta al otro punto de equilibrio.

En la Figura 5.8 (derecha) podemos ver la contraparte en el espacio del Hamiltoniano, donde la transparencia de los puntos indica el tiempo, comenzando con valores mas opacos. Vemos también el mismo comportamiento donde la partícula salta de un punto de equilibrio a otro con el tiempo debido a cambios en la ubicación de los puntos de equilibrio. En la evolución a largo plazo

de objetos en estas resonancias debe considerarse la evolución de la propia excentricidad del planeta perturbador, en este caso Marte. Este cambio en la excentricidad debido a la presencia de los otros planetas del sistema causa también un cambio en la topología de la resonancia.

5.2.2. El Hipotético Planeta 9

La existencia de planetas aún no observados ha sido una solución teórica a muchos problemas dinámicos a lo largo de la historia. Durante la última década se ha propuesto la existencia de un noveno planeta para explicar supuestas concentraciones de objetos en el Sistema Solar exterior. Si bien hay varios modelos, consideraremos un planeta con $a_p \sim 700\text{au}$ y $e_p \sim 0.6$, siguiendo el trabajo de Viera (2023). Una aplicación directa del modelo semianalítico es estudiar las posibles resonancias generadas por este planeta.

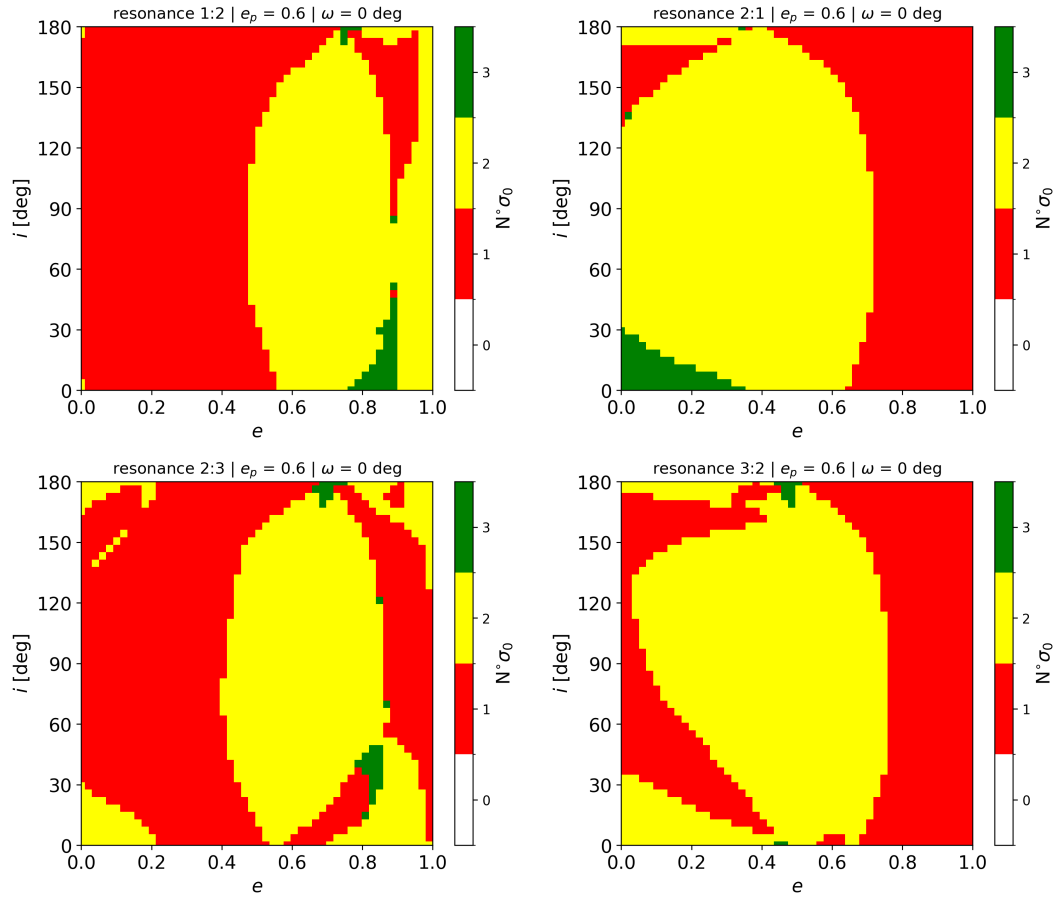


Figura 5.9: Número de puntos de equilibrio en el plano (e, i) para las resonancias 1:2, 2:1, 2:3 y 3:2 con un planeta de excentricidad $e_p = 0.6$.

A partir del mapeo realizado en Viera (2023), se puede ver que a partir de 200-250 au las resonancias internas con el planeta 9 son mas dominantes que las externas con Neptuno. Particularmente, las resonancias internas 2:1 y 3:2 se encuentran en $a \sim 441$ au o $a \sim 534$ au respectivamente. Si bien se han detectado un numero pequeño de objetos con semiejes tan grandes, no se descarta en un futuro descubrir objetos afectados por resonancias generadas por este planeta si existiese.

Presentamos en la Figura 5.9 el número de puntos de equilibrio para las resonancias 1:2, 2:1, 2:3 y 3:2 en el plano (e, i) con un hipotético planeta 9. Tal cual discutimos anteriormente, con un planeta excéntrico encontramos que incluso para resonancias internas de la forma $N:1$ pueden aparecer puntos de equilibrio asimétricos.

5.2.3. Exoplanetas de muy alta excentricidad

Se han descubierto algunos sistemas de exoplanetas con planetas en orbitas extremadamente excéntricas. De los 1260 exoplanetas con excentricidades determinadas, el 3.7 % tienen una excentricidad mayor a 0.5. Ejemplos de esto son los sistemas HD 80606, HD 120066 o HD 83443, que contienen planetas con altísima excentricidad (Naef et al. 2001; Blunt et al. 2019; Errico et al. 2022). El planeta con mayor excentricidad medida se encuentra en el sistema HIP 66074 con un planeta de excentricidad $e_p = 0.948 \pm 0.004$ (Sozzetti et al. 2023).

Una aplicación directa del modelo estudiado en este trabajo es estudiar teóricamente la arquitectura resonante de otros planetas y cuerpos menores en dicho sistema. Mostramos en la Figura 5.10 un atlas de las resonancias generadas por planetas de alta excentricidad. Marcamos las resonancias que ocupan más área en el espacio de fases.

Notemos que para ciertas zonas, las resonancias se superponen generando zonas caóticas. Si aumentamos el valor de q considerado o la masa m_p del planeta, dichas zonas aumentarán.

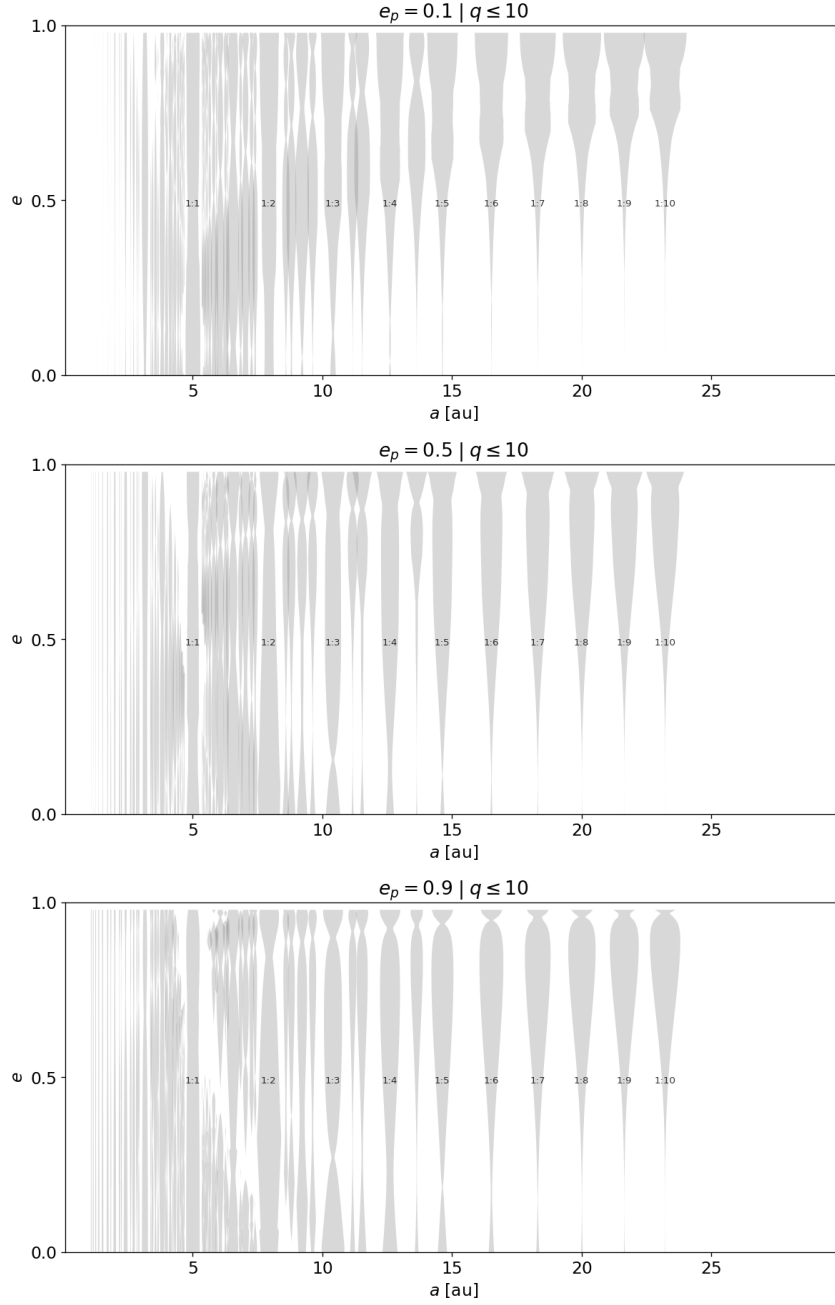


Figura 5.10: Atlas de resonancias de movimientos medios generadas por un planeta de alta excentricidad, semieje $a_p = 5.0$ au y masa $m_p = 0.001 M_\odot$, tomando una partícula de $i = 30^\circ$ y $\Delta\varpi = 0$. Se muestran varios valores de e_p .

Capítulo 6

Caso Planetario

Hasta este momento, hemos visto en detalle el comportamiento de las propiedades de diversas resonancias en el caso restringido. Consideremos ahora el problema general, en que ambos cuerpos tienen masa. En estas secciones aplicaremos el modelo general centrándonos en sistemas particulares tanto ficticios como reales. Mostraremos cómo se comportan las propiedades de varias resonancias de movimientos medios para cada caso.

6.1. Sistemas resonantes

Si bien hemos mostrado en la Introducción que el histograma de cocientes de períodos en el catálogo de sistemas exoplanetarios muestra concentraciones cerca de las resonancias 2:1 y 3:2 estas concentraciones no aparecen para cualquier tipo de planeta. Particularmente, en sistemas de baja masa y excentricidad no parecen ser tan comunes las resonancias (Cerioni et al. [2022](#)).

$k_p:k$	P_1/P_2	N° (5 %)	N° (2 %)	N° (1 %)
5:4	1.25	32	13	9
4:3	1.34	57	30	16
3:2	1.5	149	86	49
5:3	1.67	131	52	23
2:1	2	152	52	23
5:2	2.5	93	35	15
3:1	3	65	25	10

Tabla 6.1: Número de sistemas extrasolares tal que el cociente de períodos orbitales entre ambos planetas se encuentra dentro de un cierto porcentaje (5 %, 2 % y 1 %) del valor exacto de la resonancia.

El parámetro orbital determinado con mejor precisión para los sistemas de exoplanetas es el período en las dos técnicas más frecuentemente utilizadas, tránsitos y velocidades radiales. A pesar de que hallar un cociente de períodos cerca de la conmensurabilidad no es necesario para estar en resonancia. En la Tabla 6.1 presentamos cuyo cociente de períodos se encuentra dentro de un 5 %, 2 % y 1 % del valor nominal de cada resonancia.

6.2. Propiedades de las resonancias

6.2.1. Anchos de las resonancias

La diferencia principal con el caso restringido es que tenemos un ancho resonante para cada planeta. Presentamos en las Figuras 6.1 y 6.2 el ancho de dos resonancias para planetas con la misma masa $m_p = 0.001M_\odot$, variando la inclinación y la excentricidad del planeta exterior donde ambos planetas tienen los elementos orbitales angulares (ω, Ω) nulos. Notemos que la forma del ancho es la misma para ambos planetas pero el valor que toma el mismo es mayor para el planeta exterior. El ancho tiene la misma forma para ambos planetas a menos de una constante que depende de las masas y los semiejes. Esto se puede ver en forma clara en las ecuaciones en Gallardo et al. 2021.

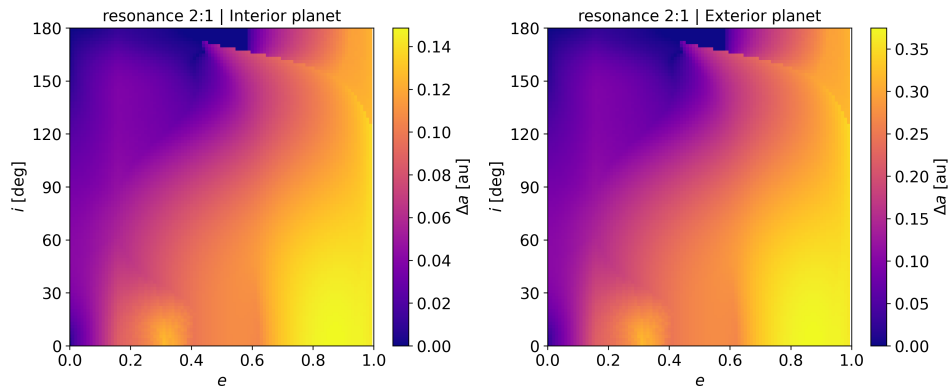


Figura 6.1: Ancho de la resonancia 2:1 para el caso planetario en el plano (e, i) .

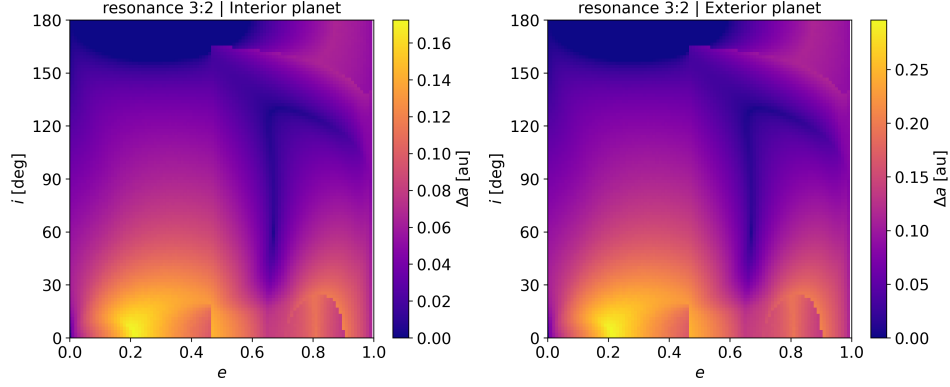


Figura 6.2: Ancho de la resonancia 3:2 para el caso planetario en el plano (e, i) .

Para la resonancia 3:2 podemos identificar curvas en el plano (e, i) donde el ancho es despreciable, estas curvas se corresponden con zonas donde la resonancia es muy débil. Además, recordemos que estos valores son muy dependientes de los valores de (ω, Ω) para el caso inclinado y de $\Delta\varpi$ para el caso plano.

6.2.2. Centros de libración

Como ya discutimos previamente, los centros de libración no dependen de las masas, sino puramente de la configuración geométrica de los dos cuerpos. Así, los resultados obtenidos en las secciones anteriores respecto a la ubicación y número de los puntos de equilibrio se mantienen. Sin embargo, podemos analizar el caso plano de dos planetas en resonancia. Aquí, la configuración orbital está descrita por solamente tres variables, las excentricidades e_{int} y e_{out} y $\Delta\varpi$.

Así, calculamos el IVT variando $\Delta\varpi$ en este plano para varias resonancias. Presentamos en la Figura 6.3 el mapa de este indicador para dos resonancias de primer orden. Podemos ver que nuevamente encontramos zonas donde sin importar la orientación de las órbitas el número de puntos de equilibrio de la resonancia no cambia. Notemos que no hay una simetría respecto a la recta de pendiente 1, es decir, las resonancias internas y externas no se comportan de la misma forma. La resonancia 2:1 parece tener zonas mas extensas con $IVT=0$ que la 3:2.

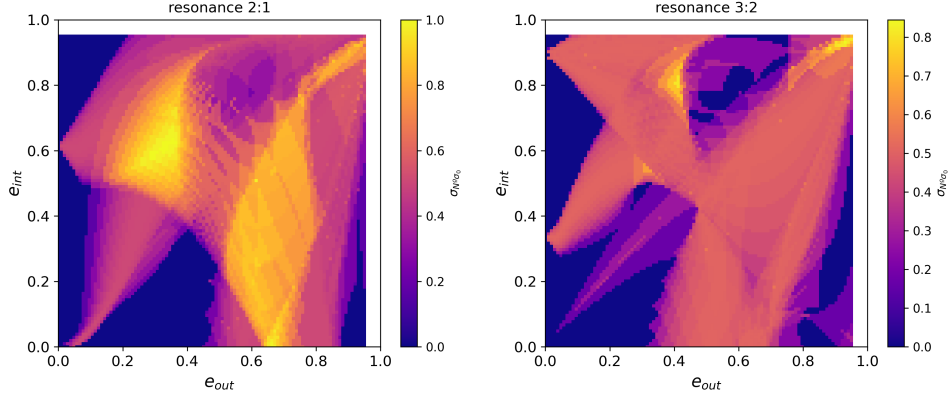


Figura 6.3: Índice de variación topológica para las resonancias 2:1 y 3:2

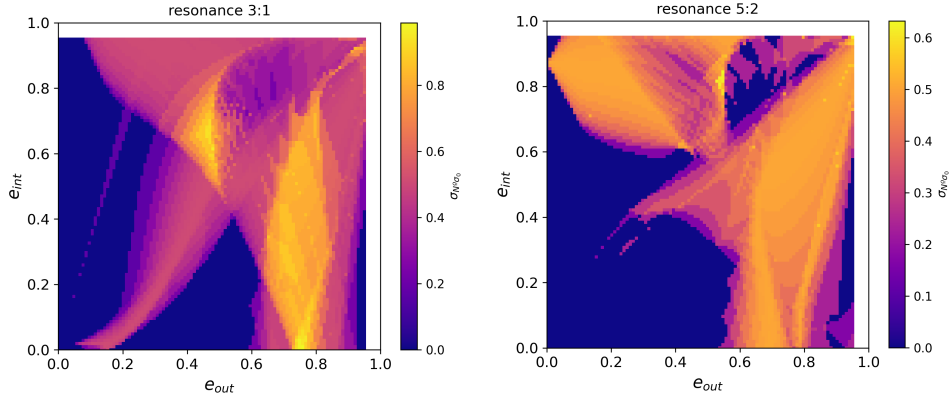


Figura 6.4: Índice de variación topológica para las resonancias 3:1 y 5:2

Por otro lado, presentamos en la Figura 6.4 los mismos planos para resonancias de mayor orden. Vemos que en estos casos las zonas con $IVT=0$ ocupan una mayor área que para las resonancias de primer orden estudiadas previamente.

6.2.3. Períodos de libración

En el caso general, ambos planetas sienten la resonancia con el mismo período, sin importar el cociente de las masas. Dados dos planetas de masas m_{int} y m_{out} podemos ver cómo cambia el período de libración para algunas resonancias. Tal como vemos en la Figura 6.5, el período de libración disminuye a medida que los planetas tienen masas comparables.

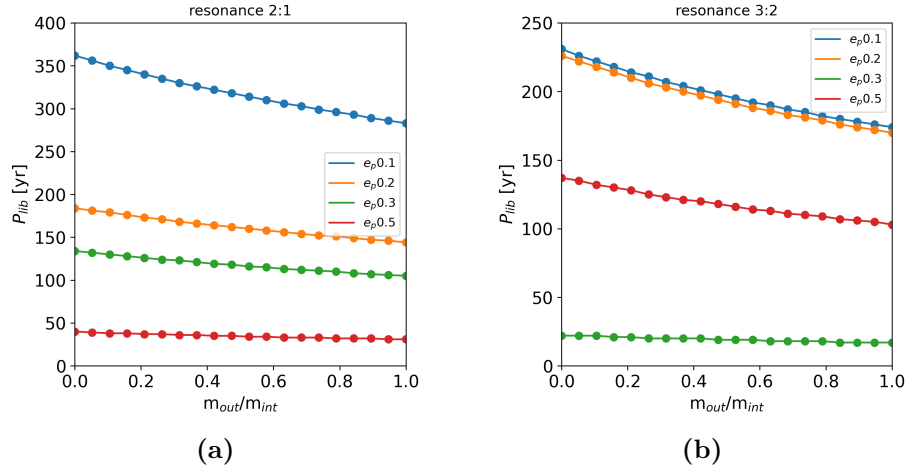


Figura 6.5: Período de libración para dos resonancias en función del cociente de masas de los planetas.

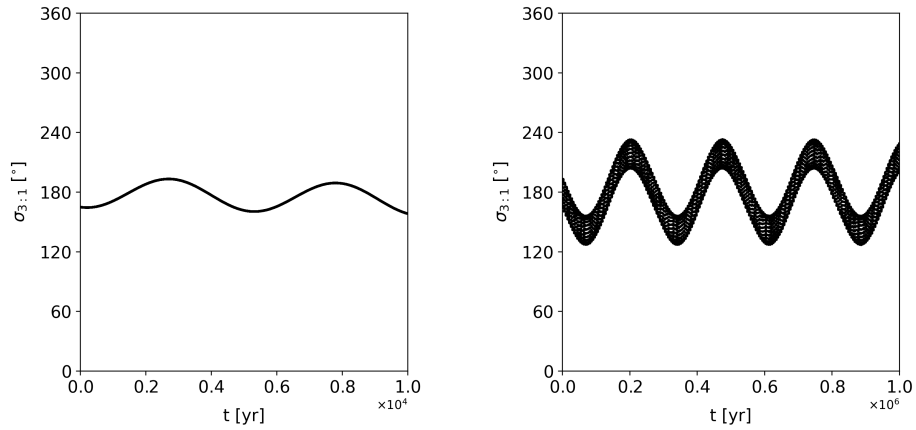


Figura 6.6: Evolución temporal del ángulo crítico para dos planetas de la masa de Neptuno en el mismo plano y excentricidad 0.1, en resonancia 3:1. A la izquierda, mostramos la evolución temporal a corto plazo mientras que a la derecha mostramos la evolución en escalas de tiempo tres órdenes de magnitud superior.

Es fundamental mencionar nuevamente que el período de libración no debe confundirse con el período secular de más largo plazo, asociado a las variaciones lentas del propio centro de la resonancia. En otras palabras, aunque el ángulo crítico pueda mostrar un comportamiento oscilatorio en torno a un valor esperado (en este ejemplo $\sigma_0 \sim 180^\circ$), esta oscilación ocurre para dos escalas de tiempo diferentes. En la Figura 6.6 mostramos esta diferencia. A corto plazo, el ángulo oscila con el período de libración, del orden de 5000 años (izquierda de la Figura 6.6) mientras que el centro de la resonancia se mueve con un período secular del orden de 250000 años (derecha de la Figura 6.6).

6.3. Aplicación a sistemas extrasolares

Gracias al amplio catálogo de exoplanetas, existen varios sistemas interesantes para aplicar el modelo semianalítico empleado en este trabajo. Como ejemplo de algunas propiedades que queremos resaltar presentamos en las siguientes secciones un estudio dinámico de una serie de sistemas extrasolares.

6.3.1. El sistema HD 31527: Una resonancia de alto orden

Si bien la mayoría de sistemas extrasolares descubiertos en resonancias se encuentran en resonancias de bajo orden, el sistema HD 31527 se encuentra en la resonancia 16:3 (Gallardo et al. 2021). Este sistema está conformado por tres planetas, de los cuales los dos exteriores se encuentran en resonancia. Debido a la gran excentricidad del planeta externo, es necesario colocarlos dentro de la resonancia para que el sistema evolucione de forma estable ya que al evolucionar dentro de la resonancia, los encuentros próximos que influyen en la estabilidad del sistema se evitan. En la Figura 6.7a mostramos un mapa dinámico donde se puede ver que este sistema se encuentra dentro de la resonancia de alto orden mencionada. También podemos ver que el modelo se ajusta a la forma de la resonancia mostrada en el mapa dinámico. Además, si uno busca en los catálogos de datos, los elementos orbitales no siempre están determinados correctamente ya que para este caso se encuentra en una zona inestable. Por ello, es de suma importancia analizar el procesamiento de estos valores antes de hacer un estudio dinámico detallado. Además, utilizando un indicador de caos podemos ver que las resonancias aumentan el valor máximo de excentricidad que puede tener el sistema manteniéndose fuera de la zona caótica. Utilizando este sistema como ejemplo, en la Figura 6.7b mostramos un mapa dinámico del indicador MEGNO, donde las zonas verdes indican zonas regulares, no caóticas. La relación entre la estabilidad y qué tan caótico es el sistema queda por fuera de la discusión que queremos dar en este trabajo.

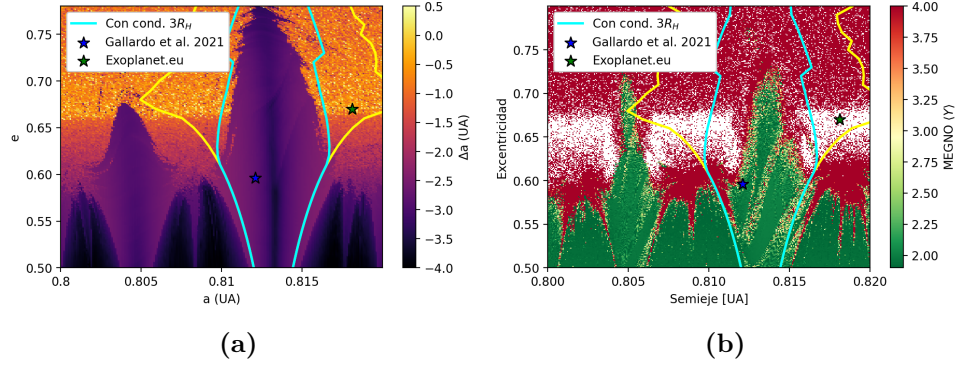


Figura 6.7: (izquierda) Mapa dinámico y (derecha) mapa de caos del sistema HD 31527. Notemos que la solución obtenida en Gallardo et al. (2021) cae dentro de la resonancia y una zona no caótica.

6.3.2. El sistema TOI-1408: Ley de estructura

Si bien hemos mostrado que el modelo resonante semianalítico funciona en la mayoría de situaciones, hay un efecto muy estudiado que no está contemplado en el modelo. Para las resonancias de primer orden a baja excentricidad, el semieje correspondiente a estas resonancias se desplaza.

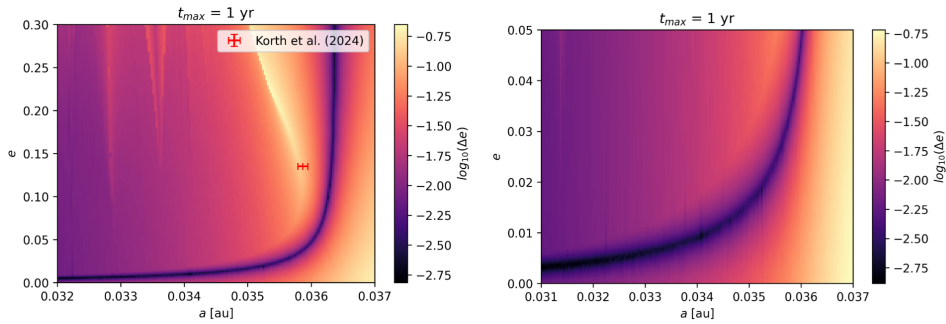


Figura 6.8: (izquierda) Mapa dinámico en la zona cercana a la resonancia 2:1. (derecha) Zoom en bajas excentricidades.

Para mostrar esto usaremos como ejemplo al sistema extrasolar TOI-1408, el cual contiene dos planetas cerca de la resonancia 2:1. Podemos ver en los mapas dinámicos presentados en la Figura 6.8 que el semieje de la resonancia se desplaza cerca de donde se encuentran los valores determinados observacionalmente para este sistema. Además, el mismo se encuentra muy cerca del borde de la resonancia. Este fenómeno no es descrito por el modelo ya que una de las hipótesis del mismo -que los elementos orbitales se mantienen constantes en un período de libración- no se cumple para baja excentricidad.

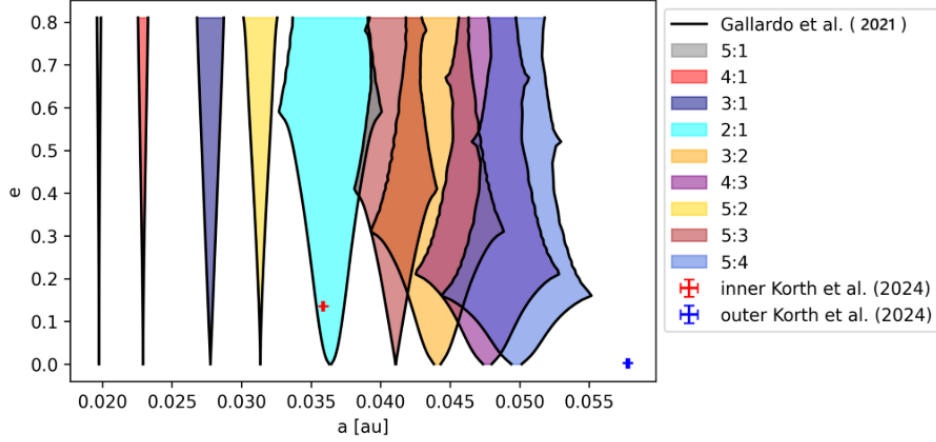


Figura 6.9: Atlas de resonancias de movimientos medios en el sistema TOI-1408. Mostramos las resonancias generadas por el planeta externo sobre el planeta interno. Los planetas se encuentran en la resonancia 2:1.

Sin embargo, podemos aplicar el modelo para valores más altos de excentricidad, construyendo como ejemplo un atlas de resonancias en este sistema. En la Figura 6.9 mostramos una serie de resonancias internas con el planeta exterior, en las cuales podrían ubicarse planetas de baja masa aún no detectados en los datos observacionales. Esta posibilidad requiere un análisis de estabilidad más detallado.

6.3.3. El sistema KOI-134: Inclínación mutua

Como ya mencionamos anteriormente, es difícil determinar la inclinación mutua en sistemas de exoplanetas. Si bien es frecuente determinar inclinaciones con el método de tránsito, esta técnica está sesgada a sistemas coplanares por lo que las inclinaciones medidas son pequeñas. Sin embargo, se han detectado sistemas con inclinaciones altas ya sea respecto al ecuador de la estrella o entre los planetas. En esta sección estudiamos en detalle la dinámica resonantes del sistema KOI-134. Dicho sistema contiene dos planetas en resonancia 2:1. Recientemente, se logró determinar mediante la técnica de TTV una inclinación mutua de 15° (Nabbie et al. 2025).

En la Figura 6.10 presentamos la evolución temporal del ángulo crítico para corto y largo plazo. Las condiciones iniciales fueron tomadas de las órbitas nominales reportadas en Nabbie et al. (2025). A corto plazo, podemos ver que el ángulo crítico oscila en torno a $\sigma_0 = 357^\circ$ tal cual predice el modelo con un período equiparable. Sin embargo, al transcurrir el tiempo, los elementos

orbitales cambian y el centro de libración comienza a evolucionar. Observando al integración a largo plazo, podemos confundir a la evolución como una en torno a cero pero lo que en realidad estamos observando es transiciones entre un punto de equilibrio simétrico cerca de 0 y puntos de equilibrio asimétricos. Esto queda evidente en el plano (σ, a) presentado en la Figura 6.10 (derecha) donde las trayectorias se distinguen entre las etapas en torno a cero y en torno a los puntos asimétricos.

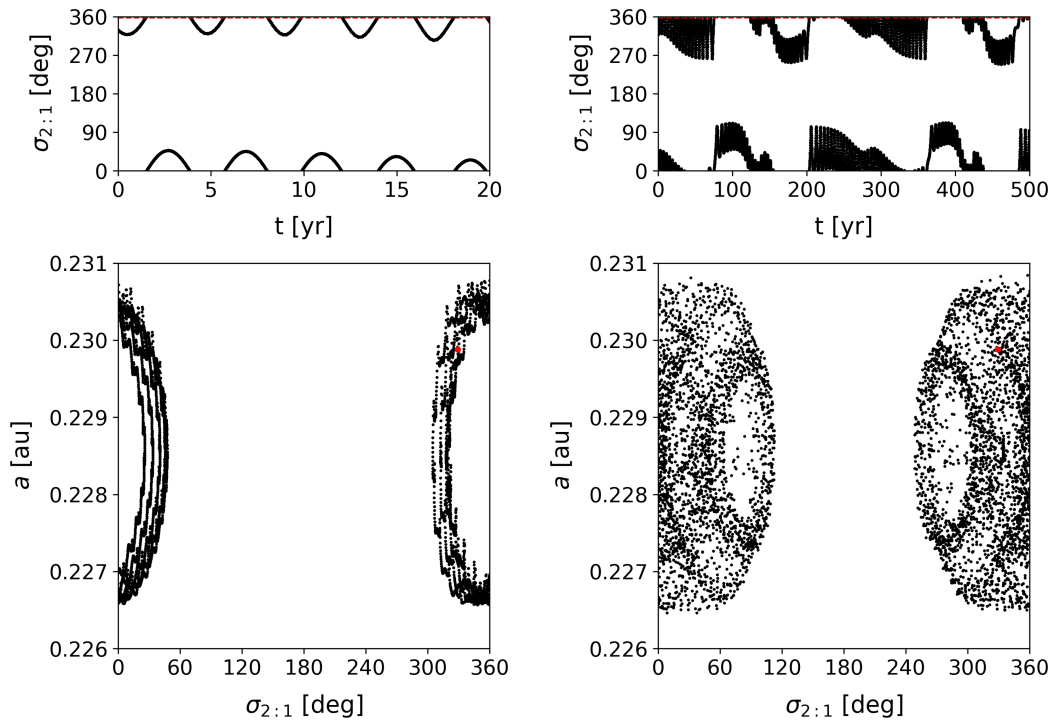


Figura 6.10: Evolución temporal del ángulo crítico en función del tiempo y en el espacio de fases (σ, a) para el sistema KOI-134. A la izquierda la evolución a corto plazo y a la derecha a largo plazo.

Podemos entender por qué suceden estas transiciones calculando el número de puntos de equilibrio en el plano de excentricidades para la inclinación y la orientación reportada. Mostramos los resultados en la Figura 6.11 donde podemos notar dos regiones, una con un punto de equilibrio y otra con dos. Al superponer la evolución temporal de las excentricidades podemos ver que el sistema atraviesa de la zona con uno a dos puntos de equilibrio, explicando las transiciones observadas en la integración numérica a largo plazo.

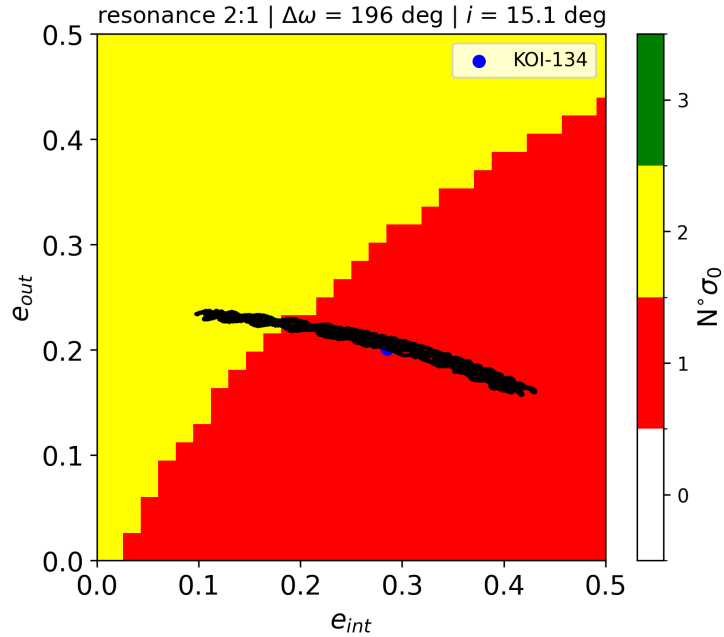


Figura 6.11: Número de puntos de equilibrio para la resonancia 2:1 en el plano de excentricidades. Sobrepuesto en color negro la evolución temporal de las excentricidades.

Si bien las masas de los planetas en el sistema no determinan el número ni la ubicación de los puntos de equilibrio, sí afectan la evolución de los elementos orbitales y por lo tanto la evolución de la topología de la resonancia. En este caso, podemos ver que la variación de la excentricidad es mayor para el planeta interior (de menor masa) que para el exterior (de mayor masa). Si bien no lo mostramos explícitamente, la evolución de las orientaciones espaciales de la órbita también tienen un impacto relevante en la topología resonante que el sistema siente.

6.4. Aplicación a dos planetas ficticios

Más allá de los sistemas reales estudiados, resulta interesante estudiar el comportamiento resonante de un par de planetas ficticios en configuraciones no tradicionales de excentricidad alta e inclinación mutua. Existe una gran cantidad de preguntas abiertas como ¿hasta qué inclinación relativa pueden dos planetas evolucionar dentro de la resonancia? ¿Evolucionan establemente? Sin intentar estudiarlo de forma exhaustiva en esta subsección mostraremos algunos resultados respecto a estas preguntas.

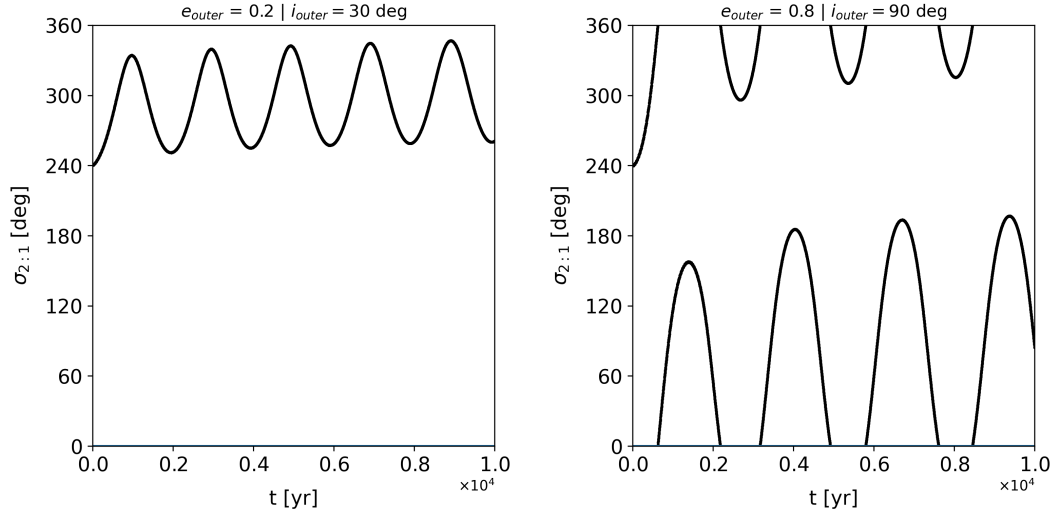


Figura 6.12: Evolución temporal a corto plazo del ángulo crítico de la resonancia 2:1 para dos pares de valores iniciales de excentricidad e inclinación.

Supongamos dos planetas de la masa de Neptuno $\sim 5.15 \times 10^{-5} M_{\odot}$ dentro de las resonancias 2:1 y 3:2. Colocando el planeta interno con excentricidad cero y el exterior con excentricidad 0.2 variamos la inclinación mutua inicial entre los planetas para estudiar la evolución resonante. Podemos ver en la Figura 6.12 la evolución resonante del ángulo crítico para la resonancia 2:1 cuando el planeta externo tiene una excentricidad de 0.2 y de 0.8 y una inclinación de 30 y de 90 respectivamente. Presentamos en la Figura los mismos resultados para la resonancia 3:2.

Vemos que para la resonancia 2:1 podemos tener distintas ubicaciones del σ_0 . Para un planeta externo con $e = 0.2$ e $i = 30^\circ$ tenemos que el planeta evoluciona en un punto de equilibrio asimétrico por el menos 10 mil años. Sin embargo, si el planeta externo tiene una órbita con $e = 0.8$ e $i = 90^\circ$ el mismo evoluciona en torno a un punto de equilibrio simétrico cerca de $\sigma_0 \sim 0^\circ$.

Por otro lado, para la resonancia 3:2 tenemos también un comportamiento dependiente de la geometría. Tal como podemos ver en la Figura 6.13, si colocamos el planeta externo con una excentricidad de $e = 0.05$ y una inclinación mutua de $i = 60^\circ$ el sistema evoluciona dentro de puntos de equilibrio asimétricos, saltando de un punto de equilibrio a otro. Por otro lado, para un planeta externo con $e = 0.4$ y una inclinación mutua de $i = 60^\circ$ el sistema evoluciona dentro de un punto de equilibrio simétrico cerca de $\sigma_0 \sim 180^\circ$.

Como ya hemos visto, la evolución de los elementos orbitales del sistema causa que los puntos de equilibrio cambien. Sin embargo, el sistema puede se-

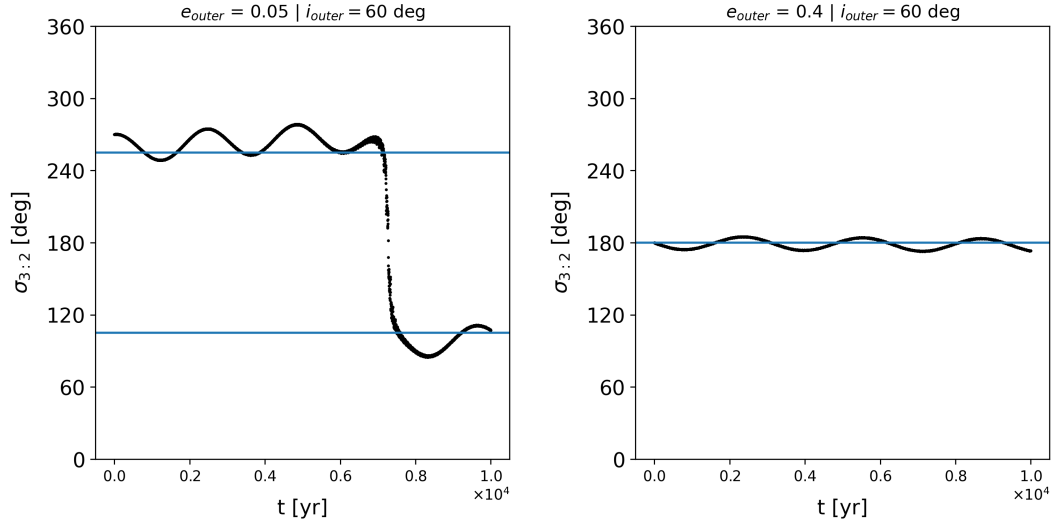


Figura 6.13: Evolución temporal a corto plazo del ángulo crítico para la resonancia 3:2 y diferentes valores de excentricidad e inclinación $i = 60^\circ$ iniciales. A la izquierda puntos de equilibrio asimétricos y a la derecha un punto simétrico.

guir dentro de la resonancia sin salirse del punto de libración. En la Figura 6.14 mostramos la evolución a largo plazo del ángulo crítico para la resonancia 3:2 colocando el planeta externo con una excentricidad $e = 0.4$ y una inclinación variable desde $i = 0^\circ$ hasta $i = 90^\circ$. Para bajas inclinaciones podemos ver que la evolución del ángulo crítico es simple, con oscilaciones en torno al punto de equilibrio simétrico. Sin embargo, el período que vemos es mucho mayor que el período de la resonancia. Este es un período secular correspondiente a una evolución del sistema. En realidad, el propio valor de σ_0 varía periódicamente en torno a 180° . A medida que subimos la inclinación mutua inicial, el centro de libración deja de evolucionar secularmente de forma ordenada. Sin embargo, el sistema se puede mantener dentro de la resonancia a pesar de grandes cambios en el valor de σ_0 . Incluso en casos particulares, el centro de libración puede circular y el sistema mantenerse en la resonancia. El detalle de esta evolución secular quedan por fuera de los objetivos de esta tesis.

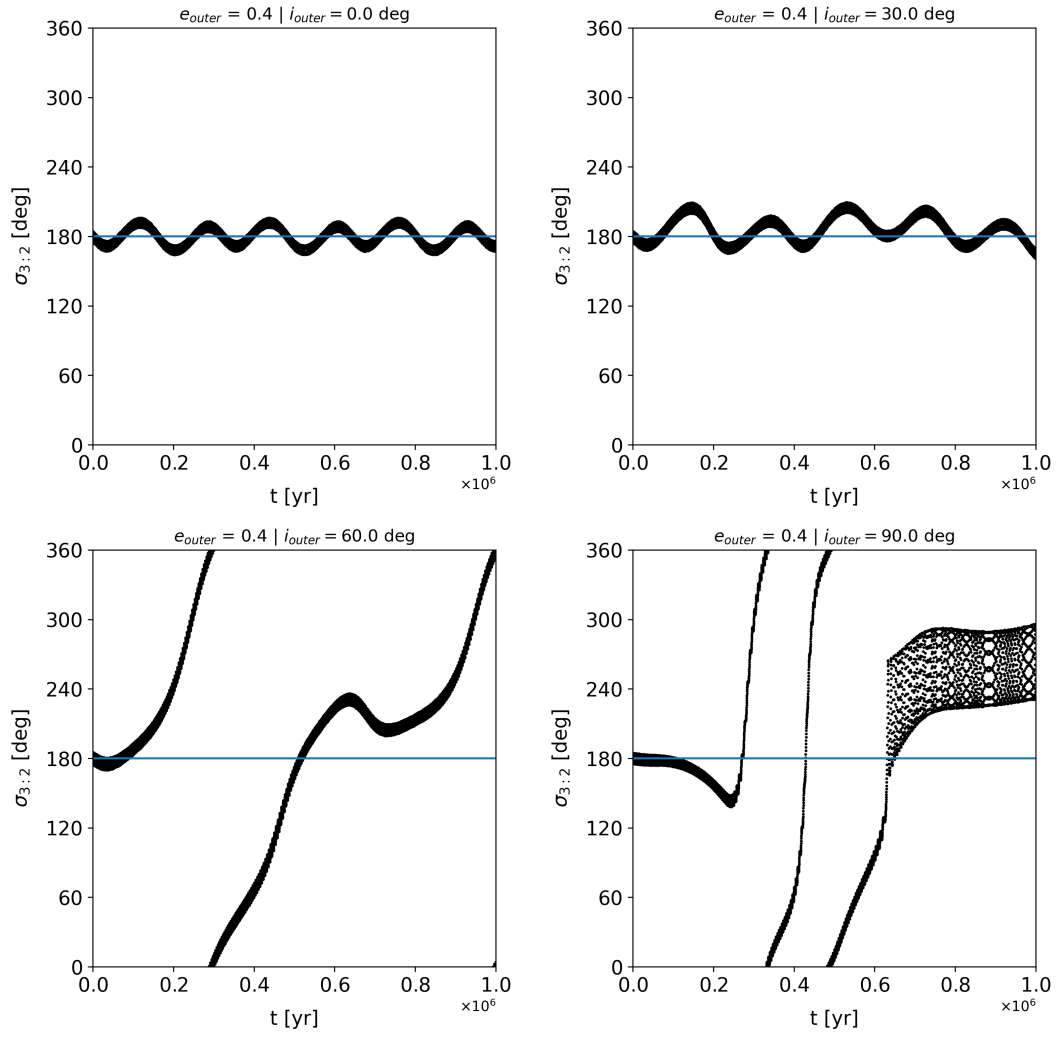


Figura 6.14: Evolución temporal a largo plazo del ángulo crítico para la resonancia 3:2 y diversos valores de inclinación y $e_{outer} = 0.4$.

Capítulo 7

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo se han estudiado en detalle las propiedades de las resonancias de movimientos medios considerando valores arbitrarios de excentricidad e inclinación. Particularmente, hemos mapeado los anchos resonantes y caracterizado el número y valor de los puntos de equilibrio para distintas resonancias y configuraciones orbitales utilizando modelos semianalíticos. Estos resultados ofrecen una visión más amplia de las configuraciones resonantes posibles en sistemas planetarios. A continuación, resumimos las principales conclusiones y las perspectivas que surgen de este trabajo.

Siguiendo los objetivos planteados, analizamos en forma global la dependencia de las propiedades resonantes con los elementos orbitales, tanto para el caso planetario como asteroidal. Mostramos que ilustrar la estructura completa de la resonancia es difícil debido al elevado número de grados de libertad en el caso general. Sin embargo, describimos comportamientos generales mediante proyecciones del espacio de fase.

Respecto a los puntos de equilibrio, encontramos que su número puede variar entre 1 y 3, y que tanto su cantidad como su localización son independientes de las masas involucradas. Por tanto, la distinción entre resonancias internas y externas resulta solamente una cuestión de sistema de referencia. Además mostramos que los puntos de equilibrio asimétricos surgen de bifurcaciones de puntos simétricos, y que dichas bifurcaciones dependen del orden de la resonancia y la configuración orbital. Estas bifurcaciones se observan de forma más clara en configuraciones con simetría espacial.

La evolución secular no siempre permite la estabilidad dentro de la resonancia, ya que la evolución de los elementos orbitales genera cambios en la

topología del Hamiltoniano y puede llevar al sistema fuera de la resonancia. Esto explica por qué no observamos objetos reales de catálogo ocupando algunos puntos de equilibrio hallados con el modelo. El índice de variación topológica (IVT) permite identificar regiones donde el número de puntos de equilibrio no dependen de las variables angulares.

En cuanto al período de libración, es importante no confundirlo con un período secular de más largo plazo que aparece al evolucionar el sistema dentro de la resonancia. Si bien la masa no influye en el número de puntos de equilibrio, sí lo hace al ancho, al período y a la evolución secular dentro de la resonancia. Particularmente, se mostró que evoluciones resonantes de alta inclinación pueden causar una evolución drástica de la topología de la resonancia, causando que el número de puntos de equilibrio cambie rápidamente lo que puede causar transiciones entre puntos de equilibrio o escapes de la resonancia. Por otro lado, el ancho de la resonancia sí depende de las masas y de la configuración particular. También mostramos que los cuellos en el ancho resonante no siempre corresponden a cambios en el número de puntos de equilibrio.

Exploramos catálogos de cuerpos menores y exoplanetas identificando numerosos ejemplos resonantes, varios de ellos con excentricidades e inclinaciones altas. El modelo semianalítico demostró ser clave para restringir el semieje de candidatos resonantes y determinar centros y períodos resonantes, reproduciendo los resultados observados con integraciones numéricas. Como ejemplos, encontramos objetos resonantes externos a Neptuno y coorbitales de la mayoría de planetas. Para los Hildas, identificamos un objeto librando alrededor de un centro distinto a 0° . También encontramos objetos de alta inclinación correctamente descritos por el modelo. Para el caso planetario excéntrico, mostramos la aparición de soluciones asimétricas y discutimos la posibilidad de que un planeta 9 genere este tipo de órbitas.

Particularmente, estudiamos en detalle la resonancia 1:1, mostrando cómo los puntos de equilibrio asociados a los puntos de Lagrange se desplazan y colisionan al aumentar la excentricidad y la inclinación. Este estudio dio lugar a una publicación adjuntada en el Anexo 2. En dicho artículo, utilizando el ancho máximo estimado y luego verificando con integraciones numéricas, construimos un catálogo de coorbitales con los distintos planetas, identificando más de 150 objetos (excluyendo los de Júpiter). Encontramos órbitas de tipo renacuajo, herradura, cuasisatélite y órbitas compuestas que alternan entre estos

tipos. Destacamos la población de alta excentricidad de Venus y el coorbital retrógrado de Júpiter para los cuales el modelo reprodujo los resultados de integraciones numéricas. Cabe mencionar que identificamos objetos en “sticking”, orbitas no estrictamente en resonancia pero claramente influenciadas por la misma. Varios de estos objetos no habían sido reportados previamente como resonantes.

En el caso de sistemas de exoplanetas, encontramos decenas de sistemas como posibles resonantes, siendo las resonancias más frecuentes la 2:1, 3:2 y 5:3 en coincidencia con lo reportado en la literatura. Sin embargo, la limitada precisión dinámica de muchos sistemas dificulta diferenciar entre sistemas estrictamente resonantes y sistemas cercanos a la conmensurabilidad. Mostramos que en configuraciones de alta excentricidad la resonancia puede ser necesaria para mantener la estabilidad frente a zonas caóticas. También estudiamos un sistema recientemente detectado con alta inclinación mutua, donde el modelo reproduce correctamente la evolución resonante. Consideramos muy importante que los trabajos observacionales de descubrimiento incluyan un análisis dinámicos de los resultados publicados.

En base a todos estos ejemplos, validamos el modelo semianalítico comparándolo con integraciones numéricas individuales y con mapas dinámicos, obteniendo un alto grado de consistencia siempre que la evolución secular sea lenta respecto al período de libración. Implementamos una interfaz en Python del modelo para el caso restringido (ver Anexo 1) lo que facilita su utilización. Esta permite usar el modelo de forma integrada con simulaciones numéricas. Hemos encontrado y resuelto algunos pequeños bugs en los códigos originales a lo largo del desarrollo del trabajo.

Si bien el modelo ha funcionado bien en la mayoría de situaciones, hemos identificado algunas limitaciones claras. Si la evolución secular de los elementos orbitales es rápida, entonces el modelo no es útil. Además, cabe aclarar que no tenemos ninguna capacidad predictiva sobre la evolución secular del sistema. Particularmente, el hecho de que los puntos de equilibrio puedan colisionar y desaparecer dificulta la implementación de esquemas como el invariante adiabático. El modelo no reproduce la ley de estructura y una limitación de la implementación actual es que estima solamente el ancho máximo de la resonancia, no de cada punto de equilibrio.

Quedan abiertas varias cuestiones que marcan líneas de investigación a futuro. Es importante estudiar cómo la estructura resonante instantánea descrita

en este trabajo influye en la evolución secular a largo plazo. Particularmente, sería interesante estudiar si las zonas del espacio de fases con $IVT = 0$ evolucionan en forma distinta a las zonas donde el número de puntos de equilibrio cambia más frecuentemente. Un fenómeno clave a explorar es la excitación de la inclinación en evoluciones resonantes seculares que puedan explicar arquitecturas de sistemas de exoplanetas resonantes inclinados. Futuros avances observacionales permitirán evaluar que tan comúnmente pueden darse dichas configuraciones orbitales. Otra cuestión abierta es la naturaleza de las bifurcaciones que originan puntos de equilibrio asimétricos. Finalmente, la población coorbital de Venus podría tener gran importancia por ser una posible fuente de objetos potencialmente peligrosos, lo que motiva campañas de observación y estudios en detalle de dicha población.

Referencias bibliográficas

- Agol, E., Steffen, J., Sari, R., y Clarkson, W. (2005). On detecting terrestrial planets with timing of giant planet transits. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 359(2), 567-579. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.08922.x>
- Albrecht, S., Winn, J. N., Johnson, J. A., Howard, A. W., Marcy, G. W., Butler, R. P., Arriagada, P., Crane, J. D., Shectman, S. A., Thompson, I. B., Hirano, T., Bakos, G., y Hartman, J. D. (2012). Obliquities of Hot Jupiter Host Stars: Evidence for Tidal Interactions and Primordial Misalignments. *The Astrophysical Journal*, 757(1), Artículo 18, 18. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/757/1/18>
- Antoniadou, K. I., y Libert, A.-S. (2018a). Origin and continuation of 3/2, 5/2, 3/1, 4/1 and 5/1 resonant periodic orbits in the circular and elliptic restricted three-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 130(6), 41.
- Antoniadou, K. I., y Libert, A.-S. (2018b). Puzzling out the coexistence of terrestrial planets and giant exoplanets-the 2/1 resonant periodic orbits. *Astronomy & Astrophysics*, 615, A60.
- Bailey, M., Chambers, J., y Hahn, G. (1992). Origin of sungrazers-A frequent cometary end-state. *Astronomy and Astrophysics (ISSN 0004-6361)*, vol. 257, no. 1, p. 315-322., 257, 315-322.
- Batygin, K., y Morbidelli, A. (2012). Dissipative divergence of resonant orbits. *The Astronomical Journal*, 145(1), 1.
- Beauge, C. (1994). Asymmetric Librations in Exterior Resonances. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 60(2), 225-248. <https://doi.org/10.1007/BF00693323>
- Beaugé, C. (1996). On a global expansion of the disturbing function in the planar elliptic restricted three-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 64(4), 313-350.

- Blunt, S., Endl, M., Weiss, L. M., Cochran, W. D., Howard, A. W., MacQueen, P. J., Fulton, B. J., Henry, G. W., Johnson, M. C., Kosiarek, M. R., et al. (2019). Radial Velocity Discovery of an Eccentric Jovian World Orbiting at 18 au. *The Astronomical Journal*, 158(5), 181.
- Borsa, F., Allart, R., Casasayas-Barris, N., Tabernero, H., Zapatero Osorio, M. R., Cristiani, S., Pepe, F., Rebolo, R., Santos, N. C., Adibekyan, V., Bourrier, V., Demangeon, O. D. S., Ehrenreich, D., Pallé, E., Sousa, S., Lillo-Box, J., Lovis, C., Micela, G., Oshagh, M., ... Zerbi, F. (2021). Atmospheric Rossiter-McLaughlin effect and transmission spectroscopy of WASP-121b with ESPRESSO. *Astronomy & Astrophysics*, 645, Artículo A24, A24. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039344>
- Bottke, W. F., Rubincam, D. P., y Burns, J. A. (2000). Dynamical evolution of main belt meteoroids: Numerical simulations incorporating planetary perturbations and Yarkovsky thermal forces. *Icarus*, 145(2), 301-331.
- Bottke, W. F., Vokrouhlický, D., Rubincam, D. P., y Nesvorný, D. (2006). The Yarkovsky and YORP effects: Implications for asteroid dynamics. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 34(1), 157-191.
- Cerioni, M., Beauge, C., y Gallardo, T. (2022). Is the orbital distribution of multiplanet systems influenced by pure three-planet resonances? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 513(1), 541-550.
- Chambers, J. E. (1999). A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 304(4), 793-799.
- Chambers, J. E. (2012, enero). *Mercury: A software package for orbital dynamics*.
- Charalambous, C., Marti, J. G., Beauge, C., y Ramos, X. S. (2018). Resonance capture and dynamics of three-planet systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 477(1), 1414-1425.
- Christiansen, J. L., McElroy, D. L., Harbut, M., Ciardi, D. R., Crane, M., Good, J., Hardegree-Ullman, K. K., Kesseli, A. Y., Lund, M. B., Lynn, M., et al. (2025). The NASA Exoplanet Archive and Exoplanet Follow-up Observing Program: Data, Tools, and Usage. *arXiv preprint arXiv:2506.03299*.
- Cincotta, P. M., y Simó, C. (2000). Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials - I. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 147, 205-228. <https://doi.org/10.1051/aas:2000108>

- Di Sisto, R. P., Ramos, X. S., y Beaugé, C. (2014). Giga-year evolution of Jupiter Trojans and the asymmetry problem. *Icarus*, 243, 287-295.
- Ellis, K. M., y Murray, C. D. (2000). The disturbing function in solar system dynamics. *Icarus*, 147(1), 129-144.
- Errico, A., Wittenmyer, R. A., Horner, J., Li, Z., Brandt, G. M., Kane, S. R., Fetherolf, T., Holt, T. R., Carter, B., Clark, J. T., Butler, R. P., Tinney, C. G., Ballard, S., Bowler, B. P., Kielkopf, J., Liu, H., Plavchan, P. P., Shporer, A., Zhang, H., ... Okumura, J. (2022). HD 83443c: A Highly Eccentric Giant Planet on a 22 yr Orbit. *The Astronomical Journal*, 163(6), Artículo 273, 273. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/ac6589>
- Fabrycky, D. C., Lissauer, J. J., Ragozzine, D., Rowe, J. F., Steffen, J. H., Agol, E., Barclay, T., Batalha, N., Borucki, W., Ciardi, D. R., et al. (2014). Architecture of Kepler's multi-transiting systems. II. New investigations with twice as many candidates. *The Astrophysical Journal*, 790(2), 146.
- Farinella, P., Froeschlé, C., y Gonczi, R. (1994). Meteorite delivery and transport. *Symposium-International Astronomical Union*, 160, 205-222.
- Fernández, J. A., Gallardo, T., y Brunini, A. (2002). Are there many inactive Jupiter-family comets among the near-Earth asteroid population? *Icarus*, 159(2), 358-368.
- Ferraz-Mello, S., y Sato, M. (1989). The very-high-eccentricity asymmetric expansion of the disturbing function near resonances of any order. *Astronomy & Astrophysics*, 225, 541-547.
- Ferraz-Mello, S. (2013). Tidal synchronization of close-in satellites and exoplanets. A rheophysical approach. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 116(2), 109-140.
- Ferraz-Mello, S., y Klafke, J. (1991). A model for the study of very-high-eccentricity asteroidal motion: the 3: 1 resonance. En *Predictability, stability, and chaos in N-body dynamical systems* (pp. 177-184). Springer.
- Gallardo, T. (2007). The Mars 1: 2 resonant population. *Icarus*, 190(1), 280-282.
- Gallardo, T. (2018). Resonances in the asteroid and trans-Neptunian belts: A brief review. *Planetary and Space Science*, 157, 96-103.
- Gallardo, T. (2020). Three-dimensional structure of mean motion resonances beyond Neptune. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 132(2), 9.

- Gallardo, T., Beaugé, C., y Giuppone, C. A. (2021). Semianalytical model for planetary resonances. Application to planets around single and binary stars. *Astronomy and Astrophysics*, 646, Artículo A148, A148. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039764>
- Gladman, B. J., Migliorini, F., Morbidelli, A., Zappala, V., Michel, P., Cellino, A., Froeschle, C., Levison, H. F., Bailey, M., y Duncan, M. (1997). Dynamical lifetimes of objects injected into asteroid belt resonances. *Science*, 277, 197-201. <https://doi.org/10.1126/science.277.5323.197>
- Goździewski, K., Niedzielski, A., Schneider, J., Rodríguez, A., y Ferraz-Mello, S. (2010). Tidal decay and circularization of the orbits of short-period planets. *European Astronomical Society Publications Series*, 42, 411-418.
- Hadjidemetriou, J. D. (1993). Asteroid motion near the 3 : 1 resonance. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 56(4), 563-599. <https://doi.org/10.1007/BF00696186>
- Henrard, J. (1993). The Adiabatic Invariant in Classical Mechanics. En C. K. R. T. Jones, U. Kirchgraber y H. O. Walther (Eds.), *Dynamics Reported: Expositions in Dynamical Systems* (pp. 117-235). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61232-9_4
- Holman, M. J., y Murray, N. W. (2005). The Use of Transit Timing to Detect Terrestrial-Mass Extrasolar Planets. *Science*, 307(5713), 1288-1291. <https://doi.org/10.1126/science.1107822>
- Ito, T., y Ohtsuka, K. (2019). The Lidov-Kozai oscillation and hugo von Zeipel. *arXiv preprint arXiv:1911.03984*.
- Ivezić, Ž., Kahn, S. M., Tyson, J. A., Abel, B., Acosta, E., Allsman, R., Alonso, D., AlSayyad, Y., Anderson, S. F., Andrew, J., Angel, J. R. P., Angeli, G. Z., Ansari, R., Antilogus, P., Araujo, C., Armstrong, R., Arndt, K. T., Astier, P., Aubourg, É., ... Mills, D. J. (2019). LSST: From Science Drivers to Reference Design and Anticipated Data Products. *Astrophysical Journal*, 873(2), Artículo 111, 111. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab042c>
- Jackson, B., Greenberg, R., y Barnes, R. (2008). Tidal evolution of close-in extrasolar planets. *The Astrophysical Journal*, 678(2), 1396.
- Kipping, D. M. (2013). Parametrizing the exoplanet eccentricity distribution with the beta distribution. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 434(1), L51-L55.

- Kirkwood, D. (1867). *Meteoric astronomy: a treatise on shooting-stars, fireballs, and aerolites*. JB Lippincott & Company.
- Knudstrup, E., Albrecht, S. H., Gandolfi, D., Marcussen, M. L., Goffo, E., Serrano, L. M., Dai, F., Redfield, S., Hirano, T., Csizmadia, S., Cochran, W. D., Deeg, H. J., Fridlund, M., Lam, K. W. F., Livingston, J. H., Luque, R., Narita, N., Palle, E., Persson, C. M., y Van Eylen, V. (2023). A puffy polar planet. The low density, hot Jupiter TOI-640 b is on a polar orbit. *Astronomy & Astrophysics*, 671, Artículo A164, A164. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202245301>
- Kurlander, J. A., Bernardinelli, P. H., Schwamb, M. E., Juric, M., Murtagh, J., Chandler, C. O., Merritt, S. R., Nesvorny, D., Vokrouhlicky, D., Jones, R. L., et al. (2025). Predictions of the LSST Solar System Yield: Near-Earth Objects, Main Belt Asteroids, Jupiter Trojans, and Trans-Neptunian Objects. *arXiv preprint arXiv:2506.02487*.
- Laplace, P.-S. (1799). *Traité de mécanique céleste* (Vol. 2). De l'imprimerie de Crapelet, Chez JBM Duprat libraire pour les Mathématiques ...
- Laskar, J. (1994). Large-scale chaos in the solar system. *Astronomy and Astrophysics (ISSN 0004-6361)*, vol. 287, no. 1, p. L9-L12, 287, L9-L12.
- Lee, M. H., y Peale, S. J. (2002). Dynamics and Origin of the 2:1 Orbital Resonances of the GJ 876 Planets. *The Astrophysical Journal*, 567(1), 596-609. <https://doi.org/10.1086/338504>
- Lei, H. (2019). Three-dimensional phase structures of mean motion resonances. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 487(2), 2097-2116.
- Levison, H. F., Olkin, C. B., Noll, K. S., Marchi, S., Bell III, J. F., Bierhaus, E., Binzel, R., Bottke, W., Britt, D., Brown, M., et al. (2021). Lucy mission to the Trojan asteroids: science goals. *The Planetary Science Journal*, 2(5), 171.
- Levison, H. F., Shoemaker, E. M., y Shoemaker, C. S. (1997). Dynamical evolution of Jupiter's Trojan asteroids. *Nature*, 385(6611), 42-44.
- Li, H., y Zhou, L.-Y. (2024a). Secular structure of 1: 2 and 1: 3 mean motion resonances with Neptune. *Astronomy & Astrophysics*, 687, A206.
- Li, H., y Zhou, L.-Y. (2024b). Secular structure of 1:2 and 1:3 mean motion resonances with Neptune. *Astronomy & Astrophysics*, 687, Artículo A206, A206. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202449317>
- Li, M., Huang, Y., y Gong, S. (2019a). Survey of asteroids in retrograde mean motion resonances with planets. *Astronomy & Astrophysics*, 630, A60.

- Li, M., Huang, Y., y Gong, S. (2019b). Survey of asteroids in retrograde mean motion resonances with planets. *Astronomy & Astrophysics*, 630, Artículo A60, A60. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201936117>
- Lithwick, Y., y Wu, Y. (2012). Resonant repulsion of Kepler planet pairs. *The Astrophysical Journal Letters*, 756(1), L11.
- Lykawka, P., y Horner, J. (2010). The capture of Trojan asteroids by the giant planets during planetary migration. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 405(2), 1375-1383.
- Maffione, N. P., Giordano, C. M., y Cincotta, P. M. (2011). Testing a fast dynamical indicator: The MEGNO. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(1), 23-34.
- Malhotra, R., y Ito, T. (2025). The doubly librating Plutinos. *The Astrophysical Journal*, 980(1), 115.
- Marshall, J., Horner, J., Wittenmyer, R., Clark, J., y Mengel, M. (2020). Stability analysis of three exoplanet systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 494(2), 2280-2288.
- Masset, F., y Snellgrove, M. (2001). Reversing type II migration: resonance trapping of a lighter giant protoplanet. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 320(4), L55-L59. <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2001.04159.x>
- Mayor, M., y Queloz, D. (1995). A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, 378(6555), 355-359. <https://doi.org/10.1038/378355a0>
- Message, P. J. (1959). Some periodic orbits in the restricted problem of three bodies and their stabilities. *The Astronomical Journal*, 64, 226. <https://doi.org/10.1086/107925>
- Michtchenko, T. A., y Ferraz-Mello, S. (2001). Resonant Structure of the Outer Solar System in the Neighborhood of the Planets. *The Astronomical Journal*, 122(1), 474.
- Moons, M. (1996). Review of the dynamics in the Kirkwood gaps. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 65(1-2), 175-204. <https://doi.org/10.1007/BF00048446>
- Morbidelli, A. (2002). *Modern celestial mechanics: aspects of solar system dynamics*.
- Murray, C. D., y Dermott, S. F. (1999). *Solar system dynamics*. Cambridge university press.

- Nabbie, E., Huang, C. X., Korth, J., Parviainen, H., Wang, S., Venner, A., Wittenmyer, R., Bieryla, A., Latham, D. W., Li, G., et al. (2025). A high mutual inclination system around KOI-134 revealed by transit timing variations. *Nature Astronomy*, 1-9.
- Naef, D., Latham, D. W., Mayor, M., Mazeh, T., Beuzit, J.-L., Drukier, G. A., Perrier-Bellet, C., Queloz, D., Sivan, J.-P., y Torres, G. (2001). HD 80606 b, a planet on an extremely elongated orbit. *Astronomy and Astrophysics*, 375(2), L27-L30.
- Namouni, F., y Morais, M. H. M. (2018). The disturbing function for asteroids with arbitrary inclinations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 474(1), 157-176.
- Nesvorný, D., Thomas, F., Ferraz-Mello, S., y Morbidelli, A. (2002). A perturbative treatment of the co-orbital motion. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 82(4), 323-361.
- Pan, N., y Gallardo, T. (2025). An attempt to build a dynamical catalog of present-day solar system co-orbitals. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 137(1), 2.
- Papaloizou, J. C. B., y Szuszkiewicz, E. (2005). On the migration-induced resonances in a system of two planets with masses in the Earth mass range. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 363(1), 153-176. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09427.x>
- Pirani, S., Johansen, A., Bitsch, B., Mustill, A. J., y Turrini, D. (2019). Consequences of planetary migration on the minor bodies of the early solar system. *Astronomy & Astrophysics*, 623, A169.
- Poincaré, H. (1890). Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta mathematica*, 13(1), A3-A270.
- Pons, J., y Gallardo, T. (2024). Secular evolution of resonant planets in the coplanar case-Application to the systems HD 73526 and HD 31527. *Astronomy & Astrophysics*, 685, A105.
- Pons, J., y Gallardo, T. (2022). Secular evolution of resonant small bodies: semi-analytical approach for arbitrary eccentricities in the coplanar case. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 511(1), 1153-1166.
- Pons Vuolo, J. A. (2022). *Dinámica secular de sistemas resonantes coplanares: aplicaciones en el Sistema Solar y en sistemas extrasolares* [Tesis de Maestría]. Universidad de la República (Uruguay). Facultad de Ciencias

- PEDECIBA [Tutor: Tabaré Gallardo. Título obtenido: Magíster en Física, opción Astronomía].
- Pont, F., Husnoo, N., Mazeh, T., y Fabrycky, D. (2011). Determining eccentricities of transiting planets: a divide in the mass–period plane. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 414(2), 1278-1284.
- Rein, H., y Liu, S. -. (2012). REBOUND: an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics. *Astronomy and Astrophysics*, 537, Artículo A128, A128. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201118085>
- Rein, H., y Spiegel, D. S. (2015). IAS15: a fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 446(2), 1424-1437. <https://doi.org/10.1093/mnras/stu2164>
- Rein, H., y Tamayo, D. (2016). Second-order variational equations for N-body simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 459(3), 2275-2285. <https://doi.org/10.1093/mnras/stw644>
- Robutel, P., y Gabern, F. (2006). The resonant structure of Jupiter’s Trojan asteroids–I. Long-term stability and diffusion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 372(4), 1463-1482.
- Rodríguez, A., Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A., Beaugé, C., y Miloni, O. (2011). Tidal decay and orbital circularization in close-in two-planet systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 415(3), 2349-2358.
- Sanchis-Ojeda, R., Winn, J. N., Marcy, G. W., Howard, A. W., Isaacson, H., Johnson, J. A., Torres, G., Albrecht, S., Campante, T. L., Chaplin, W. J., Davies, G. R., Lund, M. N., Carter, J. A., Dawson, R. I., Buchhave, L. A., Everett, M. E., Fischer, D. A., Geary, J. C., Gilliland, R. L., ... Latham, D. W. (2013). Kepler-63b: A Giant Planet in a Polar Orbit around a Young Sun-like Star. *The Astrophysical Journal*, 775(1), Artículo 54, 54. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/775/1/54>
- Smirnov, E. A. (2025). Chaotic diffusion and transient resonance captures of the near-Earth asteroid 2024 YR4. *Astronomy & Astrophysics*, 699, A26.
- Sozzetti, A., Pinamonti, M., Damasso, M., Desidera, S., Biazzo, K., Bonomo, A. S., Nardiello, D., Gratton, R., Lanza, A. F., Malavolta, L., Giacobbe, P., Affer, L., Bignamini, A., Borsa, F., Boschini, W., Brogi, M., Cabona, L., Claudi, R., Covino, E., ... Turrini, D. (2023). The GAPS Pro-

- gramme at TNG. XLVII. A conundrum resolved: HIP 66074b/Gaia-3b characterised as a massive giant planet on a quasi-face-on and extremely elongated orbit. *Astronomy & Astrophysics*, 677, Artículo L15, L15. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202347329>
- Stefánsson, G., Mahadevan, S., Petrovich, C., Winn, J. N., Kanodia, S., Millholland, S. C., Maney, M., Cañas, C. I., Wisniewski, J., Robertson, P., Nanan, J. P., Ford, E. B., Bender, C. F., Blake, C. H., Cegla, H., Cochran, W. D., Diddams, S. A., Dong, J., Endl, M., . . . Wright, J. T. (2022). The Warm Neptune GJ 3470b Has a Polar Orbit. *The Astrophysical Journal Letters*, 931(2), Artículo L15, L15. <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac6e3c>
- Steffen, J. H., Fabrycky, D. C., Agol, E., Ford, E. B., Morehead, R. C., Cochran, W. D., Lissauer, J. J., Adams, E. R., Borucki, W. J., Bryson, S., et al. (2013). Transit timing observations from Kepler–VII. Confirmation of 27 planets in 13 multiplanet systems via transit timing variations and orbital stability. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 428(2), 1077-1087.
- Stevenson, A., Haswell, C. A., Faria, J., Barnes, J., Barstow, J., Dickinson, H., y Standing, M. (2025). RV-exoplanet eccentricities: Good, Beta, and Best. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 539(2), 727-754.
- Triaud, A. H. M. J. (2018). The Rossiter–McLaughlin Effect in Exoplanet Research. En H. J. Deeg y J. A. Belmonte (Eds.), *Handbook of Exoplanets* (pp. 1375-1401). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-55333-7_2
- Valsecchi, F., y Rasio, F. A. (2014). Planets on the edge. *The Astrophysical Journal Letters*, 787(1), L9.
- Viera, L. E. (2023). *Efectos seculares y resonantes generados por el hipotético Planeta 9* [Tesis de maestría]. Universidad de la República (Uruguay), Facultad de Ciencias - PEDECIBA [Tutor: Tabaré Gallardo. Licencia Creative Commons Atribución - No Comercial - Sin Derivadas (CC BY-NC-ND 4.0)]. <https://hdl.handle.net/20.500.12008/XXXX>
- Wiegert, P., Connors, M., y Veillet, C. (2017). A retrograde co-orbital asteroid of Jupiter. *Nature*, 543(7647), 687-689.
- Wilson, C. (1985). The Great Inequality of Jupiter and Saturn: from Kepler to Laplace. *Archive for History of Exact Sciences*, 33, 15-290.

- Winn, J. N. (2010). *Exoplanet transits and occultations* (Vol. 55). University of Arizona Press Tucson, AZ.
- Wisdom, J., y Holman, M. (1991). Symplectic maps for the N-body problem. *The Astronomical Journal*, 102, 1528-1538. <https://doi.org/10.1086/115978>
- Xie, J.-W. (2013). Transit timing variation of near-resonance planetary pairs: Confirmation of 12 multiple-planet systems. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208(2), 22.

ANEXOS

Anexo 1

Implementación en Python del modelo resonante restringido

En los artículos del modelo semianalítico seguido en este trabajo los códigos fuente fueron escritos en Fortran.

Como parte de este trabajo, hemos creado una clase de Python que facilita el uso de los distintos códigos del modelo de forma que es fácilmente integrable con otros paquetes para, por ejemplo, realizar integraciones numéricas.

La clase de Python contiene diversos métodos que permiten calcular los puntos de equilibrio, los periodos de libración, el ancho de la resonancia o las curvas de nivel del Hamiltoniano. La misma puede ser clonada del siguiente GitHub:

github.com/NicolasPan/semianalyticResonance

Anexo 2

Resonancia 1:1 en el Sistema Solar

Adjunto en formato pdf el artículo arbitrado publicado sobre esta resonancia.

link.springer.com/article/10.1007/s10569-024-10234-y