



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Teorías de gravedad en dos dimensiones y holografía

Sebastián Montoli

Programa de Posgrado en PEDECIBA - Física
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Octubre de 2025



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Teorías de gravedad en dos dimensiones y holografía

Sebastián Montoli

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en PEDECIBA - Física, Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en PEDECIBA - Física.

Director:

Ph.D. Prof. Guzmán Hernández-Chifflet

Codirector:

Ph.D. Prof. Miguel Campiglia

Montevideo – Uruguay

Octubre de 2025

Montoli, Sebastián

Teorías de gravedad en dos dimensiones y holografía
/ Sebastián Montoli. - Montevideo: Universidad de la
República, Facultad de Ciencias, 2025.

XII, 61 p. 29, 7cm.

Director:

Guzmán Hernández-Chifflet

Codirector:

Miguel Campiglia

Tesis de Maestría – Universidad de la República,
Programa en PEDECIBA - Física, 2025.

1. Gravedad cuántica bidimensional, 2. Conjetura
AdS/CFT, 3. Holografía, 4. Cuantización canónica,
5. Deformación $T\bar{T}$. I. Hernández-Chifflet, Guzmán, *et al.*
II. Universidad de la República, Programa de Posgrado
en PEDECIBA - Física. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Ph.D. Prof. Michael Reisenberger

Ph.D. Prof. Florencia Benítez

Ph.D Prof. Rodrigo Eyheralde

Ph.D Prof. Esteban Mato

Ph.D. Prof. Cecilia Cormick

Montevideo – Uruguay

Octubre de 2025

A la abuela, por el amor que
siempre me diste. A la Abua,
que me cuida desde arriba.

Agradecimientos

Todavía no puedo creer que estoy cerrando este capítulo. Esta tesis, como todas las demás cosas de mi vida, fue un poco caótica, apasionante e impredecible. Luego de ausentarme de la física por casi dos años, regresé y terminé este trabajo. Sin embargo, jamás lo podría haber logrado solo. Por eso mismo quiero agradecer a un montón de personas que desde distintos lugares hicieron esto posible.

Quería empezar agradeciendo a la ANII, que financió este proyecto. Pero más allá del agradecimiento formal que corresponde, agradezco que siempre me trataron con mucha empatía y entendimiento de mi situación personal. Es importantísimo el rol que cumplen para todos aquellos que queremos dedicarnos a la ciencia.

Mi experiencia como estudiante de posgrado en Uruguay desde el punto de vista académico fue muy buena, fundamentalmente por los dos guías que tuve. En primer lugar quería agradecerle a Miguel por aceptar ser el cotutor de este proyecto. Él fue mi docente en física 1 cuando recién entré a la carrera, así que es muy significativo para mí que me acompañara también en esta instancia. Gracias por aceptar trabajar conmigo aunque haya tenido una etapa rebelde en la carrera y me tuvieras que ganar un partido de ping pong para que entre al teórico. A Guzmán, el tutor de esta maestría, lo conocí en el 2019 y supe que iba a ser mi tutor cuando a los diez minutos de llegar a su oficina por primera vez ya me estaba explicando que se necesitan 26 dimensiones para cuantizar la cuerda bosónica. Desde entonces pasamos por mucho para sacar adelante este trabajo. Siempre estuvo cuando lo necesité, poniéndose manos a la obra en situaciones que no cualquiera se hubiera tomado la molestia de estar. Estuvo cuando le dije que me iba de la física y también estuvo cuando le dije que quería volver. Le he pedido firmas, trámites, cartas de recomendación, ayuda para entender cosas de física y mucho más, sin embargo nunca tuvo un pero. Guzmán, realmente te agradezco por todo el apoyo que me diste este tiempo. Las charlas que hemos tenido de física han sido lo más gratificante que hice en mi vida profesional. Cuando termine mi doctorado espero que podamos trabajar juntos como colegas.

Todavía recuerdo cuando empecé a interesarme por el universo y todo lo que ocurre en él, fue hablando con mi padre en frente de una fogata en las noches de vacaciones en El Pinar cuando era niño. Allí fue la primera vez que escuché hablar de agujeros negros, muchos años antes de saber lo que es un tensor métrico en una variedad. Viejo, gracias por abrirme las puertas al conocimiento, sé que voy a llevar el fuego de la curiosidad conmigo para siempre.

No solo de física vive el hombre. Aunque me costó un tiempo asumirlo, soy mucho más emocional de lo que soy racional. Sin lugar a dudas de quien más aprendí en la vida en ese aspecto es de mi madre. Una verdadera genia de los sentimientos. Mamá, gracias por ser siempre el faro del bien y la guardiana de mis emociones. Lo que me enseñaste me da la valentía para sentir el mundo como lo hago.

Siempre me consideré un tipo afortunado, a veces tanto que mi vida se siente orquestada por una fuerza inexplicable y eso que no soy creyente. La fortuna más grande que tengo es saber que no importa donde me encuentre sé que no camino solo, porque hay dos personas siempre de mi lado. Santi y Sabri, mis hermanos. Ustedes son la razón por la cual no tendría un hijo único, pues se perdería de la experiencia más linda del mundo. Gracias por bancarme cuando soy difícil y por entender incluso sin tener que explicar nada.

Ahora es el turno de agradecerle a dos amigos de la física y de la vida que han sido un apoyo fundamental en este último tiempo. Los dos saben muy bien todo lo que implica pasar por este proceso. Inti, a mi me tocó ser el hermano mayor en mi familia así que no tengo uno. Este último tiempo me has bancado mucho la cabeza y tu experiencia me ayudó a tener calma en un montón de situaciones. Sos un gran tipo, admirable y sumamente interesante. No cambies nunca. Uno que si está cambiando por motu proprio es el gran Nico Horvath. Gracias por tu apoyo estos meses con todo, estoy muy feliz de haberme hecho tu amigo y estoy muy orgulloso de vos y tus procesos. Ya eras un gran tipo, pero me encanta el camino que estás recorriendo.

También le quiero agradecer a Alfonso, mi psicólogo. El trabajo que hicimos para sacar adelante esto fue fenomenal. Gracias por ayudarme a transitar el caos que fue mi vida estos últimos dos años, me diste un montón de herramientas que me están ayudando a vivir mejor.

Si me pusiera a agradecer a cada persona de mi vida individualmente probablemente esta sección sería más larga que toda la tesis. Espero sepan perdonarme todos mis amigos y familiares que no listé explícitamente aquí, los quiero y les agradezco por todo su apoyo durante todo este proceso.

A todos aquellos que me quieren, y me quisieron, les agradezco de corazón.

RESUMEN

Recientemente se ha explorado la relación entre teorías de gravedad definidas en un parche finito del espacio tiempo y teorías de campo conformes deformadas por el flujo de $T\bar{T}$. En particular, se conjetura que la gravedad en un parche finito de un espacio asintóticamente AdS_3 tiene como dual holográfico una teoría conforme bidimensional deformada por $T\bar{T}$. El argumento principal que apoya esto es que la función de partición de una CFT deformada por el flujo $T\bar{T}$ es solución de la ecuación de Wheeler-DeWitt para la gravedad en AdS_3 . El objetivo de este trabajo es verificar esta relación en una dimensión menos, partiendo de un modelo particular de gravedad cuántica bidimensional en AdS_2 . Investigamos como son las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt para esta teoría de gravedad y encontramos una relación análoga a la antedicha, para una extensión de la deformación $T\bar{T}$ a teorías en dimensión 1.

Palabras claves:

Gravedad cuántica bidimensional, Conjetura AdS/CFT, Holografía,
Cuantización canónica, Deformación $T\bar{T}$.

ABSTRACT

Recently, the relationship between gravity theories defined on a finite patch of spacetime and conformal field theories deformed by the $T\bar{T}$ flow has been explored. In particular, it has been conjectured that gravity on a finite patch of an asymptotically AdS_3 spacetime has as its holographic dual a two-dimensional conformal field theory deformed by $T\bar{T}$. The main argument supporting this claim is that the partition function of a CFT deformed by the $T\bar{T}$ flow satisfies the Wheeler–DeWitt equation for gravity in AdS_3 .

The goal of this work is to test this relationship in one lower dimension, starting from a specific model of two-dimensional quantum gravity in AdS_2 . We study the solutions of the Wheeler–DeWitt equation for this gravity theory and find an analogous relation to the one mentioned above, corresponding to an extension of the $T\bar{T}$ deformation to one-dimensional theories. Keyword:

Tabla de contenidos

1	Introducción	1
2	Gravedad de Jackiw-Teitelboim en el formalismo de primer orden	5
2.1	Nociones de geometría diferencial	5
2.2	Relatividad general	7
2.3	La gravedad en dos dimensiones	9
2.4	Formulación de primer orden	10
3	Análisis canónico	12
3.1	Teoría de los sistemas vinculados	12
3.2	Gravedad de Jackiw-Teitelboim como sistema Hamiltoniano con vínculos	18
3.3	Análisis canónico de gravedad en 2+1	23
3.4	Gravedad de Jackiw-Teitelboim por reducción dimensional	24
4	Cuantización de Jackiw-Teitelboim en el formalismo de primer or- den	28
4.1	Geometría en el espacio de fases y cuantización canónica	28
4.1.1	Espacios de fase	29
4.1.2	Cuantización canónica	31
4.2	Cuantización de sistemas vinculados	32
4.3	Foliación radial y cuantización	34
4.4	Ecuación de Wheeler-DeWitt	37
4.4.1	Término cinético	39
4.4.2	Término de potencial	41
5	Estados cuánticos gravitacionales y la deformación $T\bar{T}$	44
5.1	Compactificación	44

5.2	Fijación de gauge y procedimiento de Faddeev-Popov	45
5.3	La deformación $T\bar{T}$	53
6	Conclusiones y trabajo a futuro	55
	Apéndices	57
	Apéndice 1 Integración Gaussiana.	58
	Bibliografía	60

Capítulo 1

Introducción

La célebre conjetura AdS/CFT [1] establece que una teoría de gravedad cuántica definida en un espaciotiempo Anti de Sitter (AdS) de dimensión d es dual a una teoría de campos conforme (CFT) definida en su borde, de dimensión $d - 1$. A nivel de las funciones de partición que definen las teorías a cada lado de la dualidad, esto puede entenderse como

$$Z_{AdS_d} = Z_{CFT_{d-1}}. \quad (1.1)$$

Aquí Z_{AdS_d} es la función de partición de la teoría gravitatoria para una geometría fija en la frontera asintótica del espaciotiempo AdS (el “borde” de AdS). $Z_{CFT_{d-1}}$ es la función de partición de una CFT cuyo espaciotiempo es precisamente esta frontera asintótica y la geometría de dicho espaciotiempo es precisamente la geometría que se fija como condición de borde del problema gravitatorio. Esta dualidad es un caso especial de una conjetura más amplia denominada “conjetura holográfica”, en la cual se espera que teorías que no necesariamente son conformes admitan una descripción dual mediante una teoría de gravedad cuántica en una dimensión mayor.

En el marco del estudio de la relación holográfica entre AdS_3 y CFT_2 , el punto de partida para esta tesis es el trabajo de Freidel [2]. Allí se considera la función de onda gravitacional en AdS, la cual es un funcional de la geometría inducida en superficies de radio constante r en el espaciotiempo. Independientemente de la teoría gravitatoria específica que se considere, se espera que estos funcionales de onda Ψ , satisfagan una ecuación de Wheeler-DeWitt (WDW)

$$\hat{H}\Psi = 0, \quad (1.2)$$

donde $\hat{H}$ es un operador lineal, siendo esta ecuación el análogo de la ecuación de Schrödinger para la gravedad cuántica.

En [2] se argumenta que para que (1.1) sea válida, las soluciones de (1.2) deben tender a la función de partición de la CFT dual en el límite en que el radio r tiene a infinito.

A partir de esta observación, se motiva la pregunta de si se pueden reconstruir los estados cuánticos gravitatorios Ψ en todo el espaciotiempo partiendo de una función de partición de una teoría de campos conforme. Freidel encuentra que esto es posible. Dada una foliación radial del espaciotiempo se muestra que la ecuación de Wheeler-DeWitt radial admite las siguientes soluciones

$$\Psi[e^+, e^-] = e^{\frac{ik}{4\pi} \int_{\Sigma} e} \int \mathcal{D}E e^{-\frac{ik}{2\pi} \int_{\Sigma} (E^+ - e^+) \wedge (E^- - e^-)} Z[E]. \quad (1.3)$$

donde los campos e parametrizan la métrica inducida en las superficies de radio constante mientras que los campos E parametrizan la métrica fluctuante en dichas superficies. La constante positiva k se relaciona con la constante cosmológica (negativa) mediante $k = (-16G\Lambda)^{-1/2}$. La clave de esta formulación es que para que el ansatz (1.3) efectivamente satisfaga la ecuación de WDW es necesario que $Z[E]$ cumpla con

$$\left(-E_{\mu}^a \frac{\delta}{\delta E_{\mu}^a} + \frac{i}{24\pi} (6k+1) R(E) \right) Z(E) = 0, \quad (1.4)$$

donde $R(E)$ es la curvatura escalar asociada a la geometría dada por E . Crucialmente para la interpretación holográfica, esta es precisamente la identidad de Ward que debe satisfacer la función de partición de una CFT bidimensional con carga central $c = 6k + 1$.

Interesantemente, la integral en el lado derecho de (1.3) se encontró independientemente [3] en el contexto del estudio de la llamada deformación $TT\bar{T}$. Esta observación constituye el segundo ingrediente principal del trabajo presentado en esta tesis.

La deformación $TT\bar{T}$ [4, 5] es un procedimiento para deformar infinitesimalmente una teoría de campos bidimensional a partir del determinante de su tensor de energía momento

$$S^{(\lambda+\delta\lambda)} = S^{(\lambda)} + \delta\lambda \int d^2x \det \left(T_{\mu\nu}^{(S^{(\lambda)})} \right). \quad (1.5)$$

Esto define un flujo en el espacio de acciones; integrar este flujo da lugar a una familia 1-paramétrica de teorías indexadas por λ .

En [3] se encontró que partiendo de una $S^{(0)}$ cualquiera, se puede obtener su deformación a lo largo del flujo definido por $T\bar{T}$ en un valor finito del parámetro λ acoplando a la teoría original una teoría de gravedad cuántica bidimensional

$$S^{(\lambda)} = S_{grav}(E, X, \lambda) + S^{(0)}(\varphi, E). \quad (1.6)$$

En esta expresión φ son los campos de la teoría inicial, E las variables del acoplamiento gravitatorio y X un campo auxiliar que asegura que S_{grav} sea invariante bajo difeomorfismos de los campos E .

La equivalencia de esta descripción gravitatoria con la deformación $T\bar{T}$ se estableció en [3] estudiando la termodinámica de estas teorías. Esta está dada por la función de partición en el toroide Euclideo cuando sobre el mismo se define una métrica plana e . En [3] se encontró que las funciones de partición a lo largo del flujo de la deformación $T\bar{T}$ pueden escribirse mediante la integral de caminos

$$Z_{2d}^{(\lambda)}[e] = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}E e^{-i\frac{1}{\lambda} \int d^2x (X_* e - E) \wedge (X_* e - E)} Z_{2d}^{(0)}[E]. \quad (1.7)$$

En principio este resultado es general. El vínculo con el resultado (1.3) es que si partimos de una teoría de campos conforme que cumple la identidad (1.4) entonces (1.7) es igual a la integral (1.3) evaluada en métricas constantes e .

Se ha demostrado entonces que si se imponen condiciones de Dirichlet sobre los campos e de forma que la métrica inducida sea plana y además se compactifica la coordenada temporal, los estados cuánticos dados por (1.3) se pueden interpretar como la deformación $T\bar{T}$ de la función de partición Z . Desde el lado gravitatorio esto establece una definición del parámetro de la deformación $T\bar{T}$ dado por

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (1.8)$$

Este resultado nos da una interpretación holográfica para la deformación $T\bar{T}$.

Nuestro trabajo consiste en demostrar resultados análogos en una dimensión menos. Estudiaremos una teoría de gravedad en 1+1 dimensiones (una espacial y otra temporal), pero en lugar de usar la métrica como campo dinámico la describiremos en el formalismo de primer orden. Estudiaremos los estados cuánticos de la teoría y mostraremos dos resultados principales. En primer lugar, que estos se pueden escribir como una integral de caminos que involucra una función de partición que debe cumplir identidad análoga a (1.4). Es decir, obtendremos una expresión del tipo (1.3) para el caso bidimensional. En segundo lugar, al evaluar esa expresión en

campos constantes obtendremos que la integral de caminos se reduce a una integral ordinaria, de manera similar a lo que sucede en [3]. De hecho, veremos que nuestro resultado se puede interpretar en términos de una extensión unidimensional de la deformación $T\bar{T}$.

La tesis está estructurada de la siguiente manera: en el capítulo 2 discutimos la física de la gravedad en 2 dimensiones y damos una definición precisa de la acción que usaremos a lo largo del trabajo. En el capítulo 3 estudiaremos esa teoría desde el punto de vista Hamiltoniano y veremos que puede interpretarse como un sistema vinculado. Estudiaremos su estructura canónica y los vínculos de la teoría dando su correspondiente interpretación. Además, comentaremos sobre la relación geométrica que existe entre la gravedad en 3 dimensiones y la teoría de gravedad bidimensional que consideramos. Esta relación inspira el método de cuantización que desarrollaremos en el capítulo 4. En dicho capítulo estudiaremos un esquema de cuantización canónica inspirado en [2]. Esto nos llevará a escribir el primer resultado principal del trabajo; encontraremos cómo se escriben los funcionales de onda mediante una integral de caminos y mostraremos cuál es la identidad que debe cumplir la función de partición que aparece en la misma. Finalmente en el capítulo 5 veremos que al imponer valores constantes para las variables canónicas, la integral de caminos que define el funcional de onda se convierte en una integral ordinaria. Obtenemos como resultado que los estados cuánticos de la teoría a valores constantes de los campos pueden interpretarse como el análogo a la deformación $T\bar{T}$ de una teoría de mecánica cuántica ordinaria.

Capítulo 2

Gravedad de Jackiw-Teitelboim en el formalismo de primer orden

2.1. Nociones de geometría diferencial

La relatividad general es una teoría de campos que explica los fenómenos gravitatorios a partir de considerar dinámica la geometría del espaciotiempo. A los efectos de describirla formalmente se requieren algunas nociones de geometría diferencial que resumimos brevemente en esta sección (ver por ejemplo [6]). Sobre el espaciotiempo como variedad se pueden definir su espacio tangente TM , el cual nos da la noción de vectores y su espacio cotangente T^*M que contiene las funciones lineales de los vectores a $\mathbb{R}$, también conocidas como 1-formas. Al ser espacios vectoriales, tanto TM como T^*M admiten bases, las cuales, al elegir un sistema de coordenadas local, permiten representar sus elementos de manera explícita. Dada una elección de coordenadas sobre cada carta que cubre la variedad se puede definir sobre TM una base adaptada a las coordenadas. Sean x^μ las coordenadas locales, existe la base $\{\partial_\mu\}$ de forma tal que si A es un vector se puede se puede expresar en términos de la misma como

$$A = A^\mu \partial_\mu. \quad (2.1)$$

Siendo que TM y T^*M definen espacios vectoriales de la misma dimensión en cada punto de la variedad, existe un isomorfismo entre ellos que nos permite definir una base $\{dx^\mu\}$ de T^*M a partir de la base adaptada a las coordenadas, la cual está dada por

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu. \quad (2.2)$$

Por lo tanto si B es una 1-forma se puede escribir en términos de esta base como:

$$B = B_\mu dx^\mu. \quad (2.3)$$

A partir de la definición de TM y T^*M se definen los tensores en la variedad tomando productos tensoriales entre los elementos de dichos espacios. Un tensor particularmente importante es el tensor métrico, un tensor de rango $(0, 2)$ que nos permite definir las nociones de distancia y volumen en la variedad. En particular, en relatividad general el espaciotiempo se modela como una variedad pseudoriemanniana, es decir una variedad diferenciable que admite un tensor métrico que no es necesariamente definido positivo. El tensor métrico se puede escribir en una base de $T^*M \otimes T^*M$ como

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (2.4)$$

Como tensor $(0, 2)$, el tensor métrico define un producto interno entre vectores en cada punto de la variedad, de modo que si X e Y son vectores definidos en un punto de la misma, su producto interno está dado por

$$g(X, Y) = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu. \quad (2.5)$$

La importancia del tensor métrico radica en que en la formulación estándar de la relatividad general este es la variable dinámica, la cual está dada por las ecuaciones de campo de Einstein que describen su comportamiento en relación con la distribución de materia y energía en el espaciotiempo.

Aunque definimos bases de TM y T^*M , estas no son únicas y es posible hacer un cambio de base en estos espacios que esté definido a partir de la métrica. Con esto en mente definimos la base local de campos vectoriales $u^a = u^{a\mu} \partial_\mu$ tales que

$$g(u^a, u^b) = \eta^{ab}. \quad (2.6)$$

Siendo $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, la métrica plana en Minkowski con $d - 1$ dimensiones espaciales. Aquí el índice a no es un índice en el espaciotiempo sino que vive en un espacio auxiliar que tiene la misma cantidad de entradas que el índice asociado a las coordenadas locales pues se necesitan esa cantidad de campos linealmente independientes para parametrizar el espacio TM . A partir de esta definición, se

induce una base natural de 1-formas en T^*M dada por e^a tales que

$$e^a(X) = g(u^a, X). \quad (2.7)$$

Esta elección de la base de T^*M es interesante pues resulta que la métrica puede descomponerse (al menos localmente) como $g = e^a \otimes e^b \eta_{ab}$. A la elección de estas bases se la conoce como formalismo veilbein.

Como veremos más adelante, esta elección de bases nos permitirá dar una formulación alternativa de la relatividad general en la que las variables dinámicas sean las 1-formas e^a y una conexión de espín en TM que queda definida por su acción sobre la base u^a

$$\nabla u^a = w^a_b u^b. \quad (2.8)$$

A esta conexión definida por w^a_b le pediremos que sea la conexión de Levi-Civita que siempre puede definirse sobre una variedad equipada con una métrica g y que es la única que cumple con la condición de ser compatible con la misma ($\nabla g = 0$) y tiene torsión 0:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0. \quad (2.9)$$

Hasta aquí solo hemos presentado brevemente algunas nociones básicas de geometría diferencial en una variedad pseudoriemanniana. A continuación discutiremos algunos aspectos de la relatividad general a modo de motivación y luego retomaremos los conceptos de esta sección para dar la formulación de la gravedad que estudiaremos a lo largo de este trabajo.

2.2. Relatividad general

La relatividad general estándar es una teoría de campos en 4 dimensiones, 3 espaciales y una temporal, en la que la geometría descrita por el tensor métrico es dinámica [7]. En el vacío la ecuación de movimiento que rige esta dinámica es

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = 0, \quad (2.10)$$

donde Λ es la llamada constante cosmológica, $R_{\mu\nu}$ es una contracción del tensor de curvatura de Riemann y R el escalar de Ricci, estos dos últimos definidos en términos del tensor métrico. Una observación interesante es que en vacío las posibles

soluciones de la ecuación (2.10) son de curvatura escalar constante, la forma de ver esto es que si contraemos esta ecuación con la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ obtenemos $R = \Lambda$. Existen distintas soluciones para la geometría del espaciotiempo descrita por la métrica $g_{\mu\nu}$, dentro de ellas hay una clase especial de soluciones conocidas como maximalmente simétricas. Es posible demostrar que el número máximo de isometrías que admite un espaciotiempo es una función de su dimensionalidad d , cumpliéndose que este número es $d(d+1)/2$. Estas isometrías están dadas por campos vectoriales que preservan la métrica bajo la derivada de Lie, es decir que un campo X es el generador de una isometría de la métrica $g_{\mu\nu}$ si $\mathcal{L}_X g = 0$. A modo de ejemplo, si la constante cosmológica es cero el espaciotiempo de Minkowski es solución de las ecuaciones de Einstein y en dimensión $d = 4$ es un espaciotiempo maximalmente simétrico pues tiene diez isometrías asociadas a los generadores del grupo de Poincaré que se conforma de tres generadores de rotaciones alrededor de los ejes espaciales, tres generadores de boost y 4 generadores de traslaciones.

Es importante destacar que la teoría en 4 dimensiones admite la propagación de ondas gravitacional, por lo que la física que describe tiene 2 grados de libertad propagantes. Veremos más adelante que la física que encontramos al intentar describir la gravedad con otra cantidad de dimensiones es radicalmente distinta.

Cuando la constante cosmológica no es nula las soluciones maximalmente simétricas dependen del signo de la misma y estas se conocen como de Sitter (dS) para $\Lambda > 0$ y anti- de Sitter (AdS) para $\Lambda < 0$.

Es un problema abierto de la física tener una teoría cuántica de la relatividad general en 4 dimensiones. Entre los diversos problemas que presenta la teoría se encuentra que esta no es renormalizable [8], por lo que al intentar definir la teoría perturbativamente ocurre que para energías arbitrariamente altas se necesita tener una cantidad infinita de contratérminos, lo que la vuelve no predictiva a distancias suficientemente pequeñas. Al no tener una comprensión completa de cómo debería ser esta teoría a todas las escalas, diversos enfoques se han planteado para intentar resolver estas inconsistencias. En este contexto, una herramienta que se ha desarrollado es la conjetura AdS/CFT, en la cual se postula que una teoría de gravedad cuántica definida en el espacio AdS es dual a una teoría de campos conforme que está definida en su frontera. Esto puede ser entendido en ambos sentidos; un problema de gravedad puede ser mapeado a un problema de teoría de campos conforme y viceversa. Desde la perspectiva de la gravedad, resulta particularmente provechoso analizar la dualidad desde el lado de la CFT. En particular ofrece un camino para construir estados cuánticos gravitatorios. En este escenario el modelo de juguete

más sencillo que se puede utilizar para explorar aspectos de la dualidad es la gravedad en 2 dimensiones [9, 10]. Aunque la física subyacente no sea la misma que en $d = 4$, ya que como veremos por ejemplo no se propagan grados de libertad locales, la baja dimensionalidad nos permite hacer desarrollos analíticos y estudiar aspectos cuánticos de la teoría desde métodos que no necesariamente están bien definidos en otros casos, como es el caso de la ecuación de Wheeler-DeWitt. En la siguiente sección discutiremos cómo definir la gravedad en $d = 2$ que estudiaremos a lo largo del trabajo.

2.3. La gravedad en dos dimensiones

A nivel clásico uno puede obtener las ecuaciones de campo de la relatividad general a partir de la acción de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} R. \quad (2.11)$$

Si no consideramos materia, igualar a cero la variación de la acción con respecto a la métrica tiene como resultado las ecuaciones de Einstein (2.10), es decir, las ecuaciones de movimiento clásicas proceden de un principio variacional.

Una observación importante que podemos hacer a nivel de la acción es que la teoría es invariante por difeomorfismos, que son transformaciones de coordenadas diferenciables con inversa diferenciable. Estos pueden ser vistos como transformaciones con parámetros que dependen del punto en el espaciotiempo y en ese sentido funcionan como transformaciones de gauge de manera análoga a otras teorías de gauge como el electromagnetismo. Los difeomorfismos como transformaciones de gauge son una pieza clave para entender diferentes aspectos de la teoría, en particular permiten ver que aunque en dimensión $d = 4$ el tensor métrico tiene 10 componentes se propagan solo 2 grados de libertad asociados a las ondas gravitacionales [7].

En principio la acción (2.11) se puede definir para cualquier dimensión del espacio-tiempo, en particular para dimensión $d = 4$ se recuperan las ecuaciones estándares de la relatividad general. A priori sería válido definir la gravedad en dos dimensiones (una espacial y otra temporal) tomando $d = 2$. Sin embargo esto tiene un problema: en este caso particular debido a las simetrías que debe cumplir el tensor de curvatura de Riemann $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$, se demuestra que $R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, por lo que no se obtienen ecuaciones de movimiento al variar la acción. Otra manera de ver esto es que de acuerdo al teorema de Gauss-Bonnet la acción (2.11) es localmente

la integral de una derivada total en dos dimensiones [6].

Esto implica que necesitamos otra manera de definir la gravedad para el caso $d = 2$. Con el objetivo de obtener una acción con dinámica no trivial podemos acoplar a (2.11) un campo escalar ϕ conocido como dilatón, con un potencial $U(\phi)$ de la siguiente manera

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^2x \sqrt{-g} (\phi R + U(\phi)). \quad (2.12)$$

Diferentes elecciones del potencial $U(\phi)$ darán lugar a diferentes teorías, el caso que estudiaremos es $U(\phi) = -\Lambda\phi$, donde se introduce la constante cosmológica Λ dando lugar a lo que se conoce como acción de Jackiw-Teitelboim [11, 12]

$$S_{JT} = \frac{1}{16\pi G} \int d^2x \sqrt{g} \phi (R - \Lambda). \quad (2.13)$$

Una observación importante es que estamos tomando una constante cosmológica negativa, es decir, $\Lambda < 0$. Esta elección se hace para que la acción escrita de esta forma tenga como ecuación de movimiento para el dilatón ϕ que $R = \Lambda$ y sea manifiesto que la curvatura del espaciotiempo es negativa.

Esta acción tiene aplicabilidad en diferentes contextos, por ejemplo puede utilizarse para describir la física cerca del horizonte de eventos de un agujero negro extremal [13]. En el siguiente capítulo haremos el análisis de esta teoría gravitatoria desde el punto de vista Hamiltoniano. Sin embargo, no utilizaremos como punto de partida la acción (2.13). En su lugar utilizaremos los conceptos geométricos desarrollados en la sección 2.1 para dar una formulación de esta teoría en la que la variable dinámica no será el tensor métrico. Este formalismo, conocido como formulación de primer orden, es el utilizado para describir la geometría del espaciotiempo para los funcionales de onda gravitatorios y las funciones de partición que discutimos en el capítulo 1. Como queremos encontrar resultados análogos en una dimensión más baja, trabajaremos con este formalismo.

2.4. Formulación de primer orden

La acción (2.13) tiene como variable dinámica la métrica $g_{\mu\nu}$. Cuando la teoría se describe de esta forma se dice que es una formulación de segundo orden, pues las ecuaciones de movimiento incluyen derivadas de segundo orden del objeto dinámico de la teoría. Estamos interesados en estudiar esta acción desde otro formalismo,

conocido como formulación de primer orden, es decir un formalismo en el cual las ecuaciones de movimiento de los objetos dinámicos sean de primer orden. Para tales efectos utilizaremos las herramientas matemáticas desarrolladas en la sección 2.1. En lugar de considerar como objeto dinámico a la métrica $g_{\mu\nu}$ utilizaremos las 1-formas e_μ^a definidas por la relación (2.7). En nuestro caso el espaciotiempo es una variedad de dimensión 2, por lo que el índice a del espacio interno recorre el conjunto $\{0, 1\}$. La idea es escribir la acción (2.13) en términos de estos objetos, para lo cual necesitamos definir una conexión de espín tal como se hizo en (2.8). Una vez definidas la conexión de espín y las 1-formas e_μ^a se puede demostrar que el integrando en la acción (2.13) se puede escribir como [9]:

$$d^2x \sqrt{-g} (R - \Lambda) = dw - \frac{\Lambda}{2} e^0 \wedge e^1. \quad (2.14)$$

Sin embargo, no alcanza con sustituir esta relación en (2.13) para describir la teoría en la formulación de primer orden. Esto es debido a que la conexión w_b^a no es independiente, sino que debe ser la conexión de Levi-Civita y por lo tanto debe cumplir con la propiedad (2.9). En términos de e , esta propiedad es equivalente a que se anule la 2-forma de torsión definida como

$$de^a + w_b^a \wedge e^b = 0. \quad (2.15)$$

Para tener un principio variacional que imponga estas condiciones, lo que hacemos es introducir campos ϕ_a tales que al extremar la acción, sus ecuaciones de movimiento sean precisamente 2.15. Juntando todo llegamos a la formulación de primer orden para la gravedad de Jackiw-Teitelboim [9]

$$S_{JT} = \frac{1}{16\pi G} \int \phi \left(dw - \frac{\Lambda}{2} e^0 \wedge e^1 \right) + \phi_a (de^a + w_b^a \wedge e^b). \quad (2.16)$$

Esta es la acción que sirve como punto de partida para el análisis Hamiltoniano.

Capítulo 3

Análisis canónico

Nuestro objetivo ahora es estudiar la gravedad desde el punto de vista Hamiltoniano. Como observamos en la sección 2.3, la gravedad puede ser interpretada como una teoría de gauge cuyo grupo de simetría está dado por los difeomorfismos del espaciotiempo. Esto es relevante debido a que en general las teorías de gauge pueden ser vistas desde el punto de vista Hamiltoniano como sistemas vinculados. La razón de esto es que si pensamos en el espacio de fases de este tipo de teorías, al tener simetrías de gauge existirán transformaciones que lleven puntos del espacio de fases en otros, de manera tal que representan el mismo estado físico. Por lo tanto, para tener un espacio de fases bien definido, las variables canónicas no podrán tomar valores arbitrarios y se deberán imponer restricciones en forma de vínculos sobre las mismas.

Con este objetivo en mente comenzamos este capítulo con un repaso sobre sistemas Hamiltonianos con vínculos para luego pasar al análisis canónico de la gravedad de Jackiw-Teitelboim. Luego, a los efectos de motivar la cuantización que estudiaremos en el capítulo 4, mostraremos que la gravedad bidimensional se puede obtener mediante reducción dimensional partiendo de la gravedad en 3 dimensiones definida por la acción de Einstein-Hilbert en el formalismo de primer orden.

3.1. Teoría de los sistemas vinculados

En esta sección repasaremos aspectos básicos de la teoría de sistemas Hamiltonianos vinculados que serán útiles para entender el análisis canónico de la gravedad JT. Lo expuesto en esta sección sigue muy de cerca a los libros de referencia en el tema [14, 15]

Desde el punto de vista Lagrangiano la dinámica de un sistema con n grados de libertad se puede obtener de extremar la acción $S[q(t)] = \int L(q, \dot{q}) dt$, resultando en las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j = 0. \quad (3.1)$$

Esta dinámica va a estar bien definida cuando se puedan obtener ecuaciones explícitas para los $\ddot{q}^i$ como función $\dot{q}^i$ y q^i . En (3.1) esto solo es posible cuando la matriz $W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$ es invertible, en cuyo caso podemos despejar

$$\ddot{q}^i = (W^{-1})^{ij} \left(\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^k} \dot{q}^k \right). \quad (3.2)$$

En el caso degenerado la matriz W_{ij} no es invertible, por lo que tiene s vectores nulos Y_s^i que dan origen a funciones ϕ_s definidas mediante la relación

$$\phi_s(q^i, \dot{q}^i) = Y_s^i \left(\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j \right) = Y_s^i W_{ij} \ddot{q}^j = 0. \quad (3.3)$$

Las funciones ϕ_s son vínculos que restringen el espacio de configuraciones de las variables $\dot{q}^i$ y q^i . Debido a estas restricciones que deben cumplir los q^i y los $\dot{q}^i$ lo más lejos que se puede llegar en intentar despejar explícitamente los $\ddot{q}^i$ es tener $n - s$ ecuaciones de segundo orden para los $\ddot{q}_i$ y los s vínculos ϕ_s .

La aparición de vínculos en la teoría también puede verse desde la formulación Hamiltoniana, empezamos considerando la definición usual de los momentos

$$p_i(q^j, \dot{q}^j) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (3.4)$$

Para obtener n momentos independientes debemos poder invertir al menos localmente los $\dot{q}^i$ en función de los p_i . De acuerdo al teorema de la función implícita, esto puede hacerse cuando la matriz Jacobiana de la transformación de las coordenadas p_i a las coordenadas $\dot{q}^i$ es invertible. Este se escribe $W_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}$ lo cual coincide con la matriz que necesitamos para escribir las ecuaciones de forma explícita en la formulación Lagrangiana. En el caso en que la matriz es invertible, uno puede mapear las coordenadas y velocidades generalizadas $(q, \dot{q})$ a las variables canónicas (q, p) de manera biunívoca. Cuando los p_i no son todos independientes este mapa tiene como imagen un espacio de menor dimensión, el cual se puede escribir restringiendo el espacio de fases a una superficie dada por la condición de que se anulen una serie de funciones $\phi_s(q^i, p^j)$ denominadas vínculos primarios. Tal como antes, tendremos

tantos vínculos primarios como vectores nulos linealmente independientes tenga la matriz W_{ij} .

Cabe preguntarse si el Hamiltoniano definido como

$$H = \dot{q}^i p_i(q, \dot{q}) - L(q, \dot{q}), \quad (3.5)$$

tiene sentido en este contexto. Afortunadamente, aunque no es posible invertir la relación entre $\dot{q}^i$ y p_j , el Hamiltoniano es una función bien definida en el espacio de fases. Para ver esto consideremos su variación

$$\delta H = \dot{q}^i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i = \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i. \quad (3.6)$$

Lo cual se puede escribir como

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i. \quad (3.7)$$

Al no aparecer una dependencia en $\dot{q}^i$ no hay impedimentos para definir el Hamiltoniano en la superficie de vínculos.

El siguiente paso es entender qué ocurre con la dinámica ante la presencia de vínculos. En el caso irrestricto las ecuaciones de Hamilton que rigen la dinámica surgen de extremar la acción

$$S = \int dt \dot{q}^i p_i - H. \quad (3.8)$$

Para hacerlo pedimos que ante variaciones respecto de q^i y p_i tengamos estacionariedad, es decir, $\delta S = 0$. La variación de S está dada por

$$\delta S = \int dt \delta \dot{q}^i p_i + \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i. \quad (3.9)$$

$$\delta S = \int dt \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \delta q^i. \quad (3.10)$$

Como las variaciones δp_i y δq^i son independientes, de acuerdo al lema fundamental del cálculo variacional se deben cumplir las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (3.11)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (3.12)$$

Pero como discutimos, en el caso vinculado no todos los p_i son independientes y por lo tanto tampoco lo son sus variaciones, por lo tanto no podemos deducir las ecuaciones dinámicas de esta forma. Queremos que la dinámica del sistema también provenga de un principio variacional en el caso vinculado. Para esto necesitamos encontrar una manera de extremar la acción en el espacio restringido dado por los vínculos primarios.

El problema de extremizar una función en un dominio restringido puede resolverse mediante multiplicadores de Lagrange. Sea $f(\vec{x})$ una función que queremos extremar restringiendo su dominio a la superficie dada por $g(\vec{x}) = 0$. La condición geométrica que debe cumplirse en el extremo es que el gradiente de la función $f(\vec{x})$ debe ser perpendicular a la superficie parametrizada por el vínculo $g(\vec{x})$. Como la dirección perpendicular a dicha superficie está dada por el gradiente de $g(\vec{x})$, la condición que debe cumplirse es que los gradientes de las funciones sean colineales. Es decir, debe existir λ tal que

$$\lambda \nabla g + \nabla f = 0. \quad (3.13)$$

A λ se le da el nombre de multiplicador de Lagrange. Una observación importante es que si definimos la función auxiliar

$$\tilde{f} = f + \lambda g, \quad (3.14)$$

en la superficie definida por $g(\vec{x}) = 0$, f y $\tilde{f}$ coinciden y además la condición de extremo para $\tilde{f}$ es precisamente la condición geométrica dada por (3.13). Por lo tanto, extremar $\tilde{f}$ sin ninguna restricción es equivalente a extremar f restringido a $g(\vec{x}) = 0$. En conclusión para extremar una función cuando su dominio está restringido podemos definir una función auxiliar agregando una serie de incógnitas denominadas multiplicadores de Lagrange y luego procedemos a extremar esta función auxiliar en el espacio irrestricto. En nuestro caso esto es precisamente lo que tenemos que hacer. Sean $\phi_a(q^i, p_j)$ los vínculos primarios sobre el espacio de fases definimos el Hamiltoniano

$$H' = H + \lambda^a \phi_a, \quad (3.15)$$

de forma que la dinámica del sistema proviene de extremar en el espacio de fases irrestricto la acción

$$\tilde{S} = \int dt \dot{q}^i p_i - H - \lambda^a \phi_a = \int dt \dot{q}^i p_i - H', \quad (3.16)$$

pero además se deben considerar simultáneamente las ecuaciones de los vínculos $\phi_a = 0$, pues es solo sobre la superficie definida por estos que extremar ambos funcionales es equivalente. La estacionalidad $\delta\tilde{S} = 0$ queda

$$\begin{aligned} \delta\tilde{S} &= \int dt \delta\dot{q}^i p_i - \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial}{\partial q^i} (\lambda^a \phi_a) \delta q^i - \frac{\partial}{\partial p_i} (\lambda^a \phi_a) \delta p_i \\ \delta\tilde{S} &= \int dt \left(\dot{q}^i - \frac{\partial}{\partial p_i} (H + \lambda^a \phi_a) \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial}{\partial q^i} (H + \lambda^a \phi_a) \right) \delta q^i. \end{aligned}$$

Pero ahora, como estamos trabajando en el espacio irrestricto, tenemos que las variaciones son todas independientes, por lo que usando (3.15) y el mismo teorema que en (3.10) se tiene que

$$\dot{q}^i \approx \frac{\partial H'}{\partial p_i} \quad (3.17)$$

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H'}{\partial q^i}, \quad (3.18)$$

donde introducimos la notación $\approx$ que significa que la igualdad vale sobre la superficie definida por los vínculos ϕ_a . Esto es importante pues es ese el espacio en el cual S y $\tilde{S}$ coinciden.

Estas ecuaciones se pueden escribir utilizando los corchetes de Poisson definidos en el espacio irrestricto

$$\dot{q}^i \approx \{q^i, H'\} \quad (3.19)$$

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H'\}. \quad (3.20)$$

Esto quiere decir que la evolución temporal de las variables canónicas q y p en el espacio de fases restringido está dada por su corchete de Poisson, definido en el espacio irrestricto, con el Hamiltoniano modificado de la ecuación (3.15). A partir de esta observación podemos plantearnos qué ocurre con la evolución de una función F cualquiera

$$\dot{F} = \{F, H'\} = \{F, H\} + \lambda^a \{F, \phi_a\}. \quad (3.21)$$

Para poder determinar la evolución necesitamos resolver los multiplicadores λ^a . La evolución temporal es consistente si, al partir de un punto cualquiera dentro de la superficie de vínculos la evolución del mismo queda dentro de esta superficie. Esto implica que los vínculos se preservan en el tiempo, por lo que $\dot{\phi}_m \approx 0$, o en términos del corchete

$$\{\phi_m, H\} + \lambda^a \{\phi_m, \phi_a\} \approx 0. \quad (3.22)$$

Pero si uno de los vínculos ϕ_a conmuta con todos los demás, al menos sobre la superficie de vínculos, entonces su correspondiente multiplicador de Lagrange no aparece en la ecuación de consistencia y por lo tanto no queda determinado. A partir de esta observación definimos vínculo de primera clase como aquel que conmuta bajo el corchete de Poisson con todos los demás sobre la superficie de vínculos, es decir, ϕ_i es de primera clase si para todo j se cumple

$$\{\phi_i, \phi_j\} \approx 0. \quad (3.23)$$

En el caso en el que esto no se cumple el vínculo se denomina de segunda clase.

De esto se deduce que la presencia de vínculos de primera clase implica que algunos multiplicadores de Lagrange no queden determinados por lo que en general la evolución temporal de una función arbitraria no está bien definida. Sin embargo, hay una clase de funciones para las cuales la evolución temporal está bien definida incluso si mantenemos arbitrarios los multiplicadores asociados a los vínculos de primera clase. Consideremos dos conjuntos posibles de multiplicadores asociados a los vínculos de primera clase, $\{\lambda^i\}$ y $\{\hat{\lambda}^i\}$. La diferencia entre la evolución temporal infinitesimal de una función F usando un conjunto u otro es

$$\delta F = \delta v^i \{F, \phi_i\}, \quad (3.24)$$

donde $\delta v^i = \delta t(\lambda^i - \hat{\lambda}^i)$ y los ϕ_i son los vínculos de primera clase. Estas funciones representan cantidades que son invariantes de gauge. Si F es invariante bajo estas transformaciones entonces su dinámica está bien definida, incluso si los multiplicadores asociados a los vínculos de primera clase no lo están. A partir de esto concluimos que los vínculos de primera clase, cuyos multiplicadores no quedan determinados por la ecuación de consistencia, están asociados a transformaciones de gauge. Esto

se puede ver ya que son los generadores de las transformaciones dadas por (3.24).

De forma general, para determinar de manera única la evolución de una función F arbitraria y obtener un espacio de fases consistente hace falta fijar el gauge. Para esto hay que introducir nuevas restricciones dadas por funciones $g_a = 0$ sobre el espacio de fases, tantas como vínculos de primera clase. Si el conjunto formado por todos los vínculos ϕ_m más las funciones que fijan el gauge g_a es de segunda clase, entonces al restringirnos simultáneamente a la superficie dada por todos los vínculos $\phi_m = 0$ y las condiciones de fijado de gauge $g_a = 0$ se puede definir un buen espacio de fases.

Al analizar la gravedad como un sistema Hamiltoniano con vínculos observaremos que solo hay vínculos de primera clase. En el capítulo 4 veremos cómo lidiar con estos vínculos a la hora de cuantizar la teoría.

3.2. Gravedad de Jackiw-Teitelboim como sistema Hamiltoniano con vínculos

El objetivo de esta sección es aplicar la teoría de los sistemas Hamiltonianos vinculados al caso de la gravedad. La idea principal es que a partir de la acción (2.13) podemos definir una densidad Lagrangiana y con ella un Hamiltoniano asociado a la gravedad. Para esto hay que hacer una separación de la variable temporal de la espacial. Este ‘split’ de las variables viene acompañado de una parametrización del espaciotiempo M en la cual este se escribe como una sucesión de superficies Σ indexadas por la coordenada temporal de forma que podemos escribir $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ [14]. Cuando una variedad admite esta descomposición se dice que es globalmente hiperbólica. A partir de esta descomposición seremos capaces de definir variables canónicas sobre las superficies de tiempo constante, además de vínculos que generarán transformaciones de gauge sobre las mismas.

Para la gravedad estándar en 4 dimensiones escrita en términos del tensor métrico este enfoque se conoce como el formalismo de Arnowitt–Deser–Misner (ADM) [16]. El análisis canónico de la gravedad no es sencillo en ese caso; sin embargo, como aquí aplicaremos estas ideas al estudio de una teoría bidimensional en el formalismo de primer orden, la complejidad se reduce considerablemente.

Consideraremos una descomposición del espaciotiempo en la que utilizamos como coordenada espacial r y como coordenada temporal t . En lugar de realizar el análisis Hamiltoniano de la manera usual, es decir, calcular los momentos a partir

del Lagrangiano y encontrar los vínculos a los cuales deben estar sujetos, podemos tomar un atajo aprovechando que la acción (2.16) solo tiene derivadas de primer orden en los campos. La acción (2.16) se puede escribir como

$$S_{JT} = \int_M dt dr \phi \partial_t w_r + \phi_a \partial_t e_r^a + e_t^a \left(\partial_r \phi_a - \frac{\phi \Lambda}{2} \epsilon_{ab} e_r^b - \phi_b \epsilon_a^b w_r \right) + w_t (\partial_r \phi + \phi_a \epsilon_b^a e_r^b). \quad (3.25)$$

Esto puede interpretarse como un sistema Hamiltoniano con vínculos, si comparamos esto con (3.16) vemos que w_r y los e_r^a juegan el papel de q mientras que ϕ y los ϕ_a juegan el papel de los momentos p . Por otra parte, dado que las variables w_t y e_t no tienen derivada temporal, pueden interpretarse como multiplicadores de Lagrange que imponen los vínculos definidos por

$$G = \partial_r \phi + \phi_a \epsilon_b^a e_r^b \quad (3.26)$$

$$H_a = \partial_r \phi_a - \frac{\phi \Lambda}{2} \epsilon_{ab} e_r^b - \phi_b \epsilon_a^b w_r. \quad (3.27)$$

Es interesante notar que las componentes temporales de los campos e y w funcionan como multiplicadores de Lagrange que imponen vínculos. Esto es algo que podemos ver en otros sistemas vinculados, por ejemplo, en el caso del electromagnetismo, al ser tratado desde el formalismo Hamiltoniano se puede ver que A_t funciona como un multiplicador de Lagrange que impone la ley de Gauss.

Al interpretar (3.25) nos damos cuenta que no aparece un término que asociáramos con H . Dicho de otra forma $H = 0$ y su Hamiltoniano total H' consiste únicamente en los multiplicadores de Lagrange y los vínculos. A partir de esa ecuación también podemos leer la estructura canónica. Los corchetes de Poisson que actúan sobre los campos a tiempo constante quedan definidos de la siguiente manera

$$\{w_r(r, t), \phi(r', t)\} = \delta(r - r') \quad (3.28)$$

$$\{e_r^a(r, t), \phi_b(r', t)\} = \delta_b^a \delta(r - r'). \quad (3.29)$$

Vale la pena mencionar que aunque mostramos las ideas principales del análisis de sistemas Hamiltonianos con vínculos en el caso de variables canónicas discretas todo es aplicable al caso continuo en el que las variables canónicas son campos, lo único que hay que hacer es definir adecuadamente los corchetes de Poisson en el caso continuo. Esta es la razón por la que la delta de Dirac aparece en las definiciones (3.28) y (3.29).

Una vez definido el corchete de Poisson entre las variables canónicas estamos en condiciones de estudiar los vínculos de la teoría. Veremos qué transformaciones generan sobre las variables canónicas y computaremos el corchete de Poisson entre ellos para clasificarlos, demostrando que forman un sistema de primera clase. Para tales efectos haremos una reparametrización de la superficie de vínculos en la cual en lugar de utilizar G y H_a utilizaremos G, L y H donde definimos

$$L = e_r^a H_a + w_r G \quad (3.30)$$

$$H = e_r^a \epsilon_a^b H_b. \quad (3.31)$$

La elección de estos vínculos genera la misma restricción en el espacio de fases que los originales, dado que si $G, H_a = 0$ entonces $L, G, H = 0$ y viceversa. Esta redefinición solo podría ser problemática en caso de que e_r^a se anule para todo tiempo. Dado que el tensor métrico se puede escribir como $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$ esto implicaría que la métrica es singular y asumimos que no es el caso.

En la sección 3.1 mencionamos que los vínculos de primera clase están asociados a transformaciones de gauge infinitesimales. En particular en la ecuación (3.24) se ve que los vínculos de primera clase generan transformaciones de gauge a través de la acción del corchete de Poisson sobre las variables canónicas. En lo que sigue mostraremos cómo actúan L y G sobre las variables canónicas y utilizaremos esto para interpretar estos vínculos geoméricamente. A partir de esos resultados mostraremos que el sistema de vínculos de esta teoría es efectivamente de primera clase. Para empezar, ya a nivel Lagrangiano podemos notar que la acción (2.16) tiene simetría de rotación en los índices internos a, b dadas por las transformaciones del grupo de Lorentz $SO(1, 1)$

$$e_\mu^a \rightarrow \tilde{\Lambda}_b^a e_\mu^b \quad (3.32)$$

$$\phi_a \rightarrow \tilde{\Lambda}_a^b \phi_b \quad (3.33)$$

$$w_\mu \rightarrow w_\mu - \tilde{\Lambda}^{-1} \partial_\mu \tilde{\Lambda}. \quad (3.34)$$

Esto también se cumple a nivel Hamiltoniano en la ecuación (3.25). Resulta que esta simetría de gauge se realiza de manera infinitesimal mediante los corchetes de Poisson con el vínculo G . Consideremos que los elementos de $SO(1, 1)$ se pueden parametrizar mediante $\tilde{\Lambda}_b^a = (e^{\varphi\epsilon})_b^a$. Entonces se cumple que las transformaciones de gauge infinitesimales de las variables canónicas se pueden escribir como

$$e_r^a \rightarrow e_r^a + \epsilon_b^a e_r^b \varphi = e_r^a + \left\{ e_r^a, \int dr' \varphi(r') G(r') \right\} \quad (3.35)$$

$$\phi_a \rightarrow \phi_a - \epsilon_a^b \phi_b \varphi = \phi_a + \left\{ \phi_a, \int dr' \varphi(r') G(r') \right\} \quad (3.36)$$

$$w_r \rightarrow w_r - \partial_r \varphi = w_r + \left\{ w_r, \int dr' \varphi(r') G(r') \right\}. \quad (3.37)$$

Esta simetría está presente debido a que al trabajar en el formalismo de primer orden agregamos la conexión de espín como variable extra, por lo que el vínculo G se interpreta como el generador de esa simetría. Por otra parte, el vínculo L actúa sobre las variables canónicas como difeomorfismos espaciales infinitesimales

$$e_r^a \rightarrow e_r^a - \partial_r f e_r^a - \partial_r e_r^a f = e_r^a + \left\{ e_r^a, \int dr' f(r') L(r') \right\} \quad (3.38)$$

$$\phi_a \rightarrow \phi_a - f \partial_r \phi_a = \phi_a + \left\{ \phi_a, \int dr' f(r') L(r') \right\} \quad (3.39)$$

$$\phi \rightarrow \phi - f \partial_r \phi = \phi + \left\{ \phi_a, \int dr' f(r') L(r') \right\} \quad (3.40)$$

$$w_r \rightarrow w_r - \partial_r f w_r - \partial_r w_r f = w_r + \left\{ w_r, \int dr' f(r') L(r') \right\}. \quad (3.41)$$

El hecho de que al actuar L sobre e_r^a genera difeomorfismos se puede interpretar geoméricamente al considerar que se está actuando con un difeomorfismo espacial sobre las superficies de tiempo constante en la foliación del espaciotiempo. Dado que L genera difeomorfismos sobre variables canónicas, su corchete de Poisson con una función del espacio de fases actúa como la derivada de Lie, pues esta representa un difeomorfismo infinitesimal. En particular, podemos calcular, por ejemplo

$$\left\{ \int dr \alpha(r) L(r), \int dr' g(r') G(r') \right\} = \int dr' g(r') \mathcal{L}_\alpha(G), \quad (3.42)$$

donde $\mathcal{L}_\alpha$ es la derivada de Lie a lo largo del vector α . Ahora podemos hacer la siguiente observación: la integral $\int dr g G$ es invariante por difeomorfismos, por lo tanto al aplicarle la deriva de Lie $\mathcal{L}_\alpha$ se obtiene la identidad

$$- \int dr \mathcal{L}_\alpha(g) G = \int dr g \mathcal{L}_\alpha(G). \quad (3.43)$$

Utilizando (3.42) y (3.43) se calculan todos los corchetes entre vínculos que incluyen a L

$$\left\{ \int dr \alpha L(r), \int dr' g G(r') \right\} = - \int dr \mathcal{L}_\alpha(g) G \approx 0 \quad (3.44)$$

$$\left\{ \int dr \alpha L(r), \int dr' h H(r') \right\} = - \int dr \mathcal{L}_\alpha(h) H \approx 0 \quad (3.45)$$

$$\left\{ \int dr \alpha L(r), \int dr' \alpha' L(r') \right\} = - \int dr \mathcal{L}_\alpha(\alpha') L \approx 0. \quad (3.46)$$

Un argumento similar se puede aplicar para los corchetes que incluyen a G , ya que al generar transformaciones de gauge actúa sobre funciones del espacio de fases como una transformación de gauge infinitesimal. Basta con observar que tanto G como H son invariantes de gauge para concluir que

$$\left\{ \int dr g G(r), \int dr' g' G(r') \right\} = 0 \quad (3.47)$$

$$\left\{ \int dr g G(r), \int dr' h H(r') \right\} = 0, \quad (3.48)$$

Finalmente, el único corchete que queda también se anula sobre la superficie de vínculos. Mediante un cálculo explícito se tiene que

$$\left\{ \int dr h(r) H(r), \int dr' h'(r') H(r') \right\} = \int dr (h' \partial_r h - h \partial_r h') (w_r G - L) \approx 0. \quad (3.49)$$

Como vemos, el álgebra de vínculos es cerrada y sobre la superficie dada por los mismos tenemos que conmutan Poisson. Por lo tanto estos vínculos forman un sistema de primera clase.

Como discutimos en la sección 3.1 para tener un espacio de fases bien definido hay que suplementar los vínculos de primera clase con condiciones de fijado de gauge. En este caso tenemos tres vínculos de primera clase que deberían ser suplementados con tres condiciones de fijado de gauge. A su vez, tenemos tres pares de variables canónicas. Esto nos está indicando que a diferencia de lo que ocurre en la gravedad estándar en 4 dimensiones en este caso no se van a propagar grados de libertad locales. Sin embargo, la teoría no es trivial. Veremos más adelante que hay cantidades que no pueden fijarse usando la invarianza por difeomorfismos de la teoría.

Antes mencionamos que esta teoría tiene un Hamiltoniano que es puro vínculo, por lo que no hay una noción natural de dinámica ya que el Hamiltoniano en el espacio irrestricto es nulo y los vínculos generan transformaciones de gauge. Sin embargo, en el contexto de la gravedad canónica podemos interpretar el vínculo H

como una suerte de evolución temporal que mapea superficies de tiempo constante en otras superficies de tiempo constante, lo cual se puede pensar como una evolución en la dirección de la variable que hace la foliación del espaciotiempo. Debido a esta interpretación, al vínculo H se lo conoce como vínculo Hamiltoniano.

3.3. Análisis canónico de gravedad en 2+1

Como explicamos en el capítulo 1, nuestro objetivo es establecer un resultado análogo a la relación entre las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt radial y la deformación $T\bar{T}$ en una dimensión menos. Como veremos en la sección 3.4, a nivel clásico la gravedad de Jackiw-Teitelboim se puede obtener a partir de reducir dimensionalmente la gravedad tridimensional. Esta interpretación geométrica inspira las soluciones para los estados cuánticos bidimensionales que estudiaremos en el capítulo 4.

Para la gravedad en tres dimensiones la acción de Einstein-Hilbert (2.11) está bien definida. La teoría puede escribirse en su formulación de primer orden de una manera similar a lo establecido en la sección 2.4 y la acción resultante es [17]

$$S_{3d} = \frac{1}{16\pi G} \int_M e_i \wedge (dw^i + \epsilon^{ijk} w_j w_k) + \frac{\Lambda}{6} \epsilon_{ijk} e^i \wedge e^j \wedge e^k, \quad (3.50)$$

donde ahora la base local $\{e^i\}$ tiene 3 componentes y se define una conexión de espín w^i que toma valores en el álgebra de Lie del grupo $SL(2, \mathbb{R})$. En [2] se realiza el análisis canónico de esta acción pero con la particularidad de que la dirección de la foliación del espaciotiempo en este caso será r en lugar de t . La razón de esto es que en el contexto de la conjetura AdS/CFT hacer la foliación de esta manera nos permite interpretar el vínculo Hamiltoniano como el generador de una evolución que nos lleva hacia el borde del espacio AdS. Nos va a interesar vincular las funciones de onda que satisfacen este vínculo Hamiltoniano con una teoría de campos conforme definida en el borde de AdS.

El espaciotiempo queda parametrizado utilizando las coordenadas r, t, y , dentro de las cuales haremos que r juegue el papel que en el caso del análisis canónico estándar toma la variable t . Por lo tanto si hacemos el *split* de las variables de esta manera, escribimos los términos de la acción en esas coordenadas y reagrupamos

obtenemos:

$$S_{3d} = \frac{1}{16\pi G} \int dr dt dy 2\epsilon^{\alpha\beta} w_\beta^i \partial_r e_{i\alpha} + e_r^i \epsilon^{\alpha\beta} (2\partial_\alpha w_{\beta i} + \frac{\Lambda}{2} \epsilon_{ijk} e_\alpha^j e_\beta^k + \epsilon_{ijk} w_\alpha^j w_\beta^k) + 2w_r^i \epsilon^{\alpha\beta} (\epsilon_{ijk} w_\beta^k e_\alpha^j + \partial_\alpha e_{i\beta}), \quad (3.51)$$

donde $\alpha, \beta = y, t$.

Siguiendo las ideas desarrolladas al inicio del capítulo sobre sistemas Hamiltonianos con vínculos y el análisis canónico de la gravedad de Jackiw-Teitelboim podemos identificar que la acción escrita en estos términos corresponde a tener un Hamiltoniano que se compone únicamente de vínculos impuestos por los multiplicadores de Lagrange e_r^i y w_r^i . Los vínculos son:

$$\begin{aligned} H_i &= \epsilon^{\alpha\beta} (2\partial_\alpha w_{\beta i} + \frac{\Lambda}{2} \epsilon_{ijk} e_\alpha^j e_\beta^k + \epsilon_{ijk} w_\alpha^j w_\beta^k) \\ G_i &= \epsilon^{\alpha\beta} (\partial_\alpha e_{i\beta} + \epsilon_{ijk} w_\beta^k e_\alpha^j). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Esta teoría tiene seis vínculos que pueden interpretarse de manera análoga a lo visto en la sección 3.2. En ella vimos que había un único vínculo G que generaba transformaciones de gauge de grupo $SO(1,1)$, la razón de que tuviéramos un solo generador de la simetría es que el álgebra de Lie de ese grupo tiene un solo generador. En este caso tenemos tres vínculos asociados a las transformaciones de gauge debido a que el álgebra de Lie del grupo $SL(2, \mathbb{R})$ tiene tres generadores. Por otra parte, desde el punto de vista geométrico vamos a tener tres vínculos H_i . Dos de ellos se pueden interpretar como los generadores de difeomorfismos en las superficies bidimensionales de r constante. El vínculo restante es el vínculo Hamiltoniano, que es el análogo al definido en la sección 3.2 en la cual lo interpretamos como el generador de una evolución temporal. En este caso se interpreta como una evolución en la dirección radial.

3.4. Gravedad de Jackiw-Teitelboim por reducción dimensional

Como veremos en el capítulo 4 al cuantizar canónicamente la gravedad de Jackiw-Teitelboim tendremos que tratar los vínculos. La manera en la que lo haremos es la misma que se usa en [2] al cuantizar la gravedad definida en (3.50). La motivación es que del análisis canónico de la gravedad en tres dimensiones en el formalismo de

primer orden se puede obtener la formulación de primer orden de la gravedad de Jackiw-Teitelboim mediante reducción dimensional [18]. Esta consiste en partir de (3.51) y asumir que nada depende de la variable y . Luego, resolviendo explícitamente algunos de los vínculos de la teoría, recuperamos la gravedad bidimensional.

Los vínculos de la gravedad tridimensional forman un sistema de primera clase al igual que en la gravedad de Jackiw-Teitelboim. Resolveremos los vínculos G_0 , G_1 y H_1 . Para hacerlo, haremos un fijado parcial de gauge, es decir impondremos tres condiciones que junto a estos vínculos forman un sistema de segunda clase. La idea es que este procedimiento nos lleva consistentemente a un espacio de fases en el cual al imponer los vínculos restantes recuperamos la gravedad bidimensional. Las condiciones de fijado parcial de gauge son $w_y^1 = 0$, $e_y^0 = 0$ y $e_y^2 = 0$. Empezamos resolviendo el vínculo G_0

$$\begin{aligned}
G_0 &= \epsilon^{\alpha\beta} (\partial_\alpha e_{0\beta} + \epsilon_{0jk} w_\beta^k e_\alpha^j) \\
&= \partial_t e_{y0} - \partial_y e_{t0} - w_y^1 e_t^2 + w_y^2 e_t^1 - w_t^2 e_y^1 + w_t^1 e_y^2 \\
&= w_y^2 e_t^1 - w_t^2 e_y^1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esta ecuación admite como solución $e_t^1 = 0$ y $w_t^2 = 0$. Estas condiciones que encontramos resolviendo el vínculo G_0 a su vez nos permiten resolver el vínculo G_2

$$\begin{aligned}
G_2 &= \epsilon^{\alpha\beta} (\epsilon_{0jk} w_\beta^j e_\alpha^k - \partial_\beta e_{0\alpha}) \\
&= \partial_t e_{y2} - \partial_y e_{t2} - w_y^0 e_t^1 + w_y^1 e_t^0 - w_t^1 e_y^0 + w_t^0 e_y^1 \\
&= w_t^0 e_y^1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Si elegimos como solución $w_t^0 = 0$, además se verifica que el vínculo H_1 se cumple trivialmente, pues entre las condiciones de fijado de gauge y los resultados obtenidos de resolver G_0 y G_2 se tiene que

$$\begin{aligned}
H_1 &= \epsilon^{\alpha\beta} \left(2\partial_\alpha w_{\beta 1} + \epsilon_{1jk} \left(\frac{\Lambda}{2} e_\alpha^j e_\beta^k - w_\beta^j w_\alpha^k \right) \right) \\
&= 2\partial_t w_{y1} - 2\partial_y w_{t1} + \Lambda (e_t^2 e_y^0 - e_t^0 e_y^2) + 2(w_y^0 w_t^2 - w_y^2 w_t^0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Finalmente la acción reducida dimensionalmente queda

$$\begin{aligned}
S_{2d} &= \frac{1}{16\pi G} \int dr dt w_{0y} \partial_r e_t^0 + w_{2y} \partial_r e_t^2 - w_{1t} \partial_r e_y^1 \\
&\quad + e_r^0 \left(\partial_t w_{0y} - \frac{\Lambda}{2} e_t^2 e_y^1 + w_{2y} w_{1t} \right) \\
&\quad + e_r^2 \left(\partial_t w_{2y} + \frac{\Lambda}{2} e_t^0 e_y^1 - w_{1t} w_{0y} \right) \\
&\quad + w_r^1 (\partial_t e_y^1 - w_{0y} e_{2t} - w_{2y} e_t^0).
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Observamos que nuestro procedimiento de fijado de gauge parcial nos llevó del espacio de fases original en el que los pares de variables canónicas eran (e_y^i, w_t^i) y (e_t^i, w_y^i) con vínculos G_i y H_i a un espacio de fases de variables canónicas (e_y^1, w_t^1) , (e_t^0, w_y^0) y (e_t^2, w_y^2) con vínculos G_1 , H_0 y H_2 . Las condiciones de fijado parcial de gauge nos permitieron restringir el espacio de fases correctamente pues el efecto fue de resolver algunos vínculos y eliminar tres pares de variables canónicas. Para establecer el puente entre este resultado y la gravedad de Jackiw-Teitelboim hacemos la siguiente identificación entre las variables 3d y 2d

$$e_t^0 \rightarrow e_t^0 \tag{3.54}$$

$$e_t^2 \rightarrow e_t^1 \tag{3.55}$$

$$w_{0y} \rightarrow \phi_0 \tag{3.56}$$

$$w_{2y} \rightarrow \phi_1 \tag{3.57}$$

$$w_{1t} \rightarrow w_t. \tag{3.58}$$

Haciendo esta identificación notamos que (3.53) es el resultado que hubiéramos obtenido para la ecuación (3.25) de haber utilizado r como la variable de la foliación en el análisis canónico de la gravedad bidimensional. Es decir, lo que obtenemos es la foliación radial de la gravedad de Jackiw-Teitelboim, la cual es la que cuantizaremos en el capítulo 4. Esta relación a nivel clásico entre la formulación de primer orden

de la gravedad en $d = 3$ y $d = 2$ servirá como motivación para utilizar el enfoque de [2] al cuantizar la gravedad de Jackiw-Teitelboim.

Es interesante ver que en la reducción dimensional las partes de la conexión de espín que dependen de la variable reducida pasan a ser los multiplicadores de Lagrange que imponen la condición de curvatura nula en la conexión de espín de la formulación de primer orden de Jackiw-Teitelboim, mientras que las partes espaciales de la base local de la teoría tridimensional que quedan luego de la reducción se identifican con elementos de la base local de la teoría bidimensional.

Una vez entendido el análisis canónico de la teoría clásica, estamos en condiciones de entender qué ocurre al intentar cuantizar. En el capítulo 4 estudiaremos un esquema de cuantización canónica y veremos qué ocurre con los vínculos de la teoría a nivel cuántico cuando obtengamos los funcionales de onda de la misma.

Capítulo 4

Cuantización de Jackiw-Teitelboim en el formalismo de primer orden

Hasta ahora todo lo que vimos es a nivel clásico. Queremos ahora entender cómo podemos definir la teoría cuántica a partir del análisis realizado en las secciones anteriores. Como discutimos, desde el punto de vista Hamiltoniano la gravedad es un sistema vinculado. En este capítulo repasaremos algunas nociones básicas sobre cuantización canónica, comentaremos sobre la cuantización de sistemas vinculados en general y lo aplicaremos a la gravedad de Jackiw-Teitelboim en la formulación de primer orden.

El resultado principal de este capítulo es que los estados cuánticos de esta teoría pueden escribirse en términos de un objeto que puede interpretarse como la función de partición de una teoría de campos en $0 + 1$ dimensiones, en analogía con lo que se encontró en [2]. Como veremos, la expresión que encontramos involucra a este objeto dentro de una integral de caminos sobre las variables de configuraciones de la teoría.

4.1. Geometría en el espacio de fases y cuantización canónica

Estudiar la gravedad desde el formalismo Hamiltoniano tiene la ventaja de que hay un camino concreto hacia la cuantización que es la cuantización canónica. Para entender cómo funciona este esquema en el contexto gravitatorio primero hay que entender cuál es la relación entre el espacio de fases clásico y las relaciones de conmutación cuánticas. En las siguientes subsecciones desarrollamos brevemente esta

relación.

4.1.1. Espacios de fase

De la misma manera que el espaciotiempo se modela como una variedad diferenciable donde existe un tensor métrico, el espacio de fases clásico puede definirse como una variedad simpléctica [14, 15]. Esto es, una variedad diferenciable de dimensión $d = 2n$ en la cuál se define una 2-forma que dado un sistema de coordenadas local $\{x^1, \dots, x^{2n}\}$ se puede escribir como $\Omega = \Omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$, siendo la matriz Ω_{ij} invertible. Además esta 2-forma es cerrada en el sentido de que $d\Omega = 0$. Aquí Ω va a tener un papel análogo al que tenía el tensor métrico en una variedad pseudoriemanniana, solo que en lugar de definir un producto interno entre vectores del espacio tangente nos servirá para definir el corchete de Poisson. A esta 2-forma se la denomina forma simpléctica.

El teorema de Darboux establece que para un parche local en una variedad simpléctica es posible elegir coordenadas locales $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$ de forma tal que la forma simpléctica se escribe

$$\Omega = dq^i \wedge dp_i, \quad (4.1)$$

donde los q^i pueden pensarse como las posiciones generalizadas y los p_i como sus momentos conjugados.

La forma simpléctica nos permite definir la dinámica en el espacio de fases. A partir de un Hamiltoniano H , podemos definir su campo vectorial asociado como

$$dH(Y) = \Omega(Y, X_H). \quad (4.2)$$

Es decir, X_H se define como el campo vectorial tal que para todo $Y \in TM$ la 2-forma Ω actuando sobre ambos es igual a la acción del diferencial de H sobre el campo Y . La interpretación geométrica de X_H es que en cada punto del espacio de fases da un vector que apunta en el sentido en el que evolucionan las variables canónicas. Por lo tanto, la evolución temporal de $\vec{X}(t) = (q^1(t), \dots, q^n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ son las curvas integrales definidas por la ecuación

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = X_H. \quad (4.3)$$

Utilizando las coordenadas de Darboux, X_H se escribe en la base $\{\partial_{q^i}, \partial_{p_i}\}$ como

$$X_H = A^i \partial_{q^i} + B_i \partial_{p_i}, \quad (4.4)$$

para algunos coeficientes A^i y B_i .

Las ecuaciones de Hamilton se obtienen de los resultados anteriores. En particular, a partir de la ecuación (4.2) podemos calcular cada lado de la igualdad por separado eligiendo $Y = \partial_{q^i}$. Haciendo esto obtenemos una relación entre los coeficientes B^i y derivadas de H

$$dH(\partial_{q^i}) = \frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (4.5)$$

$$\Omega(\partial_{q^i}, X_H) = -B^i. \quad (4.6)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = -B^i. \quad (4.7)$$

Análogamente si elegimos $Y = \partial_{p_i}$ encontramos una relación para los coeficientes A_i

$$dH(\partial_{p_i}) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (4.8)$$

$$\Omega(\partial_{p_i}, X_H) = A_i. \quad (4.9)$$

De esto se deduce que

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = A_i. \quad (4.10)$$

Si sustituimos los resultados (4.7) y (4.10) en (4.4) vemos que efectivamente el sistema de ecuaciones dado por (4.3) corresponde a las ecuaciones de movimiento de Hamilton para las variables canónicas (3.11).

Otra observación importante es que eligiendo las coordenadas de Darboux la forma simpléctica induce los corchetes de Poisson en su forma estándar. Para dos funciones cualquiera f y g en el espacio de fases su corchete queda definido mediante la relación

$$\{f, g\} = \Omega(X_g, X_f), \quad (4.11)$$

donde X_f y X_g son los campos vectoriales asociados a las funciones f y g respectivamente.

En conclusión, (4.2) define la dinámica del sistema a partir de una condición geométrica sobre el espacio de fases, es decir, sin necesidad de hacer referencia a un sistema de coordenadas particular. Lo interesante de esta construcción es que nos muestra que esencialmente el espacio de fases y su dinámica están bien definidos cuando tenemos una función diferenciable H y una 2-forma invertible y cerrada Ω . En la sección 4.2 veremos qué problemas pueden aparecer al definir el espacio de fases de una teoría con vínculos desde esta perspectiva geométrica.

4.1.2. Cuantización canónica

Una vez que tenemos definido adecuadamente el espacio de fases el corchete de Poisson entre las variables canónicas es

$$\{q^i, p_j\} = \delta_j^i. \quad (4.12)$$

En el procedimiento de cuantización canónica las variables canónicas (q^i, p_j) se promueven a operadores $(\hat{q}^i, \hat{p}_j)$ y se define la relación de conmutación a partir del corchete de Poisson haciendo la sustitución $\{, \} \rightarrow i[,]$. Esto da lugar a las relaciones de conmutación canónicas

$$[\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\delta_j^i. \quad (4.13)$$

En teoría de campos hay que llevar esto al continuo, pues no se tiene un número finito de grados de libertad q^i sino que cada punto del espacio tiene un grado de libertad por cada campo definido en la teoría. Lo que tiene sentido contar en este contexto es los grados de libertad por punto del espacio. Por lo tanto las coordenadas generalizadas $q^i(t)$ se sustituyen por las configuraciones de los posibles campos $\phi^k(t, \vec{x})$. El índice i original se ve sustituido por un índice continuo $\vec{x}$ que toma valores en el espacio y un índice k que queda indica a cuál de los campos de la teoría se hace referencia. Estos campos $\phi_k(t, \vec{x})$ tienen asociados sus momentos conjugados $\Pi_k(t, \vec{x})$. Las relaciones de conmutación canónicas en el continuo son [19]

$$[\hat{\phi}^l(t, \vec{x}), \hat{\Pi}_m(t, \vec{y})] = i\delta_m^l \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.14)$$

Notar que las relaciones de conmutación están evaluadas a tiempos iguales para los

dos campos¹.

4.2. Cuantización de sistemas vinculados

El esquema de cuantización canónica funciona cuando el espacio de fases está bien construido. Nos interesa cuantizar la gravedad de Jackiw-Teitelboim en el formalismo de primer orden, que como vimos, desde el punto de vista Hamiltoniano es un sistema vinculado. Con esta motivación describiremos brevemente qué ocurre con el espacio de fases en teorías con vínculos y su cuantización [15].

Sobre el final de la sección 3.1 comentamos que ante la presencia de vínculos de primera clase la evolución temporal de una función arbitraria no está bien definida debido a que los vínculos de primera clase están asociados a transformaciones de gauge. A partir del contenido de la sección 4.1.1 estamos en condiciones de explicar esto desde el punto de vista geométrico. Supongamos que tenemos un espacio de fases bien definido que denominaremos M_{kin} y sobre este queremos imponer una serie de vínculos $\phi_i = 0$. La pregunta de si sobre la superficie de vínculos queda definido un espacio de fases es equivalente a preguntarnos si la subvariedad Σ definida por $\phi_i = 0$ hereda las propiedades simplécticas del espacio M_{kin} .

Sobre M_{kin} , por ser un espacio de fases, existe una 2-forma Ω que es cerrada y no degenerada. Geométricamente, para que la superficie Σ sea un buen espacio de fases la restricción $\bar{\Omega} = \Omega|_{\phi_i=0}$ debe ser una forma simpléctica. Resulta que cuando todos los vínculos son de segunda clase este es efectivamente el caso.

Sin embargo, cuando existan vínculos de primera clase $\bar{\Omega}$ es degenerada. En este caso, como veremos a continuación, $\bar{\Omega}$ no es una forma simpléctica, pues no es invertible, sino que se conoce como forma presimpléctica. En particular, si consideramos los campos vectoriales asociados a los vínculos, $X_{\phi_i}^l$, se puede probar que estos son tangentes a la superficie Σ y además

$$\bar{\Omega}_{kl} X_{\phi_i}^l = 0. \quad (4.15)$$

Es decir, como campos vectoriales definidos en Σ son vectores nulos de la forma presimpléctica inducida $\bar{\Omega}$, lo cual implica que esta no es invertible.

Esto muestra que Σ no es un buen espacio de fases. Para tener una forma simpléctica inducida sobre la superficie de vínculos, es necesario restringir aún más el

¹En esta expresión, los campos se encuentran en la representación de Heisenberg, de ahí su dependencia en el tiempo.

espacio de fases mediante la elección de condiciones de fijado de gauge g_a . Esta es otra forma de ver que los vínculos de primera clase generan transformaciones de gauge. Como los campos asociados a estos vínculos están en el kernel de la forma presimpléctica $\bar{\Omega}$, para definir correctamente el espacio de fases el flujo de estos campos se debe factorizar. Esto es precisamente fijar el gauge, elegir un único representante de cada órbita del flujo generado por los campos vectoriales asociados a los vínculos de primera clase. La manera de hacer esto es elegir tantas condiciones de fijado de gauge $g_a = 0$ como vínculos de primera clase, de forma que restringimos el espacio de fases M_{kin} a la superficie $\tilde{\Sigma}$ dada por $\phi_i = 0$ y $g_a = 0$. Las condiciones de fijado de gauge son buenas si el sistema formado por los vínculos (ϕ_i, g_a) es de segunda clase, ya que como mencionamos, en ese caso la forma simpléctica inducida es no degenerada y finalmente tenemos un espacio de fases bien definido.

Para cuantizar, debemos partir de un espacio de fases bien definido. Debido a esto hay dos enfoques sobre cómo tratar la cuantización en el caso de un sistema vinculado. Por un lado, podríamos primero resolver los vínculos de la teoría a nivel clásico junto con sus condiciones de fijado de gauge correspondientes. De esta manera se obtiene el espacio de fases $\tilde{\Sigma}$ y luego es posible aplicar el mapa de cuantización canónica. Por otra parte, podríamos pararnos sobre el espacio de fases irrestricto M_{kin} , cuantizar canónicamente las variables q^i, p_i y luego imponer las ecuaciones de los vínculos $\phi_i = 0$ como operadores actuando sobre el espacio de Hilbert de las funciones de onda

$$\hat{\phi}_i \psi = 0. \quad (4.16)$$

Al primer enfoque se lo conoce con el nombre de *constrain first* mientras que el segundo enfoque lleva el nombre de *quantize first*.

La cuantización de sistemas vinculados no es sencilla, uno de los problemas que pueden surgir es que estos dos procedimientos no necesariamente devuelven el mismo resultado, por lo que a menudo la definición de la teoría a nivel cuántico puede tener ambigüedades. En nuestro caso, al estudiar la cuantización de la gravedad bidimensional usaremos un enfoque híbrido: resolveremos algunos de los vínculos a nivel clásico y otros quedarán impuestos a nivel cuántico.

4.3. Foliación radial y cuantización

En el contexto de la conjetura AdS/CFT queremos vincular la gravedad definida en el interior del espaciotiempo con una teoría de campos en el borde del mismo. En la sección 3.3 mencionamos que utilizar r como coordenada de la foliación en el análisis canónico da lugar a un vínculo Hamiltoniano que se interpreta como generador de la evolución en la dirección radial del espaciotiempo.

En [2] se estudió la gravedad en 3 dimensiones en el formalismo de primer orden haciendo una foliación radial del espaciotiempo. El resultado principal de ese análisis es que las funciones de onda que satisfacen el vínculo Hamiltoniano a nivel cuántico se pueden escribir como una integral de caminos que involucra la función de partición de una teoría de campos que satisface una identidad. Motivados por la relación entre estas teorías descrita en la sección 3.4, el objetivo del resto del capítulo es demostrar un resultado análogo para la gravedad bidimensional. Por esto, nuestro punto de partida es la foliación radial de la gravedad de Jackiw-Teitelboim en el formalismo de primer orden

$$S_{JT} = \int_M dr dt \phi_a \partial_r e_t^a - w_t \partial_r \phi + e_r^a \left(\partial_t \phi_a - \frac{\phi \Lambda}{2} \epsilon_{ab} e_t^b - \phi_b \epsilon_a^b w_t \right) + w_r (\partial_t \phi + \phi_a \epsilon_b^a e_t^b). \quad (4.17)$$

En la sección 3.2 hicimos el análisis canónico estándar usando t como la coordenada de la foliación. Repetimos ese análisis ahora usando la foliación radial. A partir de (4.17) podemos leer que las variables canónicas ahora son (e_t^a, ϕ_a) y (ϕ, w_t) . También podemos notar que los vínculos de la teoría en la foliación radial se escriben como los vínculos en la foliación temporal intercambiando t por r .

$$G = \partial_t \phi + \phi_a \epsilon_b^a e_t^b \quad (4.18)$$

$$H_a = \partial_t \phi_a - \frac{\phi \Lambda}{2} \epsilon_{ab} e_t^b - \phi_b \epsilon_a^b w_t. \quad (4.19)$$

De manera análoga al caso de la foliación temporal definimos los vínculos L y H mediante las ecuaciones

$$L = e_t^a H_a + w_t G \quad (4.20)$$

$$H = e_t^a \epsilon_a^b H_b. \quad (4.21)$$

Ahora la interpretación de los vínculos cambia ligeramente. G sigue generando la simetría en el índice interno sobre las variables canónicas, pero L es ahora el generador de difeomorfismos temporales sobre las superficies de r constante y el vínculo Hamiltoniano H , como ya mencionamos, se interpreta como el generador de una evolución en la dirección radial.

Como se mostró en la sección 4.2, hay dos maneras de tratar un vínculo de primera clase al cuantizar un sistema vinculado, o se complementa con una condición de fijado de gauge y se resuelve explícitamente o se impone como un operador que aniquila la función de onda. En esta teoría tenemos tres vínculos de primera clase, L , G y H . Por analogía con el procedimiento utilizado en [2] lo que haremos es fijar parcialmente el gauge. En particular, resolveremos explícitamente el vínculo G y luego impondremos los vínculos restantes a nivel cuántico.

Como el vínculo G está asociado a la simetría de gauge de rotación en los índices internos, podemos interpretar que hay una redundancia en tener e_t^0 y e_t^1 ya que podríamos rotar uno en el otro. Esta observación nos muestra que podemos establecer

$$e_t^1 = 0 \quad (4.22)$$

como condición de fijado de gauge parcial. Esto es similar al procedimiento de reducción dimensional de la gravedad tridimensional de la sección 3.4. Usaremos la ecuación (4.22) como condición de fijado de gauge para resolver el vínculo G .

De acuerdo a lo discutido en 4.2, esta es una buena condición de fijado de gauge pues forma un sistema de segunda clase con $G = 0$. La resolución de este vínculo junto con (4.22) fija una condición sobre ϕ_1

$$\phi_1 = \frac{\partial_t \phi}{e_t^0}. \quad (4.23)$$

Observemos que en el proceso de fijado parcial de gauge resolvemos el par (e_t^1, ϕ_1) pasando de un espacio de fases con tres pares de variables canónicas y tres vínculos a un espacio de fases con dos pares de variables canónicas y dos vínculos. Nótese que una variable la fijamos a cero y la otra queda escrita en función de algunas de

las variables canónicas restantes. Esta observación va en la línea de la discusión 4.2. La teoría dada por (4.17) se puede pensar como tener un espacio de fases irrestricto M_{kin} que tiene tres pares de variables canónicas donde imponemos los tres vínculos G , L y H . Como estrategia para cuantizar lo que estamos haciendo es primero definir el espacio M'_{kin} como la superficie dada por $G = 0$ y $e_t^1 = 0$. Sabemos que M'_{kin} es un buen espacio de fases porque G y e_t^1 forman un sistema de segunda clase, sobre este espacio nos quedan por imponer los vínculos $H = 0$ y $L = 0$. Sobre ese espacio de fases bien definido $M_{kin'}$ aplicamos el mapa de cuantización canónica sobre las variables canónicas restantes (e_t^0, ϕ_0) y (ϕ, w_t) . Finalmente, imponemos los vínculos L y H a nivel cuántico. Esto es un híbrido entre el enfoque de restringir primero el espacio de fases para luego cuantizar y el enfoque en el que primero se cuantiza el espacio irrestricto para luego imponer los vínculos directamente a la función de onda.

Una vez resuelto este vínculo solo queda una variable asociada a la base local e_t^a por lo que podemos renombrar

$$e_t^0 = e. \quad (4.24)$$

Luego del fijado parcial de gauge y redefiniendo $H \rightarrow \frac{H}{e}$ los vínculos restantes son

$$L = eH_0 \quad (4.25)$$

$$H = -H_1. \quad (4.26)$$

Aunque rompimos la simetría de gauge al resolver el vínculo G , se sigue verificando que L genera difeomorfismos sobre las variables canónicas residuales. Esto implica que implementar el vínculo a nivel cuántico es sencillo, basta con elegir un funcional de onda $\Psi[e, \phi]$ que sea invariante bajo difeomorfismos para que automáticamente

$$\hat{L}\Psi[e, \phi] = 0. \quad (4.27)$$

Finalmente solo queda imponer la ecuación asociada al vínculo Hamiltoniano H . Como veremos en la siguiente sección esto es más desafiante.

4.4. Ecuación de Wheeler-DeWitt

Históricamente, la idea de promover los campos a operadores en el contexto gravitatorio viene de los trabajos de Wheeler y DeWitt [20]. En ellos, a partir de la foliación del espaciotiempo usando la coordenada temporal, se encuentran los vínculos de la gravedad en $d = 4$ en el formalismo métrico. Estos vínculos se expresan en términos de la métrica inducida en las superficies foliantes. Al promoverlos a operadores actuando sobre un funcional de onda se tiene por un lado

$$\hat{P}_i \Psi = 0, \quad (4.28)$$

donde los P_i son los operadores asociados a los tres generadores de difeomorfismo espaciales en las superficies de t constante. Por otra parte se tiene H el vínculo Hamiltoniano que representa la evolución temporal. Sobre el funcional de onda impone que

$$\hat{H} \Psi[e, \phi] = 0. \quad (4.29)$$

A esta ecuación se la conoce con el nombre de ecuación de Wheeler-DeWitt. En nuestro contexto debemos resolver la ecuación de Wheeler-DeWitt radial, pues es en esa dirección que planteamos la foliación del espaciotiempo. Otra observación es que nosotros lo estamos haciendo en el formalismo de primer orden, por lo que además del vínculo Hamiltoniano H y el generador de difeomorfismos L tuvimos que lidiar con el generador de la simetría en los índices internos G .

En [2] se encontraron soluciones a la ecuación de Wheeler-DeWitt radial para la gravedad tridimensional. Los funcionales de onda se pueden escribir como una integral de caminos de una métrica auxiliar E

$$\Psi[e^+, e^-] = e^{\frac{ik}{4\pi} \int_{\Sigma} e^+ \wedge e^-} \int \mathcal{D}E e^{-\frac{ik}{2\pi} \int_{\Sigma} (E^+ - e^+) \wedge (E^- - e^-)} Z[E]. \quad (4.30)$$

Donde k es una constante positiva, e^+ y e^- son 1-formas que parametrizan la geometría de las superficies de radio constante y Z es la función de partición de una teoría de campos bidimensional que está restringida a cumplir la identidad de Ward (1.4).

Retomando el paralelismo entre la gravedad en tres dimensiones y la gravedad de Jackiw-Teitelboim expuesto en la sección 3.4, e inspirados en el resultado dado por (4.30), comenzamos proponiendo un ansatz para la solución de la ecuación de

Wheeler-Dewitt radial en el caso bidimensional.

$$\Psi[e, \phi] = \int \mathcal{D}E \mathcal{D}\Phi e^{a \int dt e \phi + b \int dt (\phi - \Phi)(e - E)} Z[E, \Phi]. \quad (4.31)$$

La idea es que al promover las variables canónicas a operadores y aplicar el vínculo H sobre (4.31) determinaremos a , b y las propiedades que debe cumplir la función de partición $Z[E, \Phi]$ para que Ψ efectivamente sea solución. Esto se muestra explícitamente en las secciones 4.4.1 y 4.4.2. Los cálculos de esas secciones son análogos a los que aparecen en [2], donde se demuestra que (4.30) es solución de la ecuación de Wheeler-DeWitt radial tridimensional.

Por simplicidad, podemos redefinir los campos e y ϕ mediante las transformaciones $e \rightarrow \sqrt{\frac{|\Lambda|}{2}} e$ y $\phi \rightarrow \sqrt{\frac{|\Lambda|}{2}} \phi$ para absorber el factor negativo $\Lambda/2$. Luego, aplicamos la transformación canónica $\phi \rightarrow -\phi$ para que la forma simpléctica en (4.17) sea de signo positivo. Finalmente, el vínculo H a imponer es

$$H = -\partial_t \left(\frac{\partial_t \phi}{e} \right) + \phi_0 w_t + e \phi. \quad (4.32)$$

Para resolver el vínculo a nivel cuántico debemos ver cómo actúan las variables canónicas sobre un funcional de ondas una vez que se promueven a operadores. Podemos expresar el funcional de onda en términos de las variables de configuración e y ϕ , lo que es análogo a elegir el espacio de posiciones para representar la función de onda en mecánica cuántica ordinaria. En esta representación, e y ϕ actúan multiplicativamente sobre Ψ , mientras que sus variables conjugadas actúan como derivadas funcionales de manera análoga a como actúan los momentos sobre una función de onda escrita en el espacio de posiciones. Por lo tanto

$$\hat{\phi}_0 = -ik \frac{\delta}{\delta e} \quad (4.33)$$

$$\hat{w}_t = -ik \frac{\delta}{\delta \phi}. \quad (4.34)$$

Aquí aparece $k = 16\pi G \sqrt{\frac{2}{|\Lambda|}}$ debido a que la redefinición de los campos e y ϕ cambia la forma simpléctica en (4.17). La ecuación (4.29) puede escribirse como una ecuación funcional

$$\left(-\partial_t \left(\frac{\partial_t \phi}{e} \right) - k^2 \frac{\delta}{\delta e} \frac{\delta}{\delta \phi} + e \phi \right) \Psi[e, \phi] = 0. \quad (4.35)$$

Para demostrar que nuestro ansatz es solución dividimos la prueba en dos partes.

Por un lado analizaremos la acción sobre el funcional de onda del término cinético

$$T = \hat{\phi}_0 \hat{w}_t + e\phi, \quad (4.36)$$

y por otro lado la acción del término de potencial

$$R = -\partial_t (\partial_t \phi / e). \quad (4.37)$$

La idea de la prueba es determinar cómo la acción de estos operadores se refleja sobre $Z[E, \Phi]$ para entender qué propiedades debe cumplir.

4.4.1. Término cinético

En la demostración que sigue es útil para las manipulaciones algebraicas escribir el funcional de onda como

$$\Psi[e, \phi] = e^{a \int dt' e\phi} \int \mathcal{D}E \mathcal{D}\Phi K[e, \phi, E, \Phi] Z[E, \Phi]. \quad (4.38)$$

Donde queda definido el “kernel”

$$K[e, \phi, E, \Phi] = e^{b \int dt' (E-e)(\Phi-\phi)}. \quad (4.39)$$

Como veremos a continuación este kernel es útil porque al actuar sobre él podremos hacer equivalencias entre operadores que dependen de nuestras variables canónicas e y ϕ y operadores que dependen de las variables de integración E y Φ . Primero debemos entender cómo la acción del término cinético se traslada a un operador actuando únicamente sobre el kernel. Para pasar la acción del término cinético al kernel debemos observar que al elegir

$$a = 1/k \quad (4.40)$$

se cumple que

$$(\phi_0 w_t + e\phi) \Psi[e, \phi] = e^{\frac{1}{k} \int dt' e\phi} \int \mathcal{D}E \mathcal{D}\Phi \left((\hat{w}_t - ie)(\hat{\phi}_0 - i\phi) + e\phi \right) K[e, \phi, E, \Phi] Z[E, \Phi]. \quad (4.41)$$

Mediante un cálculo directo se verifica que este operador se puede descomponer de la siguiente manera

$$(\hat{w}_t - ie)(\hat{\phi}_0 - i\phi) + e\phi = \frac{1}{2}\hat{w}_t(\hat{\phi}_0 - 2i\phi) + \frac{1}{2}\hat{\phi}_0(\hat{w}_t - 2ie) - i[\hat{\phi}_0, e]. \quad (4.42)$$

Ahora podemos utilizar el kernel para escribir esto en términos de las variables de integración E y Φ . Para esto notamos que si fijamos

$$b = -2/k \quad (4.43)$$

se cumplen las siguientes igualdades

$$(\hat{\phi}_0 - 2i\phi)K = -2i\Phi K \quad (4.44)$$

$$(\hat{w}_t - 2ie)K = -2iEK \quad (4.45)$$

$$\hat{w}_t K = ik \frac{\delta}{\delta\Phi} K \quad (4.46)$$

$$\hat{\phi}_0 K = ik \frac{\delta}{\delta E} K \quad (4.47)$$

$$[\hat{\phi}_0, e]K = ik \left[\frac{\delta}{\delta E}, E \right]. \quad (4.48)$$

Utilizando estas propiedades la ecuación (4.41) queda

$$\begin{aligned} \left(\hat{\phi}_0 \hat{w}_t + e\phi \right) \Psi[e, \phi] &= e^{\frac{1}{k} \int dt' e\phi} \int \mathcal{D}E \mathcal{D}\Phi k \left(\Phi \frac{\delta}{\delta\Phi} + E \frac{\delta}{\delta E} + \left[\frac{\delta}{\delta E}, E \right] \right) \\ &\quad K[e, \phi, E, \Phi] Z[E, \Phi]. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Además, podemos simetrizar el término del conmutador, pues actuando sobre el kernel se cumple que $\left[\frac{\delta}{\delta E}, E \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\delta}{\delta\Phi}, \Phi \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\delta}{\delta E}, E \right]$, por lo que si definimos el operador de dilatación como

$$\frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}} = \Phi \frac{\delta}{\delta\Phi} + E \frac{\delta}{\delta E} \quad (4.50)$$

$$- \left(\frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}} \right)^\dagger = \frac{\delta}{\delta\Phi} \Phi + \frac{\delta}{\delta E} E. \quad (4.51)$$

Obtenemos entonces el siguiente resultado

$$(\phi_0 w_t + e\phi) \Psi[e, \phi] = e^{\frac{1}{k} \int dt' e\phi} \int \mathcal{D}E \mathcal{D}\Phi \frac{k}{2} \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}} - \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}} \right)^\dagger \right) K[e, \phi, E, \Phi] Z[E, \Phi]. \quad (4.52)$$

El último paso consiste en asumir que las medidas de integración se pueden definir de manera tal que el operador $\frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}}$ es anti-Hermítico y que podemos integrar por partes dentro de la integral de caminos. Tenemos entonces

$$(\phi_0 w_t + e\phi) \Psi[e, \phi] = e^{\frac{1}{k} \int dt' e\phi} \int \mathcal{D}E \mathcal{D}\Phi K[e, \phi, E, \Phi] \left(k \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}} \right) Z[E, \Phi]. \quad (4.53)$$

Notar que este paso es radicalmente distinto en 2 dimensiones debido a la presencia de la anomalía de Weyl en la medida de integración gravitatoria en ese caso [2]. Asumimos que para la medida de integración considerada este efecto no está presente. De cualquier manera, un estudio más detallado de este aspecto de la medida de integración en nuestro caso queda por fuera del alcance de este trabajo.

4.4.2. Término de potencial

Queremos entender ahora cómo actúa el término de potencial $R(e, \phi)$ sobre el funcional de onda. Primero notamos que, al no depender de los momentos, la acción de este término pasa directamente multiplicando al kernel. De la misma forma que en el análisis del término cinético, utilizaremos la forma del kernel para trabajar en términos de las variables de integración E y Φ . Para ello definiremos dos operadores

$$\Pi_\phi = \frac{k}{2i} \frac{\delta}{\delta E} \quad (4.54)$$

$$\Pi_e = \frac{k}{2i} \frac{\delta}{\delta \Phi}. \quad (4.55)$$

Su utilidad es que actuando sobre el kernel se cumple

$$(E + \Pi_e)K = eK \quad (4.56)$$

$$(\Phi + \Pi_\phi)K = \phi K. \quad (4.57)$$

En lo que sigue no escribimos la derivada temporal global que aparece en R , ya que asumimos que sale fuera de la integral de caminos y por lo tanto no juega un

papel relevante en estos cálculos. Las ecuaciones (4.56) y (4.57) permiten concluir que la acción de $R(e, \phi)$ sobre el funcional de onda es equivalente a la acción sobre el kernel de $R(E + \Pi_e, \Phi + \Pi_\phi)$. Podemos calcular explícitamente

$$R(E + \Pi_e, \Phi + \Pi_\phi) = R(E, \Phi) + \left(\partial_t \Pi_\phi - \frac{\partial_t \Phi}{E} \Pi_e \right) (E + \Pi_e)^{-1}. \quad (4.58)$$

Nos concentramos ahora en cómo es la acción del segundo término del lado derecho de la ecuación (4.58) sobre el kernel, en primer lugar

$$\left(\partial_t \Pi_\phi - \frac{\partial_t \Phi}{E} \Pi_e \right) (E + \Pi_e)^{-1} K = \left(\partial_t \Pi_\phi - \frac{\partial_t \Phi}{E} \Pi_e \right) e^{-1} K. \quad (4.59)$$

Llamemos $\hat{J}$ al operador $(\partial_t \Pi_\phi - \frac{\partial_t \Phi}{E} \Pi_e)$. La acción de R sobre el funcional de onda es

$$\begin{aligned} R(e, \phi) \Psi[e, \phi] = & e^{\frac{1}{k} \int dt' e \phi} \left(\int \mathcal{D}E \mathcal{D}\Phi R(E, \Phi) K[e, \phi, E, \Phi] Z[E, \Phi] \right. \\ & \left. + \int \mathcal{D}E \mathcal{D}\Phi e^{-1} \hat{J} K[e, \phi, E, \Phi] Z[E, \Phi] \right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Dado que las variables E y Φ tienen las mismas relaciones de conmutación con $\frac{\delta}{\delta E}$ y $\frac{\delta}{\delta \Phi}$ que las que tienen e y ϕ con $\frac{\delta}{\delta e}$ y $\frac{\delta}{\delta \phi}$, podemos verificar que el operador $\hat{J}$ genera las siguientes transformaciones sobre las variables de integración

$$\left\{ \int dt \alpha \hat{J}, \Phi(t') \right\} = -\frac{\alpha}{E} \partial_t \Phi \quad (4.61)$$

$$\left\{ \int dt \alpha \hat{J}, E(t') \right\} = -\partial_t \left(\frac{\alpha}{E} \right) E - \left(\frac{\alpha}{E} \right) \partial_t E. \quad (4.62)$$

Estas transformaciones son generadores de difeomorfismos de parámetro α/E . Como las medidas de integración $\mathcal{D}E$ y $\mathcal{D}\Phi$ son invariantes bajo difeomorfismos es posible integrar por partes para pasar la acción de $\hat{J}$ a $Z[E, \Phi]$, que a su vez la elegimos invariante bajo difeomorfismos de E y Φ , por lo que $\hat{J}$ la aniquila. Debido a este argumento el segundo término del lado derecho de la ecuación (4.60) se anula, por lo que

$$R(e, \phi) \Psi[e, \phi] = e^{\frac{1}{k} \int dt' e \phi} \int \mathcal{D}E \mathcal{D}\Phi K[e, \phi, E, \Phi] R(E, \Phi) Z[E, \Phi]. \quad (4.63)$$

Juntando los resultados del término cinético y el término de potencial encontramos que la acción de $\hat{H}$ sobre el funcional de onda es

$$\hat{H} \Psi[e, \phi] = e^{\frac{1}{k} \int dt' e \phi} \int \mathcal{D}E \mathcal{D}\Phi K[e, \phi, E, \Phi] \left(-\partial_t \left(\frac{\partial_t \Phi}{E} \right) + k \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}} \right) Z[E, \Phi]. \quad (4.64)$$

El resultado final es que pedir que esta integral de caminos sea solución de la ecuación de Wheeler-DeWitt es equivalente a pedir que la función de partición Z obedezca con la identidad

$$\left(-\partial_t \left(\frac{\partial_t \Phi}{E} \right) + k \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}} \right) Z[E, \Phi] = 0. \quad (4.65)$$

Esta condición es el análogo de la identidad de Ward conforme (1.4) que debe satisfacer Z_{2d} en las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt en el caso tridimensional.

Capítulo 5

Estados cuánticos gravitacionales y la deformación $T\bar{T}$

En el capítulo anterior encontramos soluciones a la ecuación de Wheeler-DeWitt radial como una integral de caminos que involucra una función de partición sujeta a cumplir cierta identidad. Un resultado importante que mostraremos en este capítulo es que al evaluar esas soluciones en campos e y ϕ constantes el funcional de ondas se reduce a una integral ordinaria.

Para el caso tridimensional, al evaluar las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt radial (4.30) en valores constantes de los campos se obtiene la deformación $T\bar{T}$ de la función de partición Z_{2d} . Estableceremos un resultado análogo para el caso bidimensional. La integral ordinaria a la que se reducen nuestras soluciones radiales puede interpretarse como una deformación del tipo $T\bar{T}$ de la función de partición Z .

5.1. Compactificación

Como vimos en el capítulo anterior, las soluciones halladas al resolver el vínculo Hamiltoniano a nivel cuántico se pueden escribir como

$$\Psi[e, \phi] = \int \mathcal{D}E \mathcal{D}\Phi e^{-\frac{2}{k} \int dt (\phi - \Phi)(e - E)} Z[E, \Phi], \quad (5.1)$$

donde Z cumple la identidad dada por la ecuación (4.65). Omitimos el factor $e^{\frac{1}{k} \int dt' e\phi}$ porque será una constante irrelevante para el análisis que sigue.

De acuerdo a la discusión del capítulo 1, las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt radial en $d = 3$ se pueden interpretar como la deformación a lo largo del

flujo de $T\bar{T}$ de una función de partición Z_{2d} cuando la métrica inducida es plana y se compactifica en el tiempo y el espacio [3]. Además, desde el punto de vista de la deformación $T\bar{T}$ esto puede pensarse como acoplar a la teoría no deformada una teoría de gravedad cuántica en el toroide.

Con el objetivo de construir un análogo de [3] en una dimensión menos, compactificamos la coordenada temporal t , la cual tomará valores en $[0, 1]$. De esta manera, las superficies de r constante en la foliación del espaciotiempo son difeomorfas a círculos cuya geometría queda descrita por el campo $e(t)$. Estos círculos son el equivalente unidimensional del toroide donde se define la termodinámica de las Z_{2d} . Además, evaluaremos las soluciones (5.1) en valores constantes de los campos e y ϕ . Geométricamente esto es equivalente a fijar la longitud del círculo, que es una cantidad invariante bajo difeomorfismos dada por

$$\int_0^1 e(t) dt = e. \quad (5.2)$$

5.2. Fijación de gauge y procedimiento de Faddeev-Popov

Ahora veremos cómo la integral de caminos dada por (5.1) se localiza en una integral ordinaria. En primer lugar, la integral es invariante bajo difeomorfismos de las variables canónicas e y ϕ . Esto es necesario para imponer a nivel cuántico el vínculo L que genera los mismos. Sin embargo, (5.1) no es invariante bajo difeomorfismos de E y Φ . Podemos agregar esta simetría a costa de introducir un campo auxiliar X que actúe como un difeomorfismo de las variables canónicas de la siguiente manera

$$\Psi[e, \phi] = \int \frac{\mathcal{D}E \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}X}{Vol(dif f)} e^{-\frac{2}{k} \int dt (\phi(X(t)) - \Phi) (\dot{X}e(X(t)) - E)} Z[E, \Phi]. \quad (5.3)$$

Aquí $Vol(dif f)$ corresponde al volumen del grupo de difeomorfismos. La inclusión de este campo auxiliar no cambia la integral de caminos. Esto se debe a que aunque estamos agregando un campo también estamos agregando una simetría de gauge.

En particular si realizamos el procedimiento de Faddeev-Popov [19, 21] a (5.3) se vuelve a obtener la integral de caminos original. Consideremos la condición de fijación de gauge $1 = \int \mathcal{D}v \delta(X^{(v)} - t) J(X)$ donde $J(X)$ es el determinante de Faddeev-Popov. En este caso $J(X) = 1$. Para mostrar esto partimos de la propia condición

y vemos que se cumple

$$J^{-1}(X) = \frac{\int \mathcal{D}v \delta(v)}{\sqrt{\det P}} = \frac{1}{\sqrt{\det P}}, \quad (5.4)$$

donde P es el operador que relaciona a primer orden la variación de la condición de fijación de gauge con un difeomorfismo infinitesimal. Trabajando dentro del soporte de la delta el campo X cumple $X(v) = t$ y por lo tanto un cambio infinitesimal en la condición de fijación de gauge sería

$$X^{(v+\delta v)} - I = X^{(v)} - I + \delta v \dot{X} = \delta v. \quad (5.5)$$

Esto muestra que el operador P que lleva el difeomorfismo infinitesimal a la variación de la condición de fijado de gauge es la identidad y entonces $J^{-1} = 1 = J$. El truco de Faddeev-Popov es precisamente incluir esta identidad en la ecuación (5.3). Al introducir esta condición sobre el campo X obtenemos

$$\Psi[e, \phi] = \int \frac{\mathcal{D}E \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}X}{\text{Vol}(\text{diff})} \mathcal{D}v \delta(X^{(v)} - I) e^{-\frac{2}{k} \int dt (\phi(X(t)) - \Phi) (\dot{X}e(X(t)) - E)} Z[E, \Phi]. \quad (5.6)$$

Por un lado, las medidas de integración y la función de partición son invariantes bajo difeomorfismos, es decir

$$\mathcal{D}E = \mathcal{D}E^{(v)} \quad (5.7)$$

$$\mathcal{D}\Phi = \mathcal{D}\Phi^{(v)} \quad (5.8)$$

$$Z[E, \Phi] = Z[E^{(v)}, \Phi^{(v)}]. \quad (5.9)$$

También es invariante bajo difeomorfismos la exponencial

$$e^{-\frac{2}{k} \int dt (\phi(X(t)) - \Phi) (\dot{X}e(X(t)) - E)} = e^{-\frac{2}{k} \int dt (\phi(X^{(v)}(t)) - \Phi^{(v)}) (\dot{X}^{(v)}e(X^{(v)}(t)) - E^{(v)})}. \quad (5.10)$$

A partir de estas observaciones podemos transformar la ecuación (5.6) en

$$\Psi[e, \phi] = \int \frac{\mathcal{D}E^{(v)} \mathcal{D}\Phi^{(v)} \mathcal{D}X^{(v)}}{\text{Vol}(\text{diff})} \mathcal{D}v \delta(X^{(v)} - I) e^{-\frac{2}{k} \int dt (\phi(X^{(v)}(t)) - \Phi^{(v)}) (X^{(v)} e^{X^{(v)}(t)} - E^{(v)})} Z[E^{(v)}, \Phi^{(v)}]. \quad (5.11)$$

Si integramos la delta bajo la medida $\mathcal{D}X^{(v)}$ tenemos

$$\Psi[e, \phi] = \int \frac{\mathcal{D}E^{(v)} \mathcal{D}\Phi^{(v)} \mathcal{D}v}{\text{Vol}(\text{diff})} e^{-\frac{2}{k} \int dt (\phi(t) - \Phi^{(v)}) (e(t) - E^{(v)})} Z[E^{(v)}, \Phi^{(v)}]. \quad (5.12)$$

Aquí, mediante el difeomorfismo inverso a v podemos hacer el cambio de variable $E^{(v)} \rightarrow E$ y $\Phi^{(v)} \rightarrow \Phi$, aprovechando que las medidas de integración y la función de partición son invariantes bajo difeomorfismos, lo cual nos hará perder la dependencia en v y nos permitirá factorizar su integral de la siguiente manera

$$\Psi[e, \phi] = \int \frac{\mathcal{D}E \mathcal{D}\Phi}{\text{Vol}(\text{diff})} \left(\int \mathcal{D}v \right) e^{-\frac{2}{k} \int dt (\phi(t) - \Phi) (e(t) - E)} Z[E, \Phi]. \quad (5.13)$$

La integral $\int \mathcal{D}v$ es de hecho el volumen del grupo de difeomorfismos $\text{Vol}(\text{diff})$, por lo que estos factores se cancelan entre si y finalmente recuperamos la expresión (5.1).

Una vez mostrada esta equivalencia trabajaremos con la expresión (5.3). Para analizar esta integral de caminos es conveniente usar una condición de fijado de gauge. Esto puede lograrse mediante el truco de Faddeev-Popov introduciendo en la integral la siguiente identidad

$$1 = \int \mathcal{D}v \int \mathcal{D}\tilde{E} \delta(E^{(v)} - \tilde{E}) J[E]. \quad (5.14)$$

En esta identidad dentro del soporte de la delta estamos llevando a la uno forma E a una constante $\tilde{E}$ mediante un difeomorfismo v . Insertando esta identidad en la ecuación (5.3) obtenemos

$$\Psi[e, \phi] = \int \frac{\mathcal{D}E \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\tilde{E} \mathcal{D}X \mathcal{D}v}{\text{Vol}(\text{diff})} \delta(E^{(v)} - \tilde{E}) e^{-\frac{2}{k} \int dt (\phi(X(t)) - \Phi) (\dot{X} e^{X(t)} - E)} Z[E, \Phi] J[E]. \quad (5.15)$$

Dado que tanto J , Z , la exponencial y las medidas de integración $\mathcal{D}E$, $\mathcal{D}\Phi$ y $\mathcal{D}X$ son

invariantes bajo difeomorfismos podemos pasarles el difeomorfismo v sin modificar el funcional de onda, de forma que lo anterior se convierte en

$$\Psi[e, \phi] = \int \frac{\mathcal{D}E^{(v)} \mathcal{D}\Phi^{(v)} \mathcal{D}\tilde{E} \mathcal{D}X^{(v)} \mathcal{D}v}{\text{Vol}(\text{diff})} \delta(E^{(v)} - \tilde{E}) e^{-\frac{2}{k} \int dt (\phi(X^{(v)}(t)) - \Phi^{(v)}) (\dot{X}^{(v)} e(X^{(v)}(t)) - E^{(v)})} Z[E^{(v)}, \Phi^{(v)}] J[E^{(v)}]. \quad (5.16)$$

Este paso nos permite factorizar el volumen del grupo de difeomorfismos de la misma manera que antes. También estamos fijando las formas E a valores constantes $\tilde{E}$, ya que integrando la delta con la medida de integración $\mathcal{D}E^{(v)}$ tenemos

$$\Psi[e, \phi] = \int d\tilde{E} \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}X e^{-\frac{2}{k} \int dt (\phi(X(t)) - \Phi) (\dot{X} e(X(t)) - \tilde{E})} Z[\tilde{E}, \Phi] J[\tilde{E}]. \quad (5.17)$$

Notar que ahora la integral sobre la variable $\tilde{E}$ es una integral ordinaria. Lo siguiente es calcular la integral de caminos en el campo X , para esto definimos el producto interno en el espacio de los campos escalares dado por

$$\langle \delta Y, \delta Y' \rangle = G_s(\delta Y, \delta Y') = \int dt \delta Y \delta Y'^* \tilde{E}. \quad (5.18)$$

El campo X por definición es un mapa del círculo en el círculo parametrizado por una coordenada $t \in [0, 1]$ que en el caso más general cumple $X(t+1) = X(t) + n$. Sin embargo, como X es un difeomorfismo entonces el número n que representa la cantidad de vueltas debe ser 1. Con esto en cuenta, el campo auxiliar se puede parametrizar como $X(t) = t + Y(t)$ con Y una función periódica que cumple $Y(t+1) = Y(t)$. Debido a esta parametrización del campo X integrar en el espacio de estos campos es equivalente a integrar en el espacio de funciones periódicas Y . La integral de caminos en el campo X que queremos calcular es

$$I = \int \mathcal{D}X e^{-\frac{2}{k} \int \partial t X(e)(\phi - \Phi)}. \quad (5.19)$$

Si introducimos la forma del campo X en términos de la función periódica Y en (5.19) e integramos por partes obtenemos

$$I = e^{-\frac{2}{k} \int e(\phi - \Phi)} \int \mathcal{D}Y e^{-\frac{2e}{k} \int Y \partial t (\phi - \Phi)}. \quad (5.20)$$

Un campo Y genérico puede escribirse como un desarrollo en modos de Fourier

$Y = Y_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y'_n e^{itn}$, a partir de esto podemos separar la integral de caminos para Y como $\int \mathcal{D}Y = \int \mathcal{D}Y_0 \int \mathcal{D}Y'$, donde $\int \mathcal{D}Y'$ corresponde a la integral en los modos de Fourier no constantes y la integral $\int \mathcal{D}\tilde{Y}$ a la parte asociada al modo constante. La integral de caminos queda

$$I = e^{\frac{-2}{k} \int e(\phi-\Phi)} \int \mathcal{D}Y_0 \int \mathcal{D}Y' e^{\frac{2e}{k} \int Y \partial t (\phi-\Phi)}. \quad (5.21)$$

Para definir la integral de caminos [22, 23] utilizaremos el determinante funcional de la métrica en el espacio de campos que define el producto interno (5.18),

$$\int \mathcal{D}Y = \int \mathcal{D}Y_0 \int \mathcal{D}Y' = \int dy_0 \prod_n \int dy'_n \sqrt{\det G_s}. \quad (5.22)$$

Este operador está definido de manera que se cumple la siguiente normalización

$$\int \mathcal{D}Y e^{-\langle Y, Y \rangle} = 1. \quad (5.23)$$

Para hallar el determinante $\sqrt{\det G_s}$ nos apoyamos en el hecho de que los modos de Fourier en el desarrollo de un campo dado son ortogonales, el producto interno $\langle Y, Y \rangle$ queda determinado por la suma de los productos internos de los modos unitario consigo mismos. A partir de la definición del producto interno dado en (5.18)

$$G_s(\delta Y_n, \delta Y_m) = \int_0^1 dt \tilde{E} e^{2\pi i(n-m)t} = \tilde{E} \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)t} = \tilde{E} \delta_{nm}, \quad (5.24)$$

por lo que nuestra condición de normalización se reduce a una serie de integrales Gaussianas

$$\int dy_0 \prod_n \int dy'_n \sqrt{\det G_s} e^{-\tilde{E} y_0^2} e^{-\tilde{E} y'_n y_n'^*} = 1. \quad (5.25)$$

Teniendo en cuenta que las variables de integración dy'_n son complejas, un cálculo directo de estas integrales Gaussianas nos muestra que para cumplir la condición de normalización debemos definir

$$\sqrt{\det G_s} = \sqrt{\tilde{E}} \prod_n \tilde{E}. \quad (5.26)$$

Todo esto nos permite definir explícitamente la integral de caminos I . El siguiente paso es desarrollar Φ en modos de Fourier y continuar con el cálculo de (5.19)

$$\int d\tilde{y} \sqrt{\tilde{E}} \int \prod_n dy'_n e^{\frac{2e}{k} \int \sum_n Y'_n e^{int} \partial t \sum_m \Phi'_m e^{imt}} = \int d\tilde{y} \sqrt{\tilde{E}} \int \prod_n dy'_n \tilde{E} e^{\frac{2ein}{k} Y'_n \Phi'_n}. \quad (5.27)$$

Usando que $\delta(w) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iwt} dt$ llegamos a

$$\int d\tilde{y} \sqrt{\tilde{E}} \prod_n 2\pi \tilde{E} \delta\left(\frac{-2en\Phi'_n}{k}\right) = \int d\tilde{y} \sqrt{\tilde{E}} \det'(2\pi) \delta\left(\frac{-2e\partial t \Phi}{k\tilde{E}}\right). \quad (5.28)$$

Notemos que el modo y_0 es una función constante del círculo que está parametrizado con $t \in [0, 1]$. Por lo tanto, el rango de integración para este modo es también ese intervalo. Como además nada depende de él, esa integral da uno. En el último paso de la ecuación (5.28) lo que aparece es la delta de Dirac de un campo, que está definida como el producto de las deltas de Dirac en todos los modos no cero, excluyéndose este debido a que la presencia de la derivada ∂t actuando en el campo Φ lo elimina y por lo tanto con la delta no estamos fijando ninguna condición sobre el mismo. Debido a que la multiplicatoria es sobre los modos no constantes la multiplicación de los factores de 2π no genera el término $\det(2\pi)$ sino que tenemos $\det'(2\pi)$ donde la prima indica que el determinante se está tomando sobre el subespacio de modos no cero. Ambos determinantes se relacionan mediante $\det(2\pi) = 2\pi \det'(2\pi)$. De acuerdo con [22] uno puede absorber los factores constantes de determinantes funcionales en una renormalización de los parámetros de la acción cuando estos incluyen todos los modos, incluido el modo cero. Por lo que, finalmente, la integral (5.19) tiene por resultado

$$I = e^{-\frac{2}{k} \int e(\phi-\Phi)} \sqrt{\tilde{E}} \frac{1}{2\pi} \delta\left(\frac{-2e\partial t \Phi}{k\tilde{E}}\right). \quad (5.29)$$

Hasta ahora tenemos entonces

$$\psi[e, \phi] = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\tilde{E} e^{-\frac{2e}{k} \int (\phi-\Phi)} \frac{\sqrt{\tilde{E}}}{2\pi} e^{\frac{2}{k} \int \tilde{E}(\phi-\Phi)} \delta\left(\frac{-2e\partial t \Phi}{k\tilde{E}}\right) J[\tilde{E}] Z[\tilde{E}, \Phi]. \quad (5.30)$$

A continuación lo que haremos es calcular el determinante de Faddeev-Popov de manera análoga a como lo hicimos al inicio de la sección. En la identidad (5.14) la condición de fijado de gauge que aparece en la delta es una función de v y $\tilde{E}$, consideremos un operador P que mapea variaciones infinitesimales de v y $\tilde{E}$ (que

denotaremos como δv y $\delta \tilde{E}$) a variaciones infinitesimales de la condición de gauge. Para encontrar el operador P observemos que la variación de la condición de fijado de gauge es

$$\begin{aligned} E^{(v+\delta v)} - (\tilde{E} + \delta \tilde{E}) &= E^{(v)} - \tilde{E} + \delta v \partial_t E^{(v)} + \partial_t \delta v E^{(v)} - \delta \tilde{E} \\ &= \partial_t \delta v \tilde{E} - \delta \tilde{E}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

donde se usó que trabajando en el soporte de la delta en (5.14) $E^{(v)} = \tilde{E}$ que a su vez es constante. Esto define un mapa $P \begin{pmatrix} \delta v \\ \delta \tilde{E} \end{pmatrix} = \partial_t \delta v \tilde{E} - \delta \tilde{E}$ que lleva las variaciones infinitesimales de difeomorfismos δv y las variaciones infinitesimales $\delta \tilde{E}$ a variaciones infinitesimales de la condición de fijado de gauge. De esta definición se puede ver que a los efectos de calcular su determinante, el operador P tiene el problema de no actuar de manera autoadjunta. Por lo tanto en este caso la manera más natural de trabajar es utilizar $\sqrt{\det P^\dagger P}$ en lugar de $\sqrt{\det P}$. Para obtener el operador $PP^\dagger$ partimos de su definición

$$\left\langle P \begin{pmatrix} \delta v_1 \\ \delta \tilde{E}_1 \end{pmatrix}, P \begin{pmatrix} \delta v_2 \\ \delta \tilde{E}_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \delta v_1 \\ \delta \tilde{E}_1 \end{pmatrix}, P^\dagger P \begin{pmatrix} \delta v_2 \\ \delta \tilde{E}_2 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (5.32)$$

Luego descomponemos este producto interno en una parte que dependa solo de $\delta \tilde{E}_1$, $\delta \tilde{E}_2$ y otra parte que dependa solo de δv_1 , δv_2 para poder aplicar el producto interno en cada subespacio. Entre escalares usamos el producto interno definido por (5.18), mientras que para vectores podemos definir el producto interno como

$$G_{vt}(v_{T1}, v_{T2}) = \int dt \tilde{E}^3 v_{T1} v_{T2}. \quad (5.33)$$

Esta definición es consistente pues $\tilde{E}$ es una uno forma y por lo tanto al contraerse con un vector se obtiene un escalar. La potencia tres aparece para que globalmente estemos integrando una uno forma. Utilizando estas definiciones e imponiendo condiciones de borde periódicas en los campos obtenemos que

$$PP^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tilde{E}^2} \partial_t^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

En este punto es preciso hacer una observación importante: en la condición de fijado de gauge (5.14) existe una redundancia debido a que si un difeomorfismo lleva E a $\tilde{E}$, la composición de este difeomorfismo con una traslación cumple exactamente lo mismo. Es decir, dentro del grupo de los difeomorfismos está el subgrupo de las

traslaciones que deja invariante a la condición de fijación de gauge. Esto quiere decir que las traslaciones infinitesimales están en el kernel del operador P y por lo tanto si no nos restringimos a un subespacio que no las contenga, dado que son vectores propios de este operador con valor propio asociado cero, el determinante de $PP^\dagger$ sería nulo. Por lo tanto, no calcularemos el determinante $\sqrt{\det(PP^\dagger)}$ sino que en su lugar debemos calcular $\sqrt{\det'(PP^\dagger)}$ donde el prima indica que nos restringimos al subespacio de difeomorfismos que no contiene las traslaciones. A partir de lo expuesto y de (5.14) tenemos

$$J^{-1}[E] = \frac{\int \mathcal{D}v \mathcal{D}E \delta(E) \delta(v')}{\sqrt{\det'(PP^\dagger)}}. \quad (5.35)$$

En esta ecuación v' hace referencia a los difeomorfismos que no son traslaciones. Asumiremos además que podemos pensar en el espacio de difeomorfismos como la unión de las traslaciones y un coset que incluye todos los difeomorfismos que no son traslaciones. Asumimos que esto nos permite separar la integral de camino en los difeomorfismos como

$$\int \mathcal{D}v = \int \mathcal{D}v_t \int \mathcal{D}v', \quad (5.36)$$

donde $\int \mathcal{D}v_t$ es la integral en el espacio de traslaciones y $\int \mathcal{D}v'$ es la integral en el coset. Aceptando esta forma de separar la integral podemos integrar sobre el complemento ortogonal a las traslaciones y sobre las uno formas E de manera que obtenemos para el determinante de Faddeev Popov

$$J^{-1}[E] = \int \frac{\mathcal{D}v_T}{\sqrt{\det'(PP^\dagger)}}. \quad (5.37)$$

Lo siguiente es calcular el volumen del subgrupo de traslaciones. Para ello recurrimos al producto interno en el espacio de campos vectoriales definido por (5.33) y aplicamos la definición de la integral de caminos de forma análoga a (5.22) para obtener

$$\int \mathcal{D}v_T = \int_0^1 dv_t \sqrt{\det G_{vt}} = \sqrt{\tilde{E}^3}. \quad (5.38)$$

Notamos que el volumen del grupo de traslaciones es finito. Finalmente con todo esto concluimos que el determinante de Faddeev-Popov es

$$J[\tilde{E}] = \frac{\sqrt{\det' \left(\frac{-\partial_t^2}{\tilde{E}^2} \right)}}{\sqrt{\tilde{E}^3}}. \quad (5.39)$$

En (5.30) el término con la delta de Dirac se puede tratar generalizando al caso continuo las propiedades de la delta usual, se puede mostrar que se cumple

$$\delta \left(\frac{-2e\partial_t\Phi}{k\tilde{E}} \right) = \frac{\delta(\Phi')}{\sqrt{\det' \left(\frac{-\partial_t^2}{\tilde{E}^2} \right)}} \sqrt{\det' \left(\frac{4e^2}{k^2} \right)}^{-1}, \quad (5.40)$$

donde aquí $\delta(\Phi')$ hace referencia a que no está fijado el modo constante del campo Φ , esto es debido a la presencia de la derivada dentro. Además, el determinante funcional asociado al operador derivada en este término se cancela con el mismo factor que aparece en el determinante de Faddeev Popov en (5.39). Un argumento similar al utilizado para eliminar el factor $\det'(2\pi)$ en la ecuación (5.28) nos permite absorber $\sqrt{\det' \left(\frac{4e^2}{k^2} \right)}^{-1}$ a costa de introducir un factor de $2e/k$. Si integramos la delta en los modos no cero obtenemos finalmente la siguiente expresión para la integral de caminos

$$\Psi[e, \phi] = \int d\Phi_0 d\tilde{E} \frac{e}{k\pi\tilde{E}} e^{-\frac{2}{k} \int (e-\tilde{E})(\phi-\Phi_0)} Z[\tilde{E}, \Phi_0]. \quad (5.41)$$

En conclusión, luego de integrar el campo X obtenemos una integral ordinaria cuyas variables de integración son el modo cero Φ_0 y $\tilde{E}$, que representa el largo del círculo. Esto es lo que sucede en [3], al evaluar la integral de caminos gravitatoria que define la deformación $T\bar{T}$ se obtiene una integral ordinaria. Con esta motivación en la siguiente sección mostraremos el vínculo entre (5.41) y la deformación $T\bar{T}$.

5.3. La deformación $T\bar{T}$

Queremos interpretar las soluciones de la ecuación de Wheeler-Dewitt radial bidimensional evaluadas en valores constantes de las variables canónicas dadas por (5.41) como una deformación de la función de partición Z .

La deformación $T\bar{T}$ es un procedimiento para deformar una teoría de campos bidimensional a partir de su tensor de energía-momento. Al estar definida sobre las superficies de r constante, Z es la función de partición de una teoría mecánica cuántica, pues está definida en un espacio sin dimensiones espaciales pero con tiempo.

Por lo tanto, en principio la deformación $T\bar{T}$ no está definida sobre Z .

Sin embargo, es posible definir el análogo a la deformación $T\bar{T}$ para las funciones de partición de teorías de mecánica cuántica mediante reducción dimensional [24]. En particular, de la misma manera que en el caso de la deformación $T\bar{T}$, la función de partición deformada a temperatura finita y parámetro λ se puede escribir como la integral de la función de partición sin deformar por un kernel

$$Z(\beta)_\lambda = \frac{\beta}{\sqrt{8\pi\lambda}} \int_0^\infty \frac{d\beta'}{\beta'^{3/2}} e^{\frac{(\beta-\beta')^2}{8\beta'\lambda}} Z(\beta'). \quad (5.42)$$

Las soluciones (5.41) tienen precisamente esta forma. En el apéndice 1, mostramos cómo se obtiene este resultado. Una observación importante es que debido a que estamos evaluando en valores constantes de los campos e y ϕ , el término de curvatura de la ecuación de Wheeler-Dewitt es nulo y por lo tanto la función de partición Z debe ser invariante ante dilataciones de los campos. Esto último nos permite escribir que

$$Z[\tilde{E}, \Phi_0] = Z[\tilde{E}/\Phi_0]. \quad (5.43)$$

Al usar esta forma funcional para Z lo que sigue es hacer el cambio de variable $\beta' = \tilde{E}/\Phi_0$ y computar la integral $\int d\Phi_0$ en la ecuación (5.41). Luego de este cálculo, si hacemos la identificación

$$\phi = 1 \quad (5.44)$$

$$e = \beta \quad (5.45)$$

$$\lambda = \frac{k}{4}. \quad (5.46)$$

obtenemos que $\Psi[e, \phi]$ a valores constantes de los campos corresponde con el análogo de la deformación $T\bar{T}$ para teorías de mecánica cuántica discutido en [24].

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo a futuro

En este trabajo estudiamos una teoría de gravedad en $1+1$ dimensiones. Realizamos su análisis canónico, mediante la teoría de sistemas Hamiltonianos vinculados e identificamos sus vínculos con sus respectivas interpretaciones geométricas. Lidiamos con estos vínculos con un enfoque híbrido, fijamos a nivel clásico el gauge asociado a la simetría en el espacio interno de las variables geométricas y los restantes vínculos se impusieron a nivel cuántico. Resolvimos la ecuación de Wheeler-DeWitt mediante una integral de caminos que incluye una función de partición restringida a cumplir con la identidad (4.65). En ese sentido, establecimos una versión de la reconstrucción de los estados cuánticos para la gravedad de Jackiw-Teitelboim en términos de la teoría dual dada por su función de partición Z , reproduciendo los resultados de [2] en una dimensión menor. Además, mostramos que para valores constantes de los campos, estos estados cuánticos pueden interpretarse como el análogo a la deformación $T\bar{T}$ para teorías de mecánica cuántica ordinaria [24]. A partir de estos resultados se abren distintas posibilidades para trabajos futuros.

El hecho de que la gravedad de Jackiw-Teitelboim pueda obtenerse a nivel clásico a partir de la acción de Einstein-Hilbert en 3 dimensiones mediante reducción dimensional sugiere que quizás las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt en dos dimensiones se puedan obtener a partir de las soluciones en tres dimensiones mediante un análogo de este procedimiento aplicado a las funciones de onda.

Otra perspectiva interesante es analizar más en detalle las medidas de integración en la integral de caminos gravitatoria y explorar si estas presentan una anomalía bajo la acción del operador de dilataciones.

En la ecuación (4.64) asumimos que la medida de integración era invariante bajo dilataciones. Este de hecho no es el caso en dimensión 2 y el paso de integrar por

partes el operador de dilatación para que actúe sobre Z en lugar de sobre el kernel da lugar a un término proporcional a la curvatura. Si bien en dimensión 1 no se puede definir una curvatura escalar, esto no es una demostración de la invariancia de la medida bajo el operador de dilataciones. Sería bueno entender mejor si la medida de integración es efectivamente invariante bajo dilataciones en dimensión 1 o si por el contrario aparece una anomalía que modifica la identidad (4.65) como en el caso de las Z_{2d} .

La identidad (1.4) nos da una interpretación clara de que la teoría dual a la gravedad tridimensional debe ser una CFT bidimensional. La identidad (4.65) no tiene una interpretación evidente. Sería interesante entender mejor qué implica esta identidad sobre las propiedades de la teoría dual.

Del punto de vista interpretativo, se cree que imponer condiciones de borde de Dirichlet sobre la métrica inducida es equivalente a imponer un *cutoff* a la geometría del espacio AdS [10]. Es decir, que se considera la dinámica gravitatoria en un parche contenido en un radio finito de este espaciotiempo. Los resultados de este trabajo implican que se encuentra que la teoría dual que vive en ese borde a radio finito es la deformación $T\bar{T}$ de la teoría dual en el infinito. De esta forma se ha interpretado a la deformación $T\bar{T}$ como una manera de realizar la conjetura holográfica en una situación en la que se trae el borde de AdS a una distancia finita en el interior del espaciotiempo. Para afianzar esta interpretación, es necesario establecer la relación entre el funcional de onda de Wheeler-DeWitt radial y la integral de caminos gravitatoria con condiciones de borde de Dirichlet.

APÉNDICES

Apéndice 1

Integración Gaussiana

En esta sección mostramos como obtener el análogo a la deformación $T\bar{T}$ (5.42) a partir de las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt evaluadas a campo constante. Partiendo de (5.41) hacemos el cambio de variable $\tilde{E} = U\Phi_0$ y obtenemos

$$\Psi[e, \phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi_0 \int_0^{+\infty} dU \frac{e}{k\pi U} e^{-\frac{2}{k}(e-\Phi_0 U)(\phi-\Phi_0)} Z[U]. \quad (1.1)$$

La exponencial se puede reescribir de la siguiente manera

$$e^{-\frac{2}{k}(e-\Phi_0 U)(\phi-\Phi_0)} = e^{-\frac{2}{k}(U\Phi_0^2 - (U\phi+e)\Phi_0)} e^{-\frac{2}{k}e\phi}. \quad (1.2)$$

A su vez se puede completar cuadrados de manera que

$$U\Phi_0^2 - (U\phi+e)\Phi_0 = \left(\sqrt{U}\Phi_0 - \frac{(U\phi+e)}{2\sqrt{U}} \right)^2 - \frac{(U\phi+e)^2}{4U}. \quad (1.3)$$

Con esto podemos plantear la integral en el modo constante Φ_0

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi_0 e^{-\frac{2}{k}(U\Phi_0^2 - (U\phi+e)\Phi_0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi_0 e^{-\frac{2}{k}\left(\sqrt{U}\Phi_0 - \frac{(U\phi+e)}{2\sqrt{U}}\right)^2} e^{\frac{(U\phi+e)^2}{2Uk}}. \quad (1.4)$$

Haciendo el cambio de variable $\Phi' = \sqrt{U}\Phi_0 - \frac{(U\phi+e)}{2\sqrt{U}}$ con su correspondiente cambio en el diferencial $d\Phi_0 = d\Phi'/\sqrt{U}$ llegamos a la siguiente integral Gaussiana

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi' \frac{e^{-\frac{2}{k}\Phi'^2}}{\sqrt{U}} = \sqrt{\frac{k\pi}{2U}}. \quad (1.5)$$

Juntando todo tenemos hasta ahora

$$\Psi[e, \phi] = e \sqrt{\frac{1}{2k\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dU}{U^{3/2}} e^{-\frac{2}{k}e\phi} e^{\frac{(U\phi+e)^2}{2Uk}} Z[U]. \quad (1.6)$$

Solamente falta notar que las exponenciales pueden simplificarse

$$e^{-\frac{2}{k}e\phi} e^{\frac{(U\phi+e)^2}{2Uk}} = e^{\frac{(U\phi-e)^2}{2Uk}}. \quad (1.7)$$

Finalmente tenemos

$$\Psi[e, \phi] = e \sqrt{\frac{1}{2k\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dU}{U^{3/2}} e^{\frac{(U\phi-e)^2}{2Uk}} Z[U]. \quad (1.8)$$

Si identificamos $U = \beta'$, $\phi = 1$, $e = \beta$ y $k = 4\lambda$ llegamos a (5.42).

Bibliografia

- [1] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231–252, [arXiv:hep-th/9711200](#).
- [2] L. Freidel, “Reconstructing AdS/CFT”, [arXiv:0804.0632 \[hep-th\]](#).
- [3] S. Dubovsky, V. Gorbenko, and G. Hernández-Chifflet, “ $T\bar{T}$ partition function from topological gravity”, *JHEP* **09** (2018) 158, [arXiv:1805.07386 \[hep-th\]](#).
- [4] F. A. Smirnov and A. B. Zamolodchikov, “On space of integrable quantum field theories”, *Nucl. Phys. B* **915** (2017) 363–383, [arXiv:1608.05499 \[hep-th\]](#).
- [5] A. Cavaglià, S. Negro, I. M. Szécsényi, and R. Tateo, “ $T\bar{T}$ -deformed 2D Quantum Field Theories”, *JHEP* **10** (2016) 112, [arXiv:1608.05534 \[hep-th\]](#).
- [6] L. I. Nicolaescu, *Lectures on the Geometry of Manifolds*. World Scientific, 2020.
- [7] R. M. Wald, *General relativity*. University of Chicago press, 2024.
- [8] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 3, 2014.
- [9] L. V. Iliesiu, S. S. Pufu, H. Verlinde, and Y. Wang, “An exact quantization of Jackiw-Teitelboim gravity”, *JHEP* **11** (2019) 091, [arXiv:1905.02726 \[hep-th\]](#).
- [10] L. V. Iliesiu, J. Kruthoff, G. J. Turiaci, and H. Verlinde, “JT gravity at finite cutoff”, *SciPost Phys.* **9** (2020) 023, [arXiv:2004.07242 \[hep-th\]](#).
- [11] R. Jackiw, “Lower dimensional gravity”, *Nuclear Physics B* **252** (1985) 343–356.
- [12] C. Teitelboim, “Gravitation and hamiltonian structure in two spacetime dimensions”, *Physics Letters B* **126** (1983) no. 1-2, 41–45.

- [13] A. Fabbri and J. Navarro-Salas, *Modeling black hole evaporation*. World Scientific, 2005.
- [14] M. Bojowald, *Canonical gravity and applications: cosmology, black holes, and quantum gravity*. Cambridge University Press, 2010.
- [15] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems*. Princeton university press, 1992.
- [16] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, “Dynamical structure and definition of energy in general relativity”, *Physical Review* **116** (1959) no. 5, 1322.
- [17] E. Witten, “(2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System”, *Nucl. Phys. B* **311** (1988) 46.
- [18] A. Achucarro, “Lineal gravity from planar gravity”, *Physical review letters* **70** (1993) no. 8, 1037.
- [19] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [20] B. S. DeWitt, “Quantum theory of gravity. i. the canonical theory”, *Physical Review* **160** (1967) no. 5, 1113.
- [21] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, vol. 2. Cambridge university press, 1995.
- [22] J. Polchinski, “Evaluation of the One Loop String Path Integral”, *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) 37.
- [23] E. D’Hoker and D. H. Phong, “The Geometry of String Perturbation Theory”, *Rev. Mod. Phys.* **60** (1988) 917.
- [24] D. J. Gross, J. Kruthoff, A. Rolph, and E. Shaghoulian, “ Tt^- in ads 2 and quantum mechanics”, *Physical Review D* **101** (2020) no. 2, 026011.