

TRABAJO MONOGRÁFICO

Álgebras inclinadas

Santiago Porto

Orientadora:

Viviana Gubitosi
Facultad de Ingeniería

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
MONTEVIDEO, URUGUAY

Resumen

En 1982, Happel y Ringel introdujeron en el artículo [7] la clase de álgebras inclinadas, definidas como álgebras de endomorfismos de un módulo inclinante sobre un álgebra hereditaria. Esta construcción dio origen a una nueva familia de álgebras que extienden de manera natural muchas de las propiedades de las álgebras hereditarias.

El objetivo de este trabajo es estudiar las propiedades fundamentales de esta clase de álgebras, analizando tanto sus aspectos homológicos como combinatorios a través del estudio del carcaj de Auslander–Reiten. Dado que las representaciones de las álgebras hereditarias son muy bien entendidas, es razonable esperar que las representaciones de las álgebras inclinadas también posean una estructura bien descrita. En particular, mostraremos que estas álgebras tienen dimensión global menor o igual a 2 y que su carcaj de Auslander–Reiten es acíclico y presenta una estructura bien entendida. Además, daremos una condición necesaria y suficiente para que un álgebra sea inclinada.

Finalmente, nos centraremos en una subclase particular: las álgebras inclinadas de tipo $\mathbb{A}_n$. Describiremos una caracterización de esta familia, obtenida por Assem en [1], en términos de álgebras amables de tipo árbol, lo que permitirá visualizar de forma explícita su estructura y representaciones.

Índice

Capítulo 1. Conceptos previos	5
1.1. Notación	5
1.2. Álgebras de caminos y representaciones	5
1.3. Álgebras hereditarias y el Teorema de Gabriel	7
1.4. (Co)Homología	9
1.5. Funtores de extensión	11
1.6. Teoría de Auslander-Reiten	19
1.7. Teoría de Morita	23
Capítulo 2. Teoría de inclinación	25
2.1. Pares de torsión	25
2.2. Módulos inclinantes	27
2.3. Teorema de inclinación de Brenner y Butler	31
Capítulo 3. Álgebras de endomorfismos de módulos inclinantes	35
3.1. Dimensión global de álgebras de endomorfismos de módulos inclinantes	35
3.2. Álgebras de endomorfismos de módulos inclinantes y grupo de Grothendieck	36
3.3. Sucesiones de conexión	39
3.4. Módulos inclinantes separantes y escindentes	45
3.5. Pares de torsión inducidos por módulos inclinantes	51
Capítulo 4. Álgebras inclinadas	59
4.1. Carcajes de traslación	59
4.2. Componentes postproyectivas y preinyectivas	63
4.3. Álgebras inclinadas	65
4.4. Criterio de Liu y Skowroński	72
Capítulo 5. Álgebras inclinadas de tipo A_n	79
Bibliografía	95

CAPÍTULO 1

Conceptos previos

1.1. Notación

Denotaremos por k un cuerpo que asumiremos algebraicamente cerrado. Cuando hablemos de una k -álgebra A , nos referiremos a una K -álgebra asociativa con unidad y de dimensión finita. Consideraremos los módulos a derecha a menos que se especifique lo contrario y notaremos M_A y ${}_A M$ a un A -módulo M a derecha e izquierda, respectivamente. Denotamos por $\text{Mod } A$ a la categoría de módulos sobre A y por $\text{mod } A$ a la categoría de módulos sobre A finitamente generados. Siempre que hablemos de un A -módulo, nos estaremos refiriendo a un objeto de $\text{mod } A$; es decir, a un A -módulo finitamente generado.

1.2. Álgebras de caminos y representaciones

Definición 1.2.1. Un carcaj Q es una cuaterna (Q_0, Q_1, s, t) formada por dos conjuntos Q_0 (cuyos elementos se llaman vértices) y Q_1 (cuyos elementos se llaman flechas), y dos aplicaciones $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ que asocian a cada flecha $\alpha \in Q_1$ su origen $s(\alpha)$ y su destino $t(\alpha)$, respectivamente.

Un camino en Q de longitud $n \geq 1$ es una composición de n flechas $\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \alpha_n$ tal que $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Además, cada vértice $i \in Q_0$ tiene asociado un camino trivial (de longitud cero) que denotaremos ϵ_i .

Observar que un carcaj es simplemente otra nomenclatura para un grafo dirigido, pero se usa esta nomenclatura para evitar confusiones con el lenguaje de la teoría de grafos.¹

Definición 1.2.2. Sea k es un cuerpo y Q un carcaj. El álgebra de caminos kQ es la k -álgebra cuyo espacio vectorial subyacente tiene como base el conjunto de todos los caminos en Q . La multiplicación de dos caminos se define por concatenación, de la siguiente manera:

$$(\alpha_1 \cdots \alpha_n)(\beta_1 \cdots \beta_m) = \begin{cases} \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_m & \text{si } t(\alpha_n) = s(\beta_1) \\ 0 & \text{si } t(\alpha_n) \neq s(\beta_1) \end{cases}$$

Se cumple que los caminos triviales ϵ_a forman un conjunto de idempotentes ortogonales primitivos en kQ . Esto muestra la importancia de “agregar” estos caminos de largo cero.

Definición 1.2.3. Sea Q un carcaj finito y conexo.

¹“El carcaj es una caja o cilindro usada por los arqueros para transportar las flechas...”

El ideal de flechas de kQ , denotado por R_Q , es el ideal bilátero del álgebra de caminos kQ generado como ideal por las flechas de Q ; es decir,

$$R_Q := \langle \alpha : \alpha \in Q_1 \rangle$$

. Equivalentemente, R_Q es el subespacio de kQ generado por los caminos de longitud al menos uno.

Un ideal bilátero $\mathcal{I}$ de kQ se dice admisible si existe un entero $m \geq 2$ tal que

$$R_Q^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2.$$

Si $\mathcal{I}$ es un ideal admisible de kQ , decimos que el par $(Q, \mathcal{I})$ es un carcaj ligado y el cociente $kQ/\mathcal{I}$ se llama álgebra de carcaj ligado.

Comentaremos a continuación algunas propiedades de las álgebras de caminos (ligadas) y presentaremos un par de teoremas que muestran por qué son de nuestro interés. Remitimos a las referencias [3] y [8].

Proposición 1.2.4. *Sea Q un carcaj finito y conexo, R_Q el ideal de flechas de kQ e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de kQ . Entonces el álgebra de carcaj ligado $kQ/\mathcal{I}$ es un álgebra de dimensión finita básica y conexa, con $R_Q/\mathcal{I}$ como radical. Además, el conjunto $\{e_a = \epsilon_a + \mathcal{I} : a \in Q_0\}$ forma un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos.*

□

Observar que tomando $\mathcal{I} = 0$ tenemos propiedades sobre las álgebras de caminos kQ sin relaciones.

Teorema 1.2.5. *Si A es un álgebra de dimensión finita, básica y conexa, entonces existe un carcaj Q y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de kQ tal que $A \cong kQ/\mathcal{I}$.*

□

Las hipótesis de este teorema no son restrictivas. Si el álgebra A no es conexa, la escribimos como producto de álgebras conexas, y el resultado se aplica a cada componente. Por otro lado, toda álgebra A tiene asociada un álgebra básica A_b tal que $\text{mod } A \cong \text{mod } A_b$ (ver I.6.3, I.6.10 de [3]).

Definición 1.2.6. Sea Q un carcaj finito. Una representación M de Q está dada por un espacio vectorial M_a asociado a cada $a \in Q_0$ y un mapa k -lineal $\varphi_\alpha : M_a \rightarrow M_b$ asociado a cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ en Q_1 .

Un morfismo de representaciones $f : M \rightarrow N$ entre $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ y $N = (N_a, \psi_\alpha)$ es una familia de mapas k -lineales $f_a : M_a \rightarrow N_a$ tal que $\psi_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$ para toda flecha $\alpha : a \rightarrow b$ en Q_1 .

Si $(Q, \mathcal{I})$ es un carcaj ligado, decimos que una representación $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ de Q está ligada por $\mathcal{I}$ si $\varphi_\rho = 0$ para toda relación $\rho \in \mathcal{I}$ (una relación es una combinación lineal de caminos de largo ≥ 2 con mismos orígenes y destinos).

Teorema 1.2.7. *Sea $A = kQ/\mathcal{I}$, donde Q es un carcaj finito y conexo e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de kQ . Entonces existe una equivalencia k -lineal de categorías $\text{Mod } A \cong \text{Rep}_k(Q, \mathcal{I})$, que se restringe a una equivalencia k -lineal $\text{mod } A \cong \text{rep}_k(Q, \mathcal{I})$.*

□

Dado que nuestro objetivo es estudiar la categoría de módulos finitamente generados $\text{mod } A$ de un álgebra A , el teorema anterior muestra que, cuando el álgebra A es básica

y conexa- hipótesis que no restringen la generalidad, como se discutió- este estudio es equivalente al análisis de la categoría de representaciones de cierto carcaj ligado $(Q, \mathcal{I})$.

1.2.1. Grupo de Grothendieck de un álgebra. Introducimos ahora el grupo de Grothendieck de una k -álgebra A , un invariante que codifica información esencial sobre la categoría $\text{mod } A$.

Definición 1.2.8. Sea A una k -álgebra. El grupo de Grothendieck de A es el grupo abeliano $K_0(A) = \mathcal{F}/\mathcal{F}'$, donde $\mathcal{F}$ es el grupo abeliano libre que tiene como base el conjunto de clases de isomorfismo $\tilde{M}$ de módulos M en $\text{mod } A$ y $\mathcal{F}'$ es el subgrupo de $\mathcal{F}$ generado por los elementos $\tilde{M} - \tilde{L} - \tilde{N}$ correspondientes a todas las sucesiones exactas cortas $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ en $\text{mod } A$.

Denotamos por $[M]$ a la imagen de la clase de isomorfismo $\tilde{M}$ del A -módulo M bajo el epimorfismo canónico $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}'$.

El siguiente teorema muestra la importancia del grupo de Grothendieck.

Teorema 1.2.9. [3, Teorema III.3.5] *Sea A una k -álgebra básica de dimensión finita y sean $S(1), \dots, S(n)$ un conjunto completo de clases de isomorfismo de A -módulos simples. Entonces, el grupo de Grothendieck $K_0(A)$ de A es un grupo abeliano libre con base el conjunto $\{[S(1)], \dots, [S(n)]\}$ y existe un único isomorfismo de grupos $\dim : K_0(A) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ tal que $\dim[M] = \underline{\dim} M$ para todo A -módulo M .*

□

1.3. Álgebras hereditarias y el Teorema de Gabriel

Introducimos ahora las álgebras hereditarias, una familia de álgebras que es muy bien entendida y la cual será central más adelante, cuando definamos las álgebras inclinadas como los endomorfismos de un módulo inclinante sobre un álgebra hereditaria. Comentaremos a continuación algunas propiedades y el Teorema de Gabriel. De nuevo, dejamos como referencias [3] y [8].

Definición 1.3.1. Un álgebra A se dice hereditaria a derecha (resp, a izquierda) si todo ideal a derecha (resp, a izquierda) de A es proyectivo como A -módulo a derecha (resp, a izquierda).

Si el álgebra es de dimensión finita, ser hereditaria a derecha y a izquierda son condiciones equivalentes.

Proposición 1.3.2. [3, Teorema VII.1.4] *Sea A una k -álgebra. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- (a) A es hereditaria a derecha.
- (a) $\text{gl.dim} A \leq 1$.
- (a) Todo submódulo de un A -módulo proyectivo a derecha es proyectivo.
- (a) Todo cociente de un A -módulo inyectivo a derecha es inyectivo.

Precisaremos el siguiente lema más adelante.

Lema 1.3.3. [3, Lema VII.1.6] *Sea A una k -álgebra hereditaria básica, e y e' dos idempotentes primitivos de A . Entonces existe un isomorfismo de k -espacios vectoriales*

$$\text{Irr}(e'A, eA) \cong e(\text{rad } A / \text{rad}^2 A)e',$$

donde $\text{rad } A$ denota el radical de Jacobson de A .

□

Los siguientes resultados dan a entender el interés que tienen las álgebras hereditarias y muestran que su estructura y representaciones están bien entendidas.

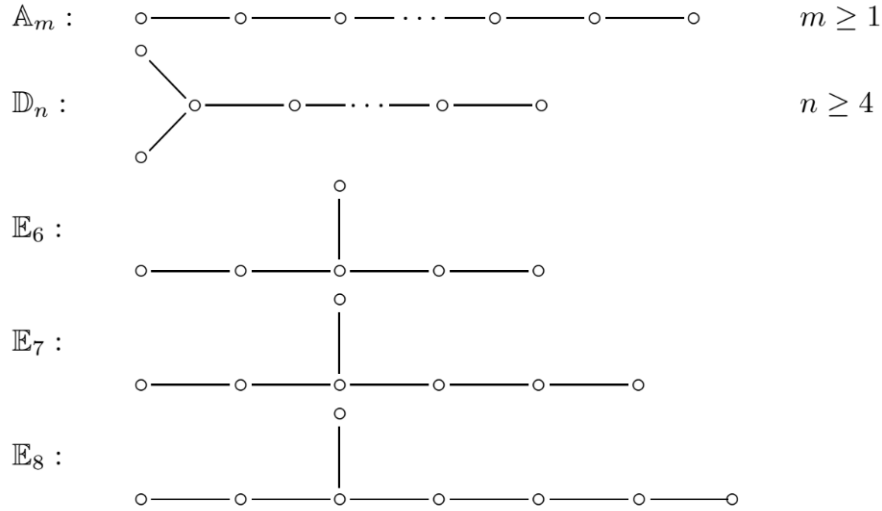
Teorema 1.3.4. [3, Teorema VII.1.7] *Si Q es un carcaj finito, conexo y acíclico, el álgebra $A = kQ$ es hereditaria. Recíprocamente, si A es una k -álgebra de dimensión finita hereditaria básica y conexa, existe un carcaj finito, conexo y acíclico Q tal que $A \cong kQ$.*

□

En virtud del Teorema 1.2.5 y la observación que le sigue, las hipótesis anteriores no son restrictivas y este teorema aplica a toda k -álgebra conexa a menos de equivalencia Morita. En consecuencia, el enunciado anterior puede interpretarse como:

“Un álgebra es hereditaria si y sólo si es (a menos de equivalencia Morita) el álgebra de caminos de un carcaj finito conexo y acíclico”.

Para enunciar el Teorema de Gabriel, precisamos introducir los diagramas de Dynkin, ciertos grafos conexos y acíclicos de gran relevancia en teoría de representaciones.



Teorema 1.3.5 (Gabriel). *Sea Q un carcaj finito, conexo y acíclico, k un cuerpo algebraicamente cerrado y $A = kQ$ la k -álgebra de caminos asociada a Q .*

Entonces, el álgebra A es de tipo de representación finita² si y sólo si el grafo subyacente de Q (obtenido al olvidar la orientación de sus flechas) es uno de los diagramas de Dynkin, A_m (con $m \geq 1$), D_n (con $n \geq 4$), E_6 , E_7 o E_8 .

Además, se conoce el número de clases de isomorfismo de A -módulos indecomponibles y es, respectivamente $\frac{1}{2}m(m+1)$, $n^2 - n$, 36, 63 y 120.

□

²Recordar que decimos que un álgebra es de tipo de representación finita si tiene finitas clases de isomorfismos de módulos indecomponibles. Decimos que es de tipo de representación infinita si no es de representación finita.

1.4. (Co)Homología

Los funtores exactos son de gran utilidad en álgebra homológica, pero la mayoría de los funtores que surgen de manera “natural” no son exactos. La noción de (co)homología permite corregir el defecto de exactitud en la sucesión exacta obtenida al aplicar un functor a una resolución proyectiva (o inyectiva) de un módulo, asociándole una sucesión exacta larga.

Recordemos ahora algunos conceptos de cohomología.

Definición 1.4.1. Un cocomplejo de cadenas $C^\bullet = (C^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de A -módulos $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y morfismos $\{d^n : C^n \rightarrow C^{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tales que $d^n d^{n-1} = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

$$C^\bullet : \quad \dots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \longrightarrow \dots$$

Dualmente, un complejo de cadenas $C_\bullet = (C_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de A -módulos $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y morfismos $\{d_n : C_{n+1} \rightarrow C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tales que $d_{n-1} d_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.4.2. El n -ésimo grupo de cohomología de un cocomplejo $C^\bullet = (C^n, d^n)$ está definido como $H^n(C^\bullet) = \ker d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}$.

Dado un morfismo de complejos de cadena $f^\bullet = \{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}} : C^\bullet \rightarrow C'^\bullet$, definimos $H^n(f^\bullet) : H^n(C^\bullet) \rightarrow H^n(C'^\bullet)$ como $z + \operatorname{Im} d^{n-1} \mapsto f^n(z) + \operatorname{Im} d'^{n-1}$ para $z \in \ker d^n$.

Obtenemos así un functor H^n entre cocomplejos de cadenas y $\operatorname{Mod} A$ que asocia a toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C'^\bullet \xrightarrow{u^\bullet} C^\bullet \xrightarrow{v^\bullet} C''^\bullet \longrightarrow 0$$

le asocia la sucesión exacta larga de cohomología

$$\dots \longrightarrow H^n(C'^\bullet) \xrightarrow{H^n(u^\bullet)} H^n(C^\bullet) \xrightarrow{H^n(v^\bullet)} H^n(C''^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(C'^\bullet) \longrightarrow \dots$$

donde δ^n es el morfismo de conexión functorial.

1.4.1. Funtores derivados. Si $C_\bullet$ es un complejo de A -módulos

$$\dots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

notamos $(C_M)_\bullet$ al complejo obtenido al sacar M , $\dots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$

Teorema 1.4.3 (de comparación, caso proyectivo). *Consideremos el diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc} P_\bullet & \dots & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \downarrow f=f_{-1} \\ P'_\bullet & \dots & \xrightarrow{d'_2} & P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & P'_0 & \xrightarrow{d'_0} M' \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde $P_\bullet$ y $P'_\bullet$ son complejos de A -módulos.

Si cada P_i de $P_\bullet$ es proyectivo y $P'_\bullet$ es exacto, entonces existe un morfismo de complejos de cadena $f_\bullet : (P_M)_\bullet \rightarrow (P'_{M'})_\bullet$, único a menos de homotopía, tal que $f_i d_i = d'_i f_{i+1}$. $\square$

Teorema 1.4.4 (de comparación, caso inyectivo). *El resultado anterior también vale dualmente si $P_\bullet$ y $P'_\bullet$ son complejos, $P_\bullet$ es exacto y cada P^i de $P'_\bullet$ es un A -módulo inyectivo.*

□

Sean A, B k -álgebras y $F : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$ un funtor k -lineal covariante. Para un A -módulo M , sea

$$P_\bullet \quad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de M . Al aplicarle F al complejo $(P_M)_\bullet$, obtenemos un nuevo complejo

$$F(P_M)_\bullet \quad \cdots \longrightarrow FP_2 \xrightarrow{Fd_2} FP_1 \xrightarrow{Fd_0} 0.$$

Definición 1.4.5. Definimos el n -ésimo funtor derivado a izquierda $F_n^{(s)}$ de F en el objeto M como el n -ésimo grupo de homología del complejo $F(P_M)_\bullet$, es decir:

$$F_n^{(s)}(M) := H_n(F(P_M)_\bullet) = \frac{\ker(Fd_n)}{\text{Im}(Fd_{n+1})}.$$

Para definir la acción sobre los morfismos, sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo de A -módulos. Elegimos resoluciones proyectivas $P_\bullet \rightarrow M$, $P'_\bullet \rightarrow N$ y aplicamos el teorema de comparación para obtener un morfismo de complejos $f_\bullet : P_\bullet \rightarrow P'_\bullet$ que levanta a f . Al aplicar el funtor F , obtenemos un morfismo de complejos $F(f_\bullet) : F(P_\bullet) \rightarrow F(P'_\bullet)$

Teorema 1.4.6. Sea $F : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$ un funtor k -lineal covariante. Entonces, el funtor derivado a izquierda $F_n^{(s)} : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$ es también un funtor k -lineal covariante para todo $n \geq 0$.

□

Pasamos ahora a la construcción dual. Sean A, B dos k -álgebras y sea $F : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$ un funtor covariante k -lineal. Para un A -módulo N , consideramos

$$I^\bullet \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^1} I^1 \xrightarrow{d^2} I^2 \longrightarrow \cdots$$

una resolución inyectiva de N . Al aplicar F al cocomplejo $(I_N)^\bullet$, obtenemos un nuevo cocomplejo de B -módulos

$$F(I_N)^\bullet \quad 0 \longrightarrow FI^0 \xrightarrow{Fd^1} FI^1 \xrightarrow{Fd^2} FI^2 \longrightarrow \cdots$$

Definición 1.4.7. Definimos el n -ésimo funtor derivado a derecha $F_n^{(d)}$ de F en el objeto N como el n -ésimo grupo de cohomología del cocomplejo $F(I_N)^\bullet$, es decir:

$$F_n^{(d)}N := H^n(F(I_N)^\bullet) = \frac{\ker(Fd^{n+1})}{\text{Im}(Fd_n)}.$$

Definimos la acción de F en morfismos de A -módulos de forma análoga a como hicimos con los funtores derivados a izquierda.

Teorema 1.4.8. Sea $F : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$ un funtor k -lineal covariante. Entonces, el funtor derivado a derecha $F_n^{(d)} : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$ es también un funtor k -lineal covariante para todo $n \geq 0$.

□

Comentamos que en el caso de tener un funtor $F : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } B$ contravariante y M un A -módulo, tomamos una resolución proyectiva $P_\bullet \rightarrow M$ y al aplicar F a $(P_M)_\bullet$, obtenemos un cocomplejo $F(P_M)_\bullet$. Definimos el n -ésimo funtor derivado a derecha en el objeto M como el n -ésimo grupo de cohomología de este cocomplejo y la acción de F en morfismos de manera análoga a los casos anteriores.

Teorema 1.4.9. Sea $F : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$ un funtor k -lineal contravariante. Entonces, el funtor derivado a derecha $F_n^{(d)} : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$ es también un funtor k -lineal contravariante para todo $n \geq 0$. □

Teorema 1.4.10. Sea $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta de A -módulos y $F : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$ un funtor k -lineal covariante. Entonces existen sucesiones exactas

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow F_n^{(s)} M' \longrightarrow F_n^{(s)} M \longrightarrow F_n^{(s)} M'' \xrightarrow{\delta} F_{n-1}^{(s)} M' \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow F_0^{(s)} M' \longrightarrow F_0^{(s)} M \longrightarrow F_0^{(s)} M'' \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow F_0^{(d)} M' \longrightarrow F_0^{(d)} M \longrightarrow F_0^{(d)} M'' \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow F_n^{(d)} M' \longrightarrow F_n^{(d)} M \longrightarrow F_n^{(d)} M'' \xrightarrow{\delta} F_{n+1}^{(d)} M' \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

con todos los morfismos functoriales. En ambos casos, los morfismos ∂_n (resp, ∂^n) son los morfismos de conexión functoriales inducidos por la sucesión exacta corta inicial. □

Observación 1.4.11. El funtor derivado a izquierda $F_0^{(s)}$ es exacto a derecha y el funtor derivado a derecha $F_0^{(d)}$ es exacto a izquierda.

1.5. Funtores de extensión

El funtor $\text{Hom}(-, -)$ es un bifunctor, contravariante en la primer variable y covariante en la segunda. Por tanto podemos construir, para cada $n \geq 0$, dos funtores derivados a derecha. Veremos que estas dos construcciones son compatibles y definen los llamados funtores de extensión.

Para todo A -módulo M , el funtor $\text{Hom}_A(M, -) : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } k$ es covariante y el funtor $\text{Hom}_A(-, M) : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } k$ es contravariante. Notaremos temporalmente $E^n(M, -)$ al n -ésimo funtor derivado a derecha de $\text{Hom}_A(M, -)$ y $E_n(-, M)$ al n -ésimo funtor derivado a derecha de $\text{Hom}_A(-, M)$.

Para un A -módulo N , si $I^\bullet$ es una resolución inyectiva de N , entonces

$$E^n(M, N) = H^n(\text{Hom}_A(M, (I_N)^\bullet)).$$

Asimismo, si $P_\bullet$ es una resolución proyectiva de N , entonces

$$E_n(M, N) = H^n(\text{Hom}_A((P_N)_\bullet, M)).$$

Observación 1.5.1. Los funtores $E_0(M, -)$ y $E_0(-, M)$ son exactos a izquierda y vale $E^n(M, -) = 0 = E_n(-, M) \forall n < 0$.

Lema 1.5.2.

- (a) Para todo A -módulo M , $E^0(M, -) \cong \text{Hom}_A(M, -)$.
- (b) Para todo N A -módulo, $E_0(-, N) \cong \text{Hom}_A(-, N)$.

□

Teorema 1.5.3. Para todo $n \in \mathbb{Z}$ y para todos los A -módulos M y N , existe un isomorfismo natural $E^n(M, N) \cong E_n(M, N)$. □

Este teorema nos muestra que ambos funtores derivados a derecha son compatibles, y por tanto nos permiten definir el bifunctor Ext .

Definición 1.5.4. Si M y N son dos A -módulos, el valor común de $E^n(M, N)$ y $E_n(M, N)$ es llamado el n -ésimo grupo de extensión de N por M y es notado $\text{Ext}_A^n(M, N)$.

Todo lo comentado en esta sección y la anterior nos prueba que $\text{Ext}_A^n(-, -)$ es un bifunctor, contravariante en la primera variable y covariante en la segunda.

Teorema 1.5.5. Sean N un A -módulo y $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta de A -módulos. Entonces existen sucesiones exactas largas de cohomología en $\text{mod } k$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_A(N, M') \rightarrow \text{Hom}_A(N, M) \rightarrow \text{Hom}_A(N, M'') \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^1(N, M') \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \text{Ext}_A^n(N, M') \rightarrow \text{Ext}_A^n(N, M) \rightarrow \text{Ext}_A^n(N, M'') \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^{n+1}(N, M') \rightarrow \dots \end{aligned}$$

(con la primer entrada fija) y

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_A(M'', N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(M', N) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^1(M'', N) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \text{Ext}_A^n(M'', N) \rightarrow \text{Ext}_A^n(M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^n(M', N) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^{n+1}(M'', N) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

(con la segunda entrada fija). En ambas todos los morfismos son funtoriales. □

Este teorema muestra que el funtor Ext “corrige” la falta de exactitud a derecha del funtor Hom y describe precisamente la obstrucción a la exactitud.

En los siguientes dos teoremas enunciaremos algunas de las propiedades más importantes del funtor Ext .

Lema 1.5.6. Sean A y B dos k -álgebras y sea $F : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } B$ una equivalencia de categorías. Para todo par de A -módulos M y N y todo $j \geq 1$ existe un isomorfismo

$$\text{Ext}_A^j(M, N) \cong \text{Ext}_B^j(FM, FN) \quad \forall j \geq 1.$$

□

Teorema 1.5.7. Sean M y N dos A -módulos. Entonces:

- (a) Para N , son equivalentes las siguientes condiciones:
 - (i) N es inyectivo.
 - (ii) $\text{Ext}_A^1(-, N) = 0$.
 - (iii) $\text{Ext}_A^n(-, N) = 0 \quad \forall n \geq 1$.
- (b) Para M , son equivalentes las siguientes condiciones:
 - (i) M es proyectivo.
 - (ii) $\text{Ext}_A^1(M, -) = 0$.
 - (iii) $\text{Ext}_A^n(M, -) = 0 \quad \forall n \geq 1$.

□

Teorema 1.5.8. Sean M y N dos A -módulos. Entonces:

(a) Si $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de A -módulos y $n \geq 0$, entonces

$$\text{Ext}_A^n\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda, N\right) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Ext}_A^n(M_\lambda, N).$$

(b) Si $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de A -módulos y $n \geq 0$, entonces

$$\text{Ext}_A^n\left(M, \prod_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda\right) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Ext}_A^n(M, N_\lambda).$$

□

Veamos ahora la relación entre los funtores Ext y las extensiones de módulos, de donde estos funtores reciben su nombre.

Definición 1.5.9. Sean M y N dos A -módulos. Una extensión e de M por N es una sucesión exacta corta $e : 0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ donde L es un A -módulo.

Decimos que dos extensiones e y e' son equivalentes si existe un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccccccccc} e & & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \parallel & & \downarrow \parallel & & \parallel & & \\ e' & & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Decimos que una extensión se escinde si es equivalente a una de la forma

$$0 \rightarrow N \rightarrow N \oplus M \rightarrow M \rightarrow 0$$

donde las flechas son la inclusión y la proyección canónica.

Teorema 1.5.10. Las clases de equivalencia de extensiones de M por N están en biyección con los elementos de $\text{Ext}_A^1(M, N)$ y las extensiones que se escinden están en correspondencia con $0 \in \text{Ext}_A^1(M, N)$.

□

Corolario 1.5.11. Un A -módulo M no tiene extensiones no triviales por otro A -módulo N si y sólo si $\text{Ext}_A^1(M, N) = 0$.

□

Se tiene también que los módulos de extensión superiores $\text{Ext}_A^n(M, N)$ con $n \geq 1$ están en correspondencia con las clases de equivalencia de n -extensiones, sucesiones exactas $e : 0 \rightarrow N \rightarrow L_n \rightarrow \cdots \rightarrow L_1 \rightarrow M \rightarrow 0$ bajo la relación de equivalencia que identifica dos extensiones e y e' si existe un morfismo de cadenas $\iota : e \rightarrow e'$ que es la identidad en M y N .

1.5.1. Producto tensorial y funtores de torsión. Otro funtor de gran interés es $\otimes$, adjunto a izquierda del funtor Hom ³, conocido como producto tensorial. A continuación recordamos las propiedades básicas del producto tensorial y los funtores derivados a izquierda del tensor, llamados de torsión.

³Recordar que dados funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, decimos que F es adjunto a izquierda de G y G adjunto a derecha de F si existen isomorfismos $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D))$, para todo par de objetos C en $\mathcal{C}$ y D en $\mathcal{D}$, funtoriales en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$.

Sea A una $\mathbf{k}$ -álgebra como antes, L_A un A -módulo a derecha y ${}_A M$ un A -módulo a izquierda.

Definición 1.5.12. Una aplicación A -bilineal $g : L \times M \rightarrow X$ entre $\mathbf{k}$ -módulos es un mapa que cumple:

- $g(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2, y) = g(x_1, y)\alpha_1 + g(x_2, y)\alpha_2$
- $g(x, y_1\beta_1 + y_2\beta_2) = g(x, y_1)\beta_1 + g(x, y_2)\beta_2$
- $g(xa, y) = g(x, ay)$

para todo $x, x_1, x_2 \in L, y, y_1, y_2 \in M, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{k}, a \in A$.

Definición 1.5.13. Un producto tensorial de L_A y ${}_A M$ es un par (T, t) , donde T es un $\mathbf{k}$ -módulo y $t : L \times M \rightarrow T$ una aplicación A -bilineal, tal que para todo par (X, g) con X un $\mathbf{k}$ -módulo y $g : L \times M \rightarrow X$ una aplicación A -bilineal, existe una única aplicación $\mathbf{k}$ -lineal $\bar{g} : T \rightarrow X$ tal que $\bar{g}t = g$. Es decir el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} L \times M & \xrightarrow{t} & T \\ & \searrow g & \downarrow \exists! \bar{g} \\ & & X \end{array}$$

Teorema 1.5.14. Si L_A y ${}_A M$ son dos A -módulos, existe en $\text{Mod } \mathbf{k}$ su producto tensorial, único a menos de isomorfismos, al cual notaremos $L \otimes_A M$.

□

Observar que la estructura de $\mathbf{k}$ -módulo viene de ser L un A -módulo a derecha y M un A -módulo a izquierda (la construcción explícita deja esto más en claro). Además, si A, B, C son $\mathbf{k}$ -álgebras, ${}_B L_A$ es un $(B-A)$ -bimódulo y ${}_A M_C$ un $(A-C)$ -bimódulo, entonces el producto tensorial $L \otimes_A M$ está dotado de una estructura de $(B-C)$ -bimódulo dada por $b(x \otimes y)c = (bx) \otimes (yc)$ para todo $b \in B, x \in L, y \in M, c \in C$.

Veamos ahora que tensorizar es un funtor de $\text{Mod } A$ en $\text{Mod } \mathbf{k}$. Para esto debemos definirlo en morfismos.

Dados L, L' y L'' A -módulos a derecha, M, M' y M'' A -módulos a izquierda y aplicaciones lineales $f : L \rightarrow L', f' : L' \rightarrow L'', g : M \rightarrow M'$ y $g' : M' \rightarrow M''$, tenemos por la propiedad universal del producto tensorial que los diagramas conmuten

$$\begin{array}{ccc} L \times M & \xrightarrow{t} & L \otimes M \\ f \times g \downarrow & & \downarrow \exists! f \otimes g \\ L' \times M' & \xrightarrow{t'} & L' \otimes M' \\ f' \times g' \downarrow & & \downarrow \exists! f' \otimes g' \\ L'' \times M'' & \xrightarrow{t''} & L'' \otimes M'' \end{array}$$

Luego, por la unicidad, $(f' \otimes g')(f \otimes g) = (f'f) \otimes (g'g)$. En particular, tomando $M = M' = M''$ y $g = g' = \text{id}_M$, tenemos $(f'f) \otimes 1_M = (f' \otimes 1_M)(f \otimes 1_M)$.

Lo anterior junto con $1_{L \otimes M} = 1_L \otimes 1_M$ nos da que el mapa $-\otimes_A M : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } \mathbf{k}$ que manda objetos $L \mapsto L \otimes_A M$ y morfismos $f \mapsto f \otimes 1_M$ es un funtor covariante.

Análogamente, el mapa $L \otimes_A - : \text{Mod } A^{\text{op}} \rightarrow \text{Mod } \mathbf{k}$ que manda objetos $M \mapsto L \otimes_A M$ y morfismos $g \mapsto 1_L \otimes g$ también es un funtor covariante.

En consecuencia, el producto tensorial $- \otimes_A -$, que manda $(L, M) \mapsto L \otimes_A M$ y $(f, g) \mapsto f \otimes g$ define un bifunctor de $\text{Mod } A \times \text{Mod } A^{op}$ en $\text{Mod } k$, covariante en cada variable.

Observación 1.5.15. Más generalmente, si A y B son dos k -álgebras y ${}_A M_B$ un (A, B) -bimódulo, $- \otimes_A M$ y $M \otimes_B -$, definidos igual que antes, son funtores covariantes de $\text{Mod } A$ en $\text{Mod } B$ y de $\text{Mod } B^{op}$ en $\text{Mod } A^{op}$ respectivamente.

En la siguiente proposición listamos algunas propiedades del funtor $\otimes$.

Proposición 1.5.16. Sean A y B dos k -álgebras. Sean $L_A, {}_A M, {}_A N_B$ y ${}_B X$ módulos. Vale que:

- (1) Existe un isomorfismo natural $L \otimes_A (N \otimes_B X) \cong (L \otimes_A N) \otimes_B X$.
- (2) Existen isomorfismos naturales $L \otimes_A A \cong L$ y $A \otimes_A M \cong M$.
- (3) Si $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de A -módulos a derecha y $(M_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ es una familia de A -módulos a izquierda, existe un isomorfismo funtorial

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda \right) \otimes_A \left(\bigoplus_{\sigma \in \Sigma} M_\sigma \right) \cong \bigoplus_{(\lambda, \sigma) \in \Lambda \times \Sigma} (L_\lambda \otimes_A M_\sigma)$$

- (4) $A \otimes_k B$ tiene estructura de k -álgebra conmutativa si y sólo si A y B lo son.
- (5) Para todo $n \geq 0$, $A \otimes_k M_n(k) \cong M_n(A)$.

□

El siguiente teorema va a ser importante más adelante para caracterizar el par de torsión inducido por un módulo inclinante:

Teorema 1.5.17 (de adjunción). Sean A y B dos k -álgebras y ${}_A M_B$ un (A, B) -bimódulo. Entonces existe un isomorfismo natural

$$\text{Hom}_A(L, \text{Hom}_B(M, N)) \cong \text{Hom}_B(L \otimes_A M, N).$$

Es decir, $- \otimes_A M$ es adjunto a izquierda del $\text{Hom}_B(M, -)$.

De manera análoga, $M \otimes_B -$ es adjunto a izquierda del $\text{Hom}_A(M, -)$.

Demostración: Consideremos los siguientes mapas:

$\mu : \text{Hom}_A(L, \text{Hom}_B(M, N)) \rightarrow \text{Hom}_B(L \otimes_A M, N), f \mapsto (x \otimes y \mapsto f(x)(y))$, o sea

$$(\mu f)(x \otimes y) = (f(x))(y).$$

$\nu : \text{Hom}_B(L \otimes_A M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(L, \text{Hom}_B(M, N)), g \mapsto (x \mapsto (y \mapsto g(x \otimes y)))$, o sea

$$(\nu(g(x)))(y) = g(x \otimes y).$$

Se verifica que estos mapas están bien definidos y son k -lineales, veamos que son mutuamente inversos:

$$((\mu\nu)g)(x \otimes y) = (\nu g(x))(y) = g(x \otimes y)$$

$$((\nu\mu)f)(x)(y) = (\mu f)(x \otimes y) = (f(x))(y)$$

Resta ver que el isomorfismo es funtorial.

Para esto sean $\varphi : L \rightarrow L'$ un morfismo de A -módulos y $\psi : N \rightarrow N'$ un morfismo de B -módulos. Si notamos $(\varphi \otimes 1_B)^* = \text{Hom}_B(\varphi \otimes 1_B, N)$, $\varphi^* = \text{Hom}_A(\varphi, \text{Hom}_B(M, N))$, $\psi_* = \text{Hom}_B(L \otimes_A M, \psi)$, $\psi_{**} = \text{Hom}_A(L, \text{Hom}_B(M, \psi))$, debemos probar que los dos cuadrados del siguiente diagrama conmutan:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_B(L' \otimes_A M, N) & \xrightarrow{(\varphi \otimes 1_B)^*} & \mathrm{Hom}_B(L \otimes_A M, N) & \xrightarrow{\psi_*} & \mathrm{Hom}_B(L \otimes_A M, N') \\
\downarrow \nu & & \downarrow \nu & & \downarrow \nu \\
\mathrm{Hom}_A(L', \mathrm{Hom}_B(M, N)) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_B(M, N)) & \xrightarrow{\psi_{**}} & \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_B(M, N'))
\end{array}$$

Sea $f \in \mathrm{Hom}_B(L' \otimes M, N)$. Entonces:

$$((\nu(\varphi \otimes 1_B)^* f)(x))(y) = ((\varphi \otimes 1_B)^* f)(x \otimes y) = (f(\varphi \otimes 1_B))(x \otimes y) = f(\varphi(x) \otimes y);$$

$$((\varphi^* \nu f)(x))(y) = (\nu f(\varphi(x)))(y) = f(\varphi(x) \otimes y)$$

por lo que el cuadrado de la izquierda conmuta.

Ahora, si $f \in \mathrm{Hom}_B(L \otimes_A M, N)$, tenemos:

$$(\nu \psi_* f(x))(y) = \psi_* f(x \otimes y) = \psi f(x \otimes y);$$

$$(\psi_{**} \nu f(x))(y) = (\psi \nu f(x))(y) = \psi f(x \otimes y)$$

por lo que el cuadrado de la derecha conmuta, probando la funtorialidad. $\square$

Proposición 1.5.18. *Sea A una k -álgebra de dimensión finita. Para todo Y, Z en $\mathrm{mod} B$, existen isomorfismos naturales de k -espacios vectoriales*

$$D \mathrm{Ext}_B^1(Y, DZ) \cong \mathrm{Tor}_1^B(Y, Z)$$

Demostración: Tomamos una resolución proyectiva $P_\bullet$ de Y

$$\cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{d_m} P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$$

con cada P_i proyectivo finitamente generado. Aplicando los isomorfismos de la adjunción del Teorema 1.5.17 término a término sobre la resolución $P_\bullet$ obtenemos, luego de dualizar:

$$P_\bullet \otimes_B Z \cong D \mathrm{Hom}_B(P_\bullet, DZ).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}_1^B(Y, Z) &= H_1(P_\bullet \otimes_B Z) \cong H_1(D \mathrm{Hom}_B(P_\bullet, DZ)) \\
&\cong DH^1(\mathrm{Hom}_B(P_\bullet, DZ)) \cong D \mathrm{Ext}_B^1(Y, DZ)
\end{aligned}$$

donde usamos que $H_n(DC^\bullet) \cong DH^n(C^\bullet)$ ([2, Lema A.4.2]). $\square$

Definición 1.5.19. Un A -módulo L_A se dice plano si el funtor $L \otimes_A -$ es exacto.

Proposición 1.5.20. *Si $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de A -módulos, entonces $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ es plano si y sólo si cada L_λ es plano.*

$\square$

Corolario 1.5.21. *Todo módulo libre es plano y por tanto todo módulo proyectivo es plano.*

□

Análogamente al caso del funtor Hom , donde definíamos los funtores Ext para corregir el fallo de este de no ser exacto a derecha, para el funtor $\otimes$, consideraremos sus funtores derivados a izquierda, que corrigen el fallo de este de no ser exacto a izquierda.

Sean M y N dos A -módulos. Notaremos temporalmente $T^n(M, -)$ al n -ésimo funtor derivado a izquierda de $M \otimes_A -$ y $T_n(-, N)$ al n -ésimo funtor derivado a izquierda de $- \otimes_A N$.

Definición 1.5.22. Por [2, Teorema IX.4.4] existe un isomorfismo natural $T^n(M, N) \cong T_n(M, N)$. Dados M un A -módulo y N un A^{op} -módulo, el valor común de $T^n(M, N)$ y $T_n(M, N)$ es llamado n -ésimo módulo de torsión de M y N , y es notado $\text{Tor}_n^A(M, N)$.

Teorema 1.5.23. El funtor $\text{Tor}_n^A(-, -)$ es un bifunctor, covariante en cada una de sus variables.

□ Así como con los proyectivos/inyectivos y el funtor Ext , tenemos una caracterización para los módulos planos en base al funtor Tor .

Teorema 1.5.24. Sean M y N dos A -módulos. Entonces:

- (a) Son equivalentes:
 - (i) M es plano.
 - (ii) $\text{Tor}_1^A(M, -) = 0$.
 - (iii) $\text{Tor}_n^A(M, -) = 0 \ \forall n \geq 1$.
- (b) Son equivalentes:
 - (i) N es plano.
 - (ii) $\text{Tor}_1^A(-, N) = 0$.
 - (iii) $\text{Tor}_n^A(-, N) = 0 \ \forall n \geq 1$.

□

Teorema 1.5.25. Sean N un A^{op} -módulo, M un A -módulo, $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ y $(N_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ familias de A -módulos, $n \geq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \text{Tor}_n^A(\oplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda, N) &\cong \oplus_{\lambda \in \Lambda} \text{Tor}_n^A(M_\lambda, N); \\ \text{Tor}_n^A(M, \oplus_{\sigma \in \Sigma} N_\sigma) &\cong \oplus_{\sigma \in \Sigma} \text{Tor}_n^A(M, N_\sigma). \end{aligned}$$

1.5.2. Dimensiones homológicas. En álgebra homológica, es de gran utilidad estudiar distintas dimensiones que se le pueden asociar a un módulo tomando resoluciones proyectivas (o inyectivas) y viendo el largo de las mismas.

Definición 1.5.26. Sea A una k -álgebra. Se dice que la dimensión proyectiva de un A -módulo M es menor o igual a n y se denota $\text{pd } M \leq n$ si existe una resolución proyectiva

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Si n es el menor entero para el que existe una tal resolución, se dice que la dimensión proyectiva de M es n y se denota $\text{pd } M = n$.

Si M no admite resoluciones proyectivas finitas, se dice que es de dimensión proyectiva infinita y se escribe $\text{pd } M = +\infty$. Convenimos $\text{pd } 0 = -\infty$.

Teorema 1.5.27. Son equivalente para un A -módulo M y $n \geq 0$:

- (i) $\text{pd } M \leq n$.
- (ii) $\text{Ext}_A^j(M, -) = 0 \ \forall k > n$.
- (iii) $\text{Ext}_A^{n+1}(M, -) = 0$.
- (iv) Para toda sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con los P_i proyectivos, se tiene que L_{n-1} es también proyectivo.

□

Observar que la dimensión proyectiva de un módulo M nos dice que tan lejos este está de ser proyectivo. Por ejemplo $\text{pd } M = 0 \Leftrightarrow \text{Ext}_A^1(M, -) = 0 \Leftrightarrow M$ es proyectivo y $\text{pd } M = 1 \Leftrightarrow M \cong P_0/P_1$, es decir es cociente de proyectivos.

Observación 1.5.28. Se puede definir de manera análoga la dimensión inyectiva $\text{id } N$ de un A -módulo N y obtener equivalencias con $\text{Ext}_A^k(-, N)$.

En base a las dimensiones proyectivas e inyectivas, asociadas a un A -módulo, definimos una dimensión asociada al álgebra A :

Definición 1.5.29. Definimos la dimensión global a derecha de una k -álgebra A como

$$\text{gl.dim.}d(A) = \sup\{\text{pd } M : M \text{ es un } A\text{-módulo a derecha}\}.$$

Equivalentemente,

$$\text{gl.dim.}d(A) = \sup\{\text{id } N : N \text{ es } A\text{-módulo a derecha}\}.$$

Definimos de forma análoga la dimensión global a izquierda, $\text{gl.dim.}s(A)$.

Si $\text{gl.dim.}d(A) = \text{gl.dim.}s(A)$, decimos que la dimensión global de A es este valor común y la notamos $\text{gl.dim}(A)$.

Proposición 1.5.30. Para toda k -álgebra A ,

$$\text{gl.dim.}d(A) = \sup\{\text{pd } M : M \text{ es un } A\text{-módulo a derecha finitamente generado}\}.$$

□

Proposición 1.5.31. Si A es de dimensión finita como k -espacio vectorial, las dimensiones globales de A a izquierda y a derecha coinciden.

□

Proposición 1.5.32. Si A es una k -álgebra de Artin (por ejemplo si es de dimensión finita como k -espacio vectorial), tenemos que

$$\text{gl.dim.}d(A) = \sup\{\text{pd } S : S \text{ es un } A\text{-módulo simple a derecha}\}.$$

□

Juntando todo esto tenemos que si A es una k -álgebra con $\dim_k A < \infty$,

$$\text{gl.dim}(A) = \sup\{\text{pd } S : S \text{ es un } A\text{-módulo simple}\}.$$

1.6. Teoría de Auslander-Reiten

En esta sección vamos a introducir las sucesiones casi escindidas (o de Auslander-Reiten), las cuales nos permiten construir el carcaj de Auslander-Reiten asociado a una k -álgebra A . Este carcaj nos da una imagen de la categoría de módulos de esta álgebra además de herramientas de cálculo de morfismos, funtores Ext , entre otros. En principio no entraremos en detalles de cómo se construye un carcaj de A-R pero enumeraremos propiedades que cumple y daremos algunos ejemplos con el objetivo de entender y aplicar estas herramientas para trabajar con pares de torsión y módulos inclinantes.

Como todo módulo puede escribirse (de forma única) como suma de módulos indecomponibles, la idea del carcaj de A-R es poner como vértices (las clases de isomorfismo de) los módulos indecomponibles. No es tan fácil pensar que morfismos queremos que representen las flechas, pero querríamos que no se factoricen (de forma no trivial) a través de otro módulo. Empecemos con algunas definiciones que apuntan a describir estos morfismos.

Definición 1.6.1. Decimos que un morfismo es una sección si admite una inversa a izquierda (pos-componer) y que es una retracción si admite una inversa a derecha (pre-componer).

Ejemplo 1.6.2. Sean P un A -módulo proyectivo y Q un A -módulo inyectivo.

Todo epimorfismo $f : M \rightarrow P$ es una retracción y todo monomorfismo $g : Q \rightarrow N$ es una sección ya que tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \swarrow h & \parallel & \\ M & \xrightarrow{f} & P \longrightarrow 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{g} & N \\ & & \parallel & \swarrow k & \\ & & Q & & \end{array}$$

Definición 1.6.3. Sean L, M, N en $\text{mod } A$. Decimos que:

- (a) Un morfismo de A -módulos $f : L \rightarrow M$ es minimal a izquierda si para todo $h \in \text{End } M$ tal que $hf = f$, se tiene que h es un automorfismo.
- (b) Un morfismo de A -módulos $g : M \rightarrow N$ es minimal a derecha si para todo $k \in \text{End } N$ tal que $gk = g$, se tiene que k es un automorfismo.
- (c) Un morfismo de A -módulos $f : L \rightarrow M$ es casi escindido a izquierda si no es una sección y para todo morfismo de A -módulos $u : L \rightarrow U$ no sección, existe $u' : M \rightarrow U$ tal que $u'f = u$.
- (d) Un morfismo de A -módulos $g : M \rightarrow N$ es casi escindido a derecha si no es una retracción y para todo morfismo de A -módulos $v : V \rightarrow N$ no retracción, existe $v' : V \rightarrow M$ tal que $gv' = v$.
- (e) Un morfismo de A -módulos $f : L \rightarrow M$ es casi escindido minimal a izquierda si es minimal a izquierda y casi escindido a izquierda.
- (f) Un morfismo de A -módulos $g : M \rightarrow N$ es casi escindido minimal a derecha si es minimal a derecha y casi escindido a derecha.

Proposición 1.6.4. Los morfismos casi escindidos minimales a izquierda (resp. a derecha) determinan de forma única su codominio (resp. dominio). Más precisamente:

- (a) Si $f : L \rightarrow M$ y $f' : L \rightarrow M'$ son dos morfismos de A -módulos casi escindidos minimales a izquierda, entonces existe un isomorfismo $h : M \xrightarrow{\sim} M'$ tal que $f' = hf$.
- (b) Si $g : M \rightarrow N$ y $g' : M' \rightarrow N$ son dos morfismos de A -módulos casi escindidos minimales a derecha, entonces existe un isomorfismo $k : M \xrightarrow{\sim} M'$ tal que $g = g'k$.

Proposición 1.6.5.

- (a) Si $f : L \rightarrow M$ es un morfismo casi escindido a izquierda en $\text{mod } A$, entonces L es indecomponible.
- (b) Si $g : M \rightarrow N$ es un morfismo casi escindido a derecha en $\text{mod } A$, entonces N es indecomponible.

Definición 1.6.6. Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ en $\text{mod } A$ se dice irreducible si:

- (a) f no es una sección ni una retracción
- (b) Si $f = f_1 f_2$, entonces f_1 es una retracción o f_2 es una sección.

Observación 1.6.7. Los morfismos irreducibles son o bien monomorfismos o bien epimorfismos (no ambos) y no admiten factorizaciones no triviales (o sea, que no sean de la forma $X \xrightarrow{\iota} X \oplus Z \xrightarrow{(f,0)} Y$ o $X \xrightarrow{(0,f)} Z \oplus Y \xrightarrow{\rho} Y$).

Ejemplo 1.6.8. Si $e \in A$ es un idempotente, entonces la inclusión $\text{rad } eA \hookrightarrow eA$ es un morfismo casi escindido minimal a derecha. Más aún, si $\text{rad } eA = \bigoplus_{i=1}^r M_i$ donde M_i son A -módulos indecomponibles, entonces las inclusiones $M_i \hookrightarrow eA$ son morfismos irreducibles.

Dualmente, si I es un A -módulo inyectivo indecomponible, entonces el epimorfismo canónico $p : I \rightarrow I/\text{soc } I$ es casi escindido minimal a izquierda. Más aún, si $\text{soc } I = \bigoplus_{i=1}^s N_i$ donde N_i son A -módulos indecomponibles, entonces los morfismos $p : I \rightarrow I/N_i$ son irreducibles.

Definición 1.6.9. Sean X e Y dos A -módulos indecomponibles. Definimos $\text{rad}_A(X, Y)$ como el k -espacio vectorial de los morfismos $X \rightarrow Y$ no invertibles.

Si $X, Y \in \text{mod } A$, definimos $\text{rad}_A^2(X, Y)$ como el k -espacio vectorial de los morfismos de la forma gf con $f \in \text{rad}_A(X, Z)$ y $g \in \text{rad}_A(Z, Y)$ para algún Z en $\text{mod } A$ (no necesariamente indecomponible).

Lema 1.6.10. Sean X e Y dos A -módulos indecomponibles.

Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ es irreducible si y sólo si $f \in \text{rad}_A(X, Y) \setminus \text{rad}_A^2(X, Y)$.

Definición 1.6.11. Una sucesión exacta corta en $\text{mod } A$

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

es una sucesión casi escindida si:

- (1) f es casi escindido minimal a izquierda y
- (2) g es casi escindido minimal a derecha.

Observación 1.6.12. Sea $(*) 0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ una sucesión casi escindida.

- (a) Por la Proposición 1.6.5, los módulos L y N son indecomponibles.

- (b) Las sucesiones casi escindidas quedan determinadas (a menos de isomorfismos) por sus extremos. Si $(**) 0 \rightarrow L' \rightarrow M' \rightarrow N' \rightarrow 0$ es otra sucesión casi escindida, las siguientes afirmaciones son equivalentes por la Proposición 1.6.4:
- (i) Las dos sucesiones $(*)$ y $(**)$ son isomorfas.
 - (ii) Existe un isomorfismo de A -módulos $L \cong L'$.
 - (iii) Existe un isomorfismo de A -módulos $N \cong N'$.
- (c) Por el Ejemplo 1.6.2 L no puede ser inyectivo y N no puede ser proyectivo, ya que $L \rightarrow M$ no es una sección y $M \rightarrow N$ no es una retracción.

Apuntamos ahora a las traslaciones de Auslander-Reiten.

Consideremos el funtor A -dual $(-)^t = \text{Hom}_A(-, A) : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A^{op}$. Construiremos otro funtor a partir de este, que nos permitirá definir las traslaciones de A-R.

Tomamos para todo módulo M_A una resolución proyectiva minimal

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

y le aplicamos el funtor $(-)^t$, obteniendo

$$0 \longrightarrow M^t \xrightarrow{p_0^t} P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \longrightarrow \text{coker } p_1^t \longrightarrow 0$$

que será la base para definir el funtor de traslación.

Notamos $\text{Tr } M := \text{coker } p_1^t$ y lo llamamos traspuesto de M .

Notación 1.6.13. Notaremos por $\text{proj } A$ a la subcategoría plena de $\text{mod } A$ cuyos objetos son los A -módulos proyectivos y por $\text{inj } A$ a la subcategoría plena de $\text{mod } A$ cuyos objetos son los A -módulos inyectivos.

El funtor A -dual $(-)^t$ lleva A -módulos proyectivos a derecha en A -módulos proyectivos a izquierda. En efecto, si P es proyectivo e indescomponible, entonces $P \cong eA$ para algún idempotente primitivo $e \in A$. Así, $P^t = \text{Hom}_A(eA, A) \cong Ae$, el cual es un A -módulo proyectivo a izquierda. Se verifica que $ev_M : M \rightarrow M^{tt}$ definido por $ev_M(z)(f) = f(z)$ para $z \in M, f \in M^t$ es funtorial en M , y es un isomorfismo si M es proyectivo. Por tanto $(-)^t$ induce una dualidad entre las categorías $\text{proj } A$ y $\text{proj } A^{op}$.

Queremos definir, a partir de esta dualidad, una dualidad entre cocientes de $\text{mod } A$ y $\text{mod } A^{op}$. Ya tenemos el funtor, el traspuesto, falta ver que vamos a cocientar.

Definición 1.6.14. La categoría proyectivamente estable, que denotaremos $\underline{\text{mod}} A$, es el cociente $\text{mod } A / \mathcal{P}$ cuyos objetos son los mismos que en $\text{mod } A$, pero el k -espacio vectorial $\underline{\text{Hom}}_A(M, N)$ se define como el cociente $\underline{\text{Hom}}_A(M, N) := \text{Hom}_A(M, N) / \mathcal{P}(M, N)$ donde $\mathcal{P}(M, N)$ es el subconjunto de $\text{Hom}_A(M, N)$ que consiste de los morfismos que se factorizan a través de un A -módulo proyectivo.

Análogamente, definimos la categoría inyectivamente estable, que denotaremos $\overline{\text{mod}} A$, como el cociente $\text{mod } A / \mathcal{I}$, donde se identifican los morfismos que se factorizan a través de un A -módulo inyectivo.

Proposición 1.6.15. La correspondencia $M \mapsto \text{Tr } M$ induce una dualidad k -lineal entre $\underline{\text{mod}} A$ y $\overline{\text{mod}} A^{op}$, llamada trasposición.

Como la trasposición lleva A -módulos a derecha en A -módulos a izquierda, si queremos un funtor de $\text{mod } A$ en sí misma, precisamos componerla con otro funtor que lleve A -módulos a izquierda en A -módulos a derecha. Este será la k -dualidad estándar, $D = \text{Hom}_k(-, k)$.

Definición 1.6.16. Las traslaciones de Auslander-Reiten están definidas por

$$\tau = D\text{Tr} \quad \text{y} \quad \tau^{-1} = \text{Tr}D.$$

Antes de ver propiedades de estas traslaciones, veamos una forma de calcularlas. Para esto, recordar que el funtor de Nakayama está definido como

$$\nu = D(-)^t : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A,$$

e induce equivalencias $\text{proj } A \xrightleftharpoons[\nu^{-1}]{\nu} \text{inj } A$, donde $\nu^{-1} = \text{Hom}_A(DA, -)$ es la cuasi-inversa de ν .

Proposición 1.6.17. Sean M y N dos A -módulos.

(a) Sea $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$ una presentación proyectiva minimal de M . Entonces existe una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu M \longrightarrow 0.$$

(b) Sea $0 \rightarrow N \xrightarrow{i_0} E_0 \xrightarrow{i_1} E_1$ una presentación inyectiva minimal de N . Entonces existe una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \nu^{-1} M \xrightarrow{\nu^{-1} i_0} \nu^{-1} E_0 \xrightarrow{\nu^{-1} i_1} \nu^{-1} E_1 \longrightarrow \tau^{-1} N \longrightarrow 0.$$

Observación 1.6.18. La proposición anterior nos da $\tau M = \ker \nu p_1$ y $\tau^{-1} M = \text{coker } \nu^{-1} i_1$.

Ejemplo 1.6.19. Sea A el álgebra dada por el carcaj $1 \circ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \leftarrow \\ \beta \end{smallmatrix} \circ 2$, llamado el carcaj

de Kronecker, y M_A la representación $k \begin{smallmatrix} \leftarrow \\ 1 \\ \leftarrow \\ 0 \end{smallmatrix} k$. Observar que M es un A -módulo indescomponible y satisface $\text{Hom}_A(M, P(1)) = 0 = \text{Hom}_A(M, P(2))$, donde $P(1)$ y $P(2)$ son los proyectivos indescomponibles asociados a los vértices 1 y 2.

Una presentación proyectiva minimal de M está dada por

$$(*) \quad 0 \longrightarrow P(1) \xrightarrow{p_1} P(2) \xrightarrow{p_2} M \longrightarrow 0$$

donde p_1 es un isomorfismo entre $P(1)$ y un sumando de $\text{rad } P(2)$, y $p_2 = \text{coker } p_1$. Aplicando ν a $(*)$ tenemos por la Proposición 1.6.17 la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow \nu P(1) \cong I(1) \xrightarrow{\nu p_1} \nu P(2) \cong I(2) \longrightarrow \nu M = 0$$

Tenemos entonces $I(1)/\ker \nu p_1 \cong I(2)$ y $\ker \nu p_1 = \tau M$. Concluimos que $\tau M \cong M$.

Este ejemplo muestra que el trasladado de un módulo indescomponible puede ser él mismo. Más adelante, en la Sección 4.2, veremos en más detalle la estructura del álgebra de Kronecker.

A continuación enunciamos algunas propiedades que cumplen las traslaciones de Auslander-Reiten, y la información que nos dan acerca de los A -módulos, que luego se podrá visualizar en el carcaj de A-R.

Proposición 1.6.20. [4, Proposición V.1.14] *Sea $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ una sucesión exacta. Son equivalentes:*

- (a) *La sucesión es casi escindida.*
- (b) *$L \cong \tau N$ y g es casi escindido a derecha.*
- (c) *$N \cong \tau^{-1}L$ y f es casi escindido a izquierda.*

Lema 1.6.21. *Sea M un A -módulo. Entonces*

- (a) $\text{pd}_A M \leq 1 \iff \text{Hom}_A(DA, \tau M) = 0.$
- (b) $\text{id}_A M \leq 1 \iff \text{Hom}_A(\tau^{-1}M, A) = 0.$

Proposición 1.6.22. *Sean M y N dos A -módulos indescomponibles. Entonces:*

- (a) $\tau M = 0 \iff M$ es proyectivo.
- (b) $\tau^{-1}N = 0 \iff N$ es inyectivo.
- (c) *Si M y N no son proyectivos, entonces τM es indescomponible y no inyectivo, $\tau^{-1}\tau M \cong M$ y $M \cong N \iff \tau M \cong \tau N.$*
- (d) *Si M y N no son inyectivos, entonces $\tau^{-1}N$ es indescomponible y no proyectivo, $\tau\tau^{-1}N \cong N$ y $N \cong M \iff \tau^{-1}N \cong \tau^{-1}M.$*

Las propiedades (c) y (d) nos sirven para concluir como corolario que τ y τ^{-1} inducen equivalencias mutuamente inversas entre $\underline{\text{mod}}A$ y $\overline{\text{mod}}A$.

Teorema 1.6.23 (formulas de Auslander-Reiten). *Si A es una k -álgebra, M y N dos A -módulos, entonces existen isomorfismos naturales*

$$\text{Ext}_A^1(M, N) \cong D\text{Hom}_A(\tau^{-1}N, M) \cong D\overline{\text{Hom}}_A(N, \tau M).$$

Corolario 1.6.24. *Sea A una k -álgebra, M y N dos A -módulos. Entonces:*

- (a) *Si $\text{pd}_A M \leq 1$ y N arbitrario, existe un isomorfismo*

$$\text{Ext}_A^1(M, N) \cong D\text{Hom}_A(N, \tau M).$$

- (b) *Si $\text{id}_A N \leq 1$ y M arbitrario, existe un isomorfismo*

$$\text{Ext}_A^1(M, N) \cong D\text{Hom}_A(\tau^{-1}N, M).$$

- (c) *En particular, si $\text{gl.dim}(A) \leq 1$, M y N arbitrarios, existen isomorfismos*

$$D\text{Hom}_A(N, \tau M) \cong \text{Ext}_A^1(M, N) \cong D\text{Hom}_A(\tau^{-1}N, M).$$

Observación 1.6.25. En particular, para toda álgebra de caminos $A = kQ$ sin relaciones, se tiene que vale (c) del corolario anterior.

Esto es ya que estas álgebras son hereditarias por Teorema 1.3.4 y por tanto de dimensión global menor igual a 1.

1.7. Teoría de Morita

En esta sección los módulos no se suponen necesariamente finitamente generados.

Definición 1.7.1. Decimos que dos k -álgebras A y B son equivalentes Morita si existe una equivalencia de categorías k -lineal $F : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$.

Como nos interesa estudiar las representaciones de una k -álgebra, es decir la categoría de sus módulos, la equivalencia de Morita captura la “buena” noción de equivalencia entre dos k -álgebras desde el punto de vista de su teoría de representaciones. El Teorema de Morita nos dará una condición necesaria y suficiente para que dos álgebras sean equivalentes en este sentido.

Definición 1.7.2. Sea A una k -álgebra. Decimos que un A -módulo M es un generador de $\text{Mod } A$ si para todo A -módulo N existe un conjunto Λ y un epimorfismo $M^{(\Lambda)} \rightarrow N$.

Un A -módulo proyectivo finitamente generado que es un generador de $\text{Mod } A$ se dice un progenerador (o progenerador Morita) de $\text{Mod } A$.

Teorema 1.7.3 (Morita). [2, Teorema VIII.3.2] *Dos k -álgebras A y B son equivalentes Morita si y solamente si existe un progenerador P_A tal que $B \cong \text{End } P_A$.*

*En tal caso, la equivalencia de categorías $F : \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$ está dada por el funtor $F = \text{Hom}_A(P, -)$, con *quasi-inversa* $G = - \otimes_B P$.*

Corolario 1.7.4. [2, Corolario VIII.3.4] *Si A y B son dos k -álgebras, son equivalentes:*

- (a) *A y B son equivalentes Morita.*
- (b) *Existe un progenerador P_A tal que $B \cong \text{End } P_A$.*
- (c) *Existe una equivalencia k -lineal $\text{mod } A \rightarrow \text{mod } B$.*

Este corolario justifica que podemos restringir nuestra atención a la subcategoría plena de los A -módulos finitamente generados $\text{mod } A$ dentro de la categoría $\text{Mod } A$.

CAPÍTULO 2

Teoría de inclinación

Una de las afirmaciones más sorprendentes del Teorema de Gabriel (1.3.5) es que la cantidad de (clases de isomorfismo de) módulos indescomponibles de una k -álgebra hereditaria $A = kQ$ de tipo de representación finita no depende de la orientación del carcaj Q , solo del grafo subyacente. Bernstein, Gelfand y Ponomarev dieron una explicación de este suceso, mostrando que para un carcaj Q de tipo Dynkin existe un funtor, que llamaron funtor de reflexión, entre $\text{mod } kQ$ y $\text{mod } kQ'$ que induce una biyección entre los módulos indescomponibles, donde Q' es el carcaj obtenido de Q revirtiendo todas las flechas que llegan a un pozo $x \in Q_0$. Más adelante, Auslander, Platzcek y Reiten mostraron que estos funtores de reflexión son equivalentes a $\text{Hom}_A(T, -)$ donde $T = \tau^{-1}S(x) \oplus \bigoplus_{x \neq y \in Q_0} P(y)$ (ver 2.2.10) y que $kQ' \cong \text{End}_A(T)^{op}$. Unos años después, Brenner y Butler generalizaron estos módulos que inducen los funtores de reflexión y estudiaron estos objetos axiomáticamente en el artículo [6], en el cual introducen la noción de módulo inclinante.

La teoría de inclinación generaliza de alguna forma la equivalencia Morita. La idea es estudiar $\text{mod } A$ cambiando A por $B = \text{End}_A(T_A)$, para T en $\text{mod } A$ con ciertas propiedades que lo hagan ser “parecido” a un progenerador Morita.

Al debilitar las condiciones que le pedimos a estos módulos, en vez de tener una equivalencia de categorías $\text{mod } A \cong \text{mod } B$, tendremos isomorfismos entre ciertas subcategorías de las categorías de módulos de A y B . Por un lado, perdemos control de todo $\text{mod } A$ en la inclinación, pero por otro obtenemos nuevas familias de álgebras con las que comparar $\text{mod } A$.

2.1. Pares de torsión

Las subcategorías que podremos comparar de A y $\text{End}_A(T_A)$ forman lo que llamamos un par de torsión. Veremos ahora que son y algunas propiedades. Luego definiremos módulos inclinantes y veremos los pares de torsión que estos inducen.

Definición 2.1.1. Un par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de subcategorías plenas de $\text{mod } A$ es un par de torsión (o teoría de torsión) si:

- (i) $\text{Hom}_A(M, N) = 0 \quad \forall M \in \mathcal{T} \text{ y } N \in \mathcal{F}.$
- (ii) $\text{Hom}_A(M, -)|_{\mathcal{F}} = 0 \implies M \in \mathcal{T}.$
- (iii) $\text{Hom}_A(-, N)|_{\mathcal{T}} = 0 \implies N \in \mathcal{F}.$

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es un par de torsión, llamamos a $\mathcal{T}$ clase de torsión y a $\mathcal{F}$ clase libre de torsión.

Observación 2.1.2. La condición (i) nos dice que no hay morfismos no nulos entre módulos en $\mathcal{T}$ y módulos en $\mathcal{F}$.

Las condiciones (ii) y (iii) nos dicen que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{F}$ son maximales con respecto a esta propiedad.

Ejemplo 2.1.3. Una clase $\mathcal{C}$ arbitraria de A -módulos induce un par de torsión tomando $\mathcal{F} = \{N : \text{Hom}_A(-, N)|_{\mathcal{C}} = 0\}$, $\mathcal{T} = \{M : \text{Hom}_A(M, -)|_{\mathcal{F}} = 0\}$. En tal caso $\mathcal{T}$ es la clase de torsión más chica que contiene a $\mathcal{C}$.

La construcción dual nos da la clase libre de torsión más chica que contiene a $\mathcal{C}$.

Definición 2.1.4. Un subfunctor t del funtor identidad en $\text{mod } A$ (es decir un funtor que asigna $tM \subseteq M$ a cada M de forma que todo morfismo $M \rightarrow N$ se restringe a $tM \rightarrow tN$) es llamado un idempotente radical si, para todo módulo M_A , se cumple que $t(tM) = tM$ y $t(M/tM) = 0$.

Proposición 2.1.5. (a) Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría plena de $\text{mod } A$. Son equivalentes:

- (i) $\mathcal{T}$ es la clase de torsión de algún par de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$.
- (ii) $\mathcal{T}$ es cerrado bajo imágenes, sumas directas y extensiones.
- (iii) Existe un idempotente radical t tal que $\mathcal{T} = \{M : tM = M\}$.

(b) Sea $\mathcal{F}$ una subcategoría plena de $\text{mod } A$. Son equivalentes:

- (i) $\mathcal{F}$ es la clase libre de torsión de algún par de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$.
- (ii) $\mathcal{F}$ es cerrado bajo submódulos, productos directos y extensiones.
- (iii) Existe un idempotente radical t tal que $\mathcal{F} = \{N : tN = 0\}$.

Definición 2.1.6. El idempotente radical t asociado a un par de torsión es llamado el radical de torsión.

Si existe un tal radical de torsión, se sigue que $tM \in \mathcal{T}$ y $M/tM \in \mathcal{F}$ para todo A -módulo M .

Proposición 2.1.7. Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ un par de torsión en $\text{mod } A$ y M un A -módulo. Existe entonces una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow tM \longrightarrow M \longrightarrow M/tM \longrightarrow 0$$

con $tM \in \mathcal{T}$ y $M/tM \in \mathcal{F}$. Esta sucesión es única en el sentido de que cualquier otra sucesión exacta $0 \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ con $X \in \mathcal{T}$ e $Y \in \mathcal{F}$, es isomorfa a ella.

Definición 2.1.8. Una sucesión exacta como la de la proposición se llama sucesión canónica para M (asociada al par de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$).

Corolario 2.1.9. Todo módulo simple es o bien de torsión o bien libre de torsión.

Un caso particular de pares de torsión que nos da bastante información es cuando $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ cubre todo $\text{mod } A$.

Definición 2.1.10. Un par de torsión se dice escindente si todo A -módulo indescomponible pertenece o bien a $\mathcal{T}$ o bien a $\mathcal{F}$.

Proposición 2.1.11. Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ un par de torsión en $\text{mod } A$. Son equivalentes:

- (a) $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es escindente.
- (b) Para todo A -módulo M , la sucesión canónica de M se escinde.
- (c) $\text{Ext}_A^1(N, M) = 0 \ \forall M \in \mathcal{T}, N \in \mathcal{F}$.

- (d) $M \in \mathcal{T} \implies \tau^{-1}M \in \mathcal{T}$.
(e) $N \in \mathcal{F} \implies \tau N \in \mathcal{F}$.

Apuntando a una generalización de la equivalencia Morita, estudiaremos los módulos generados (cogenerados) por uno inclinante.

Definición 2.1.12. Sea T un A -módulo. Definimos $\underline{\text{Gen}}T$ como la clase de todos los módulos M en $\text{mod } A$ generados por T , es decir, módulos M tal que $\exists d \geq 0$ y un epimorfismo $T^d \rightarrow M$.

Dualmente, definimos $\underline{\text{Cogen}}T$ como la clase de todos los módulos N en $\text{mod } A$ cogenerados por T , es decir, módulos N tal que $\exists d \geq 0$ y un monomorfismo $N \rightarrow T^d$.

Para ver cuando $\text{Gen}T$ es la clase de torsión de un par de torsión, o dualmente cuando $\text{Cogen}T$ es la clase libre de torsión de un par de torsión, por 2.1.5 basta ver cuando estas clases son cerradas bajo extensiones.

Lema 2.1.13. (a) Si $\text{Ext}_A^1(T, -)|_{\text{Gen}T} = 0$, $\text{Gen}T$ es una clase de torsión, con

$$\mathcal{F} = \{M : \text{Hom}_A(T, M) = 0\}$$

como la clase libre de torsión correspondiente.

(b) Si $\text{Ext}_A^1(-, T)|_{\text{Cogen}T} = 0$, $\text{Cogen}T$ es libre de torsión con

$$\mathcal{T} = \{M : \text{Hom}_A(M, T) = 0\}$$

como la clase de torsión correspondiente.

En virtud de este lema y 1.5.7 damos la siguiente definición.

Definición 2.1.14. Si $\mathcal{C}$ es una k -subcategoría plena de $\text{mod } A$, un A -módulo $M \in \mathcal{C}$ se dice Ext-proyectivo en $\mathcal{C}$ si $\text{Ext}_A^1(M, -)|_{\mathcal{C}} = 0$ y dualmente, se dice Ext-inyectivo si $\text{Ext}_A^1(-, M)|_{\mathcal{C}} = 0$

Proposición 2.1.15. Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ un par de torsión en $\text{mod } A$ y M un A -módulo indecomponible.

- (a) $M \in \mathcal{T}$ es Ext-proyectivo en $\mathcal{T}$ si y sólo si $\tau M \in \mathcal{F}$.
(b) $M \in \mathcal{F}$ es Ext-inyectivo en $\mathcal{F}$ si y sólo si $\tau^{-1}M \in \mathcal{T}$.

2.2. Módulos inclinantes

Veamos ahora la definición de módulo inclinante y los pares de torsión que estos inducen.

Para un A -módulo M , notaremos por $\text{add } M$ a la subcategoría plena de $\text{mod } A$ cuyos objetos son sumas directas de sumandos directos de M .

Definición 2.2.1. Un A -módulo T es un módulo inclinante parcial si cumple

- (T1) $\text{pd } T_A \leq 1$.
(T2) $\text{Ext}_A^1(T, T) = 0$.

Un A -módulo T es un módulo inclinante si además cumple

- (T3) Existe una sucesión exacta corta $0 \rightarrow A \rightarrow T' \rightarrow T'' \rightarrow 0$ con $T', T'' \in \text{add } T$.

Observación 2.2.2. Las condiciones (T1) y (T2) nos dicen que T “está cerca” de ser proyectivo, y al añadir (T3) tenemos que T “está cerca” de ser un progenerador Morita. En efecto, todo progenerador Morita Q es un módulo inclinante:

(T1) y (T2) son triviales ya que Q es proyectivo y para ver que Q cumple (T3) escribimos $A = \bigoplus_{i=1}^n P_i$ con P_i proyectivos indescomponibles. Como Q es generador, para todo $1 \leq i \leq n$ existe $\varphi_i : Q^d \rightarrow P_i$ epimorfismo y, por ser los P_i proyectivos, para todo $1 \leq i \leq n$ existe $\psi_i : P_i \rightarrow Q^d$ tal que $\varphi_i \psi_i = id_{P_i}$ y por tanto, por ser indescomponibles, todo P_i debe aparecer como sumando de Q .

Tomando la sucesión $0 \rightarrow A \hookrightarrow Q \rightarrow Q/A \rightarrow 0$ (exacta pues $Q/A = \text{coker}(A \hookrightarrow Q)$), tenemos que Q cumple (T3) ya que $Q/A = \bigoplus_{j=1}^n P_j^{i_j}$ con $i_j \geq 0 \forall j$ (todo proyectivo aparece como sumando de Q por el párrafo anterior) por tanto $Q/A \in \text{add } Q$.

Observación 2.2.3. La demostración de que todo progenerador Morita cumple (T3) muestra de hecho que la condición (T3) es equivalente a decir que un módulo inclinante parcial T_A es un módulo inclinante si y sólo si, para cada A -módulo proyectivo indescomponible P , existe una sucesión exacta corta $0 \rightarrow P \rightarrow T' \rightarrow T'' \rightarrow 0$ con $T', T'' \in \text{add } T$.

Observación 2.2.4. Otra restricción inmediata es que si T_A es un módulo inclinante, todo A -módulo indescomponible proyectivo-inyectivo es un sumando directo de T .

Para ver esto, escribimos $A = \bigoplus_{i=1}^n P_i$ con P_i proyectivos indescomponibles. Si Q es un A -módulo proyectivo-inyectivo, debe ser $Q = P_j$ para algún $1 \leq j \leq n$.

Como T_A inclinante, por (T3) tenemos

$$0 \longrightarrow A = \bigoplus_{i=1}^n P_i \longrightarrow T' \longrightarrow T'' \longrightarrow 0$$

con $T', T'' \in \text{add } T$ y, por tanto, tenemos

$$0 \longrightarrow P_j \xrightarrow{f_j} T' \longrightarrow T'' \longrightarrow 0$$

y por ser P_j inyectivo y f_j monomorfismo, existe $h_j : T' \rightarrow P_j$ tal que $h_j f_j = id_{P_j}$, es decir, P_j es sumando directo de T' , luego $Q = P_j \in \text{add } T$ y como es indescomponible, debe ser un sumando directo de T .

Seguimos interesados en ver cuando $\text{Gen } T$ y $\text{Cogen } T$ son parte de un par de torsión. Considerarnos también, dado T_A módulo inclinante parcial, las siguientes dos subcategorías plenas de $\text{mod } A$

$$\mathcal{T}(T) = \{M_A : \text{Ext}_A^1(T, M) = 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(T) = \{M_A : \text{Hom}_A(T, M) = 0\}.$$

Proposición 2.2.5. Sea T un A -módulo inclinante parcial. Entonces:

- (a) $\text{Gen } T$ es una clase de torsión en la que T es Ext-proyectivo y $\mathcal{F}(T)$ es la clase libre de torsión correspondiente.
- (b) $\mathcal{T}(T)$ es una clase de torsión en la que T es Ext-proyectivo y $\text{Cogen } \tau T$ es la clase libre de torsión correspondiente.
- (c) $\text{Gen } T \subseteq \mathcal{T}(T)$.

Más aún, son equivalentes:

- (i) T es inclinante.
- (ii) $\text{Gen } T = \mathcal{T}(T)$.

- (iii) $\mathcal{F}(T) = \text{Cogen } \tau T$
- (iv) Para todo $M \in \mathcal{T}(T)$, existe una sucesión exacta corta $0 \rightarrow L \rightarrow T_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ con $T_0 \in \text{add } T$ y $L \in \mathcal{T}(T)$.
- (v) Un A -módulo X está en $\text{add } T$ si y sólo si X es Ext-proyectivo en $\mathcal{T}(T)$.

Observación 2.2.6. Similar a lo que pasa con los progneradores Morita (ver 2.2.2), todo módulo proyectivo en $\text{Gen } T$ está también en $\text{add } T$.

Definición 2.2.7. Con la proposición anterior en mente, si T es un A -módulo inclinante, nos referimos al par

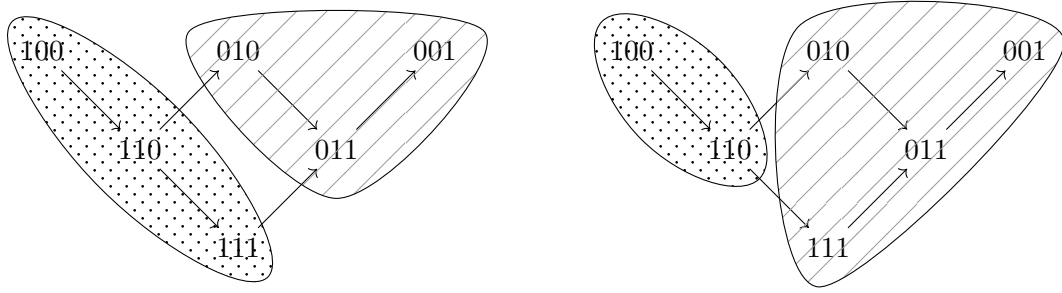
$$(\text{Gen } T, \mathcal{F}(T)) = (\mathcal{T}(T), \text{Cogen}(T))$$

como el par de torsión inducido por T en $\text{mod } A$, y lo notamos $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$.

Veamos un ejemplo de un A -módulo inclinante parcial donde los pares de torsión $(\text{Gen } T, \mathcal{F}(T))$ y $(\mathcal{T}(T), \text{Cogen}(T))$ no coinciden:

Ejemplo 2.2.8. Consideremos $Q = \begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \end{smallmatrix} \longleftarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \circ \end{smallmatrix} \longleftarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \circ \end{smallmatrix}$, $A = kQ$ y el A -módulo inclinante parcial $T = 010 \oplus 011$.

Veamos los pares de torsión $(\text{Gen } T, \mathcal{F}(T))$ y $(\mathcal{T}(T), \text{Cogen } T)$ en el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod } A)$, respectivamente.



donde las clases de torsión $\text{Gen } T$ y $\mathcal{T}(T)$ están marcadas como diagonal lines y las clases libres de torsión $\mathcal{F}(T)$ y $\text{Cogen } \tau T$ como dotted .

Notar que en este ejemplo, $T \oplus 111$ es inclinante, pues T es inclinante parcial, 111 es proyectivo y tenemos la sucesión:

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow 111^3 \oplus 010 \longrightarrow 011^2 \longrightarrow 0$$

con $111^3 \oplus 010, 011^2 \in \text{add}(T \oplus 111)$.

De hecho, justificando el nombre de los mismos, siempre podemos completar un módulo inclinante parcial a uno inclinante.

Lema 2.2.9 (Bongartz). Si T es un A -módulo inclinante parcial, entonces existe un A -módulo E tal que $T \oplus E$ es inclinante.

Daremos ahora un ejemplo de un tipo de módulos inclinantes que aparecen en el origen de la teoría de inclinación. Estos son los módulos APR-inclnantes definidos por Auslander, Platzcek y Reiten.

Definición 2.2.10. Sea A una k -álgebra y $S(a)$ un A -módulo simple proyectivo no inyectivo (o sea que el vértice a es un pozo con al menos una flecha entrante en el carcaj asociado a A). Tomamos

$$T = T[a] := \tau^{-1}S(a) \oplus \left(\bigoplus_{b \neq a} P(b) \right)$$

y lo llamamos el módulo APR-inclinante asociado al pozo a .

Proposición 2.2.11. Si T es un A -módulo APR-inclinante, entonces T es inclinante y el par de torsión inducido por T es escindente.

Demostración: Probaremos primero que T es efectivamente inclinante. Las condiciones (T1) y (T3) salen de que la sucesión

$$0 \longrightarrow S(a) \longrightarrow \bigoplus_{c \neq a} P(c)^{m_c} \longrightarrow \tau^{-1}S(a) \longrightarrow 0$$

con $m_c = \dim_k(\text{Irr}(S(a), P(c)))$ es casi escindida por [3, Corolarios IV.3.9 y IV.4.4].

Para (T1), todos los sumandos $P(i)$ son proyectivos y por tanto tienen dimensión proyectiva 0 y $\text{pd} \tau^{-1}S(a) = 1$ por la sucesión anterior.

Para (T3) sumamos todos los proyectivos $P(c)$ con $c \neq a$ a la sucesión exacta anterior y obtengo

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow \bigoplus_{c \neq a} P(c)^{1+m_c} \longrightarrow \tau^{-1}S(a) \longrightarrow 0$$

con los términos del medio y la izquierda en $\text{add } T$.

Para (T2), por el Corolario 1.6.24 tenemos

$$\text{Ext}_A^1(T, T) \cong D \text{Hom}_A(T, \tau T) = D \text{Hom}_A(T, S(a)) = 0$$

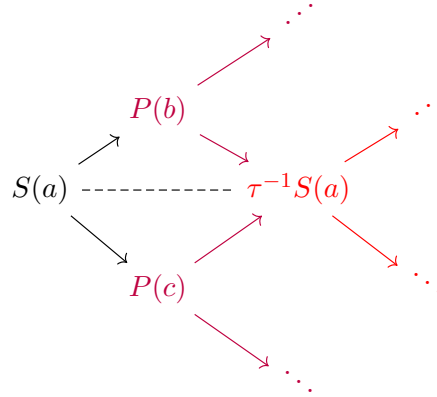
ya que $\text{Hom}_A(\tau^{-1}S(a), S(a)) = 0$ y $\text{Hom}_A(\bigoplus_{b \neq a} P(b), S(a)) = 0$ ya que $S(a)$ es simple, luego todo morfismo $P(b) \rightarrow S(a)$ es cero o un isomorfismo, y $S(a) = P(a)$ es proyectivo. Luego $P(b) \rightarrow P(a)$ es cero por ser $b \neq a$. Con esto tenemos que T cumple (T2) y concluimos que T es inclinante.

Veamos que el par de torsión inducido es escindente.

Para ilustrar la importancia de que a sea un pozo, veremos primero que el único A -módulo indescomponible en la clase libre de torsión $\mathcal{F}(T) = \{M : \text{Hom}_A(T, M) = 0\}$ es $S(a)$ y luego que todos los otros indescomponibles están en $\mathcal{T}(T)$.

Para ver esto, hay que usar como se ve el módulo T en el carcaj de Auslander-Reiten. Tenemos que $M \in \mathcal{F}(T) \Leftrightarrow \text{Hom}_A(T, M) = 0 \Leftrightarrow \text{Hom}_A(P(b), M) = 0 \forall b \neq a$ y $\text{Hom}_A(\tau^{-1}S(a), M) = 0$. Como a es un pozo, $S(a) = P(a)$ es una fuente en el carcaj de

Auslander-Reiten y localmente se ve algo así:



donde pintado de violeta están los módulos con $\text{Hom}_A(P(i), M) \neq 0$ para $i \neq a$ y de rojo los módulos con $\text{Hom}_A(\tau^{-1}S(a), M) \neq 0$ y los morfismos que salen de ellos. Como M está en $\mathcal{F}(T)$ si y sólo si no está pintado de rojo ni violeta, la única posibilidad es $M = S(a)$.

Por otro lado, $\mathcal{T}(T)$ es la subcategoría aditiva generada por todos los indescomponibles que no son $S(a)$, ya que si M es indescomponible,

$$M \in \mathcal{T}(T) \Leftrightarrow 0 = \text{Ext}_A^1(T, M) = \text{Ext}_A^1(\tau^{-1}S(a), M) \cong D \text{Hom}_A(M, S(a)) \Leftrightarrow M \not\cong S(a)$$

donde el último si y sólo si es por ser $S(a)$ simple y proyectivo (todo morfismo que llega a un simple es sobreyectivo y todo morfismo sobreyectivo que llega a un proyectivo es una retracción, por lo tanto $S(a)$ es sumando directo de M indescomponible). Esto también puede verse claramente en el carcaj de Auslander-Reiten.

En particular, tenemos que $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ es un par de torsión escindente, como afirmamos.

2.3. Teorema de inclinación de Brenner y Butler

Antes de enunciar el teorema de inclinación, debemos entender mejor los pares de torsión inducidos en $B = \text{End } T_A$ para A un álgebra y T_A un módulo inclinante.

El siguiente lema resultará de gran utilidad más adelante.

Lema 2.3.1. *Sea A un álgebra, T un A -módulo (no necesariamente inclinante) y $B = \text{End } T_A$. Vale que*

- (a) *Para cada módulo $T_0 \in \text{add } T$ y cada A -módulo M , el mapa $f \mapsto \text{Hom}_A(T, f)$ induce una transformación natural*

$$\text{Hom}_A(T_0, M) \cong \text{Hom}_B(\text{Hom}_A(T, T_0), \text{Hom}_A(T, M))$$

- (a) *El funtor $\text{Hom}_A(T, -)$ induce una equivalencia de categorías entre $\text{add } T$ y la subcategoría $\text{proj } B$ de $\text{mod } B$ que tiene como objetos a los B -módulos proyectivos.*

Observación 2.3.2. Como corolario, tenemos que B es básica si y sólo si los sumandos indescomponibles de T no son isomorfos 2 a 2. En tal caso decimos que T es libre de multiplicidad.

Por el resto de esta sección, T será un A -módulo inclinante y $B = \text{End } T_A$.

Proposición 2.3.3. *El funtor $\text{Hom}_A(T, -) : \mathcal{T}(T_A) \rightarrow \text{mod } B$ encaja la clase $\mathcal{T}(T)$ como una subcategoría plena de $\text{mod } B$, cerrada por extensiones.*

Una de las claves de la teoría de inclinación es que un módulo inclinante T_A induce un B -módulo inclinante ${}_B T$ y, más aún, el álgebra A se puede recuperar a partir de B y ${}_B T$, como vemos en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.4. *Vale que:*

- (a) Si $M, N \in \mathcal{T}(T)$, entonces $\text{Ext}_A^1(M, N) \cong \text{Ext}_B^1(\text{Hom}_A(T, M), \text{Hom}_A(T, N))$
- (b) $D({}_B T) \cong \text{Hom}_A(T, DA)$
- (c) ${}_B T$ es un B -módulo a izquierda inclinante.
- (d) $A \cong \text{End}({}_B T)^{op}$ via $a \mapsto (t \mapsto ta)$.

Proposición 2.3.5. *El centro $Z(A)$ de A es isomorfo al centro $Z(B)$ de B .*

Observación 2.3.6. Como corolario del resultado anterior, como un álgebra es conexa si y sólo si su centro lo es, tenemos que B también es conexa (recordar que partimos de k -álgebras básicas y conexas).

Otro corolario de la proposición anterior es que ${}_B T$, al ser un B -módulo inclinante, induce un par de torsión $(\mathcal{T}({}_B T), \mathcal{F}({}_B T))$ en la categoría de B -módulos a izquierda, siendo, igual que antes:

$$\mathcal{T}({}_B T) = \text{Gen}({}_B(T)) = \{{}_B U : \text{Ext}_B^1(T, U) = 0\}$$

$$\mathcal{F}({}_B T) = \text{Cogen } \tau({}_B(T)) = \{{}_B V : \text{Hom}_B(T, V) = 0\}$$

Como nos interesa la categoría $\text{mod } B$ de los B -módulos a derecha, en vez de ese par de torsión, consideraremos el dual:

$$(\mathcal{X}(T_A), \mathcal{Y}(T_A)) = (D\mathcal{F}({}_B T), D\mathcal{T}({}_B T))$$

En el siguiente lema damos otra caracterización de este par de torsión.

Lema 2.3.7. *Sea A un álgebra. Todo módulo inclinante T_A induce un par de torsión $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ en la categoría $\text{mod } B$. Además:*

$$\mathcal{X}(T) = \{X_B : \text{Hom}_B(X, DT) = 0\} = \{X_B : X \otimes_B T = 0\}$$

$$\mathcal{Y}(T) = \{Y_B : \text{Ext}_B^1(Y, DT) = 0\} = \{Y_B : \text{Tor}_1^B(Y, T) = 0\}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(T_A) &= D\mathcal{F}({}_B T) = D\{X_B : \text{Hom}_B(T, X) = 0\} \\ &= \{X_B : \text{Hom}_B(X, DT) = 0\} \\ &\cong \{X_B : D(X \otimes_B T) = 0\} \quad (*) \\ &= \{X_B : X \otimes_B T = 0\} \end{aligned}$$

donde $(*)$ es por el Lema de adjunción.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}(T_A) &= D\mathcal{T}({}_B T) = D\{{}_B Y : \text{Ext}_B^1(T, Y) = 0\} \\
&= \{Y_B : \text{Ext}_B^1(Y, DT) = 0\} \\
&\cong \{Y_B : D \text{Tor}_1^B(Y, T) = 0\} \quad (**) \\
&= \{Y_B : \text{Tor}_1^B(Y, T) = 0\}
\end{aligned}$$

donde $(**)$ es por 1.5.18.

Enunciamos ahora el teorema de Brenner y Butler, también llamado teorema de inclinación por ser el resultado central de la teoría de inclinación.¹

Para una prueba ver [3] o [7].

Teorema 2.3.8 (Brenner-Butler). *Sea A una k -álgebra, T_A un módulo inclinante, $B = \text{End } T_A$, $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ y $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ los pares de torsión inducidos en $\text{mod } A$ y $\text{mod } B$, respectivamente. Entonces:*

(a) ${}_B T$ es un módulo inclinante y el morfismo $A \rightarrow \text{End}({}_B T)^{op}$ dado por

$$a \mapsto (t \mapsto ta)$$

es un isomorfismo.

(b) Los funtores $\text{Hom}_A(T, -)$ y $- \otimes_B T$ inducen equivalencias quasi-inversas entre $\mathcal{T}(T_A)$ e $\mathcal{Y}(T_A)$.

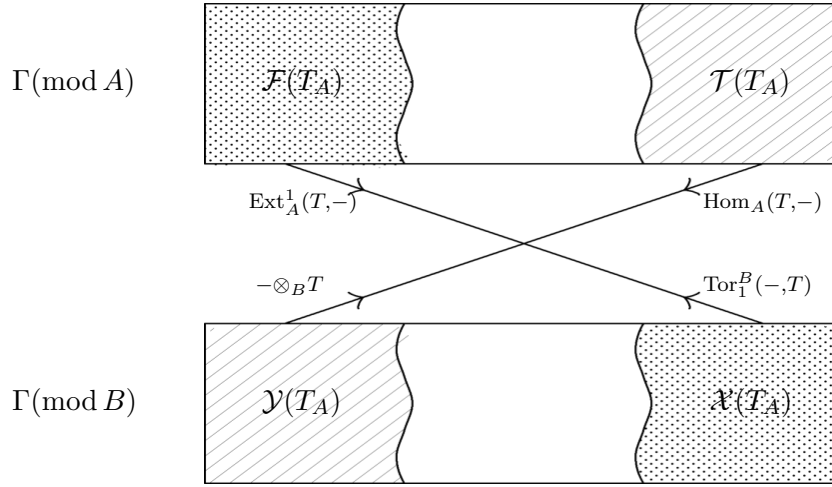
(c) Los funtores $\text{Ext}_A^1(T, -)$ y $\text{Tor}_1^B(-, T)$ inducen equivalencias quasi-inversas entre $\mathcal{F}(T_A)$ y $\mathcal{X}(T_A)$.

Observación 2.3.9. Como $\mathcal{T}(T_A)$ contiene a los A -módulos inyectivos, se encuentra “a la derecha” de $\Gamma(\text{mod } A)$ y $\mathcal{F}(T_A)$ a la izquierda de $\mathcal{T}(T_A)$ por ser la parte libre de torsión correspondiente al par de torsión (no hay morfismos de algo en $\mathcal{T}$ hacia algo en $\mathcal{F}$).

Similarmente, $\mathcal{Y}(T_A)$ se encuentra “a la izquierda” de $\Gamma(\text{mod } B)$ por contener a los B -módulos proyectivos y $\mathcal{X}(T_A)$ a su derecha.

La siguiente figura ilustra la situación general.

¹Notar que algunos resultados ya fueron enunciados previamente como lemas, pero para tenerlo más organizado los repetimos.



Proposición 2.3.10. *Las composiciones que no son quasi-inversas entre sí dan cero, es decir que dados M un A -módulo y N un B -módulo se tiene:*

- (i) $\text{Ext}_A^1(T, N \otimes_B T) = 0.$
- (ii) $\text{Ext}_A^1(T, M) \otimes_B T = 0.$
- (iii) $\text{Hom}_A(T, \text{Tor}_1^B(N, T)) = 0.$
- (iv) $\text{Tor}_1^B(\text{Hom}_A(T, M), T) = 0.$

CAPÍTULO 3

Álgebras de endomorfismos de módulos inclinantes

Nos centraremos ahora en estudiar algunas relaciones entre un álgebra A y el álgebra de endomorfismos de un A -módulo inclinante T . Veremos algunas propiedades que vienen como consecuencias del teorema de inclinación (2.3.8).

3.1. Dimensión global de álgebras de endomorfismos de módulos inclinantes

Como primer consecuencia, veremos que tener dimensión global finita es estable bajo el proceso de inclinación, con esta variando en a lo sumo 1. Precisamos este lema:

Lema 3.1.1. *Sea A un álgebra, T un A -módulo inclinante y $B = \text{End } T_A$. Si $M \in \mathcal{T}(T)$, entonces $\text{pd}_B \text{Hom}_A(T, M) \leq \text{pd}_A M$.*

Demostración: La haremos por inducción en $n = \text{pd}_A M$.

Si $n = 0$, entonces M es proyectivo y como $M \in \mathcal{T}(T) = \text{Gen}(T)$, donde la igualdad se da por ser T inclinante (parcial), tenemos que existe un epimorfismo $T^d \rightarrow M$ que se escinde por ser M proyectivo, por lo que $M \in \text{add } T$.

Luego, como por 2.3.1(b) $\text{Hom}_A(T, -)$ induce una equivalencia entre $\text{add } T$ y $\text{proj } B$, $\text{Hom}_A(T, M)$ es proyectivo en $\text{mod } B$ y $\text{pd}_B \text{Hom}_A(T, M) = 0 \leq 0 = \text{pd}_A M$.

Sea entonces $n \geq 1$. Por Proposición 2.2.5(iv) existe una sucesión exacta corta:

$$(*) \quad 0 \longrightarrow L \longrightarrow T_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con $T_0 \in \text{add } T$ y $L \in \mathcal{T}(T)$. Como $L \in \mathcal{T}(T)$, $\text{Ext}_A^1(T_0, L) = 0$ y tenemos la siguiente sucesión exacta corta:

$$(**) \quad 0 \longrightarrow \text{Hom}_A(T, L) \longrightarrow \text{Hom}_A(T, T_0) \longrightarrow \text{Hom}_A(T, M) \longrightarrow 0$$

Si $n = 1$, entonces $\text{Ext}_A^2(M, -) = 0$ y como $T_0 \in \text{add } T$, la sucesión exacta corta $(*)$ induce la sucesión exacta de funtores

$$0 = \text{Ext}_A^1(T_0, -)|_{\mathcal{T}(T)} \longrightarrow \text{Ext}_A^1(L, -)|_{\mathcal{T}(T)} \longrightarrow \text{Ext}_A^2(M, -)|_{\mathcal{T}(T)} = 0$$

Luego $\text{Ext}_A^1(L, -)|_{\mathcal{T}(T)} = 0$ y entonces L es Ext-proyectivo en $\mathcal{T}(T)$.

La Proposición 2.2.5(v) nos da que $L \in \text{add } T$ y 2.3.1(b) nos da que $\text{Hom}_A(T, L)$ es proyectivo.

Viendo $(**)$, tenemos que $\text{pd } \text{Hom}_A(T, M) \leq 1 = \text{pd } M$.

Para $n \geq 2$, la [3, Proposición A.4.7(b)] nos dice que en la primer sucesión exacta corta $\text{pd } L \leq \max\{\text{pd } T_0, \text{pd } M - 1\} = n - 1$ ($T_0 \in \text{add } T, \text{pd } T \leq 1 \implies \text{pd } T_0 \leq 1$), por lo que la hipótesis inductiva aplicada a L nos da $\text{pd } \text{Hom}_A(T, L) \leq n - 1$ y de nuevo aplicada a $(**)$ nos da que $\text{pd } \text{Hom}_A(T, M) \leq 1 + \text{pd } \text{Hom}_A(T, L) \leq 1 + (n - 1) = n = \text{pd } M$. $\square$

Usando este lema podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 3.1.2. *Si A es un álgebra, T un A -módulo inclinante y $B = \text{End } T_A$, entonces $|\text{gl.dim } A - \text{gl.dim } B| \leq 1$*

Demostración: Dado X un B -módulo, tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

con P proyectivo (tomando $Y = \ker(P \rightarrow X)$). Luego $\text{pd}_B X \leq 1 + \text{pd}_B Y$.

Como $P \in \mathcal{Y}(T)$, pues $\mathcal{Y}(T)$ contiene a los B -módulos proyectivos, tenemos que $Y \in \mathcal{Y}(T)$ pues $\mathcal{Y}(T)$ es cerrado bajo submódulos por ser una clase libre de torsión y por Teorema 2.3.8 existe $M \in \mathcal{T}(T)$ tal que $Y = \text{Hom}_A(T, M)$.

Por el lema anterior tenemos $\text{pd}_B Y \leq \text{pd}_A M$ y por tanto

$$\text{pd}_B X \leq 1 + \text{pd}_B Y \leq 1 + \text{pd}_A M \leq 1 + \text{gl.dim } A.$$

Tomando supremos sobre todos los B -módulos X , tenemos $\text{gl.dim } B \leq 1 + \text{gl.dim } A$.

Como por el Teorema de inclinación(2.3.8), ${}_B T$ es un B -módulo inclinante, obtenemos análogamente $\text{gl.dim } A \leq 1 + \text{gl.dim } B$,

Juntando estas dos desigualdades tenemos $|\text{gl.dim } A - \text{gl.dim } B| \leq 1$ □

Ejemplo 3.1.3. Veamos que la cota del teorema anterior es óptima.

Consideremos el álgebra $A = kQ$ dada por el carcaj Q : $1 \circ \xrightarrow{\quad} \overset{2}{\circ} \xrightarrow{\quad} \circ 3$ y el A -módulo inclinante $T = S(1) \oplus P(1) \oplus S(3)$. El álgebra $B = \text{End } T_A$ está dada entonces por el carcaj $1 \circ \xrightarrow{\alpha} \overset{2}{\circ} \xrightarrow{\beta} \circ 3$ con la relación $\alpha\beta = 0$.

Considerando $S_B(1)$, el B -módulo simple asociado al vértice 1, obtenemos una resolución proyectiva minimal de $S_B(1)$ de largo 2:

$$0 \longrightarrow P_B(3) \longrightarrow P_B(2) \longrightarrow P_B(1) \longrightarrow S_B(1) \longrightarrow 0$$

Por tanto $\text{pd}_B S_B(1) = 2$ y $\text{gl.dim}(B) = 2$, pues se verifica fácilmente que todo otro B -módulo indescomponible M tiene $\text{pd}_B M \leq 1$. Por otro lado, $\text{gl.dim}(A) = 1$ por ser A hereditaria y $|\text{gl.dim}(A) - \text{gl.dim}(B)| = 1$

3.2. Álgebras de endomorfismos de módulos inclinantes y grupo de Grothendieck

Estudiaremos ahora el comportamiento del grupo de Grothendieck $K_0(A)$ de un álgebra A (ver sección 1.2.1) bajo el proceso de inclinación. Deduciremos a partir de esto que el número de módulos simples se preserve por inclinación y veremos propiedades del vector dimensión de un módulo.

Recordamos que tenemos un isomorfismo $\underline{\dim} : K_0(A) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}^n$, dado por $[X] \mapsto \underline{\dim} X$ (vector dimensión), donde $n = \#\{\text{isoclases de } A\text{-módulos simples}\}$.

Identificamos $K_0(A)$ con $\mathbb{Z}^n$ y $[X] \in K_0(A)$ con $\underline{\dim} X \in \mathbb{Z}^n$ para todo A -módulo X .

Lema 3.2.1. *Dada una sucesión exacta larga en $\text{mod } A$*

$$0 \longrightarrow N_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_3 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

tenemos que $\underline{\dim} M = \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \underline{\dim} N_k$

Demostración: Recordar que $\underline{\dim}$ es aditiva, es decir que si $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ es una sucesión exacta corta, entonces $\underline{\dim} Y = \underline{\dim} X + \underline{\dim} Z$ (ver [3, Sección III.3.3]). Para poder usar esto, partimos la sucesión exacta larga en sucesiones exactas cortas como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & 0 & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & \text{Im } f_2 = \ker f_1 & & & & \\
 0 & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & N_3 & \xrightarrow{f_3} & N_2 & \xrightarrow{f_2} & N_1 & \xrightarrow{f_1} & M & \rightarrow & 0 \\
 & & & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & & & \text{Im } f_3 = \ker f_2 & & & & \text{Im } f_1 = M & & & & \\
 & & & & \nearrow & & \searrow & & & & \searrow & & \\
 & & & & 0 & & & & 0 & & & & 0
 \end{array}$$

Luego la aditividad nos da

$$\begin{cases}
 \underline{\dim} N_1 = \underline{\dim} \text{Im } f_1 + \underline{\dim} \text{Im } f_2 = \underline{\dim} M + \underline{\dim} \text{Im } f_2 \\
 \underline{\dim} N_2 = \underline{\dim} \text{Im } f_2 + \underline{\dim} \text{Im } f_3 \\
 \vdots \\
 \underline{\dim} N_m = \underline{\dim} \text{Im } f_m + 0
 \end{cases}$$

Por tanto, $\underline{\dim} M = \underline{\dim} N_1 - \underline{\dim} \text{Im } f_2 = \underline{\dim} N_1 - (\underline{\dim} N_2 - \underline{\dim} \text{Im } f_3) = \cdots$ y siguiendo así tenemos el resultado. $\square$

Teorema 3.2.2. Sea A un álgebra, T un A -módulo inclinante y $B = \text{End } T$. Entonces la correspondencia $\underline{\dim} M \mapsto \underline{\dim} \text{Hom}_A(T, M) - \underline{\dim} \text{Ext}_A^1(T, M)$, para M un A -módulo, induce un isomorfismo $f : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$.

Demostración: Como $\text{pd } T \leq 1$, $\text{Ext}_A^j(T, -) = 0 \ \forall j \geq 2$ y por tanto toda sucesión exacta corta $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ en $\text{mod } A$ induce una sucesión exacta larga de cohomología:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \text{Hom}_A(T, L) & \rightarrow & \text{Hom}_A(T, M) & \rightarrow & \text{Hom}_A(T, N) \\
 & & & & \longrightarrow & & \\
 & & & & \text{Ext}_A^1(T, L) & \rightarrow & \text{Ext}_A^1(T, M) & \rightarrow & \text{Ext}_A^1(T, N) & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

De esta obtenemos, por el Lema 3.2.1 la igualdad

$$\begin{aligned}
 \underline{\dim} \text{Hom}_A(T, M) - \underline{\dim} \text{Ext}_A^1(T, M) &= (\underline{\dim} \text{Hom}_A(T, L) - \underline{\dim} \text{Ext}_A^1(T, L)) \\
 &\quad + (\underline{\dim} \text{Hom}_A(T, N) - \underline{\dim} \text{Ext}_A^1(T, N))
 \end{aligned}$$

Por tanto, la correspondencia $\underline{\dim} M \mapsto \underline{\dim} \text{Hom}_A(T, M) - \underline{\dim} \text{Ext}_A^1(T, M)$ induce un homomorfismo de grupos $f : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$, pues en el grupo de Grothendieck, si la sucesión $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ es exacta corta, $[M] = [L] + [N]$, y vimos que esta correspondencia respeta esta relación: la imagen de $\underline{\dim} M$ y $\underline{\dim} L + \underline{\dim} N$ coinciden.

Queremos ahora ver que f es un isomorfismo. Para esto, recordar que $\{\underline{\dim} S\}_{S \in \mathcal{S}}$ con $\mathcal{S}$ conjunto de representantes de las isoclases de B -módulos simples es un generador de $K_0(B)$, y por tanto para ver que es sobreyectiva basta ver que todo B -módulo simple está en la imagen de f .

Sea entonces S un B -módulo simple. Como $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ es un par de torsión, o bien $S \in \mathcal{X}(T)$ o bien $S \in \mathcal{Y}(T)$ por el Corolario 2.1.9.

En el primer caso, por el teorema de inclinación, $S \cong \text{Ext}_A^1(T, \text{Tor}_1^B(S, T))$ y por Proposición 2.3.10 $\text{Hom}_A(T, \text{Tor}_1^B(S, T)) = 0$, por lo que

$$\underline{\dim} S = 0 + \underline{\dim} \text{Ext}_A^1(T, \text{Tor}_1^B(S, T)) = f(-\underline{\dim} \text{Tor}_1^B(S, T))$$

En el segundo caso, por los mismos resultados, tenemos $S \cong \text{Hom}_A(T, S \otimes_B T)$ y $\text{Ext}_A^1(T, S \otimes_B T) = 0$, por lo que

$$\underline{\dim} S = \underline{\dim} \text{Hom}_A(T, S \otimes_B T) + 0 = f(\underline{\dim} S \otimes_B T)$$

Esto prueba que f es sobreyectiva y por tanto que $\text{rk} K_0(A) \geq \text{rk} K_0(B)$. Por el Teorema de inclinación, también es inclinante ${}_B T$ y $A \cong \text{End}({}_B T)^{\text{op}}$. Por tanto, razonando igual que antes, tenemos $\text{rk} K_0(B) \geq \text{rk} K_0(A)$. En consecuencia, $\text{rk} K_0(A) = \text{rk} K_0(B)$. $\square$

En base a este teorema, deducimos un criterio para determinar cuando un módulo inclinante parcial es inclinante. En particular, nos sirve para construir ejemplos, ya que (T1) y (T2) son más fáciles de verificar que (T3).

Corolario 3.2.3. *Un módulo inclinante parcial T_A es inclinante si y sólo si el número de sumandos indescomponibles de T no isomorfos 2 a 2 es igual al número de A -módulos simples no isomorfos 2 a 2, o sea el rango de $K_0(A)$.*

Demostración: $(\Rightarrow)$ Si T_A inclinante y $B = \text{End } T_A$, entonces por lema 2.3.1(b) (que nos dice que $\text{add } T \cong \text{proj } B$) tenemos que el número t de sumandos indescomponibles de T no isomorfos 2 a 2 es igual al número de B -módulos proyectivos indescomponibles no isomorfos 2 a 2, que a su vez, es igual al número de B -módulos simples no isomorfos 2 a 2, que coincide con el rango de $K_0(B)$. Luego $t = \text{rk} K_0(A)$ por teorema 3.2.2.

$(\Leftarrow)$ Si T_A es inclinante parcial, lo puedo completar a uno inclinante usando el Lema 2.2.9. Es decir, $\exists E$ A -módulo tal que $T \oplus E$ es inclinante. Luego, por la parte ya demostrada, el número de sumandos indescomponibles de $T \oplus E$ no isomorfos 2 a 2 es igual al rango de $K_0(A)$ que, por hipótesis, es igual al número de sumandos indescomponibles de T no isomorfos 2 a 2, por lo que debe ser $E \in \text{add } T$ y T ya era inclinante. $\square$

Ejemplo 3.2.4. En el Ejemplo 2.2.8, sabiendo que $T = 010 \oplus 011$ es inclinante parcial, es inmediato que $T \oplus 111$ es inclinante, pues sigue siendo inclinante parcial, tiene 3 sumandos indescomponibles no isomorfos y A tiene 3 módulos simples no isomorfos 2 a 2 (uno por cada vértice de Q).

3.2.1. Característica de Euler de un álgebra. Estudiaremos ahora otro invariante relacionado al grupo de Grothendieck $K_0(A)$.

Para A un álgebra de dimensión global finita, definimos su característica de Euler como la forma bilineal $\langle -, - \rangle_A : K_0(A) \times K_0(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por:

$$\langle \underline{\dim} M, \underline{\dim} N \rangle_A = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \dim_k \text{Ext}_A^j(M, N)$$

para A -módulos M y N .

Observar primero que la suma es finita pues $\text{gl.dim } A < \infty$. Luego, como $|\text{gl.dim } A - \text{gl.dim } B| \leq 1$ por el Teorema 3.1.2 para $B = \text{End } T_A$ con T_A inclinante, $\langle -, - \rangle_A$ está bien definida por la fórmula anterior si y sólo si lo está $\langle -, - \rangle_B$. Mostraremos ahora que

la característica de Euler de un álgebra es invariante por inclinación. Para esto veremos que el isomorfismo f del Teorema 3.2.2 es una isometría con respecto a las características de Euler de A y B .

Proposición 3.2.5. *Sea A un álgebra de dimensión global finita, T_A un módulo incluyente, $B = \text{End } T_A$ y $f : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ el isomorfismo de 3.2.2, Entonces, para cualquier par de A -módulos M y N se tiene*

$$\langle \underline{\dim} M, \underline{\dim} N \rangle_A = \langle f(\underline{\dim} M), f(\underline{\dim} N) \rangle_B$$

Demostración: Sean $T_1, \dots, T_n$ los sumandos indescomponibles no isomorfos 2 a 2 de T . Veremos que $\underline{\dim} T_i$ con $1 \leq i \leq n$ es una base de $K_0(A)$ y que f es una isometría. Por lema 2.3.1(b), la equivalencia entre $\text{add } T$ y $\text{proj } B$ está dada por el funtor $\text{Hom}_A(T, -)$. Entonces tenemos que los B -módulos $\text{Hom}_A(T, T_i) : 1 \leq i \leq n$ forman un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismos de B -módulos proyectivos indescomponibles no isomorfos 2 a 2 y por tanto los vectores dimensión de estos módulos forman una base de $K_0(B)$. Además, como $\text{Ext}_A^1(T, T_1) = 0 \forall i$, $f(\underline{\dim} T_i) = \underline{\dim} \text{Hom}_A(T, T_i)$ es un isomorfismo entre $K_0(A)$ y $K_0(B)$. Por tanto $\{\underline{\dim} T_i\}_{i=1}^n$ forma una base de $K_0(A)$.

Como $\text{Hom}_A(T, T_i)$ es proyectivo para todo i , $\text{Ext}_B^m(\text{Hom}(T, T_i), -) = 0 \forall m \geq 1$. Luego para $1 \leq i, j \leq n$:

$$\begin{aligned} \langle f(\underline{\dim} T_i), f(\underline{\dim} T_j) \rangle_B &= \langle \underline{\dim} \text{Hom}_A(T, T_i), \underline{\dim} \text{Hom}_A(T, T_j) \rangle_B \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dim_{\mathbf{k}} \text{Ext}_B^n(\text{Hom}_A(T, T_i), \text{Hom}_A(T, T_j)) \\ &= \dim_{\mathbf{k}} \text{Ext}_B^0(\text{Hom}_A(T, T_i), \text{Hom}_A(T, T_j)) \\ &= \dim_{\mathbf{k}} \text{Hom}_B(\text{Hom}_A(T, T_i), \text{Hom}_A(T, T_j)) \\ &= \dim_{\mathbf{k}} \text{Hom}_A(T_i, T_j) \\ &= \langle \underline{\dim} T_i, \underline{\dim} T_j \rangle_A \end{aligned}$$

donde la última igualdad es por ser T incluyente. Concluimos que f es una isometría en los generadores, y por tanto en todo $K_0(A)$. $\square$

3.3. Sucesiones de conexión

Dejando de lado el K_0 , veremos ahora qué son las sucesiones de conexión y como el teorema de inclinación las caracteriza. Estas serán de gran utilidad más adelante.

Definición 3.3.1. Una sucesión casi escindida $0 \longrightarrow Y \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$ en $\text{mod } B$ se dice una sucesión de conexión si $Y \in \mathcal{Y}(T)$ y $X \in \mathcal{X}(T)$.

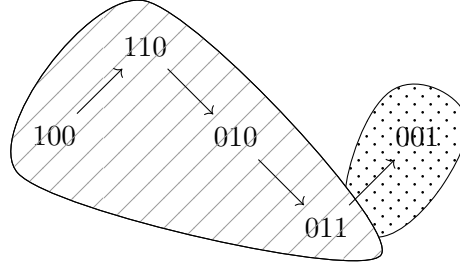
Ejemplo 3.3.2. Consideremos $Q = \begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \end{smallmatrix} \xleftarrow{\quad} \begin{smallmatrix} 2 \\ \circ \end{smallmatrix} \xleftarrow{\quad} \begin{smallmatrix} 3 \\ \circ \end{smallmatrix}$, $A = \mathbf{k}Q$ y el A -módulo incluyente $T = 100 \oplus 111 \oplus 001$, entonces $B = \text{End } T_A$ está dada por el carcaj

$$\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \end{smallmatrix} \xleftarrow{\mu} \begin{smallmatrix} 2 \\ \circ \end{smallmatrix} \xleftarrow{\lambda} \begin{smallmatrix} 3 \\ \circ \end{smallmatrix}$$

con la relación $\lambda\mu = 0$. Considerando el par de torsión inducido $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ en $\text{mod } B$, tenemos que la única sucesión de conexión en este caso es

$$0 \longrightarrow 010 \longrightarrow 011 \longrightarrow 001 \longrightarrow 0$$

, como se ve en la siguiente figura:



Lema 3.3.3. Si $0 \longrightarrow Y \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$ es una sucesión de conexión, entonces existe un A -módulo inyectivo indescomponible $I(a)$ tal que $Y \cong \text{Hom}_A(T, I(a))$.

Demostración: Notar primero que $\tau^{-1}Y = X$ por ser las puntas de una sucesión casi escindida, luego Y es Ext-inyectivo en $\mathcal{Y}(T)$ por Proposición 2.1.15. Como $Y \in \mathcal{Y}(T)$, tenemos $Y = \text{Hom}_A(T, M)$ para algún $M \in \mathcal{T}(T)$, por el Teorema de inclinación.

Consideremos $f : M \rightarrow N$ una envolvente inyectiva de M en $\text{mod } A$ y la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow N/M \longrightarrow 0$. Como $N \in \mathcal{T}(T)$ por ser inyectivo y $\mathcal{T}(T)$ es cerrada por imágenes (por Proposición 2.1.5), $N/M \in \mathcal{T}(T)$ y por tanto todos los términos de la sucesión están en $\mathcal{T}(T)$. Por tanto, aplicando $\text{Hom}_A(T, -)$ a esta sucesión y viendo que $\text{Ext}_A^1(T, M) = 0$, tenemos la sucesión exacta corta con todos los términos en $\mathcal{Y}(T)$:

$$0 \longrightarrow Y = \text{Hom}_A(T, M) \xrightarrow{\text{Hom}_A(T, f)} \text{Hom}_A(T, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(T, N/M) \longrightarrow 0$$

Viendo a esta sucesión como un representante de un elemento de $\text{Ext}_B^1(\text{Hom}_A(T, N/M), Y)$ tenemos que corresponde al 0 ya que Y es Ext-inyectivo en $\mathcal{Y}(T)$. Por tanto, esta sucesión escinde, luego $\text{Hom}_A(T, f)$ es una sección y en consecuencia, aplicando $- \otimes_B T$ vemos que f es una sección, por teorema de inclinación.

Se sigue que M es isomorfo a un sumando directo de N , y como N es inyectivo, también lo es M . Finalmente, como Y es indescomponible, entonces $M \cong I(a)$ para algún vértice a en Q_A . $\square$

Este lema nos da la forma del término de la izquierda de una sucesión de conexión: está asociado a un inyectivo $I(a)$ vía $\text{Hom}_A(T, -)$.

Antes de probar los siguientes lemas, recordar que dado un A -módulo M , tomamos una presentación proyectiva minimal $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$, definimos el traspuesto como $\text{Tr}M := \text{coker } \text{Hom}_A(p_1, A) = \text{coker } p_1^t$ y $\tau^{-1}M := \text{Tr}DM$ (ver 1.6, 1.6.16) con $(-)^t = \text{Hom}_A(-, A)$.

Lema 3.3.4. Sea A un álgebra, T_A un módulo inclinante y $B = \text{End } T_A$. Sea $P(a)$ la cobertura proyectiva del módulo simple $S(a)_A$. Entonces

$$\text{Tr Hom}_A(P(a), T) \cong \text{Ext}_A^1(T, P(a))$$

Demostración: Como T_A inclinante, por (T3), existe una sucesión exacta corta

$$(*) \quad 0 \longrightarrow P(a) \longrightarrow T'_A \xrightarrow{f} T''_A \longrightarrow 0$$

con $T', T'' \in \text{add } T$. Aplicándole $\text{Hom}_A(T, -)$ tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(T, P(a)) \longrightarrow f_*^{\text{Hom}_A(T, f)} \text{Hom}_A(T, T'') \longrightarrow \text{Ext}_A^1(T, P(a)) \longrightarrow 0$$

por lo que $\text{Ext}_A^1(T, P(a)) \cong \text{coker Hom}_A(T, f)$.

Aplicándole $\text{Hom}_A(-, T)$ a $(*)$ nos da una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(T'', T) \xrightarrow{\text{Hom}_A(f, T)} \text{Hom}_A(T', T) \longrightarrow \text{Hom}_A(P(a), T) \longrightarrow 0$$

Como $\text{Hom}_A(T_i, T)$ es un sumando directo de $\text{Hom}_A(T, T) = \text{End } T_A = B$ para todo T_i sumando indecomponible de T , $\text{Hom}_A(T_i, T)$ es un B -módulo proyectivo para todo T_i , luego $\text{Hom}(T', T)$ y $\text{Hom}(T'', T)$ son B -módulos proyectivos por estar T', T'' en $\text{add } T$ y ser Hom aditivo. Sigue que la sucesión anterior es una resolución proyectiva del B -módulo a izquierda $\text{Hom}_A(P(a), T)$, por lo que $\text{Tr Hom}_A(P(a), T) = \text{coker Hom}_A(f, T)^t$.

Finalmente, como $\text{Hom}_A(T, T) \cong \text{Hom}_B(\text{Hom}_A(T, T), \text{Hom}_A(T, T))$ y los funtores Hom son aditivos, tenemos $\text{Hom}_A(T, T_0) \cong \text{Hom}_B(\text{Hom}_A(T_0, T), \text{Hom}_A(T, T))$ para todo $T_0 \in \text{add } T$. Luego tenemos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_B(\text{Hom}_A(T', T), \text{Hom}_A(T, T)) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_A(T, T') \\ \text{Hom}_A(f, T)^t \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_A(T, f) \\ \text{Hom}_B(\text{Hom}_A(T'', T), \text{Hom}_A(T, T)) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_A(T, T'') \end{array}$$

lo que prueba $\text{Hom}_A(f, T)^t \cong \text{Hom}_A(T, f)$ y por tanto

$$\text{Tr Hom}_A(P(a), T) = \text{coker Hom}_A(f, T)^t = \text{coker Hom}_A(T, f) \cong \text{Ext}_A^1(T, P(a))$$

probando el isomorfismo buscado y por tanto el lema. $\square$

El siguiente lema junto a la Proposición 1.6.20 nos da la forma del término de la derecha de una sucesión de conexión: está asociado al proyectivo $P(a)$ correspondiente al mismo vértice a vía $\text{Ext}_A^1(T, -)$, cumpliendo que $P(a) \notin \text{add } T$.

Lema 3.3.5 (de conexión). Sea A un álgebra, T_A un módulo inclinante y $B = \text{End } T_A$. Sea $P(a)$ la cobertura proyectiva del módulo simple $S(a)_A$, $I(a)$ su envolvente inyectiva. Entonces:

$$\tau^{-1} \text{Hom}_A(T, I(a)) \cong \text{Ext}_A^1(T, P(a))$$

En particular, $P(a) \in \text{add } T$ si y sólo si $\text{Hom}_A(T, I(a))$ es un B -módulo inyectivo.

Demostración: Para probar la primera afirmación, usamos el lema anterior 3.3.4 y la definición de τ^{-1} , tenemos

$$\text{Ext}_A^1(T, P(a)) \cong \text{Tr Hom}_A(P(a), T) \cong \text{Tr } D \text{Hom}_A(T, I(a)) = \tau^{-1} \text{Hom}_A(T, I(a)).$$

La segunda afirmación sale fácil de la primera ya que un módulo proyectivo P está en $\text{add } T$ si y sólo si $P(a) \in \mathcal{T}(T) = \text{Gen } T$ si y sólo si $0 = \text{Ext}_A^1(T, P(a)) \cong \tau^{-1} \text{Hom}_A(T, I(a))$ si y sólo si $\text{Hom}_A(T, I(a))$ es inyectivo. $\square$

Como corolario simple del lema de conexión, tenemos una caracterización de los B -módulos proyectivos-inyectivos indescomponibles.

Corolario 3.3.6. *Si $P(a), I(a) \in \text{add } T$, entonces $\text{Hom}_A(T, I(a))$ es un B -módulo proyectivo e inyectivo y, recíprocamente, todo B -módulo proyectivo e inyectivo indescomponible es de esta forma.*

Demostración: Para la primera afirmación usamos que $P(a) \in \text{add } T$ implica que $\text{Hom}_A(T, I(a))$ es inyectivo, por el lema anterior (3.3.5), y que $I(a) \in \text{add } T$ implica que $\text{Hom}_A(T, I(a))$ es proyectivo por el Lema 2.3.1(b).

Para la segunda afirmación, si N es un B -módulo proyectivo indescomponible, de nuevo por el Lema 2.3.1 se tiene que $N = \text{Hom}_A(T, T_i)$ con $T_i \in \text{add } T$ indescomponible, y en particular $N \in \mathcal{Y}(T)$. Por tanto, tomando $e : T_i \rightarrow E$ una envolvente inyectiva, tenemos que $\text{Hom}_A(T, e) : \text{Hom}_A(T, T_i) \rightarrow \text{Hom}_A(T, E)$ es un monomorfismo que escinde por ser $\text{Hom}_A(T, T_i) = N$ inyectivo; o sea, es una sección. Como T_i y E pertenecen a $\mathcal{T}(T)$, tenemos que e es isomorfo a $\text{Hom}_A(T, e) \otimes_B T$ y por tanto e es también una sección. Esto muestra que T_i es inyectivo, digamos $T_i = I(a)$. Por el lema anterior 3.3.5, esto implica que $P(a) \in \text{add } T$.

Finalmente, como $T_i, I(a) \in \mathcal{T}(T)$ y $\text{Hom}_A(T, -)$ induce una equivalencia entre $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{Y}(T)$, $I(a) \cong T_i$ y por tanto $I(a) \in \text{add } T$ y N_B es de la forma buscada. $\square$

Para terminar la caracterización de las sucesiones de conexión, veamos que pasa con el término del medio. Resulta que lo mejor que podemos lograr es aproximarlos a partir de su sucesión canónica.

Proposición 3.3.7. *Sea A un álgebra, T_A un módulo inclinante y $B = \text{End } T_A$. Sean $P(a), I(a)$ y $S(a)$, con $P(a) \notin \text{add } T$. Consideremos la sucesión de conexión*

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(T, I(a)) \xrightarrow{u} E_B \xrightarrow{v} \text{Ext}_A^1(T, P(a)) \longrightarrow 0$$

La sucesión canónica de E_B en el par de torsión $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ es entonces

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P(a)) \longrightarrow E_B \longrightarrow \text{Hom}_A(T, I(a)/S(a)) \longrightarrow 0$$

Demostración: Como $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ es un par de torsión, o bien $S(a) \in \mathcal{T}(T)$ o bien $S(a) \in \mathcal{F}(T)$. Veremos que pasa en cada caso:

(i) Supongamos $S(a) \in \mathcal{T}(T)$, o sea, $\text{Ext}_A^1(T, S(a)) = 0$.

Esto implica que la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow S(a) \longrightarrow I(a) \longrightarrow I(a)/S(a) \longrightarrow 0$ induce una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(T, S(a)) \xrightarrow{f} \text{Hom}_A(T, I(a)) \xrightarrow{g} \text{Hom}_A(T, I(a)/S(a)) \longrightarrow 0$$

Por otro lado, $P(a) \notin \text{add } T \implies P(a) \notin \mathcal{T}(T)$, por lo que $P(a) \neq tP(a)$ (donde t es el idempotente radical asociado al par de torsión $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$, ver 2.1.5) y por tanto $tP(a) \subseteq \text{rad } P(a)$ (por [3, Proposición I.4.5(c)] $\text{rad } P(a)$ es el único submódulo maximal propio de $P(a)$), lo que nos da un isomorfismo k -lineal $\text{Hom}_A(T, P(a)) \cong \text{Hom}_A(T, \text{rad } P(a))$. Todo morfismo $T \rightarrow P(a)$ se factoriza a través de $\iota : tP(a) \rightarrow P(a)$ por lo que $\text{Hom}_A(T, P(a)) \cong \text{Hom}_A(T, tP(a))$ por restricción. Luego, la inclusión $\iota_0 : tP(a) \rightarrow \text{rad } P(a)$ induce un mapa $\hat{\iota}_0 : \text{Hom}_A(T, tP(a)) \rightarrow \text{Hom}_A(T, \text{rad } P(a))$ dado por $f \mapsto \iota_0 \circ f$ que es inyectivo pues $\iota_0 \circ f = 0 \implies f(T) \subseteq \ker \iota_0 = \{0\} \implies f = 0$ y sobreyectiva pues dada $g : T \rightarrow \text{rad } P(a)$, tomo $j : \text{rad } P(a) \rightarrow P(a)$ la inclusión y tengo que $j \circ g : T \rightarrow P(a)$ por lo que $\exists \hat{g} : T \rightarrow tP(a)$ tal que $j \circ g = \iota \circ \hat{g}$ y notando que $\iota = j \circ \iota_0$ tengo $j \circ g = j \circ (\iota_0 \circ \hat{g})$ por lo que, por ser j inyectiva, $\hat{\iota}_0(\hat{g}) = g$. Sigue que $\text{Hom}_A(T, \text{rad } P(a)) \cong \text{Hom}_A(T, tP(a)) \cong \text{Hom}_A(T, P(a))$. Sigue que la sucesión exacta corta $0 \rightarrow \text{rad } P(a) \rightarrow P(a) \rightarrow S(a) \rightarrow 0$ en $\text{mod } A$ induce una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(T, S(a)) \xrightarrow{h} \text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P(a)) \xrightarrow{k} \text{Ext}_A^1(T, P(a)) \longrightarrow 0 \quad (*)$$

Ahora, tomando la sucesión exacta $0 \rightarrow t \text{rad } P(a) \rightarrow \text{rad } P(a) \rightarrow \text{rad } P(a)/t \text{rad } P(a) \rightarrow 0$, viendo la sucesión exacta larga inducida por $\text{Ext}_A^1(T, -)$

$$\text{Ext}_A^1(T, t \text{rad } P(a)) \rightarrow \text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P(a)) \rightarrow \text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P(a)/t \text{rad } P(a)) \rightarrow \text{Ext}_A^2(T, t \text{rad } P(a))$$

y usando que, como $t \text{rad } P(a) \in \mathcal{T}(T)$, entonces $\text{Ext}_A^1(T, t \text{rad } P(a)) = 0$, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 = \text{Ext}_A^1(T, t \text{rad } P(a)) \rightarrow \text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P(a)) \rightarrow \text{Ext}_A^1(T, \frac{\text{rad } P(a)}{t \text{rad } P(a)}) \rightarrow \text{Ext}_A^2(T, t \text{rad } P(a)) = 0$$

donde el último término es 0 pues $\text{pd } T \leq 1$. Esto nos da un isomorfismo:

$$\text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P(a)) \cong \text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P(a)/t \text{rad } P(a)).$$

Luego, la sucesión $(*)$ no escinde, pues si lo hiciera tendríamos un morfismo del B -módulo $\text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P(a)) \cong \text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P(a)/t \text{rad } P(a))$ al B -módulo $\text{Hom}_A(T, S(a))$; pero el primero es de torsión, por Teorema 2.3.8, ya que $\text{rad } P(a)/t \text{rad } P(a)$ es libre de torsión en A , y el segundo es libre de torsión, de nuevo por inclinación, ya que estamos asumiendo $S(a) \in \mathcal{T}(T)$. Esto sería una contradicción.

En particular, k no es una retracción y como la sucesión de conexión dada es casi escindida (por definición), v es casi escindida minimal a derecha y por tanto existe $f' : \text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P(a)) \rightarrow E$ tal que $k = v f'$. Pasando a los kernels, tenemos que existe un morfismo $\varphi : \text{Hom}_A(T, S(a)) \rightarrow \text{Hom}_A(T, I(a))$ tal que $u \varphi = f' h$.

Dado que, como k -espacio vectorial, $\text{Hom}_B(\text{Hom}_A(T, S(a)), \text{Hom}_A(T, I(a)))$ es isomorfo a $\text{Hom}_A(S(a), I(a)) \cong k$, podemos tomar $\varphi = f$ reescalando h , de forma que

tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(T, S(a)) & \xrightarrow{h} & \text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P(a)) & \xrightarrow{k} & \text{Ext}_A^1(T, P(a)) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f & & \downarrow f' & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(T, I(a)) & \xrightarrow{u} & E & \xrightarrow{v} & \text{Ext}_A^1(T, P(a)) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow g & & \downarrow g' & & \\
& & \text{Hom}_A(T, I(a)/S(a)) & = & \text{Hom}_A(T, I(a)/S(a)) & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Donde por [2, Teorema III.5.9] tenemos que E es el pushout de f y h y como $g \circ f = 0 = 0 \circ h$ (donde los morfismos 0 son $0 : \text{Hom}_A(T, S(a)) \rightarrow \text{Hom}_A(T, I(a)/S(a))$ y $0 : \text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P(a)) \rightarrow \text{Hom}_A(T, I(a)/S(a))$ respectivamente), existe un morfismo $g' : E \rightarrow \text{Hom}_A(T, I(a)/S(a))$ tal que $g' \circ u = g$ y $g' \circ f' = 0$. Además, g' es un epimorfismo por serlo g y por tanto la columna del medio nos da la forma buscada para la sucesión canónica de E .

(ii) Supongamos ahora que $S(a) \in \mathcal{F}(T)$. Esto nos dice que $\text{Hom}_A(T, S(a)) = 0$ y por tanto la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow S(a) \longrightarrow I(a) \longrightarrow I(a)/S(a) \longrightarrow 0$ induce (aplicando el funtor $\text{Hom}_A(T, -)$) la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(T, I(a)) \longrightarrow \text{Hom}_A(T, I(a)/S(a)) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(T, S(a)) \longrightarrow 0$$

Igual que antes, tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P(a)) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(T, P(a)) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(T, S(a)) \longrightarrow 0$$

donde ahora tenemos $\text{Hom}_A(T, S(a)) = 0$. Razonando de la misma forma que en (i) tenemos que la sucesión no escinde y por tanto induce el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
& \text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P(a)) & = & \text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P(a)) & & & \\
& \vdots & & \downarrow & & & \\
0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(T, I(a)) & \xrightarrow{u} & E & \xrightarrow{v} & \text{Ext}_A^1(T, P(a)) \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(T, I(a)) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(T, I(a)/S(a)) & \longrightarrow & \text{Ext}_A^1(T, S(a)) \longrightarrow 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & 0 & & 0
\end{array}$$

Donde ahora el [2, Teorema III.5.5] y la propiedad universal del pullback nos da el morfismo punteado.

De nuevo viendo la columna del medio tenemos el resultado buscado. $\square$

3.4. Módulos inclinantes separantes y escindentes

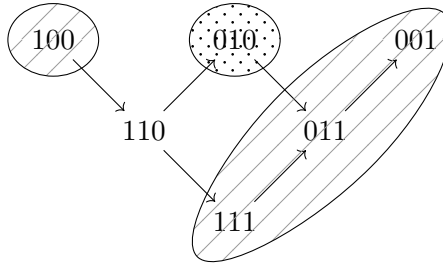
Es de nuestro interés ahora estudiar los módulos inclinantes que inducen pares de torsión escindentes en $\text{mod } A$ o en $\text{mod } B$, es decir aquellos A -módulos inclinantes T para los que todos los A -módulos indescomponibles están en $\mathcal{T}(T)$ o en $\mathcal{F}(T)$, que se llamarán separantes, y aquellos para los que todos los B -módulos indescomponibles están en $\mathcal{X}(T)$ o en $\mathcal{Y}(T)$, conocidos como escindentes. Veremos caracterizaciones de las sucesiones casi escindidas en $B = \text{End } T_A$ para módulos inclinantes escindentes y un criterio para ver cuando un módulo inclinante es separante o escindente.

Definición 3.4.1. Sea A un álgebra, T_A un módulo inclinante y $B = \text{End } T_A$. Decimos que

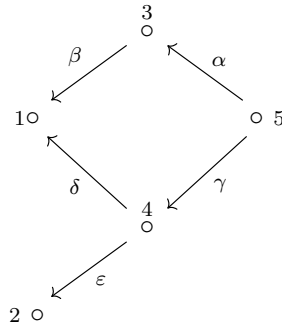
- (a) T_A es separante si el par de torsión inducido $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ en $\text{mod } A$ es escindente.
- (b) T_A es escindente si el par de torsión inducido $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ en $\text{mod } B$ es escindente.

Ejemplo 3.4.2. La Proposición 2.2.11 nos dice que los módulos APR-inclinantes son separantes.

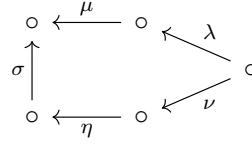
En el Ejemplo 3.3.2, tenemos que T es un módulo escindente pero no es separante pues el par de torsión que induce en $\text{mod } A$ no es escindente:



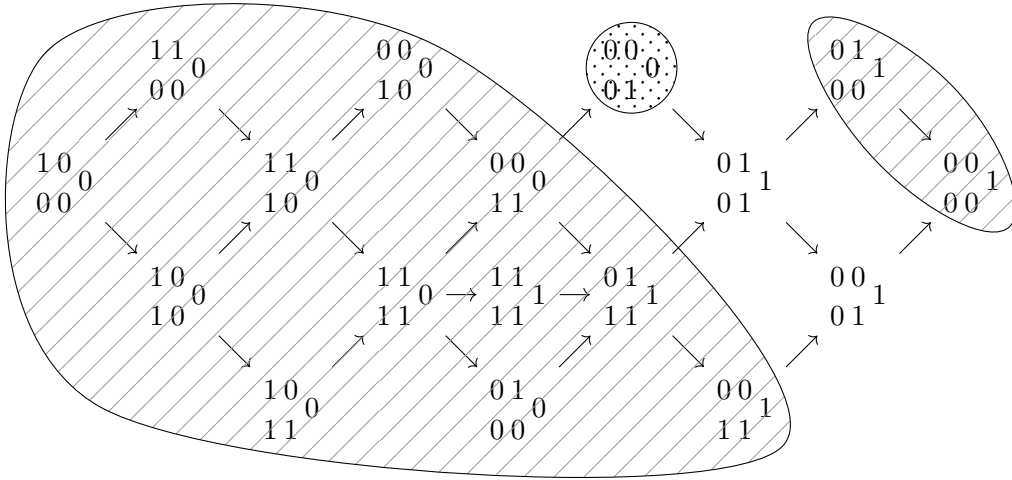
Consideremos ahora el álgebra B dada por el carcaj



ligado por $\alpha\beta = \gamma\delta$ y $\gamma\varepsilon = 0$. Consideremos el B -módulo APR-inclinante asociado al vértice 2, $T[2]_B$. Luego, $C = \text{End } T[2]_B$ está dada por el carcaj



ligado por $\lambda\mu = \nu\eta\sigma$. El par de torsión $(\mathcal{X}(T[2]), \mathcal{Y}(T[2]))$ inducido en $\text{mod } C$ es el siguiente:

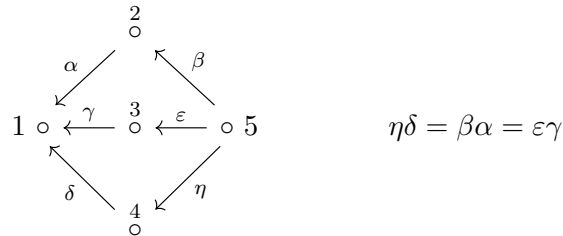


Por lo tanto $T[2]$ es un módulo inclinante separante (por ser APR-inclinante) pero no escindente.

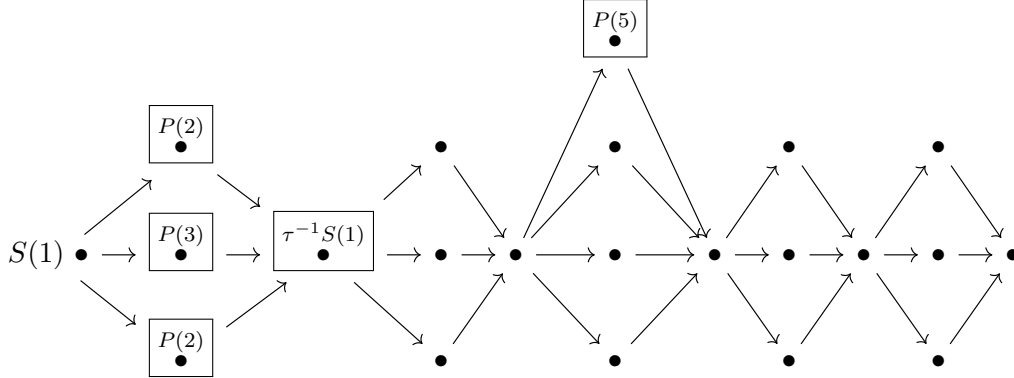
Observación 3.4.3. Si T_A es un módulo inclinante escindente, todo B -módulo es imagen de un A -módulo indescomponible bajo alguno de los funtores de inclinación $\text{Hom}_A(T, -)$ o $\text{Ext}_A^1(T, -)$, por tanto B tiene menos indescomponibles que A . En particular, si A es de representación finita, también lo es B .

Esta última parte de la observación es bastante fuerte, ya que en general el tipo de representación no se mantiene bajo inclinación como se puede ver en el siguiente ejemplo.

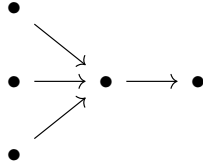
Ejemplo 3.4.4. Consideremos el álgebra A dada por el siguiente carcaj con relaciones



El carcaj de Auslander-Reiten de A queda:



Como este es finito, A es de tipo de representación finita, pero si tomamos el módulo APR-inclinante $T[1]_A$ asociado al pozo 1, que es la suma directa de los módulos indecomponibles marcados en el carcaj de A-R, tenemos que $\text{End}_A(T[1]) = B$ es isomorfa al álgebra de caminos (sin relaciones) dada por el carcaj:



Como B es un álgebra de caminos sin relaciones y su grafo subyacente no es Dynkin, B es de representación infinita por el Teorema 1.3.5.

Veamos ahora las sucesiones escindidas en $\text{mod } B$, para $B = \text{End } T_A$ con T inclinante escindente:

Proposición 3.4.5. *Sea A un álgebra, T_A un módulo inclinante escindente y $B = \text{End } T_A$. Entonces toda sucesión casi escindida en $\text{mod } B$ está toda contenida en $\mathcal{X}(T)$ ó en $\mathcal{Y}(T)$, o tiene la forma*

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(T, I) \longrightarrow \text{Hom}_A(T, I/\text{soc } I) \oplus \text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(T, P) \longrightarrow 0$$

donde $P = P(a) \notin \text{add } T$ e $I = I(a)$.

Demostración: Sea $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ una sucesión casi escindida en $\text{mod } B$. Como $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ es un par de torsión escindente, o bien esta sucesión está toda contenida en $\mathcal{X}(T)$, o bien en $\mathcal{Y}(T)$, o $E' \in \mathcal{Y}(T)$ y $E'' \in \mathcal{X}(T)$, en cuyo caso tenemos una sucesión de conexión y por los lemas 3.3.3 y 3.3.5 es de la forma

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(T, I) \longrightarrow E_B \longrightarrow \text{Ext}_A^1(T, P) \longrightarrow 0$$

con $P(a) \notin \text{add } T$, $a \in (Q_A)_0$ tal que $P = P(a)$ e $I = I(a)$. Más aún, por Proposición 3.3.7, la sucesión canónica de E en $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ es como sigue:

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P) \longrightarrow E_B \longrightarrow \text{Hom}_A(T, I/\text{soc } I) \longrightarrow 0$$

Como $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ es escindente, la sucesión anterior escinde por Proposición 2.1.11 y $E \cong \text{Ext}_A^1(T, \text{rad } P) \oplus \text{Hom}_A(T, I / \text{soc } I)$. $\square$

Siguiendo con las sucesiones casi escindidas, veamos que pasa con la imagen bajo los funtores de inclinación de una sucesión casi escindida en $\text{mod } A$ que está toda contenida en $\mathcal{T}(T)$ o $\mathcal{F}(T)$.

Lema 3.4.6. *Sea A un álgebra, T_A un módulo inclinante escindente y $B = \text{End } T_A$. Sea $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una sucesión casi escindida en $\text{mod } A$.*

(a) *Si $L, M, N \in \mathcal{T}(T)$, entonces*

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(T, L) \xrightarrow{\text{Hom}_A(T, f)} \text{Hom}_A(T, M) \xrightarrow{\text{Hom}_A(T, g)} \text{Hom}_A(T, N) \longrightarrow 0$$

es una sucesión casi escindida en $\text{mod } B$ contenida en $\mathcal{Y}(T)$.

(b) *Si $L, M, N \in \mathcal{F}(T)$, entonces*

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_A^1(T, L) \xrightarrow{\text{Ext}_A^1(T, f)} \text{Ext}_A^1(T, M) \xrightarrow{\text{Ext}_A^1(T, g)} \text{Ext}_A^1(T, N) \longrightarrow 0$$

es una sucesión casi escindida en $\text{mod } B$ contenida en $\mathcal{X}(T)$.

Demostración: Probaremos (a). Como $L \in \mathcal{T}(T)$, $\text{Ext}_A^1(T, L) = 0$ y la sucesión de B -módulos

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(T, L) \xrightarrow{\text{Hom}_A(T, f)} \text{Hom}_A(T, M) \xrightarrow{\text{Hom}_A(T, g)} \text{Hom}_A(T, N) \longrightarrow 0$$

es exacta. Si mostramos que $\text{Hom}_A(T, f)$ y $\text{Hom}_A(T, g)$ son irreducibles, por [3, Teorema IV.1.13] tendríamos que esta sucesión es casi escindida, ya que $\text{Hom}_A(T, N)$ y $\text{Hom}_A(T, L)$ son B -módulos indescomponibles por ser N y L indescomponibles en $\text{mod } A$.

Para ver que $\text{Hom}_A(T, f)$ es irreducible primero notar que como f no es retracción ni sección y $\text{Hom}_A(T, -)$ induce una equivalencia de categorías entre $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{Y}(T)$, $\text{Hom}_A(T, f)$ no es retracción ni sección.

Supongamos ahora que $\text{Hom}_A(T, f)$ se factoriza a través de un B -módulo Y como $\text{Hom}_A(T, f) = vu$. Como $u \neq 0$, pues $\text{Hom}_A(T, f) \neq 0$, tenemos que $Y \notin \mathcal{X}(T)$ y como el par $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ es escindente, $Y \in \mathcal{Y}(T)$. Por tanto existen $E \in \mathcal{T}(T)$ tal que $Y \cong \text{Hom}_A(T, E)$, $u' : L \rightarrow E$, $v' : E \rightarrow M$ tal que $u = \text{Hom}_A(T, u')$ y $v = \text{Hom}_A(T, v')$. Sigue que $f = v'u'$ y por ser f irreducible se tiene que o u' es retracción o v' es sección. Luego u es retracción o v es sección. Esto prueba que $\text{Hom}_A(T, f)$ es irreducible y análogamente probamos que $\text{Hom}_A(T, g)$ es irreducible. $\square$

Veremos ahora una caracterización de los módulos inclinantes separantes y escindentes. Precisamos el siguiente lema.

Lema 3.4.7. *Sea A un álgebra, T_A un módulo inclinante, $B = \text{End } T_A$, $M \in \mathcal{T}(T)$ y $N \in \mathcal{F}(T)$. Para cada $k \geq 1$ existe un isomorfismo*

$$\text{Ext}_A^k(M, N) \cong \text{Ext}_B^{k-1}(\text{Hom}_A(T, M), \text{Ext}_A^1(T, N))$$

Demostración: En esta demostración usaremos la notación ${}_A(M, N)$ y ${}_A^j(M, N)$ para $\text{Hom}_A(M, N)$ y $\text{Ext}_A^j(M, N)$, respectivamente, en las sucesiones exactas largas.

Sea $0 \rightarrow N \rightarrow I \rightarrow N' \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta con I inyectivo. Tenemos $I \in \mathcal{T}(T)$, luego $N' \in \mathcal{T}(T)$ y por tanto, aplicándole $\text{Hom}_A(T, -)$ a la sucesión exacta corta anterior nos da la sucesión exacta corta en $\text{mod } B$:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(T, I) \longrightarrow \text{Hom}_A(T, N') \longrightarrow \text{Ext}_A^1(T, N) \longrightarrow 0$$

Aplicándole $\text{Hom}_B(\text{Hom}_A(T, M), -)$, tenemos la sucesión exacta larga:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow {}_B({}_A(T, M), {}_A(T, I)) \longrightarrow {}_B({}_A(T, M), {}_A(T, N')) \rightarrow {}_B({}_A(T, M), {}_A^1(T, N)) \\ &\longrightarrow {}_B^1({}_A(T, M), {}_A(T, I)) \rightarrow \cdots \\ \cdots &\longrightarrow {}_B^j({}_A(T, M), {}_A(T, I)) \longrightarrow {}_B^j({}_A(T, M), {}_A(T, N')) \rightarrow {}_B^j({}_A(T, M), {}_A^1(T, N)) \\ &\longrightarrow {}_B^{j+1}({}_A(T, M), {}_A(T, I)) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Como $\text{Hom}_A(T, -)$ induce una equivalencia entre las subcategorías $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{Y}(T)$ y $M, I \in \mathcal{T}(T)$, por Lema 1.5.6 tenemos que vale:

$$\text{Ext}_B^j(\text{Hom}_A(T, M), \text{Hom}_A(T, I)) \cong \text{Ext}_A^j(M, I) = 0 \quad \forall j \geq 1$$

donde la última igualdad es por ser I inyectivo. Esto nos da dos cosas:

(I) Una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow {}_B({}_A(T, M), {}_A(T, I)) \rightarrow {}_B({}_A(T, M), {}_A(T, N')) \rightarrow {}_B({}_A(T, M), {}_A^1(T, N)) \rightarrow 0$$

(II) Un isomorfismo para todo $j \geq 1$

$$\text{Ext}_B^j(\text{Hom}_A(T, M), \text{Ext}_A^1(T, N)) \cong \text{Ext}_B^j(\text{Hom}_A(T, M), \text{Hom}_A(T, N'))$$

Tras aplicarle ahora $\text{Hom}_A(M, -)$ a la sucesión $0 \rightarrow N \rightarrow I \rightarrow N' \rightarrow 0$, vemos que la sucesión exacta larga de cohomología inducida nos da:

(I') Una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M, I) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, N') \longrightarrow \text{Ext}_A^1(M, N) \longrightarrow 0$$

ya que $\text{Hom}_A(M, N) = 0$, pues $M \in \mathcal{T}(T)$ y $N \in \mathcal{F}(T)$, y $\text{Ext}_A^1(M, I) = 0$ por ser I inyectivo.

(II') Isomorfismos $\text{Ext}_A^j(M, N') \cong \text{Ext}_A^{j+1}(M, N)$ para todo $j \geq 1$, ya que por ser I inyectivo $\text{Ext}_A^j(M, I) = 0 \forall j \geq 1$.

Usando (I), (I') y Lema 2.3.1 ($M, I, N' \in \mathcal{T}(T)$), tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & {}_B({}_A(T, M), {}_A(T, I)) & \rightarrow & {}_B({}_A(T, M), {}_A(T, N')) & \rightarrow & {}_B({}_A(T, M), {}_A^1(T, N)) \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, I) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, N') & \longrightarrow & \text{Ext}_A^1(M, N) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Por tanto $\text{Hom}_B(\text{Hom}_A(T, M), \text{Ext}_A^1(T, N)) \cong \text{Ext}_A^1(M, N)$, que es el enunciado para $k = 1$ (ya que $\text{Hom}_B(-, -) = \text{Ext}_B^0(-, -)$).

Ahora, usando (II), (II') y de nuevo el lema 1.5.6 con $M, N' \in \mathcal{T}(T)$; tenemos para $j \geq 1$

$$\begin{aligned} \text{Ext}_B^j(\text{Hom}_A(T, M), \text{Ext}_A^1(T, N)) &\cong \text{Ext}_B^j(\text{Hom}_A(T, M), \text{Hom}_A(T, N')) \\ &\cong \text{Ext}_A^j(M, N') \cong \text{Ext}_A^{j+1}(M, N) \end{aligned}$$

Conseguimos entonces el isomorfismo del enunciado para $k > 1$. $\square$

Teorema 3.4.8 (Hoshino). *Sea A un álgebra, T_A un módulo inclinante, $B = \text{End } T_A$.*

(a) *T_A es separante si y sólo si $\text{pd}_B X = 1$ para todo $X_B \in \mathcal{X}(T)$.*

(b) *T_A es escindente si y sólo si $\text{id}_A N = 1$ para todo $N_A \in \mathcal{F}(T)$.*

Demostración: Notar primero que T_A inclinante implica ${}_B T$ inclinante y entonces basta con probar (b).

($\implies$) Supongamos entonces que $\text{id}_A N = 1 \ \forall N_A \in \mathcal{F}(T)$ y sean $X \in \mathcal{X}(T), Y \in \mathcal{Y}(T)$. Entonces $X \cong \text{Ext}_A^1(T, N)$ e $Y \cong \text{Hom}_A(T, M)$ para algún $N \in \mathcal{F}(T), M \in \mathcal{T}(T)$. Como $\text{Ext}_A^2(-, N) = 0$ pues $\text{id}_A N = 1$, por el Lema 3.4.7 tenemos:

$$\text{Ext}_B^1(Y, X) \cong \text{Ext}_B^1(\text{Hom}_A(T, M), \text{Ext}_A^1(T, N)) \cong \text{Ext}_A^2(M, N) = 0.$$

La Proposición 2.1.11 implica entonces que el par $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ es escindente, o sea, T es escindente.

($\impliedby$) Supongamos ahora que $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ es escindente y sea $N \in \mathcal{F}(T)$. Consideremos una resolución inyectiva de N :

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^1} I^1 \xrightarrow{d^2} I^2 \longrightarrow \dots$$

Si tomamos $L^0 := \text{Im } d^1 = \ker d^2, L^1 := \text{Im } d^2$, tenemos una sucesión exacta corta $0 \rightarrow N \rightarrow I^0 \rightarrow L^0 \rightarrow 0$. Aplicándole $\text{Ext}_A^1(L^1, -)$ a esta sucesión exacta corta tenemos:

$$\dots \longrightarrow \text{Ext}_A^1(L^1, I^0) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(L^1, L^0) \longrightarrow \text{Ext}_A^2(L^1, N) \longrightarrow \text{Ext}_A^2(L^1, I^0) \longrightarrow \dots$$

y como I^0 es inyectivo, $\text{Ext}_A^1(L^1, L^0) \cong \text{Ext}_A^2(L^1, N)$. Luego, por Lema 3.4.7:

$$\text{Ext}_A^1(L^1, L^0) \cong \text{Ext}_A^2(L^1, N) \cong \text{Ext}_B^1(\text{Hom}_A(T, L^1), \text{Ext}_A^1(T, N)) = 0$$

donde la última igualdad es por Proposición 2.1.11, ya que $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ es escindente, $\text{Hom}_A(T, L^1) \in \mathcal{Y}(T)$ y $\text{Ext}_A^1(T, N) \in \mathcal{X}(T)$.

Esto implica que la sucesión exacta corta $0 \rightarrow L^0 \rightarrow I^1 \rightarrow L^1 \rightarrow 0$ escinde, luego $I^1 \cong L^0 \oplus L^1$ y L^0 es inyectivo por ser sumando directo de un inyectivo.

Sigue que $0 \rightarrow N \rightarrow I^0 \rightarrow L^0 \rightarrow 0$ es una resolución inyectiva de N , por lo que $\text{id}_A N \leq 1$ y como $N \in \mathcal{F}(T)$, no puede ser inyectivo, luego $\text{id}_A N \geq 1$ y tenemos la igualdad buscada. $\square$

Corolario 3.4.9. *Si $\text{gl.dim } A \leq 1$, entonces todo A -módulo inclinante es escindente.*

Demostración: Como $\text{gl.dim } A \leq 1$, en particular $\text{id}_A M \leq 1$ para todo A -módulo M , y si T_A es inclinante, todo $N \in \mathcal{F}(T)$ es no-inyectivo, luego $\text{id}_A N \geq 1$ y tenemos $\text{id}_A N = 1$ para todo $N \in \mathcal{F}(T)$. $\square$

Este corolario va a ser de gran utilidad más adelante, cuando centremos nuestra atención en álgebras hereditarias, ya que estas tienen dimensión global menor o igual a 1. Que el par inducido en las álgebras obtenidas inclinando un álgebra hereditaria sea escindente nos dará un buen control sobre estas.

3.5. Pares de torsión inducidos por módulos inclinantes

En esta sección vamos a ver cuando un par de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ en $\text{mod } A$ proviene de un módulo inclinante T_A . Como la clase de torsión inducida por un módulo inclinante es $\text{Gen } T$ y la libre de torsión es $\text{Cogen } \tau T$, empezaremos viendo cuando $\text{Gen } U$ y $\text{Cogen } V$ son de torsión y libre de torsión, respectivamente, para dos A -módulos U y V .

Obtendremos luego una caracterización de los pares de torsión que provienen de un módulo inclinante (condición necesaria y suficiente) y usando esto para los pares de torsión $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ inducidos en $\text{mod } B$, veremos como encontrar un álgebra A y un A -módulo inclinante T de forma que $\text{End } T_A = B$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}(T_A)$ e $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(T_A)$.

Definición 3.5.1. Un A -módulo U se dice Gen-minimal si para toda descomposición $U = U' \oplus U''$ se tiene $U' \notin \text{Gen } U''$. Dualmente, se dice Cogen-minimal si $U' \notin \text{Cogen } U''$ para toda tal descomposición.

Lema 3.5.2. Sea A un álgebra.

- (a) Si U es un A -módulo Gen-minimal, $\text{Gen } U$ es una clase de torsión si y sólo si U es Ext-proyectivo en $\text{Gen } U$.
- (a) Si V un A -módulo Cogen-minimal, $\text{Cogen } V$ es una clase libre de torsión si y sólo si V es Ext-inyectivo en $\text{Cogen } V$.

Demostración: Probaremos (a), la demostración de (b) es dual.

($\implies$) Queremos ver que U es Ext-proyectivo en $\text{Gen } U$, o sea $\text{Ext}_A^1(U, M) = 0$ para todo $M \in \text{Gen } U$. Para esto supongamos $\exists M \in \text{Gen } U : \text{Ext}_A^1(U, M) \neq 0$

Tomando un sumando indescomponible U_0 de U tal que $\text{Ext}_A^1(U_0, M) \neq 0$, tenemos una sucesión exacta corta (extensión) que no escinde

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} U_0 \longrightarrow 0$$

Como M y $U_0 \in \text{Gen } U$, que es una clase de torsión, entonces $E \in \text{Gen } U$ y existe un epimorfismo $p : U^m \rightarrow E$ para algún $m > 0$. Escribiendo $U^m = R \oplus U_0^m$ para algún A -módulo R , tenemos que $f = vp : U^m \rightarrow U_0$ se puede escribir como $f = [g, f_1, \dots, f_m]$ con $g \in \text{Hom}_A(R, U_0)$ y $f_i \in \text{End } U_0 \forall 1 \leq i \leq m$.

Como f es sobreyectiva, por serlo v y p , $U_0 = g(R) + \sum_{i=1}^m f_i(U_0)$. Como v no es retracción, ningún f_i es un isomorfismo y $f_i(U_0) \subseteq (\text{rad } \text{End } U_0) \cdot U_0 \forall 1 \leq i \leq m$, por lo que $U_0 = g(R) + (\text{rad } \text{End } U_0) \cdot U_0$. Luego, usando el Lema de Nakayama¹ tenemos que $U_0/g(R) = 0$, luego $U_0 = g(R)$ y g es un epimorfismo.

Como $g : R \rightarrow U_0$ epimorfismo, existe R_0 sumando directo indescomponible de R tal que $g|_{R_0} : R_0 \rightarrow U_0$ es un epimorfismo, luego $U_0 \in \text{Gen}(R_0)$. Escribiendo a U como suma directa de sus sumandos directos indescomponibles $U = U_0 \oplus (\bigoplus_k U_k)$, tenemos

¹Lema(Nakayama): Si M está en $\text{mod } A$ y $\text{rad } A \cdot M = M$, entonces $M = 0$.
En nuestro caso tomamos $M = U_0/g(R)$.

que

$$U_0^m \oplus R = U^m = U_0^m \oplus \left(\bigoplus_k U_k \right)^m$$

por lo que $R_0 \cong U_{k_0}$ para algún k_0 por la unicidad de la descomposición en indescomponibles.

Pero entonces $U_0 \in \text{Gen } U_{k_0} \subseteq \text{Gen}(\bigoplus_k U_k)$ y U no es Gen-minimal, lo cual es absurdo.
($\Leftarrow$) Es el contenido del Lema 2.1.13 $\square$

Para el siguiente corolario, recordamos la definición de módulo fiel.

Definición 3.5.3. Dado un A -módulo M , definimos su anulador a derecha como

$$\text{Ann}_A(M) := \{a \in A : Ma = 0\}.$$

Decimos que M es fiel si $\text{Ann}_A(M) = 0$.

Veamos un par de caracterizaciones equivalentes de los módulos fieles, que van a ser clave en la sección 4.4.

Lema 3.5.4. Sea A un álgebra y M un A -módulo. Son equivalentes:

- (a) M es fiel.
- (b) Para toda base $\{f_1, \dots, f_d\}$ del k -espacio vectorial $\text{Hom}_A(A, M)$, el mapa k -lineal $f = [f_1 \dots f_d]^t : A_A \rightarrow M^d$ es inyectivo.
- (c) $A_A \in \text{Cogen}(M_A)$.
- (d) $DA_A \in \text{Gen}(M_A)$.

Demostración: Sea $\{f_1, \dots, f_d\}$ una base del k -espacio vectorial $\text{Hom}_A(A, M)$. Considerando el morfismo $f = [f_1 \dots f_d]^t : A_A \rightarrow M^d$, vemos que $f(a) = 0$ para algún $a \in A$ si y sólo si $g(a) = 0$ para algún $a \in A$ y $g \in \text{Hom}_A(A, M)$, si y sólo si $Ma = 0$ para algún $a \in A$, por el isomorfismo $M_A \cong \text{Hom}_A(A, M)$. Por lo tanto M_A es fiel si y sólo si f es un monomorfismo. Esto prueba que (a), (b) y (c) son equivalentes.

Ahora, el anulador a derecha de M_A coincide con el anulador a izquierda de ${}_A DM$, $\{a \in A : aDM = 0\}$. Por tanto, M_A es fiel si y sólo si ${}_A A$ es cogenerado por ${}_A DM$ si y sólo si DA_A es generado por $D(DM) \cong M$. Esto prueba la equivalencia con (d). $\square$

Corolario 3.5.5. Sea A un álgebra y U un A -módulo Gen-minimal con $\text{Ann}_A(U) = 0$ tal que $\text{Gen } U$ es una clase de torsión. Entonces U es inclinante parcial.

Demostración: Como $U \in \text{Gen}(U)$, el lema 3.5.2 nos da que $\text{Ext}_A^1(U, U) = 0$. O sea, tenemos que U cumple (T2).

Como U es fiel, por Lema 3.5.4(d), tenemos $DA_A \in \text{Gen } U$. Por otro lado, como U es Ext-proyectivo en la clase de torsión $\text{Gen } U$, τU pertenece a la clase libre de torsión correspondiente por Proposición 2.1.15. Por tanto $\text{Hom}_A(DA, \tau U) = 0$ y, por Lema 1.6.21, $\text{pd } U \leq 1$. Luego U cumple (T1) y es inclinante parcial. $\square$

Lema 3.5.6. Sea A un álgebra.

- (a) Si $\mathcal{T} = \text{Gen } U$ es una clase de torsión, el número de isoclases de Ext-proyectivos indescomponibles y de Ext-inyectivos indescomponibles en $\mathcal{T}$ coincide y es finito.

(b) Si $\mathcal{F} = \text{Cogen } V$ es una clase libre de torsión, el número de isoclases de Ext-proyectivos indecomponibles y de Ext-inyectivos indecomponibles en $\mathcal{F}$ coincide y es finito.

Demostración: Probaremos (a).

Primero vemos que podemos suponer que U es Gen-minimal, pues si no lo fuera lo escribimos como $U = U' \oplus U''$ con $U' \in \text{Gen } U''$ y ponemos $U = U''$ si este es Gen-minimal, o continuamos descomponiendo U'' en caso que no, y este proceso termina por ser U finitamente generado.

Como U es fiel como $A/\text{Ann } U$ -módulo y $\mathcal{T} \hookrightarrow \text{mod}(A/\text{Ann } U) \hookrightarrow \text{mod } A$ pues todo módulo en $\mathcal{T} = \text{Gen } U$ es naturalmente un $A/\text{Ann } U$ -módulo, podemos también asumir que U es fiel (como A -módulo).

Tenemos entonces que U es inclinante parcial, por Corolario 3.5.5, y es Ext-proyectivo en $\mathcal{T}$, por Lema 3.5.2. Por Lema 3.5.4, tenemos que $DA \in \text{Gen } U$ y por tanto todos los A -módulos inyectivos indecomponibles son de torsión. Luego, por Proposición 2.1.15, coinciden con los Ext-inyectivos indecomponibles de $\mathcal{T}$.

Si $\{u_1, \dots, u_d\}$ es una k -base de $\text{Hom}_A(A, U)$, el morfismo $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{bmatrix} : A_A \rightarrow U_A^d$ es inyectivo, de nuevo por Lema 3.5.4.

Tomando $U' := \text{coker } u$ tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} U^d \longrightarrow U' \longrightarrow 0$$

Observar que $U' \in \mathcal{T}$ por ser esta una clase de torsión y $\text{pd } U' \leq 1$ por ser $\text{pd } U \leq 1$ (ver la sucesión exacta larga, usar Teorema 1.5.27 y que A_A es proyectivo).

Ahora, dado $M \in \mathcal{T}$ le aplicamos $\text{Hom}_A(-, M)$ a la sucesión exacta corta anterior y, como $\text{Ext}_A^1(U^d, M) = 0$ por ser U Ext-proyectivo en $\mathcal{T}$, obtenemos

$$0 \longrightarrow {}_A(U', M) \longrightarrow {}_A(U^d, M) \xrightarrow{{}_A(u, M)} {}_A(A, M) \longrightarrow {}_A^1(U', M) \longrightarrow 0$$

Como $M \in \mathcal{T} = \text{Gen } U$, $\exists p : U^m \rightarrow M$ epimorfismo para algún $m > 0$ y como A_A es proyectivo, $\text{Hom}_A(A, p) : \text{Hom}_A(A, U^m) \rightarrow \text{Hom}_A(A, M)$ es también un epimorfismo. Por la definición de u (usando que los u_i forman una base de $\text{Hom}_A(A, U)$) tenemos que $\text{Hom}_A(u, U^m)$ es un epimorfismo y por tanto también lo es $\text{Hom}_A(u, p)$, que es la composición $\text{Hom}_A(u, M) \circ \text{Hom}_A(U^d, p)$. Esto muestra que $\text{Hom}_A(u, M)$ es sobreyectivo, por lo que, viendo la sucesión exacta anterior, $\text{Ext}_A^1(U', M) = 0$ y como $M \in \mathcal{T}$ era arbitrario, concluimos U' es Ext-proyectivo en $\mathcal{T}$.

Con esto veamos que $T_A = U \oplus U'$ es inclinante: Como $\text{pd } U \leq 1$ y $\text{pd } U' \leq 1$, se tiene $\text{pd } T \leq 1$; como U y U' son Ext-proyectivos en $\mathcal{T}$, $\text{Ext}_A^1(T, T) = 0$. Con esto tenemos (T1) y (T2). Finalmente, la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} U^d \longrightarrow U' \longrightarrow 0$ nos muestra que se cumple (T3) y por tanto T_A es inclinante.

Por la Proposición 2.2.5, $\mathcal{T}(T) = \text{Gen } T = \text{Gen } U = \mathcal{T}$ y por (v) de esa proposición, los Ext-proyectivos indecomponibles en $\mathcal{T}$ no isomorfos dos a dos coinciden con los sumandos directos indecomponibles de T no isomorfos dos a dos.

Finalmente, por Corolario 3.2.3, este número es igual al rango de $K_0(A)$ y por tanto al número de Ext-inyectivos indecomponibles en $\mathcal{T}$ no isomorfos dos a dos. $\square$

El siguiente teorema caracteriza los pares de torsión que son inducidos por un módulo inclinante.

Teorema 3.5.7. *Sea A un álgebra y $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ un par de torsión en $\text{mod } A$. Entonces existe un A -módulo inclinante T tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}(T)$ si y sólo si $\mathcal{T} = \text{Gen } M$ para algún A -módulo M y $\mathcal{T}$ contiene a los inyectivos.*

Demostración: Probemos el recíproco, ya que el directo es trivial. Sea entonces $\mathcal{T} = \text{Gen } M$ una clase de torsión que contiene a los inyectivos, con M un A -módulo. Tomemos $T_1, \dots, T_t$ un conjunto completo de Ext-proyectivos indescomponibles no isomorfos 2 a 2 en $\mathcal{T}$ y consideremos $T = \bigoplus_{i=1}^t T_i$.

Como cada T_i es Ext-proyectivo en $\mathcal{T}$, también lo es T y por tanto $\text{Ext}_A^1(T, T) = 0$. Por tanto T cumple (T1).

Por un lado $DA \in \mathcal{T}$ (por ser inyectivo). Por otro lado, $\tau T_i \in \mathcal{F}$ por Proposición 2.1.15, por tanto:

$$\text{Hom}_A(DA, \tau T) = \bigoplus_{i=1}^t \text{Hom}_A(DA, \tau T_i) = 0$$

Luego $\text{pd } T \leq 1$ por Lema 1.6.21 y T cumple (T2). Entonces T es inclinante parcial y luego $t \leq \text{rk } K_0(A)$.

Para la otra desigualdad, tenemos

$$\begin{aligned} t &= \#\{\text{Ext-proyectivos en } \mathcal{T}\} \\ &= \#\{\text{Ext-inyectivos en } \mathcal{T}\} \\ &\geq \#\{\text{Inyectivos indescomponibles en } \mathcal{T}\} \\ &= \#\{\text{Inyectivos indescomponibles en } \text{mod } A\} \\ &= \text{rk } K_0(A) \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es por el Lema 3.5.6 y la penúltima por contener $\mathcal{T}$ a todos los A -módulos inyectivos. Luego t es igual al rango de $K_0(A)$. Sigue que T es inclinante por Corolario 3.2.3. $\square$

Recordar que el Teorema de inclinación nos dice que si tenemos $B = \text{End } T_A$, podemos recuperar el álgebra “original” como $A \cong \text{End}({}_B T)^{op}$. Para cerrar esta sección, veremos como dada un álgebra B y un par de torsión $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ en $\text{mod } B$ podemos, bajo ciertas condiciones, hallar un álgebra A y un A -módulo inclinante T de forma que $B = \text{End } T_A$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}(T)$ e $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(T)$.

Teorema 3.5.8. *Sea B un álgebra y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de torsión en $\text{mod } B$. Entonces existe un álgebra A y un módulo inclinante T_A tal que $B = \text{End } T_A$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}(T_A)$ e $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(T_A)$ si y sólo si $\mathcal{Y} = \text{Cogen } Y$ para algún B -módulo Y e $\mathcal{Y}$ contiene a los proyectivos.*

Más aún, si se cumple alguna de estas condiciones (equivalentes), $D({}_B T)$ es la suma directa de un conjunto completo de Ext-inyectivos indescomponibles en $\mathcal{Y}$ no isomorfos dos a dos.

Demostración: ($\implies$) Sea A un álgebra y T_A inclinante tal que $B = \text{End } T_A$. Nuestro candidato a cogenerador de $\mathcal{Y}(T_A)$ es $D({}_B T) \cong \text{Hom}_A(T, DA)$, que pertenece a $\mathcal{Y}(T_A)$ por ser un B -módulo proyectivo.

Sea entonces $Y \in \mathcal{Y}(T_A)$. Queremos ver que $Y \in \text{Cogen } D({}_B T)$. Tenemos que $Y = \text{Hom}_A(T, M)$ para M un A -módulo. Tomamos un A -módulo inyectivo U tal que existe un monomorfismo $M \hookrightarrow U$, y por tanto un monomorfismo $Y \hookrightarrow \text{Hom}_A(T, U)$. Como U es inyectivo,

$$\text{Hom}_A(T, U) \in \text{add } D({}_B T) \subseteq \text{Cogen } D({}_B T).$$

Esto quiere decir que existe $d \geq 0$ y un monomorfismo $\text{Hom}_A(T, U) \hookrightarrow D({}_B T)^d$ que, componiendo con el monomorfismo $Y \hookrightarrow \text{Hom}_A(T, U)$, muestra que $Y \in \text{Cogen } D({}_B T)$, por tanto que $\mathcal{Y}(T) \subseteq \text{Cogen } D({}_B T)$ y como $D({}_B T) \in \mathcal{Y}(T)$, tenemos la igualdad de conjuntos.

($\Leftarrow$) Por Teorema 3.5.7, existe T un B -módulo a izquierda tal que la clase de torsión $D\mathcal{Y} = \mathcal{T}({}_B T)$ y $D\mathcal{X} = \mathcal{F}({}_B T)$. Tomando $A = \text{End}({}_B T)^{op}$, tenemos que T_A es inclinante, $B = \text{End } T_A$ y por Lema 2.3.7

$$\mathcal{Y}(T_A) = D\mathcal{T}({}_B T) = D\mathcal{T}({}_B T) = \mathcal{Y}; \quad \mathcal{X}(T_A) = D\mathcal{F}({}_B T) = \mathcal{X}.$$

Probemos ahora la otra afirmación. Recordar que

$$D({}_B T) = \text{Hom}_A(T, DA) = \oplus \text{Hom}(T, I(a))$$

donde $I(a)$ recorre un conjunto de representantes de los A -módulos inyectivos indecomponibles. Queremos ver que $\text{Hom}(T, I(a))$ recorre un conjunto completo de Ext-inyectivos indecomponibles no isomorfos 2 a 2 en $\mathcal{Y}$.

Primero, dado $I(a)_A$ un inyectivo indecomponible, tenemos $I(a) \in \mathcal{T}$ y por tanto $\text{Hom}_A(T, I(a)) \in \mathcal{Y}$. Por el Lema 3.3.5, o bien $\text{Hom}_A(T, I(a))$ es inyectivo en $\text{mod } B$ y por tanto Ext-inyectivo en $\mathcal{Y}$, o bien $\tau^{-1} \text{Hom}_A(T, I(a)) \in \mathcal{X}$ y es Ext-inyectivo en $\mathcal{Y}$ por Proposición 2.1.15.

Ahora, dado $Y \in \mathcal{Y}$ un módulo Ext-inyectivo indecomponible, existe un A -módulo indecomponible $M \in \mathcal{T}(T_A)$ tal que $Y \cong \text{Hom}_A(T, M)$. Tomo $M \hookrightarrow E$ la envolvente inyectiva de M en $\text{mod } A$.

Aplicando $\text{Hom}_A(T, -)$ a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow E/M \longrightarrow 0$$

obtenemos la sucesión exacta corta en $\mathcal{Y}$:

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow \text{Hom}_A(T, E) \longrightarrow \text{Hom}_A(T, E/M) \longrightarrow 0$$

pues $\text{Ext}_A^1(T, M) = 0$ por cumplirse que $M \in \mathcal{T}(T_A)$.

Viendo a la sucesión como un elemento de $\text{Ext}_A^1(Y, \text{Hom}_A(T, E/M))$, tenemos que debe ser 0 pues $\text{Hom}_A(T, E/M) \in \mathcal{Y}$ e Y es Ext-inyectivo en $\mathcal{Y}$. Por tanto la sucesión escinde e Y es isomorfo a un sumando directo de $\text{Hom}_A(T, E)$. O sea, existe $I(a)$ sumando directo de E tal que $Y \cong \text{Hom}_A(T, I(a))$. $\square$

En las condiciones del teorema anterior, la forma de hallar el álgebra A y el módulo inclinante T_A que induce $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es como sigue:

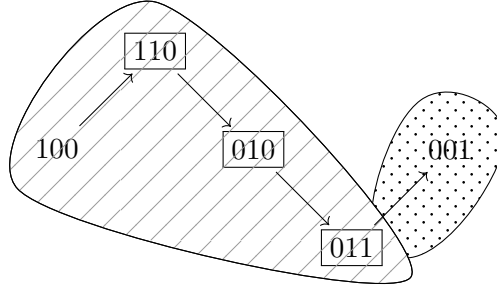
- Tomamos un conjunto completo de Ext-inyectivos indecomponibles en $\mathcal{Y}$ no isomorfos dos a dos $Y_1, \dots, Y_n$. Luego $D({}_B T) = \oplus_{j=1}^n Y_j$.
- Vemos a A como el álgebra de caminos para el carcaj que tiene vértices $1, \dots, n$ y $\dim_k \text{Hom}_B(Y_i, Y_j)$ flechas $i \rightarrow j$, con $Y_i = \text{Hom}_A(T, I(i)) \forall i = 1, \dots, n$.

- Tomamos $T = \oplus_{j=1}^n T_j$, donde $\dim_k(T_j)_i = \dim_k(\text{Hom}_B(P(j)_B, Y_i))$.

Ejemplo 3.5.9. Sea B el álgebra dada por el carcaj

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & & 3 \\ \circ & \xleftarrow{\mu} & \circ & \xleftarrow{\lambda} & \circ \end{array}$$

con la relación $\lambda\mu = 0$. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ el par de torsión en mod B marcado en la siguiente figura:



donde $\mathcal{Y}$ está marcado como  y $\mathcal{X}$ como . Estamos luego en las condiciones de 3.5. Tomamos entonces los Ext-inyectivos indecomponibles en $\mathcal{Y}$:

$$Y_1 = 110, \quad Y_2 = 010, \quad Y_3 = 011$$

Luego $D({}_B T) = 110 \oplus 010 \oplus 011$ y $A = \text{End}_{B^{op}}({}_B(T)) = \text{End}_B(\oplus_{i=1}^n Y_i)$ está dada por el carcaj

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & & 3 \\ \circ & \xleftarrow{\quad} & \circ & \xleftarrow{\quad} & \circ \end{array}$$

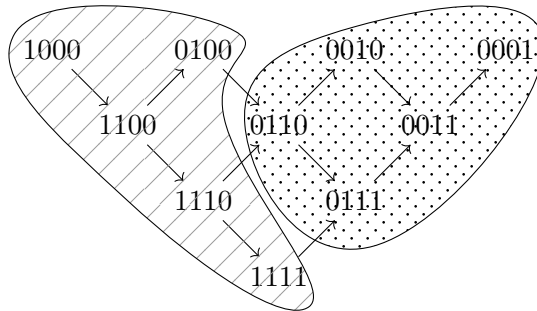
donde el vértice i se corresponde a Y_i . Por 3.5 tenemos que $T_A = 100 \oplus 111 \oplus 001$.

Luego $B = \text{End}_A T$ y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$, como queríamos.

Ejemplo 3.5.10. Consideremos el álgebra B dada por el carcaj

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ \circ & \xleftarrow{\quad} & \circ & \xleftarrow{\quad} & \circ & \xleftarrow{\quad} & \circ \end{array}$$

sin relaciones. Consideremos el siguiente par de torsión $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ en mod B , marcado en su carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod } B)$ como sigue:



Los Ext-inyectivos en $\mathcal{Y}$ son

$$Y_1 = 0100, \quad Y_2 = 1100, \quad Y_3 = 1110, \quad Y_4 = 1111.$$

Tomamos $A = \text{End}_B(\oplus_{i=1}^4 Y_i)$, que es álgebra dada por el carcaj

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ \circ & \longleftarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ \end{array}$$

sin relaciones. Para obtener el A -módulo inclinante $T = \oplus_{i=1}^4 T_i$ tal que $\text{End } T_A = B$ y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$, seguimos los pasos detallados en section 3.5. Notar que la condición sobre los vectores dimensión podemos expresarla por una matriz 4x4 cuya entrada (i, j) sea $(\underline{\dim} Y_i)_j$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego cada sumando T_i está dado por la columna i -ésima y

$$T = 0111 \oplus 1111 \oplus 0011 \oplus 0001$$

es el módulo inclinante que buscábamos.

CAPÍTULO 4

Álgebras inclinadas

En este capítulo usaremos lo visto sobre teoría de inclinación para estudiar aquellas álgebras obtenidas al inclinar un álgebra hereditaria.

La idea es, a partir de la familia bien comprendida de las álgebras hereditarias, poder entender esta familia más grande de álgebras que llamaremos álgebras inclinadas.

Como nos interesan ahora álgebras no necesariamente de tipo de representación finita, para extraer información del álgebra a partir de su carcaj de Auslander-Reiten, debemos centrarnos en ciertas componentes de este.

El resultado principal de este capítulo es el Criterio de Liu-Skowroński, que caracteriza las álgebras inclinadas B de tipo de representación finita como aquellas que contienen una sección fiel Σ en una componente de $\Gamma(\text{mod } B)$ de forma que $\text{Hom}_B(U, \tau V) = 0$ para todo U, V módulos en Σ . Para entender estos conceptos debemos explotar la estructura combinatoria del carcaj de Auslander-Reiten.

4.1. Carcajes de traslación

Las componentes conexas de un carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra inclinada, que luego definiremos, no solo tienen la estructura de un carcaj de traslación, sino de un tipo de carcaj de traslación en particular.

Definición 4.1.1. Sea $\Sigma = (\Sigma_0, \Sigma_1)$ un carcaj conexo y acíclico.

Definimos un carcaj de traslación infinita $(\mathbb{Z}\Sigma, \tau)$ como sigue:
los puntos son $(\mathbb{Z}\Sigma)_0 := \{(n, x) : n \in \mathbb{Z}, x \in \Sigma_0\}$ y, para cada flecha $\alpha : x \rightarrow y$ en Σ_1 , ponemos dos flechas en $(\mathbb{Z}\Sigma)_1$

$$(n, \alpha) : (n, x) \rightarrow (n, y) \quad \text{y} \quad (n, \alpha') : (n+1, x) \rightarrow (n, y)$$

y estas son todas las flechas de $(\mathbb{Z}\Sigma)_1$.

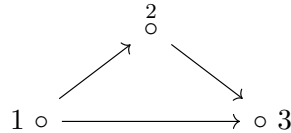
Definimos la traslación τ en $\mathbb{Z}\Sigma$ como $\tau(n, x) = (n+1, x) \forall (n, x) \in (\mathbb{Z}\Sigma)_0$

Observación 4.1.2. Tenemos, para cada $(n, x) \in (\mathbb{Z}\Sigma)_0$, una biyección entre el conjunto de flechas que llegan a (n, x) y el conjunto de flechas que salen de $(n+1, x)$, dada por

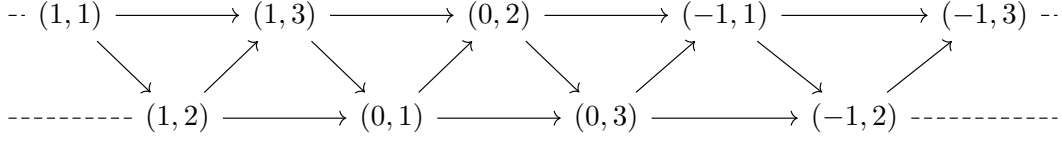
$$\sigma(n, \alpha) = (n, \alpha') \quad \text{y} \quad \sigma(n, \alpha') = (n+1, \alpha).$$

Sigue directo de la definición que $\sigma^2 = \tau$ y por tanto $\sigma^{2n} = \tau^n \forall n \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 4.1.3. Por ejemplo, si Σ es el carcaj



Entonces $\mathbb{Z}\Sigma$ queda:



Definición 4.1.4. Sea (Γ, τ) un carcaj de traslación conexo.

Un subcarcaj conexo completo Σ de Γ es una sección de Γ si cumple:

(S1) Σ es acíclico.

(S2) Para todo $x \in \Gamma_0$, existe un único $n \in \mathbb{Z} : \tau^n x \in \Sigma_0$.

(S3) Si $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_t$ es un camino en Γ con $x_0, x_t \in \Sigma_0$, entonces $x_i \in \Sigma_0 \forall 0 \leq i \leq t$.

Definimos la τ -órbita de un punto $x \in \Gamma_0$ como el conjunto de todos los puntos $\tau^n x$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Decimos que un subcarcaj completo Σ de Γ es convexo si para todo camino $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_t$ en Γ con $x_0, x_t \in \Sigma_0$, se tiene $x_i \in \Sigma_0 \forall 0 \leq i \leq t$.

Con estas dos últimas definiciones, tenemos que S(2) se puede reformular diciendo que Σ corta a cada τ -órbita exactamente una vez, y S(3) diciendo que Σ es convexo.

Ejemplo 4.1.5. (i) Sea A un álgebra hereditaria conexa y Σ_A el subcarcaj completo del carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod } A)$ cuyos puntos son aquellos correspondientes a clases de isomorfismo de A -módulos proyectivos indecomponibles.

Por [3, Lema VII.1.6] tenemos un isomorfismo k -lineal

$$\text{Irr}(P(b), P(a)) \cong e_a(\text{rad } A / \text{rad}^2 A)e_b$$

para A -módulos proyectivos indecomponibles $P(a) = e_a A$ y $P(b) = e_b A$.

Como los morfismos irreducibles que llegan a un proyectivo salen de los sumandos de su radical, que también es proyectivo por ser A hereditaria, todos los predecesores de un A -módulo proyectivo indecomponible son también proyectivos indecomponibles.

Luego, las flechas en Σ_A están dadas por $\text{Irr}(P(a), P(b))$ y por el isomorfismo anterior, tenemos que $\Sigma_A \cong Q_A^{\text{op}}$.

(ii) De forma análoga, podemos tomar Σ'_A el subcarcaj completo del carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod } A)$ cuyos puntos son aquellos correspondientes a clases de isomorfismo de A -módulos inyectivos indecomponibles. La dualidad $D : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A^{\text{op}}$ lleva Σ'_A en $D(\Sigma'_A) = \Sigma_{A^{\text{op}}} \stackrel{(i)}{\cong} Q_A$. Luego $\Sigma'_A \cong Q_A^{\text{op}} \cong \Sigma_A$.

Observación 4.1.6. Si A es de representación finita, entonces el subcarcaj Σ_A del ejemplo anterior es una sección en $\Gamma(\text{mod } A)$.

El carcaj Σ_A es acíclico por ser $\Sigma_A \cong Q_A^{\text{op}}$ que es acíclico por serlo Q_A . La convexidad de Σ_A sale de que los predecesores de proyectivos indecomponibles son proyectivos indecomponibles.

Finalmente, como A es hereditaria de representación finita, por [3, Proposición VII.5.13] tenemos que para todo A -módulo indescomponible M existe $t \geq 0$ y un A -módulo proyectivo indescomponible P tal que $M \cong \tau^{-t}P$; luego Σ_A intersecta a toda τ -órbita y lo hace una única vez.

Lema 4.1.7. *Sea (Γ, τ) un carcaj de traslación conexo y Σ una sección en (Γ, τ) . Entonces:*

- (a) *Si existe una flecha $x \rightarrow y$ en Γ y $x \in \Sigma_0$, entonces $y \in \Sigma_0$ o $\tau y \in \Sigma_0$.*
- (b) *Si existe una flecha $x \rightarrow y$ en Γ e $y \in \Sigma_0$, entonces $x \in \Sigma_0$ o $\tau^{-1}x \in \Sigma_0$.*

Demostración: Probemos solo (a) pues (b) es análogo.

Por (S2) sabemos que $\exists! m \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^m y \in \Sigma_0$.

Ahora, si $m \leq 0$, existe un camino $x \rightarrow y \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^m y$ en (Γ, τ) con inicio y final en Σ_0 , por lo que por (S3), $y \in \Sigma_0$ y por la unicidad de S(2), debe ser $m = 0$. O sea $y \in \Sigma_0$.

Si $m > 0$, existe un camino $\tau^m y \rightarrow \cdots \rightarrow \tau y \rightarrow x$ en (Γ, τ) con inicio y final en Σ_0 , por lo que por (S3), $\tau y \in \Sigma_0$. $\square$

Proposición 4.1.8. *Sea (Γ, τ) un carcaj de traslación conexo y Σ una sección en (Γ, τ) . Entonces Γ es isomorfo al subcarcaj de traslación completo de $\mathbb{Z}\Sigma$ que tiene como puntos los pares $(n, x) \in (\mathbb{Z}\Sigma)_0$ tal que $\tau^n x$ está definido en Γ . En particular, Γ es acíclico.*

Demostración: Sea Ω el subcarcaj completo de $\mathbb{Z}\sigma$ que consiste de todos los pares $(n, x) \in (\mathbb{Z}\Sigma)_0$ tales que $\tau^n x$ está definido en Γ . Consideramos a Ω como un subcarcaj de Γ vía $(n, x) \mapsto \tau^n x$.

Como Σ es una sección de Γ , $\forall x \in \Gamma \exists! m \in \mathbb{Z} : \tau^m x \in \Sigma_0$, o sea $\forall x \in \Gamma \exists! m \in \mathbb{Z}$ tal que $(m, x) \in \Omega_0$ y tenemos $\Omega_0 = \Gamma_0$.

Vemos ahora que Ω_1 consiste de todas las flechas en Γ_1 de la forma

$$\tau^n \alpha = \sigma^{2n} \alpha : \tau^n x \rightarrow \tau^n y \quad \text{ó} \quad \sigma \tau^n \alpha = \sigma^{2n+1} : \tau^{n+1} y \rightarrow \tau^n x$$

donde $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha : x \rightarrow y$ está en Σ_1 . Esto es pues, por un lado, las flechas en Ω_1 en el nivel n son aquellas con punto inicial y final en $\{(n, x) : x \in \Sigma_0, \tau^n x \text{ está definido en } \Gamma\}$ y son de la primera forma $(\tau^n x \rightarrow \tau^n y)$ vía la identificación. Por otro lado, las flechas conectando el nivel n con el nivel $n + 1$ son $\sigma\beta$ donde β es de la primera forma, por la biyección de Observación 4.1.2.

Queremos ver que $\Omega_1 = \Gamma_1$ y por tanto $\Omega = \Gamma$, probando la proposición.

Sea $\alpha : a \rightarrow b$ una flecha en Γ . Como Σ es una sección, por (S2) existen $x, y \in \Sigma_0$ y $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que $a = \tau^m x, b = \tau^n y$. Separemos en casos según los valores de m y n .

Si $m = 0$, $a = x \in \Sigma_0$ y por el Lema 4.1.7 o bien b o τb está en Σ_0 . Si $b \in \Sigma_0$, $\alpha : \tau^0 x \rightarrow \tau^0 y$ y α está en Ω_1 pues es de la primera forma. Si $\tau b \in \Sigma_0$, como $\alpha : a \rightarrow b$ está en Γ , $\sigma\alpha = \beta : \tau b \rightarrow a$ está en Σ_1 , luego $\alpha = \tau^{-1}\beta \in \Omega_1$. El caso $n = 0$ es análogo, así que tenemos $m \neq 0, n \neq 0$.

Supongamos $m > 0, n > 0$. Como $\tau^i x, \tau^j y$ están definidos para $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$, esto implica que en Γ_1 existe una flecha de la forma

$$\Sigma^{-2m+1} \alpha : \tau^{n-m+1} y \rightarrow x \quad \text{o} \quad \sigma^{-2n} \alpha : \tau^{m-n} x \rightarrow y$$

En el primer caso, el Lema 4.1.7(b) nos dice que $\tau^{n-m+1} y \in \Sigma_0$ o $\tau^{n-m} y \in \Sigma_0$. Por (S2), esto implica que $\tau^{n-m-1} y = y$ o $\tau^{n-m} y = y$ y por (S1) debe ser $m = n + 1$ o $m = n$.

Luego $\alpha \in \Omega_1$. En el segundo caso tenemos $\tau^{m-n}x = x$ o $\tau^{m-n-1}x = x$ y de nuevo por (S1) debe ser $m = n + 1$ o $m = n$ y $\alpha \in \Omega_1$.

El caso donde $m < 0, n < 0$ es análogo. Supongamos $m > 0$ y $n < 0$. En tal caso Γ contiene un camino de la forma

$$y \longrightarrow \cdots \longrightarrow \tau^n y = b \longrightarrow \tau^{-1}a = \tau^{m-1}x \longrightarrow \cdots \longrightarrow x$$

Por (S3), $\tau^n y$ y $\tau^{m-1}x$ pertenecen a Σ_0 , lo cual contradice la unicidad de (S2).

El caso $m < 0, n > 0$ es análogo. □

Corolario 4.1.9. *Si Δ es una sección en $\mathbb{Z}\Sigma$, entonces $\mathbb{Z}\Delta \cong \mathbb{Z}\Sigma$.*

Precisamos la siguiente noción combinatoria.

Definición 4.1.10. Dado $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj finito, conexo y acíclico y $a \in Q_0$, definimos un nuevo carcaj $\sigma_a Q := (Q'_0, Q'_1, s', t')$ como sigue: $Q'_0 = Q_0$ y existe una biyección $Q_1 \rightarrow Q'_1$ tal que si $\alpha' \in Q'_1$ denota a la imagen de $\alpha \in Q_1$ bajo esta biyección, entonces:

- (i) Si $s(\alpha) \neq a$ y $t(\alpha) \neq a$, entonces $s'(\alpha') = s(\alpha)$ y $t'(\alpha') = t(\alpha)$;
- (ii) Si $s(\alpha) = a$ o $t(\alpha) = a$, entonces $s'(\alpha') = t(\alpha)$ y $t'(\alpha') = s(\alpha)$.

Es decir, $\sigma_a Q$ es el carcaj obtenido revirtiendo todas las flechas que salen de a o llegan a a .

Existe una conexión entre el carcaj $\sigma_a Q$ y los módulos APR-inclinantes (ver Definición 2.2.10), como muestra el siguiente teorema.

Teorema 4.1.11. [3, Teorema VII.5.3] *Sea A un álgebra hereditaria básica no simple, a un pozo en su carcaj asociado Q_A y $T[a]$ el A -módulo APR-inclinante en a . Entonces tenemos un isomorfismo de álgebras*

$$\text{End } T[a]_A \cong k(\sigma_a Q_A)$$

Definición 4.1.12. Una sucesión admisible de pozos (fuentes) en un carcaj Q con $n = |Q_0|$ es un orden total $(a_1, \dots, a_n)$ de los puntos de Q tal que:

- (i) a_1 es un pozo (fuente) en Q .
- (ii) a_i es un pozo (fuente) en $\sigma_{a_{i-1}} \dots \sigma_{a_1} Q$, para todo $2 \leq i \leq n$.

Lema 4.1.13. *Si Σ y Δ son dos árboles con el mismo grafo subyacente, entonces $\mathbb{Z}\Sigma \cong \mathbb{Z}\Delta$.*

Demostración: Afirmamos que existe una sucesión $(i_1, \dots, i_t)$ de puntos en Σ tal que i_s es un pozo en $\sigma_{i_{s-1}} \dots \sigma_{i_1} \Sigma$ para todo $1 \leq s \leq t$ y $\sigma_{i_t} \dots \sigma_{i_1} \Sigma = \Delta$.

Basta probar esto en el caso en que Σ y Δ difieren en la orientación de una sola flecha $\alpha : i \rightarrow j$ en Σ_1 cuya flecha correspondiente en Δ_1 es $\alpha' : j \rightarrow i$.

Notar que $Q = (\Sigma_0, \Sigma_1 \setminus \{\alpha\})$ es un subcarcaj de Σ y de Δ que no es conexo. Escribimos $Q = Q^i \cup Q^j$ con Q^i y Q^j subcarcajes conexos de Q que contienen a i y a j , respectivamente. Llamemos $t = |Q^i_0|$.

Tomamos ahora $i_1 \in Q^i$ un pozo, el cual existe pues Q^i es un árbol, e inductivamente tomamos i_j como un punto en el subcarcaj completo que tiene como vértices $Q^i_0 \setminus \{i_1, \dots, i_{j-1}\}$. Esto es una sucesión admisible de pozos en Q^i de forma que $\sigma_{i_t} \dots \sigma_{i_1} Q^i =$

Q^i , pues para cada flecha aplico dos reflexiones. Ahora, como $i \in \{i_1, \dots, i_t\}$, entonces $\sigma_{i_t} \dots \sigma_{i_1} \Sigma = \Delta$, probando la afirmación.

Volviendo al lema, si $a \in \Sigma$ es un pozo, tenemos que $\sigma_a \Sigma$ es isomorfo al subcarcaj de traslación completo de $\mathbb{Z}\Sigma$ que consiste de los puntos

$$(1, a) \cup \{(0, b) : b \in \Sigma_0, b \neq a\}.$$

Este es una sección en $\mathbb{Z}\Sigma$, por lo que $\mathbb{Z}(\sigma_a \Sigma) \cong \mathbb{Z}\Sigma$ por el Corolario 4.1.9. Por la afirmación tenemos una sucesión de puntos tales que $\sigma_{i_t} \dots \sigma_{i_1} \Sigma = \Delta$, se sigue por inducción que $\mathbb{Z}(\sigma_{i_t} \dots \sigma_{i_1} \Sigma) = \mathbb{Z}\Delta$ es una sección en $\mathbb{Z}\Sigma$ y por tanto $\mathbb{Z}\Sigma \cong \mathbb{Z}\Delta$. $\square$

Lema 4.1.14. *Si Σ y Σ' son dos carcajes con el mismo grafo subyacente de tipo $\tilde{A}_n$, entonces $\mathbb{Z}\Sigma \cong \mathbb{Z}\Sigma'$ si y sólo si los números de flechas orientadas de forma horaria y antihoraria en Σ coinciden con los de Σ' .*

Demostración: Sea $a \in \Sigma_0$ un pozo. Tenemos que $\mathbb{Z}\Sigma$ contiene una única sección Δ tal que a es el único pozo en Δ y Δ tiene una única fuente. Por Lema 4.1.13, $\mathbb{Z}\Delta \cong \mathbb{Z}\Sigma$. Podemos asumir entonces que tanto Σ como Σ' tienen un único pozo y una única fuente pues haciendo reflexiones podemos llegar a este caso usando que $\mathbb{Z}(\sigma\Sigma) \cong \mathbb{Z}(\Sigma)$ por la demostración del lema anterior (4.1.13). El resultado sigue. $\square$.

4.2. Componentes postproyectivas y preinyectivas

En esta sección describiremos la forma del carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra de tipo de representación infinita. Veremos más detenidamente el ejemplo del álgebra asociada al carcaj de Kronecker

$$1 \circ \longrightarrow \circ 2$$

Omitiremos las demostraciones en esta sección. Referimos a [3, Sección VIII.2].

Definición 4.2.1. Sea A una k -álgebra (no necesariamente hereditaria) y $\Gamma(\text{mod } A)$ el carcaj de Auslander-Reiten de A . Decimos que

- (a) Una componente conexa $\mathcal{P}$ de $\Gamma(\text{mod } A)$ es postproyectiva si $\mathcal{P}$ es acíclico y para todo módulo indescomponible M en $\mathcal{P}$ existen $t \geq 0$ y $a \in (Q_A)_0$ tal que $M \cong \tau^{-t}P(a)$.
- (b) Una componente conexa $\mathcal{Q}$ de $\Gamma(\text{mod } A)$ es preinyectiva si $\mathcal{Q}$ es acíclico y para todo módulo indescomponible N en $\mathcal{Q}$ existen $s \geq 0$ y $b \in (Q_A)_0$ tal que $N \cong \tau^s I(b)$.

El siguiente resultado generaliza el ejemplo 4.1.5 para álgebras de representación infinita.

Proposición 4.2.2. [3, Corolario VIII.2.3] *Sea Q un carcaj finito, conexo y acíclico que no es Dynkin, y sea $A = kQ$ (equivalentemente, sea A un álgebra hereditaria de tipo de representación infinita). Entonces:*

- (a) *El carcaj $\Gamma(\text{mod } A)$ contiene una componente postproyectiva $\mathcal{P}(A)$ isomorfa a $(-\mathbb{N})Q^{op}$ que contiene a todos los A -módulos proyectivos indescomponibles.*
- (b) *El carcaj $\Gamma(\text{mod } A)$ contiene una componente preinyectiva $\mathcal{Q}(A)$ isomorfa a $\mathbb{N}Q^{op}$ que contiene a todos los A -módulos inyectivos indescomponibles.*

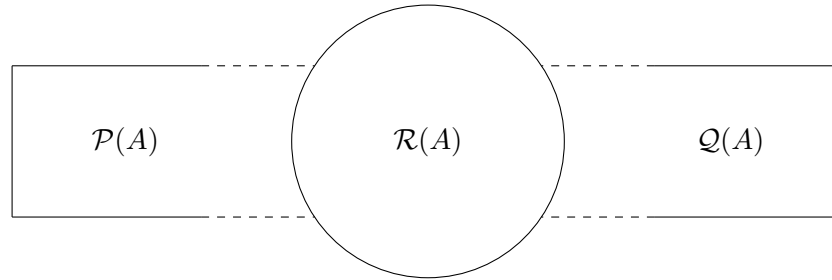
Si tenemos un álgebra A de representación infinita, hay (infinitos) módulos que no pertenecen a $\mathcal{P}$ ni a $\mathcal{Q}$, los cuales se encuentran en una componente del carcaj de Auslander-Reiten de A .

Proposición 4.2.3. [3, Corolario VIII.2.10] *Sea A un álgebra hereditaria de tipo de representación infinita. Entonces existe una familia infinita de A -módulos indescomponibles no isomorfos 2 a 2 que no son postproyectivos ni preinyectivos.*

Definición 4.2.4. Sea A una k -álgebra (no necesariamente hereditaria). Decimos que una componente conexa $\mathcal{C}$ de $\Gamma(\text{Mod} A)$ es regular si $\mathcal{C}$ no contiene A -módulos proyectivos ni inyectivos.

Notamos por $\mathcal{R}(A)$ a la familia de todas las componentes regulares de $\Gamma(\text{mod } A)$.

Si A es un álgebra hereditaria de tipo de representación infinita, podemos pensar a $\Gamma(\text{mod } A)$ con la siguiente forma:



donde $\text{Hom}_A(\mathcal{Q}(A), \mathcal{R}(A)) = 0$, $\text{Hom}_A(\mathcal{Q}(A), \mathcal{P}(A)) = 0$ y $\text{Hom}_A(\mathcal{R}(A), \mathcal{P}(A)) = 0$ (ver [3, Lema 2.5]).

La dificultad de entender las representaciones de un álgebra hereditaria de tipo de representación infinita A radica principalmente en entender como es la forma de la componente regular $\mathcal{R}(A)$ de $\Gamma(\text{mod } A)$. Por ejemplo, podemos tener τ -órbitas periódicas en $\mathcal{R}(A)$.

Proposición 4.2.5. [3, Corolario 2.14] *Si A es un álgebra hereditaria de tipo de representación infinita, entonces las traslaciones de Auslander-Reiten τ y τ^{-1} inducen equivalencias mutuamente inversas de categorías*

$$\text{add } \mathcal{R}(A) \xrightleftharpoons[\tau^{-1}]{\tau} \text{add } \mathcal{R}(A)$$

4.2.1. Álgebra de Kronecker. Consideremos ahora el álgebra de caminos $A = kQ$ donde Q es el carcaj de Kronecker

$$1 \circ \rightrightarrows \circ 2$$

Como Q no es de tipo Dynkin, el álgebra A es de representación infinita. Veremos como queda en este caso la descomposición de $\Gamma(\text{mod } A)$ en las componentes postproyectiva, regular y preinyectiva. Para esto presentamos primero un problema que es equivalente a la clasificación de los A -módulos indescomponibles, siguiendo a [5, Sección 1.4 y Sección 6.2].

El problema de Kronecker sobre pares de matrices (M, N) del mismo tamaño consiste en encontrar un conjunto de representantes indescomponibles para la relación de equivalencia dada por $(M, N) \sim (M', N')$ si existen U, T matrices invertibles tales que

$M' = UMT^{-1}$ y $N' = UNT^{-1}$, donde decimos que un par (M, N) es indescomponible si $(M, N) \sim (M', N') \oplus (M'', N'')$ implica $(M', N') \sim 0$ o $(M'', N'') \sim 0$.

Usando técnicas de álgebra lineal, se puede encontrar un tal conjunto (ver [5, Proposición 1.6]) y luego hacer la traducción a A -módulos indescomponibles (ver [5, Ejemplo 2.2]). Esto nos da el siguiente conjunto completo de representantes de A -módulos indescomponibles no isomorfos 2 a 2:

$$R_{m,\lambda} : \quad \mathbf{k}^m \begin{array}{c} \xrightarrow{1_m} \\ \xrightarrow{J(m,\lambda)} \end{array} \mathbf{k}^m$$

$$R_{m,\infty} : \quad \mathbf{k}^m \begin{array}{c} \xrightarrow{J(m,0)} \\ \xrightarrow{1_m} \end{array} \mathbf{k}^m$$

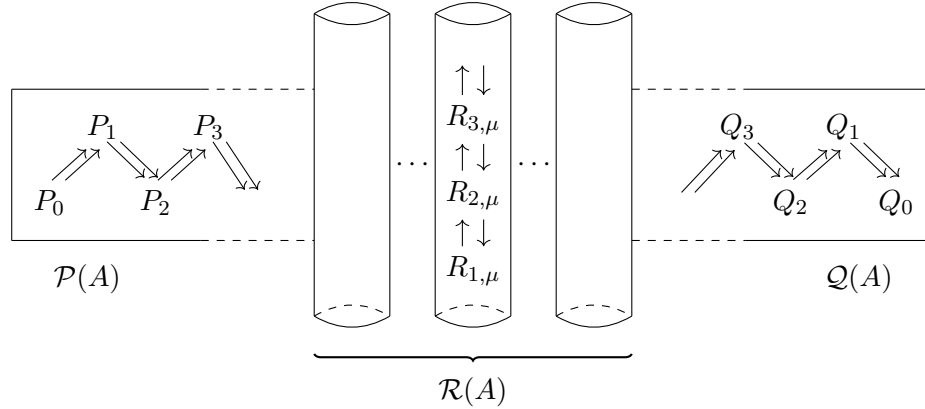
$$P_n : \quad \mathbf{k}^n \begin{array}{c} \xrightarrow{[1_n \ 0_{n \times 1}]^t} \\ \xrightarrow{[0_{n \times 1} \ 1_n]^t} \end{array} \mathbf{k}^{n+1}$$

$$Q_n : \quad \mathbf{k}^{n+1} \begin{array}{c} \xrightarrow{[1_n \ 0_n]} \\ \xrightarrow{[0_n \ 1_n]} \end{array} \mathbf{k}^n$$

donde $n, m \in \mathbb{N}, m > 0, \lambda \in \mathbf{k}$ y $J(n, \lambda)$ es el bloque de Jordan $J(n, \lambda) = \lambda 1_n + J(n, 0)$

donde $J(n, 0)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$.

Tenemos que el carcaj se ve como sigue:



donde ilustramos uno de los tubos (el correspondiente a $\mu \in \mathbf{k}$) de la componente regular de $\Gamma(\text{mod } A)$, que es $\mathcal{R}(A) = \{\mathcal{R}_\lambda^A\}_{\lambda \in \mathbf{k} \cup \{\infty\}}$.

4.3. Álgebras inclinadas

Introducimos ahora una clase de álgebras, llamadas álgebras inclinadas, que son aquellas obtenidas como álgebras de endomorfismos de un módulo inclinante sobre un álgebra hereditaria.

La idea es, como las álgebras hereditarias son bien entendidas, usar resultados obtenidos en teoría de inclinación y el carcaj de Auslander-Reiten para estudiar las álgebras inclinadas.

Definición 4.3.1. Sea Q un carcaj finito, conexo y acíclico, $A = kQ$. Decimos que un álgebra B es inclinada de tipo Q si existe un A -módulo inclinante T tal que $B = \text{End } T_A$.

Ejemplo 4.3.2. Por ejemplo, toda álgebra hereditaria $A = kQ$ es inclinada pues A_A es un A -módulo inclinante y luego $\text{End } A_A = A$ es inclinada de tipo Q .

El álgebra B del ejemplo 3.3.2 es inclinada (de tipo $\mathbb{A}_3$) pero no hereditaria pues tiene relaciones.

Observación 4.3.3. Asumiremos siempre que el A -módulo inclinante T es libre de multiplicidad (o sea que no tiene sumandos directos distintos que sean isomorfos) de forma que $B = \text{End } T_A$ sea básica. Como además toda álgebra obtenida como endomorfismos de un módulo inclinante es conexa, tenemos por el Teorema 1.2.5 que tiene sentido hablar del carcaj Q_B asociado a un álgebra inclinada B .

Listamos ahora algunas propiedades que cumplen las álgebras inclinadas, adaptando resultados probados con más generalidad en el capítulo 3 y agregando otros. Para esto usaremos la siguiente terminología.

Definición 4.3.4. Un camino en $\text{mod } A$ entre dos A -módulos L y N es una secuencia

$$L = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_t} M_t = N$$

donde los M_i son indescomponibles y los f_i son morfismos no nulos que no son Isomorfismos.

En tal caso, decimos que L es un predecesor de N en $\text{mod } A$ y que N es un sucesor de L en $\text{mod } A$. Si además $L \neq N$, decimos que son predecesores/sucesores propios.

Un ciclo en $\text{mod } A$ es un camino de un A -módulo M en sí mismo, es decir una secuencia

$$M = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_t} M_t = M$$

donde los M_i son indescomponibles y los f_i son morfismos no nulos que no son Isomorfismos.

Observar que en la definición de camino permitimos que la composición de los f_i sea 0. Este detalle es importante.

Definición 4.3.5. Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría aditiva plena de $\text{mod } A$, cerrada por imágenes isomorfas y sumandos directos. Decimos que

- $\mathcal{A}$ es cerrada bajo predecesores si, para cada camino $L \rightarrow \cdots \rightarrow M$ en $\text{mod } A$, con M en $\mathcal{A}$, se tiene que L está en $\mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ es cerrada bajo sucesores si, para cada camino $L \rightarrow \cdots \rightarrow M$ en $\text{mod } A$, con L en $\mathcal{A}$, se tiene que M está en $\mathcal{A}$.

Lema 4.3.6. Sea A un álgebra hereditaria, T_A un módulo inclinante y $B = \text{End } T_A$. Entonces:

- (a) El par de torsión $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ en $\text{mod } B$ es escindente.
- (b) $\mathcal{Y}(T)$ es cerrada bajo predecesores y $\mathcal{X}(T)$ es cerrada bajo sucesores.
- (c) Si A es de representación finita, también lo es B .
- (d) Toda sucesión casi escindida en $\text{mod } B$ está toda contenida en $\mathcal{X}(T)$, o está toda contenida en $\mathcal{Y}(T)$, o es una sucesión de conexión.

- (e) $\text{gl.dim} B \leq 2$ y para todo B -módulo indecomponible Z tenemos $\text{pd}_B Z \leq 1$ o $\text{id}_B Z \leq 1$.

Demostración:

- (a) Sigue del Corolario 3.4.9, pues $\text{gl.dim} A \leq 1$ por ser A hereditaria.
(b) Sea $Z \rightarrow Z_1 \rightarrow \dots \rightarrow Z_{t-1} \rightarrow Y$ un camino en $\text{mod } A$, con $Y \in \mathcal{Y}(T)$. Entonces $\text{Hom}_A(Z_{t-1}, Y) \neq 0$ implica que $Z_{t-1} \notin \mathcal{X}(T)$ y por tanto que $Z_{t-1} \in \mathcal{Y}(T)$ por ser el par escindente, por (a). Siguiendo así, inductivamente tenemos $Z \in \mathcal{Y}(T)$ y por tanto $\mathcal{Y}(T)$ es cerrado bajo predecesores. Análogamente probamos que $\mathcal{X}(T)$ es cerrado bajo sucesores.
(c) Sigue de (a).
(d) Sigue de (a) y el Proposición 3.4.5.
(e) La primera afirmación sigue del Teorema 3.1.2, pues $\text{gl.dim} A \leq 1$ por ser A hereditaria.

Sea ahora Z un B -módulo indecomponible. Por (a), Z pertenece a $\mathcal{X}(T)$ o $\mathcal{Y}(T)$. Si $Z \in \mathcal{Y}(T)$, existe un A -módulo $M \in \mathcal{T}(T)$ tal que $Z \cong \text{Hom}_A(T, M)$ y el lema 3.1.1 nos dice que $\text{pd}_B Z \leq \text{pd}_A M$, y como A es hereditaria, $\text{pd}_A M \leq 1$ y por tanto $\text{pd}_B Z \leq 1$.

Si $Z \in \mathcal{X}(T)$, por el Proposición 2.1.11 y el hecho de que el par $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ es escindente (por (a)), tenemos que $\tau^{-1}Z \in \mathcal{X}(T)$. Como $B_B \in \mathcal{Y}(T)$, entonces $\text{Hom}_B(\tau^{-1}Z, B) = 0$ y por el Lema 1.6.21 vale que $\text{id}_B Z \leq 1$. $\square$

Lema 4.3.7. *Sea A un álgebra hereditaria. Si T_1 y T_2 son A -módulos indecomponibles tales que $\text{Ext}_A^1(T_2, T_1) = 0$, entonces todo morfismo no nulo de T_1 a T_2 es un monomorfismo o un epimorfismo. En particular, si T_1 es indecomponible y $\text{Ext}_A^1(T_1, T_1) = 0$, entonces $\text{End } T_A \cong \mathbf{k}$.*

Demostración: Sea $f : T_1 \rightarrow T_2$ un morfismo no nulo y supongamos que f no es un monomorfismo ni un epimorfismo. Llamando $M = \text{Im } f$, tenemos que f se factoriza como $f = gh$ con $h : T_1 \rightarrow M$ el epimorfismo canónico y $g : M \rightarrow T_2$ la inclusión.

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \xrightarrow{f} & T_2 \\ & \searrow h & \nearrow g \\ & M & \end{array}$$

Como f no es monomorfismo ni epimorfismo, $\dim_{\mathbf{k}} M < \dim_{\mathbf{k}} T_1$ y $\dim_{\mathbf{k}} M < \dim_{\mathbf{k}} T_2$, por lo que M no es isomorfo a T_1 ni a T_2 .

Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \ker h \longrightarrow T_1 \xrightarrow{h} M \longrightarrow 0$$

Aplicando el funtor $\text{Ext}_A^1(T_2/M, -)$ a esta sucesión, obtenemos la sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow \text{Ext}_A^1(T_2/M, T_1) \xrightarrow{\text{Ext}_A^1(T_2/M, h)} \text{Ext}_A^1(T_2/M, M) \longrightarrow \text{Ext}_A^2(T_2/M, \ker h) \rightarrow \dots$$

Como A es hereditaria y $\ker h$ es un A -módulo, tenemos que $\text{Ext}_A^2(T/M, \ker h) = 0$ y luego $\text{Ext}_A^1(T_2/M, h) : \text{Ext}_A^1(T_2/M, T_1) \rightarrow \text{Ext}_A^1(T_2/M, M)$ es sobreyectivo. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$(*) \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{g} T_2 \longrightarrow T_2/M \longrightarrow 0$$

Viendo a $(*)$ como un elemento de $\text{Ext}_A^1(T_2/M, M)$, la sobreyectividad de $\text{Ext}_A^1(T_2/M, h)$ nos dice que existe $\varepsilon \in \text{Ext}_A^1(T_2/M, T_1)$ que se mapea por h a $(*)$. Es decir, existe un A -módulo N y morfismos tal que el siguiente diagrama es conmutativo con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T_1 & \xrightarrow{g'} & N & \longrightarrow & T_2/M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow h' & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{g} & T_2 & \longrightarrow & T_2/M \longrightarrow 0 \end{array}$$

Esto implica que tenemos una sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow T_1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} h \\ -g' \end{bmatrix}} M \oplus N \xrightarrow{[g \ h']} T_2 \longrightarrow 0$$

Como $\text{Ext}_A^1(T_2, T_1) = 0$ por hipótesis, esta sucesión escinde. Por tanto $M \oplus N \cong T_1 \oplus T_2$ y por la unicidad de la descomposición en indescomponibles, $M = \text{Im } f$ es isomorfo a T_1 o T_2 , lo que es absurdo pues f no era monomorfismo ni epimorfismo.

Para la otra afirmación, simplemente notar que todo monomorfismo o epimorfismo $T_1 \rightarrow T_1$ debe ser también un isomorfismo. $\square$

Corolario 4.3.8. *Si B es un álgebra inclinada, entonces el carcaj Q_B de B es acíclico.*

Demostración: Como B es un álgebra inclinada $B = \text{End } T_A$ donde A es hereditaria y T es un A -módulo inclinante. Supongamos por absurdo que Q_B no es acíclico.

Como los puntos de Q_B están en correspondencia con los sumandos directos de T , tenemos que todo ciclo en Q_B induce un ciclo en $\text{mod } A$

$$T_1 \xleftarrow{f_1} T_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \longrightarrow T_k$$

f_k

donde $f_1, \dots, f_k$ son morfismos no nulos que no son isomorfismos y $T_1, \dots, T_k$ son sumandos directos indescomponibles de T .

Notar que no podemos tener un epimorfismo que no es monomorfismo seguido de un monomorfismo que no es epimorfismo, pues su composición sería un morfismo no nulo entre T_i y T_j que no es un monomorfismo ni un epimorfismo, contradiciendo Lema 4.3.7 pues $\text{Ext}_A^1(T_i, T_j) = 0 \ \forall i, j$. Por tanto, o bien los morfismos f_i son todos monomorfismos o son todos epimorfismos. Se sigue que $f_k \circ \cdots \circ f_1 \in \text{End } T_1$ es un monomorfismo o un epimorfismo, luego un isomorfismo y esto contradice Lema 4.3.7. $\square$

El siguiente resultado es un lema técnico que es clave para probar la existencia de una sección en un álgebra inclinada, generalizando el Ejemplo 4.1.5.

Lema 4.3.9. *Sea A un álgebra, I un A -módulo inyectivo indescomponible no simple, T_A un módulo inclinante escindente y $B = \text{End } T_A$. Si $Y_B \in \mathcal{Y}(T)$ es indescomponible, entonces existe un morfismo irreducible $\text{Hom}_A(T, I) \rightarrow Y$ en $\text{mod } B$ si y sólo si existe*

un A -módulo indescomponible J tal que $Y \cong \text{Hom}_A(T, J)$ y J es isomorfo a un sumando directo de $I/\text{soc } I$.

Demostración: ($\Leftarrow$) Consideremos la proyección canónica $p : I \rightarrow I/\text{soc } I$, que es irreducible en $\text{mod } A$ pues I es inyectivo no simple. Veamos que $f = \text{Hom}_A(T, p)$ es irreducible en $\text{mod } B$.

Como I e $I/\text{soc } I$ pertenecen a $\mathcal{T}(T)$ y $\text{Hom}_A(T, -)$ induce una equivalencia de categorías $\mathcal{Y}(T) \xrightarrow{\cong} \mathcal{T}(T)$, f no es sección ni retracción.

Supongamos que tenemos una factorización $f = hg$ con $g : \text{Hom}_A(T, I) \rightarrow Z$ y $h : Z \rightarrow \text{Hom}_A(T, I/\text{soc } I)$ morfismos en $\text{mod } B$. Como $f \neq 0$, entonces $h \neq 0$ y tenemos que $Z \notin \mathcal{X}(T)$. Luego $Z \in \mathcal{Y}(T)$, por ser T_A escindente, y por tanto existe $M \in \mathcal{T}(T)$ tal que $Z \cong \text{Hom}_A(T, M)$ y morfismos de A -módulos $g' : I \rightarrow M$ y $h' : M \rightarrow I/\text{soc } I$ tal que $g = \text{Hom}_A(T, g')$ y $h = \text{Hom}_A(T, h')$. Se sigue que $p = h'g'$ y por tanto h' es una retracción o g' es una sección, lo que implica que h es una retracción o g es una sección.

Concluimos que f es irreducible y por tanto todo morfismo $\text{Hom}_A(T, I) \rightarrow Y \cong \text{Hom}_A(T, J)$ con J sumando directo de $I/\text{soc } I$ es irreducible por [3, Teorema IV.1.10].

($\Rightarrow$) Sean $Y \in \mathcal{Y}(T)$ un B -módulo indescomponible y $f : \text{Hom}_A(T, I) \rightarrow Y$ un morfismo irreducible en $\text{mod } B$. Entonces existe un A -módulo indescomponible J tal que $Y \cong \text{Hom}_A(T, J)$ y un morfismo de B -módulos $f' : I \rightarrow J$ tal que $f = \text{Hom}_A(T, f')$. Como $p : I \rightarrow I/\text{soc } I$ es casi escindido minimal a izquierda (ver Ejemplo 1.6.8), existe $g' : I/\text{soc } I \rightarrow J$ tal que $f' = g'p$. Más aún, como f es irreducible en $\text{mod } B$, por la equivalencia $\mathcal{Y}(T) \cong \mathcal{T}(T)$ tenemos que f' es irreducible en $\mathcal{T}(T)$ y por tanto en $\text{mod } A$ (pues al ser $\mathcal{T}(T)$ cerrada por imágenes toda factorización de f' en $\text{mod } A$ es a través de un módulo de $\mathcal{T}(T)$). Por lo tanto, g' es una retracción y concluimos que J es isomorfo a un sumando directo de $I/\text{soc } I$. $\square$

Observación 4.3.10. Notemos que si A es un álgebra hereditaria e $I(a)$ es un A -módulo inyectivo indescomponible, todo sumando directo de $I(a)/\text{soc } I(a)$ es inyectivo, por lo que existe un morfismo irreducible $I(a) \rightarrow J$ en $\text{mod } A$ con J indescomponible si y sólo si $J \cong I(b)$ y existe una flecha $b \rightarrow a$ en Q_A .

Usaremos esta observación junto al lema anterior varias veces en la demostración del siguiente teorema.

Teorema 4.3.11. Sea A un álgebra hereditaria, T_A un módulo inclinante y $B = \text{End } T_A$. Entonces la clase Σ de todos los B -módulos de la forma $\text{Hom}_A(T, I)$, donde I es un A -módulo inyectivo indescomponible, forma una sección en una componente acíclica C_T de $\Gamma(\text{mod } B)$. Más aún, Σ es isomorfa a Q_A^{op} , todo predecesor de Σ en C_T pertenece a $\mathcal{Y}(T)$ y todo sucesor propio de Σ en C_T pertenece a $\mathcal{X}(T)$.

Demostración: Veamos primero que Σ es isomorfo como carcaj a la sección Ω de $\Gamma(\text{mod } A)$ que consiste de todos los A -módulos inyectivos indescomponibles, que es isomorfa a Q_A^{op} por Ejemplo 4.1.5. Basta ver que $\Sigma_1 = \Omega_1$, pues claramente $\Sigma_0 = \Omega_0$.

Separemos el caso donde S es un A -módulo inyectivo simple, que no entra en las hipótesis del Lema 4.3.9. Notar primero que en tal caso todo morfismo que sale de S es un monomorfismo por ser S simple y una sección por ser S inyectivo. Por tanto, no hay morfismos irreducibles en $\text{mod } A$ que salgan de S . Ahora, si $\text{Hom}_A(T, S) \rightarrow X$ es un morfismo irreducible en $\text{mod } B$, entonces $X \in \mathcal{X}(T)$, pues si fuese $X \in \mathcal{Y}(T)$ tendríamos que $\exists M \in \mathcal{T}(T)$ tal que $\text{Hom}_A(T, M) = X$ y como $\text{Hom}_A(T, S) \in \mathcal{Y}(T)$, tendríamos un

morfismo irreducible $S \rightarrow M$ en $\text{mod } A$ por la equivalencia $\mathcal{Y}(T) \cong \mathcal{T}(T)$, lo que es absurdo. Por tanto $X \notin \mathcal{Y}(T)$ y debe ser $X \in \mathcal{X}(T)$ por ser T escindente. En particular, el morfismo no pertenece a Σ_1 .

Cubierto este caso, veamos que pasa con los inyectivos indescomponibles no simples. Sea $\text{Hom}_A(T, I) \rightarrow \text{Hom}_A(T, I')$ un morfismo irreducible en $\text{mod } B$, con I e I' dos A -módulos inyectivos indescomponibles con I no simple.

Por el lema 4.3.9, I' es isomorfo a un sumando directo de $I/\text{soc } I$, por lo que existe un morfismo irreducible $I \rightarrow I'$ en $\text{mod } A$.

Recíprocamente, si existe un morfismo irreducible $I \rightarrow I'$ en $\text{mod } A$, entonces I' es isomorfo a un sumando directo de $I/\text{soc } I$ por lo que, de nuevo por el lema 4.3.9, existe un morfismo irreducible $\text{Hom}_A(T, I) \rightarrow \text{Hom}_A(T, I')$ en $\text{mod } B$. Ahora, la equivalencia $\mathcal{Y}(T) \cong \mathcal{T}(T)$ induce un isomorfismo

$$\text{Irr}(I, I') \cong \text{Irr}(\text{Hom}_A(T, I), \text{Hom}_A(T, I'))$$

lo que termina de probar el isomorfismo entre los carcajes Σ y $\Omega \cong Q_A^{\text{op}}$.

Esto nos muestra también que Σ es un subcarcaj acíclico completo de $\Gamma(\text{mod } B)$ y, en particular, que Σ cumple (S1). Notemos por $\mathcal{C}_T$ a la componente conexa de $\Gamma(\text{mod } B)$ que contiene a Σ .

Como todo módulo de Σ pertenece a $\mathcal{Y}(T)$, que es cerrado por predecesores, todo predecesor de Σ en $\mathcal{C}_T$ pertenece a $\mathcal{Y}(T)$. Por otro lado, si existe un morfismo irreducible $Y \rightarrow X$ con $Y = \text{Hom}_A(T, I)$ para I un A -módulo indescomponible inyectivo y $X \notin \Sigma$, entonces $X \notin \mathcal{Y}(T)$ (*). Ya probamos que esto vale para I inyectivo simple. Si I es inyectivo indescomponible no simple y fuese $X \in \mathcal{Y}(T)$, entonces por lema 4.3.9 sería $X \cong \text{Hom}_A(T, J)$ donde J es un A -módulo inyectivo indescomponible y por tanto $X \in \Sigma$, absurdo.

Como T es escindente, tenemos que $X \in \mathcal{X}(T)$ y como $\mathcal{X}(T)$ es cerrado por sucesores, todo sucesor propio de Σ pertenece a $\mathcal{X}(T)$.

Ahora, si $Y_0 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_k$ es una cadena de morfismos irreducibles, con $Y_0, Y_k \in \Sigma$, entonces $Y_1 \in \mathcal{Y}(T)$ por ser predecesor de Y_k y por tanto $Y_1 \in \Sigma$, pues si no fuese así, tendríamos un morfismo irreducible $Y_0 \rightarrow Y_1$ con $Y_1 \notin \mathcal{Y}(T)$ y mostramos que esto no puede pasar en (*). Inductivamente vemos que $Y_i \in \Sigma \forall 0 \leq i \leq k$ y por tanto que Σ es convexo, es decir Σ cumple (S2).

Falta probar entonces que Σ cumple (S3), lo que terminaría de probar que Σ es una sección en $\mathcal{C}_T$. Veamos entonces que Σ intersecta a toda τ -órbita en $\mathcal{C}_T$.

Para esto, sea $Y \in \Sigma$ y $Z_0 \in \mathcal{C}_T$ tal que para algún Z en la τ -órbita de Z_0 existe $n \in \mathbb{Z}$ y un morfismo irreducible $\tau^n Y \rightarrow Z$ o $Z \rightarrow \tau^n Y$. Supongamos que $|n|$ es minimal y veremos que $n = 0$. Tenemos dos casos:

(i) Si $n < 0$, entonces $Z \in \mathcal{Y}(T)$ pues si no, $Z \in \mathcal{X}(T)$ implica que Z no es proyectivo y existe un morfismo irreducible $\tau^{n+1} Y \rightarrow \tau Z$ o $\tau Z \rightarrow \tau^{n+1} Y$, respectivamente. Esto contradice la minimalidad de n , pues τZ pertenece a la órbita de Z_0 y $|n+1| < |n|$ por ser $n < 0$.

Ahora, como existe una cadena de morfismos irreducibles $Y \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^{-1} Y$, entonces $\tau^{-1} Y \in \mathcal{X}(T)$ por el Proposición 3.4.5. Como $Z \in \mathcal{Y}(T)$ e $\mathcal{Y}(T)$ es cerrado por predecesores, Z no puede ser un sucesor de $\tau^{-1} Y$ y por tanto existe un morfismo irreducible $Z \rightarrow \tau^{-1} Y$, y por tanto un morfismo irreducible $Y \rightarrow Z$. Por tanto era $n = 0$.

(ii) Sea $n > 0$. Si $Z \notin \Sigma \cup \mathcal{X}(T)$, entonces Z no es inyectivo y existe un morfismo irreducible $\tau^{n-1}Y \rightarrow \tau^{-1}Z$ o $\tau^{-1}Z \rightarrow \tau^{n-1}Y$, y esto contradice la minimalidad de n . Por otro lado, si $Z \in \mathcal{X}(T)$, entonces Z es un predecesor de $Y \in \mathcal{Y}(T)$ y esto es una contradicción por ser $\mathcal{Y}(T)$ cerrado por predecesores. Con esto concluimos que $Z \in \Sigma$ y por tanto $n = 0$.

En consecuencia, estamos siempre en el caso $n = 0$, es decir, tenemos que existe un morfismo irreducible $Y \rightarrow Z$ o $Z \rightarrow Y$. En el primer caso, por Lema 4.3.9, o bien Z o τZ pertenece a Σ . En el segundo caso, necesariamente $Z \in \mathcal{Y}(T)$. Luego, $Z \in \Sigma$ o Z no es inyectivo y por tanto existe un morfismo irreducible $Y \rightarrow \tau^{-1}Z$ y caemos en el primer caso.

Probamos entonces que si $Y \in \Sigma$ y $Z \in \mathcal{C}_T$, entonces

$$\{\tau^n Z : n \in \mathbb{Z}\} \cap \{\tau^m Y : m \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset \implies \{\tau^n Z : n \in \mathbb{Z}\} \cap \Sigma \neq \emptyset.$$

Tomando Z_0 en esta intersección, vemos que si $Z' \in \mathcal{C}_T$, entonces

$$\{\tau^n Z' : n \in \mathbb{Z}\} \cap \{\tau^m Z_0 : m \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset \implies \{\tau^n Z' : n \in \mathbb{Z}\} \cap \Sigma \neq \emptyset$$

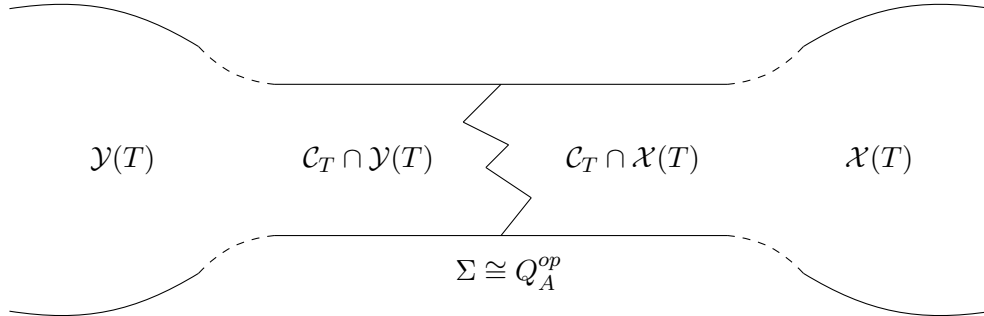
por el mismo argumento y, de forma inductiva, como $\mathcal{C}_T$ es conexo, concluimos que Σ interseca a toda τ -órbita en $\mathcal{C}_T$.

Finalmente, si Y y $\tau^{-t}Y$ pertenecen a Σ con $t \geq 1$, entonces $\tau^{-t}Y \in \mathcal{Y}(T)$ implica que $\tau^{-1}Y \in \mathcal{Y}(T)$ y esto contradice el Proposición 3.4.5. Esto muestra que Σ interseca a toda τ -órbita en $\mathcal{C}_T$ una sola vez y, por tanto, que Σ cumple (S3).

Concluimos que Σ es una sección en $\mathcal{C}_T$ y, en particular, que $\mathcal{C}_T$ es acíclico por Proposición 4.1.8. $\square$

Definición 4.3.12. La componente $\mathcal{C}_T$ de $\Gamma(\text{mod } B)$ se llama componente de conexión de $\Gamma(\text{mod } B)$ determinada por T .

La siguiente imagen muestra la componente de conexión $\mathcal{C}_T$ en $\Gamma(\text{mod } B)$ para $B = \text{End } T_A$.



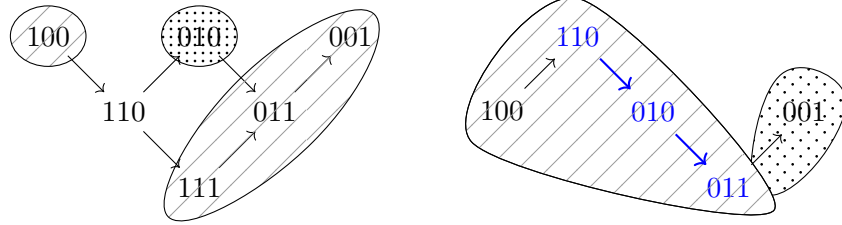
Ejemplo 4.3.13. Sea A el álgebra dada por el carcaj

$$\begin{array}{c} 3 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{\alpha} \begin{array}{c} 2 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{\beta} \begin{array}{c} 1 \\ \circ \end{array}$$

y T el A -módulo inclinante $T = S(1) \oplus P(3) \oplus S(1)$. Tenemos que $B = \text{End } T_A$ es el álgebra dada por el mismo carcaj pero con la relación $\alpha\beta = 0$.

Vemos que $\text{Hom}_A(T, I(1)) = P(2)$, $\text{Hom}_A(T, I(2)) = S(2)$ y $\text{Hom}_A(T, I(3)) = I(2)$. En la siguiente imagen mostramos $\Gamma(\text{mod } A)$ con el par de torsión $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ y

$\Gamma(\text{mod } B)$ con el par de torsión $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ y la componente de conexión $\mathcal{C}_T$, que es el subcarcaj completo de $\Gamma(\text{mod } B)$ que contiene a $P(2), S(2)$ e $I(2)$, marcada de azul:



4.4. Criterio de Liu y Skowroński

Para decidir si un álgebra B es inclinada, es decir, decidir si existe un álgebra hereditaria H y un H -módulo inclinante T tal que $B = \text{End } T_H$, precisamos tener una caracterización intrínseca de las álgebras inclinadas. En esta sección veremos el criterio de Liu y Skowroński, que caracteriza a las álgebras inclinadas como aquellas cuyo carcaj de Auslander-Reiten contiene una sección con ciertas propiedades razonables.

Veremos esta caracterización de las álgebras inclinadas en vez de, por ejemplo, la dada en [7, Proposición 7.1, Teorema 7.2], ya que usaremos el criterio en la clasificación de las álgebras inclinadas de tipo A_n , en el siguiente capítulo (5).

Para este criterio serán de gran importancia los módulos fieles. Ver Definición 3.5.3 y las caracterizaciones equivalentes dadas en el Lema 3.5.4. Veamos ahora algunos lemas que precisamos para probar el criterio de Liu-Skowroński.

Lema 4.4.1. *Sea A un álgebra y M un A -módulo fiel. Entonces:*

- (a) *Si $\text{Hom}_A(M, \tau M) = 0$, entonces $\text{pd } M \leq 1$.*
- (b) *Si $\text{Hom}_A(\tau^{-1} M, M) = 0$, entonces $\text{id } M \leq 1$.*

Demostración: Probaremos (a), siendo (b) similar. Como M es fiel, por Lema 3.5.4 $DA \in \text{Gen}(M)$, o sea existe $s \geq 1$ y un epimorfismo $M^s \rightarrow DA$. Tras aplicar el funtor $\text{Hom}_A(-, \tau M)$ obtenemos un monomorfismo $\text{Hom}_A(DA, \tau M) \rightarrow \text{Hom}_A(M, \tau M)^s = 0$. Por tanto $\text{Hom}_A(DA, \tau M) = 0$ y por Lema 1.6.21 tenemos $\text{pd } M \leq 1$. $\square$

Observación 4.4.2. Si M es un A -módulo fiel tal que $\text{Hom}_A(M, \tau M) = 0$, entonces M es un A -módulo inclinante parcial. Es claro por el lema anterior que M cumple (T1) y el isomorfismo $\text{Ext}_A^1(M, M) \cong D \text{Hom}_A(M, \tau M) = 0$, dado por el Corolario 1.6.24, nos dice que M cumple (T2).

Lema 4.4.3. *Sea A un álgebra, I un ideal bilátero de A y $B = A/I$. Si M es un B -módulo, entonces el trasladado de Auslander-Reiten $\tau_B M$ de M en $\text{mod } B$ es un submódulo del trasladado de Auslander-Reiten $\tau_A M$ de M en $\text{mod } A$.*

Demostración: Para todo A -módulo N , definimos el B -módulo

$$\mathbf{t}_I(N) = \{x \in N : xI = 0\} \subseteq N.$$

Para cada morfismo de A -módulos $f : N \rightarrow L$, la restricción $\mathbf{t}_I(f) : \mathbf{t}_I(N) \rightarrow \mathbf{t}_I(L)$ de f a $\mathbf{t}_I(N)$, es un morfismo de B -módulos. Tenemos definido entonces un funtor covariante $\mathbf{t}_I : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } B$.

Sea M_B un B -módulo. Supongamos que, visto como A -módulo, M_A es proyectivo y, sin pérdida de generalidad, asumamos que M_A es indescomponible. Ahora, si $g : X \rightarrow Y$ es un epimorfismo de B -módulos, es también un epimorfismo de A -módulos y como $\text{Hom}_B(M, Z) = \text{Hom}_A(M, Z)$ para todo B -módulo Z , tenemos que $\text{Hom}_B(M, g) : \text{Hom}_B(M, X) \rightarrow \text{Hom}_B(M, Y)$ es sobreyectivo por ser M_A proyectivo como A -módulo. Por tanto M_B es proyectivo como B -módulo y $\tau_B M = 0$ es un submódulo de $\tau_A M = 0$.

Veamos ahora el caso donde M_B no es proyectivo. Veremos que existe un morfismo inyectivo $\tau_B M \rightarrow \mathbf{t}_I(\tau_A M)$ y por tanto que $\tau_B M$ es un submódulo de $\tau_A M$, pues $\mathbf{t}_I(\tau_A M)$ es un submódulo de $\tau_A M$.

Como M_B no es proyectivo, tampoco lo es M_A y por tanto existe una sucesión casi escindida

$$0 \longrightarrow \tau_A M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

en mod A . Aplicando el funtor $\mathbf{t}_I$ obtenemos una sucesión exacta corta en mod B

$$0 \longrightarrow \mathbf{t}_I(\tau_A M) \xrightarrow{\mathbf{t}_I(f)} \mathbf{t}_I(E) \xrightarrow{\mathbf{t}_I(g)} M = \mathbf{t}_I(M) \longrightarrow 0$$

donde $\mathbf{t}_I(M) = M$ por ser M un B -módulo. Ahora, el morfismo $\mathbf{t}_I(g)$ no es una retracción, pues si lo fuese tendríamos $g \circ \iota \circ s = \mathbf{t}_I(g) \circ s = \text{id}_M$ para algún morfismo $s : M \rightarrow \mathbf{t}_I(E)$ e $\iota : \mathbf{t}_I(E) \rightarrow E$ la inclusión, pero g no es una retracción. Además, si X_B es un B -módulo y $u : X_B \rightarrow M_B$ no es una retracción, entonces $u : X_A \rightarrow M_A$ visto como morfismo de A -módulos no es una retracción, y como g es casi escindido minimal a derecha tenemos que existe $v : X_A \rightarrow E_A$ morfismo en mod A tal que $u = gv$. Como $XI = 0$ por ser X un B -módulo, $v(x)I = v(xI) = 0 \forall x \in X$ y por tanto $\text{Im } v \subset \mathbf{t}_I(E)$. Por tanto, v es un morfismo $v : X_B \rightarrow \mathbf{t}_I(E)$ en mod B tal que $u = \mathbf{t}_I(g)v$. Esto termina de probar que $\mathbf{t}_I(g)$ es casi escindido minimal a derecha en mod B .

Ahora, como M_B no es proyectivo, existe una sucesión casi escindida en mod B

$$0 \longrightarrow \tau_B M \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} M \longrightarrow 0$$

Como $\mathbf{t}_I(g)$ es casi escindido minimal a derecha en mod B y g' no es una retracción, $\exists h : E' \rightarrow \mathbf{t}_I(E)$ morfismo de B -módulos tal que $\mathbf{t}_I(g)h = g'$. Como g' es casi escindido minimal a derecha, entonces es irreducible y como $\mathbf{t}_I(g)$ no es retracción, h debe ser una sección.

Consideremos ahora el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tau_B M & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h' & & \downarrow h & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{t}_I(\tau_A M) & \xrightarrow{\mathbf{t}_I(f)} & \mathbf{t}_I(E) & \xrightarrow{\mathbf{t}_I(g)} & \mathbf{t}_I(M) \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde h' se obtiene pasando al núcleo. Como h es inyectiva por ser una sección, también lo es h' . Esto muestra que $\tau_B M$ es un submódulo de $\mathbf{t}_I(\tau_A M)$, y por tanto un submódulo de $\tau_A M$. $\square$

Lema 4.4.4. Sea A un álgebra y n el rango del grupo de Grothendieck de $K_0(A)$ de A . Si un A -módulo M es suma directa de m módulos indescomponibles no isomorfos 2 a 2 y $\text{Hom}_A(M, \tau_A M) = 0$, entonces $m \leq n$.

Demostración: El anulador a derecha $\text{Ann}(M)$ de M es un ideal bilátero, por lo que si $B = A/\text{Ann}(M)$, tenemos por el Creflema 8.5.2 que $\tau_B M$ es un submódulo de τ_A . Luego, $\text{Hom}_A(M, \tau_A M) = 0$ implica que $\text{Hom}_B(M, \tau_B M) = 0$ y como M es un B -módulo fiel, es inclinante parcial por la Observación 4.4.2.

Luego por el Lema de Bongartz 2.2.9 existe un B -módulo N tal que $M \oplus N$ es un B -módulo inclinante. Por Corolario 3.2.3 tenemos $m \leq \text{rk } K_0(B)$ y como $B = A/\text{Ann}(M)$, $\text{rk } K_0(B) \leq \text{rk } K_0(A) = n$. Sigue que $m \leq n$. $\square$

Dada una sección Σ en el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod } B)$ de un álgebra B , consideramos $\tau\Sigma := \{\tau W : W \in \Sigma\}$ y $\tau^{-1}\Sigma := \{\tau^{-1}W : W \in \Sigma\}$. El lema 4.1.7 nos dice, con esta notación, que

- (a) Si $U_B \in \Sigma$ y existe un morfismo irreducible $V \rightarrow U$ en $\text{mod } B$, entonces $V_B \in \Sigma$ o $V_B \in \tau\Sigma$.
- (b) Si $U_B \in \Sigma$ y existe un morfismo irreducible $U \rightarrow V$ en $\text{mod } B$, entonces $V_B \in \Sigma$ o $V_B \in \tau^{-1}\Sigma$.

Con esto en mente, veamos el siguiente lema.

Lema 4.4.5. *Sea B un álgebra, $\mathcal{C}$ una componente de $\Gamma(\text{mod } B)$ y Σ un subcarcaj acíclico, completo y conexo de $\mathcal{C}$.*

- (a) *Supongamos que si U pertenece a Σ y existe un morfismo irreducible $V \rightarrow U$, entonces $V \in \Sigma$ o $V \in \tau\Sigma$. Entonces todo morfismo $f : X \rightarrow U$ entre indescomponibles $U \in \Sigma$ y $X \notin \Sigma$ se factoriza vía una suma directa de módulos de $\tau\Sigma$.*
- (b) *Supongamos que si U pertenece a Σ y existe un morfismo irreducible $U \rightarrow V$, entonces $V \in \Sigma$ o $V \in \tau^{-1}\Sigma$. Entonces todo morfismo $g : U \rightarrow X$ entre indescomponibles $U \in \Sigma$ y $X \notin \Sigma$ se factoriza vía una suma directa de módulos de $\tau^{-1}\Sigma$.*

Demostración: Probaremos (a), siendo (b) similar.

Supongamos que $f : X \rightarrow U$ es un morfismo entre indescomponibles $U \in \Sigma$ y $X \notin \Sigma$. Como Σ es finito y acíclico, podemos probar el resultado por inducción en una sucesión admisible de fuentes (ver 4.1.12).

Supongamos primero que U es una fuente en Σ y consideremos el morfismo casi escindido minimal a derecha $u : E \rightarrow U$. Por ser U una fuente, todo sumando de E pertenece a $\tau\Sigma$ y como f se factoriza por u , terminamos.

Supongamos ahora que U no es una fuente y consideremos el morfismo casi escindido minimal a derecha $u : E \rightarrow U$. Entonces $E = E' \oplus E''$, donde todos los sumandos directos indescomponibles de E' pertenecen a τE y todos los sumandos directos indescomponibles de E'' pertenecen a τE y son predecesores de U en la sucesión admisible de fuentes. Entonces, f se factoriza por $u = [u' \ u''] : E' \oplus E'' \rightarrow U$ porque, por inducción, el morfismo $X \rightarrow E''$ obtenido se factoriza por una suma directa de módulos en $\tau\Sigma$. $\square$

Observar que las hipótesis (a) y (b) se cumplen si Σ es una sección, por el Lema 4.1.7.

Lema 4.4.6. *Sea B un álgebra, $\mathcal{C}$ una componente de $\Gamma(\text{mod } B)$ que contiene una sección finita Σ y T_B la suma directa de todos los módulos en Σ . Entonces,*

$$\text{Hom}_B(T, \tau T) = 0 \iff \text{Hom}_B(\tau^{-1}T, T) = 0.$$

Demostración: Sea $p : P \rightarrow \tau^{-1}T$ una cobertura proyectiva de $\tau^{-1}T$. Por Lema 4.4.5(a) aplicado a $\tau^{-1}\Sigma$, p se factoriza por una suma directa de módulos en Σ , o sea existen morfismos $u : P \rightarrow X$ y $v : X \rightarrow \tau^{-1}T$ tal que $p = vu$ y $X \in \text{add } T$. Por tanto, existe $t \geq 1$ y un epimorfismo $u' : T^t \rightarrow X$. Como p es un epimorfismo, u es un epimorfismo y por tanto $f := uu' : T^t \rightarrow \tau^{-1}T$ es un epimorfismo. Dualmente, considerando una envolvente inyectiva de τT , llegamos a que existe $s \geq 1$ y un monomorfismo $g : \tau T \rightarrow T^s$.

Ahora, asumamos que $\text{Hom}_B(T, \tau T) \neq 0$ y sea $0 \neq h : T \rightarrow \tau T$ un morfismo de B -módulos. Por Lema 4.4.5(b) aplicado a Σ , existe $r \geq 1$ y una factorización $h = h_2 h_1$, donde $h_1 : T \rightarrow (\tau^{-1}T)^r$ y $h_2 : (\tau^{-1}T)^r \rightarrow \tau T$. Luego, la composición $gh_2 : (\tau^{-1}T)^r \rightarrow T^s$ es un morfismo no nulo, y por tanto $\text{Hom}_B(\tau^{-1}T, T) \neq 0$. Análogamente, $\text{Hom}_B(\tau^{-1}T, T) \neq 0$ implica que $\text{Hom}_B(T, \tau T) \neq 0$, usando el morfismo f obtenido anteriormente. $\square$

Lema 4.4.7. *Sea B un álgebra, Σ una sección finita en una componente $\mathcal{C}$ del carcaj $\Gamma(\text{mod } B)$ y T_B la suma directa de todos los módulos en Σ . Si T es un B -módulo fiel y $\text{Hom}_B(T, \tau T) = 0$, entonces T es un B -módulo inclinante.*

Demostración: Por Observación 4.4.2, T es inclinante parcial. En particular, $\text{pd}_B T \leq 1$. Además, por el Lema 4.4.6, tenemos $\text{Hom}_B(\tau^{-1}T, T) = 0$, por lo que $\text{id}_B T \leq 1$ por Lema 4.4.1(b).

Sea $\{f_1, \dots, f_d\}$ una k -base de $\text{Hom}_B(B, T) \cong T_B$ y consideremos el monomorfismo $f = [f_1 \dots f_d] : B \rightarrow T^d$. Tenemos una sucesión exacta corta

$$(*) \quad 0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} T^d \xrightarrow{g} U \longrightarrow 0$$

con $U = \text{coker } f$. Veremos que $T \oplus U$ es inclinante.

Como $\text{pd}_B T \leq 1$ y B_B es proyectivo, tenemos que $\text{pd}_B(U) \leq 1$ y por tanto $\text{pd}_B(T \oplus U) \leq 1$ y $T \oplus U$ cumple (T1). La sucesión $(*)$ muestra también que $T \oplus U$ cumple (T3). Veamos que $T \oplus U$ cumple (T2), o sea que vale

$$0 = \text{Ext}_B^1(T \oplus U, T \oplus U) \cong \text{Ext}_B^1(T, T) \oplus \text{Ext}_B^1(T, U) \oplus \text{Ext}_B^1(U, T) \oplus \text{Ext}_B^1(U, U).$$

Ya sabemos que $\text{Ext}_B^1(T, T) = 0$. Veamos que pasa con los otros sumandos. Aplicar el funtor $\text{Hom}_B(-, T)$ a $(*)$ nos da una sucesión exacta

$$\text{Hom}_B(T^d, T) \xrightarrow{\text{Hom}_B(T, f)} \text{Hom}_B(B, T) \longrightarrow \text{Ext}_B^1(U, T) \longrightarrow \text{Ext}_B^1(T^d, T) = 0$$

Por definición de f , el morfismo $\text{Hom}_B(f, T)$ es sobreyectivo y por tanto debe ser $\text{Ext}_B^1(U, T) = 0$.

Por otro lado, aplicar $\text{Hom}_B(U, -)$ a $(*)$ nos da una sucesión exacta

$$0 = \text{Ext}_B^1(U, T^d) \longrightarrow \text{Ext}_B^1(U, U) \longrightarrow \text{Ext}_B^2(U, B) = 0$$

donde la primera igualdad es por ser $\text{Ext}_B^1(U, T) = 0$ y la última por ser $\text{pd}_B U \leq 1$. Luego $\text{Ext}_B^1(U, U) = 0$.

Finalmente, aplicar $\text{Hom}_B(T, -)$ a $(*)$ nos da una sucesión exacta

$$0 = \text{Ext}_B^1(T, T^d) \longrightarrow \text{Ext}_B^1(T, U) \longrightarrow \text{Ext}_B^2(T, B) = 0$$

donde la última igualdad es por ser $\text{pd}T_B \leq 1$. Luego $\text{Ext}_B^1(T, U) = 0$, por lo que $T \oplus U$ cumple (T2) y por tanto es inclinante.

Veamos ahora que $U \in \text{add } T$.

Si fuese $U \notin \text{add } T$, tomamos U' un sumando directo indescomponible de U que no pertenezca a $\text{add } T$. Tenemos entonces un epimorfismo $T^d \xrightarrow{g} U \twoheadrightarrow U'$ y por tanto $\text{Hom}_B(T, U') \neq 0$. Por lema 4.4.5(b), tenemos $\text{Hom}_B(\tau^{-1}T, U') \neq 0$ y, como $\text{id}_B T \leq 1$, por Corolario 1.6.24 $\text{Ext}_B^1(U', T) \cong D \text{Hom}_B(\tau^{-1}T, U') \neq 0$. Esto contradice que $\text{Ext}_B^1(U, T) = 0$ y por tanto debe ser $U \in \text{add } T$. Como $T \oplus U$ era inclinante, concluimos que T es inclinante. $\square$

Definición 4.4.8. Decimos que una sección Σ en una componente $\mathcal{C}$ del carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod } B)$ de un álgebra B es fiel si la suma directa de todos los módulos que pertenecen a Σ es un módulo fiel.

Estamos ahora en condiciones de probar el criterio de Liu-Skowroński.

Teorema 4.4.9 (Criterio de Liu-Skowroński). *Un álgebra B es un álgebra inclinada si y sólo si el carcaj $\Gamma(\text{mod } B)$ contiene una componente $\mathcal{C}$ con una sección fiel Σ tal que $\text{Hom}_B(U, \tau V) = 0$ para todo par de módulos U y V en Σ .*

Más aún, en tal caso, la suma directa T_B de todos los módulos en Σ es un B -módulo inclinante con $A = \text{End } T_B$ hereditaria, y $\mathcal{C}$ es la componente de conexión de $\Gamma(\text{mod } B)$ determinada por el A -módulo inclinante $D({}_A T)$.

Demostración: ($\implies$) Sea B un álgebra inclinada. Existen un álgebra hereditaria A y un A -módulo inclinante T tales que $B = \text{End } T_A$. Por el teorema 4.3.11, la clase Σ de todos los módulos de la forma $\text{Hom}_A(T, I)$, donde I es un A -módulo inyectivo indescomponible, forman una sección en la componente de conexión $\mathcal{C}_T$ de $\Gamma(\text{mod } B)$ determinada por T .

Ahora, tenemos un isomorfismo $\text{Hom}_A(T, DA) \cong (DT)_B$ pues

$$(DT)_B \cong D({}_B T_A \otimes A) = \text{Hom}_k({}_B T_A \otimes_A A, k) \cong \text{Hom}_A(T, \text{Hom}_k(A, k)) \cong \text{Hom}_A(T, DA)$$

usando la definición de $D(-) = \text{Hom}_k(-, k)$ y el Teorema 1.5.17.

Como ${}_B T$ es inclinante, existe $m \geq 1$ y un monomorfismo ${}_B B \rightarrow {}_B T^m$, lo que nos da un epimorfismo $(DT)_B^m \rightarrow DB$. Por tanto $(DT)_B$ es fiel por el lema 3.5.4.

Como $(DT)_B \cong \text{Hom}_A(T, DA) = \text{Hom}_A(T, \bigoplus_{a \in (Q_A)_0} I(a)) \cong \bigoplus_{a \in (Q_A)_0} \text{Hom}_A(T, I(a))$, tenemos que $(DT)_B$ es la suma directa de todos los módulos en Σ y por tanto que Σ es fiel.

Finalmente, como $\text{Hom}_A(T, DA) \in \mathcal{Y}(T)$, por el lema de conexión (3.3.5), el módulo $\tau^{-1} \text{Hom}_A(T, DA) \cong \text{Ext}_A^1(T, A)$ pertenece a $\mathcal{X}(T)$. Por tanto, si U y V son módulos en Σ , entonces son submódulos de $\text{Hom}_A(T, DA)$ y tenemos $\text{Hom}_B(\tau^{-1}U, V) = 0$. Por Lema 4.4.6, $\text{Hom}_B(U, \tau V) = 0$ para todo U, V en Σ .

($\impliedby$) Sea ahora B un álgebra tal que $\Gamma(\text{mod } B)$ tiene una componente $\mathcal{C}$ con una sección fiel Σ tal que $\text{Hom}_A(U, \tau V) = 0 \ \forall \ U, V \in \Sigma$. Sea T_B la suma directa de todos los módulos en Σ y $A = \text{End } T_B$. Por Lema 4.4.4, tenemos que Σ es finito y luego el Lema 4.4.7 nos da que T_B es un módulo inclinante. Se sigue del Proposición 2.3.4 que ${}_A T$ es inclinante.

Ahora, como $\text{id}_{A^{op}}(DT) \leq 1$, tenemos $\text{Hom}_{A^{op}}((\tau^{-1})^{op}DT, A^{op}) = 0$ por Lema 1.6.21. Usando que $(\tau^{-1})^{op} = \tau$ y que $D\tau = \tau^{op}$, tenemos:

$\text{Hom}_{A^{op}}(DA^{op}, \tau^{op}DT) = \text{Hom}_{A^{op}}(DA^{op}, D(\tau^{-1})^{op}DT) \cong \text{Hom}_{A^{op}}((\tau^{-1})^{op}DT, A^{op}) = 0$ y entonces $\text{pd}_{A^{op}}D(A^T) \leq 1$, de nuevo por Lema 1.6.21.

Luego tenemos que $D(-)$ preserva (T1), y como claramente preserva (T2) y el número de módulos simples no isomorfos dos a dos, el Corolario 3.2.3 nos da que $D(A^T)$ es inclinante. Además cumple que $\varphi : B \rightarrow \text{End } D(A^T)$ definida como $\varphi(b)(f)(t) = f(tb)$ para $b \in B$, $t \in T_B$ y $f \in D(A^T)$ es un isomorfismo. Más aún, hay isomorfismos de B -módulos

$$\text{Hom}_A(D(A^T), DA) \cong \text{Hom}_A(A, T) \cong T.$$

Por tanto, $\mathcal{C}$ es la componente de conexión $\mathcal{C}_{D(A^T)}$ de $\Gamma(\text{mod } B)$ determinada por $D(A^T)$ y Σ es la sección del Teorema 4.3.11.

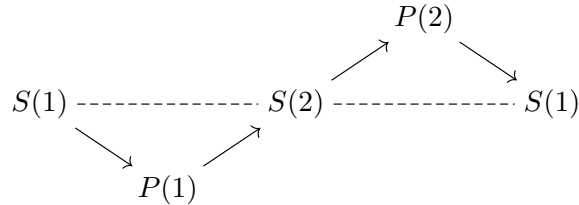
Falta ver que $A = \text{End } T_B$ es hereditaria. Para esto veremos que todo submódulo de un A -módulo proyectivo es proyectivo. Sea P un A -módulo proyectivo indescomponible y $f : M \rightarrow P$ un monomorfismo con M indescomponible. El módulo inclinante T_B determina pares de torsión $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ en $\text{mod } B$ y $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ en $\text{mod } A$. Como $P_A \in \mathcal{Y}(T)$, que es libre de torsión, tenemos $M_A \in \mathcal{Y}(T)$. Es decir, existe un morfismo $g : U \rightarrow V$ en $\text{mod } B$ con $U, V \in \mathcal{T}(T)$ tales que $\text{Hom}_B(T, g) = f$, $\text{Hom}_B(T, U) = M_A$, $\text{Hom}_B(T, V) = P_A$ y V pertenece a Σ . Esto último pues $\text{proj } A \cong \text{add } T$ por Lema 2.3.1 y por tanto existe $V \in \text{add } T$ indescomponible tal que $\text{Hom}_B(T, U) = P_A$. Por definición de T esto quiere decir que V pertenece a Σ . Probaremos que U pertenece a Σ y por tanto que el A -módulo $M = \text{Hom}_B(T, U)$ es proyectivo.

Como $M \neq 0$, existe un A -módulo proyectivo indescomponible P'_A y un morfismo no nulo $f' : P' \rightarrow M$. Se sigue que existe un morfismo $g' : V' \rightarrow U$ en $\text{mod } B$ tal que V' pertenece a Σ , $\text{Hom}_B(T, V') = P'_A$ y $\text{Hom}_B(T, g') = f'$. Como f es un monomorfismo, tenemos $ff' \neq 0$ y por tanto $gg' \neq 0$.

Supongamos ahora que U no pertenece a Σ . Como tenemos un morfismo $g : U \rightarrow V$ en $\text{mod } B$ con V en Σ , por Lema 4.4.5(a) existen morfismos de B -módulos $h : U \rightarrow W$ y $t : W \rightarrow V$ con W suma directa de módulos en $\tau\Sigma$ tales que $g = th$. Como $thg' = gg' \neq 0$, existe un morfismo no nulo $hg' : V' \rightarrow W$ y en consecuencia $\text{Hom}_B(T, \tau T) \neq 0$, lo cual contradice la condición $\text{Hom}(U, \tau V) = 0$ en Σ . $\square$

Ejemplo 4.4.10. Veamos un ejemplo donde valga $\text{Hom}_A(U, \tau V) = 0$ para todo $U, V \in \Sigma$, siendo Σ una sección de $\Gamma(\text{mod } A)$:

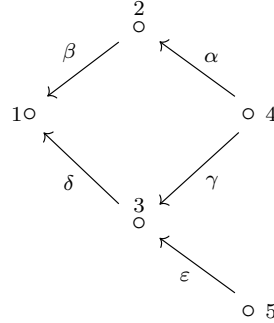
Consideremos el carcaj $Q = 1 \circ \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{matrix} \circ 2$, y el álgebra $A = \mathbf{k}Q/I$ con relaciones $\alpha\beta = 0 = \beta\alpha$. El carcaj de Auslander-Reiten tiene identificaciones:



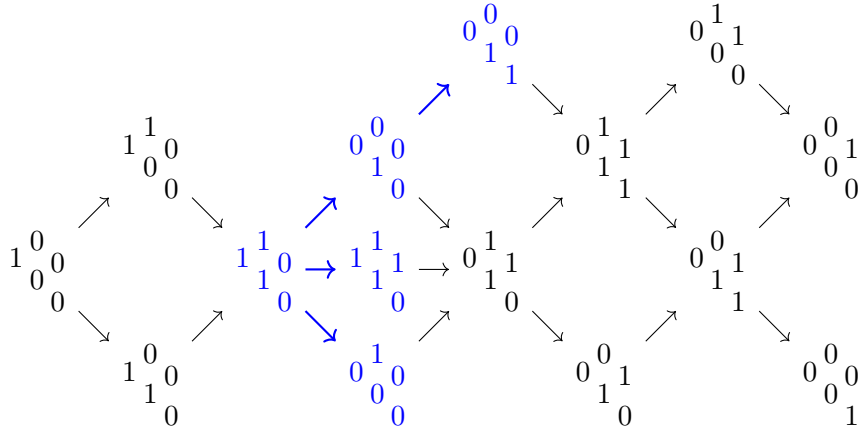
Para la sección $P(1), S(2), P(2)$, tenemos $\text{Hom}_A(P(2), \tau S(2)) = \text{Hom}_A(P(2), S(1)) \neq 0$.

Lo que está pasando es que la identificación de puntos en el carcaj de A-R permite que τ vaya "hacia la derecha" (y hacia la izquierda, en simultáneo).

Ejemplo 4.4.11. Sea B el álgebra dada por el carcaj



ligado por $\alpha\beta = \gamma\delta$ y $\varepsilon\delta = 0$. Ilustramos el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod } B)$ de B con una sección Σ marcada de azul en la siguiente imagen (donde los módulos indescomponibles están representados por su vector dimensión):



Es claro que $\text{Hom}_B(U, \tau V) = 0$ para todo U, V en Σ . Por otro lado, si T_B es la suma directa de todos los módulos en Σ , como todo B -módulo proyectivo es un submódulo de algún módulo en la sección Σ , A_A es cogenerado por T y Lema 3.5.4 nos da que T es fiel. Luego podemos aplicar Teorema 4.4.9 y tenemos que B es un álgebra inclinada.

Tenemos que $A = \text{End } T_B$ es el álgebra de caminos del siguiente carcaj de tipo $\mathbb{D}_5$

Usando 3.5, podemos calcular el A -módulo inclinante T' tal que $\text{End } T'_A = B$. Obtenemos

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 100 \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 100 \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 111 \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 000 \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} 001.$$

CAPÍTULO 5

Álgebras inclinadas de tipo $\mathbb{A}_n$

El objetivo de este capítulo es clasificar las álgebras inclinadas de tipo $\mathbb{A}_n$, es decir, dar una condición necesaria y suficiente sobre el carcaj Q_B y el ideal $\mathcal{I}_B$ de un álgebra $B = kQ/\mathcal{I}$ para que se cumpla que $B = \text{End } T_A$ donde A es un álgebra hereditaria de tipo $\mathbb{A}_n$ y T un A -módulo inclinante.

Para lograr esto, presentaremos una clase de álgebras llamadas amables y veremos que las álgebras inclinadas de tipo $\mathbb{A}_n$ se corresponden con una subclase de las álgebras amables de tipo árbol. Esta clasificación fue obtenida originalmente en [1].

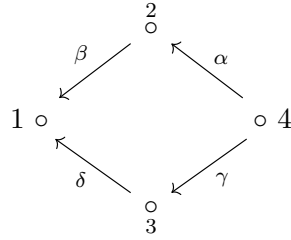
Definición 5.1.1. Sea A un álgebra con carcaj Q_A acíclico. El álgebra $A = kQ_A/\mathcal{I}$ se dice amable si el carcaj ligado $(Q_A, \mathcal{I})$ cumple las siguientes propiedades:

- (A1) Cada vértice de Q_A es origen y destino de a lo sumo dos flechas.
- (A2) Para cada flecha $\alpha \in (Q_A)_1$, hay a lo sumo una flecha β y una flecha γ tal que $\alpha\beta \notin \mathcal{I}$ y $\gamma\alpha \notin \mathcal{I}$.
- (A3) Para cada flecha $\alpha \in (Q_A)_1$, hay a lo sumo una flecha ε y una flecha δ tal que $\alpha\varepsilon \in \mathcal{I}$ y $\delta\alpha \in \mathcal{I}$.
- (A4) El ideal $\mathcal{I}$ está generado por caminos de largo 2.

Si además Q_A es un árbol, decimos que el álgebra A es amable de tipo árbol.

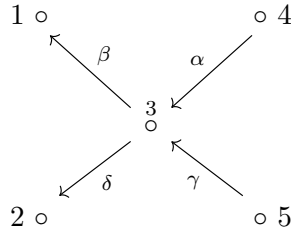
Veamos algunos ejemplos de álgebras amables.

Ejemplo 5.1.2. (a) El álgebra A dada por el carcaj



ligada por $\alpha\beta = 0$ y $\gamma\delta = 0$ es un álgebra amable.

(b) El álgebra B dada por el carcaj



ligada por $\alpha\beta = 0$ y $\gamma\delta = 0$ es amable de tipo árbol.

Se puede ver que B es inclinada de tipo $\mathbb{A}_n$, o sea que $B = \text{End}_A T$ donde A es el álgebra hereditaria dada por el carcaj

$$\begin{array}{ccccccc} \overset{1}{\circ} & \longleftarrow & \overset{2}{\circ} & \longrightarrow & \overset{3}{\circ} & \longleftarrow & \overset{4}{\circ} \longrightarrow \overset{5}{\circ} \end{array}$$

y T es el A -módulo inclinante

$$T = P(1) \oplus P(5) \oplus M \oplus I(1) \oplus I(5)$$

donde M es el A -módulo indescomponible con vector dimensión $\underline{\dim} M = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$.

(c) El álgebra C dada por el carcaj

$$\begin{array}{ccccccccc} \overset{\circ}{1} & \xleftarrow{\varepsilon} & \overset{\circ}{2} & \xleftarrow{\delta} & \overset{\circ}{3} & \xrightarrow{\gamma} & \overset{\circ}{4} & \xleftarrow{\beta} & \overset{\circ}{5} & \xleftarrow{\alpha} & \overset{\circ}{6} \end{array}$$

ligado por $\alpha\beta = 0$ y $\delta\varepsilon = 0$ es un álgebra amable de tipo árbol. Contrario a (b), esta álgebra no es inclinada de tipo $\mathbb{A}_n$ (de hecho no es inclinada de ningún tipo).

Para ver esto, tomamos el C -módulo indescomponible M con vector dimensión $\underline{\dim} M = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$. Veremos que vale $\text{pd} M > 1$ y $\text{id} M > 1$, lo que contradice el Lema 4.3.6(e) y por tanto implica que C no puede ser un álgebra inclinada.

La cobertura proyectiva de M es $P(3)$ pues $\text{top } P(3) = S(3) = \text{top } M$. Ahora, $\ker(P(3) \rightarrow M) = S(2)$ no es proyectivo y por tanto $\text{pd} M > 1$.

Análogamente, vemos que la envolvente inyectiva de M es $I(4)$ y $\text{coker}(M \rightarrow I(4)) = S(5)$ no es inyectivo, por lo que $\text{id} M > 1$.

Más adelante en el Lema 5.1.15 veremos que este último ejemplo es esencialmente el único caso donde un álgebra amable de tipo árbol no es inclinada de tipo $\mathbb{A}_n$. Antes de comenzar con la clasificación, precisamos algunas definiciones y resultados.

Definición 5.1.3. Un camino $M_0 \rightarrow \dots \rightarrow M_t$ en el carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra A se dice seccional si $\tau M_i \not\cong M_{i-2} \ \forall 1 < i \leq t$.

Por ejemplo, todo camino contenido en una sección del carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod } A)$ de un álgebra A es seccional.

Precisamos el siguiente resultado, del cual no daremos una demostración, pero que se debe a que un camino seccional no puede contener un “triángulo” del carcaj de Auslander-Reiten.

Proposición 5.1.4. [3, Corolario IX.2.2] *Dada un álgebra A y un camino de morfismos irreducibles correspondientes a un camino seccional $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{t-1}} M_t$ en $\Gamma(\text{mod } A)$, tenemos que su composición es no nula, o sea $f_{t-1} \cdots f_1 \neq 0$.*

La siguiente propiedad será importante para, una vez probado que las álgebras inclinadas de tipo $\mathbb{A}_n$ son amables, demostrar que son de tipo árbol.

Recordar que si $A = kQ/\mathcal{I}$ es un álgebra de carcaj ligado, el soporte de un A -módulo M es

$$\text{sop } M := \{i \in Q_0 : M_i \neq 0\}.$$

Definición 5.1.5. Sea A un álgebra con carcaj acíclico Q_A .

- (a) Se dice que un A -módulo proyectivo indecomponible $P(a)$ tiene radical separado si para cualquier par de sumandos indecomponibles M y N de $\text{rad } P(a)$ se tiene que $\text{sop}(M)$ y $\text{sop}(N)$ pertenecen a distintas componentes conexas del subcarcaj completo $Q_A(\overrightarrow{a})$ de Q_A generado por los vértices que no son predecesores de a .

Se dice que un álgebra A satisface la condición de separación si todo A -módulo proyectivo indecomponible tiene radical separado.

- (b) Se dice que un A -módulo inyectivo indecomponible $I(a)$ tiene coradical separado si para cualquier par de sumandos indecomponibles M y N de $I(a)/\text{soc } I(a)$ se tiene que $\text{sop}(M)$ y $\text{sop}(N)$ pertenecen a distintas componentes conexas del subcarcaj completo $Q_A(\overleftarrow{a})$ de Q_A generado por los vértices que no son sucesores de a .

Decimos que un álgebra A satisface la condición de coseparación si todo A -módulo inyectivo indecomponible tiene coradical separado.

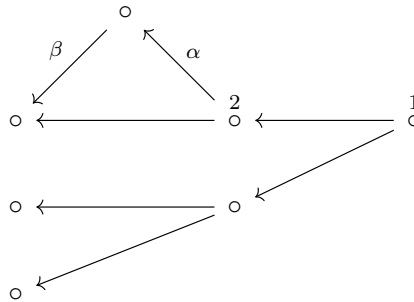
Notar que un álgebra A satisface la condición de separación si y sólo si su álgebra opuesta A^{op} satisface la condición de coseparación.

Veamos algunos ejemplos para entender mejor estos conceptos.

- Ejemplo 5.1.6.** (1) Si un A -módulo proyectivo indecomponible tiene radical indecomponible o cero, entonces tiene radical separado. Por ejemplo, todo A -módulo proyectivo simple tiene radical separado.
- (2) Consideremos el álgebra Ejemplo 5.1.2(a). Tenemos que $\text{rad } P(4) = S(3) \oplus S(2)$ y por tanto $P(4)$ no tiene radical separado, pues $Q(\overrightarrow{4})_0 = \{1, 2, 3\}$ tiene una sola componente conexas que contiene al soporte de $S(3)$ y de $S(2)$.
- (3) Si consideramos el álgebra dada por el mismo carcaj que en Ejemplo 5.1.2(a) pero con la relación $\alpha\beta = \gamma\delta$. En tal caso el radical de todo proyectivo indecomponible es indecomponible o cero y por tanto A cumple la condición de separación.

Este ejemplo junto al anterior nos muestran que la condición de separación depende no solo del carcaj, si no también de las relaciones.

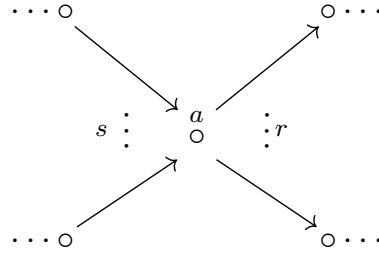
- (4) Sea B el álgebra dada por el carcaj



ligado por $\alpha\beta = 0$. En este caso tenemos que $P(1)$ tiene radical separado pero $P(2)$ no, luego B no cumple la condición de separación.

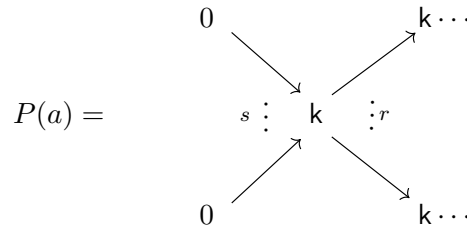
Lema 5.1.7. Si A es un álgebra tal que Q_A es un árbol, entonces A satisface la condición de separación. Recíprocamente, si A está ligada solo por relaciones cero, es de representación finita, satisface la condición de separación y tiene carcaj Q_A acíclico, entonces Q_A es un árbol.

Demostración: Si Q_A es un árbol y $a \in (Q_A)_0$, tenemos que localmente Q_A se ve así (donde $\vdots t$ denota que hay t flechas entre la superior y la inferior):

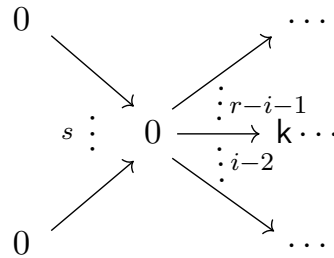


de forma que los rayos $\overset{a}{\circ} \xrightarrow{\alpha_i} \dots$ y $\overset{a}{\circ} \xrightarrow{\alpha_j} \dots$ con $j \neq i$ se cortan solo en el vértice a .

Si $P(a)$ es el A -módulo proyectivo indescomponible correspondiente al vértice a , tenemos que es



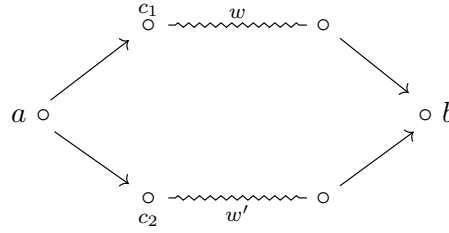
y como $P(a)/\text{rad } P(a) = S(a)$, es $\text{rad } P(a) = \bigoplus_{i=1}^{r+2} N_i$, siendo N_i los siguientes A -módulos indescomponibles:



Luego los soportes de los sumandos de $\text{rad } P(a)$ están en componentes conexas distintas de $Q_A(\vec{a})$ por cortarse los rayos solo en a . Por tanto A satisface la condición de separación.

Para el recíproco, supongamos que Q_A no es un árbol, en cuyo caso contiene un subcarcaj completo Q' que es un ciclo no orientado. Como Q_A es acíclico, Q' contiene

al menos una fuente a y un pozo b , por lo que tiene la siguiente forma:



donde w y w' son paseos. Como A es de representación finita, también lo es $B = \mathbf{k}Q'$ con las relaciones heredadas. Por tanto Q' está ligado por al menos una relación, que debe ser una relación cero. Luego $\text{rad } P(a)$ no puede ser indescomponible y si $\text{rad } P(a) = M_1 \oplus M_2$ tenemos, sin pérdida de generalidad, $c_1 \in \text{sop}(M_1)$ y $c_2 \in \text{sop}(M_2)$. Como c_1 y c_2 pertenecen a la misma componente conexa de $Q(\vec{a})$ (la única), tenemos que A no cumple la condición de separación, lo cual es absurdo. $\square$

Observación 5.1.8. Si A es un álgebra hereditaria de representación finita, entonces satisface la condición de separación y la condición de coseparación.

Esto es ya que al ser Q_A un árbol, también lo es Q_A^{op} y por el lema anterior tanto A como A^{op} satisfacen la condición de separación. Por tanto A satisface también la condición de coseparación.

Con todo esto, apuntamos a ver que las álgebras inclinadas de tipo $\mathbb{A}_n$ son amables.

Para lo que sigue, calcularemos la dimensión de los espacios $\text{Hom}_A(-, -)$ en un álgebra hereditaria A de tipo $\mathbb{A}_n$. Para esto observemos primero que si M y N son A -módulos indescomponibles, entonces $\dim_{\mathbf{k}} \text{Hom}_A(M, N)$ es 0 o 1.

Para ver esto, supongamos que $\text{sop}(M) = \{j, j+1, \dots, \ell\}$, $\text{sop}(N) = \{k, k+1, \dots, m\}$, $M_i = \mathbf{k} \forall j \leq i \leq \ell$ y $N_i = \mathbf{k} \forall k \leq i \leq m$. Supongamos también que $j \leq k$.

Ahora, $\text{Hom}_A(M, N) = 0 \iff \text{sop}(M) \cap \text{sop}(N) = \emptyset$. Luego, si existe un morfismo no nulo $f : M \rightarrow N$, existe $i_0 \in \text{sop}(M) \cap \text{sop}(N)$ y tenemos que, en ese vértice, $f_{i_0} : M_{i_0} \rightarrow N_{i_0}$ va de $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}$ y por tanto es multiplicar por un escalar. Luego f está dado por λId con $\lambda \in \mathbf{k}$, pues debe ser $f_i = \lambda \cdot 1_{\mathbf{k}}$ para todo $i \in \text{sop}(M) \cap \text{sop}(N)$ para que el siguiente diagrama conmute y f sea morfismo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & M_k & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & M_{i_0} & \longrightarrow & M_{i_0+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & & & \lambda \cdot 1_{\mathbf{k}} \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & N_k & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & N_{i_0} & \longrightarrow & N_{i_0+1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

donde las flechas están orientadas según el carcaj Q_A .

Dado un A -módulo indescomponible M , queremos ver en que “zona” del carcaj de Auslander-Reiten de A se encuentran los A -módulos N con $\text{Hom}_A(M, N) \neq 0$.

Para esto, tomamos los (a lo sumo) dos caminos seccionales maximales que salen de M (son a lo sumo dos pues en un álgebra de tipo $\mathbb{A}_n$ el término medio de cada sucesión casi escindida es suma directa de a lo sumo dos módulos indescomponibles). Llamamos M_1 y M_2 al último módulo que aparece en cada camino seccional. La unión de estos dos caminos seccionales forma un subcarcaj completo de $\Gamma(\text{mod } A)$ con grafo subyacente $\mathbb{A}_n$.

Construimos el carcaj $\mathbb{Z}\Sigma$ (ver definición 4.1.1) en el cual hay un único camino seccional maximal con origen en M_1 y M_2 respectivamente (si no fuera así, los caminos seccionales de mod A no serían maximales). Estos dos caminos seccionales maximales se intersectan en un punto $X \in (\mathbb{Z}\Sigma)_0$, el cual no necesariamente se corresponde a un A -módulo indescomponible.

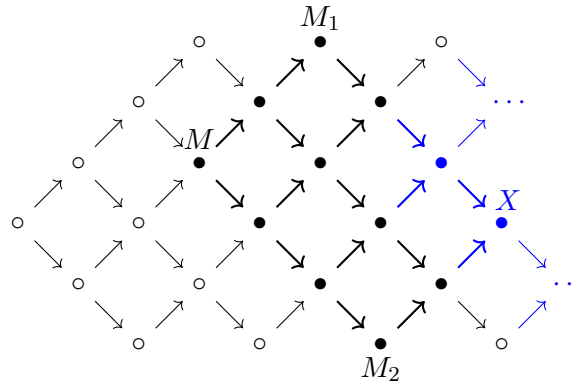
Definición 5.1.9. Notamos $\mathcal{R}(M)$ al conjunto de todos los A -módulos indescomponibles N tales que existe un camino $M \rightarrow \cdots \rightarrow N \rightarrow \cdots \rightarrow X$ en $\mathbb{Z}\Sigma$.

Veamos un ejemplo ilustrando la construcción anterior y $\mathcal{R}(M)$.

Ejemplo 5.1.10. El siguiente dibujo ilustra como es la construcción de $\mathcal{R}(M)$ para el álgebra de caminos A del carcaj

$$\circ_6 \longrightarrow \circ_5 \longrightarrow \circ_1 \longleftarrow \circ_2 \longleftarrow \circ_3 \longleftarrow \circ_4$$

y el A -módulo M con $\underline{\dim} M = 011110$. Marcamos en $\Gamma(\text{mod } A)$ con $\bullet$ los puntos de $\mathcal{R}(M)$, con $\circ$ los que no pertenecen a $\mathcal{R}(M)$ y con $\bullet$ los que pertenecen al carcaj $\mathbb{Z}\Sigma$ pero no a $\Gamma(\text{mod } A)$. Observar que en este caso X no es un A -módulo indescomponible.



Los siguientes dos hechos valen en general, pero son visibles en este ejemplo.

Con la notación de la construcción de $\mathcal{R}(M)$, tenemos que X pertenece a $\Gamma(\text{mod } A)$ si y sólo si M es un A -módulo proyectivo indescomponible. Por otro lado, si M es un A -módulo inyectivo indescomponible, entonces $\mathcal{R}(M)$ consiste solo de los (a lo sumo) dos caminos maximales que salen de M .

Lema 5.1.11. Sea A un álgebra hereditaria de tipo $\mathbb{A}_n$, M y N dos A -módulos indescomponibles. Entonces

$$\dim_k \text{Hom}_A(M, N) = 1 \iff N \in \mathcal{R}(M),$$

y $\text{Hom}_A(M, N) = 0$ en otro caso.

El resultado también vale si $A = kQ/\mathcal{I}$ es un álgebra amable de tipo árbol, con $\mathcal{R}(M)$ construido de forma análoga.

Demostración: Demostraremos el lema cuando A es un álgebra hereditaria de tipo $\mathbb{A}_n$. Para el caso donde A es amable de tipo árbol, ver [3, Lema IX.6.8(d)].

Sea $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta en $\text{mod } A$ con puntas indescomponibles y $\text{Hom}_A(M, N') \neq 0$. Aplicando el funtor $\text{Hom}_A(M, -)$ obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M, N') \longrightarrow \text{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, N'') \longrightarrow \text{Ext}_A^1(M, N') .$$

Asumiendo $\text{Ext}_A^1(M, N') \neq 0$, por Teorema 1.6.23, existe un morfismo $N' \rightarrow \tau M$ que induce un ciclo

$$M \longrightarrow N' \longrightarrow \tau M \longrightarrow * \longrightarrow M$$

lo cual no puede pasar en un álgebra de tipo $\mathbb{A}_n$, pues su carcaj de Auslander-Reiten es acíclico. Por tanto $\text{Ext}_A^1(M, N') = 0$ y tenemos

$$\dim_k \text{Hom}_A(M, N) = \dim_k \text{Hom}_A(M, N') + \dim_k \text{Hom}_A(M, N'').$$

O sea, $f_M := \dim_k \text{Hom}_A(M, -)$ es aditiva en sucesiones exactas cortas con puntas indescomponibles siempre y cuando $\dim_k \text{Hom}_A(M, N') \neq 0$.

Como $f_M(M) = 1$, tomando N como uno de los sumandos del término medio de $0 \longrightarrow M \longrightarrow N_0 \longrightarrow \tau^{-1}M \longrightarrow 0$ y M como N' , tenemos que $f_M(N) = 1$, siempre que tal sucesión exista. Luego, tomando N' como N y N_1 como un sumando del término medio de la sucesión casi escindida que empieza en N (si existe), tenemos $f_M(N_1) = 1$. Como por [3, Corolario IV.5.6] todo morfismo no nulo que no es un isomorfismo entre indescomponibles es suma de composición de morfismos irreducibles, siguiendo así tenemos el resultado por inducción. $\square$

Veremos ahora dos resultados que, junto al Lema 5.1.7, muestran que las álgebras inclinadas de tipo $\mathbb{A}_n$ son amables de tipo árbol.

Corolario 5.1.12. *Sea A un álgebra hereditaria de tipo $\mathbb{A}_n$ y T_A un módulo inclinante. Entonces $B = \text{End } T_A$ es un álgebra amable.*

Demostración: Si $T = \bigoplus_{i=1}^n T_i$ donde los T_i son A -módulos indescomponibles, pensamos a B como el álgebra de carcaj ligado $kQ_B/\mathcal{I}_B$ con vértices $\text{End}_A(T_i)$, flechas $i \rightarrow j$ y relaciones dadas por $\text{Hom}_A(T_i, T_j)$.

Sean T_a y T_b sumandos indescomponibles de T tales que $\text{Hom}_A(T_a, T_b) \neq 0$.

Supongamos que T_a no es inyectivo, de forma que tenemos el siguiente isomorfismo por Corolario 1.6.24

$$\text{Hom}_A(\tau^{-1}T_a, T_b) \cong D \text{Ext}_A^1(T_b, T_a) = 0$$

donde la última igualdad es por ser T inclinante. Luego T_b es un sucesor de T_a pero no de $\tau^{-1}T_a$ y por tanto, por Lema 5.1.11, pertenece a $\mathcal{R}(T_a) \setminus \mathcal{R}(\tau^{-1}T_a)$, es decir, T_b pertenece a un camino seccional maximal que comienza en T_a . Esto pasa también cuando T_a es inyectivo, pues en ese caso $\mathcal{R}(T_a)$ está formado solo por (a lo sumo) los dos caminos seccionales que empiezan en él.

Luego, de nuevo por Lema 5.1.11, $\dim_k \text{Hom}_A(T_a, T_b) = 1$ y por tanto existe un único camino no nulo de b en a en el carcaj Q_B , por los siguientes isomorfismos:

$$e_a B e_b \cong \text{Hom}_B(e_b B, e_a B) \cong \text{Hom}_B(\text{Hom}_A(T, T_b), \text{Hom}_A(T, T_a)) \cong \text{Hom}_A(T_b, T_a).$$

De forma similar, si T_c es otro sumando indescomponible de T tal que $\text{Hom}_A(T_c, T_a) \neq 0$, entonces T_c pertenece a un camino seccional maximal que sale de T_c y pasa por T_a y existe un único camino no nulo de a en c en el carcaj Q_B . Esto muestra (A1).

Si T_c, T_a y T_b son como antes y pertenecen al mismo camino seccional, entonces $\text{Hom}_A(T_c, T_b) \neq 0$ por Proposición 5.1.4.

Si no pertenecen al mismo camino seccional, entonces el camino seccional que va de T_a a T_b cruza la órbita de T_c y por tanto T_c no es inyectivo. Luego, de nuevo por Corolario 1.6.24 y ser T inclinante, tenemos

$$\text{Hom}_A(\tau^{-1}T_c, T_b) \cong D \text{Ext}_A^1(T_b, T_c) = 0$$

y por tanto $\text{Hom}_A(T_c, T_b) = 0$ pues T_b no puede pertenecer a ninguno de los (a lo sumo) dos caminos maximales que salen de T_c y el isomorfismo anterior muestra que tampoco pertenece a $\mathcal{R}(\tau^{-1}T_c)$. Esto muestra (A2) y (A3).

Finalmente, como hay a lo sumo dos caminos seccionales que empiezan y terminan en cualquier sumando indescomponible de T , este argumento prueba también (A4). Esto pues o bien T_c, T_b y T_a pertenecen a un mismo camino seccional y por tanto no hay relaciones entre las flechas que los conectan en Q_B , o bien T_c y T_b pertenecen a dos caminos seccionales distintos: T_c a uno que termina en T_a y T_b a uno que empieza en T_a . En tal caso, si $\beta, \gamma \in (Q_B)_0$ son las flechas que van de b en a y de a en c respectivamente, tenemos la relación $\beta\gamma = 0$. Luego toda relación en $\mathcal{I}_B$ es de esa forma y por tanto $\mathcal{I}_B$ está generado por caminos de largo 2. $\square$

Proposición 5.1.13. *Sea A un álgebra hereditaria de tipo de representación finito, T_A un módulo inclinante y $B = \text{End } T_A$. Entonces B satisface la condición de separación.*

Demostración: Supongamos que B no satisface la condición de separación. En tal caso existe $a \in (Q_B)_0$ tal que $\text{rad } P(a)_B$ no es separado, o sea existen dos sumandos indescomponibles M_1 y M_2 de $\text{rad } P(a)$ con puntos $b_1 \in \text{sop}(M_1)$ y $b_2 \in \text{sop}(M_2)$ conectados por un paseo en $Q_B(\vec{a})$. Este paseo induce uno uniendo a $P(b_1)$ con $P(b_2)$ en $\Gamma(\text{mod } B)$ en el que ningún módulo contiene al vértice a en su soporte. Como existen caminos de $P(b_1)$ en M_1 y de $P(b_2)$ en M_2 , tenemos un paseo cerrado w , el cual podemos asumir de largo mínimo, de la siguiente forma:

$$P(a) \longleftarrow M_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow P(b_1) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow P(b_2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_2 \longrightarrow P(a)$$

Como $\Gamma(\text{mod } B)$ es acíclico por Corolario 4.3.8, w contiene pozos y fuentes. Afirmamos que podemos suponer que todo pozo U en w se corresponde a un B -módulo proyectivo.

Para ver esto, si U es un pozo en w pero no es un B -módulo proyectivo, podemos cambiar U por τU y cada flecha $V \rightarrow U$ por la correspondiente $\tau U \rightarrow V$. Como w era de largo mínimo, no puede pasar que τU ya perteneciera a w y como estamos cambiando cada flecha que llega al pozo por otra, que sale de su trasladado, tenemos que este proceso no cambia el largo de w . Repitiendo este proceso eventualmente logramos que todos los pozos sean proyectivos, pues toda τ -órbita comienza en un proyectivo y es finita por ser B de representación finita (por Lema 4.3.6(c)).

Sea Y un punto de w que no es un pozo. Existe por tanto un camino de Y a algún pozo P_B en w , el cual pertenece a $\mathcal{Y}(T)$ por ser un B -módulo proyectivo. Como $\mathcal{Y}(T)$ es cerrado por predecesores (Lema 4.3.6(b)) tenemos que $Y \in \mathcal{Y}(T)$ y se sigue que todos los módulos en w pertenecen a $\mathcal{Y}(T)$.

Sea ahora Z una fuente en w y consideremos $N_A := Z \otimes_B T$. Si N no es inyectivo, la sucesión casi escindida que comienza en $Z \cong \text{Hom}_A(T, N)$ está contenida en $\mathcal{Y}(T)$ por Proposición 3.4.5 y podemos reemplazar Z por $\tau^{-1}Z$ y cada flecha $Z \rightarrow Y$ por la

correspondiente $Y \rightarrow \tau^{-1}Z$, obteniendo así un nuevo paseo w' en $\mathcal{Y}(T)$ del mismo largo que w y tal que N es inyectivo para toda fuente Z en w' .

Aplicando el funtor $-\otimes_B T$ a w' , obtenemos un paseo cerrado $\tilde{w}$ en $\Gamma(\text{mod } A)$ con todas sus fuentes inyectivas. Esto no puede pasar pues al ser A hereditaria de representación finita, cumple la condición de coseparación por la Observación 5.1.8. Luego era absurdo suponer que B no cumplía la condición de separación. $\square$

Corolario 5.1.14. *Toda álgebra inclinada de tipo $\mathbb{A}_n$ es amable de tipo árbol.*

Demostración: Sea A un álgebra de tipo $\mathbb{A}_n$, T_A un módulo inclinante y $B = \text{End } T_A$. Por Corolario 5.1.12 tenemos que B es amable y por Proposición 5.1.13 satisface la condición de separación, por lo que su carcaj Q_B es un árbol por Lema 5.1.7. $\square$

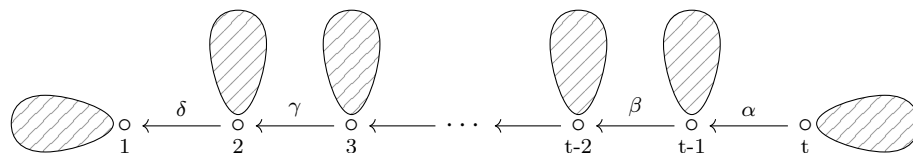
Sabemos ahora que las álgebras inclinadas de tipo $\mathbb{A}_n$ son amables de tipo árbol pero como vimos en el ejemplo 5.1.2, el recíproco no es cierto. El siguiente lema nos caracteriza cuales son las álgebras amables de tipo árbol “complementarias” en este sentido.

Lema 5.1.15. *Sea B un álgebra inclinada de tipo $\mathbb{A}_n$. Entonces el carcaj ligado de B no contiene ningún subcarcaj completo ligado Q' de la forma*

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \xleftarrow{\delta} & \circ & \xleftarrow{\gamma} & \circ & \cdots & \cdots & \cdots & \circ & \xleftarrow{\beta} & \circ & \xleftarrow{\alpha} & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & & & t-2 & & t-1 & & t \end{array}$$

con $t \geq 4$, $\alpha\beta = 0$, $\gamma\delta = 0$, todas las aristas entre 3 y $t-2$ pueden ser orientadas arbitrariamente y no hay relaciones cero entre 2 y $t-1$.

Demostración: Observar que la situación es un poco más complicada que la del ejemplo 5.1.2, pues ahora Q' es un subcarcaj de Q_B y no todo Q_B , o sea debemos imaginar a Q_B como en la siguiente figura, donde en las ramas puede haber más vértices y relaciones, pero no hay flechas entre las ramas:

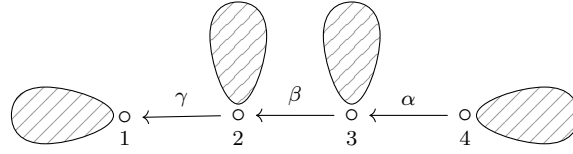


Supongamos primero que el carcaj ligado de B contiene una subcarcaj como en el enunciado y $t \geq 5$. Consideremos el B -módulo indescomponible M dado por $M_i = k$ para $3 \leq i \leq t-2$ y $M_i = 0$ en todos los otros vértices. Afirmamos que $\text{pd} M > 1$.

Para construir la cobertura proyectiva de M , vemos que si tomamos todas las fuentes $s_1, \dots, s_k$ en $\text{sop}(M)$, entonces $\text{top } M \cong \bigoplus_{i=1}^k S(s_i)$ y por tanto la cobertura proyectiva de M es $P = \bigoplus_{i=1}^k P(s_i)$. Para probar la afirmación, basta ver que $\ker p$ no es proyectivo, donde $p : P \rightarrow M$ es el epimorfismo canónico.

Sabemos que existe una fuente s_i que tiene un camino $s_i \rightarrow \dots \rightarrow 3$. Observar que el B -módulo proyectivo $P(s_i)$ asociado a s_i contiene al vértice 2 en su soporte, pero no contiene al vértice 1 por la relación $\gamma\delta = 0$. Como 2 no pertenece al soporte de M , existe un submódulo L de $P(s_i)$ que es sumando directo de $\ker p$ y tiene $\text{top } L = S(2)$ (es el submódulo de $P(s_i)$ que tiene soporte contenido en el soporte de $P(2)$). Pero entonces L no puede ser proyectivo, pues debería ser $L = P(2)$ pero el vértice 1 pertenece al soporte de $P(2)$ y no al de L . Luego $\text{pd} M > 1$. De forma similar vemos que $\text{id} M > 1$ y por Lema 4.3.6(e), el álgebra B no puede ser inclinada.

Veamos ahora el caso $t = 4$. En este caso el carcaj Q' es:



ligado por $\alpha\beta = 0$ y $\beta\gamma = 0$.

Veremos que $S(4)$ tiene dimensión proyectiva mayor estricta a 2.

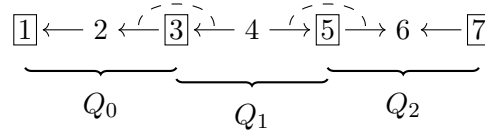
La resolución proyectiva comienza con $p_0 : P(4) \rightarrow S(4)$ y existe Z sumando de $\ker p_0$ con $\text{top } Z = S(3)$. Luego la cobertura proyectiva de Z es $P(3)$ con $p_1 : P(3) \rightarrow Z$. Existe de igual forma Y sumando de $\ker p_1$ con $\text{top } Y = S(2)$. Luego la cobertura proyectiva de Y es $P(2)$ con $p_2 : P(2) \rightarrow Y$ y existe X sumando de $\ker p_2$ con $\text{top } X = S(1)$. Por tanto, el principio de una resolución proyectiva minimal de $S(4)$ es

$$\cdots \longrightarrow P(1) \oplus M_3 \xrightarrow{[p_3 \ f_3]} P(2) \oplus M_2 \xrightarrow{[p_2 \ f_2]} P(3) \oplus M_1 \xrightarrow{[p_1 \ f_1]} P(4) \longrightarrow S(4) \longrightarrow 0$$

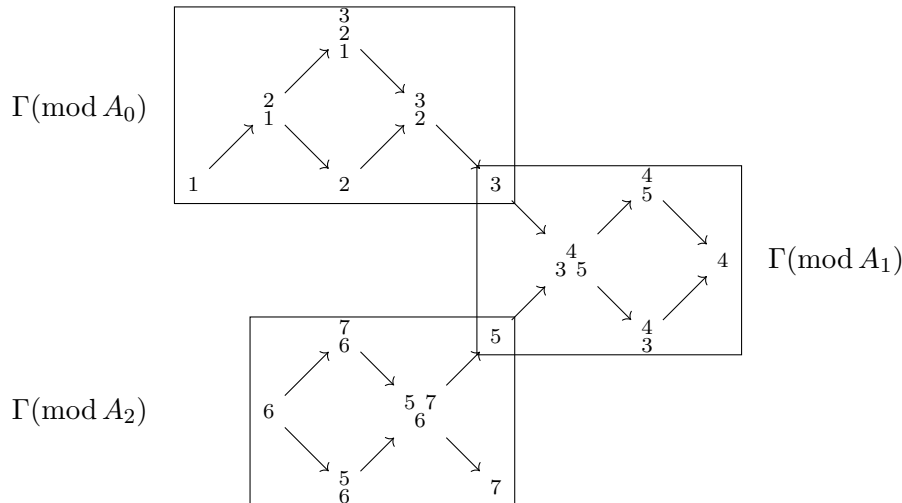
donde M_1, M_2 y M_3 son B -módulos proyectivos. Luego $\text{pd} S(4) \geq 3$ y $\text{gl.dim } B \geq 3$, lo cual implica por Lema 4.3.6(e) que B no es inclinada. $\square$

En el siguiente lema, impondremos una orientación y relaciones “complementarias” a las del carcaj Q' del lema anterior. Antes de enunciarlo y demostrarlo, veamos un ejemplo de como queda el carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra de carcaj ligado como el del lema que sigue.

Ejemplo 5.1.16. Consideremos el siguiente carcaj ligado Q y los subcarcajes Q_1, Q_2 y Q_3 de la siguiente figura:



Si $A = kQ$ y $A_i = kQ_i$ para $i = 0, 1, 2$. Luego el carcaj de Auslander-Reiten de A tiene la siguiente forma:



Notar que $\Gamma(\text{mod } A_0)$ y $\Gamma(\text{mod } A_1)$ se cortan solo en el simple en 3, y 3 es el único vértice que está en Q_0 y Q_1 . También vemos que $\Gamma(\text{mod } A_1)$ y $\Gamma(\text{mod } A_2)$ se cortan solo en el simple en 5, y 5 es el único vértice que está en Q_1 y Q_2 .

Por último observar que los caminos entre los subcarcajes marcados de $\Gamma(\text{mod } A)$ solo van de $\Gamma(\text{mod } A_0)$ o $\Gamma(\text{mod } A_2)$ en $\Gamma(\text{mod } A_1)$.

Lema 5.1.17. *Sea A' el álgebra amable de tipo árbol con carcaj ligado*

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \dots & \text{---} & \circ & \xleftarrow{\beta_1} & \circ & \xleftarrow{\alpha_1} & \circ & \text{---} & \dots & \text{---} & \circ & \xrightarrow{\alpha_2} & \circ & \xrightarrow{\beta_2} & \circ & \dots & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \dots & \circ & \xleftarrow{\quad} & \circ \\ a_0 & & & & & & & & a_1 & & & & & & & & a_2 & & & & & & a_r & & & & & & & & a_{r+1} \end{array}$$

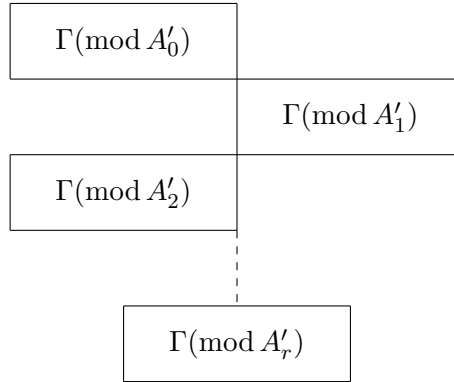
donde las aristas sin orientar pueden ser orientadas arbitrariamente, hay relaciones cero con punto medio $a_1, \dots, a_r$, de las cuales no hay dos consecutivas orientadas en la misma dirección y estas son las únicas relaciones cero.

Si existe un camino $I(a_0) \rightarrow \dots \rightarrow P(a_{r+1})$ en $\Gamma(\text{mod } A)$, entonces $r \leq 1$ y $\text{Hom}_{A'}(I(a_0), P(a_{r+1})) \neq 0$.

Demostración: Para cada $j \in [0, r]$, sea A'_j el álgebra (hereditaria) dada por el subcarcaj completo de $Q_{A'}$:

$$a_j \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ a_{j+1}$$

Observar que, igual que en el ejemplo anterior, $\Gamma(\text{mod } A')$ tiene la siguiente forma:



con $\Gamma(\text{mod } A'_j) \cap \Gamma(\text{mod } A'_{j+1}) = \{S(a_{j+1})\}$.

En particular, al existir un camino de $I(a_0)$ en $P(a_{r+1})$, este debe pasar por $S(a_1)$ y, como no hay caminos de $\Gamma(\text{mod } A'_1)$ en $\Gamma(\text{mod } A'_2)$, debe ser $r \leq 1$ y por tanto el carcaj de A' es de la forma

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \xleftarrow{\quad} & \circ & \xleftarrow{\quad} & \dots & \xleftarrow{\beta_1} & \circ & \xleftarrow{\alpha_1} & \dots & \xleftarrow{\quad} & \circ \\ a_0 & & & & & & a_1 & & & & a_2 \end{array}$$

ligado por $\alpha_1 \beta_1 = 0$. Luego es claro que $\text{Hom}_{A'}(I(a_0), P(a_2)) \neq 0$. $\square$

Teorema 5.1.18. *Un álgebra amable de tipo árbol A es inclinada de tipo $\mathbb{A}_n$ si y sólo si su carcaj ligado no contiene un subcarcaj ligado completo Q' de la forma*

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \xleftarrow{\delta} & \circ & \xleftarrow{\gamma} & \circ & \text{---} & \dots & \text{---} & \circ & \xleftarrow{\beta} & \circ & \xleftarrow{\alpha} & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & & & t-2 & & t-1 & & t \end{array}$$

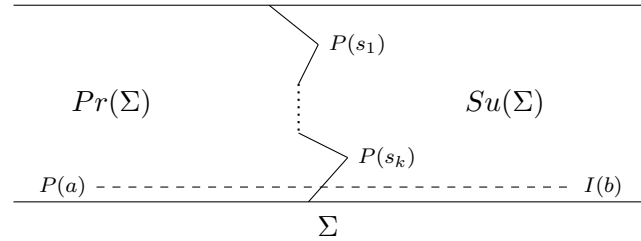
con $t \geq 4$, $\alpha\beta = 0$, $\gamma\delta = 0$, todas las aristas entre 3 y $t-2$ pueden ser orientadas arbitrariamente y no hay relaciones cero entre 2 y $t-1$.

Demostración: Ya vimos en Lema 5.1.15 que si A es un álgebra inclinada de tipo $\mathbb{A}_n$, entonces su carcaj no contiene un subcarcaj ligado como el del enunciado. Por tanto, resta ver que si un álgebra amable de tipo árbol no contiene ningún subcarcaj ligado completo de esa forma, entonces es inclinada de tipo $\mathbb{A}_n$. Para esto construiremos una sección fiel Σ con $\text{Hom}_A(U, \tau V) = 0$ para todo $U, V \in \Sigma$ y aplicaremos el criterio de Liu-Skowroński (4.4.9).

Consideremos el subcarcaj conexo completo de $\Gamma(\text{mod } A)$ que consiste de todos los M tales que existe un camino de M en $P(s)$ para alguna fuente s en Q_A . Sea Σ el borde derecho de este subcarcaj, es decir el subcarcaj conexo completo de $\Gamma(\text{mod } A)$ que consiste de todos los M tal que existe un camino seccional de M en $P(s)$ para alguna fuente s en Q_A .

Se sigue de la definición que Σ es acíclico, convexo e intersecta a cada τ -órbita a lo sumo una vez. Para probar que Σ es una sección, falta ver que intersecta a toda τ -órbita.

El subcarcaj Σ cumple que $\Gamma(\text{mod } A) \setminus \Sigma$ tiene dos componentes conexas: los predecesores propios $Pr(\Sigma)$ de Σ y los sucesores propios $Su(\Sigma)$ de Σ . Esto se puede ver de la siguiente forma en $\Gamma(\text{mod } A)$:



Veremos que los A -módulos proyectivos indecomponibles pertenecen a $Pr(\Sigma) \cup \Sigma$ y los inyectivos a $\Sigma \cup Su(\Sigma)$. Como toda τ -órbita comienza en un proyectivo $P(a)$ y termina en el inyectivo $I(b)$ asociado a otro vértice b , esto probaría que Σ intersecta a todas las τ -órbitas, pues el caso donde $I(b), P(a) \notin \Sigma$ sería el caso $P(a) \in Pr(\Sigma), I(b) \in Su(\Sigma)$ ilustrado en la figura anterior.

Si $P(a)$ es un A -módulo proyectivo indecomponible, tomando una fuente s_a en Q_A y un camino $s_a \rightarrow \dots \rightarrow a$ en Q_A , tenemos un camino $P(a) \rightarrow \dots \rightarrow P(s_a)$ en $\Gamma(\text{mod } A)$. Luego todo A -módulo proyectivo indecomponible está en $Pr(\Sigma) \cup \Sigma$.

Veamos ahora que ningún A -módulo inyectivo indecomponible es un predecesor propio de Σ , o sea que pertenece a $\Sigma \cup Su(\Sigma)$.

Sea $I(a)$ un A -módulo inyectivo indecomponible y supongamos que existe un camino de $I(a)$ en Σ . Tenemos que existe una fuente s_a en Q_A y un camino $I(a) \rightarrow \dots \rightarrow P(s_a)$ en $\Gamma(\text{mod } A)$. Como el carcaj de A no contiene ningún subcarcaj ligado completo de la forma Q' , el paseo que une a y s_a en Q_A es de una de las dos formas siguientes:

$$\begin{array}{c} \circ_{a=a_0} \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ \xleftarrow{\beta_1} \circ_{a_1} \xleftarrow{\alpha_1} \circ \dots \text{ --- } \circ \xrightarrow{\alpha_2} \circ_{a_2} \xrightarrow{\beta_2} \circ \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ_{a_r} \text{ --- } \dots \xleftarrow{\quad} \circ_{a_{r+1}=s_a} \\ \\ \circ_{a=a_0} \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ \xrightarrow{\alpha_1} \circ_{a_1} \xrightarrow{\beta_1} \circ \dots \text{ --- } \circ \xleftarrow{\beta_2} \circ_{a_2} \xleftarrow{\alpha_2} \circ \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ_{a_r} \text{ --- } \dots \xleftarrow{\quad} \circ_{a_{r+1}=s_a} \end{array}$$

donde las aristas sin orientar pueden ser orientadas arbitrariamente, hay relaciones cero con punto medio $a_1, \dots, a_r$, de las cuales no hay dos consecutivas orientadas en la misma dirección y estas son las únicas relaciones cero.

Consideremos el primer caso, siendo el otro análogo. Sea A' el álgebra dada por el primer carcaj ligado, $I'(a)$ el A' -módulo inyectivo indescomponible correspondiente a a y $P'(s_a)$ el A' -módulo proyectivo indescomponible correspondiente a s_a .

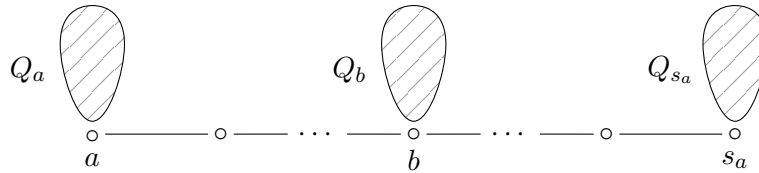
Definimos el funtor de inclusión $E : \text{mod } A' \rightarrow \text{mod } A$, mediante las identificaciones de módulos con representaciones de carcajes ligados (1.2.7), como $E(M)_i = M_i$ si $i \in (Q_{A'})_0$ y $E(M)_i = 0$ si $i \notin (Q_{A'})_0$; $E(M)_\alpha = M_\alpha$ si $\alpha \in (Q_{A'})_1$ y $E(M)_\alpha = 0$ si $\alpha \notin (Q_{A'})_1$. Luego, si $R : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A'$ denota al funtor de restricción, tenemos $RE = 1_{\text{mod } A'}$. Observar que E es un encaje pleno y exacto.

Como $EI'(a)_a \neq 0$, existe un morfismo no nulo $EI'(a) \rightarrow I(a)$. De forma similar, tenemos un morfismo no nulo $P(s_a) \rightarrow EP'(s_a)$. Por tanto, la existencia de un camino $I(a) \rightarrow \dots \rightarrow P(s_a)$ implica la existencia de un camino

$$EI'(a) \rightarrow I(a) \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_m \rightarrow P(s_a) \rightarrow EP'(s_a)$$

en $\Gamma(\text{mod } A)$. Queremos ahora aplicar el funtor R para obtener un camino en $\Gamma(\text{mod } A')$ de $I'(a)$ en $P'(s_a)$, pero puede ser que la imagen por R de alguno de los módulos sea 0. Para ver que este no es el caso, como $RE = 1_{\text{mod } A'}$, basta ver que $\text{sop } M_j \cap Q_{A'} \neq \emptyset$ para todo $1 \leq j \leq m$.

Sea Q_b la rama del árbol $Q_{A'}$ unida al punto b :



Supongamos que $\text{sop } M_j \cap Q_{A'} = \emptyset$ para algún j . Como $\text{sop } I(a) \cap Q_{A'} \neq \emptyset$ y $\text{sop } P(s_a) \cap Q_{A'} \neq \emptyset$, existen t_1 y t_2 con $1 \leq t_1 < t_2 \leq m$ tales que todo M_t con $t_1 \leq t \leq t_2$ tiene soporte que no interseca a $Q_{A'}$, $\text{sop } M_{t_1-1} \cap Q_{A'} \neq \emptyset$ y $\text{sop } M_{t_2+1} \cap Q_{A'} \neq \emptyset$.

Como M_{t_1} es indescomponible con $\text{sop } M_{t_1} \cap Q_{A'} = \emptyset$, existe $b \in (Q_{A'})_0$ tal que $\text{sop } M_{t_1} \subseteq Q_b$. Por la misma razón, todos los M_t con $t_1 \leq t \leq t_2$ tienen sus soportes contenidos en Q_b (todos en la misma rama pues tenemos caminos $M_t \rightarrow M_{t+1}$ para todo $t_1 \leq t < t_2$).

Ahora, como $\text{Hom}_A(M_{t_1-1}, M_{t_1}) \neq 0$ y $\text{Hom}_A(M_{t_2}, M_{t_2+1}) \neq 0$, entonces

$$\text{sop } M_{t_1-1} \cap \text{sop } M_{t_1} \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \text{sop } M_{t_2} \cap \text{sop } M_{t_2+1} \neq \emptyset.$$

Por tanto $b \in \text{sop } M_{t_1-1}$ y $b \in \text{sop } M_{t_2+1}$. Luego existen morfismos no nulos $f_1 : P(b) \rightarrow M_{t_1-1}$ y $f_2 : P(b) \rightarrow M_{t_2+1}$. Llamando g a la composición $M_{t_1-1} \rightarrow M_{t_1} \rightarrow \dots \rightarrow M_{t_2+1}$, tenemos $gf_1 = 0$ pues $\text{Hom}_A(P(b), M_{t_1}) = 0$ ya que $b \notin \text{sop } M_{t_1}$.

Como por el Lema 5.1.11 cualquier par de caminos de $P(b)$ en M_{t_2+1} dan el mismo morfismo a menos de multiplicar por un escalar, tenemos $\text{Hom}_A(P(b), M_{t_2+1}) = 0$, lo que contradice la existencia de f_2 . Por tanto debe ser $\text{sop } M_j \cap Q_{A'} \neq \emptyset$ para todo $1 \leq j \leq m$ y tenemos el camino buscado de $I'(a)$ en $P'(s_a)$ en $\Gamma(\text{mod } A')$.

El Lema 5.1.17 nos da $\text{Hom}_{A'}(I'(a), P'(s_a)) \neq 0$, luego $\text{Hom}_A(EI'(a), EP'(s_a)) \neq 0$ y por tanto $\text{Hom}_A(I(a), P(s_a)) \neq 0$. Como $I(a)$ es inyectivo y $P(s_a)$ es proyectivo, por

Lema 5.1.11 y Ejemplo 5.1.10, existe un camino seccional de $I(a)$ en $P(s_a)$ y por tanto $I(a) \in \Sigma$.

Esto termina de probar que los A -módulos inyectivos indescomponibles están en $\Sigma \cup Su(\Sigma)$ y por tanto que Σ es una sección en $\Gamma(\text{mod } A)$. Como, por construcción, $\text{Hom}_A(U, \tau V) = 0$ para todo U y V en Σ , solo falta ver que $T = \bigoplus_{M \in \Sigma_0} M$ es fiel para aplicar Liu-Skowroński. Para esto veamos que T es inclinante.

Acabamos de ver que la cantidad de puntos en Σ , es decir de sumandos de T , coincide con $\text{rk } K_0(A)$. Por otro lado, por Teorema 1.6.23, para todo $U, V \in \Sigma_0$ tenemos

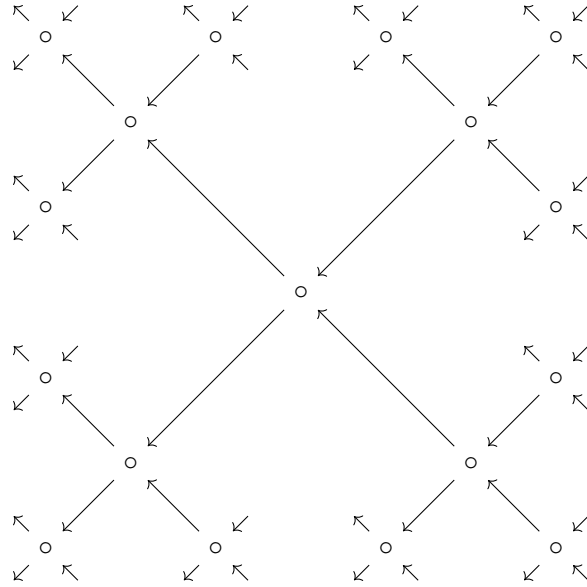
$$\text{Ext}_A^1(V, U) \cong D\overline{\text{Hom}}_A(U, \tau V) \subseteq D\overline{\text{Hom}}_A(U, \tau V) = 0.$$

Finalmente, $\text{pd } U \leq 1$ para todo $U \in \Sigma_0$ por Lema 1.6.21 pues $\text{Hom}_A(DA, \tau U) = 0$ ya que ningún inyectivo pertenece a $Pr(\Sigma)$.

Luego T es inclinante por Corolario 3.2.3 y A es un álgebra inclinada por Teorema 4.4.9, de tipo $\mathbb{A}_n$ por ser Σ de tipo $\mathbb{A}_n$. $\square$

Podemos visualizar lo probado de la siguiente forma.

Corolario 5.1.19. *Un álgebra es inclinada de tipo $\mathbb{A}_n$ si y solo si su carcaj ligado es un subcarcaj conexo finito del árbol infinito*

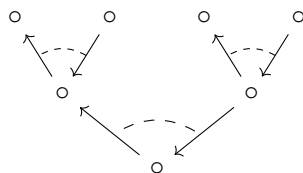


ligado por todas las relaciones posibles dadas por componer dos flechas no colineales que además no contiene ningún subcarcaj ligado completo de la forma

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \xleftarrow{\delta} & \circ & \xleftarrow{\gamma} & \circ & \cdots & \circ & \xleftarrow{\beta} & \circ & \xleftarrow{\alpha} & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & t-2 & & t-1 & & t \end{array}$$

con $t \geq 4$, $\alpha\beta = 0$, $\gamma\delta = 0$, todas las aristas entre 3 y $t-2$ pueden ser orientadas arbitrariamente y no hay relaciones cero entre 2 y $t-1$.

Ejemplo 5.1.20. Consideremos el álgebra B dada por el carcaj ligado



donde las líneas punteadas indican que hay relaciones cero. Claramente B es un álgebra amable de tipo árbol y cae en las hipótesis del Teorema 5.1.18, por tanto es inclinada de tipo $\mathbb{A}_n$.

Para hallar el álgebra A de tipo $\mathbb{A}_n$ y el A -módulo inclinante T tales que $B = \text{End } T_A$, como el carcaj de B tiene 7 vértices, primero hay que encontrar una orientación para las aristas del grafo de tipo $\mathbb{A}_7$.

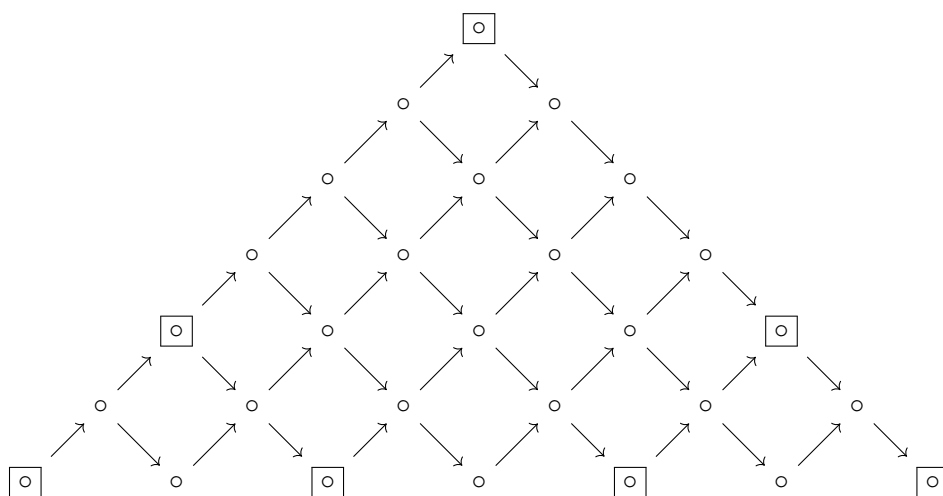
Observando la forma de Q_B , vemos que se parece al carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod } A)$ del álgebra de caminos del carcaj

$$1 \circ \longrightarrow 2 \circ \longrightarrow 3 \circ \longrightarrow 4 \circ \longrightarrow 5 \circ \longrightarrow 6 \circ \longrightarrow 7 \circ$$

Se puede mostrar que el A -módulo

$$T = P(7) \oplus P(5) \oplus S(5) \oplus P(1) \oplus S(3) \oplus I(3) \oplus I(1)$$

es inclinante y que $B = \text{End } T_A$. Ver la siguiente imagen del carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod } A)$ de A , donde marcamos los sumandos de T :



Bibliografía

- [1] I. Assem, *Tilted algebras of type $\mathbb{A}_n$* , Communications in Algebra, 10(19), 1982, pp. 2121-2139.
- [2] I. Assem, *Algèbres et Modules*, Dunod, 1997.
- [3] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 1: Techniques of Representation Theory*. Cambridge University Press, 2006.
- [4] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge University Press, 1995.
- [5] M. Barot, *Introduction to the Representation Theory of Algebras*. Springer, 2014.
- [6] S. Brenner, M. C. R. Butler, *Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors*, En: V. Dlab and P. Gabriel (eds.), *Representation Theory II*, Springer, Berlin, 1980, pp. 103-169.
- [7] D. Happel, C. M. Ringel, *Tilted Algebras*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 274, No. 2 (1982), pp. 399-443.
- [8] R. Schiffler, *Quiver Representations*, Springer, Cham, 2014.