



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Estudio e implementación de una formulación de elementos finitos con discontinuidad fuerte para el análisis post-colapso de pórticos

Sergio Ariel Merlino Chiozza

Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Diciembre de 2025



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Estudio e implementación de una formulación de elementos finitos con discontinuidad fuerte para el análisis post-colapso de pórticos

Sergio Ariel Merlino Chiozza

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural, Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Ingeniería Estructural.

Director de tesis:

Dr. Ing. Prof. Jorge Pérez Zerpa

Director académico:

Dr. Ing. Prof. Jorge Pérez Zerpa

Montevideo – Uruguay

Diciembre de 2025

Merlino Chiozza, Sergio Ariel

Estudio e implementación de una formulación de elementos finitos con discontinuidad fuerte para el análisis post-colapso de pórticos / Sergio Ariel Merlino Chiozza. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ingeniería, 2025.

XVI, 87 p.: il.; 29,7cm.

Director de tesis:

Jorge Pérez Zerpa

Director académico:

Jorge Pérez Zerpa

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa en Ingeniería Estructural, 2025.

Referencias bibliográficas: p. 78 – 83.

1. Elastoplasticidad, 2. No linealidad, 3. Elemento finito con discontinuidad fuerte, 4. Post-colapso, 5. Rótulas de ablandamiento. I. Pérez Zerpa, Jorge, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

MSc. DIC Ing. Prof. Bruno Bazzano García

D.Sc. Ing. Prof. Alfredo Canelas Botta

Dr. Ing. Prof. Pablo Castrillo Green

Dra. Ing. Prof. Mariana Mendina Gourgues

Dr. Ing. Prof. Agustin Spalvier Blanco

Montevideo – Uruguay

Diciembre de 2025

a China, a mi Madre,
a mi Padre, a mi Hermana,
y a Alexandra

Agradecimientos

Quisiera agradecer especialmente a mi Madre y a Alexandra, que siempre están a mi lado, sin ellas no hubiera podido terminar este trabajo.

A Rodrigo San Vicente, por su amistad, por los estudios de la mecánica racional, y las ecuaciones de Painlevé.

A Marcelo Dibueno, por su amistad, los recuerdos en el IAVA, y los estudios de geometría métrica.

A los profesores y compañeros del Instituto de Estructuras y Transporte de la Facultad de Ingeniería, y a Jorge Pérez Zerpa por su bonhomía y disposición a compartir sus conocimientos.

Yo lo tuve en la palma de la mano algunos minutos: recuerdo que su peso era intolerable y que después de retirado el cono, la opresión perduró.

Esa evidencia de un objeto muy chico y a la vez pesadísimo dejaba una impresión desagradable de asco y de miedo.

Esos conos pequeños y muy pesados (hechos de un metal que no es de este mundo) son imagen de la divinidad, en ciertas religiones de Tlön.

Tlön, Uqbar, Orbis Tertius

Jorge Luis Borges

Revista Sur número 68, tapas verde jade, mayo de 1940

RESUMEN

Una de las formas de colapso de las estructuras es la falla por fluencia en secciones críticas. El método clásico de la carga última de colapso, considera que una vez alcanzado el límite plástico en una sección, la capacidad resistente en la rótula se mantiene constante mientras se desarrolla la plastificación en otras secciones. Este método puede no ser aplicable en columnas, o en estructuras de hormigón sobrearmadas o pretensadas, en esos casos puede sobrestimar la carga de colapso. El análisis de pórticos considerando la respuesta de ablandamiento o pérdida de resistencia, es fundamental para el diseño en régimen elastoplástico de estructuras sismorresistentes y para el análisis post-colapso de estructuras. En la actualidad, es un campo de investigación de nuevos métodos numéricos, y de sistemas estructurales sismorresistentes. La utilización de plataformas computacionales con capacidad de cálculo y análisis de este tipo de modelos, está limitada por restricciones económicas, y de barreras al desarrollo del conocimiento. Es necesario el desarrollo de estas plataformas computacionales para la investigación académica nacional. En esta tesis, se estudia e implementa una formulación para el modelado de rótulas plásticas de ablandamiento mediante el elemento finito de Euler-Bernoulli con discontinuidad fuerte de rotación. Se presentan los fundamentos de la teoría de la plasticidad computacional y se incluye una revisión de la literatura más relevante en la materia. La implementación es una extensión del software de código abierto *Open Nonlinear Structural Analysis Solver* (ONSAS), y para su validación se resuelven ejemplos numéricos de la literatura de referencia.

Palabras claves:

Elastoplasticidad, No linealidad, Elemento finito con discontinuidad fuerte, Post-colapso, Rótulas de ablandamiento.

ABSTRACT

One of the modes of structural collapse is yield failure in critical sections. The classic ultimate collapse load method assumes that once the plastic limit is reached in a section, the strength at the hinge remains constant while plasticity develops in other sections. This method may not be applicable to columns, or to over-reinforced or prestressed concrete structures; in those cases, it may overestimate the collapse load. Analysis of frames considering the softening or strength degradation response is fundamental for the elasto-plastic design of earthquake-resistant structures and for the post-collapse analysis of structures. Currently, this is a field of research for new numerical methods and for earthquake-resistant structural systems. The use of computational platforms with the capacity to calculate and analyze this type of model is limited by economic constraints and barriers to knowledge development. The development of these computational platforms is necessary for national academic research. In this thesis, a formulation for modeling softening plastic hinges is studied and implemented using the Euler-Bernoulli finite element with strong rotation discontinuity. The fundamentals of computational plasticity theory are presented, and a review of the most relevant literature on the subject is included. The implementation is an extension of the open source software *Open Nonlinear Structural Analysis Solver* (ONSAS), and for its validation, numerical examples from the reference literature are solved.

Keywords:

Elastoplasticity, Nonlinearity, Finite element with embedded strong discontinuity, Post-collapse, Softening hinges.

Tabla de contenidos

Lista de figuras	XII
Lista de símbolos	XVI
1 Introducción	1
2 Antecedentes	4
2.1 Mecánica Racional	4
2.1.1 Principio de los trabajos virtuales	5
2.1.2 Método de Newton-Raphson	6
2.2 Plasticidad	8
2.2.1 Teoría general	8
2.2.2 Teoría de estructuras	10
2.2.3 Modelado computacional de fallas	10
2.2.4 Problemas de localización	12
3 Plasticidad computacional	14
3.1 Plasticidad unidimensional	14
3.1.1 Plasticidad perfecta	14
3.1.2 Endurecimiento y ablandamiento isotrópicos	20
3.1.3 Algoritmo de mapeado de retorno	22
3.1.4 Principio de Clausius-Duhem	23
3.1.5 Principio de máxima disipación plástica	24
3.2 Análisis elastoplástico incremental	25
3.2.1 Procedimiento de la solución incremental	26
3.2.2 Métodos de control de desplazamiento	28
3.3 Método de los elementos finitos	31
3.3.1 Elemento finito de barra	31

3.3.2	Elemento finito de viga	32
4	Análisis elastoplástico de pórticos	33
4.1	Elemento de viga de Euler-Bernoulli con discontinuidad	34
4.1.1	Cinemática	34
4.1.2	Equilibrio	37
4.1.3	Relaciones constitutivas	39
4.1.4	Aplicación a una viga simplemente apoyada	42
4.2	Implementación computacional	44
4.2.1	Determinación de las variables internas	44
4.2.2	Resolución de las ecuaciones globales	47
4.2.3	Algoritmos	49
4.2.4	Criterios de parada	50
5	Resultados numéricos	51
5.1	Plasticidad en reticulados	52
5.1.1	Ejemplo i: reticulado de von Mises	52
5.1.2	Ejemplo ii: domo de Schwedler	56
5.2	Análisis post-colapso de pórticos	59
5.2.1	Ejemplo iii: viga ménsula	59
5.2.2	Ejemplo iv: viga empotrada-apoyada	62
5.2.3	Ejemplo v: viga biempotrada	67
5.2.4	Ejemplo vi: pórtico de dos pisos	69
5.2.5	Ejemplo vii: pórtico de Darvall-Mendis	71
6	Conclusiones	74
	Referencias bibliográficas	78
	Apéndices	84
	Apéndice 1 Soluciones analíticas	85
1.1	Reticulado de von Mises	85

Lista de figuras

2.1	Méchanique Analitique (portada de la primera edición, París 1788).	5
2.2	The Method of Fluxions (primera edición, 1736).	7
2.3	Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze (primera edición, Leyden 1638).	9
2.4	Localización de la plastificación.	12
2.5	Dependencia fuerte de la malla, no hay unicidad de la solución.	13
3.1	Modelo de dispositivo de fricción.	15
3.2	Material elástico-plástico perfecto.	19
3.3	Módulos elastoplásticos.	21
3.4	Módulos elastoplásticos tangentes.	22
3.5	Algoritmo de Mapeado de Retorno.	23
4.1	Grados de libertad de los nodos del elemento (coordenadas locales).	34
4.2	Función $\hat{M}(x, x_d)$ para $L^e = 2$ y $x_d = 0,5$.	35
4.3	Rótula de ablandamiento con resistencia nula.	37
4.4	Relaciones constitutivas.	39
4.5	Módulo plástico de ablandamiento.	41
4.6	Ángulo de rotación acumulado.	42
4.7	Viga simplemente apoyada, rótulas de ablandamiento.	43
4.8	Viga simplemente apoyada (curva de carga y deformada).	43
4.9	Viga simplemente apoyada (curvatura plástica y ángulo en la rótula).	43
5.1	Reticulado de von Mises.	52
5.2	Estructura simétrica (von Mises).	53
5.3	Fuerza vertical F - desplazamiento w.	54
5.4	Reticulado von Mises, resultado numérico con ADINA.	55
5.5	Cubierta del gasómetro municipal en Fichtestraße, Berlin-Kreuzberg.	56

5.6	Cúpula de Schwedler [ONSAS/ADINA].	57
5.7	Cúpula de Schwedler, resultados numéricos con ONSAS/ParaView.	58
5.8	Cúpula de Schwedler, resultados numéricos con ADINA.	58
5.9	Viga ménsula, rótula plástica de ablandamiento.	59
5.10	Viga ménsula, desplazamiento del extremo libre.	60
5.11	Viga ménsula, ciclo carga-descarga y ablandamiento.	61
5.12	Viga ménsula, validación e incrementos cíclicos.	61
5.13	Viga empotrada-apoyada.	62
5.14	Primer modo de colapso (3 rótulas).	62
5.15	Configuración crítica de colapso (no es un mecanismo, 1 rótula).	63
5.16	Viga empotrada-apoyada.	64
5.17	Estructura con una rótula plástica (plasticidad perfecta).	64
5.18	Mecanismo de colapso.	65
5.19	Factor de carga (kN) y desplazamiento (m).	66
5.20	Curvas de la deformada.	66
5.21	Viga biempotrada, rótulas plásticas de ablandamiento.	67
5.22	Viga biempotrada, plasticidad (factor de carga/desplazamiento).	68
5.23	Viga biempotrada (momento/desplazamiento).	68
5.24	Pórtico, rótulas de ablandamiento.	69
5.25	Pórtico de dos pisos, análisis post-colapso	70
5.26	Pórtico de dos pisos, momento/desplazamiento.	70
5.27	Pórtico Darvall-Mendis, rótulas de ablandamiento.	71
5.28	Pórtico Darvall-Mendis, rótulas de ablandamiento, carga de colapso.	72
1.1	Estructura simétrica (von Mises).	85
1.2	Tensión σ - deformación ϵ	87

Lista de símbolos

- α Ángulo de rotación de la rótula de ablandamiento 34
- $\Delta\alpha_{n+1}^{e,(i)}$ Incremento del ángulo α del elemento en t_{n+1} , iteración (i) 48
- $\alpha_{n+1}^{test,(i)}$ Ángulo de rotación test de la rótula en t_{n+1} , iteración (i) 46
- Ω_e Área de la sección del elemento 31
- x_d Coordenada escalar de posición de la discontinuidad 34
- κ Curvatura 36
- $\bar{\kappa}$ Curvatura continua 36
- $\bar{\kappa}^e$ Curvatura continua elástica 40
- $\bar{\kappa}^p$ Curvatura continua plástica 40
- $\bar{\kappa}_{n+1}^{p,test,(i)}$ Curvatura continua plástica test en t_{n+1} , iteración (i) 45
- $\bar{\bar{\kappa}}$ Curvatura localizada 36
- $\bar{\xi}$ Curvatura plástica acumulada 40
- $\bar{\xi}_{n+1}^{test,(i)}$ Curvatura plástica acumulada test en t_{n+1} , iteración (i) 45
- $\bar{\bar{\xi}}$ Ángulo de rotación acumulado 42
- $\bar{\bar{\xi}}_{n+1}^{test,(i)}$ Ángulo de rotación acumulado test en t_{n+1} , en la iteración (i) 46
- $\delta\kappa$ Curvatura virtual 32
- ϵ Deformación unitaria 15
- $\bar{\epsilon}$ Deformación continua axial 39
- ϵ^e Deformación elástica 15
- ϵ^p Deformación plástica 15
- $\mathbf{B}^u, \mathbf{B}^v, \mathbf{B}^\theta$ Derivadas de las funciones de interpolación 37
- $\mathbf{B}^d$ Matriz de derivadas de las funciones de interpolación 37
- $\mathbf{d}_n$ Campo de desplazamientos en t_n 25
- $\delta\theta$ Giro virtual 32
- $\Delta\mathbf{d}_{n+1}$ Incremento en el campo de desplazamientos en t_{n+1} 26
- $\Delta\mathbf{d}_{n+1}^k$ Incremento en el campo de desplazamientos en t_{n+1} , en la iteración k 26

$\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{e,(i)}$ Incremento de los desplazamientos del elemento en t_{n+1} , iteración (i) 48
 $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}$ Campo de desplazamientos en t_{n+1} en la iteración (i) 44
 $\delta \mathbf{d}$ Vector de desplazamientos nodales virtuales 37
 $\mathbf{q}_e$ Valores nodales de desplazamiento del elemento 31
 δw Desplazamiento vertical virtual 32
 $\delta_{\mathbf{x}_d}$ Delta de Dirac 36
 $\mathcal{D}_{mech}$ Disipación mecánica instantánea 23
 V_{int} Energía de deformación almacenada 23
 λ_n Factor de carga en t_n 28
 $\Delta \lambda_{n+1}$ Incremento en el factor de carga en t_{n+1} 28
 ψ Factor de escala del método arc-length 28
 γ Factor de tasa de deslizamiento plástico 17
 $\dot{\gamma}$ Factor multiplicador plástico 40
 $\bar{\gamma}_{n+1}^{(i)}$ Deslizamiento plástico en t_{n+1} , en la iteración (i) 45
 $\ddot{\gamma}$ Factor multiplicador plástico de ablandamiento 42
 $\bar{\bar{\gamma}}_{n+1}^{(i)}$ Deslizamiento plástico de ablandamiento en t_{n+1} , iteración (i) 47
 $\mathbf{F}_n^{ext}$ Fuerzas externas en t_n 25
 $\mathbf{F}^{int}$ Fuerzas internas 25
 $\mathbf{f}_e^{int}$ Fuerzas internas del elemento 27
 $\mathbf{r}_{n+1}^k$ Fuerzas residuales en t_{n+1} , en la iteración k 27
 $H_{x_d}(x)$ Función de Heaviside 35
 $\mathcal{L}^p$ Funcional Lagrangeano 24
 $\mathbf{N}_e$ Funciones de forma del elemento 31
 $\mathbf{N}^v(x), \mathbf{N}^\theta(x)$ Funciones de interpolación de Hermite 34
 $\mathbf{N}^u$ Funciones de interpolación lineales 34
 $\bar{\phi}$ Función de falla 42
 $\bar{\bar{\phi}}_{n+1}^{test,(i)}$ Función de falla test en t_{n+1} , iteración (i) 46
 $\bar{\phi}$ Función de fluencia 40
 $\bar{\bar{\phi}}_{n+1}^{test,(i)}$ Función de fluencia test en t_{n+1} , iteración (i) 45
 I Inercia 40
 L^e Longitud del elemento 34
 Δl Longitud prescrita del paso del método arc-length 28
 E Módulo de elasticidad de Young 14
 C_{n+1}^{ep} Módulo elastoplástico tangente en el tiempo t_{n+1} 46

K Módulo plástico 20
 K_s Módulo plástico de ablandamiento 41
 K_{h1}, K_{h2} Módulos plásticos de endurecimiento 40
 M Momento flector en la sección 40
 $M_{n+1}^{test,(i)}$ Momento flector test en t_{n+1} , iteración (i) 45
 M_c Momento (first crack) 39
 M_y Momento (asociado a la fluencia) 39
 M_u Momento último (máxima capacidad resistente) 39
 $\bar{q}$ Momento de endurecimiento 40
 $\bar{q}_{n+1}^{test,(i)}$ Momento de endurecimiento test en t_{n+1} , iteración (i) 45
 $\bar{\bar{q}}$ Momento de ablandamiento 42
 $\bar{\bar{q}}_{n+1}^{test,(i)}$ Momento de ablandamiento test en t_{n+1} , iteración (i) 46
 t Momento en la discontinuidad 38
 $t_{n+1}^{test,(i)}$ Momento en la discontinuidad test en t_{n+1} , iteración (i) 46
 $\mathbf{A}$ Operador ensamblado de matrices 32
 $\mathcal{P}_{int}$ Potencia de las fuerzas internas 23
 $\mathbb{R}$ Números reales 15
 $\mathbb{R}_+$ Números reales positivos 21
 $\mathbf{K}_{n+1}^k$ Matriz de rigidez tangente en t_{n+1} , en la iteración k 27
 $\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{e,(i)}$ Matriz de rigidez tangente del elemento en t_{n+1} , en la iteración (i) 48
 $\boldsymbol{\sigma}$ Vector de solicitaciones internas 37
 σ Tensión 15
 σ_Y Tensión de fluencia 16
 σ_{fl} Tensión de fluencia σ_Y 54
 $\mathbb{E}_\sigma$ Conjunto de tensiones admisibles 16
 $\partial\mathbb{E}_\sigma$ Superficie de fluencia 17
 $\delta W^{ext,e}$ Trabajo virtual de las fuerzas externas, del elemento 37
 $\delta W^{int,e}$ Trabajo virtual de las fuerzas internas, del elemento 37
 ξ Variable interna de endurecimiento o ablandamiento 20

Capítulo 1

Introducción

O mathématiques sévères, je ne vous ai pas oubliées, depuis que vos savantes leçons, plus douces que le miel, filtrèrent dans mon coeur, comme une onde rafraîchissante.

Chant deuxième, Les Chants de Maldoror, 1869
Isidore Lucien Ducasse, Conde de Lautréamont

Una de las causas de colapso de estructuras es la acción de cargas de origen sísmico. Este tipo de cargas —que ocurren en forma cíclica—, pueden producir desplazamientos y tensiones en régimen plástico, con activación de rótulas plásticas de ablandamiento.

El análisis de los mecanismos de falla involucra múltiples dificultades: no linealidad material, no linealidad geométrica, evolución temporal, inestabilidad numérica, entre otras. La ocurrencia de fallas por fluencia en secciones críticas —con activación de rótulas plásticas—, puede producir el colapso de una estructura. El método clásico de la carga última de colapso, considera que una vez alcanzado el límite plástico en una sección, la capacidad resistente en la rótula se mantiene constante mientras se desarrolla la plastificación en otras secciones. Este método puede no ser aplicable en columnas, o en estructuras de hormigón sobreamadas o pretensadas (Hillerborg, [1990](#); Jirásek y Bazant, [2002](#); Maier, [1971](#)), en esos casos puede sobrestimar la carga de colapso.

El análisis de pórticos considerando la respuesta de ablandamiento o pérdida de resistencia, es fundamental para el diseño en régimen elastoplástico de estructuras sismorresistentes y para el análisis post-colapso de estructuras. En la actualidad, es un campo de investigación de nuevos métodos numéricos y de sistemas estructurales sismorresistentes.

Motivación y objetivo

El objetivo de esta tesis, es la presentación del estudio, la implementación y la validación de una formulación para el análisis post-colapso de pórticos.

Este trabajo representa el inicio de una nueva línea de investigación en el grupo de Modelado e Identificación en Sólidos y EStructuras (MISEs) del Departamento de Estructuras del Instituto de Estructuras y Transporte (IET) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República.

Durante la realización de esta tesis se contribuyó al desarrollo de una nueva capacidad del software de código abierto *Open Nonlinear Structural Analysis Solver* (ONSAS - www.onsas.org). Este software, que se ejecuta en GNU-Octave (Eaton et al. 2025) o MATLAB (MathWorks, 2025), permite realizar análisis estáticos o dinámicos de estructuras formadas por barras, vigas, pórticos, sólidos, y recientemente, por cáscaras. Su desarrollo es liderado por el Dr. Ing. Jorge Pérez Zerpa, y fue iniciado en 2016 como apoyo para el curso de posgrado del IET: Análisis No Lineal de Estructuras —docentes del IET: Jorge Pérez Zerpa y Bruno Bazzano—. En los últimos años este software ha recibido contribuciones de investigadores y estudiantes de posgrado de instituciones como el *KTH Royal Institute of Technology*, el *Polytechnique Montréal* o la *Universidade Federal do Rio Grande do Sul*. Asimismo, fue utilizado en más de una decena de publicaciones, incluyendo artículos de revistas, artículos para congresos, tesis y proyectos de investigación.

Como extensión del software ONSAS, se implementó una formulación para el modelado de rótulas plásticas de ablandamiento mediante el elemento finito de Euler-Bernoulli con discontinuidad fuerte de rotación (Armero y Ehrlich, 2006; Ehrlich y Armero, 2005; Jukić et al. 2013; Simo et al. 1993). Para la resolución de las ecuaciones no lineales se utilizaron métodos de control de desplazamiento, en particular, para resolver los problemas de estabilidad cuando se aplicaron cargas cíclicas, se implementaron los predictores de trabajo incremental y del determinante de la matriz de rigidez tangente —para el método arc-length cilíndrico—. Para el análisis elastoplástico de estructuras reticuladas se implementó la deformación logarítmica rotada, necesaria para el análisis de las deformaciones finitas —en particular para el caso de compresión de barras—.

La utilización de plataformas computacionales comerciales con capacidad de cálculo y análisis considerando rótulas plásticas de ablandamiento, está limitada por restricciones económicas, y de barreras al desarrollo del conocimiento, el software que incluye estas capacidades —ADINA, ABAQUS, SAP2000— presenta distintos grados de opacidad y de limitaciones, el código es inaccesible y no se puede modificar.

En referencia al código abierto, el software OpenSees desarrollado por la Universidad de California en Berkeley con la coordinación del PEER (Pacific Earthquake Engineering Research Center), tiene capacidades comparables con las del ONSAS, incluyendo la activación de rótulas plásticas de ablandamiento. Sin embargo, es necesario el desarrollo de estas plataformas computacionales para la investigación académica nacional.

Estructura y contenido de la tesis

La tesis está formada por 6 capítulos. En el Capítulo 2 se presenta una revisión de antecedentes, incluyendo desarrollos históricos de la física de la plasticidad desde los tiempos de Galileo Galilei, hasta aplicaciones recientes; incluyendo el principio de los trabajos virtuales, la teoría de estructuras, el método de los elementos finitos y las primeras publicaciones sobre la teoría plástica de estructuras de acero. Se presenta una revisión de la literatura científica sobre la plasticidad computacional y el modelado computacional de fallas. Se describen los problemas de localización y los métodos de limitación de la localización.

En el capítulo 3 se presentan los conceptos básicos de la teoría de la plasticidad unidimensional, el principio de Clausius-Duhem, el principio de máxima disipación plástica, y la formulación matemática de la plasticidad como un problema de optimización. Además, se describen algoritmos de análisis incremental que son utilizados en plasticidad computacional.

En el capítulo 4 se presenta una formulación para resolver problemas de plasticidad con endurecimiento y ablandamiento, en este último caso mediante la activación localizada de rótulas plásticas. Se desarrolla en detalle el elemento finito de viga de Euler-Bernoulli con discontinuidad fuerte de rotación, para el modelado de rótulas plásticas de ablandamiento. Se describe el procedimiento computacional, y los códigos desarrollados en MATLAB, como extensión de ONSAS.

El capítulo 5 contiene los resultados numéricos que se obtienen en el análisis elastoplástico de diversas estructuras, incluyendo el análisis post-colapso de pórticos con rótulas plásticas de ablandamiento, se comparan los resultados obtenidos con aquellos presentes en la literatura de referencia.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones y las líneas de investigación e implementación computacional que se pueden desarrollar en trabajos posteriores.

Capítulo 2

Antecedentes

*...la historia de la ciencia es ciencia en sí misma.
No podemos apreciar lo que tenemos sin conocer lo que otros poseyeron antes.*

Teoría de los Colores, 1808
Johann Wolfgang von Goethe

En este capítulo, se presenta un resumen histórico, y de la literatura reciente, sobre la mecánica racional, el principio de los trabajos virtuales, la plasticidad, la teoría de estructuras, el modelado computacional de fallas, los problemas de localización, y los métodos de limitación de la localización.

2.1. Mecánica Racional

Las bases físico-matemáticas de la ingeniería se remontan a Arquímedes de Siracusa (267-212 a. C.). En su tratado sobre las *Balanzas* o *Palancas*, *De Aequiponderantibus*, dice Pappus que en él demostraba el principio fundamental de los brazos de palanca (de Zúñiga, 1924), y sobre el fulcro se dice que dijo: “*dadme un punto de apoyo y moveré el mundo*”. Arquímedes describe por primera vez en un lenguaje físico-matemático el equilibrio de fuerzas aplicadas.

Circa 1500 años después, Jordanus Nemorarius, en sus trabajos de estática intenta probar las leyes de la palanca mediante el *principio de las velocidades virtuales* (Kurrer, 2008). El *principio de los trabajos virtuales*, llamado antes *principio de las velocidades virtuales*, es la base de la mecánica analítica para cuerpos rígidos. Es formulado por Johann Bernoulli en una carta a Pierre Varignon, fechada el 26 de enero de 1717, donde establece su generalización y utilidad para la resolución de problemas de estática

(Appell y Dautheville, 1910). En 1743, D'Alembert demuestra que la ecuación de un problema de dinámica puede reducirse a la de un problema de estática.

Finalmente, Joseph-Louis Lagrange¹, en su célebre obra *Méchanique Analitique* (ver Figura 2.1), publicada en 1788, justamente el año anterior al estallido de la Revolución Francesa, describe la teoría en forma completa (Appell y Dautheville, 1910). Esta obra fue comenzada en Turín, cuando Lagrange tenía 19 años, pero fue publicada en París en el año 1788, cuando tenía 52 años.

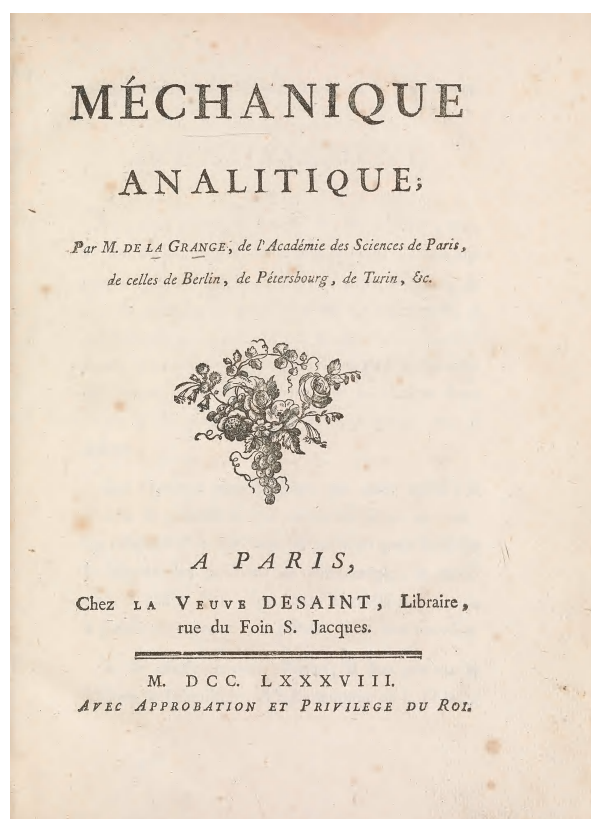


Figura 2.1: Méchanique Analitique (portada de la primera edición, París 1788).

2.1.1. Principio de los trabajos virtuales

El *principio de los trabajos virtuales* (PTV), establece que en una estructura en equilibrio y bajo un sistema de cargas externas, al considerar desplazamientos arbitrarios —virtuales— compatibles con las condiciones de borde, el trabajo realizado por las fuerzas externas en los desplazamientos virtuales es igual al trabajo que realizan las fuerzas internas en las deformaciones virtuales (deformaciones

¹Lagrange (Giuseppe Luigi Lagrangia) fue un analista, nunca un geómetra. El prefacio de su obra maestra reza: “*en esta obra no se encontrará ninguna figura*”.

virtuales inducidas por los desplazamientos virtuales). Esto puede ser expresado como

$$\delta W^{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta W^{ext}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}), \quad \forall \delta \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

donde $\delta \mathbf{u}$ representa un desplazamiento virtual arbitrario compatible con las condiciones de borde de la estructura, $\delta W^{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ representa el trabajo interno de un sólido, dado por:

$$\delta W^{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\epsilon} \, dV, \quad (2.2)$$

siendo $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones y $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ el tensor de deformaciones virtuales, y donde $\delta W^{ext}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ representa el trabajo virtual externo, dado por:

$$\delta W^{ext}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial \Omega_{\sigma}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS, \quad (2.3)$$

siendo $\mathbf{b}$ las fuerzas de volumen externas y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ tensiones conocidas en la frontera de Ω_{σ} .

El PTV es condición necesaria y suficiente para el equilibrio de una estructura o cualquiera de sus partes (Gurtin, 1981; Oñate, 2010; Zienkiewicz y Taylor, 2005). Las ecuaciones que resultan de aplicar el PTV son en general no lineales, por lo que es de interés estudiar y aplicar métodos numéricos para su resolución, como el método de Newton-Raphson.

2.1.2. Método de Newton-Raphson

La idea de resolver una ecuación iterando y estimando la solución por aproximaciones sucesivas, ha sido usada por diferentes culturas durante cientos de años. Verbigracia, es el caso de los antiguos griegos y babilonios, así como el de los algebristas árabes desde el siglo once. En particular, el método de Newton se incluye en el libro *Método de Fluxiones* —manuscrito escrito en latín, en 1671—, publicado en forma póstuma con traducción al inglés en 1736, ver Figura 2.2.

Joseph Raphson, que tuvo acceso a la obra de Isaac Newton, publicó un tratado con el método en 1690 —lo perfecciona al operar siempre con la ecuación inicial—. ¹ En 1818, Joseph Fourier mejora el método de Newton para aproximar raíces reales, resultados que se publican en forma póstuma en 1831, en el tratado *Analyse des equations déterminées*.

Thomas Simpson fue el primero en dar una descripción moderna del método en 1740 —usando derivadas—. Para resolver la ecuación $f(x) = 0$, la curva $y = f(x)$ es

¹**Historia de la matemática**, Volumen 2, Julio Rey Pastor y José Babini, [Del Renacimiento a finales del siglo XX], [Pastor y Babini, 1951].

Resolution of affected Equations may be compendiously perform'd in Numbers, and then I shall apply the same to Species.

20. Let this Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ be propos'd to be resolv'd, and let 2 be a Number (any how found) which differs from the true Root less than by a tenth part of itself. Then I make $2 + p = y$, and substitute $2 + p$ for y in the given Equation, by which is produced a new Equation $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, whose Root is to be sought for, that it may be added to the Quote. Thus rejecting $p^3 + 6p^2$ because of its smallness, the remaining Equation $10p - 1 = 0$, or $p = 0,1$, will approach very near to the truth. Therefore I write this in the Quote, and suppose $0,1 + q = p$, and substitute this fictitious Value of p as before, which produces $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$. And since $11,23q + 0,061 = 0$ is near the truth, or $q = -0,0054$ nearly, (that is, dividing $0,061$ by $11,23$, till so many Figures arise as there are places between the first Figures of this, and of the principal Quote exclusively, as here there are two places between 2 and $0,005$) I write $-0,0054$ in the lower part of the Quote, as being negative; and supposing $-0,0054 + r = q$, I substitute this as before. And thus I continue the Operation as far as I please, in the manner of the following Diagram:

$y^3 - 2y - 5 = 0$		+ 2,10000000 - 0,00544852 + 2,09455148, &c. = y	
$2 + p = y.$	$+ y^3$ $- 2y$ $- 5$	+ 8 + 12p + 6p ² + p ³ - 4 - 2p - 5	
The Sum		- 1 + 10p + 6p ² + p ³	
$0,1 + q = p.$	$+ p^3$ $+ 6p^2$ $+ 10p$ $- 1$	+ 0,001 + 0,03q + 0,3q ² + q ³ + 0,06 + 1,2 + 6, + 1, + 10, - 1,	
The Sum		0,061 + 11,23q + 6,3q ² + q ³	
$-0,0054 + r = q.$	$+ q^3$ $+ 6,3q^2$ $+ 11,23q$ $+ 0,061$	- 0,00000157464 + 0,000007487 - 0,01621 + r ³ + 0,000133708 - 0,00804 + 6,3 + 0,000642 + 11,23 + 0,061	
The Sum		+ 0,0005416 + 11,162r	
$-0,00004852 + s = r.$			

Figura 2.2: The Method of Fluxions (primera edición, 1736).

aproximada por su tangente en el punto $(x_n, f(x_n))$, donde x_n es la aproximación a la raíz. Asumiendo que $f'(x_n) \neq 0$, la siguiente aproximación de x_{n+1} es determinada a partir de la abscisa del punto de intersección de la tangente con el eje x.

A partir del desarrollo de Taylor de $f(x)$ en x_n , considerando el término lineal, se puede remplazar la ecuación $f(x) = 0$ por $f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) = 0$, si $f'(x_n) \neq 0$, y se obtiene: $x_{n+1} = x_n + h_n$ siendo $h_n = -f(x_n)/f'(x_n)$.

Para n ecuaciones y n variables, se generaliza: Ver (Dahlquist y Björck, 2008). Es importante mencionar que el método Newton-Raphson no funciona cuando $f'(x_n) = 0$.

El Método de Newton-Raphson puede ser aplicado a la resolución de las ecuaciones no lineales que se obtienen luego de aplicar el PTV (Bazzano y Zerpa, 2017), pero en caso de inestabilidades, se debe controlar el recorrido por la curva, y sortear puntos de retroceso y extremos relativos. Entre los métodos de control de desplazamiento, se incluyen los métodos arc-length y los métodos de control de desplazamientos directo e indirecto (Bazzano y Zerpa, 2017; Crisfield, 1981, 1991; Jirásek y Bažant, 2002; Riks, 1972, 1979).

Los métodos arc-length en relación con el análisis estructural fueron introducidos por Riks (1972, 1979) y por Wempner (1971), con modificaciones realizadas por Crisfield (1981), estos métodos permiten recorrer la curva solución (path-following), y de esa forma resolver los problemas de convergencia en equilibrios inestables del tipo snap-through, snap-back, y en presencia de bifurcaciones (de Souza Neto y Feng, 1999).

2.2. Plasticidad

2.2.1. Teoría general

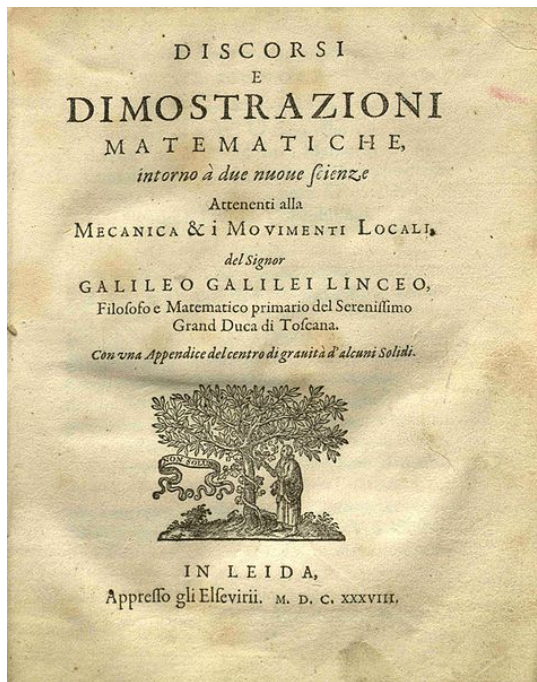
El término “plástico”, que deriva del griego $\pi\lambda\alpha\sigma\tau\iota\kappa\acute{o}$ que significa “susceptible de ser moldeado”, describe materiales tales como los metales dúctiles y la arcilla. Estos materiales tienen la propiedad de deformarse por la aplicación de una fuerza de intensidad suficiente y adquieren una nueva forma al retirar la fuerza.

Los primeros trabajos científicos que se relacionan con la plasticidad son obra de Galileo Galilei, en su libro *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* publicado en Leyden (Galilei, 1638), resume su trabajo sobre las propiedades mecánicas de los cuerpos sólidos y la resistencia de vigas, ver Figura 2.3.

Es la primera publicación sobre resistencia de materiales, y sobre la teoría de la elasticidad, e incluye un estudio sobre la carga de colapso de una ménsula (*Prifma folido fitto in un muro*), ver Figura 2.3b. Un siglo después, en 1748, Giovanni Poleni estudia el domo de Miguel Ángel para la Catedral de San Pedro —*Memorie istoriche della gran cupola del tempio Vaticano e de' danni di essa, e de' ristoramenti loro*—, en sus investigaciones considera ideas del análisis límite de estructuras, ver en (Benvenuto, 1990a, 1990b).

En 1776, Charles-Augustin de Coulomb, en sus investigaciones sobre muros de contención de tierra para fortificaciones militares, y como parte del análisis estático de fallas, estudia el deslizamiento plástico y la condición de fluencia (Benvenuto, 1990b).

En el siglo XIX, La Hire, Boscovich, Lamé, Clapeyron, Fourier y Pauker, realizan investigaciones sobre la estabilidad de arcos, bóvedas, y domos, de esa forma se comienzan a desarrollar conceptos del análisis plástico (Benvenuto, 1990b). Durante todo el siglo XIX, continúan las investigaciones y el desarrollo de la teoría con las investigaciones sobre las deformaciones plásticas y las fallas de materiales, a cargo de Lüders (1854), Tresca (1868), Barré de Saint-Venant (1870), Lévy (1870), Rankine (1876), Bauschinger (1881), Considère (1891), Engesser (1895), Hartmann (1896) y Mohr (1900). A comienzos del siglo XX, los trabajos de von Karmán (1909), von Mises (1913), Hencky (1924) y Reuß (1930), incluyen los conceptos de superficie de fluencia y ley de flujo plástico. Un avance importante fue la resolución del problema



(a) Portada de la primera edición.



(b) Prisma solido A B, C D fitto in un muro dalla parte A B.

Figura 2.3: Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze (primera edición, Leyden 1638).

de la torsión por Nádai (1923), y las investigaciones de Hencky (1923) y Prandtl (1923) sobre el problema de la indentación. En el año 1934, el concepto de dislocaciones en metales fue introducido por Taylor y otros, de esa forma la teoría de la plasticidad encontraba una explicación a nivel de la estructura atómica de los materiales. Un cristal es una matriz tridimensional de átomos que forman una red regular, la cual puede considerarse como una molécula de extensión indefinida (Dunne y Petrinic, 2005; Lemaitre y Chaboche, 1990; Read, 1953). En la década de los años 60, experimentos utilizando microscopios de escaneo electrónico habilitan la comprensión de los principales mecanismos de la deformación y fractura de materiales. En la segunda mitad del siglo XX, se completa la teoría, en particular, la teoría matemática de la plasticidad (Hill, 1998), donde Duvaut and Lions (1972), Johnson (1976,1978), Moreau (1976), Temam (1985) contribuyeron a la formulación variacional de la plasticidad a partir del principio de máxima disipación plástica (atribuido a von Mises) y luego estudiado por Mandel (1964) y Lubliner (1984,1986), (Lubliner, 2006). Finalmente, se pueden mencionar los estudios sobre rótulas plásticas de ablandamiento (Darvall y Mendis, 1985), la plasticidad computacional (Simo y Hughes, 1998), y recientes estudios sobre los mecanismos de fallas y estructuras sismorresistentes (Jaberi, 2025; Nouri et al. 2025).

2.2.2. Teoría de estructuras

En la segunda mitad del siglo XIX y a principios del XX, se construyen grandes estructuras de acero y hormigón, tales como la Torre Eiffel —La tour de trois cents metres— (Lemoine, 2006), y el puente ferroviario Firth of Forth (1890).

En hormigón armado, se puede mencionar una obra maestra de la ingeniería, el puente de Salginatobel del ingeniero suizo Robert Maillart (1930) (Billington, 2000).

Los primeros ingenieros estructurales que trabajaban con acero valoraban las características del material, en particular, las propiedades plásticas y dúctiles del acero, y las reservas de resistencia más allá del límite elástico, pero no se tenía un conocimiento teórico sobre la plasticidad del material. Como explica (Heyman, 2007), no debe olvidarse la diferencia entre conocimiento técnico y conocimiento científico. La tecnología no es una derivación de la ciencia sino un cuerpo de conocimientos autónomo, aunque puede aplicar la ciencia, no es ciencia aplicada.

Recién en el período de 1925 a 1950 se desarrolla una teoría de las estructuras, que incluye la no linealidad, y se aplican relaciones constitutivas elastoplásticas que permiten modelar las condiciones reales del comportamiento estructural.

El comportamiento constitutivo del acero y el hormigón puede ser considerado elastoplástico en ciertos rangos de deformación, por lo que la teoría general de la plasticidad es aplicada para el estudio de la falla, y el diseño de estructuras.

Una de las herramientas aplicadas en el análisis de pórticos es el teorema estático del análisis límite, el cual es estudiado por Rankine en 1859, por Kötter en 1899, por Kazinczy en 1914, y por Kist en 1917 (Kurrer, 2008).

Los teoremas cinemático y estático del análisis límite, son demostrados por primera vez en 1938, por el ingeniero soviético A. A. Gvozdev, y el resultado publicado en ruso en la Academia de Ciencias de Moscú, resultado que es desconocido durante largo tiempo por el mundo occidental. En 1936, Melan demuestra el teorema estático sobre el shakedown, resultado que sin ser demostrado formalmente, ya se conocía desde hacía años, al menos por el propio Melan y por Bleich en 1932.

Jacques Heyman, John Fleetwood Baker y Michael Rex Horne, publican el primer libro sobre teoría plástica para estructuras de acero: *The steel skeleton. Vol. 2: Plastic behaviour and design* (Baker et al. 1956), este libro fue el primero en mencionar los teoremas fundamentales de la teoría de la carga última y en describir sus aplicaciones prácticas.

2.2.3. Modelado computacional de fallas

La falla de vigas y pórticos, en general, se acompaña con la fluencia plástica y la falla localizada en secciones críticas. Es decir, con la activación de rótulas plásticas en

secciones críticas, en el caso de la flexión, se produce un aumento en la curvatura de la viga en forma localizada, en una región de pequeñas dimensiones, y por lo tanto se activa una rótula de rotación relativa entre las partes de la viga.

El colapso de una estructura puede ocurrir en forma localizada —cuando alguna parte de la estructura se transforma en un mecanismo—, o en la totalidad de la estructura, cuando la estructura globalmente se convierte en un mecanismo. Se consideran 2 tipos de colapso estructural:

1. ***Colapso estructural material y no geométrico.***

No linealidad material, con falla resistente del material, con la formación de rótulas plásticas de ablandamiento —*softening hinges*— y linealidad geométrica.

2. ***Colapso estructural geométrico.***

No linealidad material, sin falla resistente del material —sin *softening hinges*— y con no linealidad geométrica.

El análisis clásico de la carga última de colapso supone momentos de plastificación constantes en las rótulas, es así que en los casos en que debe considerarse el ablandamiento este método sobreestima la carga de colapso. Se ha mostrado necesario considerar la respuesta de ablandamiento para modelar vigas pretensadas, vigas de acero con pandeo local, y vigas sobrearmadas, ver (Hillerborg, 1990; Jirásek y Bažant, 2002; Maier, 1971).

El modelar la estructura, y en particular la falla material de los elementos que la componen mediante rótulas plásticas de ablandamiento, tiene como consecuencia la redistribución de las cargas —conforme se activan la rótulas plásticas de ablandamiento—, ver (Bažant, 2003a, 2003b; Cocchetti y Maier, 2003).

La rótula puede ser modelada como un segmento de viga, donde se producen grandes deformaciones (curvatura), de acuerdo a una relación constitutiva que relaciona las deformaciones con las tensiones equivalentes, e incluye la respuesta de ablandamiento de la rótula plástica. Un ejemplo de aplicación de ese modelo es el trabajo de Darvall-Mendis, el cual se basa en una rótula plástica con extensión predeterminada en función de las dimensiones de la viga, ver (Darvall y Mendis, 1985).

Otra forma de modelar la rótula, es mediante la parametrización de la extensión de la falla en función de la dimensión de la malla de elementos finitos, ver (Coleman y Spacone, 2001). Ejemplos de aplicación del método de los elementos finitos con rótulas de extensión finita se incluyen en (Sanjayan y Darvall, 1995). Sobre la extensión de la región de falla, ver (Bažant, 2002, 2003a, 2003b).

Aplicar el método de los elementos finitos considerando la relación constitutiva momento-curvatura con ablandamiento, se puede mostrar que es un problema numérico mal planteado (*ill-posed* en inglés), por lo que debe ser regularizado. El

resultado es fuertemente dependiente de la dimensión característica de la malla de elementos finitos, y conduce a resultados que no cumplen la física del problema, en particular, la disipación mecánica instantánea tiende a cero, y no se cumple la unicidad de la solución, ver (Armero y Ehrlich, 2004; Ehrlich y Armero, 2005; Ibrahimbegovic, 2009; Lasry y Belytschko, 1988; Zienkiewicz y Taylor, 2005).

2.2.4. Problemas de localización

Los problemas de localización ocurren cuando la plastificación con ablandamiento se localiza en un elemento, por ejemplo sea el problema de una barra empotrada y sometida a un desplazamiento impuesto en el extremo libre.

En el caso ideal, cuando la barra es solicitada con una fuerza directa, o un desplazamiento impuesto Δ , la tensión es uniforme en todas las secciones. Para localizar la falla se debilita una parte pequeña de la barra Ω_p , ver Figura 2.4. Se considera un modelo de elementos finitos, y uno de los elementos se ubica en la extensión debilitada. Al aplicar el programa de desplazamientos impuestos a la barra,

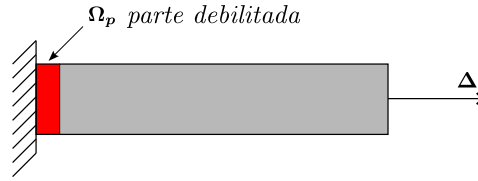


Figura 2.4: Localización de la plastificación.

el elemento debilitado es el primero que plastifica con ablandamiento, mientras los demás se mantienen en el dominio elástico, esto provoca que el resto de los elementos de la barra entren en descarga, dado que la tensión en el elemento debilitado decrece, y esa tensión se transfiere al resto de la barra (el proceso de carga se realiza en forma cuasi-estática). Entonces, el único elemento que plastifica (con ablandamiento) es el que se debilita, los demás se mantienen en el dominio elástico. Luego, si se refina la malla, la disipación plástica instantánea localizada en el elemento debilitado tiende a cero, este resultado no es admisible ya que contradice la física del problema. La disipación plástica instantánea —ver Sección 3.1.4—, es igual a:

$$\mathcal{D}_{\Omega_p}^p = \int_{\Omega_p} (\sigma \dot{\epsilon}^p - K \xi \dot{\xi}) dx. \quad (2.4)$$

Al refinar la malla, la disipación plástica instantánea tiende a cero, por lo tanto el total de la disipación plástica en el proceso de carga tiende a cero,

$$\lim_{\Omega_p \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{D}_{\Omega_p}^p dt \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

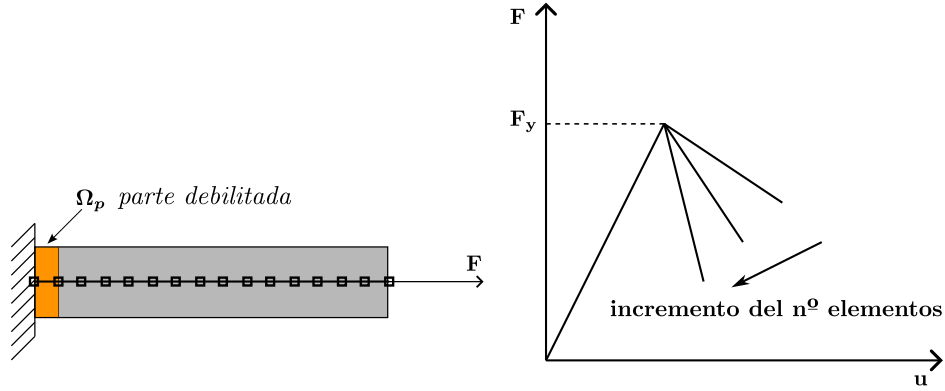


Figura 2.5: Dependencia fuerte de la malla, no hay unicidad de la solución.

El resultado depende fuertemente de la malla de elementos finitos, al incrementarse el número de elementos no hay unicidad de la solución, ver Figura 2.5, lo cual tampoco es admisible (Jirásek y Bažant, 2002; Zienkiewicz y Taylor, 2005).

Para regularizar los problemas numéricos asociados a los modelos constitutivos con ablandamiento, se aplican los métodos de limitación de la localización, entre los que se encuentra la regularización basada en el elemento finito con discontinuidad fuerte en las deformaciones y desplazamientos, esto requiere una nueva formulación del elemento finito estándar —método descrito e implementado en esta tesis— (Armero y Ehrlich, 2006; Ehrlich y Armero, 2005; Jukić et al. 2013; Simo et al. 1993).

Juan Carlos Simo, Javier Oliver y Francisco Armero, muestran que considerar el elemento finito con discontinuidad fuerte resuelve el problema de la localización (Simo et al. 1993), demuestran que se regulariza el problema numérico mal planteado (se limita la localización), la energía de disipación plástica deja de tender a cero, se resuelve la dependencia fuerte de la malla (*strong mesh dependence*) y la no unicidad de la solución.

Posteriormente, F. Armero y D. Ehrlich presentan una formulación completa del método (Armero y Ehrlich, 2006; Ehrlich y Armero, 2005).

Otra forma de regularizar es parametrizar el módulo de ablandamiento en relación con la dimensión característica de la malla de elementos finitos (Bažant y Lin, 1988; Bažant y Pijaudier-Cabot, 1988).

Capítulo 3

Plasticidad computacional

I've seen things you people wouldn't believe. Attack ships on fire off the shoulder of Orion. I watched C-beams glitter in the dark near the Tannhäuser Gate.

Replicant, Nexus-6 model, Roy Batty

En este capítulo, se presentan los conceptos y métodos más relevantes para comprender el desarrollo central de la tesis. Se destacan la teoría de la plasticidad unidimensional, el principio de Clausius-Duhem, el principio de máxima disipación plástica, los algoritmos que resuelven la formulación computacional de la plasticidad, los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones no lineales, y el método de los elementos finitos.

3.1. Plasticidad unidimensional

En esta sección se describe la teoría matemática de la plasticidad unidimensional clásica, la respuesta irreversible, con un modelo de optimización. Luego, se generaliza el modelo para considerar la plasticidad con endurecimiento isotrópico.

Finalmente, se presentan el algoritmo de mapeo de retorno, y el procedimiento de solución incremental; en la obra de Simo y Hughes (1998) se trata con gran profundidad la teoría de la plasticidad computacional, y es la principal referencia de esta sección.

3.1.1. Plasticidad perfecta

Dispositivo de fricción

Para desarrollar la teoría matemática de la plasticidad unidimensional, se considera un dispositivo que consiste en un resorte de constante elástica E (módulo de elasticidad de Young), y un elemento friccional de constante $\sigma_Y > 0$, (Simo y Hughes, 1998).

Se asume que inicialmente el dispositivo tiene longitud unitaria y sección de área unitaria, σ es la tensión aplicada y ϵ es la deformación total en el dispositivo, ver Figura (3.1).

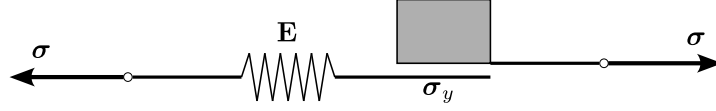


Figura 3.1: Modelo de dispositivo de fricción.

Se considera que la deformación total ϵ se descompone en la suma de una deformación elástica ϵ^e y una deformación plástica ϵ^p ,

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p. \quad (3.1)$$

La descomposición aditiva de las deformaciones elástica y plástica, se cumple bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, y en el caso de deformaciones finitas si se aplica la medida de deformación logarítmica rotada (Bonet y Wood, 2008; Simo y Hughes, 1998).

Ecuación constitutiva

El dispositivo de fricción descrito, representa el comportamiento constitutivo de materiales con micro estructuras, en las cuales, durante la plastificación, ocurre un reordenamiento a nivel atómico (Lemaitre y Chaboche, 1990).

La relación constitutiva entre la tensión y la deformación elástica, es lineal:

$$\sigma = E\epsilon^e. \quad (3.2)$$

Usando la descomposición aditiva de deformaciones, Ecuación (3.1), se obtiene:

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon^p). \quad (3.3)$$

Respuesta irreversible

En este problema, la variable tiempo t , representa un pseudo tiempo que mide la progresión de la deformación. Se considera que las cargas varían de forma quasi-estática y que la respuesta del modelo (no viscoelástico), es independiente de la velocidad de aplicación de las cargas (*rate independent*). Se asume que ϵ , ϵ^p y σ , son funciones del tiempo $t \in [0, T]$,

$$\epsilon^p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Se define la tasa de deformación plástica como:

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon^p. \quad (3.5)$$

Los cambios en el dispositivo de fricción ocurren solo si:

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon^p \neq 0. \quad (3.6)$$

Física del modelo elastoplástico

Se adoptan las siguientes condiciones acerca del modelo físico del dispositivo considerado:

- I. Las tensiones σ no pueden ser mayores en valor absoluto que el valor de σ_Y (tensión de fluencia del dispositivo).

Definimos el conjunto de tensiones admisibles:

$$\mathbb{E}_\sigma = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y \leq 0\}. \quad (3.7)$$

$\mathbb{E}_\sigma$ es un intervalo cerrado y por lo tanto es un conjunto convexo cerrado. La función de fluencia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se define:

$$f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y \leq 0. \quad (3.8)$$

La Ecuación (3.8) es conocida como condición de fluencia.

- II. Si el valor absoluto de σ es menor que σ_Y entonces $\dot{\epsilon}^p = 0$,

$$f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y < 0, \implies \dot{\epsilon}^p = 0, \quad (3.9)$$

entonces de las Ecuaciones (3.9) y (3.3), se concluye que:

$$f(\sigma) < 0 \implies \dot{\sigma} = E\dot{\epsilon}, \quad (3.10)$$

y la respuesta instantánea del sistema es elástica, con constante E.

Se define el rango elástico del sistema, como el conjunto abierto:

$$\text{int}(\mathbb{E}_\sigma) = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y < 0\}. \quad (3.11)$$

- III. $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y > 0$ es inadmisibles (por la condición de fluencia).

Además, por (II) si $f(\sigma) < 0$ entonces $\dot{\epsilon}^p = 0$, por lo tanto $\dot{\epsilon}^p \neq 0$ sólo si $f(\sigma) = 0$.

En ese caso, ocurre la fluencia plástica y el dispositivo de fricción se desliza en el sentido de aplicación de la tensión σ , con una tasa de deslizamiento constante. Entonces, siendo γ el valor absoluto de la tasa de deslizamiento plástico $\gamma := |\dot{\epsilon}^p| \geq 0$, se establece la *regla de flujo* Ecuación (3.12):

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma \operatorname{sgn}(\sigma). \quad (3.12)$$

Al conjunto borde $\partial\mathbb{E}_\sigma$ del conjunto convexo de tensiones admisibles $\mathbb{E}_\sigma$, se le denomina *superficie de fluencia*:

$$\partial\mathbb{E}_\sigma = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y = 0\}, \quad (3.13)$$

$$\mathbb{E}_\sigma = \operatorname{int}(\mathbb{E}_\sigma) \cup \partial\mathbb{E}_\sigma. \quad (3.14)$$

Siendo $\mathbb{E}_\sigma$, el conjunto clausura del conjunto rango elástico $\operatorname{int}(\mathbb{E}_\sigma)$.

Condiciones de carga y descarga

Para completar la descripción del modelo, resta determinar la tasa de deslizamiento $\gamma \geq 0$. Las siguientes condiciones de carga y descarga, conllevan el concepto de irreversibilidad. Se debe cumplir la regla de flujo Ecuación (3.12) sujeta a las restricciones que imponen la condición de fluencia $f(\sigma) \leq 0$ y la tasa de deslizamiento $\gamma \geq 0$.

Además, se deben cumplir las hipótesis asumidas sobre la física del modelo, en particular (II) y (III)

$$f(\sigma) < 0 \implies \gamma = 0, \quad (3.15)$$

$$\gamma > 0 \implies f(\sigma) = 0. \quad (3.16)$$

Por lo tanto, de las Ecuaciones (3.15) y (3.16), se concluye la siguiente restricción:

$$\gamma f(\sigma) = 0. \quad (3.17)$$

Condiciones de Kuhn-Tucker

Estas condiciones son clásicas en *programación matemática* y se conocen como condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \gamma \geq 0, \\ f(\sigma) \leq 0, \\ \gamma f(\sigma) = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Condición de consistencia (de persistencia)

Dados $\{\epsilon(t), \epsilon^p(t)\}$ para un tiempo $t \in [0, T]$. Se determina $\sigma(t) = E[\epsilon(t) - \epsilon^p(t)]$. Además, es dada la velocidad de deformación total $\dot{\epsilon}(t)$ en el tiempo t . Entonces, si la tensión pertenece a la superficie de fluencia:

$$\sigma(t) \in \partial\mathbb{E}_\sigma \iff \hat{f}(t) := f[\sigma(t)] = 0. \quad (3.19)$$

Se puede concluir que:

$$\dot{\hat{f}}(t) \leq 0. \quad (3.20)$$

Esto se deduce por *reductio ad absurdum*, dado que suponer lo contrario $\dot{\hat{f}}(t) > 0$ supondría que $\hat{f}(t + \Delta t) > 0$ para un $\Delta t > 0$, lo que equivale a incumplir la condición de admisibilidad (condición de fluencia). Adicionalmente, se puede establecer que:

$$\begin{cases} \gamma > 0 \Rightarrow \dot{f} = 0, \\ \dot{f} < 0 \Rightarrow \gamma = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Entonces, se puede escribir en forma sintética, la condición de consistencia (de persistencia):

$$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0. \quad (3.22)$$

Esto se interpreta como la condición que se debe cumplir en caso de que $\dot{\epsilon}^p \neq 0$ ($\gamma > 0$), la tensión $\sigma(t)$ debe permanecer (persistir) en la superficie de fluencia $\partial\mathbb{E}_\sigma$, entonces $\dot{f}[\sigma(t)] = 0$. La condición de persistencia, como se verá a continuación, permite determinar el valor de la tasa de deslizamiento γ .

Deslizamiento por fricción (flujo plástico)

Aplicando la regla de la cadena, se deriva $f(\sigma)$:

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p), \\ &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} E\dot{\epsilon} - \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \operatorname{sgn}(\sigma), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} |\sigma| = \operatorname{sgn}(\sigma) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \operatorname{sgn}(\sigma). \quad (3.24)$$

Considerando que $[\operatorname{sgn}(\sigma)]^2 = 1$, entonces:

$$\dot{f} = 0 \Rightarrow \gamma = \dot{\epsilon} \operatorname{sgn}(\sigma). \quad (3.25)$$

Sustituyendo la expresión de γ en (3.25) en la regla de flujo, Ecuación (3.12), resulta:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon} \text{ para el caso en que } f(\sigma) = 0, \dot{f}(\sigma) = 0. \quad (3.26)$$

El deslizamiento plástico ocurre de forma tal que la velocidad de deformación del elemento friccional es igual a la velocidad de deformación total. Este caso se denomina plasticidad perfecta, ver Figura (3.2).

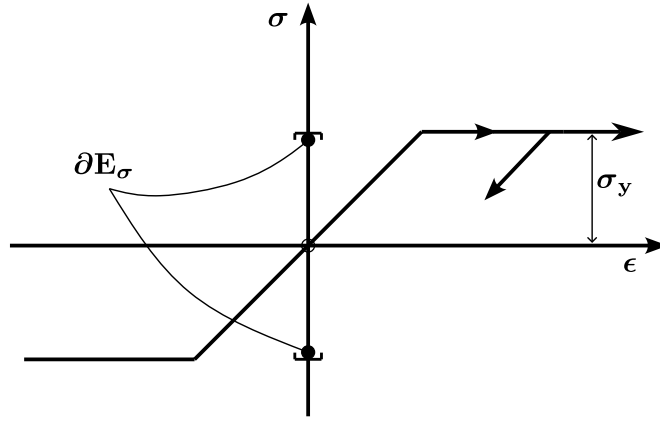


Figura 3.2: Material elástico-plástico perfecto.

Observaciones

- I. La condición de fluencia Ecuación (3.8) y la regla de flujo plástico, Ecuación (3.12) están formuladas en función de la tensión, no obstante la tensión σ depende de las deformaciones $\{\epsilon, \epsilon_p\}$ a través de la relación constitutiva elástica: $\sigma = E\epsilon^e \equiv E(\epsilon - \epsilon^p)$. El resultado obtenido en (3.26) depende de la variable $\dot{\epsilon}$ y no de $\dot{\sigma}$.
- II. Se podría reformular toda la teoría en el espacio de deformaciones, en términos de $\{\epsilon, \epsilon_p\}$, sustituyendo σ —utilizando la relación constitutiva elástica—. Entonces, la condición de fluencia quedaría:

$$\bar{f}\{\epsilon, \epsilon_p\} := f[E(\epsilon - \epsilon_p)] \equiv E|\epsilon - \epsilon_p| - \sigma_Y \leq 0. \quad (3.27)$$

- III. La regla de flujo plástico Ecuación (3.12) está relacionada con la condición de fluencia Ecuación (3.8) mediante la relación potencial:

$$\dot{\epsilon}_p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad (3.28)$$

dado que $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sgn}(\sigma)$.

En el caso de tres dimensiones, si se cumple la Ecuación (3.28), decimos que la regla de flujo plástico es *asociativa*.

3.1.2. Endurecimiento y ablandamiento isotrópicos

Para el caso de la plasticidad perfecta, la fluencia plástica ocurre con un valor constante de la tensión aplicada $|\sigma| = \sigma_Y$. En muchos metales se observa el efecto de plasticidad con endurecimiento. La diferencia sustancial entre la plasticidad perfecta y la plasticidad con endurecimiento estriba en que en el caso de la perfecta, el conjunto clausura del rango elástico $\mathbb{E}_\sigma$ permanece invariable, mientras que en el caso de la plasticidad con endurecimiento, $\mathbb{E}_\sigma$ se expande conforme aumenta el flujo plástico, y la tensión en la que se ingresa en régimen plástico aumenta. Se mantiene la hipótesis de la descomposición aditiva de la deformación total Ecuación (3.1) y la relación constitutiva elástica Ecuación (3.3).

Se asume que la expansión (endurecimiento) de $\mathbb{E}_\sigma$, cumple:

- El endurecimiento es isotrópico, en el sentido de que dado cualquier estado de carga, el centro de $\mathbb{E}_\sigma$ permanece en el origen.
- El endurecimiento es lineal con la cantidad de flujo plástico (lineal con $|\dot{\epsilon}_p|$) e independiente de $\text{sgn}(\dot{\epsilon}_p)$.

La primera propiedad, conduce a la siguiente condición de fluencia:

$$f(\sigma, \xi) = |\sigma| - [\sigma_Y + K\xi] \leq 0, \quad \xi \geq 0. \quad (3.29)$$

Siendo $\sigma_Y > 0$ y el *módulo plástico* $K \geq 0$, constantes dadas. La variable $\xi : [0, T] \Rightarrow \mathbb{R}$ es una función no negativa de la cantidad de flujo plástico, es denominada *variable de endurecimiento interna*. Si $K < 0$, entonces la respuesta plástica, en lugar de endurecimiento es de ablandamiento. Teniendo en cuenta la segunda propiedad, la evolución de ξ tiene la siguiente expresión:

$$\dot{\xi} = |\dot{\epsilon}^p|. \quad (3.30)$$

El mecanismo irreversible que gobierna el deslizamiento —la fluencia plástica— del modelo es el mismo, por lo tanto, la ecuación que lo rige permanece inalterada:

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma \text{sgn}(\sigma). \quad (3.31)$$

Siendo $\gamma \geq 0$ la velocidad de deslizamiento plástico (fluencia plástica). Las condiciones de carga y descarga, al igual que antes, se expresan como condiciones de Kuhn-Tucker y rigen el proceso irreversible de fluencia plástica:

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma, \xi) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma, \xi) = 0. \quad (3.32)$$

Donde $\gamma \geq 0$ se determina por la condición de consistencia (de persistencia):

$$\gamma \dot{f}(\sigma, \xi) = 0. \quad (3.33)$$

Observaciones

- I. De las Ecuaciones (3.30) y (3.31), resulta que $\dot{\xi} = \gamma \geq 0$, ecuación que expresa la evolución de ξ .
- II. De acuerdo con la condición de fluencia, que incluye a σ y ξ , es natural definir la clausura del rango elástico como: $\mathbb{E}_\sigma = \{(\sigma, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid f(\sigma, \xi) \leq 0\}$.

Módulo tangente elastoplástico (caso de isotropía)

Utilizando la condición de consistencia se puede calcular γ , para ello, se deriva $f(\sigma, \xi)$ aplicando la regla de la cadena:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \dot{\xi} = \text{sgn}(\sigma) E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) - K \dot{\xi} = \text{sgn}(\sigma) E \dot{\epsilon} - \gamma [E + K] \leq 0. \quad (3.34)$$

Igual que antes, se observa que $\dot{f} > 0$ no es posible, entonces aplicando las condiciones de Kuhn-Tucker Ecuaciones (3.32) y la condición de persistencia Ecuación (3.33):

$$f = \dot{f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\text{sgn}(\sigma) E \dot{\epsilon}}{E + K}, \quad (3.35)$$

$$\dot{\sigma} = E[\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p] = E[\dot{\epsilon} - \gamma \text{sgn}(\sigma)] = E \dot{\epsilon} \left[1 - \frac{E}{E + K} \right] = \frac{EK}{E + K} \dot{\epsilon}, \quad (3.36)$$

siendo $\frac{EK}{E + K}$ el módulo elastoplástico tangente, ver Figura 3.3.

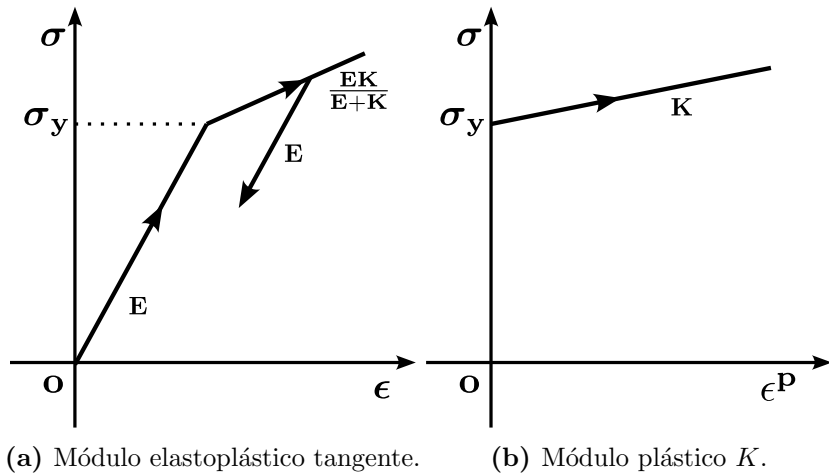


Figura 3.3: Módulos elastoplásticos.

En el caso de plasticidad con ablandamiento, cuando el módulo plástico es negativo $K < 0$, se debe considerar la restricción dada por el denominador del módulo elastoplástico tangente: $E + K > 0$, y por lo tanto hay una zona no permitida en el caso del ablandamiento, ver Figura 3.4.

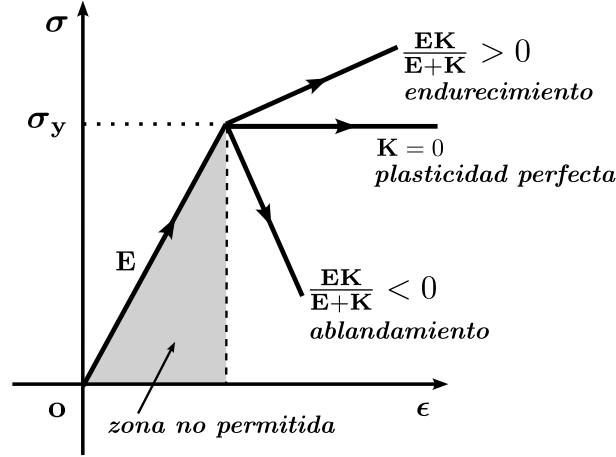


Figura 3.4: Módulos elastoplásticos tangentes.

3.1.3. Algoritmo de mapeado de retorno

Se presenta la idea fundamental de la plasticidad computacional: *el algoritmo de mapeado de retorno* —algoritmo computacional predictor-corrector—. Se considera elastoplasticidad unidimensional independiente de la velocidad, y endurecimiento isotrópico. Dado un sólido unidimensional, ocupando un intervalo $\mathcal{B}$, y la posición de una partícula con coordenada $x \in \mathcal{B}$, el pseudo-tiempo t —que indica la progresión del proceso elastoplástico—, el intervalo de tiempo $[0, T]$ y una partición del mismo:

$$[0, T] = \bigcup_{n=1}^M [t_n, t_{n+1}].$$

- En $x \in \mathcal{B}$, se conoce $\{\epsilon_n^p, \xi_n\}$ en el paso n , asociado a t_n .
- Dado un campo de deformaciones en $x \in \mathcal{B}$: $\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \Delta\epsilon_n$, siendo ϵ_n y $\Delta\epsilon_n$ datos.
- Cálculo de la tensión elástica de ensayo y test para carga de plasticidad.
 - $\sigma_{n+1}^{trial} = E(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n^p)$,
 - $f_{n+1}^{trial} = |\sigma_{n+1}^{trial}| - [\sigma_Y + K\xi_n]$,
 - Si $f_{n+1}^{trial} \leq 0 \Rightarrow$ paso elástico,
 - en caso contrario $\Rightarrow$ paso plástico (se aplica *mapeado de retorno*) FIN.

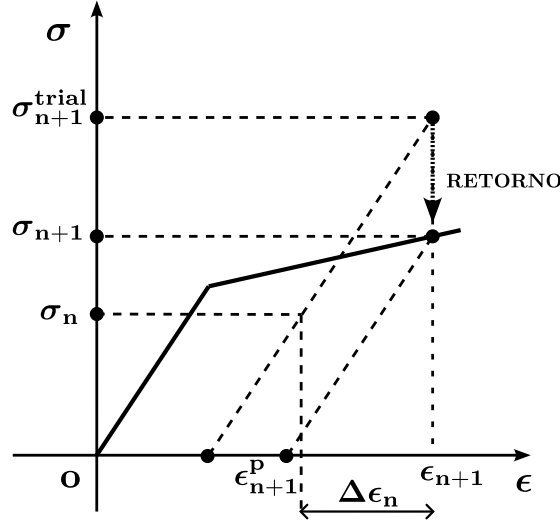


Figura 3.5: Algoritmo de Mapeado de Retorno.

mapeado de retorno

- $\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{trial}}{E + K} > 0,$
- $\sigma_{n+1} = \left[1 - \frac{\Delta\gamma E}{|\sigma_{n+1}^{trial}|} \right] \sigma_{n+1}^{trial},$
- $\epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n^p + \Delta\gamma \operatorname{sgn}(\sigma_{n+1}^{trial}),$
- $\xi_{n+1} = \xi_n + \Delta\gamma.$

3.1.4. Principio de Clausius-Duhem

La segunda ley de la termodinámica, en particular en la forma del principio de Clausius-Duhem, establece que la disipación mecánica instantánea $\mathcal{D}_{mech}$ no puede ser negativa, y en particular para un material elástico es nula (Simo y Hughes, 1998).

$\mathcal{P}_{int}$ es la potencia de la fuerzas internas:

$$\mathcal{P}_{int}(\sigma, v) = \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad (3.37)$$

V_{int} es la energía almacenada como resultado de la deformación:

$$V_{int}(\epsilon^e, \xi) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} E \epsilon^{e2} + \frac{1}{2} K \xi^2 \right) dx \geq 0, \quad (K \geq 0, E > 0), \quad (3.38)$$

entonces, la disipación mecánica instantánea, resulta:

$$\mathcal{D}_{mech} = \mathcal{P}_{int}(\sigma, v) - \frac{d}{dt} V_{int}(\epsilon^e, \xi) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.39)$$

En el caso de un material elástico, $\epsilon^p \equiv 0$, $K \equiv 0$:

$$\frac{d}{dt}V_{int}(\epsilon) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} E \epsilon^2 \right) dx = \int_{\Omega} \underbrace{E \epsilon}_{\sigma} \dot{\epsilon} dx = \mathcal{P}_{int}(\sigma, v), \quad (3.40)$$

$$\therefore \mathcal{D}_{mech} \equiv 0. \quad (3.41)$$

Para un material elastoplástico con endurecimiento isotrópico:

$$\mathcal{P}_{int}(\sigma, v) = \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial \epsilon}{\partial t} dx = \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial(\epsilon^e + \epsilon^p)}{\partial t} dx = \int_{\Omega} (\sigma \dot{\epsilon}^e + \sigma \dot{\epsilon}^p) dx, \quad (3.42)$$

$$\frac{d}{dt}V_{int}(\epsilon^e, \xi) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} E \epsilon^e{}^2 + \frac{1}{2} K \xi^2 \right) dx = \int_{\Omega} \left(\underbrace{E \epsilon^e}_{\sigma} \dot{\epsilon}^e + K \xi \dot{\xi} \right) dx, \quad (3.43)$$

$$\therefore \mathcal{D}_{mech} = \int_{\Omega} \left[\sigma \dot{\epsilon}^p - K \xi \dot{\xi} \right] dx \geq 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.44)$$

3.1.5. Principio de máxima disipación plástica

El principio de máxima disipación plástica, formulado por von Mises es central en la formulación variacional de la plasticidad (Simo y Hughes, 1998).

Para $(\dot{\epsilon}^p, \dot{\xi})$ fijos, el principio de la máxima disipación plástica caracteriza el estado actual (σ, ξ) entre todos los estados admisibles $(\tau, \hat{\xi})$ del conjunto clausura del rango elástico $\mathbb{E}_{\sigma}$, como aquel que hace máxima la disipación plástica,

$$\mathcal{D}^p(\tau, \hat{\xi}, \dot{\epsilon}^p, \dot{\xi}) = \tau \dot{\epsilon}^p - K \hat{\xi} \dot{\xi}, \quad (3.45)$$

$$\mathcal{D}^p(\sigma, \xi, \dot{\epsilon}^p, \dot{\xi}) = \max_{\left(\tau, \hat{\xi} \right) \in \mathbb{E}_{\sigma}} \{ \mathcal{D}^p(\tau, \hat{\xi}, \dot{\epsilon}^p, \dot{\xi}) \}. \quad (3.46)$$

El principio de máxima disipación plástica implica:

- I. Regla de flujo plástico *asociativa*, Ecuación (3.28).
- II. Condiciones de carga y descarga, condiciones de Kuhn-Tucker (3.32).
- III. Convexidad del conjunto clausura del rango elástico $\mathbb{E}_{\sigma}$.

El estado (σ, ξ) que hace máxima la disipación plástica, es la solución de un problema de programación matemática (Luenberger y Ye, 2008). Considerando el funcional Lagrangeano:

$$\mathcal{L}^p(\tau, \hat{\xi}, \delta, \dot{\epsilon}^p, \dot{\xi}) = -\tau \dot{\epsilon}^p + K \hat{\xi} \dot{\xi} + \delta f(\tau, \hat{\xi}), \quad (3.47)$$

se obtiene la regla de flujo plástico asociativa:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^p(\tau, \hat{\xi}, \delta, \dot{\epsilon}^p, \dot{\xi})}{\partial \tau} = -\dot{\epsilon}^p + \delta \underbrace{\frac{\partial f(\tau, \hat{\xi})}{\partial \tau}}_{\text{sgn}(\tau)} = 0, \quad (3.48)$$

y la regla de endurecimiento asociativa:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^p(\tau, \hat{\xi}, \delta, \dot{\epsilon}^p, \dot{\xi})}{\partial \hat{\xi}} = K \dot{\xi} + \delta \underbrace{\frac{\partial f(\tau, \hat{\xi})}{\partial \hat{\xi}}}_{-K} = 0, \quad \dot{\xi} = \delta. \quad (3.49)$$

Entonces, encontrar el estado $(\tau, \hat{\xi}) \in \mathbb{E}_\sigma$ que hace máxima la disipación plástica $\mathcal{D}^p(\tau, \hat{\xi}, \dot{\epsilon}^p, \dot{\xi})$, es un problema de optimización con restricciones, y la solución satisface las condiciones de Kuhn-Tucker.

$$\nabla \mathcal{L}^p(\tau, \hat{\xi}, \delta, \dot{\epsilon}^p, \dot{\xi}) = 0, \quad (3.50)$$

$$\delta \geq 0, \quad f(\tau, \hat{\xi}) \leq 0, \quad \delta f(\tau, \hat{\xi}) = 0. \quad (3.51)$$

3.2. Análisis elastoplástico incremental

Se considera el caso de una barra, la carga se aplica en forma cuasi-estática, en forma incremental. Entonces, dado el pseudo-tiempo t —que indica la progresión del proceso elastoplástico—, el intervalo de tiempo $[0, T]$ y una partición del mismo:

$$[0, T] = \bigcup_{n=1}^M [t_n, t_{n+1}].$$

Se conocen las variables elastoplásticas internas $\{\epsilon_n^p, \xi_n\}$ en el paso n . Se asume que el elemento está en equilibrio en el tiempo t_n bajo las fuerzas externas de volumen $b_n : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ y de superficie $\bar{\sigma}_n : \partial_\sigma \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, de forma tal que, el campo de tensiones σ_n y el campo de desplazamientos $\mathbf{d}_n$, verifica la siguiente ecuación:

$$\mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_n) - \mathbf{F}_n^{ext} = \mathbf{0}. \quad (3.52)$$

Se considera un incremento en las cargas externas $(\Delta b_n, \Delta \bar{\sigma}_n)$ para el tiempo t_{n+1} :

$$b_{n+1} = b_n + \Delta b_n, \quad (3.53)$$

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}_n + \Delta \bar{\sigma}_n. \quad (3.54)$$

Las cuales definen $\mathbf{F}_{n+1}^{ext}$, que es el dato de entrada para resolver el problema de determinar el campo de desplazamientos $\mathbf{d}_{n+1}$, $\Delta\mathbf{d}_{n+1}$, las variables internas $\{\epsilon_{n+1}^p, \xi_{n+1}\}$, el campo de tensiones σ_{n+1} correspondientes al tiempo t_{n+1} , y que verifican:

$$\mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}) - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} = \mathbf{0}, \quad (3.55)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta\mathbf{d}_{n+1}. \quad (3.56)$$

Para obtener las variables elastoplásticas internas correspondientes al tiempo t_{n+1} , $\{\epsilon_{n+1}^p, \xi_{n+1}\}$, se aplica el *algoritmo de mapeado de retorno* que se describe en la Sección 3.1.3.

3.2.1. Procedimiento de la solución incremental

La solución se obtiene iterando hasta obtener la solución del problema quasi-estático para cada incremento de carga. Dado un estado de deformación de un elemento, a partir de la deformación total no es posible determinar en forma directa la proporción de las deformaciones elásticas y plásticas que la componen. Esto se logra registrando la evolución de las deformaciones plásticas en la historia de deformaciones que afectan a la estructura.

Este comportamiento del material se denomina dependiente del camino (*path-dependent*). Los algoritmos computacionales deben integrar en el tiempo la velocidad de deformación plástica, calcular la deformación plástica acumulada, y luego obtener la deformación elástica. La tensión en los elementos de la estructura no puede superar la tensión de fluencia del material. Para considerar esto se utiliza el algoritmo de mapeado de retorno, ver Sección (3.1.3).

Como se mencionó anteriormente, en el modelo utilizado (no viscoelástico) el material se comporta en forma independiente de la velocidad de aplicación de la carga (*rate independent*). Esto implica que la variable tiempo se utiliza meramente como índice o variable de evolución. Dada la no linealidad de las ecuaciones de equilibrio, para cada instante de tiempo o estado, se debe determinar la matriz tangente de la estructura (matriz de rigidez tangente). Se iteran los siguientes pasos:

- I. Sea $\Delta\mathbf{d}_{n+1}^k$, el incremento del desplazamiento nodal en la iteración k , entonces:

$$\mathbf{d}_{n+1}^k = \mathbf{d}_n + \Delta\mathbf{d}_{n+1}^k, \quad (3.57)$$

$$\epsilon_{n+1}^k|_{\mathcal{B}_e} = \mathbf{B}_e \mathbf{d}_e|_{n+1}^k. \quad (3.58)$$

- II. A partir de la deformación ϵ_{n+1}^k calculada en la Ecuación (3.58), se obtiene σ_{n+1}^k con el *algoritmo de mapeado de retorno* Sección (3.1.3).

- III. Se evalua el vector de fuerzas internas del elemento $\mathbf{f}_e^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^k)$ y se ensamblan las contribuciones de todos los elementos, se obtiene el vector fuerza interna global.
- IV. Se verifica la convergencia de la ecuación de equilibrio para $\mathbf{d}_{n+1}^k$, si converge se encontró la solución del paso $n + 1$.
- V. Si no converge, se determina $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^k$, $k \leftarrow k + 1$, y se repite el paso (I).

Para determinar $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^k$, en el paso (V), se procede de la siguiente forma, considerando el equilibrio de fuerzas internas y externas en el pseudo-tiempo $(n + 1)$ y en la iteración $(k + 1)$, resulta:

$$\mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^{k+1}) - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} = \mathbf{0}. \quad (3.59)$$

Linealizando $\mathbf{F}^{int}$ en torno a $\mathbf{d}_{n+1}^k$, $(\mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{d}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1})$, se obtiene:

$$\mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^{k+1}) = \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^k) + \frac{\partial \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1}, \quad (3.60)$$

Sustituyendo en la ecuación de equilibrio:

$$\mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^k) + \frac{\partial \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{ext}, \quad (3.61)$$

$$\mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^k) - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} = - \frac{\partial \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1}, \quad (3.62)$$

si consideramos las fuerzas residuales $\mathbf{r}_{n+1}^k$, como:

$$\mathbf{r}_{n+1}^k = \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^k) - \mathbf{F}_{n+1}^{ext}, \quad (3.63)$$

entonces, la ecuación a resolver, con incógnita $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1}$ es:

$$\mathbf{r}_{n+1}^k = - \frac{\partial \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1}, \quad (3.64)$$

siendo $\mathbf{K}_{n+1}^k$ la matriz de rigidez tangente, igual a:

$$\mathbf{K}_{n+1}^k = \frac{\partial \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k}, \quad (3.65)$$

$$\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = - \left[\mathbf{K}_{n+1}^k \right]^{-1} \mathbf{r}_{n+1}^k. \quad (3.66)$$

Si la matriz tangente $\mathbf{K}_{n+1}^k$ es singular, la Ecuación (3.64) no tiene solución, o tiene pero no es única. En esos casos, para resolver la Ecuación (3.64), se requieren métodos numéricos de control de desplazamientos, que se describen a continuación.

3.2.2. Métodos de control de desplazamiento

Dado un camino de equilibrio dado por el par (desplazamiento, factor de carga), $\{\mathbf{d}_n, \lambda_n\}$, asociados al tiempo t_n . Se considera el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, el incremento en el factor de carga $\Delta\lambda_{n+1}$, y el incremento en los desplazamientos $\Delta\mathbf{d}_{n+1}$:

$$\Delta\lambda_{n+1} \equiv \lambda_{n+1} - \lambda_n, \quad (3.67)$$

$$\Delta\mathbf{d}_{n+1} \equiv \mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n. \quad (3.68)$$

En los métodos de longitud de arco, el incremento en el factor de carga $\Delta\lambda_{n+1}$ es una incógnita adicional del problema, no obstante, se agrega una nueva ecuación que restringe la longitud de arco, es importante notar que la ecuación restricción incluye solo a los desplazamientos traslacionales. Entonces, considerando el residuo de la ecuación de equilibrio, la ecuación restricción depende del método de longitud de arco considerado,

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}_n + \Delta\mathbf{d}_{n+1}, \Delta\lambda_{n+1}) \equiv \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_n + \Delta\mathbf{d}_{n+1}) - (\lambda_n + \Delta\lambda_{n+1}) \bar{\mathbf{F}}^{ext} = \mathbf{0}. \quad (3.69)$$

Método arc-length esférico (Jirásek y Bažant, 2002): se considera un factor de escala ψ , y la longitud prescrita del paso Δl (incremento de longitud de curva a recorrer), la ecuación restricción tiene la siguiente expresión:

$$\Delta l^2 = \Delta\mathbf{d}^T \Delta\mathbf{d} + (\psi \Delta\lambda)^2. \quad (3.70)$$

Asumiendo que la fuerza externa se puede escribir en forma lineal,

$$\mathbf{F}_{n+1}^{ext} = \bar{\mathbf{F}}_0 + \lambda_{n+1} \bar{\mathbf{F}}^{ext}, \quad (3.71)$$

para obtener la expresión de la iteración del método, se debe linealizar la Ecuación (3.69) de equilibrio, en torno al último punto iterado:

$$\{\mathbf{d}_n + \Delta\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \lambda_n + \Delta\lambda_{n+1}^{(i)}\},$$

respecto de las incógnitas $\Delta\mathbf{d}_{n+1}$, $\Delta\lambda_{n+1}$:

$$\Delta\mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)} = \Delta\mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \delta\mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)}, \quad (3.72)$$

$$\Delta\lambda_{n+1}^{(i+1)} = \Delta\lambda_{n+1}^{(i)} + \delta\lambda_{n+1}^{(i+1)}, \quad (3.73)$$

las ecuaciones linealizadas resultantes son:

$$\mathbf{K}_{n+1}^{(i)} \delta\mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)} = \bar{\mathbf{F}}_0 + \lambda_{n+1}^{(i)} \bar{\mathbf{F}}^{ext} - \mathbf{F}_{n+1}^{int, (i)} + \delta\lambda_{n+1}^{(i+1)} \bar{\mathbf{F}}^{ext}, \quad (3.74)$$

siendo $\delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)}$, y $\delta \lambda_{n+1}^{(i+1)}$, las incógnitas a determinar. La ecuación restricción 3.70 se considera en la formulación de Crisfield.

Formulación de Crisfield

Una forma de resolver el sistema de ecuaciones, es la siguiente:

$$\mathbf{K}_{n+1}^{(i)} \delta \mathbf{d}_0 = \bar{\mathbf{F}}_0 + \lambda_{n+1}^{(i)} \bar{\mathbf{F}}^{ext} - \mathbf{F}_{n+1}^{int,(i)}, \quad (3.75)$$

$$\mathbf{K}_{n+1}^{(i)} \delta \mathbf{d}_f = \bar{\mathbf{F}}^{ext}, \quad (3.76)$$

entonces, el incremento de desplazamiento incógnita, se puede expresar como:

$$\delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)} = \delta \mathbf{d}_0 + \delta \lambda_{n+1}^{(i+1)} \delta \mathbf{d}_f, \quad (3.77)$$

luego, se sustituye el incremento $\delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)}$ en la Ecuación (3.70) de restricción, y se obtiene una ecuación de segundo grado, con incógnita $\delta \lambda_{n+1}^{(i+1)}$, con dos soluciones, que se corresponden con los dos puntos de intersección con la curva solución, y que están a una distancia Δl del punto $\{\mathbf{d}_n, \lambda_n\}$,

$$\begin{aligned} & (\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)})^\top (\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)}) + \\ & + \psi^2 \left(\Delta \lambda_{n+1}^{(i)} + \delta \lambda_{n+1}^{(i+1)} \right)^2 = (\Delta l)^2. \end{aligned} \quad (3.78)$$

La raíz de la ecuación cuadrática, es seleccionada de acuerdo al sentido en que se recorre la curva solución de equilibrio, ver (Crisfield, 1981, 1991). Luego se actualiza el vector desplazamiento y el factor de carga, y se itera hasta obtener convergencia —de acuerdo a los criterios de tolerancia prefijados.

Método arc-length cilíndrico (Jirásek y Bažant, 2002): la variante cilíndrica del método es cuando el factor de escala es cero, $\psi = 0$. En ese caso la restricción resulta:

$$\Delta l^2 = \Delta \mathbf{d}^T \Delta \mathbf{d}, \quad (3.79)$$

y la ecuación a resolver se simplifica:

$$(\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)})^\top (\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)}) = (\Delta l)^2. \quad (3.80)$$

Control indirecto de desplazamiento

Control indirecto de desplazamiento (Jirásek y Bažant, 2002): el método de control de desplazamiento arc-length esférico, estándar, funciona bien en los casos en que la falla es masiva y no localizada en una parte de la estructura. Si la falla es localizada,

hay que elegir los grados de libertad que están relacionados con la misma, y controlar el desplazamiento a través de ellos. Cuando el mecanismo de colapso ocurre en forma local, es conveniente elegir grados de libertad que permitan regular la aplicación de la carga, en base al desarrollo de la falla localizada, controlando y ajustando la carga de acuerdo a la evolución del colapso local del sistema.

Entonces, la ecuación de restricción se determina como una combinación lineal de los grados de libertad involucrados en la falla local:

$$\mathbf{c}^\top \Delta \mathbf{d} = \Delta l, \quad (3.81)$$

siendo $\mathbf{c}$ un vector columna con coeficientes que afectan sólo a los grados de libertad involucrados en la falla. En forma similar al arc-length cilíndrico, se obtiene la ecuación a iterar —que en este caso es lineal—:

$$\mathbf{c}^\top (\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)}) = \Delta l, \quad (3.82)$$

luego, se sustituye el incremento de desplazamiento incógnita expresado en la Ecuación (3.77), en la ecuación de restricción, y se determina $\Delta \lambda_{n+1}^{(i+1)}$:

$$\delta \lambda_{n+1}^{(i+1)} = \frac{\Delta l - \mathbf{c}^\top \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{c}^\top \delta \mathbf{d}_0}{\mathbf{c}^\top \delta \mathbf{d}_f}. \quad (3.83)$$

De esa forma, se logra controlar la fuerza aplicada, de acuerdo a la evolución localizada del mecanismo de falla. La base de este método es elegir en forma adecuada los grados de libertad a controlar, mediante el vector proyección $\mathbf{c}$.

La solución predictiva

Se implementan en ONSAS los predictores del método arc-length cilíndrico, de trabajo incremental y del determinante de la matriz de rigidez tangente (de Souza Neto et al. 2008). Estos predictores se aplican para decidir qué dirección seguir en la iteración. El signo del factor de carga iterativo $\delta \lambda_{n+1}^{(1)}$ es crucial para la efectividad del método, si se toma la decisión equivocada, la solución predictiva regresará sobre la curva solución.

$$\delta \mathbf{d}_f = [\mathbf{K}_{n+1}^{(0)}]^{-1} \bar{\mathbf{F}}^{ext}, \quad \text{solución tangencial}, \quad (3.84)$$

$$\delta \lambda_{n+1}^{(1)} = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{d}_f^\top \delta \mathbf{d}_f}}. \quad (3.85)$$

- Predictor de trabajo incremental:

$$\text{sgn} \left(\delta \lambda_{n+1}^{(1)} \right) = \text{sgn} \left(\delta \mathbf{d}_f^\top \bar{\mathbf{F}}^{ext} \right). \quad (3.86)$$

- Predictor del determinante de la matriz tangente:

$$\operatorname{sgn} \left(\delta \lambda_{n+1}^{(1)} \right) = \operatorname{sgn} \left(|\mathbf{K}_{n+1}^{(0)}| \right). \quad (3.87)$$

3.3. Método de los elementos finitos

En esta sección se presentan en forma sintética los elementos fundamentales del método de los elementos finitos en barras y vigas, donde se toman como referencias (Canelas, 2022, 2023; Crisfield, 1991; Felippa, 2000, 2004; Oñate, 2010; Zienkiewicz y Taylor, 2005).

3.3.1. Elemento finito de barra

Dada una barra, cuyos puntos materiales se mapean con el dominio $\mathcal{B} = [0, L]$, se considera una discretización de la barra en elementos finitos. Los desplazamientos dentro del elemento son aproximados por combinaciones lineales de los valores nodales de desplazamiento, aplicando funciones de interpolación, que se denominan funciones de forma.

$$\mathcal{B}_e = [x_e, x_{e+1}], \quad (3.88)$$

$$\mathcal{B} = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \mathcal{B}_e. \quad (3.89)$$

Si $\mathbf{N}_e$ son la funciones de forma del elemento, y $\mathbf{q}_e$ los valores nodales de desplazamiento:

$$\mathbf{N}_e = [N_1, N_2], \quad \mathbf{q}_e = [q_1, q_2]^\top, \quad (3.90)$$

el campo de desplazamiento se interpola dentro del elemento, con las funciones de forma y los valores nodales:

$$u_e = \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e. \quad (3.91)$$

De igual forma, se obtienen los campos de deformaciones y de tensiones:

$$\epsilon_e = \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e, \quad (3.92)$$

$$\sigma_e = \mathbf{E} \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e. \quad (3.93)$$

Siendo $h_e = x_{e+1} - x_e$ la longitud y Ω_e el área de la sección del elemento. Para determinar el vector de fuerzas internas en el elemento, se aplica integración numérica, siendo n_{int} el número de puntos de cuadratura del elemento, ω_i los pesos en los puntos de cuadratura. Dada la longitud del elemento $h_e = x_{e+1} - x_e$, (dimensión de la malla

de elementos finitos), entonces:

$$\mathbf{f}_e^{int}(\sigma_e) = \sum_{i=1}^{n_{int}} \mathbf{B}_e^\top \Omega_e \sigma_e(x, t)|_{x=x_e^i} \omega^i h_e. \quad (3.94)$$

Luego, se aplica el operador $\mathbf{A}$ ensamblado de matrices, estándar del método de los elementos finitos, y con las contribuciones de las matrices elementales se obtienen los vectores de fuerza globales:

$$\mathbf{F}^{int} = \mathbf{A} \mathbf{f}_e^{int}(\sigma_e). \quad (3.95)$$

Es importante notar que la expresión anterior se puede generalizar para el caso de la formulación general de elementos finitos, y por lo tanto, se requiere el valor de las tensiones dentro del elemento sólo en un número finito de puntos, en los puntos de cuadratura del elemento.

3.3.2. Elemento finito de viga

En el caso de un elemento de viga Euler-Bernoulli, al aplicar el PTV (2.1.1) al elemento, resulta:

$$\int_{\ell(e)} \delta \kappa M dx = \sum_{i=1}^2 [\delta w_i F_i + \delta \theta_i M_i] \quad \underbrace{\forall \{\delta w, \delta \theta\}}_{\text{comp. con cond. de borde}}. \quad (3.96)$$

Siendo $\delta \kappa$, δw y $\delta \theta$, la curvatura virtual, el desplazamiento vertical virtual y el giro virtual, respectivamente, y F_i y M_i las fuerzas nodales generalizadas que se realizan sobre el elemento. (Oñate, 2013).

Considerando un elemento simple de viga Euler-Bernoulli de clase C^1 , la continuidad de elementos adyacentes requiere que se consideren 4 variables nodales por elemento, un desplazamiento vertical w y un giro θ por cada nodo. Por lo tanto, la deflexión en el elemento, con funciones de forma que son polinomios de Hermite (Bronshtein et al. 2015), tiene la siguiente expresión:

$$w = N_1 w_1 + \bar{N}_1 \frac{\ell^{(e)}}{2} \theta_1 + N_2 \frac{\ell^{(e)}}{2} w_2 + \bar{N}_2 \theta_2. \quad (3.97)$$

Capítulo 4

Análisis elastoplástico de pórticos

The computer must be regarded as a wonderful tool to the structural engineer who will try to use it more and more efficiently in his work. Progress in design of new structures seems to be unlimited.

The Use of the Electronic Computer in Structural Analysis, 1967
Prof. Klaus-Jürgen Bathe

En este capítulo, se presenta en detalle una formulación para resolver problemas de elastoplasticidad en pórticos. El modelo constitutivo considerado incluye plasticidad con endurecimiento y posterior ablandamiento, mediante la activación localizada de rótulas plásticas.

La formulación elegida se basa en los trabajos de referencia citados en el Capítulo 2 (Armero y Ehrlich, 2006; Ehrlich y Armero, 2005; Jukić et al. 2013; Simo et al. 1993), como método de regularización del problema de localización que se describe en el Capítulo 2, Sección 2.2.4.

Esta metodología permite realizar el análisis post-colapso de una estructura, predecir la localización de las fallas, obtener la secuencia de activación de las rótulas, hasta que se produce el colapso estructural, y la posterior pérdida total de la capacidad resistente.

Se desarrolla el elemento finito de pórtico basado en el elemento de viga de Euler-Bernoulli con el agregado de una discontinuidad fuerte de rotación, para el modelado de rótulas plásticas de ablandamiento. Además, se describe el procedimiento computacional y los códigos de resolución que fueron implementados en MATLAB, e integrados en ONSAS.

4.1. Elemento de viga de Euler-Bernoulli con discontinuidad

Este elemento finito, que incorpora una discontinuidad fuerte de rotación, junto a un conjunto de métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones no lineales involucradas, permiten predecir la localización de las rótulas, y modelar la pérdida de la capacidad resistente, conforme progresa el ablandamiento y la redistribución de cargas en la estructura.

4.1.1. Cinemática

El elemento finito considerado tiene dos nodos como se muestra en la Figura 4.1. Los grados de libertad son los desplazamientos generalizados del elemento clásico de pórtico, y se adiciona un grado de libertad α que representa una discontinuidad angular de la viga en una posición x_d donde se activa la rótula plástica de ablandamiento. Para

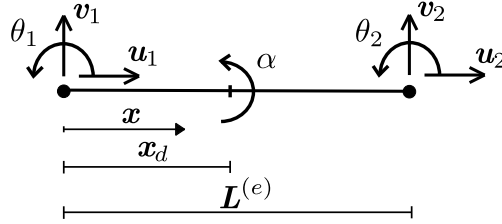


Figura 4.1: Grados de libertad de los nodos del elemento (coordenadas locales).

los desplazamientos axiales se utiliza la interpolación lineal (en coordenadas locales):

$$u(x) = \mathbf{N}^u(x)\mathbf{u}, \quad \mathbf{N}^u(x) = \left\{ 1 - \frac{x}{L^e}, \frac{x}{L^e} \right\}, \quad \mathbf{u} = \{u_1, u_2\}^\top, \quad (4.1)$$

siendo $\mathbf{N}^u$ la matriz de funciones de interpolación lineales.

Para los desplazamientos transversales v se utiliza una interpolación cúbica para los términos asociados al desplazamiento y la rotación, y un término adicional que representa la discontinuidad:

$$v(x, x_d) = \mathbf{N}^v(x)\mathbf{v} + \mathbf{N}^\theta(x)\theta + \hat{M}(x, x_d)\alpha, \quad \mathbf{v} = \{v_1, v_2\}^\top, \quad \theta = \{\theta_1, \theta_2\}^\top, \quad (4.2)$$

donde x_d es una coordenada escalar de posición de la discontinuidad en el elemento, pudiendo tomar los valores $\left\{ 0, \frac{L^e}{2}, L^e \right\}$ —que coinciden con los puntos de integración—, $\mathbf{N}^v(x)$ y $\mathbf{N}^\theta(x)$ son las matrices de funciones de interpolación de

Hermite, dadas por las siguientes expresiones,

$$\mathbf{N}^v(x) = \left\{ 2 \left(\frac{x}{L^e} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{L^e} \right)^2 + 1, -2 \left(\frac{x}{L^e} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{L^e} \right)^2 \right\}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{N}^\theta(x) = L^e \left\{ \left(\frac{x}{L^e} \right)^3 - 2 \left(\frac{x}{L^e} \right)^2 + \frac{x}{L^e}, \left(\frac{x}{L^e} \right)^3 - \left(\frac{x}{L^e} \right)^2 \right\}, \quad (4.4)$$

y la función $\hat{M}$ está dada por:

$$\hat{M}(x, x_d) = \frac{(L^e - x)^2 [L^e x - (L^e + 2x)x_d]}{L^{e3}} + (x - x_d) [-1 + H_{x_d}(x)], \quad (4.5)$$

siendo $H_{x_d}(x)$ la función de Heaviside dada por:

$$H_{x_d}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_d, \\ 1 & \text{si } x \geq x_d. \end{cases} \quad (4.6)$$

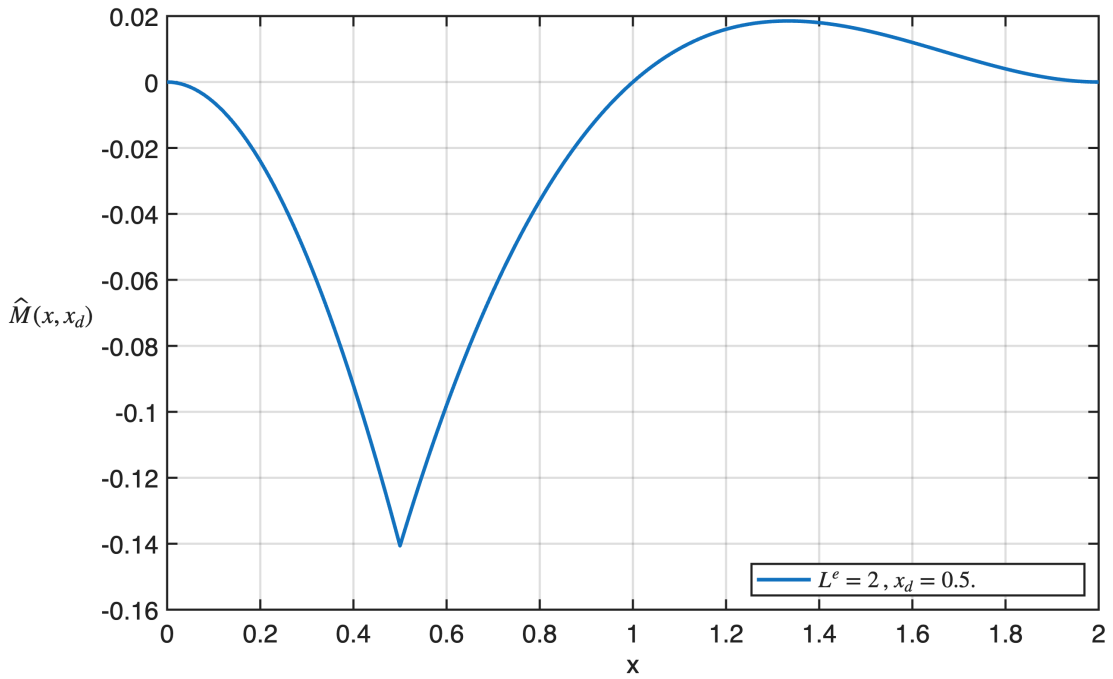


Figura 4.2: Función $\hat{M}(x, x_d)$ para $L^e = 2$ y $x_d = 0.5$.

En la Figura 4.2 se grafica la función $\hat{M}(x, x_d)$ para $L^e = 2$ y $x_d = 0.5$. La función $\hat{M}$ puede ser obtenida a partir de su derivada segunda $\bar{G}$, imponiendo que la curvatura sea nula al agotarse la capacidad resistente de la rótula de ablandamiento. Esto será visto con mayor detalle a continuación. El término $\hat{M}(x, x_d)\alpha$ de la expresión de v introduce una discontinuidad en la curvatura cuando el valor de α es no nulo. El momento en el cual α deja de ser nulo será asociado con la activación de

la rótula plástica de ablandamiento en el elemento. Se puede ver que la introducción de este término no afecta los valores nodales de los desplazamientos generalizados. En este modelo la deformación axial ϵ está dada por la relación cinemática clásica:

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{B}^u(x)\mathbf{u}, \quad \mathbf{B}^u(x) = \left\{ -\frac{1}{L^e}, \frac{1}{L^e} \right\}. \quad (4.7)$$

La expresión de la curvatura en el elemento puede ser obtenida derivando la Ecuación (4.2):

$$\kappa = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \mathbf{B}^v(x)\mathbf{v} + \mathbf{B}^\theta(x)\theta + \frac{\partial^2 \hat{M}}{\partial x^2}\alpha, \quad (4.8)$$

siendo $\mathbf{B}^v(x)$ y $\mathbf{B}^\theta(x)$:

$$\mathbf{B}^v(x) = \left\{ -\frac{6}{L^{e2}} \left(1 - \frac{2x}{L^e} \right), \frac{6}{L^{e2}} \left(1 - \frac{2x}{L^e} \right) \right\}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B}^\theta(x) = \left\{ -\frac{2}{L^e} \left(2 - \frac{3x}{L^e} \right), -\frac{2}{L^e} \left(1 - \frac{3x}{L^e} \right) \right\}. \quad (4.10)$$

Utilizando la Ecuación (4.5) se obtiene:

$$\kappa = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \underbrace{\mathbf{B}^v(x)\mathbf{v} + \mathbf{B}^\theta(x)\theta + \bar{G}(x, x_d)\alpha}_{\bar{\kappa}} + \underbrace{\delta_{\mathbf{x}_d}\alpha}_{\bar{\bar{\kappa}}}, \quad (4.11)$$

donde se identifican dos funciones $\bar{\kappa}$ y $\bar{\bar{\kappa}}$, la primera como el término continuo en x , y la segunda dada por el término no continuo —y además singular—, que contiene a la Delta de Dirac. Estas son llamadas curvatura continua y localizada, respectivamente.

En el estado cinemático en el que la curvatura continua es nula, correspondiente al agotamiento de la capacidad resistente de la rótula de ablandamiento, se obtiene una configuración geométrica como la mostrada en la Figura 4.3. La función $\bar{G}$ debe ser tal que para esa geometría la curvatura sea nula, lo cual se logra con la siguiente expresión:

$$v_2 = v_1 + x_d\theta_1 + (L^e - x_d)(\alpha + \theta_1), \quad \theta_2 = \theta_1 + \alpha, \quad (4.12)$$

obteniendo:

$$\bar{G}(x, x_d) = -\frac{1 + 3 \left(1 - \frac{2x_d}{L^e} \right) \left(1 - \frac{2x}{L^e} \right)}{L^e}. \quad (4.13)$$

Entonces, la función $\hat{M}$ se obtiene integrando dos veces la función $\bar{G}$:

$$\hat{M}'(x, x_d) = \int \bar{G}(x, x_d) dx + H_{x_d}(x) + C, \quad \hat{M}(x, x_d) = \int \hat{M}'(x, x_d) dx + C_1, \quad (4.14)$$

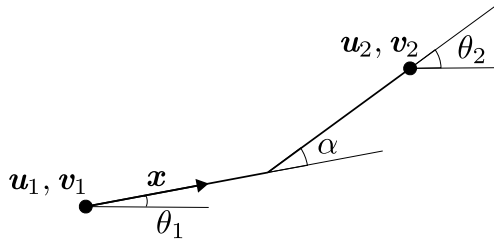


Figura 4.3: Rótula de ablandamiento con resistencia nula.

donde C y C_1 se determinan con $\hat{M}'(L^e, x_d) = 0$ y $\hat{M}(L^e, x_d) = 0$ (los valores nodales no son afectados por $\hat{M}$, ni por $\hat{M}'$), obteniendo la Ecuación (4.5).

4.1.2. Equilibrio

Se considera el equilibrio de un elemento de Euler-Bernoulli con discontinuidad fuerte de rotación, y se aplica el PTV según la Ecuación (2.1.1). Sea $\delta W^{int,e}$ el trabajo virtual de las fuerzas internas y $\delta W^{ext,e}$ el trabajo virtual de las fuerzas externas, derivando las expresiones de la sección anterior, se pueden obtener las expresiones de la deformación axial virtual:

$$\delta \epsilon(x) = \mathbf{B}^u(x) \delta \mathbf{u}, \quad (4.15)$$

y la curvatura virtual:

$$\delta \kappa(x, x_d) = \mathbf{B}^v(x) \delta \mathbf{v} + \mathbf{B}^\theta(x) \delta \boldsymbol{\theta} + (\bar{G}(x, x_d) + \delta x_d) \delta \alpha. \quad (4.16)$$

Se puede mostrar que para cada elemento de pórtico el trabajo virtual interno, dado por la Ecuación (2.2), pasa a quedar dado por:

$$\delta W^{int,e} = \int_0^{L^e} \delta \epsilon N \, dx + \int_0^{L^e} \delta \kappa M \, dx, \quad (4.17)$$

siendo N la directa y M el momento flector. Sustituyendo las expresiones de la deformación axial virtual y la curvatura virtual, dadas por la Ecuación (4.15) y la Ecuación (4.16) respectivamente, en la expresión del trabajo virtual, se obtiene:

$$\delta W^{int,e} = \underbrace{\int_0^{L^e} \delta \mathbf{d}^T (\mathbf{B}^d)^T \boldsymbol{\sigma} \, dx}_{\text{estándar}} + \underbrace{\int_0^{L^e} \delta \alpha (\bar{G} + \delta x_d) M \, dx}_{\text{adicional}}, \quad (4.18)$$

siendo $\delta \mathbf{d} = \{\delta \mathbf{u}^T, \delta \mathbf{v}^T, \delta \boldsymbol{\theta}^T\}^T$ el vector de los desplazamientos nodales virtuales, $\boldsymbol{\sigma} = \{N, M\}^T$ el vector de solicitaciones internas, y $\mathbf{B}^d$ la matriz de derivadas de las

funciones de interpolación dada por:

$$\mathbf{B}^d = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}^u & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^v & \mathbf{B}^\theta \end{Bmatrix}. \quad (4.19)$$

Tal como se observa en la Ecuación (4.18), el trabajo virtual interno se puede considerar como una suma de un término estándar –como en el elemento Euler-Bernoulli clásico–, y un término adicional que incorpora la discontinuidad cinemática de rotación.

Cada uno de estos términos permite definir unas fuerzas internas correspondientes

$$\mathbf{f}^{int,e} = \int_0^{L^e} \mathbf{B}^{d,T} \boldsymbol{\sigma} dx, \quad h^e = \int_0^{L^e} (\bar{G} + \delta_{x_d}) M dx. \quad (4.20)$$

Aplicando el principio de los trabajos virtuales al elemento:

$$\delta W^{int,e} - \delta W^{ext,e} = \delta \mathbf{d}^T \underbrace{(\mathbf{f}^{int,e} - \mathbf{f}^{ext,e})}_{=0} + \delta \alpha \underbrace{h^e}_{=0} = 0, \quad (4.21)$$

para cualesquiera sean los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{d}$ y $\delta \alpha$.

$$\therefore h^e = 0, \quad (4.22)$$

desarrollando la expresión, se obtiene:

$$h^e = \int_0^{L^e} (\bar{G} + \delta_{x_d}) M dx = \int_0^{L^e} \bar{G} M dx + \underbrace{\int_0^{L^e} \delta_{x_d} M dx}_{M|_{x_d}} = \int_0^{L^e} \bar{G} M dx + t = 0, \quad (4.23)$$

$$\therefore t = - \int_0^{L^e} \bar{G} M dx, \quad \text{momento en la discontinuidad}, \quad (4.24)$$

$$\int_0^{L^e} (\bar{G} + \delta_{x_d}) dx = 0. \quad (4.25)$$

Aplicando el operador de ensamblado $\mathbf{A}$, resulta:

$$\mathbf{A}_{e=1}^{N_{elem}} (\mathbf{f}^{int,e} - \mathbf{f}^{ext,e}) = \mathbf{0}. \quad (4.26)$$

Además, para cada elemento se debe equilibrar el momento en la discontinuidad t , con la integral de $\bar{G}M$, de acuerdo a la Ecuación 4.24,

$$\forall e, h^e = 0. \quad (4.27)$$

4.1.3. Relaciones constitutivas

Se asume que en la dirección axial del elemento, la respuesta es elástica lineal, siendo E el módulo elástico, A el área de la sección transversal del elemento y $\bar{\epsilon}$ la deformación continua axial, ver Ecuación (4.7):

$$N = EA\bar{\epsilon}. \quad (4.28)$$

Para el comportamiento a flexión en este modelo, se considera un proceso elastoplástico con una relación momento-curvatura con endurecimiento isotrópico bilineal con pendientes K_1 y K_2 . En la Figura 4.4a se muestra el diagrama momento-curvatura para un momento positivo. El proceso es lineal hasta que el momento supera al valor de M_c , momento que puede ser asociado a la aparición de las primeras fisuras en el hormigón armado (*first crack*), el siguiente cambio en la pendiente de endurecimiento ocurre al superar el valor M_y , momento que en el hormigón armado puede ser asociado a cuando la fluencia en las armaduras resulta en un cambio en el endurecimiento.

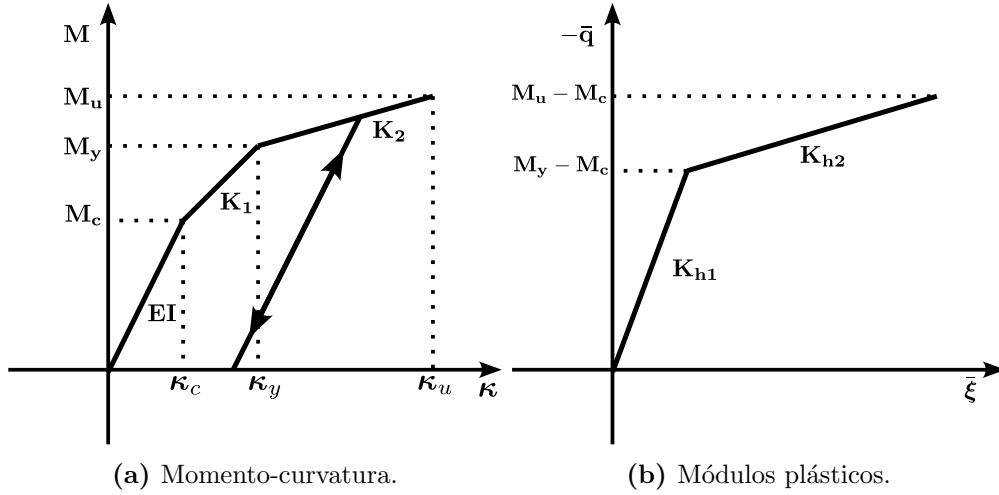


Figura 4.4: Relaciones constitutivas.

El momento último es M_u , alcanzado ese valor en cualquiera de los puntos de integración del elemento, se tiene la máxima capacidad resistente, ocurre la falla localizada y la aparición de una rótula plástica de ablandamiento en la coordenada local x_d del elemento, en ese instante se activa la cinemática adicional que incorpora la discontinuidad cinemática de rotación, y el valor α comienza a ser distinto de cero.

Flexión elastoplástica con endurecimiento

Tal como fue introducido en la Ecuación (4.11), en esta formulación la curvatura se descompone en la suma de una parte continua $\bar{\kappa}$ y otra no continua $\bar{\bar{\kappa}}$:

$$\kappa = \bar{\kappa} + \bar{\bar{\kappa}}, \quad (4.29)$$

y la curvatura continua es la suma de un término elástico y otro plástico:

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}^e + \bar{\kappa}^p. \quad (4.30)$$

Mientras la flexión esté en rango elastoplástico, y si no se alcanza M_u y por lo tanto no se activa la rótula plástica de ablandamiento, el ángulo α de rotación de la rótula de ablandamiento es cero y por lo tanto la parte localizada también:

$$\bar{\bar{\kappa}} = 0. \quad (4.31)$$

La ecuación constitutiva elástica en cada sección está dada por:

$$M = EI\bar{\kappa}^e = EI(\bar{\kappa} - \bar{\kappa}^p), \quad (4.32)$$

donde I es la inercia y M es el momento flector en cada sección. El proceso de plastificación en cada sección está dado por la función de fluencia:

$$\bar{\phi}(M, \bar{q}) = |M| - (M_c - \bar{q}), \quad (4.33)$$

donde $M_c - \bar{q}$ es el momento de fluencia y $\bar{q}$ (momento de endurecimiento), está dado por:

$$\bar{q}(\bar{\xi}) = \begin{cases} -K_{h1}\bar{\xi}, & \text{si } \bar{\xi} \leq \frac{M_y - M_c}{K_{h1}}, \\ -(M_y - M_c) \left(1 - \frac{K_{h2}}{K_{h1}}\right) - K_{h2}\bar{\xi}, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (4.34)$$

donde $\bar{\xi}$ es una curvatura plástica acumulada (asimilable con una deformación) y siendo K_{h1} y K_{h2} los módulos de endurecimiento plástico, ver Figura 4.4b.

Además, en forma similar a la plasticidad en una dimensión, se considera:

$$\dot{\bar{\kappa}}^p = \dot{\gamma} \operatorname{sgn}(M), \quad \dot{\bar{\xi}} = \dot{\gamma}. \quad (4.35)$$

Siendo $\dot{\gamma}$ un factor multiplicador plástico, con derivada respecto al pseudo-tiempo t . El factor multiplicador es no negativo por definición, por lo tanto $\bar{\xi}$ y $\bar{q}$ son funciones crecientes, mientras que $\dot{\bar{\kappa}}^p$ puede aumentar o disminuir dependiendo del

signo de M . Asimismo, se cumplen las condiciones de carga y descarga de Kuhn-Tucker y la condición de persistencia o consistencia:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \bar{\phi} \leq 0, \quad \dot{\gamma}\bar{\phi} = 0, \quad \dot{\gamma}\dot{\bar{\phi}} = 0. \quad (4.36)$$

Rótulas plásticas de ablandamiento en la flexión

El momento en la rótula plástica de ablandamiento es función del ángulo α en la discontinuidad de rotación, y se equilibra con los momentos en el resto del elemento, ver Ecuación (4.24). La capacidad resistente disminuye en forma lineal conforme aumenta el ángulo α , determinada por el módulo plástico de ablandamiento K_s , ver Figura 4.5.

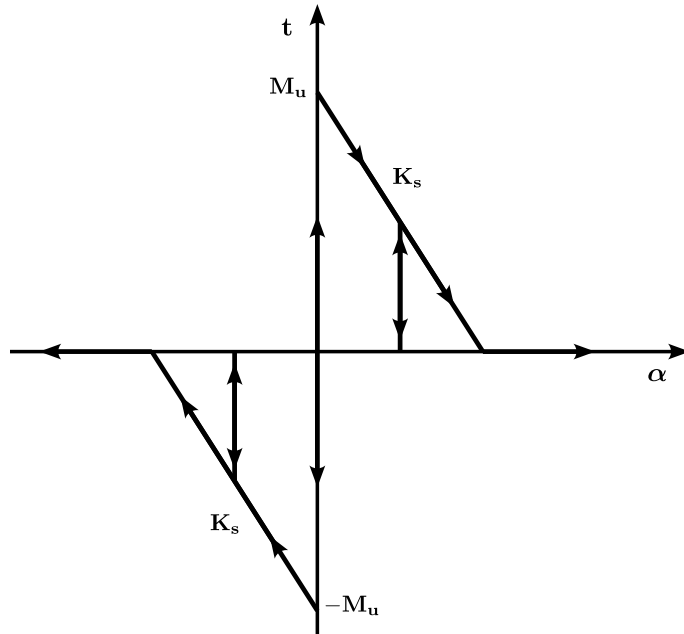


Figura 4.5: Módulo plástico de ablandamiento.

En esta implementación se utilizan tres puntos de integración de Gauss-Lobatto por elemento (Bronshtein et al. 2015).

La posición de la discontinuidad se determina con el momento máximo en valor absoluto, ese valor es el que se compara con M_u , en cada punto de integración del elemento. La discontinuidad —en caso de ocurrir— sucede en los puntos de integración del elemento.

Se asume que una vez activada la rótula plástica de ablandamiento, los momentos en los puntos de integración del elemento decrecen —a medida que el valor absoluto del momento en la rótula decrece—, la plastificación con endurecimiento se detiene, y todo el elemento se descarga.

Para cada elemento finito, si en alguno de los puntos de integración se supera el M_u , se activa la rótula plástica de ablandamiento en el elemento, se detiene la plastificación con endurecimiento ($\bar{\kappa}^p$ constante), y comienza el proceso de ablandamiento en el elemento.

Se considera la función de falla:

$$\bar{\phi}(t, \bar{q}) = |t| - (M_u - \bar{q}). \quad (4.37)$$

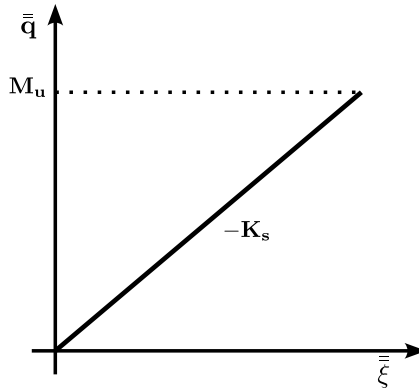


Figura 4.6: Ángulo de rotación acumulado.

Si $\bar{\xi}$ es el ángulo de rotación acumulado, la variable $\bar{q}$ representa un momento de ablandamiento, ver Figura 4.6, en forma análoga a la tensión en la plasticidad estándar, y está dada por la expresión:

$$\bar{q} = \min\{-K_s \bar{\xi}, M_u\}, \quad K_s < 0. \quad (4.38)$$

En forma similar a la plasticidad con endurecimiento, las condiciones de carga y descarga, y la condición de persistencia o consistencia, son:

$$\dot{\alpha} = \dot{\bar{\gamma}} \operatorname{sgn}(t), \quad \dot{\bar{\xi}} = \dot{\bar{\gamma}}, \quad (4.39)$$

$$\dot{\bar{\gamma}} \geq 0, \quad \bar{\phi} \leq 0, \quad \dot{\bar{\gamma}} \bar{\phi} = 0, \quad \dot{\bar{\gamma}} \dot{\bar{\phi}} = 0. \quad (4.40)$$

4.1.4. Aplicación a una viga simplemente apoyada

Se muestra la aplicación del elemento de Euler-Bernoulli con discontinuidad fuerte de rotación, a una viga simplemente apoyada, la cual es modelada con 2 elementos, se carga en el punto medio, de acuerdo a la Figura 4.7.

Para las propiedades geométricas y materiales se considera, longitud $L = 2 \text{ m}$ y rigidez flexional $EI = 77.650 \text{ kN/m}^2$.

Para el comportamiento no lineal material dado por la Figura 4.4, se consideran los parámetros $M_c = 37,9 \text{ kNm}$, $M_y = 268 \text{ kNm}$, $K_{h1} = 29.400 \text{ kNm}^2$, $K_{h2} = 273 \text{ kNm}^2$, $M_u = 374 \text{ kNm}$, $K_s = -18.000 \text{ kNm}$.

Se aplica control indirecto de desplazamientos, en la Figura 4.8 se muestra la curva de carga-desplazamiento y la curva deformada al finalizar el proceso de carga, y en la Figura 4.9 se grafica el momento en la rótula en función de la curvatura plástica y el momento en la rótula en función del ángulo de rotación.

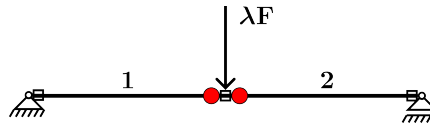
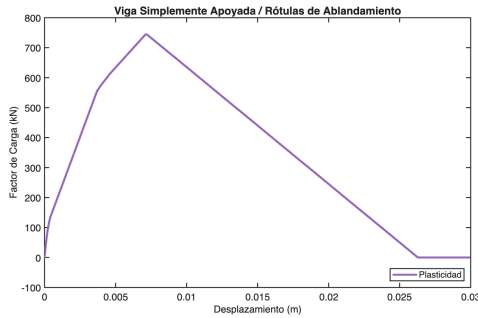
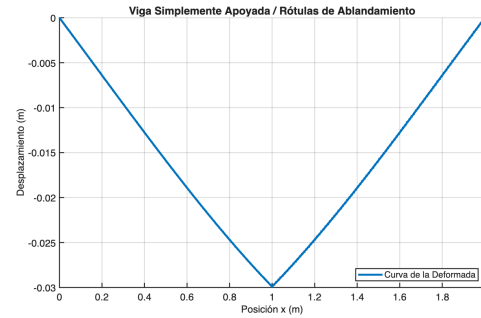


Figura 4.7: Viga simplemente apoyada, rótulas de ablandamiento.

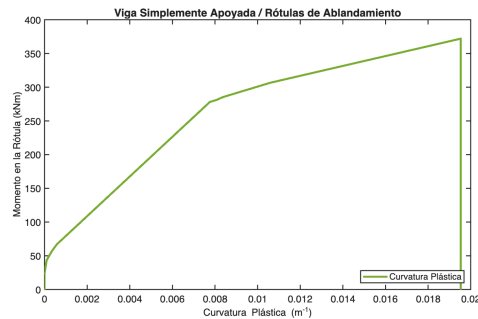


(a) Factores de carga-desplazamiento.

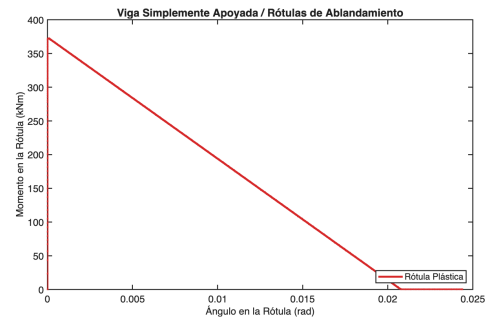


(b) Curva de la deformada.

Figura 4.8: Viga simplemente apoyada (curva de carga y deformada).



(a) Momento en la rótula-curvatura plástica.



(b) Momento en la rótula-ángulo en la rótula.

Figura 4.9: Viga simplemente apoyada (curvatura plástica y ángulo en la rótula).

4.2. Implementación computacional

- El valor de la fuerza externa se actualiza en los pseudo tiempos $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}$.
- Las variables cinemáticas $\mathbf{d} = \{\mathbf{u}^\top, \mathbf{v}^\top, \boldsymbol{\theta}^\top\}^\top$, están definidas en los nodos del elemento. Las variables internas de endurecimiento plástico $(\bar{\kappa}_n^p, \bar{\xi}_n)$, están definidas en los tres puntos de integración de Gauss-Lobatto, mientras que las variables internas de ablandamiento plástico $(\alpha_n, \bar{\bar{\xi}}_n)$, están definidas en el punto x_d (uno de los tres puntos de integración). Una vez determinado x_d (cuando se activa la rótula plástica de ablandamiento), este permanece fijo durante el análisis.
- En el cálculo de la solución para el tiempo t_{n+1} se aplica el procedimiento de separación en cada iteración (i), —para cada tiempo t_{n+1} se itera hasta obtener convergencia—. El procedimiento de separación consiste en determinar en forma separada las incógnitas. Primero, se determinan las variables plásticas internas (se resuelve el sistema local), y luego dejando fijas las variables plásticas internas, se calculan las variables cinemáticas nodales (resolviendo el sistema global), iterando hasta encontrar la solución de acuerdo a las tolerancias requeridas. Para resolver el sistema global, en cada iteración (i), se dejan fijas las variables internas elastoplásticas del tiempo t_{n+1} , aunque para determinar la matriz tangente de la iteración (i), sí se consideran las variables elastoplásticas actualizadas correspondientes al desplazamiento de la iteración (i), $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}$, pero sólo a los efectos del cálculo de la matriz tangente, para el resto de los cálculos se dejan fijas con los valores que tenían al inicio de la iteración. Luego, se resuelven las ecuaciones no lineales aplicando un método de control de desplazamientos.

4.2.1. Determinación de las variables internas

Considerando conocido el desplazamiento $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}$ en la iteración (i), para el tiempo t_{n+1} , se determinan las variables internas de endurecimiento o ablandamiento según el caso.

Variables de endurecimiento

Para determinar la variables elastoplásticas internas en cada punto de integración, se aplica el algoritmo de mapeado de retorno.

Entonces, de acuerdo al algoritmo, se considera un valor test de las variables internas (se supone que no ocurre plasticidad en el tiempo t_{n+1}):

$$\bar{\kappa}_{n+1}^{p,test,(i)} = \bar{\kappa}_n^p, \quad \bar{\xi}_{n+1}^{test,(i)} = \bar{\xi}_n, \quad (4.41)$$

luego, se calcula la función de fluencia a partir de las Ecuaciones (4.32), (4.33) y (4.34):

$$\bar{\phi}_{n+1}^{test,(i)} = \bar{\phi} \left(M_{n+1}^{test,(i)}, \bar{q}_{n+1}^{test,(i)}(\bar{\xi}_{n+1}^{test,(i)}) \right), \quad (4.42)$$

$$M_{n+1}^{test,(i)} = EI \left(\bar{\kappa}(\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}) - \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test,(i)} \right), \quad (4.43)$$

dependiendo de la función de fluencia $\bar{\phi}_{n+1}^{test,(i)}$, se consideran los siguientes casos:

- I. si $\bar{\phi}_{n+1}^{test,(i)} \leq 0$, el material se mantiene en la zona elástica, los valores test no deben actualizarse, se mantienen los valores plásticos del tiempo anterior, y el deslizamiento plástico es nulo, $\bar{\gamma}_{n+1}^{(i)} = 0$,

$$\bar{\kappa}_{n+1}^{p,(i)} = \bar{\kappa}_n^p, \quad \bar{\xi}_{n+1}^{(i)} = \bar{\xi}_n, \quad (4.44)$$

de igual forma, el momento no debe actualizarse y se mantiene el valor test:

$$M_{n+1}^{(i)} = M_{n+1}^{test,(i)} = EI \left(\bar{\kappa}(\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}) - \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test,(i)} \right), \quad (4.45)$$

- II. si $\bar{\phi}_{n+1}^{test,(i)} > 0$, hay plastificación del material, y por lo tanto se deben actualizar los valores de las variables elastoplásticas internas, al igual que el valor del momento $M_{n+1}^{(i)}$,

$$\bar{\kappa}_{n+1}^{p,(i)} = \bar{\kappa}_n^p + \bar{\gamma}_{n+1}^{(i)} \operatorname{sgn} \left(M_{n+1}^{test,(i)} \right), \quad (4.46)$$

$$\bar{\xi}_{n+1}^{(i)} = \bar{\xi}_n + \bar{\gamma}_{n+1}^{(i)}, \quad \text{siendo } \bar{\gamma}_{n+1}^{(i)} = \dot{\gamma}_{n+1}^{(i)}(t_{n+1} - t_n), \quad (4.47)$$

el valor de $\bar{\gamma}_{n+1}^{(i)}$ se determina, imponiendo que la función de fluencia sea igual a cero:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{n+1}^{(i)} &= \bar{\phi} \left(M_{n+1}^{(i)} \left(\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \bar{\kappa}_{n+1}^{p,(i)}(\bar{\gamma}_{n+1}^{(i)}) \right), \bar{q}_{n+1}^{(i)}(\bar{\xi}_{n+1}^{(i)}(\bar{\gamma}_{n+1}^{(i)})) \right) = 0, \\ \bar{\phi}_{n+1}^{(i)} &= \bar{\phi}_{n+1}^{(i)}(\bar{\gamma}_{n+1}^{(i)}) = 0, \end{aligned} \quad (4.48)$$

y el valor del momento actualizado es igual a:

$$M_{n+1}^{(i)} = EI \left(\bar{\kappa}(\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}) - \bar{\kappa}_{n+1}^{p,(i)} \right), \quad (4.49)$$

resta calcular el valor del deslizamiento plástico $\bar{\gamma}_{n+1}^{(i)}$, el cual se determina a partir de las Ecuaciones (4.32), (4.33), (4.34) y (4.47):

$$\bar{\gamma}_{n+1}^{(i)} = \begin{cases} \frac{\bar{\phi}_{n+1}^{test,(i)}}{K_{h1} + EI}, & \text{si } \bar{\xi}_{n+1}^{(i)} = \bar{\xi}_n + \bar{\gamma}_{n+1}^{(i)} \leq \frac{M_y - M_c}{K_{h1}}, \\ \frac{\bar{\phi}_{n+1}^{test,(i)}}{K_{h2} + EI}, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (4.50)$$

Se determina finalmente, el módulo elastoplástico tangente para la flexión, que toma los valores EI , K_1 y K_2 , según la relación constitutiva de la Figura 4.4a,

$$C_{n+1}^{ep} = \frac{M_{n+1}^{(i)}}{d\kappa_{n+1}^{(i)}} = \begin{cases} EI & \text{si } \bar{\gamma}_{n+1}^{(i)} = 0, \\ \frac{EIK_{h1}}{EI + K_{h1}} & \text{si } \bar{\gamma}_{n+1}^{(i)} > 0 \text{ y } \bar{\xi}_{n+1}^{(i)} \leq \frac{M_y - M_c}{K_{h1}}, \\ \frac{EIK_{h2}}{EI + K_{h2}} & \text{si } \bar{\gamma}_{n+1}^{(i)} > 0 \text{ y } \bar{\xi}_{n+1}^{(i)} > \frac{M_y - M_c}{K_{h1}}. \end{cases} \quad (4.51)$$

Variables de ablandamiento

En este caso, también se aplica el algoritmo de mapeado de retorno, pero con la función de falla (equivalente a la función de fluencia) Ecuación (4.37). De acuerdo al algoritmo, se considera inicialmente un valor test para las variables elastoplásticas de ablandamiento:

$$\alpha_{n+1}^{test,(i)} = \alpha_n, \quad \bar{\xi}_{n+1}^{test,(i)} = \bar{\xi}_n, \quad (4.52)$$

de igual forma, se considera un valor test para el momento en la rótula de ablandamiento:

$$t_{n+1}^{test,(i)} = - \int_0^{L^e} \bar{G} M_{n+1}^{test,(i)} dx, \quad (4.53)$$

$$M_{n+1}^{test,(i)} = EI \left(\bar{\kappa}(\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \alpha_{n+1}^{test,(i)}) - \bar{\kappa}_n^p \right). \quad (4.54)$$

Se considera una función de falla test:

$$\bar{\phi}_{n+1}^{test,(i)} = \bar{\phi} \left(t_{n+1}^{test,(i)}, \bar{q}_{n+1}^{test,(i)} \left(\bar{\xi}_{n+1}^{test,(i)} \right) \right). \quad (4.55)$$

Dependiendo de la función de falla, se consideran los siguientes casos:

- i. Si $\bar{\phi}_{n+1}^{test,(i)} \leq 0$, entonces la respuesta de la rótula es elastoplástica sin ablandamiento, y los valores test de las variables elastoplásticas internas se conservan sin actualizarse, lo mismo para el valor test del momento:

$$\alpha_{n+1}^{(i)} = \alpha_n, \quad \bar{\xi}_{n+1}^{(i)} = \bar{\xi}_n, \quad t_{n+1}^{(i)} = t_{n+1}^{test,(i)}, \quad M_{n+1}^{(i)} = M_{n+1}^{test,(i)}. \quad (4.56)$$

- II. Si $\bar{\phi}_{n+1}^{test,(i)} > 0$, entonces hay ablandamiento plástico y los valores de las variables elastoplásticas de ablandamiento deben corregirse:

$$\alpha_{n+1}^{(i)} = \alpha_n + \bar{\gamma}_{n+1}^{(i)} \operatorname{sgn} \left(t_{n+1}^{test,(i)} \right), \quad \bar{\xi}_{n+1}^{(i)} = \bar{\xi}_n + \bar{\gamma}_{n+1}^{(i)}, \quad (4.57)$$

siendo el valor de deslizamiento plástico de ablandamiento $\bar{\gamma}_{n+1}^{(i)}$ igual a:

$$\bar{\gamma}_{n+1}^{(i)} = \dot{\bar{\gamma}}_{n+1}^{(i)} (t_{n+1} + t_n). \quad (4.58)$$

El valor del deslizamiento plástico de ablandamiento $\bar{\gamma}_{n+1}^{(i)} > 0$, se actualiza imponiendo que la función de falla sea cero:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{n+1}^{(i)} &= \bar{\phi} \left(t_{n+1}^{(i)} \left(\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \alpha_{n+1}^{(i)}(\bar{\gamma}_{n+1}^{(i)}) \right), \bar{q}_{n+1}^{(i)} \left(\bar{\xi}_{n+1}^{(i)}(\bar{\gamma}_{n+1}^{(i)}) \right) \right) = 0, \\ \bar{\phi}_{n+1}^{(i)} &= \bar{\phi}_{n+1}^{(i)} \left(\bar{\gamma}_{n+1}^{(i)} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\text{siendo } t_{n+1}^{(i)} = - \int_0^{L^e} \bar{G} M_{n+1}^{(i)} dx, \quad M_{n+1}^{(i)} = EI \left(\bar{\kappa} \left(\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \alpha_{n+1}^{(i)} \right) - \bar{\kappa}_n^p \right). \quad (4.60)$$

A partir de las Ecuaciones (4.38), (4.57), (4.59), (4.60), se determina el valor del deslizamiento plástico de ablandamiento:

$$\bar{\gamma}_{n+1}^{(i)} = \begin{cases} \frac{\bar{\phi}_{n+1}^{test,(i)}}{\int_0^{L^e} \bar{G} EI \bar{G} dx + K_s}, & \text{si } \bar{\xi}_{n+1}^{(i)} \leq -\frac{M_u}{K_s}, \\ \frac{|t_{n+1}^{test,(i)}|}{\int_0^{L^e} \bar{G} EI \bar{G} dx}, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (4.61)$$

$$\text{siendo } \int_0^{L^e} \bar{G} EI \bar{G} dx = \frac{4EI}{L^e{}^3} (L^e{}^2 - 3L^e x_d + 3x_d^2). \quad (4.62)$$

Luego de calcular $\bar{\gamma}_{n+1}^{(i)}$, con la Ecuaciones (4.57) y (4.60) se actualizan las variables internas de ablandamiento, el momento en la rótula $t_{n+1}^{(i)}$ y el momento $M_{n+1}^{(i)}$.

4.2.2. Resolución de las ecuaciones globales

Suponiendo conocidas las variables elastoplásticas internas $\bar{\kappa}_{n+1}^{p,(i)}$, $\bar{\xi}_{n+1}^{(i)}$, $\alpha_{n+1}^{(i)}$, $\bar{\xi}_{n+1}^{(i)}$, se resuelve el sistema de ecuaciones globales dado por la Ecuaciones (4.26) y (4.27), para calcular los nuevos desplazamientos nodales. Como el sistema es no lineal, para resolverlo se linealiza en torno a $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}$.

El sistema linealizado, resulta:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathbf{fd}} & \mathbf{K}^{\mathbf{f}\alpha} \\ \mathbf{K}^{hd} & K^{h\alpha} \end{bmatrix}_{n+1}^{e,(i)} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{d}_{n+1} \\ \Delta \alpha_{n+1} \end{pmatrix}^{e,(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{n+1}^{ext,e} - \mathbf{f}_{n+1}^{int,e,(i)} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

Siendo $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{e,(i)}$ el incremento de los desplazamientos generalizados, y $\Delta \alpha_{n+1}^{e,(i)}$ el incremento del ángulo de giro en la discontinuidad, donde se activa la rótula plástica.

La matriz de rigidez tangente, tiene las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{n+1}^{\mathbf{fd},e,(i)} &= \left(\frac{\partial \mathbf{f}^{int,e}}{\partial \mathbf{d}} \right)_{n+1}^{(i)}, \quad \mathbf{K}_{n+1}^{\mathbf{f}\alpha,e,(i)} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}^{int,e}}{\partial \alpha} \right)_{n+1}^{(i)}, \\ \mathbf{K}_{n+1}^{hd,e,(i)} &= \left(\frac{\partial h^e}{\partial \mathbf{d}} \right)_{n+1}^{(i)}, \quad K_{n+1}^{h\alpha,e,(i)} = \left(\frac{\partial h^e}{\partial \alpha} \right)_{n+1}^{(i)}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}^{int,e}}{\partial \mathbf{d}} &= \int_0^{L^e} (\mathbf{B}^d)^\top DIAG[EA, C^{ep}] \mathbf{B}^d dx, \\ \frac{\partial \mathbf{f}^{int,e}}{\partial \alpha} &= \int_0^{L^e} (\mathbf{B}^d)^\top DIAG[EA, C^{ep}] [0, \bar{G}]^\top dx, \\ \frac{\partial h^e}{\partial \mathbf{d}} &= \int_0^{L^e} [0, \bar{G}] DIAG[EA, C^{ep}] \mathbf{B}^d dx, \\ \frac{\partial h^e}{\partial \alpha} &= \int_0^{L^e} \bar{G} C^{ep} \bar{G} dx + K_s, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\text{siendo: } DIAG[EA, C^{ep}] = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & C^{ep} \end{bmatrix}.$$

Los términos independientes del sistema de la Ecuación (4.63), son iguales a:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{int,e,(i)} = \int_0^{L^e} (\mathbf{B}^d)^\top \left[N_{n+1}^{(i)}, M_{n+1}^{(i)} \right]^\top dx, \quad \mathbf{f}_{n+1}^{ext,e} = t_{n+1} \mathbf{f}_{n+1}^{ext,e}. \quad (4.66)$$

Donde, $N_{n+1}^{(i)} = EA \bar{\epsilon}_{n+1}^{(i)}$ y $M_{n+1}^{(i)}$, se determinan a partir de los variables elastoplásticas internas. Se reduce el sistema, expresando $\Delta \alpha_{n+1}^{e,(i)}$ en función de $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{e,(i)}$, sustituyendo en el sistema original la matriz de rigidez, resulta:

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{e,(i)} = \mathbf{K}_{n+1}^{\mathbf{fd},e,(i)} - \mathbf{K}_{n+1}^{\mathbf{f}\alpha,e,(i)} \left(K_{n+1}^{h\alpha,e,(i)} \right)^{-1} \mathbf{K}_{n+1}^{hd,e,(i)}. \quad (4.67)$$

El sistema reducido es igual a:

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{e,(i)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{e,(i)} = \mathbf{f}_{n+1}^{ext,e} - \mathbf{f}_{n+1}^{int,e,(i)}. \quad (4.68)$$

Se ensamblan las matrices con el operador $\mathbf{A}$, y se obtiene el sistema global:

$$\mathbf{K}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{A}_{e=1}^{N_{elem}} \left(\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{e,(i)} \right), \quad (4.69)$$

$$\Delta \mathbf{F}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{A}_{e=1}^{N_{elem}} \left(\mathbf{f}_{n+1}^{ext,e} - \mathbf{f}_{n+1}^{int,e,(i)} \right). \quad (4.70)$$

Si $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)}$ es el incremento del vector global de desplazamientos generalizados, el sistema a resolver es:

$$\mathbf{K}_{n+1}^{(i)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} = \Delta \mathbf{F}_{n+1}^{(i)}, \quad (4.71)$$

$$\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} = \left[\mathbf{K}_{n+1}^{(i)} \right]^{-1} \Delta \mathbf{F}_{n+1}^{(i)}. \quad (4.72)$$

Para resolver el sistema se aplican los métodos de control de desplazamientos de la Sección 3.2.2, en general la matriz tangente es singular en algún punto de la curva solución, y se deben resolver los problemas de convergencia en equilibrios inestables.

Los métodos de control de desplazamiento indirecto y el arc-length cilíndrico, con los predictores de trabajo incremental y del determinante de la matriz tangente, ver Sección 3.2.2, resuelven los problemas de convergencia.

Luego de resolver el sistema, se obtiene el vector global de desplazamientos generalizados para el paso iterativo $i + 1$,

$$\mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)}. \quad (4.73)$$

Finalmente, se debe verificar el criterio de convergencia, en caso de no converger, se itera con $i \leftarrow i + 1$.

4.2.3. Algoritmos

En el Algoritmo 1 se presenta un pseudo-código con el esquema de resolución de las variables de desplazamiento $\mathbf{d}$ y las nuevas variables internas $\boldsymbol{\psi}$ de los procesos de plastificación. La rutina **time_iteration** obtiene la solución del PTV para el tiempo t_{n+1} , a partir de la solución en el tiempo t_n , a través de la aplicación de un método iterativo. En el Algoritmo 2 se presenta un pseudo-código de la rutina **time_iteration**. Dado un desplazamiento generalizado $\mathbf{d}_n$, las variables elastoplásticas internas del elemento $\boldsymbol{\psi}_n = \{\bar{\kappa}_n^p, \bar{\xi}_n, \bar{\xi}_n, \alpha_n\}$, y en caso de activación de la rótula, la coordenada x_d , se verifica que no se supere el valor M_u en cada punto de integración del elemento. Se aplica un método de tipo Newton-Raphson arc-length o control indirecto de desplazamientos (Jirásek y Bažant, 2002) para resolver el sistema global y determinar $\mathbf{d}_{n+1}$, iterando hasta obtener convergencia ($k \leftarrow k + 1$).

Algoritmo 1 Pseudo-código de software ONSAS.

```

 $\mathbf{d}_n = \{\mathbf{u}^\top, \mathbf{v}^\top, \boldsymbol{\theta}^\top\}^\top, \boldsymbol{\psi}_n = \{\bar{\kappa}_n^p, \bar{\xi}_n, \bar{\xi}_n, \alpha_n, x_d\}, \mathbf{f}_{n+1}^{ext,e}$ 
 $\mathbf{d}_0^e, \boldsymbol{\psi}_0, n_f, \Delta t, (t_0, n = 0)$ 
 $\mathbf{d}_n^e \leftarrow \mathbf{d}_0^e, \boldsymbol{\psi}_n \leftarrow \boldsymbol{\psi}_0, (t_n)$ 
while  $n < n_f$  do
   $\mathbf{d}_{n+1}, \boldsymbol{\psi}_{n+1} \leftarrow \text{time\_iteration}(\mathbf{d}_n, \boldsymbol{\psi}_n, \mathbf{f}_{n+1}^{ext})$ 
   $\mathbf{d}_n^e \leftarrow \mathbf{d}_{n+1}^e, \boldsymbol{\psi}_n \leftarrow \boldsymbol{\psi}_{n+1}, (t_{n+1}), n \leftarrow n + 1$ 
end while

```

Lograda la convergencia, se determina $n \leftarrow n + 1$, se actualizan las variables elastoplásticas internas $\boldsymbol{\psi}_n$ que corresponden al nuevo desplazamiento $\mathbf{d}_n$, y en caso de activación de la rótula, la coordenada x_d .

Algoritmo 2 ONSAS time_iteration

```

 $\mathbf{d}_n, \boldsymbol{\psi}_n, \mathbf{f}_{n+1}^{ext}, tolerance$ 
 $k \leftarrow 0, \mathbf{d}_{n+1}^k \leftarrow \mathbf{d}_n, \boldsymbol{\psi}_{n+1}^k \leftarrow \boldsymbol{\psi}_n, \mathbf{f}_{n+1}^{int,k} \leftarrow \mathbf{f}_n^{int}$ 
while  $\left\| \mathbf{A}_{e=1}^{N_{elem}} \left( \mathbf{f}_{n+1}^{ext,e} - \mathbf{f}_{n+1}^{int,e,k} \right) \right\| < tolerance$  do
  for  $e$  in  $1, \dots, n_e$  do
     $\mathbf{f}_{n+1}^{int,e,k}, \mathbf{K}_{n+1}^{e,k}, \boldsymbol{\psi}_{n+1}^{k+1} \leftarrow \text{frame2D\_plastic\_internal\_force}(\mathbf{d}_{n+1}^{e,k}, \boldsymbol{\psi}_n^e)$ 
  end for
   $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^k \leftarrow \text{solve}(\mathbf{K}_{n+1}^k, \mathbf{f}_{n+1}^{ext} - \mathbf{f}_{n+1}^{int,k})$ 
   $\mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{d}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^k$ 
   $\mathbf{d}_{n+1}^k \leftarrow \mathbf{d}_{n+1}^{k+1}, \boldsymbol{\psi}_{n+1}^k \leftarrow \boldsymbol{\psi}_{n+1}^{k+1}$ 
   $k \leftarrow k + 1$ 
end while
 $\mathbf{d}_{n+1} \leftarrow \mathbf{d}_{n+1}^k, \boldsymbol{\psi}_{n+1} \leftarrow \boldsymbol{\psi}_{n+1}^k$ 

```

4.2.4. Criterios de parada

Los criterios de parada en ONSAS, son el número máximo de iteraciones **Iters**, Ecuación (4.74), la tolerancia de error en el cálculo de los desplazamientos $\Delta \mathbf{d}$, Ecuación (4.75), y la tolerancia de error en el cálculo de las fuerzas $\mathbf{f}$, Ecuación (4.76),

$$\mathbf{Iters} < \text{stopTolIts}, \quad (4.74)$$

$$\frac{\|\Delta \mathbf{d}_{n+1}^k\|}{\|\mathbf{d}_{n+1}^k\|} < \text{stopTolDeltad}, \quad (4.75)$$

$$\frac{\|\mathbf{f}_{n+1}^{ext} - \mathbf{f}_{n+1}^{int,k}\|}{\|\mathbf{f}_{n+1}^{ext}\|} < \text{stopTolForces}. \quad (4.76)$$

Capítulo 5

Resultados numéricos

*Daisy, Daisy, Give me your answer, do!
I'm half crazy, All for the love of you!*

IBM 7094, Bell Labs, 1961

HAL 9000, 2001: A Space Odyssey

Stanley Kubrick

En este capítulo, se presentan los resultados numéricos obtenidos en la resolución de problemas de referencia. En la Sección 5.1 se presenta la resolución de problemas de colapso estructural de reticulados, considerando no linealidad geométrica y comportamiento elastoplástico con endurecimiento sin falla. El objetivo principal de la resolución de estos ejemplos es la verificación de la implementación de la resolución incremental elastoplástica y el funcionamiento de los métodos de control de desplazamientos. En la Sección 5.2, se analizan colapsos estructurales de pórticos con no linealidad material, con falla resistente del material. En estos ejemplos se valida la implementación del elemento de Euler-Bernoulli con discontinuidad fuerte de rotación. Para la resolución de los problemas se implementaron los métodos descritos en el Capítulo 4 como una extensión del software ONSAS (Pérez et al. 2025), se implementó el elemento finito con discontinuidad de rotación, la medida de deformación logarítmica, y los predictores del método arc-length de trabajo incremental y del determinante de la matriz de rigidez tangente. El código fue ejecutado en MATLAB (MathWorks, 2025), los resultados fueron generados en un computador ARM macOS. En los ejemplos de reticulados, para validar la solución numérica, se utilizó el software de elementos finitos ADINA —con licencia académica— (Bathe, 2025), en un computador AMD64 Windows 11. En el ejemplo de la cúpula de Schwedler se utilizó el software de generación de mallas de elementos finitos Gmsh (Geuzaine y Remacle, 2009). El software ParaView (Ahrens et al. 2005), fue utilizado para realizar visualizaciones de los resultados numéricos de ONSAS.

5.1. Plasticidad en reticulados

En esta sección, se presentan los resultados obtenidos al resolver problemas estructurales de reticulados con comportamiento elastoplástico, haciendo foco en la validación de los métodos numéricos de resolución de ecuaciones no lineales con control de desplazamiento.

5.1.1. Ejemplo i: reticulado de von Mises

Presentación del problema

Se analiza el reticulado de von Mises, formado por barras con comportamiento elastoplástico y sometida a un desplazamiento impuesto como se muestra en la Figura 5.1. Este es un problema clásico que presenta inestabilidad del tipo snap-through, y que se muestra como ejemplo en libros de referencia como el (Crisfield, 1991). Con la resolución de este problema, se busca validar la implementación del método de control indirecto de desplazamientos (Jirásek y Bažant, 2002), y la implementación de la deformación logarítmica rotada. Para ello, se comparan los resultados del ONSAS, con la solución analítica y con los resultados numéricos obtenidos con el ADINA, en este último, con la medida de deformación de ingeniería rotada, dado que no tiene la logarítmica rotada implementada para elementos del tipo TRUSS.

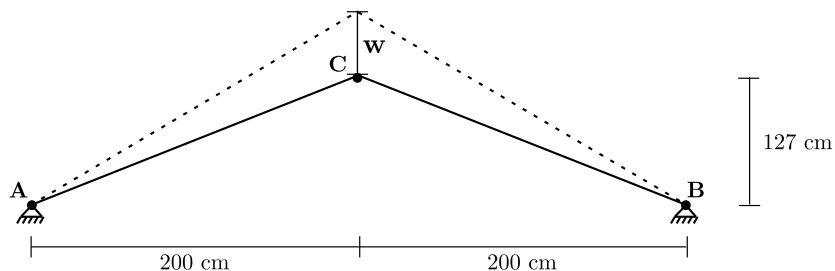


Figura 5.1: Reticulado de von Mises.

Las barras están formadas por un material del tipo acero DC06 ($E=210$ GPa, $K=529,5$ MPa, $\sigma_Y=123,6$ MPa), con una sección transversal uniforme de área $A = 7$ cm². Se implementaron las medidas de deformación logarítmica rotada y de ingeniería rotada.

Los desplazamientos w del nodo C, como se muestra en la Figura 5.1, son impuestos de forma incremental de 0 a -300 cm. Se asume una deformación quasi-estática, el comportamiento elastoplástico se supone independiente de la velocidad de carga, con desplazamientos finitos, y considerando endurecimiento plástico. Se desprecia la inestabilidad por flexión de las barras.

Solución analítica

En este problema es posible obtener soluciones analíticas, en particular la relacionada con la medida de deformación logarítmica rotada. Aplicando simetría, se considera la estructura equivalente mostrada en la Figura 5.2.

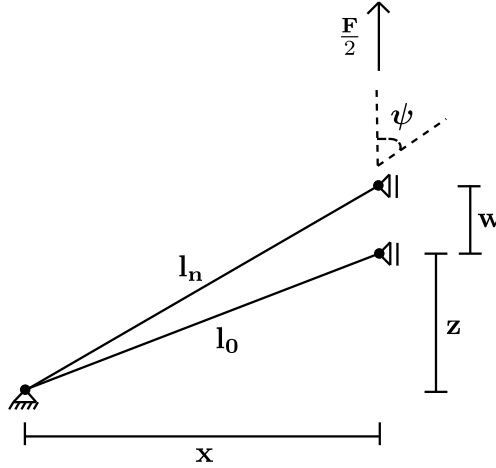


Figura 5.2: Estructura simétrica (von Mises).

El proceso se desarrolla en etapas, en los tramos que se describen a continuación. El tramo I está dado por las deformaciones y tensiones en las que no se desarrolla deformación plástica, en esta fase las barras están comprimidas.

El tramo II comienza cuando es superado el valor $\sigma_Y = 123,6$ MPa, para un valor de $w \approx -0,29979$ cm, comienza a desarrollarse la deformación plástica, las barras se mantienen en compresión con deformación plástica hasta llegar al valor de $w = -127$ cm.

En el tramo III, la deformación plástica se mantiene constante, y sólo hay variación de deformación elástica, la fuerza invierte su sentido y mantiene las barras comprimidas, hasta que nuevamente se anula y las barras pasan a estar en tracción con deformación elástica. En el tramo IV las barras plastifican en tracción, y se deforman hasta el valor de la fuerza final aplicada.

Se obtiene la expresión analítica de la fuerza F en función del desplazamiento vertical w del nodo C (el desarrollo se incluye en el Apéndice 1), F representa el valor de la fuerza externa total aplicada en el nodo C, y l_0 y l_n las longitudes de la barra sin deformar y deformada, respectivamente, donde $l_n = \sqrt{(z + w)^2 + x^2}$.

La deformación $\epsilon_{\min}$ se corresponde con el final del tramo plástico II, y el valor ϵ^* es el correspondiente al inicio del tramo plástico IV.

$$F(w) = \begin{cases} 2A \frac{z+w}{l_n} E \ln \left(\frac{l_n}{l_0} \right), & \text{tramo I,} \\ 2A \frac{z+w}{l_n} \left[\left(\ln \left(\frac{l_n}{l_0} \right) + \frac{\sigma_{fl}}{E} \right) \frac{EK}{E+K} - \sigma_{fl} \right], & \text{tramo II,} \\ 2A \frac{w}{l_n} \cdot \left[E(\epsilon - \epsilon_{\min}) - \sigma_{fl} + \frac{EK}{E+K} (\epsilon_{\min} - \frac{\sigma_{fl}}{E}) \right], & \text{tramo III,} \\ 2A \frac{w}{l_n} \cdot \left[\sigma_{fl} - \frac{EK}{E+K} (\epsilon_{\min} - \frac{\sigma_{fl}}{E}) + \frac{EK}{E+K} (\epsilon - \epsilon^*) \right], & \text{tramo IV.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Resultados numéricos

Para resolver comportamientos de tipo *snap-through*, los resultados numéricos son obtenidos aplicando el método arc-length con control indirecto de desplazamientos (Jirásek y Bažant, 2002), con 1000 incrementos de 0,3 cm. El criterio de parada para la convergencia de los desplazamientos (4.75) y las fuerzas (4.76) se fijó en una tolerancia de 10^{-12} , y el máximo de iteraciones (4.74) en 15. Los resultados obtenidos

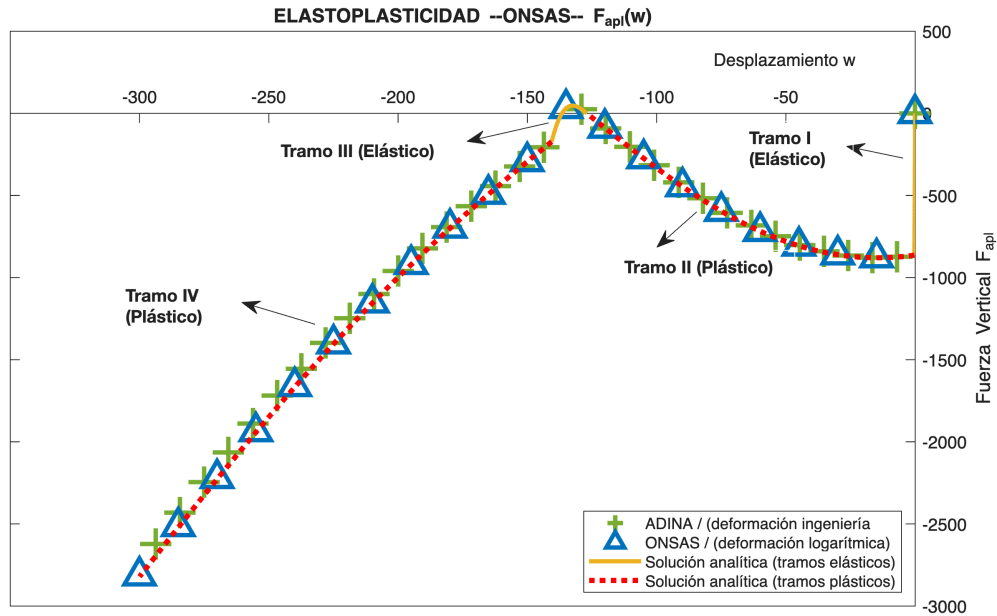


Figura 5.3: Fuerza vertical F - desplazamiento w.

con ADINA, con ONSAS, y con la solución analítica, para la relación entre la fuerza vertical F y el desplazamiento w, se muestran en la Figura 5.3, donde la solución analítica para la medida de deformación logarítmica rotada se representa con una

curva continua de color amarillo para tramos en régimen elástico, y una curva punteada roja para tramos en régimen plástico.

La solución de ONSAS con la deformación logarítmica se muestra con triángulos azules, y la solución de ADINA con la deformación de ingeniería, se representa con cruces verdes. Adicionalmente, en la Figura 5.4, se muestran en forma separada los resultados con ADINA. La ejecución de ONSAS para la deformación logarítmica rotada insumió 12,9 s, el incremento con mayor cantidad de iteraciones necesarias para converger requirió 3 iteraciones, mientras que el promedio fue de 2 iteraciones.

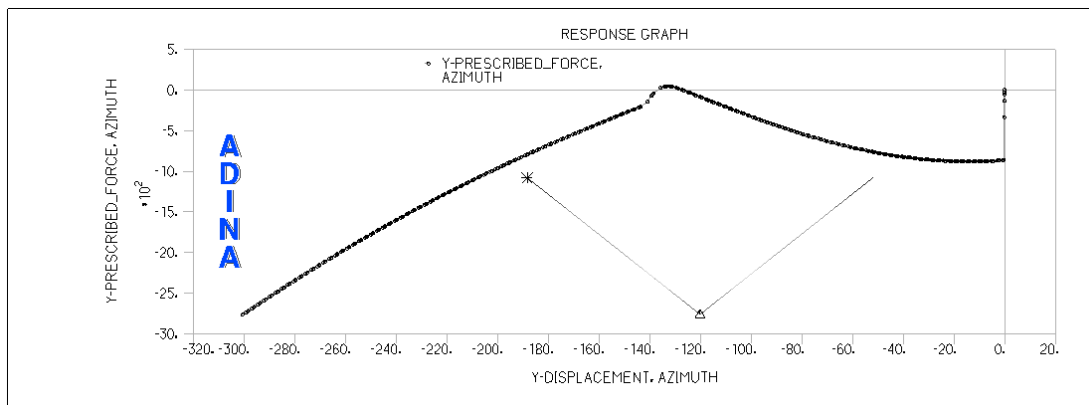


Figura 5.4: Reticulado von Mises, resultado numérico con ADINA.

Conclusiones preliminares

A partir de los resultados mostrados en la Figura 5.3, se puede concluir que los resultados obtenidos utilizando ONSAS, fueron validados por la solución analítica en el caso de la medida de deformación logarítmica rotada, y por la solución del ADINA en el caso de la deformación de ingeniería, Figura 5.4. Además, se puede concluir que la implementación del método de control indirecto de desplazamientos (Jirásek y Bažant, 2002), es correcta para el caso de reticulados planos, dado que se logró la convergencia en una cantidad de iteraciones esperable.

5.1.2. Ejemplo ii: domo de Schwedler

Presentación del problema

Johann Wilhelm Schwedler (1823-1894), ingeniero de los ferrocarriles reales de Prusia, hizo grandes aportes al diseño de cúpulas, proporcionando no sólo un enfoque teórico, sino también una técnica de cálculo estructural.

En 1875, diseñó la cubierta de un gasómetro para la *Imperial Continental Gas Association* en Berlín-Kreuzberg, una estructura de acero con un diámetro de 55 metros y una altura de 12 metros. El domo de Schwedler es una estructura estáticamente indeterminada con un alto grado de hiperestaticidad.

En este problema, presente en la literatura (Greco et al. 2006; Greco y Ferreira, 2009; Krishnamoorthy et al. 1996; Pascon, 2016), se analiza el comportamiento elastoplástico y el colapso estructural geométrico —no linealidad geométrica—. El objetivo principal de la resolución de este ejemplo es verificar que la implementación permite resolver problemas de mayor tamaño y con geometrías tridimensionales, los resultados se validan con el ADINA.

Para la generación de la geometría de la estructura y la malla de elementos finitos, se utilizó el software Gmsh ((Geuzaine y Remacle, 2009)), el modelo de elementos finitos consta de 97 nodos y 264 elementos. La geometría y los materiales del domo se tomaron de (Greco et al. 2006), el diámetro del domo es 22,9 m, su altura es 4,58 m y el área de la sección transversal de las barras es igual a 0,0032 m², ver Figura 5.5a. Todos los apoyos de la estructura son fijos, y se consideran los siguientes parámetros en el modelo: $E = 200$ GPa, $K = 0$ (plasticidad perfecta, sin endurecimiento), $\sigma_Y = 25$ MPa.

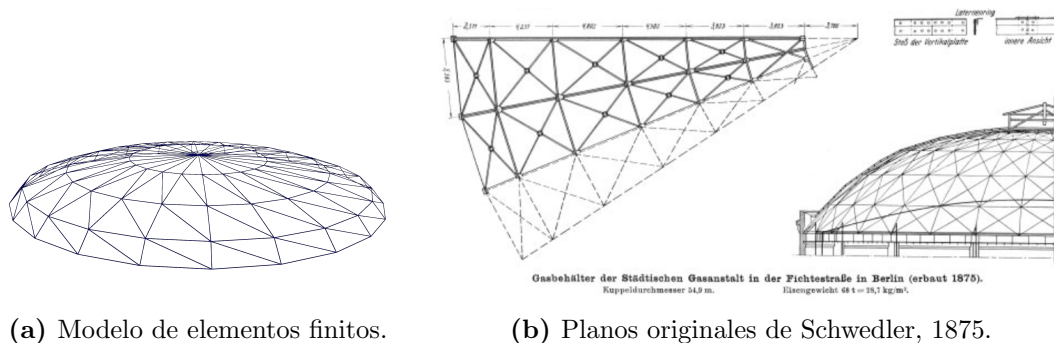


Figura 5.5: Cubierta del gasómetro municipal en Fichtestraße, Berlin-Kreuzberg.

Resultados numéricos

Se prescribe un desplazamiento descendente del nodo vértice en tres etapas, una primera de 0 a 2 m, aplicada con incrementos de 100 pasos, seguida por una etapa de 2 a 4 m, con 100 incrementos, y finalmente de 4 a 4,58 m con 100 incrementos, las tres etapas suman un desplazamiento final de 4,58 m (altura del domo). Se aplica el método de control indirecto de desplazamientos (Jirásek y Bažant, 2002). En la Figura 5.6 se

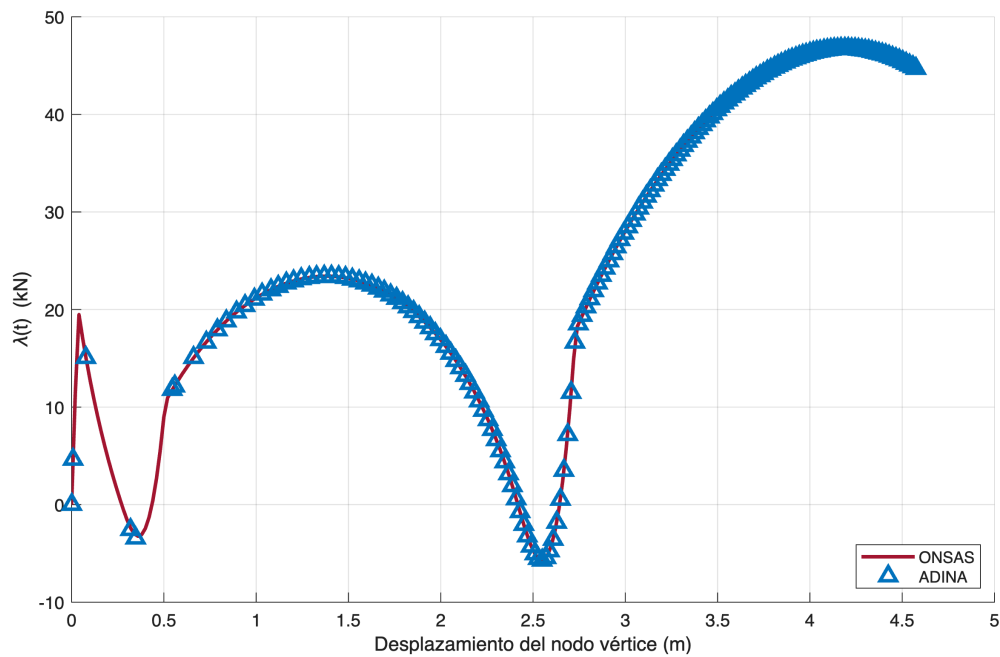


Figura 5.6: Cúpula de Schwedler [ONSAS/ADINA].

muestra la respuesta de la estructura al desplazamiento prescrito del nodo vértice, se grafica la fuerza λ en función del desplazamiento vertical del nodo vértice, los resultados numéricos obtenidos con el ONSAS se representan con una línea continua de color rojo y los resultados del ADINA con triángulos azules.

En la Figura 5.7 se muestra la estructura deformada, obtenida con ONSAS y el software ParaView (Ahrens et al. 2005). El tiempo de cómputo con ONSAS fue 344,2 s, y la convergencia se obtuvo en un promedio de 4 iteraciones y un máximo de 5.

Para la comparación de los resultados numéricos con ONSAS y ADINA se utilizan elementos TRUSS con la medida de deformación de ingeniería rotada, dado que ADINA no tiene implementada la medida de deformación logarítmica rotada para los elementos TRUSS, ver Figuras 5.6 y 5.8.

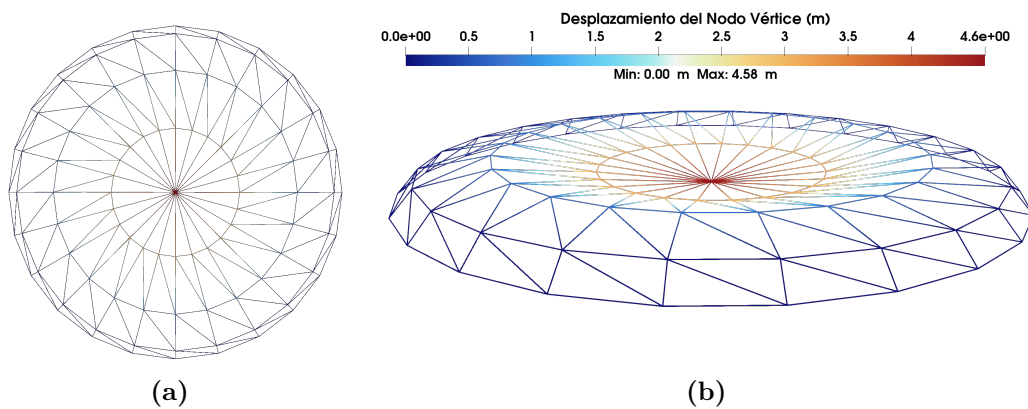


Figura 5.7: Cúpula de Schwedler, resultados numéricos con ONSAS/ParaView.

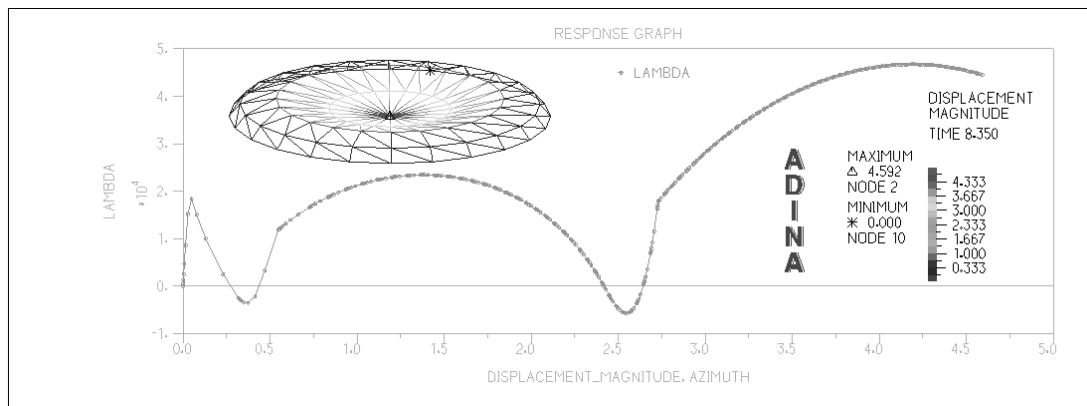


Figura 5.8: Cúpula de Schwedler, resultados numéricos con ADINA.

Conclusiones preliminares

Tal como se puede ver en la Figura 5.6, los resultados provistos por ONSAS coinciden con los obtenidos con ADINA. Respecto al comportamiento estructural, se pueden observar 3 puntos límite, conforme las barras plastifican y la estructura se deforma, la carga se redistribuye a las barras sin plastificar, así hasta el agotamiento de la capacidad resistente de la estructura. Se concluye que la implementación en ONSAS, sin computación paralela, resuelve problemas de porte mediano.

5.2. Análisis post-colapso de pórticos

En esta sección, se estudian estructuras con falla resistente del material, con activación de rótulas plásticas de ablandamiento, y se analiza el post-colapso estructural. Se utiliza la implementación en ONSAS del elemento de Euler-Bernoulli con discontinuidad fuerte de rotación. En los ejemplos considerados, el material plastifica con endurecimiento, al alcanzarse el momento último (M_u) se activa una rótula plástica de ablandamiento.

Se analiza la respuesta de la estructura conforme ocurre la plastificación, se obtiene la secuencia de activación de la rótulas plásticas de ablandamiento y la posterior redistribución de las cargas, hasta el agotamiento de la capacidad resistente.

La información sobre la secuencia de activación de las rótulas es esencial para estudiar la forma en que colapsa la estructura. En el análisis clásico de la carga límite, se supone plasticidad perfecta en las rótulas plásticas, y por lo tanto, en cada rótula plástica se mantiene el momento de plastificación constante. En el método incremental, se analizan las estructuras intermedias que se suceden conforme disminuye el número de grados de hiperestaticidad, lo cual, en el caso de estructuras con alto grado de hiperestaticidad, puede resultar muy costoso en tiempo y recursos. Además, en los casos en que es necesario considerar la respuesta de ablandamiento de la estructura, la carga límite no se obtiene en forma precisa, dado que no se considera el ablandamiento plástico.

5.2.1. Ejemplo iii: viga ménsula

Presentación del problema

En este ejemplo, se considera una viga en ménsula cargada en el extremo con una fuerza vertical, como se muestra en la Figura 5.9.

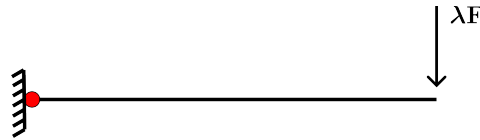


Figura 5.9: Viga ménsula, rótula plástica de ablandamiento.

El ejemplo es resuelto en (Jukić et al. 2013). Con este problema se obtiene una primera validación de la implementación de las rótulas plásticas de ablandamiento.

Se espera que la rótula plástica ocurra en el empotramiento, identificada con un círculo rojo en la Figura 5.9. Se consideran distintas mallas en el modelo, y se verifica que la implementación del elemento de Euler-Bernoulli con discontinuidad fuerte de rotación regulariza el problema de localización —problema mal planteado—, ver Sección 2.2.4.

Para las propiedades geométricas y materiales se considera el largo de la ménsula $L = 2,5$ m y la rigidez flexional $EI = 77.650$ kN/m². Para el comportamiento no lineal material dado por la Figura 4.4, se consideran los parámetros $M_c = 37,9$ kNm, $M_y = 268$ kNm, $K_{h1} = 29.400$ kNm², $K_{h2} = 272$ kNm², $M_u = 374$ kNm, $K_s = -18.000$ kNm.

Resultados numéricos

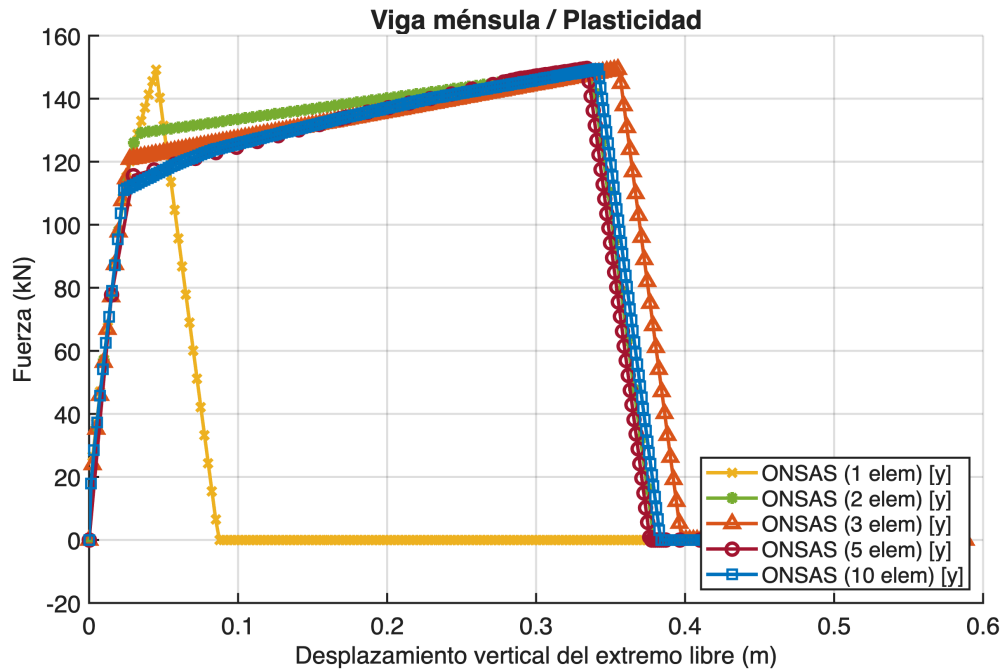


Figura 5.10: Viga ménsula, desplazamiento del extremo libre.

Para la resolución del problema, la estructura es mallada con 1, 2, 3, 5 y 10 elementos de Euler-Bernoulli con discontinuidad de rotación. Se aplica el método arc-length con el predictor de trabajo incremental. Como se observa en la Figura 5.10, al considerar un sólo elemento no se modela en forma correcta la respuesta de la estructura. El error ocurre al desarrollarse la plasticidad con endurecimiento, el considerar sólo un elemento con tres puntos de integración para toda la estructura no es suficiente para determinar en forma adecuada el desarrollo de las deformaciones plásticas. Al considerar más elementos, el error se reduce en forma drástica y la respuesta converge.

Este ejemplo se valida mediante una formulación *semi-analítica* que consiste en determinar los valores nodales con ONSAS, y a partir de los mismos, obtener las variables elastoplásticas internas y los valores nodales con el algoritmo. Luego, se comparan los resultados del algoritmo (sin ONSAS) con los resultados semi-analíticos (ONSAS y Algoritmo), ver Figura 5.12a. En este ejemplo, se aplican cargas cíclicas, mediante incrementos cíclicos de los desplazamientos, ver Figura 5.12b.

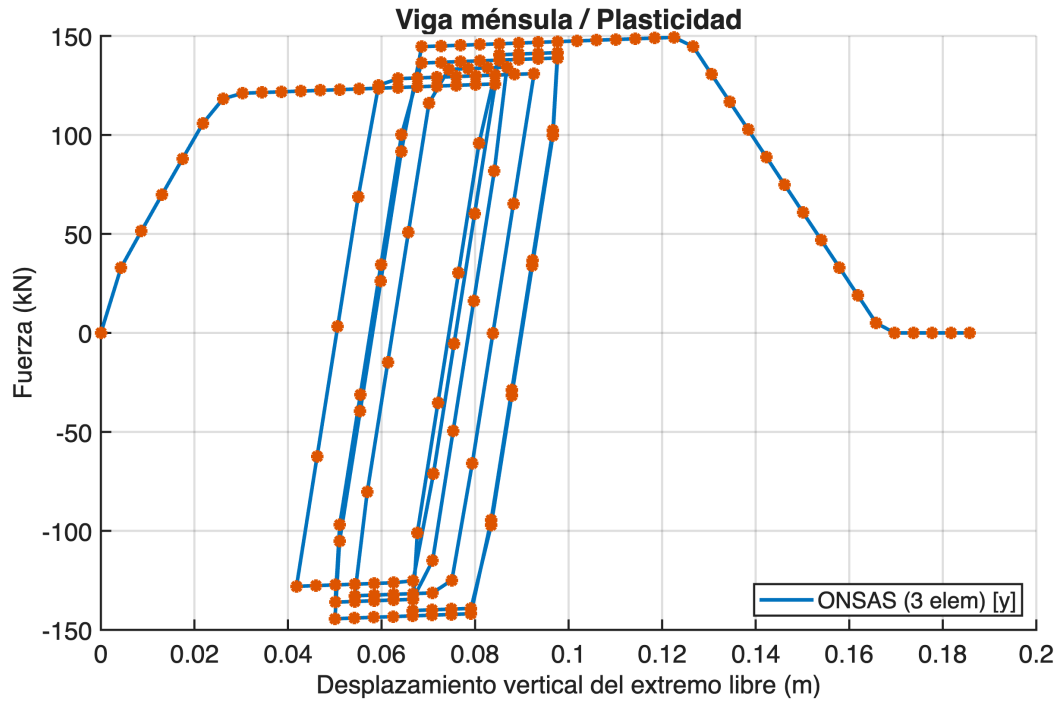


Figura 5.11: Viga ménsula, ciclo carga-descarga y ablandamiento.

Conclusiones preliminares

Los resultados numéricos muestran que utilizando más elementos de Euler-Bernoulli con discontinuidad de rotación, la solución converge. En todos los casos se predice la rótula en el empotramiento, en el primer elemento, y en el primer punto de integración del mismo. Cuando se aplican cargas cíclicas, ver Figura 5.11, la carga de colapso ocurre muy próxima al dominio elástico, lo cual se explica por la expansión del mismo, la estructura pierde ductilidad y el colapso ocurre de forma frágil.

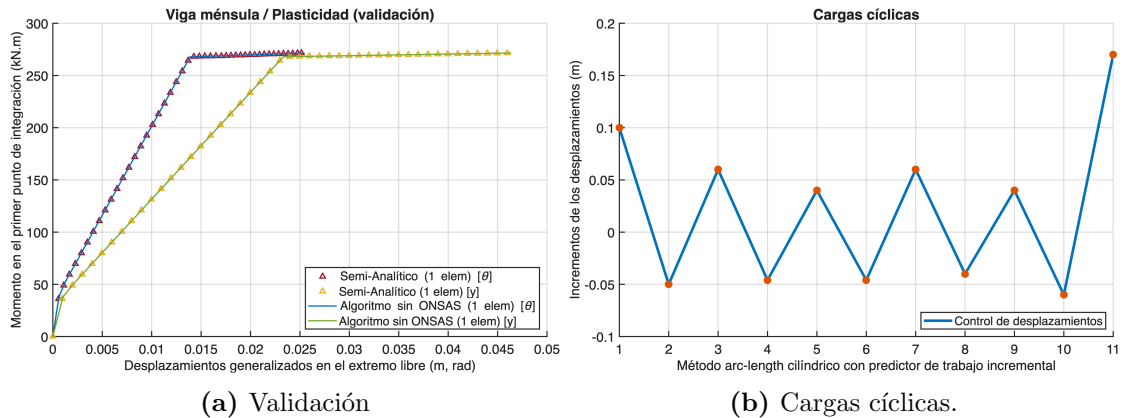


Figura 5.12: Viga ménsula, validación e incrementos cíclicos.

5.2.2. Ejemplo iv: viga empotrada-apoyada

Se considera una viga empotrada y apoyada, y se resuelve con ONSAS, se utilizan 4 elementos de Euler-Bernoulli con discontinuidad de rotación, se considera que ocurre plasticidad sin endurecimiento del material, se aplica control de desplazamientos y el predictor de trabajo incremental (de Souza Neto et al. 2008). En este ejemplo, el módulo de ablandamiento de las rótulas es igual a:

$$K_s = \frac{a 10 EI}{0,5 \ell}. \quad (5.2)$$

donde a es un parámetro real, variable.

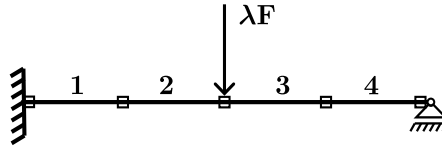


Figura 5.13: Viga empotrada-apoyada.

Análisis clásico de la carga última de colapso

Se mostrará que aplicar el método clásico en estructuras elastoplásticas con ablandamiento sobreestima la carga de colapso. El método clásico consiste en considerar todos los mecanismos de rotura posibles, y en calcular el factor de carga de formación de cada uno de esos mecanismos, activando rótulas plásticas —considerando plasticidad perfecta, sin ablandamiento—.

De acuerdo al teorema cinemático, el factor de colapso es el menor de todos los factores cinemáticamente admisibles. Sin embargo, para obtener todos los modos de colapso es necesario considerar las rótulas de ablandamiento —el método clásico supone plasticidad perfecta—, y además considerar configuraciones críticas no asociadas a las configuraciones de mecanismos, ver Figuras 5.14 y 5.15.

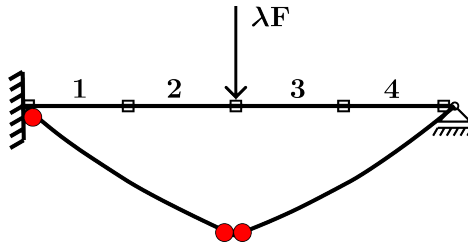


Figura 5.14: Primer modo de colapso (3 rótulas).

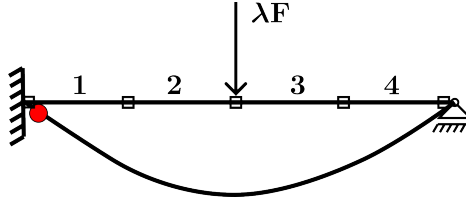


Figura 5.15: Configuración crítica de colapso (no es un mecanismo, 1 rótula).

Teoremas fundamentales del análisis límite

- Teorema estático (carga de colapso por defecto): *Un factor de carga $\lambda > 0$ se dice estáticamente admisible si hay un diagrama de momentos flectores en equilibrio con las cargas amplificadas con el factor λ , de forma que no se supere en ninguna sección el valor del momento de plastificación, $-M_u \leq M(x) \leq M_u$. El factor de carga de colapso λ_c es el mayor de los factores de carga estáticamente admisibles.*
- Teorema cinemático (carga de colapso por exceso): *Dado un mecanismo potencial de falla, el factor de carga $\lambda > 0$ correspondiente a esa configuración se dice cinemáticamente admisible si el trabajo que realizan las fuerzas externas es positivo. El factor de colapso λ_c es menor que todo factor de carga λ cinemáticamente admisible.*

Métodos clásicos para determinar la carga de colapso

- I. Método incremental: consiste en aumentar el factor de carga λ hasta alcanzar el momento de plastificación M_u en una sección, donde se activa una rótula plástica —se supone plasticidad perfecta—, cada rótula reduce el grado de hiperestaticidad de la estructura, así se continúa hasta que la estructura deviene en un mecanismo, y el factor de carga que activa esa última rótula es el factor de colapso λ_c .
- II. Método cinemático: se consideran todos los mecanismos de rotura posibles, según el teorema cinemático el factor de colapso λ_c es el menor de todos los factores de carga posibles.

Método incremental

Se resuelve la estructura hiperestática de la Figura 5.16:

$$M_A = \frac{2EI}{\ell} \theta_B + \frac{\lambda F \ell}{8}, \quad (5.3)$$

$$M_B = 0 = \frac{2EI}{\ell} 2\theta_B - \frac{\lambda F \ell}{8}, \quad (5.4)$$

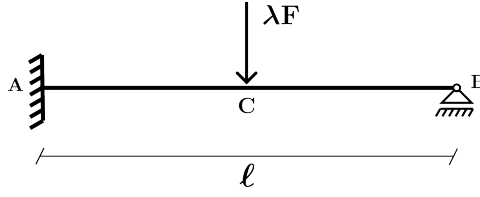


Figura 5.16: Viga empotrada-apoyada.

$$M_A = \frac{3\lambda F\ell}{16}, \quad M_C = \frac{5\lambda F\ell}{32}, \quad (5.5)$$

Entonces, se activa la primera rótula plástica en A:

$$M_A = M_u = \frac{3\lambda_{plast}F\ell}{16}, \quad (5.6)$$

$$\lambda_{plast}F = \frac{16M_u}{3\ell}. \quad (5.7)$$

En la posición donde se activa la rótula se genera una articulación, y la rótula opone

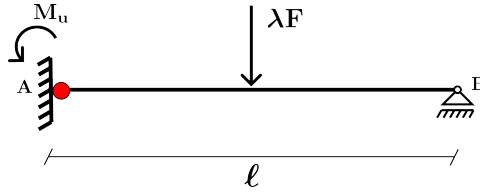


Figura 5.17: Estructura con una rótula plástica (plasticidad perfecta).

a la rotación un momento resistente de valor constante M_u (plasticidad perfecta, sin ablandamiento). Se continúa incrementando la carga, hasta la formación de la segunda rótula plástica, esta segunda falla genera un mecanismo, y la carga que la produce es la carga de colapso,

$$M_{colapso} = M_u = \frac{\lambda_c F\ell}{4} - \frac{M_u}{2}, \quad (5.8)$$

$$\lambda_c F = \frac{6M_u}{\ell} \approx 333,62 \text{ kN} \quad (M_u = 169,48 \text{ kNm}, \ell = 3,048 \text{ m}). \quad (5.9)$$

Método cinemático

Se considera un campo de desplazamientos virtuales asociado a un mecanismo de colapso en el que se forman 2 rótulas plásticas (con plasticidad perfecta) ver [Figura 5.18](#). Se aplica el principio de los trabajos virtuales para calcular el λ :

$$\delta W^{ext} = \delta W^{int}, \quad (5.10)$$

$$\delta W^{ext} = F_u \Delta = F_u \frac{\ell}{2} \theta, \quad (5.11)$$

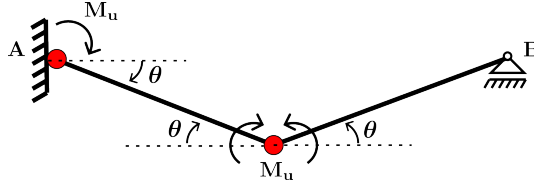


Figura 5.18: Mecanismo de colapso.

$$\delta W^{int} = M_u \theta + 2M_u \theta = 3M_u \theta, \quad (5.12)$$

$$F_u = \frac{6M_u}{\ell}. \quad (5.13)$$

Por lo tanto, el factor de carga para ese mecanismo es igual a:

$$\lambda_u F = F_u = \frac{6M_u}{\ell}, \quad (5.14)$$

$$\lambda_u = \frac{6M_u}{F\ell}. \quad (5.15)$$

El valor de λ_u calculado es el de colapso λ_c , dado que todo factor de carga estática y cinemáticamente admisible es el factor de carga de colapso.

$$\lambda_c F = \frac{6M_u}{\ell} \approx 333,62 \text{ kN} \quad (M_u = 169,48 \text{ kNm}, \ell = 3,048 \text{ m}). \quad (5.16)$$

Resultados numéricos

Para $a = -0,00001$, que equivale a suponer plasticidad perfecta en las rótulas, la carga de colapso del análisis límite coincide con el resultado numérico de ONSAS ($\lambda_c F = 333,62 \text{ kN}$). Si el parámetro del módulo de ablandamiento es $a = -0,2$, la carga de colapso resulta $\lambda_c F \approx 296,43 \text{ kN}$, se muestra que el método clásico sobreestima la carga de colapso en 11,15 % respecto al caso en que el parámetro del módulo de ablandamiento es $a = -0,2$.

Conclusiones preliminares

La configuración crítica de colapso (ver Figura 5.15) no se puede obtener con los métodos clásicos —se considera solo el primer modo de colapso—, y además suponen plasticidad perfecta en las rótulas. Se concluye que para los casos en que es necesario considerar la respuesta de ablandamiento de la estructura los métodos clásicos sobreestiman la carga de colapso.

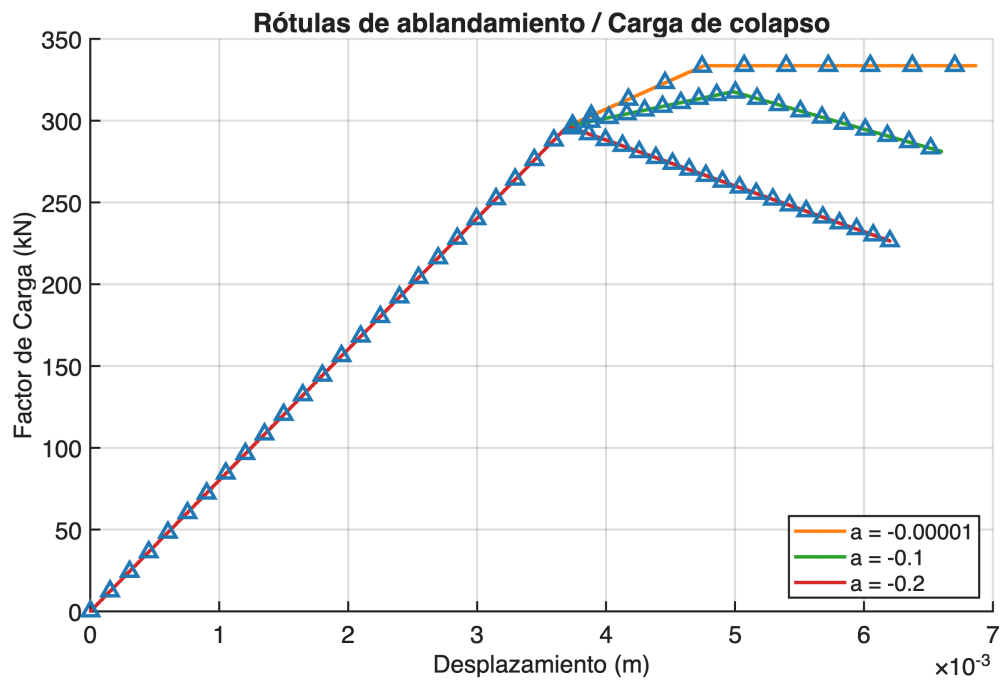


Figura 5.19: Factor de carga (kN) y desplazamiento (m).

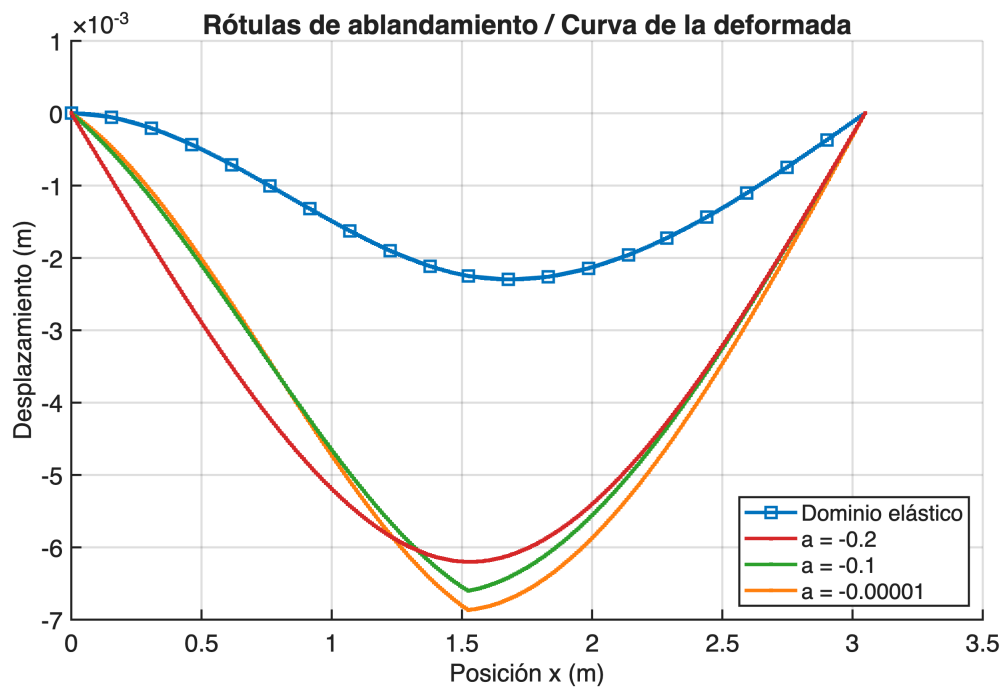


Figura 5.20: Curvas de la deformada.

5.2.3. Ejemplo v: viga biempotrada

Presentación del problema

El problema a resolver consiste en el esquema básico mostrado en la Figura 5.21, el cual se compone de 4 elementos del tipo Euler-Bernoulli con discontinuidad de rotación. Se carga el nodo 3 con una carga vertical y se aplica el método de control indirecto de desplazamientos (Jirásek y Bažant, 2002). Para el comportamiento no lineal material dado por la Figura 4.4, se consideran los parámetros $M_c = 37,9$ kNm, $M_y = 268$ kNm, $K_{h1} = 29.400$ kNm², $K_{h2} = 272$ kNm², $M_u = 374$ kNm, $K_s = -18.000$ kNm.

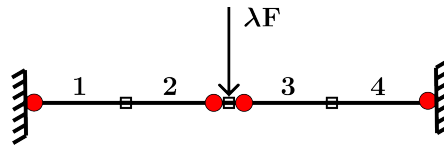


Figura 5.21: Viga biempotrada, rótulas plásticas de ablandamiento.

Resultados numéricos

El material plastifica con endurecimiento, al superarse el momento último (M_u) en los puntos de integración de cada elemento, se activan las rótulas plásticas de ablandamiento. En el modelo, considerando la simetría geométrica y mecánica (geometría simétrica, carga centrada y empotramientos perfectos), resulta que las 4 rótulas se activan en forma simultánea, y la estructura deviene en un mecanismo.

- Elemento 1: rótula en el punto de integración izquierdo.
- Elemento 2: rótula en el punto de integración derecho.
- Elemento 3: rótula en el punto de integración izquierdo.
- Elemento 4: rótula en el punto de integración derecho.

Conclusiones preliminares

Los resultados numéricos muestran que las rótulas se activan en 4 elementos del modelo, en distintos puntos de integración en cada caso, lo cual es correcto. Dado que la estructura alcanza el momento último de plastificación (M_u) en tres puntos en forma simultánea, es por esa razón, que se deben utilizar al menos 4 elementos de Euler-Bernoulli con discontinuidad de rotación (una vez activada una rótula en un punto de integración de un elemento, luego en ese elemento no se pueden activar más rótulas).

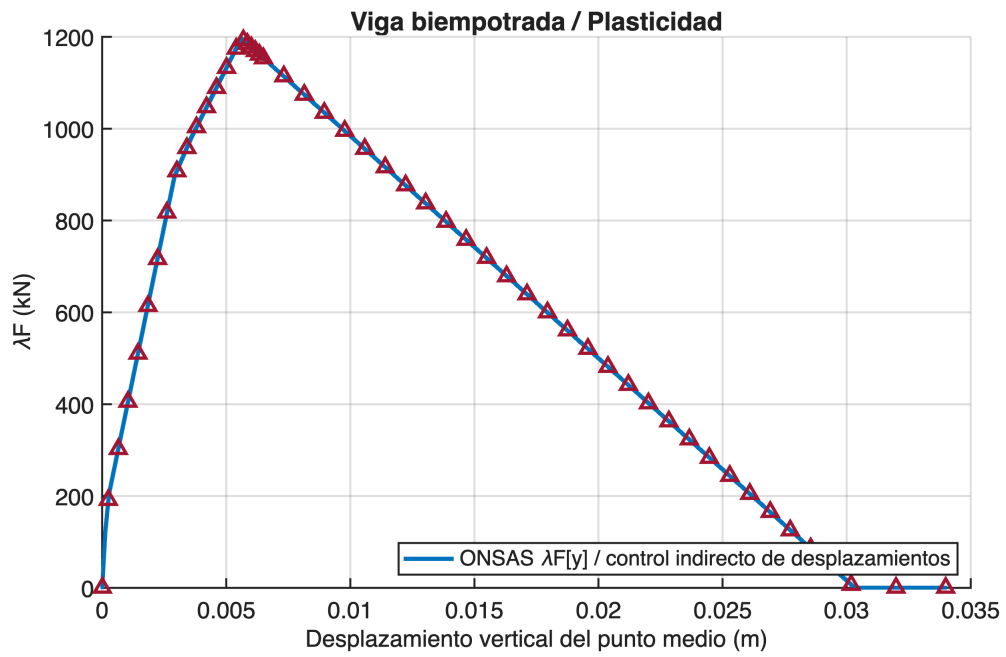


Figura 5.22: Viga biempotrada, plasticidad (factor de carga/desplazamiento).

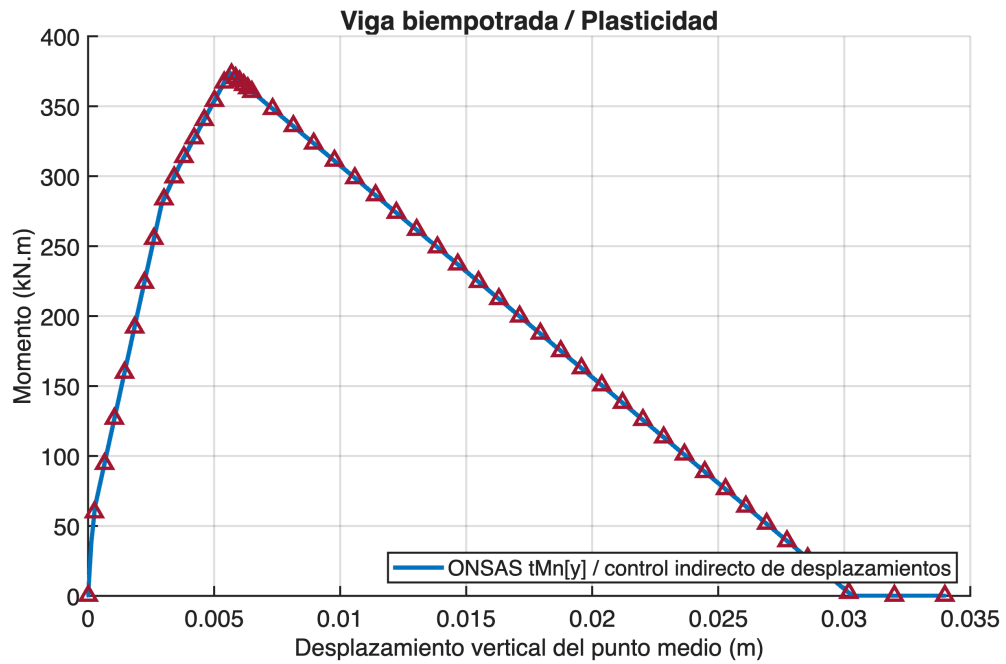


Figura 5.23: Viga biempotrada (momento/desplazamiento).

5.2.4. Ejemplo vi: pórtico de dos pisos

Presentación del problema

En esta sección se considera un problema de pórticos basado en un problema resuelto en (Jukić et al. 2013). El pórtico se muestra en la Figura 5.24 y se modela con 32 elementos del tipo Euler-Bernoulli con discontinuidad de rotación. La altura de cada piso es 2 m, y la longitud de las vigas es 3,5 m. Se consideran los siguientes parámetros para el modelo material: módulo de elasticidad $E = 28,6 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$, inercia $I = 0,0016 \text{ m}^4$. Para el comportamiento no lineal material dado por la Figura 4.4, en el caso de las vigas: $M_c = 30 \text{ kNm}$, $M_y = 150 \text{ kNm}$, $M_u = 170 \text{ kNm}$, $K_{h1} = 11.190 \text{ kNm}^2$, $K_{h2} = 137 \text{ kNm}^2$, $K_s = -1.310 \text{ kNm}$, y para los pilares: $M_c = 100 \text{ kNm}$, $M_y = 245 \text{ kNm}$, $M_u = 265 \text{ kNm}$, $K_{h1} = 12.450 \text{ kNm}^2$, $K_{h2} = 195 \text{ kNm}^2$, $K_s = -2.410 \text{ kNm}$. Estos parámetros se corresponden con los de secciones de hormigón doblemente armadas con $4 \phi 20$ a nivel superior e inferior (Pham, 2009) (con recubrimiento 4 y 3 cm para viga y columna, respectivamente).

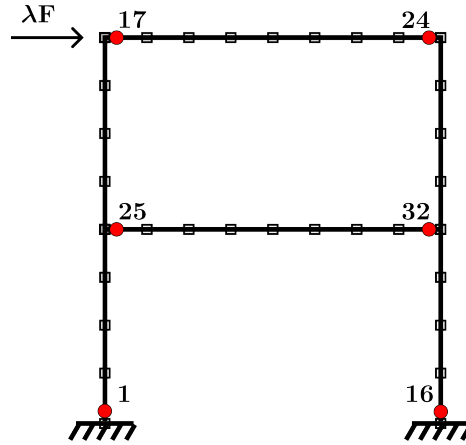


Figura 5.24: Pórtico, rótulas de ablandamiento.

Resultados numéricos

La carga es aplicada según una etapa con λ decreciente, y luego una etapa creciente, hasta producir completamente el colapso. Se controla el desplazamiento del nodo 9 (izquierdo del elemento 17), y se aplica el método arc-length con el predictor de trabajo incremental implementado para esta tesis. En caso de no aplicar este predictor no se logra recorrer la curva de equilibrio. En la Tabla 5.1 se muestra la activación de 6 rótulas de ablandamiento, en los elementos 32, 24, 16, 1, 25 y 17 —producida en ese orden—. El colapso de la estructura ocurre luego de la activación de la cuarta rótula,

Rótula	Elemento	Punto de Integración	Desplazamiento u_h (m)	Fuerza λF (kN)
1	32	3	-0,01682	195,45
2	24	3	-0,00618	278,99
3	16	3	0,00580	295,64
4	1	1	0,00593	295,72
5	25	1	0,03708	282,67
6	17	1	0,05352	273,85

Tabla 5.1: Pórtico de dos pisos, rótulas de ablandamiento, carga de colapso.

en el elemento 1, en el primer punto de integración del elemento. En la Figura 5.25a, se muestra la activación de las rótulas y el colapso de la estructura. En la Figura 5.25b, 5.26a, 5.26b, se muestra la gráfica el momento en el primer punto de integración, donde se activa cada una de las rótulas, en los elementos 1, 25 y 17, respectivamente.

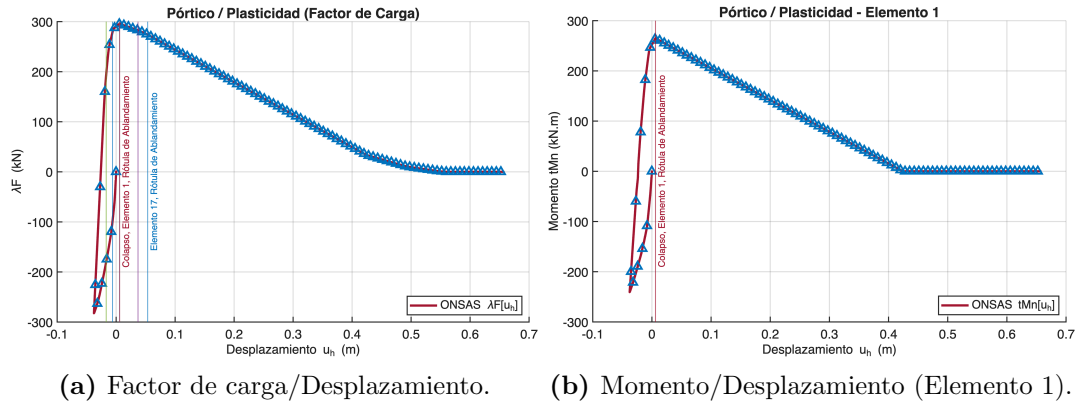


Figura 5.25: Pórtico de dos pisos, análisis post-colapso

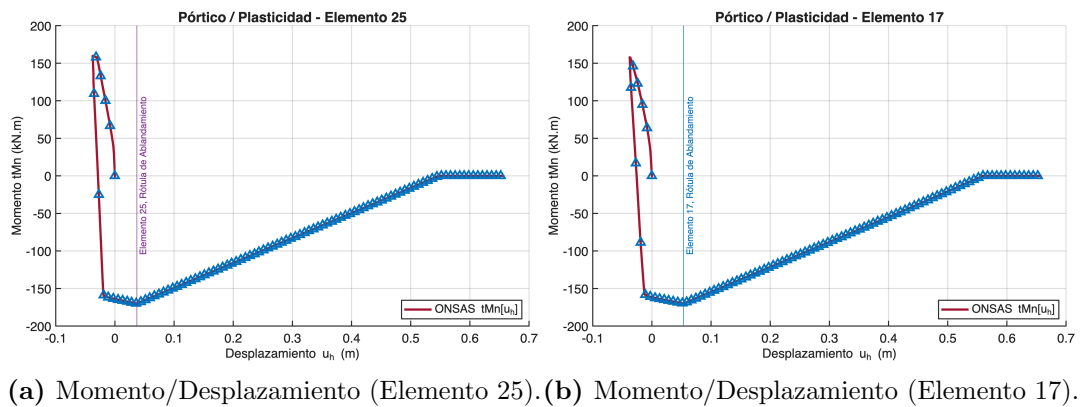


Figura 5.26: Pórtico de dos pisos, momento/desplazamiento.

Conclusiones preliminares

La carga última de la estructura es 295,72 kN, y ocurre con un desplazamiento pequeño 5,93 mm, debido a que la estructura pierde ductilidad con el ciclo de carga a la que es sometida —inicialmente el factor de carga es negativo y luego se invierte el sentido—. En caso de no aplicarse un ciclo de carga, el colapso estructural ocurre con una carga última de 296,71 kN y con un desplazamiento de 4,78 cm. Este ejemplo, muestra que en situaciones de inversión del sentido de la carga, cuando ocurren ciclos de carga, el colapso puede ocurrir próximo al dominio elástico, de forma frágil, dado que el dominio elástico se expande.

5.2.5. Ejemplo vii: pórtico de Darvall-Mendis

Presentación del problema

En este ejemplo se resuelve el pórtico que fue estudiado por primera vez por Darvall y Mendis (1985) y luego por Armero y Ehrlich (2006), Dujc et al. (2010) y Wackerfuß (2008), ver Figura 5.27. No se considera plasticidad con endurecimiento del material, sí se considera el ablandamiento plástico de las rótulas. Los parámetros para los pilares son: $M_u = 158,18$ kNm, y para las vigas: $M_u = 169,48$ kNm, el módulo de ablandamiento de las rótulas es igual a $K_s = a 10 EI / (0,55 L)$, siendo $E = 20,68 10^6$ kNm², $I = 0,001$ m⁴ y $L = 3,048$ m. El modelo consta de 8 elementos de Euler-Bernoulli con discontinuidad de rotación. Para resolver las ecuaciones no lineales —con la matriz tangente singular—, se aplica el método de control indirecto de desplazamientos (Jirásek y Bažant, 2002).

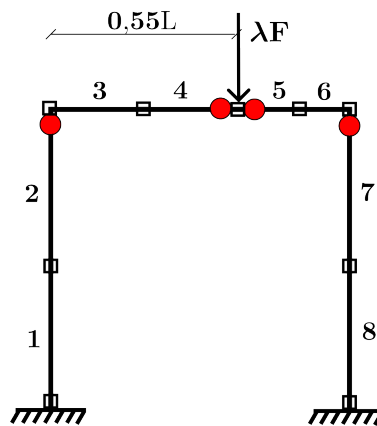


Figura 5.27: Pórtico Darvall-Mendis, rótulas de ablandamiento.

Resultados numéricos

En el caso de plasticidad perfecta, cuando las rótulas plásticas no tienen ablandamiento ($a=0$), la primera rótula se activa en el punto de aplicación de la carga, en los elementos 4 y 5 (nodo 5), y se corresponde con un desplazamiento vertical $u_v = -0,496$ cm y un factor de carga $\lambda F = 336,994$ kN —resultados que coinciden con Armero y Ehrlich (2006) y Darvall y Mendis (1985)—. La segunda rótula se produce en el elemento 7 (nodo 7), y la tercera en el elemento 2 (nodo 3), esta última termina generando un mecanismo local, y por lo tanto produciendo el colapso de la estructura.

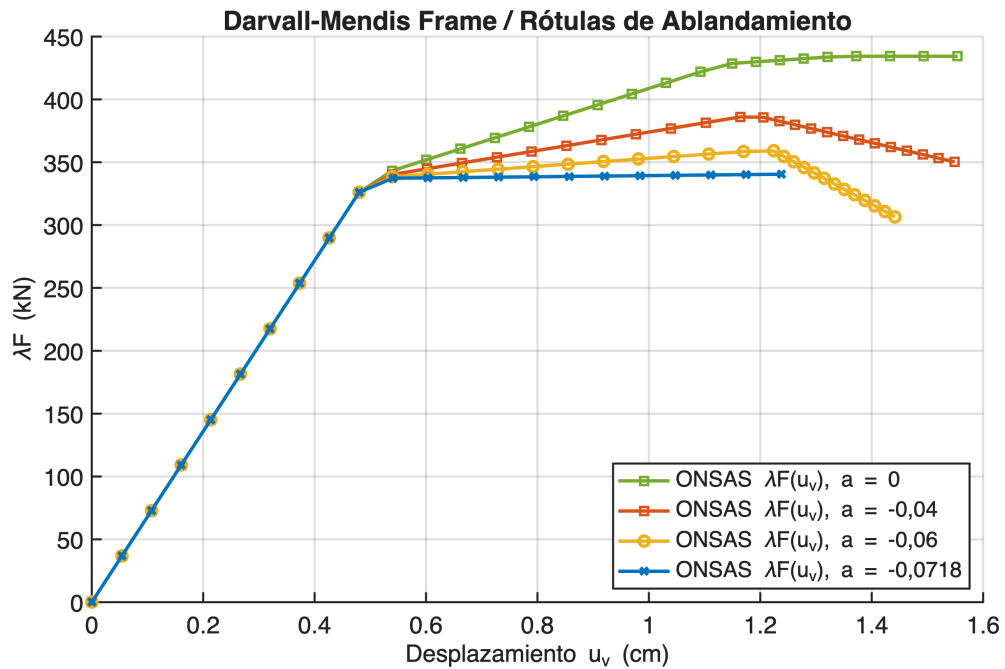


Figura 5.28: Pórtico Darvall-Mendis, rótulas de ablandamiento, carga de colapso.

a	Rótula	Darvall y Mendis u_v (cm) λF (kN)	Armero y Ehrlich u_v (cm) λF (kN)	Brank et al. u_v (cm) λF (kN)	ONSAS — Softening Hinges u_v (cm) λF (kN)
0	1	0,50 336	0,50 337	0,50 336	0,49 336
	2	1,14 427	1,14 428	1,13 427	1,14 428
	3	1,34 433	1,34 434	1,34 434	1,34 434
-0,04	1	0,50 336	0,50 337	0,50 336	0,49 336
	2	1,14 387	1,18 388	1,19 383	1,19 388
-0,06	1	0,50 336	0,50 337	0,50 336	0,49 336
	2	1,19 357	1,22 358	1,23 350	1,22 360
-0,0718	1	0,50 336	0,50 337	0,50 336	0,49 336

Tabla 5.2: Pórtico de Darvall-Mendis, rótulas de ablandamiento, carga de colapso.

Conclusiones preliminares

La carga última de colapso de la estructura depende del módulo plástico de ablandamiento de las rótulas. Considerando $a = -0,0718$, se reduce la carga de colapso en 22,58% respecto de $a = 0$, esto muestra la importancia de modelar en forma correcta las rótulas de ablandamiento. En los ejemplos resueltos con ONSAS, se obtiene la secuencia de activación de las rótulas de ablandamiento, los desplazamientos y fuerzas correspondientes a la activación de cada rótula, y la carga última de colapso. Se comparan los resultados con la literatura de referencia, en particular, coinciden con los obtenidos por Armero y Ehrlich (2006) y Darvall y Mendis (1985), lo cual permite validar la implementación.

Capítulo 6

Conclusiones

*How often have I said to you that when you have eliminated the impossible
whatever remains, however improbable, must be the truth?*

The Sign of Four, 1890
Sir Arthur Conan Doyle

En esta tesis se describe en detalle una formulación para el modelado de rótulas plásticas de ablandamiento, en vigas y pórticos planos. La formulación utilizada en (Armero y Ehrlich, 2006; Ehrlich y Armero, 2005; Jukić et al. 2013; Simo et al. 1993), se basa en el uso de un elemento finito de Euler-Bernoulli con discontinuidad fuerte de rotación y leyes elastoplásticas para las fases de endurecimiento y ablandamiento. En este trabajo, se aplican métodos numéricos para el control de desplazamiento, y se obtienen resultados de su aplicación en problemas con cargas cíclicas, y en el análisis post-colapso de pórticos.

La formulación descrita fue implementada en código abierto como extensión del software ONSAS, representando una contribución a la mejora del acceso a software de diseño estructural. Se resuelven ejemplos numéricos de la literatura, cuyos resultados permiten validar la implementación y mostrar el potencial de su aplicación.

Además del elemento finito de Euler-Bernoulli con discontinuidad fuerte de rotación, se implementó la medida de deformación logarítmica, y los predictores del método arc-length de trabajo incremental y del determinante de la matriz de rigidez tangente.

A través de la resolución de ejemplos, se verifica que en los casos en que es necesario considerar la respuesta de ablandamiento, los métodos clásicos sobreestiman la carga última de colapso, al considerar plasticidad perfecta, sin endurecimiento, ni ablandamiento, y suponer que el colapso ocurre cuando la estructura deviene en un mecanismo —al final de una sucesión de activaciones de rótulas plásticas perfectas—.

En los ejemplos de análisis post-colapso de pórticos, se muestra que en los casos en que ocurre ablandamiento, para calcular en forma precisa la carga de colapso se requiere considerar las rótulas plásticas de ablandamiento que se generan como fallas localizadas. La implementación realizada permite conocer la secuencia de activación de las rótulas plásticas, la ubicación de las mismas, y la redistribución de las cargas en la estructura.

En los ejemplos de vigas y pórticos, resueltos con la extensión de ONSAS, se obtiene la secuencia de activación de las rótulas de ablandamiento, los desplazamientos y las fuerzas correspondientes a la activación de cada rótula —incluyendo la carga última de colapso—.

Se verifica que la carga última de colapso de la estructura depende del módulo plástico de ablandamiento de las rótulas. Se comparan los resultados con la literatura de referencia, en particular, en el ejemplo del pórtico de Darvall-Mendis, los resultados coinciden con los obtenidos por Armero y Ehrlich (2006) y Darvall y Mendis (1985).

Sobre los resultados numéricos

En el ejemplo i del reticulado de von Mises, se valida la implementación de la medida de deformación logarítmica rotada. Se compara la solución obtenida con ONSAS con la solución analítica. Aplicando la medida de deformación de ingeniería rotada, se comparan los resultados de ONSAS con los resultados que se obtienen con el software ADINA. Con la implementación del control de desplazamientos se logra la convergencia en una cantidad de iteraciones esperable (promedio de 2 iteraciones).

En el ejemplo ii se resuelve el domo de Schwedler, problema presente en la literatura, se analiza el comportamiento elastoplástico y el colapso estructural geométrico —sin falla del material y con no linealidad geométrica—. Se verifica que la implementación permite resolver problemas de escala mayor (97 nodos, 264 elementos), y con geometrías tridimensionales. Los resultados se validan con el software ADINA. En ONSAS se utiliza la medida de deformación logarítmica rotada, y para la comparación con ADINA se aplica la medida de ingeniería rotada. Los resultados coinciden con los obtenidos con ADINA.

En el ejemplo iii, se considera una viga ménsula y se reproducen resultados de la literatura (Jukić et al. 2013), como primera validación de la implementación del elemento de Euler-Bernoulli con discontinuidad fuerte de rotación. Se considera por lo tanto, plasticidad con endurecimiento y la activación de rótulas plásticas de ablandamiento. Se observa que se verifica la limitación de la localización, al refinar la malla de elementos finitos la solución converge. Además, en este ejemplo, se resuelve el caso de cargas cíclicas, y se obtiene la carga de colapso que ocurre cerca del

dominio elástico —resultado que está de acuerdo a lo esperado, dado que el dominio elástico se expande—.

En el ejemplo iv, se analiza una viga empotrada apoyada, y se comparan los resultados numéricos (utilizando el elemento de Euler-Bernoulli con discontinuidad) con los obtenidos por los métodos clásicos de la carga última de colapso. Se verifica que los métodos clásicos de análisis límite sobreestiman la carga última con respecto al modelo que considera rótulas plásticas de ablandamiento.

En el ejemplo v de la viga biempotrada con carga puntual en el punto medio del vano, se muestra la activación simultánea de las rótulas plásticas, de acuerdo a lo esperado, el momento último de plastificación M_u se alcanza en forma simultánea en los empotramientos y en el punto medio del vano. El colapso estructural ocurre al formarse un mecanismo, y se estudia el comportamiento post-colapso de la estructura hasta la pérdida total de capacidad resistente.

En el ejemplo vi se considera un pórtico de 2 pisos y se muestra el comportamiento post-colapso de la estructura con la secuencia de activación de las rótulas de ablandamiento. Para poder recorrer la curva de solución, se aplica el método arc-length con el predictor de trabajo incremental implementado para esta tesis. En este ejemplo, se observa que en situaciones de inversión del sentido de la carga —por ejemplo: en ciclos de carga—, el colapso puede ocurrir de forma frágil, dado que el dominio elástico se expande.

En el ejemplo vii se estudia el pórtico de Darvall-Mendis, donde se muestra la diferencia en el cálculo de la carga de colapso respecto al método clásico de análisis límite, que asume plasticidad perfecta, y rótulas sin ablandamiento. Considerando el parámetro del módulo de ablandamiento de las rótulas $a = -0,0718$, se reduce la carga de colapso en 22,58 % respecto de $a = 0$ (sin ablandamiento en las rótulas), esto muestra la importancia de modelar en forma correcta las rótulas de ablandamiento —el valor de la carga de colapso depende del módulo de ablandamiento de las rótulas—.

Líneas de trabajo futuro

Dada la carga computacional involucrada en la aplicación de los algoritmos, es necesario utilizar programación paralela (OpenMPI, OpenMP, CUDA, etc). En trabajos posteriores, se considera reescribir los códigos escritos en MATLAB en lenguajes como FORTRAN o C++, y así poder utilizar las bibliotecas de computación paralela. Además, se considera implementar control automático para la resolución de las ecuaciones no lineales, aplicando métodos de control de desplazamiento automáticos, tanto en la elección del paso, como en la elección automática de la variante misma del método.

Entre los trabajos futuros se incluye el estudiar con mayor detalle problemas donde se apliquen ciclos de carga, con plasticidad con endurecimiento, y con activación de rótulas plásticas de ablandamiento. Por ejemplo: en problemas dinámicos, y en particular en el diseño sísmico de estructuras por carga última de colapso.

Se propone también la generalización de los métodos numéricos para el análisis post-colapso de pórticos tridimensionales y el estudio de la estabilidad numérica y los métodos de control de desplazamiento para los casos de inversión de carga —con activación de rótulas de ablandamiento—.

Otras líneas de investigación son la implementación computacional de la plasticidad con endurecimiento cinemático, y la extensión a otros tipos de elementos finitos de 2 y 3 dimensiones para el modelado de placas, cáscaras y cuerpos sólidos.

En referencia a la validación de los modelos numéricos, se considera la construcción de modelos experimentales a escala, para el modelado de las rótulas, y la determinación experimental de los módulos de ablandamiento de las mismas.

Publicaciones realizadas

En el marco del trabajo de esta tesis y utilizando parte de su contenido, se realizó la siguiente publicación de artículo completo presentado en el XLI Congreso Argentino de Mecánica Computacional:

- S. A. Merlino Chiozza, J. M. Pérez Zerpa, Implementación en Código Abierto de un Método para el Análisis Post-Colapso de Pórticos, *Asociación Argentina de Mecánica Computacional, XLI Congreso Argentino de Mecánica Computacional-MECOM*, Buenos Aires, 2025.

Referencias bibliográficas

- Ahrens, J., Geveci, B., y Law, C. (2005). ParaView: An End-User Tool for Large Data Visualization. <https://www.sciencedirect.com/book/9780123875822/visualization-handbook>
- Appell, P., y Dautheville, S. (1910). *Précis de Mécanique Rationnelle* (Gauthier-Villars). Bureau des Longitudes L'École Polytechnique.
- Armero, F., y Ehrlich, D. (2004). An analysis of strain localization and wave propagation in plastic models of beams at failure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.07.015>
- Armero, F., y Ehrlich, D. (2006). Numerical modeling of softening hinges in thin Euler-Bernoulli beams. *Computers and Structures*, 84. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.11.010>
- Baker, J., Horne, M., y Heyman, J. (1956). *The Steel Skeleton: Volume 2, Plastic Behaviour and Design*. Cambridge University Press.
- Bathe, K.-J. (2025). ADINA. <https://www.adina.com>
- Bažant, Z. P. (2002). *Scaling of Structural Strength*. Hermes Penton Science.
- Bažant, Z. P. (2003a). Asymptotic Matching Analysis of Scaling of Structural Failure Due to Softening Hinges. I: Theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 129. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9399\(2003\)129:6\(641\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9399(2003)129:6(641))
- Bažant, Z. P. (2003b). Asymptotic Matching Analysis of Scaling of Structural Failure Due to Softening Hinges. II: Implications. *Journal of Engineering Mechanics*, 129. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9399\(2003\)129:6\(651\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9399(2003)129:6(651))
- Bažant, Z. P., y Lin, F.-B. -. (1988). Non-local yield limit degradation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26. <https://doi.org/10.1002/nme.1620260809>
- Bažant, Z. P., y Pijaudier-Cabot, G. (1988). Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 55. <https://doi.org/10.1115/1.3173674>

- Bazzano, J. B., y Zerpa, J. P. (2017). *Introducción al Análisis No Lineal de Estructuras*. Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.
- Benvenuto, E. (1990a). *An Introduction to the History of Structural Mechanics, Part I: Statics and Resistance of Solids* (Vol. 1). Springer-Verlag.
- Benvenuto, E. (1990b). *An Introduction to the History of Structural Mechanics: Part II: Vaulted Structures and Elastic Systems* (Vol. 2). Springer-Verlag.
- Billington, D. P. (2000). The Revolutionary Bridges of Robert Maillart. *Scientific American*, 283. <https://doi.org/10.1038/scientificamerican0700-84>
- Bonet, J., y Wood, R. D. (2008). *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press.
- Bronshtein, I., Semendyayev, K., Musiol, G., y Mühlig, H. (2015). *Handbook of Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-46221-8>
- Canelas, A. (2022). *Elasticidad, apuntes del curso Elementos Estructurales Elásticos*. Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.
- Canelas, A. (2023). *Elementos Finitos, apuntes del curso*. Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.
- Cocchetti, G., y Maier, G. (2003). Elastic-plastic and limit-state analyses of frames with softening plastic-hinge models by mathematical programming. *International Journal of Solids and Structures*, 40. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00363-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00363-9)
- Coleman, J., y Spacone, E. (2001). Localization Issues in Force-Based Frame Elements. *Journal of Structural Engineering*, 127. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(2001\)127:11\(1257\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(2001)127:11(1257))
- Crisfield, M. A. (1981). A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through". *Computers and Structures*, 13. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90108-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90108-5)
- Crisfield, M. A. (1991). *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures* (Reprinted April 2000, Vol. 1 Essentials). John Wiley; Sons, Ltd.
- Dahlquist, G., y Björck, Å. (2008). *Numerical Methods in Scientific Computing* (Vol. 1). SIAM (Society for Industrial; Applied Mathematics).
- Darvall, P. L., y Mendis, P. A. (1985). Elastic-Plastic-Softening Analysis of Plane Frames. *Journal of Structural Engineering*, 111. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(1985\)111:4\(871\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(1985)111:4(871))

- de Souza Neto, E., y Feng, Y. T. (1999). On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and 'snap-backs'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 179.
- de Souza Neto, E., Peric, D., y Owens, D. (2008). *Computational Methods for Plasticity*. John Wiley; Sons, Ltd.
- de Zúñiga, E. G. (1924). *Lecciones de Historia de las Matemáticas* (FHCE). Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Universidad de la República.
- Dujc, J., Brank, B., y Ibrahimbegovic, A. (2010). Multi-scale computational model for failure analysis of metal frames that includes softening and local buckling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.09.003>
- Dunne, F., y Petrinic, N. (2005). *Introduction to Computational Plasticity*. Oxford University Press.
- Eaton, J. W., Bateman, D., Hauberg, S., y Wehbring, R. (2025). *GNU Octave version 10.2.0 manual: a high-level interactive language for numerical computations*. <https://www.gnu.org/software/octave/doc/v10.2.0/>
- Ehrlich, D., y Armero, F. (2005). Finite element methods for the analysis of softening plastic hinges in beams and frames. *Computational Mechanics*, 35. <https://doi.org/10.1007/s00466-004-0575-z>
- Felippa, C. (2000). *Advanced Finite Element Methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences; Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder.
- Felippa, C. (2004). *Introduction To Finite Element Methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences; Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder.
- Galilei, G. (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (Elzevir, Ed.). Leyden.
- Geuzaine, C., y Remacle, J. F. (2009). Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79. <https://doi.org/10.1002/nme.2579>
- Greco, M., Gesualdo, F. A. R., Venturini, W. S., y Coda, H. B. (2006). Nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42.

- Greco, M., y Ferreira, I. P. (2009). Logarithmic strain measure applied to the nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45.
- Gurtin, M. E. (1981). *An introduction to continuum mechanics* / Morton E. Gurtin (Department of Mathematics, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania). Academic Press.
- Heyman, J. (2007). *Teoría, historia y restauración de Estructuras de fábrica* (Reverte, Ed.). Instituto Juan de Herrera.
- Hill, R. (1998). *The Mathematical Theory Of Plasticity*. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198503675.001.0001>
- Hillerborg, A. (1990). Fracture mechanics concepts applied to moment capacity and rotational capacity of reinforced concrete beams. *Engineering Fracture Mechanics*, 35. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(90\)90201-Q](https://doi.org/10.1016/0013-7944(90)90201-Q)
- Ibrahimbegovic, A. (2009). *Nonlinear Solid Mechanics*. <https://doi.org/10.1007/978-90-481-2331-5>
- Jaberi, V. (2025). Collapse-based seismic design method. *Advances in Structural Engineering*, 28(5), 895-918. <https://doi.org/10.1177/13694332241291249>
- Jirásek, M., y Bažant, Z. P. (2002). *Inelastic analysis of structures*. John Wiley & Sons.
- Jukić, M., Brank, B., y Ibrahimbegović, A. (2013). Embedded discontinuity finite element formulation for failure analysis of planar reinforced concrete beams and frames. *Engineering Structures*, 50.
- Krishnamoorthy, C. S., Ramesh, G., y Dinesh, K. U. (1996). Post-buckling analysis of structures by three-parameter constrained solution techniques. *Finite Elements in Analysis and Design*, 22.
- Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures, From Arch Analysis to Computational Mechanics*. Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, Berlin.
- Lasry, D., y Belytschko, T. (1988). Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(88\)90059-5](https://doi.org/10.1016/0020-7683(88)90059-5)
- Lemaitre, J., y Chaboche, J.-L. (1990). *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press.
- Lemoine, B. (2006). *The Eiffel Tower* (T. Verlag, Ed.). Taschen GmbH, Hohenzollernring 53, D-50672 Colognen.
- Lubliner, J. (2006). *Plasticity Theory*. University of California at Berkeley.

- Luenberger, D. G., y Ye, Y. (2008). *Linear and Nonlinear Programming*. Springer Publishing Company, Incorporated.
- Maier, G. (1971). On Structural Instability Due to Strainsoftening. En *Instability of Continuous Systems*. https://doi.org/10.1007/978-3-642-65073-4_58
- MathWorks. (2025). MATLAB Version: 25.2.0.3042426 (R2025b) Update 1. <https://www.mathworks.com>
- Nouri, Y., Jouneghani, H. G., Haghollahi, A., Memarzadeh, P., y Hemati, E. (2025). Experimental and numerical study of seismic performance and failure mechanisms of multi-story elliptic and Quasi-X braced resisting frames. *Results in Engineering*, 26, 105657. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.rineng.2025.105657>
- Oñate, E. (2010). *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 1: Basis and Solids*. Springer Netherlands.
- Oñate, E. (2013). *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 2: Beams, Plates and Shells*. Springer Netherlands.
- Pascon, J. P. (2016). Nonlinear analysis of hyperelastoplastic truss-like structures. *Archive of Applied Mechanics*, 86.
- Pastor, J. R., y Babini, J. (1951). *Historia de la Matemática* (2013.^a ed., Vol. 2). gedisa editorial.
- Pérez, J. M. Z., Pena, M. C. V., Sosa, J. V., Villié, A., Forets, M., Battini, J. M., y García, J. B. B. (2025). ONSAS: an Open Nonlinear Structural Analysis Solver for GNU-Octave/MATLAB. <https://github.com/ONSAS/ONSAS>
- Pham, B. H. (2009, diciembre). *Stress-resultant models for optimal design of reinforced-concrete frames* [Theses]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan. <https://theses.hal.science/tel-00538958>
- Read, W. T. J. (1953). *Dislocations in Crystals*. McGraw-Hill.
- Riks, E. (1972). The application of newton's method to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 39. <https://doi.org/10.1115/1.3422829>
- Riks, E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, 15. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(79\)90081-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(79)90081-7)
- Sanjayan, J. G., y Darvall, P. L. (1995). Singularities in RC Beam Elements with Finite-Length Hinges. *Journal of Structural Engineering*, 121. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(1995\)121:1\(39\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(1995)121:1(39))

- Simo, J. C., Oliver, J., y Armero, F. (1993). An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12. <https://doi.org/10.1007/BF00372173>
- Simo, J. C., y Hughes, T. J. R. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag New York, Inc.
- Wackerfuß, J. (2008). Efficient finite element formulation for the analysis of localized failure in beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73. <https://doi.org/10.1002/nme.2116>
- Wempner, G. A. (1971). Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(71\)90038-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(71)90038-2)
- Zienkiewicz, O. C., y Taylor, R. L. (2005). *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics* (Sixth Edition). Elsevier.

APÉNDICES

Apéndice 1

Soluciones analíticas

1.1. Reticulado de von Mises

Aplicando simetría, se considera la estructura equivalente mostrada en la Figura 1.1. Se determina en forma analítica la fuerza F en función del desplazamiento vertical, en cada tramo de carga —tramos elásticos y plásticos—. Estructura con barras de sección transversal uniforme de área A , módulo de elasticidad E , módulo de endurecimiento plástico K y tensión de fluencia σ_{fl} . La longitud desplazada de las barras es l_n y la longitud inicial es l_0 . Se considera la medida de deformación logarítmica rotada.

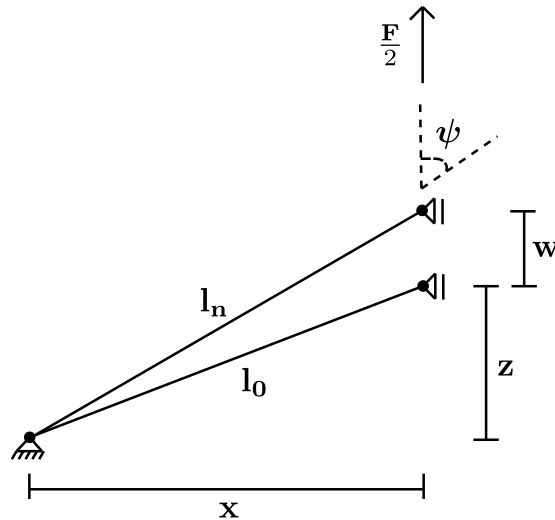


Figura 1.1: Estructura simétrica (von Mises).

Tramo i (elástico) El tramo I está dado por las deformaciones y tensiones en las que no se desarrolla deformación plástica. Se considera la relación lineal tensión-deformación y mediante equilibrio se obtiene la siguiente relación:

$$F = 2A \frac{z+w}{l_n} E \ln \left(\frac{l_n}{l_0} \right), \quad (1.1)$$

donde F representa el valor de fuerza externa total aplicada en el nodo C, y l_0 y l_n , las longitudes de la barra sin deformar y deformada, respectivamente, donde $l_n = \sqrt{(z+w)^2 + x^2}$. Esta solución es válida hasta que la tensión alcanza el valor de σ_{fl} .

Tramo ii (plástico) Una vez superado el valor σ_{fl} , comienza a desarrollarse la deformación plástica,

$$\epsilon = \epsilon_{el.} + \epsilon_{pl.}, \quad (1.2)$$

$$\epsilon = \frac{\sigma_{fl}}{E} + \frac{E+K}{EK} (\sigma - \sigma_{fl}), \quad (1.3)$$

$$\cos \psi = \frac{z+w}{l_n}, \quad (1.4)$$

$$\sigma \cos \psi = \frac{F}{2A}, \quad (1.5)$$

$$\epsilon = \ln(\lambda) = \ln \left(\frac{l_n}{l_0} \right), \quad (1.6)$$

$$\ln \left(\frac{\sqrt{(z+w)^2 + x^2}}{l_0} \right) = \frac{-\sigma_{fl}}{E} + \frac{E+K}{EK} \left(\frac{F}{2A} \frac{l_n}{z+w} + \sigma_{fl} \right), \quad (1.7)$$

$$\ln \left(\frac{\sqrt{(z+w)^2 + x^2}}{l_0} \right) = \frac{-\sigma_{fl}}{E} + \frac{E+K}{EK} \left(\frac{F}{2A} \frac{\sqrt{(z+w)^2 + x^2}}{z+w} + \sigma_{fl} \right), \quad (1.8)$$

$$F = 2A \frac{z+w}{l_n} \left[\left(\ln \left(\frac{l_n}{l_0} \right) + \frac{\sigma_{fl}}{E} \right) \frac{EK}{E+K} - \sigma_{fl} \right]. \quad (1.9)$$

Tramo iii (elástico) En este tramo la deformación plástica se mantiene constante y sólo hay variación de deformación elástica,

$$F = 2A \frac{w}{l_n} \cdot \left[E(\epsilon - \epsilon_{\min}) - \sigma_{fl} + \frac{EK}{E+K} \left(\epsilon_{\min} - \frac{\sigma_{fl}}{E} \right) \right]. \quad (1.10)$$

Ver Figura 1.2, donde se muestra $\epsilon_{\min}$.

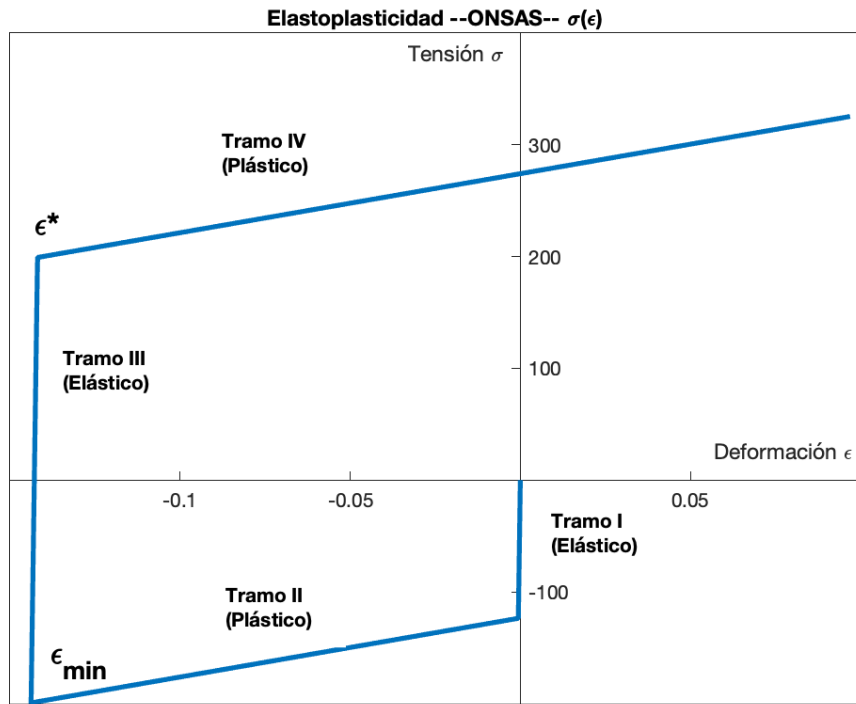


Figura 1.2: Tensión σ - deformación ϵ .

Tramo iv (plástico)

$$F = 2A \frac{w}{l_n} \cdot \left[\sigma_{fl} - \frac{EK}{E+K} \left(\epsilon_{\min} - \frac{\sigma_{fl}}{E} \right) + \frac{EK}{E+K} (\epsilon - \epsilon^*) \right]. \quad (1.11)$$

Ver Figura 1.2, donde se muestra ϵ^* .