

TRABAJO MONOGRÁFICO

Teoría geométrica de grupos y la conjetura de Diestel-Leader

Clara Herrera Bazzani

Diciembre 2025

Orientador:

Matilde Martínez

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
MONTEVIDEO, URUGUAY

Índice general

1. Introducción	3
2. Elementos de teoría geométrica de grupos	7
2.1. Métrica de palabras y grafos de Cayley	8
2.1.1. Construcción del grafo de Cayley	13
2.2. Lema fundamental de la teoría geométrica de grupos	16
3. Espacio de fines	21
3.1. Fines de un grupo	26
4. Construcción $DL(m, n)$	31
4.1. Árboles y función de Busemann	31
4.2. Definición $DL(m, n)$	33
4.3. Función distancia	35
5. Geometría del grafo	39
5.1. Representación de puntos de DL con tres coordenadas	39
5.2. Geodésicas	41
5.3. Medida de volumen	45
6. Conjetura de Diestel-Leader	51
6.1. Espacio de fines de DL	52
6.2. $Isom(DL)$	54
7. Esquema de la prueba de Eskin-Fischer-Whyte	57
7.1. Caracterización de $QI(DL)$	57
7.2. Esquema prueba EFW	61

Capítulo 1

Introducción

La teoría geométrica de grupos es un área que se encarga de explorar, clasificar y estudiar los grupos con herramientas geométricas, enriqueciendo particularmente el estudio de los grupos infinitos.

Todo grupo finitamente generado tiene una geometría intrínseca: para cada conjunto de generadores se define una métrica de palabras asociada. Para un mismo grupo, dados dos generadores distintos y sus métricas respectivas, los espacios resultan casi-isométricos.

El estudio de los espacios y propiedades geométricas a menos de casi-isometrías es lo que llamamos geometría a gran escala, puesto que la noción de casi-isometría es más débil que la de isometría, y los cambios pequeños o en regiones acotadas del espacio no son detectados.

Para el estudio geométrico de los grupos una de las herramientas más importantes son los grafos de Cayley asociados. Se construyen a partir de un conjunto generador simétrico y tienen definida una métrica usual de caminos.

Resultan una representación muy fiel de los grupos, pues son casi-isométricos al grupo con la métrica del generador correspondiente. Además, para estos espacios se tienen herramientas combinatorias de los grafos que también se pueden aplicar al estudio de la geometría.

Cabe preguntarse si todo grafo es casi-isométrico a un grafo de Cayley.

Una propiedad que se desprende directamente de su construcción es la de ser espacios *homogéneos* (el grupo de isometrías actúa transitivamente) ya que heredan la acción transitiva por isometrías del grupo en sí mismo.

Hopf en 1943 prueba que el espacio de fines de un grupo, una característica geométrica invariante por casi-isometrías, solo puede tener 0, 1, 2 o infinitos puntos.

En [Woe91] se prueba que los grafos con crecimiento polinomial resultan casi-isométricos a una clase particular de grupos.

Luego, en ese mismo trabajo el autor se plantea la siguiente pregunta:
¿Existe un grafo homogéneo que no sea casi-isométrico a ningún grafo de Cayley?

En el año 2001 Diestel y Leader [DL01] presentan un grafo infinito DL , homogéneo, con un único fin y con crecimiento exponencial, junto con la conjetura de que no es casi-isométrico a un grafo de Cayley.

Eskin, Fischer y Whyte construyen en una serie de publicaciones entre 2007 y 2012 ([EFW12], [EFW07]) una técnica denominada *coarse differentiaion* que les permite mostrar que el grupo soluble $Sol(n, m)$ así como $DL(m, n)$ en los casos $m \neq n$ no son casi-isométricos a ningún grafo de Cayley.

En este trabajo presentamos en detalle algunos resultados base de la teoría geométrica de grupos. Damos una descripción del grafo presentado por Diestel y Leader incluyendo sus propiedades geométricas más importantes y por último hacemos un esquema de la prueba presentada por Eskin, Fischer y Whyte.

La familia de métricas de palabras definidas para un grupo es una familia de métricas discretas, por lo que la geometría que podemos extraer es más bien escasa. Resulta útil encontrar espacios métricos continuos, geodésicos, que representen estos grupos, es decir, que sean casi-isométricos a ellos.

En el capítulo 2 se introducen los conceptos de la geometría a gran escala y su aplicación a los grupos finitamente generados, en particular se presentan dos familias importantes de espacios métricos que representan un grupo finitamente generado.

Por un lado tenemos la familia de grafos de Cayley. Por otro, el Lema de Schwarz-Milnor -del que presentamos una demostración- permite construir otra familia de espacios casi-isométricos a un grupo dado: aquellos donde el grupo actúa propia y discontinuamente.

Un ejemplo fundamental de la aplicación de este lema es el de los grupos fundamentales de superficies, que actúan en el cubrimiento universal de éstas de manera acorde y resultan casi-isométricos a éste.

En el capítulo 3 estudiamos un invariante geométrico a gran escala en particular: el espacio de fines. Se presenta una definición para espacios métricos en general y su aplicación a los grupos.

El espacio de fines es un espacio topológico que se le asigna a un espacio métrico dado y puede pensarse que representa la geometría en el infinito. En este capítulo probamos el Teorema de Hopf que en particular plantea que en el caso de los grupos finitamente generados, no cualquier espacio topológico se realiza como el espacio de fines de éste.

En los capítulos 4, 5 y 6 se describe en detalle el grafo $DL(m, n)$. Este grafo se construye a partir de dos árboles infinitos, regulares y sus correspondientes funciones de Busemann fijado un rayo geodésico. Cuando los dos árboles se toman del mismo orden q resulta casi-isométrico al grupo Lamplighter L_q .

Nos enfocamos en el caso en que los árboles son de orden distinto, $DL(m, n)$ con $m \neq n$ que es el involucrado en la conjetura de Diestel-Leader. En los capítulos 4 y 5 describimos su métrica, sus geodésicas y otras propiedades necesarias en el desarrollo de la prueba de la conjetura.

En el capítulo 6 estudiamos el espacio de fines del grafo DL y su grupo de isometrías.

Finalmente, en el último capítulo presentamos un esquema de la prueba de la conjetura.

En el trabajo de E-F-W el foco está en el grupo soluble $Sol(n, m)$, en este trabajo todo se presenta en términos exclusivamente del grafo, donde si bien aplican razonamientos análogos, al ser un espacio discreto permite enunciados más limpios y la prueba de algunas propiedades geométricas con herramientas de teoría de grafos.

Capítulo 2

Elementos de teoría geométrica de grupos

En este capítulo veremos varios conceptos y resultados bases de la geometría a gran escala. La noción de geometría a gran escala surge de la intención de trabajar con los grupos como objetos geométricos, adjudicándoles propiedades geométricas y relacionándolas con las propiedades algebraicas del mismo.

Para dotar de estructura geométrica a un objeto lo que necesitamos es definir una distancia. Una vez que tenemos un conjunto y una distancia, podemos preguntarnos si admite distintas distancias, cuáles de estas serán equivalentes, qué otros espacios métricos son equivalentes a uno dado, etc.

Aquí veremos algunos resultados sobre esto para grupos finitamente generados y particularmente nos interesarán las casi-isometrías. Estas funciones definen una relación de equivalencia entre espacios métricos. Veremos que es una definición un poco más débil que la equivalencia más natural que surge al trabajar con espacio métricos (las isometrías).

La razón por la que trabajar con esta equivalencia es que para definir una distancia en un grupo debemos auxiliarnos de un conjunto generador. Es decir que a un grupo podemos asignarle una familia de distancias, una por cada conjunto generador que podamos construir, y resulta que no son todas equivalentes en el sentido fuerte, pero sí serán equivalentes en el sentido casi-isométrico.

Además, veremos la construcción de los grafos de Cayley y un resultado fundamental que permite encontrar distintos modelos de los grupos como espacios métricos. Estas secciones están basadas en [Lİ7] y [Mei08].

Dejamos escritas algunas definiciones y observaciones que nos será útil recordar.

Vamos a trabajar con espacios métricos, (X, d_X) , (Y, d_Y) .

Definiciones y observaciones:

- Una función $f : X \rightarrow Y$ es un **encaje isométrico** si $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$.
Observar que es automáticamente inyectivo, pero no necesariamente sobreyectivo.
- Dos espacios son **isométricos** si existe un encaje isométrico biyectivo $f : X \rightarrow Y$.
- Es fácil de ver que la composición de isometrías es isometría y que cada isometría biyectiva tiene una inversa que también es isometría.
Con esto, el conjunto $Isom(X)$ de isometrías de un espacio dado, es un grupo con la composición.

- X, Y son **Lipschitz equivalentes** si existe una biyección $f : X \rightarrow Y$ que verifica

$$\lambda^{-1}d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x, y)$$

para algún $\lambda \geq 1$.

- Un **segmento geodésico** en X es un encaje isométrico $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ de un segmento de $\mathbb{R}$.

Una **geodésica** en X es un encaje isométrico $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$

Un **rayo geodésico** en X es un encaje isométrico $\gamma : [0, \infty) \rightarrow X$

- X se dirá **espacio geodésico** si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe un segmento geodésico que los una. Es decir, existe siempre una curva que realice la distancia entre los puntos.

Por ejemplo, un grafo conexo es geodésico, sin embargo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con la métrica inducida usual no lo es.

- Si consideramos funciones acotadas entre e.m. $f, g : X \rightarrow Y$ entonces la norma del supremo $|f - g|_\infty = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$ define una distancia entre éstas.

2.1. Métrica de palabras y grafos de Cayley

Consideremos un grupo G finitamente generado (f.g.) y un conjunto generador S finito. El *largo de palabra* de un elemento $g \in G$, $\ell(g)$ es el largo mínimo de las tiras de elementos de $S \cup S^{-1}$ que representan g . Debemos estipular la convención de que $\ell_S(e) = 0$.

Definimos una distancia en G a partir del largo de palabra:

$$d_S : G \times G \rightarrow [0, \infty) \quad d_S(g, h) = \ell(g^{-1}h) \quad (2.1.1)$$

Obs. $d_S(g, h)$ se puede pensar como cuántos elemento de S necesito multiplicar a g por izquierda para llegar a h .

Veamos que es efectivamente una distancia

- $d(g, h) = \ell_S(g^{-1}h) \geq 0$ pues es el mínimo del conteo de elementos, además $d(g, h) = 0 \iff \ell_S(g^{-1}h) = 0 \iff g^{-1}h = e \iff g = h$.
- El largo de palabras verifica que $\ell_S(g^{-1}hh^{-1}l) \leq \ell_S(g^{-1}h) + \ell_S(h^{-1}l)$ porque la concatenación de palabras que representan $g^{-1}h$ y $h^{-1}l$ respectivamente, es una palabra que representa a $g^{-1}hh^{-1}l$. Entonces $d(g, l) \leq d(g, h) + d(h, l)$.
- Es claro que $\ell_S(g) = \ell_S(g^{-1})$, luego $d(g, h) = \ell_S(g^{-1}h) = \ell_S((g^{-1}h)^{-1}) = \ell_S(h^{-1}g) = d(h, g)$.

De esta manera obtenemos el grupo como un espacio métrico (G, d_S) , con d_S una métrica discreta, es decir, las distancias entre los puntos son siempre enteras.

Se puede ver que la acción de G en sí mismo por traslación a izquierda es una acción por isometrías, es decir que para cada $g \in G$, la función $h \mapsto g \cdot h$ es una isometría de G en G : Fijado un generador S ,

$$d_S(gh, gl) = \ell_S((gh)^{-1}gl) = \ell_S(h^{-1}l) = d(h, l) \quad (2.1.2)$$

Ejemplo:

Consideremos $\mathbb{Z}$ y los conjuntos generadores $S = \{1\}$, $S' = \{2, 3\}$.

Con d_S la distancia entre elementos es el módulo de la diferencia.

Con $d_{S'}$ por ejemplo $d_{S'}(0, 2) = d_{S'}(0, 3) = d_{S'}(3, 6) = 1$.

Como vimos en el ejemplo, dos conjuntos generadores distintos inducen métricas distintas. Por lo tanto, los espacios (G, S_i) con distintos generadores S_i no son equivalentes en el sentido fuerte. Vamos a ver que “a gran escala” sí son el mismo espacio.

La siguiente es la equivalencia que queremos definir como “de lejos” o “a gran escala”:

Definición 2.1. *Un mapa entre espacios métricos $\phi : X \rightarrow Y$ es una casi-isometría, si existen $k \geq 1$, $C \geq 0$, $D \geq 0$ tales que para todo par de puntos $x_1, x_2 \in X$*

- $\frac{1}{k}d_X(x_1, x_2) - C \leq d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leq kd_X(x_1, x_2) + C$
- *para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $d_Y(y, \phi(x)) \leq D$ (la imagen de ϕ de D -densa en Y)*

Si una función cumple solo el primer punto diremos que es un *encaje casi-isométrico*.

Observar que así como las isometrías son equivalencias bilipschitz (con constante 1), las equivalencias bilipschitz son casi-isometrías con constante aditiva $C = 0$ y 0-densas. Sin embargo las implicancias inversas no son ciertas en general. Es decir que el factor aditivo de la definición de encaje casi-isométrico es el que realmente generaliza la noción de equivalencia métrica a una escala mayor.

Lo que tenemos que imaginarnos es que si x e y están muy lejos en X , entonces la constante aditiva no juega, y básicamente sus imágenes van a estar muy lejos. Sin embargo, para puntos muy cerca en X , siempre podemos separar sus imágenes al menos C . Entonces la casi-isometría no preserva la estructura fina (local), pero si miramos “de lejos” los espacios, sí se ve una estructura preservada.

Veremos que la segunda condición de la definición asegura la existencia de una *casi-inversa*.

Las casi-isometrías verifican las siguientes propiedades:

Lema 2.1. Sean $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ casi-isometrías. Entonces

- La composición $g \circ f : X \rightarrow Z$ es una casi-isometría
- Existe una *c-i* $h : Y \rightarrow X$ de manera que $f \circ h$ está cerca de Id_Y (es decir que $|f \circ h - Id_Y|_\infty < \infty$). Llamamos a h una *casi-inversa* de f .

Dem. Sean κ, C, D y κ', C', D' las constantes de casi-isometría de f y g respectivamente.

Para ver que la composición cumple las desigualdades para algunas constantes aplicamos sucesivamente las desigualdades para g y luego para f :

$$d(g \circ f(x), g \circ f(y)) \leq \kappa' d(f(x), f(y)) + C' \leq \kappa' (\kappa d(x, y) + C) + C'$$

$$d(g \circ f(x), g \circ f(y)) \geq \kappa'^{-1} d(f(x), f(y)) - C' \geq \kappa'^{-1} (\kappa^{-1} d(x, y) - C) - C'$$

Con esto $g \circ f$ es un encaje isométrico de constantes $\kappa\kappa'$ y $\kappa'C + C'$.

Por otro lado, si tomamos $z \in Z$ existe $y \in Y$ tal que $d(g(y), z)$ está acotada uniformemente por una constante D' . A su vez existe $x \in X$ tal que $d(f(x), y) < D$.

Si aplicamos g a estos dos puntos resulta que $d(g \circ f(x), g(y)) \leq \kappa'D + C'$.

Entonces podemos acotar $d(g \circ f(x), z)$ triangulando con $g(y)$. Como todas las cotas son uniformes en Z , $g \circ f$ es casi-denso.

- Para construir la casi-inversa de f debemos primero usar que es casi-densa en Y . Para cada y existe algún $x \in X$ tal que $d(f(x), y) \leq D$ para alguna constante uniforme D . Entonces elegimos uno de ellos y definimos que ese x es $h(y)$.

Para ver que es una casi-isometría basta computar las distancias y usar la definición de h y las propiedades de f :

$d(h(y), h(\hat{y})) = d(x, \hat{x})$ con x y $\hat{x}$ que verifican:

$$d(f(x), y) < D$$

$$d(f(\hat{x}), \hat{y}) < D$$

Entonces, aplicando f , podemos despejar $d(x, \hat{x}) \leq \kappa d(f(x), f(\hat{x})) + \kappa C$.

Por otro lado triangulando con y e $\hat{y}$, $d(f(x), f(\hat{x})) \leq d(y, \hat{y}) + 2D$.

$$\implies d(h(y), h(\hat{y})) \leq \kappa(d(y, \hat{y}) + 2D + C)$$

Análogamente $d(x, \hat{x}) \geq \kappa^{-1}(f(x, \hat{x}) - C) \geq \kappa^{-1}(d(y, \hat{y}) - 2D - C)$.

Por último, tomemos un punto $x \in X$, existe en Y un punto y tal que $d(f(x), y) < D$ y entonces $h(y) = \hat{x}$ que verifica que $d(f(x), f(\hat{x})) < 2D$.

Con esto $d(x, h(y)) \leq \kappa(2D + C)$.

□

Con esto, podemos definir la siguiente relación de equivalencia

Definición 2.2. Decimos que X e Y son casi-isométricos (y notamos $X \sim_{c.i.} Y$) si existe $\phi : X \rightarrow Y$ una casi-isometría.

Veamos el ejemplo anterior.

Tomemos la identidad $Id : (\mathbb{Z}, d_1) \rightarrow (\mathbb{Z}, d_2)$ con las métricas inducidas por $\{1\}$ y $\{2, 3\}$ respectivamente. No es una isometría, puesto que $d_1(0, 2) = 2$ y $d_2(0, 2) = 1$.

Sin embargo es una equivalencia bilipschitz: Es claro que es una biyección y veamos que

$$\frac{1}{3}d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq 3d_1(x, y)$$

Como podemos escribir $1 = 3 - 2$, a cada tira de $\{1, -1\}$ que represente $x - y$, podemos construir una tira de $\{2, 3, -2, -3\}$ con el doble de elementos, luego

$$d_2(x, y) \leq 2d_1(x, y)$$

Por otro lado, $3 = 1 + 1 + 1$ y $2 = 1 + 1$, entonces razonando análogamente,

$$d_1(x, y) \leq 3d_2(x, y)$$

Con lo que probamos que Id es una equivalencia bilipschitz con constante 3.

Ahora, consideremos la inclusión de $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ con la distancia inducida por $\{1\}$ en $\mathbb{Z}$ y la usual en $\mathbb{R}$.

Observar que para $x, y \in \mathbb{Z}$, $d_{\mathbb{R}}(x, y) = d_{\{1\}}(x, y)$ y la imagen es 1-densa. Por lo que es una casi-isometría.

Sin embargo $\mathbb{R}$ por ser no numerable no puede ser isométrico ni bilipschitz equivalente a $\mathbb{Z}$, pues no hay biyección.

En general las casi-isometrías

- no son inyectivas o sobreyectivas
- no son continuas

Así como las isometrías de un espacio dado conforman un grupo, en el caso de las casi-isometrías, debemos considerarlas a menos de una relación: $f \sim g$ si están a distancia acotada, $|f - g|_{\infty} < \infty$.

Entonces, con las propiedades que ya vimos de las casi-isometrías,

$$QI(X) := \{f \text{ casi-isometría de } X\} / \sim$$

es un grupo con la composición.

Análogo al concepto de acción por isometrías, una acción por casi-isometrías de un grupo G en un espacio X es un morfismo de $G \rightarrow QI(X)$.

Volviendo a los grupos como espacios métricos, veamos que si tomamos distintos conjuntos generadores S_1, S_2 finitos de un mismo grupo G , entonces $(G, S_1) \sim_{c.i.} (G, S_2)$. Más aún son Lipschitz equivalentes.

Además la constante multiplicativa solo depende de los cardinales de los conjuntos generadores.

Lema 2.2. *Dado G f.g. y S_1, S_2 conjuntos generadores finitos y simétricos, entonces $(G, S_1) \sim_{c.i.} (G, S_2)$*

Dem. Veamos que la identidad $Id : (G, S_1) \rightarrow (G, S_2)$ es una equivalencia bilipschitz.

Sean $S_1 = \{s_1, \dots, s_n\}$ y $S_2 = \{t_1, \dots, t_m\}$.

Entonces, $d_1(x, y) = d$ implica que existen $s_{i_1}, \dots, s_{i_d}$ tales que $xs_{i_1} \dots s_{i_d} = y$.
 Ahora, cada $s_i \in S_1$ lo podemos escribir como un producto de elementos de S_2 :
 $s_i = t_{j_1} \dots t_{j_{k_i}}$.

Consideremos $n_1 := \max_{i=1, \dots, m} \{k_i \text{ tal que } s_i = t_{j_1} \dots t_{j_{k_i}}\}$.
 Reescribiendo,

$$y = xs_{i_1} \dots s_{i_d} = xt_{1_1} \dots t_{1_{k_1}} \dots t_{d_1} \dots t_{d_{k_d}}$$

Luego, por definición $d_2(x, y) \leq d \cdot n_1 = d_1(x, y)n_1$.

Si definimos ahora $n_2 = \max_{i=1, \dots, n} \{k_i \text{ tal que } t_i = s_{j_1} \dots s_{j_{k_i}}\}$, con cálculos análogos podemos concluir que

$$d_1(x, y) \leq d_1(x, y)n_2$$

Tomando $\kappa = \max\{n_1, n_2\}$

$$\frac{1}{\kappa} d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \kappa d_2(x, y)$$

Es decir que la función Id que es una biyección, es una casi-isometría de constantes κ y 0, i.e. una equivalencia bilipschitz de constante κ . $\square$

2.1.1. Construcción del grafo de Cayley

Hasta ahora hemos visto cómo dotar a un grupo f.g. de métrica, y que todas las métricas posibles son Lipschitz equivalentes. También, son todas discretas, es decir que es un espacio donde no podemos tener una noción de curva, recta, geodésica.

Para sortear esto es que se construyen los grafos de Cayley. Básicamente queremos agregarle algunas cosas al espacio G, d_S para tener continuidad, sin perder la estructura métrica a gran escala propia del grupo.

Definición 2.3. *Dado un grupo f.g. G y un conjunto generador S , el grafo de Cayley $Cay_S(G)$ se construye de la siguiente manera:*

- *Hay una biyección entre el conjunto de vértices V y el grupo.*
- *Hay una arista entre dos vértices si los elementos del grupo que representan difieren en un elemento de $S \cup S^{-1}$ ($g = sh$) y etiquetamos la arista con ese elemento generador. Es decir, hay una arista entre g y h si $d_S(g, h) = 1$*

Es fácil ver que si una tira de generadores que representa g realiza el largo de palabra, se corresponde con un camino de largo mínimo que conecta g con el neutro: si podemos escribir $g = s_1 \dots s_k$, entonces la concatenación de aristas desde e con las etiquetas s_1 ,

$s_2, \dots, s_k$ termina en el elemento $s_1 \dots s_k = g$.

De igual manera, hay un camino de largo mínimo en el grafo entre g y h que realiza la distancia entre ambos.

Ejemplos:

Si dibujamos los ejemplos anteriores, obtenemos

1) $\mathbb{Z}$ con $S = \{1\}$

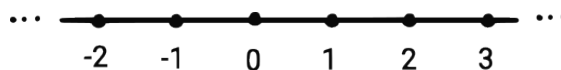


Figura 2.1: $\text{Cay}_{\{1\}}(\mathbb{Z})$

2) $\mathbb{Z}$ con $S = \{2, 3\}$

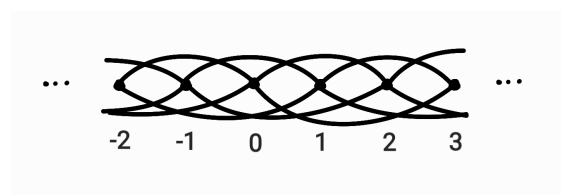


Figura 2.2: $\text{Cay}_{\{2,3\}}(\mathbb{Z})$

3) La construcción del grafo del grupo libre:

Sea $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$ el grupo de palabras de dos letras, con la concatenación, donde no hay ninguna relación. Es decir que la única regla de cancelación entre letras consecutivas es la de los inversos respectivos.

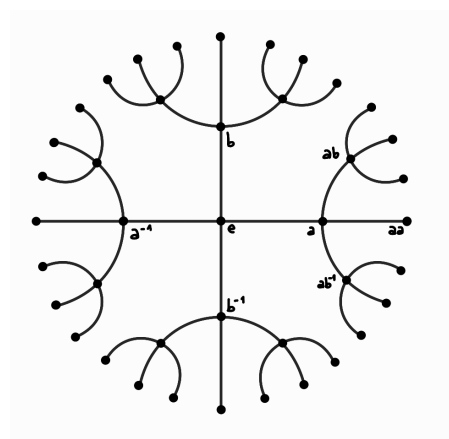
Ahora, ¿cómo es la geometría del grafo y cómo se relaciona con la de G ?

En el grafo el largo de caminos entre vértices corresponde a contar aristas y la distancia $d_S(x, y)$ es el ínfimo entre el largo de los caminos que lo unen (que en estos casos es un mínimo).

Para obtener una métrica continua en el grafo, consideramos cada arista como el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ con la métrica usual de $\mathbb{R}$.

Con esto, de la misma manera que se prueba que los (G, d_S) son todos Lipschitz equivalentes, se prueba que los $\text{Cay}_S(G)$ también.

Este espacio es continuo y no se puede construir una equivalencia bilipschitz al grupo G , porque no podemos construir una biyección. Sin embargo, si consideramos la inclusión

Figura 2.3: $\text{Cay}(\mathbb{F}_2)$

$G \hookrightarrow \text{Cay}(G)$ ambos con la distancia d_S , tenemos un encaje isométrico 1-denso, por lo tanto son casi-isométricos.

Con todo esto, $\text{Cay}_S(G)$ es un modelo continuo de la geometría de G . Este espacio sí permite trabajar con curvas y geodésicas.

Es natural en este punto preguntarnos qué tipo de grafos *pueden* ser un grafo de Cayley de un grupo finitamente generado.

En un principio, podemos probar que los grafos de Cayley tienen las siguientes propiedades:

Lema 2.3. *Si $X = \text{Cay}_S(G)$ donde G es un grupo finitamente generado y S un generador finito, entonces el grafo es conexo, localmente finito y homogéneo (i.e. el grupo de isometrías actúa transitivamente).*

Dem. Por un lado, el grafo es conexo porque para cada vértice $x = s_1 \dots s_k$ existe el camino que lo conecta con e recorriendo en orden las aristas con las etiquetas correspondientes la palabra $s_1 \dots s_k$.

Además, para cada $x \in \text{Cay}_S(G)$ tenemos $y \sim x \iff$ existe $s_i \in S \cup S^{-1}$ tal que $y = s_i x$. Entonces a lo sumo hay $2|S|$ aristas incidentes en x , luego es localmente finito.

Por último, definimos la acción del grupo en el grafo y veamos que es transitiva:

- la acción de G en los vértices es como la del grupo en sí mismo, al vértice del elemento h lo manda en el vértice del elemento gh .
- si x es un punto de una arista $[h_1, h_2]$ definimos que gx es el punto en la arista $[gh_1, gh_2]$ que está a la misma distancia de cada extremo.

Es claro que fijado $g \in G$ tenemos una isometría del grafo en sí mismo (es acción por isometrías) y para todo par de elementos x, y , la isometría definida por $x^{-1}y \in G$ lleva x en y .

□

Por este último lema sabemos que no todo grafo puede ser el grafo de Cayley de un grupo. Sería pertinente preguntarse si todos *se parecen* a algún grafo de Cayley.

En [Woe91] donde se estudia la clasificación de algunos grafos a partir de la estructura de su grupo de automorfismos, se deja planteada la siguiente pregunta para grafos infinitos, localmente finitos, conexos y homogéneos :

¿existe alguno que no sea casi-isométrico a un grafo de Cayley?

En este punto se conocían ejemplos de grafos que no son de Cayley, pero casi-isométricos a árboles regulares, que son los grafos de Cayley de los grupos libres. Además, Trofimov ya tenía un resultado en ese sentido para grafos con crecimiento polinomial.

En [DL01] se presenta un grafo junto con la conjetura de que no es casi-isométrico a ningún grafo de Cayley. El primer ejemplo. En este trabajo se hacen dos construcciones equivalentes del grafo. Una de ellas como el límite de una sucesión de grafos, y la otra, inductivamente a partir de un grafo completo $K_{2,3}$.

Este es el grafo que estudiaremos en los capítulos 4,5 y 6.

2.2. Lema fundamental de la teoría geométrica de grupos

Observar que en el último resultado construimos una equivalencia bilipschitz entre el grupo con distintas métricas. ¿Por qué estudiar los grupos finitamente generados a menos de casi-isometrías entonces?

Por un lado, ya vimos el ejemplo de los grafos de Cayley, que no son bilipschitz equivalentes a los grupos, pues tienen una geometría continua pero en el que G se encaja isométricamente y donde actúa por isometrías. Esto de alguna manera es lo que recupera la información del grupo, es decir, que el grafo es una buena representación de la geometría del grupo.

El lema que presentamos en esta sección, provee muchos más ejemplos de espacios métricos que no son Lipschitz equivalentes al grupo y sin embargo son un buen modelo de su geometría.

A grandes rasgos, el lema afirma que si un grupo G actúa sobre un espacio métrico X y tanto la acción como el espacio cumplen algunas condiciones, entonces G resulta

finitamente generado y G y X resultan casi-isométricos para d_S en G con S un conjunto generador finito.

Este lema permite trabajar con modelos de los grupos finitamente generados que son objetos geométricos más generales que los grafos conexos, y que por tener un interés geométrico en sí muchas veces ya están bien estudiados y de los que se puede extraer información del grupo.

La hipótesis que debemos exigir al espacio métrico es la siguiente

Definición 2.4. *Un espacio métrico X se dice (c, b) -quasi-geodésico si para todo par de puntos $x, y \in X$ existe un encaje (c, b) -casi isométrico $\gamma : [0, L] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(L) = y$.*

Teorema 2.4. *Sea G un grupo que actúa por isometrías sobre (X, d) un espacio métrico (c, b) -quasi-geodésico. Si existe $B \subset X$ de diámetro finito tal que*

- $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$
- $S := \{g \in G \text{ tal que } (g \cdot N_{2b}(B)) \cap N_{2b}(B) \neq \emptyset\}$ es finito. Donde $N_r(B)$ es el entorno de radio r de B .

Entonces G es finitamente generado, $G = \langle S \rangle$, y para cada $x \in X$ el mapa

$$\phi : G \rightarrow X$$

$$g \mapsto g \cdot x$$

es una casi isometría para la distancia d_S en G .

Si X es un espacio geodésico, la segunda condición se puede escribir directamente con B y no el entorno:

$$S := \{g \in G \text{ tal que } g \cdot B \cap (B) \neq \emptyset\}.$$

Una acción que cumple ambos puntos se dice que es una acción *propia y discontinua*.

La acción de G sobre su grafo de Cayley cumple precisamente estas condiciones:

(1) Si consideramos la bola unidad en $\text{Cay}(G)$, $B = B(e, 1)$, entonces por cómo definimos la acción, $g \cdot B = B(g, 1)$.

Entonces, todos los vértices están en el trasladado de B por el elemento que representan, y cada arista adyacente también, puesto que todos los puntos están a distancia ≤ 1 del centro.

(2) Si S es el conjunto generador para el que construimos el grafo, cada vértice adyacente a e es un elemento de S , y cada vértice que representa un elemento que no está

en S se encuentra al menos a distancia 2 de e .

Con esto, cada $s \cdot B = B(s, 1)$ intersecta a B . Pero si $g \in G \setminus (S \cup \{e\})$, $g \cdot B = B(g, 1) \cap B = \emptyset$.

Como G es finitamente generado $\{g \in G \text{ tal que } g \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$ es finito.

Dem. Veamos primero que $G = \langle S \rangle$:

Tomemos $g \in G$ y consideremos un punto $x \in B$. Sabemos que en X existe un encaje (c,b)- casi isométrico $\gamma : [0, L] \rightarrow X$ de manera que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(L) = g \cdot x$.

Ahora, como sabemos que los trasladados de B cubren todo el espacio, queremos cubrir la imagen de γ con trasladados de B :

Consideremos una equipartición de $[0, L]$ por intervalos de largo menor a $\frac{b}{c}$, $0 = t_0, \dots, t_n = L$. Escribimos $x_i = \gamma(t_i)$.

Tenemos que $x_0 = x \in e \cdot B$ y $x_n = g \cdot x \in g \cdot B$. Pero además, para cada x_j existe $g_j \in G$ de manera que $x_j \in g_j \cdot B$ (pues $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$).

Entonces, por ser γ un encaje casi-isométrico y haber tomado pasos de tamaño $\leq \frac{b}{c}$

$$d(x_i, x_{i+1}) \leq c(t_{i+1} - t_i) + b \leq 2b.$$

Es decir que

$$x_{i+1} \in N_{2b}(g_i \cdot B) = g_i \cdot N_{2b}(B).$$

A su vez $x_{i+1} \in N_{2b}(g_{i+1} \cdot B) = g_{i+1} \cdot N_{2b}(B)$ por definición de los g_k .

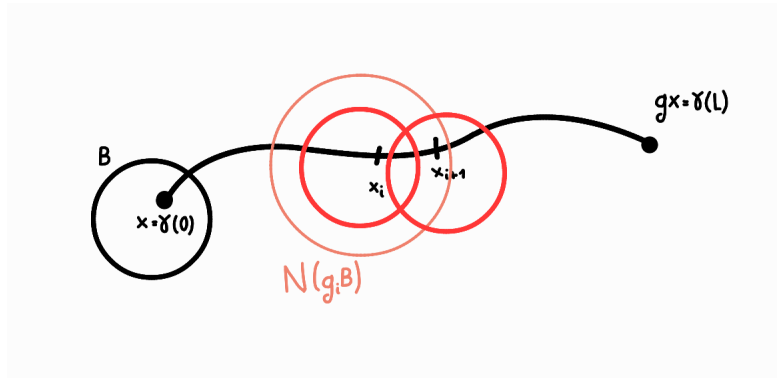


Figura 2.4:

Con esto, $x_{i+1} \in g_i \cdot N_{2b}(B) \cap g_{i+1} \cdot N_{2b}(B)$ y por lo tanto

$$g_i^{-1} g_{i+1} \cdot N_{2b}(B) \cap N_{2b}(B) \neq \emptyset.$$

Luego por definición de S resulta que $g_{i+1}^{-1} g_i \in S$ y $g = g_n = g_{n-1} g_{n-1}^{-1} g_n = g_{n-1} s_1$ para algún $s_1 \in S$.

Inductivamente,

$$g = g_{n-2} s_2 s_1 = \dots = g_0 s_n \dots s_1 = s_n \dots s_1. \quad (2.2.1)$$

Probando así que $g \in \langle S \rangle$.

Para cada $x \in X$ el mapa ϕ es una casi-isometría:

Veamos que el mapa es casi denso:

Para empezar, podemos suponer que $x \in B$. Pues sino, basta con componer con la acción por un g_0 tal que $g_0 x \in B$, que es una isometría en X .

Tomemos $x' \in X$. Por hipótesis, existe un $g \in G$ de manera que $x' \in g \cdot B$. Como estamos suponiendo sin pérdida de generalidad que $g \cdot x \in g \cdot B$, se tiene que $d(x', \phi(g)) \leq \text{diam}(B) < \infty$.

Resta ver que ϕ es un encaje casi-isométrico:

Tomemos $g \in G$, un $x \in B$ y como antes un encaje casi-isométrico que permite escribir g como el producto de n elementos de S 2.2.1. Con esto

$$n \geq d_S(e, g)$$

Además, si consideramos la casi-geodésica que conecta x con $g \cdot x$ sabemos que:

$$d(\phi(e), \phi(g)) = d(x, g \cdot x) = d(\gamma(0), \gamma(L)) \geq \frac{1}{c}L - b$$

con $L \geq (n-1)\frac{b}{c}$. Entonces

$$d(\phi(e), \phi(g)) \geq \frac{1}{c} \frac{b}{c} (n-1) - b \quad (2.2.2)$$

$$\geq \frac{b}{c^2} n - \frac{b}{c^2} - b \quad (2.2.3)$$

$$\geq \frac{b}{c^2} d(e, g) - \frac{b}{c^2} - b \quad (2.2.4)$$

Ahora, para acotar superiormente $d(\phi(e), \phi(g))$ supongamos $d(e, g) = m$. Entonces $g = s_1 \dots s_m$ con $s_i \in S \cup S^{-1}$.

$$\begin{aligned}
d(\phi(e), \phi(g)) &= d(x, g \cdot x) \\
&\text{(d.t.)} \\
&\leq d(x, s_1 \cdot x) + d(s_1 \cdot x, s_1 s_2 \cdot x) + \dots + d(s_1 \dots s_{m-1} \cdot x, s_1 \dots s_m \cdot x) \\
&\text{($G \curvearrowright X$ por isometrías)} \\
&= d(x, s_1 \cdot x) + d(x, s_2 \cdot x) + \dots d(x, s_m \cdot x)
\end{aligned}$$

Recordar que $s_i \cdot N_{2b}(B) \cap N_{2b}(B) \neq \emptyset$. Luego en el último término cada sumando está acotado por $2(\text{diam}(B) + 2b)$ y se obtiene

$$d(\phi(e), \phi(g)) \leq m \cdot 2(\text{diam}(B) + 2b) = 2(\text{diam}(B) + 2b)d(e, g).$$

Como $\text{diam}(B) < \infty$, basta tomar

$$\hat{c} = \max \left\{ \frac{l}{c}, 2(\text{diam}(B) + 2b) \right\}$$

y

$$\hat{b} = b + \frac{b}{c^2}$$

Resulta que $\phi : G \rightarrow X$ es una $(\hat{c}, \hat{b})$ -casi isometría.

□

Capítulo 3

Espacio de fines

En este capítulo veremos un ejemplo de una característica geométrica invariante por casi-isometrías: los fines de un espacio. Para esta parte las referencias principales fueron [Mei08] y [BH99].

Queremos estudiar la geometría en el infinito de los grupos. El objetivo es definir el *espacio de fines de un grupo* y ver qué espacios se realizan.

De esta manera, obtenemos una condición más para que un grafo sea de Cayley para algún grupo finitamente generado.

En general, la geometría en el infinito se trata de asociar a un espacio métrico X un espacio topológico ∂X , que nos gustaría que tenga información geométrica de X . De hecho, veremos que las casi-isometrías entre espacios métricos X e Y se traducen en homeomorfismos entre los espacios ∂X y ∂Y , es decir que es un invariante de la geometría a gran escala.

El objetivo es probar el siguiente resultado

Teorema 3.1 (Fines de un grupo). *Sea G un grupo f.g. Entonces, para cualquier generador finito S , el espacio (G, S) tiene 0, 1, 2 o infinitos fines.*

Aún más, si un grupo G tiene infinitos fines, veremos que el espacio de fines ∂G es topológicamente un Cantor. Recordemos que

Definición 3.1. *Un espacio topológico C es un Cantor si verifica lo siguiente:*

- *Es compacto*
- *Cada punto de C es de acumulación*
- *Es totalmente desconexo, las componentes conexas son singletons.*

Con esto, si un espacio métrico tiene, por ejemplo, 4 fines no puede ser casi-isométrico a un grupo f.g.

El espacio de fines de un espacio métrico ∂X tiene que entenderse como las posibles maneras de irse a infinito.

Definiremos precisamente esto para espacios métricos geodésicos en general. Luego debemos ver la invarianza por casi-isometrías para definir los fines de un grupo a partir de su grafo de Cayley asociado, con independencia del generador.

Definición 3.2. *Dado X un espacio métrico un rayo es una función continua $r : [0, \infty) \rightarrow X$ de manera que si $B \subset X$ es acotado, tiene preimagen acotada en $[0, \infty)$ (lo que llamamos una función propia).*

Decimos que $r \sim r'$ si para todo $B \subset X$ acotado, existe $t \in [0, \infty)$ tal que $r([t, \infty))$ y $r'([t, \infty))$ están en la misma componente conexa por caminos de $X \setminus B$.

Esto define una relación de equivalencia en el conjunto de rayos de un espacio.

Es claro que es reflexiva y simétrica, y para considerar la transitividad, si $r_1 \sim r_2$ y $r_2 \sim r_3$ entonces para cada $B \subset X$ acotado existen t_1 y t_2 para cada relación. Ahora si consideramos $t = \max\{t_1, t_2\}$ por la transitividad de estar en la misma componente conexa por caminos, los $r_i[t, \infty)$ están en la misma c.c.c. de $X \setminus B$.

Notaremos $\text{end}(r) := [r]$.

Definición 3.3. *El conjunto de fines de un espacio métrico geodésico X es*

$$\partial X := \{\text{end}(r) : r \text{ es rayo de } X\}.$$

Para dotarlo de una estructura topológica definiremos la convergencia de una sucesión:

$\{\text{end}(r_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \partial X$ converge a un punto $\text{end}(r)$ si para todo $B \subset X$ acotado, existe una sucesión $\{t_n\} \subset [0, \infty)$ y representantes $r_0, r_1, \dots$, tales que para n suficientemente grande $r_n([t_n, \infty))$ y $r([t_n, \infty))$ están en la misma c.c.c. de $X \setminus B$.

Con esto quedan definidos los cerrados en ∂X : $F \subset \partial X$ es cerrado si para toda sucesión $\{x_n\} \subset F$ que converge a $x \in \partial X$ se verifica que $x \in F$.

Tomemos un conjunto acotado $B \subset X$. Sean C_i las c.c.c. de $X \setminus B$, y $\hat{U}_i$ el conjunto de los rayos r que verifican que para algún $t > 0$, $r[t, \infty) \subset C_i$. Con esto definimos un conjunto en ∂X

$$U_i = \{end(r) : r \in \hat{U}_i\}.$$

Veamos que U_i es un cerrado:

Consideremos una sucesión en U_i , $\{end(r)_n\}$ convergente a $end(r)$. Entonces, en particular para el conjunto B que define a U_i , existen $\{t_n\}$ y representantes tales que $r_n[t_n, \infty)$ y $r[t_n, \infty)$ están en la misma c.c.c. de $X \setminus B$ para n suficientemente grande, supongamos en C_j .

Sabemos que para algún t , $r_n[t, \infty) \subset C_i$. Ya sea que $t_n > t$ o $t > t_n$, tendríamos que $C_j \subset C_i$ o que $C_i \subset C_j$, en cualquier caso por ser c.c.c. $C_i = C_j$ y resulta que $r[t_n, \infty) \subset C_i$. Entonces por definición $end(r) \in U_i$ y con esto U_i es un cerrado de ∂X .

Recordemos que un espacio X es propio si para cada conjunto $B \subset X$, es equivalente

- B es cerrado y acotado
- B es compacto

Veamos que si el espacio X es propio y geodésico, podríamos construir una definición a partir de rayos geodésicos que parten de un punto fijo x_0 y en vez de compactos tomar bolas $B(x_0, R)$ y resultaría equivalente.

Diremos que un k -camino entre x e y es un conjunto $x_0 = x, x_1, x_2, \dots, x_n = y$ donde $d(x_i, x_{i+1}) \leq k$ para todo $i = 0, \dots, n$. Es decir una serie de pasos de largo hasta k de x a y .

Lema 3.2. *Sea X propio y geodésico. Consideremos $r_1, r_2 \in \partial X$. Entonces, fijado $k > 0$ y $x_0 \in X$:*

$end(r_1) = end(r_2) \iff \forall R > 0$ existe un $T > 0$ tal que existe un k -camino en $X \setminus B(x_0, R)$ de $r_1(t)$ a $r_2(t)$ para cualquier $t > T$.

Dem. Dados r_1, r_2 tales que $end(r_1) = end(r_2)$, para cualquier $R > 0$ sabemos que existe $T > 0$ tal que $r_1[T, \infty)$ y $r_2[T, \infty)$ están en la misma ccc de $X \setminus \overline{B(x_0, R)}$.

Sea $t > T$ y $\gamma : [0, L] \rightarrow X \setminus B(x_0, R)$ un camino que une $r_1(t)$ y $r_2(t)$. Entonces, basta con tomar una partición de $[0, L]$, $t_0 = 0, \dots, t_l = L$ de manera que $t_{i+1} - t_i \leq k$, luego

$$d(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_i)) \leq t_{i+1} - t_i \leq k$$

y los puntos $\gamma(t_i)$ con $i = 0, \dots, l$ forman un k -camino en $X \setminus B(x_0, R)$ entre $r_1(t)$ y $r_2(t)$.

Para el recíproco, consideremos $K \subset X$ un compacto. Por ser compacto, existe $R > 0$ tal que $K \subset B(x_0, R)$.

Ahora, para este $R > 0$ existe $T' > 0$ de manera que cada $r_1(t)$ y $r_2(t)$ con $t > T'$ están conectados por un k -camino por fuera de $B(x_0, R)$. Si consideramos los segmentos geodésicos que unen los puntos consecutivos del k -camino, sabemos que tendrán largo a lo sumo k .

Luego, tomando la concatenación de estos segmentos, obtenemos una curva que une $r_1(t)$ y $r_2(t)$ por fuera de $B(x_0, R - k)$ (si bien los puntos están fuera de $B(x_0, R)$ los segmentos podrían acercarse a x_0 pero a lo sumo una distancia k).

Debemos considerar $B(x_0, R + k)$. Existe $T > 0$ que verifica lo anterior y la curva que construimos para cada par $r_1(t), r_2(t)$ queda por fuera de $B(x_0, R)$ y por lo tanto fuera de K . Esto para cada $t > T$, por lo que $r_1(T, \infty)$ y $r_2(T, \infty)$ están en la misma c.c.c. de $X \setminus K$.

□

Para un espacio propio y geodésico, el espacio de fines es una característica geométrica de gran escala, es decir, es invariante por casi-isometrías. La idea es construir, a partir de una casi-isometría, un homeomorfismo entre los espacios de fines correspondientes.

De esta manera, si dos espacios son c-i equivalentes, sus espacios de fines son topológicamente equivalentes.

Lema 3.3. *Sean X e Y espacios métricos propios y geodésicos. Sea $f : X \rightarrow Y$ una (κ, C) casi-isometría. Entonces*

- *f induce un homeomorfismo $f_\infty : \partial X \rightarrow \partial Y$*
- *si f y g son casi-isometrías a distancia acotada entonces $f_\infty = g_\infty$*
- *Si $f : Y \rightarrow Z$ y $f' : X \rightarrow Y$ son casi-isometrías, $f_\infty \circ f'_\infty = (f \circ f')_\infty : \partial X \rightarrow \partial Z$ y si $g : Z \rightarrow Y$ es una casi-inversa de f , $(f \circ g)_\infty$ es el mapa identidad en ∂Z .*

Dem. Dado r un rayo de X , consideremos la sucesión de puntos $\{f(r(n))\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$.

Definimos $f_*(r)$ la concatenación de segmentos geodésicos $[f(r(n)), f(r(n+1))]$. $f_*(r)$ resulta un rayo pues r es propia y f también (por ser casi-isometría).

A su vez, es claro que si bien $f_*(r)$ depende de los segmentos geodésicos elegidos, $end(f_*(r))$ no. Podemos entonces definir:

$$\begin{aligned} f_\infty : \quad \partial X &\rightarrow \partial Y \\ end(r) &\mapsto end(f_*(r)) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Debemos ver que está bien definida en las clases, y que es continua:

Sean r_1, r_2 rayos en X tales que $\text{end}(r_1) = \text{end}(r_2)$.

Queremos ver que fijado $y_0 \in Y$ y $k > 0$, para todo $R > 0$ existe un $T > 0$ tal que $f_*(r_1)(t)$ y $f_*(r_2)(t)$ se conectan por un k -camino en $Y \setminus B(y_0, R)$ para todo $t > T$.

Entonces, sea $R > 0$ e $y_0 = f(x_0) \in Y$. Consideremos en X la bola $\hat{B} = B(x_0, \kappa(R + C))$. Existe $T > 0$ tal que $r_1[T, \infty)$ y $r_2[T, \infty)$ están en la misma c.c.c. de $X \setminus \hat{B}$.

Dado $t > T$, sea $\gamma : [0, L] \rightarrow X \setminus \hat{B}$ un camino que une $r_1(t)$ y $r_2(t)$. Como el camino está en $X \setminus \hat{B}$ y f es (κ, C) casi-isometría

$$d(\gamma(s), x_0) > \kappa(R + C) \text{ y por lo tanto } d(f(\gamma(s)), f(x_0)) \geq R$$

entonces $f(\gamma(s)) \in Y \setminus B(y_0, R) \forall s \in [0, L]$.

Con esto, podemos tomar una partición de $[0, L]$ de manera que $s_{i+1} - s_i < \kappa^{-1}(k - C)$ entonces $\{f(\gamma(s_i))\}$ es un k -camino en $Y \setminus B(y_0, R)$ que une $f(r_1(t))$ y $f(r_2(t))$.

Si $t \notin \mathbb{N}$, $f_*(r_i)(t)$ está a distancia acotada por $\kappa + C$ de $f_*(r_i)(n_0) = f(r_i(n))$ para algún n y podemos aplicar lo anterior.

Con esto, $\forall t > T$ existe un k -camino que une $f_*(r_1)(t)$ con $f_*(r_2)(t)$. Por el lema 3.2, $\text{end}(f_*(r_1)) = \text{end}(f_*(r_2))$.

Además si $\{\text{end}(r)_n\} \rightarrow \text{end}(r)$ queremos ver que $\{\text{end}(f_*(r_n))\} \rightarrow \text{end}(f_*(r))$.

Tomemos $B \subset Y$ acotado. Existe y_0 y $R > 0$ tal que $\overline{B} \subset B(y_0, R)$. Por un lado tenemos que $f^{-1}(B)$ es acotado, tomemos una bola $B(x_0, R_X)$ tal que $f(x_0) = y_0$ y $f^{-1}(B) \subset B(x_0, R_X)$. Entonces existen $\{t_n\}$ tales que $r_n[t_n, \infty)$ y $r[t_n, \infty)$ están en la misma c.c.c. de $X \setminus B(x_0, R_X)$ para n y t suficientemente grandes.

Ahora, por la primera observación, tenemos entonces que $\forall t > t_n$ los pares $r_n(t), r(t)$ están k -conectados y como ya vimos, esto implica que tenemos caminos que unen $f_*(r_n(t))$ y $f_*(r(t))$ en $Y \subset B(y_0, \hat{R})$ donde $\hat{R}$ solo depende de R y las constantes de casi-isometría.

Basta con tomar un R adecuado para que $B \subset B(y_0, \hat{R})$ y así $f_*(r_n)[t_n, \infty)$ y $f_*(r)[t_n, \infty)$ están en la misma c.c.c. de $Y \setminus B$.

Ahora sean f y g casi-isometrías a distancia acotada. Entonces, dado $x \in \partial X$, y r un representante, sabemos que $d(f(r(n)), g(r(n)))$ está uniformemente acotada y fijado k podemos construir un k -camino para cada par $f(r(n)), g(r(n))$. Con esto basta para poder construir un k -camino entre $f(r(t))$ y $g(r(t))$ para todo t .

Con esto $\text{end}(g_*(r)) = \text{end}(f_*(r))$, es decir que $f_\infty(x) = g_\infty(x)$.

Por último, sean $f : X_1 \rightarrow X_2$ y $g : X_2 \rightarrow X_3$ casi-isometrías. Consideremos f_∞ y g_∞ los mapas correspondientes en los espacios de fines.

Entonces, dado $x \in X$,

$$g_\infty \circ f_\infty(x) = g_\infty(\text{end}(f_*(r))) = \text{end}(g_*(f_*(r)))$$

puesto que claramente $f_*(r)$ es un representante de $\text{end}(f_*(r))$. A su vez, $(g \circ f)_\infty(x) = \text{end}(g_*(f_*(r)))$.

Combinando estos últimos dos puntos y que $\text{Id}_{X_\infty} = \text{Id}_{\partial X}$ es claro que si son casi-inversas entonces $f_\infty \circ g_\infty = \text{Id}_{\partial X}$.

□

3.1. Fines de un grupo

A partir de lo anterior, podemos definir el espacio de fines de un grupo de la siguiente manera:

Definición 3.4. *El espacio de fines de un grupo G f.g. es el espacio de fines de $\text{Cay}_S(G)$ dado cualquier conjunto generador S .*

Ejemplos

- Si G es finito, entonces es un espacio acotado y el espacio de fines es vacío.
- Consideremos $X = \text{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$. Los rayos $r_+(t) = t$, $r_-(t) = -t$ representan dos fines distintos. Además dado cualquier conjunto acotado B , $X \setminus B$ tiene exactamente dos componentes conexas, así que no puede haber otros fines. $\partial X = \{\text{end}(r_-), \text{end}(r_+)\}$.
- El grupo $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ tiene un solo fin. Podemos considerar nuevamente un grafo de Cayley, $X = \text{Cay}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \{(1, 0), (0, 1)\})$, es la grilla en $\mathbb{R}^2$. Es claro que cualquier conjunto acotado que le saquemos a la grilla, queda un espacio conexo por caminos, una única c.c.c.
- Si T es un árbol regular infinito de orden m entonces las c.c.c. de $T \setminus B(1, n) = m(m-1)^n \rightarrow \infty$. Si se toman rayos eligiendo para cada n una de estas c.c.c., es fácil ver que representan el mismo fin si y solamente si en cada paso se hizo la misma elección. Entonces ∂T es un conjunto infinito.

Prueba Teorema 3.2. Como vimos, existen grupos con 0, 1 y 2 fines.

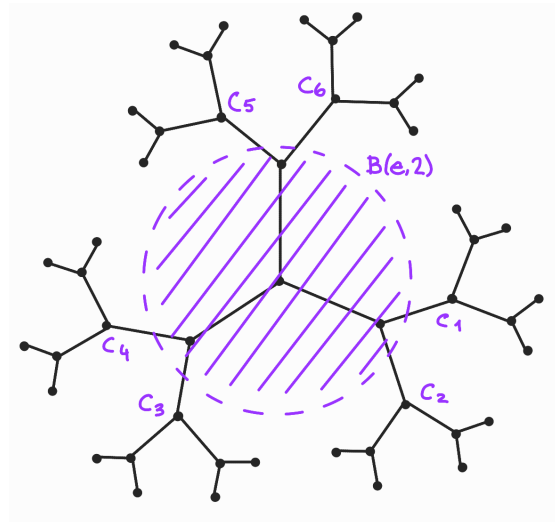


Figura 3.1: Fines árbol regular infinito

Supongamos que existe un grupo f.g. G con un número finito de fines $n \geq 3$. Consideremos un generador y su grafo de Cayley asociado X .

Como hay n puntos en ∂X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k' \geq k$ $X \setminus B(1, k')$ tiene n componentes conexas por caminos.

Sean $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ las c.c.c. de $X \setminus B(1, k)$ y sea $g \in G$ tal que $B(1, g) > 2k$. Entonces $B(g, k) \subset \Gamma_i$ para algún i (supongamos $i = 1$).

Tomemos dos componentes distintas a Γ_1 , Γ_i y Γ_j (existen pues $n \geq 3$), y consideremos $g_i \in \Gamma_i$, $g_j \in \Gamma_j$. Sabemos que existe un camino de g_i al 1 por fuera de Γ_1 , también de 1 a g_j . Por lo tanto dado un par g_i y g_j , existe un camino que los une (contenido en $X \setminus B(g, k)$).

Es decir que $\Gamma_i \cup \Gamma_j \cup B(1, k) = (\Gamma_i \cup \Gamma_j \cup B(1, k)) \setminus B(g, k)$ tiene una única c.c.c.

$\implies B(1, k) \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$ tiene a lo sumo $n - 2$ componentes conexas por caminos.

Ahora, $X \setminus B(g, k) = (\Gamma_1 \setminus B(g, k)) \cup B(1, k) \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$. Luego resulta que $\Gamma_1 \setminus B(g, k)$ tiene al menos 2 c.c.c.

Esto implica que si consideramos $B(1, m)$ con $m > 2B(1, g)$, $X \setminus B(1, m)$ tiene al menos $n + 1$, pues $B_g(k) \subset B_e(m)$ entonces las c.c.c. de $\Gamma_1 \setminus B(1, m)$ son al menos 2, y sin considerar Γ_1 ya teníamos $n - 1$ cuando quitábamos $B(1, k)$. Absurdo.

Entonces G tiene infinitos fines, 0, 1 o 2.

□

Ejemplo:

Con esto vemos que si tomamos el espacio $\{(x, x)\} \cup \{(x, -x)\} \subset \mathbb{R}^2$ con la distancia de longitud de curvas, no puede ser casi-isométrico a ningún grupo f.g. porque tiene exactamente 4 finales.

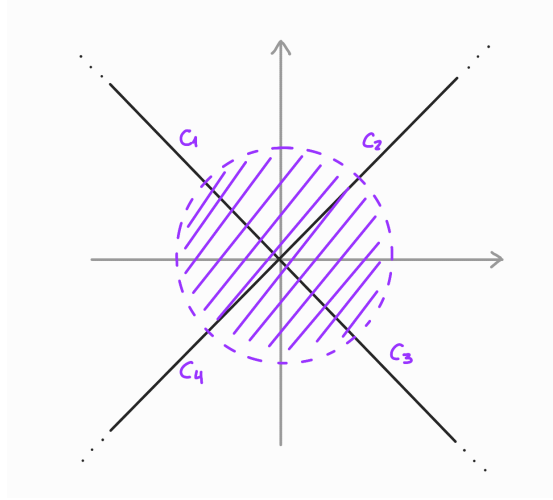


Figura 3.2:

Lema 3.4. Sean G es un grupo f.g., X un grafo de Cayley asociado y $B = B(1, n) \subset X$.
 $\implies X \setminus B$ tiene finitas componentes conexas por caminos.

Dem. Como vimos, X es un grafo conexo, localmente finito y homogéneo, es decir que cada vértice tiene la misma cantidad de aristas incidentes. En cada $B(1, n)$ hay una cantidad finita de vértices con una cantidad finita de aristas adyacentes. Así que los vértices que están a distancia exactamente n de la unidad 1 son finitos. Supongamos M .

Ahora, si cada punto $x \in \overline{B}^c$ está conectado con una curva por fuera de B a alguno de estos puntos que se encuentran a distancia n de e , S_n , entonces $X \setminus B$ tiene a lo sumo M c.c.c.

Dado $x \in \overline{B}^c$ tomemos el $y \in S_n$ con distancia mínima a x y consideremos el segmento geodésico que los une. Veamos que este segmento no puede pasar por $B(1, n)$.

Supongamos por absurdo que hay un punto en el segmento $\gamma(t) = z$ en la bola, es decir que $B(1, z) < n$. Entonces debe existir $s > 0$ tal que $d(\gamma(t+s), e) = n$. Observar que si $\gamma(t+s) = y$ entonces $l(\gamma) > d(y, x)$ lo que contradice que sea geodésico. Luego debe ser $\gamma(t+s) = y_n \neq y$.

Por otro lado, $d(y_n, x) < d(y, x)$. Pero el punto y es el que minimiza la distancia a x , lo que constituye un absurdo.

Con esto, el segmento que une x con y está en $X \setminus B(1, n)$. □

Ahora sí, probemos el teorema sobre los espacios de fines infinitos.

Teorema 3.5. *Si G es f.g. y ∂G es infinito entonces es un Cantor.*

Dem. Debemos probar que ∂G es compacto, totalmente desconexo y perfecto, es decir que cada punto es de acumulación.

Para ver que es totalmente desconexo basta construir para cada par de puntos $x, y \in \partial G$ dos abiertos disjuntos U, V que los contienen respectivamente y que verifican $\partial G = U \cup V$.

Vamos a trabajar en $X = \text{Cay}(G)$ para algún generador para poder representar los fines con rayos geodésicos.

Si $x \neq y$ entonces existen n rayos geodésicos desde 1, r_x, r_y que los representan, tales que $r_x[n, \infty), r_y[n, \infty)$ están en distintas c.c.c. de $X \setminus B(1, n)$ para n suficientemente grande, C_x y C_y respectivamente.

Tomemos $U' = \{r \text{ rayo en } X : r[n, \infty) \subset C_x\}$, los rayos que se meten en C_x a partir de el tiempo n . Definimos $U = \{\text{end}(r) : r \in U'\}$.

Como vimos, esto es un abierto de ∂X y es claro que contiene a x . Ahora, sea $V = U^c$. V está conformado por los fines cuyos representantes r verifican $r[n, \infty) \subset C_x^c$ para algún n .

Pero C_x^c es unión de finitas c.c.c. que cada una define un abierto en ∂X y V es la unión de estos abiertos.

Entonces construimos los abiertos U, V que buscábamos.

Para ver que ∂X es compacto, veamos que es secuencialmente compacto:

Tomemos $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \partial X$ y sean $r_n : [0, \infty) \rightarrow X$ rayos geodésicos con $r_n(0) = e$ y $\text{end}(r_n) = e_n$.

Por un lado son rayos geodésicos y cumplen que $d(r_n(t_1), r_n(t_2)) = |t_2 - t_1|$, con lo que resulta una familia equicontinua de funciones. Por otro lado observamos que $\{r_n(t)\} \subset \overline{B(1, t)}$.

El teorema de Arzela-Ascoli asegura la existencia de una subsucesión de rayos convergente a r un rayo geodésico que parte de 1. Es claro que si tomamos los fines que

representan, conforman una subsucesión de $\{e_n\}$ que converge a $\text{end}(r)$.

Aquí resta observar que el espacio ∂X cumple el primer axioma de numerabilidad:

Como cada c.c.c. C_i de $X \setminus B(1, n)$ tiene asociado un abierto, para cada punto $e \in \partial X$ podemos tomar la base de entornos C_n la c.c.c. de $X \setminus B(1, n)$ donde está contenido $r[t, \infty)$ para t suficientemente grande y r un representante de e .

Por último veamos que cada punto de ∂X es de acumulación:

Tomemos $e_0 \in \partial X$ y r_0 un representante que cumple $r_0(0) = e$. Escribiremos los puntos $\gamma_n = r_0(n)$. Sean e_1, e_2 fines distintos y distintos de e_0 .

Definamos $m(e_i, e_j)$ el máximo natural D que verifica que en $x \setminus B(1, D)$ los rayos $r_i[D, \infty)$ y $r_j[D, \infty)$ están en la misma c.c.c.. Vamos a tomar $M = \max\{m(e_i, e_j)\}$ con $i, j = 0, 1, 2$.

Dado un $\rho > M$ y un n suficientemente grande tal que $B(\gamma_n, \rho) \cap B(1, \rho) = \emptyset$, consideremos los rayos $\gamma_n \cdot r_i$.

Como la acción por traslaciones preserva las c.c.c., tenemos que todos los rayos $\gamma_n \cdot r_i[\rho, \infty)$ están en c.c.c. distintas de $X \setminus B(\gamma_n, \rho)$, y por lo tanto solo uno puede pasar por $B(1, \rho)$.

Supongamos $\gamma_n \cdot r_1$ no pasa por $B(1, \rho)$. Entonces podemos tomar un rayo que parte en 1 y representa el mismo fin e'_1 que $\gamma_n \cdot r_1$ (análogo a la construcción en lema 3.3) que es distinto a e_0 y cumple $m(e'_1, e_0) > \rho$, puesto que en $X \setminus B(1, \rho)$ γ_n y $e_0[\rho, \infty)$ están en la misma c.c.c..

Ahora hagamos lo mismo para los fines e_0, e'_1, e_2 . Con esto obtenemos un nuevo fin, e'_2 que es distinto a e_0 y sin embargo, al tomar M en este nuevo paso, sabemos que es estrictamente mayor.

Con esto, construimos una sucesión de fines, $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $e_n \neq e_0$ y $m(e_0, e_n) \rightarrow \infty$, con lo que la sucesión converge en ∂X a e_0 .

□

Capítulo 4

Construcción $DL(m, n)$

Los grafos Diestel-Leader fueron introducidos en [DL01] en paralelo a la conjetura de que algunos de estos no son casi-isométricos a ningún grafo de Cayley.

En este capítulo haremos una descripción geométrica de estos grafos, describiendo distintos aspectos, desde la construcción, su métrica, sus geodésicas y algunas características que son importantes en el desarrollo de la prueba que en 2017 Eskin, Fischer y Whyte culminan [EFW12], confirmando la conjetura.

Si bien originalmente se presentan dos formas distintas y equivalentes de construir este grafo, trabajaremos con una en particular, que es la utilizada en [EFW12]. Esta construcción a partir de árboles infinitos regulares es más amigable con la comprensión de las propiedades geométricas que queremos describir.

4.1. Árboles y función de Busemann

Consideremos un árbol infinito T_m , regular de grado $m + 1$.

La idea es etiquetar los vértices de T_m con alturas enteras, de manera que en cada vértice, de las $m + 1$ aristas adyacentes exactamente 1 sea adyacente a un vértice de altura menor, y las otras m sean adyacentes a vértices de altura mayor.

Para lograr esto debemos definir la función de Busemann en el árbol.

En general la *función de Busemann* en espacios métricos geodésicos, se define a partir de un rayo geodésico $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow X$

$$B_\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad B_\gamma(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(\gamma(t), x) - t$$

Obs.

- $B_\gamma(\gamma(0)) = 0$
- $B(\gamma(t_0)) = -t_0 \quad \forall t_0 \in [0, +\infty)$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} B_\gamma(\gamma(t)) = -\infty$

Pensaremos en la imagen de un vértice por la función de Busemann como la altura de éste respecto al rayo geodésico elegido. A partir de ahora la llamaremos h_γ o directamente h cuando no haya ambigüedad.

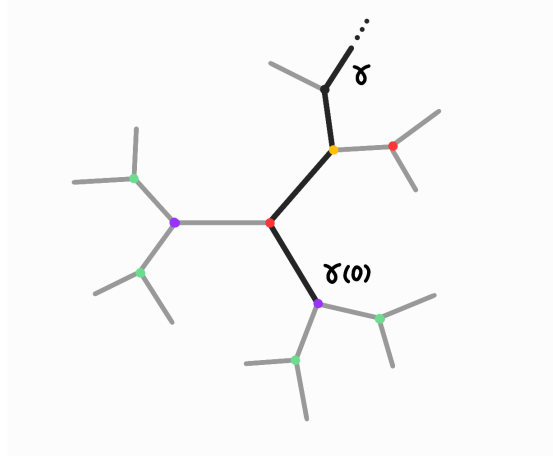


Figura 4.1: Busemann en un árbol regular de orden 3, T_3 .

En el caso del árbol, cada vértice tiene imagen entera por la función de Busemann. De hecho, la distancia $d(\gamma, x) = \inf_{y \in \gamma} d(y, x)$ se realiza en un vértice en γ , y_0 . Entonces, para todo $t > t_0$ con $\gamma(t_0) = y_0$ se tiene

$$d(\gamma(t), x) = d(y_0, x) + d(y_0, \gamma(t)) = d(y_0, x) + (t - t_0)$$

Por lo que

$$d(\gamma(t), x) - t = d(y_0, x) + t - t_0 - (t_0 + (t - t_0)) = d(y_0, x) - t_0$$

Si juntamos esto último con la observación, obtenemos que

$$h_\gamma(x) = h_\gamma(y_0) + d(y_0, x).$$

Es decir, para entender la altura de un punto, basta con calcular la distancia de éste al rayo geodésico y saber en qué punto ésta se realiza.

Asimismo, para cada vértice del árbol x hay un único vecino x' que está más cerca de γ , de hecho la distancia se realiza en el mismo $y_0 \in \gamma$. De manera que $h(x') = h(x) - 1$ y los restantes m vecinos, están más lejos, e igualmente la distancia se realiza en el mismo

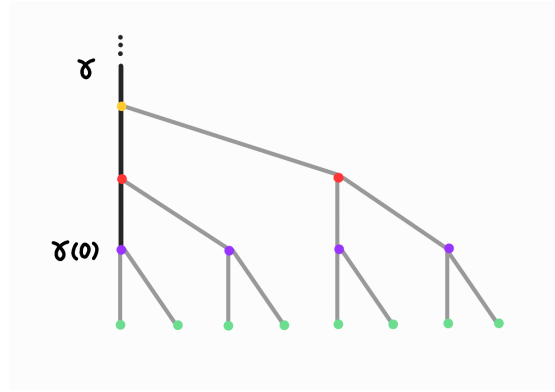


Figura 4.2: Busemann en T_3 . Los niveles corresponden con las curvas de nivel de h .

punto, por lo que $h(\hat{x}) = h(x) + 1$.

Observar que si tomamos un rayo geodésico que representa otro fin de T_m , entonces su imagen por h tiende a infinito, puesto que γ_0 y γ_1 representan el mismo fin $\iff$ se mantienen a distancia acotada $\forall t \in [0, +\infty)$.

Las siguientes son dos definiciones a partir de las funciones de Busemann que nos serán útiles:

Definición 4.1. *Los horociclos del árbol son los conjuntos $h^{-1}(k)$ con $k \in \mathbb{Z}$.*

Definición 4.2. *Una geodésica se dirá vertical si uno de sus fines es $[\gamma]$. Es decir, es una geodésica cuya imagen por h es $\mathbb{R}$.*

Obs. La geodésica vertical es una concatenación de puntos de alturas sucesivas. No hay dos puntos de igual altura.

4.2. Definición $DL(m,n)$

En esta sección definiremos el conjunto de vértices y aristas del grafo.

Definición 4.3. *El producto horocíclico de dos árboles T_m, T_n con funciones de Busemann h_m y h_n definidas a partir de γ_m y γ_n respectivamente, es el conjunto*

$$DL(m, n) = \{(x, y) \in T_m \times T_n \text{ tal que } h_m(x) + h_n(y) = 0\}$$

Podemos considerar que estamos tomando uno de los árboles de manera que “hacia arriba” la función de Busemann se va a infinito, y el otro, de manera que “hacia arriba” la función se va a menos infinito, y juntamos los arboles con los puntos $\gamma_m(0)$ y $\gamma_n(0)$ a la misma altura.

Definición 4.4. El grafo *Diestel-Leader* de constantes m y n , es el grafo cuyo conjunto de vértices es $DL(m, n)$ y cuyas aristas se definen de la siguiente manera

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x \sim x', y \sim y'$$

Dos puntos en DL están conectados si cada par de coordenadas lo está.

Nota. Para las construcciones y pruebas sobre $DL(m, n)$, haremos los dibujos para el caso particular $DL(2, 3)$ y algunas de las pruebas sin perder la generalidad de los resultados para valores cualesquiera de m y n .

Dotaremos al grafo de una orientación fijando una de las funciones de Busemann de los árboles como función altura:

$$h(x, y) = h_m(x) = -h_n(y)$$

La orientación es tal que cada vértice tiene m aristas salientes y n entrantes.

Lema 4.1. $DL(m, n)$ es un grafo regular de grado $m + n$.

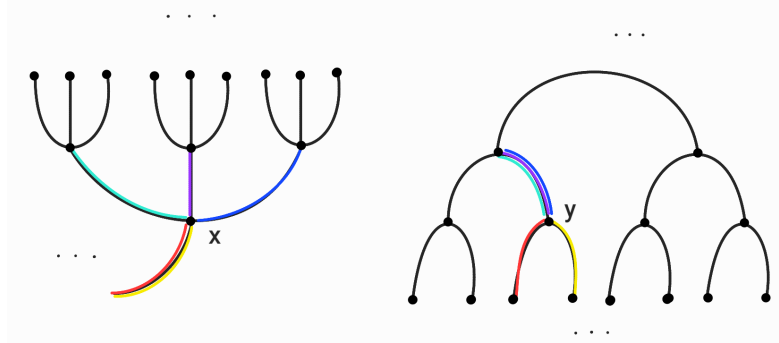


Figura 4.3: Aristas de $DL(3,2)$

Dem. Considerar los árboles T_m, T_n con sus funciones altura.

Tomemos el punto (x, y) en $DL(m, n)$, de altura $h(x, y) = h$. Cualquier vecino de (x, y) debe tener componentes vecinas a cada componente.

Tiene exactamente n vecinos en el sentido creciente de T_n : los pares $(\hat{x}, \hat{y})$ con $\hat{y}$ uno de los n vecinos de y de altura $h + 1$ y $\hat{x}$ el único vecino de x con altura $h - 1$.

Tiene exactamente m vecinos en el sentido creciente de T_m : los pares (x_1, y_1) con $h(y_1) = h - 1$ y $h(x_1) = h + 1$.

Como tienen alturas distintas, estos dos conjuntos no comparten puntos. Por lo que (x, y) tiene $m + n$ vecinos.

Esto es independiente del punto, con lo que concluimos la prueba. $\square$

4.3. Función distancia

La distancia natural en un grafo es la de conteo: el largo de un camino es la cantidad de aristas que recorre. En el caso de $DL(m, n)$ se puede describir en términos de las distancias de las dos componentes de los puntos, en cada árbol, y la función de Busemann.

Lema 4.2. Sean $(x, y), (x', y')$ en DL y d la distancia de caminos del grafo. Entonces

$$d((x, y), (x', y')) = d(y, y') + d(x, x') - |h(x) - h(x')|.$$

Primero hagamos una definición para un árbol regular T con función de Busemann h_γ :

Definición 4.5. Sea $x \in T$, el rayo γ_x es el rayo geodésico que comienza en x y $\lim_{t \rightarrow \infty} h(\gamma(t)) = -\infty$

Dados x e y en T ,

$$x \wedge y := \gamma(t) \text{ con } t = \min\{t \geq 0 \text{ tal que } \gamma_x(t) = \gamma_y(s) \text{ para algún } s\}$$

El ínfimo entre dos vértices, es el punto donde los rayos a menos infinito de ambos se encuentran.

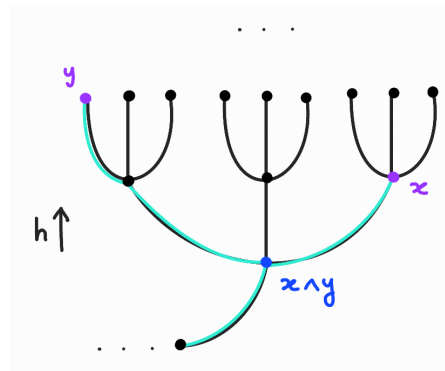


Figura 4.4: ínfimo entre x e y , $x \wedge y$

Dem. Observar que necesariamente $h(x \wedge y) \leq h(x)$ y $h(x \wedge y) \leq h(y)$. Además, cualquier camino de x a y necesariamente debe pasar por $x \wedge y$.

Los caminos en $DL(m, n)$ proyectan a caminos en cada uno de los árboles. Entonces, necesariamente cualquier camino entre (x, y) y (x', y') debe pasar por puntos de la forma $(x \wedge x', \hat{y})$ y $(\hat{x}, y \wedge y')$.

Ahora, por la condición de las alturas, un camino que se acerca en el primer árbol al ínfimo de las primeras componentes, se aleja en el segundo árbol del ínfimo de las segundas componentes.

Caso $h(x, y) = h(x', y')$:

Primero consideremos el camino más corto entre x y x' . Un camino en $DL(m, n)$ que recorra esto en la primera componente necesariamente vuelve al punto y en la segunda componente, pues va en la dirección opuesta al ínfimo de y e y' .

Entonces, de (x, y) a (x', y) como mínimo necesitamos un camino de largo $d(x, x')$.

Con un razonamiento análogo, de (x', y) al punto (x, y') se necesita un camino de largo $d(y, y')$.

Por lo que construimos un camino de largo $d(x, x') + d(y, y')$, y no hay forma de construir uno más corto por la restricción de pasar por los ínfimos y la complementariedad de una componente con la otra.

Caso $h(x, y) > h(x', y')$:

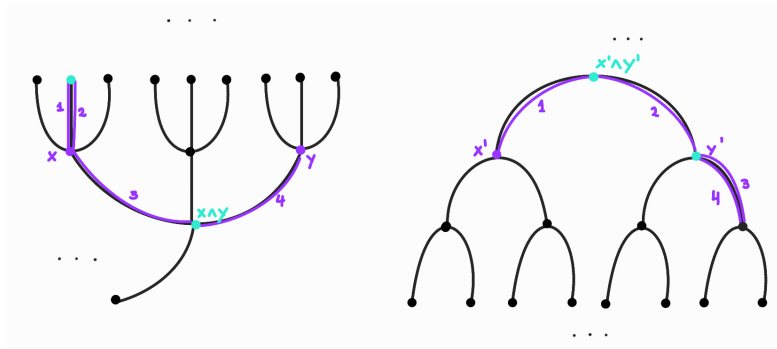


Figura 4.5:

En este caso, tomemos un camino que parta de (x, y) y en la segunda componente termine en y' . Por la diferencia de alturas, este camino en la primera componente sube, y al bajar necesariamente pasa por x , pero hace $h(x, y) - h(x', y')$ aristas más.

Entonces, construimos un camino de largo $d(y, y')$ que en su primera componente

termina en un punto $h(x, y) - h(x', y')$ más cerca de x' . Luego para llegar en la primera componente hasta x debemos recorrer un camino de largo $d(x, x') - (h(x, y) - h(x', y'))$.

Nuevamente, necesariamente debemos recorrer estos caminos mínimos en cada componente. Por lo que $d((x, y), (x', y')) = d(y, y') + d(x, x') - |h(x) - h(x')|$.

□

Capítulo 5

Geometría del grafo

En este capítulo veremos algunas de las propiedades geométricas de este grafo. A partir de la definición como grafo y su distancia, veremos algunos conjuntos importantes de geodésicas y entenderemos qué rol juega cada uno de los árboles que lo componen.

En este capítulo notaremos $DL := DL(m, n)$

5.1. Representación de puntos de DL con tres coordenadas

Para representar con 3 coordenadas los puntos del DL nos auxiliaremos de los árboles que lo componen y la altura definida por las funciones de Busemann prefijadas.

Tomemos un punto en DL , p , y consideremos los vértices en cada árbol que lo definen. Ahora podemos considerar en T_m una geodésica con las siguientes condiciones: uno de sus fines es el que representa γ_m , el rayo que define h , y que pase por el vértice. Lo mismo en T_n .

Estas geodésicas definen un fin de T_m y de T_n respectivamente, ninguno de ellos el de la función de Busemann. Entonces, sean x a y estos elementos de $\partial T_m \setminus [\gamma_m]$ y $\partial T_n \setminus [\gamma_n]$ respectivamente.

Luego, una representación de p sería (x, y, z) donde $z = h(p)$.

En efecto, una vez elegidos los elementos del borde de los árboles y las geodésicas que representan, esto define un camino en DL de vértices de alturas sucesivas, por lo que con la tercera coordenada queda determinado un único vértice del grafo.

Ahora, es claro que cada punto no tiene una única representación, puesto que al tomar una geodésica que pase por el punto, no están unívocamente definida.

Con esta representación en tres coordenadas, lo natural es preguntarnos ¿qué son los planos $y = cte$, $x = cte$ y $z = cte$?

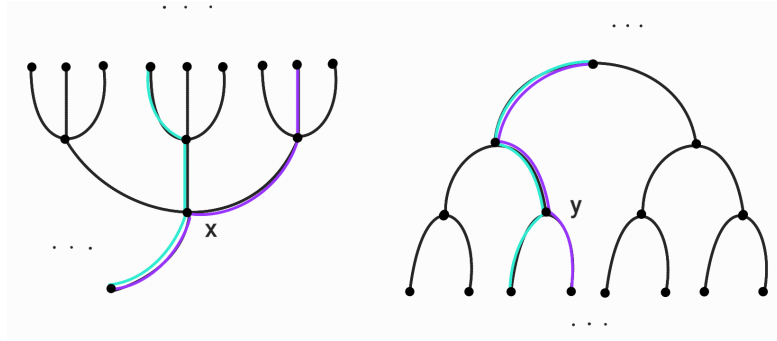


Figura 5.1: Representación de un punto

Los puntos de los planos $y = cte$ son de la forma (x, y_0, z) .

Fijado y_0 , tenemos un único punto del árbol T_n en cada altura entera, entonces cada “nivel” de T_m tiene una copia en $y = y_0$, pues cada punto aparece una única vez, emparentado con el único punto de altura opuesta.

Se respeta la estructura del grafo ya que todos los puntos del rayo y_0 están consecutivamente conectados por una arista en T_n , entonces cada par de vértices en el plano $y = y_0$ esta conectado por una arista si y solo si el vértice en T_m lo está.

Es decir que estos planos son copias de T_m dentro de DL y tenemos una por cada elemento de ∂T_n .

Con un razonamiento análogo concluimos que los planos $x = cte$ son copias del árbol T_n .

Es decir que este grafo tiene infinitas copias de estos dos árboles, que son espacios hiperbólicos en el sentido de Gromov.

En cada uno de estos árboles hay una noción de arriba y abajo. Los planos $y = y_0$ son copias *hacia arriba* de T_m , y los planos $x = x_0$ son copias *hacia abajo* de T_n .

Los puntos (x, y_0, z_0) (“líneas paralelas al eje x”) son horociclos en T_m , lo mismo para las “líneas” (x_0, y, z_0) . Por lo tanto, los planos $z = z_0$ son el producto de un horociclo de T_m con el horociclo de T_n de altura opuesta.

5.2. Geodésicas

En lo que sigue vamos a describir algunas geodésicas del espacio.

Las *geodésicas verticales* son curvas de la forma (x_0, y_0, t) , $(x_0, y_0, -t)$, orientadas hacia arriba y abajo respectivamente. Observar que estas geodésicas son la intersección de planos $x = x_0$ e $y = y_0$, o lo que es igual, la imagen de un geodésicas vertical en un árbol por un encaje dado.

Esencialmente hay dos tipos de rayos geodésicos verticales, los que su imagen por h se va a $+\infty$ y los que su imagen por h se va a $-\infty$.

Un rayo que crece en altura en DL , tiene componente en el segundo árbol que decrece en altura. La única posibilidad de un rayo que decrece en altura en el árbol es que represente el mismo fin que define la función de Busemann.

Mientras que en el primer árbol un rayo que crece en altura siempre representa un fin distinto al de la función de Busemann, entonces las direcciones posibles son $\partial T_m \setminus [\gamma_m]$.

Razonando de forma análoga, si miramos los rayos que decrecen en altura, los fines que representan en el segundo árbol son $\partial T_n \setminus [\gamma_n]$.

Observar que estos casos son disjuntos, un rayo o bien crece o bien decrece en altura. Para cada caso, como el rayo está definido por su comportamiento en uno de los árboles, podemos considerar las clases de fines que representan en los mismos y definir:

$\partial^+(DL)$ las clases de rayos geodésicos verticales crecientes

$\partial^-(DL)$ las clases de rayos geodésicos verticales decrecientes

Como vimos, $\partial^+ DL \cup \partial^-(DL) = \partial T_m \setminus (\gamma_m) \cup \partial T_n \setminus (\gamma_n)$.

Además sabemos que ∂T_m y ∂T_n son topológicamente un cantor.

Se puede ver que el siguiente espacio es homeomorfo a cada componente $\partial^+(DL)$ y $\partial^-(DL)$.

Definición 5.1. Los números n -ádicos son el conjunto $\mathbb{Q}_n$ de series formales

$$\xi = \sum_{i=k}^{+\infty} \xi_i n^i, \text{ donde } \xi_i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ y } k \in \mathbb{Z}. \quad (5.2.1)$$

La distancia entre $\xi, \eta \in \mathbb{Q}_n$ es n^{-I} donde I es el mayor de $\mathbb{Z} \cup \infty$ que cumplen $\xi_i = \eta_i$ para todo $i \leq I$.

Los números n -ádicos se pueden construir también como la completación de $\mathbb{Q}$ con un módulo específico, que induce esta distancia en $\mathbb{Q}_n$.

Para nuestro propósito usaremos la definición de arriba, y probaremos el siguiente

Lema 5.1. *La compactificación por un punto de $\mathbb{Q}_n$ es un Cantor.*

Debemos ver que $\mathbb{Q}_n$ es localmente compacto, cerrado y no compacto, todo punto es de acumulación (perfecto), es completo y totalmente desconexo.

Antes de adentrarnos en la prueba, debemos describir algunas propiedades de este conjunto.

Aquí la topología es la definida por la distancia.

La primera observación importante es que las bolas abiertas son también conjuntos cerrados. En efecto, dado r , existe un máximo $I \in \mathbb{Z}$ que cumple $n^{-I} < r$. Entonces $B_\xi(r) = \overline{B_\xi(n^{-I})}$.

Por otro lado, fijado $m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, los conjuntos $B_{j,m} := \{\nu \in \mathbb{Q}_n / \nu_j = m\}$ son también abiertos. Son unión de bolas $B_\alpha(n^{-(j-1)})$ con centro en los puntos α que tienen como término j -ésimo m y en las anteriores cualquier valor (basta con tomar $n^{j-1} \alpha$ distintos, variando los primeros términos).

Dem. del lema. Como vimos, las bolas abiertas son compactas, lo que es suficientes para que el espacio sea localmente compacto.

El espacio no es compacto, pues dado cualquier $\xi \in \mathbb{Q}_n$ el conjunto $\{(B_\xi(n^{-I}))^c\}_{I \in \mathbb{Z}}$ es un cubrimiento por abiertos que no tiene un sub cubrimiento finito.

Para ver que es totalmente desconexo, veamos que dos puntos siempre se pueden separar por un par de clopens (conjuntos abiertos y cerrados). Si $\xi \neq \nu$ entonces $\exists i \in \mathbb{Z}$ tal que $\xi_i \neq \nu_i$. Entonces $B_{i,\xi_i} = \{\alpha \in \mathbb{Q}_n / \alpha_i = \xi_i\}$ y B_{i,ξ_i}^c separan los puntos claramente.

Ya vimos que A es abierto. Ahora, $B_{i,\xi_i}^c = \bigcup_{m \neq \xi_i} B_{i,m}$. Entonces también es abierto y cada uno de los conjuntos es un clopen.

Por último, tomamos $\xi \in \mathbb{Q}_n$, $\xi = \sum_{i=k_0}^{\infty} \xi_i n^i$ con algún $\xi_i \neq 0$. Entonces $\xi_k = \sum_{i=k_0}^k \xi_i n^i$ es una sucesión convergente al punto. (Observar que si ξ no tiene una cola de 0's $\xi_k \neq \xi \forall k$).

Para asegurar que $\xi_k \neq \xi$ si ξ tiene una cola de 0's, definimos

$$\xi_k = \begin{cases} \sum_{i=k_0}^k \xi_i n^i & \text{si } k < t \\ \sum_{i=k_0}^{t-1} \xi_i n^i + n^k & \text{si } k \geq t \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Si $\xi = 0$ entonces $\xi_k = \sum_{i=k}^{\infty} n^i$ tiende a ξ .

□

Casi- geodésicas: Dados dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) , consideraremos la concatenación del encaje de dos segmentos geodésicos.

- Consideremos en T_m una geodésica vertical pasando por x_0 (existe al menos una). Tomemos el encaje de T_n asociado a la misma, $\phi_0 : T_n \rightarrow DL$
- En T_n considero el segmento geodésico de y_0 a y_1 , $l : [0, k] \rightarrow T_n$ y lo mando por ϕ_0 .
- Obtengo un segmento en DL , $\phi_0(l)$ empezando en (x_0, y_0) , terminando en $(\phi_0(l(k)), y_1)$.
- Consideramos en T_n una geodésica vertical pasando por y_1 y tomemos nuevamente el encaje asociado, $\phi_1 : T_m \rightarrow DL$
- En T_m considero el segmento geodésico que va de $\phi_0(l(k))$ a x_1 , $s : [0, k'] \rightarrow T_m$ y lo mando por ϕ_1
- Obtengo un segmento en DL empezando en $(\phi_0(l(k)), y_1)$, terminando en (x_1, y_1)

Ahora los dos segmentos que obtuve en DL los puedo concatenar, obteniendo así una casi-geodésica con los puntos inicial y final deseados.

El siguiente resultado es una característica muy importante de DL para el estudio de las casi-isometrías. Es un resultado geométrico, sobre los segmentos verticales y la relación con las dos componentes del grafo (los árboles que lo definen).

Lema 5.2 (Lema del cuadrilátero). *Dados cuatro puntos $p_1, p_2, q_1, q_2 \in DL$ y cuatro segmentos geodésicos verticales $\gamma_{ij} : [0, l_{ij}] \rightarrow DL(m, n)$ $i, j = 1, 2$ tales que*

- $\gamma_{ij}(0) = p_i$
- $\gamma_{ij}(l_{ij}) = q_j$
- $\forall t > 0$

$$d(\gamma_{i1}(t), \gamma_{i2}(t)) > 0 \text{ y } d(\gamma_{1j}(l_{1j} - t), \gamma_{2j}(l_{2j} - t)) > 0$$

(divergen inmediatamente para delante y para atrás)

Entonces o bien todos los segmentos geodésicos crecen en altura, p_1 y p_2 están en el mismo x -horociclo y q_1 y q_2 están en el mismo y -horociclo.

o bien todos los segmentos geodésicos decrecen en altura, p_1 y p_2 están en el mismo y -horociclo y q_1 y q_2 están en el mismo x -horociclo.

Obs. La geometría de $DL(m, n)$ tiene encajadas infinitas copias de espacios hiperbólicos (los árboles) donde las geodésicas divergen rápidamente, en unos hacia arriba y en otros hacia abajo.

Este lema dice esencialmente que para formar un cuadrilátero de geodésicas verticales que diverjan necesariamente debemos tomar pares de puntos dentro de un mismo espacio hiperbólico encajado, dependiendo de la orientación de las geodésicas en qué componente se deben encontrar los puntos.

Dem. Primero debemos observar que en DL si dos segmentos parten de un punto y divergen inmediatamente, deben o bien ir en sentidos opuestos o bien en una de sus coordenadas partir hacia dos puntos distintos de ∂T_m .

Miremos p_1 y los dos segmentos que parten de p_1 . Si γ_{11} y γ_{12} parten en sentidos opuestos, q_1 y q_2 , que son los puntos finales, están conectados por un segmento vertical.

Ahora, q_1 y q_2 también son los puntos finales de γ_{21} y γ_{22} , que son segmentos verticales, entonces necesariamente p_2 está en una geodésica vertical definida por los otros tres puntos y los segmentos coinciden en al menos una arista, contradiciendo el tercer punto.

Si p_2 está en una geodésica vertical que no contiene al segmento q_1, p_1, q_2 entonces los segmentos que parten de q_1 y q_2 no podrían ser ambos verticales.

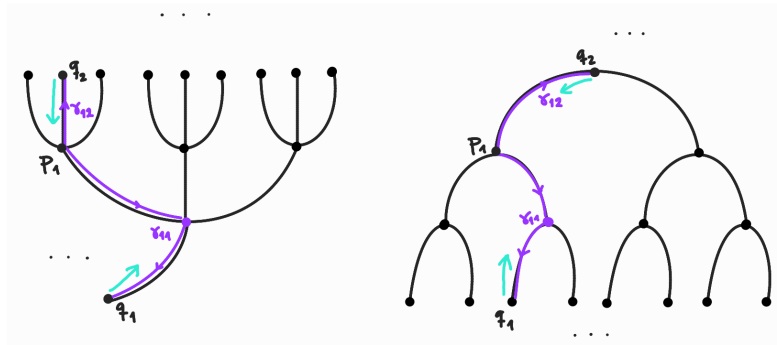


Figura 5.2:

Entonces los segmentos γ_{1j} deben ir en el mismo sentido, y lo mismo vale para γ_{2j} . Esto implica que o bien $h(q_i) > h(p_j)$ o bien $h(p_i) > h(q_j)$.

Supongamos que $h(q_i) > h(p_j)$. Los rayos geodésicos verticales que parten de q_1 y q_2 y bajan en altura, en el primer árbol se encuentran en el mínimo $q_1 \wedge q_2$ y a partir de ahí se acompañan. En el segundo árbol eventualmente se acompañan (al menos desde el q_i más cercano en altura).

Entonces, la altura de los p_j no puede ser menor que la de $q_1 \wedge q_2$ porque contradice el tercer punto. Si la altura de algún p_i es estrictamente mayor a la del mínimo, el segmento que una con algún q_j ya no sería vertical.

Con esto, la primera componente de p_1 y p_2 es la misma ($q_1 \wedge q_2$). Es decir, p_1 y p_2 están en un mismo x-horociclo.

Además, con el mismo razonamiento, las segundas componentes de q_1 y q_2 deben ser la misma.

El razonamiento cuando $h(p_i) > h(q_j)$, debe cambiar un árbol por otro, puesto que las geodésicas que crecen en un árbol, decrecen en el otro. Con esto, p_1 y p_2 deben estar en el mismo y-horociclo y q_i y q_j en el mismo x-horociclo.

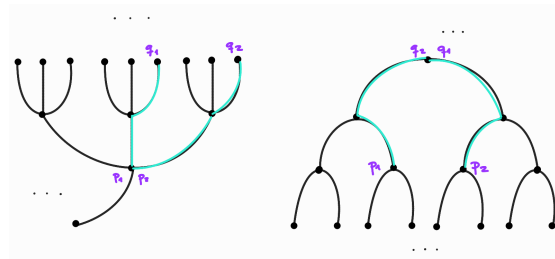


Figura 5.3: Cuadrilátero

□

Obs. Si los puntos p_1, p_2, q_1, q_2 no son exactamente los puntos iniciales y finales de los segmentos, y consideramos un error menor a 1, los razonamientos son todos válidos, pues se mantienen en las aristas adyacentes a los puntos iniciales y finales de los segmentos.

En ese caso debemos corregir que p_1 y p_2 quedan en el mismo horociclo a menos de un error que corresponde a la distancia de cada uno al vértice común.

Esto es útil para poder aplicar el lema incluso cuando tomamos la imagen de un cuadrilátero por una casi-isometría.

5.3. Medida de volumen

Definiremos dos tipos de medida en DL. Por un lado tenemos el volumen natural en un grafo es el volumen de conteo, dado un conjunto $B \subset DL$ su volumen es $|B| = \{p \in B\}$.

Por otro, se define una medida que está más relacionada con la estructura métrica que le dimos al espacio, donde las distancias dependen fuertemente de la altura.

Definición 5.2. La medida μ es la medida de conteo del grafo con un factor multiplicativo que depende de la altura: $\mu = \text{conteo} \times n^{h(p)} m^{-h(p)}$

Veamos en particular un tipo de conjunto que se traslada con volumen constante, pero su medida vería según la altura:

Los subconjuntos que vamos a describir a continuación son las *cajas* en torno a un punto de tamaño L , que podrían pensarse como entornos de un punto. La caracterización de $QI(DL)$ requiere un estudio local de las casi isometrías, por lo que nos será muy útil conocer bien la estructura de estas cajas.

Sea $L \in 2\mathbb{Z}$. Consideremos el conjunto $B(L) = h^{-1}[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, formado por infinitas componentes conexas, todas con puntos en los $L + 1$ niveles distintos de alturas. Tomemos p tal que $h(p) = 0$. Una caja de tamaño L en torno al punto p es

$$B_p(L) := \text{la componente conexa de } B(L) \text{ que contiene a } p$$

Para definir una caja en torno a cualquier punto p de altura $h(p)$ de tamaño L , consideremos $B_{h(p)}(L) = h^{-1}[h(p) - \frac{L+1}{2}, h(p) + \frac{L+1}{2}]$.



Figura 5.4: $h^{-1}[-1, 1]$

Definición 5.3. Una caja de tamaño L en torno al punto p , de altura $h(p)$ es

$$B_p(L) := \text{la componente conexa de } B_{h(p)}(L) \text{ que contiene a } p$$

Obs. La razón de tomar preimagen de un intervalo con extremos no enteros es que el borde de estas cajas tenga medida nula, pues no contiene vértices. De todas maneras, lo que nos interesa de la estructura de la caja es esencialmente su estructura como grafo, por lo que ignoraremos las “medias aristas” en sus extremos.

La construcción de la caja se puede pensar por árbol, pues la estructura es la misma en cada uno: la componente conexa de tomar el conjunto $h^{-1}([h(p) - \frac{L+1}{2}, h(p) + \frac{L+1}{2}])$

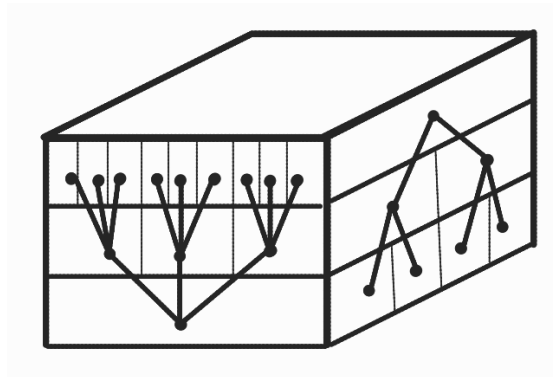


Figura 5.5: $B_p(1) = cc$ que contiene a p de $h^{-1}[h(p) - 1, h(p) + 1]$

que contiene al punto.

Miremos el árbol T_m , y el correspondiente punto. Cuando bajamos en altura tenemos siempre un único punto conectado, entonces al estar tomando componente conexa, en el nivel de menor altura está el único punto conectado a p .

Entonces la componente conexa es lo mismo que tomar todos los segmentos de largo $L + 1$ que parten de allí hacia arriba.

Con lo anterior, podemos concluir que en el nivel de mayor altura hay m^L puntos (en un árbol de orden $m+1$).

Ahora, si miramos en el otro árbol, la construcción es idéntica, solo que los puntos en el DL están a alturas opuestas. Es decir, tendremos un único punto en el nivel de mayor altura y n^L en el de menor altura.

Luego en los niveles extremos hay segmentos de un y-horociclo y un x-horociclo arriba y abajo respectivamente. Como vimos, el tamaño de los segmentos depende únicamente del tamaño de la caja L .

Por cada punto en el horociclo superior y el inferior, hay un segmento geodésico con puntos dentro de la caja que los une. Se puede pensar entonces que esta caja conforma un grafo bipartito completo entre los dos horociclos.

Hay en cada caja $n^L m^L$ geodésicas verticales desde la tapa superior a la inferior, todas de largo $L + 1$.

La estructura de segmentos geodésicos verticales no depende del punto en que se centra la caja, pues como vimos es siempre un grafo bipartito completo.

Para medir estas cajas, debemos primero contar los puntos en cada plano $z = z_0$. Supongamos que $h(p) = 0$.

En el nivel más bajo de la caja tenemos el y-horociclo de tamaño n^L , n^L puntos de altura $-\frac{L}{2}$ entonces

$$\mu(h^{-1}(-\frac{L}{2}) \cap B(L)) = n^L \times n^{-L/2} m^{L/2} = n^{L/2} m^{L/2}. \quad (5.3.1)$$

Para contar los puntos en un plano más arriba recordar que el árbol T_m crece hacia arriba y T_n hacia abajo, entonces la cantidad de puntos baja en uno el exponente de n y sube en uno el de m por cada nivel que se sube. A la vez que el factor exponencial de μ , por cada nivel que se sube, sube en uno el exponente de n y baja en uno el de m .

Por lo que se compensan, y cada plano en $B(L)$ mide lo mismo: $n^{L/2} m^{L/2}$. Finalmente

$$\mu(B(L)) = (L+1) n^{L/2} m^{L/2} \quad (5.3.2)$$

Sin considerar los coeficientes de la altura en cada plano, el volumen de estos conjuntos queda:

$$|B(L)| = \sum_{i=0}^{L+1} n^i m^{L+1-i} \quad (5.3.3)$$

Es claro que es indiferente qué punto es el de partida para la construcción de la caja y su altura. No así la medida μ .

Tomemos ahora una caja de tamaño L en torno a un punto p , de altura h .

Como grafo tiene la misma estructura. La cantidad de puntos en cada plano $z = z_0$ y la cantidad de niveles es la misma.

Cambia el factor multiplicativo con la altura, que en cada caso se multiplica por $n^h m^{-h}$, pues cada nivel está h más arriba que el correspondiente en una caja en torno a un punto de altura 0. Luego

$$\mu(B_p(L)) = (L+1) n^{h+\frac{L}{2}} m^{\frac{L}{2}-h}. \quad (5.3.4)$$

Resulta que

$$\mu(B_p(L)) = \mu(B_0(L)) n^h m^{-h} = \mu(B_0(L)) \left(\frac{n}{m}\right)^h.$$

En efecto, si trasladamos una caja la medida definida aumenta o disminuye con un factor exponencial de $\frac{n}{m}$. Es decir que lo que define a la clase de casi-isometría de DL como espacio métrico es este ratio $\frac{n}{m}$ y no los valores m y n de manera independiente.

Teselado

Por la estructura de las cajas, podemos construir un teselado de cajas más pequeñas.

Dado $L > R$ con $L + 1/R + 1 \in \mathbb{Z}$ entonces

$$B(L) = \bigcup_{i \in I} B_i(R) \text{ con } \mu(B_i(R) \cap B_j(R)) = 0 \ \forall i \neq j \quad (5.3.5)$$

Como $L + 1/R + 1 \in \mathbb{Z}$ podemos dividir $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ en intervalos cerrados I_j de largo $R + 1$. Cada componente conexa de $h^{-1}(I_j)$ es en sí misma una caja de tamaño R .

Las únicas cajas que se intersectan son algunas de las definidas por intervalos consecutivos, pero incluso esas se intersectan en los puntos de $h^{-1}(k)$ con $k \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ que miden 0.

Capítulo 6

Conjetura de Diestel-Leader

Hasta ahora hemos visto que $DL(m, n)$ es un grafo conexo, localmente finito y regular de orden $m+n$.

En el caso $m = n$ resulta que $DL(q, q)$ es el grafo de Cayley del grupo Lamplighter $L_q := \mathbb{Z}_q \wr \mathbb{Z}$.

Este grupo es un wreath product restricto, es decir, un producto semidirecto

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_q \rtimes \mathbb{Z}$$

donde la acción de $\mathbb{Z}$ está dada por $k \cdot \nu(h) = \nu(h - k)$.

Los elementos de este grupo son pares (ν, k) donde ν es una lista bi-infinita de estados (q estados posibles) donde solo finitas son no nulas y una de sus entradas destacada $\nu(k)$, indicado por la segunda coordenada k .

Para identificar el grafo $DL(q, q)$ con el grupo recordemos que en cada árbol T_{q+1} se elige un rayo geodésico $\gamma : [0, \infty) \rightarrow DL$ que define la función de Busemann y los horociclos del árbol son las curvas de nivel.

Cada punto del horociclo tiene asociado un único rayo geodésico que inicia en el punto y representa el mismo fin de T_{q+1} que γ . Si etiquetamos las aristas salientes de cada vértice de 0 a $q - 1$ entonces el rayo se identifica con un elemento de Σ_q .

Así a este punto le podemos asociar un par $(\nu, k) \in \Sigma_q \times \mathbb{Z}$ donde Σ_q es el conjunto de sucesiones $\{a_n\}_{n \leq 0}$ en $\mathbb{Z}_q$ con solo finitas entradas no nulas y k el valor de la función de Busemann en el horociclo.

Lo mismo se puede hacer en el otro árbol, donde la función de Busemann toma el valor opuesto.

Con esto, dado (ν, k) un elemento de $\mathbb{Z}_q \wr \mathbb{Z}$, se parte ν en dos sucesiones, $\nu^+ = \nu(k+n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $\nu^- = \nu(k-n)_{n \in \mathbb{N}}$ y entonces se asocia el vértice en el horociclo k y con el par de sucesiones ν^+ y ν^- de cada árbol.

La descripción completa de que $\text{Cay}_S(L_q) = DL(q, q)$ para algún generador S se puede encontrar en el trabajo de Woess [Woe05].

Ahora bien, cuando tomamos $m \neq n$ a pesar de ser homogéneo y que su espacio de fines tiene un único punto, no es casi-isométrico a un grafo de Cayley.

En lo que sigue probaremos las dos propiedades mencionadas.

6.1. Espacio de fines de DL

En esta sección probaremos el siguiente

Lema 6.1. *El espacio de fines de $DL(m, n)$ tiene un único punto, $\partial DL = \{x\}$.*

Dem. Para ver esto, lo que se puede probar es que para cada conjunto acotado $B \subset DL$ el espacio $DL \setminus B$ es conexo por caminos.

La dificultad que se presenta es que si pensamos en cada componente, $T_m \setminus B_m$ y $T_n \setminus B_n$ donde B_m y B_n son las componentes de B , quedan espacios desconexos. De todas maneras, con cuidado se puede sortear el conjunto B en DL para conectar cualquier par de puntos afuera de éste.

La idea es la siguiente. Pensemos en un árbol T_m con su función altura. Si quitamos un conjunto acotado B_m , el espacio $T_m \setminus B_m$ es desconexo y podemos dividir las c.c. en dos grupos, las que son sombreadas por los puntos de B_m y la restante.

En un árbol regular T con función altura h , la sombra de un conjunto acotado B es el conjunto de puntos de $T \setminus B$ que están en algún rayo geodésico vertical que parte de algún punto de B y crece en altura. Se puede ver que la sombra de un conjunto acotado tiene una altura mínima h_0 . Mientras que en la c.c. restante de $T \setminus B$ hay puntos de todas las alturas.

Nos concentraremos en conectar un punto en la sombra de B y otro en la c.c. que no está en la sombra. Con esto, si queremos conectar dos puntos en c.c. distintas de la sombra, podemos conectar cada uno a un punto en la c.c. que no está en la sombra, y conectar estos.

Claramente, esto no lo podemos hacer en el árbol. Siempre que queremos conectar un punto en la sombra de B y uno en la otra c.c. debemos pasar por B . Entonces debemos

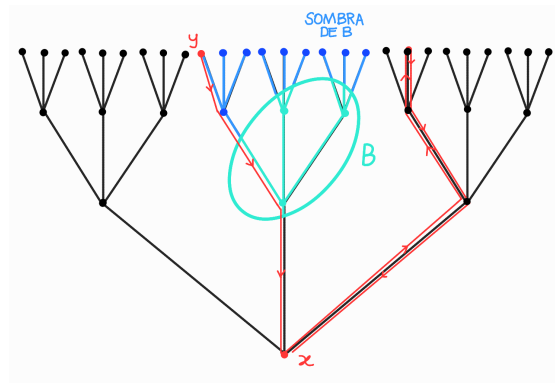


Figura 6.1: Sombra de B

que considerar el otro árbol de DL para poder esquivar B .

En el otro árbol, tenemos la misma situación, con la salvedad de que la sombra decrece en altura en DL . Es decir, que si partimos de un punto que en T_m está en la sombra de B_m en el árbol T_n se encuentra en la c.c. que no es sombra de B_n .

Esto es importante porque nos permitirá movernos en altura sin restricciones, esquivando B_m en la primera componente, para luego hacer lo mismo en T_m y esquivar B_n .

Sea $B = (B_m, B_n)$ un conjunto acotado de DL y tomemos dos puntos fuera de B : $x = (x_1, x_2)$ tal que x_1 esté en la sombra de B_m y un punto $y = (y_1, y_2)$ tal que y_1 esté en la otra c.c. (con lo que y_2 está en la sombra de B_n). Comencemos a construir un camino desde y .

Puedo conectar el punto y_1 con un punto p_1 que esté a la misma altura que x_1 evitando B_m .

En la otra componente, trazo un camino entre y_2 (que está en la sombra de B_n) y el punto x_2 . En este árbol debo atravesar B_n , pero como en el primer árbol me mantuve fuera de B_m el camino en DL no pasa por B .

Hasta aquí, llegamos a un punto $p = (p_1, p_2)$ que está a la misma altura que x y que cumple $p_2 = x_2$.

Entonces, para conectar p con x debemos bajar hasta el mínimo entre p_1 y x_1 y subir, atravesando B_m . Como la segunda componente ya es la que queremos, y está fuera de la sombra de B_n , en el segundo árbol podemos bajar y subir por un mismo camino que evita B_n porque en altura puedo moverme libremente.

Entonces, en la primer coordenada consigo llegar a x_1 , atravesando B_m , pero como

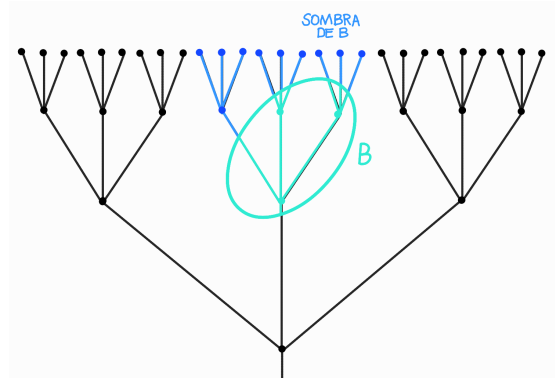


Figura 6.2: Camino en una componente

en la segunda evito B_n , el camino no atraviesa B . Ahora conecté p con x .

Concatenando, construimos un camino en DL de y a x que evita B y probamos así que $DL(m, n) \setminus B$ es conexo por caminos y el espacio de fines tiene un único punto. $\square$

6.2. Isom(DL)

En esta sección queremos ver que el grafo $DL(m, n)$ es un espacio homogéneo. Si bien no vamos a describir el grupo $Isom(DL)$, podemos ver que para cada par de puntos x, y existe una isometría que lleva uno en otro.

Como cada árbol que compone al grafo sí es homogéneo, lo natural es pensar las isometrías por componente. Dados $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ en DL sabemos que existen en T_m una isometría ϕ_m que lleva x_1 en x_2 y en T_n una isometría ϕ_n que lleva y_1 en y_2 .

No es inmediato que el producto de estas isometrías esté bien definido en DL o sea una isometría del grafo.

Si consideramos

$$\phi : DL(m, n) \rightarrow DL(m, n) \quad (x_1, x_2) \mapsto (\phi_m(x_1), \phi_n(x_2))$$

Para ver que esta función está bien definida, debemos ver que si h_m y h_n son las alturas respectivas en los árboles, entonces $h_m(\phi_m(x_1)) = -h_n(\phi_n(x_2))$.

Además, recordemos que

$$d(x, y) = d_m(x_1, x_2) + d_n(y_1, y_2) - |h(x) - h(y)|.$$

Así que para construir a partir de las isometrías que elegimos en cada árbol una en DL , cada ϕ_i debe respetar altura, es decir, los horociclos van en horociclos.

Primero consideremos dos puntos x, y a la misma altura.

En este caso, $h_m(x_1) = h_m(y_1)$ y podemos tomar la isometría en T_m que fija el punto $p = x_1 \wedge y_1$ e intercambia las ramas correspondientes a cada punto:

Si hacemos lo mismo en T_n , obtenemos en cada árbol una isometría que fija los horociclos, y por lo tanto $\phi = (\phi_m, \phi_n)$ está bien definida en DL . Aún más, $h(\phi(x)) = h(x)$, con lo que es efectivamente una isometría en DL .

Ahora bien, consideremos $h(x) > h(y)$:

Basta con tomar, de los isomorfismos de grafo que mandan en cada componente x_i en y_i , uno que preserve las alturas.

De los $m+1$ vértices adyacentes a x_1 , hay solo 1 que tiene altura menor a $h_m(x)$, entonces, ϕ_m debe mandar ese vértice en el único vértice adyacente a y_1 que tiene altura menor a $h_m(y)$.

De esta manera, cada punto p verifica: $h_m(\phi_m(p)) = h_m(p) + k$ donde la constante es $h(y) - h(x)$. Además estos isomorfismos son isometrías en cada árbol para la distancia de caminos.

Lo mismo se puede considerar en el otro árbol, con la salvedad que en T_n las alturas son opuestas. Entonces $h_n(\phi_n(p)) = h(p) - k$ y queda bien definido como isomorfismo de grafo en DL .

Para ver que es isometría:

$$d(\phi(x), \phi(y)) = d_m(\phi_m(x_1), \phi_m(y_1)) + d_n(\phi_n(x_2), \phi_n(y_2)) - |h(\phi(x)) - h(\phi(y))| \quad (6.2.1)$$

$$= d_m(x_1, y_1) + d_n(x_2, y_2) - |h_m(x) + k - (h_m(y) + k)| \quad (6.2.2)$$

$$= d_m(x_1, y_1) + d_n(x_2, y_2) - |h(x) - h(y)| = d(x, y) \quad (6.2.3)$$

□

Capítulo 7

Esquema de la prueba de Eskin-Fischer-Whyte

En este capítulo haremos un esquema general de la prueba que elaboran E-F-W de la conjetura de Diestel-Leader:

Teorema 7.1. *Si $m \neq n$, no existe ningún grupo finitamente generado casi-isométrico a $DL(m, n)$.*

En la primera sección veremos esquemáticamente la caracterización que se hace del grupo $QI(DL)$ a partir del comportamiento de las geodésicas verticales y la estructura de los cuadriláteros descrita en el lema 5.2. Este resultado se construye en las secciones 2-6 de [EFW12].

Luego veremos una idea de la prueba de la conjetura en sí, que es lo que se hace en la sección 7 de [EFW12].

7.1. Caracterización de $QI(DL)$

Teorema 7.2. *Si $m \neq n$ el grupo de casi-isometrías es $QI(DL(m, n)) \sim Bilip(\mathbb{Q}_m) \times Bilip(\mathbb{Q}_n)$, en caso contrario $QI(DL(m, n)) \sim (Bilip(\mathbb{Q}_m) \times Bilip(\mathbb{Q}_n)) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Donde $Bilip(\mathbb{Q}_k)$ es el grupo de funciones bilipschitz de $\mathbb{Q}_k$ en sí mismo.

La clave en esta caracterización es que las casi-isometrías de DL deben preservar, a gran escala, la altura. Con esto nos referimos que a cualquier c-i está a distancia finita de una que preserva alturas:

Definición 7.1. *Un mapa $f : DL \rightarrow DL$ preserva alturas si la imagen de los horociclos son horociclos. Decimos que fija alturas si para todo punto $h(f(p)) = h(p)$.*

Además, las c-i que preservan altura, están cerca de mapas producto:

Definición 7.2. Una función $\phi : DL(m, n) \rightarrow DL(m', n')$ se dice mapa producto si está a distancia acotada de un mapa de la forma $(x, y, z) \rightarrow (f(x), g(y), q(z))$ o $(x, y, z) \rightarrow (f(y), g(x), q(z))$.

Observar que los mapas producto están definidos para la representación de tres coordenadas de los puntos. Esto no estaría bien definido, pues para coordenadas distintas de un mismo punto un mapa $(x, y, z) \rightarrow (f(x), g(y), z)$ podría dar imágenes distintas.

Definición 7.3. Diremos que una casi-isometría ϕ en $DL(m, n)$ está a distancia acotada de un mapa de la forma $(x, y, z) \rightarrow (f(x), g(y), z)$ si $d(\phi(p), (f(x), g(y), z))$ está acotada para toda elección de coordenadas (x, y, z) para p .

Estos mapas mandan geodésicas verticales (x e y constantes) en geodésicas verticales. Las estrategias usadas en estas pruebas por EFW reciben el nombre de *coarse differentiation* (diferenciación burda o a gran escala) por aproximar la casi-isometría por mapas que preservan un conjunto de “rectas”, como en el caso de los mapas lineales que aproximan funciones diferenciables.

Si toda c.i. está cerca de un mapa producto, esto nos dice esencialmente que las casi isometrías de DL mandan geodésicas verticales “cerca” de geodésicas verticales.

Recordar que las geodésicas verticales están en biyección con el conjunto $\mathbb{Q}_m \times \mathbb{Q}_n$. De ahí que el grupo de mapas producto en DL tenga un subgrupo isomorfo a $(Bilip(\mathbb{Q}_m) \times Bilip(\mathbb{Q}_n))$.

La diferencia entre el caso $m = n$ y el otro es que existen casi-isometrías producto que revierten la orientación vertical. Con esto, cada mapa producto no es solo la elección en cada componente de un rayo vertical, sino que además hay que definir si preserva o revierte la orientación, haciendo aparecer la coordenada $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

En el caso que $m \neq n$ el hecho que no puedan revertir orientación se basa en la discusión del volumen de las cajas del grafo. Como vimos, las cajas tienen la mayor parte de su volumen en la parte superior. Esto sumado al hecho geométrico de que las casi isometrías en estos grafos “casi preservan” el volumen, impone la condición de preservar la orientación vertical.

Un primer resultado en el sentido de aproximar casi-isometrías por mapas productos es a escala local. Partiendo de una casi-isometría ϕ , se prueba que para pequeñas cajas $B(R)$, existe un conjunto de medida grande U donde la casi isometría está cerca de un mapa producto $\hat{\phi}$. En este primer acercamiento, los mapas productos definidos en cada caja pueden ser a priori todos distintos.

Formalmente, cuando decimos que la imagen de los segmentos está cerca de segmentos verticales, hacemos referencia a la siguiente

Definición 7.4. Un segmento casi-geodésico $\alpha : [0, L] \rightarrow DL(m, n)$ se dice ϵ -monótono si para cada par $t_1, t_2 \in [0, L]$ que verifiquen $h(\alpha(t_1)) = h(\alpha(t_2))$ entonces $|t_1 - t_2| < \epsilon L$.

Si un segmento es ϵ -monótono los únicos momentos en que no es monótono son proporcionalmente pequeños. Una característica muy importante de DL es que estos segmentos siempre están cerca de un segmento geodésico vertical.

Entonces, se prueba que hay una porción pequeña de cada segmento vertical de $B(R)$ que tiene imagen *no* ϵ -monótona, y que además esta porción está uniformemente distribuida en todos los segmentos. Con esto, localmente, la casi-isometría está mandando segmentos verticales cerca de segmentos verticales.

En lo anterior aparecen dos parámetros, uno relacionado a “un conjunto de medida grande” de $B(R)$ y el otro de “cerca” de un mapa producto. Ambos parámetros dependen únicamente de las constantes de c-i, lo que nos permite aproximar uniformemente en todo el grafo a ϕ por distintos mapas productos.

Para ver que efectivamente en estas cajas la c-i ϕ se puede aproximar por un mapa producto, debemos ver que las imágenes de los segmentos verticales están todos alineados, es decir que haya una orientación predominante.

Diremos que un segmento $\alpha : [0, L] \rightarrow DL$ orientado creciente en altura tiene imagen *hacia arriba* si su imagen es creciente en altura (si es ϵ -monótona está globalmente definida una orientación). Se dice que tiene imagen *hacia abajo* si la imagen es decreciente en altura.

Lema 7.3. Dado $\epsilon > 0$. Considerar $B(R) \in DL(m, n)$ y el conjunto de sus segmentos verticales con imagen ϵ -monótona. Entonces, $\exists \delta > 0$ tal que o bien la fracción de segmentos con imagen hacia arriba, o bien la fracción de segmentos con imagen hacia abajo es al menos $1 - \delta$.

En este resultado la clave es el lema 5.2. Recordar que un cuadrilátero formado por segmentos verticales tiene sus pares de extremos en un mismo horociclo.

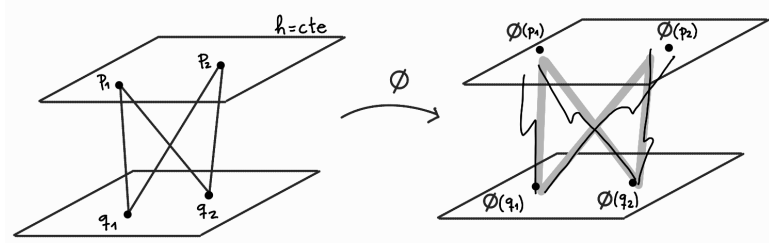


Figura 7.1:

Consideremos los segmentos geodésicos de la caja, que unen el horociclo superior y el inferior que conforman las tapas de $B(L)$. Podemos tomar cuatro segmentos formando un cuadrilátero, cuyas imágenes son casi verticales en el sentido definido anteriormente y tienen uniformemente cerca segmentos geodésicos verticales formando un cuadrilátero (a menos de un error en los extremos despreciable).

Aplicando el lema para estos segmentos verticales, los pares de vértices deben estar en el mismo horociclo, y por lo tanto las imágenes de los puntos en las tapas de $B(R)$ están de a pares en casi el mismo horociclo, lo que impide que la imagen de los segmentos que partan de una misma tapa de $B(L)$ vayan en sentidos opuestos.

Hasta ahora, hemos descrito un resultado local de aproximación.

Lema 7.4. *Sea ϕ c -i. Dados $\epsilon, \delta > 0$, existe R_0 tal que para todo $R > R_0$:*

Existen funciones $\psi : \mathbb{Q}_m \times \mathbb{Q}_n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_m \times \mathbb{Q}_n$ y $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y un subconjunto U_1 con

$\mu(U_1) > (1 - \delta)\mu(B(R))$ tales que

$$d(\phi(x, y, z), (\psi(x, y, z), q(z))) = O(\epsilon R) \quad \forall (x, y, z) \in U_1 \quad (7.1.1)$$

Obs. El teorema 7.4 especifica subconjuntos de $B(R)$ con medida relativamente grande y no subconjuntos de geodésicas. Pero como vimos, una caja de DL se puede ver como un grafo bipartito completo con las aristas siendo segmentos geodésicos verticales, entonces con un argumento del estilo Fubini para la medida de $B(R)$ se puede ver que un subconjunto grande de segmentos efectivamente representa un subconjunto de medida grande de la caja.

Para poder definir un único mapa que preserva altura y aproxima a ϕ en todo el espacio, hay que “pegar” los mapas $\hat{\phi}$ de cada caja. Para esto, el razonamiento es similar al que hicimos localmente, hay que ver que las verticales van cerca de verticales.

Al considerar las geodésicas enteras, se pierde un poco de control sobre sus imágenes. Sin embargo, al igual que los segmentos ϵ -monótonos, se mantienen uniformemente cerca de geodésicas verticales.

Con esto y auxiliándonos nuevamente del lema 5.2, el teorema que sigue se deduce de mirar cada par de planos horizontales. Como podemos tomar cuadriláteros que unen ambos planos y sus imágenes estarán cerca de segmentos verticales, aplicamos el lema y resulta que -a gran escala- los horociclos deben ir en horociclos.

7.2. Esquema prueba EFW

Si bien una parte importante del resultado es la caracterización del grupo $QI(DL)$, para la prueba de la conjetura también se ocupan algunas propiedades del grupo $Isom(DL)$ y de las acciones en $\mathbb{Q}_n \times \mathbb{Q}_m$ inducidas por casi-isometrías del grafo en sí mismo.

Definición 7.5. *Dado X un espacio métrico localmente finito, una sucesión de conjuntos de Følner es una sucesión de conjuntos $\{F_n\}$ acotados, con $|F_n| \rightarrow \infty$ tal que $|\partial F_n|/|F_n| \rightarrow 0$.*

Es decir, una familia de conjuntos arbitrariamente grandes cuya frontera es relativamente pequeña.

Esta propiedad es análoga a la de ser promediable definida para grupos entendida con la condición de conjuntos de Følner. De hecho, si un grupo finitamente generado Γ promediable es casi isométrico a un espacio métrico X , entonces X posee una sucesión de conjuntos de Følner.

En el caso de DL , recordar que en el capítulo 4 definimos dos medidas diferentes, y para la condición de espacio métricamente promediable debemos considerar el Volumen (la medida de conteo).

Si consideráramos la medida μ entonces las cajas $B(L)$ conforman una sucesión de Følner, puesto que

$$\frac{\mu(\partial B(L))}{\mu(B(L))} = \frac{2m^{L/2}n^{L/2}}{(L+1)m^{L/2}n^{L/2}} \rightarrow 0$$

Sin embargo, cuando consideramos el Volumen y $m \neq n$ (si $m = n$ entonces $Vol = \mu$):

$$\frac{|\partial B(L)|}{|B(L)|} = \frac{m^L + n^L}{m^L + n^L + m^{L-1}n + n^{L-1}m + \dots}$$

Esto no tiende a 0 cuando $L \rightarrow \infty$.

De hecho si $m \neq n$ se puede probar que no hay conjuntos métricos de Følner y DL no es métricamente promediable.

Es decir que

Lema 7.5. $DL(m, n)$ es promediable $\iff m = n$.

El otro grupo involucrado en esta prueba es el de $Isom(DL)$. Este grupo verifica las siguientes propiedades [EFW07]:

Lema 7.6. *Considerar el grupo de isometrías $Isom(DL(m, n))$. Se cumple que*

- $Isom(DL(m, n))$ es un grupo promediable
- Si $m \neq n$ $Isom(DL(m, n))$ no es unimodular, y por lo tanto no tiene retículos.

A partir de lo anterior, el siguiente resultado completa la prueba de la conjetura:

Teorema 7.7. *Si Γ es casi-isométrico a $DL(m, n)$ entonces es virtualmente un retículo de $Isom(DL(d, d))$ para algún d .*

Observar que de esto se desprende que Γ debe ser promediable, pues es un subgrupo cerrado de $Isom(DL(d, d))$. Al ser DL casi-isométrico, resulta ser métricamente promediable. Luego por 7.5 esto debe ser $m = n$.

Idea de la prueba del Teorema 7.7: Tomemos $\Gamma \sim_{c.i.} DL(m, n)$.

Sea $f : \Gamma \rightarrow DL(m, n)$ una casi-isometría. Entonces podemos construir el siguiente morfismo de Γ en las casi-isometrías de DL en sí mismo:

$$\gamma \in \Gamma \mapsto g_\gamma(x) = f(\gamma \cdot f^{-1}(x))$$

donde f^{-1} es una casi-inversa de f . Observar que como las casi-inversas están a distancia acotada entre ellas y estoy definiendo una clase de c.i., el morfismo no depende de esta elección.

Por lo que tenemos un morfismo

$$\Gamma \rightarrow QI(DL(m, n)) \sim Bilip(\mathbb{Q}_m) \times Bilip(\mathbb{Q}_n) \ltimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Vamos a tomar el subgrupo Γ' de índice a lo sumo 2 de tomar pre imagen por un elemento de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y considerar

$$\Gamma' \rightarrow Bilip(\mathbb{Q}_m) \times Bilip(\mathbb{Q}_n)$$

Para hacer aparecer el grupo de isometrías, debemos considerar un grupo un poco más pequeño que el de las funciones bilipschitz.

Definición 7.6. *Un mapa $f : \mathbb{Q}_m \rightarrow \mathbb{Q}_m$ se llama similaridad si existe un factor $k > 0$ de manera que*

$$d(f(x), f(y)) = kd(x, y)$$

.

Usaremos dos resultados referentes a $\mathbb{Q}_m$ y a las acciones en $\mathbb{Q}_m$, que tienen un análogo para acciones por casi-similaridades en $\mathbb{R}$.

- [MSW03] Si un grupo Γ actúa en $\mathbb{Q}_m$ por equivalencias bilipschitz y la acción es cocompacta en los pares de puntos distintos de $\mathbb{Q}_m$, entonces esta acción es conjugada por un homeomorfismo bilipschitz a una acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{Q}_n$ por similaridades para algún n .
- $\mathbb{Q}_m$ y $\mathbb{Q}_n$ son lipschitz equivalentes si y solo si existen enteros d, s, t tales que $m = d^s$ y $n = d^t$.

Con esto el morfismo se puede tomar

$$\Gamma' \rightarrow \text{Sim}(\mathbb{Q}_a) \times \text{Sim}(\mathbb{Q}_b)$$

Para unos coeficientes a, b que por el segundo punto verifican lo siguiente:

Si $m = d_1^{t_1}$ y $n = d_2^{t_2}$ existen s_1, s_2 tales que $a = d_1^{s_1}$ y $b = d_2^{s_2}$.

Ahora, detengámonos en el grupo $\text{Isom}(DL(a, b))$ y su relación con $\text{Sim}(\mathbb{Q}_m) \times \text{Sim}(\mathbb{Q}_n)$.

Por un lado, la distancia en el espacio $\mathbb{Q}_n$ toma valores discretos, más específicamente de la forma n^k con $k \in \mathbb{Z}$.

Si observamos las isometrías que describimos en la sección 7.6, las del primer tipo inducen acciones en los espacios de fines correspondientes, $\mathbb{Q}_m$ y $\mathbb{Q}_n$ por isometrías, pues la distancia entre dos fines está determinada por la altura a la que parten caminos las geodésicas a $-\infty$ que los definen. Intercambiando ramas, esto último se preserva.

Las de segundo tipo sí cambian la distancia entre los fines, pero como trasladan todo en la dirección de la geodésica destacada o el contrario, la acción inducida en el espacio de fines de cada árbol es una similaridad: Si la $\text{Isom}(DL(a, b))$ traslada todo k niveles en la dirección del rayo destacado en T_m , entonces en $\mathbb{Q}_m$ se tiene $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) = n^{-k}d(x, y)$. Donde $\tilde{f}$ es el mapa inducido por la isometría f .

Pero si un mapa en $DL(a, b)$ en un árbol traslada en la dirección del rayo destacado, en el otro árbol debe hacer lo opuesto, y la misma cantidad. Luego las acciones por similaridades inducidas deben tener exponentes inversos.

De hecho, el subgrupo $H \subset \text{Sim}(\mathbb{Q}_a) \times \text{Sim}(\mathbb{Q}_b)$ con coeficientes de exponentes inversos es virtualmente el grupo $\text{Isom}(DL(a, b))$.

Por la combinación de dos restricciones, sobre los subgrupos de $\text{Sim}(\mathbb{Q}_n)$ y sobre los factores de dilatación por venir de una casi-isometría, resulta que la imagen de Γ' está contenida en H .

Por último, se puede ver que este morfismo tiene imagen discreta y núcleo finito.

De lo anterior se deduce que Γ es virtualmente un retículo de $\text{Isom}(DL(a, b))$. Por 7.6 esto implica de $a = b$.

□

Bibliografía

- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [DL01] Reinhard Diestel and Imre Leader. A conjecture concerning a limit of non-Cayley graphs. *J. Algebraic Combin.*, 14(1):17–25, 2001.
- [EFW07] Alex Eskin, David Fisher, and Kevin Whyte. Quasi-isometries and rigidity of solvable groups. *Pure Appl. Math. Q.*, 3(4):927–947, 2007.
- [EFW12] Alex Eskin, David Fisher, and Kevin Whyte. Coarse differentiation of quasi-isometries I: Spaces not quasi-isometric to Cayley graphs. *Ann. of Math. (2)*, 176(1):221–260, 2012.
- [FM99] Benson Farb and Lee Mosher. Quasi-isometric rigidity for the solvable Baumslag-Solitar groups. II. *Invent. Math.*, 137(3):613–649, 1999.
- [L17] Clara Löh. *Geometric group theory*. Universitext. Springer, Cham, 2017. An introduction.
- [Mei08] John Meier. *Groups, graphs and trees*, volume 73 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. An introduction to the geometry of infinite groups.
- [MSW03] Lee Mosher, Michah Sageev, and Kevin Whyte. Quasi-actions on trees. I. Bounded valence. *Ann. of Math. (2)*, 158(1):115–164, 2003.
- [Woe91] Wolfgang Woess. Topological groups and infinite graphs. volume 95, pages 373–384. 1991. Directions in infinite graph theory and combinatorics (Cambridge, 1989).
- [Woe05] Wolfgang Woess. Lamplighters, Diestel-Leader graphs, random walks, and harmonic functions. *Combin. Probab. Comput.*, 14(3):415–433, 2005.