



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



FACULTAD DE
INGENIERÍA

Grafos con dos terminales uniformemente más confiables bajo el modelo de falla de vértices: la conjetura de Brown es cierta cuando $d=4$

Informe de Proyecto de Grado presentado por

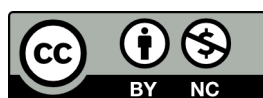
Felipe Miranda

en cumplimiento parcial de los requerimientos para la graduación de la carrera
de Ingeniería en Computación de Facultad de Ingeniería de la Universidad de
la República

Supervisores

Pablo Romero
Héctor Cancela

Montevideo, 26 de diciembre de 2025



Grafos con dos terminales uniformemente más confiables
bajo el modelo de falla de vértices: la conjetura de Brown
es cierta cuando $d=4$ por Felipe Miranda tiene licencia [CC
Atribución - No Comercial 4.0](#).

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que, de una u otra manera, contribuyeron al desarrollo y culminación de este proyecto de grado.

En especial, quiero agradecer profundamente a mi tutor, Pablo Romero, por su constante apoyo, dedicación y compromiso. Su gran disposición para involucrarse en el proyecto, junto con su manera de transmitir conocimiento sobre un tema que le apasiona, fueron fundamentales para la culminación de este trabajo.

Asimismo, extiendo mi agradecimiento a mi cotutor, Héctor Cancela, por sus valiosos consejos y orientación, los cuales me permitieron encaminar las ideas y mejorar los resultados obtenidos.

A todos aquellos que, directa o indirectamente, aportaron su tiempo, conocimientos o palabras de aliento durante esta etapa, les brindo mi más sincero agradecimiento.

Resumen

Un grafo con dos terminales G es un grafo que posee dos vértices distinguidos en $V(G)$, denominados terminales. Sean n , m y d enteros positivos tales que $n \geq d - 1$ y $1 \leq m \leq \binom{n+2}{2}$. Sea $T_{n,m}^d$ el conjunto de todos los grafos con dos terminales que poseen exactamente n vértices no terminales, m aristas, y la distancia entre sus terminales es igual a d . Sea p un número real en $[0, 1]$ y sea G un grafo con dos terminales en $T_{n,m}^d$. La confiabilidad de G se denota $NR_G(p)$ y se define como la probabilidad de que exista un camino entre los terminales de G en el subgrafo de G resultante de remover independientemente a cada uno de sus vértices no terminales con probabilidad $1 - p$. Decimos que G es uniformemente más confiable en $T_{n,m}^d$ si para todo H en $T_{n,m}^d$ y todo p en $[0, 1]$ se cumple que $NR_G(p) \geq NR_H(p)$.

En trabajos previos se ha logrado caracterizar la existencia e inexistencia de grafos con dos terminales uniformemente más confiables en cada clase no vacía $T_{n,m}^d$ cuando d es no mayor que 3. Brown et al. [Networks 76(3):414-426, 2020] conjeturaron que no existe ningún grafo con dos terminales uniformemente más confiable en $T_{n,m}^d$ cuando $d \geq 4$, $n \geq 2(d - 1)$ y $2d \leq m \leq (d - 2)\lfloor \frac{n}{d-1} \rfloor^2 + \lfloor \frac{n}{d-1} \rfloor - 1$.

El objetivo de este proyecto de grado es analizar si la conjetura de Brown et al. es correcta cuando $d = 4$. Por un lado, se determinan propiedades inherentes a todos los grafos con dos terminales que son localmente más confiables en $T_{n,m}^4$ cuando p es próximo a 1. Por otro lado, se demuestra que ninguno de dichos grafos con dos terminales es localmente más confiable cuando p es próximo a 0. Para llevar a cabo esta segunda fase se desarrolla una metodología novedosa basada en programación no lineal entera. Dicha metodología permite probar que la conjetura de Brown es cierta cuando $d = 4$, excepto en aquellos pares de enteros n y m tales que $n \geq 9$ y $m = 11$. En dichos casos, se han desarrollado programas que permiten realizar un estudio computacional exhaustivo. Dicho estudio basado en asistencia computacional permite confirmar que la conjetura de Brown es correcta cuando $d = 4$.

Palabras clave: Teoría de grafos, Confiabilidad de redes, Grafo con dos terminales uniformemente más confiables, Fallas de vértices.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Conceptos básicos	1
1.2. Problema de Estudio	2
2. Revisión de antecedentes	5
2.1. Modelos de fallas de aristas	5
2.2. Modelos de fallas de vértices	6
3. Aportes	9
3.1. Resultados preliminares	10
3.2. Estrategia de la demostración	13
3.3. Problemas de programación entera	15
3.4. Demostración de los lemas de dominación	23
3.5. Prueba computacional de inexistencia	26
4. Conclusiones y trabajo futuro	31
A. Anexo 1	35
A.1. Demostraciones de lemas auxiliares	35
A.2. Código	37
A.3. Plataforma de cómputo	39
A.4. Grafos en $\mathcal{O}_{9,11}$	40

Capítulo 1

Introducción

Este capítulo tiene dos objetivos. Por un lado, en la Sección 1.1 se introducirá el lenguaje de teoría de grafos que será empleado durante este documento. Por otro lado, en la Sección 1.2 se presentará el problema de estudio y los resultados principales de este proyecto de grado.

1.1. Conceptos básicos

Un *grafo* G es un par (V, E) , donde V es un conjunto cuyos elementos son llamados *vértices* y E es una colección de conjuntos de dos vértices cuyos elementos son llamados *aristas*. Denotamos como $V(G)$ y $E(G)$ al conjunto de vértices y aristas de G , respectivamente. Sea G un grafo. Una arista e es *incidente* a un vértice v en G si v está incluido en e . Los *extremos* de una arista $\{u, v\}$ son los vértices u y v . Decimos que dos vértices son *adyacentes* si son extremos de una misma arista. Por conveniencia denotaremos uv a la arista cuyos extremos son u y v .

Decimos que un grafo H es un *subgrafo* de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Sea S un subconjunto de vértices de $V(G)$. El *subgrafo inducido* por S en G es el subgrafo de G cuyo conjunto de vértices es S y cuyo conjunto de aristas está formado por todas las aristas de G cuyos extremos pertenecen a S .

Un *camino* entre v_0 y v_ℓ en G es una secuencia de vértices $v_0 \dots v_\ell$, donde v_0, \dots, v_ℓ son vértices distintos en $V(G)$ y para cada i en $\{0, \dots, \ell-1\}$ se cumple que $v_i v_{i+1}$ pertenece a $E(G)$. El *largo* de dicho camino es ℓ . Los *extremos* de dicho camino son los vértices v_0 y v_ℓ , mientras que los vértices $v_1, \dots, v_{\ell-1}$ son *vértices internos*. Diremos que dos caminos son *disjuntos* si no comparten ningún vértice interno. Denotamos $\lambda_G(v_0, v_\ell)$ al máximo número de caminos disjuntos entre v_0 y v_ℓ en G .

Definimos la *distancia* de v_0 a v_ℓ en G , denotada $d(v_0, v_\ell)$, como el largo mínimo de un camino entre v_0 y v_ℓ en G . El grafo G es *conexo* si cada par de vértices u y v en $V(G)$ tiene algún camino entre u y v en G . Una *componente conexa* de G es un subgrafo de G que es conexo y maximal. Dos vértices u y v

en $V(G)$ están *conectados* si pertenecen a una misma componente conexa de G .

Sea G un grafo conexo y sea S en $V(G)$. Denotamos $G - S$ al subgrafo de G que resulta de eliminar cada vértice de S y cada una de las aristas incidentes a cada uno de estos vértices de G . Sean u y v dos vértices en $V(G)$. Un *conjunto separador de u y v* en G es un conjunto de vértices S en $V(G) - \{u, v\}$ tal que u y v no están conectados en $G - S$. El *tamaño* de un conjunto separador S es igual a su cantidad de elementos. La *conectividad entre u y v* en G , denotada $\kappa_G(u, v)$, se define como el tamaño mínimo de un conjunto separador de u y v .

Un *grafo con dos terminales* G es un grafo con dos vértices distinguidos s y t en $V(G)$, denominados *terminales*. A lo largo de este documento utilizaremos los símbolos s y t para denotar a los vértices terminales de un grafo de dos terminales. La *conectividad* de un grafo con dos terminales G , que denotamos $\kappa(G)$, es la conectividad entre sus terminales. Sean n , m y d enteros positivos tales que $n \geq d - 1$ y $1 \leq m \leq \binom{n}{2}$. Definimos $T_{n,m}^d$ como el conjunto de todos los grafos con dos terminales que tienen n vértices no terminales, m aristas, y cumplen que $d(s, t) = d$.

1.2. Problema de Estudio

Sean n , m y d enteros positivos, G un grafo en $T_{n,m}^d$ y p en $[0, 1]$. La *confiabilidad de G evaluada en p* (bajo el modelo de fallas de vértices), denotada como $NR_G(p)$, es la probabilidad de que los terminales de G permanezcan conectados en el subgrafo de G resultante de remover a cada uno de los vértices que no son terminales independientemente y con probabilidad igual a $1 - p$. Decimos que G en $T_{n,m}^d$ es *uniformemente más confiable* si para todo H en $T_{n,m}^d$ y todo p en $[0, 1]$ se cumple que $NR_G(p) \geq NR_H(p)$.

En este contexto, una de las preguntas de interés es si, dada una clase no vacía de grafos $T_{n,m}^d$, existe algún grafo que sea uniformemente más confiable en dicha clase. El estudio de esta cuestión fue iniciado en 2020 a partir de un artículo publicado por Brown et al. [5]. En dicho artículo se observa que cada grafo con dos terminales en $T_{n,m}^1$ tiene confiabilidad constante igual a 1 y es por tanto uniformemente más confiable. También se demuestra que en cada una de las clases no vacías $T_{n,m}^2$ existe un grafo con dos terminales que es uniformemente más confiable. Finalmente se demuestra que existe algún grafo con dos terminales uniformemente más confiable en $T_{n,m}^3$ si y solo si se cumple una de las tres condiciones: (i) $n = 7$ y $m = 12$; (ii) $m \leq 8$, o (iii) $m \geq \lfloor \frac{(n+1)^2}{4} \rfloor$. Dentro de las conclusiones de este artículo, los autores realizan la siguiente conjetura sobre la inexistencia de grafos con dos terminales uniformemente más confiables cuando la distancia mínima entre los terminales es mayor o igual a 4.

Conjetura 1 (Brown et al. [5]). *Para cada elección de enteros n , m y d tales que $d \geq 4$, $n \geq 2(d-1)$ y $2d \leq m \leq (d-2) \left\lfloor \frac{n}{d-1} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{n}{d-1} \right\rfloor - 1$ no existe ningún grafo con dos terminales que sea uniformemente más confiable en $T_{n,m}^d$.*

En este proyecto de grado se demuestra que la conjetura de Brown et al. es cierta cuando $d = 4$.

Este trabajo se organiza en cuatro capítulos. En este capítulo hemos revisado conceptos fundamentales de teoría de grafos necesarios para el desarrollo del trabajo como también el problema de estudio. El Capítulo 2 presenta una revisión de antecedentes relevantes sobre modelos de confiabilidad en redes, tanto bajo fallas de aristas como de vértices. En el Capítulo 3 se exponen los aportes originales de este proyecto, incluyendo los resultados teóricos y computacionales que permiten probar la validez de la conjetura de Brown cuando $d = 4$. Por último, el Capítulo 4 resume los principales resultados obtenidos y propone posibles líneas de trabajo futuro. Además, se incluyen anexos que contienen demostraciones de resultados auxiliares, fragmentos de código e imágenes de grafos complementarias.

Capítulo 2

Revisión de antecedentes

En este capítulo se realiza una breve revisión de algunos de los resultados más relevantes acerca de la existencia e inexistencia de grafos uniformemente más confiables en el modelo de falla de vértices y en el de aristas. En la Sección 2.1 se presentarán resultados conocidos relativos al modelo de confiabilidad con fallas de aristas, mientras que en la Sección 2.2 se presentarán resultados sobre modelos de confiabilidad con fallas de vértices que serán de utilidad para el desarrollo de este proyecto. Quien guste profundizar en el estudio de confiabilidad uniforme de redes bajo modelos de fallas independientes puede consultar el relevamiento [9].

2.1. Modelos de fallas de aristas

La confiabilidad en redes se define como la probabilidad de que una red se mantenga en estado operativo a pesar de fallas en sus componentes. En el modelo de *fallas de aristas* la red es modelada como un grafo G donde cada una de sus aristas tiene una probabilidad independiente p de funcionar, y por tanto puede fallar de forma independiente con probabilidad $1 - p$. Bajo estas condiciones, dado un grafo G , la confiabilidad de G , denotada como $R_G(p)$, es la probabilidad de que el subgrafo de G resultante de remover cada arista con una probabilidad independiente $1 - p$ sea conexo.

En 1986, Boesch [2] introduce el concepto de grafo uniformemente más confiable, para definir a los grafos cuya confiabilidad es máxima dentro de todos los grafos de su clase y para toda probabilidad p en $[0, 1]$. Boesch conjetura que en cada clase no vacía de grafos conexos y simples con una cantidad fija de vértices y aristas siempre existe al menos un grafo que es uniformemente más confiable. En 1991, Boesch et al. [4] muestran que en cada una de las clases de grafos conexos y simples con n vértices y m aristas tales que $n - 1 \leq m \leq n + 2$ existe precisamente un único grafo uniformemente más confiable.

En 1991 Myrvold [8] refuta la conjetura de Boesch, probando la existencia de algunas clases de grafos en las que no existen grafos uniformemente más confiables. Más recientemente, Brown y Cox [6] y Romero y Safe [11] presentaron nuevas clases no vacías de grafos en las que tampoco existen grafos uniformemente más confiables. No obstante, hasta la fecha existen infinitas clases de grafos en las que no se ha logrado demostrar la existencia o inexistencia de grafos uniformemente más confiables.

Un caso de especial interés dentro del estudio de confiabilidad con fallas de aristas es el modelo de *confiabilidad de dos terminales*. Dado un grafo con dos terminales G y un real p en $[0, 1]$, la confiabilidad bajo este modelo es la probabilidad de que s y t estén conectados en el subgrafo de G resultante de remover cada arista con probabilidad $1 - p$. Por un lado, Bertrand et al. [1] demostraron en 2018 que no existe ningún grafo uniformemente más confiable con dos terminales en $T_{n,m}$ cuando $n \geq 11$ y $20 \leq m \leq 3n - 9$ o cuando $n \geq 8$ y $\binom{n}{2} - \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \leq m \leq \binom{n}{2} - 2$. Por otro lado, Xie et al. [13] demostraron que, salvo en casos triviales, no existe ningún grafo de dos terminales uniformemente más confiable cuando $n \geq 6$ y $3n - 6 < m \leq \binom{n}{2} - 2$. Cabe señalar que la metodología utilizada por Xie et al. para probar la inexistencia de grafos con dos terminales uniformemente más confiables se basa en probar que, ningún grafo con dos terminales que sea localmente más confiable cuando p es próximo a 0 puede ser localmente más confiable cuando p es próximo a 1.

2.2. Modelos de fallas de vértices

Un modelo alternativo y menos estudiado dentro del área de confiabilidad uniforme es el de fallas de vértices, donde al contrario que en el modelo de fallas de aristas son los vértices del grafo los que pueden fallar, mientras que las aristas no fallan. En este modelo cada vértice de G se mantiene en estado operativo con probabilidad p en $[0, 1]$ y por tanto puede fallar con probabilidad $1 - p$. Dado un grafo G y un real p en $[0, 1]$, la confiabilidad de G evaluada en p se define como la probabilidad de que el subgrafo de G resultante de remover cada vértice con una probabilidad independiente e igual a $1 - p$ sea conexo. Existen escasos resultados a la fecha sobre la existencia de grafos uniformemente más confiables en este modelo. Boesch [3] demostró que para las clases de grafos conexos y simples en las que $m = n$ únicamente existen grafos uniformemente más confiables cuando $n < 5$. Stivaros probó en su tesis doctoral [12] que algunos grafos multipartitos completos regulares o casi regulares son grafos uniformemente más confiables.

Dentro de los modelos de fallas de vértices está el caso particular de los grafos de dos terminales con fallas en sus vértices no terminales, que es el modelo que exploramos en este proyecto. Sea G un grafo en $T_{n,m}^d$ y sea p un número real en $[0, 1]$. La confiabilidad de G evaluada en p es la probabilidad de que los vértices terminales de G permanezcan conectados en el subgrafo de G

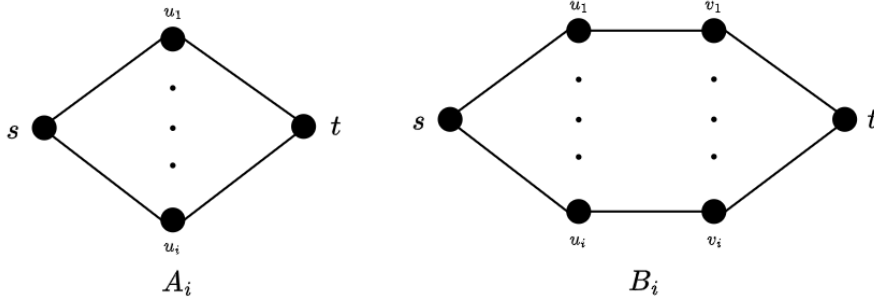


Figura 2.1: Los grafos A_i y B_i

resultante de remover cada uno de los vértices que no son terminales independientemente y con probabilidad igual a $1 - p$. El estudio de la confiabilidad uniforme en este modelo fue iniciado en 2020 por Brown et al. [5]. A continuación presentamos los resultados obtenidos por Brown et al. que serán una fuente de inspiración para el desarrollo de este proyecto.

En primer lugar, Brown et al. observaron que todo grafo con dos terminales en $T_{n,m}^1$ es uniformemente más confiable. Esta observación surge por el simple hecho de que cada grafo con dos terminales en $T_{n,m}^1$ cumple que la distancia entre sus terminales es igual a 1, lo que es lo mismo que sus terminales son adyacentes. Como los terminales no fallan se deduce que cada grafo con dos terminales G en $T_{n,m}^1$ tiene confiabilidad perfecta e igual a 1, por lo que cada G en $T_{n,m}^1$ es uniformemente más confiable. Luego, Brown et al. demostraron que en cada clase no vacía $T_{n,m}^2$ existe algún grafo con dos terminales que es uniformemente más confiable. A tales efectos los autores definen, para cada entero positivo i , el grafo A_i que se presenta en la Figura 2.1.

Definición 2 (Brown et al. [5]). *Para cada entero positivo i se define A_i como el grafo con dos terminales tal que $V(A_i) = \{s, t\} \cup \{u_1, \dots, u_i\}$ y $E(A_i) = \{su_j, u_jt : 1 \leq j \leq i\}$.*

A partir de esta construcción, Brown et al. prueban el siguiente resultado.

Teorema 3 (Brown et al. [5]). *Cada clase no vacía $T_{n,m}^2$ tiene al menos un grafo con dos terminales que es uniformemente más confiable. Además, un grafo con dos terminales G en $T_{n,m}^2$ es uniformemente más confiable si y solo si G contiene a $A_{k(n,m)}$ como subgrafo, donde $k(n, m) = \min\{\lfloor m/2 \rfloor, n\}$.*

Dentro del mismo artículo, Brown et al. proceden a estudiar la existencia o inexistencia de grafos con dos terminales uniformemente más confiables en $T_{n,m}^3$ y demuestran el siguiente resultado.

Teorema 4 (Brown et al. [5]). *Para cada par de enteros n y m tales que $n \geq 6$ y $9 \leq m < \lfloor (n+1)^2/4 \rfloor$ no existe un grafo uniformemente más confiable con dos terminales en $T_{n,m}^3$, excepto cuando $n = 7$ y $m = 12$.*

Un aspecto clave para demostrar el Teorema 4 fue determinar condiciones necesarias para que un grafo con dos terminales sea uniformemente más confiable.

En particular, Brown et al. definieron, para cada entero positivo i , el grafo con dos terminales B_i , el cual se presenta en la Figura 2.1, y probaron que todo grafo con dos terminales cuya confiabilidad es máxima para valores de p próximos a 1 contienen a $B_{k(n,m)}$ como subgrafo, donde $k(n, m) = \min\{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.

Definición 5 (Brown et al. [5]). *Para cada entero positivo i se define B_i como el grafo con dos terminales tal que $V(B_i) = \{s, t\} \cup \{u_1, \dots, u_i\} \cup \{v_1, \dots, v_i\}$ y $E(B_i) = \{su_j, u_jv_j, v_jt : 1 \leq j \leq i\}$.*

Finalmente, Brown et al. logran probar el siguiente resultado que caracteriza la existencia e inexistencia de grafos uniformemente más confiables en cada clase no vacía $T_{n,m}^3$.

Teorema 6 (Brown et al. [5]). *En una clase no vacía $T_{n,m}^3$ existe algún grafo uniformemente más confiable con dos terminales si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones: (i) $m \leq 8$, (ii) $n = 7$ y $m = 12$, o (iii) $m \geq \lfloor (n+1)^2/4 \rfloor$.*

Dentro de sus conclusiones, Brown et al. proponen la Conjetura 1 acerca de la inexistencia de grafos con dos terminales uniformemente más confiables en aquellas clases no vacías $T_{n,m}^d$ tales que $d \geq 4$.

Esta conjetura surge de la observación de que todo grafo con dos terminales con confiabilidad máxima para valores de p próximos a 1 en la clase $T_{n,m}^d$, donde $d \geq 4$, contiene exactamente $k(n, m)$ caminos disjuntos de largo d entre sus terminales, siendo $k(n, m) = \min\{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor, \lfloor \frac{n}{d-1} \rfloor\}$. Luego, Brown et al. sugieren que, si la clase $T_{n,m}^d$ no tiene demasiadas aristas, entonces es posible obtener un nuevo grafo $G_{n,m}$ con dos terminales en $T_{n,m}^d$ que tenga menos caminos disjuntos de largo d entre sus terminales y que sea más confiable para valores de p próximos a 0 que todo grafo con dos terminales localmente más confiable en un entorno de 1. Según los autores, $G_{n,m}$ tendría una estructura en la que, para cada i en $\{1, \dots, d-1\}$, cada conjunto V_i cuyos vértices están a distancia i del terminal s tiene tamaño $k(n, m)$ excepto por un único conjunto con $k(n, m) - 1$ vértices. Los autores observan que un grafo con dos terminales $G_{n,m}$ con las características previas puede tener no más que $(d-2)k(n, m)^2 + k(n, m) - 1$ aristas, y por esta razón fundamentan la cota superior en el número de aristas propuesta en el enunciado de la Conjetura 1.

Capítulo 3

Aportes

El objetivo de este capítulo es demostrar la validez de la Conjetura 1 propuesta por Brown et al cuando $d = 4$. Notemos que basta con probar que no existe ningún grafo uniformemente confiable con dos terminales en $T_{n,m}^4$ cuando (n, m) pertenece al conjunto I que se define a continuación.

Definición 7. *El conjunto I consta de las siguientes duplas de números enteros:*

$$I = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{Z}, n \geq 6, 8 \leq m \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor^2 + 2 \left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1 \right)\}$$

El resultado principal de este capítulo es el Teorema 8.

Teorema 8. *Para cada dupla de enteros (n, m) en I no existe ningún grafo con dos terminales uniformemente más confiable en $T_{n,m}^4$.*

Este capítulo se organiza de la siguiente manera. En la Sección 3.1 se definen, dentro de $T_{n,m}^4$, el conjunto de grafos con dos terminales que son localmente más confiables en un entorno de 0 y de 1, que denotaremos $L_{n,m}^n$ y $U_{n,m}^1$ respectivamente. Se observa que todo grafo uniformemente más confiable con dos terminales pertenece tanto a $L_{n,m}^n$ como a $U_{n,m}^1$. En la Sección 3.2 se define la estrategia de la demostración del Teorema 8. Primero se define, para cada dupla (n, m) en I , dos conjuntos $\mathcal{M}_{n,m}$ y $\mathcal{N}_{n,m}$ en $T_{n,m}^4$ tales que $U_{n,m}^1 \subseteq \mathcal{M}_{n,m}$ y $L_{n,m}^n \subseteq \mathcal{N}_{n,m}$. Luego se procederá a demostrar el Lema 25, que establece que para cada dupla (n, m) en I tal que $m \neq 11$ se cumple que la intersección entre $\mathcal{M}_{n,m}$ y $\mathcal{N}_{n,m}$ es vacía. Por último, se procederá a demostrar el Lema 26, que establece que para cada tupla (n, m) en I tal que $m = 11$ se cumple que la intersección entre $L_{n,m}^n$ y $U_{n,m}^1$ es vacía. Dentro de la Sección 3.2 se prueba que el Teorema 8 es una consecuencia inmediata de dichos lemas. El cometido de las Secciones 3.3 y 3.4 es probar el Lema 25, mientras que el cometido de la Sección 3.5 es probar el Lema 26. Puesto que todo grafo con dos terminales G en $L_{n,m}^n$ debe maximizar la cantidad $N_3(G)$, la cual será definida a continuación, en la Sección 3.3 se define para cada dupla (n, m) en I tal que $m \neq 11$ un problema de optimización combinatoria cuya

función objetivo consiste en maximizar $N_3(G)$ dentro de $T_{n,m}^4$, y se definen conjuntos de soluciones factibles de dicho problema de optimización que nos permitirán demostrar el Lema 25. Por último, en la Sección 3.5 se prueba el Lema 26 con asistencia computacional.

3.1. Resultados preliminares

En esta sección presentaremos los conceptos de grafo con dos terminales localmente más confiable en un entorno de 0 y de 1, como también el de grafo con dos terminales uniformemente más confiable. Tal como veremos, todo grafo con dos terminales que es uniformemente más confiable debe ser localmente más confiable en un entorno de 0 y de 1. Además, adaptaremos de la literatura de confiabilidad uniforme resultados relativos a la construcción de grafos con dos terminales localmente más confiables en un entorno de 0 y de 1.

Sea G un grafo con dos terminales en $T_{n,m}^4$ y p en $[0, 1]$. Para cada i en $\{0, \dots, n\}$ denotamos mediante $N_i(G)$ a la cantidad de subconjuntos S de $V(G) \setminus \{s, t\}$ con exactamente i vértices tales que s y t son extremos de algún camino de largo 4 en el subgrafo de G inducido por $S \cup \{s, t\}$. La confiabilidad de G evaluada en p está dada por el siguiente polinomio,

$$NR_G(p) = \sum_{i=0}^n N_i(G) p^i (1-p)^{n-i}.$$

Definición 9. Decimos que G en $T_{n,m}^4$ es uniformemente más confiable si para todo p en $[0, 1]$ y para todo H en $T_{n,m}^4$ se cumple que $NR_G(p) \geq NR_H(p)$.

Definición 10. Sean G y H grafos diferentes en $T_{n,m}^4$. Decimos que G es más confiable que H en un entorno de 0 (resp., en un entorno de 1) si existe algún número real positivo δ tal que $NR_G(p) \geq NR_H(p)$ para todo p en $(0, \delta)$ (resp., para todo p en $(1 - \delta, 1)$).

Definición 11. Decimos que un grafo con dos terminales G en $T_{n,m}^4$ es localmente más confiable en un entorno de 0 (en un entorno de 1) si para cualquier H en $T_{n,m}^4$ se cumple que G es más confiable que H en un entorno de 0 (resp., 1).

Cuando la probabilidad p es próxima a 0 tendremos, con alta probabilidad, subgrafos inducidos con pocos vértices, y por tanto la intuición sugiere que cada grafo con dos terminales que sea localmente más confiable en un entorno de 0 en $T_{n,m}^4$ debe tener la máxima cantidad de caminos entre s y t con la menor cantidad de vértices posible entre s y t . Esto corresponde a la máxima cantidad de caminos de largo 4 cuyos extremos son s y t .

En cambio, cuando la probabilidad p es próxima a 1, con alta probabilidad, pocos vértices serán removidos del grafo original y por ende un grafo en $T_{n,m}^4$ localmente más confiable en un entorno de 1 en $T_{n,m}^4$ deberá tener la máxima

conectividad entre s y t , pues esta corresponde a la cantidad máxima de vértices no terminales que pueden ser removidos sin desconectar a s y t .

Los autores Brown y Cox [6] incluyen al Lema 12 como una observación en el contexto de confiabilidad clásica. Dado lo simple e importante de este resultado, aquí se adapta dicha observación al contexto de comunicación entre dos terminales y se incluye una breve demostración.

Lema 12 (Brown y Cox [6]). *Sean G y H en $T_{n,m}^4$, y sean k y ℓ dos enteros en $\{1, \dots, n\}$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si para cada i en $\{1, \dots, k-1\}$ se tiene que $N_i(G) = N_i(H)$ y $N_k(G) > N_k(H)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo p en $(0, \delta)$ se cumple que $NR_G(p) > NR_H(p)$.*
2. *Si para cada i en $\{\ell+1, \dots, n\}$ se tiene que $N_i(G) = N_i(H)$ y $N_\ell(G) > N_\ell(H)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo p en $(1-\delta, 1)$ se cumple que $NR_G(p) > NR_H(p)$.*

Demostración. Probaremos la Afirmación 1; la prueba de la Afirmación 2 es análoga. Sean G y H en $T_{n,m}^4$ tales que para todo i en $\{1, \dots, k-1\}$ se tiene que $N_i(G) = N_i(H)$ y $N_k(G) > N_k(H)$. Tras tomar la resta $NR_G(p) - NR_H(p)$ y cancelar términos comunes tenemos que

$$NR_G(p) - NR_H(p) = \sum_{i=k}^n (N_i(G) - N_i(H)) p^i (1-p)^{n-i}.$$

Tomando p^k de factor común se sigue que

$$\begin{aligned} NR_G(p) - NR_H(p) &= p^k ((N_k(G) - N_k(H))(1-p)^{n-k} \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^n (N_i(G) - N_i(H)) p^{i-k} (1-p)^{n-i}). \end{aligned}$$

Tomando límite cuando p tiende a 0 por la derecha resulta que

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{NR_G(p) - NR_H(p)}{p^k} = N_k(G) - N_k(H).$$

Definamos $M = N_k(G) - N_k(H)$. Por hipótesis, $M > 0$. Por la definición de límite, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $p \in (0, \delta)$ entonces $NR_G(p) - NR_H(p) \in ((M - \epsilon)p^k, (M + \epsilon)p^k)$. Tomando $\epsilon = M/2$ se deduce que existe $\delta > 0$ tal que si $p \in (0, \delta)$ entonces $NR_G(p) > NR_H(p)$. \square

A continuación presentaremos una secuencia de conjuntos anidados en $T_{n,m}^4$ que nos permitirá determinar el conjunto de grafos con dos terminales en $T_{n,m}^4$ que son localmente más confiables en un entorno de 0.

Definición 13. *Para cada clase no vacía $T_{n,m}^4$ se define la secuencia de conjuntos anidados $L_{n,m}^0, \dots, L_{n,m}^n$ de la siguiente manera:*

1. $L_{n,m}^0$ es el conjunto de todos los grafos pertenecientes a $T_{n,m}^4$.

2. Para cada i en $\{1, \dots, n\}$ definimos el conjunto $L_{n,m}^i$ como

$$L_{n,m}^i = \left\{ G \in L_{n,m}^{i-1} : N_i(G) = \max_{H \in L_{n,m}^{i-1}} \{N_i(H)\} \right\}.$$

Observamos que el conjunto $L_{n,m}^n$ contiene exactamente aquellos grafos con dos terminales en $T_{n,m}^4$ cuyas n -uplas (N_1, \dots, N_n) son máximas en orden lexicográfico. El Lema 14 establece que $L_{n,m}^n$ es exactamente el conjunto de grafos con dos terminales en $T_{n,m}^4$ localmente más confiables en un entorno 0. Dicho lema se prueba en un contexto de separación entre 2 terminales en [10]. Aquí se adapta dicho lema al contexto de comunicación entre dos terminales y se incluye una demostración completa.

Lema 14 (Romero [10]). *Un grafo con dos terminales G en $T_{n,m}^4$ es localmente más confiable en un entorno de 0 si y solo si $G \in L_{n,m}^n$.*

Demostración. En primer lugar probaremos la implicación directa. Sea H un grafo cualquiera en $T_{n,m}^4$ tal que H es localmente más confiable en un entorno de 0. Probaremos que $H \in L_{n,m}^n$. Como la secuencia de conjuntos $L_{n,m}^0, \dots, L_{n,m}^n$ es anidada y $L_{n,m}^0 = T_{n,m}^4$, los conjuntos $L_{n,m}^0 - L_{n,m}^1, \dots, L_{n,m}^{n-1} - L_{n,m}^n, L_{n,m}^n$ conforman una partición de $T_{n,m}^4$. Supongamos por absurdo que $H \notin L_{n,m}^n$. Entonces existe algún entero positivo k tal que $H \in L_{n,m}^{k-1} - L_{n,m}^k$. Esto significa que existe G en $T_{n,m}^4$ tal que $N_i(G) = N_i(H)$ para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$ y $N_k(G) > N_k(H)$. Por la Afirmación 1 del Lema 12 se sigue que existe $\delta > 0$ tal que para todo p en $(0, \delta)$ se cumple que $NR_G(p) > NR_H(p)$. Pero esto último contradice que H sea localmente más confiable en un entorno de 0. Por lo tanto, H pertenece a $L_{n,m}^n$.

En segundo lugar demostramos la implicación recíproca. Sea G en $L_{n,m}^n$ cualquiera. Probaremos que G es localmente más confiable en un entorno de 0. Sea H en $T_{n,m}^4$ cualquiera. Si $H \in L_{n,m}^n$ entonces $NR_H(p) = NR_G(p)$ para todo p en $[0, 1]$. Si $H \notin L_{n,m}^n$ entonces existe k en $\{1, \dots, n\}$ tal que $H \in L_{n,m}^{k-1} - L_{n,m}^k$. Luego, $N_i(G) = N_i(H)$ para cada i en $\{1, \dots, k-1\}$ y $N_k(G) > N_k(H)$. Por la Afirmación 1 del Lema 12, existe $\delta > 0$ tal que para todo p en $(0, \delta)$ se cumple que $NR_G(p) > NR_H(p)$. Como H es arbitrario concluimos que G es localmente más confiable en un entorno de 0 en $T_{n,m}^4$, como queríamos demostrar. \square

De modo similar a continuación definiremos una colección de conjuntos anidados en $T_{n,m}^4$ que nos permitirá determinar el conjunto de grafos con dos terminales en $T_{n,m}^4$ que son localmente más confiables en un entorno de 1.

Definición 15. *Para cada clase no vacía $T_{n,m}^4$ se define la secuencia de conjuntos anidados $U_{n,m}^1, \dots, U_{n,m}^n$ de la siguiente manera:*

1. $U_{n,m}^n$ es el conjunto de todos los grafos pertenecientes a $T_{n,m}^4$.

2. Para cada i en $\{1, \dots, n-1\}$ definimos el conjunto $U_{n,m}^i$ como

$$U_{n,m}^i = \left\{ G \in U_{n,m}^{i+1} : N_i(G) = \max_{H \in U_{n,m}^{i+1}} \{N_i(H)\} \right\}.$$

La demostración del Lema 16 se omite por ser análoga a la del Lema 14.

Lema 16. *Un grafo con dos terminales G en $T_{n,m}^4$ es localmente más confiable en un entorno de 1 si y solo si $G \in U_{n,m}^1$.*

La siguiente observación provee una técnica para probar inexistencia de grafos con dos terminales en clases no vacías $T_{n,m}^4$.

Observación 1. *Si $T_{n,m}^4$ es no vacío y $L_{n,m}^n \cap U_{n,m}^1 = \emptyset$ entonces no existe ningún grafo con dos terminales uniformemente más confiable en $T_{n,m}^4$.*

3.2. Estrategia de la demostración

En esta sección presentaremos la estrategia de demostración del Teorema 8. Primero definiremos, para cada dupla (n, m) en I , dos conjuntos $\mathcal{M}_{n,m}$ y $\mathcal{N}_{n,m}$ en $T_{n,m}^4$ tales que $U_{n,m}^1 \subseteq \mathcal{M}_{n,m}$ y $L_{n,m}^n \subseteq \mathcal{N}_{n,m}$. Por un lado, probaremos que para cada dupla (n, m) en I tal que $m \neq 11$ se cumple que $\mathcal{M}_{n,m} \cap \mathcal{N}_{n,m}$ es vacío. Por otro lado, probaremos que para cada dupla en I tal que $m = 11$ se cumple que $L_{n,m}^n \cap U_{n,m}^1$ es vacío. El Teorema 8 se sigue directamente de los resultados anteriores y la Observación 1.

A continuación vamos a definir $\mathcal{N}_{n,m}$ y a probar que $L_{n,m}^n \subseteq \mathcal{N}_{n,m}$.

Definición 17. *Para cada (n, m) en I se define $\mathcal{N}_{n,m}$ como el conjunto de grafos con dos terminales G que maximizan $N_3(G)$ dentro de $T_{n,m}^4$.*

Lema 18. *Para cada dupla (n, m) en I se cumple que $L_{n,m}^n \subseteq \mathcal{N}_{n,m}$.*

Demostración. Sea G en $T_{n,m}^4$ cualquiera. Como la distancia entre s y t es igual a 4 sabemos que todo camino entre s y t incluye al menos 3 vértices no terminales, por lo que $N_1(G) = N_2(G) = 0$. A partir de la definición de la secuencia de conjuntos $L_{n,m}^1, \dots, L_{n,m}^n$ se deduce que $L_{n,m}^1 = L_{n,m}^2 = T_{n,m}^4$, mientras que $L_{n,m}^3 = \mathcal{N}_{n,m}$. Por construcción, $L_{n,m}^n$ está contenido en $L_{n,m}^3$, por lo que $L_{n,m}^n \subseteq \mathcal{N}_{n,m}$, como queríamos demostrar. \square

Para definir $\mathcal{M}_{n,m}$ es conveniente introducir la siguiente clase de grafos.

Definición 19. *Para cada entero positivo i definimos C_i como el grafo con dos terminales tal que $V(C_i) = \{s, t\} \cup \{u_1, \dots, u_i\} \cup \{v_1, \dots, v_i\} \cup \{w_1, \dots, w_i\}$ y $E(C_i) = \{su_j, u_jv_j, v_jw_j, w_jt : j \in \{1, \dots, i\}\}$.*

La Figura 3.1 ilustra la clase de grafos C_i .

Definamos para cada dupla (n, m) en I la función $k(n, m)$ como,

$$k(n, m) = \min\{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor, \lfloor \frac{m}{4} \rfloor\}.$$

Definición 20. *Para cada (n, m) en I se define $\mathcal{M}_{n,m}$ como el conjunto de grafos con dos terminales que incluyen como subgrafo a $C_{k(n,m)}$.*

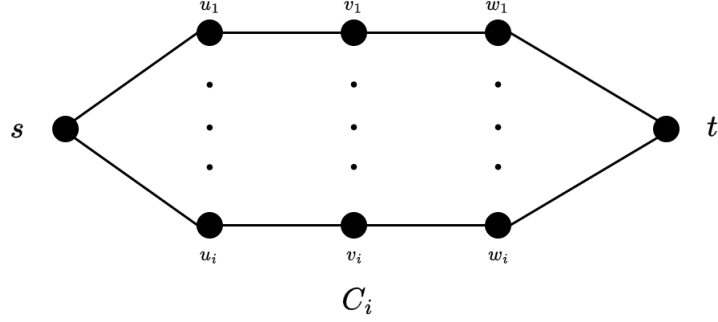


Figura 3.1: Grafos C_i

Probaremos a continuación que el conjunto $U_{n,m}^1$ está contenido en $\mathcal{M}_{n,m}$. Para cada grafo con dos terminales G en $T_{n,m}^4$ denotaremos $\kappa(G)$ a la conectividad de G entre sus terminales. El siguiente resultado será de utilidad.

Teorema 21 (Teorema de Menger). [7, pag. 62] *Para cada grafo G con terminales s y t no adyacentes se cumple que $\kappa(G)$ es igual a la máxima cantidad de caminos disjuntos entre s y t .*

El Lema 22 es una consecuencia del Teorema de Menger.

Lema 22. *Para cada G en $T_{n,m}^4$ se cumple que $\kappa(G) \leq k(n, m)$, y la igualdad ocurre si y solo si G incluye a $C_{k(n,m)}$ como subgrafo.*

Demostración. Primero notemos que cada grafo C_i tiene exactamente i caminos disjuntos entre s y t . Por el Teorema de Menger se deduce que $\kappa(C_i) = i$. Sea ahora G en $T_{n,m}^4$ cualquiera. Cada camino en G que une sus terminales tiene exactamente 3 vértices internos y 4 aristas. Por lo tanto, la máxima cantidad de caminos disjuntos entre los terminales de G es $k(n, m)$. Por el Teorema de Menger se deduce que $\kappa(G) \leq k(n, m)$. Por un lado, si G incluye a $C_{k(n,m)}$ como subgrafo entonces $\kappa(G) \geq \kappa(C_{k(n,m)}) = k(n, m)$ y deducimos que $\kappa(G) = k(n, m)$. Por otro lado, si G no incluye como subgrafo a $C_{k(n,m)}$ entonces G tiene menos que $k(n, m)$ caminos disjuntos. Por el Teorema de Menger se concluye que $\kappa(G) < k(n, m)$. \square

El Lema 23 brinda una condición inherente a todos los grafos con dos terminales en $U_{n,m}^1$.

Lema 23. *Todo grafo con dos terminales en $U_{n,m}^1$ tiene máxima conectividad.*

Demostración. Sea H un grafo en $U_{n,m}^1$. Observemos que su conectividad, $\kappa(H)$, es igual al menor entero positivo i tal que $N_{n-i}(H) \neq \binom{n}{n-i}$. Supongamos por absurdo que H no tiene máxima conectividad. Sea G un grafo en $T_{n,m}^4$ tal que $\kappa(G) > \kappa(H)$. Definamos $\ell = n - \kappa(H)$. Tenemos que $N_i(G) = N_i(H)$ para cada i en $\{\ell + 1, \dots, n\}$. Además, $N_\ell(G) = \binom{n}{\ell}$, mientras que $N_\ell(H) < \binom{n}{\ell}$,

por lo que $N_\ell(G) > N_\ell(H)$. Como se cumplen las hipótesis de la afirmación 2 del Lema 12, por este mismo se sigue que existe $\delta > 0$ tal que para todo p en $(1 - \delta, 1)$ se cumple que $NR_G(p) > NR_H(p)$, lo que contradice que H pertenece a $U_{n,m}^1$. La contradicción proviene del hecho de suponer que H no tiene máxima conectividad. Por lo tanto, H tiene máxima conectividad, como queríamos demostrar. \square

Estamos en condiciones de probar que $U_{n,m}^1$ está contenido en $\mathcal{M}_{n,m}$

Lema 24. *Para cada dupla (n, m) en I se cumple que $U_{n,m}^1 \subseteq \mathcal{M}_{n,m}$.*

Demostración. Sea G en $U_{n,m}^1$ cualquiera. Por el Lema 23 tenemos que G tiene máxima conectividad. Además, por el Lema 22 se cumple que $\kappa(G) \leq k(n, m)$, y $\kappa(G) = k(n, m)$ si y solo si G incluye a $C_{k(n,m)}$ como subgrafo. Luego, cada grafo con dos terminales en $U_{n,m}^1$ pertenece a $\mathcal{M}_{n,m}$, como queríamos demostrar. \square

Sea I^* el conjunto de duplas (n, m) en I tales que $m \neq 11$. El cometido de las Secciones 3.3 y 3.4 es probar el Lema 25, mientras que el cometido de la Sección 3.5 es probar el Lema 26. En esta sección nos limitaremos a enunciar dichos lemas, y a mostrar que el Teorema 8 se sigue inmediatamente de estos lemas y la Observación 1.

Lema 25. *Para cada dupla (n, m) en I^* se cumple que $\mathcal{M}_{n,m} \cap \mathcal{N}_{n,m} = \emptyset$.*

Lema 26. *Para cada dupla (n, m) en $I - I^*$ se cumple que $L_{n,m}^n \cap U_{n,m}^1 = \emptyset$.*

Una vez que probemos los Lemas 25 y 26, estaremos en condiciones de probar el Teorema 8. En lo que sigue se brinda una demostración que asume la validez de dichos lemas.

Demostración del Teorema 8. Sea (n, m) una dupla cualquiera en I .

Si $m \neq 11$ entonces (n, m) es una dupla en I^* . Por el Lema 25 se tiene que $\mathcal{M}_{n,m}^n \cap \mathcal{N}_{n,m} = \emptyset$. Por un lado, el Lema 24 asegura que $U_{n,m}^1 \subseteq \mathcal{M}_{n,m}$. Por otro lado, el Lema 18 asegura que $L_{n,m}^n \subseteq \mathcal{N}_{n,m}$. En consecuencia, tenemos que $U_{n,m}^1 \cap L_{n,m}^n \subseteq \mathcal{M}_{n,m} \cap \mathcal{N}_{n,m}$, por lo que $L_{n,m}^n \cap U_{n,m}^1 = \emptyset$.

Si $m = 11$ entonces por el Lema 26 sabemos que $L_{n,m}^n \cap U_{n,m}^1 = \emptyset$.

En cualquier caso tenemos que $L_{n,m}^n \cap U_{n,m}^1 = \emptyset$, y el resultado se sigue de la Observación 1. \square

Recordemos que el Teorema 8 implica inmediatamente que la Conjetura 1 es cierta cuando $d = 4$, por lo que resta completar las demostraciones del Lema 25 y el Lema 26 para cumplir con el objetivo principal de este proyecto.

3.3. Problemas de programación entera

El objetivo de esta sección es probar el Lema 25. Para cumplir con este objetivo probaremos que, para todo grafo G en $\mathcal{M}_{n,m}$ existe otro grafo H en $T_{n,m}^4$ para el cual $N_3(H) > N_3(G)$. Con este propósito, modelaremos el cálculo

de $N_3(G)$ como un problema de programación no lineal. Primeramente definiremos, para cada dupla (n, m) en I^* , un problema de optimización combinatoria $(\mathcal{G}_{n, m})$ que consiste en la maximización de $N_3(G)$ dentro de la clase de grafos con dos terminales $T_{n, m}^4$. Luego definiremos para cada grafo con dos terminales G en $T_{n, m}$ una tupla de números enteros $s(G)$ tal que $N_3(s(G)) = N_3(G)$, y traduciremos el primer problema de optimización combinatoria en un problema de programación no lineal entera $(P_{n, m})$. Por último introduciremos una relajación $(P'_{n, m})$ de $(P_{n, m})$ y una cadena de relaciones de dominación entre conjuntos de soluciones factibles de $(P'_{n, m})$ que nos permitirán concluir que ningún grafo con dos terminales G en $\mathcal{M}_{n, m}$ maximiza $N_3(G)$ dentro de todos los grafos con dos terminales en $T_{n, m}^4$.

En los párrafos que siguen se describe el problema de optimización combinatoria $(\mathcal{G}_{n, m})$ para cada dupla (n, m) en I^* . Primeramente clasificaremos el conjunto de vértices $V(G)$ y el conjunto de aristas $E(G)$ de un grafo con dos terminales G cualquiera de $T_{n, m}^4$ utilizando los conceptos que se presentan a continuación.

Definición 27. Para cada grafo G en $T_{n, m}^4$ y cada j en $\{1, 2, 3\}$, definimos la capa j de G , denotada $V_j(G)$, como el conjunto de los vértices x en $V(G)$ tales que $d(s, x) = j$ y x pertenece a algún camino de largo 4 entre s y t .

Definición 28. Sea G en $T_{n, m}^4$. Un vértice o arista de G es irrelevante si no pertenece a ningún camino de largo 4 que une los terminales de G . Denotemos al conjunto de vértices y de aristas irrelevantes de G como $V^*(G)$ y $E^*(G)$, respectivamente.

Para cada grafo con dos terminales G en $T_{n, m}^4$ es posible particionar a $V(G)$ mediante los conjuntos $\{s, t\}, V_1(G), V_2(G), V_3(G)$ y $V^*(G)$. La Figura 3.2 muestra un grafo con dos terminales G y la partición de $V(G)$.

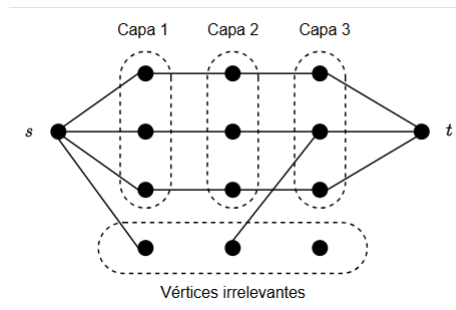


Figura 3.2: Partición de $V(G)$

Sea G en $T_{n, m}^4$. Denotemos mediante $n^*(G)$ y $m^*(G)$ a las cantidades de vértices y aristas irrelevantes de G , respectivamente. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ definamos $n_i(G) = |V_i(G)|$. Como n es la cantidad de vértices no terminales de

G se deduce que $n = n_1(G) + n_2(G) + n_3(G) + n^*(G)$. Denotemos a los vértices dentro de cada capa de G de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V_1(G) &= \{u_1, \dots, u_{n_1(G)}\}; \\ V_2(G) &= \{v_1, \dots, v_{n_2(G)}\}; \\ V_3(G) &= \{w_1, \dots, w_{n_3(G)}\}. \end{aligned}$$

Definamos para cada $i \in \{1, \dots, n_2\}$ el entero $x_i(G)$ (resp. $y_i(G)$) como la cantidad de vértices de la capa 1 (resp. capa 3) que son adyacentes al vértice v_i ,

$$\begin{aligned} x_i(G) &= |\{u : u \in V_1(G), uv_i \in E(G)\}|, \\ y_i(G) &= |\{w : w \in V_3(G), v_iw \in E(G)\}|. \end{aligned}$$

Para cada i en $\{1, \dots, n_2\}$, el producto $x_i(G)y_i(G)$ es igual a la cantidad de caminos en G entre s y t de largo 4 que contienen a v_i . Como cada camino en G de largo 4 entre s y t debe contener algún vértice de la capa 2 se deduce que $N_3(G) = \sum_{i=1}^{n_2} x_i(G)y_i(G)$. Como hay exactamente $n_1(G)$ aristas cuyos extremos son s y un vértice de la capa 1, hay exactamente $\sum_{i=1}^{n_2} (x_i(G) + y_i(G))$ aristas cuyos extremos son un vértice en una de las capas 1 o 3 y un vértice en la capa 2, y hay exactamente $n_3(G)$ aristas cuyos extremos son un vértice de la capa 3 y el vértice t , se concluye que $m = n_1(G) + \sum_{i=1}^{n_2} (x_i(G) + y_i(G)) + n_3(G) + m^*(G)$.

Para cada dupla (n, m) en I^* , el problema de optimización combinatoria $(\mathcal{G}_{n,m})$ consiste en maximizar $N_3(G)$ dentro de todos los grafos con dos terminales G en $T_{n,m}^4$:

$$\begin{aligned} \max_{G \in T_{n,m}^4} N_3(G) &= \sum_{i=1}^{n_2(G)} x_i(G)y_i(G) \\ \text{sujeto a: } & n_1(G) + n_2(G) + n_3(G) + n^*(G) = n \\ & n_1(G) + n_3(G) + \sum_{i=1}^{n_2(G)} (x_i(G) + y_i(G)) + m^*(G) = m \\ & n_1(G), n_2(G), n_3(G) \in \mathbb{Z}^+, n^*(G) \in \mathbb{N} \\ & x_i(G) \in \{1, \dots, n_1(G)\}, \forall i \in \{1, \dots, n_2(G)\} \\ & y_i(G) \in \{1, \dots, n_3(G)\}, \forall i \in \{1, \dots, n_2(G)\} \end{aligned}$$

Definición 29. Para cada dupla (n, m) en I^* y cada G en $T_{n,m}^4$, la tupla inducida por G , denotada $s(G)$, es $(n_1, n_2, n_3, n^*, m^*, x_1, \dots, x_{n_2}, y_1, \dots, y_{n_2})$.

Para cada dupla (n, m) en I^* definamos $S_{n,m}$ como el conjunto que consta de todas las tuplas inducidas por grafos con dos terminales G en $T_{n,m}^4$, es decir, $S_{n,m} = \{s(G) : G \in T_{n,m}^4\}$. El problema $(P_{n,m})$ es en esencia el problema $(\mathcal{G}_{n,m})$ pero considerando como dominio al conjunto de tuplas $S_{n,m}$ en lugar de $T_{n,m}^4$.

Definición 30. Para cada dupla (n, m) en I^* se define $(P_{n,m})$ como sigue:

$$\begin{aligned} \max_{s \in S_{n,m}} N_3(s) &= \sum_{i=1}^{n_2} x_i y_i \\ \text{sujeto a: } n_1 + n_2 + n_3 + n^* &= n \\ n_1 + n_3 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_i + y_i) + m^* &= m \\ n_1, n_2, n_3 &\in \mathbb{Z}^+, n^* \in \mathbb{N} \\ x_i &\in \{1, \dots, n_1\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n_2\} \\ y_i &\in \{1, \dots, n_3\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n_2\} \end{aligned}$$

Recordamos que para cumplir con el objetivo de esta sección necesitamos demostrar que para todo grafo G en $\mathcal{M}_{n,m}$ existe otro grafo H en $T_{n,m}^4$ para el cual $N_3(H) > N_3(G)$. Se observa que la proposición anterior es equivalente a demostrar que para todo G en $\mathcal{M}_{n,m}$ existe s en $S_{n,m}$ tal que $N_3(s) > N_3(s(G))$. Para demostrar esta última afirmación definiremos una relajación $(P'_{n,m})$ de $(P_{n,m})$ que consiste en extender el dominio de $(P_{n,m})$ a un conjunto de tuplas s cuyas coordenadas cumplen la única restricción de ser números enteros no negativos. Esto simplifica en gran medida nuestro problema pues en $(P_{n,m})$ una tupla s pertenece al dominio $S_{n,m}$ únicamente si existe un grafo con dos terminales G en $T_{n,m}^4$ tal que $s(G) = s$.

Definición 31. Para cada dupla (n, m) en I^* definimos el espacio de soluciones $S'_{n,m}$ como el conjunto de tuplas $(n_1, n_2, n_3, n^*, m^*, x_1, \dots, x_{n_2}, y_1, \dots, y_{n_2})$ tales que cada una de sus entradas es un entero no negativo.

Las tuplas de $S'_{n,m}$ tienen la misma estructura que las de $S_{n,m}$, con la diferencia de que sus coordenadas varían libremente sobre los enteros no negativos. Diremos en lo que sigue que una tupla s de $S'_{n,m}$ realiza a G cuando existe G en $T_{n,m}^4$ tal que $s(G) = s$. A continuación definimos el problema de programación no lineal entera $(P'_{n,m})$, que difiere de $(P_{n,m})$ únicamente en su dominio.

Definición 32. Para cada dupla (n, m) en I^* se define $(P'_{n,m})$ como sigue:

$$\begin{aligned} \max_{s \in S'_{n,m}} N_3(s) &= \sum_{i=1}^{n_2} x_i y_i \\ \text{sujeto a: } n_1 + n_2 + n_3 + n^* &= n & \text{(I)} \\ n_1 + n_3 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_i + y_i) + m^* &= m & \text{(II)} \\ n_1, n_2, n_3 &\in \mathbb{Z}^+, n^* \in \mathbb{N} & \text{(III)} \\ \forall i \in \{1, \dots, n_2\} \quad x_i &\in \{1, \dots, n_1\} & \text{(IV)} \\ \forall i \in \{1, \dots, n_2\} \quad y_i &\in \{1, \dots, n_3\} & \text{(V)} \end{aligned}$$

Observamos que pueden existir tuplas en $S'_{n,m}$ que no cumplen con las restricciones de $(P'_{n,m})$ y por tanto no forman parte del espacio de soluciones factibles de $(P'_{n,m})$. En lo que sigue denotaremos $\hat{S}'_{n,m}$ al espacio de soluciones factibles del problema $(P'_{n,m})$. Observemos que $S_{n,m} \subseteq \hat{S}'_{n,m}$, pues si s pertenece a $S_{n,m}$ entonces s cumple con las restricciones del problema $(P'_{n,m})$ por ser las mismas restricciones que las de $(P_{n,m})$.

Definición 33. Para cada dupla (n, m) en I^* definimos $\mathcal{M}'_{n,m}$ como $\mathcal{M}'_{n,m} = \{s(G) : G \in \mathcal{M}_{n,m}\}$.

A continuación definiremos una relación de dominación entre conjuntos en $S'_{n,m}$ en función del valor de N_3 de sus elementos.

Definición 34. Para cada dupla (n, m) en I^* y cada par de subconjuntos A y B de $\hat{S}'_{n,m}$ denotamos $A \preceq B$ (resp., $A \prec B$) si para cada s en A existe s' en B tal que $N_3(s) \leq N_3(s')$ (resp., $N_3(s) < N_3(s')$).

Cuando se cumple que $A \preceq B$ (resp., $A \prec B$) diremos que B domina (resp., domina estrictamente) a A . A continuación, enunciamos el resultado que nos permitirá demostrar el Lema 25.

Lema 35. Para cada dupla (n, m) en I^* existe un conjunto $S^*_{n,m}$ incluido en $S_{n,m}$ tal que $\mathcal{M}'_{n,m} \prec S^*_{n,m}$.

Vamos a proceder a demostrar el Lema 25 asumiendo por el momento que el Lema 35 es cierto.

Demostración del Lema 25. Sea (n, m) una dupla en I^* y sea G en $\mathcal{M}_{n,m}$ cualquiera. Sabemos que $s(G) \in \mathcal{M}'_{n,m}$. Por el Lema 35, existe un subconjunto $S^*_{n,m}$ de $S_{n,m}$ tal que $\mathcal{M}'_{n,m} \prec S^*_{n,m}$, por lo que existe h en $S^*_{n,m}$ tal que $N_3(s(G)) < N_3(h)$. Como $S^*_{n,m} \subseteq S_{n,m}$ tenemos que $h \in S_{n,m}$, por lo que existe H en $T^4_{n,m}$ tal que $s(H) = h$. Como $N_3(G) = N_3(s(G))$ y $N_3(H) = N_3(s(H))$ se sigue que $N_3(G) < N_3(H)$. Por lo tanto, G no maximiza $N_3(G)$ dentro de $T^4_{n,m}$ y $G \notin \mathcal{N}_{n,m}$. Hemos probado que si G es un grafo con dos terminales cualquiera en $\mathcal{M}_{n,m}$ entonces G no pertenece a $\mathcal{N}_{n,m}$, por lo que $\mathcal{M}_{n,m} \cap \mathcal{N}_{n,m} = \emptyset$. \square

Para demostrar el Lema 35 vamos a construir subconjuntos $S^0_{n,m}, \dots, S^5_{n,m}$ de $\hat{S}'_{n,m}$ tales que $\mathcal{M}'_{n,m} \preceq S^0_{n,m} \preceq S^1_{n,m} \preceq S^2_{n,m} \preceq S^3_{n,m} \preceq S^4_{n,m} \prec S^5_{n,m}$ y $S^5_{n,m} \subseteq S_{n,m}$. Definiremos $S^*_{n,m}$ como $S^5_{n,m}$, por la transitividad de la relación de dominación tendremos que $\mathcal{M}'_{n,m} \prec S^*_{n,m}$. Cada uno de los 6 pasos que constituyen la cadena de dominaciones previamente presentada se expresa en un lema de dominación que será probado en la Sección 3.4. En esta sección nos limitamos a definir cada uno de los conjuntos $S^i_{n,m}$ así como a brindar una intuición del motivo por el cual se cumple que $S^i_{n,m} \preceq S^{i+1}_{n,m}$ para cada $i \in \{0, \dots, 3\}$ y $S^4_{n,m} \prec S^5_{n,m}$.

Definición 36. Para cada dupla (n, m) en I^* definimos $S_{n,m}^0$ como el conjunto de tuplas de $\hat{S}'_{n,m}$ tales que $n_1, n_2, n_3 \geq k(n, m)$.

El siguiente lema establece que $\mathcal{M}'_{n,m} \preceq S_{n,m}^0$.

Lema 37. Para cada dupla (n, m) en I^* se cumple que $\mathcal{M}'_{n,m} \preceq S_{n,m}^0$.

La prueba del Lema 37 es inmediata pues se nota que $\mathcal{M}'_{n,m} \subseteq S_{n,m}^0$.

Definición 38. Para cada dupla (n, m) en I^* definimos $S_{n,m}^1$ como el subconjunto de tuplas de $S_{n,m}^0$ tales que $m^* = 0$.

La condición $m^* = 0$ significa que las tuplas de $S_{n,m}^1$ realizan grafos en los cuales ninguna de sus aristas es irrelevante. Intuitivamente, si tenemos una tupla que realiza un grafo con dos terminales G con algunas aristas irrelevantes entonces es posible reemplazar dichas aristas irrelevantes de modo de obtener otro grafo con dos terminales G' tal que $N_3(G) < N_3(G')$. La Figura 3.3 presenta un grafo con dos terminales G_0 realizado por una tupla en $S_{9,18}^0$ que posee una arista irrelevante en línea punteada, y un grafo con dos terminales G_1 realizado por una tupla en $S_{9,18}^1$ que se obtiene de G_0 tras reemplazar sus arista irrelevante por la arista que aparecen en línea punteada que no es irrelevante. Se observa que $N_3(G_0) = 8$ mientras que $N_3(G_1) = 10$.

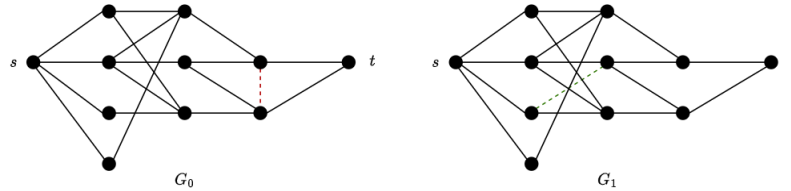


Figura 3.3: Grafos con dos terminales G_0 y G_1 realizados por tuplas en $S_{9,18}^0$ y $S_{9,18}^1$ respectivamente.

Lema 39. Para cada dupla (n, m) en I^* se cumple que $S_{n,m}^0 \preceq S_{n,m}^1$.

Antes de definir $S_{n,m}^2$ es necesario presentar el concepto de dupla justa.

Definición 40. Una dupla (x, y) en \mathbb{Z}^2 es justa cuando $|x - y| \leq 1$.

Definición 41. Para cada dupla (n, m) en I^* definimos $S_{n,m}^2$ como el subconjunto de tuplas de $S_{n,m}^1$ tales que (n_1, n_3) es justa.

La Figura 3.4 presenta a dos grafos con dos terminales G_1 y G_2 realizados mediante tuplas en $S_{9,18}^1$ y $S_{9,18}^2$ respectivamente. El grafo con dos terminales G_2 se obtiene tras elegir un vértice v de la capa 1 de G_1 y reemplazar la arista sv por tv . Se observa que $N_3(G_1) = 10$ mientras que $N_3(G_2) = 11$.

Lema 42. Para cada dupla (n, m) en I^* se cumple que $S_{n,m}^1 \preceq S_{n,m}^2$.

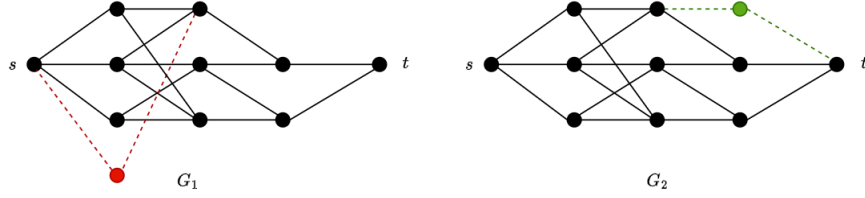


Figura 3.4: Grafos con dos terminales G_1 y G_2 realizados por tuplas en $S_{9,18}^1$ y $S_{9,18}^2$ respectivamente.

Definición 43. Para cada dupla (n, m) en I^* definimos $S_{n,m}^3$ como el subconjunto de tuplas de $S_{n,m}^2$ tales que para todo i en $\{1, \dots, n_2\}$ la dupla (x_i, y_i) es justa.

La condición de que cada dupla (x_i, y_i) es justa significa que cada tupla de $S_{n,m}^2$ realiza un grafo con dos terminales donde cada vértice de la capa 2 tiene una cantidad justa de vértices adyacentes de la capa 1 y de la capa 3.

La Figura 3.5 presenta un grafo con dos terminales G_2 que se realiza mediante una tupla en $S_{9,18}^2$ en que la dupla $(x_3, y_3) = (3, 1)$ no es justa, y al grafo G_3 que se realiza mediante una tupla en $S_{9,18}^3$ y se obtiene de reemplazar la arista punteada de G_2 por la arista punteada que aparece en G_3 . Como resultado, la dupla $(x_1(G_3), y_1(G_3)) = (2, 2)$ es justa, lo que repercute en un incremento en la cantidad de caminos de largo 4 de $N_3(G_2) = 11$ a $N_3(G') = 12$.

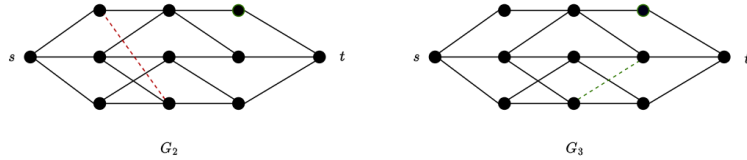


Figura 3.5: Grafos con dos terminales G_2 y G_3 realizados por tuplas en $S_{9,18}^2$ y $S_{9,18}^3$ respectivamente.

Lema 44. Para cada dupla (n, m) en I^* se cumple que $S_{n,m}^2 \preceq S_{n,m}^3$.

Definición 45. Para cada dupla (n, m) en I^* definimos $S_{n,m}^4$ como el subconjunto de tuplas de $S_{n,m}^3$ tales que $\min_{\{1 \leq i \leq n_2\}} y_i < \max_{\{1 \leq i \leq n_2\}} y_i$.

Se observa que las tuplas de $S_{n,m}^4$ realizan grafos con dos terminales en los cuales las cantidades de caminos que contienen a cada vértice de capa 2 no son todas iguales. Intuitivamente, estos grafos con dos terminales poseen mayor cantidad de caminos de largo 4 entre sus terminales porque es preferible acumular un mayor número de caminos que contengan a pocos vértices de capa 2 en lugar de distribuir estos caminos para que cada vértice de capa 2 forme parte de aproximadamente la misma cantidad de caminos.

La Figura 3.6 presenta a un grafo con dos terminales G_3 que se realiza mediante una tupla en $S_{9,18}^3$ tal que $y_1 = y_2 = y_3 = 2$, y al grafo con dos terminales G_4 que se realiza mediante una tupla en $S_{9,18}^4$ y se obtiene tras reemplazar a las aristas punteadas de G_3 por las aristas punteadas en G_4 de modo que $y'_1 = 3, y'_2 = 2$ e $y'_3 = 1$. Como resultado se observa un incremento de $N_3(G_3) = 12$ a $N_3(G_4) = 14$.

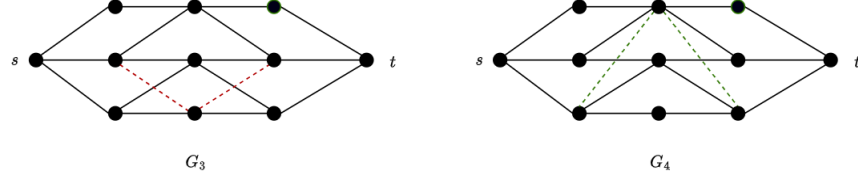


Figura 3.6: Grafos con dos terminales G_3 y G_4 realizados por tuplas en $S_{9,18}^3$ y $S_{9,18}^4$ respectivamente.

Lema 46. Para cada dupla (n, m) en I^* se cumple que $S_{n,m}^3 \preceq S_{n,m}^4$.

El último conjunto que definiremos en esta sección es $S_{n,m}^5$. A diferencia del resto de subconjuntos que definen una estructura anidada, este conjunto no está incluido en $S_{n,m}^4$.

Definición 47. Para cada dupla (n, m) en I^* definimos $S_{n,m}^5$ como el subconjunto de tuplas de $\hat{S}'_{n,m}$ tales que $n_1 \geq k(n, m) + 1$ y $m^* \leq k(n, m)$.

Los lemas previos establecen que cada conjunto $S_{n,m}^i$ es dominado por $S_{n,m}^{i+1}$. El Lema 48 establece que $S_{n,m}^4$ es dominado estrictamente por $S_{n,m}^5$.

Lema 48. Para cada dupla (n, m) en I^* se cumple que $S_{n,m}^4 \prec S_{n,m}^5$.

La Figura 3.7 presenta un grafo con dos terminales G_4 realizado por una tupla en $S_{9,18}^4$ y el grafo G_5 realizado mediante una tupla en $S_{9,18}^5$. Para obtener G_5 a partir de G_4 fueron cambiadas las aristas punteadas en G_4 por las aristas punteadas en G_5 de modo que uno de los vértices de capa 2 de G_4 pasó a ser un vértice de capa 1 en G_5 . Como resultado de este cambio observamos un incremento de $N_3(G_4) = 14$ a $N_3(G_5) = 16$.

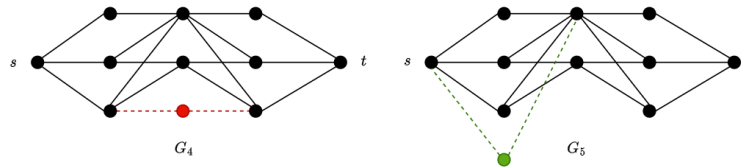


Figura 3.7: Grafos con dos terminales G_4 y G_5 realizados por tuplas en $S_{9,18}^4$ y $S_{9,18}^5$ respectivamente.

Lema 49. Para cada dupla (n, m) en I^* se cumple que $S_{n,m}^5 \subseteq S_{n,m}$.

Una vez probados los lemas enunciados en esta sección estaremos en condiciones de probar el Lema 35 de la siguiente forma.

Demostración del Lema 35. Sea (n, m) una dupla cualquiera en I^* . Definamos al conjunto $S_{n,m}^*$ como $S_{n,m}^5$. Por el Lema 49 sabemos que $S_{n,m}^* \subseteq S_{n,m}$. Por los lemas 37, 39, 42, 44, 46 y 48, sabemos que $\mathcal{M}'_{n,m} \preceq S_{n,m}^0 \preceq S_{n,m}^1 \preceq S_{n,m}^2 \preceq S_{n,m}^3 \preceq S_{n,m}^4 \prec S_{n,m}^*$. Por la transitividad de \preceq y \prec se sigue que $\mathcal{M}'_{n,m} \prec S_{n,m}^*$, como queríamos demostrar. \square

3.4. Demostración de los lemas de dominación

En esta sección demostraremos los lemas enunciados en la Sección 3.3. Para facilitar el seguimiento de las demostraciones antes mencionadas, las pruebas de los lemas auxiliares que se usan en estas demostraciones se encuentran en la sección de Anexos A.1.

La prueba del Lema 37 es inmediata y se basa en el simple hecho de que $\mathcal{M}'_{n,m} \subseteq S_{n,m}^0$.

Demostración del Lema 37. Sean (n, m) en I^* y sea s en $\mathcal{M}'_{n,m}$ cualquiera. Debemos probar que existe s' en $S_{n,m}^0$ tal que $N_3(s) \leq N_3(s')$. Como s pertenece a $\mathcal{M}'_{n,m}$ se cumple que $n_1, n_2, n_3 \geq k(n, m)$, por lo que s pertenece a $S_{n,m}^0$. Basta entonces con tomar $s' = s$ y como $N_3(s) = N_3(s')$ se cumple en particular que $N_3(s) \leq N_3(s)$. Como s fue elegido arbitrariamente en $\mathcal{M}'_{n,m}$ se tiene que $\mathcal{M}'_{n,m} \preceq S_{n,m}^0$, como queríamos probar. \square

Ahora procedemos a probar el Lema 39 que establece que $S_{n,m}^0 \preceq S_{n,m}^1$. Para demostrar dicho lema, haremos uso de los siguientes lemas técnicos.

Lema 50. Para cada dupla (n, m) en I^* , $2k(n, m)^2 + 2k(n, m) - 2 \geq m$.

Lema 51. Para cada dupla (n, m) en I^* y cada tupla s en $S_{n,m}^0$ existe i en $\{1, \dots, n_2\}$ tal que $x_i < n_1$ o $y_i < n_3$.

Las demostraciones de los Lemas 50 y 51 se incluyen en el Anexo A.1.

Demostración del Lema 39. Sean (n, m) una dupla en I^* y s una tupla en $S_{n,m}^0$ cualquiera. Probemos que existe s'' en $S_{n,m}^1$ tal que $N_3(s) \leq N_3(s'')$.

Si $m^* = 0$ entonces el lema se sigue de tomar s'' igual a s . Si $m^* > 0$, por el lema 51 existe i en $\{1, \dots, n_2\}$ tal que $x_i < n_1$ o $y_i < n_3$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x_1 < n_1$. Definimos la tupla s' de forma que s' es igual a s en todas sus componentes a excepción de x'_1 y $m^{*'}$, que se definen como $x'_1 = x_1 + 1$ y $m^{*'} = m^* - 1$. Observamos que $s' \in S_{n,m}^0$, pues como $s \in S_{n,m}^0$, trivialmente s' también satisface todas las restricciones de $(P'_{n,m})$ y $n'_1, n'_2, n'_3 \geq k(n, m)$. Notamos también que $N_3(s) \leq N_3(s')$, pues

por definición de s' para todo i en $\{1, \dots, n_2\}$ $x'_i \geq x_i$ e $y'_i = y_i$, por tanto $N_3(s) = \sum_{i=1}^{n_2} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n'_2} x'_i y'_i = N_3(s')$.

Ahora, en caso de que $m^{*'} > 0$ podemos repetir este proceso hasta obtener una tupla s'' en $S_{n,m}^0$ tal que $m^{*''} = 0$ y $N_3(s) \leq N_3(s') \leq N_3(s'')$. Además, como $s'' \in S_{n,m}^0$ y $m^{*''} = 0$, tenemos que $s'' \in S_{n,m}^1$. Como para toda tupla $s \in S_{n,m}^0$ existe $s'' \in S_{n,m}^1$ de forma que $N_3(s) \leq N_3(s'')$ se concluye que $S_{n,m}^0 \preceq S_{n,m}^1$, como queríamos demostrar. \square

A continuación se probarán los Lemas 42 y 44 que establecen que $S_{n,m}^1 \preceq S_{n,m}^2$ y $S_{n,m}^2 \preceq S_{n,m}^3$, respectivamente.

Demostración del Lema 42. Sean (n, m) una dupla en I^* y s una tupla de $S_{n,m}^1$ cualquiera. Probemos que existe s'' en $S_{n,m}^2$ tal que $N_3(s) \leq N_3(s'')$.

Si $s \in S_{n,m}^2$ entonces el lema se sigue de tomar s'' igual a s . En caso contrario la dupla (n_1, n_3) no es justa. Supongamos sin pérdida de generalidad que $n_1 \geq n_3 + 2$. Definamos la tupla s' que se obtiene de s tras reemplazar $n'_1 = n_1 - 1$, $n'_3 = n_3 + 1$, y para cada i en $\{1, \dots, n_2\}$ tal que $x_i = n_1$ se define $x'_i = x_i - 1$ e $y'_i = y_i + 1$.

Veamos que $s' \in S_{n,m}^1$. Observemos que s' satisface cada restricción de $(P'_{n,m})$. Como $n'_2 = n_2$ y $n'_3 > n_3$, se cumple que $n'_2, n'_3 \geq k(n, m)$. Como $n'_1 = n_1 - 1 \geq n_3 + 1$ y $n_3 \geq k(n, m)$, también tenemos que $n'_1 \geq k(n, m)$. Como $s' \in \hat{S}_{n,m}$ y $n'_1, n'_2, n'_3 \geq k(n, m)$ se cumple que $s' \in S_{n,m}^0$. Además, como $s' \in S_{n,m}^0$ y $m^{*'} = m^* = 0$, se cumple que $s' \in S_{n,m}^1$.

Resta probar que $N_3(s) \leq N_3(s')$, puesto que si s' no pertenece a $S_{n,m}^2$ entonces es posible repetir el proceso anterior hasta obtener s'' en $S_{n,m}^2$ tal que $N_3(s) \leq N_3(s'')$. Definamos el conjunto de enteros $J = \{i : x_i = n_1\}$. Por un lado, si $i \notin J$ entonces $x_i = x'_i$ e $y_i = y'_i$, por lo que $x'_i y'_i - x_i y_i = 0$. Por otro lado, si $i \in J$ entonces $x'_i = x_i - 1$ e $y'_i = y_i + 1$, por lo que $x'_i y'_i - x_i y_i = (x_i - 1)(y_i + 1) - x_i y_i = x_i - y_i - 1$. Como $x_i = n_1$, $n_1 \geq n_3 + 2$ e $y_i \leq n_3$ tenemos que $x_i - y_i - 1 \geq 1$. Por tanto, $N_3(s') - N_3(s) = \sum_{i \in J} (x'_i y'_i - x_i y_i) = \sum_{i \in J} (x_i - y_i - 1) > 0$. \square

Demostración del Lema 44. Sean (n, m) una dupla en I^* y s una tupla de $S_{n,m}^2$ cualquiera. Probemos que existe s'' en $S_{n,m}^3$ tal que $N_3(s) \leq N_3(s'')$.

Si $s \in S_{n,m}^3$ entonces el lema se sigue de tomar s'' igual a s . En caso contrario, existe i en $\{1, \dots, n_2\}$ tal que (x_i, y_i) no es justa. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_i \geq y_i + 2$. Definamos la tupla s' que se obtiene de s tras reemplazar (x_i, y_i) por $(x'_i, y'_i) = (x_i - 1, y_i + 1)$. Notemos que $s' \in S_{n,m}^2$. Basta con probar que $N_3(s) \leq N_3(s')$, puesto que si s' no pertenece a $S_{n,m}^3$ entonces es posible repetir el proceso anterior hasta obtener s'' en $S_{n,m}^3$ tal que $N_3(s) \leq N_3(s'')$. Por la definición de la tupla s' se tiene que $N_3(s') - N_3(s) = x'_i y'_i - x_i y_i = (x_i - 1)(y_i + 1) - x_i y_i = x_i - y_i - 1 \geq 1$. \square

Ahora se procederá a demostrar el Lema 46, que establece que $S_{n,m}^3 \preceq S_{n,m}^4$. Para demostrar dicho lema haremos uso de los siguientes lemas auxiliares cuyas demostraciones se incluyen en el Anexo A.1.

Lema 52. Para cada dupla (n, m) en I^* y cada tupla s en $S_{n,m}^3 - S_{n,m}^4$ se cumple que $\max_{\{1 \leq i \leq n_2\}} \{y_i\} \leq k(n, m)$.

Lema 53. Para cada dupla (n, m) en I^* y cada tupla s en $S_{n,m}^3 - S_{n,m}^4$ tal que $y_i = k(n, m)$ para todo i en $\{1, \dots, n_2\}$, existe s' en $S_{n,m}^4$ tal que $N_3(s) \leq N_3(s')$.

Lema 54. Para cada dupla (n, m) en I^* y cada tupla s de $S_{n,m}^3 - S_{n,m}^4$ tal que $y_i < k(n, m)$ para todo i en $\{1, \dots, n_2\}$, existe s' en $S_{n,m}^4$ tal que $N_3(s) \leq N_3(s')$.

Demostración del Lema 46. Sean (n, m) una dupla en I^* y s una tupla en $S_{n,m}^3$ cualquiera. Probemos que existe s'' en $S_{n,m}^4$ tal que $N_3(s) \leq N_3(s'')$.

Si $s \in S_{n,m}^4$ entonces el lema se sigue de tomar s'' igual a s . En caso contrario $y_1 = \dots = y_{n_2} = c$. Por el Lema 52 sabemos que $c \leq k(n, m)$. Luego, $c = k(n, m)$ o $c < k(n, m)$. Si $c = k(n, m)$ entonces el resultado se sigue del Lema 53, mientras que si $c < k(n, m)$ entonces el resultado se sigue del Lema 54. \square

A continuación se procederá a demostrar los Lemas 48 y 49 que establecen que $S_{n,m}^4 \prec S_{n,m}^5$ y $S_{n,m}^5 \subseteq S_{n,m}$, respectivamente. El Lema 55 será utilizado en la demostración del Lema 48. Su demostración se incluye en el Anexo A.1

Lema 55. Para cada dupla (n, m) en I^* y cada tupla s en $S_{n,m}^4$ se cumple que $\min_{\{1 \leq i \leq n_2\}} \{y_i\} \leq k(n, m) + 1$.

Demostración del Lema 48. Sean (n, m) una dupla en I^* y s una tupla de $S_{n,m}^4$ cualquiera. Vamos a probar que existe s' en $S_{n,m}^5$ tal que $N_3(s) < N_3(s')$. Suponemos sin pérdida de generalidad que $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_{n_2}$. Como $s \in S_{n,m}^4$ sabemos que $y_1 > y_{n_2}$.

Definimos s' como la tupla que se obtiene de s tras cambiar las siguientes componentes: $n'_1 = n_1 + 1$, $n'_2 = n_2 - 1$, $(m^*)' = y_{n_2} - 1$, y $x'_i = x_i + 1$ cuando $i \in \{1, \dots, x_{n_2}\}$. Vamos a proceder a probar primero que s' es factible para $(P'_{n,m})$, luego que $s' \in S_{n,m}^5$, y finalmente que $N_3(s) < N_3(s')$.

Como s pertenece a $\hat{S}'_{n,m}$ se deduce inmediatamente que s' cumple con los juegos de restricciones (I), (III), (IV) y (V). Veamos que s' cumple con el juego de restricciones (II). En efecto,

$$\begin{aligned}
n'_1 + n'_3 + \sum_{i=1}^{n'_2} (x'_i + y'_i) + m^{*'} &= n_1 + 1 + n_3 + \sum_{i=1}^{n_2-1} (x'_i + y'_i) + y_{n_2} - 1 \\
&= n_1 + n_3 + y_{n_2} + \sum_{i=1}^{x_{n_2}} (x_i + 1) + \sum_{i=x_{n_2}+1}^{n_2-1} x_i + \sum_{i=1}^{n_2-1} y_i \\
&= n_1 + n_3 + y_{n_2} + x_{n_2} + \sum_{i=1}^{x_{n_2}} x_i + \sum_{i=x_{n_2}+1}^{n_2-1} x_i + \sum_{i=1}^{n_2-1} y_i \\
&= n_1 + n_3 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_i + y_i) + m^* = m,
\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad se usó que $m^* = 0$. Por lo tanto, $s' \in \hat{S}'_{n,m}$.

Como $s \in S_{n,m}^4$, por el Lema 55, se cumple que $y_{n_2} - 1 \leq k(n, m)$, y como $m^{*'} = y_{n_2} - 1$ tenemos que $m^{*'} \leq k(n, m)$. Además, como $s \in S_{n,m}^4$ sabemos que $n_1 \geq k(n, m)$, y como $n'_1 = n_1 + 1$, tenemos que $n'_1 \geq k(n, m) + 1$. Ahora, como $s' \in \hat{S}'_{n,m}$, $m^{*'}(n, m) \leq k$ y $n'_1 \geq k(n, m) + 1$, se cumple que $s' \in S_{n,m}^5$.

Resta probar que $N_3(s') > N_3(s)$. De hecho,

$$\begin{aligned}
N_3(s') - N_3(s) &= \sum_{i=1}^{n_2-1} (x'_i y'_i - x_i y_i) - x_{n_2} y_{n_2} \\
&= -x_{n_2} y_{n_2} + \sum_{i=1}^{x_{n_2}} (x'_i y'_i - x_i y_i) + \sum_{i=x_{n_2}+1}^{n_2-1} (x'_i y'_i - x_i y_i) \\
&= -x_{n_2} y_{n_2} + \sum_{i=1}^{x_{n_2}} ((x_i + 1) y_i - x_i y_i) + \sum_{i=x_{n_2}+1}^{n_2-1} (x_i y_i - x_i y_i) \\
&= -x_{n_2} y_{n_2} + \sum_{i=1}^{x_{n_2}} y_i = -x_q y_q + \sum_{i=1}^q y_i = \sum_{i=1}^{x_{n_2}} (y_i - y_{n_2}) > 0,
\end{aligned}$$

donde en el último paso se usó que $y_i \geq y_{n_2}$ para cada $i \in \{1, \dots, n_2\}$ y además que $y_1 > y_{n_2}$. Luego $N_3(s') > N_3(s)$, como queríamos demostrar. \square

Demostración del Lema 49. Sean (n, m) una dupla en I^* y s una tupla de $S_{n,m}^5$ cualquiera. Para demostrar que $s \in S_{n,m}$ debemos probar que existe G en $T_{n,m}^4$ tal que $s(G) = s$. Definimos G como el grafo con dos terminales tal que $V(G) = \{s, t\} \cup \{u_1, \dots, u_{n_1}\} \cup \{v_1, \dots, v_{n_2}\} \cup \{w_1, \dots, w_{n_3}\} \cup \{z_1, \dots, z_{n^*}\}$ cuyo conjunto de aristas se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
E(G) &= \{su_i : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \{u_i v_j : 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq x_i\} \\
&\quad \cup \{v_j w_i : 1 \leq j \leq n_2, 1 \leq i \leq y_j\} \\
&\quad \cup \{w_i t : 1 \leq i \leq n_3\} \cup \{u_i u_{i+1} : 1 \leq i \leq m^*\}.
\end{aligned}$$

Notamos que $s(G) = s$, por tanto resta probar que $G \in T_{n,m}^4$, para lo cual debemos demostrar que $|V(G) - \{s, t\}| = n$, $|E(G)| = m$ y que $d(s, t) \geq 4$. Como $s \in \hat{S}'_{n,m}$ por la restricción (I) de $(P'_{n,m})$ sabemos que $n_1 + n_2 + n_3 + n^* = n$, por tanto se cumple que $|V(G) - \{s, t\}| = n_1 + n_2 + n_3 + n^* = n$. Por la restricción (II) de $(P'_{n,m})$ se cumple que $m = n_1 + n_3 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_i + y_i) + m^* = n_1 + \sum_{i=1}^{n_2} x_i + \sum_{i=1}^{n_2} y_i + n_3 + m^*$, por tanto $|E(G)| = n_1 + \sum_{i=1}^{n_2} x_i + \sum_{i=1}^{n_2} y_i + n_3 + m^* = m$. Como todo camino entre s y t en G tiene un vértice u , un vértice v y un vértice w , se cumple que $d(s, t) = 4$. En consecuencia, $G \in T_{n,m}^4$, como queríamos demostrar. \square

3.5. Prueba computacional de inexistencia

El objetivo de esta sección es probar el Lema 26. Esto es equivalente a probar que $L_{n,11}^n \cap U_{n,11}^1 = \emptyset$ para cada entero n tal que $n \geq 9$.

A tales efectos definamos, para cada entero n tal que $n \geq 9$, el conjunto $\mathcal{O}_{n,11}$ como sigue:

$$\mathcal{O}_{n,11} = \{G : G \in \mathcal{M}_{n,11}, N_{n-k(n,11)}(G) \geq N_{n-k(n,11)}(H) \text{ para cada } H \text{ en } \mathcal{M}_{n,11}\}.$$

Por un lado, probaremos que $U_{n,11}^1 \subseteq \mathcal{O}_{n,11}$ para cada entero n tal que $n \geq 9$. Por otro lado, probaremos mediante asistencia computacional el siguiente resultado.

Lema 56. *Para cada entero n tal que $n \geq 9$ y cada G en $\mathcal{O}_{n,11}$ existe H_n en $T_{n,11}^4$ tal que $N_3(G) < N_3(H_n)$.*

Como consecuencia del Lema 56 y del hecho que $U_{n,m}^1 \subseteq \mathcal{O}_{n,11}$ vamos a obtener una demostración del Lema 26, que es el objetivo de esta sección.

En los siguientes párrafos se describe el estudio computacional que sustenta la veracidad de Lema 56. Para demostrar dicho lema, en primer lugar, determinaremos explícitamente el conjunto $\mathcal{O}_{9,11}$ con asistencia computacional y encontraremos el valor máximo $N_3(G)$ alcanzado por un grafo de este conjunto. Luego encontraremos una cota superior para $N_3(G)$ que es válida para todos los grafo con dos terminales G en $\mathcal{O}_{n,11}$ tal que $n \geq 9$. Finalmente, construiremos un grafo con dos terminales H en $T_{n,11}^4$ tal que $N_3(H) > N_3(G)$ para cada G en $\mathcal{O}_{9,11}$.

Como $k(9, 11) = 2$, tenemos que cada grafo con dos terminales G en $\mathcal{O}_{9,11}$ incluye al grafo C_2 como subgrafo, el cual posee 6 vértices no terminales y 9 aristas. Por lo tanto, $\mathcal{O}_{9,11}$ consiste de grafos con dos terminales que se obtienen de agregar 3 vértices a C_2 seguido de 3 aristas. La función *HallarConjuntoO* recibe al grafo con dos terminales C_2 y retorna el conjunto $\mathcal{O}_{9,11}$.

Algoritmo 1: Función *HallarConjuntoO*

Input: Grafo con dos terminales C_2
Output: $\mathcal{O}_{9,11}$

```

1  $\mathcal{O}_{9,11} \leftarrow \emptyset;$ 
2  $N_7^{\max} \leftarrow 0;$ 
3  $G_0 \leftarrow C_2 \cup \{v_1, v_2, v_3\};$ 
4 foreach  $\{e_1, e_2, e_3\} : e_1, e_2, e_3 \notin E(G_0)$  and  $G_0 \cup \{e_1, e_2, e_3\} \in T_{9,11}^4$  do
5    $G \leftarrow G_0 \cup \{e_1, e_2, e_3\};$ 
6    $N_7(G) \leftarrow \text{calcular}N(G, 7);$ 
7   if  $N_7(G) > N_7^{\max}$  then
8      $N_7^{\max} \leftarrow N_7(G);$ 
9      $\mathcal{O}_{9,11} \leftarrow \{G\};$ 
10  end
11  else if  $N_7(G) = N_7^{\max}$  then
12     $\mathcal{O}_{9,11} \leftarrow \mathcal{O}_{9,11} \cup \{G\};$ 
13  end
14 end
15 return  $\mathcal{O}_{9,11};$ 
```

Se observa que dentro de la función *HallarConjuntoO* fue utilizada la función *calcularN*(G, i) que recibe un grafo con dos terminales G en $T_{n,m}^4$ y un entero i en $\{1, \dots, n\}$, y retorna la cantidad $N_i(G)$. Esta función revisa exhaustivamente cada subconjunto S de $V(G)$ compuesto de i vértices y agrega una unidad si el subgrafo de G generado por $S \cup \{s, t\}$ tiene un camino entre los terminales s y t .

Algoritmo 2: Función *calcularN*

Input: Grafo con dos terminales G en $T_{n,m}^4$, entero i en $\{1, \dots, n\}$
Output: $N_i(G)$

```

1  $V_{int} \leftarrow V - \{s, t\};$ 
2  $N_i \leftarrow 0;$ 
3 foreach  $S$  en  $V_{int}$  tal que  $|S| = i$  do
4    $S' \leftarrow S \cup \{s, t\};$ 
5    $G' \leftarrow$  grafo inducido por  $S'$ ;
6   if hay camino entre  $s$  y  $t$  en  $G'$  then
7      $N_i \leftarrow N_i + 1;$ 
8   end
9 end
10 return  $N_i;$ 
```

Una vez obtenidos el conjunto $\mathcal{O}_{9,11}$ mediante la función *HallarConjuntoO* estaremos en condiciones de hallar el valor máximo de $N_3(G)$ dentro de todos los grafos con dos terminales G en $\mathcal{O}_{9,11}$ con la función *N3Maximo*.

Algoritmo 3: Función *N3Maximo*

Input: Conjunto de grafos *grafos*
Output: N_3^{\max}

```

1  $N_3^{\max} \leftarrow -1;$ 
2 foreach  $G \in \text{grafos}$  do
3    $N_3(G) \leftarrow \text{calcularN}(G, 3);$ 
4   if  $N_3(G) > N_3^{\max}$  then
5      $N_3^{\max} \leftarrow N_3(G);$ 
6   end
7 end
8 return  $N_3^{\max};$ 
```

Lema 57. Para cada G en $\mathcal{O}_{9,11}$ se tiene que $N_3(G) \leq 4$.

El Lema 57 se deduce de la ejecución de las funciones *HallarConjuntoO* y *N3Maximo*.

En el Anexo A.2 se presenta el código ejecutado y en el Anexo A.3 se menciona la plataforma de cómputo utilizada para la ejecución de dicho código, mientras que el Anexo A.4 se presentan los 36 grafos en $\mathcal{O}_{9,11}$.

El siguiente resultado es una generalización del Lema 57.

```

Cantidad de grafos en  $\mathcal{O}_{\mathcal{O}}(9, 11)$ : 36
Máximo N3 en  $\mathcal{O}_{\mathcal{O}}(9, 11)$ : 4
Tiempo total de ejecución: 6.26 segundos

```

Figura 3.8: Log de la ejecución de las funciones *HallarConjuntoO* y *N3Maximo*

Lema 58. Para cada (n, m) en $I - I^*$ y cada G en $\mathcal{O}_{n,m}$ se tiene que $N_3(G) \leq 4$.

Demostración. Sean (n, m) en $I - I^*$ y G en $\mathcal{O}_{n,m}$ cualquiera. Como $(n, m) \in I - I^*$ tenemos que $n \geq 9$ y $m = 11$, por lo que G consta de exactamente 11 aristas. Luego, $k(n, m) = \lfloor \frac{11}{4} \rfloor = 2$. Como $G \in \mathcal{O}_{n,11}$ sabemos que G contiene a C_2 como subgrafo. Sabemos que C_2 tiene 6 vértices no terminales y 8 aristas. Como G tiene 11 aristas de las cuales 8 son parte del subgrafo C_2 , en G hay a lo sumo 3 aristas incidentes a otros vértices que no son parte del subgrafo C_2 . Por tanto, hay a lo sumo 9 vértices no terminales de G para los cuales una arista es incidente a ellos, y el resto de los vértices de G (al menos $n - 9$ vértices) son vértices irrelevantes.

Definimos el grafo con dos terminales G' obtenido de G tras eliminar $n - 9$ vértices irrelevantes de G que no son extremo de ninguna arista de G . Por construcción se deduce que para cada $i \in \{1, \dots, 9\}$ $N_i(G') = N_i(G)$ y que $G' \in \mathcal{O}_{9,11}$. Ahora, como $G' \in \mathcal{O}_{9,11}$, por el lema 57 sabemos que $N_3(G') \leq 4$, y como $N_3(G) = N_3(G')$ se cumple que $N_3(G) \leq 4$, como queríamos demostrar. \square

Ahora definamos, para entero n tal que $n \geq 9$, el grafo con dos terminales H_n en $T_{n,11}^4$ tal que $N_3(H_n) = 6$.

Definición 59. Para cada entero n tal que $n \geq 9$ se define G_n en $T_{n,11}^4$ como el grafo con dos terminales cuyos conjuntos de vértices $V(G)$ y $E(G)$ se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 V(H_n) &= \{s, t\} \cup \{u_1, u_2\} \cup \{v_1, v_2\} \cup \{w_1, w_2\} \cup \{z_1, \dots, z_{n-6}\}, \\
 E(H_n) &= \{su_1, u_1v_1, v_1w_1, w_1t, su_2, u_2v_2, v_2w_2, w_2t\} \cup \{u_2v_1, v_1w_2, v_2w_1\}.
 \end{aligned}$$

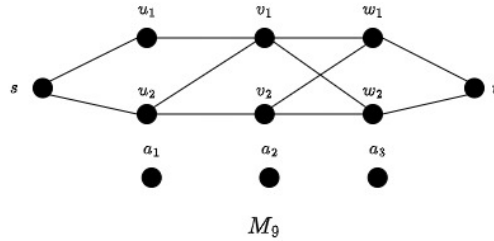


Figura 3.9: Grafo con dos terminales H_9 en $T_{9,11}^4$.

Estamos en condiciones de demostrar el Lema 26.

Demostración del Lema 26. Sean (n, m) en $I - I^*$ y G en $U_{n,m}^1$ cualquiera. Por el Lema 24 sabemos que $G \in \mathcal{M}_{n,11}$. Además, como G pertenece a $U_{n,m}^1$, necesariamente se cumple que $N_{n-k(n,m)}(G) \geq N_{n-k(n,m)}(H)$ para cualquier grafo H en $\mathcal{M}_{n,11}$, por lo tanto G pertenece a $\mathcal{O}_{n,11}$. Como G es un grafo con dos terminales cualquiera en $U_{n,m}^1$ concluimos que $U_{n,m}^1 \subseteq \mathcal{O}_{n,m}$.

Como $G \in \mathcal{O}_{n,m}$, por el Lema 58 se tiene que $N_3(G) < N_3(H_n)$, lo que implica que G no pertenece a $L_{n,m}^3$. Como $L_{n,m}^n \subseteq L_{n,m}^3$ se sigue que $G \notin L_{n,m}^n$. Hemos probado que cada G en $U_{n,m}^1$ no pertenece a $L_{n,m}^n$, es decir que $L_{n,m}^n \cap U_{n,m}^1 = \emptyset$, como queríamos demostrar. \square

Capítulo 4

Conclusiones y trabajo futuro

En este proyecto de grado se demuestra que no existe ningún grafo uniformemente más confiable con dos terminales en $T_{n,m}^4$ cuando $n \geq 6$ y $8 \leq m \leq 2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor^2 + 2 (\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1)$. Como consecuencia, se deduce que la Conjetura 1 propuesta por Brown et al. [5] es cierta cuando $d = 4$, cumpliendo con los objetivos propuestos originalmente por los orientadores de este proyecto.

El método empleado para la demostración de inexistencia de grafos con dos terminales uniformemente más confiables sigue la lógica de trabajos previos, en los que se determinan por un lado propiedades inherentes a grafos localmente más confiables en un entorno de 0 y de 1, y luego se prueba que dichas propiedades no pueden ser satisfechas simultáneamente. En este proyecto se introduce un novedoso enfoque de optimización basado en la construcción de un problema de programación no lineal entera que guía la búsqueda de grafos con dos terminales con una amplia cantidad de caminos de largo 4 entre sus terminales. Mediante una nueva relación de dominación entre pares de conjuntos de soluciones factibles de dicho problema se deduce que cada grafo con dos terminales que es localmente más confiable en un entorno de 1 no puede ser localmente más confiable en un entorno de 0.

Cabe destacar que la Conjetura de Brown et al. permanece abierta para valores de d mayores que 4. Un motivo de trabajo futuro es demostrar su validez en general, o mostrar un contraejemplo.

Cabe observar que todo grafo con dos terminales que sea localmente más confiable en un entorno de 1 en $T_{n,m}^d$ necesariamente maximiza la conectividad, y por el Teorema de Menger debe maximizar la cantidad de caminos internamente disjuntos por vértices. Esto fuerza la presencia de

subgrafos que todo grafo uniformemente más confiable en $T_{n,m}^d$ debe poseer. Por otro lado, todo grafo con dos terminales G que sea localmente más confiable cerca de 0 en $T_{n,m}^d$ necesariamente maximiza la cantidad $N_{d-1}(G)$. Por tanto un trabajo futuro de interés es demostrar la inexistencia de grafos uniformemente más confiables en clases de grafos $T_{n,m}^d$ para $d \geq 5$, empleando una estrategia de demostración similar a la introducida en este trabajo. Con este propósito una línea de trabajo podría ser maximizar el invariante $N_{d-1}(G)$, formulando problemas de programación no lineal entera que generalicen a los ya presentados en este proyecto.

Otra línea de trabajo futuro consiste en decidir la existencia o inexistencia de grafos con dos terminales uniformemente más confiables cuando $d = 4$ en aquellas clases $T_{n,m}^4$ que no fueron estudiadas en este proyecto.

Bibliografía

- [1] Hayley Bertrand, Owen Goff, Christina Graves, and Maggie Sun. On uniformly most reliable two-terminal graphs. *Networks*, 72(2):200–216, 2018.
- [2] F. T. Boesch. On unreliability polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis. *Journal of Graph Theory*, 10(3):339–352, 1986.
- [3] F. T. Boesch. On the synthesis of optimally reliable networks having unreliable nodes but reliable edges. In *Proceedings of the Seventh Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (INFOCOM '88)*, pages 829–834. IEEE, 1988.
- [4] F. T. Boesch, X. Li, and C. Suffel. On the existence of uniformly optimally reliable networks. *Networks*, 21(2):181–194, 1991.
- [5] Isaac Brown, Christina Graves, Brendan Miller, and Tyler Russell. Most reliable two-terminal graphs with node failures. *Networks*, 76(3):414–426, 2020.
- [6] Jason I. Brown and D. Cox. Nonexistence of optimal graphs for all terminal reliability. *Networks*, 63(2):146–153, 2014.
- [7] Reinhard Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 3 edition, 2005. Véase pag. 62.
- [8] Wendy Myrvold, Kim H. Cheung, Lavon B. Page, and Jo Ellen Perry. Uniformly-most reliable networks do not always exist. *Networks*, 21(4):417–419, 1991.
- [9] Pablo Romero. Uniformly optimally reliable graphs: A survey. *Networks*, 80(4):466–481, 2022.
- [10] Pablo Romero. Characterization of locally most split reliable graphs. *Theoretical Computer Science*, 1047:115327, 2025.
- [11] Pablo Romero and Martín D. Safe. Nonexistence of uniformly most reliable graphs of least corank. *Discrete Applied Mathematics*, 380:407–419, 2026.

- [12] C. Stivaros. *On the residual node connectedness network reliability model*. Ph.d. thesis, Stevens Institute of Technology, Hoboken, New Jersey, USA, 1990.
- [13] Sun Xie, Haixing Zhao, and Jun Yin. Nonexistence of uniformly most reliable two-terminal graphs. *Theoretical Computer Science*, 892:279–288, 2021.

Anexo A

Anexo 1

A.1. Demostraciones de lemas auxiliares

El siguiente lema que establece el cumplimiento de una desigualdad será utilizado en la demostración del Lema 50.

Lema 60. *Para cada entero m tal que $m \geq 8$ y $m \neq 11$ se cumple que $2\lfloor m/4 \rfloor^2 + 2\lfloor m/4 \rfloor - 2 \geq m$.*

Demostración. El enunciado surge por inspección cuando $m \in \{8, 9, 10\}$. Para cada entero m tal que $m \geq 12$ sean q y r los únicos enteros tales que $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ y $m = 4q + r$. Basta con probar que $2q^2 + 2q - 2 \geq 4q + r$. Como $m \geq 12$ sabemos que $q \geq 3$. Luego se sigue que $2q^2 \geq 6q$. Por lo tanto, $2q^2 + 2q - 2 \geq 8q - 2 \geq 4q + 2(2q - 1) \geq 4q + 10 \geq 4q + r$. \square

Lema (50). *Para cada dupla (n, m) en I^* , $2k(n, m)^2 + 2k(n, m) - 2 \geq m$.*

Demostración. Sea (n, m) una dupla en I^* cualquiera. Recordemos que $k(n, m) = \min\{\lfloor n/3 \rfloor, \lfloor m/4 \rfloor\}$. Si $k(n, m) = \lfloor n/3 \rfloor$ entonces se cumple que $2\lfloor n/3 \rfloor^2 + 2\lfloor n/3 \rfloor - 2 \geq m$, pues $(n, m) \in I^*$. En cambio, si $k = \lfloor m/4 \rfloor$ entonces el enunciado se sigue del Lema 60. \square

Lema (51). *Para cada dupla (n, m) en I^* y cada tupla s en $S_{n,m}^0$ existe i en $\{1, \dots, n_2\}$ tal que $x_i < n_1$ o $y_i < n_3$.*

Demostración. Sean (n, m) una dupla en I^* y s una tupla en $S_{n,m}^0$ cualquiera. Suponemos por absurdo que $\min_{1 \leq i \leq n_2} \{x_i\} \geq n_1$ y $\min_{1 \leq i \leq n_2} \{y_i\} \geq n_3$. Como $s \in S_{n,m}^0$ sabemos que $n_1, n_2, n_3 \geq k(n, m)$. Luego $\min_{1 \leq i \leq n_2} \{x_i\} \geq k(n, m)$ y $\min_{1 \leq i \leq n_2} \{y_i\} \geq k(n, m)$. Como $s \in \hat{S}'_{n,m}$, por la restricción (II) se cumple que $m = n_1 + n_3 + m^* + \sum_{i=1}^{n_2} (x_i + y_i) \geq 2k(n, m) + 2k(n, m)^2$, contradiciendo el Lema 50. Luego existe i en $\{1, \dots, n_2\}$ tal que $x_i < n_1$ o $y_i < n_3$, como queríamos demostrar. \square

Lema (52). *Para cada dupla (n, m) en I^* y cada tupla s en $S_{n,m}^3 - S_{n,m}^4$ se cumple que $\max_{1 \leq i \leq n_2} \{y_i\} \leq k(n, m)$.*

Demostración. Sean (n, m) una dupla en I^* y s una tupla de $S_{n,m}^3 - S_{n,m}^4$ cualquiera. Supongamos por absurdo que $\max_{\{1 \leq i \leq n_2\}} \{y_i\} > k(n, m)$. Como $s \notin S_{n,m}^4$ sabemos que $y_1 = \dots = y_{n_2}$, por lo que para todo i en $\{1, \dots, n_2\}$ $y_i > k(n, m)$. Como $s \in S_{n,m}^3$ y cada dupla (x_i, y_i) es justa tenemos que $\min_{\{1 \leq i \leq n_2\}} \{x_i\} \geq k(n, m)$. Como $n_1, n_2, n_3 \geq k(n, m)$ y $s \in \hat{S}'_{n,m}$, por la restricción (II) tenemos que $m = n_1 + n_3 + m^* + \sum_{i=1}^{n_2} (x_i + y_i) > 2k(n, m) + 2k(n, m)^2$, en contradicción con el Lema 50. \square

El Lema 61 será utilizado en la demostración del Lema 53.

Lema 61. *Para cada dupla (n, m) en I^* y cada tupla s en $S_{n,m}^3$ tal que para todo i en $\{1, \dots, n_2\}$ $y_i = k(n, m)$, existen a, b en $\{1, \dots, n_2\}$ tales que $x_a = x_b = k(n, m) - 1$.*

Demostración. Sean (n, m) una dupla en I^* y s una tupla en $S_{n,m}^3$ tal que para todo i en $\{1, \dots, n_2\}$ $y_i = k(n, m)$. Como $s \in S_{n,m}^3$, para todo i en $\{1, \dots, n_2\}$ (x_i, y_i) es justa, por tanto $x_i \geq k(n, m) - 1$. Supongamos por absurdo que para todo i en $\{1, \dots, n_2 - 1\}$ $x_i \geq k(n, m)$, mientras que $x_{n_2} \geq k(n, m) - 1$. Como $n_1, n_2, n_3 \geq k(n, m)$ tenemos que $\sum_{i=1}^{n_2} x_i \geq (n_2 - 1)k(n, m) + k(n, m) - 1 \geq (k(n, m) - 1)k(n, m) + k(n, m) - 1 = k(n, m)^2 - 1$, mientras que $\sum_{i=1}^{n_2} y_i \geq k(n, m)^2$. Luego, $\sum_{i=1}^{n_2} (x_i + y_i) \geq 2k(n, m)^2 - 1$. Como $s \in \hat{S}'_{n,m}$, por la restricción (II) se sigue que

$$\begin{aligned} m &= n_1 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_i + y_i) + n_3 + m^* \geq k(n, m) + 2k(n, m)^2 - 1 + k(n, m) \\ &> 2k(n, m)^2 + 2k(n, m) - 2, \end{aligned}$$

contradiciendo el Lema 50. \square

Lema (53). *Para cada dupla (n, m) en I^* y cada tupla s en $S_{n,m}^3 - S_{n,m}^4$ tal que $y_i = k(n, m)$ para todo i en $\{1, \dots, n_2\}$, existe s' en $S_{n,m}^4$ tal que $N_3(s) \leq N_3(s')$.*

Demostración. Sean (n, m) una dupla en I^* y s una tupla de $S_{n,m}^3 - S_{n,m}^4$ tal que para todo i en $\{1, \dots, n_2\}$ $y_i = k(n, m)$. Probemos que existe s' en $S_{n,m}^4$ tal que $N_3(s) \leq N_3(s')$. Por el Lema 61, existen a, b en $\{1, \dots, n_2\}$ tales que $x_a = x_b = k(n, m) - 1$. Definamos la tupla s' que se obtiene de s tras reemplazar $x'_a = x_a + 1 = k(n, m)$ e $y'_b = y_b - 1 = k(n, m) - 1$. Veamos que $s' \in S_{n,m}^4$. Notemos que $s' \in S_{n,m}^3$. Además, como $y'_b = k(n, m) - 1$ y para todo i en $\{1, \dots, n_2\} - \{b\}$ $y_i = k(n, m)$, se cumple que $s' \in S_{n,m}^4$.

Resta probar que $N_3(s') \geq N_3(s)$. Como $x_a = x_b = k(n, m) - 1$, $y_b = y_a = y'_a = k(n, m)$, $x'_a = k(n, m)$ e $y'_b = k(n, m) - 1$, sabemos que $N_3(s') - N_3(s) = (x'_a y'_a - x_a y_a) + (x'_b y'_b - x_b y_b) = 1$, por tanto $N_3(s') \geq N_3(s)$, como queríamos probar. \square

Lema (54). *Para cada dupla (n, m) en I^* y cada tupla s de $S_{n,m}^3 - S_{n,m}^4$ tal que $y_i < k(n, m)$ para todo i en $\{1, \dots, n_2\}$, existe s' en $S_{n,m}^4$ tal que $N_3(s) \leq N_3(s')$.*

Demostración. Sean (n, m) una dupla en I^* y s una tupla de $S_{n,m}^3 - S_{n,m}^4$ tal que para todo i en $\{1, \dots, n_2\}$ $y_i < k(n, m)$. Como $s \in S_{n,m}^3$, para todo i en $\{1, \dots, n_2\}$ la dupla (x_i, y_i) es justa, se cumple que $x_i \leq k(n, m)$.

Consideraremos dos casos. En el primer caso existe j en $\{1, \dots, n_2\}$ tal que $x_j = k(n, m)$, y en el segundo caso para todo i en $\{1, \dots, n_2\}$ $x_i < k(n, m)$.

Caso 1: Sea j en $\{1, \dots, n_2\}$ tal que $x_j = k(n, m)$. Definamos la tupla s' que se obtiene de s tras reemplazar (x_j, y_j) por $(x'_j, y'_j) = (x_j - 1, y_j + 1)$. Notemos que como $s \notin S_{n,m}^4$ se cumple que $y_1 = \dots = y_{n_2}$, por tanto para todo $i \in \{1, \dots, n_2\} - \{j\}$ $y'_j \neq y'_i$. Como $s' \in S_{n,m}^3$, pues $s \in S_{n,m}^3$, se cumple que $s' \in S_{n,m}^4$. Resta probar que $N_3(s') \geq N_3(s)$. De hecho, como $x_j = k(n, m)$ mientras que $y_j < k(n, m)$ tenemos que

$$N_3(s') - N_3(s) = x'_j y'_j - x_j y_j = (x_j - 1)(y_j + 1) - x_j y_j = x_j - y_j - 1 = (k(n, m) - 1) - y_j \geq 0.$$

Caso 2: Suponemos que $\max_{\{1 \leq i \leq n_2\}} \{x_i\} < k(n, m)$. Sea $x_a = \max_{\{1 \leq i \leq n_2\}} \{x_i\}$ y sea $b \in \{1, \dots, n_2\} - \{a\}$. Definamos la tupla s' que se obtiene de s tras reemplazar (x_a, y_a) y (x_b, y_b) por $(x'_a, y'_a) = (x_a + 1, y_a + 1)$ y $(x'_b, y'_b) = (x_b - 1, y_b - 1)$. Como $s' \in S_{n,m}^3$, notemos que $s' \in S_{n,m}^3$, y como además $y'_a \neq y'_b$ se cumple que $s' \in S_{n,m}^4$. Resta probar que $N_3(s') \geq N_3(s)$. De hecho,

$$N_3(s') - N_3(s) = (x'_a y'_a - x_a y_a) + (x'_b y'_b - x_b y_b) = (x_a - x_b) + (y_a - y_b) + 2 \geq x_a - x_b + 2 > 0.$$

□

Lema (55). Para cada dupla (n, m) en I^* y cada tupla s en $S_{n,m}^4$ se cumple que $\min_{\{1 \leq i \leq n_2\}} \{y_i\} \leq k(n, m) + 1$.

Demostración. Sean (n, m) una dupla en I^* , s una tupla de $S_{n,m}^4$ cualquiera, y sea $y_q = \min_{\{1 \leq i \leq n_2\}} \{y_i\}$. Supongamos por absurdo que $y_q \geq k(n, m) + 2$. Como $s \in S_{n,m}^4$ sabemos que $n_1, n_2, n_3 \geq k(n, m)$ y que cada tupla (x_i, y_i) es justa, por lo que $\min_{\{1 \leq i \leq n_2\}} \{x_i\} \geq k(n, m) + 1$. Pero entonces tenemos que $\sum_{i=1}^{n_2} y_i \geq k(n, m)(k(n, m) + 2)$ mientras que $\sum_{i=1}^{n_2} x_i \geq k(n, m)(k(n, m) + 1)$. Como $s \in S_{n,m}^4$ tenemos que s satisface el juego de restricciones (II) y $m = n_1 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_i + y_i) + n_3 + m^* \geq k(n, m)(k(n, m) + 2) + k(n, m)(k(n, m) + 1) \geq 2k(n, m)^2 + 2k(n, m)$, contradiciendo el Lema 50. Luego $y_q \leq k(n, m) + 1$, como queríamos demostrar. □

A.2. Código

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
from itertools import combinations
import os
import time
```

```

def calcular_N(G, i, s='s', t='t'):
    vertices_internos = [v for v in G.nodes if v != s and v != t]
    count = 0
    for subset in combinations(vertices_internos, i):
        nodos_inducidos = set(subset) | {s, t}
        subgrafo = G.subgraph(nodos_inducidos)
        if nx.has_path(subgrafo, s, t):
            count += 1
    return count

def HallarConjuntoO():
    # Grafo base C2
    C_2 = nx.Graph()
    C_2.add_nodes_from(['s', 't'] + list(range(1, 10)))
    C_2.add_edges_from([
        ('s', 1), ('s', 2),
        (1, 3), (2, 4),
        (3, 5), (4, 6),
        (5, 't'), (6, 't')
    ])

    nodos = ['s', 't'] + list(range(1, 10))
    aristas_posibles = set(combinations(nodos, 2))
    aristas_presentes = set(C_2.edges)
    aristas_disponibles = list(aristas_posibles - aristas_presentes)

    O911 = []
    max_n7 = -1

    for aristas_extra in combinations(aristas_disponibles, 3):
        G = C_2.copy()
        G.add_edges_from(aristas_extra)
        try:
            dist = nx.shortest_path_length(G, 's', 't')
        except nx.NetworkXNoPath:
            continue
        if dist >= 4:
            n7 = calcular_N(G, 7, 's', 't')
            if n7 > max_n7:
                max_n7 = n7
                O911 = [G.copy()]
            elif n7 == max_n7:
                O911.append(G.copy())

    return O911

```

```

def N3Maximo(grafos , s='s' , t='t '):
    max_n3 = -1
    for G in grafos:
        n3 = calcular_N(G, 3, s, t)
        if n3 > max_n3:
            max_n3 = n3
    return max_n3

def main():
    start = time.time()

    O911 = HallarConjuntoO()
    print(f"Cantidad de grafos en O_{9,11}: {len(O911)}")

    max_n3 = N3Maximo(O911)
    print(f"Máximo N3 en O_{9,11}: {max_n3}")

    end = time.time()
    print(f"Tiempo total de ejecución: {end - start:.2f} segundos")

if __name__ == "__main__":
    main()

```

A.3. Plataforma de cómputo

La plataforma de cómputo utilizada para las ejecuciones del código del Anexo [A.2](#).

- a) **Computadora/ modelo:** HP Laptop 15-dy2xxx
- b) **Procesador:** 11th Gen Intel(R) Core(TM) i5-1135G7 @ 2.40GHz, 2401 Mhz, 4 procesadores principales, 8 procesadores lógicos
- c) **Memoria:** 16 GB
- d) **Sistema operativo:** Microsoft Windows 11 Home
- e) **Intérprete:** Python 3.12.4

A.4. Grafos en $\mathcal{O}_{9,11}$

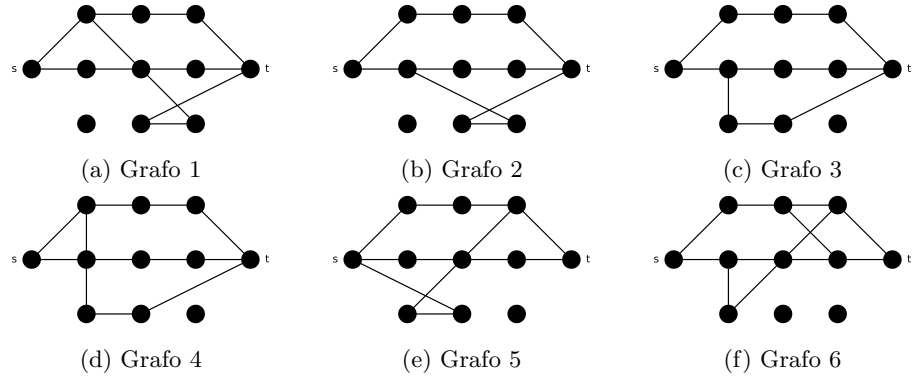


Figura A.1: Grafos 1–6

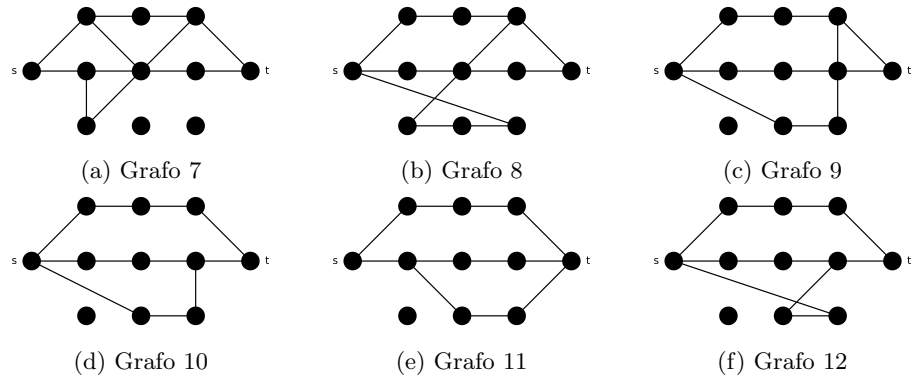


Figura A.2: Grafos 7–12

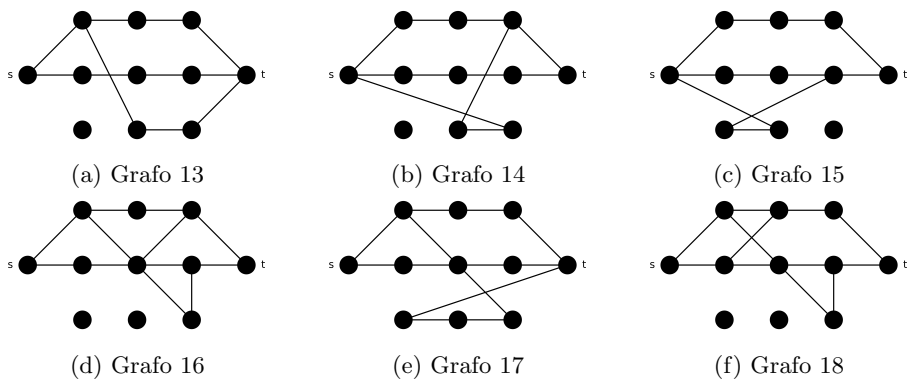


Figura A.3: Grafos 13–18

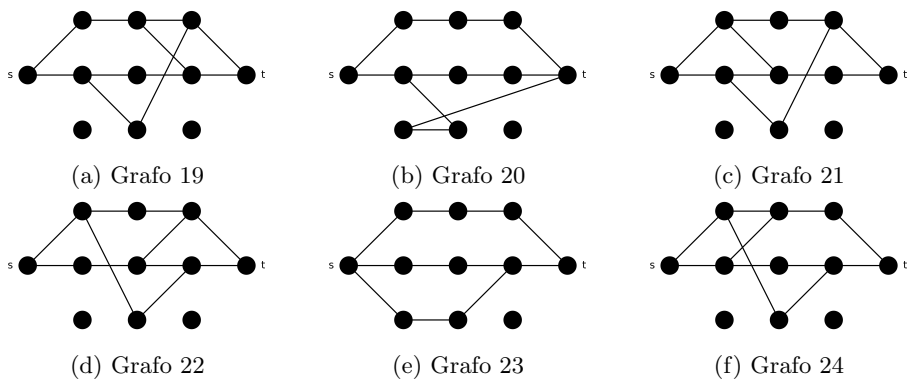


Figura A.4: Grafos 19–24

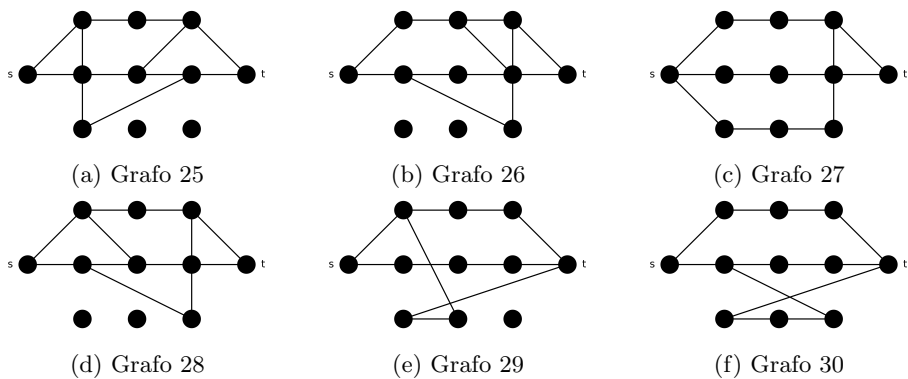
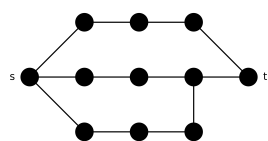
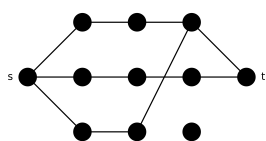


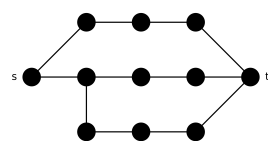
Figura A.5: Grafos 25–30



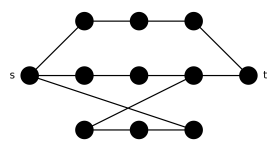
(a) Grafo 31



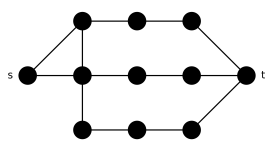
(b) Grafo 32



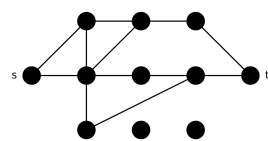
(c) Grafo 33



(d) Grafo 34



(e) Grafo 35



(f) Grafo 36

Figura A.6: Grafos 31–36