



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY

# Búsqueda de la conectividad óptima en sistemas complejos

Caracé Gutiérrez Ibarra

Programa de Posgrado en Física  
Facultad de Ciencias  
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay  
Julio de 2025



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY

# Búsqueda de la conectividad óptima en sistemas complejos

Caracé Gutiérrez Ibarra

Tesis de Doctorado presentada al Programa de Posgrado en Física, Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Doctor en Física.

Director:

Dr. Nicolás Rubido Obrer

Codirector:

Dra. Cecilia Cabeza Aceto

Montevideo – Uruguay

Julio de 2025

Gutiérrez Ibarra, Caracé

Búsqueda de la conectividad óptima en sistemas complejos / Caracé Gutiérrez Ibarra. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ciencias, 2025.

X, 120 p. 29, 7cm.

Director:

Nicolás Rubido Obrer

Codirector:

Cecilia Cabeza Aceto

Tesis de Doctorado – Universidad de la República, Programa en Física, 2025.

Referencias bibliográficas: p. 111 – 111.

1. Sistemas complejos, 2. Mapas logísticos, 3. Redes complejas, 4. Entropía, 5. Información, 6. Inferencia.  
I. Rubido Obrer, Nicolás, *et al.* II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Física. III. Título.

## INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

---

Dr. Arturo Martí

---

Dr. Pablo Monzón

---

Dr. Ricardo Sevilla Escoboza

---

Dr. Gonzalo De Polsi

---

Dr. Lorenzo Lenci

Montevideo – Uruguay

Julio de 2025



# Agradecimientos

Escribo estas líneas para agradecer de manera muy especial a Cecilia y Nicolás. A Cecilia por introducirme en esta fascinante área de investigación, por su apoyo y aliento constante. Ha sido una inspiración y referente esencial en este camino. A Nicolás, por lograr que no se noten ni los kilómetros ni las diferencias horarias. Cada uno de nuestros intercambios ha sido sumamente fructífero. Su claridad y aguda observación, combinadas con una incansable capacidad de trabajo, han constituido un motor fundamental en este proceso. Son una dupla excepcional. Agradezco sinceramente el apoyo y aguante en todos estos años.

Extiendo mi agradecimiento a todo el grupo de Física No Lineal y a quienes de un modo u otro han formado parte del Laboratorio 326. Gracias por el excelente ambiente de trabajo, las enriquecedoras discusiones y el invaluable apoyo.

Por último, a toda mi familia, pilar inquebrantable. Gracias, porque cada uno supo acompañar y ser paciente en este proceso, alentándome en cada etapa de este trabajo.

## RESUMEN

El estudio de sistemas dinámicos acoplados es fundamental para comprender fenómenos colectivos en diversos campos, donde múltiples unidades interactivas exhiben comportamientos emergentes. Dentro de este marco, los mapas logísticos acoplados se destacan como un modelo potente para capturar dinámicas no lineales y caóticas, ofreciendo un laboratorio ideal para explorar cómo la arquitectura de las interacciones moldea la dinámica colectiva. Esta tesis se centra en las interacciones y dinámicas emergentes en redes complejas formadas por mapas logísticos acoplados, investigando cómo la topología de la red y el régimen de acoplamiento determinan la sincronización, la propagación de información y la inferencia de conexiones estructurales.

La plataforma experimental, basada en la implementación electrónica de estos mapas acoplados, mostró robustez y fue validada al analizar el mapa logístico aislado (constante de Feigenbaum, exponentes de Lyapunov, diagramas de bifurcaciones). Para el análisis de la dinámica colectiva, se utilizaron herramientas de información mutua y entropía para cuantificar las dinámicas emergentes. Los resultados experimentales demostraron que las configuraciones de red que maximizan tanto la generación como la transmisión de información tienden a alcanzar cierto grado de sincronización caótica. Medidas combinadas de entropía e información mutua, permitieron evaluar la eficiencia informacional de cada configuración, mostrando que es posible alcanzar altos niveles de transmisión sin recurrir a redes densamente acopladas, lo que subraya el rol determinante de la arquitectura de la red en la dinámica y funcionalidad de sistemas complejos. Previo a la región de sincronización caótica, todas las configuraciones analizadas exhiben una fase intermedia caracterizada por una alta generación de información en los nodos individuales, pero con una baja transmisión entre ellos, revelando caos espacio-temporal, comportamiento que sugiere la presencia de una transición de fase con características híbridas.

En esta tesis se propone una nueva magnitud que cuantifica la información generada por cada mapa en función de los regímenes de transmisión de información global de la red. Esta magnitud demostró ser robusta a variaciones del acoplamiento, ofreciendo un criterio práctico para clasificar configuracio-

nes según las dinámicas. Asimismo, el análisis de correlación entre las señales individuales y el campo medio global reveló que el valor medio del coeficiente de correlación inicial sigue una ley de potencia respecto al tamaño del sistema, evidenciando una regularidad en la forma en que los nodos se acoplan al conjunto. Estos resultados sobre la dinámica y la información generada en la red fueron claves para abordar la inferencia de enlaces, identificándose un intervalo de intensidad de acoplamiento favorable, caracterizado por una alta generación de información en ausencia de sincronización completa. Este régimen dinámico intermedio maximiza la capacidad de identificar y analizar las conexiones estructurales entre los nodos a partir de la dinámica observada, al permitir la interacción óptima entre la entropía individual y la coherencia colectiva. Adicionalmente, se propuso y validó una expresión para aproximar la distancia resistiva de una red a partir únicamente del espectro de valores propios de su matriz laplaciana, en redes sintéticas y corticales. Se derivó también una expresión para la centralidad del vector propio que depende exclusivamente de los valores propios de la matriz de adyacencia, eliminando la necesidad de calcular los vectores propios, ofreciendo una significativa ventaja computacional.

Este trabajo contribuye al entendimiento de la relación fundamental entre estructura, dinámica e información en sistemas complejos. Ofrece metodologías robustas y resultados cuantitativos concretos para el análisis y la inferencia de redes donde las interacciones no son directamente observables, abriendo nuevas vías para la comprensión de la autoorganización y adaptación de sistemas complejos.

Palabras claves:

Sistemas complejos, Mapas logísticos, Redes complejas, Entropía, Información, Inferencia.

## ABSTRACT

The study of coupled dynamical systems is fundamental to understanding collective phenomena across diverse fields, where multiple interacting units exhibit emergent behavior. In this context, coupled logistic maps serve as a powerful model for capturing nonlinear and chaotic dynamics, providing an ideal framework for exploring how interaction architecture shapes collective behavior. This work focuses on interactions and emergent dynamics in complex networks composed of coupled logistic maps, investigating how network topology and coupling regime determine synchronization, information propagation, and the inference of structural connections.

The experimental platform, based on an electronic implementation of coupled logistic maps, exhibited robustness and was validated through the analysis of the isolated logistic map (Feigenbaum constant, Lyapunov exponents, bifurcation diagrams). For the analysis of collective dynamics, mutual information and entropy tools were used to quantify emergent dynamics. Experimental results indicated that network configurations that maximize both information generation and transmission tend to achieve a degree of chaotic synchronization. Combined measures of entropy and mutual information were used to evaluate the informational efficiency of each configuration, revealing that high levels of transmission can be achieved without resorting to densely coupled networks. This highlights the determining role of network architecture in the dynamics and functionality of complex systems. Before the onset of chaotic synchronization, all analyzed configurations exhibit an intermediate phase characterized by high information generation at individual nodes and low transmission between them. This regime reveals spatiotemporal chaos and suggests the presence of a phase transition with hybrid characteristics.

A novel informational quantity is introduced to quantify the information generated by each map, based on the overall transmission regime of the network. This quantity proved to be robust to variations in coupling, offering a practical criterion for classifying configurations according to their dynamics. Likewise, correlation analysis between individual signals and the global mean field revealed that the average initial correlation coefficient follows a power-law

relationship with system size, indicating a regularity in the way nodes couple to the whole. These results on the dynamics and information generated in the network were key to addressing link inference, identifying a favorable coupling strength range characterized by high information generation in the absence of complete synchronization. This intermediate dynamical regime enhances the ability to identify and analyze structural connections between nodes based on observed dynamics by allowing for the optimal interaction between individual entropy and collective coherence. Additionally, an expression was proposed and validated to approximate the resistive distance of a network based solely on the spectrum of eigenvalues of its Laplacian matrix in synthetic and cortical networks. An expression for eigenvector centrality was also derived, depending only on the eigenvalues of the adjacency matrix, eliminating the need to calculate eigenvectors and offering a significant computational advantage.

This work contributes to the understanding of the fundamental relationship between structure, dynamics, and information in complex systems. It provides robust methodologies and concrete quantitative results for the analysis and inference of networks where interactions are not directly observable, opening new avenues for understanding the self-organization and adaptation of complex systems.

Keywords:

Complex systems, Logistics maps, Complex networks, Entropy, Information, Inference.

# Tabla de contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Fundamento teórico</b>	<b>7</b>
2.1	El mapa logístico . . . . .	7
2.1.1	Bifurcaciones . . . . .	9
2.1.2	Caos y exponentes de Lyapunov . . . . .	11
2.1.3	Solución analítica y medida invariante para $r = 4$ . . . .	13
2.1.4	Autosimilaridad y constante de Feigenbaum . . . . .	14
2.2	Introducción a redes complejas . . . . .	17
2.2.1	Definición y representación de una red . . . . .	17
2.2.2	Medidas de distancia entre nodos . . . . .	20
2.2.3	Medidas de centralidad de nodos . . . . .	22
2.2.4	Modelos de redes . . . . .	24
2.3	Mapas logísticos acoplados en redes . . . . .	26
2.3.1	Modelo de mapas logísticos acoplados . . . . .	26
2.3.2	Sincronización y acoplamiento crítico en sistemas de mapas idénticos acoplados . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Métodos</b>	<b>31</b>
3.1	Medidas para caracterizar dinámicas emergentes . . . . .	31
3.1.1	Entropía e información mutua . . . . .	32
3.1.2	Campo medio y varianza . . . . .	35
3.2	Inferencia de redes a partir de dinámicas emergentes . . . . .	38
3.2.1	Análisis ROC . . . . .	38
3.2.2	Análisis ROC condicionado por el número de enlaces . .	40
<b>4</b>	<b>Implementación experimental y numérica</b>	<b>44</b>
4.1	Diseño experimental de mapas logísticos acoplados . . . . .	45

4.2	Configuraciones . . . . .	45
4.2.1	Configuraciones para el estudio de la Información . . . .	45
4.2.2	Configuraciones para el estudio de la distancia resistiva y la centralidad . . . . .	47
4.3	Detalles de la simulación numérica de mapas acoplados . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>49</b>
5.1	Análisis de la dinámica aislada de mapas logísticos experimentales	50
5.1.1	Diagrama de bifurcaciones . . . . .	50
5.1.2	Exponente de Lyapunov . . . . .	51
5.1.3	Constante de Feigenbaum . . . . .	52
5.1.4	Obtención experimental del parámetro de cada mapa . .	53
5.2	Análisis de la dinámica colectiva de mapas acoplados . . . . .	54
5.2.1	Contribuciones y limitaciones de la simulación numérica	54
5.2.2	Generación y transmisión de información . . . . .	59
5.2.3	Caracterización de las dinámicas emergentes mediante parámetros de orden . . . . .	76
5.3	Inferencia de acoplamientos entre mapas . . . . .	92
5.4	Caracterización topológica de redes . . . . .	96
5.4.1	Distancia resistiva aproximada para circuitos y redes cor- tales . . . . .	98
5.4.2	Discusión sobre distancia resistiva . . . . .	101
5.4.3	Obtención de la centralidad del vector propio a partir de los valores propios . . . . .	102
<b>6</b>	<b>Conclusiones y perspectivas</b>	<b>104</b>
<b>7</b>	<b>Publicaciones y contribuciones</b>	<b>110</b>
	<b>Glosario</b>	<b>111</b>
	<b>Anexos</b>	<b>111</b>
	Anexo 1 Circuitos . . . . .	112
	Anexo 2 Resultados adicionales . . . . .	119

# Capítulo 1

## Introducción

El estudio de sistemas dinámicos acoplados proporciona un marco teórico fundamental para comprender fenómenos colectivos en sistemas compuestos por múltiples unidades interactivas [1]. Estos sistemas se presentan en una amplia variedad de campos de la ciencia. En biología [2], por ejemplo, se observan en la dinámica de poblaciones o la sincronización de ritmos biológicos. En física [3], su estudio incluye el caos y la sincronización en redes de osciladores. La economía [4] los emplea para el análisis de mercados complejos y la toma de decisiones interdependientes, mientras que la ingeniería [5] los aplica, particularmente, en el análisis de redes de comunicación y la optimización de flujos de información. Los sistemas dinámicos acoplados se caracterizan por la presencia de una dinámica local en cada unidad y una interacción que conecta a las unidades entre sí. En ese sentido, los mapas acoplados constituyen una clase de modelo particularmente poderosa. Se trata de sistemas formados por ecuaciones iterativas que describen la evolución temporal de variables locales, donde cada unidad (o nodo) se actualiza en función de su propia dinámica y la influencia de las unidades vecinas [3].

Una de las ventajas clave de los mapas acoplados es su capacidad para capturar comportamientos altamente no lineales y caóticos mediante reglas matemáticas relativamente simples [6]. Debido a esta propiedad, se han utilizado extensamente como modelos teóricos para investigar fenómenos como la sincronización espontánea [7], la aparición de patrones espaciotemporales, la propagación de señales o el caos colectivo [8, 9]. Su simplicidad formal también los convierte en herramientas ideales para el estudio computacional de redes dinámicas, al permitir simulaciones controladas y sistemáticas con distintos



parámetros y topologías.

Entre los modelos más estudiados dentro de esta clase se encuentran los mapas logísticos acoplados, en los cuales cada unidad experimenta una dinámica logística del tipo  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$  [10], afectada además por un término de acoplamiento que introduce dependencia con otros nodos. Este modelo, propuesto inicialmente como un ejemplo paradigmático de comportamiento colectivo en sistemas caóticos [10], ha demostrado ser un laboratorio ideal para explorar cómo la estructura de interacciones influye sobre la dinámica colectiva del sistema [11]. El acoplamiento puede definirse de distintas formas, siendo el acoplamiento difusivo una de las variantes más comunes, donde la actualización de cada nodo considera la diferencia entre su estado y el de sus vecinos. Cuando se organizan en redes no triviales [12], como redes aleatorias [13], pequeño mundo [14] o con distribuciones de grado heterogéneas [15], estos mapas exhiben una riqueza fenomenológica que los hace especialmente adecuados para estudiar sistemas complejos.

En este tipo de redes, el acoplamiento entre nodos genera interacciones que pueden manifestarse como sincronización [16, 17, 18], aparición de clústeres [19], o incluso comportamientos intermitentes y multiescalares [7]. Tales fenómenos emergentes dependen críticamente de los parámetros locales (como el parámetro de bifurcación), así como también de la intensidad del acoplamiento y de la topología de la red. En particular, cuando el acoplamiento es suficientemente fuerte, el sistema puede entrar en un régimen de sincronización global, en el que todos los nodos evolucionan de forma idéntica. Aunque este régimen es interesante desde el punto de vista de la teoría del caos y la sincronización, representa una dificultad para otro tipo de problemas, por ejemplo aquellos que buscan extraer información sobre la estructura de la red a partir de las trayectorias observadas.

En ese contexto cobra especial relevancia el estudio del flujo de información en sistemas acoplados [20]. En un sentido general, la información que circula entre los nodos de una red refleja la influencia que unos ejercen sobre otros. Comprender cómo se transmite la información en sistemas dinámicos es esencial para analizar su organización funcional, identificar relaciones de dependencia e incluso inferir la arquitectura subyacente. En muchos sistemas naturales y artificiales, desde redes neuronales hasta infraestructuras críticas [21], la estructura de la red no es completamente observable. Por tanto, la posibilidad de reconstruir o inferir conexiones a partir del análisis del flujo de

información representa un problema de gran interés teórico y práctico [22].

El uso de herramientas provenientes de la teoría de la información ofrece una buena estrategia para abordar el problema inverso de la inferencia de conexiones. Medidas como la información mutua [23] o la entropía de transferencia [20] permiten cuantificar el grado de dependencia estadística entre las trayectorias de distintos nodos, proporcionando un indicador indirecto de la existencia e intensidad de los enlaces. La información mutua, por ejemplo, permite estimar la reducción de incertidumbre sobre la dinámica de un nodo al observar la de otro, sin requerir suposiciones lineales ni conocimiento previo del modelo. Por ello, ha sido ampliamente utilizada en el análisis de sistemas reales donde las interacciones no son directamente observables [24].

En redes de mapas logísticos acoplados, el flujo de información entre nodos refleja la presencia de acoplamiento, así como también su función dentro de la dinámica global. Cuando dos nodos están acoplados, la evolución de uno influye sobre el otro, y este flujo puede detectarse a través de su correlación (no lineal). Sin embargo, si el sistema está completamente sincronizado, todos los nodos presentan la misma dinámica y la información mutua se maximiza entre todos los pares, haciendo imposible distinguir las interacciones reales. Esta aparente paradoja destaca la necesidad de identificar regiones de acoplamiento óptimas, donde la influencia sea significativa pero la sincronización no haya borrado las diferencias entre las trayectorias de las unidades del sistema.

Una analogía ilustrativa puede encontrarse en sistemas ecológicos de metapoblaciones. Por ejemplo, en un conjunto de charcos habitados por poblaciones de ranas, donde cada charco tiene su propia dinámica de crecimiento no lineal, pero las ranas pueden migrar entre ellos. Si la migración es moderada, la dinámica de un charco influye en otro y es posible, en principio, inferir la conectividad observando las trayectorias poblacionales. Pero si la migración es excesiva, todos los charcos tienden a sincronizarse, y aunque compartan información, resulta imposible discernir las rutas reales de migración. Esta situación es análoga a lo que ocurre en redes de mapas acoplados bajo acoplamiento fuerte [25].

La influencia de los acoplamientos en la estabilidad de una dinámica caótica sincronizada es actualmente otro tema de interés [26, 27]. Tiene implicaciones prácticas en áreas como la neurociencia, donde la sincronización patológica está asociada a trastornos como la epilepsia [28], o en ingeniería, donde se han desarrollado esquemas de comunicación basados en la sincronización de señales

caóticas [29]. En algunos casos la falta de información que se posee sobre el tipo de red en estudio hace que la investigación teórica sea muy difícil [30]. El abordaje experimental permite investigar redes complejas, cuyas propiedades no se pueden capturar completamente mediante simulaciones numéricas [31]. Al medir propiedades físicas de la red, los resultados tienen en cuenta características no idealizadas que influyen en la dinámica y que los estudios numéricos no siempre logran reproducir. De este modo, el enfoque experimental, además de validar los modelos teóricos que describen el comportamiento del sistema, puede revelar propiedades emergentes que no se han predicho teóricamente.

Esta tesis presenta un estudio experimental detallado basado en una implementación electrónica de mapas logísticos acoplados, que permite controlar con precisión tanto la topología como la intensidad del acoplamiento, manteniendo al mismo tiempo una heterogeneidad mínima entre nodos. El sistema experimental permite explorar comportamientos colectivos que difieren cualitativamente de los obtenidos mediante simulaciones numéricas, especialmente en lo que respecta a la relación entre estructura y transmisión de información. Se analizan 60 configuraciones de red con 6 y 12 nodos, identificando dos regímenes dinámicos característicos: uno dominado por sincronización caótica y otro por caos espaciotemporal, cada uno con propiedades distintas en cuanto a la generación y propagación de información. A partir de medidas combinadas de entropía e información mutua, se introducen indicadores que permiten evaluar la eficiencia informacional de cada configuración, mostrando que es posible alcanzar altos niveles de transmisión sin recurrir a redes densamente acopladas. Estos resultados refuerzan la idea de que la arquitectura de la red cumple un rol determinante en la dinámica emergente y en la funcionalidad de sistemas complejos reales.

A partir de estas medidas experimentales, se analiza exhaustivamente el papel que juegan las regiones de acoplamiento en la dinámica de redes de mapas logísticos acoplados, poniendo especial énfasis en aquellas que favorecen simultáneamente la generación y la transmisión de información [32]. A través del estudio de estas regiones, se exploran también comportamientos emergentes, como la intermitencia, la transición al caos y la sincronización parcial, que revelan indicios de universalidad dinámica, es decir, patrones recurrentes que trascienden los detalles específicos del sistema. Estos fenómenos son relevantes desde el punto de vista de la física de sistemas complejos y además contribuyen a la comprensión de las dinámicas de redes en general.

Sobre esta base, se aborda también el problema de la inferencia de conexiones estructurales a partir de la información mutua, evaluando cómo distintos regímenes de acoplamiento condicionan la capacidad de recuperar la topología subyacente en base a las trayectorias observadas. Se propone una metodología que combina análisis estadístico de trayectorias individuales y colectivas, para estimar relaciones y dependencias entre nodos. Esta estrategia se aplica a diferentes configuraciones topológicas, lo que permite evaluar su eficacia en escenarios realistas y variados.

Complementariamente, esta tesis trabaja también la caracterización topológica de las redes, proponiendo una aproximación para la distancia resistiva, que muestra coincidir estrechamente con su valor teórico en diversas redes sintéticas y del mundo real [33]. Esta aproximación permite determinar de forma exacta la centralidad del vector propio utilizando únicamente el espectro de valores propios de la red. Este resultado ofrece una herramienta computacional precisa y eficiente para evaluar propiedades estructurales en redes complejas, y además revela una relación fundamental entre la geometría topológica de la red (a través de la distancia resistiva) y sus propiedades espectrales. Al permitir calcular de forma exacta una medida central sin necesidad de acceder directamente a todo el análisis vectorial de la matriz de conexiones, esta aproximación abre nuevas vías para el estudio de redes de gran tamaño.

En su conjunto, este trabajo contribuye al entendimiento teórico de la relación entre estructura, dinámica e información en sistemas complejos no lineales, y propone herramientas conceptuales y computacionales aplicables al análisis de datos reales en diferentes contextos. Además, destaca el papel esencial que desempeña la transmisión de información como mecanismo de organización y coordinación entre nodos. Se evidencia que los sistemas caóticos acoplados, además de ofrecer un marco matemático potente, constituyen una plataforma privilegiada, tanto desde la simulación como desde su implementación experimental, para estudiar estas propiedades fundamentales. Así, se refuerza la importancia de un abordaje integrador para el estudio de los sistemas complejos, que combine análisis teórico, modelado computacional e implementación experimental.

# Capítulo 2

## Fundamento teórico

En este capítulo se exponen los conceptos teóricos y modelos utilizados para la descripción y análisis del sistema. Está organizado en tres secciones. En la primera se presenta el modelo matemático que describe el sistema experimental, detallando sus propiedades y los parámetros que determinan sus dinámicas. Se profundiza en la descripción del mapa logístico asilado, comparando la respuesta del sistema experimental con las predicciones numéricas.

En la segunda sección se detallan algunas medidas que permiten caracterizar la topología de una red. En particular, se describen la distancia entre nodos y su centralidad. Estas medidas son fundamentales para entender cómo se propaga la información en la red, así como para comprender la distribución de roles y la importancia de los nodos en ella. También se describen modelos de redes, que permiten comprender y simular diversos tipos de estructuras de red. Estos modelos ofrecen una representación abstracta de cómo interactúan y se relacionan los nodos, facilitando el análisis de su comportamiento y evolución en diferentes contextos.

En la tercera sección se examinan las características de la dinámica que surge cuando se acoplan varios mapas, cuantificando la interacción entre las partes del sistema y su comportamiento colectivo. Se describe especialmente el modelo difusivo empleado, y las condiciones de sincronización.

### 2.1. El mapa logístico

Un mapa logístico se obtiene al iterar la ecuación

$$x_{n+1} = f(r, x_n) = rx_n(1 - x_n), \quad (2.1)$$

a partir de una condición inicial  $x_0$ , donde  $x_n$  y  $x_{n+1}$  son dos estados consecutivos del mapa, y  $r$  es el parámetro de control. En 1976, el biólogo Robert May [10] propuso el mapa logístico como un modelo de población en un sistema en el que los recursos son limitados. El crecimiento exponencial dado por la parte  $x_{n+1} = rx_n$  resulta limitado por la no linealidad  $-rx_n^2$ , que representa la competencia entre los individuos por los recursos compartidos. May observó que aunque el sistema se presenta como matemáticamente sencillo, sus órbitas tienen un comportamiento complejo. Se restringe el parámetro de control  $r$  al rango  $(0, 4]$  para que  $f(r, x_n)$  mapee el intervalo  $0 \leq x_n \leq 1$  en sí mismo.

Para poder analizar la dinámica del mapa, en primer lugar se determinan los puntos fijos en función del parámetro  $r$ ,

$$f(r, x^*) = x^* \Rightarrow x^* = rx^*(1 - x^*),$$

de donde se obtienen dos puntos fijos  $x_1^* = 0$  y  $x_2^* = \frac{r-1}{r}$ . Además, para poder clasificar dichos puntos, se determina  $f'(r, x)$

$$f'(r, x) = r(1 - 2x). \quad (2.2)$$

Cuando  $0 < r < 1$ , el mapa sólo presenta el punto fijo en  $x_1^* = 0$  ya que en ese rango  $x_2^* < 0$ . Evaluando la derivada, ec. (2.2), en el punto fijo se obtiene que  $|f'(r, 0)| = r < 1$ , y por el Teorema de Estabilidad Lineal [34] se tiene que  $x_1^* = 0$  es un punto fijo estable. De este modo, cada condición inicial entre 0 y 1 es atraída a este sumidero. En términos del modelo poblacional, con tasas de reproducción bajas, las poblaciones pequeñas tienden a desaparecer.

Si  $1 < r < 3$ , significa que  $x_1^* = 0$  es un punto fijo inestable, ya que  $|f'(r, 0)| = r > 1$ . El mapa además tiene un punto fijo estable en  $x_2^* = \frac{r-1}{r}$ , ya que al evaluar la derivada, ec. (2.2), se obtiene  $|f'(r, x_2^*)| = |2 - r|$ , que es menor que 1 en el intervalo. Esto se interpreta en el modelo poblacional, que las poblaciones pequeñas crecen a un estado estable de valor  $x = \frac{r-1}{r}$ .

Para  $r > 3$ , el punto fijo  $x_2^* = \frac{r-1}{r}$  es inestable ya que  $|f'(r, x_2^*)| > 1$ , y un período 2 estable toma su lugar. Para confirmarlo se analiza la segunda iteración del mapa

$$f^2(r, x) = r^2x(1 - x)[1 - rx(1 - x)]. \quad (2.3)$$

Con el fin de encontrar los valores de las raíces ( $p_1$  y  $p_2$ ), se resuelve la ecuación

de cuarto grado  $f^2(r, x) = x$ ,

$$r^2x(1-x)[1-rx(1-x)] = x.$$

Se observa que los puntos fijos  $x^* = 0$  y  $x^* = 1$  son soluciones triviales de esta ecuación, y corresponden a los puntos fijos de  $f(r, x)$ . Además, se obtienen las raíces

$$p_1, p_2 = \frac{(r+1) \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}, \quad (2.4)$$

que son reales para  $r > 3$ . Por lo tanto, existe un período 2 para todo  $r > 3$ . En  $r = 3$  las raíces coinciden en  $x^* = 1 - \frac{1}{r} = \frac{2}{3}$ . Para  $r < 3$  las raíces son complejas, lo que significa que no existe una órbita de período 2.

Cuando  $r$  crece por encima de  $1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ , el período 2 se vuelve inestable. Esto puede verificarse, derivando  $f^2(r, x)$ , ec. (2.3),

$$(f^2(r, x))' = r^2 - 2r^2x - 2r^3x + 6r^3x^2 - 4r^3x^3,$$

y sustituyendo  $r = 1 + \sqrt{6}$ , se obtienen las raíces

$$p_1^*, p_2^* = \frac{(1 + \sqrt{6} \pm \sqrt{5})}{(2 + 2\sqrt{6})},$$

que coinciden con la ec. (2.4) para ese valor de  $r$ .

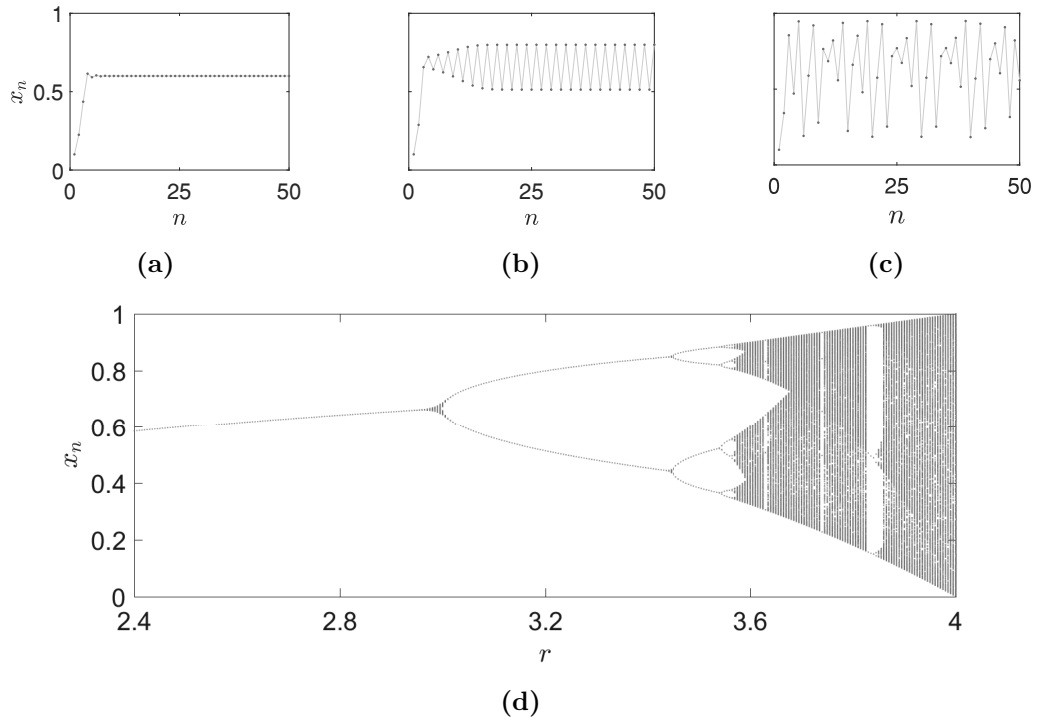
Para valores ligeramente más grandes de  $r$ , el comportamiento de los puntos periódicos de  $f(r, x)$  varía y nuevas órbitas periódicas surgen a medida que se incrementa de 3.45 a 4.

### 2.1.1. Bifurcaciones

El término bifurcación se refiere a cambios significativos en el conjunto de puntos fijos, periódicos u otros conjuntos de interés dinámico [35], o incluso a cambios en la estructura topológica del espacio de fase, sin implicar cambios en el conjunto de puntos fijos (bifurcación global [6]). La bifurcación de un sistema fue reportada por primera vez por el matemático francés Henri Poincaré [36]. El estudio de la bifurcación se centra en cómo ocurre el cambio estructural cuando los parámetros están cambiando. El cambio estructural y el comportamiento de transición de un sistema son la parte central de la evolución dinámica. El punto en el que se produce la bifurcación se conoce como punto de bifurcación

o crítico. El comportamiento del punto fijo y la naturaleza de las trayectorias pueden cambiar drásticamente en los puntos de bifurcación. Cuando ocurre la bifurcación, en general la condición de atractor y repulsor se altera. El diagrama de los conjuntos localmente atractivos del sistema en función de los valores de los parámetros se conoce como diagrama de bifurcaciones [37].

Un diagrama de *bifurcación* muestra los valores asintóticos (puntos fijos, órbitas periódicas u otros conjuntos de atracción) de un sistema en función de un parámetro de control. Esta representación permite ver el comportamiento a largo plazo para todos los valores de  $r$  a la vez, ya que representa el atractor del sistema en función de  $r$ .



**Figura 2.1: Señales temporales para 3 dinámicas diferentes de un mapa logístico.** (a) punto fijo con  $r = 2.5$ , (b) señal periódica con  $r = 3.2$  y (c) señal caótica correspondiente a  $r = 3.8$ . (d) Diagrama de bifurcaciones obtenido numéricamente al iterar el mapa logístico  $2^{12}$  veces para cada valor del parámetro  $r$  considerado en el intervalo  $2.4 \leq r \leq 4.0$ .

Los tres paneles superiores de la fig. 2.1 muestran series temporales correspondientes a diferentes dinámicas del mapa logístico, las cuales incluyen el comportamiento transitorio y asintótico. El panel inferior de la fig. 2.1 muestra el correspondiente diagrama de bifurcaciones, el cual exhibe únicamente el comportamiento asintótico.



La dinámica de punto fijo se mantiene hasta  $r = 3.0$ , donde se produce la primera bifurcación que conduce a un período 2. En  $r \approx 3.45$  comienza una solución de período 4, la cual se mantiene hasta  $r \approx 3.54$ , donde se duplica nuevamente el período, comenzando así una cascada de bifurcaciones. De hecho, hay una secuencia completa de sumideros periódicos, uno para cada período  $2^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Dicha secuencia se denomina *cascada de duplicación de período*. En  $r \approx 3.57$  comienza a observarse la dinámica caótica. Para otros valores del parámetro  $r$ , la órbita parece completar aleatoriamente todo el intervalo  $[0, 1]$ , o un subintervalo. La desaparición del período tres como un atractor coincide con una bifurcación de duplicación de período, que crea un sumidero de período seis, que luego tiene un destino similar [35].

Las explosiones sucesivas de los diagramas de bifurcación revelan otra característica interesante, las ventanas periódicas. Una ventana de período tres, por ejemplo, se aprecia en la fig. 2.1(d), en el rango  $3.83 \lesssim r \lesssim 3.85$ . Esto se refiere a un intervalo de valores del parámetro para los cuales hay un sumidero periódico, en este caso un sumidero de período tres, que se ubica entre dos zonas caóticas.

### 2.1.2. Caos y exponentes de Lyapunov

La existencia de infinitas órbitas periódicas no implica en sí misma el tipo de imprevisibilidad generalmente asociada con los *mapas caóticos*, aunque sí la rica dinámica presente. El *caos* se identifica con la aperiodicidad de sus órbitas y la *dependencia sensible de las condiciones iniciales* [38]. La más conocida, y tal vez la más útil propiedad de un sistema caótico refiere de la separación exponencial de las órbitas, responsable de la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Dado un mapa  $f$  en  $\mathbb{R}$ , se dice que un punto  $x_0$  tiene una dependencia sensible de las condiciones iniciales si hay una distancia  $d$  distinta de cero, de tal manera que puntos arbitrariamente cercanos de  $x_0$  finalmente superan la distancia  $d$  de la imagen correspondiente ( $f(x_0)$ ). Más precisamente, existe  $d > 0$  tal que cualquier vecindad  $E$  de  $x_0$  contiene un punto  $x$  tal que  $|f^k(x) - f^k(x_0)| \geq d$  para algún entero  $k$  no negativo [35].

Aleksandr Mijáilovich Lyapunov, físico y matemático ruso, estudió, entre otras cosas, la estabilidad de sistemas dinámicos [39]. En particular, aportó una herramienta para evaluar la *caoticidad promedio* de un sistema: los expo-

nentes de Lyapunov. Estos exponentes miden la tasa media de divergencia (o convergencia) exponencial de trayectorias en el espacio de fase para cada condición inicial. Entonces, cualquier sistema que contenga al menos un exponente de Lyapunov positivo, se define como *caótico* [6, 35, 40].

Los exponentes de Lyapunov,  $\chi$ , proporcionan una caracterización útil de un sistema dinámico en términos de qué tan sensible es el sistema a pequeños cambios en sus condiciones iniciales [35]. En muchas aplicaciones, es suficiente calcular solo el mayor exponente de Lyapunov,  $\chi_{max}$ , ya que, en general,  $\chi_{max} > 0$  implica la presencia de un comportamiento caótico, mientras que  $\chi_{max} \leq 0$  indica un comportamiento periódico.

Para aplicar a un mapa unidimensional el concepto de exponente de Lyapunov, se considera una condición inicial  $x_0$  y otra muy próxima,  $x_0 + \delta_0$ . Tomando logaritmos y notando que  $\delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)$ , se tiene que

$$\chi = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)|, \quad (2.5)$$

donde se ha considerado el límite  $\delta_0 \rightarrow 0$ . Aplicando la regla de la cadena se tiene

$$(f^n)'(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i).$$

Sustituyendo este resultado en (2.5) se obtiene

$$\chi(x_0) = \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (2.6)$$

Si la expresión (2.6) tiene límite para  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\chi(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\}, \quad (2.7)$$

a ese límite se le llama exponente de Lyapunov para la órbita que comienza en  $x_0$ . Cuando  $f$  tiene un único atractor,  $\chi$  es independiente de  $x_0$  [35].

De este modo, considerando dos condiciones iniciales que difieren en una cantidad pequeña  $\delta_0$  se observa que cada una da lugar a una órbita, las cuales convergen o divergen exponencialmente dependiendo del valor de  $\chi$ , ya que después de  $n$  iteraciones  $|\delta_n| = |\delta_0|e^{n\chi}$ .

Para el caso del mapa logístico, se sustituye la expresión de la derivada de

$f$ , ec. (2.2), en (2.7), obteniéndose

$$\chi(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \ln |r(1 - 2x_n)| \quad (2.8)$$

En esta sección se ha definido el caos por su dependencia sensible a las condiciones iniciales, cuantificada mediante los exponentes de Lyapunov,  $\chi$ , donde  $\chi_{max} > 0$  es indicador de comportamiento caótico. La ec. (2.8) permite calcular directamente este exponente para el mapa logístico, a partir de sus iteraciones,  $x_n$ .

### 2.1.3. Solución analítica y medida invariante para $r = 4$

Para describir la evolución del sistema, generalmente se estudian las órbitas y sus propiedades. Sin embargo, también se puede extraer información relevante al estudiar cuál es la probabilidad de encontrar al sistema en uno u otro estado. Es decir, en vez de mirar la evolución temporal del sistema, se puede estudiar cómo se distribuyen los estados posibles en el dominio del mapa, i.e., el espacio de estados. Para esto, se necesita conocer la medida invariante del sistema dinámico. Se denomina *medida* a un método de asignación de un número a cada conjunto cerrado para el que se cumpla que:

1. para cualquier conjunto toma un valor no negativo, y
2. el valor correspondiente a la unión disjunta de un grupo de conjuntos es igual a la suma de los valores asignados de los conjuntos individuales.

Si una medida verifica además que su valor para todo el espacio es igual a 1, entonces se denomina *medida de probabilidad* [35]. La *medida invariante* de un mapa puede entenderse como aquella que no cambia durante el curso de la evolución de sus iteraciones. Más precisamente, dado un mapa  $f$  en el intervalo  $[0, 1]$ , se dice que una medida  $\mu$  es invariante bajo el mapa  $f$ , si para cualquier subconjunto  $S \subset [0, 1]$ , entonces [41]

$$\mu(S) = \mu[f(S)].$$

Para el caso particular del mapa logístico con  $r = 4$  se conoce [42] la medida invariante del sistema a partir de su densidad de probabilidad,  $\rho(x)$ .

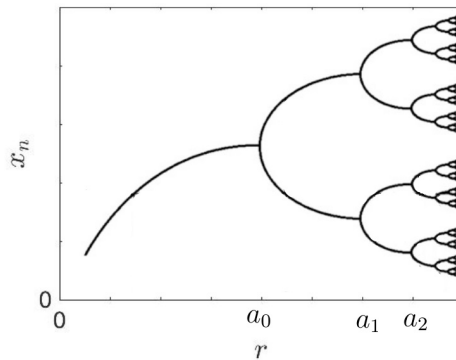
Específicamente, por medio de  $\mu(S) = \int_S \rho(x) dx$ , donde para  $x \in (0, 1)$  la densidad de probabilidad está dada por

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}. \quad (2.9)$$

Esta medida invariante se puede utilizar para caracterizar las propiedades del atractor. Un sistema dinámico dado puede tener muchos atractores, cada uno de ellos con su propia cuenca de atracción (diferentes conjuntos de condiciones iniciales conducen a diferentes atractores). Sin embargo, para una cuenca de atracción dada, el atractor es el conjunto cerrado más pequeño. Para dinámicas caóticas, el límite que separa las cuencas de atracción suele ser un *fractal*, es decir, un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas [43], y que, por lo tanto, un cambio arbitrariamente pequeño en la condición inicial puede llevar al sistema a un comportamiento asintótico completamente diferente [41].

#### 2.1.4. Autosimilaridad y constante de Feigenbaum

Se observan *cascadas de bifurcaciones de duplicación de período* en gran cantidad de sistemas de baja dimensión que exhiben un comportamiento caótico, como por ejemplo modelos de osciladores neuronales [44] o láseres [45]. Es especialmente relevante en la medida en que es quizás la ruta más fácilmente identificable hacia el caos para un sistema dinámico. Los trabajos experimentales que intentan identificar y estudiar el caos en sistemas reales a menudo se concentran en esta característica.



**Figura 2.2:** Esquema de un diagrama de bifurcaciones en función del parámetro  $r$ . Se identifican los puntos de bifurcación  $\{a_0, a_1, \dots\}$ .

En dichas cascadas se observa que una órbita periódica estable se vuelve inestable a medida que se varía el parámetro de control y es reemplazada por una órbita periódica estable con el doble de su período. Al continuar variando el parámetro de control, esta nueva órbita se vuelve inestable y es a su vez reemplazada por una nueva órbita estable con un período nuevamente duplicado. El proceso continúa a través de una infinidad de bifurcaciones de duplicación de período, como se esquematiza en la fig. 2.2. La secuencia de bifurcaciones de duplicación de período se da de la siguiente manera

$$\text{Período } 1 \rightarrow \text{Período } 2 \rightarrow \text{Período } 2^2 \rightarrow \dots \rightarrow \text{Período } \infty$$

Poincaré fue el primero en dar una descripción matemática completa de una bifurcación que duplicaba el período, y Myrberg [46] describió por primera vez una cascada. Las cascadas se hicieron muy conocidas con las aplicaciones publicadas por May [10].

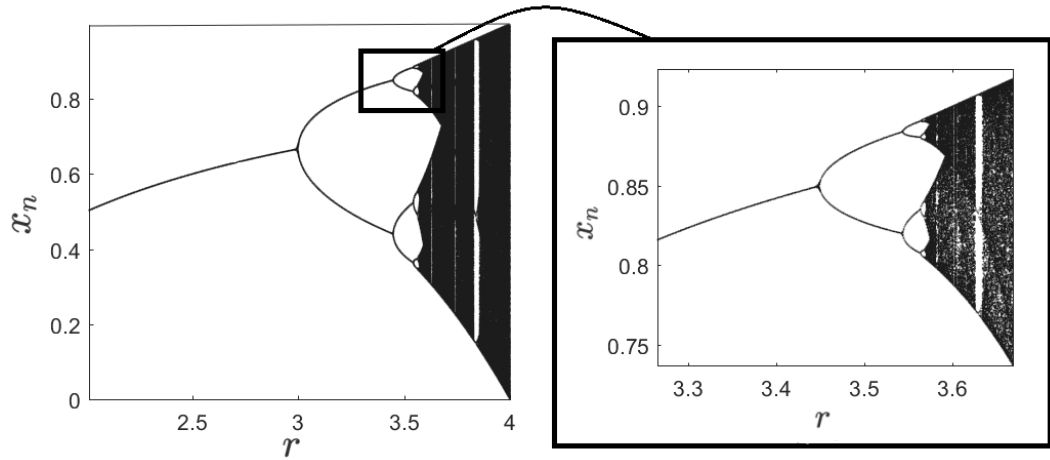
En 1978, Mitchell Feigenbaum observó que las razones de la distancia del parámetro entre dos duplicaciones sucesivas del período se aproximan a una constante a medida que los períodos aumentan hasta el infinito [47]. Además, esta constante es universal en el sentido de que se observa en una variedad de sistemas dinámicos. Específicamente, si la  $n$ -ésima duplicación del período ocurre en  $a = a_n$  (fig. 2.2), entonces [47]

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{a_n - a_{n-1}} = 4.669201609... \quad (2.10)$$

En la actualidad,  $\delta$  se conoce como la *constante de Feigenbaum*, y el valor de  $\delta_n$  para las primeras bifurcaciones del mapa logístico es [37]

$$\delta_1 = \frac{a_1 - a_0}{a_2 - a_1} = 4.75031. \quad (2.11)$$

En 1981, el grupo formado por los investigadores Giglio, Musazzi y Perini encontraron una cascada de período 2, y hasta el período 16, al medir temperaturas en una celda de Rayleigh-Bénard. Utilizando el gradiente de temperatura como parámetro de bifurcación, estimaron la constante de Feigenbaum en aproximadamente 4.3 [48]. En el mismo año, Linsay produjo una cascada similar al variar el voltaje de activación en un circuito RLC controlado periódicamente [49]. Su estimación de la constante de Feigenbaum fue de  $4.5 \pm 0.6$ . Estos resultados confirmaron la universalidad del fenómeno.



**Figura 2.3: Diagrama de bifurcaciones con énfasis en el comportamiento de escala.** Corresponde al mapa logístico en el intervalo  $2 \leq r \leq 4$ , y su ampliación en el intervalo  $3.28 \leq r \leq 3.68$ .

A medida que los sistemas ingresan en un régimen caótico, las regiones del espacio de fases hacia las que tienden sus dinámicas se denominan *atractores extraños*. En 1963, Lorenz [50] observó que la geometría de este conjunto debe ser muy peculiar, algo así como un *complejo infinito de superficies*. Las herramientas para analizarlos provienen de la geometría fractal. Los fractales, además de presentar una estructura fina en escalas arbitrariamente pequeñas [34], por lo general, tienen algún grado de autosimilitud, esto es, si se amplía una pequeña parte de un fractal se ven características que recuerdan al conjunto completo. A veces la similitud es exacta aunque por lo general es sólo aproximada. Los diagramas de bifurcaciones muestran un comportamiento de escala autosimilar en la cascada del mapa, como se muestra en la fig. 2.3.

La autosimilaridad refiere a esta repetición de patrones a diferentes escalas, la cual puede vincularse con la constante de Feigenbaum en el estudio de los diagramas de bifurcaciones del mapa logístico. Allí se observa cómo el comportamiento del sistema se repite a diferentes escalas a medida que se incrementa el parámetro  $r$ , produciéndose una serie de bifurcaciones que revelan patrones de comportamiento con estructuras similares a diferentes niveles. La constante de Feigenbaum, por su parte, permite cuantificar la relación entre estas bifurcaciones, indicando que la distancia entre los puntos en los que ocurren bifurcaciones cumple una relación universal. Aunque el sistema se vuelve caótico a medida que  $r$  aumenta, los patrones de bifurcación siguen una lógica que refleja la repetición de estructuras a diversas escalas. Así, la autosimila-

ridad y la constante de Feigenbaum proporcionan un marco consistente para entender la transición del orden al caos en sistemas dinámicos.

## 2.2. Introducción a redes complejas

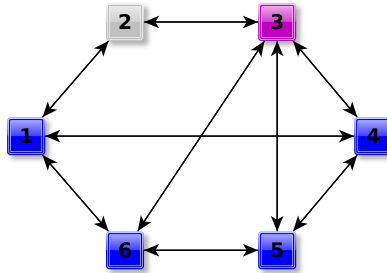
En la descripción topológica de las redes, los nodos son los elementos individuales que componen la red y representan entidades o puntos de interés y los enlaces son los que definen la conexión, la comunicación y condicionan la interacción entre los primeros.

### 2.2.1. Definición y representación de una red

Una red o grafo  $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$  se define por un conjunto  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{G})$  de elementos llamados nodos o vértices y otro conjunto,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$  de elementos denominados enlaces o aristas. Cada enlace corresponde a un par no ordenado  $\{i, j\}$  de nodos. Si se consideran los enlaces como pares ordenados,  $\mathcal{G}$  es una red dirigida o digrafo. Si cada enlace  $\{i, j\}$  tiene asignado un valor numérico  $w_{ij}$  la red es ponderada, siendo  $w_{ij}$  el peso del enlace  $\{i, j\}$ . De aquí en más solo se trabajará con redes simples, es decir, no dirigidas ni pesadas.

El máximo posible de enlaces en una red corresponde al número de todas las duplas tomadas del conjunto de  $N$  nodos, es decir,  $duplas = \binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$  (que correspondería a una red completa). A partir de este máximo y del número de enlaces efectivamente presentes en la red,  $E$ , se define la densidad de enlaces

$$\rho = \frac{2E}{N(N-1)}. \quad (2.12)$$



**Figura 2.4: Ejemplo de una red no dirigida de  $N = 6$  nodos.** La red posee  $E = 9$  enlaces y densidad de enlaces  $\rho = 0.6$  (ec. (2.12)).

La fig. 2.4 muestra un ejemplo de red no dirigida de  $N = 6$  nodos y  $E = 9$  enlaces, donde se han empleado diferentes colores para destacar el número de enlaces de cada nodo (*grado*  $d$ , ec. (2.14)). Dado que en una configuración de 6 nodos el número máximo de enlaces posibles es  $\frac{N(N-1)}{2} = 15$ , la red presenta una densidad de enlaces  $\rho = 0.6$  (ec. (2.12)).

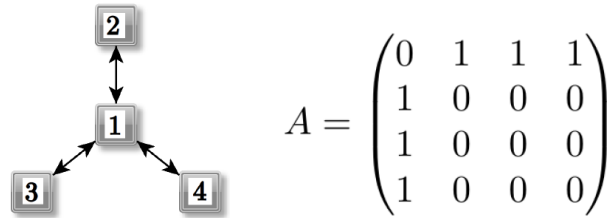
Una forma de representar una red es a partir de su matriz de adyacencia,  $\mathbf{A}$ , que es una matriz cuadrada y en el caso de una red no ponderada sus entradas verifican

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in \mathcal{E}(\mathcal{G}) \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (2.13)$$

Si además la red es no dirigida,  $\mathbf{A}$  es simétrica. Al sumar los elementos de la  $i$ -ésima fila de la matriz  $\mathbf{A}$ , se obtiene el número de enlaces que conectan al nodo  $i$ , y constituye una característica local de la red que se denomina grado del nodo:

$$d_i = \sum_j A_{ij}. \quad (2.14)$$

La figura 2.5 muestra un ejemplo de matriz de adyacencia para una red de 4 nodos.



**Figura 2.5: Representación mediante la matriz de adyacencia.** Ejemplo de matriz de adyacencia correspondiente a una red no dirigida de 4 nodos.

Otro tipo de representación matricial la proporciona la matriz laplaciana,  $\mathbf{L}$ , que se define para un grafo  $\mathcal{G}$  de  $N$  nodos, como  $L = (\ell_{i,j})_{n \times n}$  donde:

$$\ell_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i \neq j \text{ y } n_i \text{ es adyacente a } n_j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.15)$$

siendo  $d_i$  el grado del  $i$ -ésimo nodo,  $n_i$  (ec. 2.14). La matriz laplaciana puede definirse de forma equivalente como

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}, \quad (2.16)$$



donde  $\mathbf{D}$  es la matriz de grados y  $\mathbf{A}$  es la matriz de adyacencia de la red.

La matriz  $\mathbf{L}$  es simétrica, por lo que tiene valores propios reales. Además, todos los valores propios de  $\mathbf{L}$  son no negativos, lo que es una propiedad física importante. Significa, por ejemplo, que la solución de la ecuación de difusión en cualquier red contiene solo exponenciales decrecientes, de modo que la solución tiende a un valor de equilibrio cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Puede probarse que si bien los valores propios de  $\mathbf{L}$  no pueden ser negativos, pueden ser cero y, de hecho, siempre tiene al menos un valor propio cero. La presencia de un valor propio cero (para una red conexa) implica que  $\mathbf{L}$  no tiene inverso, por lo que es una matriz singular. Dado que es una matriz no invertible, resulta de utilidad introducir una matriz pseudoinversa. Se define la matriz laplaciana pseudoinversa,  $\hat{\mathbf{L}}^{-1}$ , como [51]

$$\hat{L}_{ij}^{-1} = \sum_{k=2}^N \frac{1}{\lambda_k} \psi_{ki} \psi_{kj}, \quad (2.17)$$

donde  $\psi_{ki}$  es la  $i$ -ésima componente del  $k$ -ésimo vector propio de la matriz laplaciana. La suma comienza en  $k = 2$  ya que se omite el autovalor nulo.

Puede demostrarse [51] que la ecuación (2.17) define la pseudoinversa de  $\mathbf{L}$ , ya que

$$\hat{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{L} = \mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{J}, \quad (2.18)$$

donde  $I_{ij} = \delta_{ij}$  y  $J_{ij} = 1 \forall i, j$ .

Además,  $\mathbf{L} \hat{\mathbf{L}}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{J}$ , por lo tanto estas matrices conmutan, y ello implica que ambas matrices comparten un conjunto común de vectores propios. La diferencia radica en los valores propios de estas matrices. Mientras que los valores propios de  $\mathbf{L}$  están dados por  $\{\lambda_1 = 0, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ , los valores propios de  $\hat{\mathbf{L}}^{-1}$  están dados por  $\left\{\lambda_1 = 0, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_N}\right\}$ .

Como ejemplo se considera la red representada en la fig. 2.5, de  $N = 4$  nodos. Para ese caso se verifica que:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{L}}^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 11 & -5 & -5 \\ -1 & -5 & 11 & -5 \\ -1 & -5 & -5 & 11 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}\hat{\mathbf{L}}^{-1} = \hat{\mathbf{L}}^{-1}\mathbf{L} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{I} - \frac{1}{N}\mathbf{J}.$$

La relevancia de tener una matriz pseudoinversa escrita en términos de valores propios y vectores propios de la matriz laplaciana es amplia. Pueden derivarse, por ejemplo, resultados en varios casos de interés, como puede ser encontrar expresiones analíticas para las corrientes que se desarrollan en redes distribuidas cuando un conjunto de nodos se identifican como fuentes constantes (sumideros) de entrada (salida) y se conoce la estructura topológica de la red [51].

### 2.2.2. Medidas de distancia entre nodos

Una medida importante para cuantificar la distancia entre nodos en una red es la *distancia resistiva* [51, 52], que se encuentra a partir de los valores y vectores propios de la matriz laplaciana de la red. El nombre de esta medida radica en el vínculo que tiene con el concepto de resistencia equivalente proveniente del estudio de la corriente eléctrica. Allí se emplea para simplificar la configuración de un circuito, reduciendo la totalidad de resistencias a un conjunto más manejable de resistencias equivalentes.

La obtención de ese valor equivalente se basa en las leyes de Kirchhoff [53], sumando las resistencias en serie y las inversas de las resistencias en paralelo, entre dos puntos del circuito. Específicamente, la resistencia equivalente entre dos puntos  $i$  y  $j$  de un conjunto de resistencias  $\{R_{ik}, \dots, R_{lj}\}$  que están conectadas en serie, se determina como

$$R^{(eq)} = R_{ik} + \dots + R_{lj}, \quad (2.19)$$

y si están conectadas en paralelo

$$\frac{1}{R^{(eq)}} = \frac{1}{R_{ik}} + \dots + \frac{1}{R_{lj}}. \quad (2.20)$$

A partir de estas dos ecuaciones se puede calcular la resistencia equivalente del circuito cuando la topología de las conexiones es lo suficientemente simple como para poder distinguir las uniones entre nodos en caminos en serie y

paralelos. Sin embargo, cuando la topología no es trivial, como en la mayoría de las redes del mundo real, la resistencia equivalente se calcula mejor a partir de una expresión más general (ec. (2.21)).

Para derivar un valor de resistencia equivalente para una red genérica, es necesario encontrar la matriz laplaciana pseudoinversa  $\hat{\mathbf{L}}^{-1}$  (ec. (2.17)). La distancia resistiva entre los nodos  $i$  y  $j$ ,  $\rho(i, j)$ , se obtiene usando los valores y vectores propios de  $\mathbf{L}$  de la red. Específicamente,  $\rho_{theo}(i, j)$  puede encontrarse en [51, 52]

$$\rho_{theo}(i, j) = \sum_{n=2}^N \frac{1}{\lambda_n(\mathbf{L})} \left| [\vec{\phi}_n]_i - [\vec{\phi}_n]_j \right|^2, \quad (2.21)$$

donde  $\mathbf{L}\vec{\phi}_n = \lambda_n(\mathbf{L})\vec{\phi}_n$  para  $n = 1, \dots, N$ . Además, cuando  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  la matriz laplaciana es semidefinida positiva [54], lo que implica que los valores propios,  $\lambda_n(\mathbf{L})$ , pueden ordenarse de forma que  $0 = \lambda_1(\mathbf{L}) \leq \lambda_2(\mathbf{L}) \leq \dots \leq \lambda_N(\mathbf{L})$ .

Usando  $\hat{\mathbf{L}}^{-1}$  y la expansión de la ec. (2.21), la resistencia equivalente está dada en términos de las entradas de  $\hat{\mathbf{L}}^{-1}$  por [55]

$$\rho_{theo}(i, j) = \hat{L}_{ii}^{-1} + \hat{L}_{jj}^{-1} - \hat{L}_{ij}^{-1} - \hat{L}_{ji}^{-1}, \quad (2.22)$$

que para una red simétrica resulta  $\rho_{theo}(i, j) = \hat{L}_{ii}^{-1} + \hat{L}_{jj}^{-1} - 2\hat{L}_{ij}^{-1}$ .

En general, la resistencia equivalente entre dos nodos cualesquiera requiere la representación de la matriz laplaciana, incluidos los pesos de los enlaces, que corresponden a las resistencias en las redes de circuitos, y sus valores y vectores propios. De la definición de la resistencia equivalente (ec. (2.21)) entre dos nodos de una red y su analogía con la teoría de circuitos, se observa que el valor de  $\rho_{theo}(i, j)$  es una representación de la cantidad y el tipo de caminos que conectan los nodos  $i$  y  $j$ . Por tanto, es una métrica topológica de la red que contiene más información que el número de caminos entre los nodos o la distancia topológica. Su valor indica qué tan difícil es llegar del nodo  $i$  al  $j$ , utilizando el hecho de que los caminos paralelos son una opción óptima (menos consumo de energía) y los caminos en serie son una opción perjudicial (más consumo de energía). Efectivamente esta resistencia equivalente es una distancia [52], ya que cumple:

- (No negatividad)  $\rho_{theo}(i, j) \geq 0$ . La igualdad se cumple si y sólo si  $i = j$ .
- (Simetría)  $\rho_{theo}(i, j) = \rho_{theo}(j, i)$ .
- (Desigualdad triangular)  $\rho_{theo}(i, j) \leq \rho_{theo}(i, k) + \rho_{theo}(k, j)$ .

Esta medida incluye más información que el camino más corto que une dos nodos, ya que tiene en cuenta todos los demás caminos (no repetidos) que conectan los dos nodos para agregarlos como caminos paralelos. Por lo tanto, los caminos más cortos son relevantes cuando existe una comunicación corpuscular conocida a lo largo de los enlaces de la red, mientras que la distancia resistiva es relevante cuando la comunicación a lo largo de los enlaces se propaga como un patrón de onda.

### 2.2.3. Medidas de centralidad de nodos

El concepto de centralidad busca responder cuáles son los nodos más “importantes” (o centrales) de la red. Así como hay muchas formas de interpretar el concepto de importancia, se definen distintas medidas de centralidad para los nodos. La medida de centralidad más simple en una red es el grado,  $d$ , de un nodo (ec. 2.14).

En las redes dirigidas, los nodos tienen tanto un grado de entrada como un grado de salida y ambos pueden ser útiles como medidas de centralidad en las circunstancias apropiadas. En una red social, por ejemplo, parece razonable suponer que los individuos que tienen conexiones con muchos otros podrían tener más influencia, más acceso a la información o más prestigio que aquellos que tienen menos conexiones. Otro ejemplo, en este caso una red no social, es la del recuento de citas en la evaluación de artículos científicos. El número de citas que un artículo recibe de otros artículos, que es simplemente su grado de entrada en la red de citas, proporciona una medida aproximada de si el artículo ha sido influyente o no y se utiliza ampliamente como métrica para juzgar el impacto de la investigación científica.

Al examinar cómo se distribuyen los grados, se pueden inferir propiedades más globales de la red. En primer lugar se define el grado medio,  $\bar{d}$ , que para una red no dirigida, resulta [12]

$$\bar{d} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i. \quad (2.23)$$

El grado medio es entonces una medida de la conectividad promedio de la red, que si bien pierde de vista el peso local de cada nodo, permite una primera caracterización global. La organización y estructura global de una red, puede describirse mediante la distribución de probabilidad de los grados, denominada

$P(d)$ . En el caso de una red no dirigida,  $P(d)$  se define como la proporción de nodos con grado  $d$ , representando la probabilidad de que un nodo seleccionado al azar en la red tenga grado  $d$ . Dependiendo de cómo se distribuyan estos grados, se pueden identificar diversos modelos de redes que representan diferentes estructuras (sección 2.2.4). Estos modelos proporcionan marcos teóricos para comprender cómo emergen patrones de conectividad, flujo de información, y otros fenómenos relevantes en el estudio de redes complejas. Conociendo el grado medio  $\bar{d}$  de la red y el número de nodos,  $N$ , puede determinarse el número de enlaces,  $E$ , como

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N d_i = \frac{N\bar{d}}{2}. \quad (2.24)$$

Para este trabajo de tesis es fundamental la *centralidad del vector propio*,  $c_{vp}(i)$ , que cuantifica la importancia relativa de cada nodo en la red, ec. (2.25), que se considera proporcional a la importancia de sus vecinos y se basa en el vector propio de Perron-Frobenius de esa red [56]. Así, la centralidad del vector propio puede ser grande porque un vértice tiene muchos vecinos o porque tiene vecinos “importantes”, en estos términos. Según esta medida, un individuo en una red social puede ser importante porque conoce a mucha gente o porque conoce a algunas personas en puestos altos. Formalmente para el  $i$ -ésimo nodo se puede definir como [57]

$$c_{vp}(i) = \frac{1}{\kappa} \sum_j A_{ij} c_{vp}(j). \quad (2.25)$$

que reescrita en notación matricial resulta la ecuación característica

$$\mathbf{A} \mathbf{c}_{vp} = \kappa \mathbf{c}_{vp}, \quad (2.26)$$

donde  $\mathbf{c}_{vp}$  representa el vector propio asociado al valor propio  $\kappa$  (habitualmente el mayor) de la matriz de adyacencia  $\mathbf{A}$ .

Al igual que con la distancia resistiva, la centralidad del vector propio depende de encontrar vectores propios, lo que para redes grandes puede ser computacionalmente exigente. Por ejemplo, en una descomposición QR, encontrar todos los valores propios de una matriz de tamaño  $N \times N$  tiene un costo computacional de  $\mathcal{O}(N^2)$ , mientras que encontrar sus vectores propios cuesta  $\mathcal{O}(N^3)$  [58]. Básicamente, la razón detrás de esto es que los vectores

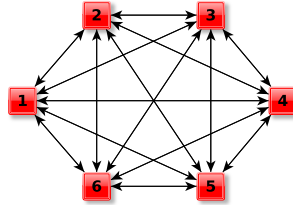
propios se encuentran resolviendo  $N$  ecuaciones algebraicas lineales, mientras que los valores propios se encuentran resolviendo un polinomio de grado  $N$ .

## 2.2.4. Modelos de redes

Se denominan modelos de redes a las representaciones simplificadas y abstractas de la estructura y la dinámica que puede producirse en una red. Tal vez la propiedad más importante que permite modelar la estructura de una red compleja es la distribución de vecinos,  $P(d)$ , que indica la probabilidad de que un nodo escogido al azar tenga  $d$  vecinos. Dependiendo de cómo se comporte  $P(d)$  se pueden definir algunos modelos comunes en redes, por ejemplo, redes aleatorias, redes de pequeño mundo o redes libres de escala.

### 2.2.4.1. Redes regulares

Se define una *red regular* como aquella en la que todos los nodos tienen el mismo grado, es decir, tienen la misma cantidad de enlaces y se denota como red  $k$ -regular, donde  $k$  es el grado de todos los nodos [12]. Una red completa de  $N$  nodos es  $(N - 1)$ -regular.



**Figura 2.6: Ejemplo de red regular.** Red completa de 6 nodos donde se observa que es una red 5-regular.

La figura 2.6 muestra como ejemplo una red completa de  $N = 6$  nodos, donde puede verse que cada nodo tiene  $N - 1 = 5$  enlaces. Las redes regulares se observan en muchos sistemas naturales como, por ejemplo, en la formación de estructuras cristalinas.

### 2.2.4.2. Redes aleatorias

Un *grafo aleatorio* es un modelo de red en el que un conjunto específico de parámetros toma valores fijos, pero la red es aleatoria en otros aspectos. Uno de los ejemplos más simples de un grafo aleatorio es la red en la que se fija solo

el número de nodos,  $N$ , y el número de enlaces,  $E$ , es decir, se colocan al azar  $E$  enlaces entre los  $N$  nodos. Cuando se habla de las propiedades de grafos aleatorios, normalmente se refiere a las propiedades promedio del conjunto [12].

No todos los nodos de una red tienen el mismo número de enlaces. La dispersión en el número de enlaces que tiene un nodo (grado,  $d$ ), se caracteriza por una función de distribución,  $P(d)$ , que da la probabilidad de que un nodo seleccionado al azar tenga exactamente  $d$  enlaces. En un grafo aleatorio los enlaces se colocan aleatoriamente, la mayoría de los nodos tienen aproximadamente el mismo grado, cercano al grado medio  $\bar{d}$  de la red. La distribución de grados de un grafo aleatorio es una distribución de Poisson con un pico en  $P(\bar{d})$ . Pero los resultados empíricos muestran que para la mayoría de las redes grandes la distribución de grado se desvía significativamente de una distribución de Poisson [5].

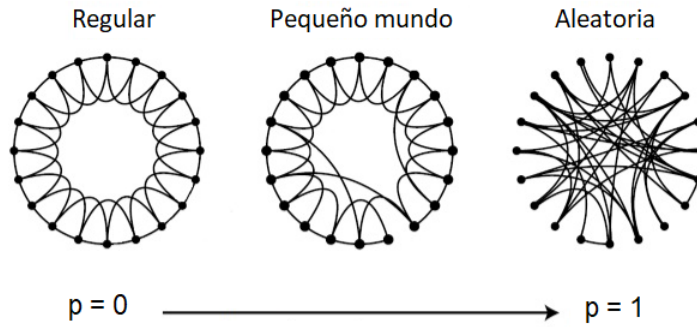
#### 2.2.4.3. Modelo de *Erdős-Rényi*

Las redes con topología de Poisson son importantes principalmente por razones históricas, ya que dichas redes fueron las primeras que se analizaron matemáticamente. Este análisis lo llevaron a cabo Paul Erdős y Alfréd Rényi en la década de 1950. El modelo de Erdős - Rényi [13] se basa en que todos los enlaces posibles tengan una probabilidad de aparición uniforme  $p$ . Este procedimiento da como resultado una red aleatoria con una distribución de grados, que cuando  $N \rightarrow \infty$  corresponde a una distribución de Poisson.

En este modelo se puede derivar un resultado que establece la existencia de una probabilidad crítica  $p_c \sim 1/N$ . Por encima de este umbral, la mayoría de los  $N$  nodos de la red están interconectados. Es importante destacar que el número de enlaces necesarios para conectar  $N$  nodos es aproximadamente  $p_c N^2$ , lo que es del orden de  $N$ , incluso para redes grandes. Esto significa que la probabilidad de enlazar dos nodos no necesita ser muy alta para conectar la mayoría de los nodos de la red. Mientras tanto, las redes aleatorias tienden a tener un bajo coeficiente de agrupamiento y una distancia media pequeña, mientras que las redes reales suelen exhibir un alto coeficiente de agrupamiento y una distancia media también pequeña.

#### 2.2.4.4. Modelo de *Watts-Strogatz*

Muchos sistemas, como los sistemas neuronales, tienen una estructura optimizada para conseguir un coeficiente de agrupamiento alto, pero con una baja distancia media entre nodos. Estas características se encuentran en medio entre una estructura aleatoria y una regular, y definen lo que se conoce como redes de *pequeño mundo*.



**Figura 2.7: Construcción de redes de pequeño mundo.** Se representa el procedimiento de reconexión aleatoria del modelo Watts-Strogatz que interpola entre una red de anillo regular y una red aleatoria sin alterar el número de nodos ni enlaces. Se comienza con  $N = 20$  nodos, cada uno conectado a sus 4 vecinos más cercanos [14]. Para una probabilidad de reconexión  $p = 0$  el anillo original no cambia; a medida que  $p$  aumenta, la red se vuelve cada vez más desordenada hasta que para  $p = 1$  todos los enlaces se recablean aleatoriamente (figura tomada de [14]).

El modelo de Watts-Strogatz [14] genera redes con efecto de pequeño mundo, partiendo de un anillo de  $N$  nodos con  $d$  (par) vecinos y reconectando todos sus enlaces con probabilidad uniforme  $\beta$ , donde  $0 \leq \beta \leq 1$  dando  $\beta = 0$  el anillo de partida y  $\beta = 1$  una red completamente aleatoria (Erdős-Rényi) como ilustra la fig. 2.7.

## 2.3. Mapas logísticos acoplados en redes

### 2.3.1. Modelo de mapas logísticos acoplados

Los mapas acoplados son un modelo matemático útil para estudiar sistemas dinámicos que se basa en la idea de que los sistemas complejos pueden descomponerse en unidades simples que interactúan entre sí. En este modelo cada nodo en la red está representado por un mapa discreto que describe la evolución de una variable dinámica a lo largo del tiempo. Cada mapa se defi-



ne como una función matemática que toma como entrada el valor anterior de la variable dinámica y una combinación lineal de los valores de las variables dinámicas de los nodos acoplados. La interconexión entre los nodos se describe mediante una matriz de acoplamiento, que especifica la forma en que los nodos están conectados y la intensidad de las interacciones entre ellos.

La implementación electrónica de mapas acoplados que se emplea en este trabajo está descrita en [59] y sigue el modelo de Kaneko [8], en el que la evolución del  $i$ -ésimo mapa está dada por

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}; r_i) + \varepsilon \sum_{j=1}^N \frac{A_{ij}}{d_i} f(x_n^{(j)}; r_j), \quad (2.27)$$

donde  $x_n^{(i)}$  es el estado del mapa en la iteración  $n$ -ésima,  $x_{n+1}^{(i)}$  en la iteración  $(n+1)$ -ésima (con  $n \geq 0$ ,  $x_0^{(i)}$  es la condición inicial),  $f(x; r) \equiv rx(1-x)$  es la función logística con parámetro  $r$  [10],  $A_{ij}$  son las entradas de la matriz de adyacencia,  $d_i$  es el grado del nodo  $i$  y  $\varepsilon$  es la intensidad de acoplamiento. La condición de  $\varepsilon \in [0; 1]$  asegura que si  $x_0^{(i)} \in [0; 1]$ ,  $\forall i \in [1; N]$  y  $f(x_n^{(i)}; r_i) \in [0; 1]$ ,  $\forall x \in [0; 1]$  y  $\forall i \in [1; N]$ , entonces  $x_n^{(i)} \in [0; 1]$ ,  $\forall n \geq 0$  y  $\forall i \in [1; N]$ , garantizando trayectorias acotadas.

La ec. (2.27), mediante una transformación  $N$ -dimensional, mapea el estado de los  $N$  mapas en el instante  $n$ ,  $\vec{x}_n = \{x_n^{(1)}; \dots; x_n^{(N)}\}$ , al estado de los  $N$  mapas en el instante  $n+1$ ,  $\vec{x}_{n+1} = \{x_{n+1}^{(1)}; \dots; x_{n+1}^{(N)}\}$ , y puede reescribirse en forma matricial como

$$\vec{x}_{n+1} = [\mathbf{I} - \varepsilon \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}] \vec{f}(\vec{x}_n), \quad (2.28)$$

siendo  $\vec{f}(\vec{x}_n)$  el estado de los  $N$  mapas desacoplados en la  $n$ -ésima iteración,  $\mathbf{I}$  la matriz identidad,  $\mathbf{D}^{-1} = \text{diag}\{\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_N}\}$  la matriz diagonal que contiene los inversos de los grados de cada nodo a lo largo de su diagonal y  $\mathbf{L}$  la matriz laplaciana de la red (ec. 2.16).

Comúnmente se emplea el término *difusivo* [60, 61, 62] en el contexto del modelo de Kaneko, porque la ec. (2.28) de evolución del sistema es tal que el acoplamiento se expresa en términos de diferencias entre el estado de cada mapa y sus vecinos (ec. 2.27), análoga a la ley de Fick que describe la difusión de un fluido [63]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \cdot \nabla^2 f, \quad (2.29)$$

donde  $f$  es una función continua que representa el valor de la cantidad de interés,  $D$  es el coeficiente de difusión y  $\nabla^2$  es el operador laplaciano.

La difusión también se utiliza como un modelo simple de propagación a través de una red, como puede ser la propagación de información o de una enfermedad. Si una magnitud,  $\vec{\psi}$ , se transmite de un nodo a otro pasando por los enlaces, y  $C$  es la constante de difusión, la tasa a la que  $\vec{\psi}$  está cambiando está dada por [12]

$$\frac{d\vec{\psi}}{dt} + C\mathbf{L}\vec{\psi} = 0,$$

cuya forma coincide con la ecuación de difusión ordinaria (ec. (2.29)), donde el operador laplaciano  $\nabla^2$  ha sido reemplazado por la matriz  $\mathbf{L}$ , que por esa razón se denomina *matriz laplaciana de la red*.

### 2.3.2. Sincronización y acoplamiento crítico en sistemas de mapas idénticos acoplados

En términos generales, la sincronización entre dos sistemas se logra cuando uno de ellos altera su curso, ya sea hacia la trayectoria seguida por el otro sistema o hacia una nueva ruta compartida por ambos. La sincronización caótica puede ser interpretada como una manifestación de la tendencia hacia la autoorganización en sistemas complejos. Una característica de un sistema caótico aislado es que las señales que produce no se sincronizan con ningún otro sistema. Por lo tanto, suele parecer imposible que dos sistemas caóticos se sincronicen entre sí, pero, si intercambian información de la manera correcta, pueden sincronizarse [26].

Dado que la matriz laplaciana tiene la propiedad de sumar cero en cualquiera de sus filas, si se cumple que  $f^{(i)} = f, \forall i$ , existe una solución para la ec. (2.28) donde todos los mapas evolucionan sincronizados [64], que se denomina *sincronización completa*. Los estados posibles en la sincronización completa definen una variedad en el espacio de estados, que posee codimensión 1, y es invariante ante la dinámica de la ec. (2.28). En el caso en que la dinámica de los mapas aislados es caótica, la variedad de sincronización completa es invariante y además topológicamente transitiva, es decir, que dados dos conjuntos

abiertos cualesquiera del espacio, existe una órbita que pasa por ambos [64].

La Función Maestra de Estabilidad (MSF, por sus siglas en inglés), es una herramienta para determinar la estabilidad lineal de la variedad de sincronización. La MSF permite establecer rápidamente si cualquier disposición de acoplamiento lineal producirá una dinámica sincrónica estable. El acoplamiento solo necesita ser localmente lineal para que haya una función de estabilidad maestra [65], la cual puede escribirse, a partir de una perturbación (a primer orden  $x_n^{(i)} = s_n + \xi_n^{(i)}$ ) en el modelo de Kaneko, ec. (2.28), que resulta [64]

$$\vec{\xi}_{n+1} = f'(s_n)[\mathbf{I} - \varepsilon \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}] \vec{\xi}_n, \quad (2.30)$$

donde la derivada instantánea del mapa  $f'(s_n)$  modula las perturbaciones del mapeo lineal  $\vec{\xi}_n$ .

Para determinar la estabilidad del sistema, primero se identifica la dinámica que tiene lugar en los nodos de la red. Una vez establecida esta dinámica, se calcula la MSF. La estabilidad del sistema depende entonces de si la MSF es negativa al ser evaluada en cada uno de los autovalores de la matriz laplaciana  $\{\lambda_1 = 0, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ . Si la MSF conduce a un valor negativo para cada autovalor, el sistema completo se considera estable. El autovalor máximo se nota como  $\lambda_M = \lambda_N$  y el segundo autovalor más pequeño se le conoce como autovalor de Fiedler [66],  $\lambda_F = \lambda_2$ . Este autovalor cumple  $\lambda_F > 0$  si la red es conexa [67].

A partir de los valores de  $\lambda_F$  y  $\lambda_M$  de grafos regulares de grado par, se puede derivar una expresión explícita para el acoplamiento crítico (mínimo) necesario para mantener una sincronización completa localmente estable [64]

$$\varepsilon_{c,\pm} = \left( \frac{d}{\lambda_F} \right) [1 \pm e^{-\chi}], \quad (2.31)$$

donde  $\chi$  representa el exponente de Lyapunov de un mapa aislado,  $d$  es el grado y  $\lambda_F$  el autovalor de Fiedler, que puede calcularse como [64]

$$\lambda_F = d + 1 - \left( \frac{\sin(\frac{\pi(d+1)}{N})}{\sin(\frac{\pi}{N})} \right). \quad (2.32)$$

Así, la sincronización del sistema está dada por una competencia entre la caoticidad de los mapas ( $\chi$ ), la intensidad de acoplamiento ( $\varepsilon$ ) y la topología de la red subyacente ( $d, N$ ).

# Capítulo 3

## Métodos

En este capítulo se describe la metodología de trabajo, incluyendo las medidas utilizadas para el análisis de los datos experimentales y las técnicas de inferencia de conexiones. El contenido se organiza en dos secciones. La primera presenta las medidas basadas en la teoría de la información de Shannon, empleadas para cuantificar la generación y transmisión de información en redes. En particular, se introduce la *entropía condicional conjunta* del sistema, una magnitud propuesta en el marco de esta tesis, que permite identificar de manera precisa las configuraciones que exhiben una amplia región de transmisión eficiente de información.

En la segunda sección, se describen métodos de inferencia de conexiones en redes. La inferencia en redes refiere al proceso de deducir la estructura de conexiones entre los nodos de la red a partir de datos observados sobre su dinámica o interacciones. Esto implica utilizar métodos estadísticos para identificar patrones y relaciones subyacentes en los datos que revelen cómo los nodos están conectados entre sí. Así, mediante el análisis de la dinámica y la información que comparten los nodos se deducen las conexiones entre ellos.

### 3.1. Medidas para caracterizar dinámicas emergentes

En la teoría de la información propuesta por Shannon [23] a mediados del siglo XX, la *información* se trata como magnitud física, y es a partir de la entropía de una secuencia de símbolos que puede caracterizarse esa información. A su vez, puede decirse (informalmente) que la *información mutua*

entre dos variables mide cuánto el conocimiento de una variable reduce nuestra incertidumbre sobre otra. Con la finalidad de describir el comportamiento de muchos elementos que interactúan, también puede emplearse la noción de *campo medio*, donde se considera que el efecto de todas las interacciones entre los elementos del conjunto puede ser sustituido por un campo promedio que actúa sobre cada partícula. En esta sección se definen formalmente las medidas utilizadas y se describe la forma de aplicarlas al análisis de la dinámica de los mapas acoplados.

### 3.1.1. Entropía e información mutua

#### 3.1.1.1. Entropía

En las diferentes áreas en donde se aplica el concepto de entropía, es entendida como una medida del “desorden” de un sistema o más específicamente de la incertidumbre [68] y de la información necesaria para reducir o eliminar esa incertidumbre. Para analizar la generación de información en el sistema estudiado se calcula la entropía de Shannon [23] de cada mapa, que para el  $i$ -ésimo nodo se define

$$H_\varepsilon[x^{(i)}] \simeq - \sum_{m=1}^M p_i(m; \varepsilon) \log_2 [p_i(m; \varepsilon)], \quad (3.1)$$

donde  $p_i(m; \varepsilon)$  es la probabilidad marginal de la  $m$ -ésima partición, con  $m = 1, 2, \dots, M$  los bins en que se divide el espacio de estados. La entropía subyacente del  $i$ -ésimo mapa,  $H[x^{(i)}]$ , depende de una medida de probabilidad marginal invariante,  $\mu_\varepsilon(x^{(i)})$ , que es la verdadera distribución de los estados del sistema en el intervalo  $[0, 1]$  a lo largo del tiempo. Es una función de distribución de probabilidad continua, pero su forma analítica es habitualmente desconocida, salvo casos muy específicos como el presentado en la sección 2.1.3 para un mapa logístico aislado con  $r = 4$ .

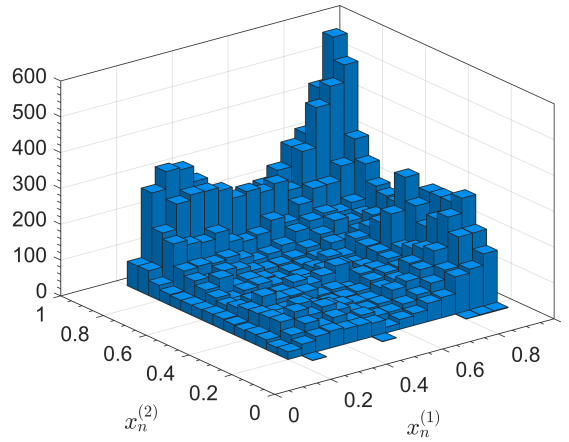
La aproximación ( $\simeq$ ) en la ec. (3.1) se debe a que las probabilidades marginales  $p_i(m; \varepsilon)$  empleadas son una *estimación* empírica de la verdadera distribución de probabilidad subyacente del sistema (su medida de probabilidad invariante), que hace de la ec. (3.1) una igualdad. La aproximación a esta distribución de probabilidad se obtiene calculando la frecuencia relativa con la que las iteraciones estacionarias del mapa,  $\{x_t^{(i)}\}_{t=0}^T$ , visitan cada una de las  $M$  particiones de tamaño uniforme que definen el intervalo de estados

$[0, 1] = [0, \frac{1}{M}) \cup [\frac{1}{M}, \frac{2}{M}) \cup \dots \cup [\frac{M-1}{M}, 1]$ . La discretización del espacio de estados en estos  $M$  bins contribuye también a esta aproximación sobre la distribución continua subyacente.

Análogamente, se puede estimar la entropía conjunta  $H_\varepsilon[x^{(i)}, x^{(j)}]$  utilizando las mismas particiones y de igual tamaño que en la ec. (3.1) pero aplicadas al cuadrado del espacio de estados  $[0, 1] \times [0, 1]$ , es decir,

$$H_\varepsilon[x^{(i)}, x^{(j)}] \simeq - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M p_{ij}(m, n; \varepsilon) \log_2 [p_{ij}(m, n; \varepsilon)], \quad (3.2)$$

donde  $p_{ij}(m, n; \varepsilon)$  es la probabilidad conjunta de que los mapas  $i$  y  $j$  estén simultáneamente en la partición  $(m, n)$ -ésima.



**Figura 3.1: Histograma bivariado.** Ejemplo de histograma de  $(20 \times 20)$  bins correspondiente a dos mapas logísticos.

La fig. 3.1 muestra un ejemplo de histograma bivariado, correspondiente a dos mapas logísticos cuyas series temporales tienen una longitud  $T = 2.5 \times 10^4$  y donde la partición del intervalo  $m = 1, 2, \dots, 20$  bins contiene la conocida partición generadora de Markov  $([0, 1/2) \cup (1/2, 1])$  de un mapa logístico aislado [69]. Con este procedimiento se obtiene un promedio de iteraciones por partición de  $\frac{T}{M \times M} = \frac{2.5 \times 10^4}{4 \times 10^2} = 62.5$  puntos, lo cual es suficiente para mantener valores confiables.

### 3.1.1.2. Información mutua

La información mutua,  $I_{ab}$ , puede entenderse como una medida de la interdependencia entre las variables  $a$  y  $b$  [23]. Para estudiar la transmisión de

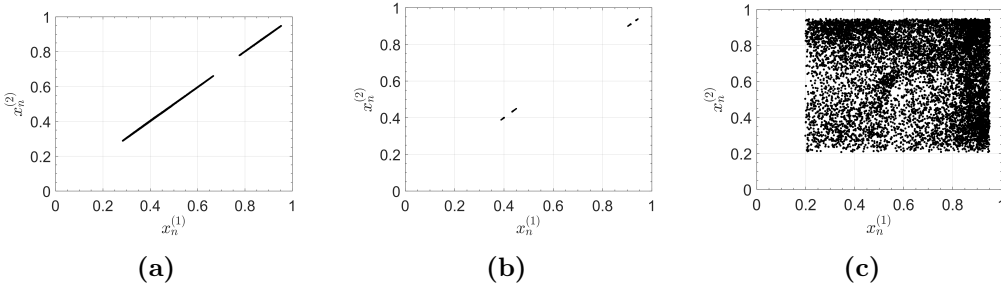
información en el sistema se calcula la información mutua media,  $\langle I \rangle_\varepsilon$ , entre los  $\frac{N(N-1)}{2}$  pares de nodos

$$\langle I \rangle_\varepsilon = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N I_{ij}(\varepsilon), \quad (3.3)$$

donde  $I_{ij}(\varepsilon)$  es la información mutua entre los mapas  $i$  y  $j$  y está dada por [23]

$$I_{i,j}(\varepsilon) = H_i(\varepsilon) + H_j(\varepsilon) - H_{i,j}(\varepsilon), \quad (3.4)$$

siendo  $H_{i,j}(\varepsilon)$  la entropía conjunta de los mapas, dada por la ec. (3.2).



**Figura 3.2: Espacio de fases correspondiente a dos mapas logísticos en tres situaciones muy diferentes en términos de entropía e información mutua,  $I_{12}$ .** (a) Caso con alta entropía y en que  $I_{12}$  se maximiza. (b) Caso de baja entropía en que  $I_{12}$  se maximiza. (c) Caso de alta entropía en que  $I_{12} \rightarrow 0$ .

La fig. 3.2 muestra el espacio de fases de tres casos claramente diferentes. En el panel 3.2(a) se puede interpretar que las señales de ambos mapas tienen y comparten mucha información. Ello se observa como una recta densa sobre la diagonal  $x_n^{(1)} = x_n^{(2)}$ . En el panel 3.2(b) se puede interpretar que las señales de ambos mapas comparten poca información que generan (los puntos en el diagrama de fases se ubican sobre la diagonal  $x_n^{(1)} = x_n^{(2)}$ ). Por último, el panel 3.2(c) muestra que los mapas generan mucha información, pero no es compartida por ambos. Esto se observa en la nube de puntos dispersa en el espacio de estados.

### 3.1.1.3. Entropía condicional

La entropía condicional mide la incertidumbre que se tiene sobre una variable aleatoria  $X$  al conocer el valor de otra variable aleatoria  $Y$ . De igual forma, describe la entropía del estado futuro de un sistema, dado el conocimiento de las variables en su estado actual. Esta medida permite describir la dependencia

temporal entre los mapas que componen la red y el flujo de información en el sistema. En ese sentido, la información generada por un conjunto de  $N$  mapas acoplados está dada por su entropía conjunta,  $H[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}]$  [70], que es una generalización de la planteada para el caso bidimensional (ec.(3.2)). Esta información está limitada por

$$0 \leq H[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}] \leq \sum_{i=1}^N H[x^{(i)}], \quad (3.5)$$

donde  $H[x^{(i)}]$  es la entropía de Shannon del  $i$ -ésimo mapa (ec. (3.1)) suponiendo que  $x^{(i)}$  es una variable aleatoria [23, 70]. El límite superior de la ec. (3.5) es una consecuencia de la regla de la cadena de la entropía [70, Ch. 2, p. 13-37] y puede utilizarse para aproximar la información generada por el sistema de mapas acoplados a partir de sus componentes,  $H[x^{(i)}]$ , que se puede estimar a partir de significativamente menos datos que  $H[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}]$  que requiere encontrar distribuciones de probabilidad conjuntas.

### 3.1.2. Campo medio y varianza

#### 3.1.2.1. Campo medio

La teoría del campo medio surgió en respuesta a la necesidad de describir sistemas de muchas partículas en los cuales el cálculo exacto de las interacciones entre todas las partículas es extremadamente difícil o incluso imposible [71]. En estos sistemas, las partículas individuales interactúan con un gran número de otras partículas, lo que hace que el análisis de las interacciones individuales se dificulte especialmente. En la teoría del campo medio se hace la suposición simplificada de que el efecto de todas las interacciones entre las partículas puede ser reemplazado por un campo promedio que actúa sobre cada partícula. Este campo promedio representa el efecto colectivo de todas las partículas y permite una descripción simplificada del comportamiento del sistema en términos de la respuesta de cada partícula a este campo. Esta forma de modelar permite, por ejemplo, una imagen más simple y reducida de la dinámica de una población de neuronas y a su vez comparar directamente con estudios de imágenes donde la resolución espacial implica que el campo registrado representa el promedio sobre una gran población [72]. En general, el estudio del campo medio permite simplificar el análisis de las interacciones de



un modelo compuesto por un conjunto de nodos, sustituyendo las interacciones individuales por una interacción definida a partir de un valor promediado de los otros.

Para el  $i$ -ésimo mapa de la ec. (2.27) se define el campo medio local instantáneo  $h_l^{(i)}(n)$  como

$$h_l^{(i)}(n) = \frac{1}{d_i} \sum_{j=1}^N A_{ij} f(x_n^{(j)}; r_j). \quad (3.6)$$

Puede observarse que  $A_{ij}$  restringe la suma en la ec. (3.6) a los  $d_i$  nodos conectados al mapa  $i$ , por lo que  $h_l^{(i)}(n)$  corresponde al promedio de las contribuciones de esos vecinos (*campo medio local*).

Se define el campo medio global instantáneo,  $h_g(n)$ , para la ec. (2.27) como

$$h_g(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_n^{(i)}, r_i), \quad (3.7)$$

donde la suma se realiza sobre los  $N$  nodos de la red, por lo que  $h_g(n)$  es el mismo para todos los mapas y corresponde al promedio de todas las contribuciones.

El coeficiente de correlación de Pearson [73] permite cuantificar la relación lineal entre dos variables. En el contexto de este estudio y en términos del campo medio, se emplea este coeficiente para analizar la relación entre la dinámica de los mapas logísticos acoplados y su campo medio global, permitiendo interpretar si el comportamiento colectivo del sistema muestra sincronía con las dinámicas individuales. Un coeficiente de correlación próximo a 1 evidencia que la dinámica global se acopla fuertemente a las interacciones locales, indicando una emergencia coherente de propiedades colectivas. Así, este coeficiente permite comparar el comportamiento individual de cada nodo con el comportamiento promedio de todos los nodos aportando nueva información sobre las dinámicas del sistema.

### 3.1.2.2. Varianza media

La *varianza* entre los mapas  $i$  y  $j$ ,  $\sigma_{ij}^2$ , puede emplearse para cuantificar la “similitud” entre sus series temporales, y está dada por

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T (x_n^{(i)} - x_n^{(j)})^2, \quad (3.8)$$

De este modo  $\sigma_{ij}^2 \rightarrow 0$  cuando  $x_n^{(i)} \simeq x_n^{(j)}$  para todas las iteraciones,  $n$ , lo cual sucede por ejemplo, si los mapas están sincronizados. En todos los casos  $\sigma_{ij}^2 = \sigma_{ji}^2$ .

Se define como un parámetro de orden la varianza media del sistema

$$\overline{\sigma^2} = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sigma_{ij}^2, \quad (3.9)$$

donde la suma se realiza sobre los  $N(N-1)/2$  pares de mapas.

### 3.1.2.3. Desviación respecto al campo medio promediada en la red

Para cuantificar la homogeneidad o heterogeneidad en el comportamiento del  $i$ -ésimo nodo de la red en relación con su entorno (campo medio), se utiliza una desviación estándar,  $\sigma_{ih}$ . Un valor bajo indica que el elemento tiende a comportarse de forma muy similar a su campo medio, mientras que un valor alto sugiere una mayor diversidad o fluctuación en sus estados.

Aquí se define en particular la desviación respecto al campo medio promediada en la red

$$\overline{\sigma_h} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \sqrt{\frac{\sum (x_n^{(i)} - h_n)^2}{T}} \right), \quad (3.10)$$

donde  $T$  es la longitud de cada una de las series temporales ( $x_n$ ),  $h$  es el campo medio y la suma se realiza sobre los  $N$  nodos de la red. Este promedio brinda una única métrica que resume la dispersión o heterogeneidad global del sistema en relación con sus dinámicas locales.

Según el análisis que se busque, podrá calcularse la desviación respecto al campo medio global ( $h_g$ , ec. 3.7) o local ( $h_l$ , ec. 3.6).

- La desviación respecto al **campo medio global**,  $\overline{\sigma_{h_g}}$ , evalúa la dispersión

de los nodos con respecto al comportamiento promedio de *toda* la red. Una baja varianza global sugiere que toda la red se mueve o se comporta como una unidad.

- La desviación respecto al **campo medio local**,  $\overline{\sigma_{h_i}}$ , evalúa la dispersión de un nodo con respecto a sus *vecinos directos*. Esto es útil para detectar la formación de clústeres, patrones locales o comportamientos heterogéneos dentro de una red que, globalmente, podría parecer homogénea.

## 3.2. Inferencia de redes a partir de dinámicas emergentes

La inferencia de conexiones en una red se refiere al proceso de analizar los datos y descubrir patrones o relaciones entre los nodos [74]. Esto puede ser útil en una variedad de campos, como por ejemplo el estudio de las redes climáticas [75] o las redes funcionales del cerebro [76]. Existen diversas técnicas de inferencia de conexiones que se pueden utilizar, dependiendo de los datos disponibles y los objetivos del estudio. En el análisis de sistemas complejos que están conformados por unidades dinámicas que interactúan a través de una estructura de red, el uso de la correlación cruzada o la información mutua como técnicas de inferencia puede resultar eficaz para obtener información pertinente y lograr una comprensión profunda de la dinámica del sistema [74, 77, 78]. En ese sentido, en este trabajo se estudia qué características topológicas y dinámicas de las redes de mapas acoplados favorecen la inferencia.

### 3.2.1. Análisis ROC

El análisis de la característica operativa del receptor (ROC, por sus siglas en inglés) es una herramienta de gran utilidad para evaluar la capacidad de un algoritmo de clasificación en la separación de una población en dos grupos [79, 80, 81, 82]. Aunque originalmente fue diseñado para la detección de señales, su aplicación se ha extendido a diferentes campos de investigación. El método propuesto se aplica a problemas de clasificación binaria. Para cada instancia se asigna un elemento del conjunto  $\{p, n\}$ , que representa la clase positiva o negativa real. Un clasificador se define como una asignación de instancias a

clases predichas. Para diferenciar entre la clase real y la clase predicha, se utilizan las etiquetas  $\{Y, N\}$  para las predicciones generadas por el modelo. Dados un clasificador y una instancia, se pueden obtener cuatro resultados posibles:

- $TP$ ; se considera un verdadero positivo si la instancia es positiva y se clasifica como positiva,
- $FN$ ; se considera un falso negativo si la instancia es positiva y se clasifica como negativa,
- $TN$ ; se considera un verdadero negativo si la instancia es negativa y se clasifica como negativa, y
- $FP$ ; se considera un falso positivo si la instancia es negativa y se clasifica como positiva.

Con estos datos, es posible construir una matriz de confusión de dos por dos, como la que se presenta en la fig. 3.3 [80]. Esta matriz permite visualizar el desempeño del algoritmo de clasificación, donde los valores a lo largo de la diagonal principal representan las decisiones correctas, mientras que los valores fuera de esta diagonal indican los errores (la “confusión”) entre las distintas clases.

	<b>p</b>	<b>n</b>
<b>Y</b>	True Positives	False Positives
<b>N</b>	False Negatives	True Negatives

**Figura 3.3: Matriz de confusión.** Es una herramienta que permite la visualización del desempeño del algoritmo de clasificación. Los números a lo largo de la diagonal principal representan las decisiones tomadas correctamente, y los números fuera de esta diagonal representan la confusión entre clases [80].

Las tasas de las cuatro cantidades fundamentales del análisis ROC se definen como:

- TPR (tasa de verdaderos positivos), fracción de casos positivos que fueron clasificados correctamente.

- FPR (tasa de falsos positivos), fracción de casos negativos que se clasificaron incorrectamente como positivos.
- TNR (tasa de verdaderos negativos), fracción de casos negativos que fueron correctamente identificados.
- FNR (tasa de falsos negativos), fracción de casos positivos que se clasificaron incorrectamente como negativos.

Se tiene por lo tanto [80]

$$\begin{cases} TPR = \frac{TP}{Positivos} \\ FPR = \frac{FP}{Negativos} \\ TNR = \frac{TN}{Negativos} \\ FNR = \frac{FN}{Positivos} \end{cases} \quad (3.11)$$

donde *Positivos* representa el número de enlaces existentes y *Negativos* el número de pares de nodos que no están interconectados. Se considera que un modelo es bueno si tiene una TPR alta y una FPR baja en diferentes umbrales.

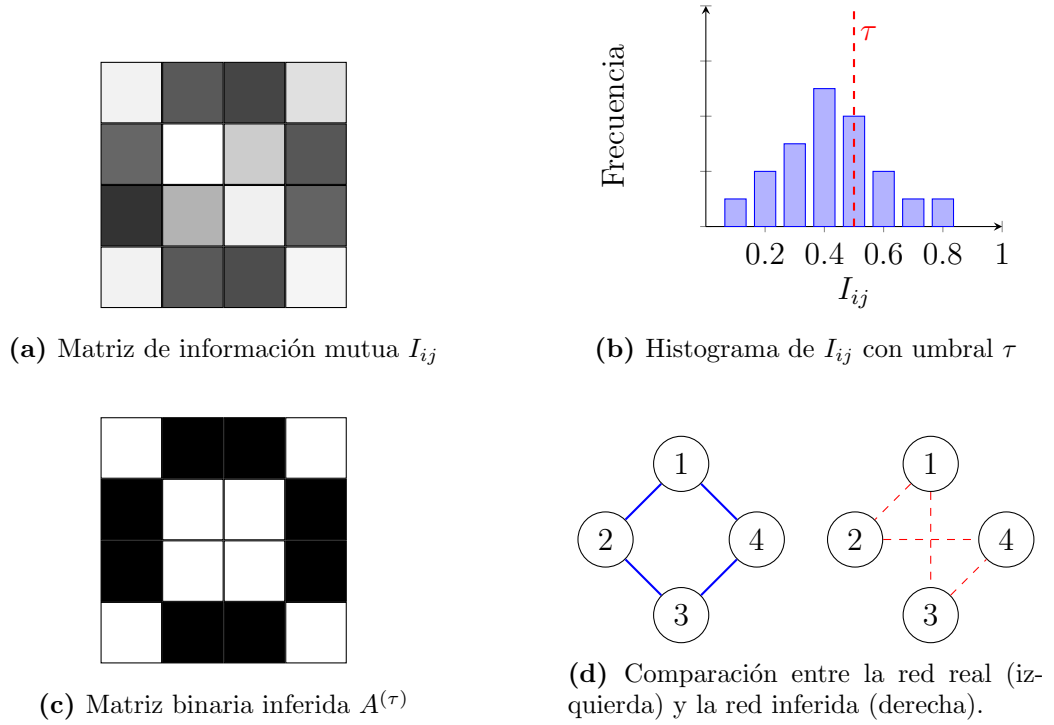
### 3.2.2. Análisis ROC condicionado por el número de enlaces

Para estudiar las características topológicas y dinámicas que favorecen la inferencia de los acoples, en esta tesis se toma como medida de semejanza entre nodos la información mutua, ec. (3.4), recopilándose todas las informaciones mutuas de series temporales entre pares de nodos del sistema. Dado un sistema compuesto por  $N$  nodos, se considera la dinámica registrada en cada nodo a lo largo del tiempo. A partir de estas trayectorias temporales se calcula la información mutua,  $I_{ij}$ , entre todos los pares de nodos  $(i, j)$ . Esto da lugar a un conjunto de  $\frac{N(N-1)}{2}$  valores  $\{I_{ij}\}$ , que se ordenan de menor a mayor, como se ilustra en el panel (b) de la fig. 3.4.

Para inferir la topología de la red, es decir, construir una estimación de la topología subyacente, se introduce un umbral  $\tau \in \mathbb{R}^+$ , que se emplea de parámetro de control. A partir de este umbral, se define la *matriz de adyacencia inferida*  $A^{(\tau)}$  mediante la siguiente regla:

$$A_{ij}^{(\tau)} = \begin{cases} 1 & \text{si } I_{ij} > \tau, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este procedimiento transforma la matriz de información mutua, que contiene valores reales que cuantifican la dependencia estadística entre nodos (fig. 3.4(a)), en una matriz binaria que representa la estructura inferida (fig. 3.4(c)). Este método exige interpretar que los pares con mayor información mutua corresponden a conexiones directas, mientras que valores más bajos se asocian a relaciones indirectas (ausencia de enlace).



**Figura 3.4: Esquema del procedimiento de inferencia estructural basado en información mutua para una red de 4 nodos.** (a) En escala de grises se representa la matriz formada por los valores reales de información mutua entre los pares de nodos. (b) Histograma donde se muestra el umbral de información mutua  $\tau$ . (c) Matriz binaria inferida, construida a partir de la matriz de informaciones mutuas (panel (a)) y aplicando el umbral  $\tau$  (panel (b)). Esa matriz representa la presencia (negro) o ausencia (blanco) de conexiones estructurales en función de si la información mutua supera el umbral,  $\tau$ . (d) Comparación entre los enlaces reales de la red y los inferidos.

La elección del umbral  $\tau$  determina directamente cuántos y cuáles enlaces se inferen a partir de la matriz de información mutua. Una estrategia común consiste en ajustar  $\tau$  para que el número total de enlaces inferidos coincida con el número real de conexiones (cuando esta información está disponible). Este método puede resultar especialmente eficaz en regímenes dinámicos parcialmente coherentes, donde el sistema no está ni perfectamente sincronizado

ni completamente desordenado, lo que permite distinguir entre interacciones directas e indirectas [77].

A partir del número de nodos  $N$  y el número de enlaces  $E$  (*verdaderos positivos*) de la red analizada se obtiene que la cantidad de pares de nodos no conectados (*verdaderos negativos*) es  $\frac{N(N-1)}{2} - E$ . De este modo, las cuatro cantidades fundamentales del análisis ROC no son independientes entre sí, y pueden expresarse como

$$\begin{cases} TP + FN = E \\ FP + TN = \frac{N(N-1)}{2} - E. \end{cases} \quad (3.12)$$

A partir de las ecuaciones (3.11) y (3.12) se obtiene [83, 84]

$$\begin{cases} TPR + FNR = 1 \\ FPR + TNR = 1. \end{cases} \quad (3.13)$$

La ec. (3.13) muestra que puede expresarse toda la información que brinda el análisis ROC mediante únicamente dos de las cuatro cantidades fundamentales. Una inferencia ideal tendría una tasa de falsos positivos  $FPR = 0$  y una tasa de verdaderos positivos  $TPR = 1$ , y el valor óptimo se suele seleccionar como aquel más cercano a ese. Esto es útil para encontrar las condiciones que brinden una inferencia de mayor calidad [83, 84]. En este trabajo se busca visualizar cómo se afecta la inferencia al cambiar parámetros topológicos y dinámicos del sistema.

Seleccionando el valor del umbral  $\tau$  de forma que el número de enlaces obtenido en el proceso de inferencia coincida con el número de enlaces  $E$  que tiene la red que se intenta inferir, se tiene una nueva condición dada por

$$TP + FP = E, \quad (3.14)$$

que permitirá reducir el análisis ROC a una única variable. Por ejemplo, si se opta por representar la calidad de la inferencia mediante la  $TPR$ , puede obtenerse que [83, 84]

$$FPR = \frac{1 - TPR}{\rho^{-1} - 1}, \quad (3.15)$$

donde  $\rho$  (ec. 2.12) corresponde a la densidad de enlaces de la red.

La ec. (3.15) explicita cómo la tasa de falsos positivos está relacionada con

la tasa de verdaderos positivos y la densidad de enlaces de la red. Este resultado es especialmente útil para evaluar el desempeño de la inferencia sin necesidad de representar explícitamente la curva ROC completa. Así, se simplifica la comparación entre distintas configuraciones, permitiendo evaluar cómo ciertos cambios afectan la capacidad del método para reconstruir adecuadamente la topología subyacente.



## Capítulo 4

# Implementación experimental y numérica

En este capítulo se describe la implementación experimental desarrollada para el estudio de redes de mapas logísticos acoplados, lo que proporciona el contexto necesario para comprender el diseño, ajuste y validación del sistema empleado en la obtención de los datos que se analizan a lo largo de la tesis. El capítulo se organiza en tres secciones, donde la primera presenta la caracterización general del sistema electrónico utilizado, incluyendo las propiedades relevantes para su funcionamiento y la precisión del instrumental.

En la segunda sección se detallan las configuraciones de redes utilizadas para el estudio de la generación y transmisión de información. Se describen las estrategias de reducción progresiva de enlaces preservando la diversidad topológica, y la clasificación de las configuraciones según la densidad de enlaces. Asimismo, se detallan las configuraciones empleadas para el análisis de la distancia resistiva y la centralidad, abarcando redes experimentales de resistencias, redes corticales y redes aleatorias generadas numéricamente.

La última sección refiere al procedimiento empleado para realizar las simulaciones numéricas de redes de mapas logísticos acoplados, incorporando las heterogeneidades observadas experimentalmente. Se describen tres estrategias utilizadas para asignar los parámetros de control a los nodos, considerando tanto valores inferidos de la implementación electrónica como valores generados aleatoriamente dentro del rango experimental y valores homogéneos.

## 4.1. Diseño experimental de mapas logísticos acoplados

El diseño experimental de mapas acoplados empleado en este trabajo, sigue la ec. (2.27) que representa el modelo de Kaneko [8]. Como se describe en el anexo 1 (fig. 1.6), la implementación electrónica se basa en circuitos capacitivos [59], lo que implica que: i) no pueden controlarse las condiciones iniciales de los mapas,  $x_0^{(i)}$ , lo que da como resultado valores casi aleatorios, y ii) en una trayectoria, las medidas registradas consecutivamente retienen información de los estados anteriores. Esto significa que el último estado estacionario en una evolución dada,  $x_T^{(i)}$ , es similar a la condición inicial de la siguiente evolución,  $x_0^{(i)}$ , a menos que se purgue el sistema (por ejemplo, cambiando los parámetros abruptamente y esperando largos períodos entre mediciones consecutivas). Sin embargo, esta memoria es útil para el análisis de bifurcaciones, ya que permite rastrear atractores a medida que pierden estabilidad y surgen nuevos, al cambiar adiabáticamente el parámetro de control.

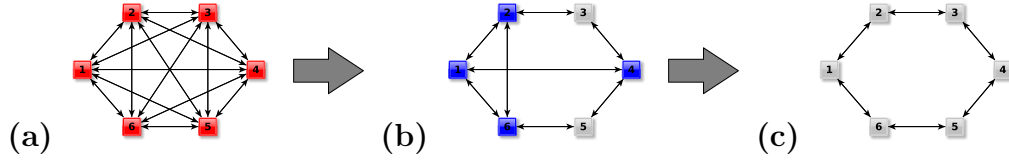
Para la recolección de los datos experimentales se utilizó un sistema de adquisición USB 6216 de National Instrument (NI) con una resolución de 16 bits, que registra señales con alta fidelidad y relación señal-ruido ( $SNR \simeq 10^6$ ). El sistema permite una variación precisa en el parámetro de control, que es la intensidad de acoplamiento  $\varepsilon \in [0, 1]$  en ec. (2.27), a través de la salida analógica con una precisión de  $3.5 \mu V / 10 V < 10^{-6}$ . Se configura  $\varepsilon$  en el intervalo de 0 a 1 en incrementos de  $\Delta\varepsilon = 1/256$ , esperando 1 segundo después de cada cambio antes de comenzar a registrar las trayectorias, lo que representa  $\approx 2 \times 10^3$  iteraciones [59, 85]. Se registran trayectorias con  $T = 2.5 \times 10^4$  iteraciones, luego de descartar el régimen transitorio.

## 4.2. Configuraciones

### 4.2.1. Configuraciones para el estudio de la Información

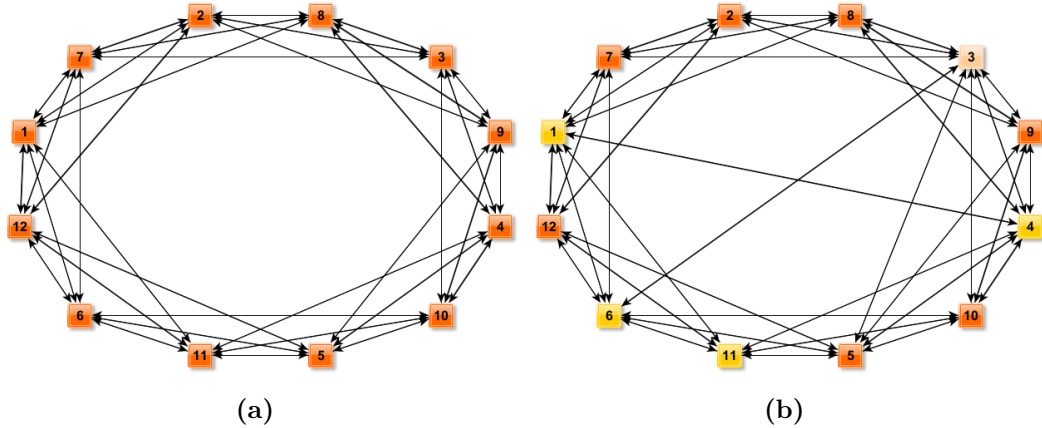
La matriz de adyacencia permite definir las configuraciones de acoplamiento, que se asumen bidireccionales y no ponderadas. Sus entradas son binarias,  $A_{ij}$ , e indican si los nodos  $i$  y  $j$  están conectados,  $A_{ij} = 1$ , o desconectados,  $A_{ij} = 0$ . Para el caso de 6 nodos, las 52 configuraciones estudiadas se construyeron partiendo de una red completa ( $A_{ij} = 1 - \delta_{i,j} ; \forall i, j$ ), para eliminar

enlaces progresivamente hasta obtener la red anillo ( $A_{ij} = \delta_{i,j=i\pm 1}$ ). Este proceso de “podado” de enlaces se realizó descartando las configuraciones simétricas, es decir, aquellas que se pueden obtener reetiquetando los nodos. La fig. 4.1 describe este proceso, partiendo de la red completa de 6 nodos (panel (a)), que presenta 15 enlaces, pasando por un caso intermedio (panel (b)), con 8 enlaces, para terminar en el anillo (panel (c)), que tiene 6 enlaces.



**Figura 4.1: Proceso de “podado” de enlaces.** Partiendo de la red completa (a), hasta el anillo (c) se pasa por todos los casos intermedios y descartando únicamente las configuraciones simétricas, es decir, aquellas que se pueden obtener reetiquetando los nodos. Se indican diferentes colores según el grado del nodo.

Como se mencionó, para encontrar configuraciones que optimicen la generación y transmisión de información, se utilizó la densidad de enlaces,  $\rho$  (ec. (2.12)), como variable de clasificación. El caso trivial,  $\rho = 1$ , corresponde a la red completa.



**Figura 4.2: Dos configuraciones de 12 nodos de las 9 estudiadas.** En (a) se muestra una red regular de grado  $d = 6$ . En (b), se muestra un caso de red no regular, correspondiente al anillo reforzado de grado 6 con 3 enlaces adicionales ( $\rho \simeq 0.59$ ). Se indican diferentes colores según el grado de cada nodo.

Las configuraciones de 12 nodos analizadas incluyen al anillo ( $\rho \simeq 0.18$ ), y las configuraciones regulares de grados 4, 6, 8, 10 y 11 (o completa,  $\rho = 1$ ). Además de los casos regulares, se estudian 3 casos de redes no regulares: el

anillo con 3 enlaces adicionales ( $\rho \simeq 0.23$ ), el anillo reforzado con 3 enlaces adicionales ( $\rho \simeq 0.41$ ) y el anillo reforzado de grado 6 con 3 enlaces adicionales ( $\rho \simeq 0.59$ ). La fig. 4.2(a) muestra un caso de red regular de grado  $d = 6$ , mientras que el panel 4.2(b) muestra la correspondiente red no regular que se obtuvo al agregar 3 enlaces extra a la anterior.

#### 4.2.2. Configuraciones para el estudio de la distancia resistiva y la centralidad

Para determinar experimentalmente la distancia resistiva y compararla con el valor aproximado que se ha derivado, así como para estudiar la centralidad del vector propio, se construyeron redes de resistencias de tamaño pequeño en estructuras casi anulares con  $N = 6, 12, 18$  y  $24$  nodos [86, 87]. Estas matrices de adyacencia son tales que,  $A(i, j) = (1.00 \pm 0.01) k\Omega$  [Ohm] (1 % de incertidumbre según el fabricante) si  $j = i \pm 1$  (módulo  $N$ ) y 0 de lo contrario, con un enlace adicional (resistencia) que conecta los nodos 1 y 3 que rompe la simetría del anillo, es decir,  $A(1, 3) = (1.00 \pm 0.01) k\Omega = A(3, 1)$ . Al agregar este enlace se evitan los valores propios degenerados que siempre están presentes en las redes circulantes [54].

Se empleó un óhmetro con una resolución de  $\approx 1 \Omega$  ( $\approx 0.1 \%$ ), para medir  $\rho_{equiv}$  entre todos los pares de nodos. Por otro lado, se definieron circuitos sintéticos para los cálculos teóricos asumiendo resistencias idénticas de  $1 k\Omega$  con una incertidumbre de 1 % para todos los enlaces (similar a la incertidumbre de 1 % dada por el fabricante), donde se calculó la incertidumbre en  $\rho_{theo}(i, j)$  por propagación de errores (lo que resulta en una incertidumbre de 1 % para todos los valores de  $\rho_{theo}(i, j)$ ).

Además, se consideraron las redes corticales del conjunto de datos de conectividad cerebral [88], que contienen pesos (la simetría es impuesta por  $\mathbf{A} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)/2$ ) y matrices de adyacencia no ponderadas.

Para el análisis también se generaron redes aleatorias, utilizando los modelos:

1. Barabási-Albert [89] para redes sin escala,
2. Erdős-Rényi [90] para redes homogéneamente aleatorias, y
3. Watts-Strogatz [91] para redes de pequeño mundo [92].

### 4.3. Detalles de la simulación numérica de mapas acoplados

Los resultados numéricos de mapas logísticos acoplados, se obtuvieron a partir de  $5 \times 10^5$  iteraciones, desechándose las primeras  $2.5 \times 10^5$ , para descartar el régimen transitorio. Al implementar numéricamente un conjunto de mapas *cuasi-idénticos*, las heterogeneidades experimentales se incorporaron a la simulación. En ese sentido, respecto al vector  $r = \{r_1, r_2, \dots, r_N\}$ , formado por los parámetros de los  $N$  mapas, se procedió de 3 maneras diferentes:

1. tomando para los mapas simulados los  $N$  valores  $r_i$  inferidos de la implementación electrónica (fig. 5.3 (b)),
2. generando aleatoriamente un vector  $r$ , dentro del rango de valores de los parámetros experimentales inferidos, y
3. considerando  $r_i = r_1$  idéntico para todos los mapas.

Las simulaciones se realizaron tomando como condición inicial de cada nueva trayectoria el último punto de la trayectoria anterior, que es el modo en que se logró reproducir satisfactoriamente las dinámicas observadas en la implementación electrónica para el mapa aislado.

# Capítulo 5

## Resultados

En este capítulo se presentan los resultados experimentales y simulados junto a la correspondiente discusión. El capítulo está estructurado en cuatro secciones. En la primera se analiza la dinámica aislada de los mapas logísticos implementados electrónicamente, observando su respuesta en términos de los exponentes de Lyapunov y la constante de Feigenbaum. Se muestran también los valores de los parámetros de los mapas obtenidos mediante inferencia de las series temporales.

La segunda sección está dedicada a un análisis pormenorizado de las dinámicas colectivas para mapas acoplados. Se comienza discutiendo las contribuciones y limitaciones de la simulación numérica. Luego se estudia cómo las diferentes topologías y rangos en la intensidad de acoplamiento favorecen la generación y transmisión de información. Allí se analizan los resultados obtenidos para 52 configuraciones de 6 nodos y 9 configuraciones de 12 nodos. Se reportan regiones de máxima generación de información, donde, a pesar de existir un acoplamiento alto entre los nodos, la información mutua se minimiza.

En la tercera sección se presentan resultados de inferencia de los enlaces de una red y el análisis de qué características topológicas y dinámicas de los mapas acoplados la favorecen. Para tal fin se toma como medida de semejanza entre nodos la información mutua, ec. (3.4). La interacción entre la topología de la red y las dinámicas de los mapas acoplados juega un papel crucial en la inferencia de enlaces.

La última sección describe técnicas para la caracterización topológica de redes. Allí se deriva un valor aproximado para la distancia resistiva y se muestran los resultados obtenidos al aplicarla en diferentes casos de redes sintéticas

y del mundo real. También se encuentra exactamente la medida de centralidad del vector propio, que es una forma de cuantificar el estatus de un nodo en la red.

Con el propósito de recopilar los datos presentes en las diversas secciones de este estudio, se llevaron a cabo más de 60 realizaciones, abarcando una amplia variedad de casos específicos. Este extenso proceso experimental confirmó que las observaciones obtenidas corresponden a fenómenos robustos. Se muestran, por lo tanto, únicamente algunos resultados representativos de los diferentes datos recopilados.

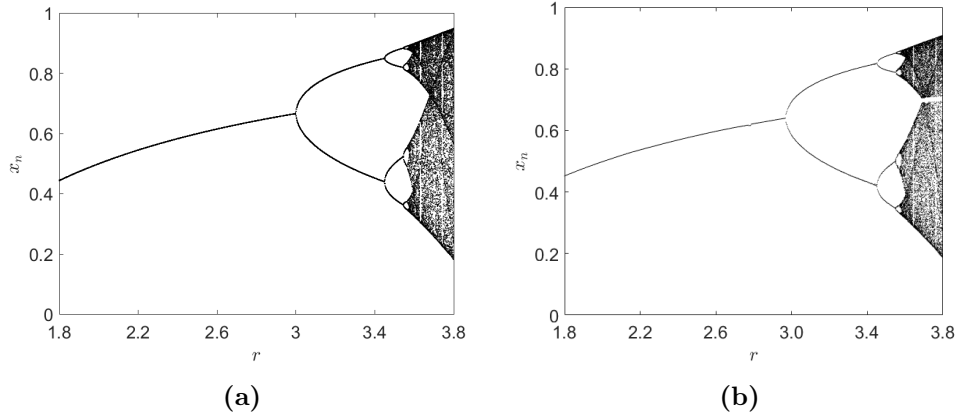
## 5.1. Análisis de la dinámica aislada de mapas logísticos experimentales

### 5.1.1. Diagrama de bifurcaciones

Para el estudio experimental de un mapa logístico aislado se realizó el montaje que se describe en [59], registrando las series temporales ( $V_{out} = f(t)$ ) correspondientes a diferentes valores del parámetro  $r$ . En la fig. 5.1 se muestra el diagrama de bifurcaciones, donde el panel izquierdo corresponde a la simulación numérica y el panel derecho a los resultados experimentales. El diagrama pone de manifiesto las diferentes dinámicas que experimenta el sistema según el valor del parámetro  $r$ , y cómo el sistema experimental aislado responde de manera muy similar al numérico.

Con  $r < 3.00$  se observa que el sistema se encuentra en la cuenca de atracción de un punto fijo, lo que se identifica en el diagrama como una línea de puntos. Esto se corresponde con la predicción de la ec. (2.2), para la cual en el intervalo  $1 < r < 3$  el mapa tiene un punto fijo estable en  $x_2^* = \frac{r-1}{r}$  y la dinámica mostrada en la fig. 2.1(a).

En  $r = 3.00$  se produce la primera bifurcación, y el sistema comienza a experimentar soluciones periódicas, las cuales oscilan entre dos valores, como se dedujo para la ec. (2.4) y se visualiza en la fig. 2.1(b). Al llegar a  $r \approx 3.45$ , se produce una bifurcación en cada rama del período 2, ingresando el sistema en un régimen de período 4. Cuando el parámetro supera ligeramente el valor 3.54 se aprecia un pequeño intervalo de período 8 y comienza una cascada de bifurcaciones que derivan en el ingreso al caos para  $r \approx 3.57$ , lo que en el dia-



**Figura 5.1: Diagrama de bifurcaciones para un mapa logístico en función del parámetro,  $r$ .** (a) Obtenido numéricamente y (b) Obtenido a partir de los datos experimentales. El parámetro se varió en el intervalo  $1.8 \leq r \leq 3.8$ , con incrementos  $\Delta r = 0.002$ .

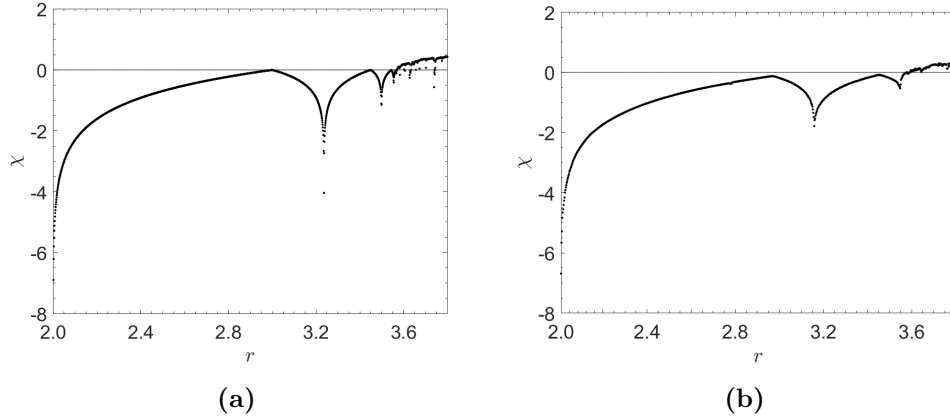
grama se observa como regiones donde los puntos se extienden verticalmente. Esta dinámica se corresponde con lo esperado teóricamente y presentado en la fig. 2.1(c).

### 5.1.2. Exponente de Lyapunov

Continuando con el análisis del comportamiento dinámico del mapa implementado electrónicamente, se comparan los exponentes de Lyapunov calculados a partir de la ec. (2.8) sobre las series temporales obtenidas numérica y experimentalmente. Se emplearon los últimos 256 puntos de cada serie temporal, para descartar el régimen transitorio, y se analizó el intervalo  $2 \leq r \leq 3.8$ , para evitar la saturación del multiplicador que se produce en  $r \approx 4$ , y que el ruido genere divergencias que puedan dañar los componentes electrónicos.

El análisis de los exponentes de Lyapunov es fundamental para evaluar la fiabilidad de la implementación electrónica en la reproducción del comportamiento del mapa logístico. La fig. 5.2 exhibe un acuerdo notable entre los datos numéricos, mostrados en el panel (a), y los experimentales, presentados en el panel (b). La comparación de los exponentes de Lyapunov proporciona una perspectiva profunda sobre la capacidad de la implementación para capturar las características dinámicas del sistema, destacando así la validez y coherencia de la representación electrónica con respecto al modelo teórico. Estos resultados acompañados del análisis del diagrama de bifurcaciones (fig. 5.1) refuerzan





**Figura 5.2:** Exponente de Lyapunov,  $\chi$ , en función del parámetro del mapa. (a) Determinado numéricamente y (b) obtenido a partir de los datos experimentales. Se muestra el intervalo  $2 \leq r \leq 3.8$ ; la recta horizontal permite identificar los cambios de signo de  $\chi$ .

la conclusión de que el montaje experimental replica de manera precisa y eficaz el comportamiento del mapa logístico.

### 5.1.3. Constante de Feigenbaum

Se determinó experimentalmente la constante de Feigenbaum,  $\delta$ , según la ec. (2.11) para cada uno de los 12 mapas a utilizar. Los resultados se presentan en la tabla 5.1, donde se muestra además su desviación respecto al valor teórico.

Mapa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\delta$	5.00	5.10	4.98	4.62	4.66	4.86	4.72	4.60	4.52	4.54	4.67	4.40
$\Delta\delta/\delta$	7 %	8 %	5 %	1 %	1 %	4 %	1 %	2 %	3 %	3 %	1 %	6 %

**Tabla 5.1:** Valores de la constante de Feigenbaum[47],  $\delta$ , obtenidos experimentalmente. Se infieren del diagrama de bifurcaciones de cada mapa y se muestran con su diferencia porcentual  $\Delta\delta/\delta$  al valor teórico  $\delta = 4.669 \dots$

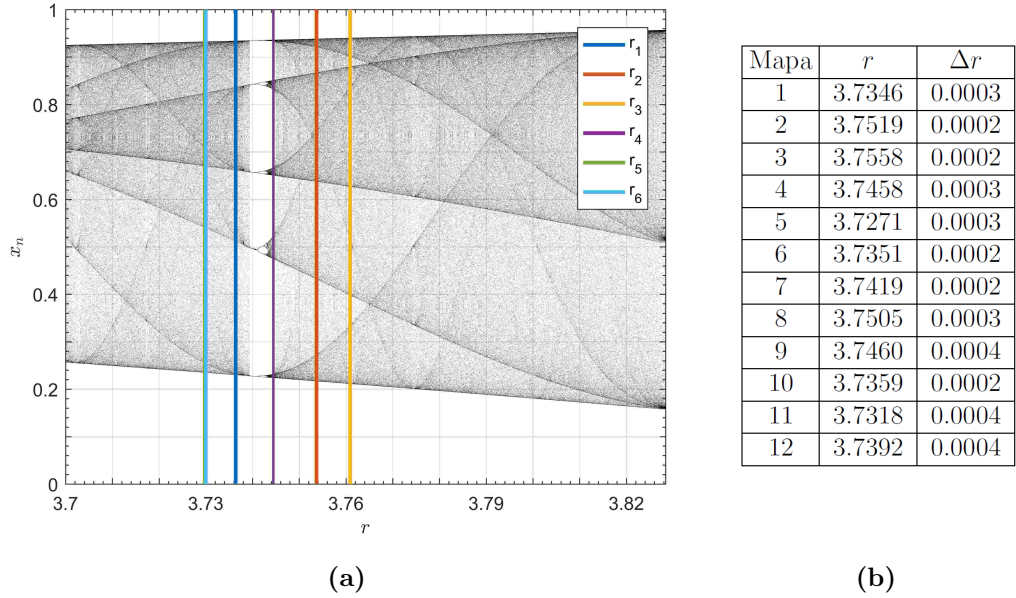
Se observa que en todos los mapas implementados, el porcentaje de discrepancia se mantiene por debajo del 9 %, representando una diferencia porcentual promedio de 3.5 %, lo que resalta la precisión de la implementación electrónica en relación al modelo teórico. Estos resultados respaldan la confiabilidad del modelo y la metodología experimental utilizada, fortaleciendo la validez de la implementación electrónica.

#### 5.1.4. Obtención experimental del parámetro de cada mapa

Se configuraron los mapas manualmente (i.e., ajustando los resistores variables) para que tengan parámetros (casi) idénticos,  $r_i \simeq r$ , en la región  $3.7 \leq r \leq 1 + \sqrt{8}$  con una precisión de  $\delta r = 0.003$ . Naturalmente, un desajuste mínimo en los componentes electrónicos conduce a parámetros heterogéneos. Por lo que, en lugar de considerar el valor del parámetro  $r_i$  de cada mapa como el que se obtiene de utilizar un óhmetro sobre la resistencia variable, aquí se adopta un enfoque que considere las heterogeneidades inducidas por los otros componentes del circuito. Específicamente, se determina el valor del parámetro de cada mapa, aplicando una regresión robusta entre la trayectoria desacoplada del sistema (con  $\varepsilon = 0$ ), representada por  $\{x_t^{(i)}\}_{t=0}^T$ , y la función logística evaluada de su trayectoria, es decir,  $\{x_t^{(i)}(1 - x_t^{(i)})\}_{t=0}^T$ . Esta relación refleja la estructura funcional subyacente del mapa logístico.

La estimación se lleva a cabo mediante un algoritmo de mínimos cuadrados ponderados iterativamente [93], que asigna pesos a cada observación con el fin de reducir la influencia de posibles valores atípicos y garantizar mayor estabilidad y precisión en la estimación de  $r_i$ . Se opta por este método frente a una regresión lineal ordinaria debido a que los datos obtenidos experimentalmente pueden contener ruido o estar afectados por pequeñas fluctuaciones no modeladas, introduciendo valores atípicos que pueden sesgar significativamente la estimación. La regresión robusta, en cambio, mitiga estos efectos al disminuir el impacto de observaciones que no se ajustan al comportamiento predominante del sistema, lo que resulta en parámetros más representativos de la dinámica real del sistema logístico implementado.

Los valores  $r_i$  resultantes para los primeros 6 mapas estudiados se representan en la fig. 5.3(a) sobre un diagrama de bifurcaciones del mapa logístico generado numéricamente, que muestra que cuando los mapas están desacoplados, todos los  $r_i$  están cerca ( $< 0.5\%$ ) de la ventana de período 5 estable ubicada en  $r \simeq 3.74$ . La fig. 5.3(b) muestra los valores obtenidos experimentalmente al inferir los parámetros de las dinámicas de los 12 mapas logísticos. Se muestra el parámetro de cada mapa aislado,  $r$ , con su incertidumbre,  $\Delta r$ .



**Figura 5.3: Parámetros experimentales de los mapas logísticos.** (a) Mediante líneas verticales de colores se muestran los parámetros inferidos,  $r_i$ , para 6 mapas logísticos de la implementación experimental (las líneas verde y cian se superponen porque  $r_5$  y  $r_6$  son casi idénticos). Los puntos representan el diagrama de bifurcaciones generado numéricamente para un mapa logístico en el rango  $3.7 \leq r \leq 1 + \sqrt{8}$  (inmediatamente antes de la ventana de período 3). (b) Valores observados experimentalmente para cada parámetro de mapa aislado,  $r$  (inferidos usando un método iterativo de mínimos cuadrados ponderados [93]), con su incertidumbre,  $\Delta r$ .

## 5.2. Análisis de la dinámica colectiva de mapas acoplados

### 5.2.1. Contribuciones y limitaciones de la simulación numérica

Los modelos en ciencias experimentales suelen construirse como una abstracción para facilitar la comprensión de ciertos aspectos de un determinado sistema. En ese proceso, parte de la riqueza del sistema en estudio se pierde, a veces de forma deliberada y otras veces no, en el proceso de creación del modelo. Así, al elaborar un modelo se capta lo esencial del sistema (para la física de interés), lo cual implica prescindir de algunos aspectos que no se

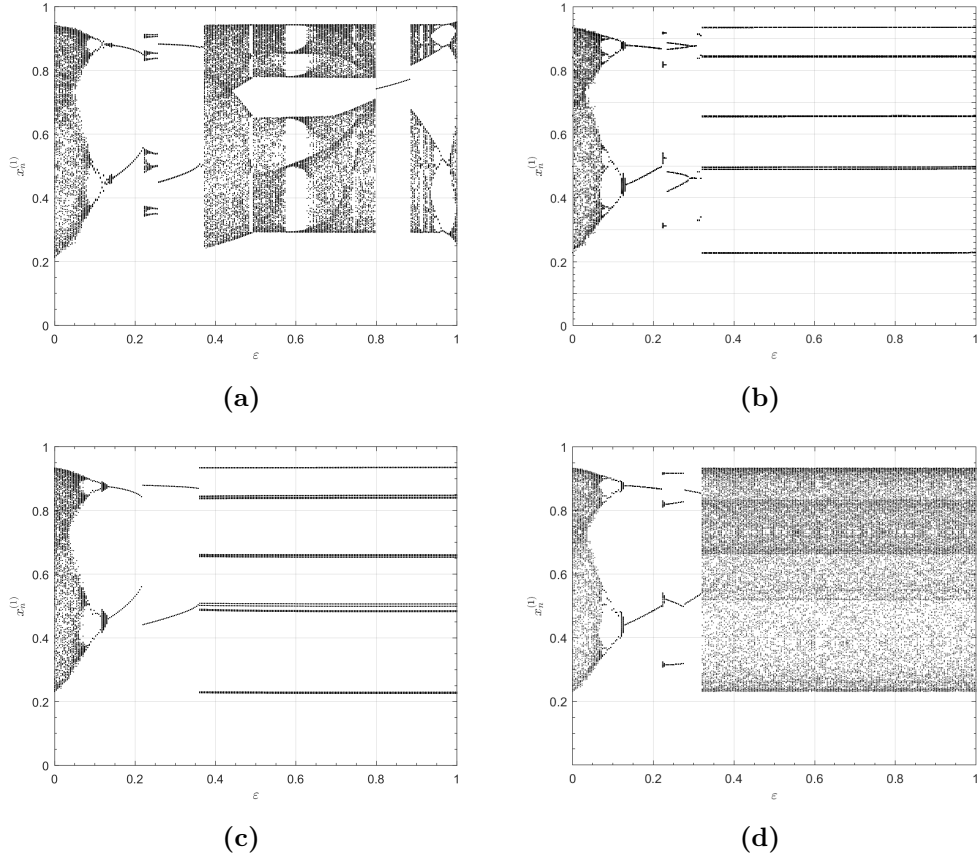
consideraron fundamentales [94]. Por su parte, la incorporación de datos experimentales aporta elementos para enriquecer el modelo. A pesar de que los modelos sintéticos de sistemas acoplados son útiles para comprender el comportamiento de un sistema real, la complejidad de las dinámicas observadas a nivel experimental normalmente supera la de los modelos sintéticos.

En diferentes etapas del trabajo experimental se realizaron simulaciones numéricas del modelo teórico, que son un aporte principalmente en tres aspectos: i) validar la implementación electrónica, ii) optimizar el trabajo experimental y iii) analizar y discutir las consecuencias de las simplificaciones en el modelo. En cuanto al primer aspecto, las simulaciones permiten contrastar el comportamiento esperado para el sistema aislado y su respuesta según el modelo con los datos experimentales procedentes de la implementación electrónica. Por otro lado, también acompañan el trabajo experimental haciéndolo más eficiente, ya que permiten identificar regiones en los valores de los parámetros donde centrar la recolección de datos. Por último, permiten destacar dinámicas que se observan en la implementación electrónica de mapas acoplados y que la simulación del modelo teórico no es capaz de captar. Las características de las simulaciones numéricas que se presentan se detallaron en la sección 4.3.

### Comparación entre resultados numéricos y experimentales

La fig. 5.4(a) muestra el diagrama de bifurcaciones de un mapa logístico obtenido experimentalmente al incrementar la intensidad de acoplamiento,  $\varepsilon$ , con sus vecinos en una red regular de 12 nodos y grado 8. Se observan una sucesión de regiones caóticas y cascadas de bifurcaciones inversas que recorren regiones periódicas de diferentes períodos. En el panel 5.4(b), por su parte, se exhibe el diagrama de bifurcaciones en función de  $\varepsilon$ , de un mapa logístico con sus vecinos obtenido numéricamente para el caso análogo, donde los  $r_i$  son los inferidos de la implementación electrónica. En la fig. 5.4(c) el diagrama de bifurcaciones se obtuvo al simular numéricamente las mismas condiciones, pero con los valores de  $r_i$  tomados aleatoriamente dentro del rango de la implementación electrónica. Por último, en la fig. 5.4(d) el diagrama de bifurcaciones se obtuvo numéricamente para la misma configuración, tomando parámetros  $r_i = r_1$  idénticos para los 12 mapas.

En el rango de menores acoplamientos,  $0 \leq \varepsilon < 0.20$ , los cuatro paneles de la fig. 5.4 exhiben situaciones similares, partiendo de una dinámica aperiódica

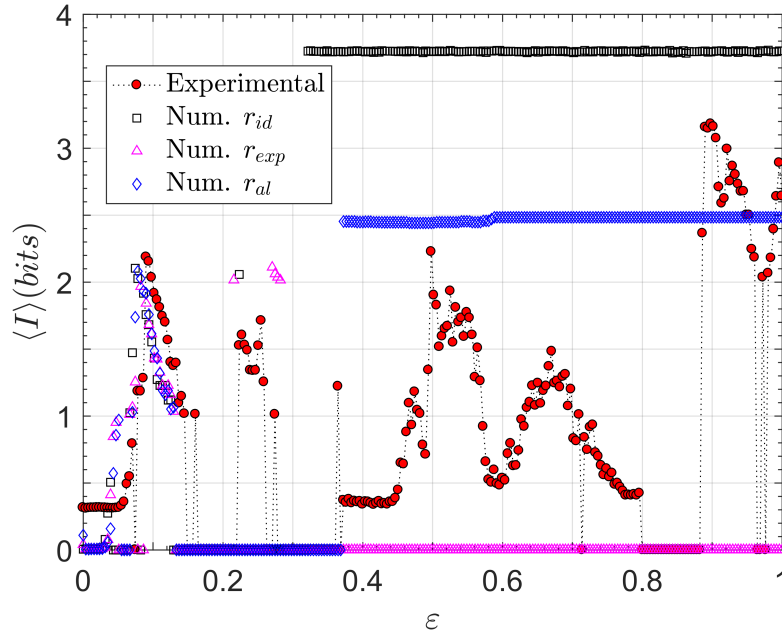


**Figura 5.4: Comparación entre resultados numéricos y experimentales.** Diagrama de bifurcaciones obtenido: (a) experimentalmente, (b) numéricamente, con los valores de  $r_i$  inferidos de la implementación electrónica, (c) numéricamente, con los valores de  $r_i$  tomados aleatoriamente dentro del rango de la implementación electrónica, y (d) numéricamente, tomando idénticos los 12 parámetros  $r_i = r_1, \forall i$ , en función de la intensidad de acoplamiento,  $\varepsilon$ , de un mapa logístico con sus vecinos en una red regular de 12 nodos y grado 8.

en  $\varepsilon = 0$  y llegando a una dinámica de período 2 en  $\varepsilon = 0.20$ . En  $\varepsilon \approx 0.22$  la simulación que considera los parámetros  $r_i$  de los mapas inferidos de la implementación experimental (panel (b)) logra reproducir la existencia de una nueva cascada inversa antes de establecerse en otra dinámica de período 2 que se observa claramente en los resultados experimentales (panel (a)). Las dos simulaciones que consideran heterogeneidades en los parámetros (paneles (b) y (c)) muestran que después que se alcanza un nivel de acoplamiento  $\varepsilon \gtrsim 0.35$  el sistema mantiene una dinámica periódica hasta  $\varepsilon = 1$ . Heterogeneidades inferiores al 0.8% en los valores de los parámetros  $r_i$  conducen a las diferencias mostradas entre los diagramas de bifurcaciones simulados. La simulación

numérica que considera parámetros idénticos (panel (d)), muestra que para acoplamientos  $\varepsilon \gtrsim 0.30$  el sistema adquiere una dinámica caótica. Ésta se mantiene hasta  $\varepsilon = 1$  en un estado de sincronización completa que es posible por la identidad de los parámetros.

### Análisis de la media de información mutua



**Figura 5.5: Comparación de los resultados experimentales y diferentes simulaciones numéricas a partir de la información mutua media  $\langle I \rangle(\varepsilon)$  (ec. (3.3)).** Resultados obtenidos experimentalmente (círculos rellenos), numéricamente, con los valores de  $r_i$  inferidos de la implementación electrónica (triángulos magenta), numéricamente, con los valores de  $r_i$  tomados aleatoriamente dentro del rango de la implementación electrónica (rombos azules), y numéricamente, tomando idénticos los 12 parámetros  $r_i = r_1, \forall i$  (cuadrados negros), en función de la intensidad de acoplamiento,  $\varepsilon$ , en una red regular de 12 nodos y grado 8 (se muestra la configuración en la fig. 5.4(c)).

Continuando con la comparación entre los resultados experimentales y las diferentes simulaciones numéricas, se analiza la transmisión promedio de información,  $\langle I \rangle$ , que permite cuantificar indirectamente el grado de sincronización entre los nodos. En la fig. 5.5 puede verse que para acoplamientos débiles, esto es  $0 \leq \varepsilon < 0.03$ , las tres simulaciones muestran un intercambio de información nulo ( $\langle I \rangle < 0.01$  bits), mientras que para el mismo rango de acoplamientos la

implementación experimental intercambia una pequeña cantidad de información ( $\langle I \rangle \approx 0.31$  bits). Al continuar incrementando el acoplamiento, se observa que en  $\varepsilon \approx 0.06$  las tres simulaciones muestran una información mutua nula,  $\langle I \rangle = 0$  bits, lo cual se corresponde con el ingreso del sistema a una dinámica periódica. En  $\varepsilon = 0.0902$  se alcanza el primer máximo en la información compartida en el sistema experimental, con  $\langle I \rangle = 2.187$  bits, superando a cualquiera de las simulaciones numéricas para acoplamientos  $\varepsilon < 0.30$ . A medida que se incrementa el acople, las discrepancias entre las simulaciones numéricas y la respuesta del sistema experimental se van haciendo más significativas. Por ejemplo, en  $\varepsilon = 0.40$  la información compartida en promedio por el sistema experimental es comparable a la observada para acoplamientos débiles ( $\langle I \rangle \approx 0.30$ ) bits, mientras que dos de las simulaciones numéricas ya están alcanzando una meseta estable de máxima transmisión de información. Sin embargo, los triángulos magenta describen la dinámica que se observa en la fig. 5.4(b), que por ser periódica no genera información. Continuando el análisis para acoplamientos fuertes, se puede observar que la simulación que toma  $N$  valores aleatorios de los parámetros dentro del rango del sistema experimental (rombos azules) logra compartir en promedio una significativa cantidad de información ( $\langle I \rangle \approx 2.484$  bits). Sin embargo, se maximiza la información mutua media al simular la dinámica de mapas idénticos (cuadrados negros), que se corresponde con la solución caótica que se muestra en el panel 5.4(d), donde  $\langle I \rangle > 3.7 \approx \log_2(13)$  bits. Eso podría interpretarse como que las órbitas caóticas de los mapas tienen una distribución aproximadamente uniforme que abarca 13 bins de los 20 empleados para cubrir el intervalo  $[0, 1]$  (fig. 3.1).

Por último, se observa en la fig. 5.5 que en el intervalo  $0.89 < \varepsilon < 0.95$ , el valor de la información intercambiada en promedio en el sistema experimental (círculos rojos) supera el obtenido numéricamente para los casos heterogéneos. Para la simulación con parámetros idénticos, el sistema alcanza sincronización completa (a partir de un acople  $\varepsilon \approx 0.32$ ), por lo que la información mutua se maximiza, es decir, es una cota superior para los otros casos.

En el sistema experimental, las heterogeneidades se manifiestan de maneras que los modelos numéricos propuestos no logran predecir completamente. Por un lado, se hace evidente que el modelado del conjunto de los parámetros de los mapas es al menos incompleto y ha quedado de manifiesto al comparar las diferentes simulaciones (figs. 5.4 y 5.5) con los resultados experimentales, mostrando los efectos de cada simplificación. Por otro lado, las heterogeneidades

reales contribuyen a un aumento en la diversidad dinámica del sistema y, por lo tanto, facilitan en ciertos casos un mayor intercambio de información. Estas diferencias pueden atribuirse principalmente a las pequeñas variaciones en los pesos de los enlaces, que son inherentemente incontrolables en la implementación y hacen que los acoplamientos sean heterogéneos. De menor importancia, el ruido electrónico en el sistema acoplado puede ser otro factor que afecta las dinámicas emergentes. Este ruido puede actuar como una fuente de diversidad en las dinámicas colectivas, promoviendo la aparición de nuevas correlaciones y patrones de sincronización y así aumentar el valor de la información intercambiada, como se observa para el intervalo  $0.89 < \varepsilon < 0.95$  en la fig. 5.5.

Expuestas las diferencias entre las observaciones experimentales y las numéricas en el estudio de dinámicas acopladas, de aquí en adelante el trabajo se centra en los resultados experimentales.

### 5.2.2. Generación y transmisión de información

En esta sección se cuantifica la información generada por cada mapa (entropía) y la información compartida entre ellos (información mutua), para profundizar el análisis de la dinámica de redes de mapas caóticos acoplado. Se introduce una entropía conjunta condicional que permite estudiar la generación de información en función de la transmisión global de la red. Este enfoque busca identificar el papel de la topología y el acoplamiento en fenómenos como la sincronización caótica y el caos espacio-temporal.

#### 5.2.2.1. Entropía conjunta condicional

Para analizar la generación de información por mapa,  $H_\varepsilon[x^{(i)}]$ , resulta estratégico condicionar este análisis a la transmisión de información global en la red. Con esto se busca, en particular, diferenciar entre escenarios donde la transmisión de información es significativa o despreciable, cuantificada por la información mutua promediada en la red,  $\langle I \rangle$  (ec. (3.3)), y un umbral arbitrario,  $\lambda$ . Para ello, en esta tesis se introduce una entropía condicional del  $i$ -ésimo mapa,  $CH_i|_{\leq \lambda}$ , que permite capturar la información generada por un mapa en función de si la transmisión de información global del sistema supera o no el umbral predefinido,  $\lambda$ . Esta nueva magnitud resulta esencial para describir el papel de la generación de información en distintos regímenes de transmisión de información en la red.



Para formalizar, primero se introducen los siguientes conjuntos:

- $\mathcal{E}_{>\lambda} = \{\varepsilon \in [0, 1] : \langle I \rangle_\varepsilon > \lambda\}$ , el conjunto de todas las intensidades de acoplamiento donde la información mutua promediada en la red es mayor que un umbral  $\lambda = 2.7$  bits, y
- $\mathcal{E}_{<\lambda} = \{\varepsilon \in [0, 1] : \langle I \rangle_\varepsilon < \lambda\}$ , el conjunto de todas las intensidades de acoplamiento donde la información mutua promediada en la red es menor que un umbral de  $\lambda = 0.5$  bits.

Ahora se está en condiciones de definir [32] la entropía condicional del  $i$ -ésimo mapa

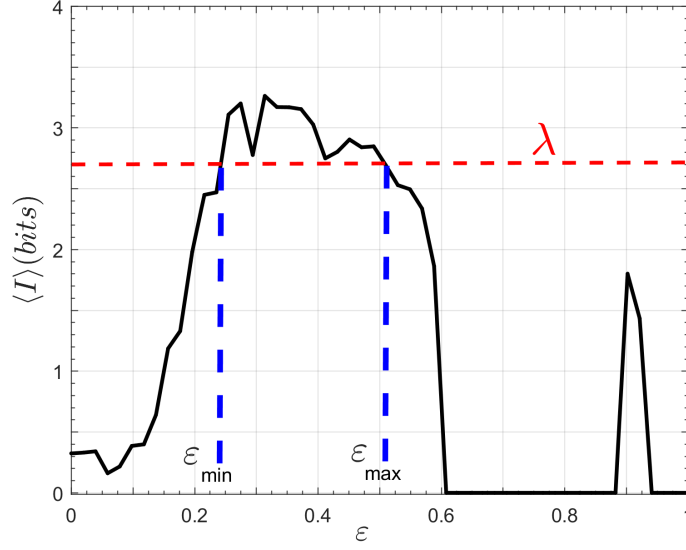
$$CH_i|_{\leq \lambda} = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}_{\leq \lambda}} H_\varepsilon[x^{(i)}] \Delta\varepsilon, \quad (5.1)$$

es decir,  $CH_i|_{<0.5}$  y  $CH_i|_{>2.7}$ , donde  $\Delta\varepsilon = 1/256$  es el incremento experimental de la intensidad de acoplamiento.

En la ec. (5.1), la suma está condicionada a las regiones dinámicas donde  $\langle I \rangle$  es menor ( $<$ ) o mayor ( $>$ ) que  $\lambda$  (bits). En concreto, para encontrar  $CH_i|_{\leq \lambda}$ , se analiza cómo cambia  $\langle I \rangle$  para todos los  $\varepsilon \in [0, 1]$ , se selecciona el intervalo más grande de intensidades de acoplamiento donde  $\langle I \rangle \leq \lambda$  (es decir,  $[\varepsilon_{\min}(\lambda), \varepsilon_{\max}(\lambda)]_{\leq} \subseteq [0, 1]$ ), y luego se realiza la suma dentro del intervalo  $[\varepsilon_{\min}(\lambda), \varepsilon_{\max}(\lambda)]_{\leq}$ , que además depende de la configuración de acoplamiento (la red). La fig. 5.6 ejemplifica el procedimiento para el caso  $\mathcal{E}_{>\lambda}$ .

Se fija el umbral para la transmisión de información significativa  $\langle I \rangle_\varepsilon > \lambda = 2.7$  bits, porque esto explicaría las órbitas que se extienden (uniformemente) más allá de 6 bins en la discretización propuesta para el intervalo del mapa. De manera similar, se fija el umbral para la transmisión de información despreciable,  $0 < \langle I \rangle_\varepsilon < \lambda = 0.5$  bits, porque este valor permite diferenciar y descartar las órbitas periódicas (donde  $\langle I \rangle_\varepsilon = 0$  bits).

La entropía condicional que se introdujo en la ec. (5.1) permite cuantificar la información generada por cada mapa cuando el sistema acoplado maximiza ( $CH_i|_{>\lambda}$ ) o minimiza ( $CH_i|_{<\lambda}$ ) la información que se transmite (ec. (3.3)). Estos dos extremos corresponden al estudio de la aparición de la sincronización caótica o la dependencia del caos espacio-temporal, respectivamente, con la configuración de acoplamiento. Llevar a cabo este análisis para el sistema acoplado como un todo, exigiría encontrar la entropía conjunta condicional del



**Figura 5.6: Procedimiento para identificar el intervalo de acoplamientos donde se maximiza la transmisión de información.** Se selecciona la región dinámica con el mayor rango  $[\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}] \subseteq [0, 1]$  donde  $\langle I \rangle > \lambda$ , es decir,  $\mathcal{E}_{>\lambda} = \{\varepsilon \in [0, 1] : \langle I \rangle_{\varepsilon} > \lambda\}$

sistema. En su lugar, se utiliza su límite superior, que se define [32]

$$CJH \Big|_{\leq \lambda} \leq \sum_{i=1}^N CH_i \Big|_{\leq \lambda}, \quad (5.2)$$

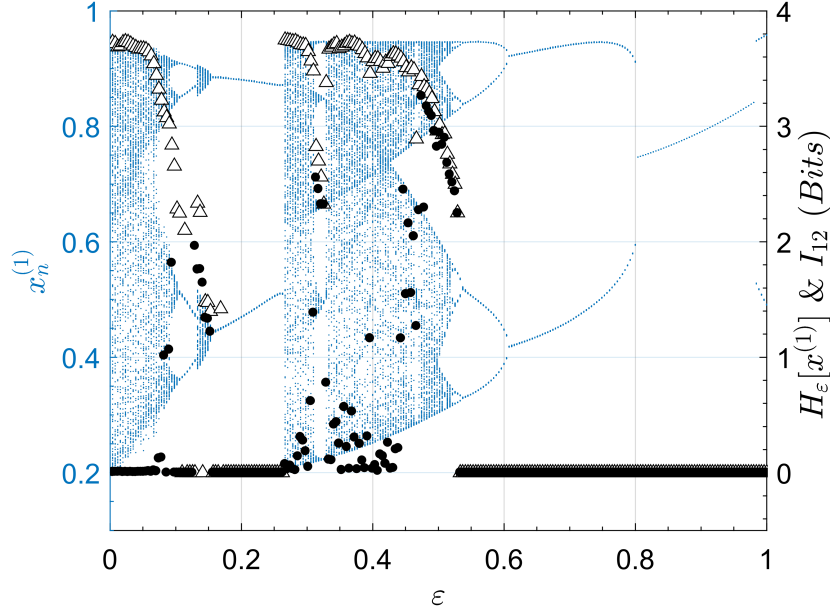
donde el límite proviene de la regla de la cadena de entropías condicionales [70, Ch. 2, p. 13-37], que establece que  $H[X_1, \dots, X_N|Y] \leq \sum_i H[X_i|Y]$  para  $N$  variables aleatorias  $X_i$  condicionadas a otra variable aleatoria  $Y$ .

Valores positivos significativos de  $CH_i$  (ec. (5.1)) o  $CJH$  (ec. (5.2)) implican que existe un rango de acoplamiento para el cual la red considerada tiene circuitos que además de generar información, la transmiten en grandes cantidades. Como tal, estos comportamientos de alta información (para  $\langle I \rangle > \lambda$ ) o baja información (para  $\langle I \rangle < \lambda$ ) son robustos a las variaciones o perturbaciones del acoplamiento.

### 5.2.2.2. Generación y transmisión de información para todos los acoplamientos

Se comienza analizando la relación entre la información generada y transmitida y el comportamiento dinámico de cada mapa. Para ello, se estudia cómo

la entropía (ec. (3.1)) y la información mutua (ec. (3.4)) se ven afectadas por la intensidad de acoplamiento,  $\varepsilon$ , la cual varía de 0 (dinámica aislada) a 1 (acoplamiento máximo). Este análisis se realiza para todas las configuraciones de acoplamiento. Un ejemplo de este estudio, para un mapa en una configuración de red completa se ilustra en la fig. 5.7.



**Figura 5.7: Diagrama de bifurcaciones experimental, entropía de Shannon e información mutua de un mapa en una red completa de 6 nodos.** El diagrama de bifurcaciones muestra el mapa 1 de la fig. 5.3,  $\{x_t^{(1)}\}$  (puntos), a medida que aumenta la intensidad de acoplamiento,  $\varepsilon$ ; simultáneamente a su entropía,  $H_1(\varepsilon)$  (triángulos), e información mutua,  $I_{12}(\varepsilon)$  (círculos rellenos).

Se muestra el diagrama de bifurcaciones experimental de un mapa en una red completa de 6 nodos, la entropía de Shannon,  $H_1$ , y la información que intercambia con un vecino ( $I_{12}$ ). Para la dinámica desacoplada y débilmente acoplada,  $H_1(0 \leq \varepsilon \lesssim 0.071) \gtrsim 3.44\text{bits} \approx \log_2(11)$ . Esto corresponde a tener órbitas caóticas con una distribución aproximadamente uniforme que involucra 11 bins (de los 20 que dividen el intervalo unitario). A medida que las órbitas caóticas se acercan a una cascada que reduce el período a la mitad, la entropía disminuye y se hace nula cuando el sistema alcanza órbitas periódicas, como la de período 4 presente en el intervalo  $0.098 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.129$  y luego una gran ventana de período 2 con  $0.157 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.263$ . Después de esa ventana de período 2, para  $0.265 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.310$ , el mapa se vuelve tan caótico como en la región de acoplamiento débil,  $0 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.071$ . A medida que la intensidad de acoplamiento

aumenta, pero antes de que comience la siguiente cascada de reducción de período en  $\varepsilon \simeq 0.533$ , hay una ventana de período 5 en  $\varepsilon \simeq 0.326$  y una ventana de período 6 en  $\varepsilon \simeq 0.467$ . Hay un punto crítico en  $\varepsilon_c \simeq 0.432$ , donde la órbita caótica se divide en dos regiones desconectadas. En general, para acoplamientos altos, estas ventanas periódicas y las cascadas de reducción de período a la mitad son comportamientos sorprendentes, ya que no se observan en ninguna simulación numérica. En esta configuración de acoplamiento, a partir de  $\varepsilon \approx 0.265$  los mapas simulados permanecen en régimen caótico.

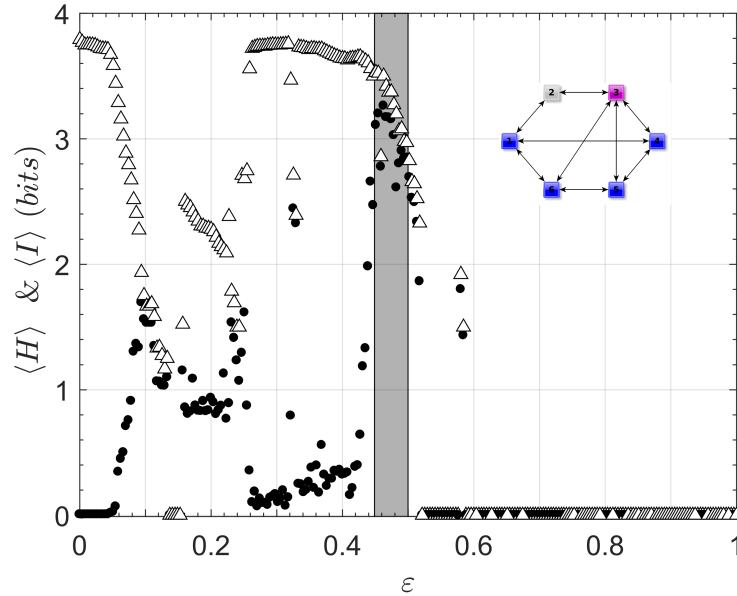
En la fig. 5.7 puede verse también cómo la información mutua entre los mapas 1 y 2 (círculos rellenos),  $I_{12}$ , cambia a medida que el mapa se bifurca. En  $\varepsilon = 0$ , los mapas están desacoplados siendo  $I_{12} \simeq 0$  bits, lo que se mantiene durante el régimen débilmente acoplado hasta  $\varepsilon \simeq 0.071$  ( $I_{12}(0 \leq \varepsilon \lesssim 0.071) \leq 10^{-2}$ ). A medida que el mapa entra en la nueva región caótica (comenzando en  $\varepsilon = 0.265$ ), la información mutua toma valores cercanos al régimen desacoplado, excepto en proximidades de las ventanas de período 5 y 6, donde el sistema se aproxima a una sincronización completa y  $I_{12} \simeq H_1$ . Se observa que hay una región que aparece antes de la cascada de reducción a la mitad del período en  $0.475 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.514$  donde hay una sincronización caótica. Debido a la dinámica sincronizada de los mapas, la información mutua se maximiza ( $I_{12} \simeq H_1$ ), y dado que están en una órbita caótica ( $H_i \gtrsim 2.7$  bits), la entropía también es significativa, lo que implica que ésta es una región con importante transmisión y generación de información.

Del análisis de bifurcaciones de las 52 configuraciones de 6 mapas logísticos acoplados, así como de las 9 configuraciones de 12 mapas, pueden destacarse dos regiones dinámicas relevantes: una, que maximiza simultáneamente la generación y transmisión de información, y otra que la precede, que maximiza la generación de información casi sin transmisión, aunque hay un fuerte acoplamiento. En el ejemplo de la fig. 5.7, estos comportamientos se pueden ver en  $0.475 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.514$  y  $0.265 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.31 \cup 0.33 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.439$ , correspondientes respectivamente al surgimiento de sincronización caótica (es decir, patrones espacialmente uniformes que evolucionan caóticamente) y caos sin correlaciones entre mapas (caos espacio-temporal).

### 5.2.2.3. Regiones donde se maximiza la generación y transmisión de información

En esta sección, se analiza la relación entre la generación y transmisión simultánea de información y la configuración del sistema, es decir, su topología. Este análisis se basa en el límite superior para la entropía conjunta condicional (ec. (5.2)). Para ello se establece un umbral,  $\lambda$ , utilizando la transmisión promedio de información de cada configuración,  $\langle I \rangle$  (que cuantifica indirectamente el grado de sincronía). Luego se calcula la entropía condicional (ec. (5.1)) generada en el rango de acoplamiento correspondiente,  $CH_i|_{>\lambda}$  (que cuantifica indirectamente el nivel de caos).

Para las 52 configuraciones se establece el límite  $\langle I \rangle > \lambda = 2.7$  bits, que supera los bits que se transmitirían mediante órbitas caóticas que se extiendan (uniformemente) más allá de 6 bins en la discretización propuesta para el intervalo del mapa. Luego, para cada topología, se obtiene el rango de intensidades de acoplamiento  $[\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}]$  donde se cumple la desigualdad  $\langle I \rangle > 2.7$  bits, obteniéndose  $CH_i|_{>\lambda}$  (ec. (5.1)) para cada mapa. Un ejemplo de este método



**Figura 5.8: Entropía promediada en la red e información mutua para 6 circuitos en función de la intensidad de acoplamiento,  $\varepsilon$ .** La entropía promediada para la configuración,  $\langle H \rangle$ , y la información mutua,  $\langle I \rangle$ , en función de  $\varepsilon$  se muestran con triángulos vacíos y círculos rellenos, respectivamente. La configuración de acoplamiento se muestra en la esquina superior derecha y el rectángulo sombreado en gris muestra dónde  $\langle I \rangle > 2.7$  bits.

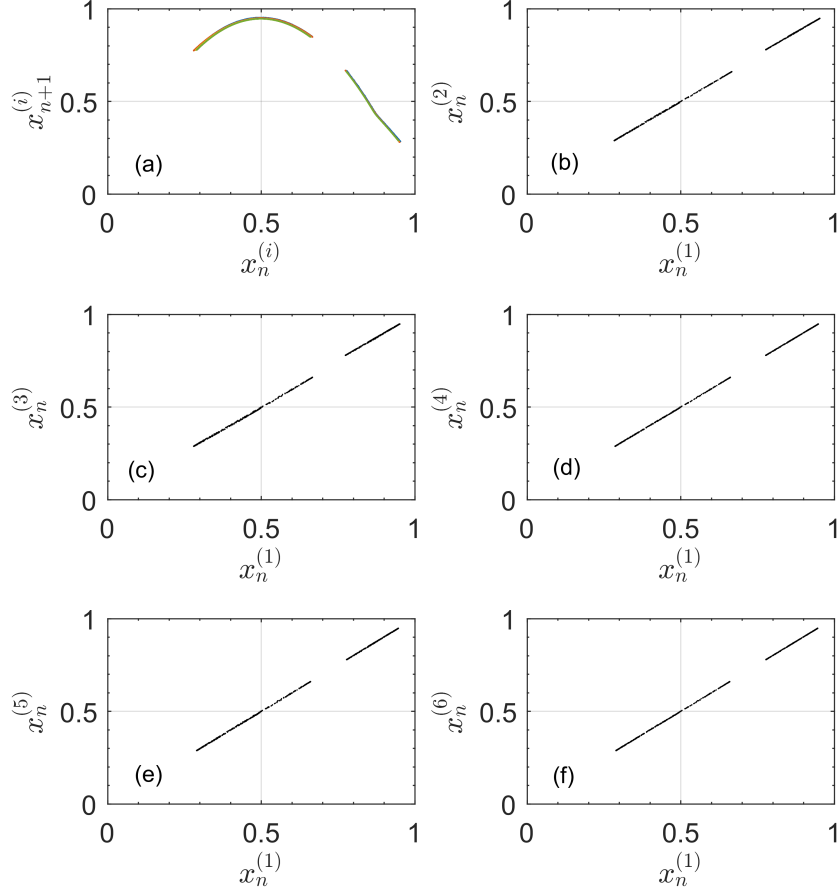
do para una configuración específica se observa en la fig. 5.8, donde  $\langle I \rangle$  se muestra para todos los valores de  $\varepsilon$  y un área sombreada resalta el rango de acoplamiento donde  $\langle I \rangle > 2.7$  bits, que es  $[\varepsilon_{\text{mín}}, \varepsilon_{\text{máx}}]_> = [0.449, 0.500]_>$ . Este rango es usado para realizar la suma de la entropía condicional de cada mapa,  $CH_i|_{>2.7}$  (ec. (5.1)), obteniéndose el límite superior para la entropía conjunta condicional de la configuración:  $\sum_{i=1}^N CH_i|_{>2.7}$  (ec. (5.2)).

En el máximo  $\langle I \rangle$  de la fig. 5.8 (donde  $\varepsilon \simeq 0.463$ ), los mapas están en una sincronización caótica casi completa (es decir,  $x_t^{(i)} \simeq x_t, \forall i$ ), que corresponde a maximizar simultáneamente la generación y transmisión de información. Este régimen dinámico puede corroborarse mediante la proyección del espacio de estados que se muestra en la fig. 5.9. En el panel (a) se representan las órbitas superpuestas de los 6 mapas, donde se observa que el atractor tiene 2 ramas densas que cubren partes de la parábola logística e implican órbitas caóticas. Los paneles restantes (5.9(b)-(f)) muestran las órbitas de cada uno de los mapas respecto al mapa 1. Se observa que todas las curvas  $x_t^{(i)} = f(x_t^{(1)})$  (con  $i = 2, \dots, 6$ ) se encuentran sobre la diagonal, lo que implica un estado casi completamente sincrónico.

Para la configuración y la intensidad de acoplamiento en la fig. 5.9, se obtuvo que la entropía media de los mapas es  $\langle H \rangle = (3.50 \pm 0.06)$  bits. Se sabe también, por la fig. 5.8, que esta configuración contiene  $\langle I \rangle > 2.7$  bits cuando  $\varepsilon \in [0.449, 0.500]_>$ . En consecuencia, puede obtenerse una estimación directa del límite superior de la entropía condicional del sistema de la siguiente manera:  $\sum_{i=1}^N CH_i|_{>\lambda} \simeq 6 \times \langle CH|_{>2.7} \rangle \simeq 6 \times \langle H \rangle \times (\varepsilon_{\text{máx}} - \varepsilon_{\text{mín}}) = 6 \times 3.50 \times (0.500 - 0.449) = 1.07$  bits. Esta estimación se aproxima al valor experimental obtenido, que es  $\sum_{i=1}^N CH_i|_{>2.7} \simeq 0.893$  bits (fig. 5.10). Es importante destacar que esta configuración alcanza su límite superior con una densidad de enlaces de  $\rho = 0.6$ , que es una de las densidades de enlace más pequeñas que se pueden lograr en una topología de 6 mapas.

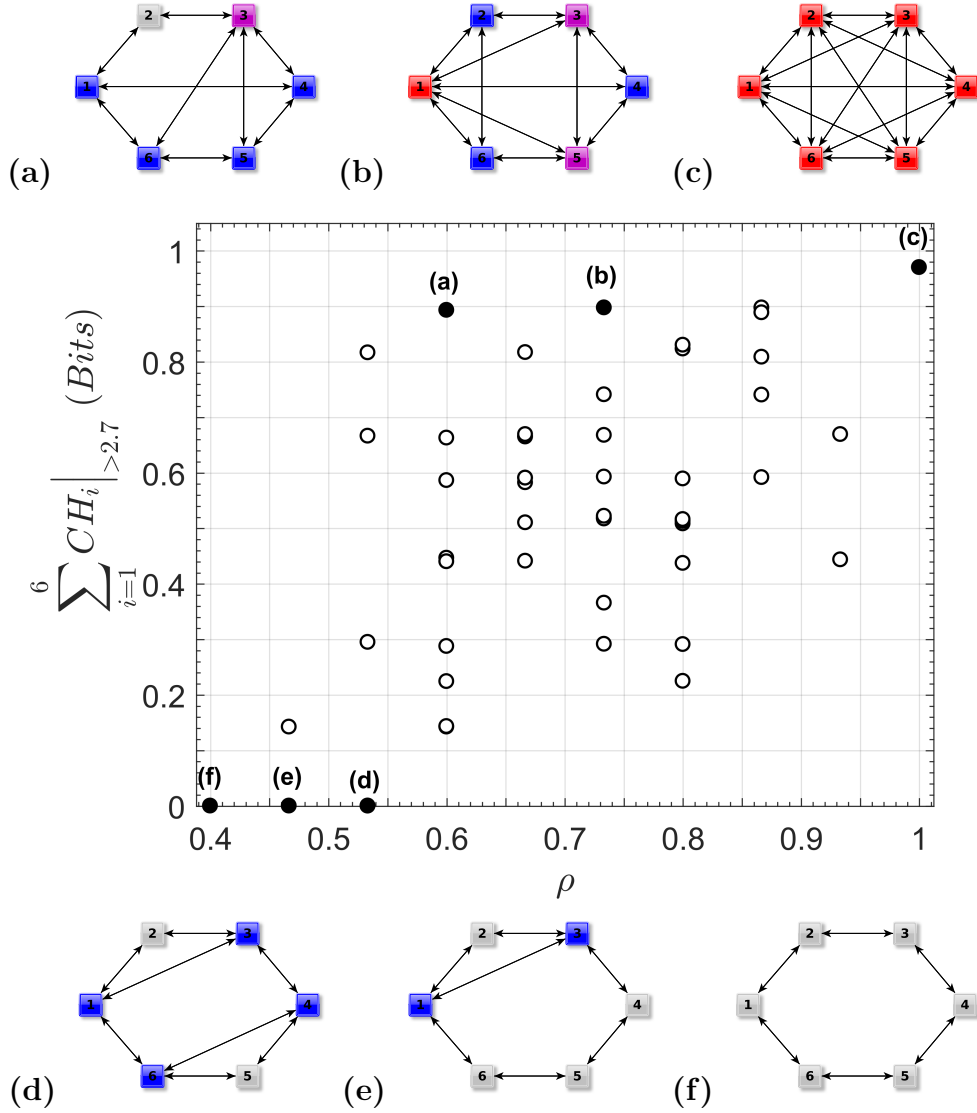
Todos los límites superiores para la entropía conjunta condicional,  $\sum_{i=1}^N CH_i|_{>2.7}$ , en las 52 configuraciones de 6 mapas acoplados se muestran en la fig. 5.10 en función de la densidad de enlaces de la configuración,  $\rho$ . La configuración analizada en las figs. 5.8 y 5.9 se resalta en la fig. 5.10(a) junto con los paneles 5.10(b) y 5.10(c) que son otras 2 configuraciones que también logran un significativo  $\sum_{i=1}^N CH_i|_{>2.7}$ , con diferentes densidades de enlaces.

Los valores resaltados en la fig. 5.10 señalan configuraciones particulares donde  $\sum_{i=1}^N CH_i|_{>2.7} \gtrsim 0.9$  bits o  $\sum_{i=1}^N CH_i|_{>2.7} = 0$  bits, que son dos ex-



**Figura 5.9: Proyecciones del espacio de estados para 6 mapas con la configuración que logra máxima información mutua media.** El panel (a) muestra las 6 trayectorias superpuestas. Los paneles restantes muestran algunas de las proyecciones del espacio de estados con respecto al mapa 1, mostrando una fuerte sincronización de trayectorias caóticas. La configuración de acoplamiento corresponde a la de la fig. 5.8, donde la información mutua promedio máxima es  $\langle I \rangle \simeq 3.263$  bits, y se logra cuando  $\varepsilon \simeq 0.463$ .

tremos. Por ejemplo, se observa que la configuración en la fig. 5.10(b) tiene  $\sum_{i=1}^N CH_i|_{>2.7} = 0.897$  bits, similar a la fig. 5.10(a) pero con una mayor densidad de enlaces,  $\rho \simeq 0.73$ . Además, hay otra configuración con  $\rho = 0.87$  que logra  $\sum_{i=1}^N CH_i|_{>2.7} = 0.897$  bits, pero se deja sin resaltar para centrarse en la topología completa de la fig. 5.10(c). Como es esperable, la topología de todos con todos logra el límite superior más grande, con  $\sum_{i=1}^N CH_i|_{>2.7} = 0.970$  bits. Sin embargo, se destaca que la configuración en fig. 5.10(a) logra uno de los mayores valores en generación y transmisión simultánea de información con la



**Figura 5.10: Límite superior de la información condicional transferida para las 52 configuraciones de acoplamiento diferentes.** La condición es que los 6 circuitos compartan al menos un promedio de 2.7 bits en un rango de intensidades de acoplamiento. El límite superior se encuentra entonces a partir de la entropía condicional de cada mapa,  $\sum_{i=1}^N CH_i|_{>2.7}$  (ec. (5.2)). Los valores resultantes se muestran de acuerdo con la densidad de enlaces de la configuración,  $\rho$ . Los paneles (a) a (f) resaltan 6 configuraciones relevantes.

menor cantidad de enlaces.

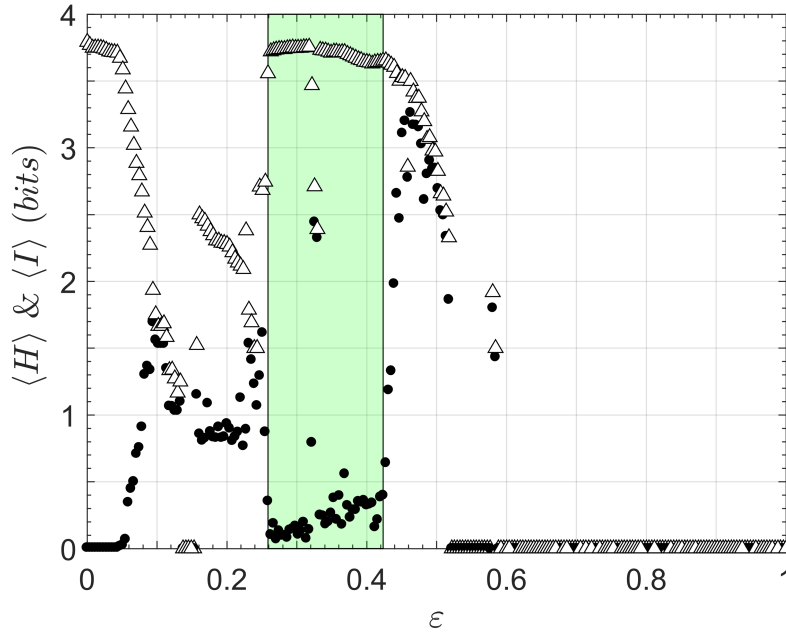
Las configuraciones resaltadas restantes son aquellas que presentan una cota superior nula, a saber, figs. 5.10(d), 5.10(e) y 5.10(f). Estas configuraciones son: la topología en anillo con  $\rho = 0.40$  (fig. 5.10(f)), que es la topología menos densa; el anillo con un enlace extra (fig. 5.10(e)), que tiene  $\rho \simeq 0.47$



y una topología de anillo con 2 enlaces adicionales colocados simétricamente con  $\rho \simeq 0.53$  (fig. 5.10(d)). Tener  $\sum_{i=1}^N CH_i|_{>2.7} = 0$  bits significa que, la información compartida promedio,  $\langle I \rangle$ , nunca alcanza valores por encima del umbral  $\lambda = 2.7$  bits. Desde un punto de vista dinámico,  $\langle I \rangle \leq \lambda$  corresponde a que el sistema experimenta órbitas periódicas o es incapaz de alcanzar niveles de sincronización significativos.

#### 5.2.2.4. Regiones donde se maximiza la generación pero se minimiza la transmisión de información promedio

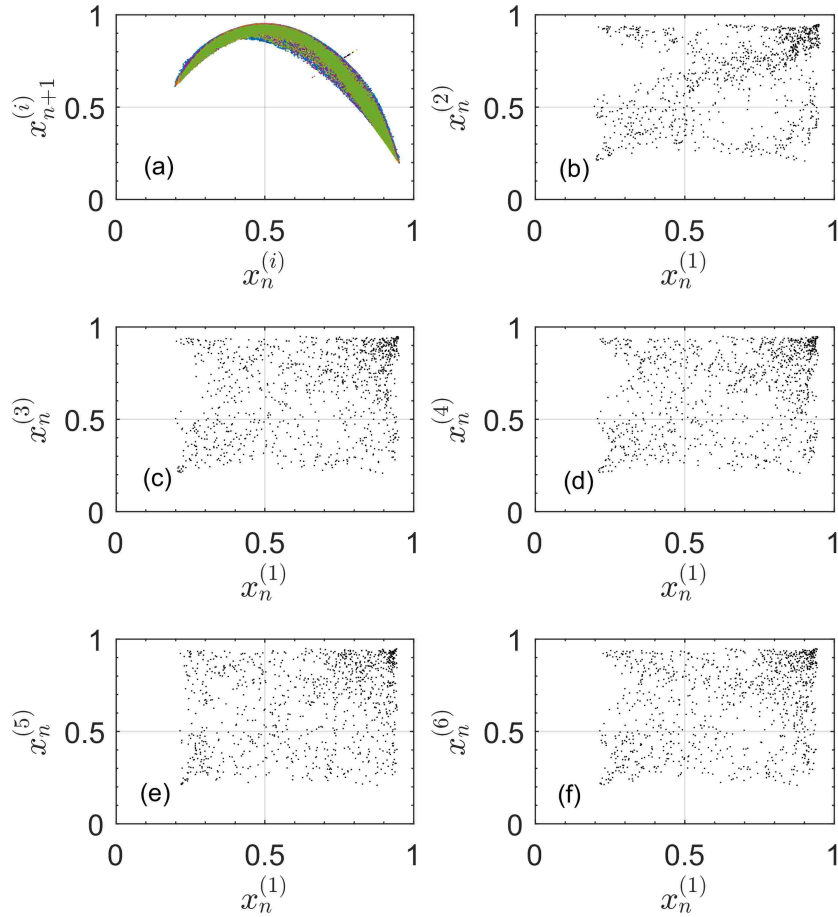
En esta sección se analiza la relación entre la configuración del acoplamiento y la generación de información cuando la transmisión es insignificante. Nuevamente, se lleva a cabo este análisis de acuerdo al límite superior propuesto para la entropía conjunta condicional (ec. (5.2)) de cada configuración, donde ahora se establece un umbral en la información mutua promedio tal que  $0 < \langle I \rangle < \lambda = 0.5$  bits.



**Figura 5.11: Entropía e información mutua promediada en la red para 6 circuitos en función de  $\epsilon$ .** La configuración, los símbolos y valores de  $\langle H \rangle$  e  $\langle I \rangle$  son los de la fig. 5.8. El rectángulo sombreado en verde muestra la región donde  $0 < \langle I \rangle < 0.5$  bits.

La fig. 5.11 muestra cómo  $\langle I \rangle$  cambia en función de  $\epsilon$  para el mismo ejem-

plo de configuración de la fig. 5.8, donde el área sombreada resalta la región de interés. En este caso se resalta el intervalo en que  $0 < \langle I \rangle < 0.5$  bits, correspondiente a  $\varepsilon \in [0.259, 0.424]$ . Para 50 de las 52 configuraciones analizadas se encontró que esta región de transmisión insignificante de información con entropía significativa aparece inmediatamente antes de la región con transmisión máxima de información (es decir,  $\langle I \rangle > 2.7$  bits en la fig. 5.8), lo que también ocurre en 49 de las 52 configuraciones de acoplamiento.



**Figura 5.12: Proyecciones del espacio de estados para una configuración de 6 mapas con información mutua promedio mínima no nula.** El panel (a) muestra las 6 trayectorias superpuestas. Los paneles restantes muestran algunas de las proyecciones del espacio de estados con respecto al mapa 1, mostrando trayectorias caóticas fuera de sincronización. La configuración de acoplamiento corresponde a la de la fig. 5.8, donde la información mutua mínima,  $\langle I \rangle \simeq 0.072$  bits, se logra para  $\varepsilon^* = 0.271$ .

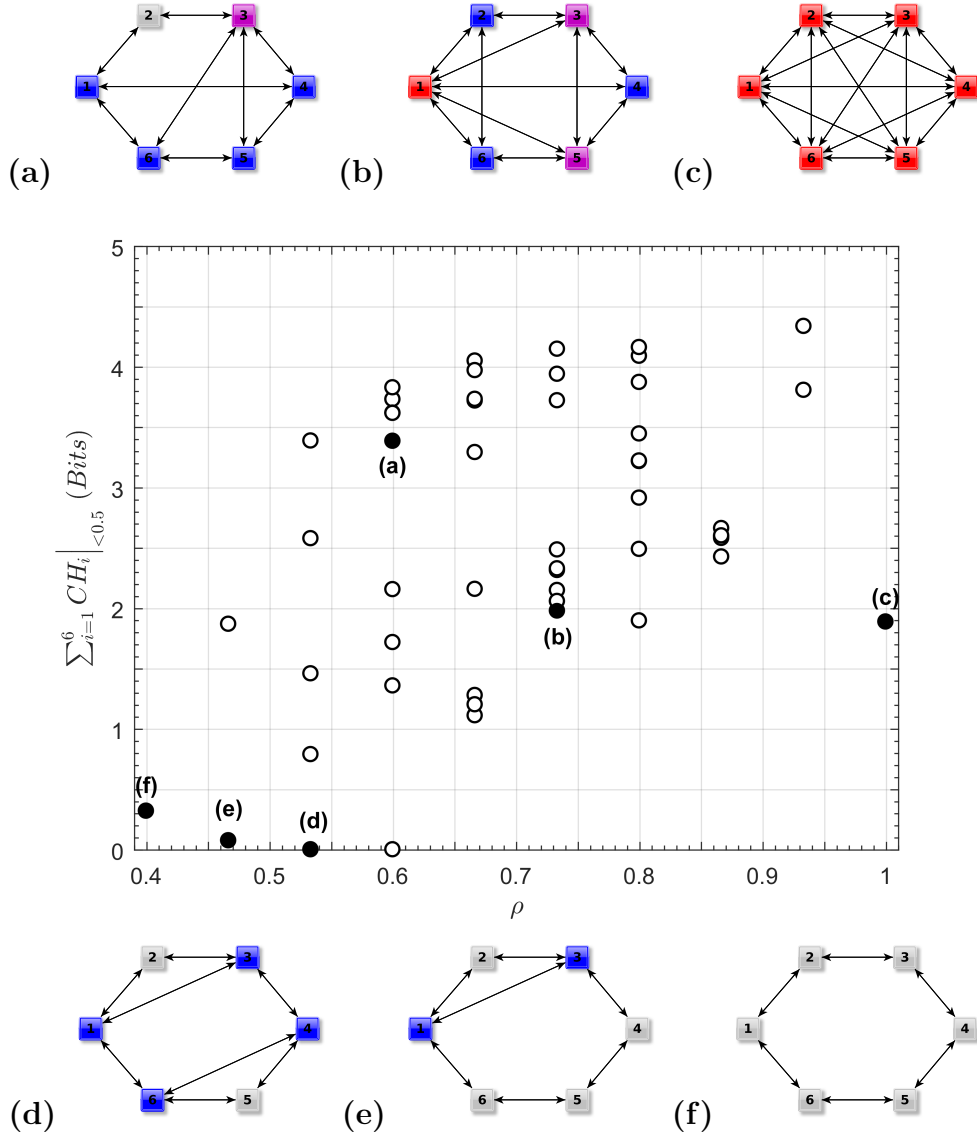
En particular, esta configuración alcanza un mínimo de  $\langle I \rangle$  dentro de la región resaltada de fig. 5.11, en  $\varepsilon^* = 0,271$ . Para esa intensidad de acoplamiento, puede verse en la fig. 5.12 que los mapas están en un régimen dinámico caótico que no es síncrono. Es decir, las proyecciones del espacio de estados en la fig. 5.12 muestran un atractor que se extiende fuera de la línea diagonal, al contrario de la situación de la fig. 5.9. La caoticidad del atractor se puede estimar a partir de la entropía promedio de la configuración, que, en este caso, es  $\langle H \rangle = (3.735 \pm 0.007)$  bits (similar al valor  $\langle H \rangle = (3.50 \pm 0.06)$  bits obtenido de la fig. 5.9). Este estado incoherente se mantiene en toda la región donde  $0 < \langle I \rangle < 0.5$  bits, pero el grado de caoticidad depende de la configuración.

La figura 5.13 muestra la dependencia que tiene el límite superior de la entropía conjunta condicional,  $CJH$ , en cada una de las 52 configuraciones con la densidad de enlaces (análogamente a la fig. 5.10). En otras palabras, la fig. 5.13 presenta los resultados de la información generada por cada configuración mientras se experimenta una transmisión insignificante, es decir,  $0 < \langle I \rangle < 0.5$  bits (que en cada configuración se produce en un rango de  $\varepsilon$  específico). El ejemplo de configuración de las figs. 5.11 y 5.12 se muestra resaltado por el círculo relleno (a), así como los otros ejemplos que se resaltaron en la fig. 5.10 (que refiere al análisis de la información generada al tener una transmisión máxima en el rango de  $\varepsilon$  correspondiente).

Puede observarse que de las 6 configuraciones destacadas en la fig. 5.13, la resaltada en (a) es la que logra el límite superior más grande para  $CJH$ , con  $\sum_i CH_i|_{<0.5} = 3.384$  bits, seguido de (b) y luego (c) (correspondiente a la configuración completa). Al contrario de la fig. 5.10 donde estas 3 configuraciones exhiben los límites superiores más grandes de  $\sum_i CH_i|_{>2.7}$ , aquí se detectan otras configuraciones que logran mayores límites  $\sum_i CH_i|_{<0.5}$ . Por otro lado, las configuraciones (d), (e) y (f) en la fig. 5.13 tienen límites superiores insignificantes para  $\sum_i CH_i|_{<0.5}$ , similar a lo observado para estas configuraciones en fig. 5.10.

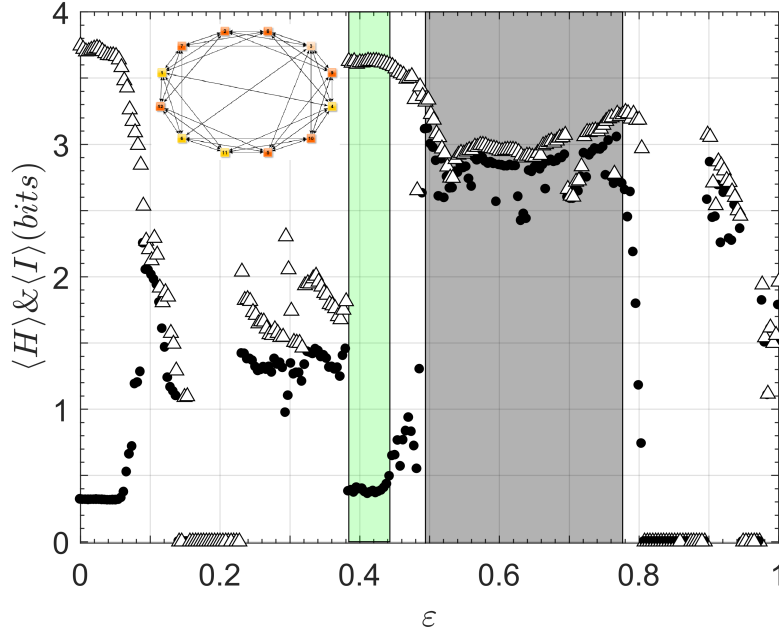
#### 5.2.2.5. Dependencia de las dinámicas emergentes del tamaño de la red

Para estudiar cómo la transmisión y generación de información depende del tamaño del sistema, a continuación se analizan 9 configuraciones de acoplamiento compuestas por  $N = 12$  mapas logísticos descriptas en la sección



**Figura 5.13: Límite superior de la información condicional transferida para las 52 configuraciones de acoplamiento diferentes.** La condición es que los 6 mapas compartan un promedio de  $0 < \langle I \rangle < 0.5$  bits de información. El límite es la suma de las entropías condicionales para cada mapa,  $\sum_{i=1}^N CH_i|_{<0.5}$  (ec. (5.2)), que se muestran según la densidad de enlaces,  $\rho$ , de la configuración. (a) a (f) resalta configuraciones relevantes.

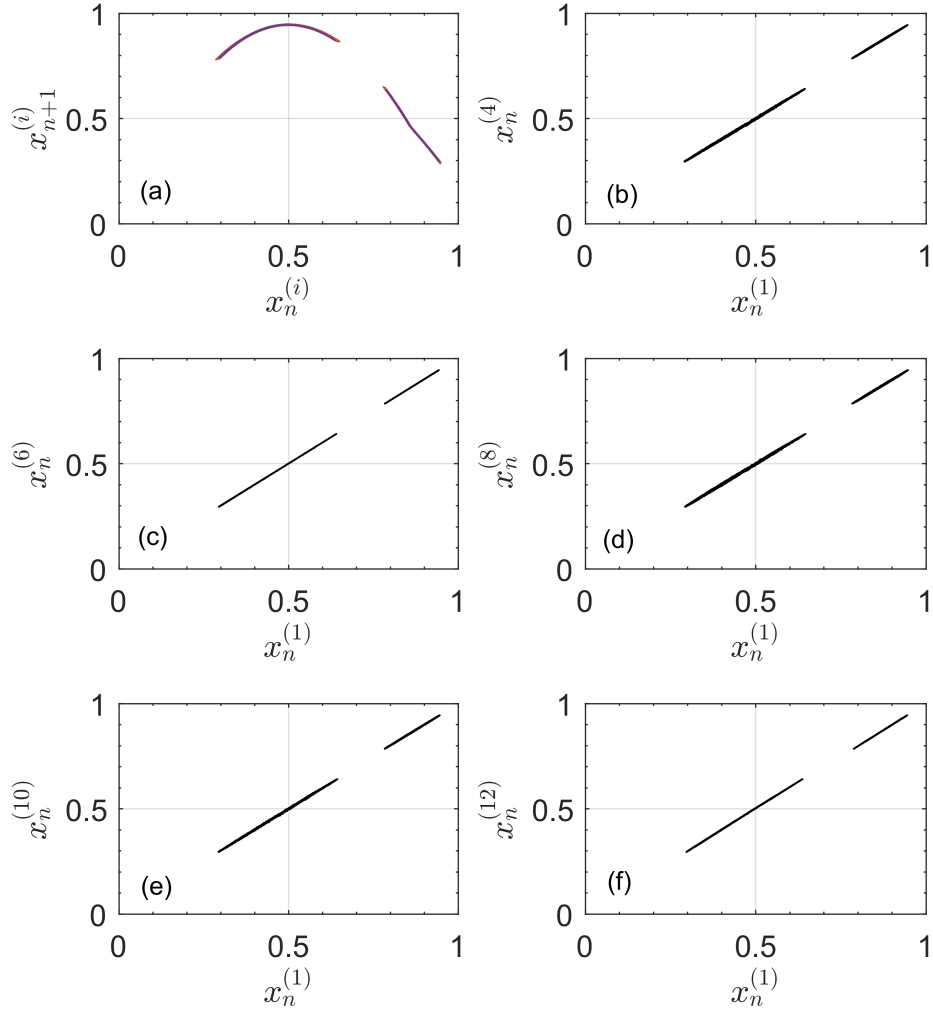
4.2 (ver además la tabla 5.1 para conocer los parámetros de cada mapa). El estudio se centra en cuantificar el límite superior de la información generada en un rango de  $\varepsilon$  cuando  $\langle I \rangle > 2.7$  bits, es decir, el límite superior para la entropía conjunta condicional,  $CJH$ , ec. (5.2). Este límite de  $CJH$  corresponde a una importante generación y transmisión de información. A medida que cambia la intensidad de acoplamiento,  $\varepsilon$ , la información promedio,  $\langle I \rangle$ , transmitida entre



**Figura 5.14: Entropía e información mutua promediada en la red para 12 circuitos en función de  $\varepsilon$ .** La entropía promediada para la configuración,  $\langle H \rangle$ , y la información mutua,  $\langle I \rangle$ , en función de  $\varepsilon$  se muestran con triángulos vacíos y círculos rellenos, respectivamente. El rectángulo sombreado en verde (gris) muestra la región donde  $0 < \langle I \rangle < 0.5$  ( $\langle I \rangle > 2.7$ ) bits.

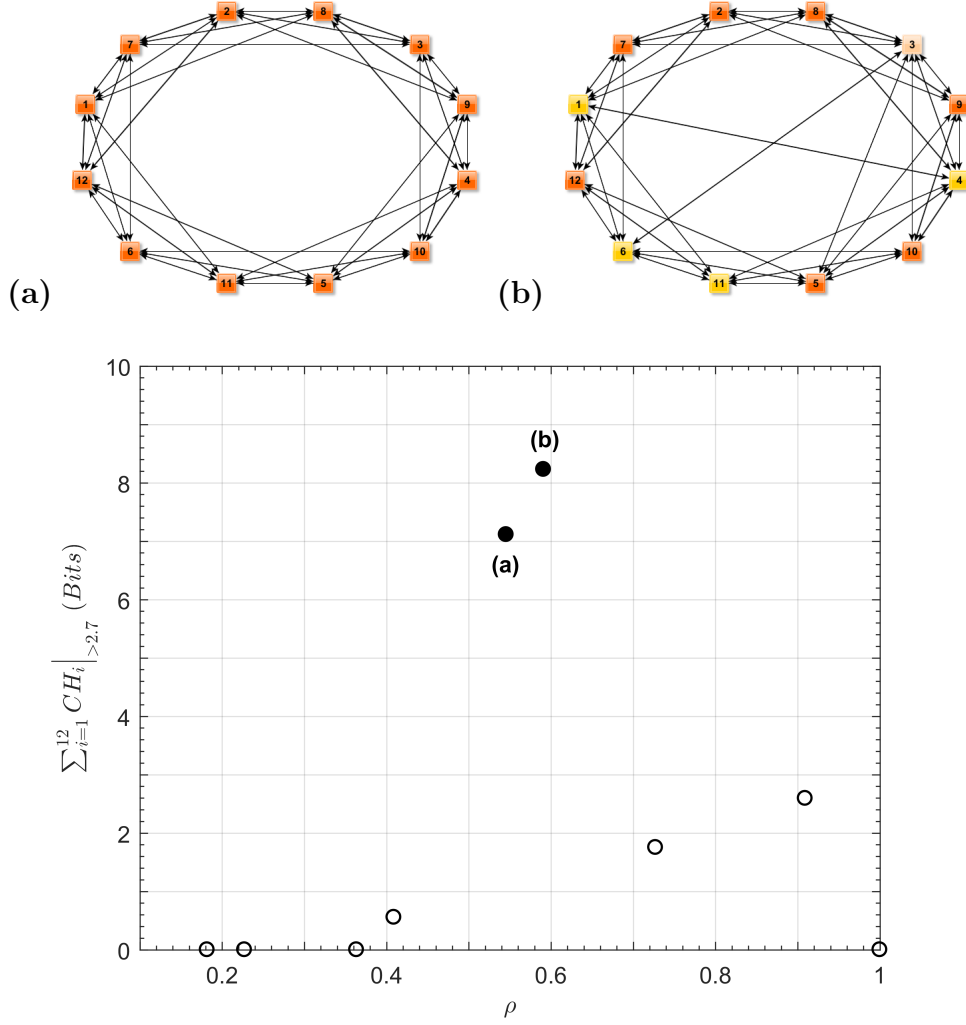
los 12 mapas cambia, lo que se puede ver en la fig. 5.14. El rango de  $\varepsilon$  resaltado en gris muestra la región dinámica donde  $\langle I \rangle > 2.7$  bits, que va desde  $\varepsilon_{\min} = 0.495$  a  $\varepsilon_{\max} = 0.790$ . En esta región, los 12 mapas evolucionan de forma casi completamente sincrónica y exhiben una órbita caótica, que se puede ver en las proyecciones del espacio de estados de la fig. 5.15 para  $\varepsilon = 0.498$ . Para las 9 configuraciones se estudió la información generada en el intervalo de mayor transmisión de información ( $\langle I \rangle > 2.7$  bits), y se observó que justo antes de la región donde se maximiza la generación y transmisión de información, existe un rango de acoplamientos donde hay transmisión insignificante de información con entropía significativa,  $0 < \langle I \rangle < 0.5$  bits, correspondiente a  $\varepsilon \in [0.3843, 0.4431]$  (destacada en verde en la fig. 5.14).

La fig. 5.16 muestra la cota superior para la información generada en un rango de acoplamiento para las 9 configuraciones de 12 nodos, condicionado a que los 12 mapas compartan un promedio de 2.7 bits de información, en función de la densidad de enlaces,  $\rho$ , de la red. El límite es la suma de las entropías condicionales para cada mapa  $\sum_{i=1}^N CH_i|_{>2.7}$  (ec. (5.2)).



**Figura 5.15: Proyecciones del espacio de estados para 12 mapas donde la información mutua promediada en la red se maximiza.** El panel (a) muestra las 12 trayectorias superpuestas. Los paneles restantes muestran algunas de las proyecciones del espacio de estados con respecto al mapa 1, mostrando una fuerte sincronización de trayectorias caóticas. La configuración de acoplamiento corresponde a la de la fig. 5.14, donde la información mutua promedio máxima es  $\langle I \rangle \simeq 3.117$  bits, y se logra cuando  $\varepsilon \simeq 0.4980$ .

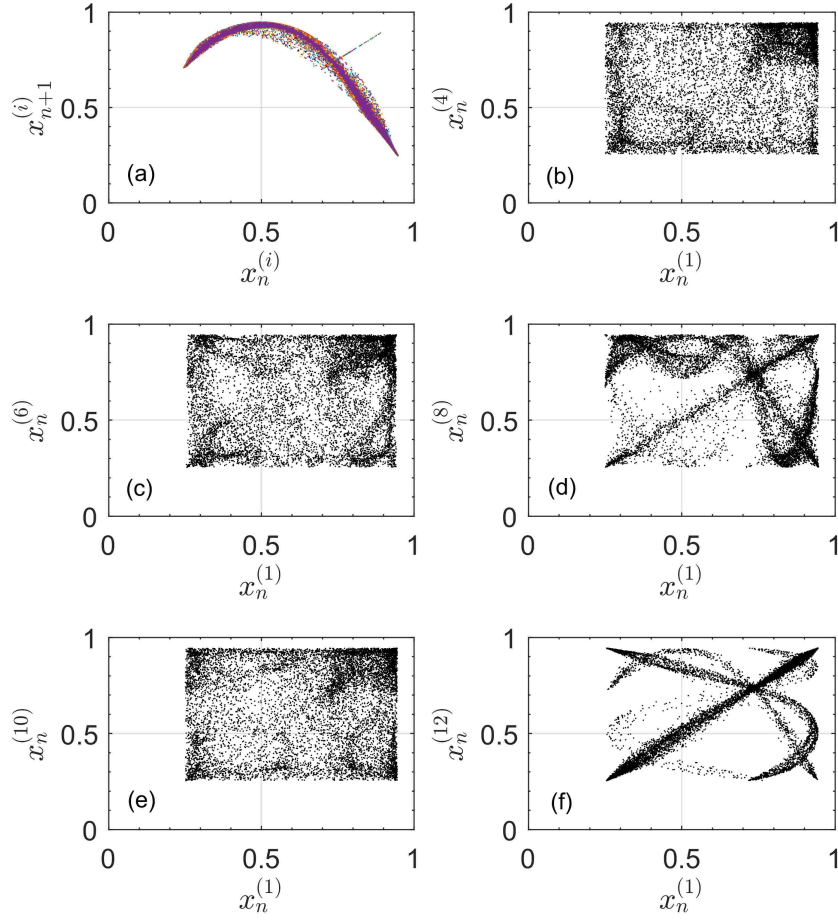
En concordancia con los resultados obtenidos para configuraciones de 6 nodos, en la fig. 5.16 se observa que el anillo se encuentra en el conjunto de topologías donde se minimiza la transmisión de información. Se evidencia también que aquellas configuraciones en las que la incorporación de enlaces rompe la simetría de la red, favorecen la transmisión de información; concretamente,



**Figura 5.16: Límite superior de la información condicional transferida para las 9 configuraciones de acoplamiento de 12 nodos analizadas.** La condición es que los 12 mapas compartan en promedio un mínimo de 2.7 bits de información. El límite es la suma de las entropías condicionales para cada mapa  $\sum_{i=1}^N CH_i|_{>2.7}$  (ec. (5.2)).

para el caso de  $\rho \simeq 0.59$  se tiene que  $\sum_{i=1}^{12} CH_i|_{>2.7} = 8.231$  bits.

Resulta de especial interés que la red completa presente, al igual que el anillo, un valor nulo de  $CJH$ . En particular, esta configuración alcanza un mínimo de  $\langle I \rangle$  dentro de la región resaltada en verde en la fig. 5.14 en  $\varepsilon = 0.4118$ . Para esa intensidad de acoplamiento, puede verse en la fig. 5.17 que los mapas están en un régimen dinámico caótico que no es síncrono, es decir, las proyecciones del espacio de estados en la fig. 5.17 muestran un atractor que se extiende fuera de la línea diagonal (al contrario del caso de la fig. 5.15). Se observa que este estado incoherente se mantiene en toda la región donde  $0 < \langle I \rangle < 0.5$  bits.



**Figura 5.17: Proyecciones del espacio de estados para 12 mapas con información mutua promedio mínima (no nula).** El panel (a) muestra las 12 trayectorias superpuestas. Los paneles restantes muestran algunas de las proyecciones del espacio de estados con respecto al mapa 1, mostrando trayectorias caóticas fuera de sincronización. La configuración de acoplamiento corresponde a la de la fig. 5.14, donde la información mutua mínima,  $\langle I \rangle \simeq 0.3599$  bits, se logra para  $\varepsilon = 0.4118$ .

#### 5.2.2.6. Discusión respecto a la generación y transmisión de información

Las diferentes configuraciones se clasificaron a partir de un umbral de información arbitrario,  $\lambda$ . Para una transmisión significativa de información, este umbral  $\langle I \rangle > \lambda = 2.7$  bits se establece para todas las configuraciones, de modo que tenga en cuenta las órbitas que se extienden (uniformemente) más allá de 6 bins en la discretización del intervalo del mapa. De igual forma, el umbral para



una transmisión de información insignificante se establece en  $0 < \langle I \rangle < \lambda = 0.5$  bits, ya que este valor permite descartar órbitas casi periódicas.

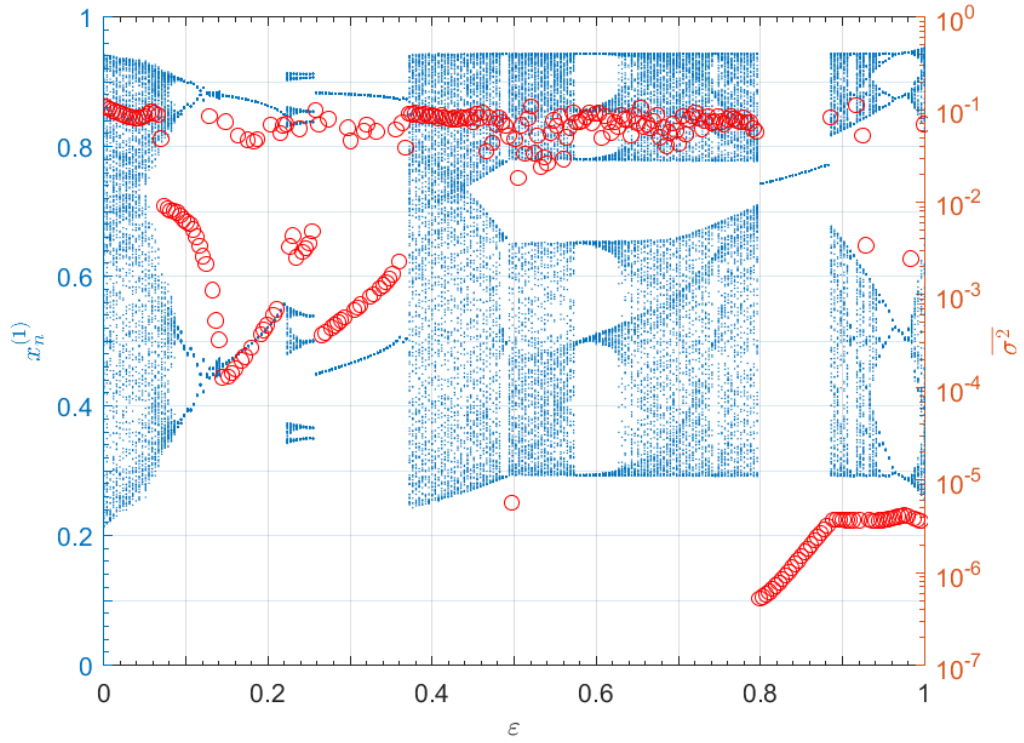
Maximizar la entropía implica mantener un alto nivel de incertidumbre en la evolución temporal de las variables. Esto puede interpretarse como mantener el sistema en un estado donde las posibles trayectorias varían y ninguna se ve favorecida, maximizando así la generación de información. Esta es la situación que se muestra en la fig. 5.12, donde se observa que los nodos se encuentran en un régimen caótico incoherente, ya que el atractor se extiende fuera de la variedad de sincronización y la entropía media alcanza un máximo, que es  $\langle H \rangle_{(\varepsilon^*=0.271)} = (3.735 \pm 0.007)$  bits. Por otro lado, maximizar la información mutua entre nodos resalta las dependencias temporales entre las variables. Así, la maximización conjunta de la entropía y la información mutua del sistema tiende a generar órbitas caóticas sincronicas. Esta es la situación en la que se encuentra el sistema en las regiones resaltadas con un rectángulo gris, en las figs. 5.8 y 5.14.

Por definición (ec. (5.1)),  $CH_i|_{>\lambda}$  cuantifica la generación de información del mapa cuando el sistema acoplado maximiza su transmisión de información. Como se obtiene de la suma de la entropía condicional en ec. (5.1), los resultados obtenidos para  $CH_i|_{>\lambda}$  son robustos a variaciones o perturbaciones del acoplamiento. Análogamente, para la definición de  $CH_i|_{<\lambda}$ .

Las configuraciones que presentan intervalos amplios de  $\varepsilon$  donde  $\langle I \rangle$  supera el umbral de  $\lambda = 2.7$  bits y las configuraciones donde  $\langle I \rangle$  no alcanza el umbral de  $\lambda = 0.5$  bits, se ponderan mediante la suma en ec. (5.1). Esta magnitud proporciona un criterio práctico para clasificar las configuraciones (figs. 5.10 y 5.16). Por ejemplo, la sincronización de la dinámica caótica, que se mantiene en un amplio rango de intensidades de acoplamiento, es particularmente relevante en escenarios reales, donde el ajuste fino de los parámetros puede ser imposible.

### 5.2.3. Caracterización de las dinámicas emergentes mediante parámetros de orden

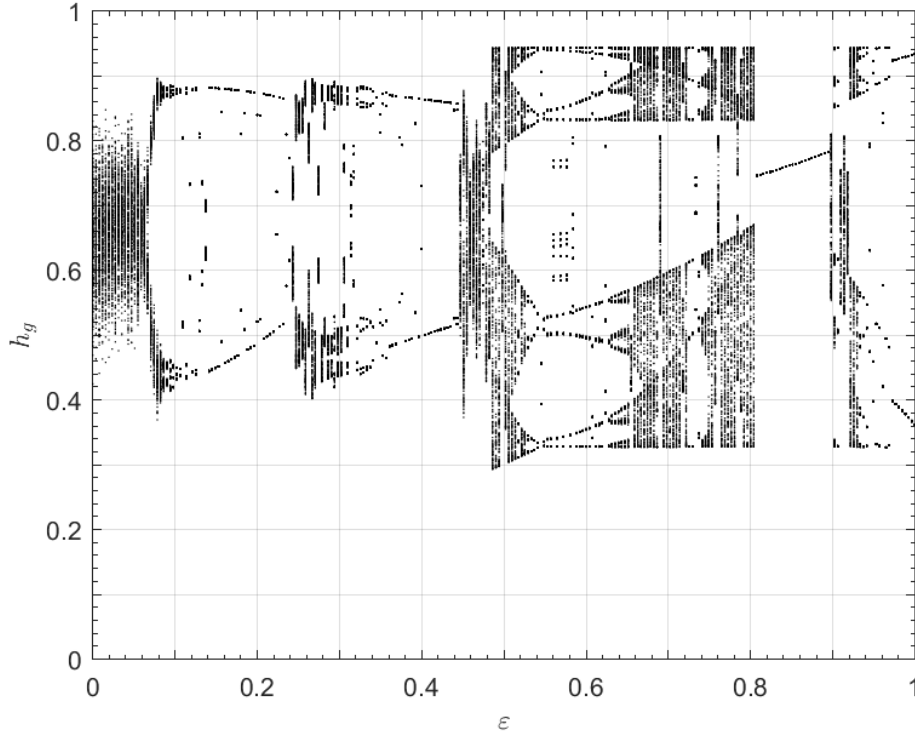
La varianza entre dos mapas,  $\sigma_{ij}^2$ , puede entenderse como una medida de la *similitud* entre sus series temporales, por lo que en esta sección se utiliza la varianza media,  $\overline{\sigma^2}$ , como un parámetro de orden del sistema (ec. (3.9)). El empleo de un parámetro de orden permite analizar la globalidad del sistema, evitando el análisis individual de cada diagrama de bifurcaciones.



**Figura 5.18: Varianza media del sistema representada sobre el diagrama de bifurcaciones de un mapa experimental.** El diagrama de bifurcaciones corresponde al mapa 1 de una configuración 6–regular de 12 nodos,  $\{x_n^{(1)}\}$  (puntos azules), a medida que aumenta la intensidad de acoplamiento,  $\varepsilon$ ; simultáneamente se representa (en escala logarítmica) la varianza media del sistema  $\overline{\sigma^2}$  (círculos rojos).

En la fig. 5.18 se observa cómo varía  $\overline{\sigma^2}$  a medida que aumenta el acople entre los 12 mapas que constituyen una red 6–regular (la configuración se muestra en la fig. 5.16(a)). Cuando los mapas se encuentran desacoplados ( $\varepsilon = 0$ ) la varianza media alcanza su máximo ( $\overline{\sigma^2} = 0.105$ ). A medida que se incrementa el acople vemos que disminuye  $\overline{\sigma^2}$  y en  $\varepsilon = 0.1451$ , donde el diagrama de bifurcaciones muestra el ingreso a una dinámica de período 2, la varianza media presenta un primer mínimo relativo ( $\overline{\sigma^2} \approx 1.4 \times 10^{-4}$ ). Posteriormente, se incrementa alcanzando varianzas medias del orden de  $10^{-1}$  hasta que en  $\varepsilon = 0.2667$ , el diagrama de bifurcaciones muestra nuevamente el comienzo de una dinámica de período 2, y la varianza media presenta su segundo mínimo relativo ( $\overline{\sigma^2} \approx 3.6 \times 10^{-4}$ ). Seguidamente, la varianza media comienza a incrementarse conforme se incrementa la intensidad de acoplamiento, y cuando el sistema ingresa en la región de dinámicas caóticas (desde  $\varepsilon = 0.3725$ ) la varianza media se mantiene del orden de  $10^{-1}$ . En  $\varepsilon = 0.80$  se observa un mínimo

absoluto en la varianza media con  $\overline{\sigma^2} \approx 5.2 \times 10^{-7}$  cuando el diagrama muestra una dinámica de punto fijo. A partir de ese punto, incluso en  $\varepsilon = 0.89$  cuando el sistema ingresa en un régimen de dinámicas caóticas, se puede interpretar una semejanza global entre las dinámicas de los mapas (cuasi-sincronización completa) que se traduce en que para  $\varepsilon > 0.80$ , salvo excepciones puntuales,  $\overline{\sigma^2} < 4 \times 10^{-6}$ .

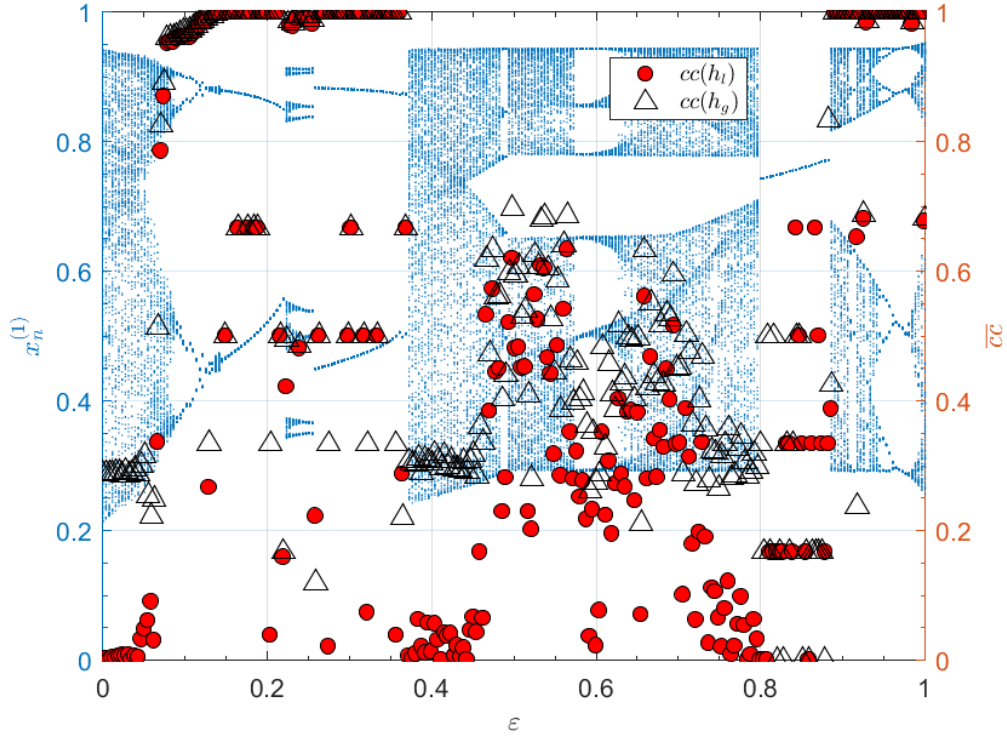


**Figura 5.19: Diagrama de bifurcaciones del campo medio global,  $h_g$  (ec. 3.7).** Se obtuvo experimentalmente para una red 6-regular de 12 nodos a medida que aumenta la intensidad de acoplamiento,  $\varepsilon$  (como en la fig. 5.18).

Otra forma de realizar un análisis global de las dinámicas de la red es a partir del campo medio, que permite simplificar el análisis de las interacciones en un sistema compuesto por un conjunto de nodos, sustituyendo las interacciones individuales por una global definida a partir del valor promedio de los nodos (sec. 3.1.2.1). Así, el campo medio corresponde a otra serie temporal que varía en función de la intensidad de acoplamiento como las señales individuales de cada mapa.

La fig. 5.19 muestra a partir del diagrama de bifurcaciones, la dinámica del campo medio. Allí se observa que para acoplamientos débiles ( $\varepsilon \lesssim 0.05$ )

la señal correspondiente al campo medio global describe un comportamiento caótico, con un rango de  $0.5 \lesssim h_g \lesssim 0.8$ . Este comportamiento concuerda con la fig. 5.18, donde la dinámica de los mapas (para ese rango de acoplamientos) es caótica y con máxima varianza entre las señales. A medida que la intensidad de acoplamiento aumenta y la varianza media disminuye (como se observa para  $\varepsilon \approx 0.08$  en la fig. 5.18), el  $h_g$  muestra que la dinámica global de los mapas se aproxima a un régimen periódico. Para intensidades de acoplamiento  $\varepsilon > 0.5$ , el diagrama de bifurcaciones de la fig. 5.19 muestra de forma nítida una sucesión de cascadas de bifurcaciones.



**Figura 5.20:** Diagrama de bifurcaciones de un mapa experimental en una red de 12 nodos junto al promedio de los coeficientes de correlación entre cada señal y los campos medios. El diagrama de bifurcaciones corresponde al mapa 1 de la configuración mostrada en la fig. 5.16(a),  $\{x_n^{(1)}\}$  (puntos azules), a medida que aumenta la intensidad de acoplamiento,  $\varepsilon$ ; simultáneamente se representa el promedio de los coeficientes de correlación de cada una de las señales respecto al campo medio local,  $\overline{cc(h_l)}$  (círculos rojos) y respecto al campo medio global,  $\overline{cc(h_g)}$  (triángulos negros).

Para profundizar en este análisis se considera el coeficiente de correlación lineal entre la dinámica de cada mapa y el campo medio. Este coeficiente pro-

porciona una medida para evaluar la coherencia y eventual sincronización entre los componentes de la red. Un alto coeficiente de correlación significa que los nodos están alineados con el comportamiento promedio de la red, siguiendo patrones similares de evolución temporal, lo que indica una tendencia a la sincronización. Esto es indicativo de una coherencia global en la red, donde las dinámicas individuales se integran armoniosamente en el comportamiento colectivo. Por el contrario, un coeficiente de correlación bajo sugiere que algunos nodos se comportan de manera diferente al campo medio global, revelando la presencia de dinámicas diversas dentro de la red.

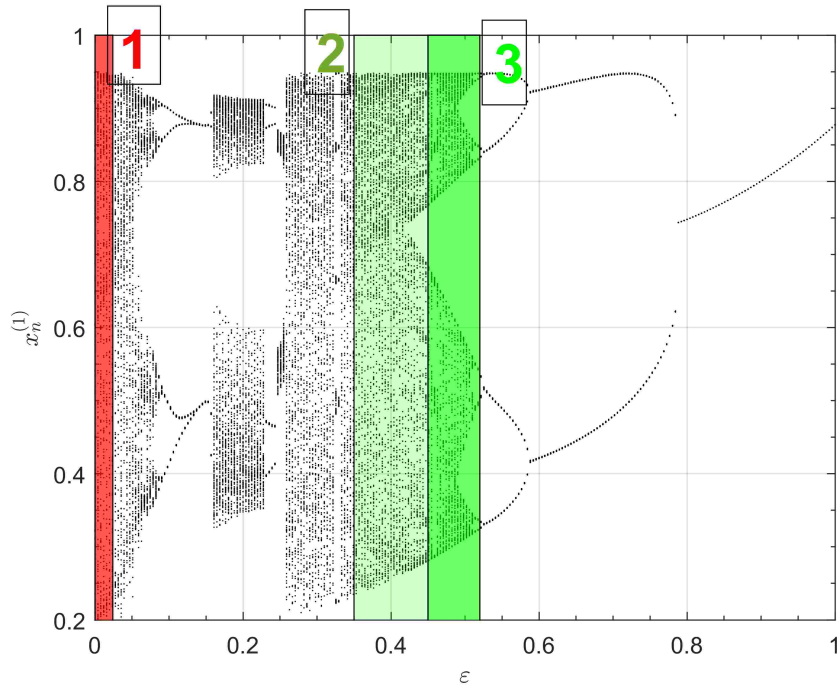
La fig. 5.20 muestra cómo varía el promedio de los coeficientes de correlación de Pearson de los mapas con el campo medio local (ec. (3.6)),  $\overline{cc(h_l)}$  (representado con círculos rojos), y con el campo medio global (ec. (3.7)),  $\overline{cc(h_g)}$  (representado con triángulos negros), a medida que aumenta la intensidad de acoplamiento,  $\varepsilon$ , entre 12 mapas acoplados en una red 6-regular.

En concordancia con la información que brinda la varianza media como parámetro de orden (analizada a partir de la fig. 5.18), se observa que para acoplamientos bajos ( $\varepsilon < 0.06$ ) las señales de los mapas se encuentran descorrelacionadas con los campos medios ya que los coeficientes de correlación son menores a 0.30. A medida que el diagrama de bifurcaciones muestra ventanas periódicas, se observa un significativo incremento en los coeficientes de correlación, hasta que en  $\varepsilon = 0.1529$  se obtiene que  $\overline{cc(h_l)} = \overline{cc(h_g)} = 1$ . Eso evidencia que en los atractores de período 2 existe un intervalo de acoplamientos en que se alcanza una correlación lineal perfecta. En  $\varepsilon = 0.3725$  el diagrama de bifurcaciones muestra que el sistema comienza a experimentar dinámicas caóticas, y se evidencia una descorrelación entre las señales comparables con las del sistema desacoplado ( $\varepsilon = 0$ ). Esa situación se mantiene hasta  $\varepsilon = 0.89$ , a partir del cual se obtiene que  $\overline{cc(h_l)} = \overline{cc(h_g)} = 1$ , lo que coincide con lo observado en términos de la varianza media,  $\overline{\sigma^2}$ .

El campo medio global, por lo tanto, es una buena medida para evaluar la coherencia de las dinámicas locales con respecto al comportamiento promedio de la red, siendo el coeficiente de correlación lineal con el campo medio global una herramienta para analizar el grado de sincronización o heterogeneidad de las dinámicas en los mapas acoplados.

### 5.2.3.1. Emergencia de universalidad

A partir del estudio sistemático de las diferentes configuraciones en esta tesis se identifican intervalos en los valores de la intensidad de acoplamiento donde la dinámica colectiva de los mapas acoplados parece tener propiedades universales (no dependen de la red). Estos intervalos se destacan en la fig. 5.21, y están asociados a comportamientos universales. Como se introdujo en



**Figura 5.21: Intervalos en la intensidad de acoplamiento donde se pueden identificar características universales.** El primer intervalo (rojo) corresponde a  $0 \leq \varepsilon \lesssim 0.024$ . El segundo intervalo (verde tenue) corresponde a  $0.35 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.52$ , y el tercero (verde intenso) a  $0.45 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.52$ .

la sección 2.1.4, Feigenbaum [47] planteó la idea de constantes universales asociadas a las rutas al caos mediante duplicación de período en sistemas unidimensionales, como el mapa logístico, y demostró que ciertas relaciones numéricas son las mismas para una amplia clase de funciones no lineales. En el contexto de mapas logísticos acoplados, la universalidad implica que, a pesar de las diferencias en los parámetros individuales de los mapas y en la forma en que estos se conectan entre sí, el sistema global tiende a exhibir patrones y propiedades emergentes que son invariantes. La universalidad no solo permite simplificar la descripción de sistemas complejos, sino que también sugiere la existencia de leyes fundamentales que trascienden las peculiaridades de los

componentes individuales y sus interacciones específicas.

Esta sección explora condiciones en que se produce la emergencia de comportamientos aparentemente universales. Los resultados ilustran cómo ciertos comportamientos son independientes de la estructura de la red.

La fig. 5.21 presenta un diagrama de bifurcaciones correspondiente a un mapa logístico acoplado en una red de 6 nodos, mostrando las dinámicas del sistema en función de la intensidad de acoplamiento. Se destacan tres intervalos mediante los colores rojo, verde tenue y verde intenso, donde emergen dinámicas colectivas similares en casi todas las configuraciones estudiadas.

El primer intervalo (rojo) corresponde a la región de acoplamientos débiles,  $0 \leq \varepsilon \lesssim 0.024$ , donde los nodos están generando mucha información pero sin transmisión significativa (sección 5.2.2). El segundo intervalo  $0.35 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.52$  (verde) revela la aparición de estructuras dinámicas con cierto grado de sincronización. Por último, el tercer intervalo  $0.45 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.52$  (en verde intenso) muestra un estado de caos colectivo sin coherencia.

#### 5.2.3.1.1. PRIMER INTERVALO: $0 \leq \varepsilon \lesssim 0.024$

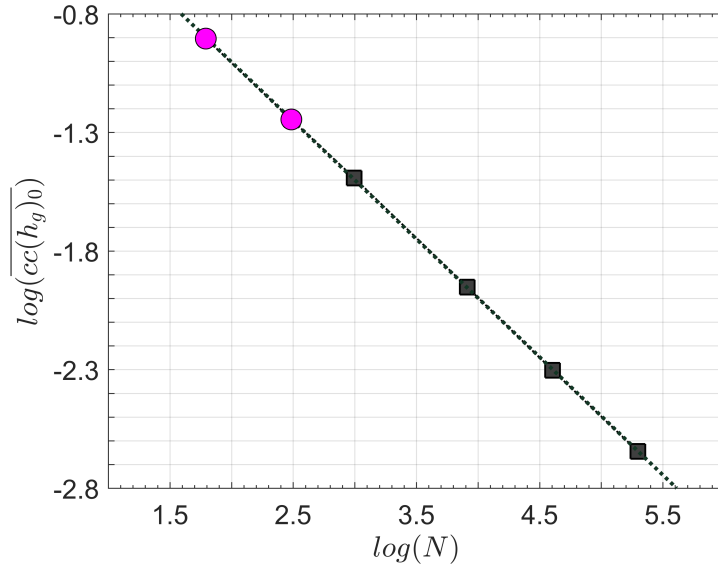
Se identificaron comportamientos universales en el rango de acoplamientos débiles, específicamente para  $0 \leq \varepsilon \lesssim 0.024$ . Este es el único intervalo donde las simulaciones numéricas concuerdan con la dinámica observada experimentalmente (sección 5.2.1). Por esta razón, se han utilizado los resultados numéricos para enriquecer los datos experimentales, explorando configuraciones con valores de  $N$  mucho mayores a los que permite la implementación experimental.

##### 1- Universalidad del coeficiente de correlación medio inicial

Aquí se analiza cómo se correlacionan (sección 3.1.2.1) las señales individuales de los mapas con el campo medio global (ec. 3.7). En la fig. 5.22, se muestra, para  $N = [6, 12]$ , el coeficiente de correlación promediado en todas las configuraciones estudiadas experimentalmente. Para  $N = [20, 50, 100, 200]$  se presenta en cada caso el promedio sobre 50 realizaciones aleatorias (modelo Erdős-Rényi) con diferentes probabilidades ( $p = 0.1 : 0.1 : 0.5$ ).

El ajuste lineal realizado en escala logarítmica en la fig. 5.22 sigue la ecua-





**Figura 5.22: Relación entre el coeficiente de correlación medio,  $\overline{cc(h_g)_0}$ , y el número de nodos,  $N$ .** En la gráfica se representa  $\ln(\overline{cc(h_g)_0}) = f(\ln(N))$ , considerándose el coeficiente de correlación medio en  $\varepsilon \approx 0.01$ . Se muestra además el ajuste lineal correspondiente  $\ln(\overline{cc(h_g)_0}) = -0.50 \cdot \ln(N) - 0.008$  ( $R^2 = 0.99998$ ) (ec. 5.3). Para  $N = [6, 12]$  se muestra el coeficiente de correlación promediado en todas las configuraciones estudiadas experimentalmente. Para  $N = [20, 50, 100, 200]$  se muestra en cada caso el promedio sobre 50 realizaciones aleatorias (modelo de Erdős-Rényi) con diferentes probabilidades que van de  $p = 0.1 : 0.5$ .

ción

$$\begin{aligned} \ln(\overline{cc(h_g)_0}) &= a \cdot \ln(N) + b \\ \text{con } a &= -0.498 \pm 0.003 \text{ y } b = -0.008 \pm 0.009 \\ &\Rightarrow \overline{cc(h_g)_0} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde el coeficiente de correlación  $R^2 = 0.99998$ , muestra la concordancia entre los datos y el modelo propuesto. Además, la superposición entre los valores experimentales (círculos magenta) y los resultados numéricos (cuadrados grises) para  $N = 6$  y  $N = 12$  en la fig. 5.22, refuerza la validez del ajuste obtenido. Para  $N > 12$ , los valores numéricos mantienen la misma tendencia, lo que sugiere que la relación identificada se mantiene a escalas mayores.

La pendiente del ajuste,  $m = -(0.498 \pm 0.003)$ , muestra que el coeficiente de correlación medio inicial decrece con  $N$  de acuerdo con una ley de potencia de exponente negativo. Además, es una evidencia cuantitativa de la respues-



ta del sistema a distintas escalas, mostrando un comportamiento robusto del coeficiente de correlación medio inicial en función del tamaño,  $N$ .

Este resultado es consistente con fenómenos de escalamiento observados en sistemas complejos [15, 95, 96], donde la interacción entre los elementos tiende a disminuir conforme aumenta la escala del sistema. A medida que  $N$  aumenta, la densidad de interacciones directas entre elementos individuales decrece. Sin embargo, la estructura global del sistema sigue organizada a través de interacciones indirectas o emergentes.

En el contexto de este trabajo, el hecho de que el coeficiente de correlación medio inicial  $cc(hg)_0$  disminuya con  $N$  según una ley de potencia sugiere que, aunque el número total de interacciones en el sistema aumenta, la correlación entre pares de nodos se diluye en la estructura global. Es decir, el sistema se vuelve más grande, pero menos densamente conectado a nivel individual.

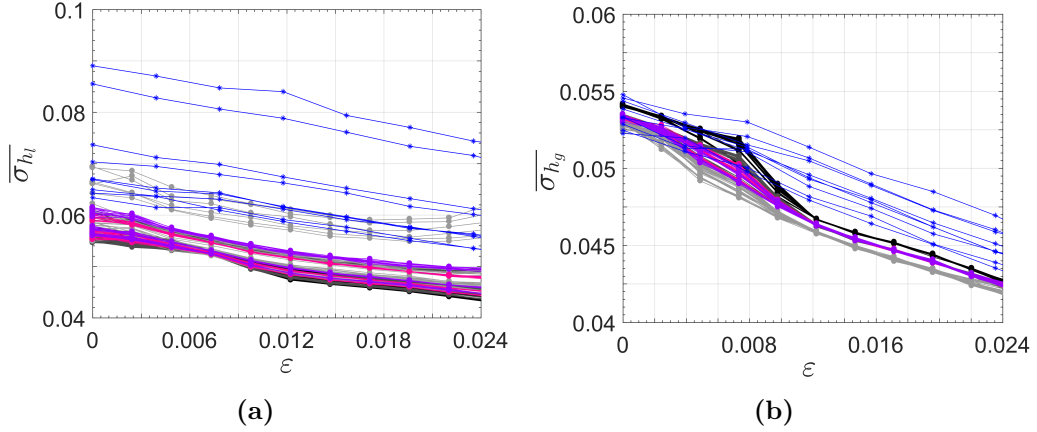
## 2- Desviación respecto al campo medio

La desviación respecto al campo medio promediada en la red,  $\overline{\sigma_h}$  (ec. 3.10), decrece de forma similar durante el intervalo para todas las configuraciones (independientemente de la escala o la topología), como se muestra en la fig. 5.23 (a) y (b) para el caso del campo medio local,  $\overline{\sigma_{h_l}}$  y el campo medio global,  $\overline{\sigma_{h_g}}$ , respectivamente.

La observación de que esta desviación se comporta de forma universal, es decir, disminuye de manera similar independientemente de la escala o la topología de la red, sugiere que existe un principio subyacente que rige la dinámica del sistema, más allá de los detalles específicos de su arquitectura.

Este fenómeno de universalidad es común en sistemas físicos que presentan autosimilitud a diferentes escalas [15, 95, 96], lo que implica que las dinámicas globales no dependen de las configuraciones específicas, sino que emergen de las interacciones colectivas de los elementos. Es decir, el sistema puede estar mostrando una escala invariante, donde los patrones de fluctuación son similares sin importar el tamaño del sistema ni la forma de las conexiones entre sus elementos.

Por ejemplo, en el estudio de redes cerebrales, se analiza la varianza de la actividad neuronal (potenciales de acción o señales de resonancia magnética) con respecto al promedio de actividad de una región o de neuronas conectadas para entender la sincronización, la formación de patrones de actividad y la propagación de información en el cerebro [97]. También la coherencia o varia-



**Figura 5.23: Desviación respecto al campo medio promediada en la red,  $\overline{\sigma}_h$  (ec. 3.10), considerando campo medio local (a) y global (b).**

La  $\overline{\sigma}_h$  decrece de forma similar durante el intervalo para todas las configuraciones (independientemente de la escala o la topología). En azul se representa el comportamiento de las configuraciones experimentales de  $N = 12$ , en tonos de grises, redes Erdős-Rényi numéricas de  $N = 50, 100$  y  $200$  con probabilidad de conexión  $p = [0.10 : 0.01 : 0.20]$  y en tonos de violeta redes Watts-Strogatz numéricas de  $N = 100$  con probabilidades de reconexión  $p = [0.1 : 0.1 : 0.5]$ . Los resultados corresponden a más de 200 realizaciones en total.

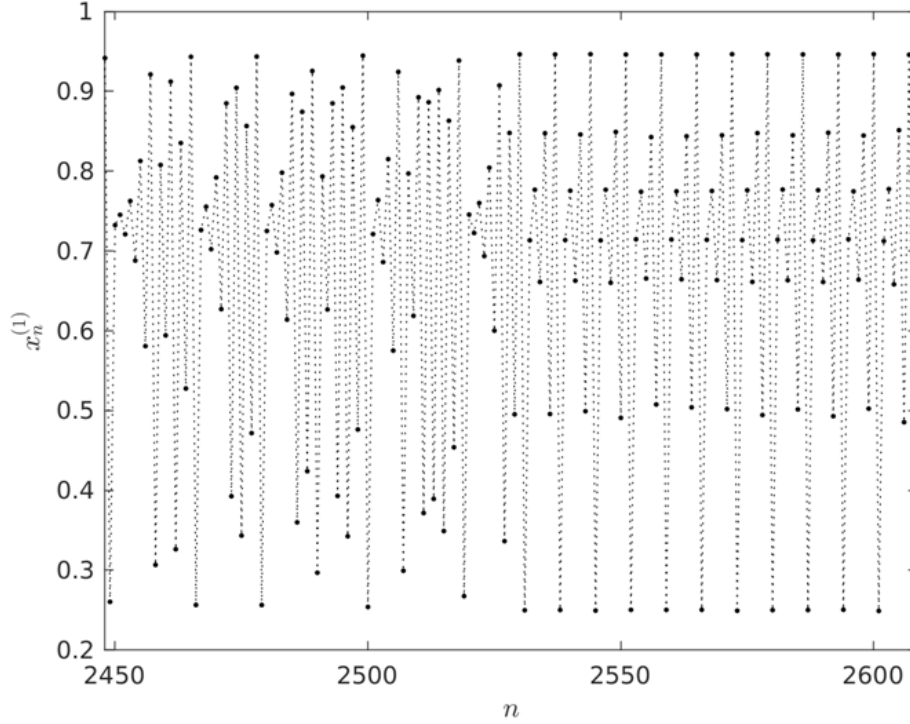
bilidad de fase en osciladores acoplados está directamente relacionada con la varianza de las fases respecto al campo medio [98].

### 5.2.3.1.2. SEGUNDO INTERVALO: $0.35 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.52$

El 92% de las configuraciones de 6 nodos estudiadas presentan una región de gran generación de información (sección 5.2.2.4), donde se iguala la información generada con los mapas aislados o se supera el 95% de esa cota.

En este rango destacado con verde en la fig. 5.21, que corresponde a acoplamientos moderados a intensos, comienzan a aparecer estructuras sincronizadas parciales, donde grupos de nodos logran coordinar sus dinámicas, exhibiendo comportamientos colectivos similares, mientras que otros nodos permanecen desincronizados o siguen patrones diferentes. Esta sincronización parcial refleja un equilibrio entre la tendencia a la independencia individual de los mapas y la influencia del acoplamiento, lo que permite la coexistencia de múltiples dinámicas en el sistema. También se observan bifurcaciones adicionales y comportamientos intermitentes, que se caracterizan por alternancias irregulares entre fases de periodicidad y caos, pero de los que siempre el sistema logra

liberarse después de un cierto período [99, 100].



**Figura 5.24: Intermitencia.** Serie temporal  $x_n^{(1)} = f(n)$  correspondiente a la red completa de 6 nodos con  $\varepsilon = 0.40$  donde se aprecia intermitencia. Aproximadamente, durante los primeros 80 pasos mostrados la señal es aperiódica, para luego estabilizarse en un ciclo de período 7.

La fig. 5.24 muestra una serie temporal  $x_n^{(1)} = f(n)$  correspondiente a la red completa de 6 nodos con  $\varepsilon = 0.40$  donde es evidente la intermitencia. Se puede observar que durante los primeros 80 pasos (aproximadamente) la señal es aperiódica, para luego estabilizarse en un ciclo de período 7.

### 5.2.3.1.3. TERCER INTERVALO: $0.45 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.52$

En el tercer intervalo de la fig. 5.21 (verde intenso) se observa que el 96 % de las configuraciones de 6 nodos estudiadas presenta una región donde se maximiza la transmisión de información (sección 5.2.2.3). Este comportamiento sugiere la existencia de una sincronización global que facilita la eficiencia en el intercambio de información entre los nodos de la red. La dinámica colectiva alcanza un estado aparentemente universal donde se optimiza el flujo de

información: sincronización caótica.

El carácter colectivo del caos implica que las fluctuaciones individuales de los nodos se compensan mutuamente, creando correlaciones a largo alcance que facilitan la propagación de señales coherentes. La alta proporción de configuraciones que optimizan la transmisión de información en este intervalo revela la robustez de este fenómeno. Esto sugiere que la estructura de la red y la intensidad del acoplamiento actúan conjuntamente para promover estados donde la información se transmite eficazmente. Estos niveles de acoplamiento elevado inducen una cuasi-sincronización completa en el sistema, estado óptimo para la transmisión de información y reafirmando que el caos colectivo puede desempeñar un papel fundamental en la eficiencia informacional de sistemas complejos.

#### 5.2.3.2. Todos los acoplamientos: formación de clústeres

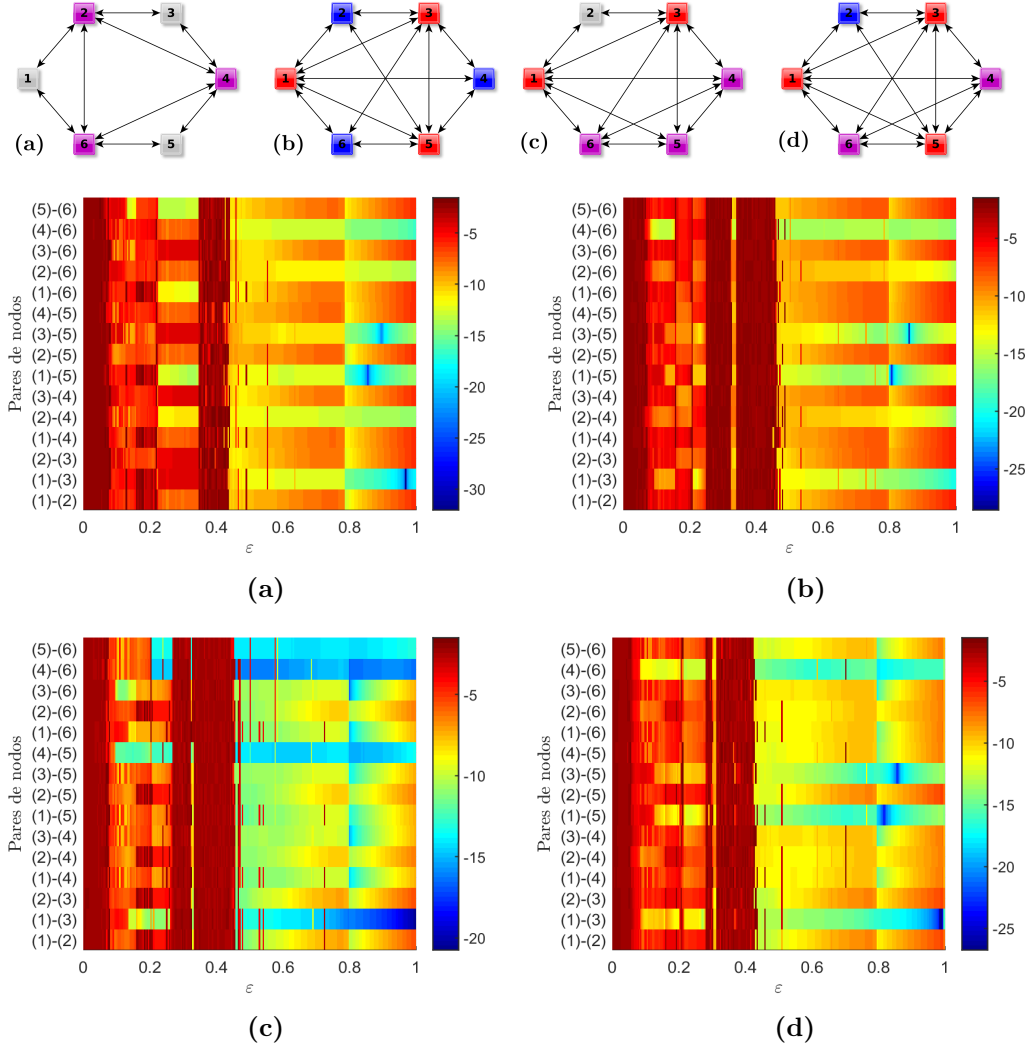
El concepto de *clúster*, refiere a la agrupación de los nodos en subconjuntos altamente interconectados. Los clústeres representan regiones en la red donde los nodos exhiben comportamientos similares o están estrechamente vinculados entre sí [17], lo que puede tener importantes implicaciones en términos de estabilidad, robustez y propagación de información en el sistema.

Aquí se analiza cómo se relacionan los grados de los nodos con la formación de clústeres en las redes de mapas logísticos estudiadas. La varianza entre pares de nodos,  $\sigma_{ij}^2$  (ec. (3.8)), permite comparar la dinámica de los diferentes mapas e identificar la formación de clústeres.

Como representativas del total de casos estudiados, en la fig. 5.25 se muestra el comportamiento de los nodos en 4 configuraciones particulares.

En el panel 5.25(a) se representa el caso en que los nodos impares tienen grado  $d = 2$  (CLÚSTER A) y los pares  $d = 4$  (CLÚSTER B). A medida que se aumenta el acople puede observarse cómo la varianza entre los nodos de diferentes clústeres se incrementa, como es el caso de los pares de nodos [(1)-(2)], [(2)-(5)] o [(5)-(6)]. A su vez se distingue que la varianza entre nodos del mismo grupo disminuye, como es el caso de los pares [(1)-(3)], [(2)-(4)] o [(4)-(6)], por ejemplo.

El panel 5.25(b) muestra otra configuración en donde también pueden observarse dos grupos, el de los nodos impares que tienen grado  $d = 5$  (CLÚSTER A) y el de los pares con  $d = 3$  (CLÚSTER B). Al igual que en el caso ante-



**Figura 5.25: Formación de clústeres en redes no regulares.** Logaritmo de la varianza entre pares de nodos (ec. (3.8)),  $\log(\sigma_{ij}^2)$ , para 4 redes no regulares de 6 nodos, donde se puede identificar la formación de clústeres.

rior, se observa que a medida que aumenta el acople, la varianza entre nodos pares e impares (es decir, de diferentes clústeres) se incrementa, mientras que la de los nodos de un mismo clúster disminuye. Esto conduce a un diagrama muy similar al anterior, ya que, aunque con más enlaces, los clústeres son los mismos en ambos casos.

En el panel 5.25(c) la configuración representada tiene 3 grupos de nodos, que se denominan:

- CLÚSTER A: nodos 1 y 3, de grado  $d = 5$ ,
- CLUSTER B: nodos 4, 5 y 6, de grado  $d = 4$ , y

- CLÚSTER C, formado únicamente por el nodo 2 de grado  $d = 2$ .

Puede observarse que la varianza se hace mínima entre los nodos del CLÚSTER A, el par [(1)-(3)], así como entre los nodos que comparten el CLÚSTER B, [(4)-(5)], [(4)-(6)] y [(5)-(6)], y se maximiza para cualquier otra combinación de nodos, es decir, entre nodos interclúster.

Finalmente, en el panel 5.25(d) la configuración representada también tiene 3 grupos de nodos, que se designarán:

- CLÚSTER A: nodos 1, 3 y 5 de grado  $d = 5$ ,
- CLUSTER B: nodos 4, y 6, de grado  $d = 4$ , y
- CLÚSTER C, formado únicamente por el nodo 2 de grado  $d = 3$ .

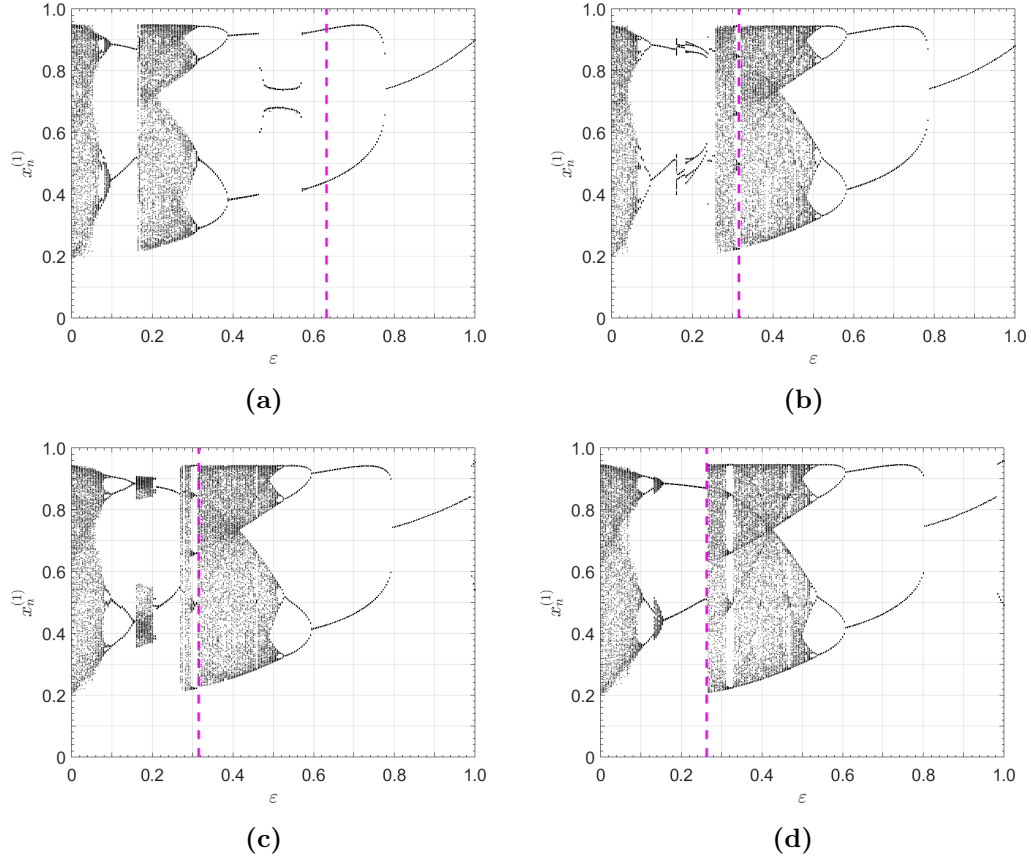
Se observa que la varianza se minimiza entre los nodos del CLÚSTER A, específicamente [(1) – (3)], [(1) – (5)] y [(3) – (5)], así como entre los nodos [(4) – (6)] que constituyen el CLÚSTER B. En contraste, la varianza se maximiza para cualquier otra combinación de nodos, es decir, entre aquellos que pertenecen a clústers distintos.

### 5.2.3.3. Acoplamiento crítico: cuasi-sincronización

El acoplamiento crítico refiere al nivel de interconexión entre los nodos de una red en el cual se producen cambios cualitativos en el comportamiento colectivo del sistema, es decir, es el punto en el que la red experimenta una bifurcación en su dinámica global. Esa transición puede conducir a la formación de clústeres.

En esta sección se explora el vínculo entre el acoplamiento crítico y la formación de clústeres [101] en las redes de mapas logísticos descriptas. Se analizan los efectos de diferentes niveles de acoplamiento en la dinámica colectiva de la red y se investiga cómo la formación de clústeres influye en la emergencia de propiedades colectivas y la sincronización de los nodos.

La fig. 5.26 ilustra cómo el acoplamiento crítico, calculado numéricamente (ec. (2.31)), se corresponde con el diagrama de bifurcaciones obtenido experimentalmente en redes regulares de 6 nodos. La línea cortada (magenta) indica el valor del acoplamiento crítico,  $\varepsilon_c$ , obtenido numéricamente, y se representa sobre el diagrama de bifurcaciones experimental de un mapa  $x_n^{(1)}$ , para configuraciones regulares de grados  $d = 2, 3, 4$  y 5. Puede observarse en el panel (a) que para el anillo ( $d = 2$ ), que es la configuración que presenta menor densidad

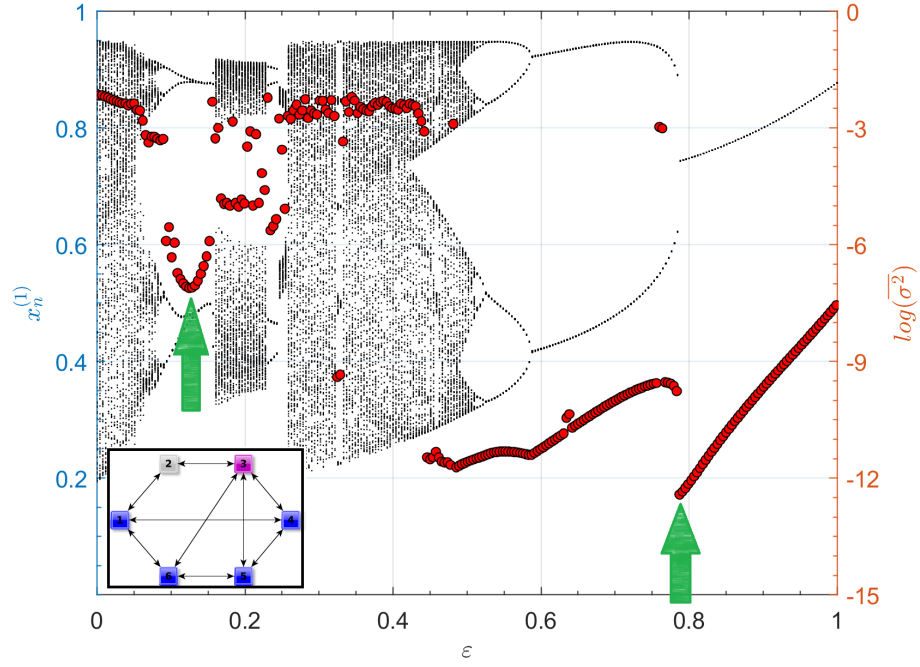


**Figura 5.26: Intensidad de acoplamiento crítico,  $\varepsilon_c$ , en redes regulares de 6 nodos.** Sobre el diagrama de bifurcaciones experimental de un mapa  $x_n^{(1)}$  se representa el valor de  $\varepsilon_c$  obtenido numéricamente (línea cortada magenta) para configuraciones regulares de grados: (a)  $d = 2$ , (b)  $d = 3$ , (c)  $d = 4$  y (d)  $d = 5$ .

de enlaces  $\rho_{anillo} = 0.4$ , el valor de  $\varepsilon_c$  no refleja coincidencia con un cambio significativo en la dinámica del sistema experimental. Para los casos de mayor grado, y por ende mayor densidad de enlaces, se observa progresivamente que el valor de  $\varepsilon_c$  se corresponde con cambios significativos en la dinámica del sistema experimental, representado por el diagrama de bifurcaciones.

En el punto de acoplamiento crítico se espera observar un cambio brusco en la varianza media del sistema,  $\overline{\sigma^2}$  (ec. (3.9)), lo que indicaría una transición en la dinámica de la red. Para determinar experimentalmente los valores de  $\varepsilon_c$  se analizaron exhaustivamente las dinámicas de cada nodo. La fig. 5.27 muestra de qué modo se identifican los valores de acoplamiento que representan esos cambios significativos en la dinámica en términos de  $\overline{\sigma^2}$ .

Para determinar de forma numérica el valor del acoplamiento crítico a partir de la ec. (2.31) se consideró una red de mapas idénticos de parámetro



**Figura 5.27: Mínimos de la varianza media en una red de 6 nodos.** A partir de datos experimentales, sobre el diagrama de bifurcaciones de un mapa se representa  $\log(\overline{\sigma^2})$  (círculos rojos) en función de la intensidad de acoplamiento de un nodo de los 6 que conforman la red que se representa en el panel inferior izquierdo. Las marcas verdes indican mínimos en período 2 y punto fijo.

$r = r_{1_{exp}}$ . Esos valores se presentan en la segunda columna de la tabla 5.2 para el caso de 6 nodos (y en la tabla 2.1 del anexo 2, para el caso de 12 nodos).

Una varianza media baja entre pares de nodos indica que los estados de los nodos son similares o evolucionan de manera similar con el tiempo, como sucede cuando el sistema se aproxima a la sincronización. Una varianza media alta sugiere desincronización, donde los nodos tienen estados muy diferentes y evolucionan de manera distinta. Analizando cómo cambia la varianza media en función de la intensidad de acoplamiento pueden identificarse transiciones dinámicas entre diferentes regímenes de comportamiento, como la transición hacia la sincronización. La fig. 5.28 muestra los resultados de varianza entre las series temporales de cada par de nodos,  $\sigma_{ij}^2$  (ec. (3.8)), para las mismas redes regulares de 6 mapas ( $d = 2, \dots, 5$ ). Al igual que en la fig. 5.26, la línea cortada en color magenta representa el valor del acoplamiento crítico obtenido numéricamente. Resultados análogos se obtuvieron para configuraciones regulares de 12 nodos (anexo 2).



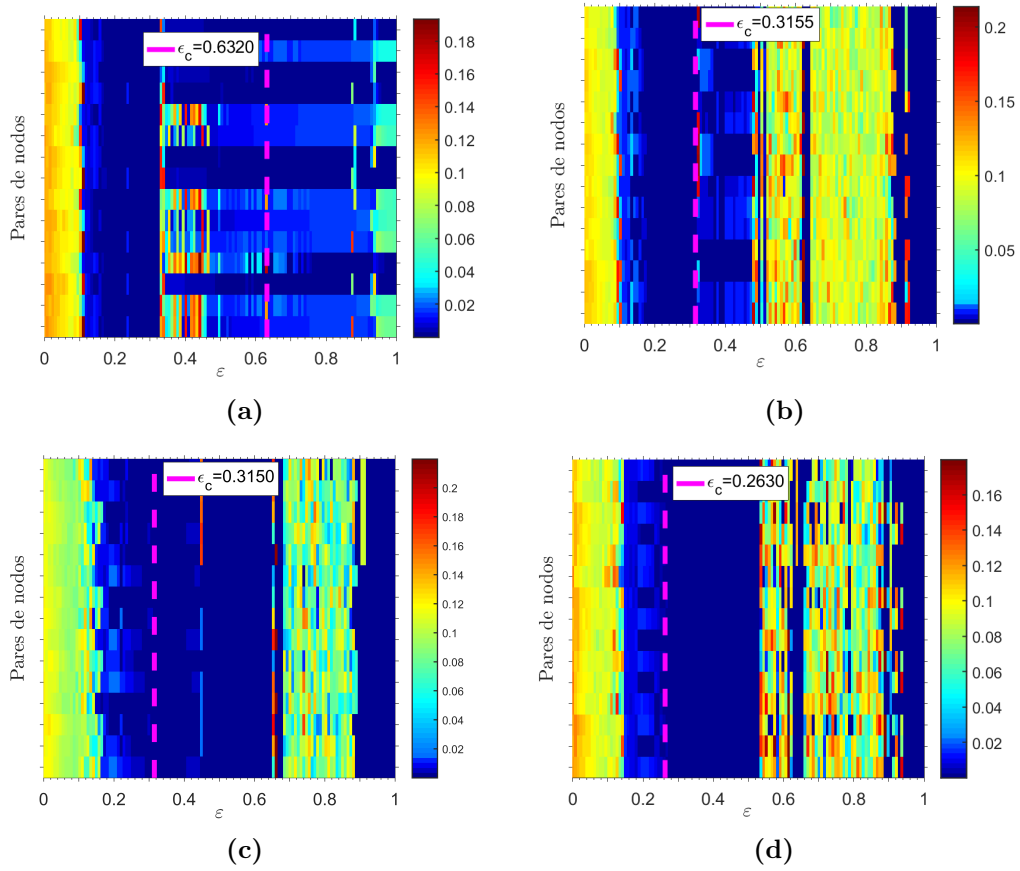
Grado	$\varepsilon_c$ (Num)	$\varepsilon_c$ (Exp)			
		$1^{er} Per\ 2$	$2^o Per\ 2$	$P. fijo$	$Caos\ o\ Per > 2$
2	0.6320	0.0980	0.5765	0.7804	—
3	0.3155	0.0980	—	0.7882	0.4431
4	0.3150	0.2275	—	0.7961	0.4471
5	0.2630	0.1569	—	0.8039	0.4627

**Tabla 5.2: Acoplamiento crítico,  $\varepsilon_c$ .** Valores de la intensidad de acoplamiento crítico obtenidos numéricamente a partir de la ec. (2.31) tomando  $r_i = r_{1exp}$ ,  $\forall i$  y observados experimentalmente a partir de la dinámica de los mapas, para las 4 configuraciones regulares posibles de grado  $d$  de 6 nodos.

La determinación de  $\varepsilon_c$  mediante la Ecuación Maestra de Estabilidad, MSF, constituye una poderosa herramienta teórica para predecir la estabilidad de la sincronización completa en redes de osciladores caóticos idénticos. Sin embargo, los resultados (figs. 5.26 y 5.28) muestran una discrepancia significativa entre el valor de  $\varepsilon_c$  predicho teóricamente y las observaciones experimentales. Esta divergencia sugiere que la aproximación lineal inherente a la MSF (sección 2.3.2), si bien eficaz para el análisis de estabilidad local, podría estar sacrificando información relevante al no capturar completamente la rica dinámica no lineal del sistema experimental. Factores como las perturbaciones (no infinitesimales) presentes en un entorno de laboratorio, el ruido inherente a la implementación electrónica de los mapas logísticos, y las inevitables heterogeneidades paramétricas entre los nodos reales, no son contemplados por la formulación analítica. Identificar esta discrepancia es fundamental para la validación del modelo, para refinar los marcos teóricos y para considerar explícitamente el impacto de estas heterogeneidades en la dinámica de sistemas complejos implementados experimentalmente.

### 5.3. Inferencia de acoplamientos entre mapas

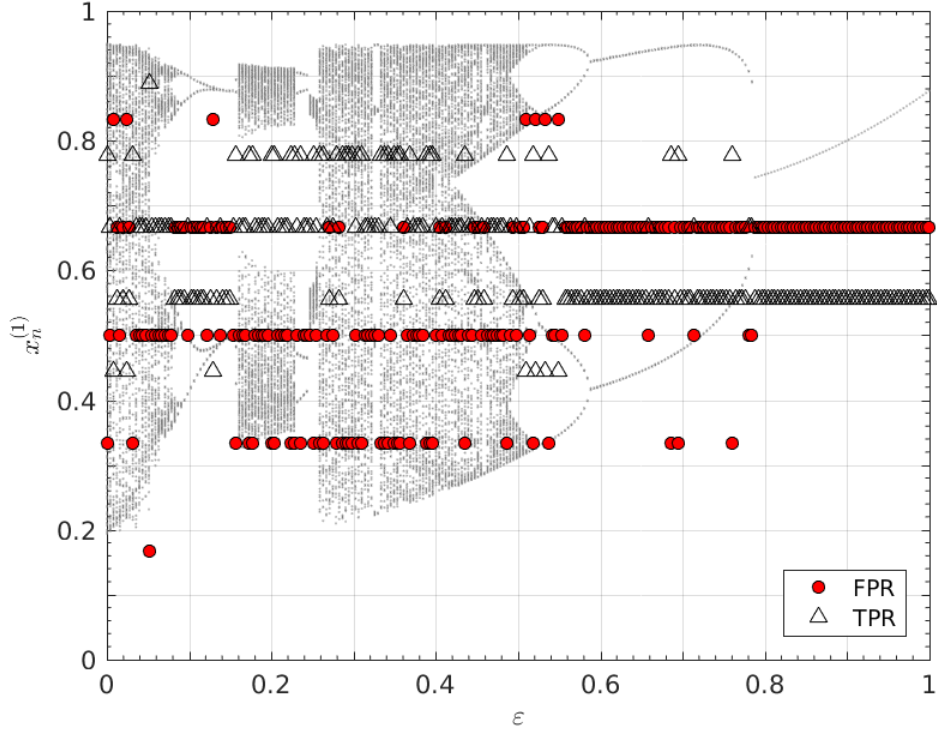
La inferencia de enlaces en una red compleja consiste en predecir la existencia o ausencia de conexiones entre pares de nodos, a partir de información parcial o indirecta del sistema. Una estrategia común para abordar esta tarea consiste en identificar regiones del espacio de parámetros donde los nodos presentan una alta probabilidad de estar conectados, debido a ciertas propiedades compartidas que reflejan relaciones funcionales subyacentes. En esta tesis, se utiliza como base para la inferencia la información mutua entre pares de no-



**Figura 5.28: Varianza entre pares de nodos.** Se representa cómo varía la varianza entre pares de nodos (ec. (3.8)) a medida que se incrementa la intensidad de acoplamiento en redes regulares de 6 nodos, de grados 2 (a), 3 (b), 4 (c) y 5 (d).

dos, que permite cuantificar la dependencia estadística entre sus respectivas trayectorias.

Al identificar regiones de acoplamiento donde la información mutua refleja de forma más fiable la existencia de vínculos estructurales, es posible inferir nuevas conexiones y, por tanto, mejorar la reconstrucción de la topología de la red. Esta sección se centra en caracterizar las regiones de acoplamiento favorables para la inferencia, describiendo sus propiedades comunes y justificando su utilidad en el proceso de reconstrucción. Se puede destacar que, a medida que el sistema se aproxima a la sincronización completa, la información mutua entre nodos tiende a su valor máximo, como se observa en las regiones de las figs. 3.2a y 5.8, dificultando la identificación de interacciones reales. No obstante, bajo este régimen, las trayectorias de los nodos se vuelven prácticamente idénticas, independientemente de si están conectados directamente o no.

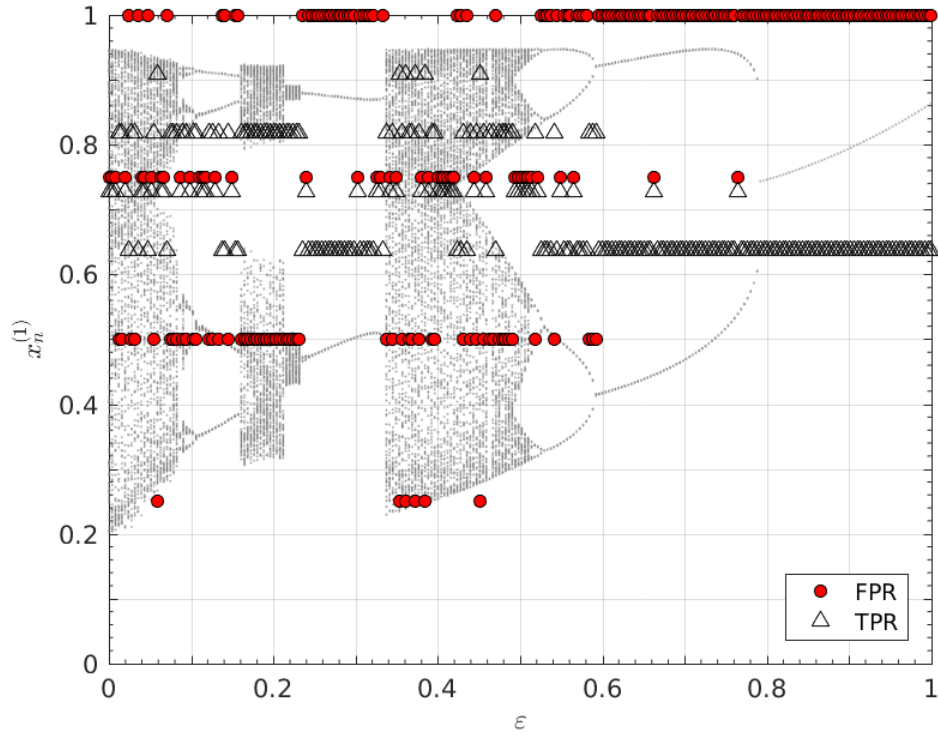


**Figura 5.29: Tasas de inferencia en una red de 6 nodos en función de la intensidad de acoplamiento.** Diagrama de bifurcaciones correspondiente al mapa 1 de la configuración mostrada en la fig. 5.10(a),  $\{x_n^{(1)}\}$  (puntos), a medida que aumenta la intensidad de acoplamiento,  $\varepsilon$ ; simultáneamente se representa la tasa de falsos positivos,  $FPR$  (círculos rojos) y la tasa de verdaderos positivos,  $TPR$  (triángulos negros), ecs. 3.11 y 3.13.

Si  $x_t^{(i)} \approx x_t^{(j)}$  para todo par  $(i, j)$ , entonces  $I(x^{(i)}; x^{(j)})$  será elevado incluso en ausencia de un enlace estructural real. Esto genera un “solapamiento artificial” en las medidas de dependencia, reduciendo la capacidad para discriminar en términos de la información mutua y, por tanto, comprometiendo la precisión de la inferencia. Puede decirse que la sincronización borra la huella distintiva de las interacciones individuales, enmascarando la estructura real de la red.

En este contexto, se identifican dos regiones de interés para la inferencia de conexiones:

1. regiones de acoplamiento débil [ $\varepsilon < 0.1$ ], donde los nodos aún no muestran una dinámica colectiva dominante y las correlaciones reflejan mejor las conexiones directas (región **1** en la fig. 5.21), y
2. regiones de acoplamientos moderados a intensos (región **2** en la fig. 5.21), caracterizada por una gran generación de información, pero sin sincroni-



**Figura 5.30: Diagrama de bifurcaciones de un mapa experimental en una red de 6 nodos junto a los resultados de las tasas de inferencia.** El diagrama de bifurcaciones corresponde al mapa 1 de la configuración mostrada en la fig. 5.10(b),  $\{x_n^{(1)}\}$  (puntos), a medida que aumenta la intensidad de acoplamiento,  $\varepsilon$ ; simultáneamente se representa la Tasa de Falsos Positivos,  $FPR$  (círculos rojos) y la Tasa de Verdaderos Positivos,  $TPR$  (triángulos negros), ecs. 3.11 y 3.13.

zación.

En particular, la fig. 5.29 y, de forma más clara, la fig. 5.30 evidencian que la región comprendida en torno a  $\varepsilon \approx 0.4$ , correspondiente a una zona de alta generación de información pero baja transmisión efectiva, resulta óptima para la inferencia. En esta región, las tasas de verdaderos positivos (TPR) superan ampliamente a las de falsos positivos (FPR), lo que indica una reconstrucción más precisa de la red subyacente.

Estos intervalos de acoplamiento presentan características favorables para la inferencia debido a una combinación de factores. Por un lado, una alta generación de información (caoticidad), y por otro, la ausencia de transmisión de información significativa (sincronización completa). Estas condiciones permiten capturar la complejidad del sistema sin perder la capacidad de identificar y analizar las conexiones y relaciones entre los nodos. La abundancia de in-

formación favorece la inferencia, ya que proporciona los datos necesarios para identificar correlaciones y dependencias entre los nodos. Por otro lado, aunque existe una mínima coordinación parcial entre los nodos, el sistema no alcanza un estado de sincronización completa. Esto es crucial para la inferencia, ya que si los nodos estuvieran completamente sincronizados, todos seguirían la misma dinámica, haciendo imposible distinguir las conexiones y relaciones entre ellos. La sincronización total borraría las diferencias individuales y, por lo tanto, la información necesaria para inferir las interacciones internas de la red.

## 5.4. Caracterización topológica de redes

En esta sección se exponen los resultados publicados en [33], donde se deriva un valor aproximado para la distancia resistiva al encontrar los límites superior e inferior de la ec. (5.4). Se muestra que la aproximación propuesta para la distancia resistiva coincide estrechamente con el valor teórico (ec. (2.21)) en diferentes redes sintéticas y del mundo real. Luego, se aplica la ec. (5.4) para encontrar exactamente la medida de centralidad del vector propio, lo que implica que cualquier diferencia en los cálculos numéricos que aparecen en las aplicaciones prácticas se debe a errores numéricos (como errores de redondeo y truncamiento) y puede ser despreciado.

En [33] se mostró que es posible aproximarse mucho a la distancia resistiva y encontrar exactamente la centralidad del vector propio de las redes ponderadas o no ponderadas con sus espectros de valores propios. El método empleado se basa en los trabajos de Denton et al. [102, 103], quienes han demostrado que las componentes de los vectores propios se pueden recuperar a partir de los espectros de valores propios, que denominan *identidad de vector propio-valor propio*, y es válido para cualquier matriz hermítica (es decir, una matriz cuadrada que es igual a su traspuesta conjugada) con valores propios no degenerados. Esta identidad ha sido descubierta y redescubierta en álgebra lineal durante casi dos siglos, siendo Jacobi (1834) una de las primeras referencias [104]. Específicamente,

$$\left| [\vec{\psi}_n]_i \right|^2 = \frac{\prod_{k=1}^{N-1} [\lambda_n(\mathbf{A}) - \lambda_k(\mathbf{M}_i)]}{\prod_{k=1; k \neq n}^N [\lambda_n(\mathbf{A}) - \lambda_k(\mathbf{A})]}, \quad (5.4)$$

donde  $[\vec{\psi}_n]_i$  es la  $i$ -ésima componente ( $i = 1, \dots, N$ ) del  $n$ -ésimo vector propio

de la matriz  $\mathbf{A}$  asociado al autovalor  $\lambda_n(\mathbf{A})$  (con  $n = 1, \dots, N$  modos), tal que  $\mathbf{A}\vec{\psi}_n = \lambda_n(\mathbf{A})\vec{\psi}_n$ , y  $\lambda_k(\mathbf{M}_i)$  es el  $k$ -ésimo autovalor ( $k = 1, \dots, N-1$ ) de la matriz  $\mathbf{M}_i$ , que se obtiene de  $\mathbf{A}$  eliminando la  $i$ -ésima fila y columna. Además, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que los espectros de valores propios en la ec. (5.4) están ordenados de forma no decreciente; es decir,  $\lambda_1(\mathbf{A}) \leq \lambda_2(\mathbf{A}) \leq \dots \leq \lambda_N(\mathbf{A})$ . En consecuencia, la ec. (5.4) permite determinar los valores de todas las componentes del vector propio de la matriz  $\mathbf{A}$  a partir de sus valores propios.

En este trabajo el análisis se centra en redes no dirigidas, lo que conduce a matrices de adyacencia hermitianas, es decir, simétricas y con entradas no negativas. De este modo,  $A(i, j) = A(j, i) \geq 0$  para todas las entradas ( $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ ), donde  $A(i, j) > 0$  si el nodo  $i$  está conectado al nodo  $j$  y  $A(i, j) = 0$  en caso contrario. En particular, se construyeron redes de resistencias de tamaño pequeño en estructuras *casi* anulares con  $N = 6, 12, 18$  y  $24$  nodos, agregando un enlace para evitar los valores propios degenerados (ver sección 4.2).

La *distancia resistiva*,  $\rho_{theo}$ , requiere conocer los espectros de valores propios y los valores y signos de todas las componentes de los vectores propios. Dado que la identidad de valor propio - vector propio de la ec. (5.4) solo permite el cálculo de valores absolutos, no puede saberse exactamente cómo las diferencias en ec. (2.21) están contribuyendo al valor de  $\rho_{theo}(i, j)$ . Sin embargo, se pueden usar los módulos de los vectores propios de la ec. (5.4) para encontrar los límites superior e inferior. Específicamente, se utiliza la ec. (5.4) para escribir la  $i$ -ésima componente de  $\vec{\psi}_n$  como

$$|[\vec{\phi}_n]_i|^2 = \frac{\prod_{k=1}^{N-1} [\lambda_n(\mathbf{L}) - \lambda_k(\mathbf{M}_i)]}{\prod_{k=1; k \neq n}^N [\lambda_n(\mathbf{L}) - \lambda_k(\mathbf{L})]}, \quad (5.5)$$

donde la matriz  $\mathbf{M}_i$  ahora se obtiene de la matriz laplaciana de la red,  $\mathbf{L}$ , eliminando su  $i$ -ésima fila y columna. Por otro lado, la diferencia entre las coordenadas  $i$ -ésima y  $j$ -ésima para el modo  $n$ -ésimo en la ec. (2.21) es

$$|[\vec{\phi}_n]_i - [\vec{\phi}_n]_j|^2 = |[\vec{\phi}_n]_i|^2 + |[\vec{\phi}_n]_j|^2 - 2[\vec{\phi}_n]_i[\vec{\phi}_n]_j^*, \quad (5.6)$$

donde el último término del producto cruzado tiene un signo desconocido, puede ser positivo o negativo, según el signo de las componentes de cada vector propio.

La ec. (5.5) se emplea de la siguiente manera para aproximar  $\rho_{theo}$ . Se hace

la suma en ec. (2.21) como si solo contuviera términos de productos cruzados positivos o negativos, es decir, usando  $+2|[\vec{\phi}_n]_i| |[\vec{\phi}_n]_j|$  o  $-2|[\vec{\phi}_n]_i| |[\vec{\phi}_n]_j|$ . Cuando solo se suman estos términos de productos cruzados, se genera efectivamente un límite superior para la distancia resistiva, que aquí se nota como  $\rho_{up}(i, j)$ . Análogamente, al restar estos términos se obtiene un límite inferior,  $\rho_{down}(i, j)$ . En este trabajo, usando estos límites se aproxima el valor exacto de  $\rho(i, j)_{theo}$  por su promedio [33], es decir,

$$\rho_{approx}(i, j) = \frac{1}{2} [\rho_{up}(i, j) + \rho_{down}(i, j)], \quad \forall i, j, \quad (5.7)$$

que efectivamente cancela los términos de productos cruzados,

$$\rho_{approx}(i, j) = \sum_{n=2}^N \frac{\left( |[\vec{\phi}_n]_i|^2 + |[\vec{\phi}_n]_j|^2 \right)}{\lambda_n(\mathbf{L})}, \quad \forall i, j. \quad (5.8)$$

Para cuantificar qué tan cerca está  $\rho_{approx}$  del valor exacto de la distancia resistiva  $\rho_{theo}$  [ec. (2.21)], se determina el *error relativo promedio*,

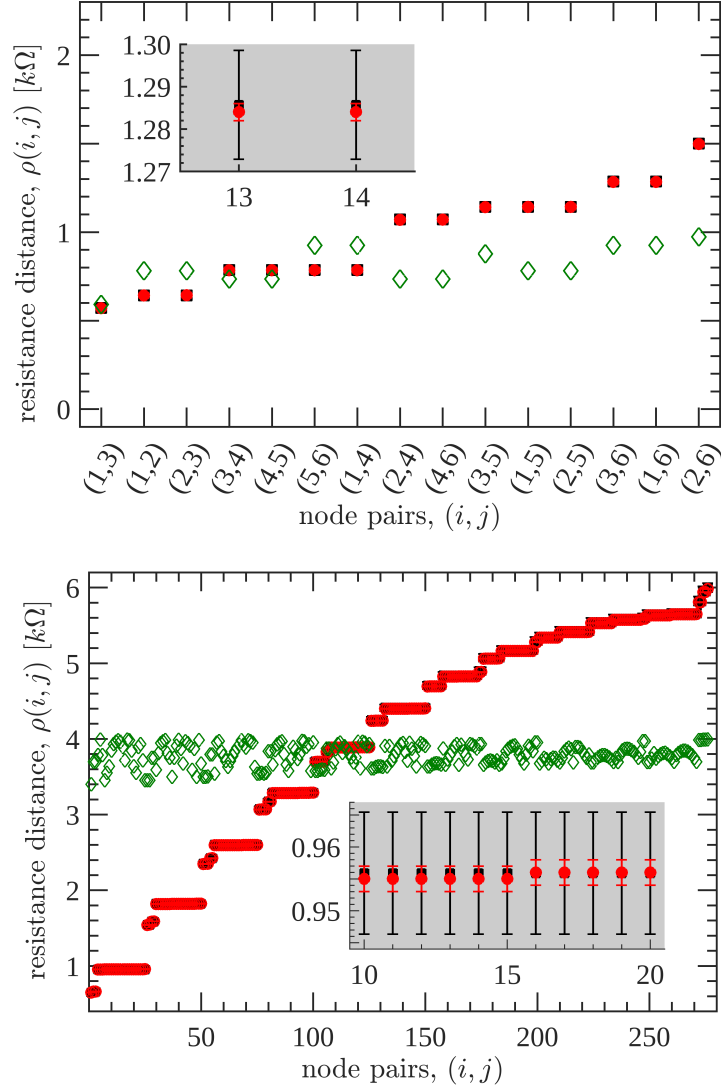
$$\Delta\rho(N) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \left| 1 - \frac{\rho_{approx}(i, j)}{\rho_{theo}(i, j)} \right|. \quad (5.9)$$

Esta expresión ofrece una métrica clara sobre la validez de la aproximación y la robustez del método propuesto.

#### 5.4.1. Distancia resistiva aproximada para circuitos y redes corticales

A modo de ilustración experimental de cómo funciona la ec. (5.8), se diseñaron circuitos de resistencias para estructuras cuasi-anulares, donde se midió su resistencia equivalente,  $\rho_{equiv}$ , para compararlas con los valores teóricos de distancia resistiva (ec. (2.21)) y con la aproximación propuesta (ec. (5.8)). Los resultados se pueden ver en la fig. 5.31. Estas medidas experimentales y teóricas deberían ser las mismas [105], lo cual se corroboró al encontrar una diferencia relativa insignificante entre ellas;  $\Delta\rho = 1 \times 10^{-4}$  para  $N = 6$  y  $2 \times 10^{-6}$  para  $N = 24$ . Estas diferencias insignificantes se pueden apreciar en los recuadros de la fig. 5.31.

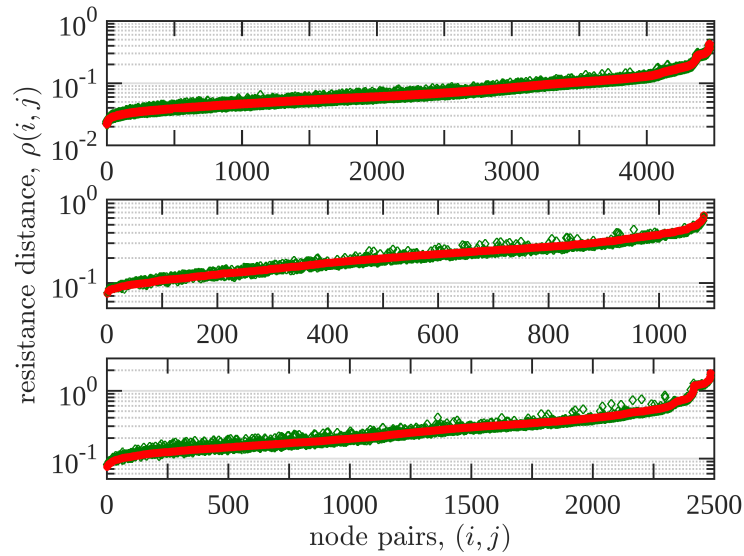
Como los circuitos de resistencias experimentales implementados en esta



**Figura 5.31: Valores de distancia resistiva para redes de resistores en un cuasi-anillo.** El panel superior [inferior] muestra los resultados para  $N = 6$  [ $N = 24$ ] nodos, donde los enlaces son resistencias conectadas en una estructura de anillo con una resistencia adicional entre los nodos 1 y 3. Los círculos rellenos (rojos) muestran las lecturas del óhmetro, los cuadrados negros rellenos muestran los valores teóricos de la distancia de resistencia,  $\rho_{theo}$  (ec. (2.21)), suponiendo resistencias idénticas de  $1 k\Omega$ , y los diamantes sin relleno (verdes) muestran la distancia resistiva obtenida con la aproximación propuesta [ec. (5.8)]. Los enlaces se ordenan de acuerdo con valores crecientes de  $\rho_{theo}$  y no están etiquetados en el panel inferior.



parte de la investigación tienen una estructura regular casi pura (es decir, una red en anillo con un enlace adicional), la aproximación no sigue los valores exactos de distancia de resistencia,  $\rho_{theo}$ . La razón es que las redes regulares puras tienen valores propios degenerados, lo que hace que ec. (5.4) no sea válida. Ambos paneles de la fig. 5.31 muestran que los valores intermedios de  $\rho_{theo}$ , medidos con un óhmetro (círculos rellenos) o calculados a partir de ec. (2.21) (cuadrados rellenos), se aproximan mucho por  $\rho_{approx}$  (rombos sin rellenar), pero sus valores extremos no lo son (es decir, ya sea para  $\rho(i, j)$  pequeños o para  $\rho(i, j)$  grandes). En particular, se observa que  $\Delta\rho \approx 0.25$  para  $N = 6$  (panel superior) y  $\approx 0.5$  para  $N = 24$  (panel inferior). El error relativo promedio,  $\Delta\rho$ , disminuye significativamente para redes complejas, como redes neuronales reales (fig. 5.32).



**Figura 5.32: Distancia resistiva para redes corticales simétricas.** De arriba a abajo, los paneles muestran los valores de distancia resistiva exactos,  $\rho_{theo}$  (círculos rellenos) y aproximados (rombos sin relleno) entre todos los  $N(N - 1)/2$  pares de nodos de las áreas corticales y talámicas del Gato ( $N = 95$  nodos y 1085 enlaces ponderados), las áreas sensoriomotoras y visuales a gran escala del Macaco ( $N = 47$  nodos y 313 enlaces no ponderados), y la conectividad cortical del Macaco ( $N = 71$  nodos y 438 enlaces no ponderados) [88]. Los enlaces se ordenan de acuerdo con valores crecientes de  $\rho_{theo}$ .

La figura 5.32 muestra los resultados de las 3 redes corticales tomadas del conjunto de datos BCT [88]: las áreas corticales y talámicas del gato (panel superior), las áreas sensoriomotoras visuales a gran escala del macaco (panel central) y la conectividad cortical del macaco. Puede verse en cada panel cómo

los  $\rho_{approx}$  (rombos sin relleno) siguen de cerca los valores de  $\rho_{theo}$  (círculos rellenos), los cuales están ordenados según los valores de  $\rho_{theo}$ . Más importante aún, se observa que la red del gato está ponderada (panel superior), lo que muestra que la aproximación también se cumple para las redes ponderadas. Se obtuvo  $\Delta\rho = 3.01\%$  para el panel superior,  $5.68\%$  para el panel central y  $5.92\%$  para el panel inferior, lo que muestra que  $\rho_{approx}$  es una aproximación efectiva del valor de  $\rho_{theo}$  en redes corticales complejas.

### 5.4.2. Discusión sobre distancia resistiva

Los resultados obtenidos muestran que la aproximación propuesta para la distancia resistiva entre dos nodos de una red mejora con el grado de heterogeneidad y el tamaño de la red. Se puede encontrar una razón heurística para esta mejora analizando las propiedades del término cruzado de la ec. (2.21), que se elimina en la ec. (5.8) para obtener la distancia resistiva aproximada. Es decir, se afirma que

$$\text{término cruzado} = \sum_{n=2}^N \frac{[\vec{\phi}_n]_i [\vec{\phi}_n]_j^*}{\lambda_n(\mathbf{L})} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (5.10)$$

Este término es un producto interno entre los vectores propios de la expansión laplaciana (es decir, para  $n > 1$ )  $i$ -ésimas y  $j$ -ésimas coordenadas, normalizadas por el valor propio correspondiente, es decir, el producto interno entre los vectores  $\{[\vec{\phi}_2]_i/\lambda_2, \dots, [\vec{\phi}_N]_i/\lambda_N\}$  y  $\{[\vec{\phi}_2]_j/\lambda_2, \dots, [\vec{\phi}_N]_j/\lambda_N\}$ . También se observa que los autovectores generadores tienen media cero debido a la ortonormalidad y cumplen la propiedad de completitud [106], como se muestra a continuación. Por lo tanto, es probable que el producto entre 2 coordenadas de cualquier modo dado  $n$  cambie de signo para diferentes modos y también sume 0 cuando se toman en cuenta todos los modos (completitud). En consecuencia, estas razones hacen que la suma en la ec. (5.10) sea aproximadamente nula.

Para una red conectada, los vectores propios laplacianos son ortonormales, es decir,  $\vec{\phi}_n \cdot \vec{\phi}_m = \delta_{nm}$ , donde  $\delta_{nn} = 1$  para cualquier  $n$  y  $\delta_{nm} = 0$  para  $n \neq m$ . En particular,  $\vec{\phi}_1 = \vec{1}/\sqrt{N}$ , que es el vector propio asociado al valor propio nulo que abarca el núcleo. Por lo tanto, para  $n > 1$ ,  $0 = \vec{\phi}_n \cdot \vec{\phi}_1 = \sum_{i=1}^N [\vec{\phi}_n]_i / \sqrt{N}$ , lo que significa que todos los  $\vec{\phi}_{n>1}$  tienen media cero. Esto significa que las coordenadas de cualquier vector propio de expansión deben tener signos diferentes.

También por completitud se tiene que

$$\sum_{n=1}^N [\vec{\phi}_n]_i [\vec{\phi}_n]_j^* = \delta_{ij}, \quad (5.11)$$

lo que significa que  $\sum_{n=2}^N [\vec{\phi}_n]_i [\vec{\phi}_n]_j^* = \delta_{ij} - 1/N$ . En general, la ec. (5.10) es una variación de esta ecuación de completitud, que para  $N$  grandes tiende a ser cercana a cero debido a las modulaciones de los valores propios,  $1/\lambda_n$ .

### 5.4.3. Obtención de la centralidad del vector propio a partir de los valores propios

Ahora se muestra brevemente cómo encontrar la *centralidad del vector propio* de la red,  $\vec{\psi}^{(c)} = \vec{\psi}_N = \{\psi_1^{(c)}, \dots, \psi_N^{(c)}\}$ , de ec. (5.4).  $\vec{\psi}^{(c)}$  es el vector propio Perron-Frobenius asociado al valor propio máximo [56] de la matriz de adyacencia,  $\max_{n=1, \dots, N} \{\lambda_n(\mathbf{A})\} = \lambda^{(c)}$ . Esto significa que los componentes de  $\vec{\psi}^{(c)}$  son no negativos, es decir,  $\mathbf{A}\vec{\psi}^{(c)} = \lambda^{(c)}\vec{\psi}^{(c)}$  con  $[\vec{\psi}^{(c)}]_i = \psi_i^{(c)} \geq 0 \forall i$ , y representan la importancia relativa que tiene cada nodo en la red. Más importante aun, esto significa que la ec. (5.4) se puede usar directamente para encontrar sus componentes por

$$\left| [\vec{\psi}^{(c)}]_i \right|^2 = \left| [\vec{\psi}_N]_i \right|^2 = \frac{\prod_{k=1}^{N-1} [\lambda_N(\mathbf{A}) - \lambda_k(\mathbf{M}_i)]}{\prod_{k=1}^{N-1} [\lambda_N(\mathbf{A}) - \lambda_k(\mathbf{A})]}, \quad (5.12)$$

donde se asume (sin pérdida de generalidad) que el orden de los espectros de valores propios no es decreciente; es decir,  $\lambda_1(\mathbf{A}) \leq \lambda_2(\mathbf{A}) \leq \dots \leq \lambda_N(\mathbf{A})$ . En consecuencia, la ec. (5.12) proporciona la medida exacta de centralidad del vector propio para cualquier matriz de adyacencia hermitiana (es decir, para cualquier red ponderada o no ponderada) solo utilizando sus espectros de valores propios.

Esta sección ha detallado cómo la *identidad de vector propio-valor propio* (5.4) permite una aproximación robusta de la distancia resistiva, como se evidenció en las redes analizadas, y también la determinación exacta de la centralidad del vector propio. Se ha demostrado que la precisión de la aproximación de la distancia resistiva mejora con la heterogeneidad y el tamaño de la red, un fenómeno que puede atribuirse a la cancelación heurística del término cruzado en la ecuación (5.10). Los resultados experimentales con circuitos de resistencias, aunque muestran dificultades en redes altamente regulares debido

a valores propios degenerados, corroboran la validez de la aproximación en la mayoría de los casos. La aplicabilidad de este método a redes corticales con diferentes topologías subraya su utilidad general para la caracterización topológica, ofreciendo una forma eficiente de cuantificar propiedades de la red directamente a partir de sus espectros.

## Capítulo 6

# Conclusiones y perspectivas

El mapa logístico, si bien se originó en la descripción de dinámicas poblacionales y posee una estructura sencilla, se destaca por su riqueza dinámica. Esto lo convierte en una herramienta versátil para modelizar fenómenos en diversas áreas del conocimiento. Cuando se extiende a redes de mapas logísticos acoplados, permite además analizar y comprender comportamientos emergentes característicos de sistemas complejos. En este contexto, el sistema experimental de alta precisión empleado en esta tesis, basado en la implementación electrónica de estos mapas acoplados, resulta una potente plataforma experimental. Este sistema ha permitido llevar a cabo estudios de laboratorio controlados de un sistema complejo real, profundizando la comprensión desde un acercamiento empírico a la dinámica caótica. La fiabilidad de la implementación se manifiesta en la reproducción de la dinámica del mapa logístico aislado.

### Acerca de la dinámica aislada de mapas logísticos experimentales

El análisis de la dinámica aislada de los mapas logísticos en la implementación experimental reveló una concordancia con el modelo teórico desde varios aspectos. La validación se sustenta, por un lado, en una comparación de los diagramas de bifurcaciones (fig. 5.1), donde las transiciones de puntos fijos a períodos y, finalmente, al caos, se replican con precisión respecto a los resultados numéricos. De manera similar, los exponentes de Lyapunov (fig. 5.2), que cuantifican la naturaleza caótica del sistema, mostraron un acuerdo notable entre los datos experimentales y las simulaciones.

Pero más aun, la determinación experimental de la constante de Fei-

genbaum, con una desviación promedio del 3.5% respecto al valor teórico  $\delta = 4.6692 \dots$  [47] (tabla 5.1), ofrece una evidencia cuantitativa de la precisión con la que el montaje electrónico reproduce las propiedades universales de los mapas, lo cual valida la viabilidad del sistema como plataforma experimental para el estudio de fenómenos colectivos en redes caóticas.

## Acerca de la dinámica colectiva de mapas acoplados

Al analizar circuitos acoplados en esa misma implementación experimental, las heterogeneidades se manifiestan de maneras que los modelos numéricos propuestos no logran predecir completamente. Los modelos numéricos, en general, se construyen para facilitar la comprensión de ciertos aspectos del sistema, pero en ese proceso parte de su riqueza se pierde. En este trabajo se evidencia que, a pesar de que los modelos numéricos de sistemas acoplados contribuyen a la comprensión del comportamiento del sistema, la complejidad de las dinámicas observadas a nivel experimental normalmente supera la de los modelos sintéticos. Esto refuerza la importancia de los resultados presentados en el desarrollo de la tesis, que provienen del análisis de la implementación electrónica.

Del estudio de la información, los resultados obtenidos indican que las configuraciones que maximizan tanto la generación como la transmisión de información tienden a alcanzar cierto grado de sincronización caótica. La dinámica caótica está vinculada a una alta generación de información, mientras que la sincronización mejora la eficiencia de la transmisión. Se identificaron configuraciones específicas que, a pesar de no tener la máxima densidad de enlaces ( $\rho < 1$ ), maximizan la entropía conjunta condicional,  $CJH$  (ec. 5.1). En particular, esta situación surge en las configuraciones de 6 nodos que se muestran en las figs. 5.10(a) y (b), así como en las configuraciones de 12 nodos. Las diferentes clasificaciones se realizaron a partir de un umbral de información arbitrario,  $\lambda$ . Para una transmisión significativa de información, este umbral  $\langle I \rangle > \lambda = 2.7$  bits se establece para todas las configuraciones, de modo que considere las órbitas que se extienden (uniformemente) más allá de 6 bins de la discretización propuesta para el intervalo del mapa. De igual forma, el umbral para una transmisión de información insignificante se establece en  $0 < \langle I \rangle < \lambda = 0.5$  bits, ya que este valor permite descartar órbitas casi periódicas. Antes de alcanzar la región de sincronización casi completa, todas las configuraciones analizadas presentan una fase intermedia caracterizada por

una alta generación de información en los nodos individuales, pero con una baja transmisión entre ellos. Comprender cómo estas propiedades topológicas influyen en la emergencia de fenómenos complejos constituye un desafío. Asimismo, resultaría interesante evaluar si los patrones dinámicos identificados mediante medidas de información persisten en redes sin componentes cíclicos, ya que los experimentos presentados en esta tesis se basan en configuraciones con al menos una estructura de anillo.

La definición de la entropía conjunta condicional,  $CJH|_{>\lambda}$  (ec. (5.2)), ha permitido cuantificar la generación de información de los mapas cuando el sistema acoplado maximiza su transmisión de información. Como se obtiene de la suma de la entropía condicional la ec. (5.1), los resultados obtenidos para  $CJH|_{>\lambda}$  son robustos a variaciones del acoplamiento. Esta nueva magnitud proporciona un criterio práctico para clasificar las configuraciones, permitiendo identificar dinámicas que se mantienen en un amplio rango de intensidades de acoplamiento, lo cual se hace especialmente relevante en situaciones donde el ajuste fino de los parámetros puede ser imposible.

En la sección 5.2.3.1 se identificaron intervalos en la intensidad de acoplamiento,  $\varepsilon$ , que delimitan comportamientos robustos del sistema acoplado. En ese sentido, el análisis de la correlación entre las señales individuales de los mapas y el campo medio global revela un comportamiento consistente en las distintas configuraciones consideradas, tanto experimentales como numéricas. En todos los casos, se observa que el valor medio del coeficiente de correlación inicial decrece con  $N$ , el tamaño del sistema, siguiendo una ley de potencia (ec. 5.3). Esto muestra una regularidad estructural en la forma en que los nodos se acoplan al conjunto, sugiriendo que, aunque el número total de interacciones en el sistema aumenta, la correlación entre pares de nodos se diluye en la estructura global.

En este sentido, una línea de trabajo podría centrarse en explorar el papel que juega la dilución de la correlación con el tamaño del sistema en el surgimiento de fenómenos emergentes en redes complejas. En particular, cómo esta ley de potencia, que describe el decaimiento de la correlación promedio con el número de nodos, influye en la estabilidad de los regímenes dinámicos observados y en la transmisión de información en la red.

Respecto al pasaje de un estado de generación a otro de simultánea generación y transmisión de información, los resultados sugieren la presencia de una transición de fase con características híbridas. Esto puede atribuirse a las

heterogeneidades inherentes al sistema experimental. En ese sentido puede profundizarse en el estudio de cómo estas heterogeneidades afectan la dinámica de generación y transmisión de información, especialmente en los rangos de acoplamientos intermedios donde la información se genera abundantemente pero se transmite de manera limitada entre nodos. Pueden diseñarse experimentos que permitan cuantificar las fluctuaciones y la susceptibilidad del sistema ante perturbaciones controladas, para caracterizar mejor la naturaleza de esta transición y su impacto en la organización colectiva.

## **Acerca de la inferencia de acoplamientos**

También se identificó el intervalo que presenta características favorables para la inferencia debido a una alta generación de información y la ausencia de sincronización completa. Estas condiciones permiten capturar la complejidad del sistema sin perder la capacidad de identificar y analizar las conexiones y relaciones entre los nodos. La abundancia de información favorece la inferencia, ya que proporciona los datos necesarios para identificar correlaciones y dependencias entre las unidades. Aunque en ese intervalo existe cierta coordinación parcial entre los nodos, el sistema no alcanza una sincronización completa, que eliminaría cualquier posibilidad de inferir las conexiones. Es precisamente la interacción entre la entropía individual y la coherencia colectiva lo que otorga a este régimen su potencial para la inferencia de enlaces.

Una línea de investigación puede centrarse en identificar de forma precisa el intervalo óptimo de inferencia para diferentes tipos de sistemas dinámicos o diagramas de red, desarrollando métricas que capturen simultáneamente la complejidad (en términos de la información) y el grado de sincronización parcial. En el mismo sentido, se puede además investigar la posibilidad de definir una función que caracterice la capacidad de inferencia y explorar cómo se optimiza este intervalo variando los parámetros del sistema, la intensidad de acoplamiento, o incluso la topología de la red. Además, en el contexto experimental donde el ruido y las heterogeneidades son inevitables, un aspecto relevante a investigar es la robustez de los algoritmos de inferencia (en el régimen óptimo) frente a niveles crecientes de ruido y pequeñas heterogeneidades entre los nodos, buscando umbrales a partir de los cuales la inferencia se vuelva inviable. Otra perspectiva es explorar el control de sistemas dinámicos para dirigir su comportamiento hacia este intervalo óptimo de inferencia. Si es po-



sible manipular parámetros o aplicar perturbaciones externas controladas, se podría buscar inducir un estado de alta inferibilidad, facilitando así el mapeo de las conexiones del sistema.

Los resultados sugieren que, al igual que el sistema estudiado, otros sistemas, como el cerebro, podrían operar en una región de máxima inferibilidad. La identificación de un régimen dinámico intermedio que maximiza la generación de información y la inferencia podría ser análogo al régimen crítico hipotetizado para describir el funcionamiento del cerebro [107, 108], donde se optimizan la eficiencia de la comunicación y la capacidad adaptativa. Estudiar esta correspondencia podría ofrecer nuevas herramientas para el análisis de redes neuronales funcionales y la detección de transiciones en sistemas biológicos complejos.

## Acerca de la caracterización topológica de redes

Al estudiar la caracterización topológica, en este trabajo se utilizó la identidad vector-valor propio para expresar medidas de red basadas en vectores propios y/o valores propios, únicamente en términos de los valores propios. Aunque el trabajo presentado en esa sección se centra en análisis de la distancia de resistencia y en cómo usar la identidad para obtener la centralidad del vector propio, no se limita a estas medidas y puede extenderse directamente a cualquier medida topológica que requiera conocer conjuntos de vectores propios. La única limitación del enfoque presentado es tener una red conexa sin valores propios degenerados.

En esa sección se derivó una expresión para aproximar los valores de la distancia de resistencia,  $\rho_{approx}$ , (ec. (5.8)) de una red a partir del espectro de valores propios de su matriz laplaciana. Utilizando redes de resistencias de pequeño tamaño implementadas experimentalmente, se explicó el funcionamiento de la aproximación propuesta (fig. 5.31). Allí se muestra la eficiencia de la aproximación, que coincide con los valores exactos de la distancia de resistencia, siendo probada en redes de conectividad del mundo real (fig. 5.32). Puede aproximarse adecuadamente la distancia de resistencia de las redes corticales analizadas, con diferencias relativas inferiores al 6 %. Además, se demostró que la centralidad del vector propio de una red puede tener una expresión que solo depende de los valores propios de su matriz de adyacencia. Cuando los valores propios no son degenerados, la expresión permite obtener la medida de cen-

tralidad del vector propio sin necesidad de obtener los vectores propios de la matriz de adyacencia, lo cual sería computacionalmente exigente en caso de redes de gran tamaño. La medida de centralidad del vector propio tiene en la investigación biomédica actual una especial relevancia [109, 110, 111, 112, 113]. Esta formulación adquiere una utilidad creciente a medida que el tamaño y la complejidad de las redes corticales analizadas se incrementan.

Como se ha expuesto, este trabajo de tesis abre múltiples líneas de investigación futura. Los resultados robustos obtenidos experimentalmente plantean interrogantes relevantes sobre las características estructurales de las redes que favorecen o inhiben comportamientos emergentes. La implementación electrónica descrita y empleada en este trabajo abre posibilidades adicionales, como explorar configuraciones dinámicas adaptativas, donde algunos parámetros de la red puedan ajustarse en tiempo real en función de la respuesta dinámica. En este sentido, puede extenderse el análisis a modelos más generales de acoplamiento y adaptación, y explorar otros escenarios de aplicación en los que la dinámica y el acople evolucionen conjuntamente. Aun manteniendo fijo el parámetro local,  $r$ , y utilizando una única intensidad de acoplamiento global,  $\varepsilon$ , el sistema experimental permite ensayar estrategias de control como acoplamiento intermitente o retardado, retroalimentación basada en el campo medio o ajustes dinámicos de  $\varepsilon$  orientados a maximizar la transmisión de información o a controlar la aparición de sincronía global. Estas estrategias amplían el alcance experimental del sistema y abren nuevas perspectivas para el estudio y diseño de redes adaptativas en contextos reales, profundizando la comprensión de la interacción entre estructura, dinámica e información en sistemas complejos.

# Capítulo 7

## Publicaciones y contribuciones

### Artículos

- “Observation of bifurcations and hysteresis in experimentally coupled logistic maps” [59]
- “Finding the resistance distance and eigenvector centrality from the network’s eigenvalues” [33]
- “Non-trivial generation and transmission of information in electronically designed logistic-map networks” [32]

### Contribuciones en conferencias

- *‘Emergence of catastrophes in populations competitions’*  
Póster presentado en DDays LAC 2018
- *‘Emergence of catastrophes in populations competitions’*  
Póster presentado en XVI Reunión de la SUF 2018
- *“Observation of bifurcations and hysteresis in experimentally coupled logistic maps”*  
Póster presentado en Statistical Physics of Complex Systems, ICTP, 2021
- *“Non-trivial generation and transmission of information in electronically designed logistic-map networks”*  
Conferencia aceptada en LANET 2025

# Referencias bibliográficas

- [1] Strogatz SH. «Exploring complex networks». En: *nature* 410.6825 (2001), págs. 268-276.
- [2] Kauffman SA. «The origins of order: Self-organization and selection in evolution». En: *Spin glasses and biology*. World Scientific, 1992, págs. 61-100.
- [3] Kaneko K. «Spatiotemporal chaos in one-and two-dimensional coupled map lattices». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 37.1-3 (1989), págs. 60-82.
- [4] Arthur WB. «Complexity and the economy». En: *Handbook of Research on Complexity*. Edward Elgar Publishing, 2009.
- [5] Albert R y Barabási AL. «Statistical mechanics of complex networks». En: *Reviews of modern physics* 74.1 (2002), pág. 47.
- [6] Strogatz SH. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, 2018.
- [7] Arenas A y col. «Synchronization in complex networks». En: *Physics reports* 469.3 (2008), págs. 93-153.
- [8] Kaneko K. «Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 41.2 (1990), págs. 137-172. ISSN: 0167-2789. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(90\)90119-A](https://doi.org/10.1016/0167-2789(90)90119-A). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016727899090119A>.
- [9] Bohr T y Christensen OB. «Size dependence, coherence, and scaling in turbulent coupled-map lattices». En: *Physical review letters* 63.20 (1989), pág. 2161.
- [10] May R. «Simple mathematical models with very complicated dynamics». En: *Nature* 261 (1976), págs. 459-467.

- [11] Kaneko K. «Period-doubling of kink-antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled logistic lattice: towards a prelude of a “field theory of chaos”». En: *Progress of Theoretical Physics* 72.3 (1984), págs. 480-486.
- [12] Newman M. *Networks: An Introduction*. 1.<sup>a</sup> ed. Oxford University Press, 2010.
- [13] Erdős P y Rényi A. «On random graphs I». En: *Publ. math. debrecen* 6.290-297 (1959), pág. 18.
- [14] Watts DJ y Strogatz SH. «Collective dynamics of ‘small-world’ networks». En: *nature* 393.6684 (1998), págs. 440-442.
- [15] Barabási AL y Albert R. «Emergence of scaling in random networks». En: *science* 286.5439 (1999), págs. 509-512.
- [16] Dörfler F y Bullo F. «On the Critical Coupling for Kuramoto Oscillators». En: *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 10.3 (2011), págs. 1070-1099. DOI: [10.1137/10081530X](https://doi.org/10.1137/10081530X). eprint: <https://doi.org/10.1137/10081530X>. URL: <https://doi.org/10.1137/10081530X>.
- [17] El-Nashar HF y col. «Transition to complete synchronization in phase-coupled oscillators with nearest neighbor coupling». En: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 19.1 (2009), pág. 013103.
- [18] Martí AC y Masoller C. «Delay-induced synchronization phenomena in an array of globally coupled logistic maps». En: *Phys. Rev. E* (2003). Ed. por Society AP. DOI: [10.1103/PhysRevE.67.056219](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.67.056219). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.67.056219>.
- [19] Manrubia SC y Mikhailov AS. «Mutual synchronization and clustering in randomly coupled chaotic dynamical networks». En: *Physical review E* 60.2 (1999), pág. 1579.
- [20] Schreiber T. «Measuring information transfer». En: *Physical review letters* 85.2 (2000), pág. 461.
- [21] Rinaldi SM. «Modeling and simulating critical infrastructures and their interdependencies». En: *37th Annual Hawaii International Conference on System Sciences, 2004. Proceedings of the*. IEEE. 2004, 8-pp.

- [22] Sporns O, Tononi G y Kötter R. «The human connectome: a structural description of the human brain». En: *PLoS computational biology* 1.4 (2005), e42.
- [23] Shannon CE. «A mathematical theory of communication». En: *The Bell System Technical Journal* 27.4 (1948), págs. 623-656. DOI: [10.1002/j.1538-7305.1948.tb00917.x](https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb00917.x).
- [24] Margolin AA y col. «ARACNE: an algorithm for the reconstruction of gene regulatory networks in a mammalian cellular context». En: *BMC bioinformatics*. Vol. 7. Springer. 2006, págs. 1-15.
- [25] Hanski I. «Metapopulation dynamics». En: *Nature* 396.6706 (1998), págs. 41-49.
- [26] Pecora LM y Carroll TL. «Synchronization in chaotic systems». En: *Physical review letters* 64.8 (1990), pág. 821.
- [27] Boccaletti S y col. «The synchronization of chaotic systems». En: *Physics reports* 366.1-2 (2002), págs. 1-101.
- [28] Uhlhaas PJ y Singer W. «Neural synchrony in brain disorders: relevance for cognitive dysfunctions and pathophysiology». En: *neuron* 52.1 (2006), págs. 155-168.
- [29] Baptista MS y Kurths J. «Chaotic channel». En: *Phys. Rev. E* 72 (4 oct. de 2005), pág. 045202. DOI: [10.1103/PhysRevE.72.045202](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.045202). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.72.045202>.
- [30] Pisarchik A y col. «Experimental approach to the study of complex network synchronization using a single oscillator». En: *Physical Review E* 79.5 (2009), pág. 055202.
- [31] Dorogovtsev SN y Mendes JF. «Evolution of networks». En: *Advances in physics* 51.4 (2002), págs. 1079-1187.
- [32] Gutiérrez C, Cabeza C y Rubido N. «Non-trivial generation and transmission of information in electronically designed logistic-map networks». En: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 35.3 (mar. de 2025), pág. 033151. ISSN: 1054-1500. DOI: [10.1063/5.0238711](https://doi.org/10.1063/5.0238711). eprint: [https://pubs.aip.org/aip/cha/article-pdf/doi/10.1063/5.0238711/20451891/033151\\_1\\_5.0238711.pdf](https://pubs.aip.org/aip/cha/article-pdf/doi/10.1063/5.0238711/20451891/033151_1_5.0238711.pdf). URL: <https://doi.org/10.1063/5.0238711>.

- [33] Gutiérrez C y col. «Finding the resistance distance and eigenvector centrality from the network's eigenvalues». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 569 (2021), pág. 125751.
- [34] Strogatz S. *Non linear Dynamics and Chaos*. 1.<sup>a</sup> ed. Vol. 1. Addison Wesley, 1994.
- [35] Alligood K, D. Sauer T y A. Yorke J. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. 1.<sup>a</sup> ed. Vol. 1. Springer, 1996.
- [36] Poincaré H. «Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation». En: *Acta Mathematica* 7.1 (dic. de 1885), págs. 259-380. ISSN: 1871-2509. DOI: [10.1007/BF02402204](https://doi.org/10.1007/BF02402204). URL: <https://doi.org/10.1007/BF02402204>.
- [37] Layek G. *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*. 1.<sup>a</sup> ed. Vol. 1. Springer, 2015.
- [38] Guckenheimer J. «Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps». En: *Communications in Mathematical Physics* 70.2 (jun. de 1979), págs. 133-160. ISSN: 1432-0916. DOI: [10.1007/BF01982351](https://doi.org/10.1007/BF01982351). URL: <https://doi.org/10.1007/BF01982351>.
- [39] Lyapunov A. «The general problem of the stability of motion (in Russian)». En: *Kharkov Mathematical Society* (1892).
- [40] Kantz H y Schreiber T. *Nonlinear time series analysis*. Vol. 7. Cambridge university press, 2004.
- [41] Shivamoggi BK. *Nonlinear Dynamics and Chaotic Phenomena: An Introduction*. 2.<sup>a</sup> ed. Vol. 1. Springer, [2014].
- [42] Poulin V y Touchette H. «On a generalization of the logistic map». En: (2008). URL: <https://arxiv.org/abs/nlin/0003017v1>.
- [43] Mandelbrot BB. «The fractal geometry of nature/Revised and enlarged edition». En: *New York* (1983).
- [44] Ngouonkadi EM y col. «Bifurcations and multistability in the extended Hindmarsh–Rose neuronal oscillator». En: *Chaos, Solitons & Fractals* 85 (2016), págs. 151-163. ISSN: 0960-0779. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2016.02.001>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077916300327>.

- [45] Hohl A y Gavrielides A. «Bifurcation Cascade in a Semiconductor Laser Subject to Optical Feedback». En: *Phys. Rev. Lett.* 82 (6 feb. de 1999), págs. 1148-1151. DOI: [10.1103/PhysRevLett.82.1148](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.1148). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.1148>.
- [46] Myrberg P. «Sur l'itération des polynomes réels quadratiques». En: *J. Math. Pures Appl.* 41 (1962), págs. 339-351.
- [47] Feigenbaum MJ. «Quantitative universality for a class of nonlinear transformations». En: *Journal of Statistical Physics* 19.1 (jul. de 1978), págs. 25-52. ISSN: 1572-9613. DOI: [10.1007/BF01020332](https://doi.org/10.1007/BF01020332). URL: <https://doi.org/10.1007/BF01020332>.
- [48] Giglio M, Musazzi S y Perini U. «Transition to Chaotic Behavior via a Reproducible Sequence of Period-Doubling Bifurcations». En: *Phys. Rev. Lett.* 47 (4 jul. de 1981), págs. 243-246. DOI: [10.1103/PhysRevLett.47.243](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.47.243). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.47.243>.
- [49] Linsay PS. «Period Doubling and Chaotic Behavior in a Driven Anharmonic Oscillator». En: *Phys. Rev. Lett.* 47 (19 nov. de 1981), págs. 1349-1352. DOI: [10.1103/PhysRevLett.47.1349](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.47.1349). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.47.1349>.
- [50] Lorenz EN. «Deterministic Nonperiodic Flow». En: *Journal of the Atmospheric Sciences* 20.2 (1963), págs. 130-141. DOI: [10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2). eprint: [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2). URL: [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020%3C0130:DNF%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020%3C0130:DNF%3E2.0.CO;2).
- [51] Rubido N. *Energy transmission and synchronization in complex networks: Mathematical principles*. Springer, 2015.
- [52] Klein DJ y Randić M. «Resistance distance». En: *Journal of mathematical chemistry* 12 (1993), págs. 81-95.
- [53] Kirchhoff G. *Vorlesungen über mechanik*. Vol. 1. ed. by W.Wien, Leipzig, Germany., 1864.
- [54] Chung F. «Spectral Graph Theory (American Mathematical Society, Providence, RI)». En: (1997).
- [55] Xiao W y Gutman I. «Resistance distance and Laplacian spectrum». En: *Theoretical chemistry accounts* 110 (2003), págs. 284-289.



- [56] Chang KC, Pearson K y Zhang T. «Perron-Frobenius theorem for non-negative tensors». En: *Communications in Mathematical Sciences* 6.2 (2008), págs. 507-520.
- [57] Bonacich P. «Power and centrality: A family of measures». En: *American journal of sociology* 92.5 (1987), págs. 1170-1182.
- [58] Press WH y col. *Numerical recipes in Pascal: the art of scientific computing*. Vol. 1. Cambridge university press, 1989.
- [59] Gutiérrez C, Cabeza C y Rubido N. «Observation of bifurcations and hysteresis in experimentally coupled logistic maps». En: *Indian Academy of Sciences Conference Series* 3 (2020), págs. 21-30. DOI: [10.29195/iascs.03.01.0007](https://doi.org/10.29195/iascs.03.01.0007).
- [60] Chaté H y Manneville P. «Spatio-temporal intermittency in coupled map lattices». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 32.3 (1988), págs. 409-422. ISSN: 0167-2789. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(88\)90065-6](https://doi.org/10.1016/0167-2789(88)90065-6). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278988900656>.
- [61] Kaneko K. «Lyapunov analysis and information flow in coupled map lattices». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 23.1-3 (1986), págs. 436-447.
- [62] Shabunin A. «Selective properties of diffusive couplings and their influence on spatiotemporal chaos». En: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 31.7 (2021).
- [63] Fick A. «V. On liquid diffusion». En: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 10.63 (1855), págs. 30-39.
- [64] Gancio J y Rubido N. «Critical parameters of the synchronisation's stability for coupled maps in regular graphs». En: *Chaos, Solitons & Fractals* 158 (2022), pág. 112001.
- [65] Pecora LM y Carroll TL. «Master stability functions for synchronized coupled systems». En: *Physical review letters* 80.10 (1998), pág. 2109.
- [66] Fiedler M. «Algebraic connectivity of graphs». En: *Czechoslovak mathematical journal* 23.2 (1973), págs. 298-305.

- [67] De Abreu NMM. «Old and new results on algebraic connectivity of graphs». En: *Linear algebra and its applications* 423.1 (2007), págs. 53-73.
- [68] Wang QA. «Probability distribution and entropy as a measure of uncertainty». En: 41.6 (ene. de 2008), pág. 065004. DOI: [10.1088/1751-8113/41/6/065004](https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/6/065004). URL: <https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/6/065004>.
- [69] Rubido N, Grebogi C y Baptista MS. «Entropy-based generating Markov partitions for complex systems». En: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 28.3 (2018), pág. 033611.
- [70] Cover TM. *Elements of information theory*. John Wiley & Sons, 1999.
- [71] Kadanoff LP. «More is the same; phase transitions and mean field theories». En: *Journal of Statistical Physics* 137 (2009), págs. 777-797.
- [72] Carlu M y col. «A mean-field approach to the dynamics of networks of complex neurons, from nonlinear Integrate-and-Fire to Hodgkin-Huxley models». En: *Journal of Neurophysiology* 123 (dic. de 2019). DOI: [10.1152/jn.00399.2019](https://doi.org/10.1152/jn.00399.2019).
- [73] Pearson K. «VII. Note on regression and inheritance in the case of two parents». En: *proceedings of the royal society of London* 58.347-352 (1895), págs. 240-242.
- [74] Rubido N y Masoller C. «Impact of lag information on network inference». En: *The European Physical Journal Special Topics* 227 (2018), págs. 1243-1250.
- [75] Barreiro M, Marti AC y Masoller C. «Inferring long memory processes in the climate network via ordinal pattern analysis». En: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 21.1 (2011), pág. 013101.
- [76] Eguiluz VM y col. «Scale-free brain functional networks». En: *Physical review letters* 94.1 (2005), pág. 018102.
- [77] Rubido N y col. «Exact detection of direct links in networks of interacting dynamical units». En: *New Journal of Physics* 16.9 (2014), pág. 093010.
- [78] Bianco-Martinez E y col. «Successful network inference from time-series data using mutual information rate». En: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 26.4 (2016), pág. 043102.

- [79] Brown CD y Davis HT. «Receiver operating characteristics curves and related decision measures: A tutorial». En: *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* 80.1 (2006), págs. 24-38.
- [80] Fawcett T. «An introduction to ROC analysis». En: *Pattern recognition letters* 27.8 (2006), págs. 861-874.
- [81] Penfold CA y Wild DL. «How to infer gene networks from expression profiles, revisited». En: *Interface focus* 1.6 (2011), págs. 857-870.
- [82] Mukherjee S y Speed TP. «Network inference using informative priors». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 105.38 (2008), págs. 14313-14318.
- [83] García R. «Inferencia de conectividad en redes neuronales con estructura de *C. elegans*». Tesis de Maestría. Universidad de la República (Uruguay). Facultad de Ciencias - PEDECIBA, 2019.
- [84] García RA y col. «Small-worldness favours network inference in synthetic neural networks». En: *Scientific Reports* 10.1 (2020), pág. 2296.
- [85] Gutiérrez C. «Bifurcaciones e histéresis en mapas logísticos acoplados». Tesis de Maestría. Universidad de la República (Uruguay). Facultad de Ciencias - PEDECIBA, 2019.
- [86] Asad J y col. «On the resistance of an infinite square network of identical resistors—Theoretical and experimental comparison». En: *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* 52 (2006), págs. 365-370.
- [87] Owaidat M, Asad J y Khalifeh J. «Resistance calculation of the decorated centered cubic networks: Applications of the Green's function». En: *Modern Physics Letters B* 28.32 (2014), pág. 1450252.
- [88] Rubinov M y Sporns O. «Complex network measures of brain connectivity: uses and interpretations». En: *Neuroimage* 52.3 (2010), págs. 1059-1069.
- [89] Barabási AL y Albert R. «Emergence of scaling in random networks». En: *science* 286.5439 (1999), págs. 509-512.
- [90] Erdős P, Rényi A y col. «On the evolution of random graphs». En: *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci* 5.1 (1960), págs. 17-60.

- [91] Watts DJ y Strogatz SH. «Collective dynamics of ‘small-world’ networks». En: *nature* 393.6684 (1998), págs. 440-442.
- [92] Mäki-Marttunen T y col. «Structure-dynamics relationships in bursting neuronal networks revealed using a prediction framework». En: *PLoS One* 8.7 (2013), e69373.
- [93] Holland PW y Welsch RE. «Robust regression using iteratively re-weighted least-squares». En: *Communications in Statistics - Theory and Methods* 6.9 (1977), págs. 813-827. DOI: [10.1080/03610927708827533](https://doi.org/10.1080/03610927708827533).
- [94] CRC prensa, ed. *Introducción al modelado matemático y la dinámica caótica*.
- [95] Bettencourt LM y col. «Growth, innovation, scaling, and the pace of life in cities». En: *Proceedings of the national academy of sciences* 104.17 (2007), págs. 7301-7306.
- [96] Bak P, Tang C y Wiesenfeld K. «Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise». En: *Physical review letters* 59.4 (1987), pág. 381.
- [97] Deco G, Jirsa VK y McIntosh AR. «Emerging concepts for the dynamical organization of resting-state activity in the brain». En: *Nature reviews neuroscience* 12.1 (2011), págs. 43-56.
- [98] Ponce-Alvarez A. «Network Mechanisms Underlying the Regional Diversity of Variance and Time Scales of the Brain’s Spontaneous Activity Fluctuations». En: *Journal of Neuroscience* 45.10 (2025).
- [99] Kelso JS. *Dynamic patterns: The self-organization of brain and behavior*. MIT press, 1995.
- [100] Leeuwen C van, Steyvers M y Nooter M. «Stability and intermittency in large-scale coupled oscillator models for perceptual segmentation». En: *journal of mathematical psychology* 41.4 (1997), págs. 319-344.
- [101] Jalan S, Amritkar RE y Hu CK. «Synchronized clusters in coupled map networks. I. Numerical studies.» En: *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* 72 1 Pt 2 (2003), pág. 016211. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:31491578>.
- [102] Denton P y col. «Eigenvectors from eigenvalues: a survey of a basic identity in linear algebra». En: *arXiv preprint arXiv:1908.03795* (2019).

- [103] Denton PB, Parke SJ y Zhang X. «Neutrino oscillations in matter via eigenvalues». En: *Physical Review D* 101.9 (2020), pág. 093001.
- [104] Jacobi CGJ. «De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematis de transformatione et determinatione integralium multiplicium.» En: (1834).
- [105] Rubido N, Grebogi C y Baptista MS. «Structure and function in flow networks». En: *Europhysics Letters* 101.6 (2013), pág. 68001.
- [106] Rubido N, Grebogi C y Baptista MS. «Resiliently evolving supply-demand networks». En: *Physical Review E* 89.1 (2014), pág. 012801.
- [107] O’Byrne J y Jerbi K. «How critical is brain criticality?» En: *Trends in Neurosciences* 45.11 (2022), págs. 820-837.
- [108] Chialvo DR. «Critical brain networks». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 340.4 (2004), págs. 756-765.
- [109] Lohmann G y col. «Eigenvector centrality mapping for analyzing connectivity patterns in fMRI data of the human brain». En: *PloS one* 5.4 (2010), e10232.
- [110] Martínez J y col. «Role of inter-hemispheric connections in functional brain networks». En: *Scientific reports* 8.1 (2018), pág. 10246.
- [111] Binnewijzend MA y col. «Brain network alterations in Alzheimer’s disease measured by eigenvector centrality in fMRI are related to cognition and CSF biomarkers». En: *Human brain mapping* 35.5 (2014), págs. 2383-2393.
- [112] Martínez JH y col. «Anomalous consistency in mild cognitive impairment: a complex networks approach». En: *Chaos, Solitons & Fractals* 70 (2015), págs. 144-155.
- [113] Duinkerken E van y col. «Altered eigenvector centrality is related to local resting-state network functional connectivity in patients with longstanding type 1 diabetes mellitus». En: *Human Brain Mapping* 38.7 (2017), págs. 3623-3636.
- [114] Horowitz P e Hill W. *The Art of Electronics*. 3.<sup>a</sup> ed. Cambridge University Press, 2015.

- [115] LHer A y col. «Electronically-implemented coupled logistic maps». En: *Eur. Phys. J. B* 89 (2016), pág. 81.
- [116] Suneel M. «Electronic circuit realization of the logistic map». En: *Sadhana* 31.1 (feb. de 2006), págs. 69-78. ISSN: 0973-7677. DOI: [10.1007/BF02703801](https://doi.org/10.1007/BF02703801). URL: <https://doi.org/10.1007/BF02703801>.

# ANEXOS

# Anexo 1

## Circuitos

Implementar electrónicamente un mapa logístico implica lograr que el circuito opere según la función logística (ecuación 2.1), y que además tenga una dinámica de tiempo discreto. Para ello, el diseño del circuito empleado está dividido en dos grandes bloques: el *bloque mapa logístico* (BML), el cual efectúa analógicamente la función logística, y el *bloque de muestreo y retención* (BMR), que es el responsable de generar la señal a trazos [114].

### Bloque mapa logístico

Para construir el circuito que implementa la función logísticas se utilizó un multiplicador analógico, una resistencia  $R = 1K\Omega$  con una precisión de 1 % y una resistencia variable  $R_{var}$  en el rango de entre 0 y  $3K\Omega$ .

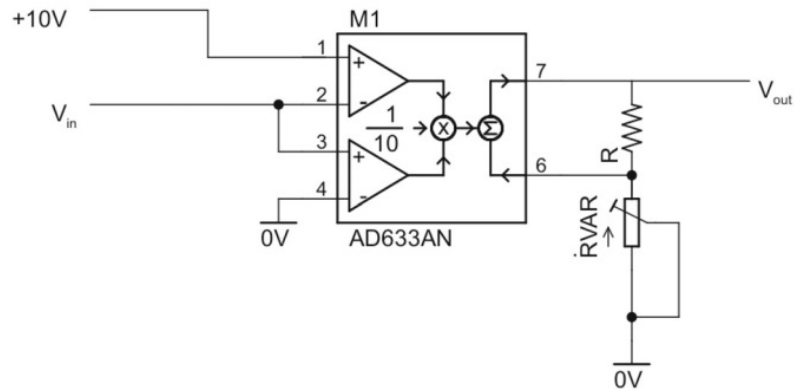
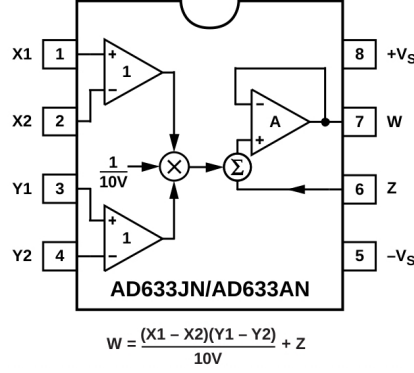


Figura 1.1: Diagrama del circuito electrónico que reproduce la función logística [115].



El multiplicador analógico AD633AN<sup>1</sup>, tiene un rango de entrada de  $\pm 10V$ , de salida  $\pm 11V$ , un voltaje de saturación,  $V_s = 10V$  y permite realizar el producto de dos señales eléctricas analógicas y sumar una tercera (fig. 1.2).



**Figura 1.2: Multiplicador analógico.** Diagrama del multiplicador utilizado para implementar la función logística.

Aplicando las leyes de Kirchhoff, el voltaje a la salida del multiplicador a partir de su ecuación indicada en la fig. 1.2 resulta

$$V_{out} = \frac{V_{in}(V_s - V_{in})}{V_s} + V_6. \quad (1.1)$$

Considerando despreciable la corriente en las entradas, se tiene que

$$V_{out} - V_6 = R.i,$$

y

$$V_{out} = (R + R_{var}).i,$$

de donde

$$V_6 = V_{out}\left(1 - \frac{R}{R + R_{var}}\right). \quad (1.2)$$

Sustituyendo la ec. (1.2) en la (1.1), se obtiene que el voltaje a la salida del multiplicador está dado por

$$V_{out}(t) = \left(1 + \frac{R_{var}}{R}\right) \frac{V_{in}(t)(V_s - V_{in}(t))}{V_s}. \quad (1.3)$$

Los voltajes del circuito electrónico pueden identificarse con las variables de

<sup>1</sup>Hoja de datos disponible en:  
[www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ad633.pdf](http://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ad633.pdf)

estado de la ec. (2.1) mediante la siguiente transformación:  $x_n \rightarrow V_{in}/V_s$ ,  $x_{n+1} \rightarrow V_{out}/V_s$ , y el parámetro de control está dado por

$$r \equiv \left(1 + \frac{R_{var}}{R}\right). \quad (1.4)$$

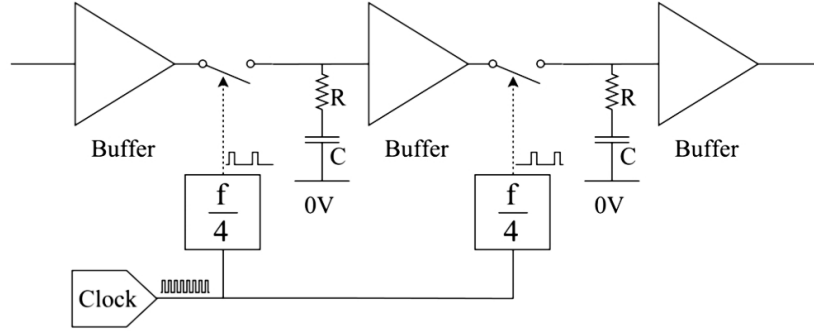
A partir de la ec. (1.3), cuando  $r = 4$ , el voltaje puede superar  $V_s$  debido al ruido electrónico, saturando el multiplicador analógico. En consecuencia, en el análisis para caracterizar el sistema se establece  $r < 4$ , para que la saturación del multiplicador no constituya un problema.

La ec. (1.4) muestra que el control del parámetro  $r$  del mapa se logra a partir de la variación de la resistencia  $R_{var}$ . Para automatizar ese proceso se realizó una implementación electromecánica, que consiste en un motor *paso a paso* controlado desde la tarjeta, el cual se acopla a una resistencia variable. Así, cada posición del motor implica un valor de la variable  $R_{var}$ . De este modo, se logró un sistema automatizado de variación del parámetro del mapa, que permite barrer todo el rango de interés,  $1 \leq r < 4$ , respondiendo adecuadamente para incrementos ( $dr$ ) a partir de  $dr_{min} = 0.003$ . Como ese valor es el *paso mínimo*, se considera también la incertidumbre en el parámetro ( $\delta r$ ) [85].

## Bloque de muestreo y retención

El bloque BMR, muestrea el voltaje de la señal analógica proveniente del BML y mantiene su valor constante durante un período de tiempo específico. De este modo, el resultado es una serie temporal analógica que varía sus valores paso a paso, modelando la evolución discreta de un mapa [115].

Dos conceptos temporales tienen especial importancia en el estudio de circuitos de muestreo y retención (*sample-and-hold*), y son el «tiempo de muestreo» y el «tiempo de retención». El primero marca el tiempo mínimo necesario para almacenar correctamente el valor de la entrada, y en este caso está dado por la frecuencia de muestreo de la tarjeta utilizada. El segundo es el tiempo que el dispositivo retiene la señal, y que está determinado por la que se llamará frecuencia del BMR,  $f_{MR}$ .



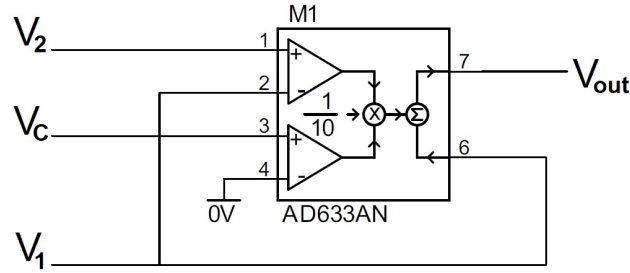
**Figura 1.3: Diagrama esquemático del bloque de muestreo y retención.** Este bloque produce una evolución paso a paso, modelando la evolución discreta de un mapa [115].

Para la implementación de este bloque se utilizaron dos operacionales LF398 representados en la fig. 1.3 por los dos *buffer*s más a la izquierda y un amplificador operacional, el *buffer* de la derecha [116]. Su funcionamiento básicamente consiste en muestrear el voltaje desde el terminal de entrada en un instante, manteniendo su valor en el condensador un cierto tiempo (tiempo de retención) y luego liberar la señal desde el terminal de salida un período de reloj posterior. Cada dos períodos de reloj, los roles de ambos LF398 se intercambian. Este cambio resulta en una evolución discontinua del circuito completo (BML más BMR), donde en cada instante de tiempo se obtiene un valor de  $x_n$ . La frecuencia óptima del reloj, que establece el lapso de tiempo entre valores consecutivos del voltaje de salida, se debe elegir teniendo en cuenta algunas restricciones experimentales. Por un lado, hay un límite dado por el tiempo que demora el BMR en cargar los condensadores y por otro lado, la existencia de capacitancia parásita, corrientes de polarización en los amplificadores operacionales u otros componentes. Además, el tiempo de respuesta para que el resto del circuito se estabilice después de cualquier cambio, es decir, el tiempo requerido por el BML y el acoplamiento para estabilizar la salida, constituye un límite superior para la frecuencia del reloj. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, la frecuencia del reloj debe ser lo más alta posible para reducir el tiempo necesario para realizar los experimentos y obtener series temporales largas. En consecuencia, se ha elegido una frecuencia de trabajo en el rango entre  $10kHz$  y  $20kHz$ .

## Módulo de acoplamiento

Para acoplar dos mapas logísticos se implementó el circuito esquematizado en la fig. 1.4, denominado bloque de acoplamiento (BA).  $V_1$  y  $V_2$  representan el voltaje del mapa 1 y 2 respectivamente, mientras que  $V_C$  respresenta el voltaje de control del acoplamiento.

El BML está conectado al BMR para definir la evolución en tiempo discreto de cada mapa y además está conectado al BA para implementar la evolución acoplada del sistema acuerdo con la ec. (2.27).



**Figura 1.4: Diagrama del circuito de acoplamiento.** El voltaje de salida,  $V_{out}$ , relaciona linealmente ambos voltajes de entrada,  $V_1$  y  $V_2$ , con una intensidad de acoplamiento dada por  $V_C$  [115].

Analizando los voltajes en el multiplicador AD633 de la fig. 1.4, se obtiene  $V_{out}$  [115]

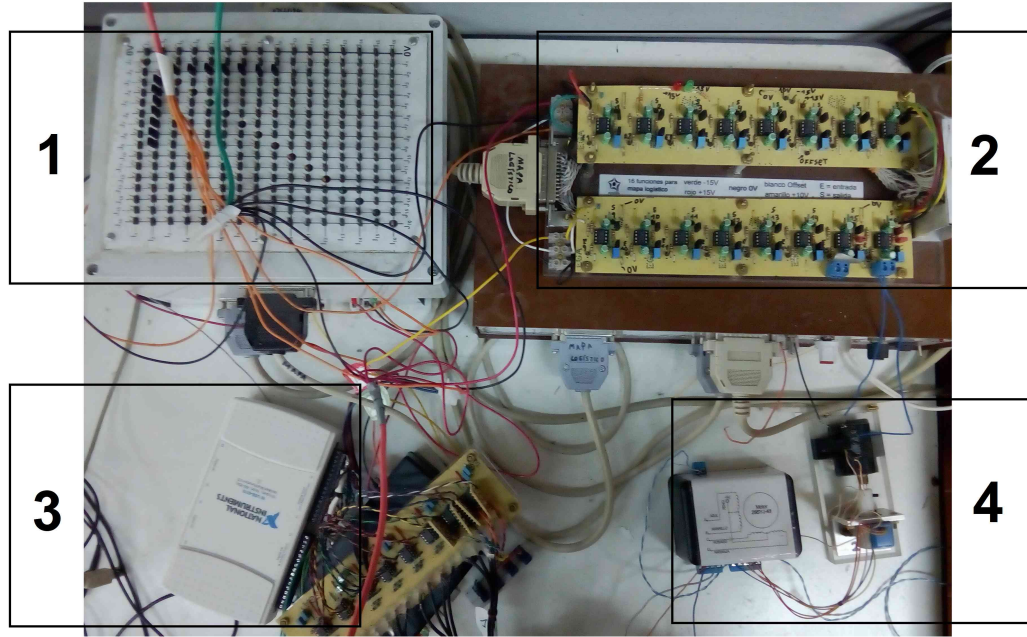
$$V_{out}(t) = \left(1 - \frac{V_C}{V_S}\right) V_1(t) + \frac{V_C}{V_S} V_2(t) \quad (1.5)$$

donde  $V_S$  es el voltaje de saturación del multiplicador,  $V_C$  es el voltaje de control del BA y la intensidad del acople entre los mapas está dada por  $\varepsilon \equiv \frac{V_C}{V_S}$ . Identificando  $x_{out} \rightarrow V_{out}/V_S$ , se observa que la ec. (1.5) corresponde a la ec. (2.27) para 2 mapas.

Para variar la intensidad del acople,  $\varepsilon$ , se empleó una salida analógica de la tarjeta, que tiene una resolución de  $3.5\mu V$ , y por lo tanto los valores de  $\varepsilon$  serán confiables hasta el orden de las millonésimas, siendo más que satisfactorio para los requerimientos del experimento.

Para realizar el acople de  $N$  mapas, se implementó la matriz  $A_{ij}$  del modelo (ec. (2.27)), mediante un dispositivo formado por  $N \times N$  conectores (ver fig. 1.5), que permiten definir como 0 (desconectado) o 1 (conectado) los enlaces entre los  $N$  mapas acoplados. Se implementan además  $N^2$  circuitos de acoplamiento como el descrito en la fig. 1.4, ya que los acoples son bidireccionales.

La fig. 1.5 muestra una fotografía del montaje experimental empleado, en la que se distinguen: (1) la matriz de acoplamiento, representada por  $A_{ij}$  en la ec. (2.27), (2) los mapas logísticos, (3) la tarjeta adquisidora y (4) la implementación que permite el control del parámetro  $r$ .



**Figura 1.5: Montaje experimental.** 1- Matriz de acoplamiento, 2- Mapas logísticos, 3- Tarjeta de adquisición, 4- Sistema de control del parámetro  $r$ .

De este modo, con la calibración y la programación adecuada, se dispone de un sistema automatizado de variación de parámetros y recolección de series temporales [59, 85].



## Anexo 2

### Resultados adicionales

#### Varianza media entre pares de nodos ( $N = 12$ )

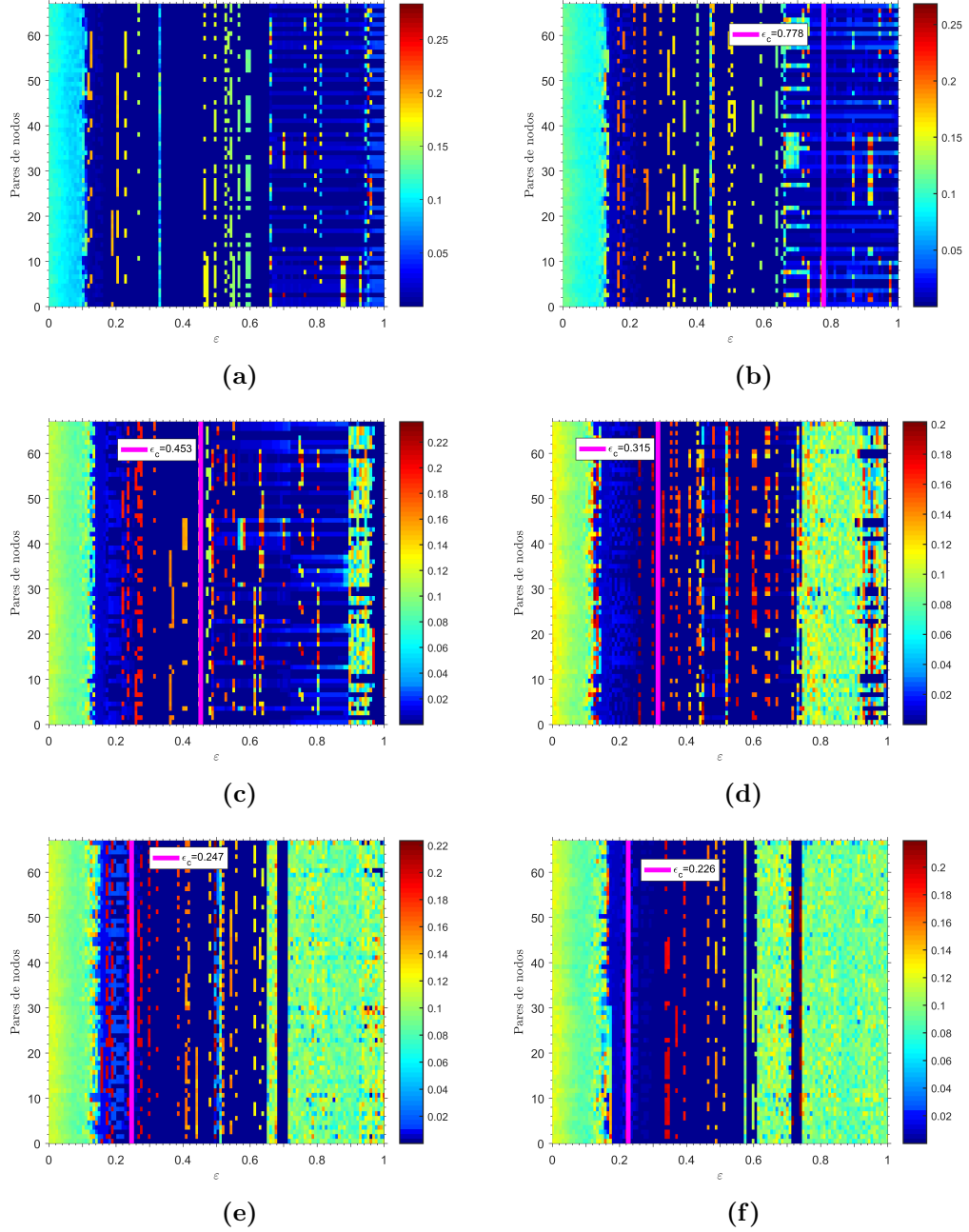
La fig. 2.1 muestra los resultados de varianza media entre pares de nodos, ec. (3.9), para redes regulares de 12 nodos, de grados: 2, 4, 6, 8, 10 y 11. También en este caso la línea continua en color magenta corresponde al valor teórico del acoplamiento crítico (ec. (2.31)) correspondiente a cada configuración.

Para determinar de forma numérica el valor del acoplamiento crítico a partir de la ec. 2.31 se consideró una red de mapas idénticos de parámetro  $r = r_{1exp}$ .

Esos valores se presentan en la tabla 2.1 para el caso de redes de 12 nodos.

$d$	$\varepsilon_c (Num)$	$\varepsilon_c (Exp)$				
		$1^{er} Per\ 2$	$2^{o} Per\ 2$	$3^{er} Per\ 2$	$P. fijo$	$Per > 2$
2	—	0.1059	0.2039	0.6706	0.7804	—
4	0.7780	0.1294	0.2275	0.6353	—	—
6	0.4528	0.1412	—	—	0.8078	0.5059
8	0.3148	0.1451	0.2667	—	0.8000	—
10	0.2466	0.1569	0.2667	—	0.7922	—
11	0.2261	0.1765	—	—	0.8000	0.3608

**Tabla 2.1:** Valores del acoplamiento crítico,  $\varepsilon_c$ , obtenidos numéricamente a partir de la ec. (2.31) y observados experimentalmente a partir de la dinámica de los mapas, para 6 configuraciones de redes regulares de grado  $d$  de 12 nodos.



**Figura 2.1: Varianza entre pares de nodos.** Se representa cómo varía la varianza entre pares de nodos (ec. (3.8)) a medida que se incrementa la intensidad de acoplamiento en redes regulares de 12 nodos, de grados: 2 (a), 4 (b), 6 (c), 8 (d) 10 (e) y 11 (f).