



Trabajo de Tesis de Maestría

Expansividad topológica y algebraica en dinámicas norte-sur

Autor:

José Pedro Mariño

Orientadores:

Dr. Alfonso Artigue

Dra. Mariana Haim

Maestría en Matemática

PEDECIBA

Universidad de la República

3 de agosto de 2025

Resumen

Una dinámica norte-sur en un espacio métrico es un homeomorfismo h que tiene exactamente dos puntos fijos $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$ y es tal que para todo otro punto x del espacio se verifica que $h^{-n}(x)$ converge a $\mathbf{n}$ y que $h^n(x)$ converge a $\mathbf{s}$. Un resultado conocido es que si un espacio métrico compacto admite una dinámica norte-sur expansiva, entonces es numerable. En este trabajo se generaliza este resultado a espacios compactos no necesariamente metrizablees. Además, a partir de la interpretación en términos del anillo de funciones continuas, se extiende la noción a un contexto algebraico: las dinámicas consideradas en este contexto son ciertos automorfismos de un anillo conmutativo con unidad y también se prueba que si un anillo admite una tal dinámica expansiva entonces tiene una cantidad numerable de ideales maximales.

Agradecimientos

A mi familia, por el apoyo incondicional en cada etapa de este recorrido.

A mis orientadores, por su guía, paciencia y gran compromiso.

A todos los profes y compañeros quienes directa o indirectamente contribuyeron a este trabajo.

A Roberto y Vania por la invaluable ayuda que me dieron con la *Beca Osana Abrahamian*.
Donación Markarian a través de la Fundación Julio Ricaldoni.

Índice general

1. Preliminares	5
1.1. Nociones básicas de Topología	5
1.2. Expansividad topológica	7
1.3. Expansividad algebraica	9
1.4. Anillos de funciones continuas	10
2. Dinámicas norte-sur topológicas	13
2.1. Expansividad en intervalos compactos	13
2.2. Dinámicas norte-sur	14
2.3. Dinámicas NST	16
2.4. Dinámicas NST expansivas.	20
2.5. Órbitas	24
3. Dinámicas norte-sur algebraicas.	27
3.1. Dinámicas NSA	27
3.2. Propiedades de las dinámicas NSA fuertes	29
3.3. Dinámicas NSA expansivas	32

Introducción

El artículo *Expansivity on commutative rings* de A. Artigue y M. Haim ([2]) establece un marco teórico unificado para conectar la expansividad desde dos perspectivas fundamentales en este trabajo: la expansividad topológica, clásica en sistemas dinámicos, y la expansividad algebraica, definida en términos de automorfismos en anillos conmutativos con unidad. La clave para esta correspondencia aparece en el artículo [1] que establece la expansividad en términos de refinamientos de cubrimientos.

En este marco, el anillo de funciones continuas $C(X)$ sobre un espacio métrico compacto X es un puente natural entre ambas nociones, ya que todo homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ induce un automorfismo $\alpha_h : C(X) \rightarrow C(X)$ tal que $\alpha_h(f) = f \circ h^{-1}$. Se pueden así trasladar propiedades dinámicas al contexto algebraico. En este trabajo, las dinámicas norte-sur topológicas (*NST*) y las dinámicas norte-sur algebraicas (*NSA*) se inscriben en dicha dualidad: mientras las dinámicas *NST* son homeomorfismos con exactamente dos puntos fijos $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$ y órbitas asintóticas a estos puntos fijos, las *NSA* son automorfismos de un anillo, donde dos ideales maximales M_N y M_S juegan el papel de los puntos fijos $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$.

El resultado principal sobre dinámicas *NST* obtenido en este trabajo es que en espacios compactos T_1 , la expansividad implica que el espacio subyacente es numerable (Teorema 2.10). Además, se prueba que toda dinámica norte-sur expansiva es una potencia de una dinámica con una única órbita viajera (Teorema 2.14), lo que simplifica su clasificación. Este resultado tiene su contraparte en el ámbito algebraico: los automorfismos *NSA* expansivos análogos a las dinámicas *NST* con una sola órbita viajera solo pueden existir en anillos con una cantidad numerable de ideales maximales (Teorema 3.10). El resultado topológico es una generalización de un resultado conocido en espacios métricos; el teorema algebraico no se encuentra en la literatura conocida por el autor.

El trabajo se organiza en tres capítulos. El primero considera los prerequisites topológicos y algebraicos necesarios, destacando además la noción de expansividad y algunas propiedades importantes del anillo $C(X)$. El segundo se centra en las dinámicas *NST*. En este se comienza con una definición de dinámica *NST* que pueda extrapolarse al caso algebraico y se estudia la relación entre estas dinámicas *NST* así definidas y los homeomorfismos h para los cuales existen exactamente dos puntos fijos $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$ y tales que para todo otro punto x del espacio se verifica que $h^n(x) \rightarrow \mathbf{s}$ y $h^{-n}(x) \rightarrow \mathbf{n}$, a este tipo de dinámicas las llamamos acá *dinámicas norte-sur*. Al final de este capítulo se prueba que todo espacio compacto T_1 que admite una dinámica *NST* es numerable. En particular todo espacio métrico compacto que admita una dinámica norte-sur expansiva es numerable. El tercer capítulo aborda los automorfismos *NSA*, definidos en anillos conmutativos con unidad y se obtiene un resultado análogo al obtenido en el contexto topológico, en el sentido de que la existencia de una cierta clase de dinámica *NSA* expansiva implica la numerabilidad de la colección formada por los ideales maximales del anillo.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se exponen algunas nociones de Topología, de Álgebra y de Sistemas Dinámicos que se usarán en los capítulos siguientes.

1.1. Nociones básicas de Topología

Asumimos que el lector tiene conocimientos de Topología General como los abordados en [8]. Recordaremos brevemente algunas cuestiones básicas y algunas otras que a veces no son abordadas en un primer curso de Topología.

La siguiente proposición establece distintas formas de caracterizar una función continua que serán de utilidad más adelante.

Proposición 1.1. *Sean X, Y espacios topológicos y sea $f : X \rightarrow Y$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es continua*
2. *Para todo subconjunto A de X , se tiene que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$*
3. *Para todo cerrado B de Y se tiene que $f^{-1}(B)$ es cerrado en X*
4. *Para cada $x \in X$ y cada abierto V que contiene a $f(x)$ existe un entorno abierto U de x para el cual se verifica que $f(U) \subset V$.*

Decimos que un espacio X tiene una *base numerable* en $x \in X$ si existe una colección numerable $\mathcal{B}$ de abiertos que contienen a x de forma tal que todo abierto que contiene a x contiene al menos un elemento de $\mathcal{B}$. Decimos que un espacio X satisface el *primer axioma de numerabilidad* si existe una base numerable en cada punto de X . En los espacios topológicos que satisfacen el primer axioma de numerabilidad, las sucesiones convergentes son adecuadas para detectar puntos límites y verificar la continuidad de funciones como lo establece la siguiente

Proposición 1.2. *Sea X un espacio topológico.*

1. *Sea A un subconjunto de X . Si existe una sucesión de puntos de A que converge a x , entonces $x \in \overline{A}$; el recíproco se verifica si X satisface el primer axioma de numerabilidad.*

2. Sea $f : X \rightarrow Y$. Si f es continua, entonces para toda sucesión convergente $x_n \rightarrow x$ de puntos de X se verifica que $f(x_n) \rightarrow f(x)$. El recíproco se verifica si X satisface el primer axioma de numerabilidad.

Recordemos ahora la siguiente definición.

Definición 1.1. Sea X un espacio topológico. Decimos que una colección $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos de X es un *cubrimiento* de X si se verifica que

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda.$$

Decimos que X es compacto si todo cubrimiento abierto (*i.e.* todo cubrimiento formado por abiertos de X) tiene un subcubrimiento finito (*i.e.* existe una colección finita de elementos de $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ que también es un cubrimiento de X).

En el caso en que X es compacto y satisface el primer axioma de numerabilidad se tiene el siguiente resultado (que puede obtenerse adaptando la prueba dada en [8, §28] para el caso en que X es metrizable).

Proposición 1.3. Si X es un espacio compacto que verifica el primer axioma de numerabilidad, entonces toda sucesión de puntos de X posee una subsucesión convergente.

Definición 1.2. Decimos que un espacio topológico es T_1 si dados dos puntos distintos $x, y \in X$ es posible encontrar abiertos U_x, U_y conteniendo a x y a y respectivamente, de forma tal que $y \notin U_x$ y $x \notin U_y$.

Una condición necesaria y suficiente para que un espacio topológico sea T_1 es que los conjuntos con un elemento sean cerrados.

Definición 1.3. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos familias de conjuntos decimos que $\mathcal{A}$ *refina* a $\mathcal{B}$ y lo anotamos $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ si se verifica que para todo $A \in \mathcal{A}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $A \subset B$.

Ejemplo 1.1. Si τ y τ' son dos topologías sobre un conjunto X , entonces se tiene que $\tau \prec \tau'$ y que $\tau' \prec \tau$ puesto que $X \in \tau'$ y $X \in \tau$.

Dada una colección $\{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n\}$ de cubrimientos de X , denotaremos por

$$\bigvee_{i=1}^n \mathcal{U}_i$$

a la colección formada por todas las intersecciones de la forma

$$U_1 \cap \dots \cap U_n$$

con $U_i \in \mathcal{U}_i$ para $i = 1, \dots, n$.

Observar que si $h : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo y $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de X , entonces para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$h^k(\mathcal{U}) = \{h^k(U) \text{ con } U \in \mathcal{U}\}$$

es también un cubrimiento de X .

Observación 1.4. *Todo cubrimiento $\mathcal{U}$ de cardinal k de X puede ser refinado por un cubrimiento idempotente $\mathcal{V}$ de X (i.e. $\mathcal{V}$ es tal que $\mathcal{V} \vee \mathcal{V} = \mathcal{V}$): basta considerar $\mathcal{V} = \bigvee_{i=1}^k \mathcal{U}$.*

Si X es un espacio topológico compacto decimos que un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ es un *cubrimiento mínimo* de X si se verifica que $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ para todo $\mathcal{V}$ cubrimiento abierto de X .¹

Todo espacio topológico finito admite un cubrimiento mínimo. Ciertamente, sea X un espacio topológico finito: para cada $x \in X$, llamemos U_x a la intersección de todos los abiertos que contienen a x ; se tiene entonces que

$$\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in X}$$

es un cubrimiento mínimo de X .

El recíproco es cierto si X es un espacio T_1 como se establece en la Proposición 1.5. Antes de enunciarla y probarla, observemos que no hay unicidad para cubrimientos mínimos y que todo espacio topológico compacto que admite un cubrimiento mínimo, admite uno finito: en efecto, alcanza con tomar un subcubrimiento finito del cubrimiento mínimo, que también será un cubrimiento mínimo.

Proposición 1.5. *Si un espacio es compacto, T_1 y admite un cubrimiento mínimo es finito.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ un cubrimiento mínimo de X de cardinal k . Se tiene entonces que $\mathcal{V} = \bigvee_{i=1}^k \mathcal{B}$ es también un cubrimiento mínimo de X . Dado $x \in X$ sean $V_x^1, \dots, V_x^l$ los abiertos de $\mathcal{V}$ tales que $x \in V_x^i$ para $i = 1, \dots, l$. Existe entonces, por ser $\mathcal{V}$ idempotente, $\hat{i} \in \{1, \dots, l\}$ tal que

$$V_x^{\hat{i}} = \bigcap_{i=1}^l V_x^i.$$

Afirmamos que es $V_x^{\hat{i}} = \{x\}$. Ciertamente, si no fuera así, existiría $y \neq x$ tal que $y \in V_x^{\hat{i}}$. Si U_x es un abierto que contiene a x podríamos construir un cubrimiento abierto

$$\{U_x, X - \{x\}\}$$

de X y se tendría $V_x^{\hat{i}} \subset U_x$, de donde se seguiría que $y \in U_x$. Esto contradice el hecho de que X es un espacio T_1 .

Así, para todo $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es abierto. Puesto que X es compacto, se tiene que X es finito. $\square$

1.2. Expansividad topológica

En toda esta sección X representará un espacio topológico compacto y todos los cubrimientos de X se supondrán abiertos y finitos.

Comenzamos con la siguiente definición de expansividad, clásica en Sistemas Dinámicos.

Definición 1.4. Si M es un espacio métrico, decimos que un homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ es *expansivo* si existe $\alpha > 0$ tal que para cada par de puntos distintos $x, y \in M$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\text{dist}(h^n(x), h^n(y)) > \alpha.$$

¹Llamado *cubrimiento minimal* en [2]

Se dice que un tal número positivo α es una *constante de expansividad* y también se suele decir que h es α -*expansivo*.

Surge entonces la pregunta de si es posible extender la noción de expansividad a homeomorfismos $h : X \rightarrow X$ donde X es un espacio no metrizable. Una posible generalización de la noción de expansividad a espacios no metrizables es motivada por la siguiente proposición, cuya prueba puede verse en [2].

Proposición 1.6. *Si $h : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. h es expansivo
2. existe $\mathcal{U}$ cubrimiento abierto de X tal que, para todo cubrimiento $\mathcal{V}$ de X , existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigvee_{|i| \leq K} h^i(\mathcal{U}) \prec \mathcal{V}.$$

La proposición anterior motiva la siguiente definición que aparece en [1].

Definición 1.5. Dados un homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ y $\mathcal{U}$ cubrimiento de X decimos que h es $\mathcal{U}$ -*expansivo* si se verifica que para todo cubrimiento $\mathcal{V}$ de X , existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigvee_{|i| \leq K} h^i(\mathcal{U}) \prec \mathcal{V}.$$

Decimos que h es *expansivo* si h es $\mathcal{U}$ -expansivo para algún cubrimiento $\mathcal{U}$ de X .

En lo que sigue estudiaremos la relación entre la expansividad de un homeomorfismo y sus potencias.

Proposición 1.7. *Si $h : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo expansivo y X es un espacio compacto, entonces h^m es expansivo para todo m entero no nulo.*

Ofreceremos dos demostraciones de este resultado para ilustrar el tipo de problemas al que nos enfrentamos durante la elaboración de este trabajo, el cual consiste en extender al contexto topológico (y al algebraico) argumentos y conceptos conocidos en el caso métrico.

Demostración en el caso métrico. En efecto, para $|m| = 1$ el resultado es inmediato. Consideremos entonces $m \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$ y sea $\alpha > 0$ una constante de expansividad para h . Puesto que X es compacto, se tiene que h^{-k} uniformemente continua para $|k| \leq m$, así existe $\beta > 0$ tal que

$$\text{dist}(x, y) > \alpha \Rightarrow \text{dist}(h^k(x), h^k(y)) > \beta.$$

Tomemos $u, v \in X, u \neq v$. Puesto que h es α -expansivo, existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\text{dist}(h^p(u), h^p(v)) > \alpha.$$

Ahora bien, existen enteros q y r tales que

$$p = m \cdot q + r \quad \text{y} \quad |r| \leq m.$$

De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{dist}(h^{-r}(h^p(u)), h^{-r}(h^p(v))) &> \beta \Rightarrow \\ \text{dist}(h^{-r+p}(u), h^{-r+p}(v)) &> \beta \Rightarrow \\ \text{dist}(h^{mq}(u), h^{mq}(v)) &> \beta \Rightarrow \\ \text{dist}((h^m)^q(u), (h^m)^q(v)) &> \beta \end{aligned}$$

lo cual muestra que h^m es β -expansivo. $\square$

Si X no es compacto puede ocurrir que exista $h : X \rightarrow X$ tal que para ningún entero m , $|m| \neq 1$ se tenga que h^m es expansivo. En [3] se da un ejemplo en el caso en que es $X = [0, \infty)$.

Demostración en el caso general. Probemos la afirmación en el caso en que X es un espacio compacto (no necesariamente metrizable). Supongamos que h es $\mathcal{U}$ -expansivo. Se tiene entonces que para el cubrimiento $\mathcal{V} = \bigvee_{|i| \leq m} h^i(\mathcal{U})$ se verifica que h^m es $\mathcal{V}$ -expansivo. Ciertamente, dado un cubrimiento $\mathcal{B}$ de X , existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $\bigvee_{|i| \leq K} h^i(\mathcal{U}) \prec \mathcal{B}$. Ahora bien, probaremos que si $L \cdot m \geq K$, entonces $\bigvee_{|i| \leq L} (h^m)^i(\mathcal{V}) \prec \bigvee_{|i| \leq K} h^i(\mathcal{U})$. En efecto, dado $W \in \bigvee_{|i| \leq L} (h^m)^i(\mathcal{V})$ se tiene que

$$W = (h^m)^{-L}(V_{-L}) \cap \cdots \cap (h^m)^L(V_L)$$

para ciertos $V_{-L}, \dots, V_L \in \mathcal{V}$. Ahora bien, cada V_i , para $i = -L, \dots, L$ es de la forma $V_i = h^{-m}(U_{-m}^i) \cap \cdots \cap h^m(U_m^i)$ con $U_{-m}^i, \dots, U_m^i \in \mathcal{U}$. Luego, se tiene que

$$W = (h^{-mL-m}(U_{-m}^{-L}) \cap \cdots \cap h^{-mL+m}(U_m^{-L})) \cap \cdots \cap (h^{mL-m}(U_{-m}^L) \cap \cdots \cap h^{mL+m}(U_m^L)),$$

lo cual muestra que todo $W \in \bigvee_{|i| \leq L} (h^m)^i(\mathcal{V})$ está contenido en un elemento de $\bigvee_{|i| \leq K} h^i(\mathcal{U})$. De esta forma, se tiene que

$$\bigvee_{|i| \leq L} (h^m)^i(\mathcal{V}) \prec \bigvee_{|i| \leq K} h^i(\mathcal{U}) \prec \mathcal{B}. \quad \square$$

Observación 1.8. Recíprocamente, si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que h^k es expansivo, entonces h es expansivo (acá no es necesaria la compacidad de X).

Ciertamente, si $\alpha > 0$ es una constante de expansividad para h^k se tendrá que dados $x, y \in X$ distintos existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\text{dist}(h^{km}(x), h^{km}(y)) = \text{dist}((h^k)^m(x), (h^k)^m(y)) > \alpha.$$

En el caso en que X no es necesariamente metrizable, observar que si h^k es $\mathcal{U}$ -expansivo para un cierto entero k , entonces también h es $\mathcal{U}$ -expansivo.

1.3. Expansividad algebraica

En esta sección veremos cómo, a partir de la noción de expansividad topológica vista en la sección anterior, se define la noción de automorfismo expansivo en un anillo conmutativo con unidad. La noción de ideal de un anillo así como sus propiedades generales pueden verse con detalle en [6] y en [7], por ejemplo. En lo que sigue, R representará un anillo conmutativo con unidad.

Definición 1.6. Decimos que una colección $\mathcal{I}$ de ideales de R es un *generador* de R si

$$R = \sum_{I \in \mathcal{I}} I.$$

Recordar que si $\mathcal{J}$ es una familia de ideales de R , la *suma* $\sum_{J \in \mathcal{J}} J$ es el conjunto formado por todas las sumas finitas de la forma $j_1 + \cdots + j_n$ donde cada sumando pertenece a algún ideal de la colección $\mathcal{J}$. Observar que $\sum_{J \in \mathcal{J}} J$ es un ideal de R . Recordar que dados I, J ideales de R su *producto* IJ se define mediante

$$IJ = \left\{ x \in R : x = \sum_{k=1}^m i_k \cdot j_k \text{ con } i_k \in I, j_k \in J \text{ y } m \in \mathbb{N} \right\}$$

Diremos que un ideal I es *idempotente* si se verifica que $II = I$.

Definición 1.7. Dados dos generadores $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ de R , definimos el *producto* de estos generadores mediante

$$\mathcal{I}\mathcal{J} = \{IJ \text{ con } I \in \mathcal{I}, J \in \mathcal{J}\},$$

Observar que $\mathcal{I}\mathcal{J}$ es también un generador de R .

El producto de generadores de R juega un papel análogo al de la operación $\vee$ entre cubrimientos abiertos de un espacio topológico compacto X . Los generadores de R verifican las propiedades siguientes. La demostración de estas puede verse en [2].

Proposición 1.9. *Se cumplen las siguientes propiedades.*

1. Si $\mathcal{I} \prec \mathcal{J}$ y $\mathcal{I}' \prec \mathcal{J}'$, entonces $\mathcal{I}\mathcal{I}' \prec \mathcal{J}\mathcal{J}'$.
2. Si $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n$ son generadores de R , el producto $\mathcal{I}_1 \cdots \mathcal{I}_n$ también lo es.
3. Si $\alpha: R \rightarrow R$ es un automorfismo y si $\mathcal{I}$ es un generador, para todo $k \in \mathbb{Z}$ se verifica que $\alpha^k(\mathcal{I}) = \{\alpha^k(I) \text{ con } I \in \mathcal{I}\}$ también es un generador.

Estamos ahora en condiciones de definir la expansividad en el contexto algebraico tal como aparece en [2].

Definición 1.8. Decimos que un automorfismo $\alpha: R \rightarrow R$ es *expansivo* si existe un generador $\mathcal{I}$ de R tal que para todo generador $\mathcal{J}$ de R , existe $K \in \mathbb{N}$ para el cual se verifica que

$$\prod_{|i| \leq K} \alpha^i(\mathcal{I}) \prec \mathcal{J}.$$

En este caso decimos también que α es $\mathcal{I}$ -*expansivo*.

1.4. Anillos de funciones continuas

Veremos en esta sección un puente entre las nociones de expansividad topológica y algebraica en el caso en que R es un anillo especial (una exposición muy completa de este tema puede verse en [5]).

Si $C(X)$ representa el anillo de las funciones continuas $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ donde X es un espacio métrico compacto entonces podemos establecer la siguiente correspondencia entre subconjuntos de X y subconjuntos de $C(X)$:

1. dado $A \subset X$, representaremos con $A^\perp$ al conjunto formado por las funciones $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que se anulan en cada uno de los puntos de A
2. dado $S \subset C(X)$, representaremos con $S^\perp$ al conjunto formado por los puntos de X donde se anulan simultáneamente todas las funciones $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que están en S .

Las demostraciones de las proposiciones siguientes, con las que cerramos este capítulo, así como la noción de automorfismo inducido por un homeomorfismo, pueden verse en [2].

Proposición 1.10. 1. Si $A \subset X$, $A^\perp$ es un ideal idempotente de $C(X)$.

2. Si $S \subset C(X)$, $S^\perp$ es un conjunto cerrado.

3. Ambos $\perp$ invierten la inclusión y se verifica que

$$(A^\perp)^\perp \supset A \quad y \quad (S^\perp)^\perp \supset S$$

para $A \subset X, S \subset C(X)$.

4. La correspondencia $x \mapsto \{x\}^\perp$ es una biyección entre X la colección de ideales maximales de $C(X)$; en particular en $C(X)$, todo ideal maximal es idempotente.

5. Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de X , entonces la familia de ideales

$$\mathcal{I}_{\mathcal{U}} = \left\{ (U^c)^\perp \text{ con } U \in \mathcal{U} \right\}$$

es un generador de $C(X)$.

6. Si $\mathcal{I}$ es un generador de $C(X)$, entonces la familia de abiertos de X

$$\mathcal{U}_{\mathcal{I}} = \left\{ (I^\perp)^c \text{ con } I \in \mathcal{I} \right\}$$

es un cubrimiento abierto de X .

7. Si $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ son cubrimientos abiertos de X , entonces $\mathcal{I}_{\mathcal{U}} \prec \mathcal{I}_{\mathcal{V}}$.

8. Si $\mathcal{I} \prec \mathcal{J}$ son generadores de $C(X)$, entonces $\mathcal{U}_{\mathcal{I}} \prec \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$.

9. Si $A, B \subset X$,

$$(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp.$$

10. Si $S, T \subset C(X)$,

$$(S \cdot T)^\perp = S^\perp \cup T^\perp.$$

Definición 1.9. Si X es un espacio métrico compacto y $h : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo, se define el *automorfismo inducido por h* como $\alpha_h : C(X) \rightarrow C(X)$ tal que $\alpha_h(f) = f \circ h^{-1}$.

Proposición 1.11. Se verifica entonces que α_h es un automorfismo y que para todo cerrado A de X ,

$$h(A)^\perp = \alpha_h(A)^\perp.$$

De forma similar se tiene que para $S \subset C(X)$

$$h(S^\perp) = (\alpha_h(S))^\perp.$$

Una consecuencia de esto último y de la Proposición 1.10 viene dada por la siguiente

Proposición 1.12. *Si X es un espacio métrico compacto y $h : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. h es expansivo
2. α_h es un automorfismo expansivo.

Además, h es $\mathcal{U}$ -expansivo si y solo si α_h es $\mathcal{I}_{\mathcal{U}}$ -expansivo.

Capítulo 2

Dinámicas norte-sur topológicas

En este capítulo se definen las dinámicas *norte-sur* y las dinámicas *NST* en espacios compactos y veremos con cierto detalle la relación existente entre estos dos tipos de dinámicas. Estas últimas constituyen una fuente de inspiración para definir más adelante una noción análoga en el contexto algebraico.

2.1. Introducción. Dinámicas expansivas en un intervalo compacto

Comencemos viendo el siguiente resultado clásico que en gran medida ha servido de disparador para este trabajo.

Teorema 2.1. *Los intervalos compactos de $\mathbb{R}$ no admiten homeomorfismos expansivos.*

Demostración. No perdemos generalidad si consideramos $I = [0, 1]$. Esto es así puesto que si $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ es un homeomorfismo, entonces f es *conjugado* a un homeomorfismo $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (i.e. existe un homeomorfismo $\varphi: [a, b] \rightarrow [0, 1]$ tal que $f = \varphi^{-1} \circ h \circ \varphi$) y la expansividad se conserva por esta conjugación.

Como h es un homeomorfismo, es creciente o decreciente. Consideremos primero el caso en que h es creciente. En este caso se tiene $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$, así 0 y 1 son puntos fijos de h . Supongamos primero que estos son los únicos puntos fijos de h . Ha de tenerse entonces que o bien es $h(x) > x$, para todo $x \in (0, 1)$, o bien es $h(x) < x$, para todo $x \in (0, 1)$.

1. Si es $h(x) > x$, para todo $x \in (0, 1)$.

Se tiene que para todo $x \in (0, 1)$, $h^n(x) \rightarrow 1$ y $h^{-n}(x) \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$.

Supongamos que existe $\alpha > 0$ constante de expansividad para h . Tomemos entonces $x_\alpha \in (0, \alpha)$ arbitrario. Veremos que para $x \in (x_\alpha, \alpha)$ suficientemente cercano a x_α se tendrá que

$$\text{dist}(h^n(x), h^n(x_\alpha)) < \alpha, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ciertamente, se verifica que

- i. Para cada $x \in (0, \alpha)$ sea p_x el menor entero positivo para el cual $h^n(x) \in (1 - \alpha, 1)$ para todo $n \geq p_x$. Observar que, puesto que h es creciente, se tiene que $0 < x < y < \alpha \Rightarrow p_x \geq p_y$.

ii. Por ser h continua, se tiene que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $\delta_m > 0$ tal que

$$\text{dist}(x, x_\alpha) < \delta_m \Rightarrow \text{dist}(h^i(x), h^i(x_\alpha)) < \alpha,$$

para $i = 1, \dots, m$.

iii. $h^n(x) \in (0, \alpha)$, para todo $n \leq 0$, para cualquier $x \in (0, \alpha)$.

De esta forma, si tomamos $x \in (x_\alpha, \alpha)$ tal que $\text{dist}(x, x_\alpha) < \delta_{p_{x_\alpha}}$, se tendrá

$$\text{dist}(h^n(x), h^n(x_\alpha)) < \alpha, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Puesto que α es constante de expansividad de h , se tiene $x = x_\alpha$.

Esto nos dice que si $x \in (x_\alpha, \alpha) \cap B(x_\alpha; \delta_{p_{x_\alpha}})$, entonces es $x = x_\alpha$. Así, x_α es un punto aislado de I . Esto es absurdo ya que I no tiene puntos aislados. Luego, h no puede ser un homeomorfismo expansivo.

2. Si es $h(x) < x, \forall x \in (0, 1)$.

En este caso si tomamos $\hat{h} = h^{-1}$, $\hat{h}$ es expansivo, creciente y verifica $\hat{h}(x) > x, \forall x \in (0, 1)$, por lo que podemos aplicar la parte anterior y llegar a un absurdo.

3. Si $\text{Fix}(h) \supsetneq \{0, 1\}$ ($\text{Fix}(h)$ representa el conjunto de puntos fijos de h).

Observemos que, al ser $[0, 1]$ compacto, si h tuviera una cantidad infinita de puntos fijos x_λ , estos acumularían en un punto x que necesariamente sería un punto fijo de h . De esta forma, dado $\alpha > 0$ arbitrario, existiría $x_\alpha \in \text{Fix}(h), x_\alpha \neq x$ tal que $\text{dist}(x_\alpha, x) < \alpha$ y se tendría entonces $\text{dist}(h^n(x_\alpha), h^n(x)) < \alpha, \forall n \in \mathbb{Z}$, lo cual muestra que α no podría ser constante de expansividad de h . Esto muestra que h no puede tener una cantidad infinita de puntos fijos. Sean entonces $x_i < x_{i+1}$ dos puntos fijos consecutivos. Se tiene entonces que $h|_{[x_i, x_{i+1}]}$ es un homeomorfismo creciente. Así, por lo considerado anteriormente $h|_{[x_i, x_{i+1}]}$ no puede ser un homeomorfismo expansivo y llegamos a un absurdo.

Hemos probado entonces que no existen homeomorfismos $h: I \rightarrow I$ crecientes y expansivos. Tampoco existen homeomorfismos $h: I \rightarrow I$ decrecientes y expansivos. En efecto, si $h: I \rightarrow I$ es un homeomorfismo decreciente y expansivo, entonces $h^2: I \rightarrow I$ sería un homeomorfismo creciente y expansivo (en virtud de la Proposición 1.7), lo cual es absurdo. $\square$

2.2. Dinámicas norte-sur

En los puntos 1 y 2 de la prueba anterior, consideramos homeomorfismos $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tales que:

- (a) h tiene exactamente dos puntos fijos $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$,
- (b) todo otro punto x del espacio verifica que

$$h^n(x) \rightarrow \mathbf{s} \text{ y } h^{-n}(x) \rightarrow \mathbf{n}.$$

Para los homeomorfismos considerados en el punto 1, se tiene $\mathbf{n}=0$ y $\mathbf{s}=1$, en tanto que para los homeomorfismos del tipo 2, se tiene $\mathbf{n}=1$ y $\mathbf{s}=0$.

Este tipo de homeomorfismos son ejemplos de *dinámicas norte-sur* que definimos a continuación, generalizando la definición dada en [4].

Definición 2.1. Sean X un espacio compacto y $h: X \rightarrow X$ un homeomorfismo. Decimos que h es una *dinámica norte-sur* en X si h tiene exactamente dos puntos fijos $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$ tales que para todo $x \notin \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$ se verifica

$$h^{-n}(x) \rightarrow \mathbf{n} \text{ y } h^n(x) \rightarrow \mathbf{s}.$$

Como consecuencia del Teorema 2.1, no existen dinámicas norte-sur expansivas en un intervalo compacto. Por ejemplo, $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $h(x) = \sqrt{x}$ es una dinámica norte-sur ($\mathbf{n} = 0$ y $\mathbf{s} = 1$) que no es expansiva. Sin embargo, existen ejemplos sencillos de dinámicas norte-sur que sí son expansivas.

Ejemplo 2.1. Si $X = \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$, entonces id_X es una dinámica norte-sur para cualquier topología que se considere en X . Si consideramos en X la métrica *cero-uno*, entonces id_X es α -expansiva para cualquier $0 < \alpha < 1$.

Ejemplo 2.2. Consideremos $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $h(x) = \sqrt{x}$ y $x_0 \in (0, 1)$. Sea entonces $X = \{h^k(x_0)\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{0, 1\}$. Se tiene que $\text{Fix}(h) = \{0, 1\}$ y que, para $x \neq 0$ se tiene que $h^n(x) \rightarrow 1$ y que $h^{-n}(x) \rightarrow 0$. Así, h es una dinámica norte-sur en X , con $\mathbf{n}=0$ y $\mathbf{s}=1$. Además, $h|_X$ es una dinámica expansiva. En este ejemplo todos los puntos de $X - \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$ pertenecen a una única *órbita* de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 2.2. Llamamos *órbita* de un punto x a través de un homeomorfismo h al conjunto $\{h^i(x)\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

Ejemplo 2.3. Sea $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $h(x) = \sqrt{x}$ y tomemos $x_0, y_0 \in (0, 1)$ en órbitas distintas de h . Consideremos entonces $Y = \{h^k(x_0)\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{h^k(y_0)\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{0, 1\}$ y $\eta: Y \rightarrow Y$ la restricción de h a Y . En este caso, tenemos que η es una dinámica norte-sur expansiva y que $Y - \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$ está contenido en la unión de dos órbitas (la de x_0 y la de y_0 , por ejemplo). De forma similar se puede construir un ejemplo de una dinámica norte-sur expansiva con una cantidad finita cualquiera de órbitas.

Damos a continuación un ejemplo particular que muestra que existen dinámicas norte-sur sin órbitas infinitas.

Ejemplo 2.4. Sea $X = \{\mathbf{n}, a, b, \mathbf{s}\}$ y consideremos en X la topología indiscreta (los únicos abiertos son $\emptyset$ y X) y $h: X \rightarrow X$ tal que $h(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$, $h(a) = b$, $h(b) = a$ y $h(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$. Resulta que h es una dinámica norte-sur expansiva ($\{X\}$ es un cubrimiento de expansividad) en la cual no hay puntos que tengan órbitas infinitas.

La no existencia de órbitas infinitas en este último ejemplo (así como la topología considerada) le da a este un aspecto algo artificial que motiva la siguiente pregunta. ¿Existirá alguna caracterización de las dinámicas norte-sur que comprenda a los tres primeros ejemplos pero no al último? Parece natural que una tal caracterización imponga ciertas propiedades al espacio X . En los dos teoremas que siguen obtendremos resultados en esta dirección.

Comencemos observando que en los tres primeros ejemplos anteriores, los homeomorfismos considerados tienen exactamente dos puntos fijos $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$ y es posible encontrar abiertos U_N , U_S que contienen a $\mathbf{n}$ y a $\mathbf{s}$ respectivamente para los cuales se verifica que

- (a) $U_S \cup U_N = X$
- (b) $h(U_S) \subset U_S$ y $h(U_N) \supset U_N$
- (c) $\bigcap_{n \geq 0} h^n(U_S) = \{\mathbf{s}\}$ y $\bigcap_{n \geq 0} h^{-n}(U_N) = \{\mathbf{n}\}$
- (d) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $h^{-n_0}(U_N) \cap U_S = \emptyset$.

Se dice que $C \subset X$, compacto es un *conjunto atractor* de h si existe un abierto U que contiene a C para el cual se verifica

$$h(U) \subset U \text{ y } \bigcap_{n \geq 0} h^n(U) = C.$$

De forma similar, se dice que C es un *conjunto repulsor* si C es un conjunto atractor de h^{-1} . De esta forma, se tiene en virtud de (b) y de (c) que $\mathbf{s}$ es un *punto fijo atractor* de h y que $\mathbf{n}$ es un *punto fijo repulsor* de h .

2.3. Dinámicas NST

En virtud de lo expuesto anteriormente, proponemos la siguiente

Definición 2.3. Para un espacio topológico compacto X , decimos que un homeomorfismo $h: X \rightarrow X$ es una *dinámica NST* si existen dos puntos $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$ de X y abiertos U_S y U_N conteniendo a $\mathbf{n}$ y a $\mathbf{s}$, respectivamente para los cuales se verifica que:

- (a) $U_S \cup U_N = X$
- (b) $h(U_S) \subset U_S$ y $h(U_N) \supset U_N$
- (c) $\bigcap_{n \geq 0} h^n(U_S) = \{\mathbf{s}\}$ y $\bigcap_{n \geq 0} h^{-n}(U_N) = \{\mathbf{n}\}$
- (d) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $h^{-n_0}(U_N) \cap U_S = \emptyset$.

Los siguientes dos teoremas relacionan las dinámicas norte-sur con las dinámicas NST.

Teorema 2.2. Sean X un espacio topológico compacto y $h: X \rightarrow X$ una *dinámica NST*, entonces h es una *dinámica norte-sur*.

Demostración. Comenzaremos mostrando que en estas condiciones se tiene

$$\text{Fix}(h) = \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}.$$

Ciertamente, $\mathbf{s}$ es un punto fijo de h ya que

$$h(\{\mathbf{s}\}) = h\left(\bigcap_{n \geq 0} h^n(U_S)\right) = \bigcap_{n \geq 0} h^{n+1}(U_S) = \bigcap_{n \geq 0} h^n(U_S) = \{\mathbf{s}\}$$

y análogamente $\mathbf{n}$ es un punto fijo de h .

Recíprocamente, para $x \in \text{Fix}(h)$ se tiene que $x \in U_S$ o $x \in U_N$. En el primer caso, por ser x un punto fijo de h se tiene que $h^{-n}(x) \in U_S, \forall n \geq 0$. Así, $x \in h^n(U_S), \forall n \geq 0$, de lo que se deduce $x = \mathbf{s}$.

Mostraremos ahora que si $x \notin \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$, entonces $\bigcap_{n \geq 0} h^n(\overline{U_S}) = \{\mathbf{s}\}$. En efecto, en virtud de (d), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $h^{-n_0}(U_N) \cap U_S = \emptyset$ y por lo tanto $U_N \cap h^{n_0}(U_S) = \emptyset$. Se deduce así que $h^{n_0}(\overline{U_S}) \cap U_N = \overline{h^{n_0}(U_S)} \cap U_N = \emptyset$, de donde

$$h^{n_0}(\overline{U_S}) \subset U_S.$$

De esto se sigue que $h^n(\overline{U_S}) \subset h^{n-n_0}(U_S), \forall n \geq n_0$ y por lo tanto

$$\bigcap_{n \geq 0} h^n(\overline{U_S}) \subset \bigcap_{n \geq n_0} h^n(\overline{U_S}) \subset \bigcap_{n \geq n_0} h^{n-n_0}(U_S) = \bigcap_{k \geq 0} h^k(U_S) = \{\mathbf{s}\}.$$

Puesto que $\bigcap_{k \geq 0} h^k(U_S) \subset \bigcap_{n \geq 0} h^n(\overline{U_S})$ se sigue que es $\bigcap_{n \geq 0} h^n(\overline{U_S}) = \{\mathbf{s}\}$ como afirmáramos.

Mostraremos ahora que si $x \notin \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$, entonces los iterados futuros de x convergen a $\mathbf{s}$. Sea A un abierto que contiene a $\mathbf{s}$. Mostraremos que $h^i(x) \in A$ para i suficientemente grande. Para ello, comencemos observando que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $h^m(x) \notin U_N$. Si no fuera así, se tendría $h^n(x) \in U_N, \forall n \geq 0$ y por lo tanto $x \in \bigcap_{n \geq 0} h^{-n}(U_N) = \{\mathbf{n}\}$ contra lo supuesto. Para este m se tiene entonces que $h^m(x) \in U_S$. Además, se tiene que la colección $\{A\} \cup \{X - h^n(\overline{U_S})\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un cubrimiento abierto de X . En efecto, dado $z \in X$, se tiene que si $z \notin \bigcup_{n \geq 0} (X - h^n(\overline{U_S}))$, entonces $z \in \bigcap_{n \geq 0} h^n(\overline{U_S}) = \{\mathbf{s}\}$, por lo que $z \in A$. Como X es compacto, existe un subcubrimiento finito $\{A, X - h^{n_1}(\overline{U_S}), \dots, X - h^{n_k}(\overline{U_S})\}$ de X con $n_1 < \dots < n_k$. Para $n \geq n_k$, se tiene $h^n(h^m(x)) \in h^n(U_S) \subset h^{n_k}(U_S) \subset \dots \subset h^{n_1}(U_S)$, por lo que $h^{n+m}(x) \in A$. Luego, $h^i(x) \in A$ siempre que sea $i \geq n_k + m \Rightarrow h^n(x) \rightarrow \mathbf{s}$. La prueba de que $h^{-n}(x) \rightarrow \mathbf{n}$ es similar. $\square$

En el teorema anterior la compacidad no puede ser omitida, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5. Sean $X = [0, 1]$ con la topología discreta (todo subconjunto de X es abierto) y $h: X \rightarrow X$ tal que $h(x) = \sqrt{x}$. Si consideramos

$$U_N = \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \text{y} \quad U_S = \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

se tiene que h es una dinámica NST, siendo $\mathbf{n}=0$ y $\mathbf{s}=1$. Sin embargo, dado $x \notin \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$ no se tiene

$$h^n(x) \rightarrow \mathbf{s}.$$

El siguiente resultado establece una condición suficiente para que una potencia de una dinámica norte-sur sea una dinámica NST.

Teorema 2.3. Sean X compacto y $h: X \rightarrow X$ una dinámica norte-sur. Supongamos además que X satisface el primer axioma de numerabilidad y que existen abiertos B_n y B_s que contienen a $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$ respectivamente tales que $\overline{B_n} \cap \overline{B_s} = \emptyset$. Entonces, existe $q \in \mathbb{N}$ para el cual se tiene que $\hat{h} := h^q$ es una dinámica NST.

Demostración. Dividiremos la prueba en cuatro pasos, en cada uno de estos pasos afirmamos un enunciado y luego lo demostramos.

Afirmación 1: **s es un punto fijo estable a futuro.** Esto es, se tiene que dado un abierto U que contiene a $\mathbf{s}$, es posible encontrar un abierto V que contiene a $\mathbf{s}$ para el cual se verifica $h^n(x) \in U, \forall n \geq 0, \forall x \in V$.

Comencemos observando que si una sucesión de puntos x_n de X verifica que $x_n \rightarrow \mathbf{s}$ y $z \notin B_{\mathbf{s}}$, entonces no se verifica $x_n \rightarrow z$. Ciertamente, puesto que $z \neq \mathbf{s}$, se tiene que $h^{-n}(z) \rightarrow \mathbf{n}$. Así, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $h^{-p}(z) \in B_{\mathbf{n}}$. Puesto que $x_n \rightarrow \mathbf{s}$ se verifica que $x_n \in h^p(B_{\mathbf{s}})$ para n mayor o igual que un cierto n_0 . Así, no puede tenerse $x_n \rightarrow z$ como afirmáramos (ya que $z \in h^p(B_{\mathbf{n}})$ y $h^p(B_{\mathbf{n}}) \cap h^p(B_{\mathbf{s}}) = \emptyset$). Supongamos entonces que $\mathbf{s}$ no fuera estable a futuro. Existirían entonces un abierto $B_{\mathbf{s}}^* \subset B_{\mathbf{s}}$ entorno de $\mathbf{s}$, una sucesión de puntos x_n con $x_n \rightarrow \mathbf{s}$ y una sucesión de *tiempos* $k_n \in \mathbb{N}$ tales que

$$h^j(x_n) \in B_{\mathbf{s}}^*; \text{ para } j = 0, 1, \dots, k_n - 1 \text{ y } h^{k_n}(x_n) \notin B_{\mathbf{s}}^*.$$

k_n es así el primer instante en el cual un iterado de x_n se escapa de $B_{\mathbf{s}}^*$. Podemos suponer, puesto que X es compacto y verifica el primer axioma de numerabilidad, que $h^{k_n}(x_n) \rightarrow y$, siendo $y \neq \mathbf{s}$. Como $y \neq \mathbf{s}$ y h es una dinámica norte-sur, existiría $M \in \mathbb{N}$ tal que $h^{-n}(y) \in B_{\mathbf{n}}, \forall n \geq M$.

Por otra parte, como $h^{k_n}(x_n) \rightarrow y$, se tendría $h^{k_n-M}(x_n) \rightarrow h^{-M}(y)$, por lo que

$$h^{k_n-M}(x_n) \in B_{\mathbf{n}} \quad (2.1)$$

para n suficientemente grande.

Ahora bien, se tiene que $k_n \rightarrow \infty$. En efecto, si no fuera así, existiría una subsucesión constante $k_{n_j} = k$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $x_n \rightarrow \mathbf{s}$, se deduce $h^{k_{n_j}}(x_{n_j}) = h^k(x_{n_j}) \rightarrow h^k(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$, de donde $h^{k_{n_j}}(x_{n_j}) \in B_{\mathbf{s}}$, para todo j mayor o igual que un cierto j_0 , lo que contradice $h^{k_n}(x_n) \rightarrow y$. Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, se tiene entonces $k_n - M > 0$ y para estos índices:

$$h^{k_n-M}(x_n) \in B_{\mathbf{s}}^*. \quad (2.2)$$

Se sigue entonces de (2.1) y (2.2) que para n suficientemente grande

$$h^{k_n-M}(x_n) \in B_{\mathbf{n}} \cap B_{\mathbf{s}} \subset \overline{B_{\mathbf{n}}} \cap \overline{B_{\mathbf{s}}} = \emptyset,$$

lo cual es absurdo.

Afirmación 2: **existen entornos abiertos $U_{\mathbf{s}}, U_{\mathbf{n}}$ de $\mathbf{s}$ y $\mathbf{n}$ respectivamente y $q \in \mathbb{N}$ tales que, siendo $\hat{h} = h^q$, se verifica**

$$\hat{h}(\overline{U_{\mathbf{s}}}) \subset U_{\mathbf{s}} \text{ y } \hat{h}(U_{\mathbf{n}}) \supset \overline{U_{\mathbf{n}}}.$$

En efecto, tomemos abiertos $U_{\mathbf{n}}, U_{\mathbf{s}}$ tales que $\mathbf{n} \notin \overline{U_{\mathbf{s}}}$, $\mathbf{s} \notin \overline{U_{\mathbf{n}}}$ y $X = U_{\mathbf{n}} \cup U_{\mathbf{s}}$. Podemos poner por ejemplo $U_{\mathbf{n}} = X - \overline{B_{\mathbf{s}}}$ y $U_{\mathbf{s}} = X - \overline{B_{\mathbf{n}}}$. Además se tiene que $\mathbf{s} \notin \overline{U_{\mathbf{n}}}$ ya que $B_{\mathbf{s}}$ es un abierto que contiene a $\mathbf{s}$ para el cual $B_{\mathbf{s}} \cap U_{\mathbf{n}} = B_{\mathbf{s}} \cap (X - \overline{B_{\mathbf{s}}}) \subset B_{\mathbf{s}} \cap (X - B_{\mathbf{s}}) = \emptyset$. La justificación de que $\mathbf{n} \notin \overline{U_{\mathbf{s}}}$ es similar. Puesto que $\mathbf{s}$ es estable, existe un abierto $V_{\mathbf{s}}$ que contiene a $\mathbf{s}$ tal que $h^n(x) \in U_{\mathbf{s}}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in V_{\mathbf{s}}$ (observar que $V_{\mathbf{s}} \subset U_{\mathbf{s}}$). Ahora bien, dado $x \in \overline{U_{\mathbf{s}}}$, se tiene que $h^n(x) \rightarrow \mathbf{s}$, y esto implica que existe $n_x \in \mathbb{N}$

tal que $h^n(x) \in V_s \subset U_S, \forall n \geq n_x$. Por la continuidad de h , existe U_x entorno abierto de x tal que $h^{n_x}(z) \in V_s, \forall z \in U_x$. Luego, $h^n(z) \in U_S, \forall n \geq n_x$. La colección $\{U_x\}_{x \in \overline{U_S}}$ es un cubrimiento abierto del compacto $\overline{U_S}$. Luego, existen $x_1, \dots, x_m \in U_S$ tales que $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\}$ cubre $\overline{U_S}$. Sea $n_0 = \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_m}\}$. Vamos a probar que $h^{n_0}(\overline{U_S}) \subset U_S$: si $z \in \overline{U_S}$, entonces z está en U_{x_i} para algún $i \in \{1, \dots, m\}$ y se tiene por tanto que $h^n(z) \in U_S, \forall n \geq n_{x_i}$. Luego, $h^{n_0}(z) \in U_S$. Análogamente se prueba que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $h^{n_1}(U_N) \supset \overline{U_N}$. Poniendo entonces $q = \text{m.c.m.}(n_0, n_1)$ y $\hat{h} = h^q$ se tiene

$$\hat{h}(\overline{U_S}) \subset U_S, \text{ y } \hat{h}(U_N) \supset \overline{U_N}.$$

Afirmación 3:

$$\bigcap_{n \geq 0} \hat{h}^n(\mathbf{U}_S) = \{\mathbf{s}\} \text{ y } \bigcap_{n \geq 0} \hat{h}^{-n}(\mathbf{U}_N) = \{\mathbf{n}\}.$$

En efecto, como $\mathbf{s}$ es punto fijo de $\hat{h}$ tal que $\mathbf{s} \in U_S$, se tiene que $\mathbf{s} \in \bigcap_{n \geq 0} \hat{h}^n(U_S)$. Recíprocamente, si $x \in \bigcap_{n \geq 0} \hat{h}^n(U_S)$, entonces $x \in \hat{h}^n(U_S), \forall n \geq 0$ de donde $\hat{h}^{-n}(x) \in U_S \subset \overline{U_S}, \forall n \geq 0$. Como $\hat{h}$ es una dinámica norte-sur, se deduce $x = \mathbf{s}$. Esto muestra que $\bigcap_{n \geq 0} \hat{h}^n(U_S) = \{\mathbf{s}\}$. La prueba de $\bigcap_{n \geq 0} \hat{h}^{-n}(U_N) = \{\mathbf{n}\}$ es similar. Observemos además que un razonamiento análogo al realizado en el párrafo anterior muestra que

$$\bigcap_{n \geq 0} h^n(\overline{U_S}) = \{\mathbf{s}\} \text{ y que } \bigcap_{n \geq 0} h^{-n}(\overline{U_N}) = \{\mathbf{n}\}.$$

Afirmación 4: **existe** $p \in \mathbb{N}$ **tal que** $\hat{h}^{-p}(U_N) \cap U_S = \emptyset$.

Sea $C_n := \hat{h}^n(\overline{U_S}) \cap \overline{U_N}$. Supongamos $C_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $C_{n+1} \subset C_n, \forall n \in \mathbb{N}$, se verifica por la PIF que $\bigcap_{n \geq 0} \hat{h}^n(\overline{U_S}) \cap \overline{U_N} = \bigcap_{n \geq 0} C_n \neq \emptyset$. Usando $\bigcap_{n \geq 0} \hat{h}^n(\overline{U_S}) = \{\mathbf{s}\}$ se deduce que $\mathbf{s} \in \overline{U_N}$, lo cual es absurdo. $\square$

Observación 2.4. *Observar que en la prueba anterior, probamos una versión más fuerte del axioma b) de la Definición 2.3. Concretamente, probamos:*

$$(b') \quad \hat{h}(\overline{U_S}) \subset U_S \text{ y } \hat{h}(U_N) \supset \overline{U_N}$$

1. En virtud de lo probado en la Afirmación 4 de la demostración, anterior, se deduce que (a)+(b')+(c) implica (d).
2. De la demostración del Teorema 2.2, se deduce que una potencia de h verifica (b').

El siguiente ejemplo muestra que para algunas dinámicas norte-sur no es posible encontrar abiertos U_N y U_S conteniendo a $\mathbf{n}$ y a $\mathbf{s}$ respectivamente para los cuales se verifiquen las condiciones (a), (b), (c) y (d) que definen a una dinámica NST.

Ejemplo 2.6. Sean $X = [0, 1]$ con la topología de los complementos finitos y $h : X \rightarrow X$ tal que $h(x) = \sqrt{x}$.

En este caso, X es compacto y h es una dinámica norte-sur, con $\mathbf{n} = 0$ y $\mathbf{s} = 1$ ya que $\text{Fix}(h) = \{0, 1\}$ y para $x \notin \{0, 1\}$, se verifica que

$$h^n(x) \rightarrow 1 \quad \text{y que} \quad h^{-n}(x) \rightarrow 0.$$

Sin embargo, para ninguna potencia de h existirán abiertos U_N y U_S conteniendo a $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$ respectivamente que verifiquen las condiciones (a), (b), (c) y (d) de la definición de dinámica NST, ya que para todo A abierto que contenga a 1, se tiene $\overline{A} = X$. Observar que X no verifica el primer axioma de numerabilidad y tampoco existen abiertos $B_{\mathbf{n}}$ y $B_{\mathbf{s}}$ conteniendo a $\mathbf{n}$ y a $\mathbf{s}$ respectivamente tales que $\overline{B_{\mathbf{n}}} \cap \overline{B_{\mathbf{s}}} = \emptyset$.

El siguiente ejemplo muestra que la existencia de abiertos $B_{\mathbf{n}}$ y $B_{\mathbf{s}}$ con clausuras disjuntas es necesaria.

Ejemplo 2.7. Sea $X = [0, 1]$ y consideremos en X la topología

$$\tau = \{[0, x)\}_{x \in [0, 1]} \cup \{[0, 1]\}.$$

y el homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ tal que $h(x) = \sqrt{x}$.

Se tiene que h es una dinámica norte-sur con $\mathbf{n} = 0$ y $\mathbf{s} = 1$. Sin embargo, para ninguna potencia de h existen abiertos U_N y U_S conteniendo a $\mathbf{n}$ y a $\mathbf{s}$, respectivamente que verifiquen las condiciones (a), (b), (c) y (d), ya que el único abierto que contiene a 1 es X . Obsérvese que X verifica el primer axioma de numerabilidad, pero no existen abiertos $B_{\mathbf{n}}$, $B_{\mathbf{s}}$ conteniendo a $\mathbf{n}$ y a $\mathbf{s}$ respectivamente tales que

$$\overline{B_{\mathbf{n}}} \cap \overline{B_{\mathbf{s}}} = \emptyset.$$

2.4. Dinámicas NST expansivas.

Nuestro objetivo ahora es probar que si X es compacto, T_1 y admite una dinámica NST expansiva $h : X \rightarrow X$, entonces X es numerable. Para ello utilizaremos algunos lemas que presentamos a continuación.

Lema 2.5. Sean X un espacio compacto y $h : X \rightarrow X$ una dinámica NST.

Para todo abierto A de X que contenga a $\mathbf{n}$, la colección $\{h^n(A)\}_{n \geq 0}$ es un cubrimiento abierto de $X - \{\mathbf{s}\}$.

Para todo abierto B de X que contenga a $\mathbf{s}$, la colección $\{h^{-n}(B)\}_{n \geq 0}$ es un cubrimiento abierto de $X - \{\mathbf{n}\}$.

Demostración. Sean A abierto que contiene a $\mathbf{n}$ y $x \neq \mathbf{s}$, Como h es una dinámica norte-sur, se tiene $h^{-n}(x) \rightarrow \mathbf{n}$, por lo que existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $h^{-n_x}(x) \in A$. De aquí se sigue que $x \in h^{n_x}(A)$ y por tanto $x \in \bigcup_{n \geq 0} h^n(A)$. Así, la colección $\{h^n(A)\}_{n \geq 0}$ es un cubrimiento abierto de $X - \{\mathbf{s}\}$.

El otro enunciado se prueba de manera análoga. $\square$

Observación 2.6. El Lema 2.5 se verifica más generalmente si X es un espacio topológico arbitrario y h es una dinámica norte-sur. La prueba es la misma.

Lema 2.7. Sean X un espacio compacto y $h : X \rightarrow X$ una dinámica NST. Si K es un compacto de X tal que $\mathbf{n} \notin K$ y B es un abierto de X tal que $\mathbf{s} \in B \subset U_S$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $h^n(K) \subset B$, para todo $n \geq n_0$.

Análogamente, si C es un compacto de X tal que $\mathbf{s} \notin C$ y A es un abierto de X tal que $\mathbf{n} \in A \subset U_N$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $h^{-n}(C) \subset A$, para todo $n \geq n_1$.

Demostración. Por el Lema 2.5, la colección $\{h^{-n}(U_S)\}_{n \geq 0}$ es un cubrimiento abierto de $X - \{\mathbf{n}\}$.

Así, $\{h^{-n}(U_S) \cap K\}_{n \geq 0}$ es un cubrimiento abierto de K , que tiene un subcubrimiento finito

$$\{h^{-n_1}(U_S) \cap K, \dots, h^{-n_m}(U_S) \cap K\},$$

con $n_1 < \dots < n_m$, por ser K compacto. Además, como $h(U_S) \subset U_S$, se tiene

$$h^{-n_1}(U_S) \subset \dots \subset h^{-n_m}(U_S).$$

De esta forma, para $x \in K$ se tiene que $x \in h^{-n_m}(U_S)$ de donde se deduce $h^{n_m}(x) \in U_S$. Se tiene entonces $h^n(K) \subset U_S \forall n \geq n_m$.

Veremos a continuación que existe $d_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $d \geq d_0$, se tiene $h^{d+n_m}(K) \subset B$. Ciertamente, la colección

$$\{B \cap \overline{U_S}\} \cup \{\overline{U_S} - h^n(\overline{U_S})\}_{n \geq 0}$$

es un cubrimiento abierto del compacto $\overline{U_S}$. Luego, existe un subcubrimiento finito

$$\{\overline{U_S} - h^{n_1}(\overline{U_S}), \dots, \overline{U_S} - h^{n_k}(\overline{U_S})\} \cup \{B \cap \overline{U_S}\}$$

de $\overline{U_S}$ con $n_1 \leq \dots \leq n_k$. Puesto que para todo $n \geq n_k$, $h^n(\overline{U_S}) \subset h^{n_k}(\overline{U_S})$, se tiene entonces que, para todo $n \geq n_k$, $h^n(U_S) \subset B \cap \overline{U_S} \subset B$. De esta forma, para todo $n \geq n_0 := n_m + n_k$ se verifica que $h^n(K) \subset B$.

La prueba de la segunda afirmación es similar. $\square$

Observación 2.8. Si para cierto $m \geq 1$, se tiene que h^m es una dinámica NST, entonces h es una dinámica NST. En efecto, si U_S y U_N son los abiertos para los cuales h^m verifica las condiciones (a), (b), (c) y (d), entonces estas condiciones son verificadas por h si se consideran los abiertos $V_S = \bigcap_{k=1}^{m-1} h^k(U_S)$ y $V_N = \bigcap_{k=1}^{m-1} h^k(U_N)$. Las tres primeras condiciones se verifican de forma directa. La cuarta condición puede probarse utilizando el Lema 2.7. Una consecuencia de esto es que en las condiciones del Teorema 2.3, toda dinámica norte-sur es una dinámica NST.

Lema 2.9. Sean X un espacio compacto y $h : X \rightarrow X$ una dinámica NST. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ para el cual

$$h^{n_0}(\overline{U_S}) \cap h^{-n_0}(\overline{U_N}) = \emptyset.$$

Demostración. Si no fuera así, se tendría $I_n := h^n(\overline{U_S}) \cap h^{-n}(\overline{U_N}) \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como $\{I_n\}_{n \geq 0}$ es una colección de cerrados encajados en un compacto, se tendría en virtud de la PIF

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \geq 0} I_n = \bigcap_{n \geq 0} [h^n(\overline{U_S}) \cap h^{-n}(\overline{U_N})] = \bigcap_{n \geq 0} h^n(\overline{U_S}) \cap \bigcap_{n \geq 0} h^{-n}(\overline{U_N}) = \{\mathbf{s}\} \cap \{\mathbf{n}\},$$

lo cual es absurdo. $\square$

Estamos ahora en condiciones de demostrar el siguiente

Teorema 2.10. Sea X un espacio compacto y T_1 . Si existe una dinámica NST expansiva $h : X \rightarrow X$, entonces X es numerable.

Demostración. Supongamos que h es $\mathcal{U}$ -expansivo con $\mathcal{U}$ cubrimiento abierto idempotente de X (véase la Observación 1.4) y sean $U_{min}^{(S)}$ y $U_{min}^{(N)}$ abiertos minimales de $\mathcal{U}$, en el sentido de la inclusión, entre los que contienen a $\mathbf{n}$ y a $\mathbf{s}$, respectivamente. Consideremos $n_0 \in \mathbb{N}$ para el cual, siendo U_N y U_S como en la Definición 2.3, se tenga $h^{-n_0}(\overline{U_N}) \cap h^{n_0}(\overline{U_S}) = \emptyset$. La existencia de n_0 está garantizada por el Lema 2.9.

Para $p \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, se tendrá, en virtud del Lema 2,

$$h^{-(p+n_0)}(\overline{U_N}) \subset U_{min}^{(N)} \quad \text{y} \quad h^{(p+n_0)}(\overline{U_S}) \subset U_{min}^{(S)}.$$

Sean entonces

$$U_N^0 = h^{-(p+n_0)}(U_N) \quad \text{y} \quad U_S^0 = h^{(p+n_0)}(U_S)$$

y consideremos $\mathcal{B}$ cubrimiento abierto de X tal que

$$\mathcal{B} = \left\{ U_{min}^{(N)}, U_{min}^{(S)} \right\} \cup \left\{ U - [\overline{U_N^0} \cup \overline{U_S^0}] \mid U \in \mathcal{U} \right\}.$$

Puesto que $\mathcal{B} \prec \mathcal{U}$, se tiene que h es $\mathcal{B}$ -expansivo. Además, para todo $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \neq U_{min}^{(N)}, B \neq U_{min}^{(S)}$, se verifica que $\mathbf{n} \notin \overline{B}$ y $\mathbf{s} \notin \overline{B}$. Ahora bien, existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que

(i)

$$n \geq m_1 \Rightarrow \begin{cases} h^n(B) \subset U_S^0, \forall B \in \mathcal{B} - \{U_{min}^{(N)}, U_{min}^{(S)}\} \\ h^{-n}(B) \subset U_N^0, \forall B \in \mathcal{B} - \{U_{min}^{(N)}, U_{min}^{(S)}\} \end{cases}$$

(ii)

$$n \geq m_2 \Rightarrow \begin{cases} h^n(U_{min}^{(N)}) \cup U_S^0 = X \\ h^{-n}(U_{min}^{(S)}) \cup U_N^0 = X \end{cases}.$$

La existencia de los números naturales m_1 y m_2 está garantizada por los Lemas 2.7 y 2.5 respectivamente. Entonces, para $m_3 = \max\{m_1, m_2\}$ y $X_0 = X - [\overline{U_N^0} \cup \overline{U_S^0}]$, si

$$\mathcal{B}_0(n) = \left\{ X_0 \cap A : A \in \bigvee_{|i| \leq n} h^i(\mathcal{B}) \right\},$$

se verifica que

1. si $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_0(m_3)$, entonces $\mathcal{B}_0 \prec \mathcal{B}_0(n), \forall n \in \mathbb{N}$

2. $\mathcal{B}_0$ es un cubrimiento mínimo de X_0 .

La afirmación 1 es consecuencia del hecho de que si es $n \geq m_3$, entonces se verifican simultáneamente los ítems (i) y (ii).

Para justificar la afirmación 2 observemos que, si no fuera así, existiría $\mathcal{V}_0$ cubrimiento abierto de X_0 tal que

$$\mathcal{B}_0 \not\prec \mathcal{V}_0.$$

Tomando entonces

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \cup \{X - X_0\}$$

se tendría que $\mathcal{V}$ es un cubrimiento abierto de X tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \bigvee_{|i| \leq n} h^i(\mathcal{B}) \not\prec \mathcal{V}$$

lo cual contradice el hecho de que h es $\mathcal{B}$ -expansivo. Puesto que $\mathcal{B}_0$ es un cubrimiento mínimo de X_0 y X_0 es T_1 (por ser X_0 subespacio de X), se sigue que X_0 es finito. De forma análoga, se tiene que, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$X_k := X - \left[h^{-k}(\overline{U_N^0}) \cup h^k(\overline{U_S^0}) \right]$$

es un conjunto finito. Luego, $\bigcup_{k \geq 0} X_k$ es un conjunto numerable. Ahora bien, puesto que es

$$\begin{aligned} \bigcup_{k \geq 0} X_k &= \bigcup_{k \geq 0} \left\{ X - \left[h^{-k}(\overline{U_N^0}) \cup h^k(\overline{U_S^0}) \right] \right\} = \\ X - \bigcap_{k \geq 0} \left[h^{-k}(\overline{U_N^0}) \cup h^k(\overline{U_S^0}) \right] &= X - \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}, \end{aligned}$$

se sigue que X es numerable. $\square$

Corolario 2.11. *Si X es un espacio compacto, T_1 que satisface el primer axioma de numerabilidad y existe una dinámica norte-sur expansiva $h : X \rightarrow X$ para la cual existen abiertos B_n y B_s que contienen a $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$ respectivamente tales que $\overline{B_n} \cap \overline{B_s} = \emptyset$, entonces X es numerable.*

Demostración. En efecto, por el Teorema 2.3 se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que h^{n_0} es una dinámica NST. Puesto que h es expansiva y X es compacto, se tiene que h^{n_0} es expansivo. Se sigue del teorema anterior que debe ser X numerable. $\square$

Corolario 2.12. *Si X es un espacio métrico compacto y existe una dinámica norte-sur expansiva $h : X \rightarrow X$, entonces X es numerable.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del corolario anterior. $\square$

A continuación se da una prueba alternativa (más corta) del teorema anterior para X metrizable. En el comienzo de nuestro estudio de las dinámicas norte-sur expansivas que llevó a la elaboración de este trabajo, se consideró esta hipótesis.

Demostración del Corolario 2.12. Sea $x \in X - \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$. Mostraremos que x es un punto aislado. Consideremos $\alpha > 0$ constante de expansividad de h . Puesto que h es una dinámica norte-sur, existen $\sigma > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $\mathbf{n} \notin \overline{B(x; \sigma)}$, $\mathbf{s} \notin \overline{B(x; \sigma)}$,

$$h^n(B(x; \sigma)) \subset B\left(\mathbf{s}; \frac{\alpha}{2}\right)$$

y

$$h^{-n}(B(x; \sigma)) \subset B\left(\mathbf{n}; \frac{\alpha}{2}\right)$$

siempre que sea $n \geq n_0$. Ahora bien, la continuidad de h nos asegura la existencia de $0 < \delta \leq \min\left\{\sigma, \frac{\alpha}{2}\right\}$ tal que

$$z \in B(x; \delta) \Rightarrow \text{dist}(f^i(x); f^i(z)) < \alpha, \text{ para } i = -n_0, \dots, n_0.$$

Así, $\text{dist}(f^i(x); f^i(z)) < \alpha, \forall i \in \mathbb{Z}$. De aquí se sigue que $z = x$. En otras palabras, tenemos que es $B(x; \delta) = \{x\}$ lo cual muestra que x es aislado. Se tiene entonces que X es un espacio métrico compacto para el cual $X' \subset \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$. De esto se sigue que X es numerable. $\square$

Después de haber obtenido los resultados expuestos en esta sección encontramos que con las hipótesis de metrizabilidad (en un espacio compacto) y con un argumento con un espíritu similar al de la demostración anterior, Richard Williams probó en 1966 que: *el conjunto de puntos doblemente asintóticos a un punto dado es a lo sumo numerable*. Véase [9].

2.5. Órbitas

Cerramos este capítulo exponiendo algunos resultados sobre las órbitas de las dinámicas norte-sur. Obsérvese que la órbita de un punto fijo es un conjunto formado por un solo punto. De esta forma, en el caso en que h es una dinámica norte-sur, existen exactamente dos órbitas formadas por un solo punto (las órbitas de los puntos $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$). A las demás órbitas las llamaremos *órbitas viajeras*. En lo que sigue consideraremos que X es un espacio métrico compacto. Comenzamos con el siguiente teorema (cuyo recíproco veremos en el Corolario 2.16).

Teorema 2.13. *Sea $h : X \rightarrow X$ una dinámica norte-sur expansiva. Entonces, existen solamente una cantidad finita de órbitas.*

Demostración. Comencemos observando que por ser X un espacio métrico compacto, existe en virtud del Teorema 2.3, un entero positivo q para el cual h^q es una dinámica NST, además por ser h expansiva y X compacto, se tiene que h^q es expansiva. Existe así, en virtud de la condición (d) un entero positivo n_0 tal que

$$h^{-q \cdot n_0}(U_N) \cap U_S = \emptyset.$$

Supongamos que existe $p \in h^{-q \cdot n_0}(U_N)$ tal que $h(p) \in h^{q \cdot n_0}(U_S)$. Se tendría entonces

$$p \in h^{-q \cdot n_0}(U_N) \cap h^{q \cdot n_0 - 1}(U_S) \subset h^{-q \cdot n_0}(U_N) \cap U_S = \emptyset,$$

lo cual es absurdo.

Así, el primer iterado $h^m(p)$ que *escapa* de $h^{-q \cdot n_0}(U_N)$ verifica

$$h^m(p) \in X - [h^{-q \cdot n_0}(U_N) \cup h^{q \cdot n_0}(U_S)] = X_{q \cdot n_0}.$$

De esta forma, la órbita de p debe *pasar* por el conjunto finito $X_{q \cdot n_0}$ (véase la demostración del Teorema 2.10). Puesto que todo punto de $X - \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$ verifica que algún iterado suyo está en $h^{-q \cdot n_0}(U_N)$, se sigue que solo pueden existir una cantidad finita de órbitas: a lo sumo tantas órbitas como elementos tenga $X_{q \cdot n_0}$. $\square$

Teorema 2.14. *Sea $h : X \rightarrow X$ una dinámica norte-sur con una cantidad finita de órbitas. Entonces, existe un homeomorfismo $g : X \rightarrow X$ tal que g es una dinámica norte-sur con una única órbita viajera y $h = g^\nu$ para un cierto entero positivo ν .*

Demostración. Sea ν la cantidad de órbitas viajeras. Consideremos entonces el conjunto $R_V = \{x_1, \dots, x_\nu\}$ donde cada x_i para $i = 1, \dots, \nu$ es un punto de X que está en una y solamente una órbita viajera.

Consideremos entonces $g : X \rightarrow X$ definida por $g(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$, $g(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$ y para todo $k \in \mathbb{Z}$ es

$$g(h^k(x_i)) = h^k(x_{i+1}) \quad \text{para } i = 1, \dots, \nu - 1 \quad g(h^k(x_\nu)) = h^{k+1}(x_1).$$

Se tiene entonces que g es una dinámica norte-sur puesto que:

- $g : X \rightarrow X$ es biyectiva. En efecto, la función $\gamma : X \rightarrow X$ definida por $\gamma(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$, $\gamma(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$ y para $k \in \mathbb{Z}$

$$\gamma(h^k(x_i)) = h^k(x_{i-1}) \quad \text{para } i = 2, \dots, \nu \quad \gamma(h^k(x_1)) = h^{k-1}(x_\nu)$$

verifica que es $\gamma = g^{-1}$.

- g y g^{-1} son continuas. Ciertamente, por ser h una dinámica norte-sur con una cantidad finita de órbitas, se tiene que los únicos puntos de acumulación de X son $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$. De esta forma, se tiene que g es continua en todo $x \notin \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$. Por otra parte, para toda sucesión de puntos x_n de X para la cual se verifique que $x_n \rightarrow \mathbf{n}$ ($x_n \rightarrow \mathbf{s}$) se tendrá, por la definición de g que $g(x_n) \rightarrow \mathbf{n}$ ($g(x_n) \rightarrow \mathbf{s}$) lo cual muestra que g también es continua en $\mathbf{n}$ ($\mathbf{s}$). Un argumento similar muestra la continuidad de g^{-1} .
- $\text{Fix}(g) = \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$. En efecto, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$ son puntos fijos por definición. Además si $p \in X - \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$, entonces $p = h^\tau(x_i)$ para un cierto $x_i \in R_V$ y un cierto $\tau \in \mathbb{Z}$. De esta forma, es

$$g(p) = \begin{cases} h^\tau(x_{i+1}) & \text{si } i \in \{1, \dots, \nu - 1\} \\ h^{\tau+1}(x_1) & \text{si } i = \nu \end{cases}.$$

De esta forma, si $p \in X - \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$, entonces p no es punto fijo de g .

- para todo $p \in X - \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$ se verifica que

$$g^k(p) \rightarrow \mathbf{s} \quad \text{y} \quad g^{-k}(p) \rightarrow \mathbf{n}$$

ya que es $p = h^\tau(x_i)$ para un cierto $x_i \in R_V$ y un cierto $\tau \in \mathbb{Z}$.

Finalmente, observar que se verifica que para todo $x \in X$, $g^\nu(x) = h(x)$. □

Teorema 2.15. Si $g : X \rightarrow X$ es una dinámica norte-sur con una única órbita viajera, entonces existe un cubrimiento abierto $\{U_N, U_S\}$ de X para el cual se verifica que g es $\{U_N, U_S\}$ -expansiva.

Demostración. Consideremos $x \in X - \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$ y pongamos

$$U_N = \{g^n(x)\}_{n \leq 0} \cup \{\mathbf{n}\} \quad \text{y} \quad U_S = \{g^n(x)\}_{n \geq 0} \cup \{\mathbf{s}\}.$$

Dado $y \in X - \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$ se tiene que $y = g^i(x)$ para un cierto $i \in \mathbb{Z}$ y se verifica que

$$g^i(U_S) \cap g^i(U_N) = (\{g^n(x)\}_{n \leq i} \cup \{\mathbf{n}\}) \cap (\{g^n(x)\}_{n \geq i} \cup \{\mathbf{s}\}) = \{g^i(x)\} = \{y\}.$$

Esto muestra que si $\mathcal{J}$ es un cubrimiento abierto de X , entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigvee_{|i| \leq N} g^i(\{U_N, U_S\}) \prec \mathcal{J}$$

de donde se sigue que g es $\{U_N, U_S\}$ -expansiva. □

Corolario 2.16. *Si $h : X \rightarrow X$ es una dinámica norte-sur con una cantidad finita de órbitas, entonces h es expansiva.*

Demostración. Por el Teorema 2.14 tenemos que es $h = g^\nu$ siendo g una dinámica norte-sur con una única órbita viajera. Por el Teorema 2.15, se tiene que g es expansiva. Se sigue entonces, puesto que X es compacto, que $h = g^\nu$ es expansiva. $\square$

Corolario 2.17. *Si $h : X \rightarrow X$ es una dinámica norte-sur expansiva, entonces existe un cubrimiento $\{U_N, U_S\}$ de X y $\nu \in \mathbb{N}$ $h = g^\nu$ para una cierta g dinámica norte-sur $\{U_N, U_S\}$ -expansiva.*

Demostración. Por el Teorema 2.13 se tiene que h tiene una cantidad finita de órbitas viajeras. Por el Teorema 2.14 se tiene $h = g^\nu$ con g dinámica norte-sur con una única órbita viajera. El Teorema 2.15 nos dice que existe un cubrimiento abierto $\{U_N, U_S\}$ para el cual se verifica que g es $\{U_N, U_S\}$ -expansiva. $\square$

Observación 2.18. *Los teoremas (y corolarios) de esta sección son válidos si reemplazamos la metrizabilidad por las hipótesis (más débiles) del Teorema 2.3. La demostración con estas hipótesis es la misma.*

Capítulo 3

Dinámicas norte-sur algebraicas.

En este capítulo definimos las dinámicas *NSA*. Estas son automorfismos de un anillo conmutativo con unidad que tiene un comportamiento análogo al de las dinámicas *NST*. Al final de este capítulo se probará que cierto tipo de dinámicas *NSA* expansivas solo pueden existir en anillos que tienen una cantidad numerable de ideales maximales.

3.1. Dinámicas NSA

Comenzamos esta sección definiendo las dinámicas *NSA* que buscan trasladar la noción de *NST* al contexto algebraico.

Definición 3.1. Sea R un anillo conmutativo con unidad. Sean M_S y M_N dos ideales maximales distintos de R . Decimos que un automorfismo $\alpha : R \rightarrow R$ es una *dinámica norte-sur algebraica*, de aquí en más *dinámica NSA*, si existen ideales $S \subset M_S$ y $N \subset M_N$ de R para los cuales se verifica que

- (A) $\mathcal{I} = \{N, S\}$ es un generador de R .
- (B) (i) $N \subset \alpha(N)$
(ii) $\alpha(S) \subset S$
- (C) (i) el único ideal maximal que contiene a $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha^k(N)$ es M_S y
(ii) el único ideal maximal que contiene a $\bigcup_{h \in \mathbb{Z}} \alpha^h(S)$ es M_N
- (D) $N\alpha^{n_0}(S) = 0$

De aquí en más pondremos

$$N_i = \alpha^i(N) \text{ y } S_i = \alpha^i(S) \tag{3.1}$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$.

La siguiente proposición relaciona un homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ de un espacio métrico compacto con su automorfismo inducido $\alpha_h : C(X) \rightarrow C(X)$. La prueba utiliza las propiedades establecidas en la Proposición 1.10.

Proposición 3.1. Sea X espacio métrico compacto. Si h es una dinámica *NST* en X , entonces una potencia de α_h (véase la Definición 1.9) es una dinámica *NSA* en $C(X)$. Recíprocamente, si α_h es una dinámica *NSA* en $C(X)$, entonces h es una dinámica *NST* en X .

Demostración. Probemos el directo. Sean U_N y U_S son abiertos como en la Definición 2.3, y consideremos

$$N = (U_N^c)^\perp, \quad S = (U_S^c)^\perp, \quad \alpha = \alpha_h, \quad M_S = \{\mathbf{s}\}^\perp \text{ y } M_N = \{\mathbf{n}\}^\perp.$$

Comencemos observando que, por ser $\mathcal{U} = \{U_N, U_S\}$ un cubrimiento abierto de X , es $\mathcal{I}_\mathcal{U} = \{N, S\}$ un generador de $C(X)$. Esto muestra que se verifica la condición (A) de la definición de dinámica NSA.

Por otra parte,

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha^k(N) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} h^k(U_N^c)^\perp.$$

De esta forma, si $f \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha^k(N)$, entonces $f \in \alpha^{k_0}(N)$ para algún $k_0 \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto f se anula en un entorno de $\mathbf{s}$. En particular, $f \in \{\mathbf{s}\}^\perp$. Así,

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha^k(N) \subset \{\mathbf{s}\}^\perp = M_S.$$

Ahora bien, dado un ideal maximal $M \neq M_S$, se tiene $M = \{x\}^\perp$. Ahora bien, si $x \neq \mathbf{s}$, existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $x \notin h^{k_1}(U_N^c)$, de donde se deduce $\alpha^{k_1}(N) = h^{k_1}(U_N^c)^\perp \not\subset \{x\}^\perp$. Luego,

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha^k(N) \not\subset M.$$

De esta forma, se tiene que el único ideal maximal que contiene a $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha^k(N)$ es M_S y un razonamiento análogo muestra que el único ideal maximal que contiene a $\bigcup_{h \in \mathbb{Z}} \alpha^h(S)$ es M_N . Esto prueba la condición (C).

Observemos ahora que, puesto que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $h^{n_1}(U_N^c) \subset U_N^c$ y $U_S^c \subset h^{n_1}(U_S^c)$, se verifica que $\alpha^{n_1}(N) = \alpha_{h^{n_1}}((U_N^c)^\perp) = h^{n_1}(U_N^c)^\perp \supset (U_N^c)^\perp = N$ y que $\alpha^{n_1}(S) = \alpha_{h^{n_1}}((U_S^c)^\perp) = h^{n_1}(U_S^c)^\perp \subset (U_S^c)^\perp = S$. Así, $N_0 \subset N_{n_1}$ y $S_{n_1} \subset S_0$, lo que prueba la condición (B) para α^{n_1} .

Finalmente, puesto que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $h^{n_2}(U_S^c) \cup U_N^c = X$, se tiene

$$(h^{n_2}(U_S^c))^\perp \cap (U_N^c)^\perp = (h^{n_2}(U_S^c) \cup U_N^c)^\perp = X^\perp = 0,$$

de donde se sigue que

$$\alpha_{h^{n_2}}(S)N = S_{n_2}N_0 = 0$$

Esto prueba la condición (D) para $\alpha_{h^{n_2}}$.

Esto prueba que α^m , siendo m el mínimo común múltiplo de n_1 y n_2 , es una dinámica NSA.

Recíprocamente, sean N y S como en la definición de dinámica NSA. Pongamos

$$U_N = (N^\perp)^c, \quad U_S = (S^\perp)^c, \quad \mathbf{s} = M_S^\perp \text{ y } \mathbf{n} = M_N^\perp.$$

Se tiene entonces que es $U_N \cup U_S = (N^\perp)^c \cup (S^\perp)^c = (N^\perp \cap S^\perp)^c$. Supongamos entonces que existe $x \in X$ tal que $x \notin U_N \cup U_S$. Se tendría entonces que x anula a todas las funciones de N y a todas las funciones de S . Puesto que es $N + S = C(X)$, x anularía a todas las funciones de $C(X)$, lo cual es absurdo. Luego, es $U_N \cup U_S = X$.

Por otra parte, se tiene que $h(U_S)^c = h(U_S^c) = h(S^\perp) = \alpha_h(S)^\perp \supset S^\perp$. Así, se tiene que

$h(U_S) \subset (S^\perp)^c$, es decir $h(U_S) \subset U_S$. La prueba de que $h(U_N) \supset U_N$ es similar.

Además, puesto que $\mathbf{s}$ anula a todas las funciones de M_S , se tendrá que, para todo $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{s}$ anula a todas las funciones de $\alpha_h^k(N)$. De esta forma se tiene que $\mathbf{s} \in \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_h^k(N)^\perp = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} h^k(N^\perp) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} h^k(U_N^c) \subset \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} h^k(U_S)$. Por otra parte, si $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} h^k(U_S)$, entonces $\{x\}^\perp \supset (\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} h^k(U_S))^\perp \supset (\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} h^k(U_N^c))^\perp \supset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} h^k(U_N^c)^\perp \supset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_h^k(N)$. Así, es $x = \mathbf{s}$.

Finalmente, se tiene que $(h(U_S) \cap U_N)^c = h(U_S^c) \cup U_N^c = h(S^\perp) \cup N^\perp = \alpha_h(S)^\perp \cup N^\perp = (\alpha_h(S)N)^\perp = 0^\perp = X$. Así, es $h(U_S) \cap U_N = \emptyset$. $\square$

Veamos algunas propiedades importantes de las NSA:

Observación 3.2. 1. *Es claro que*

$$\cdots \subset S_1 \subset S_0 \subset S_{-1} \subset \cdots \quad (3.2)$$

$$\cdots \subset N_{-1} \subset N_0 \subset N_1 \subset \cdots \quad (3.3)$$

2. De (3.2) y de la condición (D) se sigue que

$$N_i S_j = 0 \quad \text{si } i + n_0 \leq j$$

En efecto, $N_i S_{i+n_0} = \alpha^i(N_0) \alpha^i(S_{n_0}) = \alpha^i(N_0 S_{n_0}) = 0$. Además, por (3.2) si $i + n_0 \leq j$, se $S_j \subset S_{i+n_0}$. Se deduce entonces que $N_i S_j \subset N_i S_{i+n_0} = 0$ y por lo tanto que

$$N_i S_j = 0 \quad \text{si } i + n_0 \leq j. \quad (3.4)$$

3.

$$S_i S_j = S_j \quad \text{si } i + n_0 \leq j, \quad N_i N_j = N_i \quad \text{si } i + n_0 \leq j \quad (3.5)$$

En efecto, se tiene que

$$S_j = S_j R = S_j (S_i + N_i) = S_j S_i + S_j N_i = S_j S_i + 0 = S_i S_j$$

donde la penúltima igualdad es consecuencia de (3.4). La prueba de que $N_i N_j = N_i$ cuando $i + n_0 \leq j$ es similar.

Vamos a concentrarnos en el caso más simple en que la condición (D) se verifica para $n_0 = 1$. Llamaremos a estos automorfismos *dinámicas NSA fuertes*. No sabemos aún si esta simplificación implica pérdida de generalidad o no.

3.2. Propiedades de las dinámicas NSA fuertes

En esta sección veremos una serie de resultados que serán de utilidad para probar en la sección siguiente el principal resultado de este capítulo, el cual establece que la existencia de una dinámica NSA fuerte y $\{N, S\}$ -expansiva solo puede darse en un anillo que tenga a lo sumo una cantidad numerable de ideales maximales.

De aquí en más, si $\mathcal{J}$ es un generador de R que contiene a 0, identificaremos a $\mathcal{J}$ con el generador $\mathcal{J} - \{0\}$ al que, haciendo abuso de notación, también llamaremos $\mathcal{J}$.

En toda esta sección, $\alpha: R \rightarrow R$ será una dinámica NSA fuerte y mantendremos las notaciones de la sección anterior, llamando (D_0) a la versión con $n_0 = 1$ de la condición

D en la Definición 3.1. Observar que en la versión fuerte de NSA las partes 2 y 3 de la Observación 3.2 valen para cualesquiera $i < j$.

Veamos ahora algunas consecuencias útiles de las condiciones (A) , (B) y (D_0) .

Lema 3.3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$\mathcal{I}_n := \prod_{|i| \leq n} \alpha^i(\{N, S\}) = \{N_{-n}, N_{-n+1}S_{-n}, \dots, N_nS_{n-1}, S_n\}.$$

Demostración. Para $n = 0$ la afirmación se verifica inmediatamente, puesto que es

$$\mathcal{I}_0 = \alpha^0(\{N, S\}) = \{N, S\} = \{N_0, S_0\}.$$

Asumamos entonces que la afirmación es cierta para un cierto $n \in \mathbb{N}$ y verifiquemos que también es cierta para $n + 1$.

Dado $\mathcal{G}$ generador de R e I ideal de R notaremos con IG a la colección $\{IG : G \in \mathcal{G}\}$.

Tenemos que

$$\mathcal{I}_{n+1} = N_{-n-1}N_{n+1}\mathcal{I}_n \cup S_{-n-1}N_{n+1}\mathcal{I}_n \cup N_{-n-1}S_{n+1}\mathcal{I}_n \cup S_{-n-1}S_{n+1}\mathcal{I}_n.$$

Ahora bien, utilizando las simplificaciones dadas por las versiones fuertes de (3.4) y (3.5) tenemos

$$N_{-n-1}N_{n+1}\mathcal{I}_n = \{N_{-n-1}\} \quad N_{-n-1}S_{n+1}\mathcal{I}_n = \{0\}$$

$$S_{-n-1}N_{n+1}\mathcal{I}_n = \{N_{-n}S_{-n-1}\} \cup \mathcal{I}_n - \{N_{-n}, S_n\} \cup \{N_{n+1}S_n\} \quad S_{-n-1}S_{n+1}\mathcal{I}_n = \{S_{n+1}\}$$

De esta forma, se tiene

$$\mathcal{I}_{n+1} = \{N_{-n-1}, N_{-n}S_{-n-1}, N_{-n+1}S_{-n}, \dots, N_nS_{n-1}, N_{n+1}S_n, S_{n+1}\}$$

Esto concluye la prueba. □

Nuestro objetivo ahora es probar la siguiente

Proposición 3.4. *Si M es un ideal maximal de R , distinto de M_N y de M_S , entonces existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$N_{-i}S_{-i-1} \notin M.$$

Empezamos por probar algunos resultados auxiliares.

Lema 3.5. *Sean I, J ideales de R tales que $I + J = R$. Entonces, es*

$$IJ = I \cap J.$$

Demostración. En general, vale $IJ \subset I \cap J$, para I, J ideales de un anillo.

Recíprocamente, si $x \in I \cap J$, existen $i_1 \in I$, $j_1 \in J$ tales que

$$1 = i_1 + j_1 \Rightarrow x = xi_1 + xj_1.$$

Como $x \in J$, $i_1 \in I$, $j_1 \in J$, se deduce $xi_1, xj_1 \in IJ$ y por lo tanto $x \in IJ$. □

Lema 3.6. Para todo $i \in \mathbb{Z}$, $N_i + S_{i-1} = R$

Demostración. Sea $i \in \mathbb{Z}$. Puesto que es $N + S = R$, se tiene $\alpha^i(N + S) = R$, es decir $N_i + S_i = R$. Como $S_{i-1} \supset S_i$, se deduce $N_i + S_{i-1} = R$. $\square$

Lema 3.7. Sean I, J ideales de R y P ideal primo de R tales que $IJ \subset P$. Entonces,

$$I \subset P \quad \text{o} \quad J \subset P.$$

Demostración. Supongamos que $I \not\subset P$. Existe entonces $\hat{i} \in R$ tal que $\hat{i} \in I$ e $\hat{i} \notin P$. Sea entonces $j \in J$ arbitrario. Puesto que $\hat{i} \in I$ y $j \in J$, se tiene que $\hat{i}j \in IJ \subset P$. De esta forma, se tiene que $\hat{i}j \in P$ y $\hat{i} \notin P$. Puesto que P es primo, se tiene $j \in P$. Así, se tiene que $J \subset P$. $\square$

Lema 3.8. Sean I, J y M ideales de R tales que

- i. I está contenido en un único ideal maximal M_I ,
- ii. J está contenido en un único ideal maximal M_J ,
- iii. M es maximal,
- iv. $IJ \subset M$.

Entonces, es $M = M_I$ o $M = M_J$.

Demostración. Puesto que M es un ideal maximal, se tiene que M es primo y, puesto que $IJ \subset M$ se tiene, en virtud del Lema 3.7, que $I \subset M$ o $J \subset M$. Puesto que M es maximal, se tiene por i. y por ii. que es $M = M_I$ o $M = M_J$. $\square$

Lema 3.9. 1. Para $h, k \in \mathbb{Z}$ se tiene $N_k \cap S_h = N_k S_h$. Además, para $k < h$, dicho ideal es nulo.

$$2. \sum_{i \in \mathbb{Z}} (N_i \cap S_{i-1}) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} N_k \cap \bigcup_{h \in \mathbb{Z}} S_h.$$

Demostración. 1. Si $k \geq h$, se tiene $N_k + S_h \supseteq N_h + S_h = R$ por lo que usando el Lema 3.5, se deduce $N_k \cap S_h = N_k S_h$.

Si $k < h$ se tiene $N_k \cap S_h \subset N_{h-1} \cap S_h = 0 \subset N_k S_h \subset N_k \cap S_h$.

2. Se tiene

$$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (N_i \cap S_{i-1}) \subset \bigcup_{h, k \in \mathbb{Z}} (N_k \cap S_h) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} N_k \cap \bigcup_{h \in \mathbb{Z}} S_h.$$

Como el término de más a la derecha es un ideal de R , se deduce la inclusión $\sum_{i \in \mathbb{Z}} (N_i \cap S_{i-1}) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} N_k \cap \bigcup_{h \in \mathbb{Z}} S_h$.

Para la otra inclusión, observar que:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} N_k \cap \bigcup_{h \in \mathbb{Z}} S_h \subset \bigcup_{k, h \in \mathbb{Z}} (N_k \cap S_h) \subset \sum_{k, h \in \mathbb{Z}} (N_k \cap S_h) \subset \sum_{k \geq h} (N_k \cap S_h) \subset \sum_{i \in \mathbb{Z}} (N_i \cap S_{i-1}).$$

$\square$

Demostración de la Proposición 3.4. Supongamos que M es un ideal maximal tal que

$$N_i \cap S_{i-1} \subset M, \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Esto implica que se tiene

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (N_i \cap S_{i-1}) \subset M &\Rightarrow \\ \sum_{i \in \mathbb{Z}} (N_i \cap S_{i-1}) \subset M. \end{aligned}$$

Por el lema 6 se tiene

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} N_k \cdot \bigcup_{h \in \mathbb{Z}} S_h \subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} N_k \cap \bigcup_{h \in \mathbb{Z}} S_h = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (N_i \cap S_{i-1}) \subset M$$

Como además

- (a) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} N_k$ está contenido solamente en el ideal maximal M_S ,
- (b) $\bigcup_{h \in \mathbb{Z}} S_h$ está contenido solamente en el ideal maximal M_N y que
- (c) M es maximal,

se tiene por el Lema 3.8, que $M = M_N$ o $M = M_S$.

De esta forma se tiene que si M es un ideal maximal de R distinto de M_N y de M_S , entonces existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $N_i S_{i-1} \not\subset M$. $\square$

3.3. Dinámicas NSA expansivas

En el capítulo anterior vimos que todo espacio compacto T_1 que admite una dinámica NST expansiva es numerable. En el contexto algebraico tenemos el siguiente resultado, que se restringe a algunas dinámicas NSA y expansivas.

Teorema 3.10. *Sea R un anillo conmutativo con unidad.*

Si existe $\alpha: R \rightarrow R$ dinámica NSA fuerte y $\{N, S\}$ -expansiva, entonces R tiene una cantidad numerable de ideales maximales.

Demostración. Sea M un ideal maximal tal que $M \neq M_N$ y $M \neq M_S$.

Existe, en virtud de la Proposición 3.2.2, un cierto $i_M \in \mathbb{Z}$ para el cual

$$N_{i_M} S_{i_M-1} \not\subset M.$$

Para probar que la R tiene una cantidad numerable de ideales maximales vamos a mostrar que la función que a cada maximal M le asocia i_M es inyectiva.

Para esto, consideremos otro ideal maximal M' cualquiera que sea distinto de M . Puesto que $\mathcal{G} = \{M, M'\}$ es un generador de R y α es $\mathcal{I}$ -expansivo, se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$, $n > |i_M|$ tal que $\mathcal{I}_n \prec \mathcal{G}$. Ahora bien, puesto que $N_{i_M} S_{i_M-1} \in \mathcal{I}_n$ y que $N_{i_M} S_{i_M-1} \not\subset M$, se tendrá que $N_{i_M} S_{i_M-1} \subset M'$. Por lo tanto, $i_M \neq i_{M'}$ y la prueba termina. $\square$

Una pregunta interesante (y natural) es si existe una versión más fuerte del teorema anterior en la cual se asuma solamente la expansividad de α (en lugar de la $\{N, S\}$ -expansividad).

Finalizamos con un ejemplo de un automorfismo de anillos que está en las hipótesis del Teorema 3.10 y no es inducido por un homeomorfismo.

Ejemplo 3.1. Sean A un anillo y R el anillo de funciones $f : \mathbb{Z} \rightarrow A$ para las cuales existen enteros positivos m, m' y $a, b \in A$ tales que $f(n) = a, \forall n \geq m$ y tal que $f(n) = b, \forall n \leq m'$.

Se puede probar que si I es un ideal de A entonces $I_i = \{f \in R \mid f(i) \in I\}$, $I_{+\infty} = \{f \in R \mid \exists n_0 \in \mathbb{Z} : f(n) \in I, \forall n \geq n_0\}$, $I_{-\infty} = \{f \in R \mid \exists n_0 \in \mathbb{Z} : f(n) \in I, \forall n \leq n_0\}$ son ideales de R . Además, esto lleva maximales en R en maximales en I , y se puede probar que todo ideal de R es intersección de ideales de esa forma. Se desprende de esto que I es maximal en R si y sólo si I_i es maximal para algún $i \in \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$ y que todos los maximales de R son de la forma M_i para cierto $i \in \overline{\mathbb{Z}}$.

Consideremos el caso en que A es local. Llamémosle M a su (único) ideal maximal. Consideremos además el automorfismo $\alpha : R \rightarrow R$ definido por $\alpha(f)(n) = f(n-1)$ y los ideales

$$N = \{f \in R \mid f(n) = 0, \forall n \geq 0\},$$

$$S = \{f \in R \mid f(n) = 0, \forall n \leq -1\},$$

$$M_S = \{f \in R \mid \exists n_0 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } f(n) \in M, \forall n \geq n_0\}$$

y

$$M_N = \{f \in R \mid \exists n_1 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } f(n) \in M, \forall n \leq n_1\}$$

Afirmamos que α es una dinámica NSA fuerte. En efecto, es claro que $N + S = R$, $N \subset \alpha(N)$ y $\alpha(S) \subset S$ y que $N \cdot \alpha(S) \subset N \cdot S = 0$. Por otra parte, por lo que observamos más arriba, se tiene que M_S y M_N son ideales maximales, que M_S es el único ideal maximal que contiene a $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha^k(N)$ y que M_N es el único ideal maximal que contiene a $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha^k(S)$.

Vamos a probar que α es un automorfismo $\{N, S\}$ -expansivo. Para cada $i \in \overline{\mathbb{Z}}$, se tiene un epimorfismo $\pi_i : R \rightarrow A$ definido por $\pi_i(f) = f(i)$, si $i \in \mathbb{Z}$, $\pi_{+\infty}(f) = a$ si para cierto n_0 se verifica $f(i) = a, \forall i \geq n_0$ y $\pi_{-\infty}(f) = a$ si para cierto n_0 se verifica $f(i) = a, \forall i \leq n_0$. Observar que para todo generador

$$\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_n\}$$

de R es tal que $\pi(\mathcal{I}) = \{\pi_i(\mathcal{I}_1), \pi_i(\mathcal{I}_2), \dots, \pi_i(\mathcal{I}_n)\}$ es generador de A para cualquier $i \in \overline{\mathbb{Z}}$. Como A es local, cada uno de estos generadores contiene al ideal total A .

Ahora bien como $1 = f_1 + f_2 + \dots + f_n$, se tiene que cada que para ciertos $k, k' \in \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene $\pi_{-\infty}(f_k), \pi_{+\infty}(f_{k'}) \notin M$. Sean n_0, n'_0 tales que $f_k(n), f_{k'}(n') \notin M, \forall n \leq n_0, \forall n' \geq n'_0$ y sea $N = \max\{|n_0|, |n'_0|\}$. Se puede probar entonces que

$$\prod_{|i| \leq N} \alpha^i(\{N, S\}) \prec \mathcal{I}.$$

Esto prueba que α es una dinámica NSA fuerte y expansiva.

Bibliografía

- [1] M. Achigar, A. Artigue, I. Monteverde, *Expansive homeomorphisms on non Hausdorff spaces*, Topology and its Applications, Volume 207, (2016), 109-122.
- [2] A. Artigue, M. Haim, *Expansivity on commutative rings*, Topology and its Applications, **274**, (2020), 107–120.
- [3] B.F. Bryant, D.B. Coleman, *Some Expansive Homeomorphisms of the Reals*, The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 4 (1966), 370-373.
- [4] J. Epperlein, T. Meyerovitch, *Iterated Minkowsky sums, horoballs and north-south dynamics*, Groups Geom. Dyn., Vol. 17, (2023), 245–292.
- [5] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Princeton, New Jersey (1960).
- [6] T.W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag New York, Inc., (1974).
- [7] S. Lang, *Algebra*, Springer, 3rd ed., (2002).
- [8] J.R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, (2000).
- [9] R. Williams, *Some Theorems on Expansive Homeomorphisms*, The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 8 (1966), 854-856