



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



FACULTAD DE
INGENIERÍA
UDELAR

Modelo de optimización para la producción y recría en sistemas lecheros

Emilia Benzo
Federico Danza
María Belén Darracq

Tutores: Héctor Cancela, Pablo Chilibroste y Gastón Notte

Proyecto de grado presentado a la Facultad de
Ingeniería de la Universidad de la República en cumplimiento
parcial de los requerimientos para la obtención del título de
Ingeniero/a de Producción.

Montevideo, Uruguay
Julio de 2025

Agradecimientos

Queremos expresar nuestro más sincero agradecimiento a todas las personas e instituciones que hicieron posible la realización de este proyecto.

En primer lugar, agradecemos a nuestro tutor, Gastón Notte, por su guía constante, su compromiso con el proyecto y sus valiosos aportes técnicos y conceptuales en todas las etapas. Su acompañamiento fue fundamental para mantener el enfoque, la rigurosidad y la motivación durante todo el proceso.

Asimismo, extendemos nuestro reconocimiento a los tutores de apoyo, Héctor Cancela y Pablo Chilibroste, por sus sugerencias, devoluciones y orientación metodológica, así como por los espacios de discusión que enriquecieron significativamente el desarrollo y la validación del modelo.

Un agradecimiento especial a Martín y Juan Lindholm, quienes nos permitieron visitar su tambo en San José y dedicaron generosamente su tiempo y experiencia, brindándonos una visión práctica de gran valor para este trabajo.

Agradecemos además a las empresas y lugares de trabajo donde nos desempeñamos en este período, por facilitarnos compatibilizar nuestras responsabilidades laborales con la dedicación a la tesis.

A nuestras familias y amistades, por su apoyo incondicional a lo largo de todo el camino. Su comprensión, paciencia y aliento fueron un sostén esencial en los momentos de mayor exigencia.

Finalmente, a la Facultad de Ingeniería, por brindarnos las herramientas académicas y formativas necesarias para enfrentar desafíos complejos, y por fomentar el vínculo entre la investigación, la innovación y el desarrollo productivo.

Resumen

La producción lechera es una de las actividades agroindustriales más relevantes a nivel global, no solo por su aporte a la nutrición y la seguridad alimentaria, sino también por su impacto social y territorial. En Uruguay, la lechería representa un sector estratégico: contribuye significativamente al producto bruto agroindustrial, dinamiza las exportaciones y cumple un papel social importante en la distribución territorial del trabajo y la producción. Su sistema, mayoritariamente pastoril, permite combinar eficiencia y calidad, posicionando al país como uno de los principales exportadores de productos lácteos. No obstante, el sector enfrenta desafíos persistentes: alta volatilidad de precios, condiciones climáticas adversas y dificultades estructurales en la gestión del rodeo y en la asignación eficiente de recursos. Estos factores comprometen la sostenibilidad y rentabilidad de los sistemas lecheros, especialmente para los productores de menor escala. En este contexto, la planificación estratégica del rodeo, particularmente en lo que refiere a la asignación de recursos alimenticios, la recría y el recambio generacional, resulta clave para alcanzar una mayor eficiencia técnica y una sostenibilidad económica a largo plazo. Ante este panorama, surge la necesidad de herramientas de apoyo que permitan tomar decisiones informadas y sostenibles. La motivación principal de esta tesis radica en brindar soluciones concretas a estos desafíos, mediante un enfoque que integre conocimiento técnico, económico y biológico, y que fortalezca la planificación de mediano y largo plazo en los sistemas lecheros. Esta tesis desarrolla un modelo de optimización matemática que integra explícitamente la etapa de recría en la toma de decisiones, permitiendo analizar y comparar estrategias bajo distintos niveles de recursos y restricciones operativas.

El trabajo avanza en forma incremental desde un modelo base orientado a la maximización de la producción a través de la distribución óptima de recursos alimenticios, hasta un modelo económico que incorpora explícitamente precios y costos; y finalmente un modelo con recría que considera el ciclo completo de vida de los animales, desde terneras hasta vacas adultas, y busca la maximización del beneficio económico mediante la optimización en el recambio y la distribución de recursos alimenticios. Este último modelo contempla múltiples variables técnicas y económicas: capacidad de manejo, disponibilidad de alimento, potencial productivo, tasas de descarte, ingresos de animales y estrategia de reemplazo. Su formulación se basa en programación entera mixta, con una reformulación lineal para asegurar viabilidad computacional, y fue resuelto utilizando el entorno abierto NEOS, lo que garantiza replicabilidad y acceso a tecnología sin costo.

Se diseñaron casos de prueba contruidos a partir de datos reales y representativos de sistemas lecheros uruguayos, lo que permitió validar tanto la coherencia técnica como la plausibilidad productiva de los resultados. Frente a escenarios contrastantes, se evaluaron distintas estrategias de manejo, mostrando que el modelo es capaz de adaptarse a restricciones de escala, capacidad o alimento. En condiciones limitantes, la versión con recría permitió ajustar el rodeo descartando animales con bajo retorno, maximizando así el beneficio económico. En situaciones favorables, integró categorías con retorno diferido, como la recría o el engorde para venta, permitiendo una planificación más equilibrada en el largo plazo.

En conjunto, el modelo desarrollado constituye una herramienta robusta, flexible y aplicable a distintas realidades productivas, que respalda la toma de decisiones estratégicas mediante criterios técnicos, económicos y biológicos integrados. Su potencial se extiende a la simulación de escenarios futuros, la planificación de inversiones y la mejora en la sostenibilidad de los sistemas lecheros.

Palabras clave: Producción lechera, Recría, Optimización, Programación Matemática, Planificación estratégica, Asignación de recursos, Recambio generacional.

Índice

1. Introducción	9
2. Marco teórico	13
2.1. Importancia de la leche en la nutrición	13
2.2. La industria láctea	13
2.2.1. Gestión de la producción lechera	16
2.2.2. La industria láctea en Uruguay	21
2.3. Recría	24
2.3.1. Importancia de la recría	25
2.3.2. Desafíos y manejo de la recría	26
2.3.3. Estrategias de la recría en Uruguay	27
2.4. Modelos matemáticos	28
2.4.1. Modelos matemáticos de optimización	29
2.4.2. Tipos de programación matemática	30
2.4.3. Solvers	31
2.5. Modelos de optimización en el sector lechero	32
2.5.1. Asignación de recursos alimenticios	32
2.5.2. Gestión de la recría y recambio de animales	36
3. Descripción del problema	43
3.1. Gestión de recursos en sistemas lecheros	43
3.2. Componentes lecheros contemplados para el modelo base	45
3.3. Modelo base	47
3.4. Modelo con recría	55
4. Validación de los modelos y prueba de casos de uso	71
4.1. Criterios de selección de <i>solvers</i> y modelos	71
4.2. Estrategia de validación y descripción general de los casos de prueba	72
4.3. Resultados y discusión de los casos de prueba	73
4.3.1. Modelo base y modelo base económico	73
4.3.2. Modelo con recría	79
5. Conclusiones y trabajo futuro	107

Bibliografía	109
Anexo A	119
Anexo B	121
Anexo C	135
Anexo D	139
Anexo E	141

1. Introducción

La leche es un alimento fundamental en la nutrición humana, ya sea a través de su ingesta directa o de sus derivados. Proporciona proteínas de alto valor biológico y micronutrientes esenciales para la salud, lo que la convierte en un componente fundamental de la industria agroalimentaria [33] [70]. A su vez, la industria láctea desempeña un rol clave en la economía global, no sólo por su contribución a la seguridad alimentaria y la nutrición, sino también por su impacto en la generación de empleo e ingresos en múltiples regiones. Su producción involucra una cadena de valor compleja que integra actividades del sector primario, secundario y terciario. El sector primario comprende la cría y manejo del ganado bovino lechero, incluyendo la alimentación, sanidad y bienestar animal. El sector secundario se encarga de la recolección, procesamiento y elaboración de productos derivados como quesos, yogures y manteca, mientras que el sector terciario abarca la distribución, comercialización y exportación de estos productos [34] [57]. Para el año 2019, tan sólo considerando el sector primario, más de 150 millones de hogares se dedicaban a la producción de leche. Se tiene que el 82,7 % de esta producción correspondía a leche de vaca, el 13,3 % provenía de búfalos y el restante de ovejas, cabras y camellos [34]. La producción lechera ha crecido de manera sostenida en las últimas décadas, pasando de 524 millones de toneladas en 1992 a 930 millones en 2022, lo que representa un incremento superior al 77 %. Este crecimiento ha sido impulsado por la creciente demanda de productos lácteos tanto en países desarrollados como en vías de desarrollo [81]. Además, las proyecciones para 2033 indican un aumento del 1,6 % de la producción por año, hasta alcanzar 1.085 millones de toneladas al final de este año [11].

En el caso de Uruguay, la producción lechera vacuna es una de las actividades agropecuarias más relevantes, contribuyendo significativamente al Producto Interno Bruto (PIB) agro industrial del país [31] [86]. Con un sistema predominantemente pastoril, Uruguay destaca por la calidad de sus productos lácteos y su capacidad exportadora, posicionándose como el séptimo mayor exportador mundial de leche, y alcanzando en 2023 a un total de 88 mercados destino [21] [47] [70] [86]. El hecho de que se caracterice por la utilización del pasto como la principal actividad alimenticia, permite mantener costos relativamente bajos en comparación con sistemas basados en un alto consumo de suplementos. Sin embargo, enfrenta diversos desafíos, como la estacionalidad en la oferta forrajera, que provoca fluctuaciones en la producción y obliga a los productores a recurrir a otros tipos de alimentación para estabilizar los rendimientos [3] [70]. Tal es así, que en 2023, Uruguay produjo aproximadamente 2.114 millones de litros de leche [86], pero la producción cayó un 4,6 % en 2024 debido a condiciones climáticas adversas que afectaron la eficiencia productiva [12]. A su vez, la intensificación del sector ha aumentado la demanda de tecnología e infraestructura, lo que ha implicado costos elevados y un acceso desigual a estos recursos entre productores de diferente escala [8] [70]. Además, la volatilidad de los precios internacionales de los productos lácteos afecta la rentabilidad del sector, dado que aproximadamente el 70 % de la producción nacional se destina a la exportación, con mercados clave como Brasil, Argelia, México, Argentina y Rusia [21] [31] [47].

La rentabilidad de una explotación lechera depende de la interacción entre factores técnicos y productivos, donde la genética, la alimentación y el manejo son determinantes en la eficiencia del sistema. Si bien la genética establece el potencial productivo del rodeo, su expresión óptima requiere una alimentación equilibrada y un manejo adecuado [74]. Cada categoría dentro del rodeo, siendo terneras, vaquillonas, vacas en producción y vacas secas, posee requerimientos nutricionales específicos. Para contemplar y cubrir estos últimos es esencial una asignación eficiente de recursos alimenticios que garantice un suministro adecuado de energía, proteínas, minerales y vitaminas [15]. Además, una gestión óptima de la alimentación contribuye a maximizar la productividad. Un mayor consumo de alimento, siempre dentro

de los límites fisiológicos del animal, se traduce en un incremento en la producción de leche. Asimismo, la calidad del alimento, especialmente su aporte energético, influye directamente en el rendimiento del sistema [74]. Adicionalmente, la gestión eficiente de pasturas y forrajes conservados permite estabilizar la oferta de alimento a lo largo del año, reduciendo la dependencia de insumos externos y optimizando la relación costo-producción [70]. Dentro de una buena gestión de los recursos, la recría y el recambio de animales son un factor clave en la eficiencia de la producción lechera. Por un lado, una recría bien planificada garantiza animales saludables y bien desarrollados, lo que impacta directamente en su longevidad, productividad y rentabilidad [7] [36] [72]. Por otro lado, una gestión estratégica del recambio generacional permite mantener un rodeo equilibrado en términos de edades y niveles productivos, optimizando los costos de producción y mejorando los índices reproductivos. Un recambio bien estructurado evita caídas en la producción y asegura un rendimiento sostenido a lo largo del tiempo [36] [66]. Si bien el volumen de información sobre el manejo de la cría y recría de reemplazos en tambos para Uruguay es muy reducido, los indicadores disponibles demuestran que es justamente una de las áreas donde aún hay mucho por mejorar, y donde el impacto de una mejor gestión puede tener una repercusión favorable [21] [69].

Frente a estos desafíos, la optimización de la gestión del rodeo, el uso eficiente de los recursos alimenticios y la adopción de nuevas tecnologías representan oportunidades clave para fortalecer la competitividad y sostenibilidad del sector lechero en Uruguay. Para ello, es fundamental contar con herramientas que permitan mejorar la eficiencia en la asignación de recursos y en la gestión del rodeo. En este contexto, el presente trabajo tiene como objetivo desarrollar un modelo de optimización basado en programación matemática orientado a la asignación eficiente de recursos en sistemas lecheros, con un enfoque específico en la recría y la gestión del recambio generacional de animales, alcanzando de esta forma la distribución óptima de alimentos y la planificación estratégica del rodeo. A partir de este modelo, se quiere apoyar la toma de decisiones y promover la sostenibilidad y rentabilidad del sistema productivo. Posteriormente, se propone validar dicho modelo mediante pruebas y simulaciones utilizando datos reales, evaluando su desempeño frente a distintos escenarios. Finalmente, se busca analizar el impacto de la gestión de la recría y del recambio sobre la eficiencia productiva, económica y reproductiva de los sistemas lecheros, así como evaluar diferentes estrategias de manejo y alimentación que contribuyan a mejorar el desarrollo animal y la eficiencia global del sistema.

El documento está organizado en 4 capítulos:

En el Capítulo 2, se desarrolla el marco teórico, abordando la importancia de la leche en la nutrición y el papel de la industria láctea a nivel global y en Uruguay. Se analizan aspectos clave de la gestión animal y de la recría, destacando su impacto en la producción y la sostenibilidad del sistema. Asimismo, se presentan diversas estrategias empleadas en el sector, así como técnicas de modelado matemático aplicadas a la optimización de recursos.

En el Capítulo 3, se describe detalladamente el problema a resolver, identificando los principales desafíos asociados a la gestión de la recría y la asignación de recursos en sistemas lecheros. Se fundamenta la necesidad de un enfoque cuantitativo para mejorar la eficiencia del sistema. Además, se expone la metodología empleada para el desarrollo del modelo base y su posterior adaptación para incluir la recría, junto con la formulación matemática correspondiente. Finalmente, se presentan los procesos de validación y la estructura de los casos de prueba diseñados.

En el Capítulo 4, se presentan los resultados obtenidos a partir de la aplicación del modelo a los casos de prueba, analizando las diferentes estrategias de planificación del rodeo y de asignación de recursos. Se evalúa el impacto de estas estrategias sobre la rentabilidad y la sostenibilidad del sistema productivo.

En el Capítulo 5, se exponen las principales conclusiones del trabajo, junto con posibles líneas de investigación futuras que permitan profundizar y ampliar el alcance del estudio.

2. Marco teórico

2.1. Importancia de la leche en la nutrición

La leche es un alimento esencial para los mamíferos, desempeñando un papel fundamental en las primeras etapas de vida al proporcionar los nutrientes necesarios para el crecimiento y desarrollo. En particular, la leche de vaca ha sido un componente central en la alimentación humana durante al menos 10.000 años, debido a su alto valor nutricional y su equilibrio entre calidad y aporte energético. Su consumo es recomendado en todas las etapas de la vida, ya que constituye una fuente importante de proteínas, vitaminas y minerales esenciales para la salud [33] [70].

La composición de la leche incluye proteínas de alto valor biológico, hidratos de carbono (principalmente en forma de lactosa), grasas, vitaminas liposolubles, vitaminas del complejo B y minerales como el calcio y el fósforo [33]. Desde el punto de vista nutricional, la leche desempeña un rol fundamental en la dieta humana, aportando en promedio 134 kcal, 8,3 g de proteínas y 7,6 g de grasas por persona al día. Esto equivale aproximadamente al 5 %, 10 % y 9 % del suministro total de energía, proteínas y grasas, respectivamente, posicionándola como la quinta fuente de energía y la tercera fuente de proteínas y grasas a nivel mundial [34]. Además, dentro de los hidratos de carbono, la lactosa no sólo actúa como fuente de energía, sino que también desempeña un papel clave en la síntesis de glucolípidos cerebrósidos, esenciales para el desarrollo neurológico temprano, la formación de glicoproteínas y la optimización de la absorción de calcio. Por su parte, los oligosacáridos, que no son absorbidos por el organismo, cumplen una función en la modulación de la microbiota intestinal, actuando como receptores de patógenos y fortaleciendo la respuesta inmune. Su procesamiento industrial ha representado un avance significativo en la nutrición, favoreciendo su consumo masivo y por lo tanto contribuyendo a la mejora de la salud poblacional [33].

2.2. La industria láctea

La industria láctea es un sector clave dentro de la economía agroalimentaria mundial, desempeñando un rol fundamental no sólo en la seguridad alimentaria, sino también en la economía y la generación de empleo [34]. Su estructura se compone de tres sectores principales: el sector primario, encargado de la producción de leche; el sector secundario, responsable de su procesamiento y transformación en productos derivados; y el sector terciario, que abarca la distribución y comercialización de estos productos [57].

Estructura de la industria láctea

El sector lácteo opera como una cadena de valor interconectada donde cada eslabón cumple una función específica:

- Sector primario: Comprende la producción de leche a partir de animales lecheros como vacas, cabras y ovejas [57]. Incluye las explotaciones agropecuarias dedicadas al ordeño y el manejo del ganado.
- Sector secundario: Se encarga del procesamiento de la leche cruda para su conversión en productos derivados [57] como leche pasteurizada, queso, yogur y manteca. Aproximadamente el 75 % de la leche procesada se destina a leche descremada, el 12 % a queso y el 3 % a manteca [34].
- Sector terciario: Se encarga de la distribución y comercialización para el consumo de

los productos lácteos [57]. Este sector involucra intermediarios como transportistas, mayoristas, minoristas.

El tambo: la base de la producción láctea

El término “tambo” proviene del quechua “tampu” y hace referencia a un establecimiento agropecuario destinado al ordeño de animales lecheros, principalmente vacas. La Figura 1 muestra una imagen ilustrativa de un tambo pastoril, en la que se aprecia parte de su dinámica cotidiana. En sus inicios, los tambos operaban con métodos rudimentarios, donde el ordeño se realizaba de manera manual y sin infraestructura específica. Con el tiempo, la producción lechera ha evolucionado significativamente, incorporando mejoras en genética, nutrición, sanidad e infraestructura, hasta convertirse en un sistema de producción altamente tecnificado, con instalaciones diseñadas para optimizar la eficiencia del ordeño, conservación y comercialización de la leche [94] [89].



Figura 1: Traslado de vacas lecheras hacia la sala de ordeño en un establecimiento de sistema pastoril. Imagen de elaboración propia.

En cuanto a la infraestructura de los tambos, los mismos comprenden no sólo la superficie destinada a la producción de alimento para los animales, sino también una serie de instalaciones clave [90] [24]:

- Sala de ordeño: Espacio donde se realiza el ordeño, utilizando sistemas mecánicos que imitan la succión del ternero mediante un sistema de vacío y masaje alternados. Un ejemplo de esta se puede apreciar en la Figura 2.
- Manga y corrales: Diseñados para el manejo seguro del ganado, incluyendo revisiones veterinarias y tratamientos sanitarios.
- Guachera: Lugar destinado a la crianza de terneros, asegurando condiciones adecuadas para su desarrollo.
- Tanques de almacenamiento: Tanque donde se aloja la leche extraída, que es filtrada y enfriada a 4 °C antes de ser recolectada diariamente por camiones cisterna.
- Infraestructura para el personal: Espacios de trabajo y descanso para los operarios encargados de la producción.

- Infraestructura para el bienestar animal: Instalaciones diseñadas para minimizar el estrés y prevenir lesiones, incluyendo pisos antideslizantes, corrales seguros, techos de resguardo y caminos en buen estado.

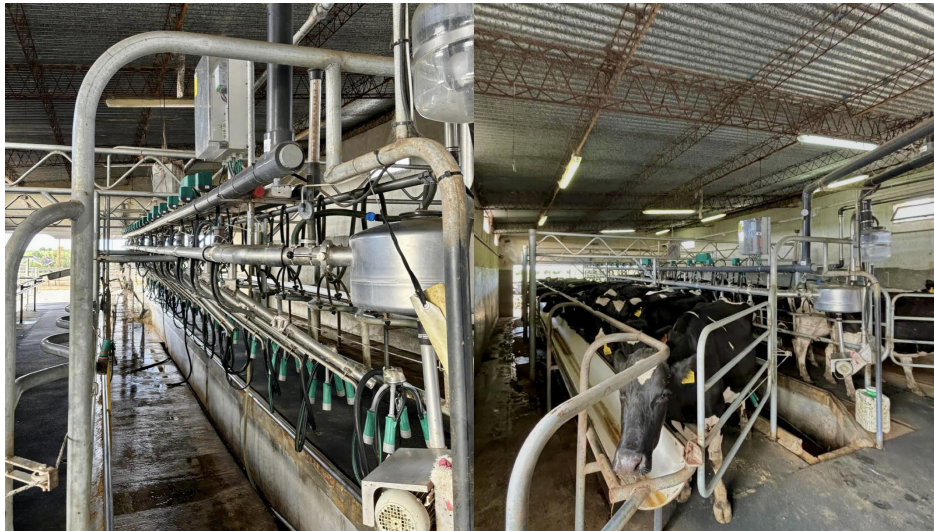


Figura 2: Sala de ordeño en funcionamiento en un tambo de San José, Uruguay. Imagen de elaboración propia.

Por su parte, el proceso productivo de un tambo incluye distintas actividades esenciales:

- Ordeño: Se realiza generalmente dos veces al día, asegurando condiciones higiénicas adecuadas para evitar contaminaciones [6].
- Alimentación del rodeo: La gestión eficiente de los recursos alimenticios es clave para satisfacer las necesidades nutricionales de los animales y minimizar desperdicios [50].
- Control sanitario (prevención y tratamiento de enfermedades): La calidad de la materia prima repercute firmemente en la calidad del producto final, por lo que es indispensable que la leche cruda tenga la máxima calidad higiénico-sanitaria [73].

Impacto económico y social de la industria láctea

La producción lechera a nivel global ha aumentado en más del 77 % en las últimas décadas, pasando de 524 millones de toneladas en 1992 a 930 millones de toneladas en 2022. Dicha evolución se puede observar en la Figura 3. Siendo India el mayor productor mundial, con el 23 % de la producción total, seguido por Estados Unidos, Pakistán, China y Brasil [81]. Alrededor de 150 millones de hogares en todo el mundo se dedican a la producción de leche. En el Reino Unido cerca de 13.000 tambos generan 28.000 empleos en producción, mientras que en Australia los 6.200 tambos contribuyen con aproximadamente 39.000 puestos de trabajo a tiempo completo. Las actividades de procesamiento, que van desde la pasteurización hasta la elaboración de yogur, no sólo agregan valor al producto, sino que también generan empleo. Estudios en países como Bangladesh, Kenia y Ghana han mostrado que por cada 100 litros de leche comercializada se crean entre 1,2 y 5,7 puestos de trabajo a tiempo completo. Globalmente, se estima que alrededor de 240 millones de personas están empleadas, directa o indirectamente, en el sector lechero [34].

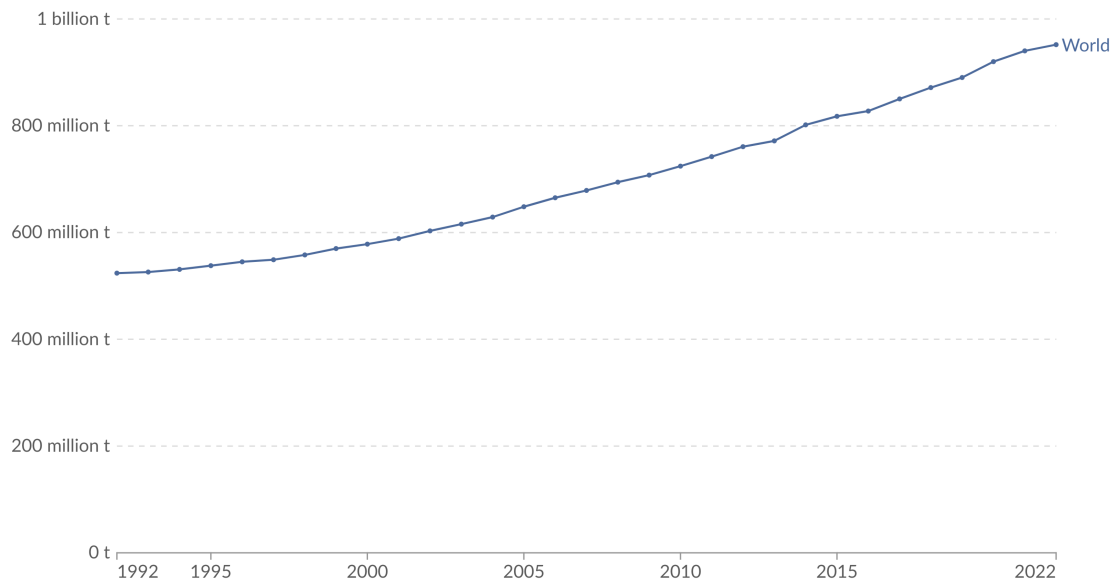


Figura 3: Producción mundial de leche, 1992–2022 [82].

Desafíos y oportunidades en la industria láctea

En numerosos países en desarrollo, la producción lechera es liderada predominantemente por pequeños productores, dado que constituye una fuente rápida de ingresos y garantiza un flujo de efectivo constante. No obstante, diversos factores limitan su productividad, entre los cuales se destacan la baja calidad de los recursos forrajeros, la alta incidencia de enfermedades, las restricciones en el acceso a mercados y servicios esenciales (tales como sanidad animal, financiamiento y capacitación), así como el limitado potencial genético del ganado lechero. Adicionalmente, las condiciones climáticas adversas, características de muchas de estas regiones, dificultan aún más la actividad productiva, especialmente en entornos cálidos y húmedos. A pesar de estos obstáculos, el crecimiento del sector en los últimos años ha sido impulsado por el incremento del número de animales en producción, más que por un aumento en la productividad individual del ganado. Esto plantea la necesidad de estrategias que fomenten la eficiencia productiva, la innovación tecnológica y el acceso a mercados para garantizar la sostenibilidad del sector lácteo a largo plazo [81].

2.2.1. Gestión de la producción lechera

La rentabilidad óptima de una explotación ganadera depende de una combinación de factores técnicos (conocimientos, herramientas, y tecnologías) y productivos (como la cantidad de leche producida o el crecimiento de los animales) que, al trabajar de manera eficiente, favorecen el rendimiento general. En este contexto, la productividad de un animal está determinada principalmente por tres pilares fundamentales: la genética, la alimentación y el manejo. Estos tres aspectos están profundamente interrelacionados y se complementan entre sí [74]. La genética, por ejemplo, permite mejorar los aspectos productivos más relevantes a través de la aplicación de programas de selección adecuados. Sin embargo, para que las características genéticas de los animales se expresen de manera óptima, es esencial que reciban una alimentación adecuada, tanto en cantidad como en calidad, de acuerdo con las necesidades nutricionales de cada etapa productiva. Además, para que los animales puedan aprovechar de manera eficiente los recursos alimenticios, es fundamental que se encuentren en un entorno que garantice su bienestar animal. Este enfoque integral entre genética, alimentación y manejo

asegura que los animales puedan expresar de manera plena su potencial, lo que contribuye directamente a la rentabilidad global de la explotación [15] [70] [43] [55]. A continuación se detallan algunos aspectos importantes para cada uno de los pilares mencionados.

Genética

Respecto a la genética, las principales razas que se explotan por su aptitud lechera son: Holstein u Holando, Jersey, Brown Swiss, Guernsey, y Ayrshire [68], las cuales se ilustran en la Figura 4. Estas razas, entre otras características intrínsecas, definen el peso promedio a lo largo de la vida de las vacas, la capacidad de producción de leche promedio y su composición en términos de grasa y proteína. En Uruguay, se utilizan principalmente Holstein por su alta producción y Jersey por su mayor contenido de sólidos en la leche, lo que las hace más rentables y adaptadas a los sistemas de pastoreo locales [54] [55].

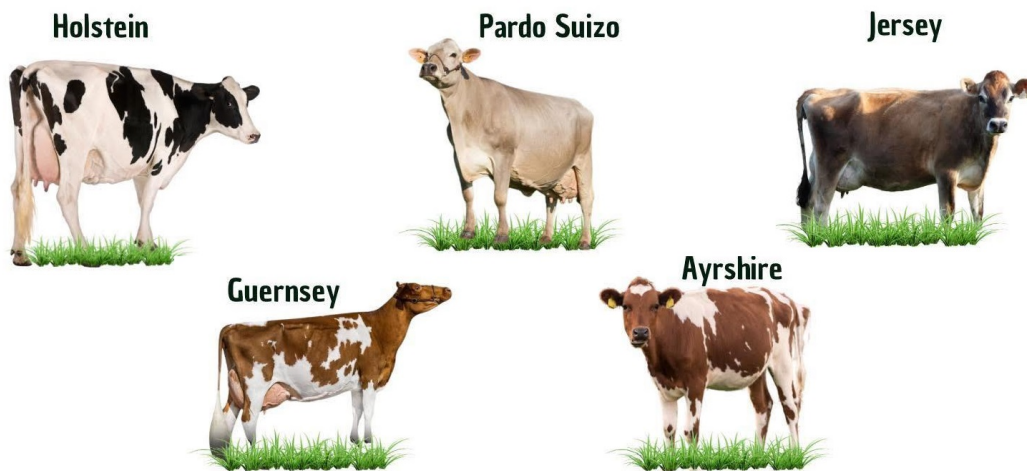


Figura 4: Principales razas de vacas lecheras [51].

Alimentación

Los animales que forman parte de un rodeo vacuno lechero se clasifican por edades y por estado productivo. Así el rodeo consta de los siguientes grupos de animales [92] [39] :

- Según su edad:
 - Terneras: Grupo de hembras menores de 1 año.
 - Vaquillonas: Grupo de hembras de 1-2 años.
 - Vacas: Grupo de hembras mayores de 2 años.
- Según el estado productivo:
 - Vacas primíparas: Vacas jóvenes en su primera lactación.
 - Vacas multíparas: Vacas secas o en ordeño que hayan parido como mínimo 2 veces.
 - Toros: Son los machos.

Un rodeo lechero está compuesto por tres tipos de animales: terneras y vaquillonas de reposición, vacas en producción y vacas secas. Cada uno de estos grupos tiene necesidades nutritivas específicas, por lo que es necesario proporcionarles raciones adecuadas para garantizar una alimentación equilibrada [15] [24]. A través del alimento, es fundamental cumplir

con los requerimientos proteicos, minerales, vitamínicos y de agua de cada grupo. Además, es necesario cumplir con los requerimientos energéticos. Una parte importante de los nutrientes ingeridos por las vacas se destina al mantenimiento del estado corporal, es decir, cumplir con las funciones vitales (respiración, circulación, digestión, excreción). Por otro lado, se debe cubrir la energía necesaria para traslados, tales como los que se realizan entre las zonas de alimentación y de ordeño. Estas necesidades energéticas se denominan requerimiento basal y requerimiento de traslado respectivamente. También se utiliza energía para suplir la renovación de células, mantenimiento de la temperatura corporal, crecimiento, reproducción, y producción láctea [39] [74].

El conjunto de forrajes que come el ganado durante todo el día estará constituido por pasturas y suplementos (forraje conservado y concentrados). En general, la clasificación de los alimentos se da por:

- Pasturas: Las pasturas están compuestas principalmente por gramíneas y leguminosas que el ganado consume directamente mediante el pastoreo, como se aprecia en la Figura 5. Su productividad depende del tipo de suelo, el manejo del pastoreo y las condiciones climáticas [1].



Figura 5: Rodeo lechero en sistema pastoril [85].

- Forrajes conservados: Los forrajes conservados se obtienen mediante procesos como el heno (secado del forraje hasta reducir su humedad para evitar deterioro) y el ensilado (fermentación en condiciones anaeróbicas para preservar sus propiedades nutricionales). Su uso permite almacenar alimento vegetal para períodos en los que la disponibilidad de pasto fresco es limitada, siendo clave para mantener la estabilidad nutricional del rodeo en épocas de escasez [52]. Estos se pueden observar en la Figura 6.



Figura 6: Forraje conservado en sistema pastoril [2].

- Forrajes concentrados: Pueden ser de alta concentración energética (cereales como maíz, cebada y sorgo) o proteica (harina de soja, girasol, entre otros). Estos complementan la alimentación del ganado cuando las pasturas y los forrajes conservados no cubren completamente sus requerimientos nutricionales, y son fundamentales en etapas críticas del ciclo productivo para mejorar la ganancia de peso y el desempeño reproductivo [35]. Usualmente se administran en comederos como se aprecia en la Figura 7.



Figura 7: Forrajes concentrados en comedero de tambo en San José, Uruguay. Imagen de elaboración propia.

A grandes rasgos, se pueden distinguir dos maneras de gestión de la alimentación de los animales, ambas ampliamente utilizadas en la industria: sistemas de estabulación o sistemas pastoriles [37] [100].

En los sistemas de estabulación, el objetivo principal es proporcionar una alimentación equilibrada y de alto valor nutritivo a las vacas, con el fin de maximizar su potencial genético para la producción de leche. En este tipo de sistemas, las vacas permanecen confinadas en

instalaciones organizadas en tres áreas principales: la zona de descanso, el pasillo de tránsito y defecación, y los comederos. Debido a este diseño, el nivel de actividad física de los animales es mínimo, lo que también reduce su desgaste. Además, en estos cubículos se realizan tareas fundamentales como el control sanitario, la inseminación artificial y la selección del ganado. Las vacas sólo se trasladan fuera de estas instalaciones para ser ordeñadas en la sala de ordeño, donde se realiza la extracción mecanizada de la leche [9] [100].

En los sistemas pastoriles, la principal fuente de alimentación de las vacas son las praderas y pasturas, que se combinan con forrajes conservados y concentrados para cumplir con los requerimientos nutricionales de los animales. La superficie de consumo diaria de los animales se define mediante una rutina establecida, en la cual se estima la cantidad de alimento disponible utilizando instrumentos de medición indirectos, como medidores de altura de pasto o sensores de biomasa. Otra característica de este sistema es que las vacas deben caminar desde las praderas hasta la sala de ordeño en varias ocasiones al día, lo que hace que la caminería sea un componente esencial [14].

Manejo

Una gestión eficiente en la producción lechera no sólo depende de la elección del sistema de estabulación, sino también de un manejo integral que garantice el bienestar y la salud del ganado. Independientemente de que se opte por un sistema de estabulación o un sistema pastoril, es fundamental implementar rutinas cuidadosas de alimentación, ordeño e higiene. Estos cuidados no sólo optimizan la productividad, sino que también previenen enfermedades que pueden afectar la calidad de la leche. En este sentido, el cuidado de las ubres adquiere una importancia crucial para mantener la salud del rodeo y asegurar una producción constante y de alta calidad [90]. Dentro este contexto, uno de los mayores desafíos sanitarios en la producción lechera es la mastitis, la cual consiste en la inflamación de las glándulas mamarias. Los agentes causantes de las mismas pueden ser infecciosos, traumáticos, o irritantes químicos [61]. Los más frecuentes son los infecciosos, y dentro de estos las mastitis causadas por bacterias son las más comunes. Desde el punto de vista económico, es muy importante por las pérdidas en producción que acarrea. Esto se debe a que: aumenta la carga microbiana total de la leche, altera la composición fisicoquímica de esta, aumenta las células somáticas, y descende la producción hasta un 25 % [61] [95]. También, el período de secado es una etapa fundamental en el ciclo productivo de las vacas lecheras, ya que marca el final de la lactación y permite la recuperación de las glándulas mamarias. Durante esta fase, se interrumpe gradualmente la producción de leche, inicialmente reduciendo la frecuencia de ordeño y, posteriormente, cesándolo por completo [102]. Este proceso, que generalmente tiene una duración aproximada de dos meses, se distribuye en un mes anterior al parto y otro posterior a este, asegurando así una óptima preparación del animal para la siguiente lactación [90]. Otro aspecto importante en el manejo adecuado de las vacas lecheras es tratarlas con calma, evitando gritos y movimientos bruscos. Se deben emplear técnicas que favorezcan sus comportamientos naturales y prevengan el estrés o posibles lesiones. Los factores estresantes pueden ser físicos o sociales, por ejemplo, un alto índice de temperatura y humedad, un ambiente frío, la relación entre el animal y el ser humano, caminería en mal estado, la falta de áreas de descanso [43] [100]. Uno de estos efectos es la afectación de los parámetros reproductivos. Se ha documentado que los animales expuestos a condiciones estresantes presentan tasas de concepción significativamente reducidas e, incluso, pueden sufrir abortos como consecuencia de dichos factores. Además, la alteración del sistema inmunológico inducida por el estrés genera una utilización menos eficiente de los nutrientes, debido al incremento en los requerimientos energéticos del sistema inmune. Asimismo, la activación de este sistema está asociada con una reducción en la ingesta de alimento, lo que contribuye a un deterioro adicional del estado fisiológico del animal [80].

2.2.2. La industria láctea en Uruguay

La industria láctea en Uruguay reviste una significativa importancia tanto económica como social. A lo largo de los años, el sector lechero ha experimentado un notable desarrollo, consolidándose como uno de los componentes más dinámicos y con mayor crecimiento dentro del ámbito agropecuario nacional, no sólo por su impacto en la generación de empleo, sino también por su efecto multiplicador en la distribución del ingreso y en la distribución territorial de la riqueza [86] [31]. En el año 2021, se estimaba que el sector primario empleaba aproximadamente a unos 8.500 trabajadores [21]. Por su parte, en el sector industrial, hacia finales de 2023 se estimaba que las principales industrias procesadoras de leche empleaban un total de 3.313 trabajadores, lo que representa un incremento del 1,8 % en relación con el año anterior (3.254 trabajadores) [86].

La lechería uruguaya se destaca por su fuerte orientación exportadora, siendo una de las principales actividades agroexportadoras del país. Aproximadamente el 70 % de la producción nacional de leche se destina al mercado externo, lo que ha posicionado a Uruguay como el séptimo mayor exportador de productos lácteos a nivel mundial. Esta actividad representa cerca del 60 % del valor de las exportaciones del rubro agroindustrial [21] [31]. En 2023, la facturación total de la industria láctea alcanzó los USD 850 millones, de los cuales el 61 % correspondió a exportaciones. Dentro de estas, la leche en polvo representó el 65 % del valor comercializado. Los productos se exportaron a un total de 88 destinos, aunque el 70 % de la facturación se concentró en solo cinco países: Brasil, Argelia, México, Argentina y Rusia [70] [86] [47]. La distribución por país de destino se presenta en la Figura 8. Esta orientación exportadora, si bien ha dinamizado al sector, también lo ha vuelto vulnerable a la volatilidad de precios internacionales, ya que pequeños cambios globales pueden impactar fuertemente en la rentabilidad local [21].

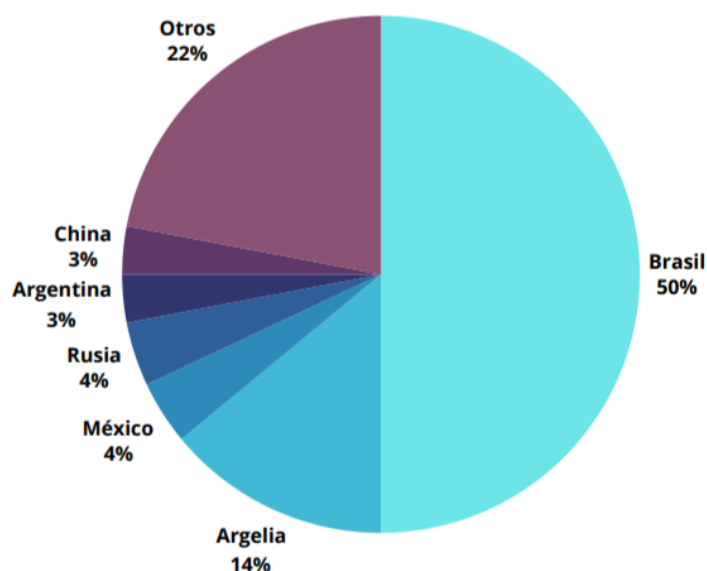


Figura 8: Distribución de la facturación de la exportación del sector lácteo en Uruguay, según destinos [86].

Durante 2023 se remitieron a plantas industriales 2.114 millones de litros de leche, producidos en poco más de 500.000 hectáreas. Este volumen representa una tasa de crecimiento

acumulada anual del 0,5 % en el período 2014–2023, con un valor final 19 % superior al mínimo registrado durante ese intervalo (1.775 millones de litros en 2016). La evolución anual de la remisión puede observarse en la Tabla 1 [86].

Año	Remisión (millones de litros)	Variación (litros)	Remisión (millones de kilos de sólidos)	Variación (millones de kilos sólidos)
2014	2.014		147	
2015	1.974	-2%	144	-2%
2016	1.775	-10%	130	-10%
2017	1.924	8%	141	9%
2018	2.063	7%	152	8%
2019	1.970	-5%	146	-4%
2020	2.078	5%	155	6%
2021	2.118	2%	159	3%
2022	2.089	-1%	158	-1%
2023	2.114	1%	162	2%

Tabla 1: Evolución anual de remisión de leche [86].

Respecto al mercado interno, Montevideo se presenta como el principal destino de consumo de leche en el país, gracias a su mayor población y elevado nivel de vida urbana. Para satisfacer esta demanda, se ha desarrollado una cuenca lechera en departamentos cercanos como Canelones, San José y Florida, que en conjunto concentran más del 53 % de la producción nacional y el 51 % de los productores. Adicionalmente, las zonas aledañas de Flores, Durazno, Lavalleja y Maldonado integran esta cuenca, aportando aproximadamente un 12 % al total nacional y representando un 6 % de los productores [26]. En el plano industrial, en 2023 la cooperativa Conaprole se posicionó como la principal empresa del sector, concentrando cerca del 70 % de la captación de leche. En segundo lugar se ubicó Estancias del Lago, con una participación del 9 %. La distribución entre las distintas industrias procesadoras se muestra en la Figura 9.

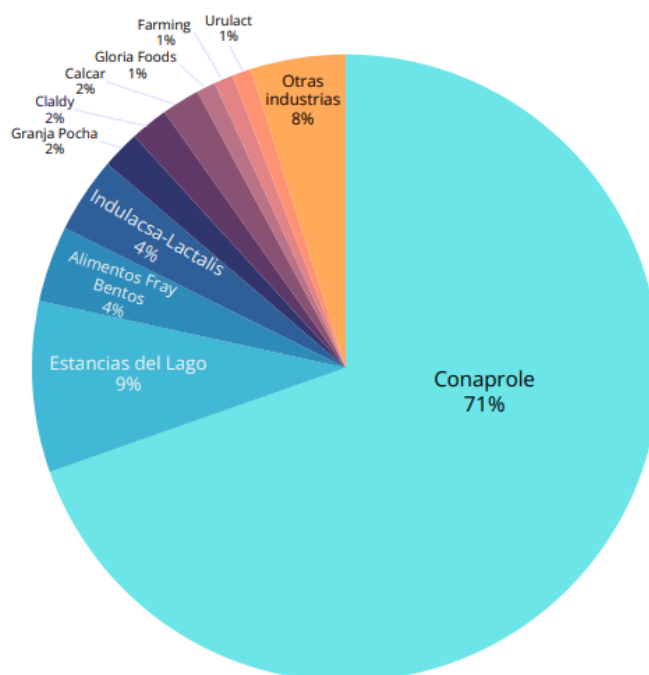


Figura 9: Distribución de la captación de leche por industria [86].

El sistema de producción lechera en Uruguay es predominantemente pastoril [70]. En este modelo, los pastos cosechados directamente por los animales constituyen entre el 48 % y el 54 % de su dieta anual, lo que genera una marcada estacionalidad, alcanzando su pico de producción en primavera cuando las pasturas están en óptimas condiciones [3]. Sin embargo, este sistema enfrenta un desbalance estructural entre la oferta y la demanda de nutrientes, lo que ha llevado a los productores a adoptar prácticas de suplementación mediante reservas forrajeras y concentrados [70]. Si bien este modelo ha permitido eficiencia productiva y bajos costos, su dependencia de las condiciones climáticas lo hace vulnerable. En 2023, la sequía generó un gasto adicional de USD 113 millones en suplementación [86], y en 2024 la producción cayó un 4,6 % por condiciones adversas [12].

El crecimiento sostenido del sector lechero en Uruguay responde a una combinación de factores estructurales y estratégicos. La modernización tecnológica de los tambos, el fortalecimiento del perfil exportador desde la década de 1980 y las mejoras en la productividad, mediante un mayor rendimiento individual y una optimización de la carga animal, han sido fundamentales para este proceso. Estos avances se apoyan en una sólida dotación de recursos naturales, una infraestructura en evolución constante y una gestión cada vez más eficiente, así como en una articulación estrecha entre productores e industrias. Este conjunto de elementos ha permitido consolidar al sector, mantener su competitividad y adaptarse tanto a las condiciones internas como a las exigencias del mercado internacional [21] [70] [32].

En el ámbito productivo, si bien la producción ha aumentado, se ha observado un proceso de concentración, caracterizado por una reducción significativa en el número de productores, acompañado de un incremento en la cantidad de vacas por productor y en la productividad individual de los animales [31] [21]. Para el año 2011, más de 2.000 tambos habían desaparecido en Uruguay en las dos décadas previas [70], y la disminución se ha mantenido a una tasa aproximada del 3 % anual. Este proceso de concentración y expansión de escala en los establecimientos restantes, si bien no impacta inmediatamente en el volumen de producción, conlleva una pérdida de capital social y plantea desafíos para la estructura institucional del sector [31].

Otro elemento emergente es la cuestión medioambiental y el desafío de identificar transiciones viables hacia sistemas de producción más sostenibles. La calidad, inocuidad y el valor agregado ambiental de los productos son cada vez más determinantes para la competitividad, la diferenciación y el acceso a mercados de mayor valor, además de ser esenciales para superar nuevas barreras arancelarias y no arancelarias. Estas últimas incluyen obstáculos procedimentales, requisitos técnicos y sanitarios complejos, y regulaciones sobre etiquetado y empaque que pueden dificultar el acceso a mercados internacionales [17]. En este sentido, abordar el balance y la circularidad de nutrientes en los sistemas de producción lecheros se vuelve un tema relevante para el futuro del sector [21].

2.3. Recría

La recría de vaquillonas constituye una etapa fundamental en el ciclo productivo lechero, ya que de su correcta gestión depende en gran medida la eficiencia reproductiva, la productividad y la longevidad de los animales. Comienza luego del destete o desleche, cuando la ternera ya ha desarrollado un aparato digestivo funcional, y se extiende hasta que la hembra alcanza el desarrollo corporal y fisiológico necesario para integrarse al rodeo adulto. En este sentido, existen distintas definiciones respecto a su duración: algunos autores establecen su fin cuando la vaquillona alcanza el desarrollo corporal y reproductivo suficiente para su primera inseminación, mientras que otros la extienden hasta el primer parto [72] [36] [7]. A modo de facilitar la comprensión, se presenta la Figura 10, donde se ilustra el ciclo de vida de las vacas lecheras y se ubica específicamente la etapa de recría.

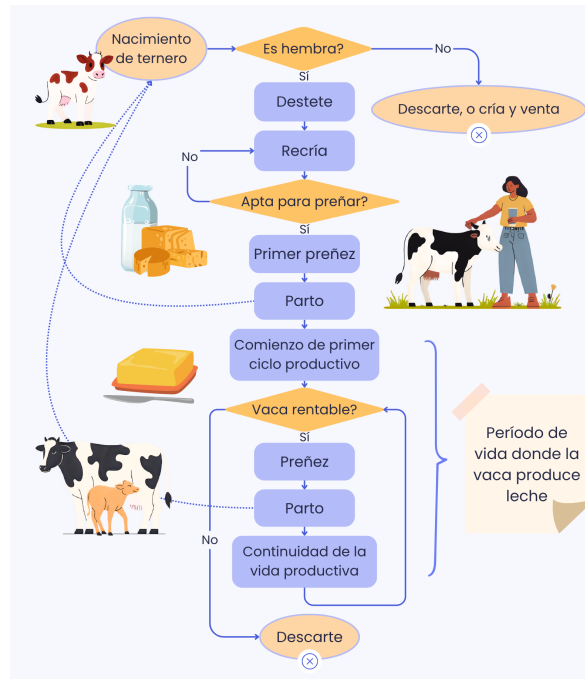


Figura 10: Diagrama de flujo ciclo de vida de una vaca lechera. Imagen de elaboración propia.

El principal desafío en la recría es lograr un crecimiento constante y moderado, evitando deficiencias o excesos que perjudiquen su desarrollo. Una alimentación balanceada en los primeros meses mejora la eficiencia en la conversión alimenticia y sienta las bases para una producción lechera óptima [74] [36]. Una planificación eficiente en bovinos lecheros requiere atención integral al proceso de recría. Es esencial establecer objetivos claros respecto a la edad del primer parto, determinada por el peso y la talla de la vaquillona, y diseñar una estrategia

de alimentación y crecimiento adecuada que incluya instalaciones apropiadas para su manejo y bienestar [72] [69].

La renovación anual del rodeo lechero implica la sustitución de animales que han sido descartados por causas como baja productividad, ventas o mortalidad. En sistemas bien gestionados, la tasa de mortalidad debería ser baja, y cualquier incremento en categorías jóvenes o adultas requiere un análisis cuidadoso, ya que compromete la reposición futura [27]. Para cubrir adecuadamente estas bajas, es esencial contar con un grupo suficiente de animales jóvenes criados dentro del propio sistema, dado que la recría interna permite mayor control sanitario y adaptación al ambiente productivo, siendo generalmente preferida frente a la compra de animales externos [72] [7]. A nivel internacional, se estima que los productores reemplazan anualmente entre el 25 y 35 % de sus hembras [72], porcentaje que se considera apropiado para sostener el equilibrio del rodeo sin incrementar en exceso los costos de producción asociados a una mayor cantidad de animales jóvenes mantenidos en el sistema [7].

Una herramienta común en el manejo de la recría es el “campo de recría”, un área compartida entre productores en la que se crían terneras de distintos establecimientos para convertirlas en vaquillonas próximas a parir. Este sistema permite a los pequeños y medianos productores ampliar su área de pastoreo y garantizar un manejo especializado de sus animales [4] [91].

2.3.1. Importancia de la recría

La recría es fundamental en la producción lechera, ya que influye directamente en la calidad genética, la longevidad y el rendimiento del rodeo. Siendo un componente estratégico para garantizar la continuidad del sistema y su capacidad de respuesta frente al descarte por causas productivas o sanitarias, un manejo adecuado en esta etapa permite renovar constantemente el rebaño y asegurar la sostenibilidad del tambo. Durante la recría, las decisiones en nutrición, sanidad y bienestar animal son críticas, ya que determinan el desarrollo físico, la pubertad y la capacidad de concepción de las vaquillonas [72] [91].

Se estima que, en promedio, una vaca solo produce leche durante el 43 % de su vida útil, mientras que el resto del tiempo lo ocupa en la etapa de cría y recría, período en el cual no genera ingresos pero requiere inversiones significativas [91]. A pesar de su impacto directo en la productividad futura, la recría continúa siendo subvalorada en muchos sistemas de producción. Esto se debe, en parte, a que sus resultados no se evidencian de forma inmediata. Para la mayoría de los productores, representa un gasto destinado a una categoría no productora de leche, cuando en realidad debería ser concebida como una inversión estratégica. La vaquillona no genera retorno hasta el parto o su eventual venta, momento en el cual comienza a recuperarse el capital invertido en su desarrollo [36].

Un manejo adecuado durante la recría es esencial para lograr una ganancia de peso óptima con menores costos. Se recomienda que las vaquillonas alcancen entre el 60 % y el 66 % de su peso adulto antes de la primera inseminación, lo que facilita un primer parto alrededor de los 24 meses [66] [72]. Para alcanzar este objetivo, es necesario implementar prácticas que favorezcan un crecimiento equilibrado, tanto en términos corporales como del desarrollo de la glándula mamaria. El plazo para lograrlo debe ser lo más breve posible, siempre que no se comprometa la salud ni el desempeño productivo futuro del animal, ya que reducir el período improductivo disminuye los costos del sistema. En este sentido, para conseguirlo se busca que las vaquillonas sean sanas y fuertes al momento del parto, asegurando que el crecimiento esté prácticamente finalizado. Esto permite que los nutrientes se destinen principalmente a la producción de leche y no a continuar con el crecimiento. [69] [101]. Este enfoque contribuye a reducir la duración de la recría, minimizar los costos asociados y disminuir la incidencia de

enfermedades metabólicas y reproductivas. Además, retrasar la edad del primer parto puede afectar negativamente la productividad del rodeo, ya que implica mayores costos en la crianza al prolongar los períodos de alimentación sin generación de ingresos [91]. Cabe destacar que el costo de la recría puede llegar a representar hasta el 20 % del costo total de producción de un litro de leche, por lo que optimizar esta etapa resulta clave para la rentabilidad del tambo [72] [13].

La inclusión de vaquillonas permite renovar el rodeo y reducir la presencia de vacas envejecidas y de baja productividad. Sin embargo, un recambio excesivo puede elevar los costos y reducir la productividad a corto plazo, pues las vaquillonas no alcanzan su máximo potencial hasta la tercera o cuarta lactación. Por el contrario, un recambio insuficiente resulta en un rodeo envejecido, con mayores riesgos de enfermedades, baja fertilidad y menor probabilidad de gestación [66][36].

2.3.2. Desafíos y manejo de la recría

En los sistemas pastoriles predominantes, las limitaciones en cantidad y calidad del alimento para vaquillonas provocan retrasos en el primer servicio y bajo peso al parto. Esto lleva a que muchas inicien su primera lactancia con más de 30 meses y menor producción, dificultando la reposición y el crecimiento del rodeo. Como respuesta, ha ganado terreno la recría a corral, que bajo alimentación controlada permite un crecimiento más uniforme y un servicio más temprano. Aunque requiere inversiones en forraje, infraestructura y personal, esta estrategia ha mostrado mejoras en los resultados técnicos y económicos de la recría. Esta relación entre alimentación y eficiencia en la recría ha sido evidenciada experimentalmente. Distintos estudios muestran que, al incrementar la oferta diaria de nutrientes, especialmente durante las primeras etapas de crecimiento, se logra anticipar la edad al primer parto sin comprometer la salud ni la producción futura. Tal efecto puede observarse claramente en la Figura 11 [36].

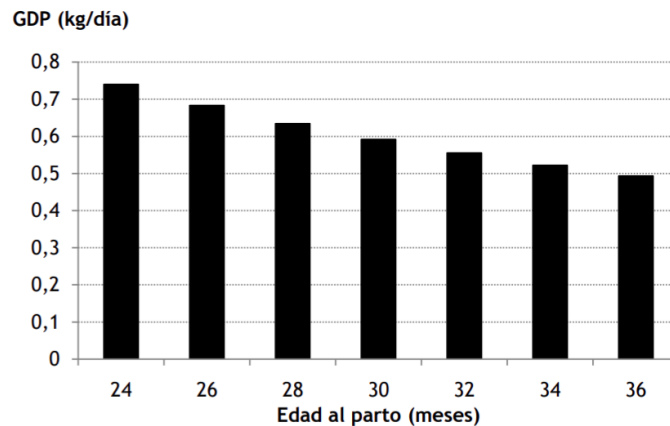


Figura 11: Ganancia diaria de pesos vivo (GDP) y demora en el parto de las vaquillonas [36].

Por último, un manejo sanitario y nutricional riguroso durante la recría es crucial para optimizar el potencial productivo de las terneras. La implementación de protocolos de vacunación, control parasitario y estrategias de alimentación que aseguren una ingesta adecuada de nutrientes no sólo facilita alcanzar los objetivos de peso para la inseminación, sino que también mejora la eficiencia en la conversión alimenticia, reduce los costos operativos a mediano y largo plazo y fortalece la salud general del rebaño [69] [36]. Un ejemplo de esto es

que se recomienda mantener una adecuada relación entre energía y proteína durante la recría, especialmente en animales pre-púberes. Un exceso energético no acompañado de proteína suficiente puede inducir una deposición grasa en la glándula mamaria, con impacto negativo en la producción futura. Asimismo, minimizar el estrés durante la recría, mediante instalaciones adecuadas, un manejo tranquilo y un ambiente predecible, es clave para evitar pérdidas de peso, reducir enfermedades y mejorar la adaptación futura al tambo [91].

2.3.3. Estrategias de la recría en Uruguay

En Uruguay, la recría de animales presenta desafíos que impactan directamente en la eficiencia productiva y en la rentabilidad de los sistemas ganaderos y lecheros [21]. Datos relevados en 2012 sobre 55.000 animales indican que la edad promedio al primer parto es de aproximadamente 36 meses, con un 36 % de las vacas pariendo por primera vez después de esa edad. Estos valores superan ampliamente los considerados óptimos en distintos sistemas de producción. Asimismo, dicho momento lo alcanzan con un peso promedio al parto de 476 kg, lo cual se encuentra por debajo del recomendado [91].

En el contexto de la lechería uruguaya, aproximadamente un 23 % del rodeo se descarta anualmente, ya sea por causas sanitarias, reproductivas o productivas. Esta proporción obliga a los establecimientos a sostener un flujo constante de animales de reposición para mantener la estabilidad del sistema. A su vez, la escasa proporción de vacas que se comercializan con destino lechero restringe las posibilidades de renovación externa, reforzando la necesidad de un recambio generacional planificado dentro del propio sistema [27]. La proporción obtenida en un estudio realizado entre junio de 2019 y mayo de 2020, de vacas descartadas (así como las causas) frente a las que se mantienen, se puede observar en la Figura 12.

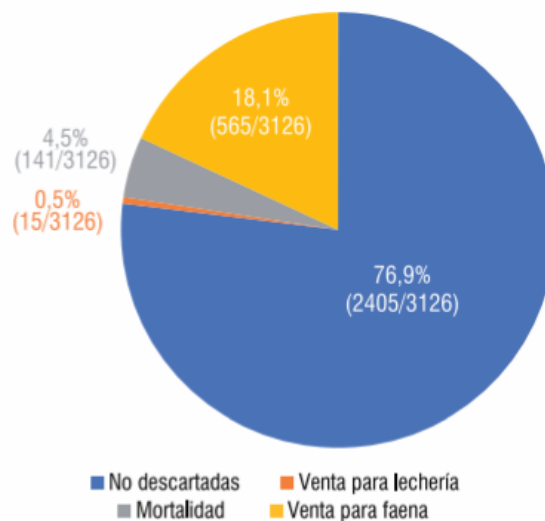


Figura 12: Frecuencia de descarte de vacas lecheras incluyendo ventas para faena, mortalidad y para lechería en 12 rodeos de Colonia y San José, Uruguay. Junio 2019 - Mayo 2020 [27].

Algunos estudios han documentado una evolución positiva en la proporción de animales de reposición dentro del rodeo lechero. En 1995, se estimaba que el 44,3 % del rodeo correspondía a animales de reposición, lo que reflejaba una alta carga de categorías improductivas en el sistema [7]. Sin embargo, para el año 2020, este valor se redujo significativamente hasta alcanzar un 26 %, lo que evidencia una mejora en la eficiencia de manejo del rodeo y una

mayor racionalización en el uso de los recursos disponibles [72].

Es común la utilización de campos de recría, donde los productores lecheros envían a sus animales al alcanzar un peso adecuado, con el objetivo de retirarlos algunos meses antes del primer parto [72]. Si bien alivian el uso de recursos en el tambo, presentan limitaciones importantes en alimentación y control sanitario. En estos sistemas, las ganancias de peso suelen ser bajas y el tiempo hasta el primer parto se prolonga, afectando negativamente la eficiencia del reemplazo [91].

2.4. Modelos matemáticos

Como se mencionó anteriormente, el objetivo del trabajo consiste en el desarrollo de un modelo de optimización. En particular, un modelo es una representación abstracta y simplificada de una situación o problema real, influenciada por el contexto y el propósito para el cual es creado. En optimización e investigación de operaciones, un modelo matemático busca capturar la esencia de un problema de la vida real mediante la construcción de un conjunto de ecuaciones y desigualdades que permitan analizarlo y resolverlo de manera sistemática. El objetivo principal es la toma de decisiones basada en un enfoque científico para la gestión [99].

Dentro de los modelos matemáticos, de acuerdo a la proveniencia de la información en que se basa el modelo, podemos distinguir entre los modelos heurísticos (los cuales se apoyan en las definiciones de las causas o los mecanismos naturales que originan el fenómeno en cuestión) y los modelos empíricos (enfocados en el estudio de los resultados de la experimentación) [41]. A su vez, de acuerdo al tipo de resultado pretendido, se clasifican básicamente en modelos cualitativos y modelos cuantitativos. Respecto a los primeros, pueden valerse de gráficos y no buscan un resultado de tipo exacto, sino que intentan detectar, por ejemplo, la tendencia de un sistema al incrementar o disminuir un determinado valor. Y en cuanto a los segundos, estos tienen como objetivo encontrar un número preciso, para el cual se apoyan en fórmulas matemáticas de variada complejidad [87]. Otro factor que divide los tipos de modelos matemáticos es la aleatoriedad de la situación inicial. En este punto, se distinguen los modelos estocásticos de los deterministas. Mientras que los estocásticos devuelven la probabilidad de que se obtenga un cierto resultado y no el valor en sí, los deterministas predicen resultados exactos a partir de datos conocidos (por lo que no existe incertidumbre) [41]. Por último, según el objetivo que se persiga, los modelos pueden clasificarse en modelos de simulación, modelos de decisiones bajo incertidumbre y modelos de optimización. Los modelos de simulación buscan anticipar el comportamiento de un sistema bajo determinadas condiciones, reproduciendo su funcionamiento sin intervenir directamente en la toma de decisiones. Los modelos de decisiones bajo incertidumbre, en cambio, permiten analizar distintas alternativas cuando no se dispone de información completa o intervienen factores aleatorios, incorporando el riesgo en el proceso de decisión. Finalmente, los modelos de optimización se enfocan en identificar la mejor configuración posible dentro de un conjunto de soluciones factibles, evaluando distintas condiciones y restricciones. Estos modelos son particularmente relevantes cuando se requiere asignar recursos de manera eficiente, maximizar beneficios o minimizar costos, por lo que resultan esenciales en estudios orientados a la mejora de sistemas productivos [41] [5].

Dentro de los distintos tipos de modelos matemáticos que existen, el enfoque de este trabajo se centró en los modelos de optimización, los cuales tienen un carácter cuantitativo. Estos modelos buscan representar una realidad específica a partir de la formulación de un programa matemático [44].

2.4.1. Modelos matemáticos de optimización

Los modelos matemáticos de optimización cumplen con ciertas características esenciales [44]:

- **Completitud y realismo:** Deben incorporar los objetos y relaciones esenciales del problema que se pretende estudiar.
- **Facilidad de comprensión y uso:** Es importante poder identificar qué aspectos de la realidad se buscan modelar y obtener resultados comprensibles en un tiempo razonable, asegurando así su facilidad de resolución.
- **Independencia de los datos específicos:** El modelo no debe estar restringido a un sólo caso concreto, permitiendo su aplicación en distintos escenarios.
- **Multiplicidad de modelos válidos:** Pueden existir varios modelos correctos para representar una misma realidad.
- **Dependencia del enfoque y objetivo del estudio:** La forma en que se construya el modelo dependerá de quién lo desarrolle y de qué aspectos se busquen analizar.

El desarrollo de la representación de una determinada realidad a través de este tipo de modelos, y en particular la construcción de un programa matemático, comienza con un análisis detallado de la situación. En esta fase inicial, se identifican los componentes clave y las relaciones fundamentales que determinan el comportamiento del sistema bajo estudio. A partir de este análisis, se procede a la descripción del problema, que implica la recolección de información relevante, la interpretación y traducción a términos precisos. Esta etapa es crucial, ya que una formulación precisa del problema garantiza que el modelo refleje fielmente la realidad y permita obtener soluciones óptimas y aplicables en el contexto de estudio [88] [41]. A continuación de la descripción del problema, se desarrolla la formulación matemática del problema, donde la descripción verbal se traduce a un lenguaje cuantitativo. En esta etapa, se establecen las ecuaciones y desigualdades que formarán el modelo matemático. Estos elementos son los que permiten estructurar el problema de forma que pueda ser resuelto mediante técnicas de optimización. Para ello, es necesario definir los componentes del modelo [44]:

- **Variables de decisión:** Representan los valores que deben determinarse mediante el proceso de optimización. Son los elementos sobre los cuales se toman decisiones dentro del modelo y pueden clasificarse en variables continuas o discretas. Las continuas son aquellas que pueden tomar cualquier valor dentro de un rango definido, como la cantidad de kilogramos de alimento a asignar. Las discretas son aquellas que sólo pueden asumir valores enteros, como el número de unidades de un producto a producir. Estas variables son desconocidas al inicio y su valor óptimo se obtiene como resultado del proceso de resolución del modelo.
- **Parámetros:** Son valores constantes dentro del modelo, por lo que no cambian durante el proceso de optimización. Representan datos conocidos como costos, capacidades, tiempos de procesamiento o cualquier otro valor que influye en la estructura del problema pero que no está sujeto a decisión.
- **Función objetivo:** Es la expresión matemática que se desea maximizar o minimizar, dependiendo del problema. Puede representar la maximización de ingresos, la minimización de costos o cualquier otro criterio de interés.

- **Restricciones:** Son las condiciones que deben cumplirse dentro del modelo y que limitan las posibles soluciones. Se expresan en forma de ecuaciones o desigualdades y reflejan aspectos como, por ejemplo, limitantes en la cantidad máxima o mínima de bienes que pueden producirse.

Una vez definidos estos componentes, se puede proceder a la recolección y análisis de datos. Este proceso es fundamental para alimentar el modelo con información precisa y relevante, que permita una resolución efectiva del problema planteado [41]. El siguiente paso es la resolución del modelo. En esta fase, se utilizan paquetes informáticos especializados que proporcionan el lenguaje para escribir el modelo, algoritmos eficientes (*solvers*) y herramientas para desplegar y analizar los resultados obtenidos [41]. A través de estos algoritmos, se busca encontrar la solución óptima del modelo, aquella que maximiza o minimiza la función objetivo, según corresponda, y satisface todas las restricciones impuestas por el problema. La solución óptima es la mejor posible dentro del conjunto de soluciones factibles, es decir, aquellas que cumplen con las restricciones. Es importante tener en cuenta que, en muchos problemas de optimización, los algoritmos empleados para la resolución de los problemas no siempre alcanzan la solución óptima exacta, especialmente en problemas de gran escala o con funciones no convexas. Sin embargo, los métodos de optimización permiten aproximarse a soluciones que sean suficientemente buenas o cercanas a la óptima, y su precisión se evalúa en función de tolerancias predefinidas. Estas soluciones aproximadas permiten garantizar la eficiencia de los resultados dentro de los límites de tiempo y los recursos disponibles, lo cual es clave para la aplicación práctica del modelo [41]. Posteriormente, se realiza la validación del modelo matemático, que implica experimentar con diferentes escenarios y analizar las soluciones generadas para comprobar su veracidad y coherencia con la realidad. Si el modelo demuestra ser coherente y útil para la toma de decisiones, se procede a su implementación, aplicando los resultados en el contexto real para optimizar el sistema bajo estudio [41].

2.4.2. Tipos de programación matemática

Una vez formulado el modelo de optimización, su resolución depende del tipo de relaciones matemáticas que lo conforman, ya que la estructura de la función objetivo y las restricciones determina qué enfoques pueden aplicarse para encontrar la solución óptima. Se presentan a continuación las relevantes para el presente proyecto [44].

Programación lineal (PL)

La programación lineal (PL) es un método de optimización en el que tanto la función objetivo como las restricciones se expresan mediante ecuaciones y desigualdades lineales. Esto significa que las relaciones entre las variables se describen de tal manera que, al representarlas gráficamente, la interacción entre los componentes del modelo son lineales. En este contexto, “linealidad” implica que el cambio en el valor de una variable tiene un efecto directo y constante en el resultado; por ejemplo, si se incrementa una variable en una cantidad fija, el efecto en la función objetivo también será predecible y proporcional [41].

Programación lineal entera mixta (MILP)

La programación lineal entera mixta (MILP) combina aspectos de la programación lineal y entera. Mientras que la programación entera (PI) es un método utilizado cuando todas las variables de decisión deben ser enteras, en el modelo MILP, la función objetivo y las restricciones son lineales, y algunas variables de decisión pueden ser enteras y otras pueden ser continuas. Este enfoque permite combinar decisiones discretas con variables continuas; por ejemplo, en la planificación de la producción, donde algunas decisiones son de naturaleza

binaria (como si invertir en maquinaria o no), mientras que otras son continuas (como el número de productos producidos) [41].

Programación no lineal (PNL)

Por otro lado, la programación no lineal (PNL) se refiere a problemas de optimización en los que la función objetivo y/o las restricciones son no lineales. En estos modelos, las relaciones entre variables no pueden expresarse mediante ecuaciones lineales, lo que lleva a problemas de optimización potencialmente mucho más complejos. Los problemas de PNL incluyen la optimización de funciones con términos cuadráticos, cúbicos e incluso exponenciales o logarítmicos [41].

Programación entera no lineal (MINLP)

La programación entera no lineal (MINLP) combina características de la programación no lineal con la programación entera. En el modelo MINLP, la función objetivo y/o las restricciones pueden ser no lineales, mientras que algunas o todas las variables de decisión pueden ser números enteros. Este tipo de modelo es útil para problemas complejos que involucran tanto soluciones discretas como relaciones no lineales entre variables [29].

2.4.3. Solvers

Para abordar los distintos tipos de problemas modelados matemáticamente, se utilizan los solvers, herramientas fundamentales en la optimización matemática. Un solver es un programa o algoritmo especializado diseñado para encontrar soluciones óptimas a problemas formulados en modelos matemáticos, aplicando métodos específicos según las características del problema [41]. Su correcta elección es un factor determinante en la resolución de modelos, ya que cada solver emplea técnicas particulares y presenta distintas capacidades para abordar ciertos tipos de problemas [75].

La naturaleza del modelo, ya sea lineal o no lineal, discreto o continuo, influye directamente en los métodos que pueden aplicarse y, por lo tanto, en la selección del *solver* más adecuado. En términos generales, los problemas lineales pueden resolverse mediante algoritmos como el método simplex y los métodos de puntos interiores, ampliamente utilizados en *solvers* especializados en programación lineal. Sin embargo, cuando el modelo involucra variables enteras, es necesario emplear técnicas adicionales, como ramificación y acotación (branch and bound) o planos cortantes (cutting planes), que permiten manejar decisiones discretas dentro del proceso de optimización. En contraste, los problemas no lineales requieren métodos de solución más complejos, como algoritmos basados en gradientes o heurísticas globales, que buscan encontrar soluciones factibles en modelos altamente complejos [41].

A continuación se describen brevemente los métodos de resolución mencionados:

- Planos cortantes: Mejoran la solución de programación entera agregando restricciones que eliminan regiones no enteras sin descartar soluciones óptimas [23].
- Método simplex: Recorre los vértices del espacio factible, mejorando la función objetivo hasta alcanzar la solución óptima [59].
- Métodos de puntos interiores: Siguen trayectorias dentro del espacio de soluciones, acelerando la convergencia en problemas grandes y complejos [60].
- Branch and Bound: Se basa en dividir el problema original en subproblemas más pequeños (ramificación) y calcular límites superiores e inferiores del resultado posible (acotamiento) para evitar analizar soluciones que no mejoran la encontrada hasta el momento.

A través de este proceso, se construye un árbol de decisiones y se podan las ramas que no conducen a soluciones óptimas [56].

- Algoritmos basados en gradientes: Utilizan derivadas para encontrar la dirección de mayor mejora en problemas no lineales [96].
- Heurísticas globales: Exploran el espacio de soluciones de manera probabilística, encontrando buenas soluciones en problemas complejos sin garantizar la óptima global [41].

Dado que el *solvers* es el encargado de interpretar la estructura matemática del problema y aplicar los algoritmos adecuados para hallar una solución, es fundamental que el modelo esté formulado en un lenguaje de programación compatible. Dependiendo del *solvers* seleccionado, pueden utilizarse diferentes lenguajes. Por ejemplo, algunos *solvers* de programación lineal admiten Python, Java, C++ o GMPL, mientras que *solvers* para optimización no lineal pueden integrarse con MATLAB o Julia. La elección del lenguaje no sólo depende del *solvers*, sino también de la facilidad que ofrece para representar el problema y su integración con otras herramientas utilizadas en el desarrollo del modelo.

En la actualidad, una opción adicional para resolver problemas de optimización es el uso de servidores públicos que alojan *solvers* de alto rendimiento, como el servidor NEOS (*Network-Enabled Optimization System*) [75], que permite acceder a una variedad de *solvers* sin necesidad de contar con recursos computacionales locales. Esta opción es especialmente útil para resolver problemas complejos sin tener que invertir en infraestructura computacional propia. Utilizar estos servicios remotos puede ser una solución eficaz cuando se dispone de una infraestructura limitada, permitiendo el acceso a potentes herramientas de optimización sin necesidad de gestionarlas directamente.

2.5. Modelos de optimización en el sector lechero

Los sistemas de producción lechera enfrentan desafíos constantes relacionados con la eficiencia en el uso de recursos, la sostenibilidad económica y la mejora del rendimiento productivo. Como se ha detallado a lo largo del marco teórico, la optimización de estos procesos es clave para garantizar una producción más rentable y sostenible, considerando factores como la gestión del rodeo, la planificación de la recría y la toma de decisiones estratégicas. En este contexto, diversos estudios han abordado la aplicación de modelos matemáticos y técnicas de optimización para mejorar la asignación de recursos y maximizar el rendimiento del sistema. A continuación, se presentan algunos de los principales enfoques y contribuciones en esta área.

2.5.1. Asignación de recursos alimenticios

Investigaciones previas, como los estudios de Gastón Notte [78] [79], han sentado las bases para el análisis de la asignación eficiente de recursos en la producción lechera. Estos trabajos han desarrollado modelos matemáticos y aplicado algoritmos evolutivos con el objetivo de mejorar la gestión y distribución de los recursos alimenticios en sistemas productivos.

En ambos trabajos, se tuvo como objetivo optimizar la asignación de recursos alimenticios para maximizar la producción de leche, priorizando un uso más eficiente de los insumos sin aumentar los costos operativos. Para esto, los modelos desarrollados tienen como objetivo, a partir de una situación inicial definida por el rodeo, las zonas de alimentación y la disponibilidad de alimento en un tambo, determinar la distribución óptima de las vacas en las

distintas áreas de alimentación. Además, buscan optimizar la asignación eficiente del alimento en cada instancia de alimentación, todo ello a lo largo de un período de tiempo establecido. Para el desarrollo de ambos estudios, se asumió que las vacas mantienen un peso vivo (PV) constante durante los días de ejecución de los distintos modelos, así como la invariabilidad en la semana y el día de lactancia. Asimismo, la composición del rodeo, en términos de cantidad y características de los animales, se consideró constante a lo largo del análisis.

Un elemento clave en estos estudios fue la aplicación de las ecuaciones del NRC (Nutrient Requirement of Dairy Cattle) [74], el cual define los requerimientos nutricionales del ganado lechero en función de variables como la edad, el peso, la producción de leche y la etapa fisiológica del animal. Este sistema permite estimar con precisión las necesidades energéticas y de nutrientes esenciales, facilitando la formulación de dietas optimizadas para maximizar la eficiencia productiva y garantizar el bienestar del rodeo. En este contexto, los estudios de Notte utilizaron el NRC como base científica para modelar con exactitud las demandas nutricionales del rodeo y optimizar la distribución de los recursos alimenticios en función de los requerimientos productivos y la disponibilidad de insumos.

Previo a la presentación de los modelos, se definen ciertos conceptos fundamentales que deben ser considerados para su interpretación.

- Energía neta de lactancia (ENL): Se trata de la cantidad de energía requerida para producir un litro de leche, y depende de los valores de grasa y proteína a considerar por litro de leche producido.
- Potencial genético: Representa la máxima cantidad de leche que una vaca puede producir durante cada ciclo de lactancia (que típicamente es de 305 días al año, considerando el período de sequía [62] [90]).
- Materia seca (MS): La materia seca es la porción del alimento que permanece después de eliminar el agua, e incluye los nutrientes esenciales como carbohidratos, proteínas y minerales.
- Disponibilidad de alimento: Es la cantidad de MS medida en kilogramos que contiene cada zona de alimentación del tambo.
- Semana de lactancia: Es la semana en la cual se encuentra el animal respecto al ciclo de lactancia que cursa.
- Requerimiento basal: Este concepto se refiere a las calorías requeridas para mantener las funciones esenciales de la vaca en estado de reposo, sin considerar la producción de leche ni el esfuerzo físico extra.
- Requerimiento de traslado: Es la energía que necesita una vaca para poder trasladarse, particularmente entre las distintas zonas de alimentación.
- FCM: El FCM (Factor de leche corregida por grasa al 4%) es un índice utilizado para medir la producción de leche ajustada al contenido de grasa. Este se utiliza con el fin de que la producción de leche sea equivalente a la que se obtendría si el contenido de grasa fuera constante al 4%.
- Consumo potencial: Es el consumo máximo en kg de MS que puede ingerir una vaca.

Dentro de uno de los estudios de Notte [78], se desarrolló un primer acercamiento, el cual se enfoca en maximizar la producción de leche en un único ordeño, identificando a cada vaca del rodeo individualmente. A su vez, se considera que las vacas del rodeo en este primer modelo,

poseen las mismas características inherentes (tales como PV, consumo potencial). Para esto, las distribuye en distintas zonas de alimentación, tomando en cuenta el consumo potencial de alimento que puede tener cada vaca y la cantidad de alimento disponible en cada zona. La energía neta disponible para la producción de leche se calcula a partir de la obtenida por el consumo de MS, descontando la energía requerida para el mantenimiento y el traslado de los animales. Para lograrlo, el modelo consta de ciertas restricciones que delimitan las soluciones posibles. La primer restricción como tal es aquella que determina que todas las vacas del rodeo tienen que estar asignadas a una y sólo una zona, lo que implica que todas deben ser alimentadas. Esta se presenta en la Ecuación (1).

$$y_z = \sum x_{iz} \quad \forall z \in Z \quad (1)$$

Donde y_z representa la cantidad de vacas asignadas a la zona z , y x_{iz} es una variable binaria que indica si la vaca i se asigno a la zona z .

Luego, otra de las restricciones (presentada en la Ecuación (2)) se encarga de limitar la cantidad de MS que se puede consumir por zona. Para ello, indica que el consumo total que se tiene a partir de los animales asignados a cada zona, que se representa como w_z , no puede superar la cantidad de alimento disponible en las mismas ($Alimento_z$).

$$w_z \leq Alimento_z \quad \forall z \in Z \quad (2)$$

Finalmente, se define la cantidad de alimento consumido por cada vaca. Este valor, no puede superar al consumo potencial ($consPot$) definido como parámetro de entrada. Cabe destacar, que en este modelo se asume uniforme el consumo de recursos alimenticios de todas las vacas asignadas a una misma zona. Esto se observa en la Ecuación (3).

$$w_z \leq y_z \times consPot \quad \forall z \in Z \quad (3)$$

A partir del modelo anterior, se le incorporó la posibilidad de tener dos ordeños por día y que se pueda ejecutar el modelo para varios días, lo que se asemeja a la realidad de los tambos en Uruguay. La formulación de este problema respecto al anterior no presenta grandes diferencias, salvo que la asignación de recursos se da para cada ordeño de manera independiente. Para ello, se incorporó un subíndice que representa cada ordeño dentro del horizonte de estudio. Este subíndice toma valores desde 1 hasta la cantidad total de ordeños, la cual se obtiene como el producto entre la cantidad de ordeños diarios y el número de días considerados en el modelo.

Como se mencionó previamente, hasta el momento se consideraba un rodeo de vacas, pero para la asignación a las zonas y los recursos consumidos, se tomaba a cada vaca de manera individual. Esto no es tan afín a la realidad de los tambos dado que generalmente en estos se lleva un manejo grupal de las mismas. Además, en términos de eficiencia en ejecución de los modelos, trabajarlas individualmente implica una cantidad mayor de variables, lo que conlleva tiempos computacionales mayores. A partir de esto, surge una nueva versión del modelo donde el principal cambio respecto al modelo anterior, es la agrupación de los animales, sin perder la posibilidad de separarlos para la asignación de recursos por ordeño. Esto permite una asignación menos granular, es decir, las variables asociadas dejan de presentarse individualmente, para pasar a ser grupales. Para esto, se agrega una restricción que establece que la cantidad total de vacas asignadas a las zonas, debe ser igual a la cantidad de vacas totales, en cada ordeño. La necesidad de su inclusión radica en que previamente a cada vaca

se le asignaba una zona, asegurándose así de alimentar el total de vacas.

Posteriormente, se desarrolló otro modelo que toma como base al modelo anterior pero con el objetivo de maximizar las ganancias económicas derivadas de la producción de leche, en lugar de la producción. Este modelo introdujo la consideración del costo económico asociado a la actividad así como el precio del litro de la leche, permitiendo una evaluación más completa de las decisiones de asignación de recursos. Para esto, a la función objetivo se le agrega, por un lado, la multiplicación por el precio de la leche al término asociado a la producción, lo que da como resultado la ganancia económica por los litros de leche producidos. Y, por otro lado, se le resta el costo incurrido por los kilogramos consumidos de MS en cada zona. Esto permite incorporar el análisis respecto al costo asociado por consumir alimento en una determinada zona, permitiendo plantear un enfoque orientado a la diferenciación de costos entre los alimentos. A pesar de que previamente se contaba con la posibilidad de asignar un aporte energético distinto para cada tipo de alimento (representando a las zonas con menores calorías como si fueran de pastura y las zonas que aportan mayor cantidad como granos o suplementos), en este modelo se añade la consideración de los costos. En la práctica tiene una importancia significativa para el productor, ya que los granos y suplementos son considerablemente más caros que el pasto.

A partir de los modelos mencionados, se tiene un punto de partida muy importante para futuros trabajos, ya que contemplan los elementos más básicos de un sistema lechero, aún más al incorporar el punto de vista económico. De todas maneras, se continuó profundizando y se generó un nuevo modelo, el cual vuelve a focalizarse en maximizar la producción de leche, pero incorporando la posibilidad de representar vacas de diversas características en el rodeo, y agrupándolas según ellas. Las principales características consideradas como inherentes a cada tipo de vaca, fueron el PV y el potencial genético (el cual se ve reflejado en el parámetro del consumo potencial). Para poder lograrlo, se debió adaptar el modelo que contemplaba vacas homogéneas modificando las variables al añadirse un subíndice asociado al tipo de vaca. A partir de esto, el análisis pasó a realizarse para cada tipo de vaca en su conjunto (sin dejar de considerar que el consumo en las zonas es la sumatoria de los consumos de los animales asignados de los diferentes tipos).

Continuando con la investigación mencionada, se desarrolló un nuevo trabajo que, entre otras cosas, mantiene como objetivo optimizar la producción de leche mediante la asignación óptima de recursos pero incorporando nuevos aspectos [79].

La mejora se estructuró en la incorporación de tres aspectos clave:

- La introducción de los costos asociados a cada tipo de alimento como un porcentaje del precio de la leche.
- La gestión de la asignación de los animales a las zonas de alimentación mediante un esquema por lotes.
- La transición del análisis del modelo, que deja de realizarse a nivel de ordeño para adoptarse en función de etapas.

Respecto al primer punto, el costo del kg de cada tipo de alimento, asociado a cada zona de alimentación, deja de considerarse como un valor fijo y pasa a determinarse como un porcentaje del precio del litro de leche (establecido como parámetro de entrada). Esta reformulación tiene una importancia significativa, ya que no sólo busca reflejar el costo directo del alimento, sino también incorporar de manera implícita otros costos asociados a la producción lechera, tales como los vinculados al mantenimiento, la infraestructura y la gestión operativa del tambo. De

esta manera, se logra una representación más integral de la estructura de costos, alineando la optimización económica con las dinámicas reales del sistema productivo.

En cuanto al segundo aspecto, se tiene que en los establecimientos lecheros, los animales generalmente se gestionan en lotes fijos durante un período determinado. Es decir, su manejo en términos de traslados y cuidados se da grupalmente. Este enfoque simplifica la planificación operativa, optimiza el uso de la infraestructura y facilita la administración de la alimentación y el ordeño. Además, permite un seguimiento más eficiente del estado productivo y sanitario del rodeo, asegurando condiciones homogéneas dentro de cada grupo. La inclusión de esta estructura de gestión del rodeo en el modelo, introduce una restricción que impide la asignación independiente de cada vaca en cada ordeño. En su lugar, el modelo debe definir la composición de los lotes y garantizar que las decisiones de asignación de recursos respeten esta organización. Así, las vacas de un mismo lote se trasladan juntas tanto a la alimentación como al ordeño, alineando la optimización del sistema con la realidad operativa del tambo.

Por último, la utilización de etapas en el modelo responde a dos objetivos principales. En primer lugar, permite una mayor correspondencia con la realidad operativa del tambo, dado que los lotes de animales se mantienen constantes durante un período de tiempo definido. En segundo lugar, optimiza el uso de los recursos computacionales al reducir la cantidad de variables necesarias, ya que las decisiones se formulan a nivel de etapa en lugar de hacerlo a nivel de cada ordeño. Esto no sólo mejora la eficiencia del cálculo, sino que también facilita el análisis e interpretación de los resultados obtenidos.

2.5.2. Gestión de la recría y recambio de animales

En el ámbito de la investigación sobre la recría de vacas en sistemas de producción lechera, se han desarrollado diversos estudios y modelos enfocados en la optimización de su gestión. Cada uno de estos trabajos presenta enfoques particulares y líneas de investigación diferenciadas, abordando aspectos como la selección de reemplazos, la edad y peso óptimos al primer servicio, los costos asociados a la recría, y su impacto en la eficiencia del sistema productivo. En la presente sección se describen algunos de estos estudios, destacando sus objetivos generales y los aspectos más relevantes de sus hallazgos.

Sistema para el análisis de la recría de vaquillonas en tambos - VaqINTA

En este contexto, VaqINTA v3.1 [64] es una herramienta desarrollada por el Instituto Nacional de Tecnología Agropecuaria (INTA) de Argentina, específicamente diseñada para la evaluación integral de sistemas de recría mediante la modelización en hojas de cálculo. Su objetivo principal es proporcionar un marco de análisis técnico y económico que permita evaluar y comparar diferentes estrategias de recría de vaquillonas en tambos. La herramienta permite analizar hasta dos sistemas de manera simultánea, considerando múltiples variables productivas y económicas para optimizar la toma de decisiones. Desarrollada en Microsoft Excel, VaqINTA está diseñada para su uso por productores, asesores y técnicos.

La herramienta se estructura en diferentes secciones. En primer lugar, la base de datos y los parámetros iniciales incluyen:

- Datos alimentarios y energéticos: Evaluación de la ganancia energética y costos de distintas alternativas de alimentación.
- Infraestructura: Registro de zonas y superficies destinadas a la recría, junto con los costos asociados a instalaciones y equipamientos.
- Características del rodeo: Identificación de posibles razas o biotipos de las terneras y

vaquillonas, peso promedio de vacas adultas, distribución del peso por etapa de recría, tasa de mortandad e intervalo entre partos.

- Costos administrativos y sanitarios: Inclusión de gastos vinculados a sanidad, reproducción y administración general del sistema de recría.

Luego, se debe definir el sistema en función de las posibilidades indicadas en la base de datos. Se detalla a continuación algunos de los aspectos que considera el modelo.

Por un lado se debe definir el sistema de crianza y recría:

- Raza y composición del rodeo: Información sobre el número de terneras nacidas, su potencial genético y la vida útil de las vacas en el tambo.
- Manejo de la crianza y recría: Edad al primer servicio y tasa de preñez de las vaquillonas.
- Etapas de recría: VaqINTA define las etapas como crianza, recría I, II y III, vaquillona preñada y vaquillona parto. Se especifica la duración de cada una y su tasa de crecimiento, permitiendo calcular el peso alcanzado al final de cada fase.

Luego, en cuanto a la alimentación y balance nutricional, el usuario debe definir dietas específicas para cada etapa de recría, seleccionando hasta cinco alimentos de la base de datos. Las cantidades, expresadas en kg/cabeza/día como “alimento tal cual”, son convertidas automáticamente a MS. El sistema calcula a partir de los datos proporcionados, un valor esperado para la alimentación necesaria, y en caso de detectarse déficit o exceso de consumo respecto a los requerimientos nutricionales, el sistema resalta el desbalance, indicando la necesidad de ajustes.

Finalmente, VaqINTA realiza cálculos productivos y económicos basados en los datos ingresados. Entre los indicadores productivos, además de los mencionados previamente, se incluyen la tasa de crecimiento “lograda” en cada etapa de recría, la cual considera la incidencia de enfermedades sobre la ganancia de peso diaria, así como el peso final ajustado a partir de estos valores. También se estima la capacidad de reposición del rodeo lechero, evaluando si la producción de vaquillonas es suficiente para mantener el rodeo. Desde el punto de vista económico, el modelo estima costos de alimentación, sanidad y manejo por etapa, junto con los costos de oportunidad asociados a tierra, capital y mano de obra. A partir de esta información, se calculan los resultados financieros, incluyendo el margen bruto, resultado operativo e ingreso neto. La herramienta también genera reportes de resultados productivos y económicos organizados por etapas de recría, gráficos de análisis de costos y márgenes, y un análisis detallado de la reposición del rodeo, permitiendo la simulación de distintos escenarios productivos.

Un modelo basado en hojas de cálculo que demuestra los efectos económicos no uniformes del desempeño reproductivo variable en rodeos lecheros de Ohio

Dentro del análisis de la recría y su impacto en la eficiencia productiva de los sistemas lecheros, diversos estudios han abordado la relación entre la gestión reproductiva y la rentabilidad del rodeo. En particular, la duración del intervalo entre el parto y la siguiente preñez, conocido como días abiertos (DO), ha sido identificada como una variable clave que influye en la producción de leche, la tasa de reemplazo y los costos asociados a la alimentación y reproducción. En este contexto, uno de los estudios que exploran esta problemática fue publicado por Meadows, Rajala-Schultz y Frazer [67]. Este trabajo analiza cómo las variaciones en los DO afectan la rentabilidad del sistema productivo. Su objetivo principal es evaluar la relación

entre la duración de este período y su impacto en la producción de leche, la disponibilidad de vaquillonas de reemplazo y los costos operativos del tambo.

Para llevar a cabo este análisis, el estudio desarrolla un modelo basado en hojas de cálculo en Microsoft Excel, que permite simular la vida productiva de una vaca bajo distintos escenarios reproductivos. El modelo incorpora variables como:

- La producción de leche
- Los costos de alimentación
- Reproducción y reemplazo

y parámetros como:

- Tasa anual de descarte
- Precios de leche
- Precios de terneros

A través de esta herramienta, se analizan diferentes estrategias de manejo para determinar sus efectos en la eficiencia y rentabilidad del rodeo. El modelo parte de la premisa de que el tamaño del rodeo se mantiene constante y que siempre hay disponibilidad de vaquillonas de reemplazo idénticas. Bajo este supuesto, se estudia cómo el aumento en los DO afectan la cantidad de lactancias completadas por vaca y, en consecuencia, la producción total de leche. A partir de lo cual, se demuestra que cuando los DO superan los 150 días, la producción de leche disminuye significativamente, mientras que los costos operativos aumentan debido a la necesidad de mantener vacas improductivas y adquirir animales de reemplazo.

Un modelo económico en hoja de cálculo para determinar decisiones óptimas de reproducción y reemplazo en ganado lechero

Otro documento relevante en el área y para este estudio, es el publicado por Groenendaal, Galligan y Mulder [38], el cual presenta un modelo basado en hojas de cálculo diseñado para ayudar en la toma de decisiones económicas sobre la reproducción y el reemplazo de vacas lecheras. El objetivo principal de este modelo es proporcionar a los productores una herramienta práctica y accesible que les permita optimizar la rentabilidad del rodeo mediante la evaluación de cuándo es más conveniente mantener una vaca en producción o reemplazarla por una nueva vaquillona. Para ello, se basa en la técnica de Marginal Net Revenue (MNR), la cual permite calcular el beneficio adicional que se espera obtener si una vaca es retenida hasta su edad óptima de descarte en comparación con su reemplazo inmediato.

El modelo se construye sobre la base del concepto de Retention Pay-Off (RPO), el cual representa el valor económico de una vaca considerando:

- Su producción de leche futura esperada
- Los ingresos generados por la venta de leche
- Los costos asociados a su mantenimiento
- Los riesgos de descarte involuntario

Cuando el valor del RPO es positivo, indica que la vaca aún puede generar ganancias y, por lo tanto, debería mantenerse en el sistema. En cambio, si el RPO es negativo, significa que la vaca genera más costos que beneficios y su reemplazo es la mejor decisión económica.

Para el cálculo de los valores económicos, el modelo considera parámetros productivos y de mercado como:

- El precio de la leche
- Los costos de alimentación
- Los costos veterinarios
- El valor de los terneros
- El valor de descarte de las vacas

Los resultados obtenidos mediante la aplicación del modelo confirman que la rentabilidad de cada vaca es altamente variable y depende de una combinación de factores como su edad, su nivel de producción, su eficiencia reproductiva y la estructura del rodeo. En términos generales, las vacas con producciones superiores al promedio tienen un RPO significativamente mayor y pueden mantenerse en producción por más tiempo. En contraste, aquellas con producciones inferiores y períodos prolongados de DO presentan un menor RPO y son candidatas para el reemplazo. Además, el modelo concluye que la decisión de reemplazo no sólo depende del desempeño de la vaca en cuestión, sino también de la disponibilidad y calidad de las vaquillonas de reemplazo. Si existen muchas vaquillonas listas para ingresar al sistema, el modelo recomienda un descarte más agresivo de vacas con baja producción o problemas reproductivos. Sin embargo, si la oferta de reemplazos es limitada, es posible que se deba extender la permanencia de algunas vacas en producción, incluso si su RPO no es el óptimo.

Interacciones entre las políticas óptimas de reemplazo y las estrategias de alimentación en rodeos lecheros

El documento titulado presentado por Vargas, Herrero y van Arendonk [97] presenta y utiliza el sistema C & I-DSS (Conception and Insemination Decision Support System), una herramienta desarrollada para asistir en la toma de decisiones estratégicas sobre la reproducción y el descarte de vacas en sistemas lecheros. Su objetivo principal es evaluar cómo distintas estrategias de alimentación inciden sobre la eficiencia productiva y la rentabilidad del rodeo, optimizando el momento en que una vaca debe ser inseminada o reemplazada. Para lograrlo, el sistema combina dos enfoques complementarios:

- Un modelo de simulación del desempeño animal: Permite estimar la producción de leche, el consumo de alimento y la evolución de la condición corporal según diferentes dietas
- Un modelo de optimización del reemplazo: Basado en programación dinámica, que determina las políticas óptimas de manejo a partir del valor presente esperado de cada vaca en cada momento del ciclo productivo; en donde la programación dinámica es un método de optimización matemática que resuelve problemas de decisión secuenciales.

En el estudio, se asume que el rodeo mantiene un tamaño constante, es decir, que cada vaca descartada debe ser reemplazada por una vaquillona. Además, se considera que el desempeño productivo de las vacas está determinado por su alimentación y genética, lo que influye en su producción de leche, su tasa de reemplazo y su intervalo entre partos. Se evalúan distintos

regímenes de alimentación, combinando dos tipos de pasturas y esquemas de suministro de concentrado, y se optimizan las decisiones de descarte e inseminación en función del valor presente esperado de cada vaca, teniendo en cuenta ingresos por producción y costos de mantenimiento. La probabilidad de concepción se modela como una variable dependiente del estado metabólico del animal, influenciado por la disponibilidad de alimento y el consumo de MS. Las decisiones se toman de manera mensual, con restricciones en los primeros meses postparto.

El modelo de simulación del desempeño animal permite evaluar cómo distintas estrategias de alimentación afectan la producción de leche y la condición corporal de las vacas. Para ello, estima el consumo de alimento según la calidad de la pastura y la suplementación con concentrado, calcula la producción de leche a lo largo de la lactancia mediante ecuaciones de curvas de lactancia y modela la variación del peso corporal, dado que la condición corporal influye en la eficiencia reproductiva. Este modelo no realiza optimización, sino que genera múltiples escenarios productivos bajo distintos regímenes de alimentación. A partir de estas simulaciones, el modelo de reemplazo recibe información sobre la evolución productiva de los animales y la usa para definir estrategias de descarte e inseminación. Por su lado, el modelo de optimización del reemplazo, basado en programación dinámica, determina si una vaca debe ser inseminada o descartada para maximizar la rentabilidad del rodeo. En este caso, el modelo descompone el proceso de decisión en una serie de etapas (meses), donde en cada una se elige la mejor alternativa considerando sus consecuencias futuras. Durante los dos primeros meses tras el parto, no se permite la inseminación ni el descarte. Entre los meses dos y siete, las vacas abiertas pueden ser inseminadas, permanecer sin inseminar o ser reemplazadas inmediatamente. A partir del séptimo mes, las vacas se clasifican en dos grupos: aquellas que no quedaron preñadas pueden mantenerse en producción o ser descartadas, mientras que las preñadas sólo pueden permanecer en producción. Este modelo permite evaluar distintas estrategias de manejo reproductivo, asegurando que cada vaca permanezca en el rodeo sólo mientras su valor presente esperado sea positivo.

Políticas óptimas de reemplazo para vacas lecheras basadas en mediciones diarias de producción

El trabajo publicado por Nielsen, Jørgensen, Kristensen y Østergaard [77] introduce un modelo basado en procesos de decisión de Markov jerárquicos (HMDP, por sus siglas en inglés) con el objetivo de mejorar la gestión de reemplazo de vacas en sistemas lecheros modernos. A diferencia de modelos previos que operaban con intervalos mensuales o anuales, esta propuesta permite la toma de decisiones en base a registros diarios de producción de leche, integrando datos en tiempo real obtenidos a partir de sensores de ordeño automatizados. La premisa central del estudio es que la decisión de cuándo reemplazar una vaca depende de múltiples factores, incluyendo:

- Rendimiento productivo
- Estado reproductivo
- Salud
- Precios de mercado
- Disponibilidad de vaquillonas de reemplazo

El modelo desarrollado se basa en un proceso de decisión de Markov que representa la evolución de cada vaca en función de su producción diaria de leche, estimada mediante un

modelo de espacio de estados. Para ello, se utiliza un enfoque que permite actualizar constantemente las expectativas sobre la producción futura de cada animal a partir de los datos registrados. Así, el modelo incorpora la posibilidad de ajustar estrategias de reemplazo en base a la predicción del desempeño productivo de cada individuo. A través de esta representación, se establecen decisiones óptimas para cada etapa de la lactancia, determinando si es económicamente conveniente mantener la vaca en el rodeo o proceder con su reemplazo. La optimización del modelo se realiza maximizando el valor presente neto esperado de la producción lechera, considerando costos y beneficios asociados a cada posible decisión. Se incorpora además un análisis del RPO, permitiendo cuantificar el beneficio o pérdida de cada decisión de manejo.

3. Descripción del problema

Para delimitar el problema y establecer su alcance, es fundamental comprender a fondo la situación actual de la producción lechera. Con este objetivo, se llevó a cabo un análisis en tres etapas: primero, un relevamiento bibliográfico para obtener una base teórica sólida; luego, una visita a un tambo en San José para contrastar la teoría con la realidad del sector; y finalmente, un estudio de los modelos de optimización existentes, evaluando sus limitaciones y el valor agregado que un nuevo enfoque podría aportar. En particular, un resumen de la visita al tambo se encuentra presentada en la Sección Anexo A.

3.1. Gestión de recursos en sistemas lecheros

La gestión eficiente de los recursos constituye un pilar fundamental para la rentabilidad de cualquier actividad productiva. En el caso particular de la producción lechera, dicha eficiencia adquiere un carácter crítico, ya que tanto el uso adecuado de los recursos alimenticios [74] como la planificación del recambio generacional del rodeo, son determinantes clave para asegurar la productividad y la sostenibilidad del sistema [66][36]. El éxito de un tambo no depende únicamente de la eficiencia técnica de sus operaciones, sino también de la capacidad de anticipar los impactos económicos y productivos de sus estrategias de manejo [78]. Por lo tanto, para garantizar un alto nivel de beneficios, tanto la gestión de la asignación de recursos alimenticios como la planificación de la cría, requieren de una toma de decisiones estratégicas fundamentales [72] [36] [7]. Estas decisiones no sólo se convierten en un eje operativo, sino en un factor diferenciador para la competitividad del sistema productivo, lo cual es complejo, ya que implican contemplar múltiples variables: el manejo de los terneros recién nacidos, la integración de las terneras al rodeo productivo, la compra e incorporación de vacas al rodeo, la venta de vacas que no resultan rentables para el sistema y la optimización del rendimiento de las vacas adultas que están presentes. Además, no sólo deben responder a las condiciones actuales del sistema productivo, sino que también deben proyectarse en el mediano y largo plazo.

En las últimas décadas, las condiciones económicas y productivas han obligado a los tambos a intensificar sus esquemas de producción. Esta intensificación, caracterizada por un aumento de la productividad a través del uso intensivo de tecnología (como inseminación artificial, mecanización) y cambios en el modelo de alimentación (mayor implementación de sistemas de confinamiento), así como el incremento en la densidad de vacas por hectárea, puede traducirse en un aumento en la producción de leche, aunque no necesariamente conlleva una gestión eficiente de los recursos [81] [21] [70] [8]. Tradicionalmente, los tambos han sido gestionados como emprendimientos de carácter familiar. Sin embargo, ante la creciente necesidad de intensificar la producción y optimizar la gestión, se observa una tendencia hacia su reemplazo por sistemas de mayor escala [70] [31] [21]. Particularmente, un mayor número de animales en un espacio limitado implica una mayor competencia por los recursos, lo que plantea desafíos significativos en la alimentación y distribución de insumos. En este contexto, es fundamental asegurar que cada animal reciba una dieta adecuada en cantidad y calidad, ajustada a sus necesidades nutricionales en cada etapa productiva [15] [24] [74]. Una vez alcanzado un alto nivel de utilización del pasto, la suplementación pasa a ser una herramienta clave dentro de las estrategias de intensificación, permitiendo sostener niveles elevados de producción y eficiencia en sistemas de cría o engorde [65]. Además, en sistemas lecheros pastoriles bajo condiciones climáticas con marcada estacionalidad, la suplementación estratégica se vuelve imprescindible durante los períodos de baja oferta forrajera, especialmente en invierno, para sostener la carga animal y la eficiencia productiva del sistema [3] [98] [70]. No obstante, un uso excesivo de estos suplementos puede resultar contraproducente, tanto desde una perspectiva económica,

al incrementar los costos operativos, como desde un punto de vista reproductivo, afectando el rendimiento y la salud del rodeo [19] [83] [93].

Uno de los principales desafíos que enfrenta la producción lechera en Uruguay es la gestión de la recría [21] [91] y el recambio del rodeo [27]. En cuanto al primer punto, la recría es un proceso fundamental en la producción lechera, ya que influye en la calidad genética, la longevidad y el rendimiento del rodeo [72]. Durante esta etapa, decisiones en nutrición y bienestar animal determinan el desarrollo físico y la capacidad de concepción. Un manejo eficiente permite una ganancia de peso óptima con menores costos, optimiza la concepción en el primer servicio y reduce la duración de la recría, lo que mejora la rentabilidad del establecimiento y disminuye la incidencia de enfermedades metabólicas y reproductivas [66] [72]. En Uruguay, usualmente la recría queda relegada en la distribución de recursos, priorizando la alimentación de las vacas en producción. Esta falta de planificación puede resultar en vaquillonas que no alcanzan el peso adecuado al primer servicio, retrasando su entrada en producción. Tal es así, que la edad promedio al primer parto es de 36 meses (lo que implicaría un primer servicio aproximadamente a los 27 meses), con un 36 % de las vacas pariendo por primera vez después de esa edad [91]. En cuanto al segundo punto, la gestión del recambio del rodeo es un factor clave para la eficiencia y rentabilidad del sistema lechero. Un recambio adecuado permite mantener un equilibrio entre vacas productivas y animales no productivos, asegurando la renovación del rodeo y evitando la acumulación de vacas envejecidas. Ya que por un lado, el recambio excesivo puede generar costos elevados y una reducción temporal en la producción, y un recambio insuficiente da lugar a un rodeo envejecido, con problemas de salud y baja fertilidad [66][36] [40]. En Uruguay, la tasa anual de descarte en los tambos ronda el 23 %, lo que significa que aproximadamente una de cada cuatro vacas es retirada del rodeo cada año (incluyendo cerca de un 5 % correspondiente a mortalidad). Este porcentaje es superior al observado en sistemas similares de producción pastoril, como los de Irlanda y Nueva Zelanda (21,3 % y 17,7 % en 2008 y 2016, respectivamente), lo que puede indicar oportunidades de mejora en la gestión del recambio [27].

Elegir qué animales deben permanecer en el rodeo, en qué cantidades, y con qué régimen de alimentación, es un proceso que exige un análisis integral. Esto se fundamenta en que, en función de cómo se alimente a las vacas que se mantienen en el rodeo (ya sea en su período productivo como en las etapas previas), así como sus características intrínsecas, se ve determinada la producción y el beneficio económico resultante [74]. A pesar de la importancia de estos aspectos, existen pocas herramientas cuantitativas para evaluar y optimizar la gestión de la recría y la asignación de recursos alimenticios. Los enfoques de los estudios previos que abordan aspectos relevantes de la dinámica del rodeo lechero y la recría son diferentes al que se busca. Por un lado, el sistema VaqINTA, publicado por el Instituto Nacional de Tecnología Agropecuaria (INTA) [64], se enfoca en el análisis técnico de la recría de vaquillonas, sin integrar decisiones estratégicas de planificación ni las restricciones globales del sistema. Otros estudios, como los publicados por Meadows, Rajala-Schultz y Frazer [67], Groenendaal, Galligan y Mulder [38] y Vargas, Herrero y van Arendonk [97], utilizan modelos en hojas de cálculo para evaluar el impacto de la performance reproductiva, pero se limitan a analizar aspectos económicos específicos sin abordar la evolución estructural del rodeo a largo plazo. También existen enfoques markovianos, como el desarrollado por Nielsen, Jørgensen, Kristensen y Østergaard [77], que optimizan políticas de reemplazo y otras decisiones dentro del tambo, pero generalmente se centran en aspectos aislados, como la estrategia alimenticia o el descarte. En contraste con lo mencionado, respecto a la asignación de recursos, se tiene una base sólida acorde a los objetivos del proyecto. Tal es así que el desarrollo del trabajo se basa en las investigaciones realizadas por Notte [78] [79].

En este contexto, el presente trabajo busca construir un modelo matemático que permita simular y evaluar diferentes estrategias de manejo del recambio de animales y la recría, con

el objetivo de maximizar el beneficio económico de los tambos. Este modelo se centrará en la asignación eficiente de los recursos alimenticios, contemplando tanto las necesidades del rodeo actual como las perspectivas de crecimiento futuro mediante el recambio del rodeo. Dicho enfoque no sólo pretende optimizar los procesos operativos, sino también ofrecer herramientas de decisión estratégica, que permitan a los productores adaptarse a un entorno dinámico y desafiante mediante la simulación de casos y análisis de las mejores alternativas. Por lo tanto, el enfoque adoptado en este trabajo se diferencia al tratar la recría y el recambio como decisiones integradas a la asignación de recursos alimenticios a lo largo de varios años.

En este trabajo se desarrollan dos modelos diferentes, el **modelo base** y el **modelo con recría**. Dado que se trata de un problema complejo, con múltiples variables y restricciones, se adopta una estrategia de construcción incremental. En una primera etapa, se plantea un **modelo base** centrado únicamente en la asignación de recursos. A partir de entonces, se incorporan progresivamente los componentes vinculados al recambio de animales y la recría de vaquillonas, permitiendo validaciones parciales en cada instancia y una construcción más ordenada del **modelo con recría**. Particularmente, para el desarrollo del modelo base se tomó como referencia el trabajo publicado por Notte [79], aunque sin aplicar el enfoque multiobjetivo que este propone.

3.2. Componentes lecheros contemplados para el modelo base

Los principales componentes lecheros utilizados en la formulación del modelo base se cuantifican mediante ecuaciones del NRC [74]. Estos elementos se presentan a continuación:

- Energía neta de lactancia (ENL):

$$ENL = porcentaje_grasa \times 9,29 + porcentaje_proteina \times 5,47 + 0,192; \quad (4)$$

- Requerimiento basal:

$$Req_basal = 0,08 \times peso_vivo^{0,75}; \quad (5)$$

- Requerimiento de traslado:

$$Req_traslado = 0,00045 \times peso_vivo \times distancia; \quad (6)$$

- Producción de leche diaria (PPD):

$$PPD = potencial_genetico \times 0,00318 \times dia^{0,1075} \times e^{-0,003 \times dia} \quad (7)$$

Donde el día hace referencia al número de día correspondiente al ciclo de lactancia cursado.

- FCM diario:

$$FCM = PPD \times (0,4 + 15 \times porcentaje_grasa) \quad (8)$$

- Consumo potencial diario:

$$Consumo_potencial = \frac{(0,372 \times FCM + 0,0968 \times peso_vivo^{0,75})}{(1 - e^{-0,192 \times (semana_lactancia + 3,67)})} \quad (9)$$

A partir de los elementos mencionados, se definió la producción de leche diaria como la ganancia neta energética sobre la energía requerida por litro de leche producido. Lo cual corresponde con:

$$Produccion = \frac{Cons_real \times Cal - (Req_basal + Req_traslado)}{ENL} \quad (10)$$

Donde *Cons_real* hace referencia al consumo de MS, *Cal* a la cantidad de energía que proporciona el consumo de un kilogramo de MS, *Req_basal* el requerimiento energético basal diario y el *Req_tras* es el requerimiento de traslado diario a la sala de ordeño y de vuelta a la zona de alimentación.

Con base en estas ecuaciones, se analizan a continuación algunos elementos que impactan significativamente en la producción:

- El tamaño del animal influye significativamente en el cálculo de la producción, ya que determina tanto el consumo potencial (y por lo tanto, la ganancia energética potencial), como el consumo energético necesario para sus actividades diarias [74]. Este aspecto se cuantifica a través del PV, y se decide mantenerlo como característico de los animales.
- También, el estado del ciclo de lactancia (reflejado en la semana y el día de lactancia) tiene una incidencia directa y cuantificable en la producción lechera [74]. Mientras que los modelos anteriores empleaban un valor fijo para los cálculos del consumo potencial, el presente análisis incorpora la variabilidad de este factor, en consonancia con la integración de la recría y la ampliación del horizonte temporal del estudio. Por lo tanto, se lo incluye como una característica de la vaca.
- En función de la semana de lactancia, sumado al potencial genético de producción anual de leche, es que se define el valor de leche corregida por grasa (FCM), el cual termina siendo característico de cada tipo de vaca, e importante para el cálculo del consumo potencial [74].

Se consideran otros aspectos relevantes identificados de la investigación bibliográfica. Uno de ellos, es la influencia de la raza en el consumo potencial de alimento, la producción potencial, y la composición de la leche [18] [74]. Principalmente se obtuvo información acerca de la raza Holando, la cual es la raza predominante en Uruguay [54]. Para este trabajo se decide tomar en cuenta la posibilidad de variación de la composición de grasas (g) y proteínas(p) en la producción de leche, lo que difiere de los modelos previos donde se mantiene fijo en los valores porcentuales de $g = 3,6$ y $p = 3,1$.

Existen factores externos a las vacas, propios del establecimiento de producción lechera o del manejo, que también influyen en su desempeño. Un ejemplo de ello son la caminería y el confort general, los cuales afectan directamente el desgaste energético de las vacas. Mantener los caminos por donde se trasladan las vacas en buen estado reduce el estrés y el esfuerzo necesario para los traslados a lo largo del campo, considerando que en Uruguay usualmente se realizan al menos cuatro traslados diarios entre los potreros o los comederos y las salas de ordeño. El confort general también tiene un papel importante, ya que el estrés reduce la capacidad de producción de las vacas; y es por esto que se puede ver una tendencia hacia el manejo desestresado de estas. Además, el estrés por las situaciones climáticas, en particular las altas temperaturas y humedad, reducen significativamente la Ingesta de Materia Seca (IMS) de las vacas, lo cual a su vez impacta directamente en la producción de leche [18] [100] [43] [80]. Esta relación puede ser modelada a través de ecuaciones que relacionan la IMS con variables climáticas como la temperatura y la humedad relativa. Se presentan algunos factores de ajuste para estimar la reducción en la IMS durante períodos de calor extremo [74]:

- para temperaturas superiores a 20 °C:

$$IMS_{ajustada} = IMS_{original} \times (1 - ((T - 20) \times 0,005922))$$

- para temperaturas inferiores a 5 °C:

$$IMS_{ajustada} = \frac{IMS_{original}}{1 - ((5 - Temperatura\ en\ ^\circ C - 20)) \times 0,004644)}$$

siendo T la temperatura en $^\circ C$

Si bien los factores desencadenantes de estrés pueden influir significativamente en la producción lechera, estos no fueron incluidos en los modelos debido a la falta de información cuantitativa precisa que permita representarlos de manera adecuada. En el caso del estado de la caminería, se asumió un nivel intermedio conforme a las recomendaciones generales del NRC [74]. En cuanto al estrés térmico, aunque existen ecuaciones para estimar la reducción en la IMS durante períodos de calor extremo, se consideró que su aplicación directa podría subestimar en exceso este efecto, por lo cual se optó por no incorporarlas en el modelo.

3.3. Modelo base

El primer paso en el diseño del enfoque propuesto fue la construcción del modelo base, que maximiza la producción de leche a partir de una adecuada asignación de recursos y sin contemplar aún la recría. En esta etapa inicial, el enfoque es estático, sin considerar la evolución temporal de los ciclos de lactancia. Este modelo constituyó el primer paso dentro del desarrollo incremental, proporcionando una estructura que permitió futuras extensiones.

Inicialmente se desarrolló un modelo donde se tiene un manejo grupal y heterogéneo de las vacas y manejo en lotes. Además, el análisis se realiza por períodos, lo que implica que la conformación de los lotes se mantiene constante dentro de cada período de tiempo. En este modelo, se definen zonas que corresponden a los lugares físicos del tambo donde se almacenan los alimentos. Estas zonas, representadas por el conjunto $Zonas$, están a una distancia de la sala de ordeño, indicada por el parámetro $Distancias_z$. A su vez, se tiene una disponibilidad limitada de kg de MS del alimento que poseen las zonas. Esto se contempla a través del parámetro $Alimento_z$, donde se define la cantidad de kg disponible para el tiempo que se analiza el problema. Además, la cantidad de energía que un animal obtiene a partir del alimento consumido, depende de la cantidad de Mcal presentes por kg de MS. Este valor se representa mediante el parámetro Cal_z , y depende de la zona. Mediante los parámetros de $Porcentaje_grasa$ y $Porcentaje_prot$ (que corresponden al porcentaje de grasa y proteína en la leche respectivamente), a través de la Ecuación (4), se define el valor de la energía neta de lactancia (ENL). Este último, define la cantidad de energía disponible (diferencia entre la obtenida y la gastada) en Mcal que se necesita para la producción de un litro de leche.

Mientras que en los modelos anteriores las vacas se diferenciaban por su PV y consumo potencial diario, en este modelo se toma en consideración lo mencionado en la Sección 3.2, optándose por realizarlo a través del PV, PV_t , el factor de leche corregida por grasa, FCM_t (el cual contempla el potencial genético, según la Ecuación (7)); y la semana de lactancia media que se encuentran cursando, SL_t . Estos tipos se representan y agrupan según un cierto número identificador t , y la cantidad de tipos que se tienen en el rodeo se define como $CantTiposVacas$. A su vez, en el rodeo se tiene cierta cantidad de vacas asociadas a cada tipo, constante en el período de tiempo total que se realiza el análisis, el cual se define como $CantAnimales_t$. Adicionalmente, se define el conjunto $Lotes$, que representa las distintas agrupaciones utilizadas para la asignación de recursos. La cantidad de lotes a emplear depende del enfoque del productor y su estrategia de agrupación de vacas para llevar adelante

la gestión del rodeo. Se mantiene el parámetro $Conspot_t$, el cual hace referencia al consumo potencial diario, pero de manera que este es calculado a partir de PV_t , FCM_t y SL_t , según se presenta en la Ecuación (9). El requerimiento basal y requerimiento de traslado dependen directamente del PV del animal, y en particular, el requerimiento de traslado también varía en función de la distancia entre la zona en la que se encuentra el alimento y la sala de ordeño (representada esta última por el parámetro $Distancias_z$). Estos aspectos se integran al modelo mediante los parámetros Req_basal_t y Req_tras_{tz} .

El parámetro de $CantOrdenes_dia$ hace referencia a la cantidad de ordeños que se realizan en el tambo diariamente. A su vez, la cantidad de períodos a estudiar se define como $Num_periodos$. En este trabajo a modo de simplificación, se decide considerar la cantidad de días de cada período como constante; este valor constante se denomina $Dur_periodo$. En función de los valores de $CantOrdenes_dia$ y $Dur_periodo$, queda definido el valor de cantidad de ordeños totales para cada período, como $CantOrdenes_periodo$, siendo:

$$CantOrdenes_periodo = CantOrdenes_dia \times Dur_periodo \quad (11)$$

La Tabla 2 muestra los parámetros definidos en el modelo, acompañados de breves descripciones de cada uno.

Parámetro	Descripción
$Zonas$	Zonas disponibles para alimentar a las vacas
$Distancias_z$ $z \in Zonas$	Distancia entre cada zona y la sala de ordeño (km)
$Alimento_z$ $z \in Zonas$	Cantidad total de alimento por zona (kg MS)
Cal_z $z \in Zonas$	Megacalorías (Mcal)/kg de MS por zona
$Porcentaje_grasa$	Porcentaje de grasa que posee la leche
$Porcentaje_prot$	Porcentaje de proteína que posee la leche
ENL	Cantidad de energía requerida para producir un kg de leche (Mcal)
$CantOrdenes_dia$	Cantidad de ordeños diarios
$CantTiposVacas$	Cantidad de tipos de vacas totales
PV_t $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Peso vivo de cada tipo de vaca (kg)
SL_t $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Semana de lactancia en la que está cada tipo de vaca
$CantAnimales_t$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Cantidad de animales de cada tipo de vaca
FCM_t $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Leche corregida por grasa
$Lotes$	Lotes disponibles en el tambo
$Conspot_t$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Consumo potencial de MS (kg MS) para cada tipo de vaca
$ReqBasal_t$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Energía requerida por ordeño para mantenimiento (Mcal)
$ReqTras_{tz}$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas, z \in Zonas$	Energía de traslado requerida por ordeño por cada tipo de vaca y zona (Mcal)
$Dur_periodo$	Cantidad de días para los que se quiere mantener la asignación de los lotes
$Num_periodos$	Cantidad de períodos para los cuales se quiere correr al año
$CantOrdenes_periodo$	Cantidad de ordeños por período

Tabla 2: Parámetros del modelo base

A continuación se describen las variables del modelo. Se define una variable entera vL_{ptl} , la cual refiere a la asignación de los animales a los lotes. Su valor indica la cantidad de animales de determinado tipo de vaca (t) que se asigna a cierto lote (l) durante un período dado (p). Luego, la variable entera $loteEnzona_{plz}$, es la que refiere a la asignación de los lotes en las distintas zonas por ordeño. Esta variable indica en cada período cuántas veces (ordeños) concurre cada lote a cada zona (z). Finalmente, se determina cR_{pzt} , la cual toma el valor de la totalidad de kg de alimento de la zona z que efectivamente consumen durante el período p , los animales del tipo t que se encuentran asignados al lote l .

En la Tabla 3 se presentan las variables definidas en el modelo.

Variable	
vL_{ptl}	$p \in 1 \dots Num_periodos, t \in 1 \dots CantTiposVacas, l \in Lotes$
cR_{pztl}	$p \in 1 \dots Num_periodos, z \in Zonas, t \in 1 \dots CantTiposVacas, l \in Lotes$
$loteEnZona_{plz}$	$p \in 1 \dots Num_periodos, l \in Lotes, z \in Zonas$

Tabla 3: Variables del modelo base

Considerando los parámetros y las variables mencionadas, el modelo busca mediante la asignación de valores a las variables, optimizar la producción de leche durante el período de análisis. Para esto, se le define la siguiente función objetivo.

Función Objetivo

$$\max \sum_{p=1}^{Num_periodos} \sum_{z \in Zonas} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} \sum_{l \in Lotes} \frac{cR_{pztl} \times Cal_z - vL_{ptl} \times loteEnZona_{plz} \times (ReqBasal_t + ReqTrast_z)}{ENL}$$

En la función, se busca que los litros producidos durante todo el período de análisis sean máximos, y este valor se calcula como la suma de la producción de cada período. Cada uno de estos valores se obtiene a partir de la energía neta obtenida por los animales, la cual corresponde a la diferencia entre la ganancia energética (siendo el consumo real, en cierta zona, por las calorías que aporta cada kg de MS de dicha zona), y la pérdida energética debido a la necesidad de mantenimiento y de traslado a las distintas zonas de alimentación. Para transformar dicha energía en litros producidos, se la divide entre el ENL .

Las variables deben cumplir con las siguientes restricciones.

Sujeto a:

$$\sum_{l \in Lotes} vL_{ptl} = CantAnimales_t, \quad \forall p \in \{1 \dots Num_periodos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\} \quad (12)$$

$$\sum_{z \in Zonas} loteEnZona_{plz} = CantOrdenes_periodo, \quad \forall p \in \{1 \dots Num_periodos\}, \forall l \in Lotes \quad (13)$$

$$vL_{ptl} \times loteEnZona_{plz} \times \left(\frac{Conspot_t}{CantOrdenes_dia} \right) \geq cR_{pztl}, \quad \forall p \in \{1 \dots Num_periodos\}, \forall z \in Zonas, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes \quad (14)$$

$$\sum_{p=1}^{Num_periodos} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} \sum_{l \in Lotes} cR_{pztl} \leq Alimento_z, \quad \forall z \in Zonas \quad (15)$$

En primer lugar, la Ecuación (12), se utiliza para definir la variable vL_{ptl} . Para lograrlo, se tiene entonces que para cada período y para cada tipo de vaca, la suma de vL_{ptl} en los distintos lotes corresponde con la cantidad total de animales del tipo t que se tienen en el rodeo. Lo que implica que todos los animales deben estar asignados a un lote. En segundo lugar, para definir el valor de la variable $loteEnZona_{plz}$, se incluye la Ecuación (13), la cual determina que para cada lote y en cada período, la suma de concurrencias a zonas debe ser la cantidad de ordeños que se tienen por período. Esto implica que obligatoriamente se los

debe enviar a alguna zona en todos los ordeños. Por último, mediante las Ecuaciones (14) y (15) se define también el máximo consumo que pueden tener efectivamente los animales. Primero, se establece una cota superior para el consumo real durante el total del período p , para el tipo t en la zona z , basado en el consumo potencial asociado a cada tipo de vaca. Así, la cota se calcula multiplicando el consumo potencial por ordeño por la cantidad de animales del tipo t , asignados al lote l , y por la cantidad de veces que se envía dicho lote a la zona correspondiente. Es decir, se determina el consumo potencial del tipo t en la zona z asociado al lote l durante el período p . A su vez, se limita superiormente la cantidad real de consumo total de MS por zona. Esta restricción determina que en todo el tiempo de estudio del modelo que se tenga, el alimento consumido no puede superar el disponible (definido como el valor de $Alimento_z$).

Cabe destacar que se decidió mantener la estructura definida por lotes y etapas y no modificar el modelo para que las variables se asignen por ordeños/días debido a que de esta manera se simplifica el modelo al reducir significativamente la cantidad de variables. La principal diferencia entre ambos enfoques radica en el nivel de granularidad, mientras que el modelo desarrollado consolida las asignaciones por etapas, el modelo por ordeño implicaría definir esa asignación en cada ordeño, multiplicando así exponencialmente la cantidad de variables. En este enfoque, se determina la cantidad total de veces que un lote es asignado a una zona por cada etapa, sin necesidad de especificar en qué ordeño particular se realiza dicha asignación. En un horizonte de un año, dividido en períodos de 30 días (representando un mes), se definen las variables únicamente para 12 etapas/meses en lugar de 720 ordeños (considerando dos ordeños diarios durante un año). De este modo, el enfoque por etapas permite centrarse en el análisis de la frecuencia de asignación de los lotes a las zonas, y no en el detalle de cada ordeño. Esto optimiza el cálculo y facilita la implementación del modelo sin pérdida de precisión.

Modelo base linealizado

Con el objetivo de proporcionar soluciones que pudieran abordarse tanto de forma lineal como no lineal, se procedió a la linealización del modelo base. Este proceso requirió la toma de ciertas decisiones que implicaron modificaciones específicas. Por tal motivo, a continuación se presentará un resumen de la formulación matemática de la forma linealizada, detallándose únicamente aquellos aspectos que difieren del modelo base presentado anteriormente, ya que, dada la similitud entre ambos enfoques, no resulta necesario profundizar en el resto. La formulación completa se incluye en la Sección Anexo B.

En el modelo base, la Ecuación (14) es de carácter no lineal. Esto se da ya que se multiplican las variables de vL_{ptl} y $loteEnzona_{plz}$. Para poder linealizar la restricción, se realizó una evaluación de las opciones disponibles, con el objetivo de garantizar la viabilidad y aplicabilidad del modelo en el contexto del problema planteado. Durante el análisis, se exploraron diversas técnicas y enfoques, pero debido a la falta de una linealización directa (como la sustitución de la restricción por equivalentes lineales, o añadido de variables binarias y/o no binarias auxiliares), no se encontró una representación lineal que mantuviera la precisión y validez del modelo original. Como resultado se hizo necesario aumentar la granularidad de las variables. Es decir, las mismas no se definen ya a nivel de etapa, sino que se debe realizar a nivel de ordeño. Es por esto, que se modifican los subíndices de las variables, donde las mismas ya no quedan definidas por período, sino por ordeño. En dicho caso, además, se decidió a modo de simplificar la interpretación del modelo, añadir el índice del día. Es por esto, que a diferencia de la versión no lineal, se define un único parámetro $CantOrdenes$, correspondiente a la cantidad de ordeños diarios, y no se mantiene $CantOrdenes_dia$ ni $CantOrdenes_periodo$. También se añade la cantidad de días para la cual se desea realizar la corrida del modelo, como $CantDias$. Sabiendo que que añadir el subíndice d , en referencia al día, aumenta la cantidad

de variables, queda claro que se puede realizar una simplificación mediante la especificación total de ordeños, en lugar de los ordeños por día y la cantidad de días.

En la Tabla 4 se aprecian los parámetros que se añadieron al modelo base linealizado, y en la Tabla 5 aquellos que se descartaron que pertenecían al modelo base.

Parámetro	Descripción
<i>CantOrdenes</i>	Cantidad de ordeños diarios
<i>CantDias</i>	Horizonte temporal del modelo

Tabla 4: Parámetros que se añadieron al modelo base linealizado

Parámetro	Descripción
<i>CantOrdenes_periodo</i>	Cantidad de ordeños por período
<i>CantOrdenes_dia</i>	Cantidad de ordeños diarios

Tabla 5: Parámetros que se descartaron del modelo base

Respecto a las variables, una de las diferencias es que la variable *loteEnzona_{odlz}* ahora es definida como una variable binaria, donde indica si el lote concurre a cierta zona en cierto ordeño (valor 1) o no (valor 0). Además se hizo necesario añadir ciertas variables, las cuales se presentan en la Tabla 6. La variable *vZ_{odzt}* se agrega al modelo, y representa la cantidad de animales que se envían del tipo *t* (asignados al lote *l*) en el ordeño *o*, a una zona *z*. Para reflejar la realidad del manejo observado en el tambo, se opta por mantener la composición de los lotes durante un período fijo, y no variable por cada ordeño. Asimismo, para resumir los resultados obtenidos y asemejándose a la información proporcionada por el modelo base, se introducen las variables *tlp_{ntl}* y *lzp_{nlz}*. La variable *tlp_{ntl}* representa la cantidad de animales de un tipo determinado asignados a un lote en un período, lo que contribuye a la formación de los lotes durante dicho período. Esta variable se corresponde exactamente con la variable *vL_{ptl}* del modelo no lineal. Y la variable *lzp_{nlz}* representa la cantidad de veces que un lote es asignado a una zona específica en un determinado período, contribuyendo a la asignación de recursos. Esta variable se corresponde con la variable *loteEnzona_{plz}* del modelo no lineal.

Variable	
<i>vZ_{odzt}</i>	$o \in 1 \dots CantOrdenes, d \in 1 \dots CantDias, z \in Zonas, t \in CantTiposVacas, l \in Lotes$
<i>tlp_{ntl}</i>	$n \in Num_periodos, t \in CantTiposVacas, l \in Lotes$
<i>lzp_{nlz}</i>	$n \in Num_periodos, l \in Lotes, z \in Zonas$

Tabla 6: Variables que se añaden al modelo base

La Función objetivo se ve modificada como se presenta a continuación.

Función objetivo

$$max \sum_{o=1}^{CantOrdenes} \sum_{d=1}^{CantDias} \sum_{z \in Zonas} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} \sum_{l \in Lotes} \frac{cR_{odzt} \times Cal_z - vZ_{odzt} \times (ReqBasal_t + ReqTras_{tz})}{ENL}$$

En la función objetivo de la versión no lineal se multiplican las variables vL_{ptl} y $loteEnzona_{plz}$, por lo que también se debió linealizarla. Ahora, la pérdida energética se calcula como la cantidad de animales que se envían del tipo t , asignados al lote l , en el ordeño o , a la zona z (vZ_{odzt}) por la energía que insumen tanto para su mantenimiento basal como para el traslado.

Se presentan aquellas restricciones que difieren del modelo base.

$$\sum_{z \in Zonas} loteEnzona_{odlz} = 1, \quad \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall l \in Lotes \quad (16)$$

$$vZ_{odzt} \leq CantAnimales_t \times loteEnzona_{odlz}, \quad \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall z \in Zonas, \quad (17)$$

$$\forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes$$

$$vZ_{odzt} \leq vL_{odtl}, \quad \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \quad (18)$$

$$\forall l \in Lotes, \forall z \in Zonas$$

$$\sum_{z \in Zonas} \sum_{l \in Lotes} vZ_{odzt} = CantAnimales_t, \quad \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\} \quad (19)$$

$$vZ_{odzt} \times \left(\frac{Conspot_t}{CantOrdenes} \right) \geq cR_{odzt}, \quad \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall z \in Zonas, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \quad (20)$$

$$\forall l \in Lotes$$

$$vL_{o,p \times Dur_periodo+d,tl} = vL_{o,p \times Dur_periodo+d+1,tl}, \quad \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes, \quad (21)$$

$$\forall p \in \{0 \dots (\frac{CantDias}{Dur_periodo}) - 1\}, \forall d \in \{1 \dots Dur_periodo - 1\}$$

$$vL_{odtl} = vL_{o,d+1,tl}, \quad \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes, \quad (22)$$

$$\forall d \in \{Dur_periodo \times (\frac{CantDias}{Dur_periodo}) + 1 \dots CantDias - 1\}$$

$$vL_{1dtl} = vL_{2dtl}, \quad \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes, \forall d \in \{1 \dots CantDias\} \quad (23)$$

$$tlp_{ntl} = \frac{\sum_{d=1+(n-1) \times Dur_periodo}^{\min(n \times Dur_periodo, CantDias)} \sum_{o=1}^{CantOrdenes} vL_{odtl}}{CantOrdenes \times (\min(n \times Dur_periodo, CantDias) - (n-1) \times Dur_periodo)}, \quad \forall n \in \{1 \dots Num_periodos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes \quad (24)$$

$$lzp_{nlz} = \sum_{d=1+(n-1) \times Dur_periodo}^{\min(n \times Dur_periodo, CantDias)} \sum_{o=1}^{CantOrdenes} loteEnzona_{odlz}, \quad \forall n \in \{1 \dots Num_periodos\}, \forall l \in Lotes, \forall z \in Zonas \quad (25)$$

Se sustituye la Ecuación (13) por la Ecuación (16), donde se define a la variable $loteEnzona_{odlz}$. En la Ecuación (16), se tiene que para cada ordeño y cada lote, la suma de $loteEnzona_{odlz}$ es uno. Lo que implica, que para cada ordeño, el lote concurre a una y sólo una zona.

Respecto a las Ecuaciones (17), (18) y (19), estas buscan definir la variable vZ_{odzt} . En

la Ecuación (17), se establece una cota superior para dicho valor, calculada como el número total de animales del tipo correspondiente, $CantAnimales_t$, multiplicado por el valor de $loteEnzona_{odlz}$. Esto implica que, si el lote no está asignado a la zona correspondiente, el valor de vZ_{odztl} será nulo; en caso contrario, el valor máximo será igual al número de vacas disponibles de ese tipo en el rodeo. Por su parte, en la Ecuación (18), se acota superiormente por el valor de vL_{odtl} , lo que implica que el valor máximo será igual al número de animales asociados al lote de ese tipo para el ordeño específico. Finalmente, la Ecuación (19) establece que, para cada ordeño y para cada tipo de animal, la suma de los valores de vZ_{odztl} en todas las zonas y lotes debe coincidir con el parámetro $CantAnimales_t$. Esto asegura que la cantidad total de animales por tipo de vaca, asignados a las zonas, sea exactamente la totalidad de animales de ese tipo en el rodeo para todos los ordeños.

La Ecuación (20) es equivalente a la Ecuación (14) del modelo base, pero con la diferencia de que se establece que el consumo real en el ordeño o , para la zona z , el tipo t y el lote l , no puede superar el consumo potencial por ordeño multiplicado por vZ_{odztl} . Esto implica que el consumo efectivo es, como máximo, la suma de los consumos potenciales de los animales asignados a la zona, a diferencia de la formulación no lineal, donde se considera el consumo por período.

Mantener la asignación de los lotes durante un período de tiempo definido se logra a través del ingreso de los parámetros de $Dur_periodo$ y $Num_periodos$ (que cumplen el mismo rol que en el modelo no lineal) y la inclusión de las Ecuaciones (21), (22) y (23). Las cuales obligan a que la asignación de los lotes se mantenga durante un período completo. En la primera y la segunda, se busca que durante cada período se tengan para cada ordeño, el mismo valor de vL_{odtl} . Es decir, la misma composición de los lotes. Y en la tercera, que sean iguales para cada día en sí mismo.

En las Ecuaciones (24) y (25) se definen los valores de las variables de resumen tlp_{ntl} y lzp_{nlz} .

Este modelo es equivalente al anterior, por lo que los resultados obtenidos al plantear situaciones idénticas (con los mismos parámetros de entrada), son iguales. Esto se valida en la Tabla 40, presentada en la Sección Anexo C.

Modelo base económico

Para analizar la optimización de la producción lechera en términos de margen económico, se desarrolló el modelo base económico, tomando como punto de partida el modelo base (el cual busca la optimización en términos de volumen productivo). Las modificaciones necesarias para este nuevo modelo se basan en la inclusión de precios y costos, ajustando tanto la función objetivo como algunas restricciones específicas. A modo de evitar redundancias, se presentarán únicamente dichas modificaciones. Sin embargo, la formulación matemática de las versiones lineal y no lineal, se detallan en la Sección Anexo B. Asimismo, en la Sección Anexo C, Tabla 42, se encuentra la equivalencia entre el modelo base económico y el modelo base económico linealizado.

Para desarrollar el modelo base económico se añaden los parámetros asociados al factor económico. El parámetro $Precio_leche$ es el precio de venta de un litro de leche expresado en dólares americanos, y es necesario para determinar los ingresos monetarios del sistema. Por otro lado, para representar los gastos que tiene el sistema, se incluye $Costo_alimento_z$, el cual es el valor de un kg de alimento asociado a la zona z . Los parámetros del modelo base económico se presentan en la Tabla 7.

Parámetro	Descripción
$Precio_leche$	Valor de venta de un litro de leche (USD)
$Costo_alimento_z$	Valor de un kilogramo de alimento en la zona z (USD)

Tabla 7: Parámetros que se añaden al modelo base

A través de los parámetros mencionados se define una nueva función objetivo. A continuación se presenta aquella asociada al modelo no lineal, pero a efectos conceptuales, para el lineal se modifica de igual manera.

Función Objetivo

max

$$\begin{aligned}
& Precio_leche \times \sum_{p=1}^{Num_periodos} \sum_{z \in Zonas} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} \sum_{l \in Lotes} \frac{cR_{pztl} \times Cal_{z-vL_{ptl}} \times loteEnzona_{plz} \times (ReqBasal_t + ReqTrast_z)}{ENL} \\
& - \sum_{p=1}^{Num_periodos} \sum_{z \in Zonas} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} \sum_{l \in Lotes} cR_{pztl} \times Costo_alimento_z
\end{aligned}$$

Como se puede apreciar, respecto a la función objetivo del modelo base, se añaden dos aspectos. Por un lado, se multiplica al término productivo por $Precio_leche$, lo cual representa la totalidad del ingreso debido a los litros producidos en todo el período de análisis. Por otro lado, se resta la suma en todos los períodos, zonas, tipos de animales y lotes, del consumo de alimento multiplicado por el costo asociado a cada zona z , lo que implica los gastos obtenidos por la ingesta. De esta manera, se busca maximizar el margen de ganancia para el horizonte temporal definido.

3.4. Modelo con recría

Una vez establecido el modelo base, que comprende un rodeo “estático” (con respecto a la imposibilidad de inclusión y/o exclusión de animales), se procede a evaluar los aspectos clave que deben ser considerados para reflejar la realidad operativa de los tambos con recría.

El desarrollo del modelo ha sido un proceso iterativo e incremental. El objetivo primordial ha sido desarrollar un modelo que implique dinamismo frente al ingreso y egreso de animales, y a su vez que sea realista, capturando la complejidad de los procesos en un sistema de producción lechera con recría. Para lograrlo se evaluó la posibilidad de trabajar con el recambio propio del tambo o de integrar vacas que se compren en el mercado. Es decir, manejar el recambio de animales propios de los ciclos productivos del tambo o la inclusión en el rodeo de terneras, vaquillonas o vacas en producción nacidas o criadas fuera del tambo. A partir de lo cual, se decide simular una recría propia del tambo, pero sabiendo que es una oportunidad sobre la cual trabajar a futuro.

Se presentan también algunos aspectos más genéricos que vale la pena mencionar. Por un lado, como se va a trabajar en períodos de tiempos extensos, considerando varios años, se decide contemplar cuantitativamente la variación de la eficiencia productiva de las vacas. Sobre esto, se dispone de escasa información concreta, aunque es algo comúnmente contemplado en la realidad operativa. Según la información bibliográfica disponible, lo cual coincide con la

práctica observada en el tambo visitado, se observa por un lado que la eficiencia de la lactancia aumenta hasta alcanzar su pico en el tercer y cuarto ciclo, decreciendo a partir de entonces [74] [71] [30] [28]. Y por otro lado, que el fin de la vida útil de las vacas, en términos de producción, se da a entre la quinta y la sexta lactancia [27]. Debido a esto, se propone una primera aproximación donde se adjudican los porcentajes de eficiencia respecto a la máxima como: 80 %, 95 %, 100 %, 100 %, 95 %, 30 % para los números de lactancia 1, 2, 3, 4, 5 y 6 respectivamente. Siendo la máxima producción aquella que se obtiene a partir del máximo consumo, indicado por la Ecuación (9). A partir del sexto ciclo, se asume que la producción de las vacas es nula.

Al incorporar dinámicas de ingreso de animales, surge la necesidad de definir cómo se caracterizan las nuevas terneras que ingresan al rodeo. Este aspecto resulta especialmente relevante para reflejar adecuadamente el funcionamiento de un sistema con recría. En particular, se plantea el desafío de determinar atributos clave como el PV y el potencial genético de estos animales. Se presentan dos de las alternativas posibles: que estas características dependan de la cantidad de alimento consumido, o de la genética de la vaca madre. Aunque es posible combinar ambas opciones, se decide que las características se asocien exclusivamente a la genética, de modo que tanto el PV como el potencial genético de la ternera se correspondan con los de su madre. Respecto al PV, se decidió que a lo largo de cada año su peso sea constante. Sin embargo, un aspecto que se introdujo es el concepto de “peso maduro”, para lo cual se estableció una edad a la que se alcanza. Además, a modo de simplificación se definió que mientras no se alcanza el peso maduro, el aumento del peso es lineal en cada año que pasa, repartiendo el peso en la cantidad de años que tarda en alcanzar el maduro [72]. Una vez alcanzado dicho valor, se mantiene constante para el resto del tiempo de análisis.

Para representar la preñez y los partos, se asume por un lado, que la inseminación de las vacas se realiza de manera artificial. Para contemplar la realidad operativa, se considera una determinada tasa de eficacia, a partir de lo cual, no necesariamente todas las vacas consiguen ser preñadas. A raíz de esto, se excluye la necesidad de incluir toros en el desarrollo del modelo. Por otro lado, aunque se adopta la inseminación artificial como método reproductivo, no se considera el uso de semen sexado, por lo que para modelar la reproducción, se establece que la probabilidad de que una vaca tenga un ternero macho es igual a la de tener una hembra. En consecuencia, se asume que, en promedio, el 50 % de los terneros nacidos serán hembras y el otro 50 %, machos.

Respecto a la gestión de los terneros macho que nacen año a año, a pesar de que algunos establecimientos escogen mantenerlos en el rodeo para un engorde y posterior venta más cara [53] [58], por simplicidad se opta por no incorporarlos al rodeo. El modelo refleja su venta inmediata, es decir, sin ningún período de alimentación en el tambo.

Al incorporar la rotación y renovación del rodeo, la dimensión económica adquiere mayor relevancia. Esto se debe tanto a la posibilidad de vender animales, como al hecho de que, al incluir las etapas de recría, los terneros consumen MS durante un período en el que no generan producción, y también a las diferencias en el rendimiento animal según cada etapa del ciclo. Por esta razón, se opta por avanzar únicamente con la optimización en términos de margen económico. No obstante, el modelo podría adaptarse fácilmente para optimizar únicamente la producción, en caso de que así se requiera.

Se procede a presentar el modelo resultante. Si bien se presenta la formulación matemática del modelo completo, en su explicación, se hará énfasis únicamente en los aspectos que difieren del modelo base económico, con el fin de evitar repeticiones innecesarias.

Los parámetros se observan en la Tabla 8.

Parámetro	Descripción
<i>CantAnos</i>	Cantidad de años para los que se quiere realizar el análisis
<i>Lotes</i>	Lotes disponibles en el tambo
<i>Zonas</i>	Zonas disponibles para alimentar a las vacas
$Alimento_{az}$ $a \in 1 \dots CantAnos, z \in Zonas$	Cantidad total de alimento por zona (kg MS)
$Distancias_z$ $z \in Zonas$	Distancia entre cada zona y la sala de ordeño (km)
$Porcentaje_costo_z$ $z \in Zonas$	Porcentaje del precio de la leche que corresponde al costo asociado al kg de alimento de cada zona
<i>CantOrdenes_dia</i>	Cantidad de ordeños diarios
<i>Dur_periodo</i>	Cantidad de días para los que se quiere mantener la asignación de los lotes
<i>Num_periodos</i>	Cantidad de períodos para los cuales se quiere correr al año
<i>CantDias</i>	Cantidad de días del año
<i>CantOrdenes_periodo</i>	Cantidad de ordeños por período
Cal_z $z \in Zonas$	Mcal/kg de MS por zona
<i>Porcentaje_grasa</i>	Porcentaje de grasa que posee la leche
<i>Porcentaje_prot</i>	Porcentaje de proteína que posee la leche
<i>ENL</i>	Cantidad de energía requerida para producir un kg de leche (Mcal)
$Hijade_t$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Tipo de vaca del cual es hijo el tipo en cuestión
<i>CantTiposVacas</i>	Cantidad de tipos de vacas totales
$Anodevida_vat$ $a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Edad de los distintos tipos de vaca según el año
PV_vat $a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Peso vivo de cada tipo de vaca dependiendo del año (kg)
$CantAnimales_it$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Cantidad de animales de cada tipo que se tienen en el rodeo inicialmente
SL_d $d \in 1 \dots 365$	Semana de lactancia en la que está cada tipo de vaca
<i>Porcentaje_prenhez</i>	Cantidad de vacas que se estiman quedan preñadas porcentualmente
<i>Precio_leche</i>	Valor de venta de un litro de leche (USD)
<i>Precio_ternero</i>	Valor de venta de un ternero (USD)
<i>Precio_kg_vaca</i>	Valor de venta de una vaca (USD/kg)
Pot_gen_t $t \in CantTiposVacas$	Potencial genético de producción anual de cada tipo (L)

Parámetro	Descripción
PPD_{dat} $d \in 1 \dots 365, a \in 1 \dots CantAnos,$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Valor intermedio para cálculo del consumo potencial
FCM_{dat} $d \in 1 \dots 365, a \in 1 \dots CantAnos,$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Leche corregida por grasa
$Conspot_diario_{dat}$ $d \in 1 \dots 365, a \in 1 \dots CantAnos,$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Consumo potencial diario de MS (kg MS) para cada tipo de vaca
$Conspot_{at}$ $a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Consumo máximo de alimento anual por tipo (kg MS)
$ReqBasal_{at}$ $a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Energía requerida de mantenimiento por ordeño por tipo de vaca (Mcal)
$ReqTras_{atz}$ $a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas,$ $z \in Zonas$	Energía de traslado requerida por ordeño por cada tipo de vaca y zona (Mcal)

Tabla 8: Parámetros del modelo con recría

Se evaluó cómo contemplar el transcurso del tiempo en el modelo, con el objetivo de representar de manera precisa la realidad operativa. Esto es, particularmente por el crecimiento de las vacas, que es lo que define los distintos estados productivos por los que atraviesa en su vida: improducción, producción eficiente y producción deficiente hasta el fin de su vida útil en el tambo. Para esto, se decide trabajar en horizontes anuales, ya que se observa que dichas etapas productivas se pueden diferenciar bien según su edad. Es entonces que se decidió añadir el subíndice a , a todas los parámetros (y variables) pertinentes, el cual representa el año en cuestión. Como primer parámetro, se define la cantidad de años para los cuales se pretende realizar el análisis de la recría, denotado como $CantAnos$. El modelo entonces será corrido para cierta cantidad de años, y la solución obtenida (partiendo del rodeo inicial), dará como resultado soluciones que permitirán el análisis año a año. Para representar la importancia de la etapa de vida en los animales, se introduce el parámetro $Anodevida_v_{at}$, que se refiere a la edad del tipo de vaca t en el año a . Por lo tanto, al definir las variables y/o restricciones, se considera la edad correspondiente. Además, como se puede ver, el parámetro de alimento disponible ahora se define además de por zona, por año. Esto permite obtener análisis donde la alimentación no se mantenga constante de un año a otro.

También se mantienen los parámetros $Num_periodos$ y $Dur_periodo$, cuya multiplicación determina la cantidad total de días en un año de simulación. Este valor se representa mediante el parámetro $CantDias$, definido como:

$$CantDias = Num_periodos \times Dur_periodo, \quad (26)$$

Se define el parámetro de $Porcentaje_prenhez$ el cual se asocia al porcentaje de animales productivos que quedan preñados mediante la inseminación artificial. A su vez, fue necesario modelar el parentesco entre las vacas para poder incorporar terneras al rodeo considerando características heredadas. Para ello, se evaluaron dos enfoques: asignar a las terneras el mismo tipo de vaca que su madre, sumándolas al total de ese tipo, o crear un nuevo tipo de vaca para cada lote de crías y asociarlo al tipo materno. La primera opción presenta el inconveniente de que el peso de las vaquillonas no se estabiliza hasta alcanzar su madurez, alrededor de los tres años [66], además de dificultar la diferenciación de la eficiencia productiva a lo largo del

tiempo. Por ello, se optó por la opción de generar nuevos tipos de vacas para cada lote de crías nacidas de un mismo tipo en un año determinado, lo que permite un mejor seguimiento de las características heredadas. Para reducir tiempos de ejecución y facilitar modificaciones, se decidió mantener un parámetro asociado a cada nuevo tipo de vaca. Este parámetro se define como: $Hijade_t$, y refiere al tipo de vaca madre asociado al tipo de vaca t .

En un principio se planteó que la cantidad de tipos de vaca variara año a año para incluir a los nuevos grupos nacidos. Sin embargo, por razones de eficiencia, se optó por mantener un número constante de tipos que contemple todos los años de ejecución, y manteniendo a los tipos que aún no forman parte del rodeo con una cantidad de animales igual a cero hasta su incorporación. Si bien el parámetro $CantTiposVacas$ ya estaba presente en el modelo base, en esta versión se introduce el concepto de que corresponde a la cantidad máxima de tipos de vaca que pueden existir al final del horizonte temporal definido. En relación a esta definición, dado que $Anodevida_{vat}$ toma valor para todos los tipos de vacas y para cada año, resulta necesario asignar un valor nulo en aquellos casos en los que no corresponde indicar una edad, es decir, cuando el tipo de vaca en cuestión aún no ha nacido en el año considerado. En el año de nacimiento del tipo, el valor asignado debe ser 1, indicando que la vaca transita su primer año de vida. De este modo, el parámetro siempre refleja el año de vida que el animal está cursando. Considerando que los partos ocurren al inicio de cada año, se establece que el primer parto de una vaca tiene lugar cuando $Anodevida_{vat}$ alcanza el valor de 3. Esta elección se justifica en función de la práctica habitual, en la que el primer parto se produce alrededor de los 24 meses [66] [72]. Para ilustrar estos conceptos, supongamos que se realiza una simulación de cuatro años y el rodeo inicial incluye los tipos de vaca productivos 1 y 2. Los detalles de esta relación se presentan en la Tabla 9 y también se pueden visualizar en la Figura 13.

Año de nacimiento	Tipo de Vaca	Hija de
-	1	-
-	2	-
2	3	1
2	4	2
3	5	1
3	6	2
4	7	1
4	8	2
4	9	3
4	10	4

Tabla 9: Tabla ilustrativa para representar herencia

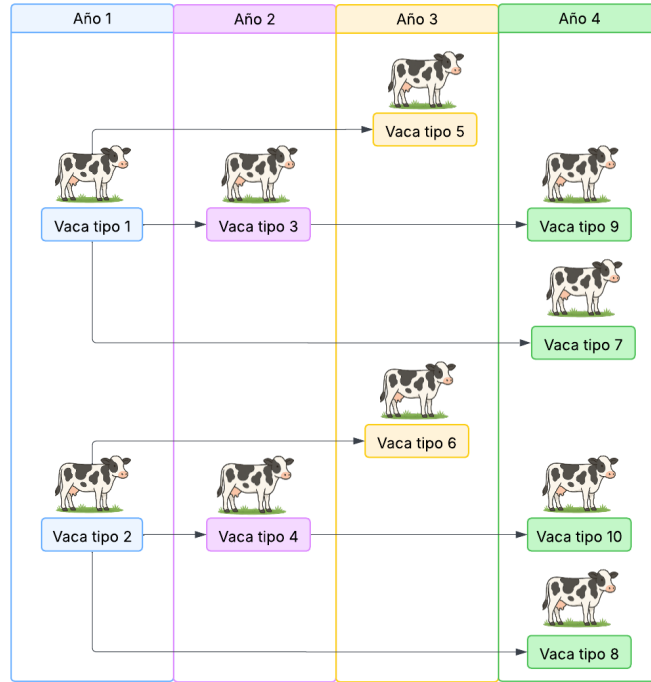


Figura 13: Relación de parentesco entre los tipos de vaca

Como se puede observar, las vacas de tipo 1 y 2 serían las únicas componentes del rodeo durante el primer año. En el segundo año, estas vacas tienen sus primeras crías, correspondientes a los tipos 3 y 4. Posteriormente, en el tercer año, nacen las segundas crías, que son los tipos 5 y 6, respectivamente. Finalmente, en el cuarto año, se presentan los tipos 7 y 8, que son descendientes de las vacas 1 y 2, mientras que las vacas de tipo 3 y 4 cursan su tercer año de vida y tienen sus primeras crías, correspondientes a los tipos 9 y 10. En este caso, el valor indicado para el parámetro *CantTiposVacas* sería 10.

El valor del PV no sólo depende del tipo de vaca, como sucedía en el modelo base, sino que también está condicionado por el año específico. El parámetro PV_{vat} adopta diferentes valores según la edad de la vaca y el tipo de vaca madre que posea. Esta flexibilidad se logra porque, para cada lote nacido de una misma vaca madre, se asigna un tipo de vaca distinto. Los animales de un mismo tipo de vaca comparten la misma edad, lo que implica que también tienen el mismo PV en cualquier momento. Siguiendo con el ejemplo anterior y considerando la simplificación de que el peso es lineal hasta alcanzar el peso maduro, se define el parámetro PV_{vat} según se observa en la Tabla 10.

Año	Tipo de Vaca	PV_{vat}
1	1	600
1	2	500
2	1	600
2	2	500
2	3	200
2	4	167
3	1	600
3	2	500
3	3	400
3	4	333
3	5	200
3	6	167
4	1	600
4	2	500
4	3	600
4	4	500
4	5	400
4	6	333
4	7	200
4	8	167
4	9	200
4	10	167

Tabla 10: Tabla ilustrativa para representar el PV

En cuanto a los años donde algún tipo no ha nacido aún, se le indica el valor nulo (al igual que sucede para la edad).

Para completar la definición de la situación inicial, además de especificar las características del tambo, tales como infraestructura, mediante los parámetros $Zonas$, $Alimento_{az}$, $Distancias_z$, $CantOrdenes_dia$, y las características de los animales mediante $CantTiposVacas$, $Anodevida_vat$, PV_vat , es necesario indicar la cantidad de animales que se tienen de cada tipo de vaca. Para esto, se define el parámetro $CantAnimales_i_t$. Para los tipos de vaca que se encuentran en el primer año de corrida del modelo (es decir, el rodeo inicial), el valor que toma es la cantidad de vacas de cada tipo, mientras que para los demás tipos, debe ser nulo, ya que aún no han nacido.

Una modificación introducida en relación con el costo del alimento consiste en adoptar el criterio propuesto por Notte [79], según el cual el precio del kg de MS de un determinado alimento se expresa como un porcentaje del precio de venta del litro de leche. Es decir, el parámetro $Costo_alimento_z$ (el cual correspondía al valor monetario de un kg de alimento perteneciente a la zona z) se sustituye por $Porcentaje_costo_z$ (que corresponde al porcentaje del precio del litro de leche asociado a la zona z). Este enfoque permite reflejar no sólo el costo del alimento en sí, sino también los gastos generales de mantenimiento del tambo, incluyendo mano de obra, infraestructura, reproducción y cuidado del ganado. Además, se incluye el precio de los terneros machos ($Precio_ternero$), este último considerado como un valor constante e independiente del peso. Por otro lado, el precio de venta de las vacas no varía según la edad, pero sí en función del peso, por lo que se define un valor por kg de PV: $Precio_kg_vaca$.

Se debió establecer un criterio para representar el ingreso y egreso de animales del rodeo, definiéndose que ambas situaciones ocurren al inicio de cada año. Bajo esta premisa, la compo-

sición del rodeo se mantiene constante a lo largo del año, y todos los movimientos de entrada o salida se concentran en ese único momento. Esta simplificación implica que todas las vacas productivas paren simultáneamente, lo que genera una sincronía en los picos de producción, el consumo potencial y el desarrollo de sus respectivos ciclos de lactancia. Dado que el período de tiempo considerado dentro de cada año para la asignación de recursos abarca todos los días del año (*CantDias*), con el fin de obtener valores más acordes, se decide modificar el cálculo del consumo potencial. Para ello, se implementan algunas variaciones en los parámetros. Una de ellas es en la semana de lactancia (*SL*); dado que las vacas productivas tienen un ciclo común a todas, esta ya no se considera un promedio sino que se asocia a cada día del año, adoptando la notación SL_d . Así, para los días del 1 al 7 toma el valor de 1, del 8 al 14 toma el valor de 2, y así sucesivamente. También a raíz de lo mencionado, se hace necesario indicar el potencial genético de producción de leche anual, Pot_gen_t , donde además de requerirse por ser una característica hereditaria para los tipos de vacas hijos, se utiliza para el consumo potencial. En función de este, se define el PPD_{dat} , el cual es un parámetro intermedio cuyo valor se obtiene como se muestra en la Ecuación (27).

$$PPD_{dat} = Pot_gen_t \times 0,00318 \times (d^{0,1075}) \times (e^{-0,003 \times d}) \quad (27)$$

También se modifica el FCM , dejando de ser un promedio asociado a cada tipo, para ser calculado para cada día y cada tipo como se observa en la Ecuación (28).

$$FCM_{dat} = (PPD_{dat}) \times (0,4 + 15 \times porcentaje_grasa) \quad (28)$$

A partir de este valor, y considerando la fórmula propuesta por el NRC (Ecuación (9)), se determina el consumo potencial diario para las vacas en lactancia (definidas como aquellas con $Anodevida_vat \geq 3$), dicho consumo se calcula según la Ecuación (29).

$$Conspot_diario_{dat} = 0,372 \times FCM_{dat} + 0,0968 \times (PV_vat^{-0,75}) \times (1 - e^{-0,192 \times (SL_d + 3,67)}) \quad (29)$$

Respecto al consumo potencial de las vaquillonas, se utiliza una estimación obtenida a partir de diferentes fuentes donde se explica cómo se debería alimentar a las vaquillonas en crecimiento según el objetivo de peso que se tiene. Si bien no se da un valor o una fórmula exacta, a partir de las mismas se puede obtener un promedio estimado de la IMS en kg como el 2,5 % del PV [36] [66] [42], representado en la Ecuación (30).

$$Conspot_diario_{dat} = 0,025 \times PV_vat \quad (30)$$

En función de este consumo diario es que se obtiene el valor anual ($Conspot_{at}$), sumando el de todos los días hasta *CantDias*. Resulta relevante mencionar que este valor es utilizado para obtener un promedio de consumo potencial diario, y no se utiliza directamente el valor de $Conspot_diario_{dat}$ debido a que el modelo contempla el análisis por período y no día a día.

Por último, tanto el requerimiento basal como el requerimiento de traslado están ahora definidos no sólo para cada tipo de vaca y para cada combinación de tipo de vaca y zona, sino también de manera anual. Esto se debe a que el peso, que influye en ambos valores, varía según el año de análisis.

Las variables se presentan en la Tabla 11.

Variable	
$cantAnimales_{vat}$	$a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$
vL_{patl}	$p \in 1 \dots Num_periodos, a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas, l \in Lotes$
cR_{pzatl}	$p \in 1 \dots Num_periodos, z \in Zonas, a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas, l \in Lotes$
$loteEnZona_{plza}$	$p \in 1 \dots Num_periodos, l \in Lotes, z \in Zonas, a \in 1 \dots CantAnos$
$cantTerneros_{venden_{at}}$	$a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$
$cantVacas_{retiradas_{at}}$	$a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$
$produccion_portipo_{at}$	$a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$
$consumo_portipo_{at}$	$a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$

Tabla 11: Variables del modelo con cría

En lo que respecta a las variables, es necesario contar con la capacidad de reflejar una cantidad variable de animales en el rodeo a lo largo de los años. Aunque en los parámetros se establece la cantidad inicial de animales de cada tipo, se requiere una variable que represente dicho valor a lo largo del tiempo, dado que el modelo debe decidir qué animales mantener y cuáles retirar del rodeo. Por ello, se define la variable $cantAnimales_{vat}$. Asociado a esto, se hizo necesario definir claramente qué representarían los valores determinados por el modelo para $cantAnimales_{vat}$, en términos de a qué momento del año harían referencia, dado que, como se ha mencionado, la cantidad de animales en el rodeo de cada tipo se fija anualmente. Con el fin de facilitar la comprensión, se ha decidido que estas variables reflejen la cantidad de animales disponibles al inicio de cada año. Por ejemplo, si las variables indican que en el año 2 se cuenta con 50 vacas del tipo 1, esto significa que el modelo buscar  la mejor asignación de recursos para esas 50 vacas durante ese año. Esta cantidad podría ser ajustada por el modelo al inicio del año 3. Adicionalmente, especialmente para implementar las restricciones relacionadas con la venta de vacas, se añade $cantVacas_{retiradas_{at}}$, que refiere a la cantidad de vacas del tipo t que se venden al inicio del año a .

Dado que se ha decidido no mantener en el rodeo a los terneros machos, es necesario representar su nacimiento y posterior venta. Para ello, se introdujo una variable que cuantifica la cantidad de terneros que nacen (y se venden) al inicio de un año determinado. Cada lote de terneros nace de un tipo de vaca madre, cuya cantidad de vacas preñadas influye en el número de nacimientos de terneras y terneros. Por consiguiente, esta variable se relaciona con el tipo de vaca del que son “hermanos”, es decir, el tipo de vaca que proviene de la misma madre y nace en el mismo año. Se define así la variable $cantTerneros_{venden_{at}}$, que se refiere a la cantidad de terneros machos que nacen y se venden como “hermanos” del tipo de vaca t en el año a .

Se añadieron dos variables que buscan simplificar la interpretación del modelo y de los resultados, que hacen referencia a la producción total y el consumo total que tiene cada tipo en cada año. Siendo estas: $produccion_portipo_{at}$ y $consumo_portipo_{at}$ respectivamente.

A continuación se presenta la Función objetivo, la cual busca maximizar el beneficio económico.

Función objetivo

max

$$\begin{aligned}
& \text{Precio_leche} \times \sum_{a=1}^{\text{CantAnos}} \sum_{t=1}^{\text{CantTiposVacas}} \text{produccion_portipo}_{at} + \\
& \text{Precio_ternero} \times \sum_{a=1}^{\text{CantAnos}} \sum_{t=1}^{\text{CantTiposVacas}} \text{cantTerneros_venden}_{at} + \\
& \sum_{a=1}^{\text{CantAnos}} \sum_{t=1}^{\text{CantTiposVacas}} \text{cantVacas_retiradas}_{at} \times \text{PV_v}_{at} \times \text{Precio_kg_vaca} - \\
& \sum_{p=1}^{\text{Num_periodos}} \sum_{z \in \text{Zonas}} \sum_{l \in \text{Lotes}} \sum_{a=1}^{\text{CantAnos}} \sum_{t=1}^{\text{CantTiposVacas}} cR_{pzatl} \times \text{Porcentaje_costo}_z \times \text{Precio_leche}
\end{aligned}$$

Al analizar los componentes de esta función, el primer término representa la ganancia total derivada de la producción de leche durante el período de análisis. Este se obtiene al multiplicar el precio de venta del litro de leche por la suma de las producciones anuales de cada tipo de vaca. El segundo término refleja la ganancia obtenida por la venta de terneros machos, calculada como el producto entre el precio de venta por ternero macho y la cantidad total de terneros machos vendidos a lo largo del horizonte temporal considerado. El tercer término contempla la ganancia por la venta de vacas. Para su cálculo, se multiplica el precio por kg de vaca por el PV correspondiente a cada tipo en un determinado año, y por la cantidad de vacas retiradas de dicho tipo en ese mismo año. Este valor se suma para todos los tipos y todos los años del período de planificación. Por último, el cuarto término representa los costos y, por lo tanto, se resta. Este se calcula como la suma, en todos los años, períodos, lotes, tipos y zonas, de la multiplicación entre el costo por kg de MS consumida en una determinada zona y la cantidad de kg de MS consumidos en dicha zona asociado a cada tipo, lote y período.

Se procede a explicar las restricciones.

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
& \text{cantAnimales_v}_{at} \leq \text{CantAnimales_i}_t, \\
& \forall a \in \{1 \dots 1\}, \forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
& \text{cantAnimales_v}_{at} \leq \begin{cases} 0 & \text{si } \text{Anodevida_v}_{at} = 0 \\ [0, 5 \times \lfloor \text{Porcentaje_prenhez} \times \text{cantAnimales_v}_{a-1, \text{Hijade}_t} \rfloor] & \text{si } \text{Anodevida_v}_{at} = 1 \\ \text{cantAnimales_v}_{a-1, t} & \text{en otro caso,} \end{cases} \\
& \forall a \in \{2 \dots \text{CantAnos}\}, \forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{z \in \text{Zonas}} \text{loteEnZona}_{plza} = \text{CantOrdenes_periodo}, \\
& \forall p \in \{1 \dots \text{Num_periodos}\}, \forall l \in \text{Lotes}, \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l \in \text{Lotes}} vL_{patl} = \text{cantAnimales_v}_{at}, \\
& \forall p \in \{1 \dots \text{Num_periodos}\}, \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
& cR_{pzatl} = vL_{patl} \times \text{loteEnZona}_{plza} \times \left(\frac{\text{Conspot}_{at}}{\text{Dur_periodo} \times \text{Num_periodos} \times \text{CantOrdenes_dia}} \right), \\
& \forall p \in \{1 \dots \text{Num_periodos}\}, \forall z \in \text{Zonas}, \forall l \in \text{Lotes}, \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \\
& \forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}, \text{con } \text{Anodevida_v}_{at} < 3
\end{aligned} \tag{35}$$

$$cR_{pzatl} \leq vL_{patl} \times loteEnZona_{plza} \times \left(\frac{Conspot_{at}}{Dur_periodo \times Num_periodos \times CantOrdenes_dia} \right), \quad (36)$$

$$\forall p \in \{1 \dots Num_periodos\}, \forall z \in Zonas, \forall l \in Lotes, \forall a \in \{1 \dots CantAnos\},$$

$$\forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \text{ con } Anodevida_vat \geq 3$$

$$\sum_{p=1}^{Num_periodos} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} \sum_{l \in Lotes} cR_{pzatl} \leq Alimento_{az}, \quad (37)$$

$$\forall z \in Zonas, \forall a \in \{1 \dots CantAnos\}$$

$$cantTerneros_venden_{at} = \begin{cases} [0, 5 \times [Porcentaje_prenhez \times cantAnimales_v_{a-1, Hijade_t}]] & \text{si } Anodevida_vat = 1 \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

$$\forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\} \quad (38)$$

$$cantVacas_retiradas_{at} = CantAnimales_i_t - cantAnimales_vat, \quad (39)$$

$$\forall a \in \{1 \dots 1\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}$$

$$cantVacas_retiradas_{at} = \begin{cases} 0 & \text{si } Anodevida_vat = 0 \\ [0, 5 \times [Porcentaje_prenhez \times cantAnimales_v_{a-1, Hijade_t}]] - cantAnimales_vat & \text{si } Anodevida_vat = 1 \\ cantAnimales_v_{a-1,t} - cantAnimales_vat & \text{si no,} \end{cases}$$

$$\forall a \in \{2 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\} \quad (40)$$

$$produccion_portipo_{at} = \sum_{p=1}^{Num_periodos} \sum_{z \in Zonas} \sum_{l \in Lotes} \frac{305}{Dur_periodo \times Num_periodos} \times$$

$$\frac{cR_{pzatl} \times Cal_z - vL_{patl} \times loteEnZona_{plza} \times (ReqBasal_{at} + ReqTras_{atz})}{ENL} \times \begin{cases} 0, & \text{si } Anodevida_vat < 3 \\ 0,8, & \text{si } Anodevida_vat = 3 \\ 0,95, & \text{si } Anodevida_vat = 4 \\ 1, & \text{si } Anodevida_vat = 5 \\ 1, & \text{si } Anodevida_vat = 6 \\ 0,95, & \text{si } Anodevida_vat = 7 \\ 0,3, & \text{si } Anodevida_vat = 8 \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases} \quad (41)$$

$$\forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}$$

$$consumo_portipo_{at} = \sum_{p=1}^{Num_periodos} \sum_{z \in Zonas} \sum_{l \in Lotes} cR_{pzatl}, \quad (42)$$

$$\forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}$$

$$cR_{pzatl} \times Cal_z - vL_{patl} \times loteEnZona_{plza} \times (ReqBasal_{at} + ReqTras_{atz}) \geq 0, \quad (43)$$

$$\forall p \in \{1 \dots Num_periodos\}, \forall z \in Zonas, \forall l \in Lotes, \forall a \in \{1 \dots CantAnos\},$$

$$\forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}$$

Por un lado, en las Ecuaciones (31) y (32) se define la cantidad de vacas año tras año. Para inicializar las variables $cantAnimales_vat$, la Ecuación (31) establece que dicho valor, para todos los tipos de vaca, no debe exceder el valor inicial del rodeo. En el caso de los tipos de vaca que no están presentes en el rodeo inicial, su parámetro asociado, $CantAnimales_i_t$, tiene un valor de cero, lo que implica que $cantAnimales_vat$ lo será. Es importante destacar

que el modelo puede optar por reducir la cantidad de vacas en el rodeo inicial, decidiendo no mantener a todos los animales disponibles para el primer año de corrida si considera que esta opción es óptima. En la Ecuación (32) se establecen los valores para los años siguientes. En primer lugar, si la edad asociada a un tipo de vaca en un año determinado es cero (es decir, si aún no ha nacido), la cantidad de animales es necesariamente nula. Para las vacas mayores de un año (aquellas que ya pertenecían al rodeo en el año anterior), se define que la cantidad de animales para el año a no puede exceder la cantidad disponible en el año $a - 1$, dado que este modelo no contempla la compra de vacas. Por último, para los animales que cumplen un año de edad (es decir, aquellos que nacen en ese año), la cantidad que el modelo puede mantener se limita a un máximo de la mitad de las vacas preñadas del tipo de vaca madre. La cantidad de animales que se tenían en el año anterior del tipo de vaca madre se multiplica por la efectividad de preñez, así, su resultado es redondeado hacia abajo y posteriormente multiplicado por 0,5. Esto último representando la probabilidad de 50 % de que las crías sean hembras. Finalmente, el resultado se redondea hacia arriba.

La Ecuación (33) y la Ecuación (34) se mantienen conceptualmente del modelo base, a excepción de que ahora se incluye la consideración del año, y la posibilidad de variación por año de la cantidad de animales por tipo. También sucede así con la Ecuación (37), donde se limita el consumo de los animales dentro de cierta zona, por su disponibilidad. La diferencia en este caso, es que no se restringe con un valor definido para el período total de análisis, sino que se limita anualmente por el valor de $Alimento_{az}$.

Debido a la definición tomada sobre que el PV no dependa del consumo que se tiene, el modelo podría alimentar de manera poco realista a los animales mantenidos en el rodeo. Es decir, al no establecerse en el modelo una relación entre el peso y la alimentación de las vacas, existe el riesgo de que el modelo mantenga animales con una alimentación insuficiente o incluso sin alimento, especialmente en el caso de las terneras y vaquillonas, que tienen períodos de no producción y únicamente consumo hasta alcanzar su edad productiva. El modelo por lo tanto, podría optar por reducir costos al no alimentar a los animales, ya que no hay una producción asociada que justifique un alto consumo de alimento. Esto no sólo no representaría la realidad operativa, sino que para las terneras, la alimentación adecuada en las primeras etapas de vida es crucial para lograr una buena producción futura (entre otros aspectos) [91]. Por esta razón, se decide exigir al modelo que los animales mantenidos en el rodeo cumplan con sus necesidades energéticas mínimas de alimento ingerido, y que, en particular, las terneras tengan un consumo real que sea exactamente igual a su potencial. Esta consideración se define en la Ecuación (35). A modo de cumplir con los requerimientos energéticos, se añade también la Ecuación (43), exigiendo que la energía neta sea mayor que cero, para todas las vacas. Por otro lado, en el caso de las vacas productivas, el consumo real esta acotado únicamente por el consumo potencial, el cual actúa como cota superior. La diferencia conceptual entre esta restricción y su equivalente en el modelo base (Ecuación (14)) radica en lo que se menciona previamente. En el modelo base, se establece un consumo potencial promedio para todo el período analizado. En cambio, en este modelo, el consumo se define anualmente, sumando todos los consumos diarios. Así, en la Ecuación (36), el valor se promedia por ordeño y se utiliza este promedio como cota superior.

Sobre las cantidades retiradas del rodeo al principio de cada año, se tiene por un lado la restricción (38) donde se define la variable $cantterneros_venden_{at}$. Este valor, se define únicamente para el año en que el tipo de vaca “hermana” t cursa su primer año de vida, es decir, cuando nace. Y su valor corresponde con la cantidad de terneras nacidas del tipo “hermana”, pero redondeado hacia abajo. La Ecuación (39) hace referencia a la cantidad de vacas que se retiran en el año inicial y la (40) a la de los años siguientes. En la primera, el valor corresponde con la cantidad que se tenían antes del primer año de corrida menos las que el modelo decide mantener en dicho año. Y en la segunda, con la cantidad que se tenían en el

año anterior menos la que el modelo decide mantener para el año en cuestión.

Para la definición de la producción, se emplea conceptualmente la Ecuación (10), utilizada en el modelo base dentro de la Función objetivo. Esta se refleja en la Ecuación (41), donde se define la variable *produccion_portipo_{at}*. Dicha variable se determina como la suma de las producciones a lo largo de los períodos, zonas y lotes, con dos consideraciones adicionales. En primer lugar, se realiza un prorrateo de la producción derivada del consumo a lo largo de todos los días del año (*CantDias*) hacia los 305 días efectivos de producción, con el fin de representar los dos meses secos (uno antes y otro después del parto), durante los cuales los animales consumen pero no producen. En segundo lugar, la eficiencia productiva varía según la edad del tipo *t* en el año *a*, lo que se refleja en el factor que ajusta la producción anual definido previamente.

Si bien el consumo anual para cada tipo no interviene directamente en otras restricciones, ya sea para la definición de otras variables o la formulación de la función objetivo, resulta relevante para el análisis de casos. Su cálculo, expresado en la Ecuación (42), se obtiene como la suma del consumo real correspondiente al tipo y al año en cuestión, considerando todos los períodos, zonas y lotes.

Luego de presentar la formulación matemática, se espera que este modelo no sólo tome decisiones de manejo para el año actual, sino que también considere cómo estas decisiones afectan las condiciones del rodeo en años posteriores. Por ejemplo, a medida que las vacas envejecen y atraviesan distintos ciclos de lactancia, su productividad varía, lo que requiere una evaluación anual sobre si conviene mantenerlas en el rodeo o retirarlas. Sin embargo, estas decisiones no sólo afectan el desempeño productivo en el año evaluado, sino que también condicionan el recambio generacional del rodeo. Dado que la reproducción depende de las vacas en producción, reducir su número limita la generación de terneros machos y hembras, lo cual impacta tanto en la futura estructura del sistema como en la disponibilidad de animales para la venta. Esta situación se ve aún más restringida al considerar que el modelo no contempla la posibilidad de incorporar animales mediante compra en el mercado. En consecuencia, el sistema se comportaría como un proceso de retroalimentación, en el cual cada decisión presente puede amplificarse a lo largo del tiempo. Por ello, se espera que el modelo busque identificar estrategias que no sólo sean efectivas en el corto plazo, sino que también garanticen un desempeño sostenible a largo plazo. A su vez, es importante destacar una limitante asociada a este aspecto del modelo, la cual debe ser considerada al interpretar los resultados obtenidos. Dado que el modelo se ejecuta para un período de tiempo limitado, no contempla la producción futura del tambo al final de su evaluación. En otras palabras, se asume que, en el último año el tambo “cerrará”, lo que implica que no se reconoce que las terneras nacidas en los últimos años seguirían produciendo en años posteriores. Esta situación no es ideal, ya que se esperaría que el modelo optimizara la producción a futuro incluso en los últimos años de simulación. Una posible solución sería realizar simulaciones para un número elevado de años, de modo que al descartar los últimos años se minimice el efecto frontera.

Modelo con recría linealizado

Tras la exposición del modelo con recría, el cual es de carácter no lineal, se procede a presentar la formulación del modelo con recría lineal. Dado que gran parte de su estructura y fundamentos son equivalentes a los modelos previamente desarrollados (ya sea al modelo base linealizado o al modelo con recría) no se presentará la formulación matemática completa, dejándose en la Sección Anexo B la misma. En su lugar, este apartado se enfocará exclusivamente en los aspectos novedosos, destacando aquellas modificaciones y características que la diferencian de los enfoques anteriores.

En la Tabla 12 se aprecian los parámetros que se tuvo que añadir al modelo.

Parámetro	Descripción
M	Valor auxiliar lo suficientemente grande, que vZ no alcanzaría nunca

Tabla 12: Parámetros que se añaden al modelo con recría

Uno de los aspectos que se tienen en la diferenciación de los modelos a partir de los cuales se construye, es la necesidad de linealizar nuevamente la restricción que busca definir la variable vZ_{odatl} . En el modelo base y el modelo base linealizado, la cantidad de animales de cierto tipo en el rodeo se define como un parámetro de entrada. Sin embargo, al requerir que este valor se convirtiera en una variable, la linealización utilizada en las Ecuaciones (17), (18) y (19) dejó de ser válida, ya que se introducirían no linealidades en el modelo. En este proceso, fue necesario definir un parámetro M , suficientemente grande tal que vZ_{odatl} nunca alcance dicho valor.

A continuación se presentan las variables que se añaden a los modelos, las cuales se pueden apreciar en la Tabla 13.

Variable	
$cantvacas_prenadas_{at}$	$a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$
$cantterneros_{at}$	$a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$
$cantterneras_{at}$	$a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$

Tabla 13: Variables que se añaden al modelo con recría

El otro aspecto que lo diferencia del resto, es la necesidad de reestructurar el redondeo tanto hacia arriba como hacia abajo. Esto se debe a que algunos de los *solvers* lineales no soportan las funciones de “ceil” y “floor”, utilizadas en el modelo con recría. En cuanto al primer punto, se hizo necesario, por un lado, definir nuevas variables: $cantvacas_prenadas_{at}$, $cantterneras_{at}$ y $cantterneros_{at}$. Estas representan, respectivamente, la cantidad de vacas preñadas del tipo t en el año a ; la cantidad de terneras nacidas en el año a del tipo t ; y la cantidad de terneros macho nacidos en el mismo año, considerados “hermanos” de las terneras del tipo t .

Por último, se presentan aquellas restricciones que presentan aspectos no contemplados previamente.

Sujeto a:

$$cantvacas_prenadas_{at} \leq cantAnimales_v_{at} \times Porcentaje_prenez, \quad (44)$$

$$\forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}$$

$$cantvacas_prenadas_{at} \geq cantAnimales_v_{at} \times Porcentaje_prenez - 1 + \varepsilon, \quad (45)$$

$$\forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}$$

$$cantterneras_{at} \geq 0,5 \times cantvacas_prenadas_{at}, \quad (46)$$

$$\forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}$$

$$cantterneras_{at} \leq 0,5 \times cantvacas_prenadas_{at} + 1 - \varepsilon, \quad (47)$$

$$\forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}$$

$$\begin{aligned} cantTerneros_{at} &\leq 0,5 \times cantvacas_prenadas_{at}, \\ \forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} cantTerneros_{at} &\geq 0,5 \times cantvacas_prenadas_{at} - 1 + \varepsilon, \\ \forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} vZ_{odzatl} &\leq loteEnZona_{odlza} \times M, \\ \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall z \in Zonas, \forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \\ \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} vZ_{odzatl} &\leq vL_{odatl}, \\ \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall z \in Zonas, \forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \\ \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} vZ_{odzatl} &\geq vL_{odatl} - (1 - loteEnZona_{odlza}) \times M, \\ \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall z \in Zonas, \forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \\ \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} cantTerneros_venden_{at} &= \\ \begin{cases} cantTerneros_{a-1, Hijade_t} & \text{si } Anodevida_v_{at} = 1 \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \\ \forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\} \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} cantVacas_retiradas_{at} &= \\ \begin{cases} 0 & \text{si } Anodevida_v_{at} = 0 \\ cantTerneras_{a-1, Hijade_t} - cantAnimales_v_{at} & \text{si } Anodevida_v_{at} = 1 \\ cantAnimales_v_{a-1,t} - cantAnimales_v_{at} & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ \forall a \in \{2 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\} \end{aligned} \quad (54)$$

Para determinar el valor de $cantvacas_prenadas_{at}$, se establecieron las Ecuaciones (44) y (45). La primera impone un límite superior, asegurando que esta cantidad no supere la cantidad total de animales del tipo t en el año a , multiplicada por el *Porcentaje_prenhez*. La segunda restricción fija un límite inferior, definido como el mismo valor menos una unidad, más un pequeño valor constante (ε). Dado que $cantvacas_prenadas_{at}$ es una variable entera, este planteo garantiza que, si el resultado de la multiplicación es un número entero, la variable tomará exactamente ese valor; en caso contrario, adoptará el valor entero más cercano hacia abajo. Lo que coincide con la decisión tomada para el modelo no lineal, donde se redondea hacia abajo para definir la cantidad de vacas que efectivamente son preñadas.

Las Ecuaciones (46), (47), (48) y (49), garantizan que la cantidad de terneras nacidas a partir de las vacas preñadas se redondee siempre hacia arriba, y que la cantidad de terneros machos se redondee hacia abajo. En primer lugar $cantTerneras_{at}$ se define en las Ecuaciones (46) y (47). Mientras que la primera de ellas acota inferiormente el valor a través de la multiplicación de $cantvacas_prenadas_{at}$ por 0,5, la segunda lo acota superiormente mediante la misma multiplicación, pero sumándole 1 y restándole ε . Dado que el valor de $cantTerneras_{at}$ es entero, ambas restricciones en conjunto determinan su valor de manera que, si la multiplicación resulta en un número entero, la variable tomará exactamente dicho valor; en caso

contrario, adoptará el entero más cercano superior. Luego, las Ecuaciones (48) y (49) realizan el mismo cálculo para definir la cantidad de terneros macho, pero en sentido inverso. Es decir, en lugar de acotar inferiormente el valor de $cantTerneros_{at}$ mediante la multiplicación entre $cantVacas_prenadas_{at}$ y 0,5, lo hacen superiormente; y en lugar de sumar 1 y restar ε , restan 1 y suman ε . Esto implica que, si la multiplicación no resulta en un número entero, la variable tomará el valor entero más cercano inferior.

Para abordar nuevamente la linealización de la Ecuación (14), que busca definir la variable vZ_{odatl} , se establecieron las Ecuaciones (50), (51) y (52). La Ecuación (50) impone un límite superior a cada ordeño, estableciendo que la cantidad de vacas del tipo t en el lote l , asignadas a la zona z , no puede superar la multiplicación entre M y la variable $loteEnZona_{odlza}$. Esto implica que, si el lote no es asignado a la zona ($loteEnZona_{odlza} = 0$), entonces vZ_{odatl} debe ser cero. De lo contrario, la restricción no impone una limitación efectiva. La Ecuación (50) también establece una cota superior para vZ_{odatl} , asegurando que no supere la cantidad de vacas asignadas al lote l , es decir, vL_{odatl} . Esto evita que el número de vacas en la zona exceda la cantidad realmente disponible en el lote. Por último, la Ecuación (51) impone un límite inferior, definiendo que vZ_{odatl} debe ser al menos $vL_{odatl} - (1 - loteEnZona_{odlza}) \times M$. Este término adicional garantiza que, si el lote no está asignado a la zona, la restricción solamente exige que vZ_{odatl} tome valores no negativos, lo cual de todas maneras se cumple por lo mencionado para la Ecuación (50). En cambio, si el lote sí está asignado a la zona, vZ_{odatl} debe ser al menos igual a vL_{odatl} . Como resultado, la combinación de estas tres restricciones garantiza que:

- Si el lote l no está asignado a la zona, entonces $vZ_{odatl} = 0$.
- Si el lote l está asignado a la zona, entonces $vZ_{odatl} = vL_{odatl}$.

De este modo, se logra una correcta linealización del problema sin comprometer la validez de las restricciones.

Para la definición de $cantTerneros_venden_{at}$ y de la cantidad de terneras que se venden dentro de $cantVacas_retiradas_{at}$, en lugar de realizar los cálculos directamente mediante funciones, se utilizan las variables definidas ($cantTerneras_{at}$ y $cantTerneros_{at}$), como se puede observar en las Ecuaciones (53) y (54).

El modelo lineal presentado, es equivalente al modelo con recría. Esto se valida en la Tabla 44, presentada en la Sección Anexo C.

4. Validación de los modelos y prueba de casos de uso

4.1. Criterios de selección de *solvers* y modelos

Para la validación e implementación de los modelos de optimización formulados en este proyecto, se emplearon diversos *solvers*, tanto comerciales como de código abierto, dependiendo de la naturaleza de los problemas a resolver. La elección de cada uno de ellos estuvo guiada por las características de los modelos y el conocimiento previo del equipo de trabajo en relación con las herramientas disponibles.

Inicialmente, se optó por el *solver* GLPK [63] debido a la familiaridad del equipo con esta herramienta de optimización, que es ampliamente utilizada en problemas de programación lineal (LP) y programación lineal entera mixta (MILP). GLPK implementa tanto el método Simplex, adecuado para modelos bien estructurados, como el método de puntos interiores, ideal para problemas de gran tamaño y alta densidad. Además, para abordar problemas con variables enteras, GLPK emplea técnicas avanzadas de ramificación y acotación (branch and bound). Sin embargo, a medida que el proyecto fue avanzado y se fueron abordando problemas más complejos y de mayor escala, se volvió necesario evaluar otras alternativas a GLPK. Es entonces que se incorporó CPLEX [45], un *solver* comercial de alta eficiencia reconocido por su capacidad para resolver problemas con grandes cantidades de variables y restricciones de forma eficaz. Se determinó que CPLEX ofrecía una convergencia notablemente más rápida, lo que lo convirtió en la opción más adecuada para los problemas de gran escala lineales en este proyecto.

Para la resolución de problemas no lineales, se comenzó con el análisis utilizando Knitro [10], un *solver* avanzado que destaca por su capacidad de manejar tanto problemas convexos como no convexos. Knitro utiliza métodos de punto interior y gradiente reducido para problemas convexos y técnicas de optimización global, como arranques múltiples, para abordar problemas no convexos. Esto aumenta las probabilidades de encontrar la solución global y evita caer en óptimos locales. No obstante, durante la etapa de validación, el *solver* MINLP [76] [16] demostró una mayor precisión y eficiencia en el abordaje de los modelos no lineales desarrollados en este proyecto. El *solver* MINLP es particularmente eficiente en la resolución de problemas de programación no lineal mixta, que involucran tanto variables continuas como enteras. Utiliza técnicas como la ramificación y acotación para explorar el espacio de soluciones de manera eficiente. Aunque en problemas no convexos no siempre garantiza encontrar la solución global, su robustez en la gestión del espacio de búsqueda lo hace ideal para este tipo de problemas. Además, su presolucionador interno optimiza el tiempo de cálculo al reducir el tamaño del espacio de búsqueda.

La validación de los modelos y casos de prueba, así como la evaluación de equivalencias entre versiones no lineales y lineales, mencionada en las Secciones 3.3 y 3.4, se realizó utilizando los *solvers* CPLEX y MINLP alojados en el servidor NEOS [75]. Para estas validaciones, se optó por emplear las versiones no linealizadas del modelo base y del modelo con recría. Dado que las formulaciones no lineales son matemáticamente equivalentes a sus versiones linealizadas, es decir, generan las mismas soluciones bajo los mismos parámetros, su utilización no altera los resultados obtenidos. Sin embargo, mantener la formulación original permite una mayor claridad conceptual durante el análisis, ya que refleja de manera más fiel la lógica con la que fue concebido el modelo y sobre la cual se estructuró todo el desarrollo metodológico.

4.2. Estrategia de validación y descripción general de los casos de prueba

Dado que los modelos operan como una simulación de escenarios futuros, la validación de los resultados obtenidos no puede realizarse mediante una comparación directa con datos históricos reales. No obstante, las pruebas se realizaron utilizando parámetros de entrada que corresponden a valores proporcionados por un experto en el área, Ing. Agrónomo PhD Pablo Chilbroste, y, por lo tanto, se espera que los resultados generados sean coherentes.

La selección de los casos de prueba se fundamentó en un enfoque conceptual, lo que implica que, antes de definir los parámetros específicos del modelo, se estableció con claridad el objetivo del análisis. En esta etapa preliminar, se identificaron las situaciones clave que se desean evaluar, considerando tanto su relevancia para la problemática estudiada como su capacidad para proporcionar información significativa sobre el comportamiento del sistema. Luego, para garantizar la coherencia en las pruebas y permitir la comparación entre diferentes escenarios, se estableció un conjunto de parámetros base que sirven como referencia general en todas las simulaciones utilizando un mismo modelo. Estos parámetros representan condiciones estándar o valores típicos del sistema bajo análisis, funcionando como un punto de partida sobre el cual se construyeron los distintos casos de prueba. La utilización de estos valores de referencia facilita la interpretación de los resultados y permite identificar tendencias o patrones de comportamiento del modelo de manera más clara. A partir de esta base, cada caso de prueba específico se configuró ajustando uno o algunos parámetros clave con el objetivo de reflejar con mayor precisión las particularidades del escenario puntual que se quiso evaluar. Estos ajustes pueden involucrar variaciones en las condiciones iniciales, cambios en restricciones operativas o modificaciones en la disponibilidad de recursos, dependiendo del objetivo del análisis.

Un aspecto adicional considerado en la definición de los casos fue la viabilidad computacional y temporal. Durante las pruebas se constató que el tiempo de ejecución variaba de forma considerable en función de los valores de los parámetros y del tamaño del problema. En algunos casos, las simulaciones requerían apenas segundos, mientras que en otros podían extenderse por varias horas, llegando incluso a superar las ocho horas y ocasionar un time out en el servidor utilizado. Estas diferencias se observaron, por ejemplo, al modificar la cantidad de alimento disponible o al aumentar la dimensión del problema (debido a una mayor cantidad de años, tipos de vacas, zonas o lotes). Si bien no estaba dentro del alcance del proyecto profundizar en el análisis de estas variaciones de desempeño, sí se identificó la necesidad de acotar las pruebas a configuraciones que mantuvieran tiempos de ejecución razonables. Por este motivo, se priorizó la construcción de instancias representativas, que aportaran información relevante sin comprometer la viabilidad práctica de la simulación. En definitiva, esta decisión buscó equilibrar la profundidad del análisis con las capacidades reales de cómputo, garantizando un uso eficiente de recursos de memoria y tiempos de ejecución manejables.

Los casos de prueba generados son los siguientes:

Caso 1: Validación del modelo base

Se utiliza el modelo base. El objetivo es verificar que el modelo se comporta de forma coherente bajo parámetros controlados, asegurando que las asignaciones de recursos y la producción responden como se espera.

Caso 2: Incorporación del componente económico al modelo base

Se contrasta el modelo base con su versión económica, que incluye precios, costos y beneficio neto. Se analiza cómo cambian las decisiones en función del objetivo de maximizar el resultado económico versus el productivo.

Caso 3: Validación del modelo con recría

Se valida el modelo con recría, el cual incluye decisiones económicas y de manejo del re-cambio, verificando que las decisiones obtenidas sean coherentes. Asimismo, se busca presentar de forma práctica los principales componentes del modelo.

Caso 4: Asignación óptima de vacas bajo restricción de tamaño del rodeo en modelo con recría

Se evalúa en el modelo con recría cómo se seleccionan los animales cuando se impone un límite al tamaño total del rodeo. Se analizan patrones de priorización entre vacas y terneras, en función de su aporte al beneficio económico.

Caso 5: Oferta fija de alimento en modelo con recría

Se analiza cómo el modelo con recría ajusta sus decisiones de manejo frente a una oferta alimentaria constante que impone una restricción estructural al crecimiento del rodeo.

Caso 6: Aumento progresivo de alimento en modelo con recría

Se estudia la situación opuesta al Caso 5: se parte de poca disponibilidad de alimento y esta aumenta en los años siguientes.

Caso 7: Alternativas de alimentación con distinto costo y aporte energético en modelo con recría

Se evalúa cómo se comporta el modelo con recría al tener más de una fuente de alimento con diferentes costos y calorías.

Caso 8: Análisis del impacto de la posibilidad de retiro de vacas que aporta el modelo con recría

Se utiliza el modelo con recría en dos variantes: una que tiene el retiro de animales permitido, y otra que no. El objetivo es mostrar los beneficios que aporta la posibilidad de retiro de animales frente a la escasez de alimento, incorporada en el modelo con recría.

4.3. Resultados y discusión de los casos de prueba

4.3.1. Modelo base y modelo base económico

Se detallan a continuación los parámetros considerados. Se modela un único tipo de vaca (tipo 1), con un rodeo de 10 animales, cada uno con un PV de 550 kg, en la semana 20 de lactancia, y una producción equivalente a 23 L de leche corregida por contenido energético (FCM). Cabe destacar que este último valor se calcula a partir de un potencial genético de 7.000 L. Las vacas se alojan en un solo lote (lote 1), que accede exclusivamente a una única zona de alimentación (z_0), donde cada kg de MS aporta 1,45 Mcal de energía. El desgaste energético diario se reduce a un requerimiento basal ponderado por ordeño de 4,54 Mcal y un requerimiento de traslado de 0,12 Mcal, calculado a partir de la distancia entre la zona z_0 y la sala de ordeño. La composición de la leche se caracteriza por un 3,6 % de grasa y un 3,1 % de proteínas, lo que deriva en una energía neta de lactancia de 0,69 Mcal/L. El horizonte de simulación abarca tres meses, divididos en tres períodos mensuales de 30 días cada uno. Durante cada día, se realizan dos ordeños, lo que implica dos envíos diarios de las vacas a la zona de alimentación. En cuanto a la oferta alimentaria, se calcula el consumo potencial diario de una vaca a partir de la Ecuación (9), obteniéndose un valor de 19,34 kg de MS. Por lo tanto, el requerimiento total del rodeo a lo largo del período de estudio asciende a 17.406 kg. El modelo determina la asignación óptima de recursos, con el objetivo de maximizar la producción de leche. Estos parámetros, los cuales se tomaron como punto de partida para los

casos de prueba del modelo base y modelo base económico, se presentan en la Tabla 14.

Parámetro	Valor
<i>Zonas</i>	z_0
<i>Lotes</i>	1
<i>Distancias_{z0}</i> (km)	0,5
<i>Cal_{z0}</i> (Mcal/kg)	1,45
<i>Porcentaje_grasa</i>	0,036
<i>Porcentaje_prot</i>	0,031
<i>CantTiposVacas</i>	1
<i>PV₁</i> (kg)	550
<i>SL</i>	20
<i>FCM</i> (L)	23
<i>Conspot_t</i> (kg)	19,34
<i>CantAnimales</i>	10
<i>CantOrdenes_dia</i>	2
<i>Dur_periodo</i> (días)	30
<i>CantOrdenes_periodo</i>	60
<i>Num_periodos</i>	3
<i>ENL</i> (Mcal/L)	0,69
<i>ReqTras_{tz}</i> (Mcal)	0,12
<i>ReqBasal_t</i> (Mcal)	4,54

Tabla 14: Parámetros de entrada para los casos de prueba del modelo base

Caso 1: Validación del modelo base

Objetivo y justificación

Este caso tiene por objetivo validar y presentar el modelo base. Desde el punto de vista de la validación, se busca analizar su comportamiento para comprobar que responde de manera coherente ante distintas condiciones, cumpliendo las restricciones impuestas y generando resultados acordes a la lógica productiva y a valores plausibles. En cuanto a la presentación, el propósito es introducir al lector en la lógica de funcionamiento del modelo, destacando sus principales características y ofreciendo un primer análisis de resultados en situaciones simples y controladas.

Consideraciones particulares

Para este fin, se definieron tres escenarios con diferentes niveles de disponibilidad de alimento. El primero representa un caso donde la oferta de alimento es la mitad de lo requerido para satisfacer el consumo potencial (“Escenario A”). El segundo contempla una disponibilidad equivalente a aproximadamente tres cuartas partes del consumo potencial (“Escenario B”). Finalmente, el tercer escenario dispone de alimento suficiente para cubrir el consumo potencial de todas las vacas del rodeo durante todo el período analizado (“Escenario C”).

Ejecución

Se toman como base los parámetros indicados en la Tabla 14, con una oferta alimenticia total por horizonte de estudio como se presenta en la Tabla 15.

Parámetro	Escenario A	Escenario B	Escenario C
<i>Alimento</i> (kg)	8.703	13.054	∞

Tabla 15: Alimento disponible en el total del horizonte de planificación por escenario

A partir del consumo potencial total del horizonte a analizar (17.406 kg), se establecen las restricciones específicas de cada escenario: el Escenario A restringe el alimento al 50 % del consumo potencial total, el Escenario B contempla una oferta equivalente al 75 % de dicho valor, y el Escenario C considera disponibilidad ilimitada de alimento (representado como ∞).

Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 16 y la Figura 14. Los tiempos de resolución registrados por el *solvers* fueron de 5, 2 y 1 segundos, para los Escenarios A, B, y C, respectivamente.

Período	MS consumido en el Escenario A (kg)	MS consumido en el Escenario B (kg)	MS consumido en el Escenario C (kg)
1	2.550	5.110	5.802
2	3.603	5.110	5.802
3	2.550	2.834	5.802
Total	8.703	13.054	17.406

Tabla 16: Consumo de alimento por período y escenario

La tabla muestra el consumo real obtenido en la zona z_0 según cada período, para los 10 animales del rodeo, así como la totalidad alcanzada en cada escenario. Los resultados muestran que, en los Escenarios A y B, el modelo distribuye el alimento de forma desigual entre los distintos períodos. No obstante, el consumo total de alimento se ajusta exactamente a la disponibilidad establecida para cada escenario, lo que sugiere que podrían existir otras soluciones equivalentes con una distribución por período diferente. Esto confirma, además, que la restricción de oferta forrajera fue correctamente implementada: el modelo impide que el consumo supere la cantidad de alimento disponible y que se consuma más por período que el consumo potencial en dicho período. En cuanto a los valores diarios, en el Escenario A se encuentra que el consumo por vaca oscila entre aproximadamente 8,50 kg y 12,01 kg, mientras que en el Escenario B entre 9,45 kg y 17,03 kg de MS. Ambos rangos son coherentes con lo que se observa en tambos reales, lo cual refuerza la plausibilidad de los resultados [20] [22]. En el caso del Escenario C, donde se plantea una oferta ilimitada de alimento, el modelo alcanza un consumo total de 17.406 kg de MS, que corresponde exactamente con el consumo potencial estimado para las 10 vacas durante los tres períodos analizados. Además, el consumo diario por vaca en cada período se mantiene constante en 19,34 kg de MS, valor que coincide con el consumo potencial diario calculado. Esto indica que, en ausencia de restricciones, el modelo efectivamente permite alcanzar el máximo consumo posible.

Estos resultados permiten validar que el modelo responde de forma consistente y lógica frente a distintos niveles de disponibilidad de alimento: respeta las restricciones impuestas, distribuye el recurso de forma estratégica y genera consumos que se ajustan tanto a la oferta como a los límites fisiológicos esperados. A su vez, se logra observar que la tendencia en escenarios con limitaciones de oferta es hacia el consumo total del alimento disponible. La justificación de esto, se puede apreciar en la Figura 14.

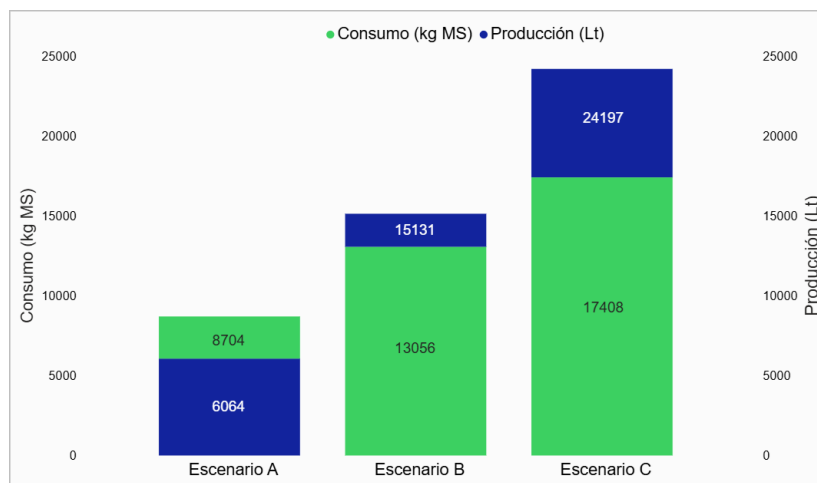


Figura 14: Comparación de consumo y producción total entre los Escenarios A, B y C

En el gráfico se evidencia que a mayor consumo de MS, se alcanza una mayor producción de leche. Esta relación explica por qué el modelo tiende a maximizar el uso del alimento disponible en cada escenario. Además, puede observarse que en el escenario con oferta alimentaria más restringida (Escenario A), donde las vacas consumen apenas el 50 % de su potencial, se alcanzan 0,70 litros de leche por kg de MS; en un escenario intermedio (Escenario B), con un 75 % del consumo potencial, resulta en una eficiencia de 1,16 litros/kg; y en el caso en que las vacas alcanzan su consumo potencial (Escenario C), se obtiene una eficiencia de 1,39 litros por kg de MS. Adicionalmente, al comparar los extremos (Escenarios A y C) se observa que duplicar el consumo, es decir, aumentar en un 100 % al mismo, genera un aumento de la producción de aproximadamente 299 %. Estos valores permiten interpretar que, a medida que se incrementa el consumo de alimento, no solo se logra una mayor producción total, sino que también mejora la conversión alimenticia. Dicho de otra forma, se observa una tendencia creciente en la eficiencia marginal del consumo: a medida que aumenta la cantidad de alimento consumido, también mejora la producción obtenida por cada kg de MS consumido. Esto evidencia la fuerte influencia del nivel de alimentación en la producción total del sistema. Por último, considerando los valores diarios, el modelo estima una producción promedio de aproximadamente 27 litros por vaca por día en el Escenario C (consumo real es igual al potencial), lo cual se encuentra dentro de rangos plausibles y coherentes con sistemas productivos reales de vacas en lactancia alta [26].

Reflexión final

El análisis de este caso de validación confirma que el modelo base responde de manera coherente y lógica ante distintos niveles de disponibilidad alimentaria. El modelo ajusta estratégicamente el consumo diario, respetando tanto la cantidad de alimento disponible como el potencial máximo de consumo, con el objetivo de maximizar la producción total dentro de las restricciones impuestas. La producción de leche muestra un aumento asociado al consumo total de alimento, validando la lógica interna del modelo: a mayor consumo (dentro de los valores inferiores al potencial), mayor producción. A su vez, se evidencia una mejora en la eficiencia productiva (litros de leche por kg de MS consumida) a medida que se incrementa la disponibilidad de alimento, lo que indica una relación creciente entre consumo y rendimiento marginal. Además, los valores de consumo y producción obtenidos se encuentran dentro de rangos realistas y acordes con datos reportados en tambos, lo que refuerza la plausibilidad y confiabilidad del modelo para representar situaciones productivas reales.

Caso 2: Incorporación del componente económico al modelo base

Objetivo y justificación

El objetivo de este caso es comparar el comportamiento del modelo base con el de su versión económica, el cual incorpora precios, costos y la maximización del beneficio neto como criterio de optimización. La finalidad es analizar cómo se modifican las decisiones productivas cuando el foco del modelo se desplaza desde una lógica puramente productiva hacia una orientación económica. Esta comparación permite evidenciar las diferencias en las asignaciones óptimas de recursos, así como los eventuales compromisos entre eficiencia productiva y rentabilidad.

Consideraciones particulares

Para esta comparación, se define un único escenario con dos zonas de alimentación diferenciadas, ambas con igual disponibilidad total de alimento, pero con características nutricionales y costos distintos. La primera zona representa una fuente de alimentación de mayor valor energético y mayor costo, como podría ser un suplemento concentrado. La segunda zona, en contraste, ofrece alimento de menor densidad calórica pero también de menor costo, representando una opción más económica como podría ser una zona de pasturas.

Ejecución

La Tabla 17 muestra los parámetros que se modifican con respecto a la Tabla 14; mientras que el resto de los valores se mantienen iguales.

Parámetro	$z0$	$z1$
Calorías (Mcal/kg MS)	1,45	1,65
Costo alimento (USD/kg MS)	0,08	0,32

Tabla 17: Parámetros de entrada que se modifican para el Caso 2

A continuación, se presentan los principales parámetros considerados en el modelo. Se definen dos zonas de alimentación: $z0$ y $z1$. La zona $z0$ representa la oferta basada en pasturas, la cual presenta un aporte energético menor que la zona $z1$ y tiene un costo asociado equivalente al 20 % del precio de venta de un litro de leche por kg de MS consumido. Por su parte, la zona $z1$ representa la oferta basada en suplementos, que aporta mayor energía y presenta un costo correspondiente al 80 % de dicho precio. Asimismo, se incorpora el precio de venta de la leche ($Precio_leche$) como dato requerido por el modelo económico para evaluar el beneficio. De acuerdo con los datos publicados por INALE [48], este valor se fija en 0,40 USD por litro.

La solución obtenida muestra que, en el modelo base, el lote 1 es asignado durante los tres períodos a la zona $z1$ en 60 ocasiones por período ($loteEnZona_{plz}$), mientras que en el modelo base económico esa asignación se realiza a la zona $z0$, también 60 veces por período. Dado que cada día contempla dos ordeños y cada período abarca 30 días, esto implica que en el modelo base las vacas son enviadas sistemáticamente a alimentarse a la zona $z1$, que ofrece mayor densidad energética pero a un costo más elevado. En cambio, el modelo económico selecciona la zona $z0$, de menor valor energético pero también más económica. Esta diferencia en la asignación permite interpretar que el modelo base prioriza maximizar la producción, dado que un mayor aporte energético se traduce directamente en un mayor volumen de leche producida. En cambio, el modelo económico orienta sus decisiones a maximizar el beneficio neto, privilegiando un menor costo de alimentación aunque esto implique una reducción relativa en la producción individual. Cabe destacar que, en términos de consumo real (cR_{pzt}), ambos modelos utilizan la misma cantidad total de alimento, equivalente al consumo potencial de los animales. Por tanto, las diferencias en los resultados no se explican por variaciones en la cantidad consumida, sino por la elección del tipo de alimento y sus implicancias en términos

de producción de leche y costos asociados.

En la Figura 15 se muestran los resultados de producción y beneficio neto obtenidos por cada modelo respectivamente. Cabe aclarar que aunque el modelo base no contempla explícitamente aspectos económicos, se calculó el beneficio que se habría obtenido utilizando su producción total, el costo del alimento en la zona utilizada ($z1$) y el precio de la leche. Este análisis permite una comparación más equitativa con el modelo económico. Los tiempos de resolución registrados por el *solvers* fueron de 19 y 13 segundos para la ejecución del modelo base y el modelo base económico, respectivamente.

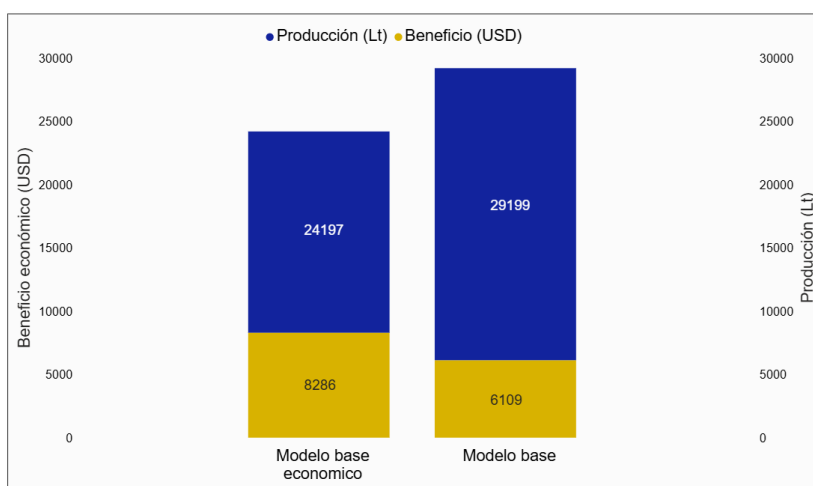


Figura 15: Comparación de producción y beneficio económico total entre los modelo base y base económico

A partir de dicho gráfico se puede obtener que frente a una misma disponibilidad de alimento en ambas zonas, para el modelo base, la producción de leche por kg de MS consumida es de 1,68 L, mientras que en el modelo base económico alcanza 1,39 L. Esto indica que el modelo base logra aproximadamente un 21 % más de producción por kg de MS, debido al mayor valor energético del alimento utilizado. Sin embargo, esta estrategia resulta menos eficiente desde el punto de vista económico, ya que está asociada a costos de alimentación más elevados. Como se puede obtener a partir del gráfico mencionado, el modelo base genera una ganancia de 0,35 USD/kg MS, mientras que el modelo base económico alcanza 0,48 USD/kg MS. Esto implica que, a pesar de producir menos leche, el modelo económico logra un beneficio total aproximadamente un 37 % superior, optimizando la relación entre los costos de alimentación y los ingresos por venta de leche, manteniendo constante la cantidad total de alimento consumido. Este análisis demuestra que una mayor producción no siempre se traduce en una mayor rentabilidad. Aunque el modelo base produce más litros de leche, los mayores costos que implica reducen significativamente el beneficio económico final.

Reflexión final

La comparación entre ambos modelos demuestra que un enfoque centrado únicamente en la producción puede derivar en decisiones económicamente ineficientes. Si bien el modelo base genera una mayor cantidad de litros de leche al priorizar zonas con mayor aporte energético, esto se logra a un costo elevado, lo que reduce el beneficio total. En cambio, el modelo económico obtiene un mejor resultado financiero al equilibrar ingresos y costos. Esta diferencia apoya la decisión de haber desarrollado un modelo con recría que optimice el beneficio económico.

4.3.2. Modelo con recría

Se detallan a continuación los parámetros y las definiciones que estructuran el funcionamiento del modelo bajo la configuración base adoptada. El horizonte de planificación considerado abarca un período de 7 años, subdividido en 12 períodos anuales de 30 días cada uno, con dos ordeños diarios, lo que representa una aproximación mensual del ciclo productivo. El rodeo inicial está conformado por 100 vacas productivas, de 3 años de vida según el modelo (lo que implica que cumplieron sus 2 años de edad, y por lo tanto se encuentran cursando su primer ciclo de lactancia). Cada una posee un PV de 550 kg y un potencial genético de producción estimado en 7.000 L de leche anuales. Este grupo de animales se representa como el tipo 1. El sistema tambero se estructura sobre una única zona de alimentación, identificada como $z0$, correspondiente a una pastura ubicada a 1 km de la sala de ordeño. Esta zona ofrece una disponibilidad ilimitada de MS, con una concentración energética de 1,45 Mcal por kg de MS. La asignación del rodeo a dicha zona se gestiona mediante un único lote, designado como $L1$. Las vacas nacidas durante el período de análisis son consideradas descendientes, directas o indirectas, del tipo inicial. En este marco, si se considera un único tipo de vaca inicial y se continúa el diagrama presentado en la Figura 13, se puede concluir que el número máximo de tipos de vacas que el sistema puede generar a lo largo los 7 años de corrida es de 21. Desde el punto de vista económico, el costo por kg de MS en la zona $z0$ representa el 20 % del precio de venta del litro de leche, fijado en 0,40 USD. Por su parte, el valor económico de vacas y terneras se calcula en función de su peso corporal, a razón de 2 USD por kg, mientras que los terneros machos se comercializan al nacer por un valor fijo de 350 USD. Estos valores fueron estimados a partir de, por un lado promedios de venta para terneros holando [84], y por otro lado de promedios de venta considerando terneras, vaquillonas y vacas para faena así como para reposición [84] [46] [25]. Bajo este esquema, el modelo determina anualmente la composición del rodeo que maximiza el beneficio económico, entendido como la diferencia entre los ingresos por venta de leche y animales, y los costos asociados a la alimentación. Asimismo, el modelo establece la asignación óptima de recursos, lo cual implica decidir qué animales deben mantenerse o descartarse en cada año, y cuántas veces debe ser enviado el lote $L1$ a alimentarse en la zona $z0$. Se presenta en la Tabla 18 un resumen de dichos parámetros, utilizados como base para la ejecución de los casos de prueba del modelo con recría. Cabe señalar que no se incluyen aquellos parámetros cuyo valor puede deducirse o calcularse a partir de los presentados, ni aquellos que adoptan valor cero.

Parámetro	Valor
$CantAnos$	7
$Lotes$	$L1$
$Zonas$	$z0$
$CantTiposVacas$	21
$Anodevida_{v1,1}$	3
$CantAnimales_{i1}$	100
Pot_{gen1} (L)	7.000
$PV_{v1,1}$ (kg)	550
$Num_{periodos}$	12
$Dur_{periodo}$ (días)	30
$Cantordenes_{dia}$	2
$Distancias_{z0}$ (km)	1
Cal_{z0} (Mcal/kg)	1,45
$Alimento_{a,z \in 1...7,z0}$ (kg)	∞
$Porcentaje_{costo_{z0}}$	0,2
$Porcentaje_{prenez}$	0,85
$Porcentaje_{grasa}$	0,036
$Porcentaje_{prot}$	0,031
$Precio_{leche}$ (USD)	0,4
$Precio_{ternero}$ (USD)	350
$Precio_{kg_{vaca}}$ (USD/kg)	2

Tabla 18: Parámetros de entrada para los casos de prueba del modelo con recría.

Caso 3: Validación del modelo con recría

Objetivo y justificación

En este caso de prueba se busca introducir los conceptos principales del modelo desarrollado para la maximización del beneficio económico con enfoque en recría. Por un lado, pretende ser un caso que permita la comprensión más clara de lo que contiene el modelo, es decir, que se puedan ver reflejados los parámetros, variables y restricciones presentados en la Sección 3; y por otro lado busca ser una validación de los resultados que arroja el modelo; así como también aplicar los conceptos generales de la recría que se desarrollan a lo largo del trabajo.

Consideraciones particulares

Se tiene alimento suficiente en todos los años, lo que implica que alcanza para cubrir el consumo potencial de todas las vacas y terneras que se pueden llegar a tener a partir de los datos iniciales.

Ejecución

Los resultados de beneficio económico obtenidos año a año se presentan en la Figura 16 y el resumen de las variables solución en la Tabla 19. Cabe recordar, como se detalló en la Sección 3, que el cálculo del consumo diario potencial de MS por vaca en producción presenta diferencias respecto al modelo base. En dicho modelo, la semana de lactancia se mantenía constante y dependía del tipo de vaca. En cambio, en el modelo con recría, todas

las vacas atraviesan un mismo ciclo de lactancia, por lo que la semana correspondiente varía dinámicamente a lo largo del año, según el punto del ciclo en el que se encuentren. Por esta razón, en el presente modelo, el consumo diario potencial de MS se estima como el promedio de los valores diarios correspondientes a cada día del ciclo de lactancia. Asimismo, para las categorías de terneras y vaquillonas, el consumo se calcula como el 2,5 % del PV en cada caso. El tiempo de resolución registrado por el *solvers* fue de 4 segundos.

Año	Tipo	Variables					
		CA	CVR	CTV	Producción (L)	Consumo (kg MS)	Beneficio (USD)
1	1	100	0	0	574.622	644.819	178.263
2	1	100	0	0	682.364	644.819	221.360
	2	43	0	42	0	70.949	9.024
3	1	100	0	0	718.278	644.819	235.726
	2	43	0	0	0	141.901	-11.352
	3	43	0	42	0	70.949	9.024
4	1	100	0	0	718.278	644.819	235.726
	2	43	0	0	247.087	277.272	76.653
	3	43	0	0	0	141.901	-11.352
	4	43	0	42	0	70.949	9.024
	5	18	0	18	0	29.700	3.924
5	1	100	0	0	682.364	644.819	221.360
	2	43	0	0	293.416	277.272	95.185
	3	43	0	0	247.087	277.272	76.653
	4	43	0	0	0	141.901	-11.352
	5	18	0	0	0	59.401	-4.752
	6	43	0	42	0	70.949	9.024
	7	18	0	18	0	29.700	3.924
	8	18	0	18	0	29.700	3.924
6	1	100	0	0	215.483	644.819	34.608
	2	43	0	0	308.859	277.272	101.362
	3	43	0	0	293.416	277.272	95.185
	4	43	0	0	247.087	277.272	76.653
	5	18	0	0	103.432	116.067	32.087
	6	43	0	0	0	141.901	-11.352
	7	18	0	0	0	59.401	-4.752
	8	18	0	0	0	59.401	-4.752
	9	43	0	42	0	70.949	9.024
	10	18	0	18	0	29.700	3.924
	11	18	0	18	0	29.700	3.924
	12	18	0	18	0	29.700	3.924
	13	8	0	7	0	13.200	1.394
7	1	0	100	0	0	0	110.000
	2	43	0	0	308.859	277.272	101.362
	3	43	0	0	308.859	277.272	101.362
	4	43	0	0	293.416	277.272	95.185
	5	18	0	0	122.825	116.067	39.845
	6	43	0	0	247.087	277.272	76.653
	7	18	0	0	103.432	116.067	32.087
	8	18	0	0	103.432	116.067	32.087
	9	0	43	0	0	0	31.533
	10	0	18	0	0	0	13.200
	11	0	18	0	0	0	13.200
	12	0	18	0	0	0	13.200
	13	0	8	0	0	0	5.867
	14	0	43	42	0	0	30.467
	15	0	18	18	0	0	12.900
	16	0	18	18	0	0	12.900
	17	0	18	18	0	0	12.900
	18	0	8	7	0	0	5.383
	19	0	18	18	0	0	12.900
	20	0	8	7	0	0	5.383
	21	0	8	7	0	0	5.383

Tabla 19: Variables obtenidas tras la validación del modelo con recría

En particular,

- CA corresponde con la variable $Cant_animales_vat$
- CVR con $CantVacas_retiradas_{at}$
- CTV con $CantTerneros_venden_{at}$

En el primer año, el modelo decide mantener a las 100 vacas del tipo 1 (de ahora en adelante, “vacas madre”), tal como se puede ver en la Tabla 19. Esto se debe a que se cuenta con comida ilimitada y las vacas se encuentran en el primer ciclo de lactancia, donde se tiene un coeficiente de producción del 80 % respecto al máximo. Asimismo, del primer año el beneficio económico aportado por la producción de leche es 229.849 USD, mientras que el costo asociado al alimento consumido por las vacas madre es de 51.586 USD, dando un beneficio económico de 178.263 USD en el primer año de ejecución. Estos cálculos surgen de la interpretación de la Función objetivo del modelo con recría.

En el segundo año, se retienen las 100 vacas madre, ya que la disponibilidad de alimento es suficiente para cubrir su consumo potencial. Además, la producción de leche alcanza un 95 % del valor máximo, generando un margen de ganancia de 272.946 USD, superior al registrado en el primer año, cuando la eficiencia era del 80 %. En este período también se incorpora el tipo de vaca 2, correspondiente a las crías hembras del tipo 1, las cuales aún no producen leche ya que esto sucede recién transcurridos los 24 meses de vida. Al tratarse del primer año en que nacen crías, es importante detallar cómo se determina su cantidad y su distribución por sexo. A partir del parámetro de entrada que define una tasa de preñez del 85 %, y considerando que en el año 1 hay 100 vacas con edad suficiente para preñarse, se obtiene un total de 85 crías para el segundo año. De estas, se asume que la mitad son hembras y la otra mitad machos. Al tratarse de un número impar, se redondea hacia arriba la cantidad de hembras (43) y hacia abajo la de machos (42), tal como se observa en la Tabla 19. Todos los terneros machos son retirados del sistema al nacer, ya que no aportan beneficios por producción de leche, y se asume que son vendidos de forma inmediata. Su venta genera un ingreso de 350 USD por unidad, lo que representa un aporte total de 14.700 USD al beneficio del segundo año. En cuanto a las terneras, el modelo decide mantenerlas en el rodeo, a pesar de que en esta etapa solo generan costos por consumo de alimento. Esta decisión se basa en su potencial productivo futuro, que compensa el gasto inicial, lo cual se explica en detalle durante el análisis del cuarto año.

En el tercer año, se mantienen las 100 vacas madre (tipo 1) y las 43 vaquillonas (tipo 2), tal como estaba previsto. Las vacas tipo 1 alcanzan en este período su pico de producción, el cual se mantiene también durante su cuarto ciclo de lactancia, por lo que la producción obtenida es idéntica a la del año siguiente. Asimismo, tiene lugar el segundo ciclo reproductivo de estas vacas, dando origen a 85 crías: 43 hembras (tipo 3) y 42 machos. Como en los años anteriores, los terneros machos son vendidos y retirados del sistema, mientras que las hembras se conservan en el rodeo por su potencial productivo. Respecto al consumo, se observa un aumento significativo en los requerimientos alimenticios. Las vaquillonas tipo 2 duplican su peso corporal en este año, pasando de un tercio a dos tercios del peso adulto, lo que implica un incremento proporcional en su consumo. A su vez, las terneras tipo 3 presentan niveles de consumo similares a los registrados por las tipo 2 en su primer año, ya que comparten características genéticas y condiciones de nacimiento.

El análisis correspondiente al cuarto año presenta similitudes con el del año anterior, aunque incorpora aspectos adicionales relevantes. En primer lugar, las vacas de tipo 2 transcurren su tercer año de vida, lo que marca el inicio de su vida productiva. A partir de este momento,

su consumo potencial deja de calcularse mediante la Ecuación (30), utilizada para animales en recría, y pasa a determinarse según la fórmula del NRC para vacas lactantes (Ecuación (29)), que contempla los requerimientos específicos de producción. Una diferencia significativa respecto a los años anteriores radica en la producción de leche diaria por tipo de vaca. Para realizar el cálculo correspondiente, se debe tener en cuenta que la producción anual se distribuye sobre 305 días productivos, excluyendo los dos meses de secado habituales del ciclo de lactancia. Para las vacas de tipo 1, su producción total es de 718.278 L, y al dividirlo entre los 100 animales y los 305 días de producción, su valor diario individual se traduce en 23,55 L. Por otro lado, las de tipo 2 producen un total de 247.087 L, por lo cual al dividirlo entre los 43 animales y los 305 días productivos, se tiene una producción individual diaria de 18,84 L. Esto permite observar que mientras que las de tipo 2 dan en promedio 18,84 L de leche diarios, las de tipo 1 dan 23,55 L. Esto se debe a que la eficiencia productiva en el cuarto año para las vacas de tipo 1 es 100 % y para las de tipo 2 es 80 %. Esta equivalencia entre los litros de leche producidos promedio por día por vacas de distinto tipo en distinto año se debe a que todas son descendientes del tipo 1, por lo que se adquieren sus características genéticas (potencial genético y PV) y por lo tanto, los parámetros de los que depende el consumo potencial (y por lo tanto la producción) son los mismos. Al alimentarse de la misma zona, y cumpliendo con su consumo potencial, en iguales ciclos productivos la producción es la misma. Además, como en este año se da el primer parto de las vacas de tipo 2, aparece su primer tipo de vaca hijo: el tipo de vaca 5. El cual es “nieto” del tipo 1. La cantidad de terneras y terneros macho asociado al tipo 5, son 18 en ambos casos, y corresponde con el cálculo de las 43 vacas que se tenían el año anterior del tipo 2, ajustadas por su porcentaje de preñez y luego con la proporción de hembras y machos que se menciona anteriormente. Tal como se anticipó en el análisis del año 1, este cuarto año permite confirmar que las vacas tipo 2 se “repagan” en su primer ciclo productivo. Es decir, la ganancia generada por la producción de leche en este año supera el costo acumulado de su alimentación durante los años improductivos (años 2 y 3 del horizonte) y el propio año 4, en el que comienzan a producir. En efecto, el beneficio total por la venta de leche asciende a 98.835 USD, mientras que los costos acumulados de alimentación suman 39.210 USD. La diferencia entre ambos valores representa una ganancia neta de 59.625 USD, lo que valida la decisión de mantenerlas en el sistema hasta alcanzar su madurez productiva.

- Costo de alimentación del tipo de vaca 2 en el año 2:

$$70,949 \text{ kgMS} \times 0,4 \text{ USD} \times 0,2 = 5,676 \text{ USD}$$

- Costo de alimentación del tipo de vaca 2 en el año 3:

$$141,901 \text{ kgMS} \times 0,4 \text{ USD} \times 0,2 = 11,352 \text{ USD}$$

- Costo de alimentación del tipo de vaca 2 en el año 4:

$$277,272 \text{ kgMS} \times 0,4 \text{ USD} \times 0,2 = 22,182 \text{ USD}$$

- Beneficio por producción de leche del tipo de vaca 2 en el año 4:

$$247,087 \text{ kgMS} \times 0,4 \text{ USD} = 98,835 \text{ USD}$$

El análisis del quinto año es análogo al anterior, considerando que aparecen los tipos de vaca 6,7 y 8 que son hijas de los tipos 1,2 y 3 respectivamente.

En el sexto año se puede ver cómo la producción de la vaca de tipo 1 baja drásticamente, siendo el beneficio por mantenerlas en el rodeo (la ganancia desprendida de la venta de leche

menos el costo por el consumo) un total de 34.608 USD. Comparado con el beneficio que se tenía de mantenerlas en el tercer y cuarto año donde se daba el pico de producción, el cual era de 235.726 USD, se tiene una disminución de un 85 %. De todas maneras, el beneficio obtenido es positivo, y debido a que las puede vender en el siguiente año, las mantiene aunque tengan una baja producción y alto consumo. Esto es particularmente óptimo en estas circunstancias donde no tiene necesidad de repartir el alimento a vacas que tengan una mejor producción (se tiene alimento suficiente para todas las vacas), en caso contrario, muy probablemente se las vendería antes.

De los resultados obtenidos en el sexto año de simulación, se desprende una conclusión significativa: todas las categorías de vacas nacidas en dicho período (tipos 9, 10, 11, 12 y 13) no alcanzarán a reproducirse dentro del horizonte temporal considerado, dado que el modelo se ejecuta por un total de siete años. Esto implica que a estas categorías les resta al menos un año adicional para alcanzar la edad reproductiva. En función de esta limitación temporal, podría esperarse que el modelo opte por descartar a estas vacas en el mismo año de su nacimiento, con el objetivo de evitar costos adicionales de mantenimiento y obtener un beneficio económico inmediato a través de su venta como terneras. No obstante, los resultados muestran que el modelo retiene estos animales durante el sexto año y recién decide venderlos en el séptimo. Esta decisión se justifica por la lógica de optimización que subyace en el modelo: mantener a las terneras un año adicional permite incrementarlas de peso y tamaño, lo cual, de acuerdo con la estructura de precios implementada, resulta en una duplicación de su valor de venta, como se puede apreciar en la Función objetivo del modelo con recría.

Para ilustrar numéricamente con un caso, se tomará el tipo de vaca 9:

- Beneficio por vender una vaca en edad ternera:

$$2 \text{ USD/kg} \times (550 \times \frac{1}{3}) \text{ kg} = 367 \text{ USD}$$

- Beneficio por vender una vaca en edad vaquillona:

$$2 \text{ USD/kg} \times (550 \times \frac{2}{3}) \text{ kg} = 734 \text{ USD}$$

- Costo por el consumo de alimento de un año de 43 vacas:

$$70,949 \text{ kgMS} \times 0,2 \times 0,4 \text{ USD} = 5,676 \text{ USD}$$

De aquí se desprende que el beneficio económico dado por engordar las terneras un año es mayor que el beneficio dado por venderlas en el año 6 (donde nacen):

$$734 \text{ USD} \times 43 - 5,676 \text{ USD} = 25,886 \text{ USD} > 367 \text{ USD} \times 43 = 15,781 \text{ USD}$$

Otra conclusión relevante del año 6, es que aparece en este año el primer tipo de vaca que es “bisnieto” del tipo de vaca 1, el tipo 13 (que es cría del tipo 5). Analizando las cifras, se observa que el rodeo se inició con 100 vacas del tipo 1 y que, en el año 6, únicamente nacen 8 vacas del tipo 13. Este comportamiento refleja un patrón muy claro: cada nueva generación presenta una cantidad de nacimientos menor que la anterior. Esta disminución progresiva en la cantidad de nacimientos se explica principalmente porque no todas las vacas quedan preñadas cada año, dado que el porcentaje de preñez es menor al 100 %. En consecuencia, con cada nueva generación se reduce el número de animales reproductores y, por ende, también la cantidad de crías nacidas. Si se continúa el análisis en años posteriores, se llegaría a un

punto en el que dejarían de nacer vacas de los tipos más recientes. Esto se debe a que la base reproductiva se va reduciendo gradualmente hasta extinguirse, en ausencia de nuevas incorporaciones. Esto refuerza la posibilidad de trabajo futuro de poder incorporar vacas de fuera del rodeo en cualquier año.

En el año 7 decide vender a las vacas de tipo 1 que ya pasaron su último ciclo de lactancia y a partir de este año su potencial de producción es nulo (por lo que venderlas es la única opción rentable). A su vez, mantiene el resto de los tipos hasta el 8 ya que se encuentran superando el beneficio de ser vendidos con la producción de leche, y ya cumplieron en todos los casos con su repago de los años no productivos y sólo consumo. Para los tipos 9 al 21 retira todas sus vacas debido a que no alcanzan los años de corrida para que produzcan o engorden.

Para concluir con este caso de prueba, es interesante analizar el beneficio económico año a año, presentado en la Figura 16, para ver como varía y las implicancias que tiene cada decisión tomada en un año para los años posteriores. En primer lugar se puede apreciar cómo el beneficio económico aumenta en el segundo año respecto al primero, a pesar de que en el segundo año nacen crías que el modelo mantiene en el tambo y sólo representan un costo. Esto se da debido a que las vacas madre aumentan su productividad de un 80 % en el año 1 a un 95 %, lo que aumenta en un 15 % el beneficio obtenido por producción de leche, con el mismo consumo. A su vez, se le agrega el beneficio por vender a los 42 terneros machos, que como ya se mencionó es de 14.700 USD. A pesar del aumento en los costos de alimentación por la incorporación de las nuevas terneras y el mayor requerimiento de las vaquillonas, el beneficio neto del año 3 asciende a 233.398 USD, lo que representa un incremento del 1,3 % respecto al año anterior (230.384 USD). Este resultado positivo se explica principalmente por el rendimiento máximo alcanzado por las vacas madre, que compensa el aumento en los costos y permite mejorar la rentabilidad del sistema. A lo largo de los años subsiguientes, se observa una tendencia general al alza en los beneficios económicos. Esta mejora se encuentra estrechamente relacionada con la incorporación progresiva de nuevos tipos de vacas con capacidad productiva de leche. Tal como se evidenció en los años previos, la rentabilidad generada por la producción láctea supera ampliamente los costos asociados al consumo de alimento por parte de las terneras nacidos de estas vacas productoras. Esta tendencia positiva se ve interrumpida en el sexto año, donde se registra una disminución del beneficio económico en comparación con el año 5. Esta reducción se explica principalmente por una caída significativa en la producción de leche, mientras que los niveles de consumo de alimento por parte de las vacas madre se mantienen constantes respecto a los años anteriores. En términos cuantitativos, la producción total de leche en el quinto año alcanzó los 1.222.867 L, mientras que en el sexto año esta cifra se reduce a 1.168.277 L, lo que representa una disminución del 4,7 %. Esta caída se produce a pesar de la incorporación de nuevos tipos de vaca con capacidad de producción láctea, lo que evidencia que la baja en el rendimiento del tipo 1 (uno de los principales productores de leche en el sistema) tiene un impacto considerable sobre la eficiencia global del modelo. En el séptimo año, se aprecia el beneficio más grande. En este año se venden, además de los terneros machos como todos los años, las terneras que nacen, ya que es el último año de ejecución del modelo y no se tiene más años para producir leche. Por eso se tiene un incremento de ingresos sin ningún costo, y se venden las vacas madre ya que su coeficiente productivo es 0 (alcanzando el fin de su vida útil).

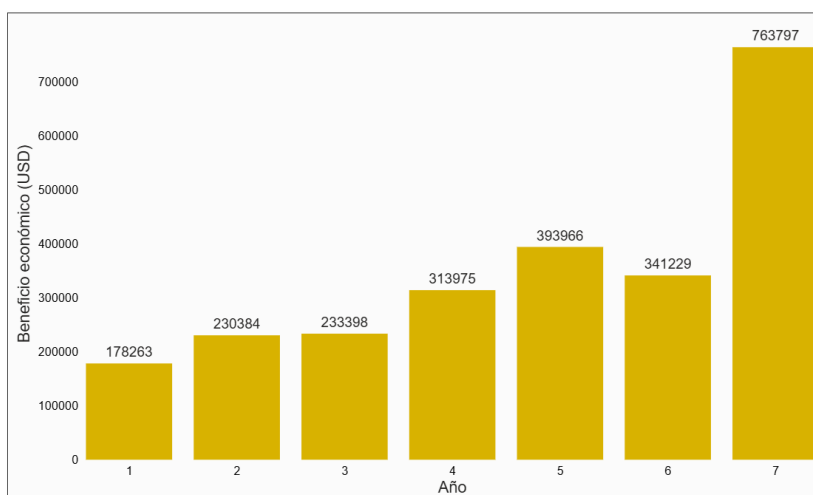


Figura 16: Comparación de beneficio económico anual

Reflexión final

En términos generales, los resultados del caso validan que el modelo representa de forma coherente la dinámica productiva y económica de un tambo que incorpora la cría en su estrategia. En los primeros años, el aumento progresivo en la eficiencia reproductiva de las vacas madre impulsa tanto la producción como el beneficio económico. La decisión de retener a las terneras dentro del sistema muestra su retorno económico en los ciclos productivos subsiguientes, con un punto de repago que se alcanza hacia el tercer año de vida, luego de su primer ciclo productivo. A lo largo del horizonte, la incorporación escalonada de nuevos tipos de vacas permite sostener el crecimiento, hasta que en el sexto año la caída en la producción de las vacas madre lleva al modelo a evaluar alternativas: venderlas inmediatamente o postergar su descarte un año, priorizando su valor residual. Finalmente, en el séptimo año, la venta conjunta de esas vacas sin potencial productivo y de las nuevas terneras genera el beneficio más alto del período. En este sentido, el modelo también contempla la posibilidad de mantener en alimentación a terneras que, debido a la limitación del horizonte temporal, no llegarán a incorporarse al ciclo productivo, pero cuyo engorde puede representar un retorno económico más favorable al momento de su venta. Este comportamiento evidencia la capacidad del modelo para traducir parámetros biológicos, como la tasa de preñez, edades de parto, picos de producción y decisiones estratégicas de manejo, en resultados económicos consistentes.

Caso 4: Asignación óptima de vacas bajo restricción de tamaño del rodeo en modelo con cría

Objetivo y justificación

El presente caso de prueba tiene como objetivo analizar el comportamiento del modelo de asignación de vacas cuando se introduce una restricción explícita sobre el tamaño del rodeo, en un contexto que incluye la cría de animales. Esta situación responde a una problemática frecuente en la realidad productiva: las limitaciones operativas que impiden manejar un número indefinido de animales en el establecimiento, ya sea por recursos humanos, infraestructura o capacidad de gestión. En este sentido, se busca evaluar cómo responde el modelo ante distintos valores máximos permitidos para el tamaño del rodeo, observando las decisiones que adopta respecto a la retención o descarte de animales. Asimismo, se analiza el impacto de dicha restricción sobre los beneficios económicos obtenidos, con el fin de comprender la relación entre capacidad de manejo y rentabilidad.

Consideraciones particulares

La particularidad del caso radica en la incorporación de una cota superior sobre el número total de animales, lo que condiciona la libertad del modelo para determinar la composición óptima del rodeo. Para representar en el modelo dicha cota, se tuvo que incluir en el modelo una restricción a nivel matemático, la cual se presenta en el Anexo D.

Ejecución

Se definieron cuatro escenarios con capacidad de manejo limitada. Específicamente, los valores considerados para dicha capacidad fueron: 100, 170, 250 y 350 animales. A partir de estas configuraciones, se evaluó el comportamiento del modelo en términos de la composición del rodeo, analizando cuántos animales de cada tipo son seleccionados para mantenerse en el sistema en cada año del horizonte temporal. Los resultados correspondientes se presentan en la Tabla 20, donde se muestra el desglose anual de la cantidad de animales mantenidos, discriminado por tipo y por nivel de capacidad de manejo. Como referencia complementaria, se incorpora en el análisis al escenario sin restricción en el tamaño del rodeo, correspondiente al Caso 3: Validación del modelo con recría, en el cual se alcanza como máximo un valor de 431 animales. Cabe destacar que el valor máximo de 431 animales se alcanzó como resultado del horizonte temporal de planificación definido. Dado que en este caso la disponibilidad de alimento no constituye una restricción, un horizonte más extenso habría permitido alcanzar una cantidad aún mayor de animales. La configuración resultante para dicho escenario ya fue presentada previamente en la Tabla 19, pero con el fin de una mejor comprensión se añade la cantidad de animales que se mantienen de cada tipo a la Tabla 20 como capacidad “ ∞ ”. Los tiempos de resolución registrados por el *solvers* fueron de 4, 4, 5, y 14 segundos, para las capacidades de 100, 170, 250, y 350 vacas respectivamente.

Año	Tipo	Capacidad				
		100	170	250	350	∞
1	1	100	100	100	100	100
2	1	100	100	100	100	100
	2	0	43	43	43	43
3	1	100	100	100	100	100
	2	0	43	43	43	43
	3	0	27	43	43	43
4	1	100	100	100	100	100
	2	0	43	43	43	43
	3	0	27	43	43	43
	4	0	0	43	43	43
	5	0	0	18	18	18
5	1	100	100	100	100	100
	2	0	43	43	43	43
	3	0	27	43	43	43
	4	0	0	43	43	43
	5	0	0	18	18	18
	6	0	0	0	43	43
	7	0	0	0	18	18
	8	0	0	3	18	18
6	1	100	100	100	100	100
	2	0	43	43	43	43
	3	0	27	43	43	43
	4	0	0	43	43	43
	5	0	0	18	18	18
	6	0	0	0	43	43
	7	0	0	0	18	18
	8	0	0	3	18	18
	9	0	0	0	0	43
	10	0	0	0	0	18
	11	0	0	0	18	18
	12	0	0	0	6	18
	13	0	0	0	0	8
7	1	0	0	0	0	0
	2	0	43	43	43	43
	3	0	27	43	43	43
	4	0	0	43	43	43
	5	0	0	18	18	18
	6	0	0	0	43	43
	7	0	0	0	18	18
	8	0	0	3	18	18
	9	0	0	0	0	0
	10	0	0	0	0	0
	11	0	0	0	0	0
	12	0	0	0	0	0
	13	0	0	0	0	0
	14	0	0	0	0	0
	15	0	0	0	0	0
	16	0	0	0	0	0
	17	0	0	0	0	0
	18	0	0	0	0	0
	19	0	0	0	0	0
	20	0	0	0	0	0
	21	0	0	0	0	0

Tabla 20: Cantidad de animales por año por tipo según capacidad

La primera observación a destacar es la capacidad del modelo para respetar la restricción impuesta sobre el tamaño del rodeo, ya que en ningún caso se supera el límite establecido. Este cumplimiento estricto valida la correcta implementación de la condición operativa dentro del modelo.

En relación con las decisiones que adopta el modelo respecto a qué animales mantener, se observa que, a medida que se incrementa la capacidad de manejo, la solución tiende progresivamente hacia aquella obtenida en el escenario sin restricciones. Esto se debe a que, por un lado no se limita la oferta alimentaria (considerando un valor suficientemente grande), y por otro lado, el caso de mayor libertad (capacidad ilimitada) representa la situación de mayor eficiencia técnica, al permitir al modelo determinar libremente la composición óptima del rodeo sin limitaciones operativas.

La diferencia entre las distintas situaciones, además de la capacidad de manejo, radica en qué animales mantener. El patrón de decisión adoptado consiste en priorizar a las vacas en producción por sobre aquellas que aún no lo están, y, dentro del grupo de vacas productivas, seleccionar a aquellas que presentan una mayor eficiencia productiva. En el escenario más restrictivo, con un límite de 100 animales, el modelo opta por mantener constantemente a las 100 vacas iniciales durante casi todo el horizonte temporal. La única excepción se da en el séptimo año, momento en que dichas vacas dejan de generar beneficios, ya que alcanzan los 9 años de vida. Esta decisión refleja que, dada la extensión del período de análisis (siete años), no resulta rentable incorporar nuevos tipos al rodeo, ya que ello implicaría reemplazar vacas altamente productivas por animales no productivos o en etapas de recría, lo que generaría una pérdida de eficiencia global. Con capacidades intermedias de 170 y 250 animales, el modelo comienza a incorporar terneros al sistema. No obstante, el espacio sigue siendo insuficiente para incluir categorías que no llegarán a su etapa productiva dentro del horizonte temporal, por lo que no se observa aún una estrategia de engorde para venta posterior (la cual se observó que es óptima según el Caso 3: Validación del modelo con recría). Finalmente, en el caso de 350 animales, el modelo cuenta con una mayor flexibilidad y decide mantener, en el sexto año, animales de los tipos 11 y 12, los cuales no producen leche, pero son engordados y vendidos en el año 7. Esta decisión evidencia que, ante una mayor capacidad de manejo, el modelo puede incorporar estrategias complementarias de producción, como el engorde para faena, que en escenarios más acotados no resultan viables.

Los valores del beneficio económico total acumulado a lo largo de los siete años de análisis se presentan en la Figura 17. Estos resultados permiten evaluar cómo impacta la restricción en la capacidad de manejo sobre la rentabilidad del sistema.

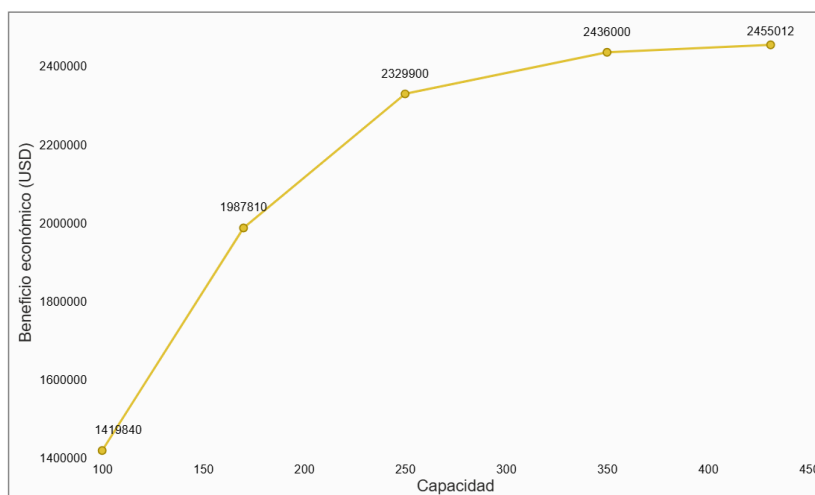


Figura 17: Comparación del beneficio económico en función de la capacidad de manejo

A partir de los resultados presentados en el gráfico, puede concluirse que el aumento en la capacidad de manejo tiene un impacto significativo sobre el beneficio económico total. En particular, al comparar los extremos del análisis, capacidad limitada a 100 animales frente a una capacidad de 431 animales (caso sin restricción), se observa un incremento del beneficio total cercano al 73 %. Sin embargo, el mayor salto relativo en rentabilidad se produce entre las capacidades de 100 y 250 animales, con un aumento del 64 %. Este resultado sugiere que, en las condiciones específicas del sistema analizado, una ampliación de la capacidad hasta 250 animales ya representa una mejora sustancial en términos económicos, y podría ser considerada una meta razonable desde el punto de vista de la gestión operativa. Asimismo, el beneficio adicional obtenido al pasar de una capacidad de 250 animales a una capacidad ilimitada, representa apenas un 5,4 % extra, lo cual refleja la tendencia del sistema hacia un rendimiento máximo bajo condiciones sin restricciones.

Reflexión final

Los resultados obtenidos muestran que, en los escenarios con menor capacidad de manejo, el modelo prioriza exclusivamente animales con alta productividad inmediata, excluyendo categorías en recría o con retorno económico diferido. A medida que la capacidad se incrementa, se observa una mayor diversificación en la composición del rodeo, incorporando animales jóvenes o en etapas tempranas del ciclo productivo, lo cual indica una mayor flexibilidad en la planificación a largo plazo. En el escenario sin restricciones, el modelo alcanza una estructura productiva óptima desde el punto de vista técnico, integrando de manera equilibrada animales en distintas etapas del ciclo vital. Sin embargo, al analizar los resultados económicos, se observa que el beneficio marginal disminuye a medida que aumenta la capacidad de manejo, especialmente a partir de los 250 animales. Esto sugiere la presencia de rendimientos decrecientes, donde el incremento en el número de animales no se traduce en aumentos proporcionales del beneficio económico.

Caso 5: Oferta fija de alimento en modelo con recría

Objetivo y justificación

Este caso de prueba tiene como finalidad evaluar la respuesta del modelo con recría ante un escenario productivo limitado por factores estructurales, específicamente aquellos vinculados a la posibilidad de expansión del sistema. El análisis se centra en entender cómo el modelo gestiona el crecimiento del rodeo cuando no existe margen para incrementar la base alimenticia, y cómo prioriza las decisiones en función de la eficiencia y la rentabilidad a lo

largo del tiempo. De este modo, se busca comprobar la capacidad del modelo para operar de forma estratégica en contextos con recursos constantes.

Consideraciones particulares

Se analiza la mejor estrategia de manejo ante una situación en la que el tambo cuenta con una disponibilidad de pastura constante, es decir, una cantidad fija de hectáreas sin recurrir al uso de suplementos ni a variaciones en la oferta forrajera. Para ello, se modela un sistema en el cual, durante el primer año, la cantidad de alimento disponible es suficiente para abastecer a la totalidad del rodeo inicial con su consumo potencial, manteniéndose ese mismo nivel de disponibilidad en los años posteriores. Esta condición impone una restricción estructural al crecimiento del rodeo, ya que el suministro de alimento permanece constante y no permite sostener un aumento en la cantidad de animales, como sí ocurría en los casos anteriores.

Ejecución

Las adaptaciones de los parámetros, respecto a la Tabla 18 se presentan en la Tabla 21.

Parámetro	Valor
$Alimento_a \in 1...7, z0$ (kg MS)	700.000

Tabla 21: Parámetros de entrada que se modifican para el Caso 5

La cantidad de alimento disponible en todos los años corresponde a 700.000 kg, lo cual es suficiente para satisfacer el consumo potencial de 100 vacas de tipo 1 (644.819 kg).

La solución obtenida para este caso se resume en la Figura 18 y Tabla 22. Para la presentación de las variables, se conserva la nomenclatura utilizada previamente en el Caso 3: Validación del modelo con recría. Cabe señalar que la cantidad de terneros machos no se incluye explícitamente en los valores reportados, dado que puede inferirse fácilmente a partir de las decisiones de manejo y los parámetros del sistema. El tiempo de resolución registrado por el *solvers* fue de 16 minutos, 37 segundos.

Año	Tipo	Variables			
		CA	CVR	Producción (Lt)	Consumo (kg MS)
1	1	100	0	574.622	644.819
2	1	98	2	666.669	630.701
	2	42	1	0	69.299
3	1	77	21	551.114	495.400
	2	42	0	0	138.601
	3	40	2	0	65.999
4	1	40	37	287.311	257.928
	2	42	0	236.185	267.172
	3	40	0	0	132.001
	4	13	20	0	21.450
	5	13	5	0	21.450
5	1	13	27	88.707	83.826
	2	42	0	286.593	270.824
	3	40	0	229.808	257.899
	4	13	0	0	42.900
	5	13	0	0	42.900
	6	0	17	0	0
	7	0	18	0	0
	8	1	16	0	1.650
6	1	0	13	0	0
	2	42	0	301.677	270.824
	3	40	0	272.945	257.928
	4	13	0	74.701	83.826
	5	13	0	74.701	83.826
	6	0	0	0	0
	7	0	0	0	0
	8	0	1	0	0
	9	0	6	0	0
	10	0	18	0	0
	11	2	15	0	3.300
	12	0	6	0	0
	13	0	6	0	0
7	1	0	0	0	0
	2	42	0	301.677	270.824
	3	40	0	287.311	257.928
	4	13	0	88.707	83.826
	5	13	0	88.707	83.826
	6	0	0	0	0
	7	0	0	0	0
	8	0	0	0	0
	9	0	0	0	0
	10	0	0	0	0
	11	0	2	0	0
	12	0	0	0	0
	13	0	0	0	0
	14	0	0	0	0
	15	0	18	0	0
	16	0	17	0	0
	17	0	6	0	0
	18	0	6	0	0
	19	0	0	0	0
	20	0	0	0	0
	21	0	0	0	0

Tabla 22: Variables obtenidas en el caso 5 utilizando el modelo con recría

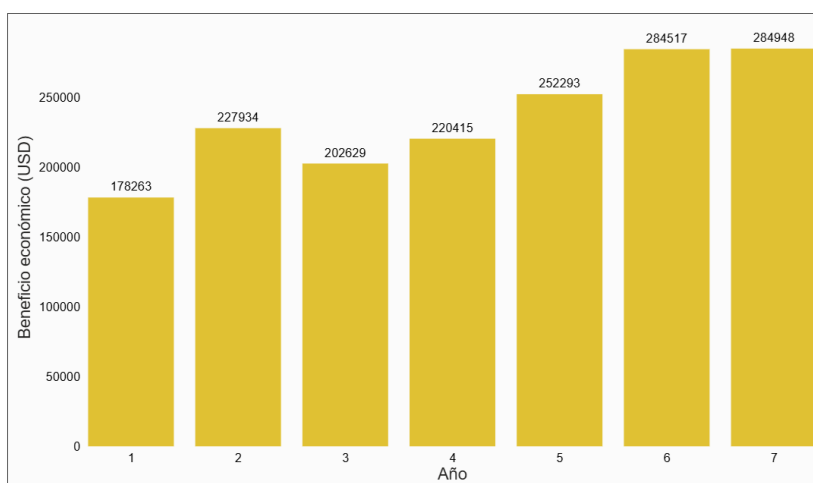


Figura 18: Comparación del beneficio económico anual en el caso 5 utilizando el modelo con recría

Como es de esperarse, en el primer año la estrategia óptima consiste en mantener la totalidad de los animales en el rodeo, dado que la disponibilidad de alimento es suficiente para cubrir el consumo potencial de todos ellos. Esta condición permite aprovechar al máximo la capacidad productiva inicial del sistema, generando el mayor nivel de producción posible con los recursos disponibles.

En el segundo año de la simulación, el modelo opta por vender dos vacas productivas del rodeo. Esta decisión responde a una estrategia de optimización en dos niveles. En primer lugar, al no contar ya con alimento suficiente para cubrir el consumo potencial de todos los animales (dado que se mantienen 42 de las 43 las terneras nacidas en este año), el modelo decide reducir el número de vacas adultas tipo 1. Así, se asegura que las 98 vacas restantes reciban la asignación de MS necesaria para alcanzar su máximo potencial productivo. Esta estrategia contrasta con la alternativa de mantener las 100 vacas originales y distribuir el alimento equitativamente entre todas. Esto introduce que una menor cantidad de vacas bien alimentadas resulta en un rendimiento global superior. El modelo priorizaría la eficiencia en el uso de recursos sobre el simple mantenimiento de un mayor número de animales. Por otro lado, esta decisión también revela una priorización estratégica hacia el largo plazo: el modelo elige vender vacas en plena producción con el fin de alimentar adecuadamente a las terneras, quienes comenzarían a producir en los años siguientes. Esta lógica se refuerza al observar la evolución de la cantidad de vacas tipo 1 en el tiempo, cuya disminución progresiva año tras año indica una tendencia deliberada hacia la renovación del rodeo.

El análisis revela un recambio justificado del rodeo, en el cual la incorporación de vacas jóvenes se compensa progresivamente con el retiro de animales de mayor edad, en función de la disponibilidad de alimento. La Tabla 23 y la Figura 19 ilustran la evolución anual del tamaño total del rodeo y, en particular, de su fracción productiva.

Año	Rodeo total	Rodeo productivo
1	100	100
2	140	98
3	159	77
4	148	82
5	122	95
6	110	108
7	108	108

Tabla 23: Vacas totales y productivas por año

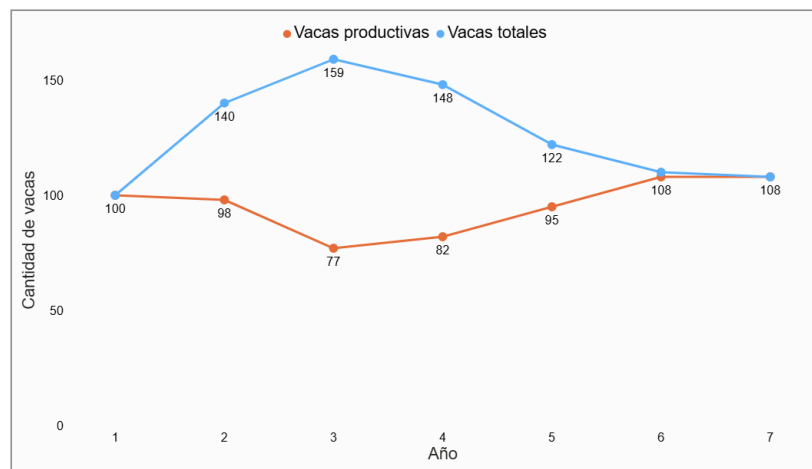


Figura 19: Comparación de cantidad de vacas totales vs productivas

A partir de esta información, se observa que el año con mayor cantidad total de vacas (año 3) coincide con el punto más bajo en cuanto a vacas productivas, lo cual evidencia una fuerte priorización de la alimentación de animales no productivos, apostando a una mayor productividad futura. Otro aspecto relevante es que, a lo largo del período, la cantidad de vacas productivas se mantiene relativamente estable, mientras que la cantidad total del rodeo presenta una variabilidad considerable, la cual alcanza un aumento máximo del 59 % respecto al número inicial.

Análisis de decisiones mediante escenario alternativo

Puede que la decisión estratégica del modelo de reducir el número de vacas en producción para priorizar la alimentación de terneras y vaquillonas con potencial productivo futuro no resulte intuitivo a priori, especialmente en aquellos años en los que las vacas tipo 1 presentan una productividad del 100 % y, sin embargo, el modelo opta por vender la mayoría de ellas. Con el fin de ilustrar y comprender cuantitativamente esta elección, se presenta en la Tabla 24 una comparación de los resultados obtenidos frente a un escenario alternativo en el que se mantiene a las 100 vacas del tipo 1 durante todo el período de análisis. En este contexto, interesa cómo habría sido la producción de leche año a año bajo esta condición. Este nuevo planteo se denomina en adelante como “Caso alternativo 5”. Para llevar adelante esto, se añade la restricción presentada en el Anexo D.

Año	Caso alternativo 5 (L)	Caso 5 (L)	Diferencia (L)
1	574.622	574.622	0
2	682.364	666.669	-15.695
3	718.278	551.114	-167.164
4	718.278	523.496	-194.782
5	682.364	605.109	-77.255
6	215.483	724.024	508.541
7	0	766.403	766.403
Total	3.591.389	4.411.436	820.047

Tabla 24: Producción de leche total por año en el caso 5 utilizando el modelo con recría

La comparación revela una diferencia significativa en la producción total de leche entre ambos escenarios, con una brecha aproximada de 820.000 L a favor del modelo original. Esta diferencia se explica principalmente por el comportamiento productivo decreciente de las vacas madre en los últimos años del período analizado. Si bien estas vacas mantienen una eficiencia relativamente alta durante los primeros años, en el sexto año su rendimiento cae al 30 % debido a que transitan su sexto ciclo de lactancia, y en el séptimo año dejan de producir por completo, aunque continúan generando costos asociados a su alimentación. Este análisis se complementa con la Figura 20, el cual compara la producción de leche anual por vaca productiva entre el caso alternativo y el escenario correspondiente a la solución optimizada.

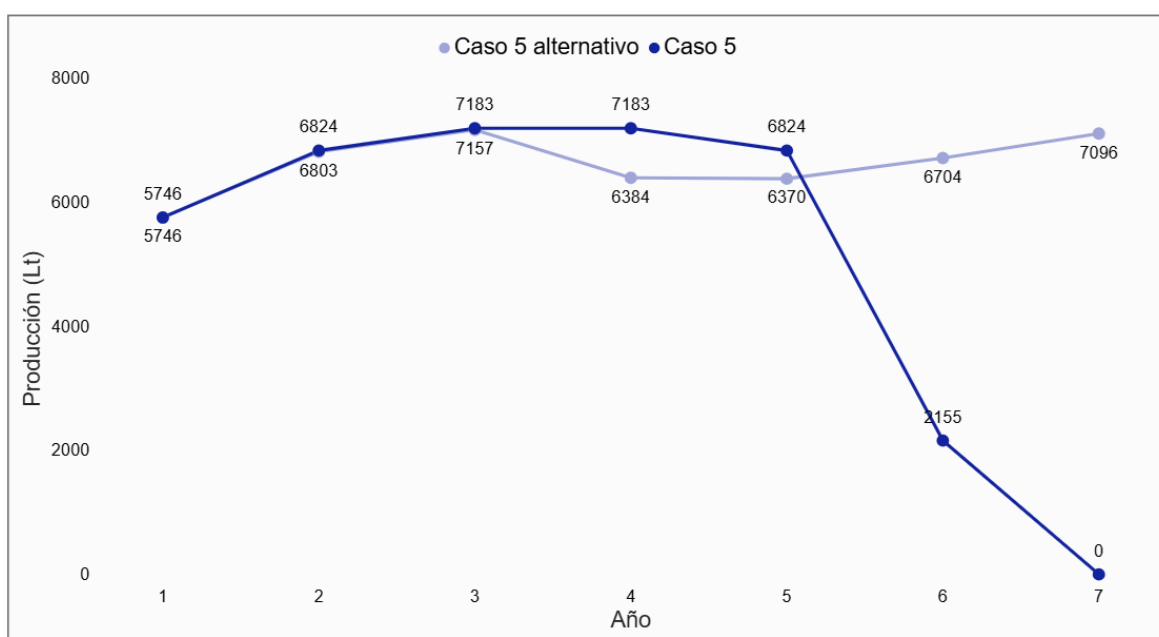


Figura 20: Comparación de la producción anual por vaca productiva

Tanto este gráfico como la Tabla 24 ofrecen una representación visual clara que respalda la decisión de sustituir progresivamente a las vacas madre como estrategia para mejorar la eficiencia global del sistema. Si bien mantener a todas las vacas durante sus años de alta productividad podría implicar un aporte significativo al beneficio total, este efecto positivo se revierte en los últimos años del período, cuando su productividad cae drásticamente y los

costos de mantenimiento no se compensan con la producción generada.

Reflexión final

En conclusión, en el Caso 5 la estrategia óptima parte de aprovechar al máximo la capacidad productiva inicial manteniendo el rodeo completo, y luego evoluciona hacia una renovación progresiva del mismo, priorizando la alimentación de animales jóvenes con alto potencial. Esta decisión, aunque implique reducir vacas productivas en el corto plazo, se traduce en una mayor producción total de leche y eficiencia del sistema en el largo plazo. Este resultado destaca la capacidad del modelo para identificar decisiones no evidentes a simple vista, basadas en una planificación intertemporal eficiente, ajustada a las restricciones estructurales impuestas por la disponibilidad constante de alimento. En definitiva, el modelo demuestra la importancia de pensar a futuro y sostener a lo largo del tiempo una cantidad de vacas productivas relativamente estable, con altos niveles de eficiencia y producción constante.

Caso 6: Aumento progresivo de alimento en modelo con recría

Objetivo y justificación

Este caso simula un escenario con disponibilidad de alimento variable a lo largo del tiempo. Representa conceptualmente una situación de sequía inicial seguida por años de condiciones climáticas favorables. El objetivo es evaluar la capacidad del modelo para anticiparse y adaptarse a estas variaciones, diseñando estrategias de manejo que optimicen el sistema bajo una restricción temporal dinámica de recursos.

Consideraciones particulares

Durante los dos primeros años, el alimento disponible no es suficiente para abastecer el consumo potencial del rodeo inicial de 100 vacas y sus crías. A partir del tercer año, el suministro se vuelve abundante y permite cubrir las necesidades alimenticias de todos los animales que puedan conformar el rodeo en adelante.

Ejecución

Los parámetros del sistema se basan en la Tabla 18, con modificaciones en la disponibilidad de alimento. Los valores modificados se presentan en la Tabla 25.

Parámetro	Valor
$Alimento_{1,z0}$ (kg MS)	400.000
$Alimento_{2,z0}$ (kg MS)	600.000
$Alimento_{a \in 3...7,z0}$ (kg MS)	∞

Tabla 25: Parámetros de entrada que se modifican para el Caso 6

La solución obtenida se resume en la Tabla 26. El tiempo de resolución registrado por el *solvers* fue de 4 segundos.

Año	Tipo	Variables			
		CA	CVR	Producción (L)	Consumo (kg MS)
1	1	100	0	228.934	400.000
2	1	100	0	488.248	529.051
	2	43	0	0	70.949
3	1	100	0	718.278	644.819
	2	43	0	0	141.901
	3	43	0	0	70.949
4	1	100	0	718.278	644.819
	2	43	0	247.087	277.272
	3	43	0	0	141.901
	4	43	0	0	70.949
	5	18	0	0	29.700
5	1	100	0	682.364	644.819
	2	43	0	293.416	277.272
	3	43	0	247.087	277.272
	4	43	0	0	141.901
	5	18	0	0	59.401
	6	43	0	0	70.949
	7	18	0	0	29.700
	8	18	0	0	29.700
6	1	100	0	215.483	644.819
	2	43	0	308.859	277.272
	3	43	0	293.416	277.272
	4	43	0	247.087	277.272
	5	18	0	103.432	116.067
	6	43	0	0	141.901
	7	18	0	0	59.401
	8	18	0	0	59.401
	9	43	0	0	70.949
	10	18	0	0	29.700
	11	18	0	0	29.700
	12	18	0	0	29.700
	13	8	0	0	13.200
7	1	0	100	0	0
	2	43	0	308.859	277.272
	3	43	0	308.859	277.272
	4	43	0	293.416	277.272
	5	18	0	122.825	116.067
	6	43	0	247.087	277.272
	7	18	0	103.432	116.067
	8	18	0	103.432	116.067
	9	0	43	0	0
	10	0	18	0	0
	11	0	18	0	0
	12	0	18	0	0
	13	0	8	0	0
	14	0	43	0	0
	15	0	18	0	0
	16	0	18	0	0
	17	0	18	0	0
	18	0	8	0	0
	19	0	18	0	0
	20	0	8	0	0
	21	0	8	0	0

Tabla 26: Variables obtenidas en el caso 6 utilizando el modelo con recría

En el primer año, aunque las restricciones alimentarias impiden alcanzar el consumo potencial de las 100 vacas del rodeo, el modelo decide conservar la totalidad de los animales. En lugar de vender parte del rodeo para concentrar el consumo en un grupo reducido, estrategia que, según lo observado en el Caso 5: Oferta fija de alimento en modelo con recría, permitiría maximizar la producción lechera individual, se prioriza mantener el tamaño del rodeo. Esta decisión, que implica una producción subóptima en el corto plazo, se justifica por la mejora prevista en la disponibilidad de alimento en los años subsiguientes, permitiendo capitalizar el potencial productivo acumulado del sistema.

En el segundo año, el aumento en la disponibilidad de alimento permite alimentar adecuadamente a las 43 terneras nacidas, por lo que el modelo decide conservarlas. El consumo registrado, de 70.949 kg, coincide con el consumo potencial de estas terneras, cumpliendo así con la restricción de asegurar una recría adecuada. Al mismo tiempo, se sigue manteniendo completo el rodeo adulto. Se observa que al igual que en el año anterior, se consume la totalidad del alimento (siendo 400.000 kg en el primero y 600.000 kg en el segundo), lo que coincide con la relación esperada: un mayor consumo, se traduce en un aumento de la producción lechera. De este modo, el modelo prioriza un uso eficiente del alimento para maximizar el rendimiento productivo. Además, en línea con el aumento en la oferta de alimento, también mejora el consumo relativo de cada vaca: pasa del 62 % al 82 % de su potencial. Esto, sumado a que la eficiencia productiva en el primer año era aún más baja, refuerza la idea de que el año realmente “sacrificado” fue el primero, lo que le da aún más valor a la decisión de haber conservado el rodeo completo en ese momento.

A partir del tercer año, con una oferta de alimento abundante, el modelo opta por conservar tanto las vacas iniciales como todas las crías. Es importante señalar que muchas de las terneras y vaquillonas nacidas a partir del año 6 no alcanzan a producir leche dentro del período simulado, pero aun así son mantenidas en el sistema. Esta decisión se justifica porque el excedente alimenticio permite cubrir su consumo potencial durante la recría, permitiendo a su vez un incremento del PV y, por ende, un mayor valor de venta como animales recién nacidos.

Análisis de decisiones mediante escenario alternativo

Para validar la estrategia obtenida, se plantea un escenario alternativo denominado “Caso alternativo 6”, en el cual se fuerza al modelo a alcanzar el consumo potencial de los animales que se mantienen en el rodeo, durante los dos primeros años. El objetivo de esta simulación es analizar por qué, en los primeros años donde había escasez de alimento, la decisión de mantener el rodeo completo, aunque implique un consumo por debajo del potencial, puede ser más beneficiosa que reducir su tamaño para alimentar a un grupo menor con eficiencia máxima. Las modificaciones implementadas para configurar este escenario se detallan en el Anexo D. En este caso alternativo, el modelo opta por conservar únicamente 62 vacas del tipo 1, cantidad para la cual puede cubrirse el consumo potencial con los 400.000 kg de alimento disponibles en el primer año. Sin embargo, esta estrategia, que maximiza la producción individual en el corto plazo, limita severamente la capacidad de expansión del rodeo en los años subsiguientes. Como resultado, el beneficio económico total alcanzado es de 1.547.960 USD, considerablemente inferior al obtenido en el caso original (2.267.940 USD), siendo un 68 % del mismo. Esto evidencia que, ante una mejora futura en la disponibilidad de alimento, resulta más rentable sostener el tamaño del rodeo aun sacrificando momentáneamente eficiencia productiva, ya que se preserva el capital biológico necesario para aprovechar el entorno favorable en los años posteriores.

A modo de ilustrar la diferencia en la capacidad de producción entre el Caso 6 y el Caso alternativo 6, se presenta la Figura 21, el cual compara los valores totales de producción lechera para cada año.

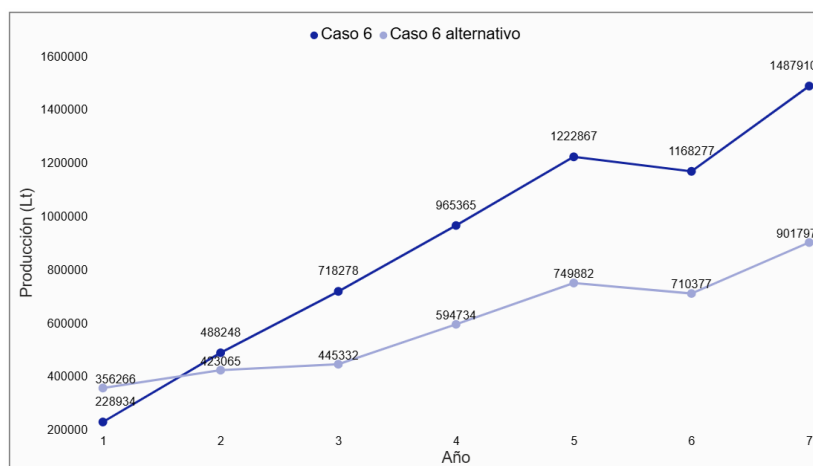


Figura 21: Comparación de producción de leche anual

En la Figura 21 se evidencia que, en el primer año, el escenario alternativo (que implica alcanzar la producción máxima mediante el mantenimiento de únicamente 62 vacas) genera una producción superior en comparación con el caso original. Esta ventaja se revierte rápidamente, y la brecha en la producción lechera entre ambos casos se amplía año tras año. Mantener un rodeo numeroso en los años iniciales, a pesar de las restricciones, optimiza el aprovechamiento de recursos cuando se prevé que estos se volverán más abundantes. En este sentido, ya en el segundo año se evidencia una desventaja importante en el caso alternativo: al haberse conservado sólo 62 vacas en el primer año, su consumo no puede superar el potencial (399.788 kg), lo que genera un excedente de 200.212 kg de alimento que no se utiliza y, por lo tanto, representa una pérdida de producción. Ese volumen podría haberse destinado a mantener más vacas y así aumentar la producción total. Además, dado que en el modelo la posibilidad de recría y recambio del rodeo depende exclusivamente del rodeo inicial, la venta de vacas en períodos de escasez no sólo reduce la cantidad de animales en producción en los años siguientes, sino que también limita el número de nacimientos. Esto impacta negativamente en la cantidad de terneros disponibles para la venta (tanto machos como hembras) y restringe el crecimiento del rodeo. Como consecuencia, se reduce la cantidad de vacas productivas en los años de mayor disponibilidad de recursos y se dificulta el recambio necesario para reemplazar a los animales que, con el tiempo, disminuyen su eficiencia productiva.

Reflexión final

El análisis demuestra que vender vacas durante períodos de escasez, cuando se prevé una mejora futura en la oferta de alimento, puede ser una estrategia perjudicial. El modelo revela que conservar el rodeo, incluso a costa de una eficiencia reducida en el corto plazo, permite capitalizar mejor los recursos futuros y lograr mayores beneficios económicos en el largo plazo. Este resultado destaca la importancia de planificar con una perspectiva de largo plazo, priorizando la estabilidad productiva y la sostenibilidad del sistema por sobre rendimientos inmediatos.

Caso 7: Alternativas de alimentación con distinto costo en modelo con recría

Objetivo y justificación

Este caso de prueba busca analizar cómo se comporta el modelo frente a una situación en la que las pasturas disponibles no alcanzan para alimentar a todas las vacas del rodeo a un nivel de consumo potencial, como podría suceder en un período prolongado de sequía. En este contexto, se plantea la posibilidad de complementar la alimentación con suplementos, que

aportan más energía pero también son mucho más costosos. El objetivo es ver qué decisión toma el modelo ante estas dos alternativas: usar sólo las pasturas o incorporar suplementos para cubrir lo faltante. Con esto, se pretende estimar el impacto económico de cada opción, lo cual es especialmente relevante cuando hay incertidumbre sobre la disponibilidad de recursos. A su vez, se busca entender si vale la pena asumir ese costo extra en suplementos a cambio de una mayor producción de leche.

Consideraciones particulares

Para representar adecuadamente el caso, se incorpora una segunda zona de alimentación ($z1$), además de la ya considerada en los casos anteriores ($z0$). La zona $z0$ representa áreas con oferta de pastura limitada, mientras que $z1$ simboliza el uso de suplementos como fuente alternativa de alimento. Esta nueva zona permite cubrir por completo las necesidades nutricionales del rodeo durante todo el período analizado, aunque lo hace exclusivamente mediante suplementos. De este modo, el modelo debe elegir entre dos fuentes de alimento con características diferenciadas: $z0$, con pasturas de menor densidad energética (1,45 Mcal/kg) y menor costo relativo (20 %), y $z1$, con suplementos más energéticos (1,65 Mcal/kg) pero significativamente más costosos (80 %).

Dado que la incorporación de una nueva zona al sistema incrementa significativamente el tamaño del problema, superando la capacidad de procesamiento del *solvers* utilizado, se opta por reducir el horizonte de planificación a 5 años. Esta modificación no compromete la capacidad de análisis del caso. Como consecuencia, cabe destacar que al finalizar dicho período, la cantidad máxima de tipos de vaca presentes en el sistema se reduce a 8. Las particularidades de las zonas consideradas se detallan en la Tabla 27.

Parámetro	$z0$	$z1$
Calorías (Mcal/kg MS)	1,45	1,65
Porcentaje de costo	0,2	0,8
Distancias (Km)	1	0
Alimento (kg MS)	400.000	∞

Tabla 27: Parámetros de entrada que se modifican para el Caso 7

Ejecución

La solución que brinda el modelo computacional se resume en la Tabla 28. El tiempo de resolución registrado por el *solvers* fue de 2 horas, 6 minutos. Cabe aclarar, que en caso de utilizar un horizonte de planificación de 7 años, el tiempo insumido supera las 8 horas, generando un time out en el servidor.

Año	Tipo	Variables			
		CA	CVR	Producción (Lt)	Consumo (kg MS)
1	1	100	0	629.018	644.819
2	1	100	0	757.332	644.819
	2	43	0	0	70.949
3	1	100	0	806.125	644.819
	2	43	0	0	141.901
	3	0	43	0	0
4	1	100	0	819.526	644.819
	2	43	0	281.917	277.272
	3	0	0	0	0
	4	0	43	0	0
	5	0	18	0	0
5	1	100	0	778.550	644.819
	2	43	0	334.776	277.272
	3	0	0	0	0
	4	0	0	0	0
	5	0	0	0	0
	6	0	43	0	0
	7	0	18	0	0
	8	0	0	0	0

Tabla 28: Variables obtenidas en caso 7 utilizando el modelo con recría

A partir del análisis de estos resultados, se observa que la estrategia más eficiente consiste en adoptar un enfoque intermedio entre utilizar únicamente la zona de pasturas o únicamente de suplementos: consumir la mayor cantidad posible de alimento proveniente de pasturas y complementar únicamente con suplementos cuando sea necesario. A continuación se detallan las decisiones tomadas.

El modelo decide mantener constantes las 100 vacas del tipo 1 durante los cinco años del horizonte de planificación, es decir, durante sus cinco ciclos de lactancia. Asimismo, incorpora y mantiene 43 vacas del tipo 2 desde su nacimiento hasta completar también su último ciclo productivo. En todo momento, se cumple con el consumo potencial de ambos tipos. Como se trabaja con un único lote y el consumo total supera los 400.000 kg de MS disponibles en la zona de pasturas (z_0), el modelo recurre todos los años al uso combinado de ambas fuentes de alimento: pasturas y suplementos. En todos los casos, se observa una tendencia clara: la zona z_0 , de menor costo y menor densidad energética, se agota primero; luego, el modelo complementa la ración con suplementos de la zona z_1 , que presentan un mayor costo y un mayor valor nutricional. Este comportamiento sugiere que el modelo prioriza, en primera instancia, la utilización de la fuente de alimento con menor costo absoluto. No obstante, la elección final parece estar influida por una combinación de factores, entre ellos el costo por unidad y el contenido energético. En este caso, esa combinación favorece a las pasturas. Sin embargo, si en otro escenario los suplementos ofrecieran un mayor aporte nutricional a un costo que resultara relativamente más conveniente, el modelo podría inclinarse por su uso preferente. Por tanto, la asignación entre zonas no responde únicamente al precio o al valor nutricional de forma aislada, sino a una relación más compleja entre ambos elementos. Esto se explica por el impacto económico que tiene cada fuente de alimento, como se detalla en el siguiente análisis comparativo.

Se toma como referencia a una vaca del tipo 1 durante todo el año que dura su tercer ciclo de lactancia (es decir, en su máxima eficiencia), la cual alcanza su consumo potencial anual de 6.448 kg de MS.

- Si se considera la zona z_0 , el costo asociado es de 516 USD, y su producción de leche asociada es de 7.183 L anuales. Lo que implica una ganancia de 2.357 USD.
- Si lo comparamos con un consumo en la zona z_1 , se tiene un costo asociado de 2.064 USD, y su producción de leche asociada es de 8.969 L, lo cual implica una ganancia de 1.524 USD.

A pesar del mayor rendimiento productivo, el mayor costo de los suplementos reduce significativamente la rentabilidad, por lo que alimentar con pasturas resulta más beneficioso desde el punto de vista económico.

Si se ejecuta un análisis en términos del recambio realizado, sólo se incrementa el tamaño del rodeo en el segundo año. Las vacas nacidas en el tercer año alcanzarían a tener un sólo ciclo de lactancia antes de finalizar el período de análisis. A diferencia de lo observado en el Caso 3: Validación del modelo con recría, donde el modelo opta por mantener a estos animales cuando los costos de alimentación lo permiten, en este escenario los altos costos de los suplementos hacen que el beneficio generado por un único año productivo no justifique su incorporación al sistema. Además, el modelo determina que no resulta rentable mantener animales destinados al engorde y venta posterior. Aunque las terneras podrían alimentarse en parte con pasturas (z_0) y en parte con suplementos (z_1), al considerar el escenario más desfavorable (en el que el consumo se cubre exclusivamente con suplementos), se entiende la lógica detrás de la decisión de no realizarlo. Una vaquillona de 366,67 kg (a los dos años de edad) podría venderse por aproximadamente 733 USD. Sin embargo, si su alimentación proviene únicamente de z_1 , el costo asciende a 528 USD (considerando un consumo total de 1.650 kg de MS). Esto implica una pérdida económica directa y, además, resulta menos conveniente que vender a la ternera al nacer, cuyo valor alcanza los 367 USD.

Reflexión final

En resumen, el comportamiento del modelo valida su capacidad para discriminar entre distintas estrategias de alimentación según su rentabilidad relativa. A su vez, este caso destaca la importancia de realizar un análisis cuidadoso de los costos y del aporte energético de cada fuente de alimento, ya que decisiones aparentemente productivas pueden resultar económicamente ineficientes si no se consideran en un marco integrado de planificación.

Caso 8: Análisis del impacto de la posibilidad de retiro de vacas que aporta el modelo con recría

Objetivo y justificación

El octavo caso de prueba tiene como propósito hacer hincapié en una de las diferenciaciones que presenta el modelo con recría respecto a los modelos existentes. En particular, se busca destacar la incorporación de la posibilidad de retirar animales del rodeo según las condiciones del sistema.

Consideraciones particulares

Se plantean dos versiones del modelo con recría: una que no permite la reducción de animales en el rodeo, denominada “estática” (Versión (i)), y otra que sí lo hace, definida como “dinámica” (Versión (ii)). En ambos casos, se excluye la posibilidad de incorporar nuevos animales al rodeo. Para desarrollar estas versiones, se consideran ciertos cambios y adaptaciones al modelo con recría, los cuales se detallan en la Sección Anexo D.

Con el objetivo de analizar cómo la cantidad de alimento disponible influye en la determinación del tamaño óptimo del rodeo, se diseñó un escenario donde la oferta alimentaria resulta insuficiente para cubrir el consumo potencial del rodeo, lo que permite observar cómo el mo-

delo dinámico ajusta estratégicamente la cantidad de animales en función de las restricciones alimentarias y de la rentabilidad proyectada para el sistema.

Ejecución

Se ejecutaron las Versiones (i) y (ii) del modelo con recría presentando alimento insuficiente para cubrir con el consumo potencial de todos los animales del rodeo. Se presentan las modificaciones de los parámetros respecto a la Tabla 18, en la Tabla 29. El tiempo de resolución registrado por el *solvers* fue de 2 segundos para ambas Versiones.

Parámetro	Valor
<i>CantAnos</i>	5
<i>CantTiposVacas</i>	1
<i>Alimento_{a ∈ 1...5,z0}</i> (kg)	400.000

Tabla 29: Parámetros de entrada que se modifican para el Caso 8

Los resultados muestran diferencias notables, tanto en producción como en beneficio. En la Versión (ii), el modelo decide conservar solo 62 vacas y vender las 38 restantes, generando así un beneficio total un 90 % superior al de la Versión (i), como se muestra en la Figura 22.

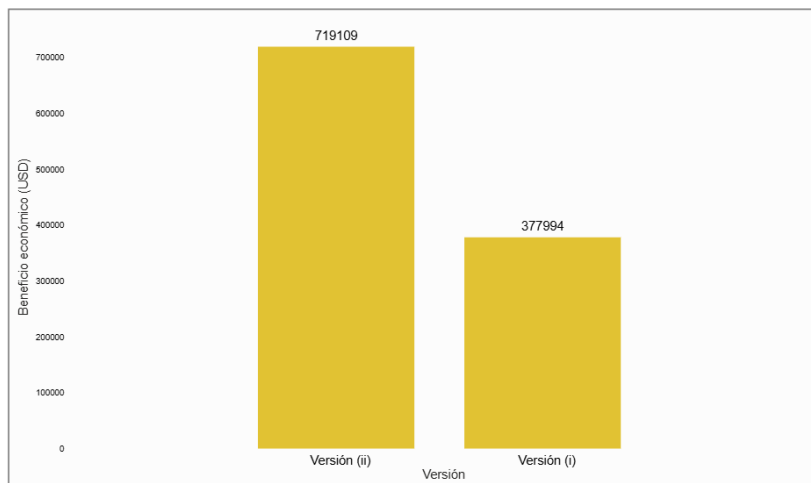


Figura 22: Comparación de beneficio económico entre las Versiones (i) y (ii)

A pesar de consumirse prácticamente la misma cantidad de alimento (400.000 kg en la Versión (i) y 399.788 kg en la Versión (ii)), la producción de leche es significativamente mayor en la versión dinámica, como se puede observar en la Tabla 30.

Año	Producción de leche en la Versión (i) (lt)	Producción de leche en la Versión (ii) (lt)
1	228.934	356.266
2	271.859	423.065
3	286.167	445.332
4	286.167	445.332
5	271.859	423.065
Total	1.344.986	2.093.060

Tabla 30: Producción de leche anual según la versión del modelo

Esto se explica por el consumo individual de alimento: en la Versión (i), el alimento se distribuye entre 100 vacas, lo que genera un consumo anual de 4.000 kg por vaca; en la Versión (ii), el consumo de 399.788 kg se distribuye entre 62 vacas, lo que se traduce en un consumo anual de 6.448 kg por vaca, coincidiendo con el consumo potencial. Esto se adelantaba en el Caso 5: Oferta fija de alimento en modelo con recría, y demuestra que frente a una situación de escasez de alimento, es preferible alimentar al máximo a un grupo reducido de animales, en lugar de repartir el alimento entre todos, disminuyendo así el rendimiento individual.

Respecto a los resultados, el mayor beneficio obtenido mediante la posibilidad de disminuir el rodeo se debe a tres factores principales. Por un lado, se tiene una mayor producción de leche en cada uno de los años, y por lo tanto mayor ganancia asociada a la producción de litros de leche; luego, la cantidad de alimento consumido es menor en todos los años, lo que implica una reducción de costos; y por otro lado, se añade el ingreso adicional generado por la venta de las vacas descartadas.

Reflexión final

El análisis de este escenario permite destacar dos conclusiones centrales. En primer lugar, se evidencia el valor del modelo dinámico con recría, al incorporar flexibilidad para ajustar el tamaño del rodeo. Esta capacidad, particularmente la posibilidad de descartar animales cuando el alimento es insuficiente, permite adoptar decisiones más eficientes y adaptadas al entorno. En la práctica, este tipo de análisis suele pasarse por alto, y es frecuente mantener o incluso aumentar el número de vacas sin considerar su impacto sobre la eficiencia del sistema. En segundo lugar, los resultados confirman que, ante restricciones alimentarias constantes, es más conveniente mantener un rodeo reducido pero bien alimentado, que repartir el alimento entre un mayor número de animales con bajo rendimiento. Esta estrategia permite que cada vaca exprese su potencial productivo, lo que incrementa la eficiencia y el beneficio económico total, incluso con igual cantidad de alimento disponible. En este sentido, el modelo también aporta información clave para la toma de decisiones: el productor puede optar entre ajustar el tamaño del rodeo o aumentar la disponibilidad de alimento. En conjunto, estos hallazgos consolidan al modelo como una herramienta analítica útil para respaldar decisiones de manejo más racionales.

5. Conclusiones y trabajo futuro

Conclusiones

La correcta planificación de la recría y el recambio generacional en sistemas lecheros es un desafío complejo, que requiere considerar múltiples variables técnicas, económicas y biológicas. Entre ellas se destacan, y fueron contempladas en el desarrollo de este trabajo, la disponibilidad y el costo de los recursos alimenticios, la estructura del rodeo, la tasa de descarte, el momento del primer parto, el ciclo productivo de lactancia, la capacidad de manejo del sistema, la asignación eficiente de recursos según la etapa de vida, y la estrategia de recambio basada en el potencial productivo futuro. En este contexto, se propuso el desarrollo y validación de un modelo de optimización que integre explícitamente la recría dentro del proceso de planificación estratégica de los sistemas lecheros.

Para alcanzar los objetivos planteados, se adoptó un enfoque metodológico basado en el desarrollo incremental de modelos matemáticos. Primero, se formuló un modelo base centrado en la asignación de recursos alimenticios para maximizar la producción de leche; luego, se avanzó hacia un modelo que incorporó precios y costos explícitos para maximizar el beneficio económico; finalmente, se desarrolló el modelo con recría, integrando el ciclo de vida completo de los animales, sus transiciones entre categorías, y las decisiones vinculadas a alimentación, reemplazo e ingresos al sistema. Este enfoque incremental facilitó la validación progresiva, garantizar que el modelo desarrollado sea teóricamente sólido, computacionalmente eficiente y aplicable en la realidad productiva de los sistemas lecheros.

La formulación final del modelo con recría incluyó variables de decisión vinculadas al ingreso anual de terneras mediante recambio interno y a la asignación de alimento para cada categoría animal según su etapa de desarrollo. El modelo representa de forma integrada el ciclo completo de vida de los animales, desde las terneras hasta las vacas multiparas, considerando tanto los ingresos como los egresos del sistema, ya sea por descarte o venta. Esta estructura permitió determinar, en cada año, las decisiones óptimas en relación con la recría, el uso eficiente de los recursos alimenticios y la dinámica del recambio, respetando las restricciones biológicas y operativas del sistema. Su principal fortaleza radica en haber incorporado una visión sistémica que articula simultáneamente las decisiones productivas, nutricionales y económicas, posibilitando la simulación de escenarios futuros y la planificación a largo plazo. No obstante, se constató que los tiempos de ejecución varían de forma considerable dependiendo de las características del sistema a simular así como del tamaño del problema. Esta observación refuerza la importancia de considerar la viabilidad técnica junto con la validez teórica del modelo, especialmente al aplicarlo en escenarios de mayor complejidad o largo plazo.

Para validar el comportamiento del modelo, se diseñaron una serie de casos de prueba contruidos a partir de datos representativos de sistemas reales. Estos permitieron analizar el impacto de distintas estrategias de manejo frente a escenarios caracterizados por restricciones o abundancia de recursos, así como por variaciones en el tamaño del rodeo, la calidad del alimento disponible y las posibilidades de descarte. En un contexto sin restricciones, el modelo generó estructuras productivas eficientes y beneficios crecientes a lo largo del tiempo. También se destacó la capacidad del modelo para aprovechar estrategias complementarias como el engorde para venta, que solo resultan viables cuando existe una mayor flexibilidad operativa. Esto refuerza su utilidad para explorar decisiones no evidentes en contextos de mayor escala o largo horizonte de planificación. Ante limitaciones operativas en la capacidad de manejo de animales, se observó que, con capacidades bajas, se prioriza a los animales con retorno inmediato, mientras que al aumentar la capacidad se diversifica el rodeo incorporando categorías jóvenes. Esto sugiere que una mayor capacidad de manejo otorga mayor flexibili-

dad para planificar estratégicamente el rodeo en el largo plazo. Sin embargo, los beneficios adicionales tienden a disminuir a medida que se incrementa esa capacidad, lo que plantea la necesidad de evaluar si el aumento en escala se justifica frente al retorno económico marginal que genera. En condiciones de oferta alimenticia fija, se optó por una renovación progresiva del rodeo, con menor cantidad de vacas productivas a corto plazo pero mayor eficiencia global en el largo plazo. Frente a aumentos graduales en la disponibilidad de alimento el modelo priorizó conservar animales aún en condiciones subóptimas, para capitalizar el entorno favorable posterior. En contextos de escasez prolongada, se observó que alimentar en su potencial a un grupo reducido de vacas resulta más rentable que sostener un rodeo amplio con dietas limitadas. Ante la inclusión de suplementación alimenticia, el modelo indicó la importancia de evaluar el aporte energético de dicha suplementación y el incremento en la producción láctea asociado, en relación con los costos involucrados, para definir el tamaño óptimo del rodeo y la asignación adecuada de recursos. Por último, se observó que alimentar en su potencial a un grupo reducido de vacas resulta más rentable que sostener un rodeo amplio con consumo limitado. Los resultados obtenidos mostraron que el modelo logra representar adecuadamente la dinámica de los sistemas lecheros, permitiendo analizar compromisos entre eficiencia técnica y rentabilidad económica. Su flexibilidad lo hace aplicable a diversos tamaños de establecimiento, niveles de recursos y contextos productivos, y sus resultados se correspondieron con la lógica y condiciones de la realidad lechera uruguaya. En conjunto, el modelo con recría constituye una herramienta robusta para la simulación de distintos escenarios, el análisis de los mismos y la posterior toma de decisiones estratégicas en el sector.

En términos generales, se concluye que los objetivos planteados en este trabajo fueron cumplidos satisfactoriamente. El modelo desarrollado constituye un aporte valioso para la toma de decisiones en sistemas lecheros, al integrar de forma estructurada y cuantitativa la etapa de recría dentro de la planificación global. Su aplicación permite anticipar las consecuencias de distintas estrategias de reemplazo, evaluar escenarios diversos y tomar decisiones informadas que promuevan la sostenibilidad, la eficiencia y la competitividad del sector.

Trabajo futuro

A partir de las fortalezas y limitaciones identificadas en el modelo desarrollado, así como de los diversos comentarios y aportes recopilados a lo largo de este proyecto, se plantean a continuación las principales líneas de trabajo futuro.

Un desafío relevante consiste en abandonar la suposición de que el tambo cierra al final del horizonte de análisis. En la práctica, los sistemas lecheros operan de forma continua y las decisiones de reposición se toman dinámicamente. Esta simplificación del modelo impide valorar adecuadamente el potencial de los animales nacidos en los últimos años, ya que al no proyectarse más allá, su retorno productivo no es considerado, lo que puede llevar a decisiones subóptimas. Frente a esta limitación, se plantean dos posibles mejoras: extender el horizonte de simulación y descartar los últimos años para evitar el efecto frontera, o bien desarrollar un modelo alternativo que permita resolver este problema y considerar el valor futuro de dichos animales.

Otra oportunidad de mejora es permitir la incorporación de animales comprados en el mercado, ya sean vacas adultas, vaquillonas o terneras. Actualmente, el modelo solo contempla reposición interna, lo cual limita su realismo y flexibilidad. En la práctica se cuenta con la posibilidad de la compra de animales para cubrir descartes imprevistos, mejorar la genética o ajustar el tamaño del rodeo. Incluir esta opción permitiría analizar en qué situaciones conviene recurrir a la reposición externa y cómo impacta en la eficiencia del sistema.

A su vez resulta pertinente incorporar restricciones que aseguren un mínimo anual de vacas en producción. Este tipo de condición contribuiría a evitar caídas abruptas en la productividad

interanual y a fomentar soluciones más estables y sostenidas en el tiempo, lo cual adquiere especial relevancia al considerar la variabilidad que puede surgir entre distintos escenarios de planificación.

Asimismo, es aconsejable adaptar el modelo sin asumir valores fijos para ciertos parámetros, como la tasa de preñez y la proporción de terneros machos y hembras nacidos. En la práctica, estos valores pueden variar entre años y entre tambos, por lo que considerarlos como variables aleatorias permitiría representar mejor la realidad y obtener resultados más precisos. Asimismo, se utilizó una simplificación para considerar los valores de PV, en la cual éstos no dependen del alimento consumido. Sin embargo, incluir esta relación sería un aspecto interesante a incorporar en futuras versiones.

Existen otros factores relevantes que no fueron considerados en esta versión del modelo y que podrían incorporarse a futuro. Por ejemplo, la estacionalidad climática afecta la disponibilidad de forraje y, en consecuencia, los requerimientos de suplementación, por lo que sería conveniente que la oferta alimenticia varíe según la época del año. Además, si bien el modelo actual asume que los terneros machos se venden al nacer, podría contemplarse la posibilidad de mantenerlos para engorde y venta posterior. Por último, aspectos como la mortalidad y enfermedades del rodeo, el estado de la caminería y el estrés térmico también inciden en la productividad, los costos y el bienestar animal, y su inclusión permitiría una representación más realista del sistema.

También cabe destacar que el modelo asume que todos los partos ocurren en un mismo momento del año, lo que implica que las vacas atraviesan simultáneamente sus etapas de lactancia, sequía y parto. Si bien esta situación es una simplificación válida de la realidad operativa, puede darse que los nacimientos se distribuyan a lo largo del año. Incorporar esta variabilidad en futuros desarrollos permitiría representar de forma más realista la dinámica del rodeo, reflejando diferencias en los ciclos de lactancia, la demanda nutricional, la producción de leche y la disponibilidad de animales en distintos estados productivos.

Por otra parte, a medida que se incrementa la complejidad del modelo se evidencian limitaciones en los tiempos de cómputo y el uso de recursos. En este sentido, una línea de trabajo futuro consiste en explorar la ejecución del modelo en servidores con mayor capacidad computacional. Esto permitiría ampliar el rango de escenarios simulables y facilitar su aplicación práctica en contextos reales.

Finalmente, la sostenibilidad ambiental y el bienestar animal son aspectos que cobran cada vez más importancia en la producción lechera. En futuras versiones del modelo, podría considerarse una ampliación de la función objetivo que incluya indicadores como emisiones de metano, consumo de agua y condiciones de bienestar animal. Esto permitiría evaluar no solo la rentabilidad económica, sino también el impacto ambiental y social del sistema. Incorporar estos criterios ayudaría a ofrecer al productor distintas alternativas de manejo que contemplen un equilibrio entre eficiencia y sostenibilidad.

Bibliografía

- [1] Acosta, Y. (2009). Conceptos sobre alimentación de ganado de carne y leche. *Revista INIA*, (17), 6-9.
- [2] AgroAvances. (2021). Forrajes conservados, alternativa rentable para época de climas extremos.
- [3] Aguerre, M., & Chilbroste, P. (2018). Análisis nutricional y manejo de la alimentación en predios lecheros: ¿Hay oportunidades de mejoras? *Jornada de Bovinos*, 2018, 137–147.
- [4] Aguerre, M., Fernández, E. (2010). Campos de recría en el Uruguay: gestión de los recursos y formas contractuales. *Agrociencia Uruguay*, 14(2), 66–76.
- [5] Amaran, S., Sahinidis, N.V., Sharda, B., & Bury, S.J. (2015). Simulation optimization: a review of algorithms and applications. *Annals of Operations Research*, 240(1), 351–380.
- [6] Amaro Echeverría, N., & Ferreira Bica, A. (2020). Reducción en el número de ordeñes al inicio de la lactancia en vacas Holando primíparas: efectos sobre el consumo, la productividad y el status energético. Tesis de grado, Facultad de Veterinaria, Universidad de la República.
- [7] Andregnette Karlén, D. (2013). Alternativas de alimentación para recría de vaquillonas de tambo en Uruguay. Universidad de la República, Facultad de Agronomía.
- [8] ANPL. (2024). Agenda de Desarrollo del Sector Lechero 2025-30. Asociación Nacional de Productores de Leche (ANPL).
- [9] Arronis Díaz, V. (2023). Recomendaciones sobre sistemas intensivos de producción de carne: estabulación, semiestabulación y suplementación estratégica en pastoreo. Ministerio de Agricultura y Ganadería de Costa Rica.
- [10] Artelys. (2019). Knitro Integrated Package – User’s Manual. Recuperado de <https://www.artelys.com/app/uploads/2019/04/knitro-integrated-package.pdf>. Último acceso: julio de 2025.
- [11] Ben-Belhassen, B., Matthey, H., Araujo Enciso, S. R., et al. (2024). OECD-FAO agricultural outlook 2024-2033: Dairy and dairy products. *OECD-FAO Agricultural Outlook*, 7, 178-189.
- [12] Barboza, N. (2024). Cadena láctea: situación y perspectivas. Anuario OPYPA, Oficina de Programación y Política Agropecuaria, Ministerio de Ganadería, Agricultura y Pesca (MGAP).
- [13] CAFRE. (2024). Rearing the 2025 heifer: management and feeding of dairy herd replacements. Council for Agriculture, Food and Rural Environment.
- [14] Cajarville, C., Repetto, J. L., & Astigarraga, L. (2012). Uso de la cebada como recurso forrajero en la alimentación de rumiantes. *Anuario de Producción Animal*, 35, 35-39.
- [15] Cajarville, C., Mendoza, A., Santana, A., & Repetto, J. L. (2012). En tiempos de intensificación productiva: ¿Cuánto avanzamos en el conocimiento de los nuevos sistemas de alimentación de la vaca lechera? En *Veterinaria* (Montevideo), 48(Suppl. 1), 35–40. IV Congreso de la Asociación Uruguaya de Producción Animal, Sociedad de Medicina Veterinaria del Uruguay.

- [16] Castro, P. M. (2018). Recent advances in optimization techniques for process design under uncertainty. *Optimization and Engineering*, 19(3), 723–755.
- [17] Centro de Comercio Internacional. (2014). Uruguay: Perspectivas Empresariales. Serie del ITC sobre Medidas No Arancelarias. Recuperado de <https://www.intracen.org/media/11043>. Último acceso: julio de 2025.
- [18] Chen, L., Thorup, V. M., Kudahl, A. B., Østergaard, S. (2024). Effects of heat stress on feed intake, milk yield, milk composition, and feed efficiency in dairy cows: A meta-analysis. *Journal of Dairy Science*, 107(12), 3207–3218.
- [19] Chilibroste, P. (1998). Fuentes comunes de error en la alimentación del ganado lechero en pastoreo: II. Balance de nutrientes. Facultad de Agronomía, EEMAC, Universidad de la República, Uruguay.
- [20] Chilibroste, P., Soca, P., Bentancur, O., & Mattiauda, D. A. (2010). Estudio de la conducta en pastoreo de vacas Holando de alta producción: síntesis de 10 años de investigación sobre la relación planta-animal-suplemento en la Facultad de Agronomía – EEMAC. Facultad de Agronomía, Universidad de la República, EEMAC.
- [21] Chilibroste, P. (2021). A major challenge for the Uruguayan dairy industry: sustainable growth. *Agrociencia Uruguay*, 25(2), e970.
- [22] Correa Llovet, M., & D’Avís Velázquez, J. A. (2021). Efecto del control de la alimentación y el ambiente productivo sobre la producción y composición de leche de vacas lecheras de parición otoñal en lactancia media. Tesis de grado, Universidad de la República, Facultad de Agronomía. Montevideo, Uruguay.
- [23] Davarnia, D., Rajabalizadeh, A., & Hooker, J. (2021). Achieving consistency with cutting planes. *Annals of Operations Research*, 304, 69–91.
- [24] Delucchi, M.I., Lamas, D., Viñoles, F., De Torres, E., Ríos, C., Carro, S. (2008). Guía de buenas prácticas agrícolas (BPA) para la producción de leche de calidad. Boletín de Divulgación Técnica N° 93, INIA.
- [25] Dirección General Impositiva (DGI). (2024). Valores de semovientes, lana y cultivos en proceso al 30 de junio de 2024. Consultado en enero de 2025, de <https://www.gub.uy/direccion-general-impositiva/comunicacion/publicaciones/valores-semovientes-lana-cultivos-proceso-30-junio-2024>
- [26] Dirección de Estadísticas Agropecuarias (DIEA). (2020). Estadísticas del sector lácteo 2019 (Serie Trabajos Especiales N° 363). Ministerio de Ganadería, Agricultura y Pesca (MGAP), con cooperación técnica de INALE.
- [27] Doncel, B., Lemaire, C., Fariña, S., Pla, M., Vidal, E., Riet-Correa, F. y Giannitti, F. (2023). Descarte de vacas en rodeos lecheros. *Revista INIA*, (72), 31–35. Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria (INIA).
- [28] Dutour, E. J. y Melucci, L. M. (2010). Asociación entre parámetros productivos y reproductivos de vacas lecheras de acuerdo al sistema de producción. *Archivos Latinoamericanos de Producción Animal*, 18(3–4), 133–147.
- [29] Ehsan, A., Yang, Q. (2018). Optimal integration and planning of renewable distributed generation in the power distribution networks: A review of analytical techniques. *Applied Energy*, 210, 44–59.

- [30] Eşki, F., Kurt, S. (2021). Effect of lactation number on milk yield in Holstein dairy cows. *Turkish Journal of Veterinary Research*, 5(1), 1–4.
- [31] Farina, S. (2016). Desafíos futuros para los sistemas de producción de leche de Uruguay. *Jornadas Uruguayas de Buiatría*, 2016, 65–69.
- [32] Fariña, S. R., Chilbroste, P. (2019). Oportunidades y desafíos para el crecimiento de la producción de leche a pasto en Uruguay. *Engormix*.
- [33] Fernández Fernández, E., Martínez Hernández, J. A., Martínez Suárez, V., Moreno Villares, J. M., Collado Yurrita, L. R., Hernández Cabria, M., Morán Rey, F. J. (2015). Documento de consenso: importancia nutricional y metabólica de la leche. *Nutr Hosp*, 31(1), 92-101.
- [34] Food and Agriculture Organization of the United Nations (FAO). (2016). The Global Dairy Sector: Facts. FAO. Recuperado de: <https://openknowledge.fao.org/server/api/core/bitstreams/beee9189-d92d-4a0d-86af-a1e3328c33d1/content>. Último acceso: julio de 2025.
- [35] Gallardo, M. (2008). Concentrados y subproductos para la alimentación de rumiantes. XXI Curso Internacional de Lechería para Profesionales de América Latina, INTA Rafaela, 153-162.
- [36] González Besteiro, A. V. (2010). Eficiencia en recría de vaquillonas en establecimientos lecheros (Trabajo final de Ingeniería en Producción Agropecuaria, Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Católica Argentina).
- [37] Grille, L., Escobar, D., Méndez, M. N., Adrien, M. L., Olazabal, L., Rodríguez, V., Pelaggio, R., Chilbroste, P., Meikle, A., & Damián, J. P. (2023). Different conditions during confinement in pasture-based systems and feeding systems affect the fatty acid profile in the milk and cheese of Holstein dairy cows. *Animals*, 13(8), 1426.
- [38] Groenendaal, H., Galligan, D. T., Mulder, H. A. (2004). An economic spreadsheet model to determine optimal breeding and replacement decisions for dairy cattle. *Journal of Dairy Science*, 87(7), 2146–2157.
- [39] Gutiérrez Martínez, P. (2007). Manual práctico de manejo de una explotación de vacuno lechero. Servicio de Formación Agraria e Iniciativas, Junta de Castilla y León.
- [40] Hadley, G. L., Wolf, C. A., Harsh, S. B. (2006). Dairy cattle culling patterns, explanations, and implications. *Journal of Dairy Science*, 89(6), 2286–2296.
- [41] Hillier, F. S., Lieberman, G. J. (2001). *Introduction to operations research* (7.^a ed.). McGraw-Hill, The McGraw-Hill Companies, Inc.
- [42] Hoffman, P. C., Combs, D. K., Casler, M. D., Undersander, D. J. (2008). Evaluation of equations to predict dry matter intake of dairy heifers. *Journal of Dairy Science*, 91(11), 4773–4780.
- [43] Huertas, S. M., Piaggio, J., Gil, A., César, D., de Torres, E. (2013). Bienestar animal en bovinos lecheros. Serie FPTA N.º 51. Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria (INIA), Uruguay.
- [44] Hürlimann, T. (2000). *Mathematical Modeling and Optimization – An Essay for the Design of Computer-Based Modeling Tools*. Johannes Habilitation Thesis, Universität Freiburg.

- [45] IBM ILOG CPLEX Optimization Studio. (2019). CPLEX User's Manual for CPLEX. Recuperado de https://public.dhe.ibm.com/software/websphere/ilog/docs/optimization/cplex/ps_usrmanplex.pdf. Último acceso: julio de 2025.
- [46] Instituto Nacional de Carnes (INAC). (2024). Precios de hacienda: bovinos y ovinos. Consultado en enero de 2025, de: <https://www.inac.uy/innovaportal/v/17274/10/innovafront/precios-de-hacienda-bovinos-y-ovinos>.
- [47] Instituto Nacional de la Leche (INALE). (2025). Mercado internacional: análisis del comercio de lácteos 2022–2024. Recuperado de: <https://www.inale.org/wp-content/uploads/2025/01/Mercado-internacional.pdf>. Último acceso: julio de 2025.
- [48] Instituto Nacional de la Leche (INALE). (2025). Precio de la leche en tambo (febrero 2025). Recuperado de: <https://www.inale.org/precio-de-la-leche-en-tambo-febrero-de-2025-fue-173-pesos-y-040-dolares/>. Último acceso: julio de 2025.
- [49] Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República. (s.f.). Unidad 4: Método Simplex revisado. Recuperado de: https://eva.fing.edu.uy/pluginfile.php/175798/mod_resource/content/1/modopt_unidad04.pdf. Último acceso: julio de 2025.
- [50] INTA EEA Rafaela. (2016). Información técnica: Producción animal. INTA, Centro Regional Santa Fe. Recuperado de: https://repositorio.inta.gob.ar/xmlui/bitstream/handle/20.500.12123/15894/INTA_CRSantaFe_EEARafaela_Informaci%C3%B3n_t%C3%A9cnica_Producci%C3%B3n_animal_2016.pdf. Último acceso: julio de 2025.
- [51] Interés agronómico. Principales razas lecheras.
- [52] Irigoyen, A. (2008). Rol de las reservas forrajeras en los sistemas ganaderos. *Revista del Plan Agropecuario*, (130), 46-52.
- [53] Jackson, D., Oliva, L., Rodríguez, D. (2020). Oportunidades de negocio y maximización de valor en la industria láctea: Modelo de negocio: Crianza del ternero macho holando. Tesis de Maestría en Gerencia y Administración, Universidad de la República (Uruguay), Facultad de Ciencias Económicas y de Administración.
- [54] Krall Schroder, E. (2018). El uso del biotipo como alternativa productiva y económica en la lechería uruguaya: Una herramienta posible ante la crisis. *Revista del Plan Agropecuario*, (166), 48-51.
- [55] Krall, E., Arbeletche, P., & Gurin, M. (2021). Estudio de tambos de Uruguay con diferentes sistemas de producción, gestión y biotipos: Análisis de casos. *Revista de Investigación Agropecuaria Science and Biotechnology*, 1(2), 1-14.
- [56] Lawler, E., & Wood, D. (1966). Branch-and-bound methods: A survey. *Operations Research*, 14(4), 699–719.
- [57] Linero-Noguera, M. (2017). Sector agropecuario en Colombia. Universidad Cooperativa de Colombia, Facultad de Ciencias Económicas, Administrativas y Contables, Administración de Empresas, Santa Marta.
- [58] López, R. J., Sarramone, C. G., Sánchez Abrego, D. (2020). Terminación de terneros machos en tambo. Tesina de grado, Facultad de Ciencias Veterinarias, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA).

- [59] Luenberger, D. G., Ye, Y. (2008). Linear and Nonlinear Programming (4^a ed.). Springer Science+Business Media. Recuperado de: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-74503-9>. Último acceso: julio de 2025.
- [60] Lustig, I. J., Marsten, R. E., Shanno, D. F. (1994). Feature Article—Interior Point Methods for Linear Programming: Computational State of the Art. *ORSA Journal on Computing*, 6(1), 1–14.
- [61] Macari Antúnez, N. G. (2023). Efecto de diferentes tipos de alojamiento sobre la prevalencia de mastitis clínica en bovinos de raza Holando. Tesis de grado, Universidad de la República, Facultad de Veterinaria, Uruguay.
- [62] Maciel Camacho, V. (2023). Caracterización de la curva de lactancia de bovinos de leche para la región centro, suroeste y noroeste del Uruguay utilizando modelos mixtos paramétricos y no paramétricos. Universidad de la República, Facultad de Agronomía.
- [63] Makhorin, A. (2008). GNU Linear Programming Kit, Version 4.36. Manual del usuario. Recuperado de: <https://most.ccib.rutgers.edu/glpk.pdf?>. Último acceso: julio de 2025.
- [64] Mancuso, W., Engler, P., Rambeaud, O. (2023). Sistema para el análisis de la recría de vaquillonas en tambos: Instructivo VaqINTA versión 3.1. INTA, Centro Regional Entre Ríos, EEA Paraná.
- [65] Martins, D. V. (Ed.). (1996). Suplementación estratégica para el engorde de ganado. Serie Técnica N.º 83. INIA La Estanzuela, Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria (INIA), Uruguay.
- [66] Matto Lenú, G., Méndez Pereira, M. N., Triay Zapata, F. (2016). Efectos de la dominancia social sobre el consumo de materia seca y los niveles de glucosa e insulina en vaquillonas de leche durante el período prepuberal. Tesis de grado, Universidad de la República (Uruguay), Facultad de Veterinaria.
- [67] Meadows, C., Rajala-Schultz, P. J., Frazer, G. S. (2005). A spreadsheet-based model demonstrating the nonuniform economic effects of varying reproductive performance in Ohio dairy herds. *Journal of Dairy Science*, 88(3), 1244–1254.
- [68] Medeiros, I., Fernandez-Novio, A., Astiz, S., & Simões, J. (2022). Historical evolution of cattle management and herd health of dairy farms in OECD countries. *Veterinary Sciences*, 9(3), 125.
- [69] Mendoza, A., Acosta, Y., Morales, T., Román, L., Pla, M., La Manna, A. (2014). Manejo de la recría en los tambos: Aportes desde INIA. *Revista INIA*, (37), 32-35.
- [70] Meikle, A., Cavestany, D., Carriquiry, M., Adrien, M., Artegoitia, V., Pereira, I., Rupprechter, G., Pessina, P., Rama, G., Fernández, A., Breijo, M., Laborde, D., Pritsch, O., Ramos, J., de Torres, E., Nicolini, P., Mendoza, A., Dutour, J., Fajardo, M., Astessiano, A., Olazábal, L., Mattiauda, D., Chilbroste, P. (2013). Avances en el conocimiento de la vaca lechera durante el período de transición en Uruguay: un enfoque multidisciplinario. *Agrociencia Uruguay*, 17(1), 141–152.
- [71] Molina, J., Boschini, C. (1978). Ajuste de la curva de lactancia de ganado Holstein con un modelo lineal modal. Universidad de Costa Rica.
- [72] Moratorio García y Santos, M. (2021). Recría de hembras lecheras: efectos del reagrupamiento social sobre el desarrollo corporal, el metabolismo y el comportamiento en condiciones de un campo de recría comercial. Tesis de Maestría en Producción Animal. Universidad de la República, Facultad de Veterinaria, Uruguay.

- [73] Motta Delgado, P. A., Rivera, M. S., Duque, J. A., Guevara, F. A. (2014). Factores inherentes a la calidad de la leche en la agroindustria alimentaria. *Revista Colombiana de Ciencia Animal*, 6(1), 223-242.
- [74] National Research Council, Subcommittee on Dairy Cattle Nutrition. (2001). *Nutrient requirements of dairy cattle* (7^a ed.). National Academy Press.
- [75] NEOS Server Team. (2025). NEOS Server: *solvers* for Numerical Optimization. Recuperado de: <https://neos-server.org/neos/solvers/index.html>. Último acceso: julio de 2025.
- [76] NEOS Server Team. (2025). MINLP (AMPL) – Mixed Integer Nonlinear Programming Solver. The NEOS Server for Optimization. Recuperado de: <https://neos-server.org/neos/solvers/minco:MINLP/AMPL.html>. Último acceso: julio de 2025.
- [77] Nielsen, L. R., Jørgensen, E., Kristensen, A. R., Østergaard, S. (2010). Optimal replacement policies for dairy cows based on daily yield measurements. Aarhus University University of Copenhagen.
- [78] Notte Kirichenko, G. (2014). Asignación de recursos alimenticios en sistemas pastoriles de producción de leche. Tesis de Maestría en Informática, Universidad de la República. PEDECIBA Informática, Instituto de Computación – Facultad de Ingeniería.
- [79] Notte Kirichenko, G. (2023). Feed resource allocation optimization in dairy systems. Tesis de Doctorado en Informática, Universidad de la República, CENUR Litoral Norte. PEDECIBA Informática.
- [80] Odeón, M. M., Romera, S. A. (2017). Estrés en ganado: causas y consecuencias. *Revista Veterinaria*, 28(1), 69–77. Universidad Nacional del Nordeste.
- [81] Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación (FAO). (2025). Producción láctea y productos. Consultado en enero de 2025, de <https://www.fao.org/dairy-production-products/production/es>
- [82] Our World in Data. (2024). Milk production, 1992 to 2022. Consultado en Marzo de 2025, de https://ourworldindata.org/grapher/milk-production-tonnes?tab=chart&time=1992..2022&country=~OWID_WRL
- [83] Owens, F. N., Secrist, D. S., Hill, W. J., Gill, D. R. (1998). Acidosis in cattle: a review. *Journal of Animal Science*, 76(1), 275–286.
- [84] Pantalla Uruguay. (s.f.). Portal de remates virtuales de ganado. Consultado en enero de 2025, de <https://www.pantallauruguay.com.uy/>
- [85] Portal Lechero. (2020). Las ventajas de regresar las novillas lecheras al pastoreo.
- [86] Pedemonte, A., Baraibar, M., Di Candia, N. (2024). Situación 2023 y perspectivas 2024 de la lechería uruguaya. Área de Información y Estudios Económicos (AIEE), Instituto Nacional de la Leche (INALE).
- [87] Pelekais, C. (2000). Métodos cuantitativos y cualitativos: diferencias y tendencias. *Telos*, 2(2), 347–352.
- [88] Piñeyro, P., Stáble, L., Testuri, C. (2015). Optimización de problemas de producción. Departamento de Investigación Operativa, Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República. Colaboración de H. Cancela y A. Mauttone. Recuperado de: https://eva.fing.edu.uy/pluginfile.php/94293/mod_resource/content/1/1%20-%20modelado.pdf. Último acceso: julio de 2025.

- [89] Real Academia Española (RAE). (2025). Tambo. Consultado en febrero de 2025, de <https://dle.rae.es/tambo>
- [90] Red de Buenas Prácticas Agropecuarias. (2021). Buenas Prácticas Lecheras: Guía para la implementación en la producción de leche bovina.
- [91] Repetto, J. L., Mendoza, A., Antúnez, G., Cajarville, C. (2016). Nuevos paradigmas en la cría y recría de hembras lecheras. *Revista de la Facultad de Veterinaria, Universidad de la República*, 53(1), 34–41.
- [92] Saravia, A., César, D., Montes, E., Taranto, V., & Pereira, M. (2011). Manejo del rodeo de cría sobre campo natural. Montevideo: Ministerio de Ganadería, Agricultura y Pesca (MGAP) - Programa Ganadero - Instituto Plan Agropecuario. Recuperado de: <https://www.planagropecuario.org.uy>. Último acceso: julio de 2025.
- [93] Sienra, R. (2006). Acidosis en bovinos. *Revista Plan Agropecuario*, (86). Recuperado de: https://www.planagropecuario.org.uy/publicaciones/revista/R86/R86_31.htm. Último acceso: julio de 2025.
- [94] Signorile, O. (2009). Tambo: ¿En estado de evolución o ebullición? Producción sustentable de leche bovina en la provincia de Córdoba. *Boletín de Divulgación Técnica N° 4*, EEA INTA Manfredi.
- [95] Stanek, P., Żółkiewski, P., & Januś, E. (2024). A Review on Mastitis in Dairy Cows Research: Current Status and Future Perspectives. *Agriculture*, 14(8), 1292.
- [96] Skinner, S. N., Zare-Behtash, H. (2018). State-of-the-art in aerodynamic shape optimisation methods. *University of Glasgow. Publicado en Applied Soft Computing*, 62, 933–962.
- [97] Vargas, B., Herrero, M., van Arendonk, J. A. M. (2000). Interactions between optimal replacement policies and feeding strategies in dairy herds. *Livestock Production Science*.
- [98] Vaz Martins, D. (1997). Suplementación energética en condiciones de pastura limitante. En: Vaz Martins, D. (Ed.), *Suplementación estratégica para el engorde de ganado* (pp. 7–22). Serie Técnica N.º 83. INIA La Estanzuela, Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria (INIA), Uruguay.
- [99] Vitoriano, B., Ramos, A. (2019). Programación matemática: Modelos de optimización. Universidad Complutense de Madrid. Recuperado de: <http://blogs.mat.ucm.es/bvitoriano/wp-content/uploads/sites/69/2023/02/ModOptI.pdf>. Último acceso: julio de 2025.
- [100] World Organisation for Animal Health (WOAH). (2024). Capítulo 7.11 - Bienestar animal y sistemas de producción de ganado vacuno de leche. Código Sanitario para los Animales Terrestres. Recuperado de: https://www.woah.org/fileadmin/Home/esp/Health_standards/tahc/current/chapitre_aw_dairy_cattle.pdf. Último acceso: julio de 2025.
- [101] Zanton GI, Heinrichs AJ. (2005) Meta-Analysis to assess effect of prepubertal average daily gain of Holstein heifers on first-lactation production. *J Dairy Sci* 88 (11): 3860-3867.
- [102] Zobel, G., Weary, D. M., Leslie, K. E., von Keyserlingk, M. A. G. (2015). Cessation of lactation: Effects on animal welfare. *Journal of Dairy Science*, 98(12), 8263–8277.

Anexo A

Visita a tambo

Como parte del estudio sobre optimización de la producción lechera en Uruguay, se realizó una visita a un tambo de gestión familiar ubicado en el departamento de San José. En esa oportunidad, se entrevistó al productor responsable con el objetivo de conocer en profundidad la operativa diaria del establecimiento. El sistema productivo está orientado exclusivamente a la producción de leche, y aunque se arriendan potreros para actividades agrícolas, las tierras propias se destinan íntegramente al tambo. En ellas se realiza la implantación de diferentes especies forrajeras para alimentación del ganado, complementada con suplementos almacenados en un silo propio, lo cual permite comprar insumos estratégicamente durante los períodos de menor precio y así asegurar el abastecimiento a lo largo del año.

Durante la entrevista, el productor destacó el manejo riguroso del ciclo reproductivo. El nacimiento de los terneros se distribuye entre marzo y octubre, con picos marcados en marzo y julio. La inseminación artificial es el eje central de la estrategia reproductiva, iniciándose el 15 de mayo y extendiéndose hasta diciembre. Se utiliza semen de la raza Holando proveniente de Nueva Zelanda, debido a que se identificó que es la que se ajusta mejor al sistema pastoril que se maneja en el tambo. En promedio, se tiene que el número de servicios por concepción es de dos. Además, se alcanza aproximadamente un 80 % de preñez, donde las vacas que no logran concebir durante esta ventana, en general, no vuelven a ciclar. A partir de los 45 días postparto, los animales se reincorporan al protocolo de inseminación. Como herramienta de apoyo, en el mes de mayo se comienza con la colocación de parches detectores de celo en vacas clínicamente sanas, y repitiéndose cada 15 días hasta octubre, en aquellas que sea necesario. El costo promedio de cada inseminación ronda los 20 USD.

Respecto a la producción de leche, se observa un pico de rendimiento alrededor del día 50 de la gestación, y a su vez que la producción máxima se da en la tercera lactancia. Dos meses antes del parto, las vacas son apartadas y trasladadas a un potrero específico para el período seco. Allí se las alimenta con fardos. Durante el mes previo al parto, reciben una dieta especializada que incluye fardos, silos y sales aniónicas, con el objetivo de ajustar el pH del rumen y preparar su organismo para el parto.

El ordeño se realiza dos veces al día, a las 5:00 y a las 15:00, adelantándose a las 4:00 y 16:00 durante los meses de verano para reducir el impacto del estrés térmico. La calidad de la leche es monitoreada de forma continua, prestando especial atención a los niveles de grasa y proteína. En caso de detectarse adulteración, como presencia de agua, el productor es penalizado por la industria.

Actualmente, el establecimiento cuenta con un único tanque de enfriamiento con capacidad de 6.000 litros de leche. No obstante, la producción diaria se aproxima al doble de ese volumen, lo que obliga a realizar dos recolecciones diarias por parte del camión cisterna de Conaprole. Esta situación implica un costo logístico elevado, que afecta negativamente la rentabilidad del sistema. Además, se señaló que cada traslado de animales dentro del predio puede representar una pérdida de hasta dos litros de leche por vaca, producto del estrés asociado al movimiento. Esto pone en evidencia la necesidad de invertir en infraestructura vial interna para reducir desplazamientos innecesarios y mitigar pérdidas productivas.

En cuanto al manejo sanitario, el tambo dispone de un lote aparte para vacas enfermas. Estas se ordeñan al final de cada turno, lo que permite evitar la contaminación cruzada con los animales sanos. La leche obtenida de estas vacas no se descarta, sino que se pasteuriza y se utiliza para la alimentación de los terneros.

El manejo de las crías es diferenciado según el sexo del ternero. En el caso de los machos, permanecen con la madre durante un día y luego son vendidos a frigoríficos de la zona. Las hembras, por el contrario, son separadas inmediatamente tras el parto y alimentadas con calostro pasteurizado y congelado, proveniente de las vacas de mejor condición, a fin de asegurar una correcta inmunización. Asimismo la gestión de las vacas productivas se realiza en dos lotes diferenciados: lotes de alta y lotes de baja, donde se distribuyen a las vacas de alta productividad baja productividad respectivamente. Esta conformación de lotes se revisa cada mes, al realizarse análisis sobre el rendimiento individual obtenido en dicho mes y posteriormente se las clasifica. De esta manera, a las vacas de cada lote se las maneja en conjunto, y específicamente a las de alta se les da prioridad en cuanto a alimentación, de manera que se aproveche su potencial.

Finalmente, es importante señalar que este tambo no realiza la recria en sus propias tierras. En su lugar, participa de un esquema cooperativo junto a otros productores de la zona, mediante el cual se agrupan las vaquillonas en campos separados, compartiendo los costos de alimentación, sanidad e infraestructura. Esta estrategia permite mantener la eficiencia del sistema productivo sin comprometer los recursos físicos del establecimiento principal. Cuando ingresan al rodeo las vaquillonas, enfrentan mayores desafíos al inicio debido a su falta de experiencia con la rutina del tambo. Para garantizar un desarrollo adecuado, estas se preñan al alcanzar aproximadamente los 280 kilogramos, antes de llegar a su tamaño adulto, lo cual se da generalmente al alcanzar cerca de los dos años de edad. Durante su primera lactancia, reciben una alimentación cuidadosamente formulada para maximizar su rendimiento.

Anexo B

Formulación matemática modelo base linealizado

Parámetro	Descripción
$Zonas$	Zonas disponibles para alimentar a las vacas
$Distancias_z$ $z \in Zonas$	Distancia entre cada zona y la sala de ordeño (km)
$Alimento_z$ $z \in Zonas$	Cantidad total de alimento por zona (kg MS)
Cal_z $z \in Zonas$	Megacalorías (Mcal)/kg de MS por zona
$Porcentaje_grasa$	Porcentaje de grasa que posee la leche
$Porcentaje_prot$	Porcentaje de proteína que posee la leche
ENL	Cantidad de energía requerida para producir un kg de leche (Mcal)
$CantOrdenes$	Cantidad de ordeños diarios
$CantTiposVacas$	Cantidad de tipos de vacas totales
PV_t $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Peso vivo de cada tipo de vaca (kg)
SL_t $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Semana de lactancia en la que está cada tipo de vaca
$CantAnimales_t$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Cantidad de animales de cada tipo de vaca
FCM_t $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Leche corregida por grasa
$Lotes$	Lotes disponibles en el tambo
$Conspot_t$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Consumo potencial de MS (kg MS) para cada tipo de vaca
$ReqBasal_t$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Energía requerida por ordeño para mantenimiento (Mcal)
$ReqTras_{tz}$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas, z \in Zonas$	Energía de traslado requerida por ordeño por cada tipo de vaca y zona (Mcal)
$Dur_periodo$	Cantidad de días para los que se quiere mantener la asignación de los lotes
$Num_periodos$	Cantidad de períodos
$CantDias$	Horizonte temporal del modelo

Tabla 31: Parámetros del modelo base linealizado

Variable	
vL_{odtl}	$o \in 1 \dots CantOrdenes, d \in 1 \dots CantDias, t \in 1 \dots CantTiposVacas, l \in Lotes$
cR_{odztl}	$o \in 1 \dots CantOrdenes, d \in 1 \dots CantDias, z \in Zonas,$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas, l \in Lotes$
$loteEnZona_{odlz}$	$o \in 1 \dots CantOrdenes, d \in 1 \dots CantDias, l \in Lotes, z \in Zonas$
vZ_{odztl}	$o \in 1 \dots CantOrdenes, d \in 1 \dots CantDias, z \in Zonas, t \in CantTiposVacas, l \in Lotes$
tlp_{ntl}	$n \in Num_periodos, t \in CantTiposVacas, l \in Lotes$
lzp_{nlz}	$n \in Num_periodos, l \in Lotes, z \in Zonas$

Tabla 32: Variables del modelo base linealizado

Función Objetivo

$$\max \sum_{o=1}^{CantOrdenes} \sum_{d=1}^{CantDias} \sum_{z \in Zonas} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} \sum_{l \in Lotes} \frac{cR_{odztl} \times Cal_z - vZ_{odztl} \times (ReqBasal_t + ReqTras_{tz})}{ENL}$$

Sujeto a:

$$\sum_{z \in Zonas} loteEnZona_{odlz} = 1, \quad \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall l \in Lotes \quad (55)$$

$$\sum_{l \in Lotes} vL_{odtl} = CantAnimales_t, \quad \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\} \quad (56)$$

$$vZ_{odztl} \leq CantAnimales_t \times loteEnZona_{odlz}, \quad \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall z \in Zonas, \quad (57)$$

$$\forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes$$

$$vZ_{odztl} \leq vL_{odtl}, \quad \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \quad (58)$$

$$\forall l \in Lotes, \forall z \in Zonas$$

$$\sum_{z \in Zonas} \sum_{l \in Lotes} vZ_{odztl} = CantAnimales_t, \quad \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\} \quad (59)$$

$$\sum_{o=1}^{CantOrdenes} \sum_{d=1}^{CantDias} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} \sum_{l \in Lotes} cR_{odztl} \leq Alimento_z, \quad \forall z \in Zonas \quad (60)$$

$$vZ_{odztl} \times \left(\frac{Conspot_t}{CantOrdenes} \right) \geq cR_{odztl}, \quad \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall z \in Zonas, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \quad (61)$$

$$\forall l \in Lotes$$

$$\begin{aligned}
vL_{o,p \times Dur_periodo+d,tl} &= vL_{o,p \times Dur_periodo+d+1,tl}, \\
\forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes, \\
\forall p \in \{0 \dots (\frac{CantDias}{Dur_periodo}) - 1\}, \forall d \in \{1 \dots Dur_periodo - 1\}
\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
vL_{odtl} &= vL_{o,d+1,tl}, \\
\forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes, \\
\forall d \in \{Dur_periodo \times (\frac{CantDias}{Dur_periodo}) + 1 \dots CantDias - 1\}
\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
vL_{1dtl} &= vL_{2dtl}, \\
\forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}
\end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
tlp_{ntl} &= \frac{\sum_{d=1+(n-1) \times Dur_periodo}^{\min(n_periodo, CantDias)} \sum_{o=1}^{CantOrdenes} vL_{odtl}}{CantOrdenes \times (\min(n \times Dur_periodo, CantDias) - (n-1) \times Dur_periodo)}, \\
\forall n \in \{1 \dots Num_periodos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes
\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
lzp_{nlz} &= \sum_{d=1+(n-1) \times Dur_periodo}^{\min(n \times Dur_periodo, CantDias)} \sum_{o=1}^{CantOrdenes} loteEnZona_{odlz}, \\
\forall n \in \{1 \dots Num_periodos\}, \forall l \in Lotes, \forall z \in Zonas
\end{aligned} \tag{66}$$

Formulación matemática modelo base económico

Parámetro	Descripción
$Zonas$	Zonas disponibles para alimentar a las vacas
$Distancias_z$ $z \in Zonas$	Distancia entre cada zona y la sala de ordeño (km)
$Alimento_z$ $z \in Zonas$	Cantidad total de alimento por zona (kg MS)
Cal_z $z \in Zonas$	Megacalorías (Mcal)/kg de MS por zona
$Porcentaje_grasa$	Porcentaje de grasa que posee la leche
$Porcentaje_prot$	Porcentaje de proteína que posee la leche
ENL	Cantidad de energía requerida para producir un kg de leche (Mcal)
$CantOrdenes_dia$	Cantidad de ordeños diarios
$CantTiposVacas$	Cantidad de tipos de vacas totales
PV_t $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Peso vivo de cada tipo de vaca (kg)
SL_t $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Semana de lactancia en la que está cada tipo de vaca
$CantAnimales_t$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Cantidad de animales de cada tipo de vaca
FCM_t $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Leche corregida por grasa
$Lotes$	Lotes disponibles en el tambo
$Conspot_t$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Consumo potencial de MS (kg MS) para cada tipo de vaca
$ReqBasal_t$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Energía requerida por ordeño para mantenimiento (Mcal)
$ReqTras_{tz}$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas, z \in Zonas$	Energía de traslado requerida por ordeño por cada tipo de vaca y zona (Mcal)
$Dur_periodo$	Cantidad de días para los que se quiere mantener la asignación de los lotes
$Num_periodos$	Cantidad de períodos para los cuales se quiere correr al año
$CantOrdenes_periodo$	Cantidad de ordeños por período
$Precio_leche$	Valor de venta de un litro de leche (USD)
$Costo_alimento_z$	Valor de un kilogramo de alimento en la zona z (USD)

Tabla 33: Parámetros del modelo base económico

Variable
vL_{ptl} $p \in 1 \dots Num_periodos, t \in 1 \dots CantTiposVacas, l \in Lotes$
cR_{pztl} $p \in 1 \dots Num_periodos, z \in Zonas, t \in 1 \dots CantTiposVacas, l \in Lotes$
$loteEnZona_{plz}$ $p \in 1 \dots Num_periodos, l \in Lotes, z \in Zonas$

Tabla 34: Variables del modelo base económico

Función Objetivo

max

$$\begin{aligned}
 & Precio_leche \times \sum_{p=1}^{Num_periodos} \sum_{z \in Zonas} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} \sum_{l \in Lotes} \frac{cR_{pztl} \times Cal_z - vL_{ptl} \times loteEnZona_{plz} \times (ReqBasal_t + ReqTras_tz)}{ENL} \\
 & - \sum_{p=1}^{Num_periodos} \sum_{z \in Zonas} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} \sum_{l \in Lotes} cR_{pztl} \times Costo_alimento_z
 \end{aligned}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l \in Lotes} vL_{ptl} = CantAnimales_t, \\
 & \forall p \in \{1 \dots Num_periodos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}
 \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{z \in Zonas} loteEnZona_{plz} = CantOrdenes_periodo, \\
 & \forall p \in \{1 \dots Num_periodos\}, \forall l \in Lotes
 \end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
 & vL_{ptl} \times loteEnZona_{plz} \times \left(\frac{Conspot_t}{CantOrdenes_dia} \right) \geq cR_{pztl}, \\
 & \forall p \in \{1 \dots Num_periodos\}, \forall z \in Zonas, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes
 \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p=1}^{Num_periodos} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} \sum_{l \in Lotes} cR_{pztl} \leq Alimento_z, \\
 & \forall z \in Zonas
 \end{aligned} \tag{70}$$

Formulación matemática modelo base económico linealizado

Parámetro	Descripción
$Zonas$	Zonas disponibles para alimentar a las vacas
$Distancias_z$ $z \in Zonas$	Distancia entre cada zona y la sala de ordeño (km)
$Alimento_z$ $z \in Zonas$	Cantidad total de alimento por zona (kg MS)
Cal_z $z \in Zonas$	Megacalorías (Mcal)/kg de MS por zona
$Porcentaje_grasa$	Porcentaje de grasa que posee la leche
$Porcentaje_prot$	Porcentaje de proteína que posee la leche
ENL	Cantidad de energía requerida para producir un kg de leche (Mcal)
$CantOrdenes$	Cantidad de ordeños diarios
$CantTiposVacas$	Cantidad de tipos de vacas totales
PV_t $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Peso vivo de cada tipo de vaca (kg)
SL_t $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Semana de lactancia en la que está cada tipo de vaca
$CantAnimales_t$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Cantidad de animales de cada tipo de vaca
FCM_t $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Leche corregida por grasa
$Lotes$	Lotes disponibles en el tambo
$Conspot_t$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Consumo potencial de MS (kg MS) para cada tipo de vaca
$ReqBasal_t$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Energía requerida por ordeño para mantenimiento (Mcal)
$ReqTras_{tz}$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas, z \in Zonas$	Energía de traslado requerida por ordeño por cada tipo de vaca y zona (Mcal)
$Dur_periodo$	Cantidad de días para los que se quiere mantener la asignación de los lotes
$Num_periodos$	Cantidad de períodos
$CantDias$	Horizonte temporal del modelo
$Precio_leche$	Valor de venta de un litro de leche (USD)
$Costo_alimento_z$	Valor de un kilogramo de alimento en la zona z (USD)

Tabla 35: Parámetros del modelo base económico linealizado

Variable	
vL_{odtl}	$o \in 1 \dots CantOrdenes, d \in 1 \dots CantDias, t \in 1 \dots CantTiposVacas, l \in Lotes$
cR_{odztl}	$o \in 1 \dots CantOrdenes, d \in 1 \dots CantDias, z \in Zonas, t \in 1 \dots CantTiposVacas, l \in Lotes$
$loteEnZona_{odlz}$	$o \in 1 \dots CantOrdenes, d \in 1 \dots CantDias, l \in Lotes, z \in Zonas$
vZ_{odztl}	$o \in 1 \dots CantOrdenes, d \in 1 \dots CantDias, z \in Zonas, t \in 1 \dots CantTiposVacas, l \in Lotes$
tlp_{ntl}	$n \in Num_periodos, t \in CantTiposVacas, l \in Lotes$
lzp_{nlz}	$n \in Num_periodos, l \in Lotes, z \in Zonas$

Tabla 36: Variables del modelo base económico linealizado

Función Objetivo

max

$$\begin{aligned}
& Precio_leche \times \sum_{o=1}^{CantOrdenes} \sum_{d=1}^{CantDias} \sum_{z \in Zonas} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} \sum_{l \in Lotes} \frac{cR_{odztl} \times Cal_z - vZ_{odztl} \times (ReqBasal_t + ReqTras_{tz})}{ENL} \\
& - \sum_{o=1}^{CantOrdenes} \sum_{d=1}^{CantDias} \sum_{z \in Zonas} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} \sum_{l \in Lotes} cR_{odztl} \times Costo_alimento_z
\end{aligned}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
& \sum_{z \in Zonas} loteEnZona_{odlz} = 1, \\
& \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall l \in Lotes
\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l \in Lotes} vL_{odtl} = CantAnimales_t, \\
& \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}
\end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}
& vZ_{odztl} \leq CantAnimales_t \times loteEnZona_{odlz}, \\
& \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall z \in Zonas, \\
& \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes
\end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
& vZ_{odztl} \leq vL_{odtl}, \\
& \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \\
& \forall l \in Lotes, \forall z \in Zonas
\end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{z \in Zonas} \sum_{l \in Lotes} vZ_{odztl} = CantAnimales_t, \\
& \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}
\end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{o=1}^{CantOrdenes} \sum_{d=1}^{CantDias} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} \sum_{l \in Lotes} cR_{odztl} \leq Alimento_z, \\
& \forall z \in Zonas
\end{aligned} \tag{76}$$

$$vZ_{odzt} \times \left(\frac{Conspot_t}{CantOrdenes} \right) \geq cR_{odzt}, \quad (77)$$

$$\forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall z \in Zonas, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\},$$

$$\forall l \in Lotes$$

$$vL_{o,p \times Dur_periodo+d,tl} = vL_{o,p \times Dur_periodo+d+1,tl}, \quad (78)$$

$$\forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes,$$

$$\forall p \in \{0 \dots (\frac{CantDias}{Dur_periodo}) - 1\}, \forall d \in \{1 \dots Dur_periodo - 1\}$$

$$vL_{odtl} = vL_{o,d+1,tl}, \quad (79)$$

$$\forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes,$$

$$\forall d \in \{Dur_periodo \times (\frac{CantDias}{Dur_periodo}) + 1 \dots CantDias - 1\}$$

$$vL_{1dtl} = vL_{2dtl}, \quad (80)$$

$$\forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}$$

$$tlp_{ntl} = \frac{\sum_{d=1+(n-1) \times Dur_periodo}^{\min(n_periodo, CantDias)} \sum_{o=1}^{CantOrdenes} vL_{odtl}}{CantOrdenes \times (\min(n \times Dur_periodo, CantDias) - (n-1) \times Dur_periodo)}, \quad (81)$$

$$\forall n \in \{1 \dots Num_periodos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}, \forall l \in Lotes$$

$$lzp_{nlz} = \sum_{d=1+(n-1) \times Dur_periodo}^{\min(n \times Dur_periodo, CantDias)} \sum_{o=1}^{CantOrdenes} loteEnZona_{odlz}, \quad (82)$$

$$\forall n \in \{1 \dots Num_periodos\}, \forall l \in Lotes, \forall z \in Zonas$$

Formulación matemática modelo con recría linealizado

Parámetro	Descripción
$CantAnos$	Cantidad de años para los que se quiere realizar el análisis
$Lotes$	Lotes disponibles en el tambo
$Zonas$	Zonas disponibles para alimentar a las vacas
$Alimento_{az}$ $a \in 1 \dots CantAnos, z \in Zonas$	Cantidad total de alimento por zona (kg MS)
$Distancias_z$ $z \in Zonas$	Distancia entre cada zona y la sala de ordeño (km)
$Porcentaje_costo_z$ $z \in Zonas$	Porcentaje del precio de la leche que corresponde al costo asociado al kg de alimento de cada zona
$CantOrdenes$	Cantidad de ordeños diarios
$Dur_periodo$	Cantidad de días para los que se quiere mantener la asignación de los lotes
$Num_periodos$	Cantidad de períodos para los cuales se quiere correr al año
$CantDias$	Cantidad de días del año
Cal_z $z \in Zonas$	Mcal/kg de MS por zona
$Porcentaje_grasa$	Porcentaje de grasa que posee la leche
$Porcentaje_prot$	Porcentaje de proteína que posee la leche
ENL	Cantidad de energía requerida para producir un kg de leche (Mcal)
$Hijade_t$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Tipo de vaca del cual es hijo el tipo en cuestión
$CantTiposVacas$	Cantidad de tipos de vacas totales
$Anodevida_vat$ $a \in 1 \dots CantAnos,$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Edad de los distintos tipos de vaca según el año
PV_vat $a \in 1 \dots CantAnos,$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Peso vivo de cada tipo de vaca dependiendo del año (kg)
$CantAnimales_i_t$ $t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Cantidad de animales de cada tipo que se tienen en el rodeo inicialmente
SL_d $d \in 1 \dots 365$	Semana de lactancia en la que está cada tipo de vaca
$Porcentaje_prenhez$	Cantidad de vacas que se estiman quedan preñadas porcentualmente
$Precio_leche$	Valor de venta de un litro de leche (USD)
$Precio_ternero$	Valor de venta de un ternero (USD)
$Precio_kg_vaca$	Valor de venta de una vaca (USD/kg)

Parámetro	Descripción
Pot_gen_t $t \in CantTiposVacas$	Potencial genético de producción anual de cada tipo (L)
M	Valor auxiliar que vZ nunca alcanzará
PPD_{dat} $d \in 1 \dots 365, a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Valor intermedio para cálculo del consumo potencial
FCM_{dat} $d \in 1 \dots 365, a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Leche corregida por grasa
$Conspot_diario_{dat}$ $d \in 1 \dots 365, a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Consumo potencial diario de MS (kg MS) para cada tipo de vaca
$Conspot_{at}$ $a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Consumo máximo de alimento anual por tipo (kg MS)
$ReqBasal_{at}$ $a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$	Energía requerida de mantenimiento por ordeño por tipo de vaca (Mcal)
$ReqTras_{atz}$ $a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas, z \in Zonas$	Energía de traslado requerida por ordeño por cada tipo de vaca y zona (Mcal)

Tabla 37: Parámetros del modelo con recría linealizado

Variable
$cantAnimales_v_{at}$ $a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$
vL_{odatl} $o \in 1 \dots CantOrdenes, d \in 1 \dots CantDias, a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas, l \in Lotes$
vZ_{odzatl} $o \in 1 \dots CantOrdenes, d \in 1 \dots CantDias, z \in Zonas, a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas, l \in Lotes$
cR_{odzatl} $o \in 1 \dots CantOrdenes, d \in 1 \dots CantDias, z \in Zonas, a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas, l \in Lotes$
$loteEnZona_{odlza}$ $o \in 1 \dots CantOrdenes, d \in 1 \dots CantDias, l \in Lotes, z \in Zonas, a \in 1 \dots CantAnos$
$cantTerneros_venden_{at}$ $a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$
$cantVacas_retiradas_{at}$ $a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$
tlp_{natl} $n \in Num_periodos, a \in 1 \dots CantAnos, t \in CantTiposVacas, l \in Lotes$
lzp_{nalz} $n \in Num_periodos, a \in 1 \dots CantAnos, l \in Lotes, z \in Zonas$
$produccion_portipo_{at}$ $a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$
$consumo_portipo_{at}$ $a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$
$cantvacas_prenadas_{at}$ $a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$
$cantterneros_{at}$ $a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$
$cantternerass_{at}$ $a \in 1 \dots CantAnos, t \in 1 \dots CantTiposVacas$

Tabla 38: Variables del modelo con recría linealizado

Función objetivo

max

$$\begin{aligned}
 & Precio_leche \times \sum_{a=1}^{CantAnos} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} produccion_portipo_{at} + \\
 & Precio_ternero \times \sum_{a=1}^{CantAnos} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} cantTerneros_venden_{at} + \\
 & \sum_{a=1}^{CantAnos} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} cantVacas_retiradas_{at} \times PV_v_{at} \times Precio_kg_vaca - \\
 & \sum_{o=1}^{CantOrdenes} \sum_{d=1}^{CantDias} \sum_{z \in Zonas} \sum_{l \in Lotes} \sum_{a=1}^{CantAnos} \sum_{t=1}^{CantTiposVacas} cR_{odzatl} \times Porcentaje_costo_z \times Precio_leche
 \end{aligned}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
 cantvacas_prenadas_{at} &\leq cantAnimales_v_{at} \times Porcentaje_prenez, \\
 \forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}
 \end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned}
 cantvacas_prenadas_{at} &\geq cantAnimales_v_{at} \times Porcentaje_prenez - 1 + \varepsilon, \\
 \forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}
 \end{aligned} \tag{84}$$

$$\begin{aligned}
 cantterneras_{at} &\geq 0,5 \times cantvacas_prenadas_{at}, \\
 \forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}
 \end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned}
 cantterneras_{at} &\leq 0,5 \times cantvacas_prenadas_{at} + 1 - \varepsilon, \\
 \forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}
 \end{aligned} \tag{86}$$

$$\begin{aligned}
 cantterneros_{at} &\leq 0,5 \times cantvacas_prenadas_{at}, \\
 \forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}
 \end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned}
 cantterneros_{at} &\geq 0,5 \times cantvacas_prenadas_{at} - 1 + \varepsilon, \\
 \forall a \in \{1 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}
 \end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned}
 cantAnimales_v_{at} &\leq CantAnimales_i_t, \\
 \forall a \in \{1 \dots 1\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}
 \end{aligned} \tag{89}$$

$$\begin{aligned}
 & cantAnimales_v_{at} \leq \\
 & \begin{cases} 0 & \text{si } Anodevida_v_{at} = 0 \\ cantterneras_{a-1, Hijade_t} & \text{si } Anodevida_v_{at} = 1 \\ cantAnimales_v_{a-1, t} & \text{en otro caso,} \end{cases} \\
 & \forall a \in \{2 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}
 \end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{z \in Zonas} loteEnZona_{odlza} = 1, \\
 & \forall o \in \{1 \dots CantOrdenes\}, \forall d \in \{1 \dots CantDias\}, \forall l \in Lotes, \forall a \in \{1 \dots CantAnos\}
 \end{aligned} \tag{91}$$

$$\sum_{l \in \text{Lotes}} vL_{odatl} = \text{cantAnimales}_{v_{at}},$$

$$\forall o \in \{1 \dots \text{CantOrdenes}\}, \forall d \in \{1 \dots \text{CantDias}\}, \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\} \quad (92)$$

$$vZ_{odzatl} \leq \text{loteEnZona}_{odlza} \times M,$$

$$\forall o \in \{1 \dots \text{CantOrdenes}\}, \forall d \in \{1 \dots \text{CantDias}\}, \forall z \in \text{Zonas}, \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \quad (93)$$

$$\forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}, \forall l \in \text{Lotes}$$

$$vZ_{odzatl} \leq vL_{odatl},$$

$$\forall o \in \{1 \dots \text{CantOrdenes}\}, \forall d \in \{1 \dots \text{CantDias}\}, \forall z \in \text{Zonas}, \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \quad (94)$$

$$\forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}, \forall l \in \text{Lotes}$$

$$vZ_{odzatl} \geq vL_{odatl} - (1 - \text{loteEnZona}_{odlza}) \times M,$$

$$\forall o \in \{1 \dots \text{CantOrdenes}\}, \forall d \in \{1 \dots \text{CantDias}\}, \forall z \in \text{Zonas}, \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \quad (95)$$

$$\forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}, \forall l \in \text{Lotes}$$

$$cR_{odzatl} = vZ_{odzatl} \times \left(\frac{\text{Conspot}_{at}}{\text{CantDias} \times \text{CantOrdenes}} \right),$$

$$\forall o \in \{1 \dots \text{CantOrdenes}\}, \forall d \in \{1 \dots \text{CantDias}\}, \forall z \in \text{Zonas}, \forall l \in \text{Lotes}, \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \quad (96)$$

$$\forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}, \text{con } \text{Anodevida}_{v_{at}} < 3$$

$$cR_{odzatl} \leq vZ_{odzatl} \times \left(\frac{\text{Conspot}_{at}}{\text{CantDias} \times \text{CantOrdenes}} \right),$$

$$\forall o \in \{1 \dots \text{CantOrdenes}\}, \forall d \in \{1 \dots \text{CantDias}\}, \forall z \in \text{Zonas}, \forall l \in \text{Lotes}, \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \quad (97)$$

$$\forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}, \text{con } \text{Anodevida}_{v_{at}} \geq 3$$

$$\sum_{o=1}^{\text{CantOrdenes}} \sum_{d=1}^{\text{CantDias}} \sum_{t=1}^{\text{CantTiposVacas}} \sum_{l \in \text{Lotes}} cR_{odzatl} \leq \text{Alimento}_{az}, \quad (98)$$

$$\forall z \in \text{Zonas}, \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}$$

$$\text{cantTerneros}_{venden_{at}} =$$

$$\begin{cases} \text{cantTerneros}_{a-1, Hijade_t} & \text{si } \text{Anodevida}_{v_{at}} = 1 \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (99)$$

$$\forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}$$

$$\text{cantVacas}_{retiradas_{at}} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } \text{Anodevida}_{v_{at}} = 0 \\ \text{cantTerneras}_{a-1, Hijade_t} - \text{cantAnimales}_{v_{at}} & \text{si } \text{Anodevida}_{v_{at}} = 1 \\ \text{cantAnimales}_{v_{a-1,t}} - \text{cantAnimales}_{v_{at}} & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (100)$$

$$\forall a \in \{2 \dots \text{CantAnos}\}, \forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}$$

$$\text{cantVacas}_{retiradas_{at}} = \text{CantAnimales}_{i_t} - \text{cantAnimales}_{v_{at}}, \quad (101)$$

$$\forall a \in \{1 \dots 1\}, \forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}$$

$$\begin{aligned}
& \text{produccion_portipo}_{at} = \\
& \sum_{o=1}^{\text{CantOrdenes}} \sum_{d=1}^{\text{CantDias}} \sum_{z \in \text{Zonas}} \sum_{l \in \text{Lotes}} \frac{305}{\text{CantDias}} \times \\
& \frac{cR_{odzatl} \times Cal_z - vL_{odatl} \times loteEnZona_{odlza} \times (ReqBasal_{at} + ReqTras_{atz})}{ENL} \times \begin{cases} 0, & \text{si } Anodevida_v_{at} < 3 \\ 0, 8, & \text{si } Anodevida_v_{at} = 3 \\ 0, 95, & \text{si } Anodevida_v_{at} = 4 \\ 1, & \text{si } Anodevida_v_{at} = 5 \\ 1, & \text{si } Anodevida_v_{at} = 6 \\ 0, 95, & \text{si } Anodevida_v_{at} = 7 \\ 0, 3, & \text{si } Anodevida_v_{at} = 8 \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases} \\
& \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}
\end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned}
& \text{consumo_portipo}_{at} = \sum_{o=1}^{\text{CantOrdenes}} \sum_{d=1}^{\text{CantDias}} \sum_{z \in \text{Zonas}} \sum_{l \in \text{Lotes}} cR_{odzatl}, \\
& \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}
\end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned}
& cR_{odzatl} \times Cal_z - vL_{odatl} \times loteEnZona_{odlza} \times (ReqBasal_{at} + ReqTras_{atz}) \geq 0, \\
& \forall o \in \{1 \dots \text{CantOrdenes}\}, \forall d \in \{1 \dots \text{CantDias}\}, \forall z \in \text{Zonas}, \forall l \in \text{Lotes}, \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \\
& \forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}
\end{aligned} \tag{104}$$

$$\begin{aligned}
& vL_{o,p \times Dur_periodo+d,atl} = vL_{o,p \times Dur_periodo+d+1,atl}, \\
& \forall o \in \{1 \dots \text{CantOrdenes}\}, \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}, \forall l \in \text{Lotes}, \\
& \forall p \in \{0 \dots (\frac{\text{CantDias}}{\text{Dur_periodo}}) - 1\}, \forall d \in \{1 \dots \text{Dur_periodo} - 1\}
\end{aligned} \tag{105}$$

$$\begin{aligned}
& vL_{odatl} = vL_{o,d+1,atl}, \\
& \forall o \in \{1 \dots \text{CantOrdenes}\}, \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}, \forall l \in \text{Lotes}, \\
& \forall d \in \{\text{Dur_periodo} \times (\frac{\text{CantDias}}{\text{Dur_periodo}}) + 1 \dots \text{CantDias} - 1\}
\end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned}
& vL_{1datl} = vL_{2datl}, \\
& \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}, \forall l \in \text{Lotes}, \forall d \in \{1 \dots \text{CantDias}\}
\end{aligned} \tag{107}$$

$$\begin{aligned}
& tlp_{natl} = \frac{\sum_{d=1+(n-1) \times \text{Dur_periodo}}^{\min(n_periodo, \text{CantDias})} \sum_{o=1}^{\text{CantOrdenes}} vL_{odatl}}{\text{CantOrdenes} \times (\min(n \times \text{Dur_periodo}, \text{CantDias}) - (n-1) \times \text{Dur_periodo})}, \\
& \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \forall n \in \{1 \dots \text{Num_periodos}\}, \forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}, \forall l \in \text{Lotes}
\end{aligned} \tag{108}$$

$$\begin{aligned}
& lzp_{nalz} = \sum_{d=1+(n-1) \times \text{Dur_periodo}}^{\min(n \times \text{Dur_periodo}, \text{CantDias})} \sum_{o=1}^{\text{CantOrdenes}} loteEnZona_{odlza}, \\
& \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\}, \forall n \in \{1 \dots \text{Num_periodos}\}, \forall l \in \text{Lotes}, \forall z \in \text{Zonas}
\end{aligned} \tag{109}$$

Anexo C

Se comparan los resultados entre los modelos base, base económico, y con recría y sus respectivas versiones linealizadas.

Comparación del modelo base con el modelo base linealizado

Para validar la equivalencia entre ambas formulaciones, se resolvieron los modelos base y base linealizado en tres escenarios contrastantes: Escenario A, con alimento abundante; Escenario B, con alimento medio; y Escenario C, con alimento escaso. Los parámetros utilizados se presentan en la Tabla 39.

Parámetro	Modelo base			Modelo base linealizado		
	Esc. A	Esc. B	Esc. C	Esc. A	Esc. B	Esc. C
<i>Zonas</i>	$z0$	$z0$	$z0$	$z0$	$z0$	$z0$
<i>Lotes</i>	1	1	1	1	1	1
<i>Distancias_{z0}</i>	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
<i>Alimento_{z0}</i>	∞	13.056	8.704	∞	13.056	8.704
<i>Cal_{z0}</i>	1,45	1,45	1,45	1,45	1,45	1,45
<i>Porcentaje_grasa</i>	0,036	0,036	0,036	0,036	0,036	0,036
<i>Porcentaje_prot</i>	0,031	0,031	0,031	0,031	0,031	0,031
<i>CantTiposVacas</i>	1	1	1	1	1	1
<i>PV₁</i>	550	550	550	550	550	550
<i>SL</i>	20	20	20	20	20	20
<i>FCM</i>	23	23	23	23	23	23
<i>Conspot_t</i>	19,342	19,342	19,342	19,342	19,342	19,342
<i>CantAnimales</i>	10	10	10	10	10	10
<i>CantOrdenes_dia</i>	2	2	2	-	-	-
<i>CantOrdenes</i>	-	-	-	2	2	2
<i>Dur_periodo</i>	30	30	30	30	30	30
<i>CantOrdenes_periodo</i>	60	60	60	-	-	-
<i>Num_periodos</i>	3	3	3	3	3	3
<i>CantDias</i>	-	-	-	90	90	90
<i>ENL</i>	0,696	0,696	0,696	0,696	0,696	0,696
<i>ReqTras_{tz}</i>	0,124	0,124	0,124	0,124	0,124	0,124
<i>ReqBasal_t</i>	4,543	4,543	4,543	4,543	4,543	4,543

Tabla 39: Parámetros de entrada para validación equivalencia modelo base

Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 40, donde se puede observar que los resultados son los mismos para los tres casos. Se concluye que los modelos son equivalentes.

Escenario	Modelo base	Modelo base linealizado
<i>A</i>	24.197,2	24.197,2
<i>B</i>	15.130,9	15.130,9
<i>C</i>	6.064,36	6.064,36

Tabla 40: Resultados validación equivalencia modelo base

Comparación del modelo base económico con el modelo base económico linealizado

Para validar la equivalencia entre ambas formulaciones, se resolvieron los modelos económico y económico linealizado en los mismos escenarios planteados en la Tabla 39, con el añadido de los parámetros económicos presentados en la Tabla 41.

Parámetro	Modelo base			Modelo base linealizado		
	Esc. A	Esc. B	Esc. C	Esc. A	Esc. B	Esc. C
<i>Precio_leche</i>	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
<i>Costo_alimento_{z0}</i>	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15

Tabla 41: Parámetros de entrada que se añaden a la equivalencia modelo base

Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 42, de donde se puede observar que los resultados son los mismos para los tres casos. Se concluye que los modelos son equivalentes.

Escenario	Modelo base económico	Modelo base económico linealizado
<i>A</i>	7.067,69	7.067,69
<i>B</i>	4.093,96	4.093,96
<i>C</i>	1.120,14	1.120,14

Tabla 42: Resultados validación equivalencia modelo base económico

Comparación del modelo con recría con el modelo con recría linealizado

Para validar la equivalencia entre ambas formulaciones, se resolvieron los modelos con recría y con recría linealizado también en tres escenarios: Escenario A, con alimento abundante; Escenario B, con alimento medio; y Escenario C, con alimento escaso. El resumen de los parámetros utilizados se presentan en la Tabla 43, dejándose por fuera aquellos que se pueden calcular o valen cero.

Parámetro	Modelo con recría			Modelo con recría linealizado		
	Esc. A	Esc. B	Esc. C	Esc. A	Esc. B	Esc. C
<i>CantAnos</i>	3	3	3	3	3	3
<i>Lotes</i>	<i>L1</i>	<i>L1</i>	<i>L1</i>	<i>L1</i>	<i>L1</i>	<i>L1</i>
<i>Zonas</i>	<i>z0</i>	<i>z0</i>	<i>z0</i>	<i>z0</i>	<i>z0</i>	<i>z0</i>
<i>CantTiposVacas</i>	3	3	3	3	3	3
<i>Anodevida_v1,1</i>	3	3	3	3	3	3
<i>CantAnimales_i1</i>	10	10	10	10	10	10
<i>Pot_gen1</i>	7.000	7.000	7.000	7.000	7.000	7.000
<i>PV_v1,1</i>	550	550	550	550	550	550
<i>Num_periodos</i>	12	12	12	12	12	12
<i>Dur_periodo</i>	30	30	30	30	30	30
<i>CantDias</i>	360	360	360	360	360	360
<i>Cantordenes_dia</i>	2	2	2	-	-	-
<i>CantOrdenes</i>	-	-	-	2	2	2
<i>Distancias_z0</i>	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
<i>Cal_z0</i>	1,45	1,45	1,45	1,45	1,45	1,45
<i>Alimento_a∈1...3,z0</i>	∞	36.000	10.500	∞	36.000	10.500
<i>Porcentaje_costo_z0</i>	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
<i>Porcentaje_prenez</i>	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85
<i>Porcentaje_grasa</i>	0,036	0,036	0,036	0,036	0,036	0,036
<i>Porcentaje_prot</i>	0,031	0,031	0,031	0,031	0,031	0,031
<i>Precio_leche</i>	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
<i>Precio_ternero</i>	60	60	60	60	60	60
<i>Precio_kg_vaca</i>	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
<i>Precio_kg_vaca</i>	-	-	-	10.000	10.000	10.000

Tabla 43: Parámetros de entrada para validación de equivalencia entre modelos con recría

Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 44, de donde se puede observar que los resultados son los mismos para los tres casos. Se concluye que los modelos son equivalentes.

Escenario	Modelo con recría	Modelo con recría económico
<i>A</i>	59.978,1	59.978,1
<i>B</i>	35.389,2	35.389,2
<i>C</i>	14.844,7	14.844,7

Tabla 44: Resultados validación equivalencia modelo con recría

Anexo D

Ajuste de restricciones del Caso 4

Se añadió una restricción al modelo con recría, con el fin de acotar la cantidad total de vacas en el rodeo. Esta se presenta en la Ecuación (77), donde “Capacidad” hace referencia a la cantidad de animales asociada al tamaño máximo del rodeo que se puede sostener.

$$\sum_{t=1}^{\text{CantTiposVacas}} \text{CantAnimales_v}_{at} \leq \text{Capacidad} \quad \forall a \in \{1 \dots \text{CantAnos}\} \quad (110)$$

Ajuste de restricciones del Caso 5

Se añadió una restricción al modelo con recría, con el fin de determinar la cantidad total de vacas del tipo 1 en el rodeo hasta el año 6. Esta se presenta en la Ecuación (78).

$$\sum_{t=1}^{\text{CantTiposVacas}} \text{CantAnimales_v}[a, 1] = 100 \quad \forall a \in \{1 \dots 5\} \quad (111)$$

Ajuste de restricciones del Caso 6

Se añadió una restricción al modelo con recría para exigir que el consumo de las vacas que permanecen en el rodeo durante los dos primeros años sea igual al consumo potencial, independientemente de la conformación del rodeo elegida. Esta restricción se presenta en la Ecuación (79).

$$cR_{pzatl} = vL_{patl} \times \text{loteEnZona}_{plza} \times \left(\frac{\text{Conspot}_{at}}{\text{Dur_periodo} \times \text{Num_periodos} \times \text{CantOrdenes_dia}} \right), \quad (112)$$

$\forall p \in \{1 \dots \text{Num_periodos}\}, \forall z \in \text{Zonas}, \forall l \in \text{Lotes}, \forall a \in \{1 \dots 2\},$
 $\forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\}, \text{con } \text{Anodevida_v}_{at} \geq 3$

Ajuste de restricciones del Caso 8: Análisis del impacto de la posibilidad de retiro de vacas que aporta el modelo con recría

Para lograr las Versiones (i) y (ii) del Caso 3: Análisis del impacto de la posibilidad de retiro de vacas que aporta el modelo con recría, en ambas versiones se establece una cantidad de tipos de vaca igual a 1 (parámetro $\text{CantTiposVacas} = 1$). De esta manera, el análisis se centra en la evolución de un único grupo de vacas, diferenciándose únicamente en la posibilidad de retirar animales.

Mientras que para lograr la versión dinámica no se modifica ninguna restricción del modelo con recría, para lograr la versión estática, se realizan las siguientes modificaciones:

- La Ecuación [31] se sustituye por la [55]: la cantidad de animales en el primer año de corrida debe ser exactamente igual a la cantidad inicial del rodeo, lo que garantiza que no haya variaciones en la cantidad de vacas desde el inicio.

$$\text{cantAnimales_v}_{at} = \text{CantAnimales_i}_t \quad \forall a \in \{1 \dots 1\}, \forall t \in \{1 \dots \text{CantTiposVacas}\} \quad (113)$$

- La Ecuación [32] se sustituye por la [56]: a partir del segundo año de simulación, la cantidad de animales en el rodeo se define como igual a la del año anterior, evitando cualquier variación en el número de vacas.

$$cantAnimales_{vat} = \begin{cases} 0 & \text{si } Anodevida_{vat} = 0 \\ \lceil 0, 5 \times \lfloor Porcentaje_{prenez} \times cantAnimales_{v_{a-1}, Hijadet} \rfloor \rceil & \text{si } Anodevida_{vat} = 1 \\ cantAnimales_{v_{a-1}, t} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\forall a \in \{2 \dots CantAnos\}, \forall t \in \{1 \dots CantTiposVacas\}$

(114)

Anexo E

En este Anexo se presentan los códigos utilizado para programar la formulación matemática del modelo con recría, definida en la Sección 3.

Modelo con recría

```
1
2 # Definicion de parametros
3
4 param cantAnos; /*Cantidad de anos para los que se quiere realizar el
   analisis*/
5 set Lotes; /*Lotes en los que se desea agrupar a las vacas para su
   manejo*/
6 set Zonas; /*Zonas del establecimiento donde se enviara a alimentarse
   a las vacas*/
7 param Alimento{a in 1..cantAnos,z in Zonas}; /*Cantidad de alimento
   total por zona(kg) por ano*/
8 param Distancias{z in Zonas}; /*Distancia de la sala de ordene a la
   zona (km)*/
9 param porcentaje_costo{z in Zonas}; /*Porcentaje del precio de la leche
   que corresponde al costo asociado al kg de alimento de cada zona
   */
10 param cantOrdenes_dia := 2; /*Cantidad de ordenes diarios*/
11 param dur_periodo := 30; /*Cantidad de dias para los que se quiere
   mantener la asignacion de los lotes (un periodo)*/
12 param num_periodos := 12; /*Cantidad de periodos para los cuales se
   quiere correr al ano*/
13 param cantOrdenes_periodo:= cantOrdenes_dia * dur_periodo; /*Cantidad
   de ordenes por periodo*/
14 param cal{z in Zonas}; /*Energia que proporciona cada kg de materia
   seca por zona (Mcal/kg)*/
15 param porcentaje_grasa; /*Porcentaje de grasa que posee la leche*/
16 param porcentaje_prot; /*Porcentaje de proteina que posee la leche*/
17 param ENl := porcentaje_grasa*9.29 + porcentaje_prot*5.47 + 0.192; /*
   Litros producidos por energia neta (Mcal/Lt)*/
18 param cantTiposVacas; /*Cantidad de tipos de vacas maxima segun la
   cantidad de tipos que se tienen inicialmente y la cantidad de anos
   que se analiza*/
19 param hijade{t in 1..cantTiposVacas}; /*Tipo de vaca del cual es hijo
   el tipo en cuestion - y del cual se heredan sus caracteristicas:
   Potgen,PV*/
20 param anodevida_v{a in 1..cantAnos,t in 1..cantTiposVacas}; /*Edad de
   los distintos tipos de vaca segun el ano (0 si no nacieron aun, 1
   cuando nacen)*/
21 param PV_v{a in 1..cantAnos,1..cantTiposVacas}; /*Peso vivo de cada
   tipo de vaca dependiendo del ano*/
22 param cantAnimales_i{1..cantTiposVacas}; /*Cantidad de vacas de cada
   tipo que se tienen en el rebaño inicialmente*/
23 param SL{d in 1..365};
24 param porcentaje_prenez; /*Cantidad de vacas que se estiman quedan
   preñadas porcentualmente*/
25 param precio_leche; /*Valor de venta un litro de leche en dol*/
26 param precio_ternero; /*Valor de venta de un ternero en dol*/
27 param cantDias := num_periodos*dur_periodo;
28 param pot_gen{t in 1..cantTiposVacas}; /*Es el potencial genetico de
   produccion anual de cada tipo*/
29 param PPD{d in 1..365,a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas} :=
```

```

    pot_gen[t] * 0.00318 * (d^0.1075) * (2.7183^(-0.003*d)); /*
    Definicion de variable intermedia para calculo de consumo
    potencial*/
30 param precio_kg_vaca; /*Valor de venta de una vaca expresado en dol/kg
    */
31 param FCM{d in 1..365,a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas} := (
    PPD[d,a,t]) * (0.4 + 15 * porcentaje_grasa);
32 param conspot_diario{d in 1..cantDias,a in 1..cantAnos, t in 1..
    cantTiposVacas} := if anodevida_v[a,t] < 3 then 0.025 * PV_v[a,t]
33 else (0.372 * FCM[d,a,t] + 0.0968 * (PV_v[a,t]^0.75)) * (1 -
    2.7183^(-0.192*(SL[d]+3.67))); /*Consumo potencial para vacas*/
34 param conspot{a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas} := sum{d in
    1..cantDias} conspot_diario[d,a,t]; /*Consumo maximo de alimento (
    en MS) por tipo, calculado a partir del potgen y el peso vivo*/
35 param reqBasal{a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas} := (0.08*(
    PV_v[a,t])^0.75)/2; /*Energia basal (Mcal) por tipo de vaca por
    ordene*/
36 param reqTras{a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas, z in Zonas} :=
    0.00045*(PV_v[a,t])*Distancias[z];/*Energia de traslado (Mcal)
    por tipo de vaca y zona por ordene*/
37
38 # Definicion de variables
39
40 var cantAnimales_v{a in 1..cantAnos,t in 1..cantTiposVacas} >= 0,
    integer; /*Cantidad de vacas de cada tipo al principio de cada ano
    */
41 var vL{p in 1..num_periodos, a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas,
    l in Lotes} >= 0, integer; /*Cantidad de vacas de cierto tipo
    asignadas a cierto lote en cierto periodo*/
42 var cR{p in 1..num_periodos, z in Zonas, a in 1..cantAnos, t in 1..
    cantTiposVacas, l in Lotes} >= 0; /*Consumo real total (kg) de MS
    de cierto tipo de vaca en cierto periodo*/
43 var loteEnZona{p in 1..num_periodos, Lotes, Zonas,a in 1..cantAnos} >=
    0, integer; /*Cantidad de veces que se envia a cierta zona a
    alimentar a cierto lote en cierto periodo*/
44 var cantTerneros_venden{a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas} >=
    0, integer; /*Cantidad de terneros que se venden al principio de
    cada ano*/
45 var cantVacas_retiradas{a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas} >=
    0, integer; /*Cantidad de vacas que se retiran del rodeo de cierto
    tipo al principio de cada ano*/
46 var consTotal >= 0; /*Expresa el consumo total real de alimento en los
    dias corridos */
47 var consPotTot >= 0; /*Expresa el consumo total potencial de alimento
    en los dias corridos */
48 var produccion_portipo{a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas}; /*
    Produccion de leche (en kg) anual de cierto tipo*/
49 var consumo_portipo{a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas} >= 0; /*
    Consumo de alimento (en kg) anual de cierto tipo*/
50 var beneficio; /*Calculo del beneficio economico total*/
51
52 #Funcion objetivo
53
54 maximize beneficio_economico:
55     beneficio;
56
57 # Restricciones
58

```

```

59 s.t. Cantidad_vacas_tipo_inicial{a in 1..1,t in 1..cantTiposVacas}:
60   cantAnimales_v[a,t] <= cantAnimales_i[t];/*Definicion de la cantidad
      de vacas al inicio del primer ano*/
61 s.t. Cantidad_vacas_tipo_siguientes{a in 2..cantAnos,t in 1..
      cantTiposVacas}:
62   cantAnimales_v[a,t] <= if anodevida_v[a,t] = 0 then 0 else
63     if anodevida_v[a,t] = 1 then ceil(0.5 * floor(
      porcentaje_prenez*cantAnimales_v[a-1,hijade[t]]))
      else/*Asume que de los terneros que nacen, la mitad
      son hembras y la mitad machos*/
64     cantAnimales_v[a-1,t]; /*Definicion de la cantidad de
      vacas al principio de cierto ano para cada tipo de
      vaca - debe ser inferior o igual a la que se
      tenia el ano anterior*/
65 s.t. Solo_zona_Lote{p in 1..num_periodos, l in Lotes, a in 1..cantAnos
      }:
66   sum{z in Zonas} loteEnZona[p,l,z,a] = cantOrdenes_periodo; /*Deben
      asignarse los lotes a las zonas para todos los ordenes*/
67 s.t. Vacas_tipo_lote{p in 1..num_periodos, a in 1..cantAnos, t in 1..
      cantTiposVacas}:
68   sum{l in Lotes} vL[p,a,t,l] = cantAnimales_v[a,t]; /*Todas las vacas
      de cada tipo tienen que estar asignadas a uno y solo un lote
      por periodo*/
69 s.t. Cons_real_menores {p in 1..num_periodos, z in Zonas, l in Lotes,
      a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas: anodevida_v[a,t] < 3}:
70   cR[p,z,a,t,l] = vL[p,a,t,l] * loteEnZona[p,l,z,a] * (conspot[a,t]
      ]/(dur_periodo*num_periodos*cantOrdenes_dia)); /*Se debe
      alimentar a las vacas en crecimiento con lo maximo para un
      crecimiento optimo*/
71 s.t. Cons_real_mayores {p in 1..num_periodos, z in Zonas, l in Lotes,
      a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas: anodevida_v[a,t] >= 3}:
72   cR[p,z,a,t,l] <= vL[p,a,t,l] * loteEnZona[p,l,z,a] * (conspot[a,t]
      ]/(dur_periodo*num_periodos*cantOrdenes_dia)); /*Se define el
      consumo real por ordene teniendo como valor maximo al
      potencial*/
73 s.t. Cons_real_zona{z in Zonas, a in 1..cantAnos}:
74   sum{p in 1..num_periodos, t in 1..cantTiposVacas,l in Lotes} cR[p,z,
      a,t,l]<= Alimento[a,z]; /*Implica que el consumo real por zona
      no puede superar la disponibilidad de alimento*/
75 s.t. Terneros_venta{a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas}:
76   cantTerneros_venden[a,t] = if anodevida_v[a,t] = 1 then floor(0.5 *
      floor(porcentaje_prenez*cantAnimales_v[a-1,hijade[t]])) else 0;
      /*Define la cantidad de terneros que se venden como la mitad de
      los que nacen*/
77 s.t. Vacas_retiradas_inicial{a in 1..1, t in 1..cantTiposVacas}:
78   cantVacas_retiradas[a,t] = cantAnimales_i[t] - cantAnimales_v[a,t];
      /*Define la cantidad de vacas que se retiran del rebanio inicial
      (al comienzo del primer ano)*/
79 s.t. Vacas_retiradas_siguiente{a in 2..cantAnos, t in 1..
      cantTiposVacas}:
80   cantVacas_retiradas[a,t] = if anodevida_v[a,t] = 0 then 0 else
81     if anodevida_v[a,t] = 1 then ceil(0.5 * floor(
      porcentaje_prenez*cantAnimales_v[a-1,hijade[t]]))
      - cantAnimales_v[a,t] else
82     cantAnimales_v[a-1,t] - cantAnimales_v[a,t]; /*
      Define la cantidad de vacas retiradas al
      principio de cada ano, luego del primer ano*/
83 s.t. Produccion_tipo_ano{a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas}:

```

```

84  produccion_portipo[a,t] = sum {p in 1..num_periodos, z in Zonas, l
      in Lotes}
85    (305/(dur_periodo*num_periodos)) * ((cR[p,z,a,t,l] * cal[z] - vL[p
      ,a,t,l] * loteEnZona[p,l,z,a] * (reqBasal[a,t] + reqTras[a,t,z
      ]))/EN1) *
86    if anodevida_v[a,t] < 3 then 0 else
87      if anodevida_v[a,t] = 3 then 0.8 else
88        if anodevida_v[a,t] = 4 then 0.95 else
89          if anodevida_v[a,t] = 5 then 1 else
90            if anodevida_v[a,t] = 6 then 1 else
91              if anodevida_v[a,t] = 7 then 0.95 else
92                if anodevida_v[a,t] = 8 then 0.3 else
93                  0; /*Define la produccion anual que tiene cada tipo de
                        vaca, incluyendo un aproximado de la influencia
                        de la edad (ciclo de lactancia)*/
94  s.t. Consumo_tipo_ano{a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas}:
95  consumo_portipo[a,t] = sum {p in 1..num_periodos, z in Zonas, l in
      Lotes} cR[p, z, a, t, l]; /*Define el consumo anual de cada tipo*/
96  s.t. Cumplimiento_energia{p in 1..num_periodos, z in Zonas, l in Lotes
      , a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas}:
97    cR[p, z, a, t, l] * cal[z] - vL[p,a,t,l] * loteEnZona[p,l,z,a] * (
      reqBasal[a,t] + reqTras[a,t,z]) >= 0; /*Implica que se cumpla
      en todo periodo el requerimiento energetico minimo de las vacas
      del rodeo*/
98  s.t. Beneficiototal:
99    beneficio = precio_leche * sum {a in 1..cantAnos, t in 1..
      cantTiposVacas}
100      produccion_portipo[a,t] +
101      precio_ternero * sum {a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas}
102        cantTerneros_venden[a,t] +
103      sum {a in 1..cantAnos, t in 1..cantTiposVacas}
104        cantVacas_retiradas[a,t] * PV_v[a,t] * precio_kg_vaca -
105      sum {p in 1..num_periodos, z in Zonas, l in Lotes, a in 1..cantAnos,
      t in 1..cantTiposVacas}
106        cR[p,z,a,t,l] * porcentaje_costo[z] * precio_leche;
107
108  #Definicion de datos (ejemplo)
109
110  data;
111
112  param cantAnos := 7;
113  set Lotes:= L1;
114  set Zonas := z0
115      z1
116      /*z2*/;
117  param porcentaje_costo := z0 0.2
118      z1 0.8
119      /*z2 0.4*/;
120  param Alimento 1 z0 400000
121      2 z0 400000
122      3 z0 400000
123      4 z0 400000
124      5 z0 400000
125      6 z0 400000
126      7 z0 400000
127      1 z1 101500
128      2 z1 101500
129      3 z1 101500

```

```

130      4 z1 101500
131      5 z1 101500
132      6 z1 101500
133      7 z1 101500
134      /*1 z2 500000
135      2 z2 500000
136      3 z2 500000
137      4 z2 500000
138      5 z2 500000
139      6 z2 500000
140      7 z2 500000*/
141      ;
142 param Distancias := z0 1
143      z1 0
144      /*z2 3*/;
145 param cal := z0 1.45
146      z1 1.65
147      /*z2 1.2*/;
148 param cantTiposVacas := 21; /*en 5 anos son 8 y en 7 son 21*/
149 param hijade := 2 1
150      3 1
151      4 1
152      5 2
153      6 1
154      7 2
155      8 3
156      9 1
157      10 2
158      11 3
159      12 4
160      13 5
161      14 1
162      15 2
163      16 3
164      17 4
165      18 5
166      19 6
167      20 7
168      21 8;
169 param pot_gen :=
170      1 7000
171      2 7000
172      3 7000
173      4 7000
174      5 7000
175      6 7000
176      7 7000
177      8 7000
178      9 7000
179      10 7000
180      11 7000
181      12 7000
182      13 7000
183      14 7000
184      15 7000
185      16 7000
186      17 7000
187      18 7000

```

```

188      19  7000
189      20  7000
190      21  7000;
191
192 param anodevida_v :
193      1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21:=
194      1  3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
195      2  4 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
196      3  5 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
197      4  6 3 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
198      5  7 4 3 2 2 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
199      6  8 5 4 3 3 2 2 2 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0
200      7  9 6 5 4 4 3 3 3 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1;
201 param PV_v :
202      1          2          3          4          5          6          7
203      15      8      9      10      11      12      13      14
204      1 550      0      0      0      0      0      0      0
205      0      0      0      0      0      0      0      0
206      0      0      0      0      0      0      0      0
207      2 550      183.33      0      0      0      0      0
208      0      0      0      0      0      0      0      0
209      0      0      0      0      0      0      0      0
210      3 550      366.67      183.33      0      0      0      0
211      0      0      0      0      0      0      0      0
212      0      0      0      0      0      0      0      0
213      4 550      550      366.67      183.33      183.33      0
214      0      0      0      0      0      0      0      0
215      0      0      0      0      0      0      0      0
216      5 550      550      550      366.67      366.67      183.33
217      183.33      183.33      0      0      0      0      0
218      0      0      0      0      0      0      0      0
219      6 550      550      550      550      550      366.67
220      366.67      366.67      183.33      183.33      183.33      183.33      0
221      0      0      0      0      0      0      0      0
222      7 550      550      550      550      550      550
223      550      550      366.67      366.67      366.67      366.67      366.67
224      183.33      183.33      183.33      183.33      183.33      183.33      183.33
225      ;
226 param cantAnimales_i := 1 100
227      2 0
228      3 0
229      4 0
230      5 0
231      6 0
232      7 0
233      8 0
234      9 0
235      10 0
236      11 0
237      12 0
238      13 0
239      14 0
240      15 0
241      16 0
242      17 0
243      18 0

```

```

229         19  0
230         20  0
231         21  0;
232 param porcentaje_prenez := 0.85;
233 param porcentaje_grasa := 0.036;
234 param porcentaje_prot := 0.031;
235 param precio_leche := 0.4;
236 param precio_ternero := 350;
237 param precio_kg_vaca := 2;
238 param SL :=
239     1 1
240     2 1
241     3 1
242     4 1
243     5 1
244     6 1
245     7 1
246     8 2
247     9 2
248    10 2
249    11 2
250    12 2
251    13 2
252    14 2
253    15 3
254    16 3
255    17 3
256    18 3
257    19 3
258    20 3
259    21 3
260    22 4
261    23 4
262    24 4
263    25 4
264    26 4
265    27 4
266    28 4
267    29 5
268    30 5
269    31 5
270    32 5
271    33 5
272    34 5
273    35 5
274    36 6
275    37 6
276    38 6
277    39 6
278    40 6
279    41 6
280    42 6
281    43 7
282    44 7
283    45 7
284    46 7
285    47 7
286    48 7

```

287	49	7
288	50	8
289	51	8
290	52	8
291	53	8
292	54	8
293	55	8
294	56	8
295	57	9
296	58	9
297	59	9
298	60	9
299	61	9
300	62	9
301	63	9
302	64	10
303	65	10
304	66	10
305	67	10
306	68	10
307	69	10
308	70	10
309	71	11
310	72	11
311	73	11
312	74	11
313	75	11
314	76	11
315	77	11
316	78	12
317	79	12
318	80	12
319	81	12
320	82	12
321	83	12
322	84	12
323	85	13
324	86	13
325	87	13
326	88	13
327	89	13
328	90	13
329	91	13
330	92	14
331	93	14
332	94	14
333	95	14
334	96	14
335	97	14
336	98	14
337	99	15
338	100	15
339	101	15
340	102	15
341	103	15
342	104	15
343	105	15
344	106	16

345	107	16
346	108	16
347	109	16
348	110	16
349	111	16
350	112	16
351	113	17
352	114	17
353	115	17
354	116	17
355	117	17
356	118	17
357	119	17
358	120	18
359	121	18
360	122	18
361	123	18
362	124	18
363	125	18
364	126	18
365	127	19
366	128	19
367	129	19
368	130	19
369	131	19
370	132	19
371	133	19
372	134	20
373	135	20
374	136	20
375	137	20
376	138	20
377	139	20
378	140	20
379	141	21
380	142	21
381	143	21
382	144	21
383	145	21
384	146	21
385	147	21
386	148	22
387	149	22
388	150	22
389	151	22
390	152	22
391	153	22
392	154	22
393	155	23
394	156	23
395	157	23
396	158	23
397	159	23
398	160	23
399	161	23
400	162	24
401	163	24
402	164	24

403	165	24
404	166	24
405	167	24
406	168	24
407	169	25
408	170	25
409	171	25
410	172	25
411	173	25
412	174	25
413	175	25
414	176	26
415	177	26
416	178	26
417	179	26
418	180	26
419	181	26
420	182	26
421	183	27
422	184	27
423	185	27
424	186	27
425	187	27
426	188	27
427	189	27
428	190	28
429	191	28
430	192	28
431	193	28
432	194	28
433	195	28
434	196	28
435	197	29
436	198	29
437	199	29
438	200	29
439	201	29
440	202	29
441	203	29
442	204	30
443	205	30
444	206	30
445	207	30
446	208	30
447	209	30
448	210	30
449	211	31
450	212	31
451	213	31
452	214	31
453	215	31
454	216	31
455	217	31
456	218	32
457	219	32
458	220	32
459	221	32
460	222	32

461	223	32
462	224	32
463	225	33
464	226	33
465	227	33
466	228	33
467	229	33
468	230	33
469	231	33
470	232	34
471	233	34
472	234	34
473	235	34
474	236	34
475	237	34
476	238	34
477	239	35
478	240	35
479	241	35
480	242	35
481	243	35
482	244	35
483	245	35
484	246	36
485	247	36
486	248	36
487	249	36
488	250	36
489	251	36
490	252	36
491	253	37
492	254	37
493	255	37
494	256	37
495	257	37
496	258	37
497	259	37
498	260	38
499	261	38
500	262	38
501	263	38
502	264	38
503	265	38
504	266	38
505	267	39
506	268	39
507	269	39
508	270	39
509	271	39
510	272	39
511	273	39
512	274	40
513	275	40
514	276	40
515	277	40
516	278	40
517	279	40
518	280	40

519	281	41
520	282	41
521	283	41
522	284	41
523	285	41
524	286	41
525	287	41
526	288	42
527	289	42
528	290	42
529	291	42
530	292	42
531	293	42
532	294	42
533	295	43
534	296	43
535	297	43
536	298	43
537	299	43
538	300	43
539	301	43
540	302	44
541	303	44
542	304	44
543	305	44
544	306	44
545	307	44
546	308	44
547	309	44
548	310	44
549	311	44
550	312	44
551	313	44
552	314	44
553	315	44
554	316	44
555	317	44
556	318	44
557	319	44
558	320	44
559	321	44
560	322	44
561	323	44
562	324	44
563	325	44
564	326	44
565	327	44
566	328	44
567	329	44
568	330	44
569	331	44
570	332	44
571	333	44
572	334	44
573	335	44
574	336	44
575	337	44
576	338	44

```
577 339 44
578 340 44
579 341 44
580 342 44
581 343 44
582 344 44
583 345 44
584 346 44
585 347 44
586 348 44
587 349 44
588 350 44
589 351 44
590 352 44
591 353 44
592 354 44
593 355 44
594 356 44
595 357 44
596 358 44
597 359 44
598 360 44
599 ;
600
601 # Solucion del modelo
602
603 solve;
```

Listado 1: Código del modelo con recría