

TESIS DE MAESTRÍA

---

Variedades tóricas, una  
perspectiva desde la teoría de  
invariantes y los monoides  
algebraicos.

---

Gerónimo de León Ramírez

Orientador:

Dr. Alvaro Rittatore  
Centro de Matemática, Facultad de Ciencias

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE DESARROLLO DE LAS CIENCIAS BÁSICAS  
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA  
MONTEVIDEO, URUGUAY



*A Mel*



## Resumen

En esta tesis estudiaremos las variedades tóricas sobre cualquier cuerpo algebraicamente cerrado, desde una perspectiva de la teoría de invariantes y los monoides algebraicos. Repasaremos resultados que expresan la geometría de las variedades tóricas normales en función de la combinatoria de los conos racionales que las generan. Mostraremos que los conos racionales inducen variedades tóricas normales. Más aún, una vez definidos los morfismos, mostraremos que la categoría de las variedades tóricas afines normales es equivalente a la categoría de los conos racionales estrictamente convexos, y que las variedades tóricas afines no normales no están lejos de esta clasificación. Mostraremos también que la categoría de las variedades tóricas normales es equivalente a la categoría de los abanicos de conos racionales, mediante el uso de un teorema de Sumihiro. Recopilaremos y probaremos todos los resultados necesarios sobre conos racionales que están dispersos en la literatura y muchas veces son asumidos, como la caracterización de las caras de un cono racional que se verá en 2.13.

## Abstract

In this thesis, we study toric varieties over any algebraically closed field, from the perspective of invariant theory and algebraic monoids. We review results that express the geometry of normal toric varieties in terms of the combinatorics of the rational cones that generate them. We show that rational cones give rise to normal toric varieties. Moreover, once morphisms are defined, we show that the category of normal affine toric varieties is equivalent to the category of strictly convex rational cones, and that non-normal affine toric varieties are not far from this classification. We also show that the category of normal toric varieties is equivalent to the category of fans of rational cones, using a theorem of Sumihiro. We compile and prove all the necessary results about rational cones that are scattered throughout the literature and often taken for granted, such as the characterization of the faces of a rational cone, which will be seen in 2.13.



## Agradecimientos

Me gustaría decirle gracias a toda la gente que me acompañó, apoyó, ayudó y alguna otra palabra con “a”, durante el proceso de esta maestría. En especial, a las siguientes personas:

A Alvarito, por haberme propuesto un tema tan divertido como desafiante, por haber estado siempre disponible para ayudarme a entender matemática (fuera necesaria para esta tesis o no). A Dalia, Gonzalo e Iván, por formar parte del tribunal y bancarse mi forma coloquial de escribir.

A Marcos, por haber sido un compañero, colega y amigo incondicional estos últimos dos años. Todo lo que no le agradecí en la monografía, se lo merece por diez en este párrafo.

A Mel, por haber estado siempre sin peros, por darme amor y fidelidad, y por ser una matemática brillante. Sin ella, no habría podido escribir la demostración que hace de cimientos de todo este trabajo, y no habría entendido todo lo que entendí estos años si no hubiéramos compartido tanto aprendizaje juntos.

A Sofía y Elena, que son unas crá y que siguen siendo mi inspiración.

A mis compañeros de cursos, seminarios, docencia y crecimiento personal (y a veces trabajo también) del kinder: a Taba, Fede, Lu, Nahuel, Juan, Mica, Clari, Pau, Favio, Alejo, Rodri, Mateo, Caucho, Chadi, Sergi, Gabriel.

A mis profesores y guías: al Gordo, Juliana, el Rata. A León, Seba, Iván, Negra, Leva, Samba, Juan, Nacho, Santi, Luispe, Bruno, Gustavo, Marcos, Javi.

A mi familia: a papá y mamá, por ser unos padres maravillosos y compañeros ahora de grandes también. Al Agú, por dejarme conocerlo después de tanto tiempo lejos y descubrir que es un muchacho maravilloso, y al Chiquito, un poco más a la distancia pero presente también.

A mis amigas no matemáticas: a Maggy, a Valen y Agus, por tantas charlas, bailes, juegos y debates.

Si me olvidé de alguien, sepan disculpar y hacen como Marcos: me avisan y la próxima les agradezco más (pero tienen que hacer como él y asegurarse de ser lo suficientemente presentes para ganárselo).

## Índice general

Resumen	3
Abstract	3
Agradecimientos	5
Introducción	9
Capítulo 1. Preliminares	11
1. Álgebra conmutativa	11
2. Haces	13
3. Variedades algebraicas	13
4. Grupos y monoides algebraicos	17
Capítulo 2. Conos y variedades tóricas afines	21
1. Conos racionales	21
2. Las caras de un cono racional	24
3. Los conos inducen variedades tóricas	33
4. Los conos inducen casi todas las variedades tóricas.	38
5. ¿Y los morfismos?	44
Capítulo 3. Abanicos y variedades tóricas	49
1. Pegado de variedades	49
2. Normalidad y separabilidad	53
3. $T_N$ -Órbitas	55
4. Las variedades tóricas normales vienen de abanicos.	63
5. Equivalencia categórica	67
Bibliografía	71



## Introducción

Dicen por ahí que no está bueno comenzar una charla (en este caso, una introducción) con una definición, pero no tendría sentido leer algo de esta tesis sin saber lo que es una variedad tórica.

Si  $\mathbb{k}$  es un cuerpo algebraicamente cerrado, llamamos toro de dimensión  $n$  al grupo algebraico  $T = (\mathbb{k}^*)^n$ . Una variedad tórica es una variedad algebraica  $X$  con un abierto denso isomorfo a  $T \simeq (\mathbb{k}^*)^n$  de forma que la multiplicación de  $T$  como grupo algebraico se extiende a una acción en toda la variedad, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T \times X & \xrightarrow{a} & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ T \times T & \xrightarrow{m} & T \end{array}$$

En el caso que  $X$  sea una variedad tórica afín y normal, se puede probar que el álgebra  $A$  que tiene a  $X$  como espectro maximal, i.e.  $X = \text{Spm}(A)$ , es el álgebra de un monoide  $S$  que es finitamente generado y sin torsión, es decir, se puede encajar en  $\mathbb{Z}^n$ . A su vez, se puede probar que este monoide es la intersección de un cono racional convexo en el espacio  $\mathbb{R}^n$  con el grupo  $\mathbb{Z}^n$ , lo que establece una relación entre los conos racionales en un espacio vectorial real y las variedades tóricas afines normales.

Cuando  $X$  no es afín, se puede hacer la misma construcción para sus cartas afines que sean tóricas, y los conos que resultan de esta construcción se intersectan siempre en una cara de ambos, lo que llamamos un abanico.

La relación entre los conos y las variedades tóricas es un ida y vuelta bien hecho, pues, una vez que definamos quiénes son nuestras flechas, tenemos que la categoría de las variedades tóricas afines normales es equivalente a la categoría de los conos racionales estrictamente convexos 2.38, y que la categoría de las variedades tóricas normales es equivalente a la categoría de los abanicos (3.19 y 3.26). Esto nos establece una correspondencia que nos ayuda a entender la geometría de la acción de una variedad tórica a través de la combinatoria de sus conos, por ejemplo:

- Los conos corresponden a variedades tóricas afines.
- Las caras corresponden a abiertos de la variedad.
- Los abanicos corresponden a variedades tóricas.
- El punto cero corresponde al toro.
- Los conos del abanico corresponden a las cartas afines de la variedad.
- Los interiores de los conos corresponden a las órbitas de la acción.
- Si el cono es maximal, la órbita es cerrada.

Que una variedad tenga un toro denso actuando en ella limita bastante la geometría de la variedad misma, es en este sentido que la combinatoria de los conos nos permite obtener información de la geometría de la variedad, además de la de la acción, por ejemplo:

- Si hay un único cono maximal y el resto son caras de éste, la variedad es afín.
- Si los conos provienen de un polígono, la variedad es proyectiva.
- Si la unión de los conos es todo el espacio vectorial, la variedad es completa.
- Si las aristas de cada cono forman parte de una base, la variedad es no singular.

En esta tesis, presentaremos estos resultados separados en dos capítulos: el caso afín y el caso general. Las construcciones estarán fuertemente apoyadas en los libros [Ful93] y [CLS11], con la principal diferencia que ambos libros trabajan únicamente en  $\mathbb{C}$  y nosotros trabajaremos sobre cualquier cuerpo algebraicamente cerrado. Esta diferencia es clave para entender el punto de vista desde el que trabajaremos, puesto que miraremos todos nuestros objetos ya sabiendo que las variedades tóricas afines son monoides algebraicos cuyo grupo de invertibles es un toro, e intentaremos entender la esencia algebraica de las construcciones sin dejarnos llevar por la topología en el caso de los complejos.

## Preliminares

Esta tesis está dirigida a personas con un conocimiento básico de álgebra conmutativa y geometría algebraica. Se espera que el lector conozca los conceptos de variedad algebraica, álgebra, categoría, etc. Estos preliminares buscan sentar una base sobre las definiciones necesarias, ya que es común encontrar en la literatura de geometría algebraica muchas construcciones distintas sobre los objetos y la teoría. Se probarán algunos resultados básicos que se asumen en general, otros se enunciarán dando una bibliografía para profundizar y otros simplemente se asumirán.

Durante toda la tesis,  $\mathbb{k}$  denotará un cuerpo algebraicamente cerrado de cualquier característica.

### 1. Álgebra conmutativa

DEFINICIÓN 1.1. Un subconjunto  $S$  de un anillo conmutativo  $R$  se dice multiplicativo si no contiene al 0, contiene al 1 y es cerrado por la multiplicación.

DEFINICIÓN 1.2. Sea  $S \subseteq R$  un conjunto multiplicativo. Se define la localización de  $R$  por  $S$  al anillo:

$$S^{-1}R = \frac{R \times S}{\sim},$$

donde la relación está dada por:

$$(x, y) \sim (z, t) \Leftrightarrow \exists s \in S \text{ tal que } s(xt - zy) = 0.$$

Se usa la notación  $\frac{x}{y} := [(x, y)]$ , o sea, la clase de equivalencia de  $(x, y)$ .

Si  $\mathfrak{p}$  es un ideal primo de  $R$  entonces  $S = R - \mathfrak{p}$  es un conjunto multiplicativo. En este caso, notamos:

$$(1.1) \quad R_{\mathfrak{p}} = S^{-1}R.$$

Si  $f \in R$ , entonces  $S = \{1, f, f^2, \dots\} = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  es un conjunto multiplicativo. En este caso, notamos:

$$(1.2) \quad R_f = S^{-1}R.$$

PROPOSICIÓN 1.3 (Propiedad Universal de la localización). Sea  $S \subseteq R$  un conjunto multiplicativo y  $\varphi : R \rightarrow R'$  un morfismo de anillos tal que  $\varphi(S) \subseteq (R')^\times$ . Entonces existe un único morfismo  $\tilde{\varphi} : S^{-1}R \rightarrow R'$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & R' \\ \eta \downarrow & \nearrow \tilde{\varphi} & \\ S^{-1}R & & \end{array}$$

donde  $\eta$  está dada por  $\eta(r) = \frac{r}{1}$ .

Ver [AK21, Teorema 11.3] para una demostración.

DEFINICIÓN 1.4. Un dominio  $R$  se dice *normal* si es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones  $\text{Frac}(R)$ , i.e. para todo  $\alpha \in \text{Frac}(R)$  y  $f \in R[x]$  mónico, si  $f(\alpha) = 0$  entonces  $\alpha \in R$ .

EJEMPLO 1.5. El anillo  $\mathbb{Z}$  es normal, es corolario del criterio de la raíz racional.

EJEMPLO 1.6. Cualquier dominio de factorización única es normal, la prueba es esencialmente la misma que la de  $\mathbb{Z}$ .

LEMA 1.7. Si  $R$  es normal y  $S \subseteq R$  es un conjunto multiplicativo, entonces la localización  $S^{-1}R$  es normal.

DEMOSTRACIÓN. Primero, observar que  $\text{Frac}(S^{-1}R) = \text{Frac}(R)$ , que le llamaremos  $K$ . Sea  $\alpha \in K$  entero sobre  $S^{-1}R$ , esto quiere decir que  $\alpha$  satisface una ecuación de la forma:

$$\alpha^n + \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}\alpha^{n-1} + \cdots + \frac{r_1}{s_1}\alpha + \frac{r_0}{s_0} = 0, \quad r_i \in R, s_i \in S.$$

Sea  $s = \prod s_i \in S$ . Multiplicando por  $s^n$  de ambos lados obtenemos:

$$(s\alpha)^n + \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}s(s\alpha)^{n-1} + \cdots + \frac{r_1}{s_1}s^{n-1}(s\alpha) + \frac{r_0}{s_0}s^n,$$

que es una ecuación en  $R$  porque  $s_i$  divide a  $s$  para todo  $i$ . Luego, como  $R$  es normal,  $s\alpha \in R$  y entonces  $\alpha = \frac{s\alpha}{s} \in S^{-1}R$ , que es lo que buscábamos.  $\square$

LEMA 1.8. Si  $R_i, i \in I$  es una familia de dominios normales dentro de un mismo dominio  $A$ , entonces  $R = \bigcap R_i$  es normal.

DEMOSTRACIÓN. Llamemos  $K = \bigcap_{i \in I} \text{Frac}(R_i) \subseteq \text{Frac}(A)$ . Sea  $f \in R[x]$  mónico y  $\alpha \in \text{Frac}(R) \subseteq K$  una raíz de  $f$ . Como  $f \in R_i[x]$  y  $R_i$  es normal para todo  $i$ , tenemos  $\alpha \in R_i$  para todo  $i$ , luego  $\alpha \in R$ .  $\square$

El siguiente teorema es muy importante ya que clasifica todos los ideales maximales en un álgebra finitamente generada. Esta es la razón por la que pedimos que el cuerpo  $\mathbb{k}$  sea algebraicamente cerrado, para tener un buen control de los ideales maximales.

TEOREMA 1.9 (de los ceros de Hilbert). Sea  $\mathbb{k}$  un cuerpo algebraicamente cerrado,  $R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  un álgebra finitamente generada y  $\mathfrak{m} \triangleleft R$  un ideal maximal. Entonces existen  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k}$  tales que:

$$\mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle.$$

Para una prueba y construcción de la teoría, ver por ejemplo [AK21, Capítulo 15].

La siguiente definición la usaremos seguido, ya que los monoides que nos interesarán (aquellos que vengan de conos), serán de esta forma.

DEFINICIÓN 1.10. Un *monoide afín*  $S$  es un monoide conmutativo, finitamente generado e isomorfo a un submonoide de  $\mathbb{Z}^n$ , i.e. existe un morfismo de monoides inyectivo  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{Z}^n$ .

## 2. Hazes

DEFINICIÓN 1.11. Un *pre-haz* en un espacio topológico  $X$  con topología  $\tau$  es un funtor contravariante  $\mathcal{F} : \tau \rightarrow \text{Set}$ , viendo que  $\tau$  es una categoría donde las únicas flechas son las inclusiones i.e. existe y es única una flecha de  $U$  a  $V$  si  $U \subseteq V$ .

Si  $U \subseteq V$ ,  $i : U \rightarrow V$  es la inclusión y  $s \in \mathcal{F}(V)$ , notamos  $\text{res}_U^V = \mathcal{F}(i)$  y  $s|_U = \text{res}_U^V(s) = \mathcal{F}(i)(s)$ . Un *haz* es un pre-haz que verifica la siguiente condición:

- Si  $U = \bigcup U_i$  y  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  son tales que  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$  para todo  $i, j$ , entonces existe un único  $s \in \mathcal{F}(U)$  tal que  $s|_{U_i} = s_i$ .

Tenemos entonces que el haz es de anillos, grupos, álgebras, etc, si la categoría de llegada, en vez de ser  $\text{Set}$ , es  $\text{Ring}$ ,  $\text{Grp}$  (notaciones obvias) etc.

Si el haz es de anillos, o sea,  $\mathcal{F} : \tau \rightarrow \text{Ring}$ , al par  $(X, \mathcal{F})$  le llamamos *espacio anillado*, y a los anillos  $\mathcal{F}(U)$  le llamamos *secciones del haz* en  $U$ .

DEFINICIÓN 1.12. Un *morfismo de haces* entre  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ , dos haces en  $X$ , es una transformación natural  $\eta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , es decir, una colección de morfismos  $\{\eta_U\}_{U \in \tau}$  tal que, dados dos abiertos  $U \subseteq V$ , se verifica:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\eta_V} & \mathcal{G}(V) \\ \mathcal{F}\text{res}_U^V \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}\text{res}_U^V \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\eta_U} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

Decimos que  $\eta$  es un isomorfismo si  $\eta_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  es un isomorfismo para todo abierto  $U$ .

Si  $\varphi : X \rightarrow Y$  es una función continua y  $\mathcal{F}$  es un haz en  $X$ , definimos el haz  $\varphi^*\mathcal{F}$  en  $Y$  de la siguiente forma:

$$\varphi^*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U)), \quad \forall U \text{ abierto en } Y,$$

$$(\text{res}_{\varphi^*\mathcal{F}}^V)_U = (\text{res}_{\mathcal{F}}^{\varphi^{-1}(V)})_{\varphi^{-1}(U)} : \varphi^*\mathcal{F}(V) \rightarrow \varphi^*\mathcal{F}(U), \quad \forall U \subset V, i : U \rightarrow V.$$

DEFINICIÓN 1.13. Un *morfismo de espacios anillados* entre  $(X, \mathcal{F})$  y  $(Y, \mathcal{G})$  es un par  $(\varphi, \varphi^\sharp)$  donde  $\varphi : X \rightarrow Y$  es una función continua y  $\varphi^\sharp : \mathcal{G} \rightarrow \varphi^*\mathcal{F}$  es un morfismo de haces. Decimos que es un *isomorfismo* si  $\varphi$  es un homeomorfismo y  $\varphi^\sharp$  es un isomorfismo de haces.

## 3. Variedades algebraicas

Si  $A$  es un anillo conmutativo, definimos el *espectro maximal* de  $A$  como:

$$\text{Spm}(A) = \{\mathfrak{m} \triangleleft A \mid \mathfrak{m} \text{ es maximal}\},$$

munido con la siguiente topología, que está dada en función de sus cerrados  $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ :

$$\mathcal{V}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{m} \in \text{Spm}(A) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}\}, \quad \forall \mathfrak{a} \text{ ideal de } A.$$

A esta topología se le llama *topología de Zariski*.

Si  $f \in A$ , definimos el *abierto principal* de  $f$  al conjunto:

$$D(f) = \{\mathfrak{m} \mid f \notin \mathfrak{m}\} = \mathcal{V}((f))^c.$$

Se puede ver que el conjunto de los abiertos principales:

$$\mathcal{B} = \{D(f) \mid f \in A\},$$

es una base de la topología de Zariski.

Si  $\mathcal{B}$  es una base de la topología de un espacio  $X$  y  $\mathcal{F}$  es un pre-haz en  $\mathcal{B}$  que verifica la condición de haz 1.11 para los abiertos de la base, entonces se puede extender, de forma única,  $\mathcal{F}$  a toda la topología para que sea un haz en  $X$  (ver [Per95, Lema 2.1, capítulo 3]).

Definimos también el *haz estructural* de  $A$ , y notamos  $\mathcal{O}_A$ , al haz de anillos en el espacio topológico  $\text{Spm}(A)$  definido por:

$$\mathcal{O}_A(D(f)) = A_f,$$

en la base y extendido a toda la topología.

DEFINICIÓN 1.14. Una *variedad algebraica afín* sobre un cuerpo  $\mathbb{k}$  es un espacio anillado  $(X, \mathcal{F})$  que es isomorfo a un espacio  $(\text{Spm}(A), \mathcal{O}_A)$  donde  $A$  es una  $\mathbb{k}$ -álgebra finitamente generada sin elementos nilpotentes. Notamos  $\mathbb{k}[X]$  al conjunto:

$$\mathbb{k}[X] = \mathcal{F}(X), \quad X \in \tau.$$

OBSERVACIÓN 1.15. Si  $A$  es una  $\mathbb{k}$ -álgebra finitamente generada y sin elementos nilpotentes, entonces es de la forma:

$$A = \frac{\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]}{\mathfrak{a}},$$

donde  $\mathfrak{a}$  es un ideal radical.

NOTACIÓN 1.16. Si tenemos una variedad algebraica  $X$ , al haz lo notamos  $\mathcal{O}_X$ .

OBSERVACIÓN 1.17. Si  $(X, \mathcal{O}_X)$  es una variedad algebraica afín, entonces  $X$  es homeomorfo a  $\text{Spm}(\mathbb{k}[X])$ .

Por esta observación, notar que el álgebra  $\mathbb{k}[X]$  es la que contiene toda la información de la variedad. Una definición alternativa (pero equivalente), que nos será útil, es la siguiente:

DEFINICIÓN 1.18. Una variedad algebraica afín sobre un cuerpo  $\mathbb{k}$  es una terna  $(X, A, \varphi)$  donde  $X$  es un espacio topológico,  $A$  es una  $\mathbb{k}$ -álgebra finitamente generada y sin nilpotentes y  $\varphi : X \rightarrow \text{Spm}(A)$  es un homeomorfismo. Denotamos  $\mathbb{k}[X] := A$  y solemos llamar a la variedad simplemente  $X$ .

Un *morfismo* entre dos variedades afines  $(X, A, \varphi)$  y  $(Y, B, \phi)$  es un par  $(f, f^\sharp)$  donde  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua y  $f^\sharp : B \rightarrow A$  es un morfismo de  $\mathbb{k}$ -álgebras tales que el mapa inducido entre los espectros maximales  $(f^\sharp)^*$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \text{Spm}(A) & \xrightarrow{(f^\sharp)^*} & \text{Spm}(B) \end{array}$$

Trabajaremos con ambas definiciones a lo largo de este trabajo, dependiendo del caso y de las utilidades de cada una.

Recordar que, como  $\mathbb{k}$  es algebraicamente cerrado, el Nullstellensatz nos da una biyección natural entre los ideales maximales de  $A$  y los morfismos  $\mathbb{k}$ -lineales de  $A$  al cuerpo:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \{\varphi : A \longrightarrow \mathbb{k}\} &\longleftrightarrow \text{Spm}(A) \\ \varphi &\longmapsto \ker(\varphi) \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.19. Una *variedad algebraica* es un espacio anillado  $(X, \mathcal{O}_X)$  tal que existe un cubrimiento finito  $X = \bigcup U_i$  tal que cada par  $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$  es una variedad algebraica afín, donde  $\mathcal{O}_X|_{U_i}$  es simplemente el funtor  $\mathcal{O}_X$  restringido a la topología de  $U_i$ .

Si  $(X, A, \varphi)$  es una variedad algebraica afín, podemos interpretar al álgebra  $A$  como una subálgebra de las funciones de  $X$  en  $\mathbb{k}$  de la siguiente forma: Sea  $\iota_X : A \longrightarrow \mathbb{k}^X$  definido por:

$$\iota_X(a)(x) = \bar{a},$$

donde  $\bar{a}$  es la clase de  $a$  en el cociente  $\frac{A}{\varphi(x)} = \mathbb{k}$ .  $\iota_X$  es un morfismo de  $\mathbb{k}$ -álgebras, y es inyectivo ya que:

$$\iota_X(a) = 0 \Leftrightarrow a \in \varphi(x), \forall x \in X,$$

pero como  $\varphi$  es biyectiva, esto es que  $a \in \mathfrak{m}$  para todo ideal maximal  $\mathfrak{m}$ . Luego, como  $A$  no tiene nilpotentes,  $a = 0$ . Por lo tanto, podemos ver a  $A$  como una subálgebra de  $\mathbb{k}^X$ .

EJEMPLO 1.20. Sea  $S$  un monoide abstracto conmutativo. Consideramos su  $\mathbb{k}$ -álgebra asociada:

$$(1.4) \quad \mathbb{k}[S] = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i X^{s_i} \mid a_i \in \mathbb{k}, s_i \in S, k \in \mathbb{N} \right\},$$

donde la multiplicación está dada por  $(aX^s)(bX^r) = abX^{s+r}$  y la suma de forma abstracta.

En este caso, podemos decir más sobre la biyección de 1.3, ya que los morfismos de álgebras de  $\mathbb{k}[S]$  en  $\mathbb{k}$  están en biyección a su vez con los morfismos de monoides de  $S$  en  $\mathbb{k}$ , donde  $\mathbb{k}$  es un monoide con el producto. Esto es:

$$(1.5) \quad \text{Spm}(\mathbb{k}[S]) \longleftrightarrow \text{Hom}(\mathbb{k}[S], \mathbb{k})_{\text{álgebras}} \longleftrightarrow \text{Hom}(S, \mathbb{k})_{\text{monoides}}$$

DEFINICIÓN 1.21. Una variedad algebraica  $X$  es *irreducible* si no existen dos cerrados propios  $C_1, C_2$  tales que  $X = C_1 \cup C_2$ .

Toda variedad algebraica se puede escribir de forma única como unión de finitas componentes irreducibles maximales, es decir, subconjuntos que son irreducibles como variedades algebraicas y maximales para esta propiedad (esto implica que serán cerrados). Es por esta razón que, en general, trabajaremos con variedades irreducibles.

Tanto en variedades algebraicas afines y no afines, si la variedad es  $(X, \mathcal{O}_X)$  llamamos *secciones* del haz  $\mathcal{O}_X$  en  $U$  al anillo  $\mathcal{O}_X(U)$ , y *funciones regulares* a  $\mathcal{O}_X(X)$ .

Sea  $p \in X$  un punto y consideremos  $\tau_p$  el conjunto de los abiertos que contienen a  $p$ , es decir:

$$\tau_p = \{U \in \tau \mid p \in U\}.$$

Se tiene que  $\tau_p$  es una categoría filtrada, luego, podemos definir el límite directo del funtor  $\mathcal{O}_X : \tau_p \rightarrow \text{Ring}$ :

$$(1.6) \quad \mathcal{O}_{X,p} = \varinjlim_{p \in U} \mathcal{O}_X(U),$$

al que llamamos *anillo local de  $X$  en  $p$* . Para ver la definición y construcción de límite directo filtrado en una categoría filtrada, ver [AK21, Capítulo 7].

En el caso que  $X = \text{Spm}(A)$  es una variedad algebraica afín y  $p = \mathfrak{m} \in X$  es un punto del espacio (un ideal maximal de  $A$ ), se prueba que:

$$(1.7) \quad \mathcal{O}_{X,p} = A_{\mathfrak{m}},$$

usando la notación de (1.1). Una demostración de este resultado se puede encontrar en [Muñ25, Teorema 1.2.31]

Si  $X$  e  $Y$  son variedades algebraicas, se define el producto  $X \times Y$  como el producto en la categoría de variedades algebraicas, es decir, el único objeto con morfismos  $\rho_X, \rho_Y$  (a menos de isomorfismo) que verifica que, para todo  $Z = \text{Spm}(R)$  y morfismos  $\varphi_X, \varphi_Y$ , existe un único morfismo  $\varphi$  que verifiquen el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} R & & & & \\ & \searrow^{\varphi_Y} & & & \\ & & X \times Y & \xrightarrow{\rho_Y} & X \\ & \swarrow_{\varphi_X} & \downarrow \rho_X & & \\ & & Y & & \end{array}$$

(Note: A dashed arrow labeled  $\varphi$  also points from  $R$  to  $X \times Y$ .)

Se puede probar que si  $X = \text{Spm}(A)$  e  $Y = \text{Spm}(B)$  son variedades afines, el producto  $X \times Y$  viene inducido por el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & \\ & \swarrow^{\varphi_A} & & & \\ & & A \otimes B & \xleftarrow{\psi_Y} & A \\ & \swarrow_{\varphi_B} & \uparrow \psi_X & & \\ & & B & & \end{array}$$

(Note: A dashed arrow labeled  $\varphi$  also points from  $Z$  to  $A \otimes B$ .)

luego,  $X \times Y = \text{Spm}(A \otimes B)$ , o sea:

PROPOSICIÓN 1.22. Si  $X$  e  $Y$  son variedades afines, entonces  $X \times Y$  es afín.

DEFINICIÓN 1.23. Una variedad algebraica  $X$  se dice *separable* si el morfismo diagonal  $\Delta : X \rightarrow X \times X$  es una inmersión cerrada.

PROPOSICIÓN 1.24. Si  $X$  es afín entonces es separable.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que  $X = \text{Spm}(A)$  y el morfismo  $\Delta : X \rightarrow X \times X$  viene inducido por tomar preimagen del morfismo  $\Delta^\# : A \otimes A \rightarrow A$ ,  $\Delta^\#(a \otimes b) = ab$ . Como  $\Delta^\#$  es sobreyectivo, se tiene que  $\Delta$  es una inmersión cerrada, luego  $\Delta(X) \subseteq X \times X$  es cerrado.  $\square$

DEMOSTRACIÓN. Si  $X$  es una variedad separable y  $U, V$  dos abiertos afines de  $X$ , entonces  $U \cap V$  es también un abierto afín.  $\square$

DEMOSTRACIÓN. Como  $X$  es separable, el morfismo  $\Delta : X \rightarrow X \times X$  es una inmersión cerrada. Restringiéndonos a  $U \cap V$ , el morfismo:

$$\Delta : U \cap V \rightarrow U \times V \subseteq X \times X$$

sigue siendo una inmersión cerrada, por lo que:

$$U \cap V \simeq \Delta(U \cap V) = \Delta(X) \cap U \times V,$$

y como  $\Delta(X)$  es cerrado,  $\Delta(U \cap V)$  es un cerrado de  $U \times V$  que es afín por 1.22. Finalmente, un cerrado de una variedad afín es afín y entonces  $\Delta(U \cap V)$  es afín, que es isomorfo a  $U \cap V$  porque  $\Delta$  es una inmersión.  $\square$

#### 4. Grupos y monoides algebraicos

DEFINICIÓN 1.25. Un *grupo algebraico* es una variedad algebraica  $G$  con un punto distinguido  $e \in G$  y un morfismo de variedades algebraicas  $m : G \times G \rightarrow G$  tal que  $(G, m, e)$  es un grupo.

Una acción de un grupo algebraico  $G$  en una variedad algebraica  $X$  es un morfismo de variedades algebraicas  $\rho : G \times X \rightarrow X$  que verifica el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{m \times 1} & G \times X \\ 1 \times \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ G \times X & \xrightarrow{\rho} & X \end{array}$$

Decimos que  $G$  actúa en  $X$  o que  $X$  es una  $G$ -variedad.

El grupo algebraico que más nos va a interesar en esta tesis es el toro de dimensión  $n$ : es la variedad  $T = (\mathbb{k}^*)^n$ , donde la multiplicación se da coordenada a coordenada. Hablemos un poco del toro y de su multiplicación, construcción que retomaremos más adelante.

El toro  $T$  lo podemos construir como el espectro de un álgebra de monoide de la siguiente forma. Consideramos  $M = \mathbb{Z}^n$ , que como monoide, está generado por  $\pm e_i$ . Si notamos  $x_i = X^{e_i}$ , tenemos:

$$\mathbb{k}[M] = \mathbb{k}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}],$$

y luego:

$$T \simeq \text{Spm}(\mathbb{k}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}]) = \text{Spm}(\mathbb{k}[M]),$$

ya que, por el Nullstellensatz, los ideales maximales serán de la forma:

$$(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n), \quad a_i \neq 0.$$

Por otro lado, tenemos la biyección natural:

$$T = \text{Spm}(\mathbb{k}[M]) \longleftrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[M], \mathbb{k}) \longleftrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{N}}(M, \mathbb{k})$$

Viendo a los elementos del toro como morfismos de monoides, tenemos otra multiplicación natural: si  $t, t' \in \text{Hom}_{\mathbb{N}}(M, \mathbb{k})$ , definimos:

$$(1.8) \quad t \cdot t'(m) := t(m)t'(m), \quad \forall m \in M.$$

Veamos que esta acción es en realidad la misma que que la multiplicación coordinada a coordinada.

Sean  $t = (t_1, \dots, t_n)$  y  $t' = (t'_1, \dots, t'_n)$  dos puntos en  $(\mathbb{k}^*)^n = T$ . Visto como ideal,  $t$  es

$$(X_1 - t_1, \dots, X_n - t_n);$$

como morfismo de álgebras el que manda  $x_i \mapsto t_i$ , y como morfismo de monoides, el que manda  $\pm e_i \mapsto t_i^{\pm 1}$ . Luego, si  $m = \sum n_i e_i \in M$ , tenemos:

$$t(m) = t\left(\sum n_i e_i\right) = \prod t_i^{n_i} = \prod t_i^{m_i}.$$

Análogo para  $t'$ . Luego:

$$t \cdot t'(m) = t(m)t'(m) = \prod t_i^{n_i} \prod t'_i{}^{n_i} = \prod (t_i t'_i)^{n_i} = (tt')(m),$$

donde  $tt'$  es la multiplicación usual de  $T$ , es decir  $tt' = (t_1 t'_1, \dots, t_n t'_n)$ .

Como todo toro  $T$  verifica  $T \simeq \mathbb{k}[M]$ , con  $M = \mathbb{Z}^n$ , parece razonable la notación  $T_M$  para el toro asociado al grupo  $M$ . Haremos una pequeña modificación de esta notación, que será conveniente cuando hablemos de conos. Llamamos  $N = \mathbb{Z}^n$  y  $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^n$ , o sea,  $N$  y  $M$  son isomorfos como grupos pero no realmente iguales, y nos interesa destacar a  $M$  como un grupo dual. Notamos entonces:

$$(1.9) \quad T_N = \mathbb{k}[M], \quad N = \mathbb{Z}^n, \quad M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$$

al toro de dimensión  $n$ .

Así como definimos los grupos algebraicos, tenemos los monoides.

**DEFINICIÓN 1.26.** Un *monoide algebraico* es una variedad algebraica  $M$  con un punto distinguido  $e \in M$  y un morfismo de variedades algebraicas  $m : M \times M \rightarrow M$  tal que  $(M, m, e)$  es un monoide.

Es sabido que si  $M$  es un monoide algebraico, su grupo de invertibles  $G(M)$  es un grupo algebraico que además es abierto en  $M$ . El caso afín fue probado por Putcha y generalizado a los monoides irreducibles por Rittatore (ver [Put88], [Ren05] y [Rit98]). El objetivo principal de esta tesis de maestría es trabajar la teoría de variedades tóricas desde esta perspectiva, es decir, teniendo presente que las variedades tóricas afines son monoides algebraicos.

Aunque ya hayamos usado estas definiciones anteriormente, las definimos ahora.

**DEFINICIÓN 1.27.** Un *álgebra* sobre un cuerpo  $\mathbb{k}$  o  $\mathbb{k}$ -álgebra es un espacio vectorial  $A$  con dos morfismos  $m : A \otimes A \rightarrow A$  y  $\mu : \mathbb{k} \rightarrow A$  que verifican los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes m} & A \otimes A \\
 m \otimes 1 \downarrow & & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 \mathbb{k} \otimes A & \xrightarrow{\mu \otimes 1} & A \otimes A & \xleftarrow{1 \otimes \mu} & A \otimes \mathbb{k} \\
 & \searrow \simeq & \downarrow m & \swarrow \simeq & \\
 & & A & & 
 \end{array}$$

Una *coálgebra* sobre un cuerpo  $\mathbb{k}$  o  $\mathbb{k}$ -coálgebra es un espacio vectorial  $C$  con dos morfismos  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$  y  $\varepsilon : C \rightarrow \mathbb{k}$  que verifican los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 C \otimes C \otimes C & \xleftarrow{1 \otimes \Delta} & C \otimes C \\
 \Delta \otimes 1 \uparrow & & \uparrow \Delta \\
 C \otimes C & \xleftarrow{\Delta} & C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 \mathbb{k} \otimes C & \xleftarrow{\varepsilon \otimes 1} & C \otimes C & \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} & C \otimes \mathbb{k} \\
 & \swarrow \simeq & \uparrow \Delta & \searrow \simeq & \\
 & & C & & 
 \end{array}$$

DEFINICIÓN 1.28. Una *coacción* de una  $\mathbb{k}$ -coálgebra  $C$  en un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial  $V$  es un morfismo<sup>1</sup>  $\delta : V \rightarrow V \otimes C$  tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\delta} & V \otimes C \\
 \delta \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes \Delta \\
 V \otimes C & \xrightarrow{\delta \otimes \text{id}} & V \otimes C \otimes C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 V \otimes C & \xrightarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} & V \otimes \mathbb{k} \\
 \delta \uparrow & \nearrow \simeq & \\
 V & & 
 \end{array}$$

Un morfismo de variedades afines  $f : X \rightarrow Y$  viene con un morfismo  $f^\# : B \rightarrow A$ , y a su vez, un morfismo de  $B \rightarrow A$  nos induce un mapa de  $\text{Spm}(A)$  en  $\text{Spm}(B)$ . La correspondencia  $X \rightsquigarrow \mathbb{k}[X]$ ,  $A \rightsquigarrow \text{Spm}(A)$ , junto con la correspondencia de mapas anteriormente mencionada, establece una equivalencia categórica entre las variedades afines y las álgebras finitamente generadas sin nilpotentes. Eso nos permite, entre otras cosas, mostrar lo siguiente:

PROPOSICIÓN 1.29. Tener una acción de un grupo algebraico afín  $G$  en una variedad algebraica afín  $X$  es equivalente a tener una coacción de  $\mathbb{k}[G]$  en  $\mathbb{k}[X]$ , dada la equivalencia mencionada anteriormente. Más aún, si  $\rho : G \times X \rightarrow X$  es la acción, la coacción está dada por:

$$\rho^* : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}[G \times X] \simeq \mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[X], \quad \rho^*(f)(g, x) = f(\rho(g, x)),$$

y si  $\delta$  es la coacción, la acción viene dada por tomar preimagen:

$$\delta^* : \text{Spm}(\mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[X]) \rightarrow \text{Spm}(\mathbb{k}[X]), \quad \delta^*(\mathfrak{m}) = \delta^{-1}(\mathfrak{m}).$$

<sup>1</sup>Morfismo en la categoría de espacios vectoriales, es decir, transformación lineal.

$$\begin{array}{ccc}
G \times G \times X & \longrightarrow & G \times X \\
\downarrow & & \downarrow \\
G \times X & \longrightarrow & X \\
& & \text{~~~~~} \\
\{e\} \times G & \longrightarrow & G \times G \\
& \searrow & \downarrow \\
& & G
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[X] & \longleftarrow & \mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[X] \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[X] & \longleftarrow & \mathbb{k}[X] \\
& & \uparrow \\
& & \mathbb{k}[G] \\
& \swarrow & \longleftarrow \\
& \mathbb{k} \otimes \mathbb{k}[G] & \mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[G]
\end{array}$$

Cuando trabajamos con coálgebras, la coasociatividad nos permite utilizar la siguiente notación, llamada *notación de Sweedler*, que es bastante práctica.

Si  $C$  es una coálgebra con co-multiplicación  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ , definimos:

$$\Delta^2 = (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta : C \rightarrow C \otimes C \otimes C.$$

Inductivamente, definimos:

$$(1.10) \quad \Delta^n = (\Delta \otimes \text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id}) \circ \Delta^{n-1} : C \rightarrow C^{\otimes(n+1)}.$$

Si para  $c \in C$  escribimos  $\Delta^n(c) = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes \cdots \otimes c_{n+1}$ , entonces, por ejemplo:

$$\Delta^2(c) = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3 = \sum c_{1,1} \otimes c_{1,2} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_{2,1} \otimes c_{2,2}.$$

El siguiente resultado, que establece una equivalencia entre las acciones de un grupo algebraico y las estructuras de co-módulo, lo usaremos más adelante, pero conviene enunciarlo aquí.

**TEOREMA 1.30.** *Sea  $G$  un grupo algebraico afín y  $M$  un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial. Si  $a : G \times M \rightarrow M$  es una acción racional<sup>2</sup>, entonces el mapa  $\delta : M \rightarrow M \otimes \mathbb{k}[G]$  definido por  $\delta(m) = \sum m_0 \otimes m_1$  induce una estructura de  $\mathbb{k}[G]$ -comódulo en  $M$  si y solamente si  $x \cdot m = \sum m_1(x)m_0$  para todo  $x \in G$ ,  $m \in M$ .*

*Esta asociación establece una equivalencia categórica entre la familia de acciones racionales a izquierda de  $G$  en  $M$  y la familia de estructuras de  $\mathbb{k}[G]$ -comódulos a derecha en  $M$ .*

Para una prueba, ver por ejemplo [FSR17, Capítulo 5, teorema 3.11].

<sup>2</sup>La definición de acción racional es bastante larga para introducirla aquí. Lo importante es que la acción con la que trabajaremos es racional. Para profundizar sobre la teoría de acciones racionales, ver [FSR17, Capítulo 5 sección 3]

## Conos y variedades tóricas afines

El objetivo de este capítulo es definir los conos racionales en un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, las variedades tóricas afines normales y estudiar las primeras propiedades. Estudiaremos la relación entre un cono racional y su dual, que también es un cono racional. Mostraremos cómo un cono racional induce una variedad tórica afín y como resultado principal de este capítulo, mostraremos que hay una biyección entre las variedades tóricas afines normales y los conos racionales estrictamente convexos. Más aún, mostraremos que los morfismos de variedades tóricas afines normales se corresponden también con los morfismos de conos racionales estrictamente convexos, es decir, mostraremos que hay una equivalencia categórica entre las variedades tóricas afines normales y los conos racionales estrictamente convexos.

A partir de ahora, trabajaremos con las siguientes notaciones:

- $N$  será un grupo abeliano libre finitamente generado, i.e.  $N \simeq \mathbb{Z}^n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ .
- $N_{\mathbb{R}}$  será el espacio vectorial real inducido por  $N$ , es decir  $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ .
- $M$  será el dual de  $N$  como grupo, es decir  $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ .
- Si  $V$  es un espacio vectorial,  $V^*$  será el espacio dual de  $V$ , es decir  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ . Notar que vale  $M_{\mathbb{R}} \simeq (N_{\mathbb{R}})^*$ .
- Si  $S \subseteq V$  es un subconjunto de un espacio vectorial  $V$ , anotamos  $\text{span}(S)$  al menor subespacio vectorial que contiene a  $S$ , es decir  $\text{span}(S) = \{\sum_{i=1}^n r_i s_i \mid n \in \mathbb{N}, r_i \in \mathbb{R}, s_i \in S\}$ .

### 1. Conos racionales

DEFINICIÓN 2.1. Dados  $v_1, \dots, v_s \in N_{\mathbb{R}}$ , definimos el *cono* generado por  $v_1, \dots, v_s$  como:

$$\sigma = \langle v_1, v_2, \dots, v_s \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}} = \left\{ \sum_{i=1}^s r_i v_i, r_i \in \mathbb{R}, r_i \geq 0 \right\},$$

y a su dual como:

$$\sigma^{\vee} = \{u \in M_{\mathbb{R}} \mid u(v) \geq 0 \quad \forall v \in \sigma\}.$$

Notar que los generadores no son únicos. Decimos que el cono  $\sigma$  es *racional* si puede ser generado por vectores  $v_i$  que están en el látice  $N$ , y que es *estrictamente convexo* si no contiene ninguna recta, i.e.  $v \in \sigma$  y  $-v \in \sigma$  implican  $v = 0$ . Definimos también la *dimensión* de un cono como la dimensión del subespacio vectorial de  $N_{\mathbb{R}}$  generado por él.

PROPOSICIÓN 2.2. Sea  $N$  un látice,  $\sigma$  un cono en  $N_{\mathbb{R}}$  y  $v \notin \sigma$ . Entonces existe  $u \in \sigma^{\vee}$  tal que  $u(v) < 0$ .

DEMOSTRACIÓN. Es equivalente a probar que existe un hiperplano  $H$  por el origen (subespacio vectorial de  $N_{\mathbb{R}}$  de dimensión  $n - 1$ ) que deja a  $\sigma \setminus H$  de un lado y a  $v$  del otro, ya que basta con tomar  $u$  con núcleo  $H$  y  $u(v) = -1$ .

Sea  $v_1 \in \sigma$  tal que:

$$d(v, v_1) = d(v, \sigma) = \min\{d(v, w) \mid w \in \sigma\} > 0,$$

siendo  $d$  la distancia euclídea. Notar que  $v_1$  existe porque  $\sigma$  es cerrado con la topología usual de  $\mathbb{R}^n$  y es único porque  $\sigma$  es convexo. Sea  $H = (v - v_1)^{\perp}$ . Probaremos que  $H$  es el hiperplano que buscamos.

Como  $v_1$  es la proyección ortogonal de  $v$  sobre la recta  $v_1$  justamente por minimizar la distancia con  $v$ , tenemos que  $v_1 \in H$  y entonces podemos completarlo a una base de  $H$ ,  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ , y luego con  $v$  a una base de  $V$ ,  $\{v, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ . En el caso de que el vector del cono que minimice la distancia con  $V$  sea el vector  $0$ , la prueba funciona igual simplemente tomando una base de  $H$  y completándola con  $v$  a una base de  $N_{\mathbb{R}}$ . No haremos explícita la demostración en este caso.

Supongamos por absurdo que existe  $w \in \sigma$  tal que  $v$  y  $w$  están del mismo lado de  $H$ , i.e.:

$$w = \lambda v + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i, \quad \lambda > 0.$$

Con esto, tenemos que:

$$(2.1) \quad \langle w - v_1, v_1 - v \rangle = \langle \lambda v, v_1 - v \rangle = \lambda(\langle v, v_1 \rangle - \|v\|^2) < 0,$$

ya que:

$$\langle v, v_1 \rangle < \|v_1\| \|v\| < \|v\|^2$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y ser  $v_1$  proyección de  $v$ .

Por otro lado, como  $v_1$  y  $w$  están ambos en  $\sigma$  que es convexo, para todo  $0 < t < 1$  se tiene que:

$$tw + (1 - t)v_1 \in \sigma,$$

por lo que, al ser  $v_1$  el que minimiza la distancia con  $v$ , tenemos, para todo  $t \in (0, 1)$ :

$$\begin{aligned} d(v_1, v) &< d(tw + (1 - t)v_1, v) \\ \implies \langle v_1 - v, v_1 - v \rangle &< \langle tw + (1 - t)v_1 - v, tw + (1 - t)v_1 - v \rangle \\ \implies 0 &< t^2 \|w - v_1\|^2 + 2t \langle w - v_1, v_1 - v \rangle \\ \implies 0 &< t \|w - v_1\| + 2 \langle w - v_1, v_1 - v \rangle, \end{aligned}$$

pero por la ecuación 2.1, si tomamos  $t$  suficientemente chico, la última desigualdad es falsa, por lo que es absurdo que  $v$  y  $w$  estén del mismo lado de  $H$ .  $\square$

COROLARIO 2.3. Bajo el isomorfismo natural  $N_{\mathbb{R}} = (N_{\mathbb{R}}^*)^*$ , si  $\sigma$  es un cono en  $N_{\mathbb{R}}$ , vale:

$$(\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$v \in (\sigma^\vee)^\vee \Leftrightarrow v(u) \geq 0 \forall u \in \sigma^\vee \Leftrightarrow u(v) \geq 0 \forall u \in \sigma^\vee,$$

que por la Proposición 2.2, es equivalente a que  $v \in \sigma$ .  $\square$

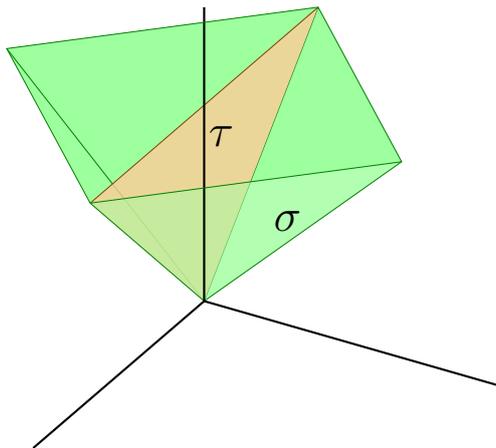
DEFINICIÓN 2.4. Una *cara*  $\tau$  de un cono  $\sigma$  es un subconjunto de la forma  $\tau = \sigma \cap \ker(u)$  para algún  $u \in \sigma^\vee$ . Decimos que una cara es una *arista* si tiene dimensión uno y que es una *faceta* si tiene codimensión uno respecto al cono.

Notar que una cara  $\tau = \sigma \cap \ker(u)$  de un cono  $\sigma$  es también un cono. Más aún, vale que  $\tau$  está generada por los generadores de  $\sigma$  que anulan  $u$ , es decir:

$$(2.2) \quad \tau = \left\{ \sum_{v_i/u(v_i)=0} r_i v_i, r_i \in \mathbb{R}, r_i \geq 0 \right\}.$$

Sin embargo, el cono generado por sólo algunos de los generadores de  $\sigma$  no siempre es una cara, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.5. En  $\mathbb{R}^3$ , sea  $\sigma$  el cono generado por  $(\pm 1, 0, 1)$  y  $(0, \pm 1, 1)$  (una “pirámide infinita”). El cono  $\tau$ , generado por  $(1, 0, 1)$  y  $(-1, 0, 1)$  no es una cara de  $\sigma$  pues si  $\tau = \sigma \cap \ker(u)$ ,  $u$  cambia de signo en  $\sigma \setminus \tau$ , por lo que no puede haber un tal  $u$  que pertenezca a  $\sigma^\vee$ .



LEMA 2.6. Si  $\tau = \sigma \cap \ker(u)$  es una cara y  $v \in \sigma \setminus \tau$ , entonces  $u(v) > 0$ .

DEMOSTRACIÓN. Como  $u \in \sigma^\vee$ ,  $u(v) \geq 0$ , y si  $u(v) = 0$ , entonces  $v \in \ker(u)$  y  $v \in \tau$ , por lo que  $u(v) > 0$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 2.7. La intersección de dos caras es una cara.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\tau_1 = \sigma \cap \ker(u_1)$  y  $\tau_2 = \sigma \cap \ker(u_2)$  dos caras de  $\sigma$ , con  $u_1, u_2 \in \sigma^\vee$ . Entonces:

$$\tau_1 \cap \tau_2 = \sigma \cap \ker(u_1) \cap \ker(u_2) = \sigma \cap \ker(u_1 + u_2),$$

ya que, si  $v \in \sigma$ , entonces  $(u_1 + u_2)(v) = 0 \Leftrightarrow u_1(v) = 0$  y  $u_2(v) = 0$  por ser mayores o iguales que cero en  $\sigma$ .  $\square$

## 2. Las caras de un cono racional

Las caras de un cono son muy importantes, las propiedades topológicas que cumplen aportan mucha información sobre la geometría y el álgebra del cono. En esta sección, profundizaremos en las caras de un cono y veremos algunas caracterizaciones de las mismas.

**DEFINICIÓN 2.8.** Sea  $\sigma$  un cono en  $N_{\mathbb{R}}$ . El *interior relativo* de  $\sigma$ , notado como  $\text{Relint}(\sigma)$ , es el interior de  $\sigma$  en  $\text{span}(\sigma)$  con la topología relativa usual de  $N_{\mathbb{R}}$ . En el caso de que  $\sigma$  sea de dimensión maximal, el interior relativo es simplemente el interior. Se puede caracterizar de la siguiente forma:

**PROPOSICIÓN 2.9.** Toda cara propia de un cono  $\sigma$  está contenida en una faceta. Más aún, una cara es la intersección de las facetas que la contienen.

**DEMOSTRACIÓN.** Procedemos por inducción en la dimensión de  $\sigma$  y para una dimensión dada, por inducción en la codimensión de  $\tau$ . Tomamos generadores  $\sigma = \langle v_1, \dots, v_s \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$  de forma que ningún  $v_i$  esté en el interior relativo del cono (si hay uno, es combinación de los otros y entonces es innecesario como generador.)

Si la dimensión de  $\sigma$  es 1, la única cara propia posible es el 0 y el resultado es trivial.

Supongamos que el resultado vale para conos de dimensión menor o igual a  $n$  y  $\sigma$  tiene dimensión  $n + 1$ . Si la codimensión de  $\tau$  es 1, entonces  $\tau$  es una faceta de  $\sigma$  y además es la única faceta que lo contiene, por lo que vale el resultado.

Si la codimensión de  $\tau$  es  $m > 1$ , sea  $W$  el subespacio generado por  $\tau$  y consideramos el cociente:

$$\frac{N_{\mathbb{R}}}{W}$$

La proyección de  $\sigma$  al cociente,  $\bar{\sigma}$ , es también un cono pues está generado por las proyecciones  $\bar{v}_i$ , y si  $\eta$  es una cara de  $\sigma$  con  $\tau \subseteq \eta \subseteq \sigma$ , entonces  $\pi(\eta) = \bar{\eta}$  es una cara de  $\bar{\sigma}$ , pues, si  $\eta = \sigma \cap \ker(u)$ ,  $u \in \sigma^\vee$ , entonces:

$$u : N_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tau \subseteq \eta \subseteq \ker(u), \Rightarrow W \subseteq \ker(u),$$

por lo que el funcional  $u$  baja al cociente:

$$\begin{array}{ccc} N_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{u} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{u} & \\ \frac{N_{\mathbb{R}}}{W} & & \end{array}$$

y tenemos que  $\bar{\eta} = \bar{\sigma} \cap \ker(\bar{u})$ .

Como la dimensión de  $\tau$  es menor que la de  $\sigma$ , existe por lo menos un generador  $v_i$  que es distinto de cero en el cociente. Consideramos  $\gamma$  cara propia de  $\bar{\sigma}$  que contenga a  $\bar{v}_i$ , y consideramos  $\tilde{\gamma}$  la preimagen de  $\gamma$  a  $N_{\mathbb{R}}$  por la proyección. Por construcción,  $\tilde{\gamma}$  es una cara de  $\sigma$  y contiene estrictamente a  $\tau$ . Luego, como la codimensión de  $\tilde{\gamma}$  respecto a  $\sigma$  es menor que la codimensión de  $\tau$  respecto a  $\sigma$ , la cara  $\tilde{\gamma}$  está en una faceta por hipótesis inductiva y luego,  $\tau$  también lo está.

Por último, como  $\tilde{\gamma}$  es también un cono y las codimensiones entran en las hipótesis inductivas,  $\tau$  es la intersección de las facetas de  $\tilde{\gamma}$  que contienen a  $\tau$ , y a su vez, cada

una de estas facetas, llamémosles  $\eta_i$ , es cara de  $\sigma$  y por lo tanto,  $\eta_i$  es la intersección de las facetas de  $\sigma$  que la contienen. Tenemos entonces que  $\tau$  es la intersección de todas las facetas de  $\sigma$  que contienen a las caras  $\eta_i$   $\square$

PROPOSICIÓN 2.10. Si  $\sigma$  tiene dimensión maximal, entonces la unión de las caras propias de  $\sigma$  es su frontera topológica.

DEMOSTRACIÓN. (⊂) Si  $p \in \tau = \sigma \cap \ker(u)$  y  $v \in N_{\mathbb{R}}$  es un vector tal que  $u(v) < 0$ , para todo  $\varepsilon > 0$  se tiene que  $u(p + \varepsilon v) < 0$ , por lo que  $p + \varepsilon v \notin \sigma$  y entonces hay puntos arbitrariamente cerca de  $p$  que no están en  $\sigma$ . Luego, como  $\tau$  es convexo y  $p \in \tau$ , también hay puntos arbitrariamente cerca de  $p$  que están en  $\tau$ .

(⊃) Si  $p$  está en la frontera, para empezar,  $p \in \sigma$  porque el cono es cerrado. Tomamos  $v_i \notin \sigma$  con  $v_i \rightarrow p$ . Para cada  $v_i$ , consideramos  $u_i \in \sigma^\vee$  tal que  $u_i(v_i) < 0$  (podemos por la Proposición 2.2). Los  $u_i$  los podemos tomar en la bola unidad por lo que, a menos de tomar subsucesión, tenemos que  $u_i \rightarrow u$  para cierto  $u \in \sigma^\vee$  por ser  $\sigma^\vee$  cerrado. Luego,

$$0 \geq u_i(v_i) \rightarrow u(p) \geq 0,$$

con lo que  $u(p) = 0$ .  $\square$

La definición 2.8 es bastante intuitiva. Veamos ahora una caracterización más algebraica, en función del cono dual.

PROPOSICIÓN 2.11. Sea  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  un cono racional y  $v \in N_{\mathbb{R}}$ . Entonces vale que:

$$v \in \text{Relint}(\sigma) \Leftrightarrow u(v) > 0 \quad \forall u \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp,$$

donde:

$$\sigma^\perp = \{u \in M \mid u(v) = 0 \quad \forall v \in \sigma\}.$$

DEMOSTRACIÓN. ( $\Rightarrow$ ) : Sea  $u \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$ . Existe  $v' \in \sigma$  tal que  $u(v') > 0$ . Si suponemos  $u(v) = 0$ , entonces tomamos  $\varepsilon > 0$  chico tal que  $v - \varepsilon v' \in \sigma$  y tenemos que:

$$u(v - \varepsilon v') = u(v) - \varepsilon u(v') < 0,$$

lo que es absurdo porque  $u \in \sigma^\vee$  y debe ser no negativo en todo  $\sigma$ .

( $\Leftarrow$ ) : Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la dimensión de  $\sigma$  es maximal, si no, consideramos sólo el subespacio generado por  $\sigma$ . En este caso, tenemos que  $\sigma^\perp = \{0\}$ . Sea  $v$  que verifique  $u(v) > 0$  para todo  $u \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$ . Como  $\sigma^\vee$  es un cono finitamente generado, escribimos  $\sigma^\vee = \langle u_1, u_2, \dots, u_s \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ . Como los  $u_i$  son continuos, podemos tomar  $\varepsilon > 0$  chico tal que:

$$u_i(v') > 0 \quad \forall v' \in B(v, \varepsilon) < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \dots, s,$$

donde  $B(v, \varepsilon) = \{v' \in N_{\mathbb{R}} \mid \|v - v'\| < \varepsilon\}$ . Luego, como los  $u_i$  generan  $\sigma^\vee$ , tenemos:

$$u(v') > 0 \quad \forall v' \in B(v, \varepsilon), \quad \forall u \in \sigma^\vee,$$

y esto, por la Proposición 2.2, es equivalente a que  $B(v, \varepsilon) \subseteq \sigma$ , i.e.  $v$  es un punto interior a  $\sigma$ .  $\square$

Esta proposición nos dice, pasando al dual, que si tenemos un elemento  $u \in \text{Relint}(\sigma^\vee)$ , entonces  $\tau = \sigma \cap \ker(u)$  es la cara más pequeña de  $\sigma$ , que es  $(\sigma^\vee)^\perp = \sigma \cap (-\sigma)$ .

Observar que si  $\sigma$  genera todo  $N_{\mathbb{R}}$  y  $\tau$  es una faceta de  $\sigma$ , el  $u \in \sigma^\vee$  que define a  $\tau$  es único a menos de multiplicar por escalares; esto es porque, si  $u$  y  $u'$  definen  $\tau$ , significa que tienen el mismo núcleo, y como la dimensión de la imagen es uno,  $u' = \lambda u$ . Luego, para cada faceta  $\tau$  de  $\sigma$ , llamamos  $u_\tau$  al único tal que:

$$(2.3) \quad u_\tau \in \sigma^\vee, \quad \tau = \sigma \cap u_\tau^\perp, \quad \|u_\tau\| = 1,$$

donde consideramos la norma operador. Esta notación será útil para la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.12. Si  $\sigma$  genera  $N_{\mathbb{R}}$ , entonces:

$$\sigma = \bigcap_{\tau} H_\tau \quad H_\tau = \{v \in N_{\mathbb{R}} \mid u_\tau(v) \geq 0\},$$

donde  $\tau$  varía en todas las facetas de  $\sigma$ .

DEMOSTRACIÓN. Es claro que  $\sigma \subseteq H_\tau$  para todo  $\tau$  ya que los  $u_\tau \in \sigma^\vee$ .

Supongamos por absurdo que existe un  $v \in \bigcap H_\tau$  que no está en  $\sigma$ . Sean  $v'$  en el interior relativo de  $\sigma$  y  $w$  el último punto del segmento  $\overline{vv'}$  que está en  $\sigma$  (existe dicho punto porque  $\sigma$  es cerrado). El punto  $w$  está en la frontera de  $\sigma$  y entonces, por la Proposiciones 2.10 y 2.9, en alguna faceta  $\tau$ . Tenemos:

$$u_\tau(v') > 0$$

por el Lema 2.6 y

$$u_\tau(w) = 0$$

por  $w$  estar en la cara  $\tau$ , luego, como  $u_\tau$  es lineal,  $u_\tau(v) < 0$ , que es absurdo por la elección de  $v$ .  $\square$

LEMA 2.13. Sean  $\tau \subseteq \sigma$  conos racionales en  $N_{\mathbb{R}}$ . Son equivalentes:

- (a)  $\tau$  es una cara de  $\sigma$ .
- (b) Si  $v, w \in \sigma$  son tales que  $v + w \in \tau$  entonces  $v, w \in \tau$ .
- (c) Si  $v, w \in \sigma \cap N$  son tales que  $v + w \in \tau$  entonces  $v, w \in \tau$ .

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\tau \neq \sigma$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b): Como  $\tau$  es una cara, existe  $u \in \sigma^\vee$  tal que  $\tau = \sigma \cap \ker(u)$ . Luego:

$$0 = u(v + w) = u(v) + u(w),$$

y como  $u(v), u(w) \geq 0$ , tenemos que  $u(v) = u(w) = 0$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c): Es trivial.

(c)  $\Rightarrow$  (a): Primero, observar que vale la misma propiedad para  $v, w \in \sigma \cap N_{\mathbb{Q}}$ , siendo  $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . En efecto, sean  $v, w \in \sigma \cap N_{\mathbb{Q}}$  tales que  $v + w \in \tau$ . Para un  $k \in \mathbb{Z}^+$  suficientemente grande, se tiene que  $kv, kw \in \sigma \cap N$ , luego:

$$kv + kw = k(v + w) \in \tau \quad \Rightarrow \quad kv, kw \in \tau \quad \Rightarrow \quad v, w \in \tau.$$

Sea  $\gamma$  la menor cara que contiene a  $\tau$ , que está bien definida pues la intersección de caras es una cara por la Proposición 2.7. Afirmamos que  $\tau = \gamma$ .

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\gamma = \sigma$ , i.e.  $\tau$  no está contenido en ninguna cara propia, ya que si no, hacemos toda la prueba restringiéndonos al subespacio generado por  $\gamma$ . Notar que, con la topología usual, vale  $\overline{N_{\mathbb{Q}}} = N_{\mathbb{R}}$ . Separamos entonces en dos casos:

- Si  $\dim \tau = \dim \sigma$ , tomamos un punto  $v$  en el interior relativo de  $\tau$  tal que  $v \in N_{\mathbb{Q}}$ . Sea  $w \in \sigma \cap N_{\mathbb{Q}}$ . Para  $\varepsilon \in \mathbb{Q}$  suficientemente chico, tenemos que  $v + \varepsilon w \in \tau$  por ser  $v$  un punto interior, luego,  $w \in \tau$ . Se sigue:

$$\sigma \cap N_{\mathbb{Q}} \subseteq \tau \Rightarrow \sigma = \sigma \cap \overline{N_{\mathbb{Q}}} = \overline{\sigma \cap N_{\mathbb{Q}}} \subseteq \tau$$

por ser  $\tau$  y  $\sigma$  cerrados, luego,  $\sigma = \tau$ .

- Si  $\dim \tau < \dim \sigma$ , llegaremos a un absurdo. Primero notar que  $\tau$  debe contener algún punto  $v$  del interior de  $\sigma$ , ya que si no, estaría en la frontera de  $\sigma$  y entonces, en la unión de facetas. Si  $\tau$  estuviera contenido en una sola faceta, sería absurdo pues estamos en el caso de que no se encuentra en ninguna cara propia, y si  $\tau$  tuviera puntos de dos facetas distintas, tendría todo el segmento entre esos puntos por ser convexo, pero esos puntos no están en ninguna de las dos facetas. Concluimos que  $\tau$  debe tener un punto  $v \in \text{Relint}(\sigma)$ . Podemos tomar  $v \in N_{\mathbb{Q}}$  por densidad. Como  $\dim \tau < \dim \sigma$ , existe un  $w \in \sigma$  tal que  $w \notin \text{span}(\tau)$ . Para  $\varepsilon \in \mathbb{Q}$  suficientemente chico, tenemos que  $v \pm \varepsilon w \in \sigma$  por estar  $v$  en el interior, pero como  $w$  no está en lo generado por  $\tau$  y  $v$  sí, tenemos:

$$v \pm \varepsilon w \notin \tau,$$

sin embargo:

$$v + \varepsilon w, v - \varepsilon w \in \sigma \cap N_{\mathbb{Q}}, \quad v + \varepsilon w + v - \varepsilon w = 2v \in \tau,$$

lo cual contradice la hipótesis.

Luego,  $\tau = \sigma$  y entonces es una cara.  $\square$

**COROLARIO 2.14.** *El dual de un cono racional es un cono racional.*

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $\sigma$  genera  $N_{\mathbb{R}}$ , entonces afirmamos que el cono generado por los  $u_{\tau}$  definidos en la ecuación (2.3), llamémosle  $\beta$ , es todo  $\sigma^{\vee}$ .

La inclusión  $\beta \subseteq \sigma^{\vee}$  se sigue de la definición de los  $u_{\tau}$ .

Veamos  $\sigma^{\vee} \subseteq \beta$ . Si  $u \notin \beta$ , entonces existe  $v \in \beta^{\vee}$  con  $v(u) = u(v) < 0$  por la Proposición 2.2, pero si  $v \in \beta^{\vee}$ , entonces:

$$u_{\tau}(v) \leq 0, \quad \forall \tau \Rightarrow v \in \bigcap H_{\tau} = \sigma,$$

por lo que  $u$  no puede estar en  $\sigma^{\vee}$ .

Si  $\text{span } \sigma = V \neq N_{\mathbb{R}}$ , restringiéndonos a  $V$  y  $V^*$ , tenemos que  $\sigma^{\vee} \subseteq V^*$  está generado por los correspondientes  $u_{\tau} \in V^*$  (ver definición de  $u_{\tau}$  2.3). Luego, completamos  $N_{\mathbb{R}} = V \oplus W$  para algún subespacio  $W \subseteq N_{\mathbb{R}}$  y extendemos los  $u_{\tau} \in \sigma^{\vee} \subseteq V^*$  a un elemento de  $N_{\mathbb{R}}^*$  valiéndolo 0 en  $W$ , o sea:

$$\widetilde{u}_{\tau} \in N_{\mathbb{R}}^*, \quad \widetilde{u}_{\tau}|_V = u_{\tau}, \quad \widetilde{u}_{\tau}|_W = 0$$

Observamos entonces:

$$\sigma^{\vee} = \langle \widetilde{u}_{\tau}, \dots, w, -w, \dots \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}},$$

o sea,  $\sigma^\vee$ , en  $V^*$ , está generado por los  $\widetilde{u}_\tau$  y vectores  $w, -w$  que sean base de  $W^*$  y valgan 0 en  $V$ .  $\square$

Lo anterior nos da una descripción de  $\sigma$  en función de su dual; si  $u_1, \dots, u_l$  son generadores de  $\sigma^\vee$  como cono, entonces:

$$(2.4) \quad \sigma = \{v \in V \mid u_i(v) \leq 0, \forall i = 1, \dots, l\} = \bigcap_{i=1}^l H_{u_i},$$

que es casi la misma descripción que surge de la Proposición 2.12.

Tenemos también una descripción de las caras del dual.

PROPOSICIÓN 2.15. Sea  $\sigma$  un cono racional y  $\tau = \sigma \cap \ker(u)$ , con  $u \in \sigma^\vee$ , una cara. Entonces  $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$  es una cara de  $\sigma^\vee$ , donde  $\tau^\perp = \{u \in \sigma^\vee \mid u|_\tau = 0\}$ . Más aún, la correspondencia

$$\tau \longrightarrow \sigma^\vee \cap \tau^\perp$$

es una biyección entre las caras de  $\sigma$  y las caras de  $\sigma^\vee$ .

DEMOSTRACIÓN. Usaremos el Lema 2.13. Sean  $w, w' \in \sigma^\vee$  tales que  $w + w' \in \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ . Luego:

$$0 = (w + w')|_\tau = w|_\tau + w'|_\tau,$$

y como ambos son mayores o iguales que cero por estar en  $\sigma^\vee$ , tenemos que  $w|_\tau = 0$  y  $w'|_\tau = 0$ , o sea,  $w, w' \in \tau^\perp$ .

Veamos que la misma asociación, de las caras de  $\sigma^\vee$  en las caras de  $\sigma$ , es inversa de la que vimos recién. Sea entonces  $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$  la cara de  $\sigma^\vee$ . Queremos ver:

$$(\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\perp \cap \sigma = \tau.$$

( $\supseteq$ ): Sea  $v \in \tau$ . Para todo  $w \in \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ , tenemos que  $w(v) = 0$  por definición de  $\tau^\perp$ , luego  $v \in \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ , y como trivialmente  $v \in \sigma$ , probamos la inclusión.

( $\subseteq$ ): Sea  $v \in (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\perp \cap \sigma$ . Como  $u \in \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ , tenemos que  $u(v) = 0$ , y como  $v \in \sigma$  por como fue tomado, tenemos que  $v \in \sigma \cap \ker(u) = \tau$ , probando la inclusión.  $\square$

Lo siguiente va a ser útil.

PROPOSICIÓN 2.16. Sea  $\sigma$  un cono en  $N_{\mathbb{R}}$ . Son equivalentes:

- (a)  $\sigma$  es estrictamente convexo, i.e.  $\sigma$  no contiene subespacios no triviales de  $N_{\mathbb{R}}$ .
- (b)  $\sigma \cap (-\sigma) = 0$ .
- (c) 0 es una cara de  $\sigma$ .
- (d)  $\dim \sigma^\vee = n = \text{rango}(M)$ .

DEMOSTRACIÓN. (a)  $\Leftrightarrow$  (b): Es trivial.

(b)  $\Leftrightarrow$  (c): El directo se deduce de que  $\sigma \cap (-\sigma)$  sea una cara: Si tomamos  $u_1, \dots, u_r$  generadores de  $\sigma^\vee$ , entonces::

$$\sigma \cap (-\sigma) = \{v \mid u(v) = 0 \forall u \in \sigma^\vee\} = \sigma \cap \ker(u_1 + \dots + u_r), \quad \text{pues } u_i|_\sigma \geq 0.$$

La primera igualdad es gracias a la proposición 2.2: la inclusión de izquierda a derecha es obvia, y la de derecha a izquierda es porque si  $v \notin \sigma$  ( $v \notin -\sigma$ ), entonces existe  $u \in \sigma^\vee$  tal que  $u(v) < 0$ , pues  $u(-v) < 0$  y entonces  $u(v) > 0$ . Luego  $v$  no puede pertenecer al conjunto de la derecha.

Para el recíproco, si  $0$  es una cara, existe  $u \in \sigma^\vee$  tal que  $0 = \sigma \cap \ker(u)$ , o sea que  $u(v) > 0$  para todo  $v \in \sigma - \{0\}$  y entonces  $u(-v) < 0$ . Luego, si  $v \in \sigma$ ,  $-v \notin \sigma$ .

(b)  $\Leftrightarrow$  (d): Para el directo, usamos de nuevo que:

$$\sigma \cap (-\sigma) = \sigma \cap (u_1 + \dots + u_r)^\perp,$$

donde puedo tomar los  $u_i \in \sigma^\vee$  siendo base del subespacio generado por  $\sigma^\vee$ . Si  $r < n$ , entonces existe  $v \neq 0$  tal que  $u_1(v) = \dots = u_r(v) = 0$ , contradiciendo que  $\sigma \cap (-\sigma) = 0$ .

Para el recíproco, supongamos que existe  $0 \neq v \in \sigma \cap (-\sigma)$ , i.e.  $v, -v \in \sigma$ . De esto, tenemos que  $u(v) = 0$  para todo  $u \in \sigma^\vee$ . Completamos  $v$  a una base cualquiera de  $V$

$$\{v, v_2, \dots, v_n\},$$

y consideramos la base dual

$$\{v^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}, \quad \text{base de } V^*.$$

Como para todo  $u \in \sigma^\vee$ ,  $u(v) = 0$ , se tiene que  $u \in \text{span}\{v_2^*, \dots, v_n^*\}$ . Luego:

$$\text{span}(\sigma^\vee) \subseteq \text{span}\{v_2^*, \dots, v_n^*\},$$

por lo que  $\dim(\sigma^\vee) \leq n - 1$ , una contradicción.  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.17.** Sea  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  un cono racional estrictamente convexo. Entonces  $\sigma$  está generado por sus aristas.

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\{v_1, \dots, v_s\}$  un conjunto generador minimal de  $\sigma$ , es decir, que no se puede prescindir de ninguno de los generadores. Afirmamos que los siguientes rayos

$$\rho_i = \langle v_i \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$$

son caras de  $\sigma$ , de lo que se deduce lo que queríamos probar.

Si  $\rho_1$  no fuera una cara, entonces por el Lema 2.13, existen dos vectores en  $\sigma$ , alguno no en  $\rho_1$ , pero su suma sí. A menos de normalizar, podemos suponer que ese vector es  $v_1$ , es decir:

$$\sum a_i v_i + \sum b_i v_i = v_1.$$

Supongamos que  $\sum a_i v_i \notin \rho_1$ , es decir, existe un  $k \neq 1$  con  $a_k > 0$ . Despejamos y tenemos:

$$\sum_{i>2} (a_i + b_i) v_i = (1 - a_1 - b_1) v_1.$$

Luego, como el cono es estrictamente convexo, tenemos que  $(1 - a_1 - b_1) > 0$ , por lo que podríamos escribir  $v_1$  como combinación positiva de  $v_2, \dots, v_s$ , lo que contradice que el generador tomado sea minimal. Luego,  $\rho_1$  es una cara y lo mismo para todos los rayos  $\rho_i$ .  $\square$

Sea  $\sigma$  un cono en  $N_{\mathbb{R}}$ . Definimos  $S_\sigma$  como el monoide:

$$(2.5) \quad S_\sigma = M \cap \sigma^\vee.$$

**PROPOSICIÓN 2.18** (Lema de Gordan). Si  $\sigma$  es un cono racional entonces  $S_\sigma$  es un monoide finitamente generado.

DEMOSTRACIÓN. Usando el Corolario 2.14, tomamos un generador racional del cono  $\sigma^\vee = \langle m_1, \dots, m_s \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \subseteq M$ . Sea

$$K = \left\{ \sum t_i m_i \mid 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

El conjunto  $K$  es un compacto de  $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$  y  $M$  es discreto, así que  $K \cap M$  es finito. Afirmamos que  $K \cap M$  genera a  $S_\sigma$ . Sea  $m \in S_\sigma$ ,  $m = \sum r_i m_i$ ,  $r_i \geq 0$  y escribimos  $r_i = n_i + t_i$ , con  $n_i \geq 0$  entero y  $0 \leq t_i \leq 1$ . Entonces:

$$u = \sum n_i m_i + u', \quad u' = \sum t_i m_i,$$

donde los  $m_i \in K \cap M$  (trivialmente) y  $u' \in K \cap M$ ; a  $K$  por ser los  $0 \leq t_i \leq 1$  y a  $M$  porque  $u' = u - \sum m_i u_i$  y  $M$  es un grupo.

Luego,  $S_\sigma$  es finitamente generado; más aún, vale:

$$(2.6) \quad S_\sigma = \langle K \cap M \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$$

□

Es claro que  $S_\sigma$  es conmutativo y es un submonoide del látice  $M$ ; luego, recordando la definición 1.10, el lema de Gordan lo podemos reescribir como:

LEMA 2.19. *Si  $\sigma$  es un cono racional entonces  $S_\sigma$  es un monoide afín.*

Esto no es cierto si el cono no es racional. El problema está en que si uno de los generadores tiene pendiente irracional, su dual también tendrá una pendiente irracional y entonces siempre aparecerán nuevos puntos enteros cerca. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 2.20. Consideremos en  $\mathbb{R}^2$  el cono  $\sigma = \langle (\alpha, -1), (0, 1) \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$  donde  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ . El cono dual son elementos de la forma  $ae_1^* + be_2^* \in M_{\mathbb{R}}$  de forma que evaluados en los dos vectores del cono sean no negativos, esto es,  $a, b \in \mathbb{R}$  que verifiquen:

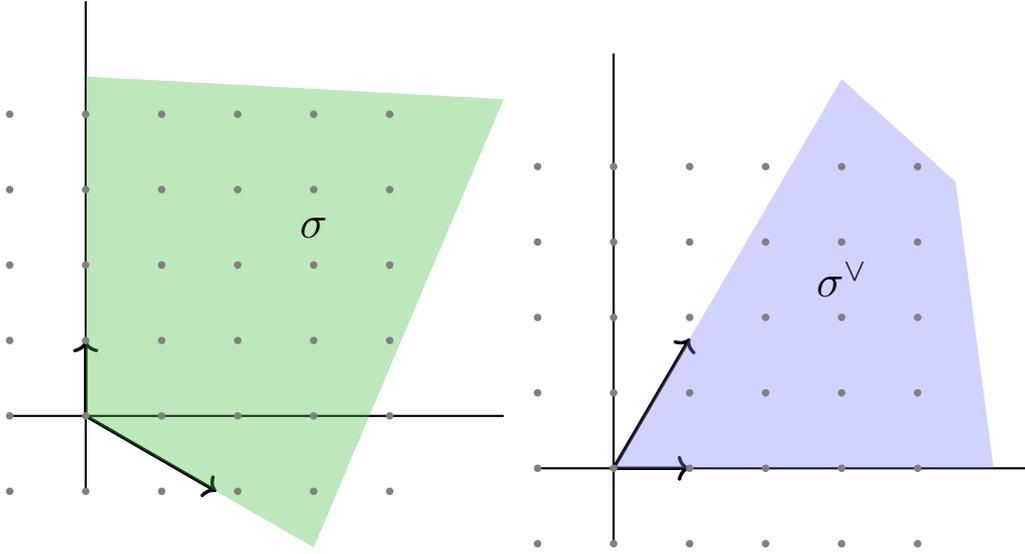
$$\begin{aligned} a\alpha - b &\leq 0 \Rightarrow a \leq \frac{1}{\alpha}b, \\ b &\leq 0. \end{aligned}$$

Luego, el dual  $\sigma^\vee$  queda<sup>1</sup>:

$$\sigma^\vee = \langle (1, 0), (1, \alpha) \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}},$$

---

<sup>1</sup>En la ilustración, aunque el vector parece tener pendiente irracional, en realidad es racional, ya que los pixeles no creen en  $\sqrt{2}$ .



El monoide  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$  no puede ser finitamente generado. En efecto, sean  $m_1, \dots, m_s \in S_\sigma$  ordenados de forma creciente según su pendiente  $\mu_i$ , o sea que  $0 \leq \mu_i < \alpha$  (ya que  $\mu \in \mathbb{Q}$ ). Luego, todos los vectores generados por combinaciones lineales positivas de los  $m_i$  tendrán pendiente entre 0 y  $\mu$ . Sin embargo, consideremos el vector

$$v = \frac{N}{\alpha}(1, \alpha) + \left( \left\lceil \frac{N}{\alpha} \right\rceil - \frac{N}{\alpha} \right) (1, 0) = \left( \left\lceil \frac{N}{\alpha} \right\rceil, N \right) \in \sigma^\vee \cap M = S_\sigma$$

para algún  $N$  que elegiremos enseguida. El vector  $v$  tiene pendiente  $\frac{N}{\lceil \frac{N}{\alpha} \rceil}$ , pero como esa expresión tiende a  $\alpha$  con  $N \rightarrow \infty$ , si elegimos un  $N$  suficientemente grande, tenemos que  $\mu < \frac{N}{\lceil \frac{N}{\alpha} \rceil} < \alpha$ , luego el vector  $v$  no puede estar generado por los  $m_s$ . Concluimos que  $S_\sigma$  no puede admitir un conjunto de generadores finito.

Como vimos en la Proposición 2.16 (cambiando los roles de  $\sigma$  y  $\sigma^\vee$  gracias a la Proposición 2.14), si un cono no es de dimensión maximal entonces su dual no es estrictamente convexo. En particular, las caras propias de un cono nunca serán de dimensión maximal por lo que sus duales no serán estrictamente convexos. La siguiente Proposición caracteriza el monoide de una cara  $S_\tau$  en función del monoide del cono  $S_\sigma$  y el funcional  $u \in \sigma^\vee$  que define a la cara  $\tau$ , básicamente agregando los múltiplos negativos del funcional, lo que hace que tengamos toda una “recta” en  $S_\tau$  (en realidad, la recta está en  $\tau^\vee$ ).

PROPOSICIÓN 2.21. Sea  $\sigma$  un cono racional y  $\tau = \sigma \cap \ker(u)$  una cara no trivial. Entonces:

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\leq 0}u \subseteq M.$$

DEMOSTRACIÓN. Primero, como la cara es no trivial, tenemos que  $u$  tiene coordenadas racionales, por lo que podemos suponer  $u \in M$ .

La inclusión de derecha a izquierda se deduce de que  $-u \in S_\tau$  y que  $\tau \subseteq \sigma$  implica  $\sigma^\vee \subseteq \tau^\vee$ , luego  $S_\sigma \subseteq S_\tau$ .

Sea  $w \in S_\tau$ . Queremos encontrar un  $k \geq 0$  tal que  $w + ku \in S_\sigma$ . Consideremos un generador de  $\sigma$ , o sea

$$\sigma = \langle v_1, \dots, v_s \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}.$$

Si  $w \notin S_\sigma$ , es porque  $w(v_i) < 0$  para algunos  $v_i \notin \tau$ ; puedo suponer que existe  $1 \leq i_0 < s$  tal que  $w(v_i) < 0$  para  $i \leq i_0$ . Por la Proposición 2.6,  $u(v_i) > 0$  para todo  $i \leq i_0$ , por lo que podemos tomar  $k$  suficientemente grande para que:

$$(2.7) \quad w(v_i) + ku(v_i) \geq 0, \quad \forall i \leq i_0,$$

con lo que  $w + ku$  es no negativo en  $\sigma$ , o sea  $w + ku = u' \in S_\sigma$  y entonces  $w = u' - ku$ .  $\square$

LEMA 2.22. Si  $\sigma_1, \sigma_2$  son dos conos cuya intersección  $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$  es una cara de ambos, entonces:

$$S_\tau = S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2}.$$

DEMOSTRACIÓN. ( $\supseteq$ ): Es claro de la definición ya que  $\tau \subseteq \sigma_i$  implica  $\sigma_i^\vee \subseteq \tau^\vee$ . ( $\subseteq$ ): Por el Lema de Gordan 2.19, tenemos que  $S_\tau = S_{\sigma_1} + \mathbb{Z}_{\leq 0}u$  para cualquier  $u \in \sigma_1^\vee$  que verifique  $\tau = \sigma_1^\vee \cap \ker(u)$ . Basta encontrar un  $u \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee \cap M$  que verifique  $\tau = \sigma_1 \cap \ker(u) = \sigma_2 \cap \ker(u)$ , ya que en ese caso,  $-u \in S_{\sigma_2}$  y entonces:

$$S_\tau = S_{\sigma_1} + \mathbb{Z}_{\leq 0}u \subseteq S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2}.$$

Consideremos el cono racional  $\gamma = \sigma_1 - \sigma_2 = \{v_1 - v_2 \mid v_i \in \sigma_i\}$  y sea  $u \in \text{Relint}(\gamma^\vee) = \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee$ . Afirmamos que ese  $u$  sirve.

Por estar en el interior relativo, la Proposición 2.11 nos dice que:

$$\gamma \cap \ker(u) = \gamma \cap (-\gamma) = (\sigma_1 - \sigma_2) \cap (\sigma_2 - \sigma_1).$$

Luego:

$$\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2 \subseteq \gamma \cap (-\gamma) = \gamma \cap \ker(u),$$

y entonces

$$\tau \subseteq \sigma_1 \cap \ker(u).$$

Para la otra inclusión:

$$\begin{aligned} v \in \sigma_1 \cap \ker(u) &\subseteq \gamma \cap \ker(u) \subseteq \sigma_2 - \sigma_1 \\ \Rightarrow v &= v_2 - v_1, \quad v_i \in \sigma_i. \end{aligned}$$

Se sigue que  $v + v_1 \in \sigma_1 \cap \sigma_2 = \tau$ , pero la suma de dos vectores de un cono está en una cara únicamente si los dos vectores están en la cara, pues ambos tienen que valer 0 en el funcional que define la cara o si no, uno tendría que valer positivo y el otro negativo, lo cual no se puede. Luego,  $v_1 \in \tau$  y tenemos:

$$(2.8) \quad \tau = \sigma_1 \cap \ker(u).$$

El mismo argumento para  $-u$  muestra que:

$$\tau = \sigma_2 \cap (-u),$$

con lo que encontramos el  $u$  que buscábamos.  $\square$

### 3. Los conos inducen variedades tóricas

DEFINICIÓN 2.23. Una *variedad tórica*  $X$  es una variedad algebraica con un toro  $T \subseteq X$  como abierto denso tal que la acción de  $T$  en sí mismo como grupo algebraico se extiende a toda la variedad  $X$ , i.e. existe un morfismo  $a : T \times X \rightarrow X$  que hace conmutar el siguiente diagrama, siendo  $m$  la multiplicación (coordinada a coordinada) de  $T$ :

$$\begin{array}{ccc} T \times X & \xrightarrow{a} & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ T \times T & \xrightarrow{m} & T \end{array}$$

Recordamos, como vimos en (1.9), que todos los toros son de la forma  $T_N$  para algún látice  $N$

$$(2.9) \quad T_N = \text{Spm}(\mathbb{k}[M]) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z}).$$

Lo que veremos en esta sección es que un cono racional en  $N_{\mathbb{R}}$  nos induce una variedad tórica afín, y en la próxima sección, veremos que estas variedades son además normales y son todas las variedades tóricas afines normales.

Sea  $\sigma$  un cono en  $N_{\mathbb{R}}$ . Consideramos:

$$S_{\sigma} = M \cap \sigma^{\vee},$$

que es un monoide conmutativo con la suma, y su álgebra generada:

$$\mathbb{k}[S_{\sigma}] = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i X^{m_i} \mid a_i \in \mathbb{k}, m_i \in S_{\sigma} \right\},$$

donde  $X^m \cdot X^w = X^{m+w}$ , donde identificaremos en general  $m \in S_{\sigma}$  con  $X^m \in \mathbb{k}[S_{\sigma}]$ .

La clave está en entender que la inclusión  $\mathbb{k}[S_{\sigma}] \hookrightarrow \mathbb{k}[M]$  nos induce la acción y la inclusión de  $T$  en  $U_{\sigma}$ .

Definimos entonces la variedad afín asociada al cono  $\sigma$ , notada como  $U_{\sigma}$ , a la variedad:

$$U_{\sigma} = \text{Spm}(\mathbb{k}[S_{\sigma}]).$$

Notemos que si  $\tau \subset \sigma$  son conos, tenemos:

$$\begin{aligned} & \tau \subset \sigma \\ \Rightarrow & \tau^{\vee} \supset \sigma^{\vee} \\ \Rightarrow & S_{\tau} \supset S_{\sigma} \\ \Rightarrow & \mathbb{k}[S_{\tau}] \supset \mathbb{k}[S_{\sigma}] \end{aligned}$$

Esa inclusión de álgebras nos da un morfismo dominante<sup>2</sup> entre las variedades  $U_{\tau} \rightarrow U_{\sigma}$ . Veremos ahora que ese morfismo es una inmersión abierta, lo que nos permite ver a la variedad  $U_{\tau}$  como un abierto de  $U_{\sigma}$ .

PROPOSICIÓN 2.24. Si  $\tau$  es una cara de  $\sigma$  entonces el morfismo inducido de  $U_{\tau}$  en  $U_{\sigma}$  es inyectivo y su imagen es un abierto principal de  $U_{\sigma}$ .

<sup>2</sup>Un morfismo entre variedades algebraicas (esquemas) es dominante si su imagen es densa en el codominio.

DEMOSTRACIÓN. Identificamos  $\mathbb{k}[S_\sigma]$  con su imagen en  $\mathbb{k}[S_\tau]$ . Por la proposición 2.21, existe  $m \in S_\sigma$  tal que  $\tau = \sigma \cap \ker(m)$  y vale

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\leq 0}m.$$

Esto implica que los elementos básicos de  $\mathbb{k}[S_\tau]$ , los monomios mónicos, serán exactamente los de la forma  $X^{w-lm} = \frac{X^w}{(X^m)^l}$  con  $w \in S_\sigma$  y  $l \geq 0$ . Luego,  $\mathbb{k}[S_\tau] = (\mathbb{k}[S_\sigma])_{X^m}$ , la localización por el elemento  $X^m$ . Esto quiere decir que:

$$U_\tau = \text{Spm}(\mathbb{k}[S_\tau]) = \text{Spm}((\mathbb{k}[S_\sigma])_{X^m}) = D(X^m) \subseteq \text{Spm}(\mathbb{k}[S_\sigma]) = U_\sigma,$$

donde  $D(X^m)$  es el abierto principal de los ideales que no contienen a  $X^m$ , es decir:

$$(2.10) \quad D(X^m) = \text{Spm}(\mathbb{k}[S_\sigma]) - \mathcal{V}(X^m) = \{m \triangleleft \mathbb{k}[S_\sigma] \text{ maximal} \mid (X^m) \not\subseteq m\}.$$

Se sigue de esto lo que buscábamos probar.  $\square$

Si  $\sigma$  es un cono racional, entonces por el Lema de Gordan (2.19),  $S_\sigma$  es finitamente generado, donde a cada elemento lo podemos escribir como combinación entera de  $\pm e_i^*$ , los elementos básicos de  $M$ . Luego,  $\mathbb{k}[S_\sigma]$  está finitamente generada como álgebra por elementos que son productos de los elementos básicos asociados a los  $\pm e_i^*$ : los  $X_i^{\pm 1}$ . Ejemplo: si  $S_\sigma = \{e_1^* - e_2^*, e_1^* + 2e_3^*\}$ , entonces  $\mathbb{k}[S_\sigma] = \mathbb{k}[X_1X_2^{-1}, X_1X_3^2]$ . En general:

$$\mathbb{k}[S_\sigma] \hookrightarrow \mathbb{k}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_r, x_r^{-1}],$$

siendo  $r$  el rango del monoide  $S_\sigma$ , es decir, el rango del sublátice  $\mathbb{Z}S_\sigma$  de  $M$ . Finalmente, tenemos que:

$$U_\sigma = \text{Spm}(\mathbb{k}[S_\sigma]) \supseteq \text{Spm}(\mathbb{k}[x_1, \dots, x_r^{-1}]) = (\mathbb{k}^*)^r = T,$$

o sea que tiene un abierto denso que es un toro algebraico. Vamos a mostrar ahora que la acción del toro se extiende a todo  $U_\sigma$ , concluyendo que  $U_\sigma$  es una variedad tórica afín, es decir:

**TEOREMA 2.25.** *Si  $\sigma$  es un cono racional en  $N_{\mathbb{R}}$ , entonces  $U_\sigma$  es una variedad tórica afín. Más aún:*

*$U_\sigma$  tiene dimensión  $n \Leftrightarrow T_N$  es el toro de  $U_\sigma \Leftrightarrow \sigma$  es estrictamente convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Lo probaremos primero en el caso en que  $\sigma$  es estrictamente convexo.

La acción natural de  $T$  en  $\mathbb{k}[M]$  se restringe a una acción en  $\mathbb{k}[S_\sigma]$ :

$$\begin{array}{ccc} T_N \times \mathbb{k}[S_\sigma] & \longrightarrow & \mathbb{k}[S_\sigma] \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_N \times \mathbb{k}[M] & \longrightarrow & \mathbb{k}[M] \end{array}$$

que por el Teorema 1.30, es equivalente a una coacción:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k}[M] \otimes \mathbb{k}[S_\sigma] & \xleftarrow{\delta} & \mathbb{k}[S_\sigma] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{k}[M] \otimes \mathbb{k}[M] & \xleftarrow{\delta} & \mathbb{k}[M] \end{array}$$

que, dualizando, es equivalente a extender la acción de  $T$  en sí mismo:

$$\begin{array}{ccc} T_N \times U_\sigma & \xrightarrow{a} & U_\sigma \\ \uparrow & & \uparrow \\ T_N \times T_N & \xrightarrow{m} & T_N \end{array}$$

Veamos las cuentas en detalle.

Como estamos en el caso estrictamente convexo, el  $0$  es una cara de  $\sigma$  por la Proposición 2.16. Luego:

$$S_0 = M \cap 0^\vee = M = \langle e_1^*, -e_1^*, e_2^*, \dots, -e_n^* \rangle,$$

o sea,  $M$  está generado por los  $\pm e_i^*$  como monoide.

Tenemos entonces que su álgebra asociada es:

$$\mathbb{k}[M] \simeq \mathbb{k}[X_1, X_1^{-1}, X_2, \dots, X_n, X_n^{-1}], \quad X_i := X^{e_i^*},$$

su variedad asociada

$$U_0 = \text{Spm}(\mathbb{k}[M]) = (\mathbb{k}^*)^n = T_N$$

es el toro, y por la proposición anterior, es un abierto principal de  $U_\sigma$ . Veremos ahora que tenemos una acción de  $T_N$  en  $U_\sigma$ , inducida por la acción natural de  $T_N$  en  $\mathbb{k}[S_\sigma]$ , que extiende la multiplicación de  $T_N$ .

Por la proposición 1.29, dar una acción de  $T_N$  en  $U_\sigma$  es equivalente a dar una coacción de  $\mathbb{k}[T] = \mathbb{k}[M]$  en  $\mathbb{k}[U_\sigma] = \mathbb{k}[S_\sigma]$ . Por el Teorema 1.30, dar esta coacción es lo mismo que dar una acción racional de  $T$  en  $\mathbb{k}[S_\sigma]$ . Usemos esto.

Tenemos una acción (representación) racional<sup>3</sup> de  $T$  en  $\mathbb{k}[S_\sigma]$  dada por:

$$t \cdot X^m = \chi^m(t) X^m$$

y extendida por linealidad. Aquí  $\chi^m : T_N \rightarrow \mathbb{k}$  es un caracter del toro, definido más adelante en 2.29. Esa acción nos induce una coacción  $\delta : \mathbb{k}[S_\sigma] \rightarrow \mathbb{k}[T] \otimes \mathbb{k}[S_\sigma]$  de la siguiente forma:

$$\delta(X^m) = X^m \otimes X^m$$

y extendida por linealidad. A su vez, esta coacción define una acción de  $T = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[M], \mathbb{k}) = \text{Hom}_{\mathbb{N}}(M, \mathbb{k})$  en  $U_\sigma = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[S_\sigma], \mathbb{k}) = \text{Hom}_{\mathbb{N}}(S_\sigma, \mathbb{k})$  precomponiendo:

$$a : T \times U_\sigma \rightarrow U_\sigma, \quad a(\varphi) = \varphi \circ \delta$$

para todo  $\varphi \in T \times U_\sigma$ .

En particular, podemos ver a  $\delta$  como morfismo de monoides  $\delta : S_\sigma \rightarrow M \times S_\sigma$ :

$$\delta(m) = (m, m).$$

Veamos entonces quién es la acción  $a$ . Sea  $(t, x) \in T \times U_\sigma \simeq \text{Hom}_{\mathbb{N}}(M \otimes S_\sigma, \mathbb{k})$ . Entonces:

$$a((t, x))(m) = (t, x)(\delta(m)) = (t, x)(m, m) = t(m)x(m),$$

<sup>3</sup>Escapa de los cometidos de este trabajo introducirnos en la teoría de representaciones racionales. Para ver la definición y algunas propiedades, ver por ejemplo [FSR17, Capítulo 5, sección 3]

o sea,  $a(t, x) = t \cdot x \in \text{Hom}_N(S\sigma, \mathbb{k})$ , definida por:

$$t \cdot x(m) = t(m)x(m)$$

es una acción de  $T$  en  $U_\sigma$ . Esta acción, como vimos en (1.8), extiende la multiplicación de  $T_N$ , por lo que  $U_\sigma$  es una variedad tórica.

Tenemos que la dimensión de  $T_N$  es  $n$  y por ser un abierto denso de  $U_\sigma$ , esta también tiene dimensión  $n$ .

Si  $\sigma$  no es estrictamente convexo, entonces el  $0$  no es una cara pero podemos hacer lo mismo con la cara  $\tau$  más chica posible, que es el subespacio generado por los vectores  $v$  tales que  $v, -v \in \sigma$ . En este caso, el álgebra asociada a  $\tau$  es:

$$\mathbb{k}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_r, X_r^{-1}],$$

que tiene como variedad asociada:

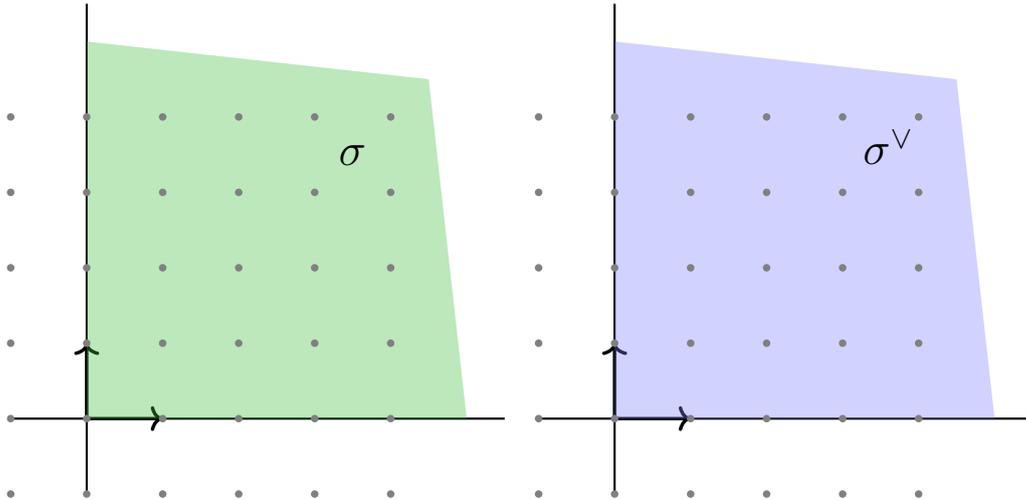
$$\text{Spm}(\mathbb{k}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_r, X_r^{-1}]) = (\mathbb{k}^*)^r = T = \text{Hom}(S_\tau, \mathbb{k}^*),$$

donde están todos los  $X_i$  que aparecen en los generadores del álgebra  $\mathbb{k}[S_\sigma]$ , pero no aquellos que no aparecen; por ejemplo, si  $e_j, -e_j \in \sigma$ , entonces  $e_j^*, -e_j^* \notin S_\sigma$  y por lo tanto  $X_j, X_j^{-1}$  no aparecen para generar el álgebra de la cara  $\tau$ . En este caso, la dimensión de  $U_\tau$ , el toro que actúa en  $U_\sigma$ , es  $r < n$ , y por lo tanto, la dimensión de  $U_\sigma$  también.  $\square$

**OBSERVACIÓN 2.26.** Esta construcción muestra en realidad que  $U_\sigma$  es un monoide algebraico (definiremos a continuación) cuyo grupo de invertibles es el toro  $T_N$ , pues notar que la coacción  $\delta : \mathbb{k}[S_\sigma] \rightarrow \mathbb{k}[M] \otimes \mathbb{k}[S_\sigma]$  en realidad la podemos ver  $\delta : \mathbb{k}[S_\sigma] \rightarrow \mathbb{k}[S_\sigma] \otimes \mathbb{k}[S_\sigma]$ , lo que nos induce el morfismo  $m : U_\sigma \times U_\sigma \rightarrow U_\sigma$ .

Volviendo a las variedades tóricas, veamos dos ejemplos.

**EJEMPLO 2.27.** Consideramos primero el cono  $\sigma = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ . Su cono dual es  $\sigma^\vee = \langle e_1^*, e_2^* \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ , como se ve en la figura.



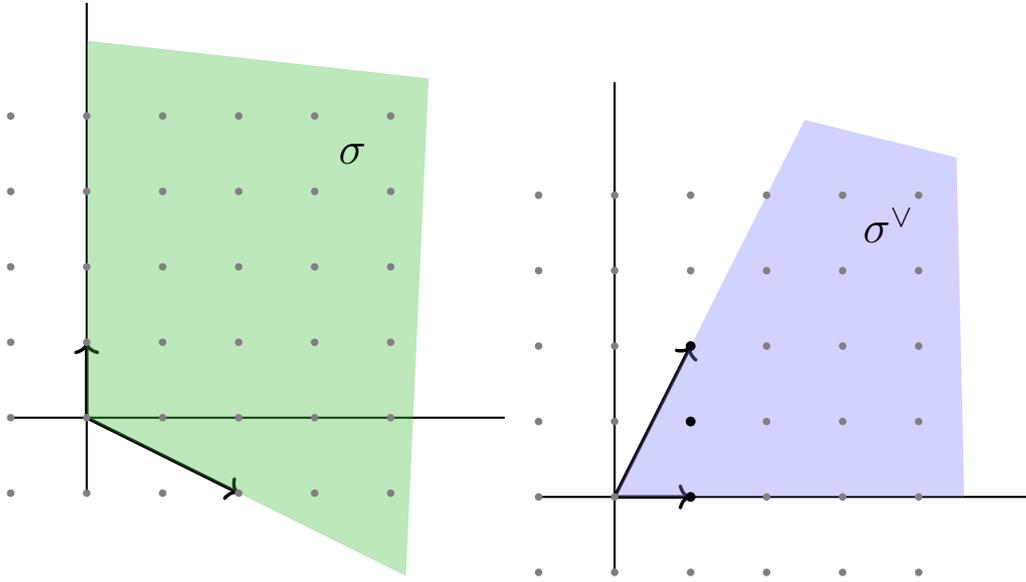
El látice  $M$  son los puntos grises, por lo que el monoide  $S_\sigma$ , que son los puntos grises que están en la región azul  $\sigma^\vee$ , está generado por  $e_1^*$  y  $e_2^*$ . Luego, usando la notación  $X = X^{e_1^*}$ ,  $Y = X^{e_2^*}$ , tenemos:

$$\mathbb{k}[S_\sigma] = \mathbb{k}[X, Y].$$

Entonces la variedad  $U_\sigma = \text{Spm}(\mathbb{k}[X, Y])$  es el plano  $\mathbb{k}^2$ , donde el toro es  $(\mathbb{k}^*)^2$  y la acción es:

$$(s, t) \cdot (x, y) = (sx, ty).$$

EJEMPLO 2.28. Consideremos el cono  $\sigma = \langle e_2, 2e_1 - e_2 \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$  en  $\mathbb{R}^2$ . El cono dual  $\sigma^\vee$  está generado por los vectores  $e_1^*$  y  $e_1^* + 2e_2^*$ , como se ve en la figura.



Se puede observar que los tres puntos negros en la figura de  $\sigma^\vee$ :  $e_1^*$ ,  $e_1^* + e_2^*$  y  $e_1^* + 2e_2^*$  son los generadores de  $S_\sigma$  como monoide. Luego, usando la notación  $X = X^{e_1^*}$ ,  $Y = X^{e_2^*}$  tenemos:

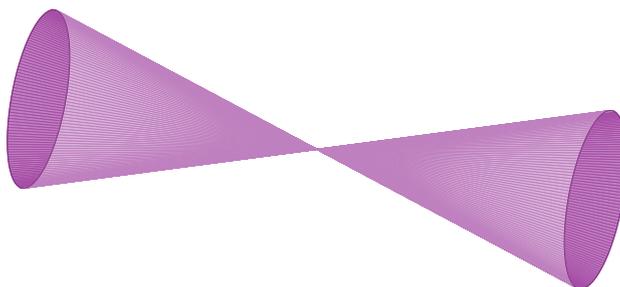
$$\mathbb{k}[S_\sigma] = \mathbb{k}[X, XY, XY^2] = \frac{\mathbb{k}[x, y, z]}{(y^2 - xz)}.$$

Entonces la variedad  $U_\sigma = \text{Spm}\left(\frac{\mathbb{k}[x, y, z]}{(y^2 - xz)}\right)$  es la cuádrica:

$$U_\sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{k}^3 \mid y^2 = xz\},$$

donde el toro es  $T = \{(s, st, st^2) \mid s, t \in \mathbb{k}^*\} \simeq (\mathbb{k}^*)^2$  y la acción es:

$$(s, t) \cdot (x, y, z) = (sx, sty, st^2z)$$



Notar que la combinatoria del cono es realmente importante, pues en dimensiones bajas y con conos tan parecidos a la vista, obtenemos variedades totalmente diferentes. En el siguiente capítulo hablaremos de cómo es que la geometría del cono nos da información sobre la variedad tórica (por ejemplo, si es afín o no, si es regular, etc).

#### 4. Los conos inducen casi todas las variedades tóricas.

En la sección anterior vimos que un cono racional estrictamente convexo  $\sigma$  induce una variedad tórica afín  $U_\sigma$ . Sin embargo, no toda variedad tórica afín es inducida por un cono. En esta sección mostraremos cuáles son las variedades tóricas que vienen inducidas por conos racionales.

Antes de empezar, necesitamos algunas definiciones y propiedades sobre toros algebraicos.

**DEFINICIÓN 2.29.** Un caracter de un toro  $T_N$  es un morfismo de grupos  $\chi : T_N \rightarrow \mathbb{k}^*$ .

Dado  $m = (m_1, \dots, m_n) \in M$ , definimos el caracter  $\chi^m : (\mathbb{k}^*)^n \rightarrow \mathbb{k}^*$  como

$$\chi^m(t_1, \dots, t_n) = t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}.$$

**OBSERVACIÓN 2.30.** Los caracteres son funciones regulares.

**PROPOSICIÓN 2.31.** Todo caracter de  $T$  es de la forma  $\chi^m$  para algún  $m \in M$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Primero, observar que  $\mathbb{k}[T]$ , el anillo de funciones regulares de  $T$ , es:

$$\mathbb{k}[T] = \bigoplus_{m \in M} \mathbb{k}\chi^m.$$

Luego, todo caracter  $\chi : T_N \rightarrow \mathbb{k}^*$  es vector propio para la acción de  $T$ , pues:

$$t \cdot \chi(t') = \chi(tt') = \chi(t)\chi(t') \quad \Rightarrow \quad t \cdot \chi = \chi(t)\chi,$$

donde la primera igualdad es la definición de la acción de  $T$  en  $\mathbb{k}[T]$  y la segunda es porque  $\chi$  es morfismo de grupos.

Por otro lado, tenemos  $\chi \in \mathbb{k}[T] = \bigoplus_{m \in M} \mathbb{k}\chi^m$ , es decir:

$$\chi = \sum a_i \chi^{m_i}.$$

Como  $\mathbb{k}$  es infinito, por ser algebraicamente cerrado, existe  $t \in (\mathbb{k}^*)^n = T_N$  tal que  $\chi^{m_i}(t) \neq \chi^{m_j}(t)$  si  $i \neq j$ . Es decir, los  $\chi^{m_i}$  son vectores propios de distinto valor propio para la acción de  $T$ , por lo que una combinación lineal de ellos (en la que al

menos dos coeficientes sean distintos de 0) no puede dar como resultado otro vector propio<sup>4</sup>. Luego, tenemos que  $\chi = a\chi^m$  y como debe ser morfismo de grupos,  $a = 1$ , i.e.

$$\chi = \chi^m \quad \text{para algún } m \in M.$$

□

Como  $\mathbb{k}[T] = \langle \chi^m \mid m \in M \rangle_{\mathbb{k}}$ , podemos identificar (y lo haremos muy seguido a lo largo y ancho de este trabajo)  $\mathbb{k}[M]$  con  $\mathbb{k}[T]$  mediante  $X^m \leftrightarrow \chi^m$ , donde  $X^m$  es un elemento de un álgebra de polinomios abstracta y  $\chi^m : T_N \rightarrow \mathbb{k}^*$  es una función polinomial (regular) en  $T$ .

PROPOSICIÓN 2.32. Sea  $T$  un toro actuando linealmente en un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial de dimensión finita  $W$ . Entonces:

- (a) Para todo  $t \in T_N$ , el mapa  $t : W \rightarrow W$  definido por la acción del elemento  $t$  es diagonalizable.
- (b) Se pueden diagonalizar todos los  $t \in T_N$  simultáneamente.
- (c) Dado  $m \in M$ , definimos

$$W_m = \{w \in W \mid t \cdot w = \chi^m(t)w, \text{ para todo } t \in T_N\}.$$

$$\text{Entonces } W = \bigoplus_{m \in M} W_m.$$

Para una versión más general y su prueba, ver [Bor91, Capítulo 3, sección 8]. Como consecuencia de la proposición, tenemos el siguiente lema.

LEMA 2.33. Sea  $W \subseteq \mathbb{k}[M]$  un subespacio invariante por la acción de  $T_N$ . Entonces:

$$W = \bigoplus_{X^m \in W} \mathbb{k}X^m.$$

DEMOSTRACIÓN. La acción de  $T$  en  $\mathbb{k}[M]$  está dada por:

$$t \cdot X^m = \chi^m(t)X^m.$$

Luego, es claro que  $W_m = \mathbb{k}X^m$ .

□

TEOREMA 2.34. Una variedad afín  $X$  es tórica si y sólo si  $X = \text{Spm}(\mathbb{k}[S])$  para algún monoide afín  $S$ , recordando la definición 1.10.

DEMOSTRACIÓN. El recíproco es esencialmente la construcción que hicimos para ver que un cono induce una variedad tórica, ya que en dicha construcción usamos que el cono  $\sigma$  era racional sólo para tomar el monoide  $S_\sigma$ , que es un monoide afín por el Lema 2.19.

Para el directo, sea  $T_N$  el toro que actúa en  $X$  con álgebra de funciones regulares  $\mathbb{k}[M] = \mathbb{k}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n^{-1}]$ . Como  $T_N \subseteq X$  es un abierto denso, tenemos que el morfismo de álgebras inducido

$$\mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}[T_N] = \mathbb{k}[M]$$

<sup>4</sup>Este es un resultado clásico de álgebra lineal: si  $v_1, \dots, v_n$  son vectores propios de distinto valor propio, entonces una combinación lineal de ellos no puede ser vector propio.

es inyectivo, así que podemos pensar a  $\mathbb{k}[X]$  como una subálgebra de  $\mathbb{k}[M]$ .

La acción de  $T$  en  $X$  está dada por un morfismo  $T \times X \rightarrow X$ , por lo que, para  $t \in T$  y  $f \in \mathbb{k}[X]$  fijos, el siguiente mapa:

$$\begin{aligned} X &\hookrightarrow T \times X \rightarrow X \rightarrow \mathbb{k}, \\ p &\mapsto f(t^{-1} \cdot p) \end{aligned}$$

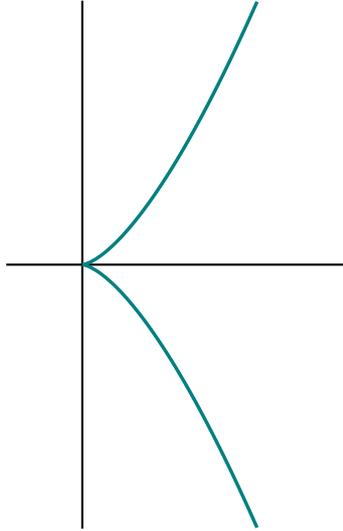
es una función regular en  $X$ . Lo que acabamos de mostrar es que la acción de  $T$  en  $\mathbb{k}[M]$ ,  $t \cdot f(\bullet) = f(t \cdot \bullet)$ , deja invariante el subespacio  $\mathbb{k}[X]$ , dejándonos en las hipótesis del lema anterior. Tenemos:

$$\mathbb{k}[X] = \bigoplus_{X^m \in \mathbb{k}[X]} \mathbb{k}X^m = \mathbb{k}[S], \quad S = \{m \in M \mid X^m \in \mathbb{k}[X]\}.$$

$S$  claramente es conmutativo y se encaja en  $M$ . Resta sólo ver que es finitamente generado. Como  $X$  es afín,  $\mathbb{k}[X]$  está finitamente generado por ciertos  $f_1, \dots, f_s$ , y cada uno de estos usa sólo un número finito de elementos de la forma  $X^m$ , por lo que la suma directa es finita y, por lo tanto,  $S$  es finitamente generado.  $\square$

Si  $\sigma$  es un cono racional estrictamente convexo, podemos entonces definir un monoide afín y asociarle una variedad tórica afín, y toda variedad tórica afín es el espectro maximal del álgebra de un monoide afín. Sin embargo, no todo monoide afín es definido a partir de un cono, por lo que no toda variedad tórica afín proviene de un cono racional. Veamos un ejemplo de esto.

EJEMPLO 2.35. Sea  $C = \text{Spm} \left( \frac{\mathbb{k}[x,y]}{(x^3-y^2)} \right)$ , o sea, la curva  $x^3 = y^2$  en  $\mathbb{k}^2$ .



Es una variedad tórica ya que el toro  $T = \{(t^3, t^2) \mid t \in \mathbb{k}^*\} \simeq \mathbb{k}^*$ , actúa en  $X$  de la siguiente forma:

$$(t^3, t^2) \cdot (x, y) = (t^2x, t^3y),$$

o, viendo la acción desde  $\mathbb{T} = \mathbb{k}^*$ :

$$t \cdot (x, y) = (t^2x, t^3y).$$

El álgebra de funciones regulares de  $C$  es:

$$\mathbb{k}[C] = \frac{\mathbb{k}[x, y]}{(x^3 - y^2)} \simeq \bigoplus_{m \geq 2} \mathbb{k}X^m,$$

o sea, es el álgebra inducida por el monoide  $S = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \simeq \langle 2, 3 \rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq M$ . Este monoide no puede ser inducido por un cono racional, ni siquiera por un cono cualquiera, ya que no verifica la siguiente definición:

**DEFINICIÓN 2.36.** Un monoide afín  $S \subseteq M$  se dice *saturado* si, para todo  $l \in \mathbb{N} - \{0\}$  y  $m \in M$ ,  $lm \in S$  implica  $m \in S$ .

En efecto, en el ejemplo anterior el monoide no es saturado. Los monoides que provienen de los conos son siempre saturados ya que la condición de estar en  $\sigma^{\vee}$  implica esta propiedad. Luego, el monoide  $S$  no puede venir de intersectar el dual de un cono con  $M$ , i.e. la variedad  $X$  no puede ser inducida por un cono.

Acabamos de detectar un impedimento algebraico sobre el monoide para que la variedad sea inducida por un cono. Geométricamente, este problema de la saturación se traduce en la necesidad de que la variedad satisfaga la siguiente definición.

**DEFINICIÓN 2.37.** Una variedad algebraica afín se dice *normal* si es irreducible y el anillo de funciones regulares  $\mathbb{k}[X]$  es normal.

En el Ejemplo 2.35, la variedad no es normal ya que el polinomio  $X^3 - y$  es entero sobre  $\mathbb{k}[C]$ ,  $\frac{y}{x}$  es un elemento del cuerpo de fracciones que es raíz del polinomio recién mencionado pero no está en  $\mathbb{k}[C]$ .

Si la variedad es normal, entonces el monoide que genera el álgebra es saturado y ahí sí podemos probar que viene de algún cono racional. Este es el siguiente resultado, que es el teorema principal de este capítulo.

**TEOREMA 2.38.** Sea  $X$  una variedad tórica afín con toro  $T_N$ . Son equivalentes:

- (a)  $X$  es normal.
- (b)  $X = \text{Spm}(\mathbb{k}[S])$  para algún monoide saturado afín  $S \subseteq M$ .
- (c)  $X = U_{\sigma}$  para algún cono racional estrictamente convexo  $\sigma$ .

**DEMOSTRACIÓN.** (a)  $\Rightarrow$  (b) : Por el teorema 2.34, se tiene que  $X = \text{Spm}(\mathbb{k}[S])$ . Queremos ver que cuando  $X$  es normal,  $S$  es saturado.

$\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[S]$  por ser afín, y es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones por ser  $X$  normal. Sea  $m \in M$  tal que  $km \in S$  para algún  $k > 0$ . Como  $\chi^m$  es una función polinomial en  $T_N$ , por ser  $T_N$  denso en  $X$ , es además una función racional en  $X$ , es decir,  $\chi^m \in \mathbb{k}(X)$ , el cuerpo de fracciones de  $\mathbb{k}[X]$ . Como  $\chi^{km} \in \mathbb{k}[S] = \mathbb{k}[X]$ , el siguiente

$$X^m - \chi^{km}$$

es un polinomio mónico con coeficientes en  $\mathbb{k}[X]$  que tiene a  $\chi^m$  como raíz. Por ser  $\mathbb{k}[X]$  normal, se tiene que  $\chi^m \in \mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[S]$  y entonces  $m \in S$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c): Consideremos un generador finito de  $S$ :

$$S = \mathbb{Z}^+ \langle m_1, \dots, m_l \rangle.$$

Sea  $\beta = \langle m_i \rangle_{\mathbb{R}^+}$  el cono generado por los  $m_i$ . El toro  $T_N$  tiene dimensión  $n$ , por lo que la variedad  $X$  también y luego el rango<sup>5</sup> de  $S$  es  $n$ . Eso quiere decir que:

$$\langle m_i \rangle_{\mathbb{R}} = M_{\mathbb{R}},$$

o sea, la dimensión de  $\beta$  es  $n$  y por la Proposición 2.16,  $\beta^\vee$  es estrictamente convexo.

AFIRMACIÓN 2.39. Vale que  $S = \beta \cap M$ .

Como los  $\{m_i\}$  generan todo  $M$  como grupo, en particular, vale que:

$$\langle m_i \rangle_{\mathbb{Q}} = M_{\mathbb{Q}}.$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} S &= \langle m_i \rangle_{\mathbb{Z}^+} \subseteq \beta \cap M \\ &= \langle m_i \rangle_{\mathbb{R}^+} \cap M_{\mathbb{Q}} \cap M \\ &= \langle m_i \rangle_{\mathbb{R}^+} \cap \langle m_i \rangle_{\mathbb{Q}} \cap M \\ &= \langle m_i \rangle_{\mathbb{Q}^+} \cap M. \end{aligned}$$

Luego, como  $S$  es saturado, tenemos que  $\langle m_i \rangle_{\mathbb{Q}^+} \cap M \subseteq S$ , pues:

$$\begin{aligned} \sum \frac{p_i}{q_i} m_i &\in \langle m_i \rangle_{\mathbb{Q}^+} \cap M \\ \Rightarrow \left( \prod q_i \right) \sum \frac{p_i}{q_i} m_i &= \sum p'_i m_i \in S \\ \Rightarrow \sum \frac{p_i}{q_i} m_i &\in S \text{ porque } S \text{ es saturado.} \end{aligned}$$

Con esto, probamos la afirmación y (c) se sigue de tomar  $\sigma = \beta^\vee$ .

(c)  $\Rightarrow$  (a) : Sean  $v_1, \dots, v_l \in N$  generadores del cono  $\sigma$ , y sea  $\sigma_i = \mathbb{R}_{\geq 0}\{v_i\}$  el cono generado por  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ , que llamaremos *rayos*. Como los rayos  $\sigma_i$  generan a  $\sigma$  como cono, tenemos que:

$$\sigma^\vee = \bigcap_{i=1}^l \sigma_i^\vee,$$

que intersectando con  $M$  nos da:

$$S_\sigma = \bigcap_{i=1}^l S_{\sigma_i},$$

y que que pasando al álgebra queda:

$$\mathbb{k}[S_\sigma] = \bigcap_{i=1}^l \mathbb{k}[S_{\sigma_i}].$$

Por el lema 1.8, basta con probar que  $\mathbb{k}[S_{\sigma_i}]$  es normal para todo  $i$ .

Primero, notar que podemos tomar a  $v_1$  de forma que  $\frac{1}{k}v_1 \notin N$  para todo  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Luego, podemos completar a un generador linealmente independiente de  $N$ , que también será base de  $N_{\mathbb{R}}$ :  $\{v_1, w_2, \dots, w_n\}$ . Tenemos entonces la base dual:

$$\{v_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*\},$$

---

<sup>5</sup>El rango del monoide afín  $S$  es el rango del grupo libre generado por  $S$ .

luego:

$$S_{\sigma_i} = \sigma_i^\vee \cap M = \langle v_1^*, \pm w_2^*, \dots, \pm w_n^* \rangle,$$

generado como monoide. Finalmente, tenemos:

$$\mathbb{k}[S_{\sigma_i}] = \mathbb{k}[X_1, X_2^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}] = \mathbb{k}[X_1, X_2, \dots, X_n]_{X_2 \dots X_n},$$

o sea,  $\mathbb{k}[S_{\sigma_i}]$  es la localización del anillo de coordenadas en  $n$  variables por el elemento  $X_2 \dots X_n$ , que por el ejemplo 1.6 y el lema 1.7, es normal.  $\square$

La correspondencia del teorema anterior parece estar incompleta pues, como vimos en el Ejemplo 2.35, existen variedades tóricas que no son normales y, por lo tanto, no provienen de un cono. Sin embargo, por el Teorema 2.34, estas variedades provienen de un monoide afín. El problema está en que el monoide no es saturado. Si saturamos el monoide (es decir, considerar el menor submonoide saturado de  $M = \mathbb{Z}^n$  que lo contiene), entonces la variedad que obtenemos es una variedad tórica normal por el teorema anterior; este proceso es un caso particular de lo que se conoce como normalización.

DEFINICIÓN 2.40. Sea  $X$  una variedad algebraica (afín si se quiere). La *normalización* de  $X$  es una variedad normal  $\tilde{X}$  junto con un morfismo dominante  $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$  que verifica la siguiente propiedad universal: para toda variedad normal  $Y$  con un morfismo dominante  $f : Y \rightarrow X$  existe un único morfismo  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \varphi \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

La normalización de una variedad siempre existe y es única a menos de isomorfismo (ver por ejemplo [Sha77, Capítulo 2 sección 5, teorema 2.20]). En el caso en que  $X = \text{Spm}(A)$  es una variedad afín, la normalización es  $\tilde{X} = \text{Spm}(\tilde{A})$ , donde  $A \subseteq \tilde{A} \subseteq \text{Frac}(A)$  es la clausura entera de  $A$ , es decir, la subálgebra del cuerpo de fracciones formada por aquellos elementos que son enteros sobre  $A$ .

En nuestro caso, si  $X$  es una variedad tórica afín, por el Teorema 2.34, existe un monoide afín  $S \subseteq M$  tal que:

$$X = \text{Spm}(\mathbb{k}[S]).$$

Si ese monoide es saturado, entonces la variedad  $X$  es normal. Si el monoide no es saturado, consideramos su saturación:

$$\tilde{S} = \bigcap_{S \subseteq P \text{ saturado}} P.$$

Observar que vale:

$$(2.11) \quad \tilde{S} = \{m \in M \mid km \in S \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}.$$

La inclusión  $S \hookrightarrow \tilde{S}$  induce otra inclusión  $\mathbb{k}[S] \rightarrow \mathbb{k}[\tilde{S}]$  y entonces un morfismo dominante:

$$\text{Spm}(\mathbb{k}[\tilde{S}]) \rightarrow \text{Spm}(\mathbb{k}[S]) = X.$$

La variedad  $\tilde{X} = \text{Spm}(\mathbb{k}[\tilde{S}])$  es normal porque  $\tilde{S}$  es saturado; veamos que efectivamente  $\tilde{X}$  es la normalización de  $X$ .

Como  $X$  es afín esto es equivalente a ver que  $\mathbb{k}[\tilde{S}]$  es la clausura entera de  $\mathbb{k}[S]$  en su cuerpo de fracciones, que como  $\mathbb{k}[\tilde{S}]$  es normal, es suficiente ver que está contenido en la clausura entera. Como los enteros son cerrados por sumas y productos (como consecuencia del teorema de Cayley-Hamilton y el Lema de normalización de Noether, ver por ejemplo [AK21, Capítulos 10 y 15]), es suficiente probar la siguiente:

**AFIRMACIÓN 2.41.** Sea  $X^m \in \mathbb{k}[\tilde{S}]$ . Entonces  $X^m$  es entero sobre  $\mathbb{k}[S]$ .

Si  $X^m \in \mathbb{k}[\tilde{S}]$  es porque  $m \in \tilde{S}$ , o sea, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $km \in S$  por la Ecuación (2.11), luego,  $X^m$  es raíz del polinomio:

$$t^k - X^{mk},$$

que es un polinomio mónico con coeficientes en  $\mathbb{k}[S]$ , o sea,  $X^m$  es entero sobre  $\mathbb{k}[S]$ . Luego,  $\mathbb{k}[\tilde{S}]$  está contenido en la clausura entera de  $\mathbb{k}[S]$ , y por ser íntegramente cerrado, tenemos la igualdad. Acabamos de probar:

**PROPOSICIÓN 2.42.** Si  $X = \text{Spm}(\mathbb{k}[S])$  es una variedad tórica afín y  $\tilde{S}$  es la saturación de  $S$ , entonces  $\tilde{X} = \text{Spm}(\mathbb{k}[\tilde{S}])$  es la normalización de  $X$ .

□

La correspondencia entre los conos y las variedades tóricas del Teorema 2.38 nos permite entender la geometría de la acción del toro pero también la geometría de la variedad misma. Por ejemplo, podemos saber si la variedad es singular, completa, proyectiva, entre otras. En el capítulo siguiente, luego de entender el comportamiento de las órbitas por la acción del toro, veremos alguna de estas aplicaciones.

## 5. ¿Y los morfismos?

En la sección anterior vimos cómo, mediante el Teorema 2.34, asociar un cono estrictamente convexo a una variedad tórica afín normal y viceversa. Mostraremos ahora cómo mandar morfismos de conos en morfismos de variedades tóricas y viceversa, mostrando así que las variedades tóricas afines normales y los conos racionales estrictamente convexos son prácticamente los mismo. Formalmente: la categoría de las variedades tóricas afines normales es equivalente a la categoría de los conos racionales estrictamente convexos. Comencemos por definir los morfismos de nuestras categorías.

**DEFINICIÓN 2.43.** Sean  $N, N'$  dos látices,  $n, n'$  sus rangos,  $M, M'$  sus duales y  $N_{\mathbb{R}}, N'_{\mathbb{R}}$  sus espacios vectoriales, respectivamente. Sean también  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  y  $\sigma' \subseteq N'_{\mathbb{R}}$  dos conos racionales estrictamente convexos<sup>6</sup>. Un *morfismo de conos* de  $\sigma$  en  $\sigma'$  es un morfismo  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, N')$  (que se extiende de manera lineal a  $f : N_{\mathbb{R}} \rightarrow N'_{\mathbb{R}}$ ) que verifica la siguiente condición:

$$f(\sigma) \subseteq \sigma'.$$

<sup>6</sup>No es necesario pedir estrictamente convexo en la definición, pero nos restringiremos a ese caso porque es el que nos interesa.

DEFINICIÓN 2.44. Sean  $X, Y$  dos variedades tóricas con toros  $T, T'$ , respectivamente. Un *morfismo de variedades tóricas* es un morfismo de variedades algebraicas  $f : X \rightarrow Y$  que verifica las siguientes condiciones:

- $f(T) \subseteq T'$ .
- El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T \times X & \longrightarrow & X \\ f|_T \times f \downarrow & & \downarrow f \\ T' \times Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Observar que la conmutatividad del diagrama implica que  $f|_T : T \rightarrow T'$  es un morfismo de grupos algebraicos.

Si  $f : N_{\mathbb{R}} \rightarrow N'_{\mathbb{R}}$  es un morfismo de conos de  $\sigma$  en  $\sigma'$ , el pullback  $f^* : M'_{\mathbb{R}} \rightarrow M_{\mathbb{R}}$  es un morfismo de conos de  $(\sigma')^{\vee}$  en  $\sigma^{\vee}$ , pues  $f^*(M') \subseteq M$  y:

$$u \in (\sigma')^{\vee} \Rightarrow f^*(u)|_{\sigma} = u \circ f|_{\sigma} \subseteq u|_{\sigma'} \geq 0 \Rightarrow f^*(u) \in \sigma^{\vee}.$$

Luego, si intersectamos con  $M$ , tenemos que  $f^*(S_{\sigma'}) \subseteq S_{\sigma}$ , es decir, podemos ver  $f^* : S_{\sigma'} \rightarrow S_{\sigma}$  como morfismo de monoides, y eso nos induce un morfismo entre las  $\mathbb{k}$ -álgebras asociadas. Por último, el pushforward de  $f^*$ , que llamaremos  $f_*$ , es un morfismo entre los espectros maximales  $\text{Spm}(\mathbb{k}[S_{\sigma}])$  y  $\text{Spm}(\mathbb{k}[S_{\sigma'}])$  o sea, las variedades asociadas a los conos  $\sigma$  y  $\sigma'$ . Resumiendo<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} & f : N \rightarrow N', & f(\sigma) & \subseteq \sigma' \\ \Rightarrow & f : \sigma \rightarrow \sigma' \\ \Rightarrow & f^* : M' \rightarrow M, & f^*((\sigma')^{\vee}) & \subseteq \sigma^{\vee} \\ \Rightarrow & f^* : S_{\sigma'} \rightarrow S_{\sigma} \\ \Rightarrow & f^* : \mathbb{k}[S_{\sigma'}] \rightarrow \mathbb{k}[S_{\sigma}] \\ \Rightarrow & f_* : U_{\sigma} \rightarrow U_{\sigma'}. \end{aligned}$$

Con la misma construcción, tomando  $f^* : M' \rightarrow M$  y luego  $f_* : \text{Spm}(\mathbb{k}[M]) \rightarrow \text{Spm}(\mathbb{k}[M'])$ , tenemos que  $f_*$  manda el toro  $T_N$  en el toro  $T_{N'}$ . Veamos que este morfismo respeta la acción, i.e. es un morfismo de variedades algebraicas.

La conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T_N \times U_{\sigma} & \longrightarrow & U_{\sigma} \\ \downarrow f_* \times f_* & & \downarrow f_* \\ T_{N'} \times U_{\sigma'} & \longrightarrow & U_{\sigma'} \end{array}$$

<sup>7</sup>Observar que estamos siendo muy informales en la definición al llamar de la misma forma a muchos morfismos, pues viven en categorías distintas, pero no abusar de la notación sería muy inconveniente para expresar bien la idea.

es equivalente a la de:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k}[M] \otimes \mathbb{k}[S_\sigma] & \xleftarrow{\delta_{\sigma'}} & \mathbb{k}[S_\sigma] \\ \uparrow f^* \otimes f^* & & \uparrow f^* \\ \mathbb{k}[M'] \otimes \mathbb{k}[S_{\sigma'}] & \xleftarrow{\delta_\sigma} & \mathbb{k}[S_{\sigma'}] \end{array}$$

donde  $\delta_\sigma$  es la coacción que vimos en la construcción de  $U_\sigma$  como variedad tórica, que está dada por:

$$\delta_\sigma(X^m) = X^m \otimes X^m$$

(lo mismo para  $\sigma'$ ). A su vez, como el morfismo  $f^*$  es lineal, la conmutatividad del último diagrama es equivalente a la del siguiente, que conmuta (en rojo la prueba):

$$\begin{array}{ccccc} & & \delta_{\sigma'} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ (m \circ f, m \circ f) & & M \times S_\sigma \xleftarrow{\delta_{\sigma'}} M & & m \circ f \\ & \swarrow \uparrow f^* \otimes f^* & \uparrow f^* & \uparrow f^* & \swarrow \uparrow f^* \\ (m, m) & & M' \times S_{\sigma'} \xleftarrow{\delta_\sigma} M' & & m \\ & \nwarrow & & \swarrow & \\ & & \delta_\sigma & & \end{array}$$

Acabamos de ver entonces que un morfismo de conos  $f : N \rightarrow N'$  entre  $\sigma$  y  $\sigma'$  induce un morfismo de variedades tóricas  $f_* : U_\sigma \rightarrow U_{\sigma'}$ . Recíprocamente, un morfismo de variedades tóricas  $f : X \rightarrow Y$  induce un morfismo de conos, y la construcción es esencialmente la misma que hicimos recién:

Por el Teorema 2.38, existen conos  $\sigma$  y  $\sigma'$  tales que  $X = U_\sigma$  e  $Y = U_{\sigma'}$ . Como las variedades son afines, el morfismo  $f$  es inducido por un morfismo en las álgebras  $f^\# : \mathbb{k}[S_{\sigma'}] \rightarrow \mathbb{k}[S_\sigma]$ , y éste lo es, a su vez, por morfismo de monoides  $f^\# : S_{\sigma'} \rightarrow S_\sigma$ . Como el morfismo  $f$  es de variedades tóricas, tenemos que conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T_N \times U_\sigma & \longrightarrow & U_\sigma \\ \downarrow f \times f & & \downarrow f \\ T_{N'} \times U_{\sigma'} & \longrightarrow & U_{\sigma'} \end{array}$$

y por lo tanto, lo hace también el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k}[M] \otimes \mathbb{k}[S_\sigma] & \longleftarrow & \mathbb{k}[S_\sigma] \\ f^\# \otimes f^\# \uparrow & & \uparrow f^\# \\ \mathbb{k}[M'] \otimes \mathbb{k}[S_{\sigma'}] & \longleftarrow & \mathbb{k}[S_{\sigma'}] \end{array}$$

que restricto a los monoides es:

$$\begin{array}{ccc} M \times S_\sigma & \longleftarrow & S_\sigma \\ f^\# \times f^\# \uparrow & & \uparrow f^\# \\ M' \times S_{\sigma'} & \longleftarrow & S_{\sigma'} \end{array}$$

Luego, el morfismo  $f^\sharp : M' \rightarrow M$  induce un morfismo en los duales  $(f^\sharp)^* : N \rightarrow N'$ , que si lo extendemos linealmente a  $(f^\sharp)^* : N_{\mathbb{R}} \rightarrow N'_{\mathbb{R}}$ , como  $(f^\sharp)^*(S_{\sigma'}) \subseteq S_{\sigma}$ , se tiene que  $(f^\sharp)^*(\sigma) \subseteq \sigma'$ , o sea,  $(f^\sharp)^*$  es un morfismo de conos entre  $\sigma$  y  $\sigma'$ .

Finalmente, observar que la asociación del Teorema 2.38, junto con la asociación de morfismos que acabamos de ver, es una equivalencia entre la categoría de las variedades tóricas afines normales y la categoría de los conos racionales estrictamente convexos.

OBSERVACIÓN 2.45. En el caso de que  $X$  e  $Y$  sean afines y  $f : X \rightarrow Y$  sea un morfismo de variedades tóricas, se puede expresar aún más la estructura que preserva  $f$ : el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T \times X & \xrightarrow{a} & X \\ \text{id} \times f \downarrow & & \downarrow f \\ T \times Y & \xrightarrow{a} & Y \end{array}$$

se extiende a:

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{m} & X \\ f \times f \downarrow & & \downarrow f \\ Y \times Y & \xrightarrow{m} & Y \end{array}$$

luego, el morfismo  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de monoides algebraicos.



## Abanicos y variedades tóricas

En el capítulo anterior vimos que los conos racionales estrictamente convexos inducen variedades tóricas afines normales y que toda tal variedad es inducida por un cono racional. Más aún, mostramos que hay una equivalencia entre la categoría de los conos racionales estrictamente convexos y la categoría de las variedades tóricas afines normales. En este capítulo, generalizaremos esto para a variedades tóricas normales (no necesariamente afines). La definición de variedad tórica es la misma que en el caso afín.

DEFINICIÓN 1. Una *variedad tórica*  $X$  es una variedad algebraica que contiene un abierto denso  $T \simeq (\mathbb{k}^*)^n$ , tal que la acción de  $T$  en sí mismo como grupo algebraico se extiende a toda la variedad  $X$ , i.e. el siguiente diagrama conmuta, siendo  $m$  la multiplicación coordinada a coordinada en  $T$ :

$$\begin{array}{ccc} T \times X & \longrightarrow & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ T \times T & \xrightarrow{m} & T \end{array}$$

Veremos que si “pegamos” finitos conos de forma especial, entonces podemos asociarle a esa unión una variedad tórica normal y separable, y que todas las variedades tóricas normales y separables provienen de alguna “buena” colección de conos.

### 1. Pegado de variedades

Sabemos que una variedad algebraica es una unión finita de variedades afines, o sea, una variedad localmente es afín. Tiene sentido intentar hacer el camino inverso: si tengo dos variedades afines, ¿puedo obtener una variedad algebraica que tenga a éstas dos como abiertos? Lo que discutiremos a continuación será la construcción de una nueva variedad “pegando” finitas variedades afines. Si bien asumimos que el lector está familiarizado con las definiciones de variedad algebraica, etc, explicitaremos algunas construcciones ya que ciertos pasos serán clave para entender la acción del toro.

Sea  $\{V_i\}_{i \in I}$  una colección de variedades afines con abiertos  $V_{ij} \subseteq V_i$  e isomorfismos  $g_{ij} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji}$  para todo  $i, j \in I$  que verifican:

- $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ ,
- $g_{ij}(V_{ij} \cap V_{ik}) = V_{ji} \cap V_{jk}$ ,
- $g_{ik} = g_{jk} \circ g_{ij}$

para todo  $i, j, k \in I$ . O sea, las  $U_i$  son una colección de variedades que tienen abiertos adentro que son isomorfos entre ellos que “se pegan bien”.

Definimos el espacio topológico, con la topología cociente:

$$X = \bigsqcup_{i \in I} V_i / \sim,$$

$$x \sim y \Leftrightarrow x \in V_i, y \in V_j \text{ y } y = g_{ij}(x).$$

Para cada  $i \in I$ , notamos:

$$U_i = \{[x] \in X \mid x \in V_i\},$$

que es abierto ya que, si  $\pi : \bigsqcup_{i \in I} V_i \rightarrow X$  es la proyección, tenemos:

$$\pi^{-1}(U_i) = V_i \cup \bigcup_{j \in I} V_{ji},$$

que es abierto en  $\bigsqcup_{i \in I} V_i$  por ser unión de abiertos.

Finalmente, como tenemos definidos los haces  $O_{V_i}$  para cada variedad afín  $V_i$ , definimos el haz en  $X$  como el único haz que restringido a cada  $V_i$  es  $O_{V_i}$  (tenemos un “haz” que está definido en una base de la topología, ver [Per95, Lema 2.1, capítulo 3]). Luego, acabamos de construir una variedad algebraica  $X$  pegando las variedades afines  $V_i$ . Veremos ahora cómo construir variedades tóricas en general a partir de variedades tóricas afines.

**DEFINICIÓN 3.1.** Un *abanico*  $\Sigma$  en el espacio vectorial  $N_{\mathbb{R}}$  es un conjunto finito de conos en  $N_{\mathbb{R}}$  que verifican:

- $\sigma$  es un cono racional estrictamente convexo para todo  $\sigma \in \Sigma$ .
- Si  $\tau$  es una cara de  $\sigma \in \Sigma$ , entonces  $\tau \in \Sigma$ .
- Si  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ , la intersección  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  es una cara de ambos (que por el punto anterior, está en  $\Sigma$ ).

Si  $\Sigma$  es un abanico en  $V$ , definimos la variedad asociada a  $\Sigma$ , y notamos  $X_{\Sigma}$ , a la variedad resultante de pegar las variedades afines  $\{U_{\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma}$ . Estas variedades son compatibles para el pegado, o sea, verifican las condiciones anteriormente mencionadas: si  $\sigma_1, \sigma_2$  son dos conos en  $\Sigma$  cuya intersección es  $\tau$ ,  $U_{\tau}$  puede ser visto como un abierto tanto de  $U_{\sigma_1}$  como de  $U_{\sigma_2}$  por la Proposición 2.24. Como  $0$  es un cono en  $\Sigma$ , tenemos que una de las variedades involucradas en el pegado es  $U_0 = T_N$ . Como para cada  $\sigma \in \Sigma$ , la variedad  $U_{\sigma}$  tórica con toro  $T_N$  (el mismo toro para todas), por ser  $\sigma$  estrictamente convexo, el morfismo  $m_{\sigma}$ :

$$\begin{array}{ccc} T_N \times U_{\sigma} & \xrightarrow{a} & U_{\sigma} \\ \uparrow & & \uparrow \\ T_N \times T_N & \xrightarrow{m} & T_N \end{array}$$

se extiende a un único morfismo  $m_X$ :

$$\begin{array}{ccc} T_N \times X & \xrightarrow{a} & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ T_N \times T_N & \xrightarrow{m} & T_N \end{array}$$

Luego,  $X_{\Sigma}$  es una variedad tórica con toro  $T_N$ .



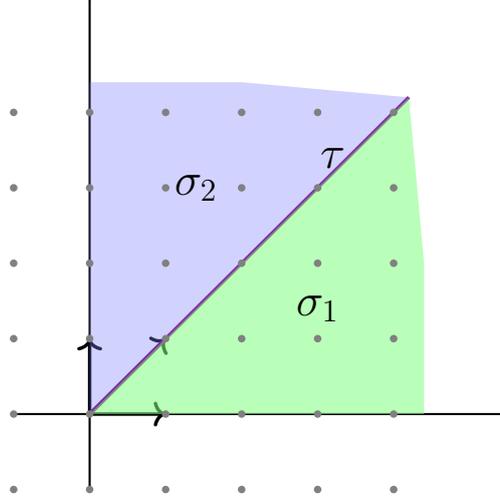
Por lo que la variedad asociada al abanico  $\Sigma$  queda:

$$X_\Sigma = \frac{\mathbb{k} \sqcup \mathbb{k}}{\sim}, \quad t_1 \sim t_2 \Leftrightarrow t_1 \in \mathbb{k}, t_2 \in \mathbb{k} \text{ y } t_1 = (t_2)^{-1}.$$

Esa relación de equivalencia es exactamente la de la recta proyectiva, es decir:

$$X_\Sigma = \mathbb{P}^1.$$

EJEMPLO 3.3. Consideremos ahora los conos  $\sigma_1 = \langle e_1, e_1 + e_2 \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$  y  $\sigma_2 = \langle e_1 + e_2, e_2 \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ , que se intersectan en la cara  $\tau = \langle e_1 + e_2 \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ , para formar el abanico  $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau, 0\}$ .



Vamos a hacer las cosas un poco más a la ligera que el ejemplo anterior. Tenemos:

$$\begin{aligned} S_{\sigma_1} &= \langle e_1^*, e_2^* - e_1^* \rangle, & U_{\sigma_1} &= \text{Spm}(\mathbb{k}[X, X^{-1}Y]) = \mathbb{k}^2, \\ S_{\sigma_2} &= \langle e_2^*, e_1^* - e_2^* \rangle, & U_{\sigma_2} &= \text{Spm}(\mathbb{k}[Y, XY^{-1}]) = \mathbb{k}^2, \\ S_\tau &= \langle e_1^* + e_2^*, e_1^* - e_2^*, e_2^* - e_1^* \rangle, & U_\tau &= \text{Spm}(\mathbb{k}[XY, XY^{-1}, YX^{-1}]) = \mathbb{k} \times \mathbb{k}^*. \end{aligned}$$

Donde el cambio de cartas está dado por:

$$g : U_\tau \longrightarrow U_\tau, g(x, t) = (xt, t^{-1}).$$

Esta es la misma construcción que la explosión del plano  $\mathbb{k}^2$  en el origen. La explosión del plano se construye como la subvariedad de  $\mathbb{k}^2 \times \mathbb{P}^1$  definida por:

$$Y = \{((x, y), (t_0 : t_1)) \in \mathbb{k}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid xt_1 = yt_0\}.$$

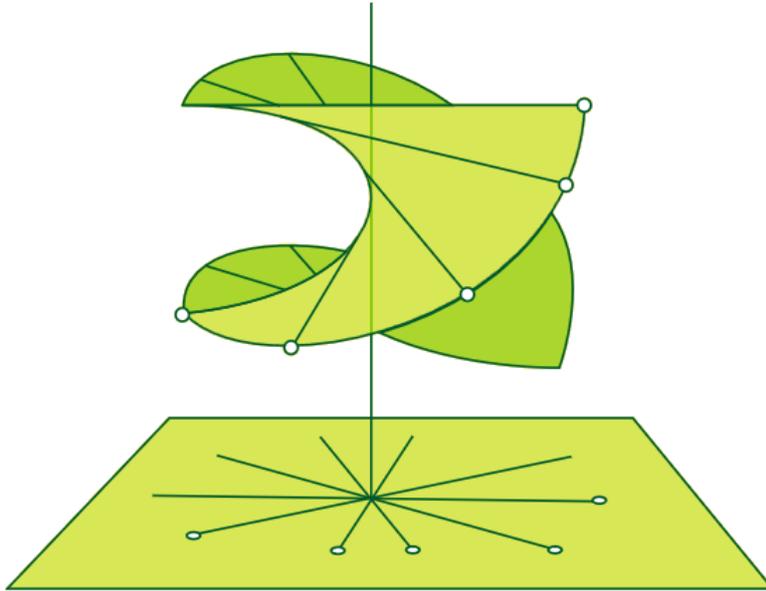
Esta se cubre también por dos abiertos afines isomorfos al plano:

$$\begin{aligned} U_0 &= \{((x, y), (t_0 : t_1)) \in Y \mid t_0 \neq 0\} = \mathbb{k}^2, & ((x, y), (t_0 : t_1)) &\longmapsto \left(x, \frac{t_1}{t_0}\right), \\ U_1 &= \{((x, y), (t_0 : t_1)) \in Y \mid t_1 \neq 0\} = \mathbb{k}^2, & ((x, y), (t_0 : t_1)) &\longmapsto \left(y, \frac{t_0}{t_1}\right). \end{aligned}$$

cuyo cambio de cartas es:

$$\begin{aligned}
 U_0 \cap U_1 &= \{((x, y), (t_0 : t_1)) \in Y \mid t_0 \neq 0, t_1 \neq 0\} = \mathbb{k} \times \mathbb{k}^*, \\
 ((x, y), (t_0 : t_1)) &\longmapsto \left(x, \frac{t_1}{t_0}\right) \\
 g : U_0 \cap U_1 &\longrightarrow U_0 \cap U_1, \\
 g(x, t) &= (xt, t^{-1})
 \end{aligned}$$

Platón se equivocó al definir al hombre como una gallina desplumada, como bien le mostró Diógenes. Esto fue porque, si bien dio condiciones necesarias, no eran suficientes para definir al hombre. En este caso, dimos todas las condiciones, necesarias y suficientes, para mostrar que la explosión y la variedad asociada al abanico eran el mismo objeto. Luego, como dijo mi tutor Álvaro la vez que entendí este ejemplo «si tiene cuatro patas, ladra y mueve la cola, es un perro»<sup>1</sup> y tenemos que  $X_\Sigma$  es la explosión del plano en el origen.<sup>2</sup>



## 2. Normalidad y separabilidad

Recordando la definición de anillo local de  $X$  en  $p$  vista en 1.6, introducimos la siguiente definición.

**DEFINICIÓN 3.4.** Una variedad algebraica  $X$  es *normal* si es irreducible y  $\mathcal{O}_{X,p}$  es normal para todo  $p \in X$ .

<sup>1</sup>Tal vez, para que no tengamos otro Diógenes, tendríamos que cambiar «perro» por «canino», pero el dicho quedaría horrible.

<sup>2</sup>La imagen está extraída de la portada del libro [Sha77] en su tercera edición. Lo intenté dibujar, como todas las otras imágenes, pero con esta me fue imposible. No pude conseguir el autor original de la ilustración, pero le agradezco enormemente, a él y a Paint, por hacer todo esto posible.

A priori, parece que estamos teniendo un conflicto de definiciones, ya que la definición de normalidad para una variedad algebraica afín fue dada en 2.37. La siguiente proposición establece que ambas definiciones son equivalentes en el caso afín.

**PROPOSICIÓN 3.5.** Sea  $X$  una variedad algebraica afín irreducible. Entonces  $\mathbb{k}[X]$  es normal si y sólo si  $\mathcal{O}_{X,p}$  es normal para todo  $p \in X$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $p \in X$ . Por 1.7, tenemos:

$$\mathcal{O}_{X,p} = \mathbb{k}[X]_{\mathfrak{m}}.$$

Luego, se puede ver en [AM69, Prop. 5.13] que un dominio  $R$  es normal si y sólo si  $R_{\mathfrak{m}}$  es normal para todo  $\mathfrak{m} \in \text{Spm}(R)$ .  $\square$

De esta proposición se deduce fácilmente lo siguiente:

**COROLARIO 3.6.** Sea  $X$  una variedad algebraica irreducible y  $U_i$ ,  $i \in I$  un cubrimiento por abiertos afines. Entonces  $X$  es normal si y sólo si  $U_i$  es normal para todo  $i \in I$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Para todo  $p \in X$ , podemos considerar un abierto afín  $U_i$  tal que  $p \in U_i$ . Luego, en la definición de  $\mathcal{O}_{X,p}$  1.6, podemos considerar sólo abiertos que estén contenidos en  $U_i$  ya que son una subcategoría filtrada de  $\tau_p$  y entonces  $\mathcal{O}_{X,p} = \mathcal{O}_{U_i,p}$ .  $\square$

Usando este corolario y el Teorema 2.38, tenemos que la variedad tórica  $X_{\Sigma}$ , construida en la sección 1 es una variedad tórica normal. Podemos decir aún más sobre esta variedad. Recordemos la definición de separabilidad 1.23 y las Proposiciones 1.24 y 3, que dicen que las variedades afines son separables y que la intersección de afines es afín.

**PROPOSICIÓN 3.7.** Sea  $X$  la variedad algebraica obtenida pegando un número finito de variedades afines  $V_i$ ,  $i \in I$ , con abiertos  $V_{ij} \subseteq V_i$  e isomorfismos  $g_{ij} : V_{ij} \rightarrow V_{ji}$ . Si además vale que la imagen de los morfismos:

$$d_{ij} : V_{ij} \rightarrow V_i \times V_j, \quad d_{ij}(x) = (x, g_{ij}(x))$$

es cerrada para todo  $i, j$ , entonces  $X$  es separable.

**DEMOSTRACIÓN.** Usando la notación  $U_i = \{[x] \in X \mid x \in V_i\}$ , tenemos que

$$\Delta(X) = \bigcup_{i \in I} \Delta(U_i),$$

por lo que basta con probar que  $\Delta(U_i) \subseteq X \times X$  es cerrado.

La preimagen de  $\Delta(U_i)$  por  $\pi \times \pi : \bigsqcup V_i \times \bigsqcup V_i \rightarrow X \times X$  es:

$$(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta(U_i)) = \tilde{\Delta}(V_i) \cup \bigcup_{j \in I} d_{ij}(V_{ij}) \subseteq \bigsqcup V_i \times \bigsqcup V_i,$$

siendo  $\tilde{\Delta} : V_i \rightarrow V_i \times V_i$  el mapa diagonal. Esa preimagen es cerrada porque  $d_{ij}(V_{ij})$  es cerrado para todo  $j$  por hipótesis y  $\tilde{\Delta}(V_i)$  es cerrado en  $V_i \times V_i$  por 1.24 ya que  $V_i$  es afín. Luego,  $\Delta(U_i)$  es cerrado por definición de topología cociente.  $\square$

PROPOSICIÓN 3.8. Sea  $\Sigma$  un abanico en  $N_{\mathbb{R}}$ . Entonces la variedad tórica  $X_{\Sigma}$  es normal y separable.

DEMOSTRACIÓN. Usando el Teorema 2.38, las cartas afines que cubren  $X$  son normales y usando el Corolario 3.6,  $X_{\Sigma}$  es normal. Por la Proposición 3.7, es suficiente probar que dados  $\sigma_1, \sigma_2$  conos en  $\Sigma$  cuya intersección es  $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \tau$ , el mapa:

$$d : U_{\tau} \longrightarrow U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2},$$

dado por las inmersiones  $U_{\tau} \longrightarrow U_{\sigma_i}$  definidas en la Proposición 2.24 tiene imagen cerrada.

Como las variedades  $U_{\sigma_i}$  son afines, tenemos que:

$$U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2} = \text{Spm}(\mathbb{k}[S_{\sigma_1}] \otimes \mathbb{k}[S_{\sigma_2}])$$

y el mapa  $d$  viene inducido por el morfismo de álgebras:

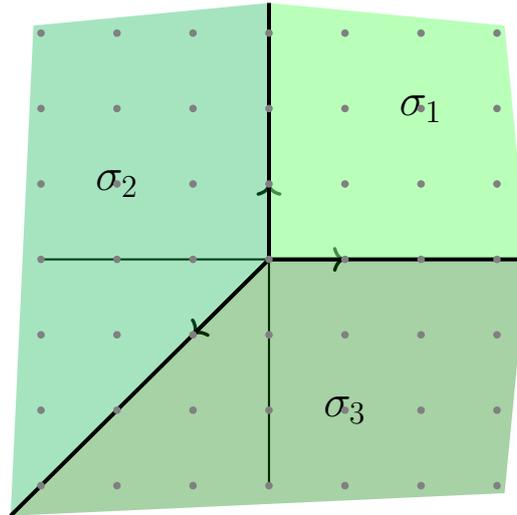
$$\tilde{d} : \mathbb{k}[S_{\sigma_1}] \otimes \mathbb{k}[S_{\sigma_2}] \longrightarrow \mathbb{k}[S_{\tau}], \quad \tilde{d}(X^{u_1} \otimes X^{u_2}) = X^{u_1+u_2}.$$

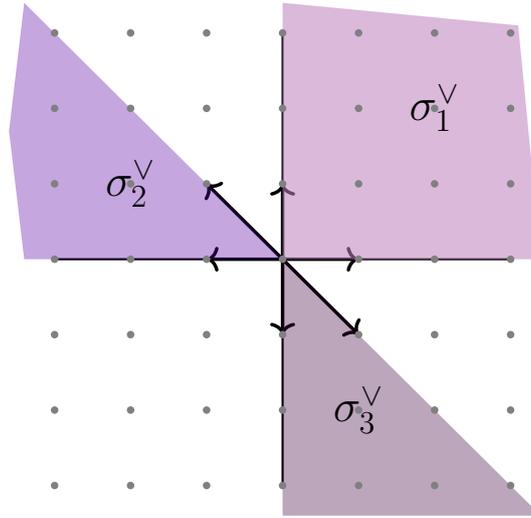
Finalmente, por el Lema 2.22, tenemos que  $S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2} = S_{\tau}$ , luego el mapa  $\tilde{d}$  es sobreyectivo y eso implica que el mapa  $d$  es una inmersión cerrada.  $\square$

### 3. $T_N$ -Órbitas

En esta sección estudiaremos las órbitas de la acción del toro en la variedad, veremos que hay una correspondencia entre las órbitas y los conos de un abanico y que podemos recuperar el cono conociendo las órbitas del toro en la variedad. Estudiaremos también la noción de límite, que nos ayudará a entender las órbitas. Veamos primero un ejemplo.

EJEMPLO 3.9. Consideramos en  $n = 2$  y el cuerpo  $\mathbb{C}$ , el abanico  $\Sigma$  formado por los conos  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  y sus caras, y por otro lado sus respectivos duales:





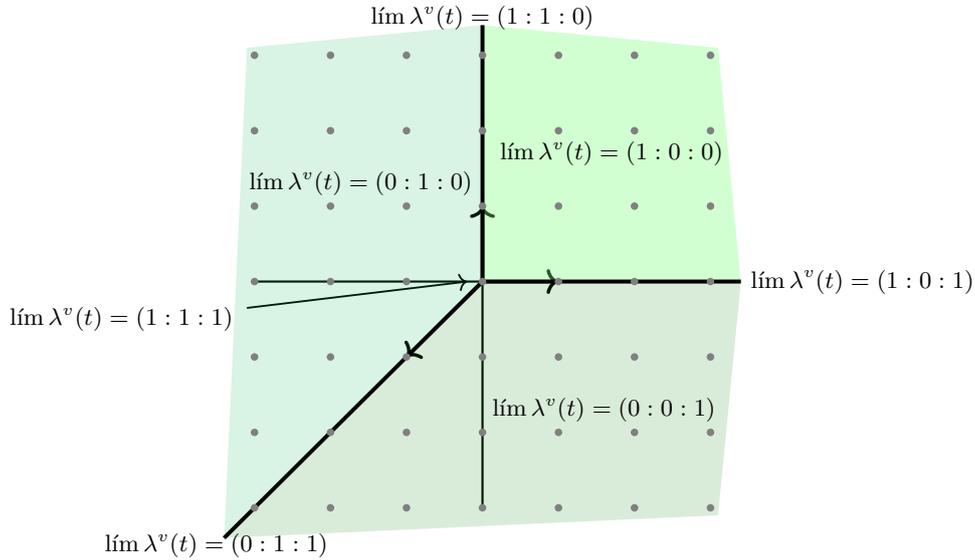
Las variedades  $U_{\sigma_1}, U_{\sigma_2}$  y  $U_{\sigma_3}$  son las tres isomorfas al plano  $\mathbb{k}^2$ , con coordenadas  $x, y, x^{-1}, x^{-1}y$  y  $y^{-1}, xy^{-1}$ , respectivamente. Al hacer la construcción de la variedad tórica  $X_\Sigma$ , queda el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ ; tomando coordenadas homogéneas  $(x_0 : x_1 : x_2)$ ,  $x = \frac{x_1}{x_0}$  e  $y = \frac{x_2}{x_0}$ . El toro  $T_N \simeq (\mathbb{k}^*)^2$  tiene coordenadas homogéneas  $(1 : s : t)$  con  $s, t \neq 0$ , donde la acción es multiplicar coordenada a coordenada, es decir:

$$(1 : s : t) \cdot (x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 : sx_1 : tx_2).$$

Para  $v = (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \simeq N$ , consideramos la curva  $\lambda^v : \mathbb{k}^* \rightarrow T_N^3$  dada por:

$$\lambda^v(t) = (1 : t^a : t^b).$$

Estudiamos el límite  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^v(t)$  para distintos puntos  $v \in N$ . Tenemos siete casos, según si  $v$  está en el interior o no de alguno de los conos de  $\Sigma$ :



<sup>3</sup>Es lo que más adelante definiremos como subgrupo a un parámetro.

Por otro lado, la acción de  $T_N$  en  $X_\Sigma$  tiene también siete órbitas, y cada uno de los puntos límite que vimos recién pertenece a una de ellas:

$$\begin{aligned} O_1 &= \{(x : y : z) \mid x, y, z \neq 0\} \ni (1 : 1 : 1) \\ O_2 &= \{(x : y : z) \mid z = 0, x, y \neq 0\} \ni (1 : 1 : 0) \\ O_3 &= \{(x : y : z) \mid y = 0, x, z \neq 0\} \ni (1 : 0 : 1) \\ O_4 &= \{(x : y : z) \mid x = 0, y, z \neq 0\} \ni (0 : 1 : 1) \\ O_5 &= \{(x : y : z) \mid y = z = 0, x \neq 0\} = \{(1 : 0 : 0)\} \\ O_6 &= \{(x : y : z) \mid x = z = 0, y \neq 0\} = \{(0 : 1 : 0)\} \\ O_7 &= \{(x : y : z) \mid x = y = 0, z \neq 0\} = \{(0 : 0 : 1)\} \end{aligned}$$

Tenemos una correspondencia entre los conos de  $\Sigma$  y las órbitas del toro  $T_N$  en  $X_\Sigma$  de la siguiente forma:

$$\sigma \text{ corresponde a } O \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \lambda^v(t) \in O \forall v \in \text{Relint}(\sigma).$$

Veremos enseguida que esta idea se generaliza a todas las variedades provenientes de abanicos.

Recordemos la biyección natural 1.5:

$$\text{Spm}(\mathbb{k}[S_\sigma]) \longleftrightarrow \text{Hom}(S_\sigma, \mathbb{k}),$$

donde  $\text{Hom}$  es en la categoría de monoides, viendo  $\mathbb{k}$  como monoide con el producto. Para cada cono  $\sigma$  en  $N_{\mathbb{R}}$ , distinguimos un punto especial  $x_\sigma \in U_\sigma$ :

$$(3.1) \quad x_\sigma : S_\sigma \longrightarrow \mathbb{k}, \quad x_\sigma(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m|_\sigma = 0 \ (m \in \sigma^\perp) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Este es efectivamente un morfismo de monoides ya que si  $u, w \in \sigma^\perp$  entonces  $u + w \in \sigma^\perp$  y tenemos:

$$x_\sigma(u + w) = 1 = 1 \cdot 1 = x_\sigma(u)x_\sigma(w),$$

y si alguno no está, entonces la suma tampoco lo estará y ambas darán 0.

Para estos puntos distinguidos, vamos a resaltar dos propiedades:

- El punto distinguido  $x_\sigma \in U_\sigma$  es fijo para la acción de  $T_N$  si y solamente si  $\dim \sigma = n$ .
- Si  $\tau$  es una cara de  $\sigma$  entonces  $x_\tau \in U_\sigma$ .

**Primer punto.** Sea  $t = (t_1, \dots, t_n) \in T_N$ . Veamos qué quiere decir que  $x_\sigma$  sea fijo para  $t$ .

$$\begin{aligned} t \cdot x_\sigma = x_\sigma &\Leftrightarrow t(m)x(m) = x(m) \forall m \in S_\sigma \\ &\Leftrightarrow t(m) = 1 \forall m \in \sigma^\perp \\ &\Leftrightarrow t(m) = \prod_{i=1}^n t_i^{n_i} = 1 \forall m \in \sigma^\perp, \end{aligned}$$

si escribimos  $m = \sum n_i e_i^* \in S_\sigma \subseteq M$ . Tenemos entonces que  $x_\sigma$  es un punto fijo de la acción si y solamente si la última productoria es 1 para todo  $t \in T_N$ . Probemos ahora la proposición.

Si  $\dim \sigma = n$ , entonces  $\sigma^\perp = 0$ , pues  $\sigma$  genera todo  $N_{\mathbb{R}}$ . Luego, el producto  $\prod_{i=1}^n t_i^{n_i}$  siempre será 1 porque  $n_i = 0 \forall i$ .

Si  $\dim \sigma \neq n$  entonces  $\sigma^\vee$  no es estrictamente convexo, por la Proposición 2.16, y  $\sigma = (\sigma^\vee)^\vee$ , por la Proposición 2.14. Luego, existe  $u \neq 0$  tal que  $u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma^\vee)$  y entonces  $u \in \sigma^\perp$ . Escribiendo  $u = \sum n_i e_i$ , hay algún  $j$  tal que  $n_j \neq 0$ . Tomando un punto del toro  $t = (1, \dots, 1, \alpha, 1, \dots, 1)$ , con  $\alpha \in \mathbb{k}$ ,  $\alpha^{n_j} \neq 1$  (podemos hacer esto ya que  $\mathbb{k}$  es algebraicamente cerrado y entonces infinito), tenemos que:

$$t(u) = \alpha^{n_j} \neq 1$$

y por lo tanto  $x_\sigma$  no es fijo para ese  $t$ .

**Segundo punto.** Se deduce de la inclusión abierta  $U_\tau \hookrightarrow U_\sigma$  de la Proposición 2.24.

En el ejemplo del plano proyectivo al comienzo de la sección, los límites de los puntos en el interior de un cono son exactamente estos puntos distinguidos. Si el cuerpo no tiene una topología Hausdorff como los complejos, en donde el límite puntual es único, igual podemos definir la noción de límite de la siguiente forma (que extiende la noción de límite en  $\mathbb{C}$ ):

**DEFINICIÓN 3.10.** Un *subgrupo a un parámetro* es un morfismo de grupos algebraicos  $\lambda : \mathbb{k}^* \rightarrow T_N^4$ . Todos los subgrupos a un parámetro son de la forma:

$$(3.2) \quad \lambda^v(t) = (t^{v_1}, \dots, t^{v_n}),$$

para  $v = (v_1, \dots, v_n) = \sum v_i e_i \in N$ . Esto se puede ver componiendo proyectando en cada coordenada: sea  $\pi_i : T_N \rightarrow \mathbb{k}^*$  la proyección sobre la  $i$ -ésima coordenada, entonces:

$$\pi_i \circ \lambda : \mathbb{k}^* \rightarrow \mathbb{k}^*$$

es un morfismo de grupos, y los únicos morfismos de grupos de  $\mathbb{k}^*$  en sí mismo son de la forma  $t \mapsto t^k$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

**DEFINICIÓN 3.11.** Sea  $X$  una variedad tórica con toro  $T_N$  y  $\lambda : \mathbb{k}^* \rightarrow T_N \subseteq X$  un subgrupo a un parámetro. Si existe un morfismo  $\tilde{\lambda} : \mathbb{k} \rightarrow X$  que haga conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k}^* & \xrightarrow{\lambda} & T_N \hookrightarrow X \\ \downarrow & & \nearrow \tilde{\lambda} \\ \mathbb{k} & & \end{array}$$

entonces decimos que existe el límite de  $\lambda$  existe en  $X$ , llamamos *límite del subgrupo a un parámetro*  $\lambda$  al punto  $\tilde{\lambda}(0)$  y notamos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) = \tilde{\lambda}(0).$$

<sup>4</sup>Se puede definir en general para un grupo algebraico cualquiera, pero en nuestro caso trabajamos sólo con el toro  $T_N$

En el caso de que  $X$  sea afín, como vimos al final del capítulo 1, el diagrama de arriba es equivalente al siguiente diagrama en las álgebras:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{k}[x, x^{-1}] & \xleftarrow{\lambda^*} & \mathbb{k}[T_N] & \xleftarrow{\iota} & \mathbb{k}[X] \\ \uparrow & & & \nearrow & \\ \mathbb{k}[x] & & & \tilde{\lambda}^* & \end{array}$$

es decir que en este caso, que exista el límite significa que el morfismo  $\lambda^* \circ \iota$  tiene imagen dentro de  $\mathbb{k}[x] \subseteq \mathbb{k}[x, x^{-1}]$ . Esto nos ayuda a caracterizar los conos mediante los límites de los subgrupos a un parámetro de  $T_N$ .

PROPOSICIÓN 3.12. Sea  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  un cono racional estrictamente convexo y  $v \in N$ . Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^v(t) \text{ existe y pertenece a } U_\sigma \Leftrightarrow v \in \sigma.$$

Más aún, si  $v \in \text{Relint}(\sigma)$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^v(t) = x_\sigma$ .

DEMOSTRACIÓN. Como mencionamos arriba, que exista el límite es que el morfismo  $(\lambda^v)^* \circ \iota : \mathbb{k}[S_\sigma] \rightarrow \mathbb{k}[x, x^{-1}]$  tenga imagen dentro de  $\mathbb{k}[x]$ :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{k}[x, x^{-1}] & \xleftarrow{(\lambda^v)^*} & \mathbb{k}[M] & \xleftarrow{\iota} & \mathbb{k}[S_\sigma] \\ \uparrow & & & \nearrow & \\ \mathbb{k}[x] & & & & \end{array}$$

El morfismo  $(\lambda^v)^*$  es precomponer, cuando vemos a las álgebras  $\mathbb{k}[x, x^{-1}]$  y  $\mathbb{k}[T]$  como las álgebras de funciones regulares de  $\mathbb{k}^*$  y  $T_N$ , respectivamente (recordar que en este caso, identificamos  $X^m$ , elemento del álgebra abstracta, con  $\chi^m$ , función regular del toro en  $\mathbb{k}^*$ ). Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} (\lambda^v)^*(\chi^m)(t) &= \chi^m(\lambda^v(t)) \\ &= \chi^m(t^{v_1}, t^{v_2}, \dots, t^{v_n}) \\ &= t^{m_1 v_1} t_2^{m_2 v_2} \dots t_n^{m_n v_n} \\ &= t^{m(v)}, \end{aligned}$$

que como  $v \in N$ ,  $m(v)$  es un entero. Se sigue que la función regular que manda  $t \mapsto t^{m(v)}$  es  $x^{m(v)}$ , vista en el álgebra abstracta  $\mathbb{k}[x, x^{-1}]$ , es decir, la composición de la inclusión  $\iota : \mathbb{k}[S_\sigma] \hookrightarrow \mathbb{k}[M]$  y el morfismo  $(\lambda^v)^* : \mathbb{k}[M] \rightarrow \mathbb{k}[x, x^{-1}]$  es el morfismo que hace:

$$X^m \mapsto X^m \mapsto x^{m(v)}.$$

Luego, este morfismo tiene imagen en  $\mathbb{k}[x] \subseteq \mathbb{k}[x, x^{-1}]$  si y sólo si  $m(v) \geq 0$  para todo  $m \in S_\sigma$ . Más aún, tenemos que  $\tilde{\lambda}^v = \phi_*^v$ .

Repasando, existe  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^v(t)$  en  $U_\sigma$  si y sólo si  $m(v) \geq 0$  para todo  $m \in S_\sigma$ , y a su vez, esto pasa si y sólo si  $v \in \sigma$ , pues si  $v \notin \sigma$  se puede encontrar un funcional  $m \in S_\sigma$  tal que  $m(v) < 0$ .<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Observar que se puede agarrar el  $u$  de la Proposición 2.2 con coordenadas racionales, luego, multiplicándolo por un entero suficientemente grande, podemos suponer que  $u \in M$ .

Finalmente, si  $v \in \text{Relint}(\sigma)$ , queremos ver que  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^v(t) = x_\sigma$ . Recordando la definición del punto distinguido  $x_\sigma \in U_\sigma = \text{Hom}_{\mathbb{N}}(S_\sigma, \mathbb{k})$  en 3.1, tenemos que el morfismo  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^v(t) \in U_\sigma$  está dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^v &: \mathbb{k} \longrightarrow U_\sigma, \\ \tilde{\lambda}^v &: \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[x], \mathbb{k}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{N}}(\mathbb{k}[S_\sigma], \mathbb{k}), \\ \lim_{t \rightarrow 0} \lambda^v(t) &= \tilde{\lambda}^v(0), \\ m &\mapsto \text{ev}_0((\tilde{\lambda}^v)^*(X^m)) = \text{ev}_0(x^{m(v)}), \end{aligned}$$

ya que, via el isomorfismo  $\mathbb{k} \simeq \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[x], \mathbb{k})$ , el punto  $0 \in \mathbb{k}$  corresponde con el morfismo evaluar en cero  $\text{ev}_0 \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[x], \mathbb{k})$ . Ahora sí, veamos si este morfismo es igual a  $x_\sigma$ :

- Si  $m \in \sigma^\perp$ ,  $m(v) = 0$  y entonces:

$$\tilde{\lambda}^v(0)(m) = \text{ev}_0(x^{m(v)}) = \text{ev}_0(1) = 1 \in \mathbb{k}.$$

- Si  $m \notin \sigma^\perp$ ,  $m(v) > 0$  por la Proposición 2.11 y entonces:

$$\tilde{\lambda}^v(0)(m) = \text{ev}_0(x^{m(v)}) = 0 \in \mathbb{k}.$$

Luego:

$$(3.3) \quad \tilde{\lambda}^v(0)(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m|_\sigma = 0 \ (u \in \sigma^\perp) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es decir,  $\tilde{\lambda}^v(0) = x_\sigma$ . □

NOTACIÓN 3.13. Si  $\Sigma$  es un abanico en  $N_{\mathbb{R}}$ , defino, para cada  $\sigma \in \Sigma$ :

$$O(\sigma) := T_N \cdot x_\sigma \subseteq U_\sigma \subseteq X_\Sigma,$$

o sea,  $O(\sigma)$  es la órbita del punto distinguido  $x_\sigma$ .

El siguiente lema describe los puntos de  $O(\sigma)$  y será clave para probar el resultado principal de este capítulo.

LEMA 3.14. *Sea  $\sigma$  un cono racional estrictamente convexo en  $N_{\mathbb{R}}$ . Entonces:*

$$\begin{aligned} O(\sigma) &= \{x \in \text{Hom}(S_\sigma, \mathbb{k}) \mid x(m) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \sigma^\perp \cap M\} \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{k}^*). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Llamemos  $O' = \{x \in \text{Hom}(S_\sigma, \mathbb{k}) \mid x(m) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \sigma^\perp \cap M\}$ . Si  $t \in T_N$ , entonces  $t \cdot x_\sigma : S_\sigma \rightarrow \mathbb{k}$  verifica:

$$t \cdot x_\sigma(m) = t(m)x_\sigma(m) \neq 0 \Leftrightarrow x_\sigma(m) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \sigma^\perp,$$

luego, tenemos que  $O(\sigma) \subseteq O'$ .

Recíprocamente, si  $x \in O'$ , basta con encontrar  $t \in T_N$  tal que  $t(m) = x(m)$  para todo  $m \in \sigma^\perp \cap M$ , que es posible ya que  $\sigma^\perp \cap M$  es finitamente generado como consecuencia del Lema de Gordan 2.19. En efecto, si  $t$  cumple eso, entonces:

$$\begin{aligned} t(u)x_\sigma(u) &= t(u) = x(u) && \text{si } u \in \sigma^\perp \cap M, \\ t(u)x_\sigma(u) &= 0 = x(u) && \text{si no,} \end{aligned}$$

y entonces  $t \cdot x_\sigma = x$ , probando la otra inclusión.

Para la otra igualdad (en realidad es un isomorfismo), notar que  $\sigma^\perp \cap M$  es un grupo ya que todos los elementos tienen opuesto por valer 0 en  $\sigma$ . Si  $x \in O'$ , entonces, como  $S_\sigma \cap \sigma^\perp = \sigma^\perp \cap M$ , la restricción:

$$x|_{S_\sigma \cap \sigma^\perp} : S_\sigma \cap \sigma^\perp \longrightarrow \mathbb{k}^*$$

es un morfismo de grupos, o sea:

$$x|_{S_\sigma \cap \sigma^\perp} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{k}^*).$$

Para el lado contrario, si  $x \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{k}^*)$ , extendiendo el morfismo a todo  $S_\sigma$  siendo:

$$\tilde{x}(u) = \begin{cases} x(u) & \text{si } u \in \sigma^\perp \cap M \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Es claro que  $\tilde{x} \in O'$  y entonces tenemos la segunda igualdad.  $\square$

El siguiente teorema describe la relación entre la combinatoria del abanico  $\Sigma$  y la estructura geométrica de la acción del toro en la variedad  $X_\sigma$ .

**TEOREMA 3.15** (Correspondencia de órbitas). *Sea  $X_\Sigma$  la variedad tórica asociada al abanico  $\Sigma$  en  $N_{\mathbb{R}}$ .*

(a) *La siguiente correspondencia es biyectiva:*

$$\begin{aligned} \{\text{conos } \sigma \in \Sigma\} &\longleftrightarrow \{T_N\text{-órbitas en } X_\Sigma\} \\ \sigma &\longleftrightarrow O(\sigma) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{k}^*). \end{aligned}$$

(b) *Las cartas afines son unión de órbitas:*

$$U_\sigma = \bigcup_{\tau} O(\tau),$$

donde  $\tau$  varía en el conjunto de las caras de  $\sigma$ .

(c) *Para todo  $\tau, \sigma \in \Sigma$ , se tiene que  $\tau$  es una cara de  $\sigma$  si y solamente si  $O(\sigma) \subseteq \overline{O(\tau)}$ . Además:*

$$\overline{O(\tau)} = \bigcup_{\sigma} O(\sigma),$$

donde  $\sigma$  varía en el conjunto de conos que admiten a  $\tau$  como cara.

**DEMOSTRACIÓN.** (a) Sea  $O$  una  $T_N$ -órbita en  $X_\Sigma$ . Como  $X_\Sigma$  es cubierta por los abiertos afines  $T_N$ -invariantes  $U_\sigma$  y la intersección de dos tales abiertos está dada por  $U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2} = U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$ , hay un único cono minimal  $\sigma \in \Sigma$  tal que  $O \subseteq U_\sigma$ . Veremos que  $O = O(\sigma)$ , de lo que se deduce lo que queríamos probar.

Sea  $x \in O$ . Consideramos el conjunto  $C = \{m \in S_\sigma \mid x(m) \neq 0\}$ .

**AFIRMACIÓN 3.16.** El conjunto  $C$  es la intersección de  $M$  con una cara de  $\sigma^\vee$ .

Sea  $\eta \subseteq \sigma^\vee$  el cono generado por los  $m \in C$ , es decir:

$$\eta = \langle m \in S_\sigma \mid x(m) \neq 0 \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}.$$

Es claro que  $C = \eta \cap M$ . Más aún,  $\eta$  es una cara de  $\sigma^\vee$ ; en efecto,  $\eta \subseteq \sigma^\vee$  y cumple la condición (c) del Lema 2.13, pues si  $u, u' \in \sigma^\vee \cap M = S_\sigma$  son tales que  $u + u' \in \eta$ , como  $u + u' \in S_\sigma$ , tenemos:

$$0 \neq x(u + u') = x(u)x(u') \quad \Rightarrow \quad x(u) \neq 0, x(u') \neq 0 \quad \Rightarrow \quad u, u' \in \eta.$$

Luego, por la Proposición 2.15,  $\eta = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$  para cierta cara  $\tau$  de  $\sigma$ . Tenemos entonces:

$$C = (\sigma^\vee \cap \tau^\perp) \cap M,$$

de lo que se deduce que  $x : S_\sigma \rightarrow \mathbb{k}$  puede ser extendido a  $x : S_\tau \rightarrow \mathbb{k}$ . i.e.  $x \in U_\tau$ . En efecto, tenemos  $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\leq 0}u$  con  $u \in \tau^\perp$  por la Proposición 2.21, y como  $x(u) \neq 0$ , podemos definir:

$$x(-ku) := x(ku)^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Luego, como  $x$  es arbitrario cualquiera, tenemos que  $O \subseteq U_\tau$  y, por la minimalidad de  $\sigma$ , tenemos  $\sigma = \tau$ . Se sigue que:

$$C = \sigma^\perp \cap M$$

y entonces  $x \in O(\sigma)$  por el Lema 3.14. Luego  $O = O(\sigma)$  porque dos órbitas son iguales o disjuntas.

(b) Como  $U_\sigma$  es  $T_N$ -invariante, es unión de órbitas. Si  $\tau$  es una cara de  $\sigma$ , entonces:

$$O(\tau) \subseteq U_\tau \subseteq U_\sigma,$$

por lo que tenemos una inclusión, pero de la demostración de la parte (a) se sigue que es una igualdad, ya que cualquier órbita contenida en  $U_\sigma$  debe ser de la forma  $O(\tau)$  para alguna cara  $\tau$  de  $\sigma$  (pensar  $\sigma$  con sus caras como todo el abanico).

(c) Comencemos por entender la clausura de la órbita.  $\overline{O(\tau)}$  es  $T_N$ -invariante porque  $O(\tau)$  lo es<sup>6</sup> y por lo tanto, es unión de órbitas, que son de la forma  $O(\sigma)$  por la parte (a).

Si  $O(\sigma) \subseteq \overline{O(\tau)}$ , como  $O(\sigma) \subseteq U_\sigma$ , tenemos que  $\overline{O(\tau)} \cap U_\sigma \neq \emptyset$  y por ser  $U_\sigma$  abierto, tenemos

$$O(\tau) \cap U_\sigma,$$

y luego por la parte (b), tenemos que  $\tau$  debe ser una cara de  $\sigma$ .

Si  $\sigma$  es tal que tiene a  $\tau$  como cara, veamos que  $O(\sigma) \cap \overline{O(\tau)} \neq \emptyset$ , lo que prueba que  $O(\sigma) \subseteq \overline{O(\tau)}$ . Sea  $v \in \text{Relint}(\sigma)$ . Por la Proposición 3.12, vale que  $\lim \lambda^v(t) = x_\sigma$ , el punto distinguido definido en 3.1. Si consideramos la acción de  $T_N$  en  $U_\tau$ , tenemos:

$$\lambda^v(t) \cdot x_\tau \in O(\tau) \quad \forall t \in \mathbb{k}^*,$$

---

<sup>6</sup>Usando redes, la demostración es clásica de un curso básico de topología.

y como  $U_\sigma$  es un monoide algebraico como vimos en la sección 2 del capítulo 2, tenemos:

$$\left( \lim_{t \rightarrow 0} \lambda^v(t) \right) \cdot x_\tau \in \overline{O(\tau)}.$$

Por otro lado, tenemos:

$$(\lim \lambda^v(t)) \cdot x_\tau = x_\sigma \cdot x_\tau = x_\sigma,$$

donde la última igualdad se da porque  $\sigma^\perp \subseteq \tau^\perp$ . Luego, deducimos que  $x_\sigma \in \overline{O(\tau)} \cap O(\sigma)$ , que es lo que queríamos probar.  $\square$

El Teorema 3.15, junto a la Proposición 3.12, permiten recuperar el abanico conociendo la acción del toro en la variedad, ya que podemos encontrar las órbitas, i.e. los conos del abanico, y la geometría de estos i.e. su interior.

#### 4. Las variedades tóricas normales vienen de abanicos.

En secciones anteriores de este capítulo mostramos que los abanicos inducen variedades tóricas normales. En esta sección mostraremos que toda variedad tórica normal es inducida por algún abanico. Este es el paso principal para mostrar, en la sección siguiente, que la categoría de las variedades tóricas normales es equivalente a la categoría de los abanicos.

**TEOREMA 3.17 (Sumihiro).** [Sum74, Corolario 2] *Sea  $X$  una variedad tórica separable normal con toro  $T_N$ . Entonces todo punto  $p \in X$  tiene un entorno abierto afín  $T_N$ -invariante. Más aún, ese entorno contiene a  $T_N$  y entonces es una variedad tórica.*

En el capítulo anterior, vimos que si  $\tau \subseteq \sigma$  es una cara, entonces  $U_\tau$  se encaja en  $U_\sigma$  como abierto principal. Usando las herramientas de límite, veamos que vale el recíproco, lo cual utilizaremos para probar el Teorema 3.19.

**LEMA 3.18.** *Sean  $\tau \subseteq \sigma$  dos conos tales que el mapa inducido  $U_\tau \rightarrow U_\sigma$  es una inmersión abierta. Entonces  $\tau$  es una cara de  $\sigma$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $v, w \in \sigma$  tales que  $v + w \in \tau$ . Veamos que  $v, w \in \tau$ , lo que prueba que  $\tau$  es una cara por el Lema 2.13.

Denotemos  $x_v = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda^v(t)$  y  $x_w = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda^w(t)$ . Por la Proposición 3.12,  $x_v, x_w \in U_\sigma$  y como  $x_v \cdot x_w = x_{v+w}$ , tenemos que  $x_v \cdot x_w \in U_\tau$  (aquí estamos usando lo que vimos en la Observación 2.26, donde afirmamos que  $U_\sigma$  es en realidad un monoide algebraico). Queremos ver que  $x_v$  y  $x_w$  están en  $U_\tau$ , ya que usando de nuevo la Proposición 3.12, esto es equivalente a que  $v, w \in \tau$ .

Supongamos por absurdo que  $x_v \notin U_\tau$ . Como  $U_\tau$  es un abierto  $T_N$  estable de  $U_\sigma$ ,  $U_\sigma \setminus U_\tau$  es un cerrado  $T_N$  invariante y entonces:

$$T_N \cdot x_v \subseteq U_\sigma \setminus U_\tau \Rightarrow \overline{T_N \cdot x_v} \subseteq U_\sigma \setminus U_\tau,$$

es decir:

$$\overline{T_N \cdot x_v} \cap U_\tau = \emptyset.$$

Por otro lado, tenemos:

$$x_w \cdot x_v \in U_\sigma \cdot x_v = \overline{T} \cdot x_v \subseteq \overline{T \cdot x_v},$$

pero  $x_w \cdot x_v \in U_\tau$ , lo que es absurdo porque la intersección es vacía, por lo que  $x_v \in U_\tau$  y entonces  $v \in \tau$ . Análogo para  $w$ .  $\square$

**TEOREMA 3.19.** *Sea  $X$  una variedad tórica normal separable con toro  $T_N$ . Entonces existe  $\Sigma$  abanico en  $N_{\mathbb{R}}$  tal que  $X \simeq X_\Sigma$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Por el teorema de Sumihiro, tenemos que  $X$  admite un cubrimiento por abiertos afines  $U_i$  que son variedades tóricas. Como  $X$  es normal, las cartas  $U_i$  son también normales y por el teorema 2.38,  $U_i = U_{\sigma_i}$  para ciertos conos racionales  $\sigma_i$  en  $N_{\mathbb{R}}$ . Veamos que estos conos forman el abanico  $\Sigma$ .

Por la proposición 3,  $U_i \cap U_j$  es afín y tórica para el mismo toro  $T_N$ , entonces  $U_i \cap U_j = U_\tau$  para algún cono racional  $\tau \subseteq N_{\mathbb{R}}$ . Por la Proposición 3.12, tenemos que  $v \in \tau$  si y solamente si el límite de  $\lambda^v(t) \cdot x$  existe para todo  $x \in U_\tau = U_{\sigma_i} \cap U_{\sigma_j}$ , y usando de nuevo la Proposición, esto pasa si y solamente si  $v \in \sigma_i \cap \sigma_j$ . Por lo tanto, tenemos que  $\sigma_i \cap \sigma_j = \tau$ . Como  $U_\tau$  es un abierto de  $U_{\sigma_i}$  y  $U_{\sigma_j}$ , por la proposición 3.18 tenemos que  $\tau$  es una cara de ambos  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$ . Recopilando,  $X$  se cubre con cartas afines  $U_{\sigma_i}$  que vienen de conos  $\sigma_i$ . Dos conos se intersectan en una cara de ambos, por lo que estos conos y todas sus caras forman un abanico  $\Sigma$ . Es claro por construcción que  $X = X_\Sigma$ .  $\square$

Como consecuencia de este resultado y el Teorema 3.15, tenemos el siguiente corolario que caracteriza las variedades tóricas afines de entre todas las variedades tóricas.

Esta correspondencia entre las variedades tóricas normales y los abanicos, y el Teorema 3.15, permite obtener información de la geometría de la acción mirando en la combinatoria de los conos del abanico subyacente, pero más aún, permite obtener información sobre la geometría de la variedad misma. Veamos algunos ejemplos de esto.

**COROLARIO 3.20.** *Sea  $X$  una variedad tórica. Entonces  $X$  es afín si y sólo si existe una única órbita cerrada. Más aún, las órbitas cerradas corresponden con los conos maximales del abanico del cual proviene  $X$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Probemos primero la ida. Sea  $\sigma$  tal que  $X = U_\sigma$ . Consideramos el abanico  $\Sigma$  que consiste de  $\sigma$  y todas sus caras. Por la parte (a) del teorema anterior, las  $T_N$ -órbitas de  $U_\sigma$  son  $O(\tau)$  con  $\tau$  cara de  $\sigma$ . Luego,  $O(\tau)$  es cerrada si y sólo si  $O(\tau) = \overline{O(\tau)}$ . Usando la parte (c) del teorema, tenemos que esto sucede si y sólo si:

$$O(\tau) = \bigcup_{\gamma} O(\gamma),$$

donde  $\gamma$  son las caras de  $\sigma$  que contienen a  $\tau$ . Finalmente, esta igualdad es cierta únicamente cuando la única cara que contienen a  $\tau$  es sí misma, es decir, cuando  $\tau = \sigma$  i.e. la única órbita cerrada es  $O(\sigma)$ .

Recíprocamente, si  $X$  no fuera afín, entonces el abanico  $\Sigma$  del cual proviene tiene al menos dos conos maximales respecto a la inclusión  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Por el mismo

argumento que usamos recién,  $O(\sigma_1)$  y  $O(\sigma_2)$  son órbitas cerradas distintas, por lo que  $X$  tiene más de una órbita cerrada.  $\square$

Recordemos que si  $X$  es una variedad tórica afín, entonces es un monoide algebraico. Es un resultado conocido que las variedades tóricas afines son los únicos monoides algebraicos cuyo grupo de invertibles es un toro. Este resultado fue generalizado en [Rit07], en donde se prueba que si el grupo de invertibles de un monoide algebraico irreducible es afín, entonces el monoide también lo es. Veamos ahora una prueba del caso tórico, como corolario del teorema que vimos recién.

**COROLARIO 3.21.** *Sea  $M$  un monoide algebraico (irreducible) cuyo grupo de invertibles  $G \subseteq M$  es isomorfo a un toro  $T_N$ . Entonces  $M$  es afín.*

**DEMOSTRACIÓN.** Por un resultado de Rittatore en [Rit98, Teorema 1],  $G$  es abierto en  $M$  y por lo tanto, denso. Además, la multiplicación de  $G$  es simplemente la restricción de la multiplicación de  $M$ , por lo que trivialmente se extiende. Luego,  $M$  es una variedad tórica. Si  $O$  es una órbita de  $M$  para la acción del toro  $G$ , entonces:

$$MOM = \overline{GOG} \subseteq \overline{GOG} \subseteq \overline{O} \subseteq M\overline{O}M,$$

usando que  $GOG \subseteq G$  y que  $M$  tiene neutro. En particular, si  $O$  es una órbita cerrada, entonces vale:

$$MOM = O.$$

Sean  $O, O'$  dos órbitas cerradas para la acción del toro  $G$ . Entonces:

$$OO' \subseteq MO' = O'$$

$$OO' \subseteq OM = O,$$

es decir,  $O \cap O' \neq \emptyset$  y como son órbitas,  $O = O'$ . Luego,  $M$  como variedad tórica tiene una única órbita cerrada, y por el Corolario 3.20 es afín.  $\square$

Podemos obtener también información como las singularidades. La siguiente proposición caracteriza todas las variedades tóricas afines regulares<sup>7</sup>. Como todas las variedades afines regulares son normales, entonces las variedades tóricas que sean regulares vendrán necesariamente de un cono estrictamente convexo.

**PROPOSICIÓN 3.22.** *Sea  $U_\sigma$  la variedad tórica asociada al cono  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ . Entonces  $U_\sigma$  es regular si y solamente si  $\sigma$  está generado por un subconjunto de una base<sup>8</sup> de  $M$ . Más aún, en ese caso se tiene que:*

$$U_\sigma \simeq \mathbb{k}^l \times (\mathbb{k}^*)^{n-l}, \quad l = \dim(\sigma).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Trabajemos primer en el caso que  $\dim(\sigma) = n$ , es decir, el cono  $\sigma$  genera todo el espacio vectorial  $N_{\mathbb{R}}$ . En este caso,  $\sigma^\perp = \{0\}$  y el punto distinguido  $x_\sigma \in U_\sigma$  está dado por:

$$x_\sigma(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

<sup>7</sup>Una variedad es regular si no tiene puntos singulares.

<sup>8</sup>Con base nos referimos a una base como  $\mathbb{Z}$ -módulo, es decir, un generador linealmente independiente.

Mediante la biyección 1.5, el ideal maximal correspondiente a  $x_\sigma$  es:

$$\mathfrak{m} = (X^m \mid m \in S_\sigma, m \neq 0),$$

y su cuadrado:

$$\mathfrak{m}^2 = (X^{m+m'} \mid m, m' \in S_\sigma, m, m' \neq 0),$$

con lo que el espacio tangente en este punto,  $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$ , está generado (y de forma independiente) por los monomios de la forma  $X^m$  con  $m \in S_\sigma \setminus \{0\}$  que no sea suma de dos elementos no nulos; estos elementos son exactamente los elementos primitivos de las aristas de  $\sigma^\vee$ .

Supongamos que el punto  $x_\sigma \in U_\sigma$  es regular, es decir, la dimensión de  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  como  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial es  $n$  (pues  $\dim(U_\sigma) = \dim(T_N) = n$ ). Esto nos dice que  $\sigma^\vee$  debe tener exactamente  $n$  aristas. En efecto, debe tener al menos  $n$  ya que  $\sigma^\vee$  tiene dimensión  $n$  por la Proposición 2.16 y no puede tener más de  $n$  porque tendríamos más generadores en el espacio tangente. Más aún, los elementos primitivos de estas aristas en  $M$ , i.e. aquellos que no son múltiplos enteros de otros elementos de  $M$ , deben generar todo  $S_\sigma$  (porque si no, tendríamos más generadores en el espacio tangente, de nuevo).

**AFIRMACIÓN 3.23.** Como  $S_\sigma$  es saturado y  $\sigma^\vee$  es de dimensión maximal,  $S_\sigma$  genera a  $M$  como grupo, es decir, agregando los opuestos.

En efecto,  $\langle S_\sigma \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}} = \sigma^\vee$  y entonces  $\langle S_\sigma \rangle_{\mathbb{Q}_{\geq 0}} = \sigma^\vee \cap \mathbb{Q}^n$ . Como  $\sigma^\vee$  es de dimensión maximal, tenemos:

$$\langle S_\sigma \rangle_{\mathbb{Q}} = \langle \sigma^\vee \rangle_{\mathbb{Q}} = M_{\mathbb{Q}}.$$

Veamos entonces la afirmación. Sea  $m \in M$ . Por la ecuación de arriba, tenemos:

$$m = \sum \frac{p_i}{q_i} m_i, \quad m_i \in S_\sigma$$

$$\left( \prod q_i \right) m = \sum p_i m_i \in S_\sigma,$$

y como  $S_\sigma$  es saturado y  $\prod q_i \in \mathbb{N}$ , tenemos  $m \in S_\sigma$ , probando la Afirmación 3.23. En particular, el conjunto de elementos primitivos de las aristas es generador de  $S_\sigma$  y entonces debe ser una base de  $M$ , por lo tanto, su dual en  $\sigma$ , una base de  $N$ . Además, en este caso:

$$U_\sigma \simeq \mathbb{k}^n.$$

Acabamos de ver en realidad que la regularidad en el punto  $x_\sigma$  implica regularidad en toda la variedad. Luego, si  $\sigma$  es de dimensión maximal, tenemos que son equivalentes:

- La variedad  $U_\sigma$  es regular.
- El punto  $x_\sigma \in U_\sigma$  es regular.
- El cono dual  $\sigma^\vee$  está generado por una base de  $M$ .
- El cono  $\sigma$  está generado por una base de  $N$ .

En el caso que  $\dim(\sigma) = l < n$ , procedemos de la misma forma pero con la diferencia que  $\sigma^\vee$  tendrá a los elementos de la base y sus opuestos (pues no es estrictamente convexo), por lo que  $S_\sigma$  tendrá elementos que serán unos opuestos de otros. Esto implica la igualdad:

$$U_\sigma = \mathbb{k}^l \times (\mathbb{k}^*)^{n-l}$$

y que el generador de  $\sigma^\vee$  es linealmente independiente en una parte y en la otra tiene a los opuestos. Dualizando y volviendo a  $\sigma \subseteq N$ , estos elementos que aparecen con sus opuestos desaparecen y nos queda que el generador (las aristas) de  $\sigma$  está incluido en una base de  $N$ .  $\square$

**COROLARIO 3.24.** *Una variedad  $X$  tórica normal es lisa si y sólo si todos sus conos están generados por parte de una base.*

**DEMOSTRACIÓN.**  $X$  es cubierto por las cartas afines  $U_\sigma$  con  $\sigma$  los conos máximos.  $X$  es lisa si y sólo si sus cartas afines son lisas, y por el corolario anterior, esto es equivalente a que todos estos conos estén generados por una parte de una base.  $\square$

Para ver más en profundidad sobre puntos singulares y teoría local, ver [Sha77, Capítulo 2]

## 5. Equivalencia categórica

Ya vimos cómo crear una variedad tórica a partir de un abanico, y cómo encontrar un abanico para cada variedad tórica. Veamos ahora que podemos hacer la misma correspondencia para los morfismos.

**DEFINICIÓN 3.25.** Sean  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  abanicos en  $N$  y  $N'$ , respectivamente. Un *morfismo de abanicos* entre  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  es un morfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos  $f : N \rightarrow N'$  tal que, para cada cono  $\sigma \in \Sigma$ , existe un cono  $\sigma' \in \Sigma'$  con  $f(\sigma) \subseteq \sigma'$ , donde consideramos el mismo morfismo extendido  $f : N_{\mathbb{R}} \rightarrow N'_{\mathbb{R}}$ .

Notar que el cono de llegada no es único, pero como la intersección de dos conos de un abanico es también un cono del abanico, consideraremos siempre el más chico.

**TEOREMA 3.26.** *Sean  $N, N'$  dos láttices y  $\Sigma, \Sigma'$  abanicos en ellos.*

1. Si  $f : N \rightarrow N'$  es un morfismo de abanicos entre  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ , entonces induce un morfismo entre las variedades tóricas  $f_*^* : X_\Sigma \rightarrow X_{\Sigma'}$ .
2. Recíprocamente, si  $f : X_\Sigma \rightarrow X_{\Sigma'}$  es un morfismo de variedades tóricas, entonces induce un morfismo  $(f^\#)^* : N \rightarrow N'$  entre los abanicos  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ .

**DEMOSTRACIÓN.** 1. Sea  $f : N \rightarrow N'$  es un morfismo de abanicos entre  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ . Recordemos que  $X_\Sigma$  es construida haciendo el cociente:

$$(3.4) \quad X_\Sigma = \bigsqcup_{\sim} U_\sigma,$$

donde la unión varía con  $\sigma \in \Sigma$  y la relación está dada por las caras, es decir,  $x \sim y$  si  $x \in U_{\sigma_1}$ ,  $y \in U_{\sigma_2}$  y existe  $z \in U_\tau$  (siendo  $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ ) de forma que las inmersiones  $U_\tau \hookrightarrow U_{\sigma_1}$  y  $U_\tau \hookrightarrow U_{\sigma_2}$  llevan  $z$  en  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Como vimos en la ecuación (5), para cada  $\sigma \in \Sigma$ , el morfismo  $f$  induce un morfismo  $f_*^* : U_\sigma \rightarrow U_{\sigma'}$ , es decir, tenemos una función de la unión

disjunta hacia la variedad  $X_{\Sigma'}$ . Veamos que pasa al cociente.

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup U_{\sigma} & \xrightarrow{f_*^*} & \bigsqcup U_{\sigma'} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X_{\Sigma} & \xrightarrow{f_*} & X_{\Sigma'} \end{array}$$

Sean  $x \in U_{\sigma_1}$  e  $y \in U_{\sigma_2}$  tales que  $x \sim y$  via  $z \in U_{\tau}$ , siendo  $\tau$  la cara común. Queremos ver que  $f_*^*(x) \sim f_*^*(y)$  en  $X_{\Sigma'}$ .

Sean  $\sigma'_1$  y  $\sigma'_2$  los conos de  $\Sigma'$  tales que:

$$f(\sigma_i) \subseteq \sigma'_i.$$

Tenemos entonces:

$$f(\tau) \subseteq f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) \subseteq \sigma'_1 \cap \sigma'_2,$$

es decir,  $f(\tau) \subseteq \gamma_{\tau}$  siendo  $\gamma_{\tau}$  la cara común en la que se encuentran  $\sigma'_1$  y  $\sigma'_2$ . Por la construcción de los morfismos al final del capítulo 2, tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} U_{\tau} & \hookrightarrow & U_{\sigma_i} \\ f_*^* \downarrow & & \downarrow f_*^* \\ U_{\gamma_{\tau}} & \hookrightarrow & U_{\sigma'_i} \end{array}$$

lo que nos dice que mandar  $f_*^*(z)$  por las inmersiones da  $f_*^*(x)$  y  $f_*^*(y)$ , i.e.  $f_*^*(x) \sim f_*^*(y)$  y por lo tanto, el morfismo  $f_*^*$  pasa al cociente, es decir, tenemos definido:

$$f_*^* : X_{\Sigma} \longrightarrow X_{\Sigma'}.$$

Este morfismo claramente es de variedades tóricas porque lleva el toro  $T_N$  en  $T_{N'}$  y como respeta la acción en cada carta afín, respeta también la acción luego de realizado el pegado.

Sea  $f : X_{\Sigma} \longrightarrow X_{\Sigma'}$  un morfismo entre variedades tóricas,  $\Sigma$  abanico en  $N$  y  $\Sigma'$  en  $N'$ . Primero, observar que  $f|_{T_N} : T_N \longrightarrow T_{N'}$  induce un morfismo  $\mathbb{Z}$ -lineal de  $N$  en  $N'$ :  $f|_{T_N}$  viene inducido por un morfismo  $f^{\sharp} : \mathbb{k}[M'] \longrightarrow \mathbb{k}[M]$ , que a su vez viene de extender un morfismo de  $f^{\sharp} : M' \longrightarrow M$ , y que dualizando induce el morfismo  $(f^{\sharp})^* : N \longrightarrow N'$ . Queremos ver que este morfismo es compatible con los abanicos  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ .

Sea  $\sigma \in \Sigma$ . Por el Teorema 3.15, tenemos la órbita asociada  $O(\sigma) \subseteq X_{\Sigma}$ , y como  $f$  respeta la acción, tenemos:

$$f(O(\sigma)) = f(T_N \cdot x_{\sigma}) = f(T_N) \cdot f(x_{\sigma}) \subseteq T_{N'} \cdot f(x_{\sigma}),$$

o sea que  $f(O(\sigma))$  está dentro de alguna órbita, que sabemos, por el Teorema 3.15, proviene de algún cono  $\sigma' \in \Sigma'$ . Tenemos:

$$f(O(\sigma)) \subseteq O(\sigma').$$

Si  $\tau$  es una cara de  $\sigma$ , razonando de la misma forma tenemos que existe un cono  $\gamma_\tau \in \Sigma'$  tal que  $f(O(\tau)) \subseteq O(\gamma_\tau)$ . Veamos que en este caso,  $\gamma_\tau$  debe ser una cara de  $\sigma'$ .

Por la parte (c) del Teorema 3.15, tenemos  $O(\sigma) \subseteq \overline{O(\tau)}$ , luego:

$$f(O(\sigma)) \subseteq f(\overline{O(\tau)}) \subseteq \overline{f(O(\tau))} \subseteq \overline{O(\gamma_\tau)},$$

de lo que se sigue que  $O(\sigma') \subseteq \overline{O(\gamma_\tau)}$ . De la correspondencia entre órbitas, deducimos que  $\gamma_\tau$  es una cara de  $\sigma'$ .

De esto y de la parte (b) del Teorema 3.15, deducimos:

$$f(U_\sigma) = \bigcup f(O(\tau)) \subseteq \bigcup O(\gamma_\tau) = U_{\sigma'},$$

donde las uniones son en el conjunto de las caras  $\tau$  de  $\sigma$ . Tenemos entonces que  $f$  induce un morfismo entre variedades tóricas:

$$f|_{U_\sigma} : U_\sigma \longrightarrow U_{\sigma'},$$

lo cual, por la correspondencia (5) al final del capítulo 2, nos dice que el morfismo extendido inducido en los láttices  $(f^\sharp)^* : N_{\mathbb{R}} \longrightarrow N'_{\mathbb{R}}$  lleva  $\sigma$  en  $\sigma'$ , es decir,  $(f^\sharp)^* : N \longrightarrow N'$  es un morfismo entre los abanicos  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ . □



## Bibliografía

- [AK21] Allen Altman and Steven Kleiman. *A Term of Commutative Algebra*. Worldwide Center of Mathematics, LLC, 2021.
- [AM69] Michael F. Atiyah and Ian G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Reading, Mass.-Menlo Park, Calif.-London-Don Mills, Ont.: Addison-Wesley Publishing Company (1969)., 1969.
- [Bor91] Armand Borel. *Linear algebraic groups.*, volume 126 of *Grad. Texts Math.* New York : Springer-Verlag, 2nd enlarged ed. edition, 1991.
- [CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck. *Toric varieties*, volume 124 of *Grad. Stud. Math.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2011.
- [FSR17] Walter R. Ferrer Santos and Alvaro Rittatore. *Actions and invariants of algebraic groups*. Monogr. Res. Notes Math. Boca Raton, FL: CRC Press, 2nd edition edition, 2017.
- [Ful93] William Fulton. *Introduction to toric varieties*. Number 131 in *Annals of Mathematics Studies*. Princeton university press, 1993.
- [Muñ25] Luciano Muñiz. *Monoides Algebraicos e Inmersiones en Grupos, monografía de grado*. Centro de Matemática, Facultad de Ciencias, Udelar <https://www.cmat.edu.uy/biblioteca/monografias-y-tesis/monografias/uy24-21499.pdf/view>, 2025.
- [Per95] Daniel Perrin. *Géométrie algébrique. Une introduction*. Paris: CNRS Éditions, 1995.
- [Put88] Mohan S. Putcha. *Linear algebraic monoids*, volume 133 of *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* Cambridge (UK) etc.: Cambridge University Press, 1988.
- [Ren05] Lex E. Renner. *Linear algebraic monoids.*, volume 134 of *Encycl. Math. Sci.* Berlin: Springer, 2005.
- [Rit98] Alvaro Rittatore. Algebraic monoids and group embeddings. *Transform. Groups*, 3(4):375–396, 1998.
- [Rit07] Alvaro Rittatore. Algebraic monoids with affine unit group are affine. *Transform. Groups*, 12(3):601–605, 2007.
- [Sha77] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry*. Translated from the Russian by K. A. Hirsch. 2nd ed. Springer Study Edition. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. XV, 439 p. with 19 figs, DM 45.00; \$ 19.80 (1977)., 1977.
- [Sum74] Hideyasu Sumihiro. Equivariant completion. *J. Math. Kyoto Univ.*, 14:1–28, 1974.