



Universidad de la República
Facultad de Ciencias

Algunos aspectos del *Quantum*
Kicked Rotor resonante

Guzmán Hernández

Tesis presentada para completar los requerimientos del grado de
Magíster en Física

Orientador: Dr. Alejandro Romanelli

defendida ante el tribunal integrado por:

Dr. Raúl Donangelo

Dr. Horacio Failache

Dr. Arturo Martí

Dr. Eduardo Mizraji

Dr. Alejandro Romanelli

Le dedico este trabajo a mis tíos abuelos.

Agradecimientos

Le quiero agradecer primero a mi familia; a mis padres por alentarme y ayudarme a dedicarme a lo que me gusta y a Romina por su apoyo incondicional a todos mis emprendimientos.

En segundo lugar le quiero agradecer a mis compañeros del Instituto de Física de la Facultad de Ingeniería. Especialmente a Rodrigo Alonso, Pablo Iturralde, Matías Di Martino, Marcelo Forets, Nicolás Casaballe, Matías Osorio y Lucía Duarte por su ayuda en Matlab y Latex.

Por último, le quiero agradecer a Alejandro, por darme la posibilidad de trabajar en estos temas, por su amistad y su ayuda a cada paso del camino.

Guzmán

Abstract

In this thesis different aspects of the Quantum Kicked Rotor (QKR) in the resonant regime are studied.

Firstly, we study the dependence of the time evolution of the system on extended initial conditions on momentum space. For the primary resonance it is possible to find the dispersion relation for the map that determines the dynamics of the wave vector in momentum space. From this relation the time evolution of the statistical moments is found in terms of the initial wavepacket. For the secondary resonances this dependence is studied through numerical results and qualitatively similar results to the case of the primary resonance are found.

Secondly, we study a variant of the QKR model where the intensity of the excitation depends on time. For a power-law type dependence we find, analytically for the primary resonance and numerically for the secondaries, the relationship between the asymptotic behavior of the statistical moments and the exponent of the excitation.

Finally, we consider a variant of the QKR model where two internal energy levels are added to the system. We study the behavior of this new system for the range of parameters that drive the usual QKR to the resonant regime and observe the different types of evolution attainable when the parameter that determines the energy difference between the internal levels is varied. Through an analytical and numerical study, the behavior of this variant of the QKR in parameter space is characterized, and both resonant and anti-resonant phenomena are found.

Resumen

En esta tesis se estudian distintos aspectos del modelo de Rotor Impulsado cuántico o *Quantum Kicked Rotor* (QKR) en el régimen resonante.

Primero, se estudia la evolución temporal del sistema cuando se consideran condiciones iniciales distribuidas en el espacio de momento angular. En la resonancia primaria es posible encontrar la relación de dispersión del mapa que determina la dinámica en el espacio de momento. A partir de esta relación se obtiene la evolución temporal de los momentos estadísticos en función del paquete de ondas inicial. Para las resonancias secundarias se estudia esta dependencia mediante el análisis numérico, obteniéndose resultados cualitativamente similares a los de la resonancia primaria.

En segundo lugar, se estudia una modificación del modelo del QKR en la que la intensidad de la perturbación depende del tiempo. Para una dependencia tipo ley de potencias se encuentra, analíticamente para la resonancia primaria y numéricamente para las secundarias, la relación entre el comportamiento asintótico de los momentos estadísticos y el exponente de la excitación.

Finalmente, se estudia una variante del modelo del Rotor Impulsado Cuántico donde se le agregan al sistema dos niveles de energía internos. Se estudia el comportamiento de este nuevo sistema para el rango de parámetros que dan lugar al régimen resonante en el modelo del QKR usual, observando los distintos tipos de evolución obtenibles al variar el parámetro que determina la diferencia de energía entre los dos niveles internos. A través del estudio analítico y numérico de la evolución temporal de los momentos estadísticos y de las probabilidades de ocupación de los estados internos, se realiza una caracterización del comportamiento de esta variante del QKR en el espacio de parámetros, encontrándose fenómenos de resonancia y antiresonancia.

Palabras clave: *QKR, caos cuántico, resonancia cuántica*

Índice general

1. Introducción	1
2. <i>Kicked Rotor</i> Clásico	5
2.1. Introducción	5
2.2. Caos en sistemas Hamiltonianos	6
2.2.1. Dinámica hamiltoniana	6
2.2.2. Sistemas Integrables	7
2.2.3. Sistemas no integrables y teoría KAM	9
2.2.4. Mapas de Poincaré	12
2.3. Ecuación de Movimiento y Mapa de Poincaré	14
2.4. Análisis numérico	16
2.5. Difusión en el espacio de Momentos	18
3. <i>Quantum Kicked Rotor</i>	21
3.1. Introducción	21
3.2. Teoría de Floquet	22
3.3. Dinámica del QKR	24
3.3.1. Operador Evolución	24
3.3.2. Mapa en el espacio de momento	26
3.3.3. Valores Esperados	28
3.3.4. Adimensionalización de los Parámetros	29
3.4. Análisis del mapa	30
3.4.1. Dinámica No Resonante	30
3.4.2. Dinámica Resonante	34
3.4.2.1. Resonancia Primaria	35
3.4.2.2. Resonancias Secundarias	37

3.4.2.3. Anti-resonancia	38
4. Condiciones Iniciales Distribuidas en el QKR	41
4.1. Introducción	41
4.2. Resonancias Primarias	42
4.3. Resonancias Secundarias	46
5. Excitación dependiente del tiempo en el QKR	49
5.1. Introducción	49
5.2. Evolución Temporal	50
5.3. Resonancias Primarias	50
5.3.1. $K(t)$ genérica	50
5.3.2. Ley de Potencias	52
5.4. Resonancias Secundarias	55
6. <i>Quantum Kicked Rotor</i> de dos niveles	57
6.1. Introducción	57
6.2. Hamiltoniano atómico-óptico	59
6.3. Obtención del mapa	61
6.3.1. Operador Evolución	61
6.3.2. Cuasimomento	63
6.3.3. Mapa en el espacio de momentos	63
6.4. Probabilidades de Ocupación y Momentos Estadísticos	66
7. Evolución Resonante del <i>Quantum Kicked Rotor</i> de dos niveles en el subespacio $\beta = 0$	69
7.1. Introducción	69
7.2. Resonancia primaria en el Parámetro τ	71
7.2.1. Caso $\tilde{\Delta} = (2n + 1)\pi$ - Antirresonancia	74
7.2.2. Caso $\tilde{\Delta} = 2n\pi$	76
7.2.3. $\tilde{\Delta}$ distinto de $n\pi$	80
7.3. Entrelazamiento cuántico entre los grados de libertad internos y externos	82
7.4. Resonancia Secundaria en el Parámetro τ	85
7.5. Anti-Resonancia en el parámetro τ	86
7.6. Fuera del subespacio $\beta = 0$	87

7.7. Comparación con la <i>Quantum Walk</i>	88
8. Conclusiones y Perspectivas	91
A. Relación entre el <i>Kicked Rotor</i> y el modelo de Anderson	95
A.1. El modelo de Anderson	95
A.2. El problema de autovectores de Floquet en el QKR	96
B. Momentos del QKR resonante en la representación de momento angular	99
C. Demostración de la relación 3.65	101
D. Aproximación de onda rotatoria	103

Capítulo 1

Introducción

El Rotor Impulsado (o *Kicked Rotor*) es un modelo paradigmático del estudio del caos en sistemas hamiltonianos debido a que, pese a su sencillez, presenta varias de las características fundamentales de estos fenómenos. El estudio de su análogo cuántico, el *Quantum Kicked Rotor* (QKR de ahora en más), es de interés en el marco general del estudio del análogo cuántico de sistemas clásicamente caóticos.

Se dice que un sistema dinámico determinista no lineal es caótico cuando presenta un comportamiento estable pero fuertemente irregular [1, 2]. La fuente de esta irregularidad es la propiedad de estos sistemas de separar exponencialmente rápido, en una región acotada del espacio de fases, a órbitas que parten de condiciones iniciales cercanas. Se vuelve por lo tanto imposible en la práctica predecir el comportamiento a largo plazo de un sistema caótico; cualquier error en la determinación de la condición inicial se amplifica exponencialmente rápido con la evolución temporal.

Un cierto tipo de sistemas dinámicos que exhiben comportamiento caótico son los sistemas hamiltonianos [2]. Estos son aquellos descritos por las ecuaciones de Hamilton, que se pueden utilizar por ejemplo para modelar sistemas que se comportan de acuerdo a las leyes de la mecánica clásica bajo la ausencia de fricción [3, 4]. En general, las ecuaciones de Hamilton dan lugar a un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas, no lineales, de difícil –o imposible– resolución analítica. Se puede ver, sin embargo, que los sistemas hamiltonianos se pueden dividir en dos categorías: los integrables y los no integrables, siendo la resolución de la dinámica sensiblemente más sencilla para aquellos que pertenecen a la primera.

Los sistemas integrables son aquellos para los que existen tantas cantidades conservadas del movimiento como grados de libertad. En este caso es posible simplificar enormemente las ecuaciones que describen la dinámica del sistema mediante un cambio de coordenadas apropiado, obteniéndose un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de simple resolución.

Los sistemas hamiltonianos no integrables dan lugar a ecuaciones de movimiento no lineales que muchas veces generan dinámicas caóticas [2, 5]. Una manera de vislumbrar el mecanismo mediante el cual sucede la transición al caos en los sistemas hamiltonianos consiste en considerar un sistema integrable sujeto a una perturbación. La teoría para abordar este

tipo de problemas se basa en el teorema KAM, debido a Kolmogorov, Arnold y Moser (ver referencias en [6, 5, 2]), que indica que la dinámica del sistema perturbado mantendrá la regularidad del sistema integrable en la medida que la perturbación sea chica, y además permite vislumbrar el mecanismo por el cual, a medida que la perturbación crece, la regularidad va siendo destruida dando lugar a una dinámica caótica. Un sistema que pese a –o tal vez debido a– su sencillez, permite vislumbrar la riqueza de fenómenos involucrados en este mecanismo de transición al caos, y la aplicación de las ideas de la teoría KAM, es el del Rotor Impulsado clásico o *Kicked Rotor*.

El *Kicked Rotor* clásico consiste en un rotor que gira libremente alrededor de un eje fijo, sometido periódicamente a una fuerza impulsiva de dirección fija. El hamiltoniano del sistema puede verse como un hamiltoniano de evolución libre, asociado a la energía cinética de giro del rotor, al cual se le agrega una perturbación dependiente del tiempo de manera periódica e impulsiva, es decir, proporcional a un tren de deltas de Dirac. El hecho de que la perturbación sea impulsiva permite expresar la dinámica del sistema en términos de un mapa que relaciona los valores de las variables de estado en periodos sucesivos. Este mapa se conoce como mapa Estándar [7] –así llamado debido a que varios sistemas dinámicos pueden reducirse a este mapa [8]– y a pesar de su sencillez permite apreciar los aspectos fundamentales de la teoría KAM. Dependiendo del valor del parámetro que indica la intensidad de la perturbación es posible distinguir distintos regímenes en el comportamiento del modelo. Para perturbaciones bajas el sistema esencialmente mantiene la regularidad del sistema no perturbado, correspondiente al rotor girando libremente. A medida que esta perturbación aumenta, el comportamiento de las órbitas se vuelve más irregular hasta que, una vez atravesado cierto umbral, las regiones caóticas consumen por completo el espacio de fases.

En la mecánica cuántica, el estado de un sistema se representa por un vector perteneciente a un espacio de Hilbert [9]. A las cantidades físicas observables se les asocian operadores lineales hermíticos que actúan sobre los vectores de este espacio. En un sistema cuántico la evolución temporal es generada por un observable, el operador hamiltoniano del sistema, a través de la ecuación de Schroedinger. Dado un sistema clásico, es posible hallar su análogo cuántico elevando el hamiltoniano clásico al estatus de operador e imponiendo que los observables asociados a las variables canónicas del sistema hamiltoniano verifiquen una cierta relación de cuantización, que eventualmente da lugar al principio de incertidumbre de Heisenberg.

El *Quantum Kicked Rotor* [10, 11, 12] consiste en el sistema cuántico cuya evolución temporal, correspondiente a la ecuación de Schroedinger, está dada por el hamiltoniano del *Kicked Rotor*, donde además el momento y la posición se elevan al estatus de operadores que cumplen la relación de conmutación usual. Nuevamente es de interés considerar los distintos regímenes de evolución temporal obtenibles al variar los parámetros del sistema. En el caso cuántico, el sistema no solo depende del parámetro asociado a la intensidad de la perturbación sino que, debido a la relación de cuantización y la constante de Planck, se introduce un nuevo parámetro independiente que, en conjunto con la intensidad de la perturbación, determinan el comportamiento del modelo.

El comportamiento del *Quantum Kicked Rotor* es cualitativamente distinto al de su con-

traparte clásica [10]. El *Kicked Rotor* clásico, en el régimen caótico, presenta un comportamiento difusivo en el espacio de fases [2, 13]; si se considera un ensemble de condiciones iniciales, el valor esperado de la energía cinética del sistema crece linealmente con el tiempo. En el análogo cuántico se observa para este rango de parámetros una evolución temporal del valor esperado de la energía cinética similar al comportamiento clásico solamente en un entorno del instante inicial. Transcurrido un cierto tiempo el valor esperado de la energía deja de crecer con el tiempo. Dado que este valor esperado es proporcional al segundo momento estadístico de la distribución de probabilidad en el espacio de momento angular, se tiene entonces que esta distribución de probabilidad deja de ensancharse en el espacio de momentos. Este fenómeno se conoce como localización dinámica. No es este el único aspecto en el que el comportamiento del QKR difiere sustancialmente del de su contraparte clásica. Se observa además que para ciertos valores de los parámetros del sistema la energía crece de manera balística. Es decir que el segundo momento de la distribución de probabilidad en el espacio de momento angular crece cuadráticamente con el tiempo [14]. Esto implica que la función de onda se esparce rápidamente en el espacio de momentos. Este fenómeno se conoce como resonancia cuántica.

Se han reportado varias realizaciones experimentales atómico ópticas del modelo del QKR [15, 16, 17, 18, 19]. En estos experimentos se someten nubes diluidas de átomos fríos a potenciales ópticos dependientes del tiempo. El potencial se obtiene a partir de la interacción del átomo con una onda laser estacionaria, la cual es pulsada periódicamente de manera de generar la excitación impulsiva del QKR. En estos experimentos se han observado tanto el fenómeno de localización dinámica como las resonancias cuánticas.

En esta tesis se estudian algunos aspectos del *Quantum Kicked Rotor* en régimen resonante así como de otros modelos que se obtienen como variaciones de este. El enfoque del trabajo realizado gira alrededor del estudio de la dinámica temporal de la densidad de probabilidad en el espacio de momento angular, y en particular del segundo momento estadístico de esta densidad, que es proporcional al valor esperado de la energía cinética del rotor. El comportamiento temporal de esta cantidad indica la existencia o no de un régimen resonante y es un buen indicador del ensanchamiento temporal de la función de onda en el espacio de momento angular. Se estudia primeramente la influencia de cierto tipo de condiciones iniciales distribuidas en el espacio de momento angular sobre la evolución temporal de los momentos estadísticos de la densidad de probabilidad. Luego se considera una primera variación sobre el modelo del QKR: que la intensidad de la excitación dependa del tiempo. Se busca encontrar la dependencia de la evolución del segundo momento con la prescripción temporal para la intensidad de la excitación. Por último, se estudia la resonancia de un sistema similar al QKR pero con dos niveles de energía internos, motivado por la realización atómico-óptica del QKR.

Otro modelo que presenta un crecimiento de la varianza más veloz que su contraparte clásica es la Caminata Cuántica o *Quantum Walk* (QW), el análogo cuántico de la caminata al azar clásica [20]. Este sistema se diferencia del QKR en que en este caso no se considera la evolución cuántica dada por un hamiltoniano correspondiente a un sistema clásico. La dinámica del QW se determina definiendo el operador evolución del sistema de manera tal

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

de imitar la filosofía de la prescripción para la evolución temporal de la caminata al azar: desplazarse a lo largo de una línea en una dirección u otra según el resultado de un tiro de moneda. Sin embargo, existen varias similitudes entre los dos sistemas. El segundo momento estadístico de la caminata cuántica, al igual que el del QKR, crece cuadráticamente con el tiempo. La analogía existente entre los dos sistemas se explora en una serie de trabajos [21, 22] en los que se encuentran varias similitudes entre sus comportamientos. A lo largo de esta tesis se señalarán las similitudes entre los resultados encontrados con diversos aspectos de la caminata cuántica. Las caminatas cuánticas, sobre distintas topologías, han tomado importancia en el campo de la computación cuántica en la creación de algoritmos cuánticos de búsqueda que recorren el espacio de búsqueda más rápido que sus contrapartes clásicas [23, 24].

En los dos primeros capítulos de este trabajo, se presenta un resumen de los resultados fundamentales de la teoría detrás del *Quantum Kicked Rotor*, comenzando primero con el Rotor Impulsado Clásico. El tercer capítulo analiza la dependencia de la evolución en la elección de condiciones iniciales distribuidas y en el cuarto capítulo se estudia el QKR cuando la intensidad de la perturbación depende del tiempo. Los siguientes dos capítulos introducen el modelo y estudian la evolución respectivamente de otra variante del QKR en la que se consideran niveles de energía internos además de la traslación. La tesis culmina con un capítulo en el que se resumen los resultados del trabajo realizado y se presentan perspectivas de trabajo a futuro.

Capítulo 2

Kicked Rotor Clásico

2.1. Introducción

En este capítulo se introduce el modelo y se resumen los resultados fundamentales del *Kicked Rotor* clásico, los cuales serán contrastados posteriormente con los resultados para su análogo cuántico, que constituye el tema de estudio de esta tesis y es introducido en el capítulo siguiente. Previo a esta exposición, se sintetizan muy brevemente los resultados fundamentales del estudio del caos en sistemas hamiltonianos. Los conceptos básicos expuestos en este breve resumen sobre los sistemas hamiltonianos se abordan en profundidad en una variedad de textos de mecánica analítica [3, 4, 6]. Asimismo, las ideas que aquí se presentan sobre el caos en estos sistemas –así como la aplicación de estas ideas al modelo del Rotor Impulsado– pueden encontrarse tanto en textos de caos clásico [2, 1], como en textos que abordan la mecánica cuántica de sistemas clásicamente caóticos [5, 13, 25].

La siguiente sección comienza con una descripción de los sistemas hamiltonianos. Estos son aquellos cuya dinámica queda determinada por las ecuaciones de Hamilton, que presentan una descripción equivalente a la de las ecuaciones de Newton de los sistemas de mecánica clásica bajo la ausencia de fricción, además de poder ser utilizadas para modelar una gran variedad de sistemas físicos. Si bien las ecuaciones de Hamilton en general dan lugar a un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas no lineales, lo que dificulta –o imposibilita– una resolución analítica exacta, existen cierto tipo de sistemas hamiltonianos para los cuales la resolución se simplifica significativamente, al menos a nivel teórico. Estos son los sistemas integrables, para los cuales existen tantas cantidades conservadas del movimiento como grados de libertad del sistema. Se puede ver además que la evolución temporal de este tipo de sistemas es bastante regular; las orbitas en el espacio de fases quedan confinadas a superficies topológicamente toroidales determinadas por las cantidades conservadas.

Luego de considerar brevemente los sistemas integrables, se presenta una breve descripción del tratamiento de aquellos sistemas que se obtienen como una perturbación a sistemas no integrables. Se expone, en un mínimo de detalle, la herramienta fundamental para el tratamiento de estos problemas, la teoría KAM, que relaciona, en el límite de perturbaciones pequeñas, la dinámica del sistema perturbado con la del sistema integrable original. Esta

teoría permite también entender cualitativamente el mecanismo por el cual la dinámica del sistema perturbado se va volviendo más irregular a medida que aumenta la intensidad de la perturbación, obteniéndose un comportamiento caótico para perturbaciones suficientemente grandes. Finalmente, se introducen los mapas de Poincaré, que permiten expresar la dinámica de los sistemas dinámicos en términos de un mapa en tiempo discreto y resultan útiles para estudiar ciertos aspectos de los sistemas considerados. Estas ideas, presentadas de manera general, se ejemplifican en la siguiente sección en el estudio del modelo del Rotor Impulsado.

El modelo del Rotor Impulsado, y su correspondiente mapa de Poincaré, el Mapa Estándar o *Standard Map* en inglés, se presentan en la tercera sección de este capítulo. El sistema del Rotor Impulsado consiste en una barra que puede girar libremente alrededor de un eje y que es golpeada periódicamente por una fuerza impulsiva. Este sistema puede pensarse como un sistema hamiltoniano integrable correspondiente al rotor libre que es sometido a una perturbación dada por la fuerza impulsiva. De esta forma el Rotor Impulsado constituye un sistema sencillo en el que se puede estudiar cualitativamente la teoría expuesta en el párrafo precedente, y parte de la sencillez de este modelo radica en que su mapa de Poincaré, el Mapa Estándar, puede obtenerse fácilmente dado que la perturbación es impulsiva.

El Mapa Estándar fue estudiado originariamente por Chirikov [7] y debe su nombre a que varios sistemas dinámicos pueden reducirse localmente a este mapa [8]. El mismo resulta de gran interés además debido a que, pese a su sencillez, constituye un buen modelo para entender las condiciones en que aparece el caos en sistemas hamiltonianos y además permite estudiar las propiedades del comportamiento caótico de un punto de vista estadístico. En la cuarta sección de este capítulo se muestra como van cambiando la dinámica del sistema y el retrato de las órbitas del mapa, al modificar el valor de la constante que determina la intensidad de la perturbación, constatándose que, a medida que aumenta esta intensidad, el comportamiento va perdiendo la regularidad del sistema integrable. En la última sección se muestra como, para el régimen caótico, la divergencia de las orbitas del Mapa Estándar se puede caracterizar por un proceso difusivo.

2.2. Caos en sistemas Hamiltonianos

2.2.1. Dinámica hamiltoniana

En la formulación hamiltoniana de la mecánica clásica [3, 6], el estado de un sistema de N grados de libertad queda determinado por un punto en un espacio de fases de dimensión $2N$, descrito por un conjunto de coordenadas canónicas $(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$, donde a p_i se les llama momentos conjugados a las coordenadas q_i . La dinámica del sistema queda determinada por una función de las coordenadas, los momentos, y posiblemente del tiempo $H(q, p, t)$, llamada hamiltoniano. Las órbitas en el espacio de fases quedan determinadas por funciones $q_i(t)$ y $p_i(t)$ cuya evolución temporal verifica las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{2.1}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{2.2}$$

La evolución hamiltoniana también puede expresarse en términos de los llamados corchetes de Poisson. Dadas dos funciones de las coordenadas y el tiempo $f(q, p, t)$ y $g(q, p, t)$, el corchete de Poisson entre f y g es

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \tag{2.3}$$

De la ecuación anterior se tiene entonces que la derivada total de una función cualquiera con respecto al tiempo puede escribirse como

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{2.4}$$

Considerando de ahora en adelante sistemas en que el hamiltoniano no depende del tiempo, se puede ver que las ecuaciones de Hamilton son equivalentes a las ecuaciones de Newton para un sistema conservativo. De la ecuación 2.4 se observa que una función sin dependencia explícita en el tiempo que tenga corchete nulo con el hamiltoniano será constante a lo largo de las órbitas determinadas por las ecuaciones de Hamilton. A aquellas funciones que verifican esta condición se las conoce como constantes del movimiento o cantidades conservadas. En los sistemas independientes del tiempo el hamiltoniano es una constante del movimiento y coincide con la energía mecánica del sistema.

La existencia de cantidades conservadas simplifica significativamente la dinámica de un sistema hamiltoniano; si $f(q, p)$ es una constante del movimiento entonces las trayectorias del sistema en el espacio de fases quedan confinadas a superficies en las que f es constante. El hamiltoniano en sí mismo es una cantidad conservada; la evolución de una solución dada transcurre en una superficie de $2N - 1$ dimensiones en que la energía es constante. La existencia de una segunda cantidad conservada f , independiente del hamiltoniano, restringe la evolución aún más, quedando las órbitas confinadas a la intersección de la superficie de energía constante con la superficie en que f lo es.

2.2.2. Sistemas Integrables

Se dice que un sistema hamiltoniano es integrable de existir N funciones $f_i(q, p)$ constantes del movimiento independientes que además verifiquen

$$\{f_i, f_j\} = 0, \tag{2.5}$$

para todo valor de i y j , donde el caso $i = j$ se cumple trivialmente dado que $\{f, f\} = 0$ para cualquier función f . Una de estas funciones será por supuesto el hamiltoniano del sistema,

por lo que $N - 1$ condiciones anteriores son de la forma $\{f_i, H\} = 0$, lo que es equivalente a decir que las f_i sean cantidades conservadas.

Para un sistema integrable, la órbita de cada solución se encuentra restringida a una superficie N dimensional en el espacio de fases dada por la intersección de las N superficies donde las cantidades conservadas f_i toman valores constantes. Más específicamente, una órbita dada se encuentra confinada a una superficie N dimensional en el espacio de fases, determinada por las N ecuaciones

$$f_i(p, q) = k_i, \quad (2.6)$$

donde las k_i son constantes que dependen de la condición inicial de la órbita considerada. Se puede ver que las ecuaciones 2.5 implican que esta superficie es, del punto de vista topológico, un toroide N dimensional [6].

La dinámica de los sistemas hamiltonianos integrables es sencilla en comparación con la de los no integrables. Para verificar esto, es útil introducir las transformaciones canónicas de coordenadas.

Las transformaciones canónicas de coordenadas son aquellas que preservan la estructura de las ecuaciones de Hamilton. Es decir, si se toma una transformación a nuevas coordenadas $Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N, t)$ y $P_i = P_i(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N, t)$, para que la transformación de coordenadas sea una transformación canónica debe existir una función $K(Q, P, t)$ tal que las ecuaciones de movimiento para las nuevas coordenadas sean de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial P} \\ \frac{dP}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial Q}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para los sistemas integrables, es posible realizar una transformación de coordenadas a nuevas coordenadas Q_i y P_i de manera tal de que el nuevo hamiltoniano solo dependa de las coordenadas P_i , $K = K(P_i)$, lo cual simplifica enormemente la solución de las ecuaciones de Hamilton. Una posibilidad es tomar $P_i = f_i(q, p)$. En este caso se tiene

$$\frac{dP_i}{dt} = 0 = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (2.8)$$

y por lo tanto el hamiltoniano K no depende de las nuevas coordenadas Q_i . Esta elección no es única, se pueden conseguir nuevas constantes del movimiento tomando N funciones independientes de las N constantes del movimiento f_i . Aprovechando el hecho de que las trayectorias se mueven sobre toroides N dimensionales en el espacio de fases, se definen las coordenadas ángulo-acción (I_i, θ_i) , donde I_i son constantes del movimiento dadas por

$$I_i = \oint_{\gamma_i} \sum p_k dq_k \quad (2.9)$$

donde γ_i es una curva cerrada alrededor de una de las secciones del toroide, teniéndose una I_i distinta para cada una de las posibles direcciones independientes en que se puede cerrar una curva alrededor del toroide de dimension N . Las coordenadas θ_i son las coordenadas

2.2. CAOS EN SISTEMAS HAMILTONIANOS

conjugadas a los momentos I_i y se puede ver que deben ser variables del tipo angular. El hamiltoniano depende solo de las I_i y las ecuaciones de movimiento quedan

$$\begin{aligned}\frac{dI_i}{dt} &= 0 \\ \frac{d\theta_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial I_i} \equiv \omega_i(I),\end{aligned}\tag{2.10}$$

siendo ω_i constantes que dependen de las I_i y por lo tanto de las condiciones iniciales. La evolución temporal de las variables angulares es sencilla y queda

$$\theta_i(t) = \theta_i(0) + \omega_i(I)t.\tag{2.11}$$

La dinámica de las soluciones será cuasiperiódica si no existe un conjunto de N enteros (m_1, \dots, m_N) tales que

$$\sum \omega_i m_i = 0.\tag{2.12}$$

En este caso las órbitas se van enrollando alrededor del toroide N dimensional, sin cerrarse sobre si mismas, llenando su superficie de manera densa; con suficiente tiempo la orbita pasa arbitrariamente cerca de cualquier punto del toroide. Alternativamente, existen toroides para los cuales el valor de las constantes I_i es tal que los ω_i son de la forma

$$\omega_i = \omega_0 m_i,\tag{2.13}$$

con los m_i enteros. En este caso el comportamiento es periódico y las orbitas se cierran sobre si mismas luego de m_i vueltas alrededor del ángulo θ_i .

En resumen, para los sistemas hamiltonianos integrables es posible armar un retrato relativamente sencillo del espacio de fases, donde las órbitas están confinadas a superficies toroidales de dimension N . El comportamiento cualitativo de las órbitas adentro de cada toroide depende del valor que tomen las constantes del movimiento I_i para ese toroide, es decir, de las condiciones iniciales de la órbita. Para los toroides en que no se cumpla la condición dada por 2.12, la órbita que los recorre será cuasiperiódica. A estos toroides se les llama no-resonantes y constituyen la mayoría; los toroides para los cuales se cumple la condición 2.12, los toroides resonantes, son de medida nula en el espacio de fases. Sin embargo, los toroides resonantes son densos en el espacio de fases; arbitrariamente cerca de un toroide no-resonante existe uno resonante. Este hecho es de relevancia en el estudio de lo que sucede al perturbar un sistema integrable.

2.2.3. Sistemas no integrables y teoría KAM

En virtud de que la dinámica de los sistemas integrables es relativamente sencilla, es razonable investigar que tan prevalente es la integrabilidad en los sistemas hamiltonianos. Es decir, en un principio podría resultar que todos los sistemas hamiltonianos fueran integrables, y que la complejidad de la resolución de la dinámica estuviera en que no siempre resulta

sencillo hallar las integrales del movimiento. O bien podría resultar lo opuesto: que existen sistemas hamiltonianos no integrables, para los cuales es imposible encontrar un conjunto de N cantidades conservadas de manera tal de que la dinámica se pueda reducir a la expuesta en la subsección precedente mediante un cierto cambio de coordenadas. Una forma de abordar esta pregunta consiste en considerar un sistema dado por el Hamiltoniano de un sistema integrable al que se suma una perturbación

$$H(Q, I) = H_0(I) + \epsilon H_1(Q, I), \quad (2.14)$$

donde el parámetro ϵ determina que tan intensa es la perturbación dada por el término H_1 al hamiltoniano integrable, de manera tal que este último se recupera en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Las I , a pesar de ser cantidades conservadas del Hamiltoniano H_0 , no lo son de H dado que H_1 depende no solo de las variables I sino también de sus coordenadas canónicas conjugadas Q .

Se pueden considerar dos posibilidades extremas para la dinámica dada por H , en el límite en que ϵ es pequeño. Una posibilidad es que la regularidad de la dinámica dada por H_0 se traslade a la dada por H , de manera tal que las órbitas del nuevo sistema estén confinadas a toroides N -dimensionales. En este escenario, el efecto de la perturbación sería meramente de deformar, de manera continua con la variación de ϵ , los toroides invariantes del sistema original, obteniéndose consiguientemente un nuevo sistema integrable. Otra posibilidad para el comportamiento del sistema perturbado, opuesta a la anterior, sería que la regularidad de las trayectorias del sistema integrable original se perdiera sin importar que tan pequeña fuese la perturbación, de manera tal que la evolución en el espacio de fase se vuelva irregular para cualquier valor del parámetro ϵ . Resulta que, de acuerdo con el teorema KAM, el comportamiento del sistema de hamiltoniano perturbado dado por H se encuentra en cierto sentido a mitad de camino de las dos situaciones extremas expuestas precedentemente. A continuación, se presentan muy brevemente las ideas fundamentales de este teorema.

Se desea determinar si el sistema dado por el Hamiltoniano de la ecuación 2.14 es integrable. De ser así, debe existir una transformación canónica de coordenadas a un nuevo conjunto de coordenadas (Q', I') tales que el nuevo hamiltoniano H' dependa sólo de las coordenadas I' , y de esta forma estas sean cantidades conservadas del movimiento. Para hallar la transformación de coordenadas deseada, se utiliza el método de la función generatriz de la transformación de coordenadas canónica. Si se considera una función generatriz G , que depende de I' y de Q , entonces las ecuaciones que determinan la transformación de coordenadas quedan

$$I = \frac{\partial G}{\partial Q} \quad (2.15)$$

$$Q' = \frac{\partial G}{\partial I'} \quad (2.16)$$

$$H(Q, I) = H'(I') \quad (2.17)$$

2.2. CAOS EN SISTEMAS HAMILTONIANOS

donde en la última ecuación se utilizó que G no depende explícitamente del tiempo. Combinando estas ecuaciones, se obtiene que G y H' deben verificar

$$H \left(Q, \frac{\partial G(Q, I')}{\partial Q} \right) = H' (I'), \quad (2.18)$$

de manera que $G(Q, I')$ debe ser tal de eliminar la dependencia en Q del miembro izquierdo. Dada la forma de la ecuación 2.14, para ϵ suficientemente chico se buscan soluciones de la ecuación 2.18 como un desarrollo perturbativo en potencias de ϵ

$$G(Q, I') = \sum_{i=1}^N I'_i Q_i + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(Q, I') \epsilon^n \quad (2.19)$$

donde se puede ver que el término de orden cero en ϵ da a lugar a la transformación identidad cuando es introducido en las ecuaciones 2.15 y 2.16. En estos términos, la solución a primer orden en ϵ de la ecuación 2.18 se puede obtener como una serie de Fourier en las coordenadas angulares Q

$$G_1(Q, I') = \sum_{m_1, \dots, m_N = -\infty}^{\infty} \frac{i H_{1, m_1, \dots, m_N}(I')}{\sum_i m_i \omega_{0i}(I')} e^{i \sum_i m_i Q_i} \quad (2.20)$$

donde H_{1, m_1, \dots, m_N} son los coeficientes de la serie de Fourier en las variables angulares Q_i de el hamiltoniano $H_1(Q, I)$

$$H_1(Q, I) = \sum_{m_1, \dots, m_N = -\infty}^{\infty} H_{1, m_1, \dots, m_N}(I) e^{i \sum_i m_i Q_i} \quad (2.21)$$

y $\omega_{0i}(I)$ son las frecuencias asociadas al movimiento de las orbitas sobre los toroides del sistema integrable dado por el hamiltoniano $H_0(I)$

$$\omega_{0i}(I) = \frac{\partial H_0(I)}{\partial I}. \quad (2.22)$$

El problema con este tratamiento perturbativo del problema radica en la convergencia de la serie dada por la expresión 2.19. Si bien en la formulación rigurosa del teorema KAM es necesario refinar el método del desarrollo perturbativo, a los efectos del breve resumen presentado en este trabajo, parte de la problemática se puede apreciar ya en el término a primer orden del desarrollo, dado por la ecuación 2.20. En dicha ecuación se observa que algunos de los términos de la sumatoria pueden diverger para valores de I' que verifiquen la condición de resonancia del sistema no perturbado

$$\sum_i m_i \omega_{0i}(I') = 0, \quad (2.23)$$

es decir, cuando I' toma valores correspondientes a los toroides resonantes del sistema no perturbado. Además, para valores I' cercanos a los que cumplan la condición anterior, los

denominadores de algunos de los términos de la sumatoria de la ecuación 2.20 se hacen muy pequeños y la serie puede no converger. Por otro lado, para ciertos valores de I' se tienen toroides en cierto sentido lejos de la resonancia, para los cuales se tiene que

$$\left| \sum_i m_i \omega_{0i}(I') \right| > K(\omega_0(I')) \left(\sum_i |m_i| \right)^N \quad (2.24)$$

para cualquier conjunto de enteros m_i , donde $K(\omega_0)$ es un número positivo independiente de los m_i . Para los valores de I' que cumplen esta condición se puede ver que la serie dada por la ecuación 2.20, así como los términos de mayor orden en el desarrollo perturbativo en ϵ , convergen.

El conjunto de valores de ω_{0i} para los cuales no se verifica la condición 2.24 es de medida nula. El teorema KAM indica entonces que para perturbaciones pequeñas, la mayoría de los toroides del sistema no perturbado sobreviven a la perturbación. Esto quiere decir que existen superficies toroidales en el espacio de fases del sistema perturbado que consisten en deformaciones de los toroides sobrevivientes del sistema no perturbado y que tienden a estos de manera continua cuando $\epsilon \rightarrow 0$. De la misma manera las frecuencias asociadas a estos toroides del sistema perturbado tienden a las del sistema original de manera continua en el mismo límite. A estas superficies toroidales que sobreviven a la perturbación se les llama superficies KAM.

Se tiene entonces que gran parte de las órbitas del sistema perturbado, para valores pequeños de la perturbación, mantienen la regularidad de las órbitas del sistema original, moviéndose sobre superficies KAM que consisten en deformaciones de los toroides del sistema integrable original. Sin embargo, el conjunto de toroides resonantes del sistema no perturbado, y por ende que no sobreviven a la perturbación, es denso en el espacio de fases. Esto quiere decir que existe un toroide que no sobrevive la perturbación arbitrariamente cerca de uno que sí lo hace. En la vecindad de los toroides que no sobreviven la perturbación se pierde la regularidad de las órbitas, pudiéndose observar incluso un comportamiento caótico en las regiones cercanas a los toroides resonantes. El tamaño de estas regiones crece en la medida que crece la perturbación y las superficies KAM dentro de estas regiones van siendo destruidas. Un modelo que ejemplifica esta situación de manera sencilla es el del Rotor Impulsado clásico, que se desarrolla en las siguientes secciones de este capítulo. Mediante simulaciones numéricas de este modelo es posible constatar estos fenómenos y verificar como a medida que crece la perturbación van aumentando en tamaño las regiones del espacio de fases en que las orbitas son irregulares, obteniéndose finalmente un comportamiento caótico a escala global para perturbaciones lo suficientemente grandes.

2.2.4. Mapas de Poincaré

El mapa de Poincaré es una herramienta muy útil para estudiar la evolución de un sistema dinámico. Esta herramienta consiste en obtener un mapa discreto a partir de las intersecciones sucesivas de una órbita con una determinada superficie en el espacio de fases. Si se llama S

2.2. CAOS EN SISTEMAS HAMILTONIANOS

a la superficie elegida, entonces el mapa de Poincaré se obtiene considerando un punto $x(n)$ en S y haciendo evolucionar al sistema dinámico con condición inicial $x(n)$ tomada en un tiempo inicial t . Bajo el supuesto que la órbita obtenida vuelve a intersectar a la superficie S en un punto $x(n+1)$, este procedimiento define un mapa M de S sobre si misma dado por la ecuación

$$x(n+1) = M(x(n), t), \quad (2.25)$$

donde *a priori* el mapa depende del tiempo t en el que se elige la condición inicial, debido a que el sistema dinámico considerado puede depender explícitamente del tiempo. Dado que los puntos $x(n)$ pertenecen a la superficie S , el mapa de Poincaré da lugar a una dinámica en un espacio de una dimensión menor a la del sistema original. Para los sistemas hamiltonianos, dos casos particulares son interesantes a los efectos de construir mapas de Poincaré; los sistemas con Hamiltonianos independientes del tiempo y aquellos en que los hamiltonianos dependen del tiempo de manera periódica. En ambos casos el mapa de Poincaré no depende explícitamente del tiempo.

Para los sistemas independientes del tiempo, el Hamiltoniano coincide con la energía mecánica y es una cantidad conservada, por lo que las órbitas están restringidas a moverse sobre una superficie de energía constante de dimensión $2N - 1$ en el espacio de fases. Teniendo esto en cuenta al tomar la intersección de las órbitas con una superficie S dada se obtiene un mapa de Poincaré en el espacio de $2N - 2$ dimensiones dado por la intersección de la superficie S y la superficie de energía constante para las condiciones iniciales elegidas. Es decir que estas dos condiciones permiten obtener dos de las coordenadas canónicas en función de las demás. Si se consideran \hat{q}_i y \hat{p}_i a las coordenadas canónicas en el espacio de dimensión $2N - 2$ resultante, entonces se tiene un mapa de Poincaré sin dependencia explícita en el tiempo inicial de la forma

$$x(n+1) = M(x(n)). \quad (2.26)$$

donde $x(n) = (\hat{q}_1(n), \dots, \hat{q}_{N-1}(n), \hat{p}_1(n), \dots, \hat{p}_{N-1}(n))$ y la n denota nuevamente las sucesivas intersecciones con la superficie S elegida.

Para los sistemas con hamiltonianos con dependencia periódica del tiempo no es necesario considerar los cortes de las órbitas con una superficie en el espacio de fases, basta con tomar la evolución en un período. Es decir, si se toma como condición inicial un punto $x(n)$ en el espacio de fases, entonces el $x(n+1)$ que define una iteración del mapa de Poincaré es el punto del espacio de fases en el cual se encuentra la órbita que partió de $x(n)$ un tiempo T después, siendo T el período del hamiltoniano como función explícita del tiempo. Dado que el hamiltoniano es periódico en el tiempo, este mapa no depende del instante en el que se toma la condición inicial.

En ambos casos se puede ver que los mapas de Poincaré elegidos son simplécticos. Esto implica en particular que la evolución determinada por estos mapas conserva volúmenes en el espacio en el que actúan, ya sea el espacio $2N - 2$ dimensional de los mapas correspondientes a

sistemas independientes del tiempo o en el espacio de dimension N en el caso de dependencia temporal periódica. Es decir que si se toma un conjunto de condiciones iniciales en el espacio en el que actúa el mapa, y estas se hacen evolucionar de acuerdo al mapa simpléctico, el volumen del conjunto obtenido será idéntico al volumen del conjunto inicial para cualquier número de iteraciones del mapa. De hecho, el que los mapas sean simplécticos da lugar a consecuencias en cierto sentido más fuertes que la conservación de volúmenes que no serán abordadas en este breve resumen. Tanto en los problemas de hamiltonianos independientes del tiempo de dos grados de libertad, como para los hamiltonianos de un solo grado de libertad con dependencia temporal periódica (como es el caso del Rotor Impulsado), el mapa de Poincaré es bidimensional y la condición de conservación de volúmenes implica que la acción del mapa preserva las áreas en el plano en el que el mismo actúa.

Las ideas expuestas en la subsección precedente con respecto a los sistemas hamiltonianos integrables sujetos a una perturbación pueden estudiarse a partir de los correspondientes mapas de Poincaré. Para un sistema con hamiltoniano del tipo dado por la ecuación 2.14 se puede obtener un mapa de Poincaré simpléctico compuesto por un término asociado a el Hamiltoniano no perturbado –que también da lugar a un mapa de Poincaré simpléctico– más un término debido a una perturbación. El comportamiento de las superficies toroidales al variar la perturbación puede observarse iterando numéricamente el mapa de Poincaré. En el caso particular de mapas bidimensionales este procedimiento permite visualizar gráficamente como cambia el retrato del espacio de fases al variar el parámetro que determina la intensidad de la perturbación. Además, dado que la evolución de los sistemas con dependencia temporal periódica del hamiltoniano puede expresarse mediante un mapa de Poincaré simpléctico, también es posible analizar estos sistemas en términos de la teoría KAM. Un ejemplo de esto es el Rotor Impulsado, que está descrito por un hamiltoniano con dependencia periódica en el tiempo. En la siguiente sección se introduce este modelo y se obtiene su mapa de Poincaré. Este sistema puede verse como un sistema integrable sujeto a una perturbación. En las subsiguientes secciones se muestra numéricamente su comportamiento en términos del parámetro que define la perturbación y se interpreta dicho comportamiento en términos de las ideas recién expuestas.

2.3. Ecuación de Movimiento y Mapa de Poincaré

El modelo del Kicked Rotor consiste en un rotor que puede girar libremente alrededor de un eje fijo a uno de sus extremos O , tal como se muestra en la figura 2.1. Sobre este rotor se aplica en el extremo opuesto al atravesado por el eje, una fuerza de dirección y sentidos constantes que actúa periódicamente y de manera impulsiva, golpeando al rotor únicamente en los instantes $t = nT$. Dicha fuerza es entonces de la forma $\vec{F}(t) = F\delta_T(t)\hat{j}$, siendo \hat{j} un versor de dirección fija y

$$\delta_T(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(t - qT) \quad (2.27)$$

2.3. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO Y MAPA DE POINCARÉ

el tren de deltas de periodo T . En términos de la coordenada θ que se muestra en la figura, la ecuación de movimiento del sistema queda dada por la segunda cardinal con respecto a O ,

$$I\ddot{\theta} = K\delta_T(t) \sin \theta, \quad (2.28)$$

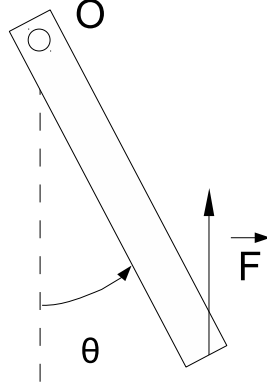


Figura 2.1: Esquema del Rotor Impulsado

donde I es el momento de inercia del rotor con respecto a O y se definió K como el producto entre F y la longitud del rotor. Las ecuaciones dinámicas pueden obtenerse también planteando las ecuaciones de Hamilton a partir del siguiente Hamiltoniano:

$$H = \frac{J^2}{2I} + K \cos \theta \delta_T(t), \quad (2.29)$$

donde J es el momento angular del rotor con respecto a O . Las ecuaciones de Hamilton entonces quedan

$$\dot{J} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = K \sin \theta \delta_T(t) \quad (2.30)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J} = \frac{J}{I}, \quad (2.31)$$

que son equivalentes a la ecuación correspondiente a la segunda cardinal.

A partir de las ecuaciones anteriores es posible expresar la evolución del sistema en términos del mapa de Poincaré para las coordenadas canónicas θ y J en los instantes tiempo inmediatamente posteriores a cada patada. Definiendo

$$\theta_n = \theta(t = nT^+) \quad (2.32)$$

$$J_n = J(t = nT^+), \quad (2.33)$$

se desea entonces obtener un mapa que dé la evolución para J_n y θ_n entre los instantes n y $n + 1$. Integrando las ecuaciones 2.30 y 2.31 entre Tn^+ y $T(n + 1)^+$ se tiene el mapa:

$$J_{n+1} = J_n + K \sin(\theta_n) \quad (2.34)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{T}{I} J_{n+1}. \quad (2.35)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden adimensionalizar definiendo $\tilde{J}_n = \frac{T}{I} J_n$ y $\tilde{K} = \frac{TK}{I}$, obteniéndose finalmente el mapa:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{n+1} &= \tilde{J}_n + \tilde{K} \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \tilde{J}_{n+1}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

De este último juego de ecuaciones se puede apreciar que el aspecto cualitativo de la dinámica del sistema depende de un único parámetro adimensionado, \tilde{K} . Este mapa, que se obtiene a partir del modelo del Rotor Impulsado clásico, es conocido como Mapa Estándar y fue estudiado originariamente por Chirikov en [7].

Dado que en el mapa 2.36 θ es una variable angular y J aparece sumada a θ es posible tomar la variable J módulo 2π a los efectos de estudiar la dinámica del sistema.

2.4. Análisis numérico

En esta sección se muestran los resultados de iterar numéricamente el mapa dado por las ecuaciones 2.36 para distintos valores de \tilde{K} . La figura 2.2 muestra las órbitas en el espacio de fases (θ, J) (tomadas módulo 2π) para los distintos valores del parámetro elegidos. Para cada caso, a cada condición inicial se le asoció un color. Las orbitas correspondientes a cada condición inicial consisten en la sucesión de puntos que se obtienen a partir de la iteración del mapa Estándar, representados todos en la figura con el color asociado a la condición inicial elegida. Haciendo un barrido en distintas condiciones iniciales se obtienen distintas órbitas en el espacio de fases, cada una con un color distinto.

Para $\tilde{K} = 0$, la figura 2.2 (a) muestra las orbitas del sistema integrable dado por el hamiltoniano $H_0 = \frac{J^2}{2I}$. En este caso el momento J se conserva y θ crece linealmente con el tiempo, por lo que cada órbita en el mapa de Poincaré consiste en un conjunto de puntos dispuestos horizontalmente. Cuando la perturbación es pequeña, como en el caso de la figura 2.2 (b) donde $\tilde{K} = 0,5$, la mayor parte del espacio de fases está conformada por superficies KAM correspondientes a deformaciones de las orbitas del sistema integrable. Entre las superficies KAM se pueden encontrar regiones caóticas generadas por el efecto de la perturbación sobre los toroides resonantes, donde se observan islas de estabilidad, asociadas a nuevas órbitas periódicas, embebidas en zonas donde el comportamiento es caótico. A medida que la perturbación va aumentando las regiones caóticas van aumentando y se van destruyendo las

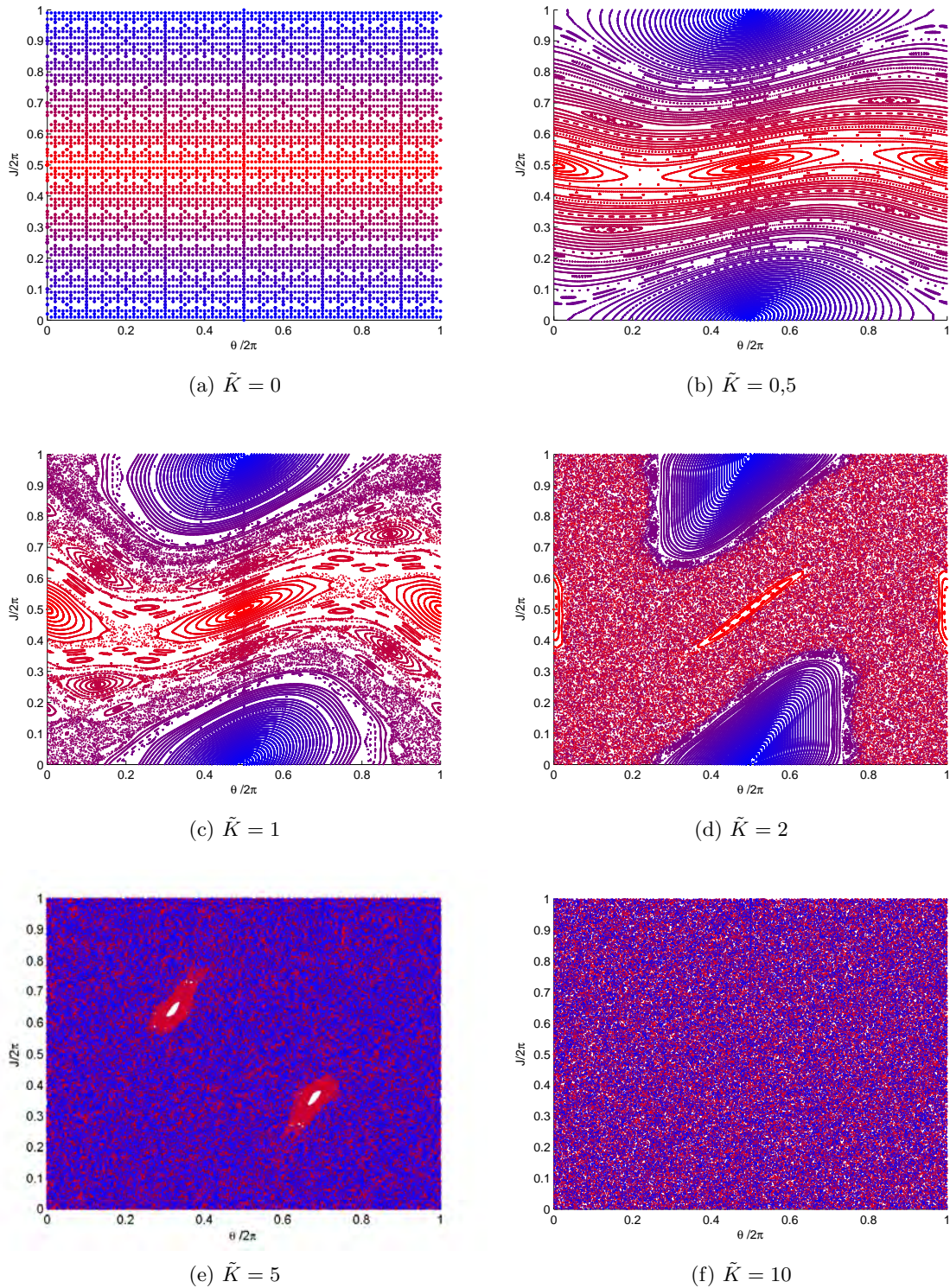


Figura 2.2: Retrato del espacio de fases $(\frac{\theta}{2\pi}, \frac{J}{2\pi})$ del mapa estándar para distintos valores de \tilde{K}

superficies KAM, como se puede apreciar en las figuras 2.2 (c), (d) y (e). Para perturbaciones suficientemente grandes, como en la figura 2.2 (f), ya no son discernibles órbitas estables y el comportamiento es caótico sobre todo el espacio de fases.

Dado que las curvas KAM son invariantes bajo la evolución del sistema, estas restringen el movimiento de las orbitas caóticas. Si una órbita parte de un punto en una región caótica que se encuentra contenida entre dos superficies KAM, entonces la órbita no puede acceder a regiones distantes del espacio y su trayectoria se encuentra acotada a la zona entre las dos curvas KAM. Esto implica que mientras haya curvas KAM que dividan el espacio de fases, la variación del momento J queda acotada aunque se tome una condición inicial en una región caótica. A medida que \tilde{K} aumenta, las superficies KAM van siendo destruidas y las regiones caóticas se van interconectando. Llega un punto en que la última superficie KAM que divide el espacio de fases es destruida, para cierto valor de \tilde{K} crítico \tilde{K}_c , y el momento puede variar de manera no acotada. En este caso la evolución el momento se puede analizar de un punto de vista estadístico, tal como se expone en la siguiente sección.

2.5. Difusión en el espacio de Momentos

Para los sistemas de más de dos grados de libertad, las superficies KAM no dividen el espacio de fases y por tanto las órbitas que parten de puntos donde la dinámica es caótica pueden llegar a puntos del espacio muy alejados de su punto de partida, aún en el caso en que los parámetros no llevan al sistema al regimen caótico a escala global. Este proceso se conoce como difusión de Arnold [26], quien describió que para ciertos sistemas Hamiltonianos la divergencia de órbitas de condiciones iniciales cercanas puede caracterizarse como un proceso difusivo. En el caso de sistemas de dos grados de libertad, o de un grado de libertad con dependencia temporal explícita, las superficies KAM dividen el espacio de fases, confinando la dinámica caótica a ciertas regiones.

En el caso del Rotor Impulsado, luego de la destrucción de la última superficie KAM, es decir, cuando el parámetro \tilde{K} es bastante mayor a su valor crítico y el sistema se encuentra en el regimen fuertemente caótico, las trayectorias no se encuentran confinadas a una parte del espacio de fases y son libres de recorrer regiones distantes del espacio. La divergencia de órbitas que parten de condiciones iniciales cercanas puede caracterizarse por un proceso difusivo: para tiempos largos, valores consecutivos del ángulo θ pueden considerarse no correlacionados y el momento J realiza entonces una caminata al azar. Este argumento se presenta en más detalle a continuación, y puede encontrarse en [13, 2].

Si se hace evolucionar el sistema a partir de condiciones iniciales aleatorias, la densidad de probabilidad de que luego de n iteraciones la diferencia $\tilde{J}_n - \tilde{J}_0$ tome el valor $\Delta\tilde{J}$ es

$$f_n(\Delta\tilde{J}) = \langle \delta(\tilde{J}_n - \tilde{J}_0 - \Delta\tilde{J}) \rangle \quad (2.37)$$

donde los corchetes denotan un promedio estadístico en la distribución de probabilidad de las condiciones iniciales. Expresando la delta de Dirac en términos de su transformada de

Fourier se tiene

$$f_n(\Delta\tilde{J}) = \frac{1}{2\pi} \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix(\Delta\tilde{J} - \tilde{J}_n + \tilde{J}_0)} \right\rangle. \quad (2.38)$$

Utilizando las ecuaciones 2.36 para el mapa se halla

$$\tilde{J}_n - \tilde{J}_0 = \sum_{m=0}^{m=n-1} \tilde{J}_{m+1} - \tilde{J}_m = \sum_{m=0}^{m=n-1} \tilde{K} \sin(\theta_n), \quad (2.39)$$

por lo que la ecuación para la densidad queda

$$f_n(\Delta\tilde{J}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix\Delta\tilde{J}} \left\langle \prod_{m=0}^{m=n-1} e^{-ix\tilde{K} \sin(\theta_n)} \right\rangle. \quad (2.40)$$

Para tiempos largos, en el régimen caótico se considera que las variables aleatorias θ_n están no correlacionadas para distintos valores de n y que su estadística no depende de n , por lo que se puede realizar la aproximación

$$\left\langle \prod_{m=0}^{m=n-1} e^{-ix\tilde{K} \sin(\theta_n)} \right\rangle = \prod_{m=0}^{m=n-1} \langle e^{-ix\tilde{K} \sin(\theta_n)} \rangle = \prod_{m=0}^{m=n-1} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-ix\tilde{K} \sin\theta} = J_0(\tilde{K}x)^n \quad (2.41)$$

donde en el penúltimo paso se supuso además que la estadística de θ es uniforme; se supone que en el régimen caótico, luego de suficiente tiempo es equiprobable encontrar a θ en cualquier valor, irrespectivamente de la condición inicial. $J_n(z)$ son las funciones de Bessel de primera especie. La densidad de probabilidad queda entonces

$$f_n(\Delta\tilde{J}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix\Delta\tilde{J}} J_0(\tilde{K}x)^n. \quad (2.42)$$

Para poder hacer esta última integral se toma una nueva aproximación, válida cuando n es lo suficientemente grande,

$$J_0(\tilde{K}x)^n = e^{n\left(-\frac{(\tilde{K}x)^2}{4} + \dots\right)} \quad (2.43)$$

donde los términos que faltan en el desarrollo de Taylor en el exponente se pueden omitir en el límite $n \rightarrow \infty$. Utilizando esta aproximación la integral de la ecuación 2.42 se convierte en la transformada de Fourier de una gaussiana y se obtiene finalmente una distribución gaussiana para la densidad de probabilidad

$$f_n(\Delta\tilde{J}) = \frac{1}{\tilde{K}\sqrt{n\pi}} e^{-\frac{(\Delta\tilde{J})^2}{\tilde{K}^2 n}}. \quad (2.44)$$

La densidad de probabilidad en el espacio de momentos se comporta entonces como una gaussiana que se va expandiendo. Esta expansión se caracteriza por el aumento temporal de la varianza

$$\langle (\Delta \tilde{J})^2 \rangle = \frac{\tilde{K}^2}{2} n, \quad (2.45)$$

que crece linealmente con el tiempo. Este crecimiento es característico de un proceso difusivo, con coeficiente de difusión

$$D = \frac{\tilde{K}^2}{2}. \quad (2.46)$$

Para obtener la densidad de probabilidad, y por tanto esta expresión para la evolución temporal de la varianza, se realizaron una serie de aproximaciones que requieren que $\tilde{K} \gg 1$. Para valores de \tilde{K} cercanos a \tilde{K}_c si bien se obtiene que el proceso también es difusivo (siempre que $\tilde{K} > \tilde{K}_c$), la dependencia del coeficiente de difusión con \tilde{K} no es tan sencilla como la dada por la fórmula 2.46. En las referencias [27, 25] se resumen algunos resultados numéricos y analíticos sobre la dependencia del coeficiente de difusión con \tilde{K} , teniéndose que en el límite $\tilde{K} \rightarrow \infty$ se recupera el resultado dado por la ecuación 2.46.

En el siguiente capítulo se muestra que para la versión cuántica del Rotor Impulsado el comportamiento de la distribución de probabilidad en el espacio de momentos es sustancialmente distinto al que aquí se presenta. En particular, se verá que la dependencia temporal de la varianza difiere bastante de la de un proceso difusivo.

Capítulo 3

Quantum Kicked Rotor

3.1. Introducción

El *Kicked-Rotor* clásico es un modelo paradigmático del estudio del caos en sistemas Hamiltonianos con forzamiento. En el marco general del estudio del análogo cuántico de sistemas clásicamente caóticos, el *Quantum Kicked Rotor* (QKR) resulta de bastante interés debido a su sencillez y la variedad de comportamientos sin análogo clásico que presenta.

En la mecánica cuántica, el estado de un sistema físico en un determinado instante t se representa mediante un vector de onda $|\Psi(t)\rangle$, perteneciente a un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Las magnitudes físicas observables se representan mediante operadores lineales hermíticos actuando sobre este espacio de Hilbert. Si A es el operador asociado a un determinado observable del sistema, con autovectores $\{|a\rangle\}$ asociados a autovalores a , $A|a\rangle = a|a\rangle$, entonces la probabilidad de que una medida de la cantidad física asociada a A arroje el valor a en el instante t es

$$P_a(t) = |\langle a|\Psi(t)\rangle|^2. \quad (3.1)$$

La evolución temporal del sistema es generada por el operador hamiltoniano H , también un observable del sistema, a través de la ecuación de Schroedinger

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = H|\Psi(t)\rangle. \quad (3.2)$$

Se puede construir el análogo mecánico cuántico de un sistema clásico asociándole al hamiltoniano del sistema clásico original un operador hamiltoniano, que se obtiene transformando las variables conjugadas clásicas (q, p) en operadores que cumplen la relación de conmutación

$$[q_m, p_n] = i\hbar\delta_{mn}. \quad (3.3)$$

Siguiendo este procedimiento a partir del modelo del Rotor Impulsado clásico se puede obte-

ner su análogo mecánico cuántico, el *Quantum Kicked Rotor*.

El *Kicked Rotor* cuántico fue estudiado por primera vez por Casati y otros en [10], donde se obtiene el mapa discreto para la evolución del sistema y mediante la iteración numérica del mismo se observan por primera vez las diferencias que presenta la evolución del QKR con respecto a su contraparte clásica. Estas diferencias consisten en, por un lado, la supresión luego de un cierto tiempo del comportamiento difusivo clásico de la energía, y por otro, la aparición de un comportamiento resonante para ciertos valores de los parámetros, donde la energía del sistema crece de forma balística. En [14], Izrailev y Shepelyanskii estudian el la dinámica resonante del sistema, mostrando analíticamente el crecimiento balístico de la energía para tiempos largos. En [11], Chirikov y otros proponen una explicación del fenómeno de la supresión del comportamiento difusivo y una expresión para el tiempo de difusión, apelando a un argumento cualitativo a partir del espectro de cuasienergías del sistema.

El comportamiento del QKR tiene entonces dos modalidades características: la localización dinámica y el crecimiento balístico de la varianza. Ninguno de estos dos efectos ocurre en su contraparte clásica. La ocurrencia de uno u otro depende del cociente entre el tiempo característico del rotor libre y el período asociado a la excitación, es decir, del período adimensionado del forzamiento (τ). Cuando este número es un múltiplo irracional de 2π se observa el fenómeno de localización dinámica; la energía del sistema crece de manera difusiva por un cierto tiempo luego del cual la distribución en el espacio de momentos queda localizada en torno a cierto máximo, alrededor del cual decae exponencialmente. En el caso en que el período adimensionado del forzamiento es un múltiplo racional de 2π el sistema entra en resonancia y su varianza en el espacio de momentos crece cuadráticamente con el tiempo.

En este capítulo se presentan los resultados fundamentales del estudio del QKR. En la primera sección se exponen los conceptos básicos de la teoría de Floquet, que permite analizar sistemas cuánticos con forzamiento periódico como el QKR. En la siguiente sección se obtiene, a partir del Hamiltoniano del *Kicked Rotor* y la ecuación de Schroedinger correspondiente, el mapa discreto que determina la evolución del sistema. Además, se describen las magnitudes físicas de interés en el estudio del problema. Finalmente, en las últimas secciones se resumen los resultados fundamentales del comportamiento del QKR para los distintos casos característicos obtenibles al variar los parámetros del sistema.

3.2. Teoría de Floquet

La teoría de Floquet [5] es un formalismo que permite abordar problemas de mecánica cuántica en los cuales el operador Hamiltoniano tiene una dependencia periódica en el tiempo, es decir que existe un tiempo T tal que el $H(t+T) = H(t)$. La evolución del sistema está dada por la ecuación de Schroedinger

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H(t) |\psi(t)\rangle. \quad (3.4)$$

La ecuación anterior admite soluciones de la forma

$$|\Psi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\frac{\Omega_\alpha t}{\hbar}} |\Phi_\alpha(t)\rangle \quad (3.5)$$

donde, si se define el Hamiltoniano de Floquet como

$$H_F(t) = H(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.6)$$

es necesario que los $|\Phi_\alpha(t)\rangle$ sean autovectores de $H_F(t)$ de autovalor Ω_α para que las $|\Psi_\alpha(t)\rangle$ propuestas efectivamente sean soluciones de la ecuación 3.4, es decir que se debe verificar

$$H_F(t) |\Phi_\alpha(t)\rangle = \Omega_\alpha |\Phi_\alpha(t)\rangle. \quad (3.7)$$

Los vectores $|\Phi_\alpha(t)\rangle$ son llamados autovectores de Floquet y tienen una dependencia periódica en el tiempo, $|\Phi_\alpha(t)\rangle$. Los Ω_α constituyen los autovalores de Floquet (también llamadas cuasienergías) asociadas a dichos autovectores. El conjunto de $|\Phi_\alpha(t)\rangle$ conforma una base completa del espacio de estados para cualquier instante t [28],

$$\sum_\alpha |\Phi_\alpha(t)\rangle \langle \Phi_\alpha(t)| = I, \quad (3.8)$$

los cuales a su vez pueden elegirse de manera tal de ser ortonormales

$$\langle \Phi_\alpha(t) | \Phi_{\alpha'}(t) \rangle = \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (3.9)$$

Es decir, es posible expresar cualquier solución del sistema como combinación lineal de las soluciones $|\Psi_\alpha(t)\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_\alpha A_\alpha e^{-i\frac{\Omega_\alpha t}{\hbar}} |\Phi_\alpha(t)\rangle \quad (3.10)$$

donde los coeficientes A_α , independientes del tiempo, se obtienen en términos de las condiciones iniciales

$$A_\alpha = \langle \Phi_\alpha(0) | \Psi(0) \rangle. \quad (3.11)$$

Utilizando la periodicidad de los $|\Phi_\alpha(t)\rangle$ se obtiene la forma de una solución genérica luego de un período como

$$|\Psi(T)\rangle = \sum_\alpha e^{-i\frac{\Omega_\alpha T}{\hbar}} |\Phi_\alpha(T)\rangle \langle \Phi_\alpha(0) | \Psi(0) \rangle. \quad (3.12)$$

Es posible entonces definir la matriz de evolución del sistema en un período, o matriz de Floquet, como

$$U_T = \sum_{\alpha} e^{-i\frac{\Omega_{\alpha}T}{\hbar}} |\Phi_{\alpha}(0)\rangle \langle \Phi_{\alpha}(0)|, \quad (3.13)$$

de manera tal que se tiene

$$|\Psi(T)\rangle = U_T |\Psi(0)\rangle. \quad (3.14)$$

La evolución luego de un número n de periodos queda dada por

$$|\Psi(nT)\rangle = (U_T)^n |\Psi(0)\rangle. \quad (3.15)$$

Los vectores $|\Phi_{\alpha}(0)\rangle$ son autovectores de la matriz de Floquet de valor propio $e^{-i\frac{\Omega_{\alpha}t}{\hbar}}$. En la siguiente sección se obtiene la matriz de Floquet para el *Quantum Kicked Rotor*.

3.3. Dinámica del QKR

3.3.1. Operador Evolución

En el caso cuántico, el modelo del *Kicked Rotor* está descrito por el mismo Hamiltoniano que su análogo clásico,

$$H = \frac{J^2}{2I} + K \cos(\theta) \delta_T(t) \quad (3.16)$$

con la salvedad que ahora H , J y θ son operadores, cumpliéndose entre los últimos dos la relación de conmutación

$$[\theta, J] = i\hbar. \quad (3.17)$$

Nuevamente $\delta_T(t)$ es un tren de deltas de Dirac de período T ,

$$\delta_T(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(t - qT). \quad (3.18)$$

La evolución temporal del sistema está dada por la ecuación de Schroedinger.

Es conveniente separar el Hamiltoniano en dos términos $H(t) = H_o + V(t)$, teniéndose

$$H_o = \frac{J^2}{2I} \quad (3.19)$$

$$V(t) = K \cos(\theta) \delta_T(t). \quad (3.20)$$

H_o es independiente del tiempo y corresponde al Hamiltoniano del rotor libre. $V(t)$ puede considerarse entonces como una perturbación al sistema libre. Dado que la perturbación es

del tipo impulsivo, ésta sólo afecta la evolución temporal en los instantes $t = nT$. La evolución temporal en los intervalos $(nT^+, (n+1)T^-)$ (dónde nT^+ denota el instante inmediatamente posterior a la patada en nT y nT^- el instante inmediatamente anterior) esta determinada únicamente por la acción de H_o .

A partir de la ecuación 3.4 es posible expresar la evolución temporal del sistema en términos del operador evolución $U(t, t')$,

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t') |\psi(t')\rangle. \quad (3.21)$$

En particular, es posible definir el operador de evolución entre los instantes nT^+ y $(n+1)T^+$, U_T ,

$$|\psi((n+1)T^+)\rangle = U_T |\psi(nT^+)\rangle \quad (3.22)$$

el cual no depende de n dado que $H(t) = H(t+T)$. Este operador constituye un mapa discreto de evolución del sistema entre los instantes en los que sucede la patada y es el operador de Floquet del sistema. Es conveniente escribir U_T cómo el producto de dos operadores

$$U_T = U_K U_L \quad (3.23)$$

siendo U_L el operador que da la evolución del sistema entre nT^+ y $(n+1)T^-$ y U_K entre $(n+1)T^-$ y $(n+1)T^+$. Dado que la perturbación $V(t)$ sólo actúa en nT , en el intervalo $(nT^+, (n+1)T^-)$ la dinámica está dada por

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H_o |\psi(t)\rangle, \quad (3.24)$$

por lo cual, dado que H_o no depende del tiempo, el operador evolución U_L está dado por

$$U_L = e^{-\frac{i}{\hbar} H_o T}, \quad (3.25)$$

es decir que

$$|\psi((n+1)T^-)\rangle = U_L |\psi(nT^+)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H_o T} |\psi(nT^+)\rangle. \quad (3.26)$$

Es necesario ahora hallar U_K , para lo cual se integra a ambos lados de la ecuación 3.4 entre $(n+1)T - \Delta$ y $(n+1)T + \Delta$, obteniéndose

$$i\hbar \int_{(n+1)T-\Delta}^{(n+1)T+\Delta} dt \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \frac{J^2}{2I} \int_{(n+1)T-\Delta}^{(n+1)T+\Delta} dt |\psi(t)\rangle + K \cos(\theta) \int_{(n+1)T-\Delta}^{(n+1)T+\Delta} dt \delta_T(t) |\psi(t)\rangle, \quad (3.27)$$

dónde se utilizó que los operadores J^2 y θ no dependen del tiempo. Tomando el límite $\Delta \rightarrow 0$ se observa que el primer término del lado derecho de la ecuación anterior no contribuye

al cambio en $|\psi(t)\rangle$ en el instante de la patada. La dinámica en el intervalo $[(n+1)T - \Delta, (n+1)T + \Delta]$ queda entonces descrita por

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = K \cos(\theta) \delta(t - (n+1)T) |\psi(t)\rangle. \quad (3.28)$$

Es posible aproximar, en la ecuación anterior, a la delta de Dirac por una función escalón centrada en cero, de ancho 2ϵ y altura $\frac{1}{2\epsilon}$. La ecuación entonces queda

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = K \cos(\theta) \frac{1}{2\epsilon} |\psi(t)\rangle, \quad (3.29)$$

de la cual se obtiene la evolución temporal para la función de onda entre los instantes $(n+1)T - \Delta$ y $(n+1)T + \Delta$

$$|\psi((n+1)T^+)\rangle = e^{-\frac{iK}{\hbar} \cos(\theta) \frac{\Delta}{\epsilon}} |\psi((n+1)T^-)\rangle. \quad (3.30)$$

Tomando $\epsilon = \Delta$ y el límite en que Δ tiende a cero se obtiene el operador evolución U_K

$$|\psi((n+1)T^+)\rangle = U_K |\psi((n+1)T^-)\rangle = e^{-\frac{iK}{\hbar} \cos(\theta)} |\psi((n+1)T^-)\rangle, \quad (3.31)$$

quedando completamente determinado el operador de evolución U_T definido en la ecuación 3.23. Si se designa ahora a $|\psi(t = (n+1)T^+)\rangle$ como $|\psi(n)\rangle$, se tiene a partir de la ec. 3.22 la evolución entre los tiempos dados por los valores n y $n+1$

$$|\psi(n+1)\rangle = U_T |\psi(n)\rangle, \quad (3.32)$$

donde el operador U_T se expresa en términos de los operadores J y θ como

$$U_T = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{J^2}{2I} T} e^{-\frac{iK}{\hbar} \cos(\theta)}. \quad (3.33)$$

3.3.2. Mapa en el espacio de momento

Dado que el espectro del operador J es discreto, la evolución temporal entre dos instantes nT y $(n+1)T$, dada por la ecuación 3.32, podrá expresarse en una base de autovectores de ese operador como una matriz actuando sobre un vector de estados discreto. Esta representación es particularmente útil para la realización de simulaciones numéricas. Es necesario entonces hallar, a partir de la expresión obtenida para U_T en la sección anterior, sus elementos de matriz en una base de autovectores del operador momentum angular J .

El estado del sistema puede expresarse en términos de la función de onda

$$\psi(\theta, n) = \langle \theta | \psi(n) \rangle, \quad (3.34)$$

donde $|\theta\rangle$ es un autovector del operador θ , de autovalor θ . El operador J actúa sobre estas funciones de onda como

$$J = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (3.35)$$

El espectro de dicho operador es discreto; sus autovectores $|l\rangle$ forman una base del espacio de estados y verifican $J|l\rangle = n\hbar|l\rangle$, donde l recorre todos los enteros. Estos autovectores se pueden expresar en la base ángulo como $\langle \theta|l\rangle = e^{il\theta}/\sqrt{2\pi}$. El vector de onda en tiempo nT puede expandirse en la base $|l\rangle$, teniéndose

$$|\Psi(nT)\rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l(n) |l\rangle, \quad (3.36)$$

donde los $a_l(n)$ se obtienen de las proyecciones

$$a_l(n) = \langle l|\psi(n)\rangle. \quad (3.37)$$

Los estados en las representaciones asociadas a los autovectores de los operadores J y θ están relacionados mediante una transformada de Fourier

$$a_l(n) = \langle l|\psi(n)\rangle = \int_0^{2\pi} d\theta \langle l|\theta\rangle \langle \theta|\psi(n)\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2\pi}} e^{-il\theta} \psi(\theta, n) \quad (3.38)$$

y

$$\psi(\theta, n) = \langle \theta|\psi(n)\rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \langle \theta|l\rangle \langle l|\psi(n)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il\theta} a_l(n). \quad (3.39)$$

Se desea obtener una expresión para la evolución del sistema en un periodo T , dada por la ecuación 3.32, en alguna de las dos representaciones. Dado que el operador asociado a la evolución libre del sistema depende únicamente del operador J , $U_L = e^{-\frac{i}{\hbar} J^2 T}$, este operador es entonces diagonal cuando se expresa en la base de momentum angular. Por otro lado, el operador que da la evolución del sistema debida a la patada sólo depende de θ , y es por lo tanto diagonal en la base de posición angular. Debido a que la expresión del estado en la base de momentum angular, dada por los coeficientes $a_l(n)$, es discreta, mientras que en la base $|\theta\rangle$ la expresión del estado es una función de onda, a los efectos de la realización de simulaciones numéricas es más sencillo trabajar con la primera. Se desea obtener pues, a partir de la ec. 3.32, una expresión para la evolución temporal de los coeficientes $a_l(n)$.

Apelando a la ecuación 3.32 y a la definición de $a_l(n)$ se tiene

$$a_m(n+1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} U_{ml} a_l(n), \quad (3.40)$$

siendo U_{ml} los elementos de matriz de U_T en la base momento angular, que se obtienen a partir de

$$\begin{aligned}
 \langle m|U_T|l\rangle &= \langle m|e^{-i\frac{K}{\hbar}\cos\theta}e^{-i\frac{H_0T}{\hbar}}|l\rangle \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \langle m|e^{-i\frac{K}{\hbar}\cos\theta}|\theta\rangle \langle \theta|e^{-i\frac{J^2T}{2\hbar}}|l\rangle \\
 &= \frac{e^{-i\frac{Jl^2\hbar}{2I}}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-i\frac{K}{\hbar}\cos\theta} e^{-i(m-l)\theta}.
 \end{aligned}$$

Utilizando la definición de las funciones de Bessel de primera especie se obtiene

$$U_{ml} = \langle m|U_T|l\rangle = e^{-i\frac{Jl^2\hbar}{2I}} J_{l-m}\left(\frac{K}{\hbar}\right) i^{l-m}. \quad (3.41)$$

A partir de está matriz se tiene la evolución temporal de los coeficientes $a_l(n)$ desde un instante $t = nT$ hasta $t = (n+1)T$ debida al mapa discreto 3.40. Esta expresión de la evolución del sistema es la que se utiliza para realizar las simulaciones numéricas.

Las funciones de Bessel $J_{l-m}\left(\frac{K}{\hbar}\right)$ decaen rápidamente cuando $|l-m| > \frac{K}{\hbar}$ y su valor puede considerarse prácticamente despreciable fuera de cierto rango en $l-m$. La matriz de evolución puede considerarse entonces como una matriz de bandas. Este hecho permite el análisis numérico dado que es entonces posible truncar el espacio de estados a los efectos de estudiar la evolución del sistema. Además, es útil para comprender ciertos aspectos cualitativos del comportamiento del QKR, como se verá en las siguientes secciones.

3.3.3. Valores Esperados

A los efectos de estudiar la dinámica del QKR, es interesante analizar la evolución temporal de las cantidades físicas observables del sistema: los valores esperados del momento angular del rotor y de la energía del sistema libre, dada por la energía cinética del rotor. Además, es de interés caracterizar la evolución temporal de la densidad de probabilidad, por ejemplo en el espacio de momentos. Esto se puede hacer observando como evolucionan en el tiempo sus momentos estadísticos. Los momentos estadísticos de la distribución de probabilidad en el espacio de momentos están relacionados con los valores esperados del momento angular del sistema y de la energía cinética del rotor.

La distribución de probabilidad en el espacio de momentos se puede escribir en términos de las amplitudes de probabilidad $a_l(n)$. En un instante n , la probabilidad de encontrar al sistema en un estado de momento angular l es

$$P_l(n) = |\langle l|\psi(t)\rangle|^2 = a_l(n) a_l(n)^*. \quad (3.42)$$

El valor esperado del momento angular del sistema en un instante $t = nT$ está dado por

$$\langle J \rangle = \langle \psi(t)|J|\psi(t)\rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \langle \psi(t)|J|l\rangle \langle l|\psi(t)\rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hbar l P_l(n) = \hbar M_1, \quad (3.43)$$

siendo $M_1 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} l P_l(n)$ el primer momento estadístico de la densidad de probabilidad en el espacio de momentos.

El valor esperado de la energía cinética del rotor en un instante $t = nT$ está dado por

$$\langle H_o \rangle = \langle \psi(t) | \frac{j^2}{2I} | \psi(t) \rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \langle \psi(t) | \frac{j^2}{2I} | l \rangle \langle l | \psi(t) \rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\hbar^2}{2I} l^2 P_l(n) = \frac{\hbar^2}{2I} M_2, \quad (3.44)$$

siendo $M_2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} l^2 P_l(n)$ el segundo momento estadístico de la densidad de probabilidad en el espacio de momento angular.

3.3.4. Adimensionalización de los Parámetros

Es posible reagrupar los parámetros del sistema en dos parámetros adimensionados en términos de los cuales describir su dinámica. Se define el período adimensionado τ de la excitación como

$$\tau = \frac{\hbar T}{2I}. \quad (3.45)$$

También se define la intensidad adimensionada de la patada como

$$\kappa = \frac{K}{\hbar}. \quad (3.46)$$

Es importante observar que, mientras el *Kicked Rotor* clásico depende de un sólo parámetro adimensionado \tilde{K} , el *QKR* depende de dos parámetros. Aunque es posible obtener el parámetro en función del cual se describe la dinámica del *Kicked Rotor* clásico en términos de los dos parámetros definidos precedentemente, $\tilde{K} = 2\kappa\tau$, para que quede completamente especificada la dinámica del sistema se requiere, además de imponer el valor de \tilde{K} como en el *Kicked Rotor* clásico, imponer el valor de cualquiera de los otros dos parámetros del sistema κ o τ . Esto se debe a que la relación de conmutación 3.17 introduce un parámetro puramente cuántico a la física del problema, la constante de Planck.

Finalmente, el operador de evolución en la representación de momento angular queda

$$U_{ml} = \langle m | U_T | l \rangle = e^{-i\tau l^2} J_{l-m}(\kappa) i^{l-m}. \quad (3.47)$$

Se observa que el operador evolución (y por lo tanto la dinámica del sistema) es el mismo para τ y $\tau + 2\pi$, por lo que basta analizar los casos en que $0 < \tau < 2\pi$. En la siguiente sección se analiza el mapa dado por esta matriz para distintos valores de los parámetros adimensionados.

3.4. Análisis del mapa

En esta sección se muestran los distintos tipos de comportamiento que presenta el modelo del QKR dependiendo de los valores de los parámetros adimensionados que determinan su dinámica, κ y τ . Se verá que es posible identificar dos tipos de comportamientos cualitativamente distintos para la evolución temporal del QKR, el resonante y el no resonante.

El sistema entra en resonancia cuando las frecuencias de transición entre los niveles de energía del rotor libre son conmensurables con la frecuencia de la excitación $\omega = \frac{2\pi}{T}$. El Hamiltoniano del rotor libre es $H_o = \frac{J^2}{2I}$, por lo que los autovectores del momento angular lo son también de H_o y los autovalores asociados (los niveles de energía del rotor libre) son de la forma $E_l = \frac{\hbar^2 l^2}{2I}$. La frecuencia asociada a la transición entre dos niveles l y m es por lo tanto

$$w_{lm} = \frac{E_l - E_m}{\hbar} = \frac{\hbar}{2I} (l^2 - m^2). \quad (3.48)$$

Se observa entonces que para que se cumpla la condición de resonancia, el período adimensionado de la excitación τ debe ser un múltiplo racional de 2π ,

$$\tau = \frac{2\pi p}{q}. \quad (3.49)$$

Tanto en el caso resonante como en el no resonante la evolución temporal del QKR presenta un comportamiento cualitativamente diferente al de su análogo clásico.

3.4.1. Dinámica No Resonante

Para llevar al QKR al régimen resonante es necesario ajustar un parámetro real a un valor racional, por lo que la dinámica no resonante será el comportamiento genérico del sistema. De las ecuaciones 3.45 y 3.46 se puede obtener el parámetro \tilde{K} , que determina la forma cualitativa de la dinámica del modelo del Rotor Impulsado clásico, en términos de los parámetros del sistema cuántico,

$$\tilde{K} = 2\kappa\tau. \quad (3.50)$$

A los efectos de realizar una breve descripción de los resultados fundamentales concernientes a la dinámica del QKR en el régimen no resonante, se eligen como parámetros independientes \tilde{K} y κ –pudiéndose obtener τ en términos de estos dos apelando a la ecuación anterior–, de manera tal de realizar comparaciones con los distintos regímenes existentes en la dinámica del problema clásico a través del parámetro \tilde{K} . En [27], se presenta una descripción detallada de las distintos regímenes observables en el espacio de parámetros (\tilde{K}, κ) .

Dentro de los distintos casos posibles, ha suscitado mayor interés aquel en que el parámetro \tilde{K} se encuentra por arriba de su valor crítico clásico \tilde{K}_c y el parámetro cuántico cumple $\kappa > 1$. La primera condición implica que se lleva al sistema al régimen en el cual el sistema

clásico se comporta de manera caótica, y la segunda, que el sistema cuántico se encuentra fuera del régimen donde sería aplicable un tratamiento perturbativo. Para este valor de \tilde{K} el Rotor Impulsado clásico presenta un comportamiento difusivo en el espacio de momentos; si se toman las condiciones iniciales aleatoriamente, la distribución de probabilidad para el momento angular evoluciona de acuerdo a lo descrito en la sección 2.5, tendiendo para tiempos largos a una gaussiana cuya varianza se ensancha linealmente con el tiempo de acuerdo con la ecuación 2.45.

En la figura 3.1 ¹ se muestra el resultado de simulaciones numéricas realizadas a partir de la iteración del mapa 3.40. Se presenta en azul la distribución de probabilidad en el espacio de momentos para el QKR para distintos instantes de tiempo, partiendo de una condición inicial localizada $a_l(0) = \delta_{l_0}$, tomando $\tilde{K} = 5$ y $\kappa = 25$. La probabilidad clásica dada por la ecuación 2.44 se muestra en rojo. En la figura se puede apreciar como, si bien la forma de la distribución cuántica es bastante distinta de la de su contraparte clásica, para tiempos cortos el ancho de ambas distribuciones es similar. Sin embargo, a medida que transcurre el tiempo se observa que la distribución clásica se va desparramando en el espacio de momentos mucho más rápido que la cuántica, y que esta última de hecho tiende a mantenerse acotada en el espacio de momentos. La distribución cuántica se mantiene centrada en el origen debido a que se tomó una condición inicial simétrica.

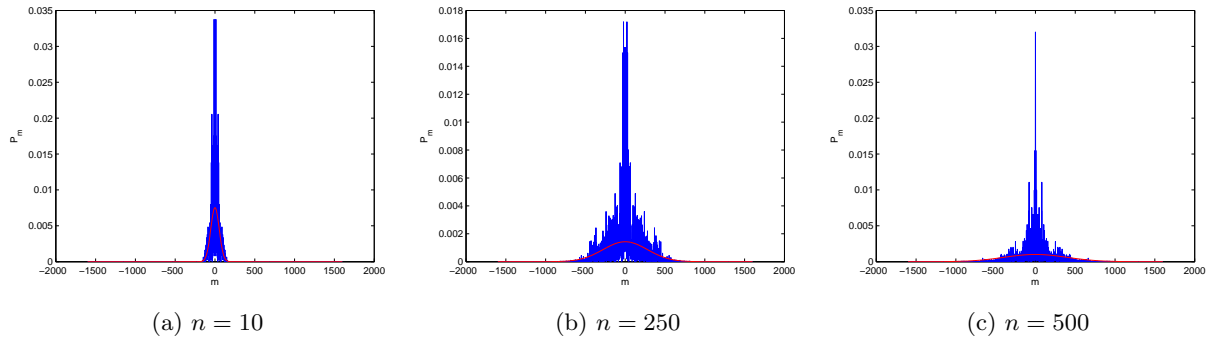


Figura 3.1: Distribuciones de probabilidad cuántica (azul) y clásica (rojo) para distintos valores del tiempo n . La evolución cuántica parte de la condición inicial $a_l(0) = \delta_{l_0}$ y se usaron los parámetros $\tilde{K} = 5$ y $\kappa = 25$.

Este efecto puede observarse más claramente en la figura 3.2, también obtenida mediante simulaciones numéricas, para las mismas condiciones iniciales y valores de los parámetros que la figura 3.1. En la figura 3.2 (a) se muestra una comparación de las densidades de probabilidad en el espacio de momentos en escala logarítmica, luego de transcurridos 1000 intervalos de tiempo. Allí se puede apreciar como, para tiempos suficientemente largos, la densidad de probabilidad clásica toma valores mayores que la cuántica para valores grandes

¹Se debe notar que la gráfica sólo tiene sentido evaluada en los valores enteros de la variable independiente m , dado que la densidad de probabilidad en el espacio de momentos es discreta. La gráfica se muestra con interpolación entre los puntos para facilitar la visualización. Esto es común a todas las gráficas presentadas en lo que resta de este trabajo.

del momento, lo que implica un comportamiento localizado de la densidad cuántica. Este efecto, denominado localización dinámica, puede apreciarse de forma más clara en la figura 3.2 (b), que presenta en azul la evolución temporal del segundo momento estadístico de la densidad de probabilidad en el espacio de momentos para el caso cuántico. La evolución difusiva dada por la ecuación 2.45, correspondiente al caso clásico, se presenta en rojo. En esta figura se puede apreciar como en un entorno del instante inicial el comportamiento cuántico del segundo momento sigue al del sistema clásico. Sin embargo, a partir de cierto tiempo, el segundo momento se separa de la recta que determina el proceso difusivo, y comienza a crecer más lentamente. Para tiempos mayores, el crecimiento del segundo momento en el caso cuántico esencialmente cesa. Para tiempos largos se observa que el segundo momento se mantiene prácticamente constante a medida que el tiempo crece, lo que implica que la densidad de probabilidad deja de desparramarse en el espacio de momentos, obteniéndose una densidad de probabilidad localizada en cierto intervalo. Este proceso se conoce como localización dinámica.

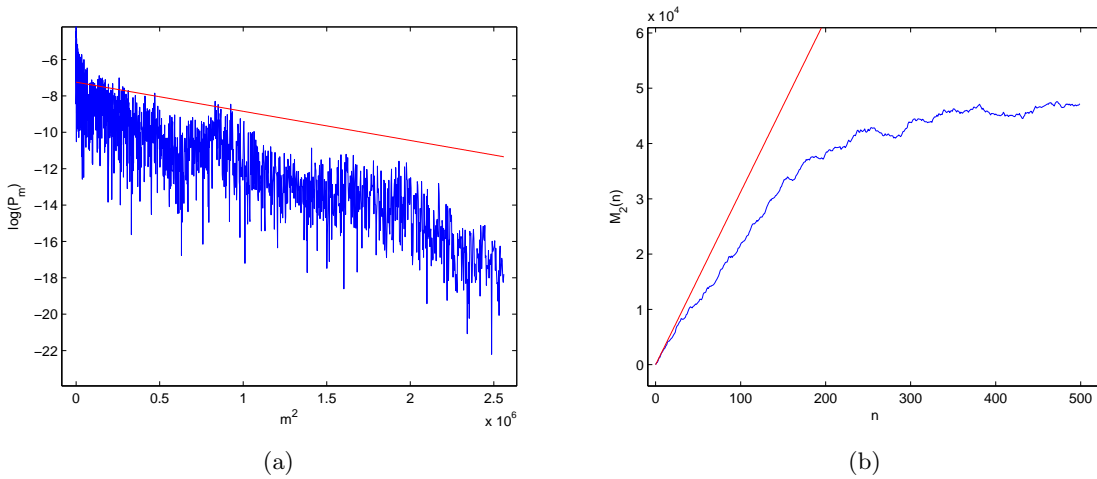


Figura 3.2: (a) Logaritmo de las densidades de probabilidad clásica y cuántica en función del valor del momento al cuadrado, luego de transcurrido un tiempo $n = 1000$. (b) Segundo momento estadístico de la densidad de probabilidad en el espacio de momentos en función del tiempo adimensional n . Caso clásico (rojo) y cuántico (azul).

La supresión cuántica del comportamiento difusivo clásico puede explicarse cualitativamente apelando a la teoría de Floquet [12]. La evolución en términos del mapa en el espacio de momentos está dada por la ecuación 3.40 y la matriz de la ecuación 3.41. Para hallar la solución de este mapa, $a_k(n)$, en función de n y las condiciones iniciales, de acuerdo con la ecuación 3.15 es necesario hallar los elementos de la n -ésima potencia de la matriz de Floquet en la base de momento angular, $U_{kl}^{(n)} = \langle k|U_T^n|l\rangle$. La matriz de Floquet U_T en la representación de momento angular puede diagonalizarse mediante una transformación unitaria A de elementos A_{ij} en la base de momento angular

$$U_{kl} = \sum_m A_{mk}^* e^{-i\Phi_m} A_{ml}, \quad (3.51)$$

donde Φ_m son proporcionales a las cuasienergías del operador de Floquet. Por lo tanto, se tiene que $a_l(n)$ en función de las condiciones iniciales queda de la forma

$$a_k(n) = \sum_{m,l} A_{mk}^* e^{-in\Phi_m} A_{ml} a_l(0). \quad (3.52)$$

Tomando ahora la condición inicial $a_l(0) = \delta_{l0}$ se tiene que el segundo momento queda

$$M_2(n) = \sum_{m,m',k} k^2 e^{in(\Phi_{m'} - \Phi_m)} A_{m'k} A_{m'0}^* A_{mk}^* A_{m0}. \quad (3.53)$$

La omisión de los límites de suma en las sumatorias anteriores indica que los índices se extienden en todos los valores enteros.

De la última expresión para el segundo momento estadístico es posible comprender cualitativamente su comportamiento en función del tiempo n . Para esto se observa que, dado que la matriz U_{kl} es una matriz de bandas, también lo será la matriz A_{kl} que la diagonaliza, por lo que puede aproximarse que las sumatorias en la expresión anterior se extienden entre $-n_s$ y $+n_s$, donde n_s es un número natural que da aproximadamente el ancho de las bandas de U_{kl} . Si se supone además que las cuasienergías Φ_m están uniformemente distribuidas en el intervalo $(0, 2\pi)$, con separación promedio $\frac{2\pi}{n_s}$, entonces el sistema se comportará para tiempos n mucho menores a n_s como si su espectro fuera continuo. Esto se debe a que la diferencia entre factores $e^{in(\Phi_{m'} - \Phi_m)}$ consecutivos en la sumatoria es chica para $n \ll n_s$. Si el sistema se comporta en este rango de tiempos como si su espectro fuera continuo, es razonable suponer que se comportará de manera similar a su análogo clásico; para esta escala de tiempos la cuantización de las cuasienergías no llega a influenciar muy fuertemente a la evolución del sistema.

Para $n \gg n_s$ las fases $e^{in(\Phi_{m'} - \Phi_m)}$ oscilan muy rápidamente por lo que en promedio los términos con m distinto de m' se cancelan y se obtiene en este régimen

$$M_2(n) = \sum_{m,k} k^2 A_{mk} A_{m0}^* A_{mk}^* A_{m0}, \quad (3.54)$$

donde se ha perdido la dependencia en n y por lo tanto para tiempos largos el segundo momento es constante en esta aproximación. Se tiene entonces que el tiempo en que el sistema cuántico sigue al comportamiento difusivo será proporcional a n_s . Dado que las sumatorias en la expresión anterior se extienden aproximadamente entre $-n_s$ y n_s , el ancho de la densidad de probabilidad en el espacio de momentos será aproximadamente n_s y entonces $M_2(n = n_s) = n_s^2$. Dado que hasta el tiempo n_s el segundo momento crece aproximadamente según la ecuación 2.45, entonces insertando los resultados anteriores en esta ecuación se tiene finalmente que

$$n_s \sim D, \tag{3.55}$$

lo que implica que el ancho de la localización en el espacio de momento angular es proporcional al parámetro D que describe la difusión en el problema clásico.

El proceso de localización dinámica también se puede entender mediante la observación de que los autovectores $|\Phi_\alpha(0)\rangle$ del operador de Floquet U_T son localizados en el espacio de momento. De ser así, suponiendo que la condición inicial del problema tiene proyección no nula únicamente en un conjunto finito de estos autoestados, entonces la eventual localización del vector de onda en el espacio de momento queda garantizada por el hecho de que el vector de onda en un instante cualquiera está dado por una superposición de la forma 3.10 de un conjunto finito de autovectores de Floquet, cada uno acotado en el espacio.

En [29], Grempel, Prange y Fishman muestran que los autovectores del operador de Floquet efectivamente deberán estar localizados en el espacio de momentos. Esto se realiza en dicho trabajo a partir de la observación de que la ecuación que determina la expresión de los autovectores de Floquet en el espacio de momento angular es similar a la que determina los autoestados del Hamiltoniano en el modelo de Anderson de materia condensada.

El modelo de Anderson [30] describe una partícula interactuando con una red desordenada, modelada por un potencial periódico con un componente aleatorio. En el caso de una dimensión, se encuentra que la función de onda de la partícula presenta localización espacial si el grado de aleatoriedad introducido en el potencial por el desorden es lo suficientemente grande. En [29], los autores muestran que existe una correspondencia entre el problema de determinar los vectores propios del operador de Floquet en el problema del QKR y el problema de determinar las funciones de onda en el modelo de Anderson, de lo que se puede concluir que los autovectores del operador de Floquet presentaran localización en el espacio de momentos. El modelo de Anderson y su correspondencia con el problema de autovectores del operador de Floquet se describen en un poco más de detalle en el apéndice A.

3.4.2. Dinámica Resonante

La dinámica resonante se obtiene en el caso en que el parámetro τ cumple con la condición de resonancia 3.49. Es posible verificar que en este caso el comportamiento del sistema no depende cualitativamente del valor del parámetro κ .

En el siguiente análisis y a lo largo de todo este trabajo se distingue entre dos tipos de resonancia; la resonancia primaria dada por la condición $\frac{p}{q} = 1$, y las resonancias secundarias como aquellos casos en que esta última condición no se satisface (aunque sí por supuesto la condición 3.49). En ambos casos la energía del rotor libre, es decir el segundo momento estadístico de la distribución de probabilidad en el espacio de momentos, crece cuadráticamente con el tiempo para tiempos suficientemente largos. Únicamente cuando $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ esto no sucede; el comportamiento del sistema es periódico en ese caso y por este motivo esta situación es conocida como anti-resonancia.

3.4.2.1. Resonancia Primaria

En la resonancia primaria, la frecuencia asociada a la excitación coincide con la frecuencia asociada a la transición entre dos niveles de energía consecutivos del rotor libre. Cuando $\tau = 2\pi$ el operador de evolución libre del rotor en un período se convierte en la matriz identidad. Para verificar esto basta expresar dicho operador en la base de momentum angular

$$\langle m|U_L|l\rangle = e^{-i\tau l^2} \delta_{ml} = \delta_{ml}. \quad (3.56)$$

Se observa entonces que, en las condiciones de la resonancia primaria, ninguna de las componentes de Fourier de la función de onda (es decir las componentes del vector de onda en la base de autovectores del momentum angular) es modificada luego de la evolución libre durante un tiempo T , y por lo tanto la evolución en un período queda completamente determinada por el operador evolución asociado a la patada U_K , cuya expresión en la base posición angular es diagonal y toma la forma

$$U_T = U_K = e^{-i\kappa \cos(\theta)}. \quad (3.57)$$

La evolución a lo largo de un cierto número de períodos queda dada entonces exclusivamente por la excitación al sistema. La expresión para el vector de onda luego de transcurrido un tiempo $t = nT$ se obtiene de manera sencilla en la base posición dado que el operador evolución es en este caso diagonal en dicha base, como se puede apreciar en la ecuación anterior. Por lo tanto, la evolución luego de n períodos queda dada por el operador $U_{nT} = (U_T)^n = e^{-in\kappa \cos(\theta)}$. Se tiene entonces para la función de onda

$$\psi(\theta, t = nT) = e^{-in\kappa \cos(\theta)} \psi(\theta, t = 0). \quad (3.58)$$

A partir de esta fórmula es posible obtener analíticamente y de manera exacta una expresión para la evolución temporal de los valores esperados del momento angular y de la energía del sistema, o lo que es equivalente, de los primer y segundo momentos estadísticos de la distribución de probabilidad en el espacio de momento angular

$$\begin{aligned} M_1(n) &= \frac{\langle J \rangle}{\hbar} = -i \int_0^{2\pi} d\theta \psi^*(\theta, t = nT) \frac{\partial \psi(\theta, t = nT)}{\partial \theta} \\ M_2(n) &= \frac{2I \langle H_o \rangle}{\hbar^2} = - \int_0^{2\pi} d\theta \psi^*(\theta, t = nT) \frac{\partial^2 \psi(\theta, t = nT)}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Se obtiene entonces, utilizando la expresión 3.58, la evolución temporal del primer momento

$$M_1(n) = n\kappa \int_0^{2\pi} d\theta \psi^*(\theta, t = 0) \psi(\theta, t = 0) \sin(\theta) + M_1(0), \quad (3.60)$$

donde puede apreciar como el primer momento crece en el tiempo como $M_1(n) \sim n$. Esto es, a menos que la integral que multiplica al término lineal en n se anule. Esto sucede cuando

la densidad de probabilidad en el espacio de posición angular, $P(\theta)(t=0) = |\psi(\theta, t=0)|^2$, es una función par si se considera en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Esto es razonable dado que si la densidad de probabilidad inicial en el espacio θ es simétrica con respecto al origen es de suponer que el valor esperado del momento angular no cambiará con el tiempo.

De manera análoga puede obtenerse una expresión para el segundo momento estadístico en función de n

$$M_2(n) = (n\kappa)^2 \int_0^{2\pi} d\theta |\psi(\theta, t=0)|^2 \sin^2(\theta) - in\kappa \int_0^{2\pi} d\theta \psi^*(\theta, t=0) \left(\cos(\theta) \psi(\theta, t=0) + 2 \sin(\theta) \frac{\partial \psi(\theta, t=0)}{\partial \theta} \right) + M_2(0), \quad (3.61)$$

donde se aprecia el crecimiento cuadrático del segundo momento, y por ende, de la energía, en términos de la variable temporal n . Se observa que en este caso es imposible anular el factor que multiplica al término en n^2 dado que este consiste en la integral de una función positiva.

Es posible obtener expresiones para estas dos cantidades en términos de las condiciones iniciales expresadas en el espacio de momento angular $a_l(0)$,

$$M_1(n) = -n\kappa \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Im[a_j(0) a_{j-1}^*(0)] + M_1(0) \quad (3.62)$$

$$M_2(n) = \frac{(n\kappa)^2}{2} \left(1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Re[a_j(0) a_{j+2}^*(0)] \right) + n\kappa \sum_{j=-\infty}^{\infty} (2j+1) \Im[a_j(0) a_{j+1}^*(0)] + M_2(0). \quad (3.63)$$

El procedimiento para llegar a estas expresiones es un tanto más trabajoso y se describe en el apéndice B. Se observa entonces como la energía –o el segundo momento estadístico– crece cuadráticamente con el tiempo, crecimiento que es independiente de las condiciones iniciales.

Este comportamiento se puede verificar también mediante simulaciones numéricas, a partir del mapa discreto en el espacio de momentos. Los resultados de una simulación para condiciones iniciales $a_m(0) = \delta_{m0}$ se muestran en la figura 3.3a, donde se puede apreciar la distribución de probabilidad luego de transcurrido un tiempo $n = 40$, utilizando un valor de $\kappa = 5$. En la figura 3.3b se muestra la evolución temporal del segundo momento M_2 en función de el tiempo n , apreciándose claramente el crecimiento cuadrático del mismo. No se incluye un gráfico de la evolución temporal de M_1 ; para las condiciones iniciales utilizadas se encontró en la simulación que esta cantidad de se mantiene nula para todo tiempo, tal como era esperado de acuerdo con la observación hecha anteriormente.

La matriz de Floquet, en resonancia, es $U_T = e^{-i\kappa \cos(\theta)}$, que es diagonal en el espacio de posición angular. Esto quiere decir que los estados de Floquet del sistema son de la forma

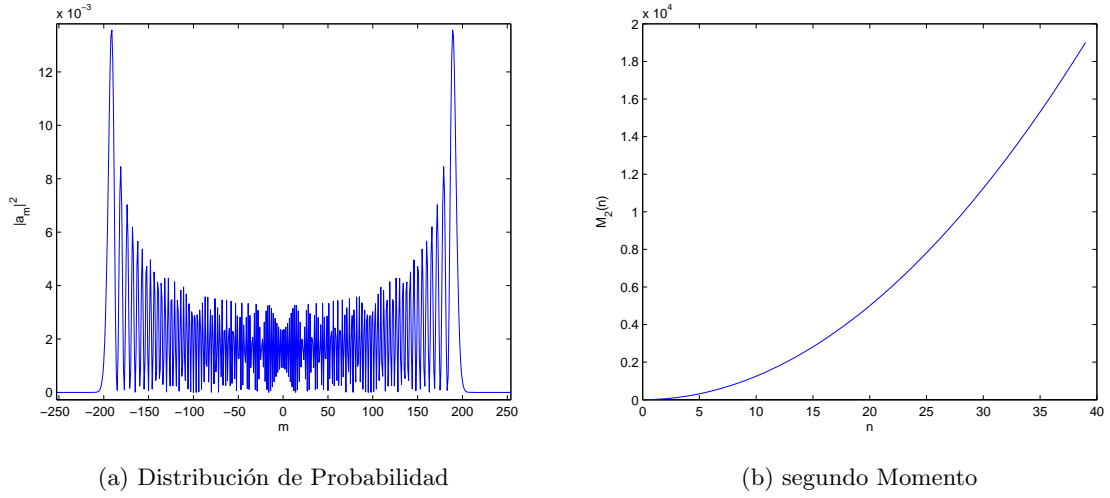


Figura 3.3: Distribución de probabilidad y segundo momento para la resonancia primaria con $\kappa = 5$ y condición inicial $a_m(0) = \delta_{m0}$

$\Psi_\alpha(\theta) = \delta(\theta - \theta_\alpha)$, y las cuasienergías asociadas son $\Omega_\alpha = \hbar\kappa \cos(\theta)$. Se observa entonces que el espectro de cuasienergías del QKR en la resonancia primaria es continuo, a diferencia del caso no resonante en que el espectro de cuasienergías es discreto. Algo similar sucede en las resonancias secundarias, que se examinan a continuación.

3.4.2.2. Resonancias Secundarias

En el caso de las resonancias secundarias se cuenta con un crecimiento cuadrático del valor esperado de la energía cinética para tiempos largos. Sin embargo, en este caso no es posible obtener un resultado analítico exacto para los primer y segundo momentos estadísticos en términos del tiempo adimensionado n -para todo n -, como sí es posible para la resonancia primaria, en la cual se puede verificar analíticamente que el comportamiento cuadrático se obtiene no solamente en el régimen asintótico sino para todo tiempo. Sí es posible encontrar analíticamente, para las resonancias secundarias, un resultado asintótico para el segundo momento y en [14] Izrailev y Shepelyanskii verifican analíticamente que la energía debe crecer cuadráticamente para tiempos largos incluso en las resonancias secundarias. Los autores encuentran además que para estas resonancias el espectro del operador de Floquet tiene componentes continuas, al igual que en el caso de la resonancia primaria.

Es posible verificar este comportamiento mediante simulaciones numéricas. En la figura 3.4 se muestra la evolución temporal del segundo momento para la resonancia secundaria $p/q = 1/5$ con $\kappa = 1$ y condición inicial $a_m(0) = \delta_{m0}$. Se puede apreciar como, luego de un transitorio, para tiempos largos el segundo momento tiende a una dependencia cuadrática del tiempo.

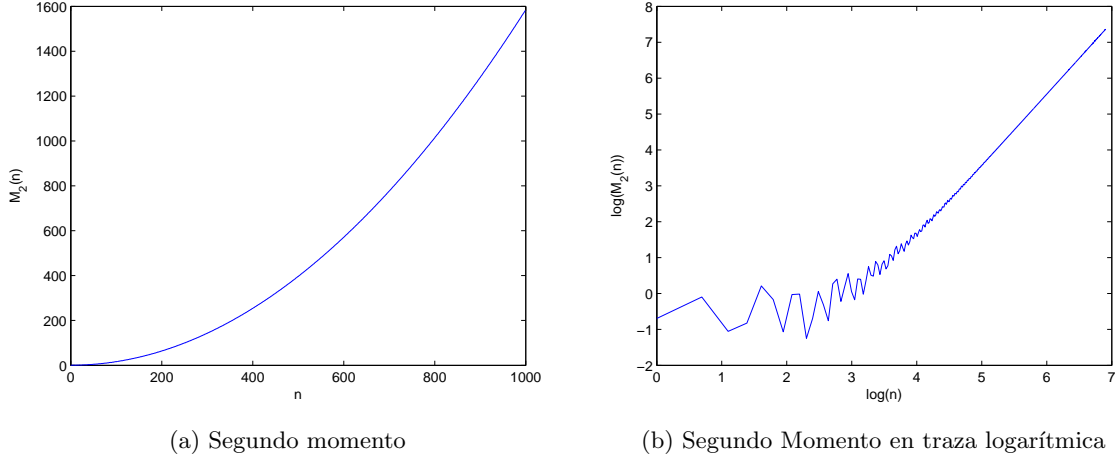


Figura 3.4: Evolución temporal del segundo momento para la resonancia secundaria $p/q = 1/5$ con $\kappa = 1$ y condición inicial $a_m(0) = \delta_{m0}$

3.4.2.3. Anti-resonancia

El caso en que $\frac{p}{q} = 1/2$ es la excepción a lo expuesto precedentemente. Cuando el parámetro τ es igual a π , el sistema exhibe un comportamiento periódico conocido como anti-resonancia [14]. Se puede verificar que la evolución temporal del vector de onda es periódica observando que en este caso $U_T^2 = Id$. Para verificar esto, se reproduce un procedimiento que puede encontrarse en [31]. Definiendo el operador $n = J/\hbar$, el operador de Floquet queda

$$U_T = e^{-in^2\tau} e^{-i\kappa \cos \theta}. \quad (3.64)$$

Apelando a la relación

$$e^{-i\pi n^2} e^{-i\kappa \cos \theta} = e^{i\kappa \cos \theta} e^{-i\pi n^2}, \quad (3.65)$$

que se demuestra en el apéndice C, se tiene que el operador evolución evaluado en $\tau = \pi$ puede escribirse como

$$U_T = e^{-i\pi n^2} e^{-i\kappa \cos \theta} = e^{i\kappa \cos(\theta)} e^{-i\pi n^2}. \quad (3.66)$$

De esto último se obtiene la relación deseada para U_T^2

$$U_T^2 = e^{-i\pi n^2} e^{-i\kappa \cos \theta} e^{i\kappa \cos(\theta)} e^{-i\pi n^2} = e^{-i2\pi n^2} = Id, \quad (3.67)$$

dónde la última igualdad se debe a que el espectro de n esta constituido por los números enteros.

La evolución del sistema luego de n períodos está dada por el operador U_T^n , que en virtud de la ecuación anterior, queda

$$U_T^n = \begin{cases} U_T & \text{si } n \text{ es impar} \\ Id & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \quad (3.68)$$

A partir de esto se tiene la siguiente expresión para el vector de onda en un tiempo n en términos de las condiciones iniciales del sistema:

$$|\Psi(n)\rangle = \begin{cases} U_T(\theta) |\Psi(n=0)\rangle & \text{si } n \text{ es impar} \\ |\Psi(n=0)\rangle & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \quad (3.69)$$

Se observa pues que la evolución temporal del vector de onda es periódica cuando $\tau = \pi$. De esto se deduce que la evolución de todos los valores esperados también lo será.

Capítulo 4

Condiciones Iniciales Distribuidas en el QKR

4.1. Introducción

En este capítulo se estudia la influencia de las condiciones iniciales en la dinámica del *Quantum Kicked Rotor* en resonancia. Se consideran condiciones iniciales distribuidas en el espacio de momento angular y se observa como cambia la evolución del sistema, y en particular la evolución temporal de los momentos estadísticos, según como sea la forma de la condición inicial elegida.

En las referencias [32, 33] se estudia de manera teórica la influencia de las condiciones iniciales en la evolución temporal de los momentos estadísticos del sistema, para una realización atómico-óptica del QKR. En particular se estudia como cambia la evolución temporal de los momentos estadísticos cuando se consideran condiciones iniciales distribuidas en el espacio de momentos. Se debe notar, sin embargo, que la diferencia entre lo propuesto en dichos trabajos y el trabajo de esta tesis radica en que los autores consideran el estado inicial como una mezcla incoherente de estados dada por una distribución térmica. El trabajo presentado en este capítulo considera la evolución a partir de una superposición coherente de estados.

En el caso de la resonancia primaria, el mapa en la representación de momento angular es invariante bajo traslaciones, por lo que se puede diagonalizar mediante una transformada de Fourier. Esto es razonable dado que en secciones anteriores se vio que el operador de Floquet es, para las resonancias primarias, diagonal en la base de posición angular y, dado que el ángulo y el momento angular son variables conjugadas, se pasa de una representación a otra mediante una transformada de Fourier. Se utiliza entonces el análisis de Fourier para estudiar el mapa en el espacio de momentos, haciendo una descomposición del estado del sistema en ondas planas y hallando una relación de dispersion. Utilizando la relación de dispersion es posible hallar la velocidad de grupo y analizar como depende la evolución de la forma del paquete de ondas en el instante inicial.

Para las resonancias secundarias el análisis es más complejo, dado que la matriz de evo-

lución no es cíclica en el espacio de momento angular y por lo tanto no es diagonalizable por una transformada de Fourier, o lo que es lo mismo, no es diagonal en la representación de posición angular. Se realiza entonces un análisis numérico del problema, encontrándose un comportamiento cualitativamente similar al hallado para la resonancia primaria.

Un análisis similar al de este capítulo se aplica en la referencia [34] para la QW. Los autores describen la dinámica de la QW estudiando la propagación de ondas planas a partir de la relación de dispersión y encuentran la relación entre los parámetros que describen un tipo de condición inicial distribuida con la evolución del sistema. El procedimiento, así como algunos de los resultados obtenidos, tienen una cierta similitud con lo que se muestra para el QKR en este capítulo.

4.2. Resonancias Primarias

Dado que la posición angular y el momento angular son variables conjugadas debido a la relación de conmutación 3.17, las funciones de onda en las bases correspondientes se relacionan mediante la transformada de Fourier dada por las ecuaciones 3.38 y 3.39

$$\psi(\theta, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} a_m(n) \quad (4.1)$$

$$a_m(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-im\theta} \psi(\theta, n). \quad (4.2)$$

Como se vio en el capítulo anterior, en el caso de la resonancia primaria el operador de Floquet coincide con el operador asociado a la evolución dada por la excitación U_K , debido a que el operador de evolución del rotor libre coincide con la identidad. Es decir que en resonancia primaria $U_T = U_K$ y la evolución se expresa de manera sencilla en el espacio de posición angular, teniéndose la solución del problema para condiciones iniciales genéricas dada por la ecuación 3.58

$$\psi(\theta, t = nT) = e^{-in\kappa \cos(\theta)} \psi(\theta, t = 0). \quad (4.3)$$

Introduciendo esta ecuación en la formula 4.2 se obtiene

$$a_m(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-im\theta - in\kappa \cos(\theta)} \psi(\theta, t = 0) \quad (4.4)$$

La ecuación precedente puede verse como la descomposición del vector de onda en el espacio de momentos $a_m(n)$ en una superposición de ondas planas de la forma $e^{-i(m\theta - \omega(\theta)n)}$, donde se tiene la siguiente relación de dispersión entre $\omega(\theta)$ y θ

$$\omega(\theta) = -\kappa \cos(\theta) \quad (4.5)$$

A partir de la relación de dispersion se puede obtener la velocidad de grupo asociada a la propagación de las ondas

$$v_g \equiv \frac{d\omega}{d\theta} = \kappa \sin(\theta). \quad (4.6)$$

Estas últimas dos ecuaciones permiten hacer algunas predicciones sencillas pero relevantes con respecto al comportamiento del QKR. Se observa que la velocidad de grupo será máxima para $\theta = \pm\pi/2$ y nula para $\theta = 0, \pi$, tomando los valores $v_g = \kappa$ o $v_g = 0$ respectivamente. Se considera entonces la siguiente condición inicial

$$\psi(\theta, n = 0) = F(\theta - \theta_0), \quad (4.7)$$

que en el espacio de momentos se expresa

$$a_l(n = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-il\theta} F(\theta - \theta_0) = f(l) e^{-il\theta_0} \quad (4.8)$$

donde $f(l)$ es la transformada de Fourier de $F(\theta)$. Esta condición inicial corresponde, en el espacio de momentos, a un paquete de ondas de la forma $F(\theta)$ centrado alrededor del número de onda θ_0 . Se espera que la evolución del paquete de ondas en el espacio de momentos esté dictada por la ecuación 4.6. Es decir que, en el caso en que el paquete de ondas $F(\theta)$ sea lo suficientemente angosto (o equivalentemente, $f(l)$ lo suficientemente ancho), entonces el mismo deberá quedarse en reposo si $\theta_0 = 0, \pi$ o deberá moverse con máxima velocidad si $\theta = \pm\pi/2$. A su vez, si $\theta_0 \in (-\pi, 0)$ ($\theta_0 \in (0, \pi)$) el paquete se desplazará hacia la izquierda en el espacio de momentos, lo cual es consistente con la visión clásica del sistema en la cual la barra tendrá velocidad negativa (positiva) si en el instante inicial se encuentra en los intervalos correspondientes.

A continuación, se verifican estas ideas considerando una condición inicial particular correspondiente a un paquete gaussiano centrado alrededor del número de onda θ_0 ,

$$a_l(0) = \left[\frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{l^2}{2\sigma_0^2}} \right]^{\frac{1}{2}} e^{-il\theta_0}. \quad (4.9)$$

A partir de esta expresión para la condición inicial es posible hallar los momentos estadísticos de la distribución de probabilidad en el espacio de momento angular, en términos de σ_0 y θ_0 , apelando a las ecuaciones 3.62 y 3.63

$$M_1(n) = -n\kappa \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Im[a_j(0) a_{j-1}^*(0)] + M_1(0) \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
 M_2(n) &= \frac{(n\kappa)^2}{2} \left(1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Re[a_j(0) a_{j+2}^*(0)] \right) \\
 &+ n\kappa \sum_{j=-\infty}^{\infty} (2j+1) \Im[a_j(0) a_{j+1}^*(0)] + M_2(0). \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación 4.9 en estas dos expresiones y utilizando que, para $\sigma \gg 1$,

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{l^2}{2\sigma^2}} \simeq \sqrt{2\pi}\sigma, \tag{4.12}$$

se tiene

$$M_1(n) = \kappa n \sin \theta_0 e^{-\frac{1}{8\sigma_0}} \tag{4.13}$$

$$M_2(n) = \frac{(\kappa n)^2}{2} \left[1 - \cos 2\theta_0 e^{-\frac{1}{2\sigma_0}} \right] + M_2(0). \tag{4.14}$$

A partir de estas dos expresiones se tiene la varianza de la distribución de probabilidad en el espacio de momentos, $\sigma^2(n) = M_2(n) - M_1(n)^2$,

$$\begin{aligned}
 \sigma^2(n) &= \frac{(\kappa n)^2}{2} \left[1 - \cos 2\theta_0 e^{-\frac{1}{2\sigma_0}} - 2 \sin^2 \theta_0 e^{-\frac{1}{4\sigma_0}} \right] \\
 &+ \sigma_0^2. \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

De la ecuación 4.14 se observa como el segundo momento, que en virtud de la ecuación 3.44 es igual al valor esperado de la energía del sistema a menos de una constante, presenta una dependencia sinusoidal en la variable θ_0 de manera similar a la encontrada en la referencia [18], si bien en ese caso la condición inicial distribuida se centra en un valor no nulo del momento.

En la ecuación 4.15 se puede apreciar como la varianza crece cuadráticamente con n , independientemente de la condición inicial del sistema. Sin embargo, a n fijo, se tiene que el término cuadrático puede hacerse pequeño para σ_0 suficientemente grande y ciertas condiciones iniciales. Esto significa que para σ_0 muy grande, es decir cuando la condición inicial es muy ancha en el espacio de momentos, el sistema puede tardar un tiempo largo en exhibir el comportamiento balístico. Esto podría contribuir a explicar por que en ciertas realizaciones experimentales no se observa el crecimiento balístico de la varianza como por ejemplo en [16].

En [32] se estudia la evolución del momento de una realización atómico-óptica del QKR. Allí se encuentra que, debido a condiciones iniciales distribuidas, no se observa el comportamiento balístico en resonancia. Sin embargo, el tratamiento allí expuesto es cualitativamente distinto al que aquí se presenta debido a que los autores consideran como condición inicial

una superposición no coherente de estados debida a una distribución térmica. Es decir que el estado en el instante inicial está representado por una matriz densidad diagonal en el espacio de momentos. Además, en el caso del modelo atómico-óptico, el momento de la partícula no es angular sino lineal (dado que se considera un átomo moviéndose a lo largo de una línea recta), y por tanto no estará discretizado, lo que también influye en la evolución temporal de los momentos estadísticos. Se recalca que el trabajo aquí considerado consiste en tomar un estado inicial coherente. Ambos trabajos podría considerarse que describen efectos complementarios en explicar por que no se observan en algunas realizaciones experimentales las resonancias cuánticas.

De la ecuación 4.13 puede calcularse la velocidad de grupo del paquete de ondas

$$v_g = \frac{dM_1(n)}{dn} = \kappa \sin \theta_0 e^{-\frac{1}{8\sigma_0}}. \quad (4.16)$$

Esta ecuación tiende a la expresión hallada anteriormente para la velocidad de grupo cuando $\sigma_0 \gg 1$, es decir cuando se considera el paquete de ondas $F(\theta)$ muy angosto o, equivalentemente, a la función $f(l)$ muy desparramada en el espacio de momentos. Esta última fórmula permite predecir la evolución temporal del paquete de ondas en términos de la condición inicial del sistema: cambiando la posición alrededor del cual se centra el paquete de ondas en la variable θ se obtienen distintas velocidades de grupo para el desplazamiento posterior del paquete en el espacio de momento angular.

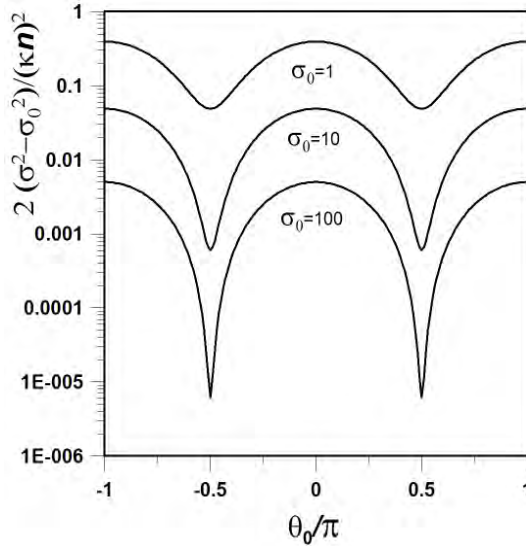


Figura 4.1: La función $2 \frac{\sigma^2 - \sigma_0^2}{(\kappa n)^2}$, para la resonancia primaria, en función del ángulo inicial θ_0/π , en escala logarítmica.

La ecuación 4.15 permite predecir la forma en que se ensancha el paquete de ondas a lo largo del tiempo. El factor que depende de las condiciones iniciales se grafica en la figura 4.1 a partir de esta fórmula. De la figura se observa como, para $\sigma_0 \gg 1$, eligiendo θ_0 cercano a $\pi/2$, se puede hacer que se demore bastante tiempo en observar el comportamiento balístico,

consiguiéndose por bastante tiempo un paquete de ondas en el espacio de momentos que se traslada a una velocidad constante ($v_g \sim \kappa$) sin deformarse.

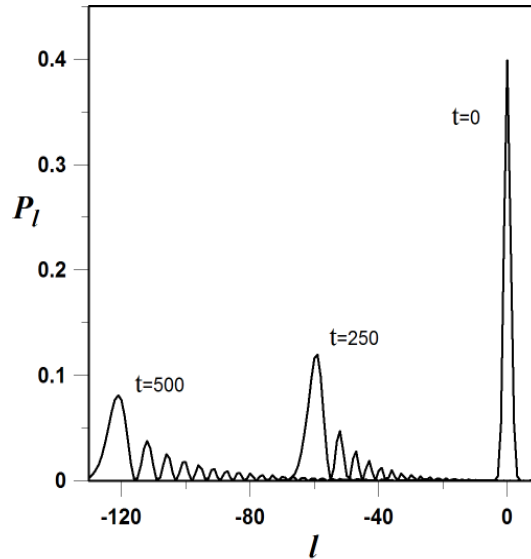


Figura 4.2: Distribución de probabilidad en el espacio de momento en función del momento adimensional l , para tres tiempos distintos $t = 0$, $t = 250$ y $t = 500$, con condiciones iniciales dadas por $\sigma_0 = 1$ y θ_0 . La evolución es en resonancia primaria con $\kappa = 0,25$

La evolución temporal de la distribución de probabilidad en el espacio de momentos se puede apreciar en la figura 4.2. Allí se muestra la densidad de probabilidad obtenida mediante simulaciones numéricas, a partir de la condición inicial $\theta_0 = \pi/2$, para tres tiempos distintos, donde se puede apreciar como el paquete de ondas se desplaza hacia la izquierda, de manera consistente con la condición inicial elegida y los resultados obtenidos para la velocidad de grupo. En la figura se puede apreciar como a medida que transcurre el tiempo la función de onda se va desparramando cada vez más en el espacio de momentos.

4.3. Resonancias Secundarias

Se estudia ahora la incidencia de condiciones iniciales distribuidas en las resonancias secundarias. En este caso p/q no es entero y la ecuación 3.32 se vuelve muy complicada de manejar analíticamente, con la excepción del caso anti-resonante [27]. Para las resonancias secundarias, el operador de Floquet U_T es tal que el mapa dado por las ecuaciones 3.40 y 3.41 ya no es invariante bajo traslaciones en el espacio de momento, hecho fundamental para el tratamiento analítico de la resonancia primaria, que se basaba en el análisis de Fourier del mapa. Por lo tanto, la influencia de las condiciones iniciales extendidas en la dinámica de las resonancias secundarias se estudia numéricamente. Se presentan resultados para el caso $p/q = 1/3$, aunque se debe notar que las simulaciones numéricas realizadas indican que el comportamiento es cualitativamente similar para todas las resonancias secundarias tratadas. Nuevamente, se consideran condiciones iniciales dadas por la ecuación 4.9.

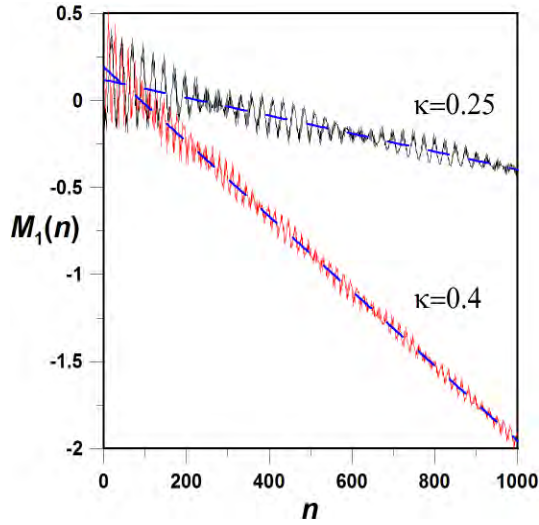


Figura 4.3: Primer momento estadístico de la distribución de probabilidad en el espacio de momentos en función del tiempo adimensional n , para dos valores distintos de κ . Las líneas discontinuas muestran el ajuste lineal. Las condiciones iniciales tomadas fueron $\theta_0 = \pi/2$ y $\sigma_0 = 1$. Se consideró la resonancia secundaria $p/q = 1/3$.

En la figura 4.3 se presenta el resultado del cálculo numérico del primer momento estadístico $M_1(n)$ en función del tiempo n , para las condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/2$ y $\sigma = 1$, para dos valores distintos del parámetro κ . El momento presenta un comportamiento oscilatorio complejo, a partir del cual es posible definir un comportamiento promedio lineal, que se muestra en las líneas discontinuas. Se utiliza la pendiente de estas líneas para definir la velocidad de grupo en las resonancias secundarias, lo que permite calcular esta cantidad numéricamente a partir de simulaciones.

La dependencia de la velocidad de grupo con el ángulo θ_0 se muestra en la figura 4.4. Se puede apreciar un comportamiento oscilatorio análogo al caso de la resonancia primaria, si bien la frecuencia de la oscilación es aproximadamente el doble, lo que permite que para ciertos ángulos $\theta_0 > 0$ la velocidad de grupo se haga negativa, lo que no sucede en el caso de las resonancias primarias. También se observa que para cualquier ángulo θ_0 la velocidad de grupo es un orden de magnitud menor a la obtenida para la resonancia primaria, lo que indica que en este caso el paquete de onda se desplaza mucho más lentamente.

Finalmente, de la figura 4.3 se concluye que, al igual que lo que sucede para la resonancia primaria, la velocidad de grupo depende del parámetro κ . Esta dependencia se grafica en la figura 4.5, donde se muestran los distintos valores de la velocidad de grupo obtenidos de las simulaciones numéricas para las condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/4$ y $\sigma_0 = 1$. La dependencia de la velocidad de grupo con κ es más complicada que en el caso de la resonancia primaria donde, para θ_0 fijo, la velocidad de grupo crece con κ . En este caso la velocidad de grupo también crece proporcionalmente con κ , lo que es razonable dado que a mayor κ mayor es la intensidad de la excitación. Sin embargo, la dependencia es sensiblemente más complicada en este caso.

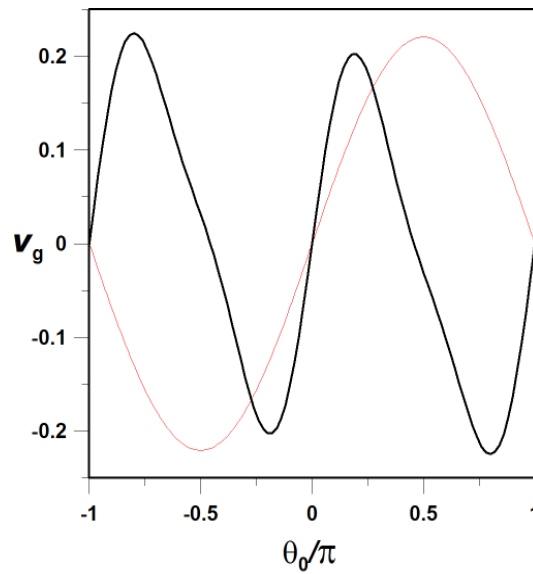


Figura 4.4: Velocidad de grupo en función de la posición angular inicial θ_0 para la resonancia secundaria $p/q = 1/3$ y $\sigma_0 = 1$. La línea roja muestra la dependencia para la resonancia primaria y la negra para la secundaria (multiplicada por un factor de 60). Se tomo $\kappa = 0,25$ en ambos casos.

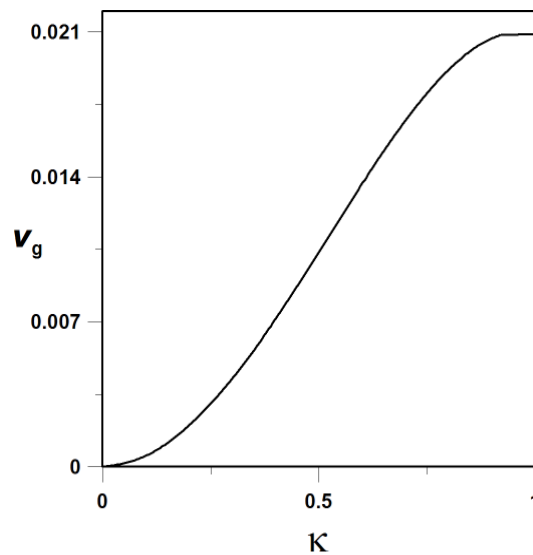


Figura 4.5: Velocidad de grupo en función de κ con $\theta_0 = \pi/4$ y $\sigma_0 = 1$ para la resonancia secundaria $p/q = 1/3$.

Capítulo 5

Excitación dependiente del tiempo en el QKR

5.1. Introducción

En este capítulo se estudia el modelo del Quantum Kicked Rotor, en el régimen resonante, sometido a una excitación de intensidad dependiente del tiempo. Es decir que la intensidad de la excitación K , que anteriormente se mantenía constante, ahora variará en el tiempo según una función dada $K(t)$. En particular, se obtiene la evolución temporal de los primer y segundo momentos estadísticos del sistema para esta nueva variante del QKR. En secciones anteriores se vio que, tanto en la resonancia primaria como en las secundarias, el segundo momento (es decir, el valor esperado de la energía cinética del sistema) presenta un crecimiento balístico con el tiempo, para tiempos largos, en el caso en que la excitación es de intensidad K constante. Es de interés observar como es afectado este comportamiento cuando K depende del tiempo.

En el caso de la resonancia primaria es posible encontrar un resultado analítico exacto para los primeros dos momentos estadísticos para una excitación dependiente del tiempo $K(t)$ genérica. A partir de esto se analiza el caso particular en que la intensidad de la patada depende del tiempo (es decir, del índice de tiempo discreto n introducido anteriormente) a través de una ley de potencias $K(n) \sim n^{-\alpha}$. Se encuentra que, a tiempos largos, la evolución temporal del valor esperado de la energía cinética del sistema presenta una gama amplia de regímenes de evolución temporal –desde un crecimiento super-balístico hasta una localización de la función de onda, pasando por una variedad de situaciones intermedias– al variar el parámetro α de la ley de potencias.

Para las resonancias secundarias, el sistema se vuelve más complejo de tratar analíticamente, por lo que, de manera análoga a la situación encontrada en el capítulo anterior, se recurre a simulaciones numéricas. Los resultados encontrados en cuanto al comportamiento a tiempos largos de la energía al variar el parámetro α que determina la ley de potencias para la excitación son cualitativamente similares a los resultados para el caso de la resonancia

primaria.

Es necesario observar que, al introducir una dependencia temporal en el parámetro K mediante una ley de potencias, el Hamiltoniano del sistema deja de ser periódico en el tiempo, por lo que ya no es posible aplicar los resultados de la teoría de Floquet. Sin embargo, es posible encontrar un mapa de evolución temporal U_T entre dos instantes $t = nT$ y $t = (n + 1)T$ tal cual fuera definido en secciones anteriores, con la salvedad de que ahora la matriz U_T dependerá del instante n considerado, de acuerdo a como sea el valor $K(n)$ que tome la intensidad de la excitación en ese instante.

5.2. Evolución Temporal

La evolución temporal del sistema entre dos instantes esta dada por el mapa

$$|\Psi((n + 1)T)\rangle = U_T(n) |\Psi((n)T)\rangle, \quad (5.1)$$

donde el operador $U_T(n)$ es el mismo que en secciones anteriores tomando $K = K(n)$ (o lo que es lo mismo $\kappa = \kappa(n)$), y en la representación de momento angular queda, una vez adimensionalizadas las variables,

$$a_m(n + 1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i\tau l^2} J_{l-m}(\kappa(n)) i^{m-l} a_l(n). \quad (5.2)$$

A continuación se estudia este mapa en la resonancia primaria.

5.3. Resonancias Primarias

5.3.1. $K(t)$ genérica

Como se mostró anteriormente, en la resonancia primaria, el operador U_L asociado a la evolución del rotor libre en el intervalo de tiempo entre dos patadas se transforma en la identidad. Por lo tanto, en lo que respecta a la evolución del sistema entre el instante $t = nT$ y $t = (n + 1)T$, solamente influye el operador $U_K(n)$, que constituye la evolución debida a la patada en el instante n

$$|\Psi((n + 1)T)\rangle = U_K(n) |\Psi(nT)\rangle = e^{-i\kappa(n)\cos(\theta)} |\Psi(nT)\rangle. \quad (5.3)$$

Nuevamente, si bien ahora el operador U_K va cambiando con n , para cada instante este operador es diagonal en la base posición angular, por lo que es sencillo obtener el estado del sistema luego de transcurrido un tiempo $t = nT$, a partir de una condición inicial cualquiera:

$$|\Psi(nT)\rangle = \left(\prod_{n'=1}^n U_K(n') \right) |\Psi(0)\rangle = e^{-i(\sum_{n'=1}^n \kappa(n')) \cos(\theta)} |\Psi(0)\rangle. \quad (5.4)$$

A partir de esta expresión para $|\Psi(nT)\rangle$, es posible encontrar el valor de los primer y segundo momentos estadísticos del sistema apelando a las expresiones 3.59. Si se define

$$\tilde{\kappa}(n) = \sum_{n'=1}^n \kappa(n'), \quad (5.5)$$

entonces las expresiones para los momentos en función del tiempo son idénticas a aquellas dadas por las ecuaciones 3.60 y 3.61, sustituyendo el producto κn en dichas expresiones por $\tilde{\kappa}$:

$$M_1(n) = \tilde{\kappa} \int_0^{2\pi} d\theta \psi^*(\theta, t=0) \psi(\theta, t=0) \sin(\theta) + M_1(0) \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} M_2(n) = & (\tilde{\kappa})^2 \int_0^{2\pi} d\theta |\psi(\theta, t=0)|^2 \sin^2(\theta) + \\ & - i\tilde{\kappa} \int_0^{2\pi} d\theta \psi^*(\theta, t=0) \left(\cos(\theta) \psi(\theta, t=0) + 2 \sin(\theta) \frac{\partial \psi(\theta, t=0)}{\partial \theta} \right) + M_2(0) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Es posible también trabajar el problema en el espacio de momentos, partiendo de una formulación para el mapa discreto en resonancia. En dicha representación

$$a_m(n+1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{l-m}(\kappa(n)) i^{m-l} a_l(n). \quad (5.8)$$

Utilizando la relación de recursión satisfecha por las funciones de Bessel, es posible llegar a la siguiente fórmula para la solución general de la ecuación anterior

$$a_m(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{l-m}(\tilde{\kappa}(n)) i^{m-l} a_l(0) \quad (5.9)$$

A partir de esta ecuación se obtiene la distribución de probabilidad en el espacio de momento angular

$$P_m(n) = |a_m(n)|^2 = \sum_{l,j=-\infty}^{\infty} J_{l-m}(\tilde{\kappa}(n)) J_{j-m}(\tilde{\kappa}(n)) i^{j-l} a_l(0) a_j^*(0). \quad (5.10)$$

Con la expresión anterior y utilizando la definición de los momentos estadísticos se llega a

$$M_1(n) = -\tilde{\kappa}(n) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Im[a_j(0) a_{j-1}^*(0)] + M_1(0) \quad (5.11)$$

$$M_2(n) = \frac{(\tilde{\kappa}(n))^2}{2} \left(1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Re[a_j(0) a_{j+2}^*(0)] \right) + \tilde{\kappa}(n) \sum_{j=-\infty}^{\infty} (2j+1) \Im[a_j(0) a_{j+1}^*(0)] + M_2(0), \quad (5.12)$$

resultado que también podría haberse obtenido siguiendo un procedimiento análogo al expuesto en el apéndice B.

En cualquiera de las dos expresiones obtenidas para $M_1(n)$ y $M_2(n)$ se puede apreciar la misma dependencia en la función $\tilde{\kappa}(n)$, la forma particular de la cual determinará la evolución temporal de los momentos. Para la varianza, definida como $\sigma = \sqrt{M_2 - M_1^2}$, en virtud de las ecuaciones anteriores, el comportamiento asintótico queda dado por

$$\sigma(n) \longrightarrow C\tilde{\kappa}(n) = C \sum_{n'=1}^n \kappa(n'), \quad (5.13)$$

donde C es una constante que depende de las condiciones iniciales. A continuación se estudia el caso particular en que la función $\tilde{\kappa}(n)$ se toma como una potencia de n .

5.3.2. Ley de Potencias

Se estudia ahora el caso particular en que $\kappa(n)$ depende de n como una ley de potencias

$$\kappa(n) = n^{-\alpha}. \quad (5.14)$$

Introduciendo esta definición en las expresiones obtenidas anteriormente para los momentos, es posible llegar a una expresión para el comportamiento asintótico de la varianza σ , pudiéndose distinguir entre dos casos fundamentalmente distintos según sea α mayor o menor que la unidad.

$\alpha > 1$

En este caso se encuentra que σ converge hacia un límite cuando $t \rightarrow \infty$ y la distribución de probabilidad va dejando de ensancharse con el transcurso del tiempo, tendiendo a quedar localizada en el espacio de momentos. El tipo de localización de la distribución de probabilidad en el espacio de momentos, decae más lento que una exponencial y es de tipo función de Bessel, como se puede confirmar tomando como condición inicial $a_m(0) = \delta_{m0}$ en la ecuación 5.10

$$P_l(n) = |J_l(n)|^2. \quad (5.15)$$

$\alpha \leq 1$

En este caso la varianza del sistema crece de manera no acotada con n , comportándose de la siguiente manera

$$\sigma(n) \sim \begin{cases} n^{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ \ln(n) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}, \quad (5.16)$$

por lo que se observa toda una gama de crecimientos asintóticos para la varianza a tiempos largos al ir variando el parámetro α que se resumen en la tabla de la figura 5.1.

$\alpha < 0$	super-balístico
$\alpha = 0$	balístico
$0 < \alpha = \frac{1}{2}$	sub-balístico
$\alpha = \frac{1}{2}$	difusivo
$\frac{1}{2} < \alpha < 1$	sub-difusivo
$\alpha = 1$	logarítmico
$\alpha > 1$	valor asintótico

Figura 5.1: Comportamiento de la varianza en función de α para la resonancia primaria.

Es razonable que en el caso $\alpha > 1$ la distribución de probabilidad se ensanche más rápido que para el QKR estándar, dado que para este valor del parámetro la intensidad de la excitación crece con el tiempo.

Los resultados recién enunciados se pueden verificar mediante simulaciones numéricas. En la figura 5.2, se muestran los perfiles de la distribución de probabilidad en el momento luego de transcurrido un tiempo $n = 300$ para distintos valores del parámetro α , partiendo de una condición inicial $a_m(0) = \delta_{m0}$ (de manera tal de producir una evolución simétrica). En la sucesión de figuras se puede observar como, a medida que α aumenta, la velocidad con la que se ensancha la distribución disminuye, la distribución es más angosta y los dos picos extremos se encuentran más juntos. Es posible verificar también como para el caso $\alpha = \frac{1}{2}$, si bien la varianza crece como $\sigma \sim t^{\frac{1}{2}}$, la distribución de probabilidad no corresponde a una distribución Gaussiana. Esto se debe a que la evolución se debe a un proceso cuántico coherente y no a un comportamiento difusivo clásico. En el caso extremo en que $\alpha > 1$ la distribución queda restringida a un intervalo pequeño alrededor de su valor inicial. Los perfiles de la distribución que aquí se presentan son cualitativamente similares a los obtenidos en las referencias [35, 36] para la caminata cuántica.

Es importante señalar que la forma específica para la secuencia $\kappa(n)$ elegida no es imprescindible para obtener un comportamiento cualitativamente similar al recién descrito. La forma asintótica de $\sigma(n)$ está determinada por la ecuación 5.13 y depende de la forma cualitativa de $\kappa(n)$. Si $\kappa(n) \rightarrow 0$ el crecimiento de $\sigma(n)$ no puede ser más rápido que en el caso balístico. Si $\kappa(n) \rightarrow 0$ pero se mantiene acotado, el crecimiento de $\sigma(n)$ es balístico. Finalmente, cuando $\kappa(n)$ no está acotado, el crecimiento de la varianza es super-balístico.

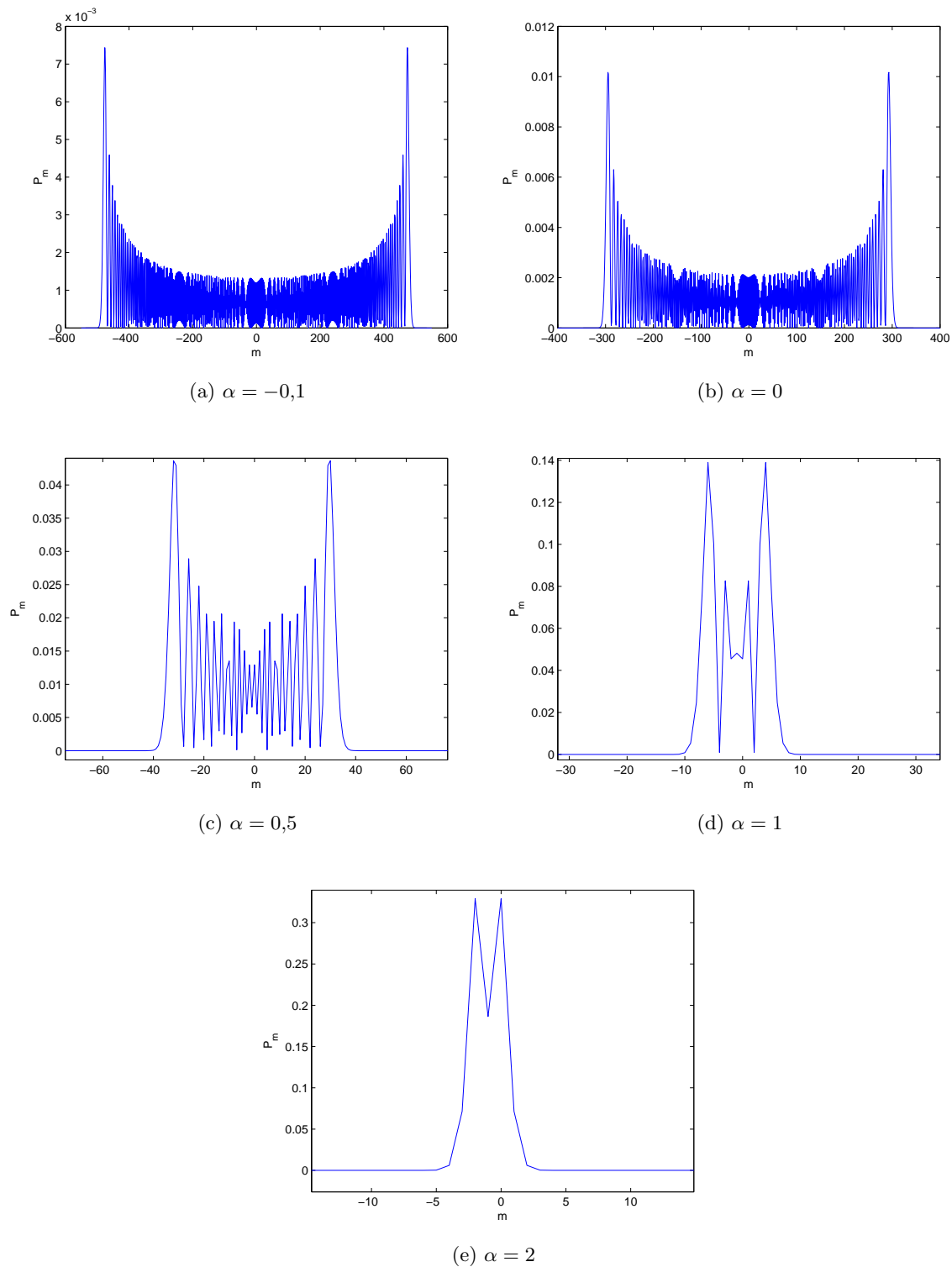


Figura 5.2: Distribución de probabilidad P_m luego de transcurrido un tiempo $n = 300$ para distintos valores de α

5.4. Resonancias Secundarias

En el caso de las resonancias secundarias, la evolución en un intervalo T debida al rotor libre no coincide con la identidad, por lo que el operador de evolución $U_T(n)$ ya no coincide con $U_K(n)$ y por lo tanto no es diagonal en la base de posición angular. Ya no es posible entonces integrar el mapa discreto analíticamente como en el caso de las resonancias primarias. El problema se estudia numéricamente, obteniéndose resultados cualitativamente similares a los de la sección anterior. A los efectos de realizar el estudio numérico, se toma $\kappa(n)$ como una ley de potencias $\kappa(n) \sim n^{-\alpha}$. Se desea observar la dependencia de la evolución temporal de los momentos estadísticos en función del parámetro α que determina a $\kappa(n)$.

La figura 5.3 muestra la evolución temporal de el segundo momento estadístico para distintos valores de α , para la resonancias secundarias $p/q = 2/5$ y $p/q = 1/3$, a partir de la condición inicial $a_l(0) = \delta_{l0}$. Se puede apreciar que para tiempos largos, dependiendo del valor de α elegido, la evolución de la función de onda tiende o bien a un estado localizado en el espacio de momentos (en cuyo caso $M_2(n)$ tiende a una constante cuando $n \rightarrow \infty$), o bien el segundo momento se comporta asintóticamente como una ley de potencias $M_2(n) \sim n^{\gamma'}$.

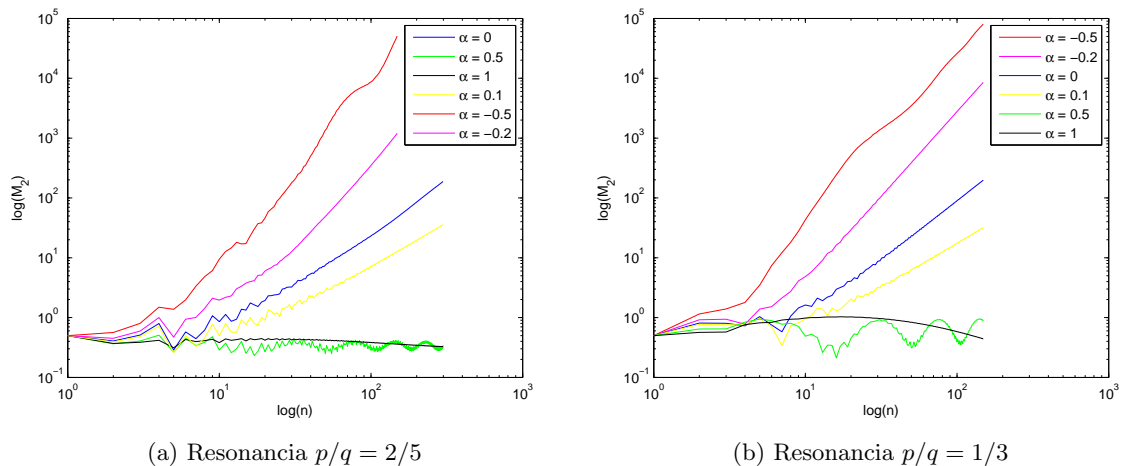


Figura 5.3: Evolución temporal del segundo momento en traza logarítmica para distintos valores de α .

De las simulaciones numéricas, ajustando la evolución a tiempos largos del segundo momento a una ley de potencias de la forma $M_2(n) \sim n^{\gamma'}$, se obtienen los distintos tipos de comportamiento que puede presentar el sistema al variar el parámetro α . Los resultados para la resonancia $p/q = 2/5$ se presentan en la tabla 5.4, donde se muestra valores aproximados de los umbrales en α que separan los distintos tipos de comportamiento.

Tanto en la resonancia primaria como en las secundarias se encuentra que el exponente de la ley de potencias que presenta el segundo momento para tiempos largos crece a medida que α aumenta en módulo, para $\alpha < 0$. Es decir, a medida que aumenta la tasa con la que la intensidad de la excitación crece en el tiempo, mayor es la velocidad con la que crece el

$\alpha < 0$	super-balístico
$\alpha = 0$	balístico
$0 < \alpha \lesssim 0,1$	sub-balístico
$\alpha \simeq 0,1$	difusivo
$0,1 \lesssim \alpha \lesssim 0,2$	sub-difusivo
$\alpha \gtrsim 0,2$	localizado

Figura 5.4: Comportamiento de la varianza en función de α para la resonancia secundaria.

segundo momento. Es interesante que para $\alpha > 0$ la intensidad de la excitación disminuye con el tiempo y sin embargo, para α menores a algún valor umbral, aún así el segundo momento crece. Una vez que α supera ese valor umbral se encuentra localización de la función de onda en el espacio de momentos.

Capítulo 6

Quantum Kicked Rotor de dos niveles

6.1. Introducción

En este capítulo se estudia una variación del *Quantum Kicked Rotor* que se obtiene a partir de la implementación atómico-óptica de este modelo presentada en las referencias [37, 32, 38]. Dicha implementación consiste en someter una nube diluida de átomos de dos niveles a una onda laser estacionaria, pulsada periódicamente en el tiempo, donde además se supone que el movimiento de los átomos es unidimensional. Para obtener un modelo equivalente al del QKR a partir de este sistema, los autores eliminan el estado excitado del átomo del Hamiltoniano del sistema, para lo cual se recurre a una cierta aproximación conocida como aproximación adiabática [39]. El modelo obtenido por los autores es de hecho levemente distinto al QKR debido a que el movimiento de las partículas sucede en una línea y por lo tanto no es descrito por una coordenada angular como en el caso del QKR. Esto tiene como consecuencia que el momento de las partículas no estará discretizado como en el caso del momento angular del rotor y en principio entonces el modelo no sería equivalente al del QKR. Se verá más adelante que debido a que el potencial al cual están sometidas las partículas es espacialmente periódico, es posible llegar a una descripción equivalente a la del QKR descomponiendo las coordenadas del sistema en componentes continuas y discretas.

El modelo que se estudia en este capítulo consiste en no tomar la aproximación adiabática que permite eliminar el nivel atómico excitado, considerándose entonces el átomo de dos niveles en su totalidad, en presencia de la onda laser estacionaria, la cual es pulsada periódicamente en el tiempo de manera tal de tener la excitación impulsiva tipo tren de deltas. Llamamos a este sistema *Quantum Kicked Rotor* de dos niveles (QKR2L de ahora en más). El modelo obtenido presenta un espectro continuo de valores del operador momento, dado que el movimiento de los átomos sucede a lo largo de una línea recta y no está descrito por una variable angular como en el caso del QKR. Sin embargo, dado que el potencial es periódico, se verá que descomponiendo las coordenadas del sistema en componentes continuas y discretas

se obtiene una descripción de la dinámica temporal de este modelo en términos de un mapa discreto similar al del QKR usual. A partir de una expresión para el operador evolución del sistema y de su correspondiente mapa discreto (teniendo en cuenta la descomposición de coordenadas explicada precedentemente), se realiza un estudio de la evolución temporal del sistema.

Un sistema similar al aquí propuesto fue estudiado por Scharf en [40], donde se estudia una partícula de espín $1/2$ bajo la influencia de un potencial genérico $V(\theta)$ el cual es pulsado impulsivamente de manera periódica. En dicho trabajo se estudia el fenómeno de localización dinámica mediante un mapeo con el modelo *tight binding* correspondiente, de manera similar al tratamiento del apéndice A. También se estudian fenómenos de de-localización y de resonancia mediante las propiedades espectrales de la matriz de Floquet del sistema.

En este trabajo se estudia la dinámica del QKR2L en términos de los parámetros del modelo, y en particular la evolución temporal del segundo momento estadístico de la distribución de probabilidad en el espacio de momentos, contrastando los resultados obtenidos con aquellos conocidos para el QKR usual. En particular, se encuentra que el sistema también presenta en ciertos casos un comportamiento resonante. Sin embargo, se encuentran algunos fenómenos nuevos en términos del comportamiento en el espacio de parámetros con respecto a lo que sucede en el QKR o el modelo estudiado por Scharf, dado que el modelo del QKR de dos niveles incluye un parámetro independiente debido a la diferencia de energía entre los niveles atómicos, que no aparece en los otros dos modelos. En este capítulo se describe la obtención del Hamiltoniano del QKR de dos niveles a partir del Hamiltoniano atómico, y a partir de este se halla el mapa de Floquet correspondiente y su expresión en el espacio de momentos. En el capítulo siguiente se estudia analíticamente y numéricamente la evolución temporal del sistema para ciertos valores de los parámetros.

Se debe notar que al considerar que es posible que el átomo acceda al nivel excitado, para describir la situación física de manera realista es necesario considerar el decaimiento espontáneo del nivel excitado al nivel base, con la correspondiente emisión de un fotón [41]. Este proceso introduce decoherencia en el sistema. En este trabajo se estudia la evolución coherente del sistema, siendo la principal motivación evaluar del punto de vista teórico las similitudes entre este nuevo sistema y el *Quantum Kicked Rotor* estándar y la caminata cuántica. El estudio de la decoherencia introducida por este fenómeno, sin embargo, no carece de interés y se deja como trabajo a futuro. Algunas perspectivas con respecto a este estudio se mencionan en el último capítulo de esta tesis. En este marco, es interesante contar primero con un conocimiento del comportamiento coherente del sistema para comparar luego con la dinámica no coherente.

En la siguiente sección se obtiene el Hamiltoniano del QKR a partir del Hamiltoniano que describe la interacción entre un átomo de dos niveles y dos ondas monocromáticas. En la tercera sección se obtiene el operador de Floquet de la evolución del sistema y sus elementos de matriz en la representación de momento angular. También se describe como es conveniente en este caso descomponer los operadores de posición y momento en términos de sus componentes discretas y continuas, dado que el Hamiltoniano es periódico en el espacio.

6.2. Hamiltoniano atómico-óptico

Se comienza por considerar un átomo de dos niveles interactuando con dos ondas monocromáticas de la misma frecuencia, propagándose en sentidos opuestos, de manera tal de generar una onda estacionaria. A partir de este modelo se desea obtener, mediante una transformación del espacio de estados, un Hamiltoniano similar al del QKR pero con dos grados de libertad internos (los niveles atómicos en este caso) además de la coordenada traslacional. Si luego se toma que la intensidad de las ondas monocromáticas tiene una dependencia temporal tipo tren de deltas de Dirac, se obtiene la interacción periódica impulsiva característica del QKR. El procedimiento a seguir es aquel que se presenta en las referencias [37, 38], con la diferencia de que allí se considera una aproximación extra que permite eliminar el estado excitado del átomo de la dinámica del sistema.

El hamiltoniano de un átomo de dos niveles interactuando con una onda monocromática es de la forma

$$H = H_O + H_L, \quad (6.1)$$

siendo

$$H_O = \frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar\omega_0}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) \quad (6.2)$$

el hamiltoniano correspondiente a un átomo de dos niveles $|e\rangle$ y $|g\rangle$, donde el nivel excitado $|e\rangle$ se encuentra una energía $\hbar\omega_0$ por arriba del estado base $|g\rangle$. La coordenada z y su momento conjugado p describen el movimiento unidimensional del centro de masa del átomo, teniéndose entonces un término debido a la energía cinética del átomo y otro debido a la energía de cada uno de los niveles atómicos.

H_L corresponde al potencial debido a la interacción del átomo con dos ondas laser de igual frecuencia propagándose en sentidos opuestos, donde se supone que la intensidad del laser es tal que la interacción puede considerarse clásica:

$$\begin{aligned} H_L &= \hbar\Omega_1 \cos(k_L z - \omega_L t + \Phi_1) (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \\ &+ \hbar\Omega_2 \cos(k_L z + \omega_L t + \Phi_2) (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Realizando la aproximación de onda rotatoria (ver apéndice D) se tiene

$$\begin{aligned} H_L &= \frac{\hbar\Omega_1}{2} (e^{i(k_L z - \omega_L t + \Phi_1)} |e\rangle\langle g| + e^{-i(k_L z - \omega_L t + \Phi_1)} |g\rangle\langle e|) \\ &+ \frac{\hbar\Omega_2}{2} (e^{-i(k_L z + \omega_L t + \Phi_2)} |e\rangle\langle g| + e^{i(k_L z + \omega_L t + \Phi_2)} |g\rangle\langle e|). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Tomando las frecuencias de Rabi $\Omega_1 = -\Omega_2 = \Omega$ se tiene entonces

$$H_L = \hbar\Omega \cos(k_L z + \Phi_s) \left(e^{-i(\omega_L t + \Phi_d)} |e\rangle\langle g| + e^{i(\omega_L t + \Phi_d)} |g\rangle\langle e| \right), \quad (6.5)$$

con $\Phi_s = (\Phi_1 + \Phi_2)/2$ y $\Phi_d = (\Phi_1 - \Phi_2)/2$. Estas fases se pueden eliminar trasladando apropiadamente los orígenes el tiempo y de la coordenada z , obteniéndose

$$H_L = \hbar\Omega \cos(k_L z) (e^{-i\omega_L t} |e\rangle\langle g| + e^{i\omega_L t} |g\rangle\langle e|). \quad (6.6)$$

Es posible obtener a partir de esta última expresión un hamiltoniano independiente del tiempo considerando una transformación unitaria dependiente del tiempo $U(t)$ del espacio de estados. Realizando una transformación de este tipo el hamiltoniano se transforma como:

$$H' = i\hbar \frac{dU}{dt} U^\dagger + U H U^\dagger. \quad (6.7)$$

Tomando ahora la transformación unitaria

$$U(t) = e^{i(\omega_L |e\rangle\langle e| - \frac{\omega_0}{2} (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|))t} = e^{i(\omega_0 - \frac{\omega_L}{2})t} |e\rangle\langle e| + e^{-i\frac{\omega_L}{2}t} |g\rangle\langle g|, \quad (6.8)$$

se tiene

$$\frac{dU}{dt} U^\dagger = -\hbar \left(\omega_L |e\rangle\langle e| - \frac{\omega_0}{2} (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \right) \quad (6.9)$$

y el hamiltoniano finalmente queda

$$H = \frac{p^2}{2m} + \hbar\Delta |e\rangle\langle e| + \hbar\Omega \cos(k_L z) (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|), \quad (6.10)$$

que es independiente del tiempo como se buscaba. $\Delta = \omega_0 - \omega_L$ es el *detuning* entre la frecuencia del laser y la frecuencia asociada a la transición atómica. Se ha logrado pues, mediante la aproximación de onda rotatoria y una transformación unitaria del espacio de estados, eliminar de H la dependencia en el tiempo y el término $|g\rangle\langle g|$.

El procedimiento seguido hasta ahora es aquel encontrado en las referencias [37, 38]. Es a partir de esta última expresión que en dicha referencia se obtiene el Hamiltoniano del QKR mediante la aproximación adiabática [39] que permite eliminar el estado atómico excitado de la dinámica del sistema.

Para obtener un sistema con una excitación similar a la del QKR, correspondiente al QKR de dos niveles que se estudiara en este capítulo, es necesario considerar que la frecuencia de Rabi de las ondas monocromáticas depende del tiempo como un tren de deltas de Dirac de periodo T

$$\Omega(t) = \Omega_0 \delta_T(t). \quad (6.11)$$

Finalmente, se obtiene el Hamiltoniano del *Quantum Kicked Rotor* de dos niveles como

$$H = \hbar\Delta |e\rangle\langle e| + \frac{p^2}{2M} + K\delta_T(t) \cos(k_L z) (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|). \quad (6.12)$$

6.3. Obtención del mapa

6.3.1. Operador Evolución

La evolución temporal del QKR de dos niveles está dada por la ecuación de Schroedinger con el Hamiltoniano obtenido en la sección precedente, dado por la ecuación 6.12. Se desea estudiar la evolución temporal de la función de onda y de los momentos estadísticos de la distribución de probabilidad en el espacio de momentos. Dado que el Hamiltoniano del sistema es periódico en el tiempo es posible aplicar la teoría de Floquet para obtener una expresión de la evolución temporal del sistema en términos de un mapa en tiempo discreto y de un operador de Floquet. Esta expresión es útil, por ejemplo, para realizar simulaciones numéricas del sistema, y también será utilizada en algunos casos para obtener resultados analíticos. En esta sección se obtiene, a partir del Hamiltoniano precisado anteriormente, el operador de Floquet del sistema y una expresión para el mapa en el espacio de momentos. El tratamiento es muy similar al realizado para el QKR usual en la sección 3.3. La principal diferencia radica en que, al considerarse en este caso una coordenada lineal y no angular, el espectro del momento correspondiente no será discreto. Se verá que, descomponiendo los operadores en componentes discretas y continuas, es posible llegar a resultados análogos a los del QKR.

De manera análoga entonces a lo visto en la sección 3.3, el Hamiltoniano del QKR de dos niveles puede descomponerse como un término correspondiente a la evolución libre del sistema atómico, y otro correspondiente a la excitación que perturba el sistema de manera impulsiva periódicamente:

$$H(t) = H_0 + V(t), \quad (6.13)$$

siendo H_0 el hamiltoniano correspondiente al sistema libre

$$H_0 = \hbar\Delta|e\rangle\langle e| + \frac{p^2}{2M} \quad (6.14)$$

y $V(t)$ el término correspondiente a la excitación

$$V(t) = K\delta_T(t) \cos(k_L z) (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|). \quad (6.15)$$

Como se vio en la sección 3.3, el operador de Floquet U_T es responsable por la evolución temporal del sistema entre los tiempos nT^+ y $(n+1)T^+$

$$|\psi((n+1)T^+)\rangle = U_T |\psi(nT^+)\rangle. \quad (6.16)$$

Al igual que en el caso del QKR, dado que la perturbación actúa impulsivamente, la evolución del sistema entre los instantes nT^+ y $(n+1)T^+$ se deberá únicamente al Hamiltoniano libre. La acción de la perturbación $V(t)$ afecta la evolución del sistema únicamente en el intervalo entre nT^+ y $(n+1)T^+$. El operador de Floquet puede entonces descomponerse como

$$U_T = U_L U_K, \quad (6.17)$$

donde U_L es el operador evolución asociado a la evolución del sistema en el intervalo entre nT^+ y $(n+1)T^-$ y U_K entre nT^- y nT^+ . La evolución en el intervalo entre nT^+ y $(n+1)T^-$ está dada por la ecuación de Schroedinger debida únicamente al Hamiltoniano H_0 , el cual no depende del tiempo. Por lo tanto, el operador evolución U_L será

$$U_L = e^{-\frac{i}{\hbar} \left(\Delta \hbar |e\rangle \langle e| + \frac{p^2}{2M} \right) T}. \quad (6.18)$$

Realizando un procedimiento análogo al expuesto en la sección 3.3, se halla el operador U_K

$$U_K = e^{-iK \cos(k_L z) (|e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e|)} = e^{-i \frac{K}{\hbar} \cos(k_L z) \sigma_1}, \quad (6.19)$$

donde σ_1 es el operador asociado a la matriz de Pauli definida generalmente como σ_x ,

$$\sigma_1 = |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e| \quad (6.20)$$

Estos operadores se pueden dar en forma matricial proyectando en la base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ del espacio de niveles atómicos, donde en las siguientes expresiones p y z son operadores actuando sobre el espacio de Hilbert de la posición del centro de masa de la partícula. En estos términos, el operador U_L queda:

$$U_L = \begin{pmatrix} e^{-i\Delta T} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-i \frac{p^2}{2M\hbar} T} \quad (6.21)$$

Para hallar la expresión matricial de U_K se utiliza la siguiente propiedad de las matrices de Pauli

$$e^{ia\sigma} = I \cos(a) + i \sin(a) \sigma. \quad (6.22)$$

Se tiene entonces que

$$U_K = I \cos\left(\frac{K}{\hbar} \cos(k_L z)\right) - i\sigma_1 \sin\left(\frac{K}{\hbar} \cos(k_L z)\right). \quad (6.23)$$

Se desea ahora hallar los elementos de matriz de los operadores U_L y U_K en el espacio de momentos, de manera tal de tener una expresión del mapa discreto dado por la ecuación 6.16 en el espacio de momentos.

6.3.2. Cuasimomento

Como el potencial es periódico, es posible separar los operadores z y p en componentes discretas y continuas de la siguiente manera

$$z = k_L^{-1} (2\pi l + \theta) \quad (6.24)$$

$$p = \hbar k_L (k + \beta), \quad (6.25)$$

donde los autovalores de l y k son enteros, los autovalores de θ pertenecen al intervalo $[0, 2\pi)$ y los de β al intervalo $[-1/2, 1/2)$. Esta representación es conveniente dado que, como el potencial es periódico en la variable z , se puede ver que el Hamiltoniano del sistema conmuta con el operador β . Por lo tanto, β será una constante del movimiento, es decir que los subespacios con β determinado evolucionan independientemente: si se parte de un estado combinación lineal de autovectores de β correspondientes al mismo autovalor, el estado del sistema será para todo tiempo combinación lineal de autovectores de β correspondientes al mismo autovalor. En resumen, los subespacios con β determinado son invariantes bajo la acción repetida del operador de Floquet U_T .

Los autovectores del operador p pueden escribirse en términos de los autovectores de los operadores k y β de la siguiente manera

$$p|k + \beta\rangle = \hbar k_L (k + \beta) |k + \beta\rangle. \quad (6.26)$$

Los vectores de la forma $|k + \beta\rangle$ forman por lo tanto una base del espacio de estados. Un subespacio con β determinado consta de autovectores del operador p cuyos autovalores difieren entre sí por un múltiplo entero de $\hbar k_L$. Variando k únicamente se obtiene una base de vectores de cada subespacio con β dado. Esta base es discreta, por lo que si se restringe la evolución del sistema a un subespacio con β dado, es posible expresar el sistema en términos de una base discreta, y así obtener un mapa análogo al mapa para la evolución en el espacio de momentos del QKR usual. Esto es especialmente significativo a los efectos de realizar simulaciones numéricas del sistema, para lo cual es sumamente útil contar con una discretización del espacio de estados. A continuación se obtiene dicho mapa en términos de esta representación.

6.3.3. Mapa en el espacio de momentos

En función de las definiciones anteriores, la proyección de un autovector de el operador p sobre un autovector de z queda

$$\langle z|p\rangle = \langle z|j + \beta\rangle = \sqrt{\frac{k_L}{2\pi}} e^{i(j+\beta)k_L z}. \quad (6.27)$$

Además, la relación de clausura en z puede expresarse en términos de θ y l ,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dz |z\rangle \langle z| = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k_L} |k_L^{-1}(2\pi l + \theta)\rangle \langle k_L^{-1}(2\pi l + \theta)|. \quad (6.28)$$

Se calcula entonces el elemento de matriz en el espacio de momentos de U_K , que sólo depende del operador z ($U_K = U_K(z)$)

$$\langle p' | U_K(z) | p \rangle = \langle k' + \beta' | U_K(z) | k + \beta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz \langle k' + \beta' | U_K(z) | z \rangle \langle z | k + \beta \rangle \quad (6.29)$$

Usando que $U_K(z) = U_K(k_L^{-1}(2\pi l + \theta)) = U_K(k_L^{-1}\theta)$ (dado que $U_K(z)$ es periódico en z con período $2\pi k_L^{-1}$) y expresando la clausura en términos de θ y l se tiene

$$\langle k' + \beta' | U_K(z) | k + \beta \rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k_L} U_K(k_L^{-1}\theta) \langle k' + \beta' | k_L^{-1}(2\pi l + \theta) \rangle \langle k_L^{-1}(2\pi l + \theta) | k + \beta \rangle. \quad (6.30)$$

En virtud de la relación 6.27

$$\langle k_L^{-1}(2\pi l + \theta) | k + \beta \rangle = \sqrt{\frac{k_L}{2\pi}} e^{i\theta(k+\beta)} e^{i\beta 2\pi l}, \quad (6.31)$$

se tiene

$$\langle k' + \beta' | U_K(z) | k + \beta \rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} U_K(k_L^{-1}\theta) e^{i\theta(k+\beta-k'-\beta')} e^{i(\beta-\beta')2\pi l}. \quad (6.32)$$

La sumatoria en la variable l contribuye con una delta de Dirac

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i(\beta-\beta')2\pi l} = \delta(\beta - \beta'), \quad (6.33)$$

por lo que el elemento de matriz queda

$$\langle k' + \beta' | U_K(z) | k + \beta \rangle = \delta(\beta - \beta') \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} U_K(k_L^{-1}\theta) e^{i\theta(k-k')}. \quad (6.34)$$

Combinando este resultado con la ecuación 6.23 y utilizando la siguiente expresión para las funciones de Bessel

$$J_n(x) i^n = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-ix \cos(\theta)} e^{-in\theta}, \quad (6.35)$$

se obtiene finalmente la matriz $\langle k' + \beta' | U_K(z) | k + \beta \rangle$

$$\begin{aligned} \langle k' + \beta' | U_K(z) | k + \beta \rangle &= \delta(\beta - \beta') \left[I_{\frac{1}{2}} \left(J_{k-k'} \left(\frac{-K}{\hbar} \right) i^{k-k'} + J_{k-k'} \left(\frac{K}{\hbar} \right) i^{k-k'} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sigma_1 \frac{1}{2} \left(J_{k-k'} \left(\frac{-K}{\hbar} \right) i^{k-k'} - J_{k-k'} \left(\frac{K}{\hbar} \right) i^{k-k'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

La matriz correspondiente a la evolución libre ya es diagonal en la representación de momento

$$\begin{aligned} \langle k' + \beta' | U_L(z) | k + \beta \rangle &= \begin{pmatrix} e^{-i\Delta T} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle k' + \beta' | e^{-i\frac{p^2}{2M\hbar}T} | k + \beta \rangle \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\Delta T} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-i\frac{(k+\beta)^2 k_L^2 \hbar}{2M}T} \delta_{kk'} \delta(\beta - \beta'). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Las ecuaciones anteriores muestran que las evoluciones de subespacios con β diferente no se acoplan entre sí. De ahora en más se restringe el estudio a la evolución en un subespacio con un valor de β fijo. La función de onda en el espacio de momentos puede escribirse como el vector columna

$$\Psi_\beta(k, n) = \begin{pmatrix} \langle k + \beta, e | \Psi(n) \rangle \\ \langle k + \beta, g | \Psi(n) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_\beta^e(k, n) \\ \Psi_\beta^g(k, n) \end{pmatrix}, \quad (6.38)$$

donde el índice n nuevamente refiere al tiempo medido en unidades del período T de manera que $t = nT$.

La evolución temporal en un subespacio con β dado es de la forma

$$\Psi_\beta(k', n+1) = \sum_k U_T(\beta)_{k'k} \Psi_\beta(k, n), \quad (6.39)$$

donde la matriz $U_T(\beta)_{k'k}$ está dada por

$$\begin{pmatrix} U_T(\beta)_{k'k} = & \\ \left(\begin{array}{cc} (J_{k-k'}(-\kappa) + J_{k-k'}(\kappa)) e^{-i\tilde{\Delta}} & -(J_{k-k'}(-\kappa) - J_{k-k'}(\kappa)) e^{-i\tilde{\Delta}} \\ -(J_{k-k'}(-\kappa) - J_{k-k'}(\kappa)) & J_{k-k'}(-\kappa) + J_{k-k'}(\kappa) \end{array} \right) & \frac{i^{k-k'}}{2} e^{-i(k'+\beta)^2\tau} \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

y se definieron los parámetros adimensionados

$$\kappa = \frac{K}{\hbar} \quad (6.41)$$

$$\tau = \frac{k_L^2 \hbar}{2M} T \quad (6.42)$$

$$\tilde{\Delta} = \Delta T. \quad (6.43)$$

A diferencia del QKR común, en este caso la dinámica del sistema depende de tres parámetros adimensionados independientes. Dos de ellos, κ y τ , coinciden con los parámetros adimensionados del QKR. El parámetro $\tilde{\Delta}$ aparece debido a que es necesario especificar la diferencia de energía entre los niveles atómicos y no tiene análogo en el modelo del QKR.

Es de interés estudiar cualitativamente la evolución temporal del sistema, y en particular de los momentos estadísticos de la distribución de probabilidad en el espacio de momentos, en términos de los distintos valores que pueden tomar estos parámetros. Se desea a su vez comparar el comportamiento de este sistema, en lo que respecta a la evolución de los momentos, con el del QKR usual. También es de interés estudiar la evolución temporal de las probabilidades de ocupación de los estados del átomo, aunque estas magnitudes no tienen análogo con el QKR.

El mapa en el espacio de momento recién obtenido permite realizar simulaciones numéricas del sistema de manera sencilla, iterando la aplicación de una matriz a un vector de estados discreto. Es este el procedimiento utilizado para realizar las simulaciones numéricas que se presentan en el capítulo siguiente, en el cual se estudia la evolución temporal del *Quantum Kicked Rotor* de dos niveles para distintos valores de los parámetros del sistema.

6.4. Probabilidades de Ocupación y Momentos Estadísticos

A partir del mapa hallado en la sección anterior, es posible obtener el vector de onda del sistema en función del tiempo. Conocido el vector de onda, es de interés obtener la evolución temporal de las variables físicas del sistema: las probabilidades de ocupación de los estados excitado y base del átomo y los valores esperados de el momento y la energía.

La densidad de probabilidad de observar a la partícula en el estado excitado/base con momento $p = \hbar k_L (k + \beta)$, en un tiempo n , está dada por

$$\begin{aligned} P_e(\beta, k, n) &= |\Psi_\beta^e(k, n)|^2 \\ P_g(\beta, k, n) &= |\Psi_\beta^g(k, n)|^2 \end{aligned} \quad (6.44)$$

Por lo tanto, la probabilidad de medir a la partícula en el estado excitado/base está dada por

$$\begin{aligned} P_e(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} d\beta P_e(\beta, k, n) \\ P_g(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} d\beta P_g(\beta, k, n). \end{aligned} \quad (6.45)$$

La densidad de probabilidad de observar a la partícula con momento $\hbar k_L (k + \beta)$ está dada por

$$P(\beta, k, n) = P_e(\beta, k, n) + P_g(\beta, k, n). \quad (6.46)$$

El valor esperado del momento está dado por

$$\begin{aligned}
 \langle p \rangle &= \langle \Psi(n) | p | \Psi(n) \rangle & (6.47) \\
 &= \sum_{i=e,g} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \langle \Psi(n) | p | k + \beta, i \rangle \langle k + \beta, i | \Psi(n) \rangle \\
 &= \hbar k_L M_1(n).
 \end{aligned}$$

donde $M_1(n)$ es el primer momento estadístico de la distribución de probabilidad en el espacio de momentos

$$M_1(n) = \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k + \beta) P(\beta, k, n). \quad (6.48)$$

El valor esperado de la energía cinética del átomo está dado por

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle &= \frac{1}{2m} \langle \Psi(n) | p^2 | \Psi(n) \rangle & (6.49) \\
 &= \frac{1}{2m} \sum_{i=e,g} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \langle \Psi(n) | p^2 | k + \beta, i \rangle \langle k + \beta, i | \Psi(n) \rangle \\
 &= \frac{1}{2m} (\hbar k_L)^2 M_2(n),
 \end{aligned}$$

donde $M_2(n)$ es el segundo momento estadístico de la distribución de probabilidad en el espacio de momentos

$$M_2(n) = \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k + \beta)^2 P(\beta, k, n). \quad (6.50)$$

En el siguiente capítulo se utiliza el mapa dado por la matriz 6.40 para estudiar, analítica y numéricamente, la evolución temporal de estas magnitudes.

Capítulo 7

Evolución Resonante del *Quantum Kicked Rotor* de dos niveles en el subespacio $\beta = 0$

7.1. Introducción

En este capítulo se estudia la evolución temporal del *Quantum Kicked Rotor* de dos niveles, restringida al subespacio $\beta = 0$, para distintos valores de los tres parámetros adimensionados que definen las ecuaciones dinámicas del sistema. Es posible restringir el estudio de la dinámica a este subespacio dado que, como se vio en el capítulo anterior, la evolución temporal de cada subespacio con β dado es independiente de la de los demás. Para uno de estos subespacios la evolución del sistema está descrita por el mapa obtenido en el capítulo anterior dado por la ecuación 6.39. A partir de este mapa, se estudia la evolución temporal del vector de onda del sistema, y en particular se estudia la evolución temporal de los momentos estadísticos de la distribución de probabilidad en el espacio de momentos y de la probabilidad de encontrar al sistema en el estado base o excitado del átomo. Para ciertos valores de los parámetros es posible realizar un estudio analítico de la dinámica del sistema y obtener una expresión exacta para el vector de onda y por consiguiente para los momentos estadísticos. En otros casos no es posible integrar el problema analíticamente por lo que se apela a un estudio computacional mediante una iteración numérica del mapa. Los resultados obtenidos son comparados con los conocidos para el QKR y con los trabajos realizados en las referencias [40] y [38].

Suponer que el sistema se encuentra en un estado con $\beta = 0$ implica que el estado es una superposición coherente de autovectores de momento con autovalores múltiplos de $\hbar k_L$. En particular, si se consideran condiciones iniciales partiendo de un estado $|p = 0\rangle$, es decir con momento nulo, se tiene entonces que $\beta = 0$. Si se considera la realización atómico óptica de este sistema, debido a que la nube de átomos tiene una cierta temperatura, el estado inicial corresponderá a una mezcla incoherente de estados con valores distribuidos en el espacio de

momentos. La situación en que se considera que se parte de un estado inicial coherente con momento nulo puede verse entonces como una idealización que resulta de considerar el límite en que la temperatura tiende a cero [32].

Más allá de las consideraciones con respecto a una posible realización experimental de este modelo, aún así es de interés estudiar la evolución del sistema restringido a este subespacio con el objetivo de comparar los resultados obtenidos con aquellos conocidos para el *Quantum Kicked Rotor* estándar y el *Quantum Walk*. El estudio de la evolución temporal del sistema a partir de una mezcla incoherente de momentos, que se obtendría en una situación de temperatura finita, queda, al igual que el estudio de la decoherencia introducida por la emisión espontánea, como trabajo a futuro. Este trabajo se limita a estudiar únicamente la evolución coherente de los sistemas considerados.

Es importante notar que el modelo del QKR2L contiene un parámetro más que el del *Kicked Rotor* cuántico estándar, el parámetro Δ , por lo que se encuentran en este modelo comportamientos novedosos con respecto al modelo del QKR, obtenibles al ajustar este parámetro adicional. Además, otra novedad con respecto al modelo del QKR consiste en que ahora la descripción del estado del átomo de dos niveles requiere un mayor número de grados de libertad; además de describirse la posición del átomo a lo largo de una recta -lo que corresponde a los grados de libertad externos del sistema- también aparecen grados de libertad internos debido a la estructura de niveles de energía del átomo. El espacio de Hilbert del sistema es ahora el producto tensorial entre dos espacios de Hilbert, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}_c$, siendo \mathcal{H}_x el espacio de Hilbert correspondiente a la descripción de la posición y \mathcal{H}_c a la de los niveles de energía. En particular, si se restringe \mathcal{H}_x al subespacio con $\beta = 0$, el espacio de Hilbert resultante \mathcal{H}_s es discreto en la base $|\beta = 0, k\rangle$. El espacio de Hilbert del sistema restringido a este subespacio es $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_c$, que es el mismo en el cual está definido el modelo de la *Quantum Walk*, profundizándose aún más las similitudes entre los dos modelos.

Para un sistema compuesto por dos subsistemas, puede suceder que se generen correlaciones entre los observables pertenecientes a cada uno de los subsistemas. Este fenómeno se conoce como entrelazamiento o *entanglement* cuántico [9]. En particular es posible que un sistema genere un estado con entrelazamiento a partir de una condición inicial no entrelazada. Se puede cuantificar la magnitud de entrelazamiento generado. Una posible medida del *entanglement* es la llamada entropía de entrelazamiento del sistema [28, 25]. Esta se utiliza en este trabajo para caracterizar el *entanglement* generado para tiempos largos para la resonancia primaria $\tau = 2\pi$, en función de las condiciones iniciales del sistema.

En la segunda sección de este capítulo se trata la evolución del QKR2L cuando el sistema se encuentra en la condición de resonancia primaria del QKR, $\tau = 2\pi$. Se analiza, numérica y analíticamente en algunos casos, el comportamiento de la distribución de probabilidad en el espacio de momentos - a través de su segundo momento estadístico - y de las probabilidades de ocupación de los estados atómicos. Se estudian los distintos regímenes obtenibles al variar el parámetro Δ . En la tercera sección se estudia el entrelazamiento cuántico asintótico en términos de las condiciones iniciales para la resonancia primaria. En las dos secciones siguientes se estudian los casos de las resonancias secundarias y anti-resonancia en el parámetro τ . Finalmente, el capítulo concluye con una breve discusión de lo que ocurre fuera del subespacio

$\beta = 0$ y un análisis de las diferencias y similitudes entre este modelo y el del *Quantum Walk*.

7.2. Resonancia primaria en el Parámetro τ

Se considera en esta sección la evolución del sistema restringido al subespacio $\beta = 0$ en el caso en que el parámetro τ verifica la condición de resonancia primaria del QKR usual, $\tau = 2\pi$. Cuando se imponen estas dos condiciones la matriz de evolución $U_T(\beta = 0)_{k'k}$ del mapa dado por la ecuación 6.39 depende únicamente de la diferencia $k' - k$, por lo que el mapa es diagonalizable mediante una transformada de Fourier. Es decir, si se expresa la ecuación de la evolución temporal en términos de la variable θ tal como fue definida en el capítulo anterior, la evolución para distintos subespacios con θ fijo es independiente. Se realiza entonces una transformada de Fourier discreta para volver a la variable angular:

$$\Psi(\theta, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \Psi_{\beta=0}(k, n) e^{i\theta k}, \quad (7.1)$$

donde $\Psi(\theta, n)$ es, al igual que $\Psi_{\beta=0}(k, n)$, un espinor de dos componentes, $\Psi^e(\theta, n)$ y $\Psi^g(\theta, n)$. Para volver al espacio de momentos se tiene la transformación inversa,

$$\Psi_{\beta=0}(k, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\theta \Psi(\theta, n) e^{-i\theta k}. \quad (7.2)$$

La densidad de probabilidad en el espacio θ de encontrar a la partícula en el estado excitado/base está dada por

$$\begin{aligned} P_e(n, \theta) &= |\Psi^e(\theta, n)|^2 \\ P_g(n, \theta) &= |\Psi^g(\theta, n)|^2, \end{aligned} \quad (7.3)$$

por lo cual las probabilidades de ocupación de los estados excitado y base quedan

$$\begin{aligned} P_e(n) &= \int_0^{2\pi} d\theta P_e(n, \theta) = \int_0^{2\pi} d\theta |\Psi^e(\theta, n)|^2 \\ P_g(n) &= \int_0^{2\pi} d\theta P_g(n, \theta) = \int_0^{2\pi} d\theta |\Psi^g(\theta, n)|^2. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Para hallar expresiones para los primer y segundo momentos estadísticos de la distribución de probabilidad en el espacio de momentos, se observa que el operador momento lineal p , restringido al subespacio $\beta = 0$, actúa sobre las funciones de onda expresadas en términos de θ como $p = -i\hbar k_L \frac{\partial}{\partial \theta}$. Se obtiene entonces para los primer y segundo momentos expresiones muy similares a las dadas por las ecuaciones 3.59

CAPÍTULO 7. EVOLUCIÓN RESONANTE DEL QUANTUM KICKED ROTOR DE DOS NIVELES EN EL SUBESPACIO $\beta = 0$

$$\begin{aligned} M_1(n) &= \frac{\langle p \rangle}{\hbar k_L} = -i \int_0^{2\pi} d\theta \Psi^\dagger(\theta, t = nT) \frac{\partial \Psi(\theta, t = nT)}{\partial \theta} \\ M_2(n) &= \frac{\langle p^2 \rangle}{(\hbar k_L)^2} = - \int_0^{2\pi} d\theta \Psi^\dagger(\theta, t = nT) \frac{\partial^2 \Psi(\theta, t = nT)}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Se desea ahora estudiar la evolución temporal de las probabilidades de ocupación y de los valores esperados apelando a las fórmulas recién expuestas. Para poder aplicar dichas fórmulas es necesario conocer la función de onda $\Psi(\theta, n)$ para todo tiempo n . Para esto es necesario resolver la evolución temporal del sistema, dada en el espacio de momentos por el mapa de la ecuación 6.39 (evaluado para $\beta = 0$)

$$\Psi_{\beta=0}(k', n+1) = \sum_k U_T(\beta=0)_{k'k} \Psi_{\beta=0}(k, n).$$

Multiplicando esta ecuación por $e^{ik'\theta}/\sqrt{2\pi}$ y sumando en k' entre $-\infty$ y ∞ se tiene

$$\begin{aligned} \Psi(\theta, n+1) &= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik'\theta}}{\sqrt{2\pi}} \Psi_{\beta=0}(k', n+1) \\ &= \sum_{k', k=-\infty}^{\infty} U_T(\beta=0)_{k'k} \frac{e^{ik'\theta}}{\sqrt{2\pi}} \Psi_{\beta=0}(k, n) \\ &= \sum_{k', k=-\infty}^{\infty} U_T(\beta=0)_{k'k} e^{i(k'-k)\theta} \frac{e^{ik\theta}}{\sqrt{2\pi}} \Psi_{\beta=0}(k, n). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Cuando $\tau = 2\pi$ la matriz $U_T(\beta=0)_{k'k}$ sólo depende de la diferencia $k' - k$. Entonces, es posible reemplazar la suma en k' por una suma en $k' - k$. Se obtiene finalmente

$$\Psi(\theta, n+1) = U_T(\theta) \Psi(\theta, n), \quad (7.7)$$

donde $U_T(\theta)$ está definido como

$$U_T(\theta) = \sum_{k'-k=-\infty}^{\infty} U_T(\beta=0)_{k'k} e^{i(k'-k)\theta}, \quad (7.8)$$

expresión que no depende de k o de k' por separado dado que $U_T(\beta=0)_{k'k} = U_T(\beta=0)_{k'-k}$.

Para calcular $U_T(\theta)$ se apela a la siguiente propiedad de las funciones de Bessel de primera especie

$$e^{iz \cos(\theta)} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} i^u J_u(z) e^{iu\theta} \quad (7.9)$$

Finalmente se obtiene la matriz de Floquet en el espacio de posición angular $U_T(\theta)$,

$$U_T(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\tilde{\Delta}} \cos(\kappa \cos(\theta)) & -ie^{-i\tilde{\Delta}} \sin(\kappa \cos(\theta)) \\ -i \sin(\kappa \cos(\theta)) & \cos(\kappa \cos(\theta)) \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Esta matriz es la expresión en el espacio de posición del producto $e^{-i\Delta T|e\rangle\langle e|} U_K(z = \theta/k_L)$, donde $U_K(z)$ fue definida en el capítulo anterior en la ecuación 6.18. Este resultado se podría haber obtenido sin realizar la transformación de Fourier observando que cuando τ cumple la condición de la resonancia primaria, el término en la evolución libre del átomo correspondiente a la energía cinética del centro de masa, de la forma $e^{-i\frac{T}{\hbar} \frac{p^2}{2M}}$, se comporta como la identidad cuando actúa sobre el subespacio $\beta = 0$. Este término de la evolución libre del átomo es diagonal en el espacio de momentos y sus componentes en la base $|k + \beta\rangle$ son

$$\langle k + \beta | e^{-i\frac{T}{\hbar} \frac{p^2}{2M}} | k + \beta \rangle = e^{-i\tau(k+\beta)^2}. \quad (7.11)$$

En el caso en que $\beta = 0$ y $\tau = 2n\pi$, dado que k toma valores enteros, todos estos elementos son iguales a 1 y el operador se comporta entonces como la identidad cuando actúa sobre el subespacio $\beta = 0$. Por lo tanto, el operador correspondiente a la evolución libre del sistema será de la forma $U_L = e^{-i\Delta T|e\rangle\langle e|}$ y el operador de Floquet, $U_T = U_L U_K$ queda de esta forma diagonal en su representación en términos de z . Dado que además es periódico en z , con periodo $1/k_L$, dicho operador puede expresarse únicamente en términos de la variable θ . Este comportamiento es completamente análogo a lo que sucede con el QKR usual en resonancia primaria. Esta situación no es exclusiva al subespacio $\beta = 0$, sino que sucede cuando existe cierta relación entre el parámetro τ y el valor de β correspondiente al subespacio considerado. Esta última observación se estudia con más detalle en la penúltima sección de este capítulo, donde se considera brevemente la evolución del sistema fuera del subespacio $\beta = 0$.

Utilizando el mapa en el espacio de posición angular es posible resolver la evolución temporal del sistema y obtener la función de onda en un tiempo n a partir de condiciones iniciales genéricas como

$$\Psi(\theta, n) = U_T(\theta)^n \Psi(\theta, n = 0). \quad (7.12)$$

Para obtener una expresión explícita de $\Psi(\theta, n)$ en términos de las condiciones iniciales $\Psi(\theta, 0)$ es necesario conocer explícitamente la matriz $U_T(\theta)^n$. La matriz $U_T(\theta)$ puede escribirse como

$$U_T(\theta) = G(\theta) D(\theta) G(\theta)^\dagger, \quad (7.13)$$

donde la matriz $D(\theta)$ es una matriz diagonal conformada por los valores propios de $U_T(\theta)$ y $G(\theta)$ es una matriz unitaria conformada por los vectores propios de $U_T(\theta)$. En estos términos se tiene, para $U_T(\theta)^n$

$$U_T(\theta)^n = G(\theta) D(\theta)^n G(\theta)^\dagger, \quad (7.14)$$

donde $D(\theta)^n$ es una matriz diagonal que consta de las potencias enésimas de los valores propios de $U_T(\theta)$.

Conocida $\Psi(\theta, n)$ es posible obtener la evolución temporal de los momentos estadísticos de la distribución de probabilidad en el espacio de momentos apelando a las fórmulas

$$\begin{aligned} M_1(n) &= \frac{\langle J \rangle}{\hbar} = -i \int_0^{2\pi} d\theta \psi^*(\theta, t = nT) \frac{\partial \psi(\theta, t = nT)}{\partial \theta} \\ M_2(n) &= \frac{2I \langle H_0 \rangle}{\hbar^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \psi^*(\theta, t = nT) \frac{\partial^2 \psi(\theta, t = nT)}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Este camino es demasiado engorroso para el estudio analítico si se considera un $\tilde{\Delta}$ genérico. Por este motivo, a continuación se analizan dos casos particulares especialmente significativos, relegándose el caso general a un estudio numérico.

7.2.1. Caso $\tilde{\Delta} = (2n + 1)\pi$ - Antirresonancia

En el caso en que $\tilde{\Delta} = (2n + 1)\pi$, con n entero, la matriz $U_T(\theta)$ queda

$$U_T(\theta) = \begin{pmatrix} -\cos(\kappa \cos(\theta)) & i \sin(\kappa \cos(\theta)) \\ -i \sin(\kappa \cos(\theta)) & \cos(\kappa \cos(\theta)) \end{pmatrix}, \quad (7.16)$$

que puede escribirse en términos de las matrices de Pauli σ_2 y σ_3

$$U_T(\theta) = -\cos(\kappa \cos(\theta)) \sigma_3 - \sin(\kappa \cos(\theta)) \sigma_2 \quad (7.17)$$

A partir de esta expresión es sencillo calcular $U_T(\theta)^2$

$$\begin{aligned} U_T(\theta)^2 &= \cos^2(\kappa \cos(\theta)) \sigma_3^2 + \sin^2(\kappa \cos(\theta)) \sigma_2^2 \\ &+ \cos(\kappa \cos(\theta)) \sin(\kappa \cos(\theta)) (\sigma_3 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3) = Id \end{aligned} \quad (7.18)$$

donde en la última igualdad se utilizó que $\sigma_3^2 = \sigma_2^2 = Id$ y que el anticonmutador de las matrices de Pauli es nulo. De esta ecuación se obtiene, para la matriz de evolución del sistema a lo largo de un tiempo n

$$U_T(\theta)^n = \begin{cases} U_T(\theta) & \text{si } n \text{ es impar} \\ Id & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad (7.19)$$

Por lo tanto, la evolución temporal de la función de onda $\Psi(\theta, n)$ es periódica, y está dada por

$$\Psi(\theta, n) = \begin{cases} U_T(\theta) \Psi(\theta, 0) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \Psi(\theta, 0) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad (7.20)$$

De esto último se deduce que la evolución temporal de los momentos estadísticos de la distribución de probabilidad será periódica. Por el mismo motivo también lo será la probabilidad de encontrar a la partícula en los estados excitado o base.

En las figuras 7.1 y 7.2 se presentan los resultados de simulaciones numéricas de la evolución del sistema, realizadas mediante la iteración del mapa 6.39. La figura 7.1 presenta la evolución temporal del segundo momento estadístico y de las probabilidades de ocupación a partir de la condición inicial $|\Psi(n=0)\rangle = |k=0, \beta=0, e\rangle$ y $\kappa = 10$. La figura 7.2 presenta la evolución temporal de las mismas variables a partir de la condición inicial $|\Psi(n=0)\rangle = |k=0, \beta=0, g\rangle$.

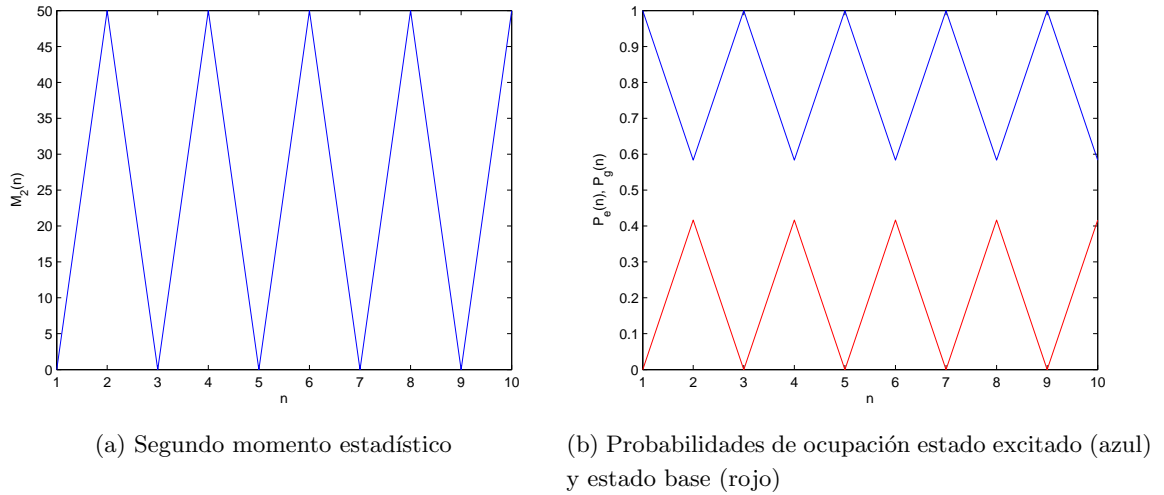
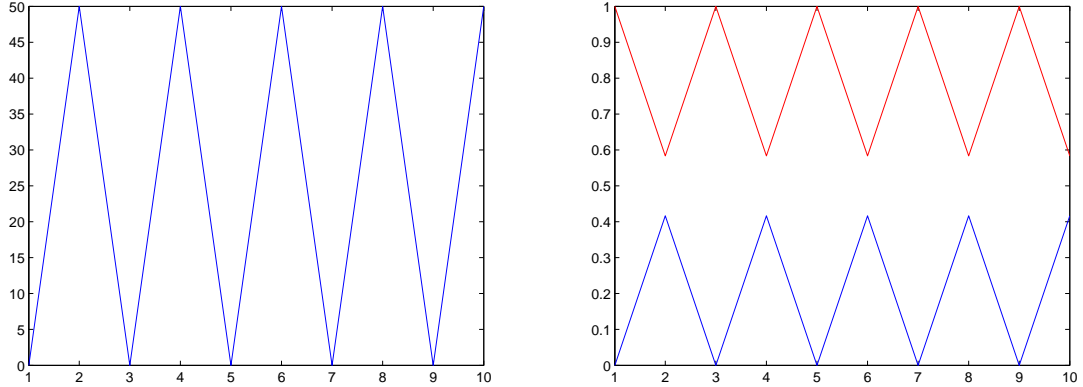


Figura 7.1: Evolución temporal para τ en resonancia primaria y $\tilde{\Delta} = (2n + 1)\pi$ a partir de la condición inicial $|\Psi(n=0)\rangle = |k=0, \beta=0, e\rangle$

En ambas figuras puede apreciarse la periodicidad del segundo momento y de las probabilidades de ocupación. Se observa que la figura 7.2 (b) constituye la imagen especular de la figura 7.1 (b), lo cual es consistente con las condiciones iniciales particulares elegidas.

Esta situación de anti-resonancia, ajustando el parámetro $\tilde{\Delta}$ a un valor particular, no tiene análogo en el QKR. No sólo debido a que el parámetro $\tilde{\Delta}$ no aparece en el QKR sino que además en dicho sistema la anti-resonancia se obtiene fijando el parámetro $\tau = \pi$, valor que es distinto al considerado en esta sección. Se observa entonces una nueva anti-resonancia en la cual el parámetro τ se fija en su valor resonante del QKR y es el parámetro $\tilde{\Delta}$ el que se ajusta para obtener el comportamiento periódico.

Se verá en las siguientes subsecciones que para los demás valores del parámetro $\tilde{\Delta}$, con $\tau = 2\pi$ (resonancia del QKR), el QKR2L se comporta de manera conforme al comportamiento resonante del QKR, observándose en todos los casos un crecimiento cuadrático del segundo momento.



(a) Segundo Momento

(b) Probabilidades de ocupación estado excitado (azul) y estado base (rojo)

Figura 7.2: Evolución temporal para τ en resonancia primaria y $\tilde{\Delta} = (2n + 1) \pi$ a partir de la condición inicial $|\Psi(n = 0)\rangle = |k = 0, \beta = 0, g\rangle$

7.2.2. Caso $\tilde{\Delta} = 2n\pi$

En el caso en que $\tilde{\Delta} = 2n\pi$, con n entero, la matriz $U_T(\theta)$ queda

$$U_T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\kappa \cos(\theta)) & -i \sin(\kappa \cos(\theta)) \\ -i \sin(\kappa \cos(\theta)) & \cos(\kappa \cos(\theta)) \end{pmatrix}, \quad (7.21)$$

que puede escribirse en términos de la matriz de Pauli σ_1 como

$$U_T(\theta) = \cos(\kappa \cos(\theta)) 1 - i \sin(\kappa \cos(\theta)) \sigma_1 = e^{-i\kappa \cos(\theta) \sigma_1}. \quad (7.22)$$

A partir de esta expresión es sencillo hallar la matriz $U_T(\theta)^n$ responsable de la evolución temporal del sistema

$$U_T(\theta)^n = e^{-in\kappa \cos(\theta) \sigma_1}, \quad (7.23)$$

que en componentes queda

$$U_T(\theta)^n = \begin{pmatrix} \cos(n\kappa \cos(\theta)) & -i \sin(n\kappa \cos(\theta)) \\ -i \sin(n\kappa \cos(\theta)) & \cos(n\kappa \cos(\theta)) \end{pmatrix}. \quad (7.24)$$

Apelando a la ecuación 7.12 se obtiene la función de onda en términos de las condiciones iniciales $\Psi^e(\theta, n = 0)$ y $\Psi^g(\theta, n = 0)$

$$\Psi(\theta, n) = \begin{pmatrix} \cos(n\kappa \cos(\theta)) \Psi^e(\theta, n = 0) - i \sin(n\kappa \cos(\theta)) \Psi^g(\theta, n = 0) \\ -i \sin(n\kappa \cos(\theta)) \Psi^e(\theta, n = 0) + \cos(n\kappa \cos(\theta)) \Psi^g(\theta, n = 0) \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

Conocida la evolución temporal de la función de onda, es posible utilizar las expresiones 7.4 y 7.5 para obtener la evolución temporal de las probabilidades de ocupación y de los momentos estadísticos.

De la ecuación anterior se obtiene la densidad de probabilidad en θ de encontrar a la partícula en el estado excitado en términos de condiciones iniciales genéricas dadas por $\Psi^e(\theta, 0)$ y $\Psi^g(\theta, 0)$

$$\begin{aligned} |\Psi^e(\theta, n)|^2 &= \frac{[|\Psi^e(\theta, 0)|^2 + |\Psi^g(\theta, 0)|^2]}{2} \\ &+ \cos(2n\kappa \cos(\theta)) [|\Psi^e(\theta, 0)|^2 - |\Psi^g(\theta, 0)|^2] \\ &+ 2 \sin(2n\kappa \cos(\theta)) \cos(2n\kappa \cos(\theta)) \Re\{i\Psi^e(\theta, 0) \Psi^g(\theta, 0)^*\}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

De esta última expresión es posible inferir como será el comportamiento asintótico de la probabilidad de encontrar a la partícula en el estado excitado, $P_e(n)$. Para obtener $P_e(n)$ es necesario integrar la ecuación anterior en θ desde 0 a 2π . La integral del primer término de la expresión anterior es $1/2$, dado que $\int [|\Psi^e(\theta, 0)|^2 + |\Psi^g(\theta, 0)|^2] d\theta = 1$. Las integrales de los últimos dos términos dan lugar a integrales de la forma

$$I(n) = \int_0^\pi f(\theta) e^{ing(\theta)} d\theta. \quad (7.27)$$

Para $n \gg 1$, $I(n)$ es la integral de una función supuesta regular $f(\theta)$ por una función que oscila rápidamente. Esta integral tiende a cero cuando n tiende a infinito. Por lo tanto, las integrales de los últimos dos términos de la ecuación 7.26 tienden a cero cuando n tiende a infinito. Dado que una vez que se hace la integral en θ estos son los únicos términos que dependen de las condiciones iniciales, se puede concluir que $P_e(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$ independientemente de la condición inicial.

En la figura 7.3 se muestra la evolución temporal de la probabilidad de ocupación del estado base, obtenida mediante simulaciones numéricas, para distintas condiciones iniciales. La figura (a) parte de la condición inicial $|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\beta=0, k=5, e\rangle + |\beta=0, k=-5, e\rangle)$. La figura (b) parte de la condición inicial $|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \Psi(0)|\Psi(0)\rangle}} \sum_{k=-5}^5 e^{ik} e^{-k^2/3} |\beta=0, k, g\rangle$. La figura (c) parte de la condición inicial $|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \Psi(0)|\Psi(0)\rangle}} \sum_{k=-5}^5 (\frac{1}{2} |\beta=0, k, e\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} |\beta=0, k, g\rangle)$. En todos los casos se observa que la probabilidad presenta una oscilación amortiguada alrededor del valor $1/2$. Que tan rápido es el decaimiento de la oscilación depende de la condición inicial elegida.

Para el caso particular en que el sistema parte de una superposición de estados excitado y base con momento nulo es posible obtener una expresión sencilla de las probabilidades de ocupación para todo tiempo en términos de las condiciones iniciales. El vector de onda en el instante inicial en este caso es de la forma

$$|\Psi(n=0)\rangle = \cos(\alpha) |k+\beta=0, e\rangle + \sin(\alpha) e^{i\phi} |k+\beta=0, g\rangle, \quad (7.28)$$

CAPÍTULO 7. EVOLUCIÓN RESONANTE DEL *QUANTUM KICKED ROTOR* DE DOS NIVELES EN EL SUBESPACIO $\beta = 0$

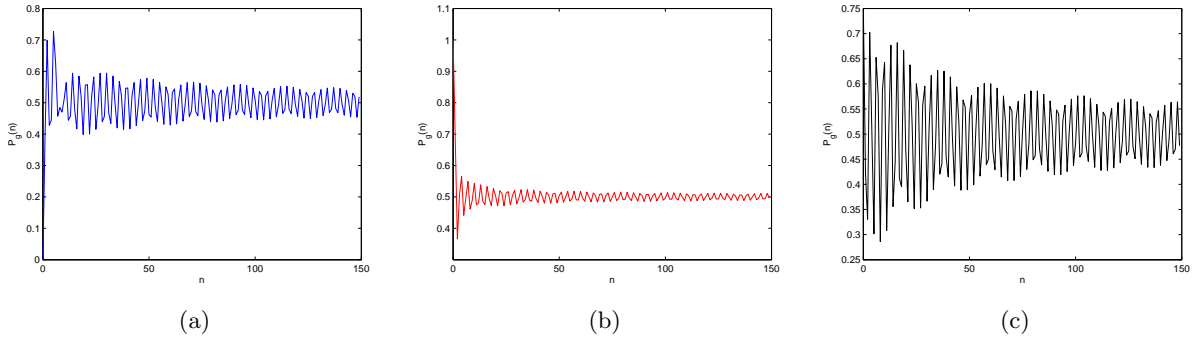


Figura 7.3: Evolución temporal de la probabilidad de ocupación del estado base a partir de distintas condiciones iniciales.

donde la superposición en términos de los ángulos α y ϕ constituye la superposición más general posible de los dos estados. Esta condición inicial en la función de onda en θ queda, apelando a la fórmula 7.1

$$\Psi(\theta, n=0) = \begin{pmatrix} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2\pi}} \\ e^{i\phi} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2\pi}} \end{pmatrix}. \quad (7.29)$$

Insertando esta condición inicial en la ecuación 7.26, se tiene, para la componente del vector de onda correspondiente al estado excitado

$$\begin{aligned} |\Psi^e(\theta, n)|^2 &= \frac{\cos^2 \alpha}{2\pi} \cos^2(n\kappa \cos(\theta)) + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \alpha}{2\pi} \sin^2(n\kappa \cos(\theta)) \\ &+ 2 \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{2\pi} \cos(n\kappa \cos(\theta)) \sin(n\kappa \cos(\theta)) \Re\{ie^{-i\phi}\}, \end{aligned} \quad (7.30)$$

que queda finalmente

$$\begin{aligned} |\Psi^e(\theta, n)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \cos(2n\kappa \cos(\theta)) (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &- 2 \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{2\pi} \cos(n\kappa \cos(\theta)) \sin(n\kappa \cos(\theta)) \Re\{ie^{i\phi}\} \end{aligned} \quad (7.31)$$

Para hallar la probabilidad de ocupación del estado excitado es necesario integrar en θ entre 0 y 2π (o entre $-\pi$ y π) la densidad de probabilidad anterior. La integral del último término de la expresión anterior es nula, dado que este término es impar en la variable θ alrededor de $\theta = \pi/2$. Esto se puede ver considerando el cambio de variable $\theta = x + \pi/2$

$$\begin{aligned} \cos(n\kappa \cos(\theta)) \sin(n\kappa \cos(\theta)) &= \cos(n\kappa \cos(x + \pi/2)) \sin(n\kappa \cos(x + \pi/2)) \\ &= -\cos(n\kappa \sin(x)) \sin(n\kappa \sin(x)), \end{aligned} \quad (7.32)$$

donde el último miembro es una función impar en x y por lo tanto su integral entre $x = -\pi$ y $x = \pi$ es igual a cero.

La integral del segundo término de la ecuación 7.31 puede obtenerse en términos de funciones de Bessel apelando a la fórmula

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(a \cos(\theta)) d\theta = J_0(a). \quad (7.33)$$

Se obtiene entonces finalmente la probabilidad de ocupación del estado excitado en función del tiempo y de los parámetros que determinan la condición inicial

$$P_e(n) = \frac{1}{2} + \frac{J_0(2n\kappa)}{2} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (7.34)$$

La probabilidad de ocupación del estado base puede obtenerse como $P_g(n) = 1 - P_e(n)$. De estas ecuaciones se observa que ambas probabilidades de ocupación tienden a $1/2$ cuando el tiempo tiende a infinito, independientemente de las condiciones iniciales.

Para calcular el comportamiento cualitativo de los momentos estadísticos en función del tiempo, es posible utilizar la expresión $\Psi(\theta, n) = e^{-in\kappa \cos(\theta)\sigma_1} \Psi(\theta, n=0)$ y apelar a las fórmulas 7.5. Se tiene entonces, para dichas cantidades

$$M_1(n) = n\kappa \int_0^{2\pi} d\theta \Psi^\dagger(\theta, t=0) \sigma_1 \Psi(\theta, t=0) \sin(\theta) + M_1(0) \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned} M_2(n) &= (n\kappa)^2 \int_0^{2\pi} d\theta |\Psi(\theta, t=0)|^2 \sin^2(\theta) \\ &- in\kappa \int_0^{2\pi} d\theta \Psi^\dagger(\theta, t=0) \sigma_1 \left(\cos(\theta) \Psi(\theta, t=0) + 2 \sin(\theta) \frac{\partial \Psi(\theta, t=0)}{\partial \theta} \right) \\ &+ M_2(0). \end{aligned} \quad (7.36)$$

Estas expresiones son muy similares a las fórmulas correspondientes para los momentos del QKR usual dadas por las expresiones 3.60 y 3.61, y de hecho se reducen a esas expresiones si se sustituye σ_1 por la matriz identidad. La forma cualitativa de la evolución temporal de los momentos es entonces muy similar a la del QKR usual; el primer momento crece linealmente con el tiempo n y el segundo de manera cuadrática. Los factores multiplicativos dependen de la forma particular de la condición inicial. En particular, se nota que el factor que multiplica el término cuadrático en el tiempo corresponde a la integral de una cantidad positiva y por lo tanto será no nulo para cualquier condición inicial, situación idéntica a lo que sucede en el QKR.

Estos resultados pueden verificarse mediante simulaciones numéricas del sistema apelando al mapa 6.39. La figura 7.4 muestra la evolución del sistema a partir de la condición inicial $|\Psi(n=0)\rangle = |k + \beta = 0, e\rangle$ y utilizando $\kappa = 1$.

En la figura 7.4 (a) se observa el crecimiento cuadrático del segundo momento, confirmado por el ajuste lineal a la traza en escala logarítmica (figura 7.4 (b)). Este resultado está de

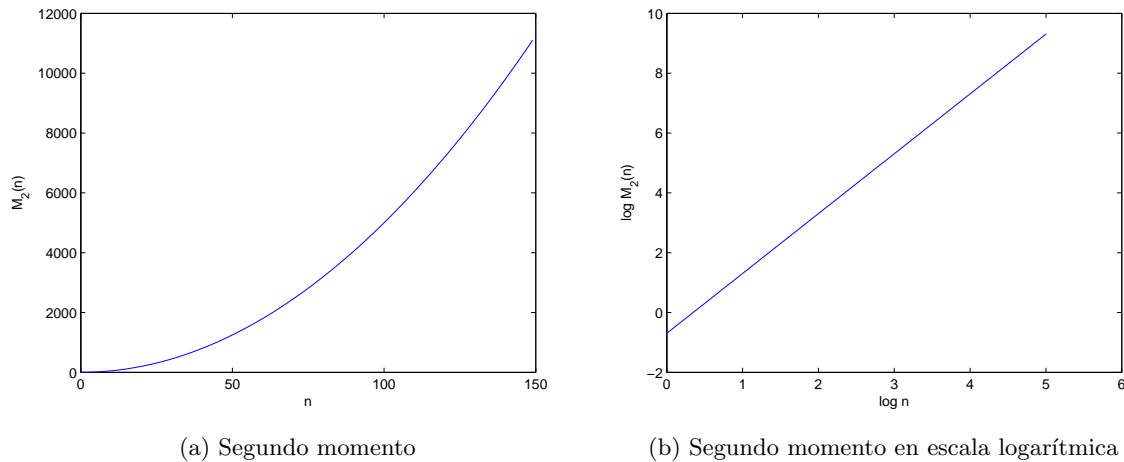


Figura 7.4: Evolución temporal de la energía cinética adimensionalada (Segundo momento) para τ en resonancia primaria y $\tilde{\Delta} = 2n\pi$ a partir de la condición inicial $|\Psi(n=0)\rangle = |k=0, \beta=0, e\rangle$

acuerdo con lo esperado a partir de la ecuación 7.36. El mismo resultado se ha observado para una variedad de condiciones iniciales, en todos los casos encontrándose un crecimiento cuadrático del segundo momento en función del tiempo.

7.2.3. $\tilde{\Delta}$ distinto de $n\pi$

En las subsecciones anteriores se analizó el comportamiento del QKR de dos niveles en los casos en que $\tilde{\Delta} = n\pi$. Se encontró analíticamente que el sistema presenta un comportamiento periódico en el caso en que n es impar. En el caso en que n es par, se encontró, también de manera analítica, que el sistema se comporta de manera similar al QKR en lo que respecta al crecimiento cuadrático del segundo momento en el tiempo. Como se mencionó al principio de este capítulo, el estudio analítico de la evolución del sistema para τ en resonancia primaria a partir del mapa 7.7 es demasiado trabajoso para $\tilde{\Delta}$ distinto de $n\pi$, por lo que en esta subsección se muestran los resultados obtenidos al estudiar el problema mediante simulaciones numéricas.

En lo que respecta a la evolución temporal de las probabilidades de ocupación, se observó mediante simulaciones que si se consideran condiciones iniciales con momento nulo, ($k + \beta = 0$), para valores de $\tilde{\Delta}$ cercanos a cero, el comportamiento es similar al caso con $\tilde{\Delta} = 2n\pi$, donde se observa una oscilación amortiguada alrededor de un valor asintótico. A medida que $\tilde{\Delta}$ se acerca a π , se observó que la oscilación inicial se vuelve más prolongada y de mayor amplitud, lo que es consistente con el hecho de que para $\tilde{\Delta} = \pi$ se tiene un comportamiento periódico. La figura muestra la evolución temporal de la probabilidad de ocupación del estado base para distintos valores de $\tilde{\Delta}$, en todos los casos partiendo de la condición inicial $|\Psi(0)\rangle = |k + \beta = 0, g\rangle$ y $\kappa = 10$.

7.2. RESONANCIA PRIMARIA EN EL PARÁMETRO τ

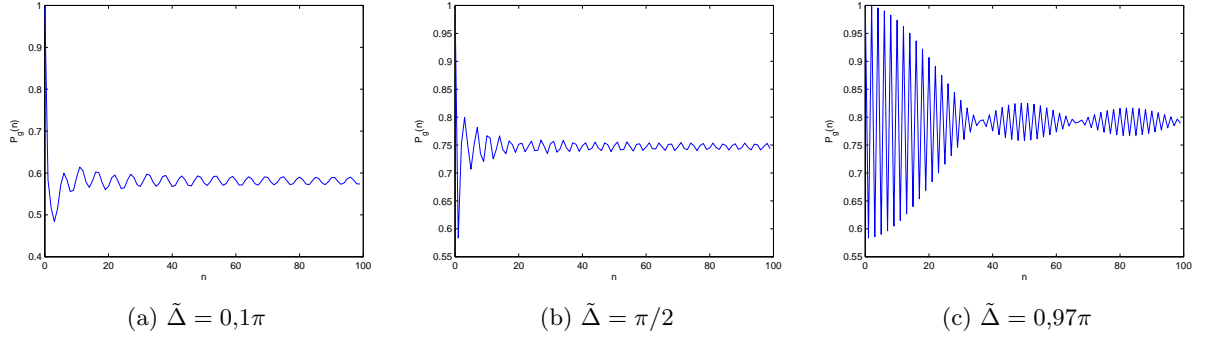


Figura 7.5: Probabilidad de ocupación del estado base para distintos valores de $\tilde{\Delta}$ y condiciones iniciales fijas

A diferencia de lo que sucede en el caso en que $\tilde{\Delta} = 2n\pi$, se constata en las simulaciones que en este caso el valor asintótico de las probabilidades de ocupación no es $1/2$ independientemente de la condición inicial, sino que este valor depende del estado inicial del sistema. La figura 7.6 muestra este fenómeno para distintas condiciones iniciales de la forma $|\Psi(n=0)\rangle = \cos(\alpha)|k+\beta=0, e\rangle + \sin(\alpha)e^{i\phi}|k+\beta=0, g\rangle$.

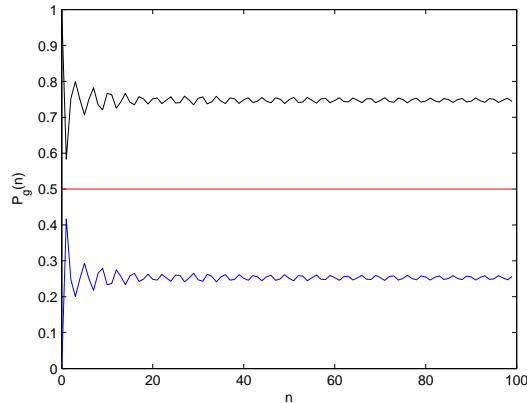


Figura 7.6: Probabilidad de ocupación del estado base para $\tilde{\Delta} = \pi/2$ y $\alpha = 0$ (azul), $\alpha = \pi/4$ (rojo), y $\alpha = \pi/2$ (negro).

En lo que respecta a la evolución del segundo momento estadístico, se observa que para todos los casos el comportamiento a tiempos largos presenta un crecimiento cuadrático. Para valores de $\tilde{\Delta}$ cercanos a π , en los primeros instantes de la evolución temporal se observa una oscilación, como se puede apreciar en la figura 7.7, producida a partir de las mismas condiciones que la figura 7.5. Dicha oscilación es más prolongada y de mayor amplitud mientras más cercano sea $\tilde{\Delta}$ a π , pero en todos los casos a tiempos largos sobrevive el comportamiento cuadrático, de manera análoga a lo que se observó sucede para las probabilidades de ocupación. Se concluye entonces que en lo que respecta el comportamiento del segundo momento para τ en resonancia primaria, el crecimiento es cuadrático para casi todos los valores de $\tilde{\Delta}$,

observándose la anti-resonancia solo para el caso particular $\tilde{\Delta} = (2n + 1)\pi$.

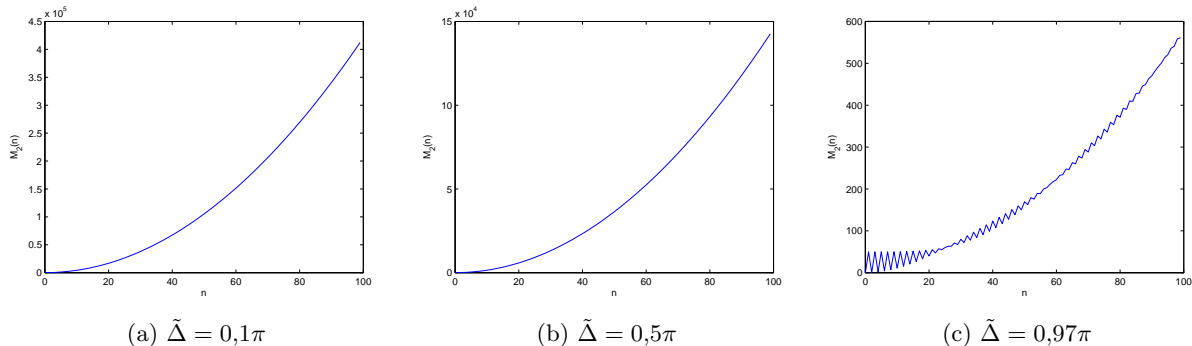


Figura 7.7: Segundo momento para distintos valores de $\tilde{\Delta}$ y condiciones iniciales fijas

7.3. Entrelazamiento cuántico entre los grados de libertad internos y externos

Si se considera un sistema cuántico compuesto de dos sub-sistemas, el fenómeno del *entanglement* o entrelazamiento cuántico [9] está relacionado con la aparición de correlaciones entre observables pertenecientes a uno de los subsistemas con observables pertenecientes al otro. En un sistema cuántico con espacio de Hilbert compuesto por el producto de dos espacios, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, un estado $|\Psi\rangle$ en \mathcal{H} estará entrelazado si no puede expresarse como el producto $|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_1 \otimes |\Psi\rangle_2$, siendo $|\Psi\rangle_1$ y $|\Psi\rangle_2$ vectores pertenecientes \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 respectivamente. Si $|\Psi\rangle$ pudiera expresarse como un estado producto, entonces el valor esperado de cualquier dos observables A_1 y A_2 , que actúen sobre \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 respectivamente, sería $\langle A_1 A_2 \rangle = \langle A_1 \rangle \langle A_2 \rangle$ y por lo tanto la correlación sería nula.

En este marco, es interesante considerar si la evolución del QKR2L genera entrelazamiento a partir de una condición inicial no entrelazada. Es posible cuantificar, mediante una cierta medida a introducir a continuación, la magnitud del entrelazamiento generado en función de las condiciones iniciales del problema. Este entrelazamiento irá variando en el tiempo, tendiendo en este caso hacia un valor asintótico. Se puede hallar en particular la dependencia de este valor asintótico con la condición inicial elegida.

El *entanglement* entre los grados de libertad internos y externos puede caracterizarse por la entropía de von Neumann de la matriz densidad reducida [28]. La matriz densidad de un sistema cuántico se define como el operador

$$\rho = |\Psi(n)\rangle \langle \Psi(n)| \quad (7.37)$$

La matriz densidad reducida se halla tomando la traza de la matriz densidad en el espacio de momento. Para el caso en que se considera el sistema restringido al subespacio $\beta = 0$, la base

7.3. ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO ENTRE LOS GRADOS DE LIBERTAD INTERNOS Y EXTERNOS

del espacio de momento es $\{|\beta = 0, k\rangle\}$ y la matriz densidad reducida queda

$$\rho_c = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \beta = 0, k | \Psi(n) \rangle \langle \Psi(n) | \beta = 0, k \rangle \quad (7.38)$$

Los elementos de esta matriz en la base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ quedan

$$\langle e | \rho_c | e \rangle = P_e(n), \quad (7.39)$$

$$\langle g | \rho_c | g \rangle = P_g(n) \quad (7.40)$$

y

$$\langle e | \rho_c | g \rangle = Q(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_{\beta=0}^e(k, n) \Psi_{\beta=0}^g(k, n)^*. \quad (7.41)$$

El entrelazamiento entre el momento y los estados internos puede cuantificarse mediante la entropía de von Neuman de la matriz densidad reducida

$$S = -\text{tr}(\rho_c \log_2 \rho_c). \quad (7.42)$$

Se estudia ahora el caso en que $\tau = \Delta = 2n\pi$. Considerando condiciones iniciales localizadas de la forma

$$\begin{pmatrix} \Psi_{\beta=0}^e(k, n=0) \\ \Psi_{\beta=0}^g(k, n=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \exp i\varphi \sin \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \delta_{k0}, \quad (7.43)$$

se desea hallar la dependencia de la entropía de entrelazamiento S con los parámetros ϕ y γ que definen la condición inicial. Utilizando los resultados de la sección anterior para el caso en que $\tau = \Delta = 2n\pi$, se tiene para los elementos de la matriz de la densidad reducida

$$P_g(n) = \frac{1}{2} [1 + J_0(2n\kappa) \cos \gamma], \quad (7.44)$$

$$P_e(n) = \frac{1}{2} [1 - J_0(2n\kappa) \cos \gamma], \quad (7.45)$$

$$Q(n) = \frac{\sin \gamma}{2} [\cos \varphi - i \sin \varphi J_0(2n\kappa)]. \quad (7.46)$$

La ecuación 7.42 se puede expresar de manera más sencilla en términos de los autovalores λ_+ y λ_- de la matriz densidad reducida

$$S(n) = -\lambda_+ \log_2 \lambda_+ - \lambda_- \log_2 \lambda_-. \quad (7.47)$$

En términos de las probabilidades de ocupación y de la coherencia $Q(n)$ los autovalores de ρ_c quedan

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4 \left(P_g(n) P_e(n) - |Q(n)|^2 \right)} \right]. \quad (7.48)$$

Introduciendo los resultados 7.44, 7.45 y 7.46 en las ecuaciones 7.47 y 7.48 se halla la entropía de entrelazamiento en función del tiempo y la condición inicial.

De las ecuaciones 7.44, 7.45 y 7.46 se puede ver que tanto las probabilidades de ocupación como la coherencia $Q(n)$ tienden a un límite cuando $n \rightarrow \infty$. Para las probabilidades de ocupación, este límite es $1/2$ para ambas irrespectivamente de la condición inicial, tal como se vio en la sección anterior. En cambio, el valor asintótico de $Q(n)$ sí depende de la condición inicial. De esto se puede concluir que los valores propios de la matriz densidad reducida y la entropía de entrelazamiento tienden a un valor asintótico cuando $n \rightarrow \infty$ que depende de las condiciones iniciales. Este valor asintótico es

$$\lambda_{\pm} \rightarrow \Lambda_{\pm} = \frac{1}{2} [1 \pm \cos \varphi \sin \gamma], \quad (7.49)$$

por lo que en el mismo límite la entropía tiende a un cierto límite, $S(n) \rightarrow S_f$, dado por

$$S_f = -\Lambda_+ \log_2 \Lambda_+ - \Lambda_- \log_2 \Lambda_-, \quad (7.50)$$

que depende de los parámetros que determinan la condición inicial a través de la dependencia de los valores propios en estas cantidades.

La figura 7.8 muestra la dependencia de la entropía de entrelazamiento asintótica con los parámetros φ y γ que determinan la condición inicial dada por 7.43. Para la condición inicial $\varphi = \pi/2$ y/o $\gamma = \pi$, $Q \rightarrow 0$ y ambos valores propios son iguales, $\Lambda_{\pm} = 1/2$. En este caso el valor asintótico de la entropía de entrelazamiento adquiere su valor máximo $S_f = 1$. Cuando se eligen condiciones iniciales con $\gamma = \pi/2$ y $\phi = 0, \pi$, la entropía tiende a cero asintóticamente.

Se ha encontrado entonces que, para una condición inicial no entrelazada de la forma $|\Psi(0)\rangle = (\cos(\frac{\gamma}{2}) |e\rangle + \sin(\frac{\gamma}{2} \exp(i\phi)) |e\rangle) |\beta = 0, k = 0\rangle$, la evolución del sistema genera asintóticamente un estado cuyo entredo depende de los parámetros que determinan la condición inicial. Esta dependencia se cuantifica en la figura 7.8. También se encontró que para ciertas condiciones la evolución genera, en el régimen asintótico, estados con máximo o nulo entrelazamiento. Este comportamiento es similar al que se ha encontrado para el QW en [42, 43], aunque en ese caso se encuentra que no existe condición inicial localizada que dé lugar asintóticamente a un estado no entrelazado. Esta similitud cualitativa entre la QW y el QKR2L no es sorprendente debido a que ambos sistemas tienen el mismo espacio de Hilbert y los mapas cuánticos de evolución de ambos sistemas son similares. Las diferencias cuantitativas de estos resultados se deben a los detalles particulares de cada modelo.

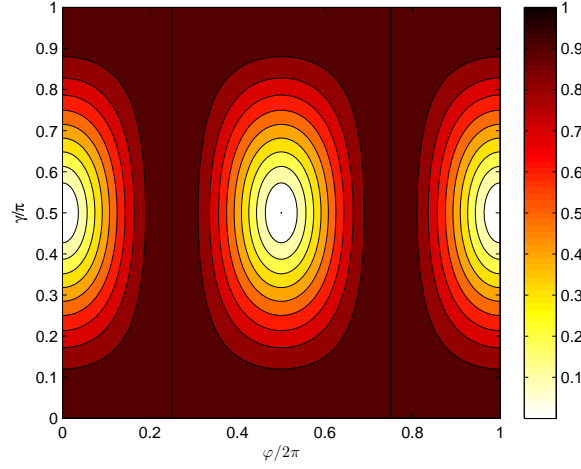


Figura 7.8: Entropía de entrelazamiento en función de los ángulos que determinan la condición inicial.

7.4. Resonancia Secundaria en el Parámetro τ

En la sección anterior se verificó que, dejando de lado el caso de la anti-resonancia, el comportamiento del QKR de dos niveles en resonancia primaria (es decir con $\tau = 2n\pi$) es, en lo que respecta a la evolución temporal de los momentos, muy similar al del QKR usual en resonancia primaria. En esta sección se verifica que esta analogía también ocurre cuando se consideran las resonancias secundarias. Es decir, en el caso en que el parámetro τ cumple la condición de resonancia secundaria del QKR, $\tau = 2\pi\frac{p}{q}$, con $\frac{p}{q}$ distinto de $1/2$, dado que este caso constituye la condición de anti-resonancia del QKR y se debe analizar por separado.

De manera similar a lo que ocurre con el QKR, el caso de la resonancia secundaria es complejo de analizar analíticamente, por lo que se recurre a un estudio numérico del sistema. Para todas las resonancias secundarias analizadas, se encontró numéricamente que el comportamiento del sistema, en términos de la evolución temporal de la probabilidad de ocupación y del segundo momento, es cualitativamente similar al comportamiento observado para el caso en que $\tau = 2n\pi$ y $\tilde{\Delta} \neq (2m+1)\pi$. Es decir, se observó mediante simulaciones que para todos los valores del parámetro $\tilde{\Delta}$ el segundo momento crece cuadráticamente con el tiempo n para tiempos largos y que las probabilidades de ocupación presentan una oscilación amortiguada alrededor de un cierto valor asintótico que depende de las condiciones iniciales.

La figura 7.9 muestra el resultado de una simulación numérica de la evolución temporal de estas cantidades que ejemplifica el tipo de comportamiento observado. El resultado se obtuvo a partir de la condición inicial $|\Psi(n=0)\rangle = |k+\beta=0, g\rangle$, para la resonancia secundaria $p/q = 1/4$, con parámetros $\tilde{\Delta} = (3/4)\pi$, $\kappa = 10$. Allí se puede apreciar como la probabilidad de ocupación presenta un comportamiento oscilatorio amortiguado, y tiende a un valor asintótico que se verificó depende de la condición inicial. Se puede apreciar también el crecimiento cuadrático del segundo momento para tiempos largos.

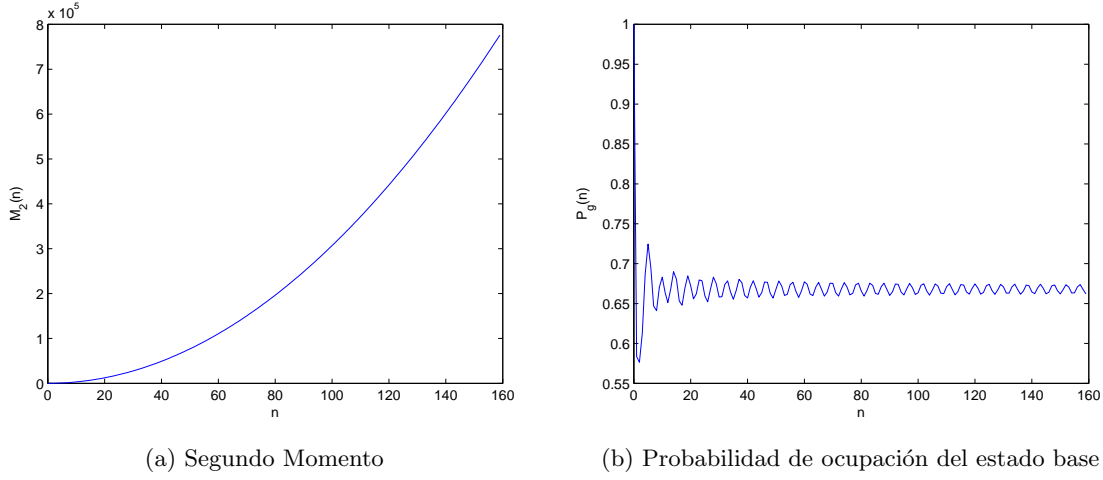


Figura 7.9: Evolución temporal para la resonancia secundaria $p/q = 1/4$, con parámetros $\tilde{\Delta} = (3/4)\pi$, $\kappa = 10$.

7.5. Anti-Resonancia en el parámetro τ

Cuando el parámetro τ toma el valor π en el QKR usual se observa el fenómeno de anti-resonancia; la evolución del vector de onda, y por lo tanto de todas las cantidades observables, es periódica en el tiempo. Este comportamiento no se traslada al QKR de dos niveles para todos los valores del parámetros $\tilde{\Delta}$. En el caso $\tau = \pi$, sólo se observa el fenómeno de anti-resonancia en el QKR de dos niveles cuando $\tilde{\Delta} = 2n\pi$.

Este fenómeno puede explicarse de manera similar a la forma en que se demostró la existencia de la anti-resonancia para el QKR en la sección 4.2 del capítulo 3. Restringido al subespacio $\beta = 0$, el operador de Floquet del sistema puede escribirse cómo

$$U_T = e^{-i\tilde{\Delta}|e\rangle\langle e|} e^{-i\tau k^2} e^{-i\sigma_1 \kappa \cos \theta}, \quad (7.51)$$

dónde en este caso k refiere al operador definido en la ecuación 6.25 tomando $\beta = 0$. La primera exponencial corresponde al operador de evolución libre en un periodo y la segunda al operador de evolución debido a la interacción impulsiva. En el caso $\Delta = 0$, el orden de los operadores se puede invertir apelando a una fórmula similar a la ecuación 3.65

$$U_T = e^{-i\pi k^2} e^{-i\sigma_1 \kappa \cos \theta} = e^{i\sigma_1 \kappa \cos(\theta)} e^{-i\pi k^2}. \quad (7.52)$$

Dado que el operador σ_1 actúa sobre los grados de libertad internos de la partícula y en la exponencial correspondiente a la evolución libre el operador actuando sobre los grados de libertad interno es la identidad (que por supuesto conmuta con σ_1) esta propiedad es equivalente a la fórmula 3.65. A partir de esto puede obtenerse la condición necesaria para la anti-resonancia, $U_T^2 = Id$

$$U_T^2 = e^{-i\pi k^2} e^{-i\sigma_1 \kappa \cos \theta} e^{i\sigma_1 \kappa \cos(\theta)} e^{-i\pi k^2} = e^{-i2\pi k^2} = Id, \quad (7.53)$$

dónde en la última igualdad se utilizó que los valores propios del operador k son enteros. Como se ha visto anteriormente, $U_T^2 = Id$ implica un comportamiento periódico del sistema y de las magnitudes observables.

En el caso en que $\tilde{\Delta}$ es no nulo, no se puede utilizar una ecuación análoga a 7.51 para invertir el orden de los operadores asociados a la evolución libre y a la evolución debida a la excitación. Esto se debe a que el operador σ_1 no conmuta con el proyector $|e\rangle\langle e|$. Para este rango de valores del parámetro Δ se puede ver numéricamente que, para condiciones iniciales localizadas, el sistema presenta un comportamiento temporal del mismo tipo que en resonancia primaria o secundaria; el momento crece cuadráticamente con el tiempo y las probabilidades de ocupación presentan oscilaciones amortiguadas alrededor de un valor asintótico.

7.6. Fuera del subespacio $\beta = 0$

Es interesante en este punto preguntar si los resultados expuestos en las secciones anteriores se pueden extender a subespacios con β no nulo. Es decir, si las condiciones de resonancia halladas en las partes anteriores y la descripción cualitativa del comportamiento del sistema para los distintos valores de los parámetros puede extenderse de manera inmediata a subespacios con β no nulo.

Esta pregunta se aborda en [32] para el sistema que se obtiene al eliminar el estado excitado de la dinámica del estado base, mediante la ya mencionada aproximación adiabática, dando lugar al Hamiltoniano

$$H = \frac{[\hbar k_L (k + \beta)]^2}{2M} + K \delta_T(t) \cos(\theta), \quad (7.54)$$

donde k y β en la expresión anterior son operadores. Este Hamiltoniano es idéntico al del QKR, con la salvedad de que la partícula se mueve en la línea y de ahí la aparición del cuasimomento β . El sistema se reduce al QKR en el subespacio $\beta = 0$.

Restringiéndose al caso particular en que $\tau = l\pi$, con l entero, suponiendo que la evolución se restringe a un subespacio con un β determinado no necesariamente nulo, los autores [32] encuentran que la condición de resonancia primaria para l en ese subespacio es

$$l(1 + 2\beta) = 2m, \quad (7.55)$$

para m un entero cualquiera. Esta ecuación se obtiene imponiendo la condición de resonancia primaria en el QKR: que el operador que da la evolución libre entre dos patadas,

$U_L = \exp\left(-i\frac{[\hbar k_L(\hat{k}+\hat{\beta})]^2}{2MT\hbar}\right)$, sea igual a la identidad. Se debe notar que la condición anterior parte del supuesto $\tau = l\pi$ y de imponer la condición de resonancia primaria, por lo que en principio esta condición no necesariamente da cuenta de todas las resonancias posibles.

Los autores también hallan la condición de anti-resonancia en un subespacio con β genérico, imponiendo que el operador de Floquet del sistema, U_T , satisfaga $U_T^2 = 1$. Se obtiene que la condición de anti-resonancia es, considerando una vez mas $\tau = l\pi$

$$l(1 + 2\beta) = 2m + 1. \quad (7.56)$$

Para el caso del sistema estudiado en este trabajo, el QKR2L, las derivaciones de las ecuaciones anteriores valen cuando $\Delta = 2m\pi$, con m entero. En este caso $e^{i\Delta|e\rangle\langle e|} = 1$ y el operador $|e\rangle\langle e|$ desaparece de la dinámica del sistema. El único operador que queda actuando sobre los estados internos es σ_1 , que en lo que respecta a repetir las derivaciones anteriores se comporta como un número; conmuta con todos los demás operadores dado que estos son proporcionales a la identidad en el espacio de estados internos del átomo. Por lo tanto, cuando $\Delta = 2m\pi$, las condiciones 7.55 y 7.56 también valen para el sistema considerado en este trabajo. Cuando $\Delta \neq 2m\pi$, el proyector $|e\rangle\langle e|$ no desaparece de la dinámica del sistema y, debido a que este no conmuta con σ_1 , las condiciones anteriores no se cumplen.

De esto se concluye que un estudio más exhaustivo de las resonancias y el comportamiento general en el espacio de parámetros para subespacios con β no nulo es complejo, y queda relegado a trabajo futuro.

7.7. Comparación con la *Quantum Walk*

Como ya fuera mencionado en la introducción, el espacio de Hilbert del QKR2L reducido al subespacio con $\beta = 0$, dado por el producto tensorial entre el espacio \mathcal{H}_s recorrido por la base discreta $\{|\beta = 0, k\rangle\}$ y el espacio \mathcal{H}_c recorrido por los vectores $\{|e\rangle, |g\rangle\}$, es el mismo que de la *Quantum Walk*. Además, el QKR2L presenta un crecimiento cuadrático del segundo momento en ciertas condiciones, igual que el QW. En vista de estas similitudes entre los dos sistemas, es interesante investigar si el QKR2L puede escribirse en términos de los operadores que definen la QW, el operador de moneda y el operador de *shift*. Para $\beta = 0$, el momento de la partícula del QKR2L está dado por la base $\{|\beta = 0, k\rangle\}$, que puede identificarse con la posición a lo largo de la grilla \mathbb{Z} en la QW. Los estados internos del QKR2L $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ se identifican con los estados de quiralidad $\{|L\rangle, |R\rangle\}$ de la QW. La evolución temporal es en tiempo discreto para los dos sistemas y se puede ver que en ambos casos se puede expresar de la forma

$$\begin{pmatrix} a_k(t+T) \\ b_k(t+T) \end{pmatrix} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} U_{kj} \begin{pmatrix} a_j(t) \\ b_j(t) \end{pmatrix}. \quad (7.57)$$

En el caso de la QW, si H_{ij} son los componentes del operador moneda en la base $\{|L\rangle, |R\rangle\}$,

entonces U_{kj} es de la forma [44]

$$\begin{aligned}
 U_{kj} &= \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \delta_{kj+1} \\
 &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \delta_{kj-1},
 \end{aligned} \tag{7.58}$$

donde las matrices 2×2 actúan sobre los estados internos y la acción del operador *shift* está dada por las deltas de Kronecker. De la ecuación 7.58 se puede ver que la evolución del QW solo conecta puntos en la grilla \mathbb{Z} con sus vecinos inmediatos. Sin embargo, la evolución del 2LQKR dada por la ecuación 6.39 conecta a cada punto de la grilla de momentos con todos los demás, debido a que la matriz U_{jk} en este caso tiene elementos no nulos para cualquier pareja jk . Por lo tanto, el operador del QKR2L no se puede poner en la forma sencilla de la QW con un operador de moneda y otro de *shift*. Sin embargo, dado que U_{jk} para el QKR2L es proporcional a $J_{j-k}(\kappa)$, entonces U_{j-k} tiende a cero rápidamente cuando $|j-k|$ crece para valores chicos de κ . Esto se debe a que

$$J_{j-k} \sim \frac{1}{\Gamma((j-k))} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{j-k} \tag{7.59}$$

para $j-k > 0$ cuando $0 < \kappa \ll \sqrt{j-k+1}$. Por lo tanto, en este límite, cuando la interacción dada por κ es pequeña, el mapa del QKR2L se vuelve más similar al de la QW en este aspecto. A medida que aumenta κ , es decir, para interacciones mas fuertes, mas modos de momento son acoplados por la evolución del sistema.

Capítulo 8

Conclusiones y Perspectivas

El *Quantum Kicked Rotor* es un modelo interesante debido a que presenta una variedad de comportamientos inesperados con respecto a su contraparte clásica. En particular, para ciertos valores de los parámetros del modelo es posible llevar al sistema a un régimen resonante, donde el valor esperado de la energía cinética crece cuadráticamente con el tiempo. Por otro lado, debido a la sencillez del modelo, es posible observar los distintos fenómenos a los que da lugar su dinámica en muchos casos de manera analítica, o por lo pronto, mediante simulaciones numéricas simples. En esta tesis se estudiaron algunos aspectos de la dinámica resonante del *Quantum Kicked Rotor*, y se propusieron además algunas variantes sobre este modelo.

El primer aspecto en estudiarse fue la dependencia de la dinámica del sistema en resonancia con las condiciones iniciales, en el caso en que estas se encuentran distribuidas en el espacio de momento angular. Para las resonancias primarias se obtiene la relación de dispersión que describe la propagación de ondas planas en el espacio de momento. Esto permite predecir la velocidad con la que se desplaza un cierto paquete de ondas y como evoluciona su ancho en el tiempo. Se muestra que la extensión de una condición inicial no localizada puede aumentar el tiempo que demora el sistema en exhibir el comportamiento resonante, lo cual podría contribuir a explicar la ausencia de comportamiento balístico en algunas realizaciones experimentales del QKR. Para las resonancias secundarias, mediante un estudio numérico se encuentra la relación entre los parámetros que determinan el paquete de ondas en el instante inicial y la velocidad de grupo promedio con la que se desplaza el paquete de ondas. Este trabajo dio lugar a la publicación [45].

En el capítulo 5, se expone el estudio realizado sobre una variante del QKR en la que se considera que la intensidad de la excitación puede depender del tiempo. Para las resonancias primarias se obtiene analíticamente la relación entre la prescripción temporal para la excitación y la evolución de los momentos del sistema. En particular, para una excitación dependiente del tiempo como una ley de potencias, se encuentra analíticamente la relación entre el exponente y la gama de comportamientos que exhibe la evolución de los momentos, también de dependencia temporal tipo ley de potencias. La relación entre los exponentes permite encontrar cuantitativamente como, variando la forma de la excitación, se puede obtener

una evolución para el segundo momento que va desde un comportamiento super-balístico hasta uno localizado en el espacio de momentos. Para las resonancias secundarias se estudia numéricamente el problema, obteniéndose resultados cualitativamente similares. El trabajo realizado dio lugar a la publicación [46].

Finalmente, se estudió una variante del modelo del QKR donde se considera una partícula con dos niveles de energía internos que se propaga a lo largo de una línea recta, donde se tomó como punto de partida el modelo de la realización atómico-óptica del QKR. Se analizaron analítica y numéricamente distintos aspectos de la evolución de este sistema para valores de los parámetros correspondientes a las resonancias del modelo del QKR usual. Para la resonancia primaria se encontró que el sistema puede presentar un comportamiento resonante o anti-resonante según el valor que tome el parámetro que determina la relación entre la frecuencia de la transición atómica y del laser de la excitación. También se estudia la evolución temporal de las probabilidades de ocupación de los estados internos, encontrándose que estas tienden a un límite asintótico en el caso resonante, o oscilan en el caso antiresonante. Finalmente, se encontró que la evolución del sistema genera entrelazamiento entre los grados de libertad internos y externos, y se encontró la dependencia del valor asintótico de esta cantidad en términos de los parámetros que determinan cierto tipo de condiciones iniciales localizadas en el espacio de momento. Para las resonancias secundarias, se estudió numéricamente la influencia del parámetro que determina la frecuencia de la transición atómica en el comportamiento del sistema. Algunos de los resultados de este trabajo se presentaron en la publicación [47].

El estudio realizado deja abiertas varias posibilidades de trabajo a futuro, que pueden agruparse en dos áreas distintas. Por un lado, existe la posibilidad de profundizar en el estudio de varios aspectos de la dinámica coherente de los problemas tratados. Por otro lado, resultaría interesante estudiar la dinámica de los sistemas abordados en esta tesis en condiciones en que se introduce algún tipo de decoherencia al modelo.

En lo que respecta al análisis de la dinámica coherente, una primera propuesta de trabajo consiste en tratar de obtener resultados analíticos para las resonancias secundarias en el modelo del QKR con intensidad de la perturbación dependiente del tiempo, que fue estudiado en la sección cinco. Un posible camino consiste en intentar aplicar las ideas que en [14] se utilizan para estudiar las resonancias secundarias del QKR.

Otra posible dirección en la que se pueden profundizar las ideas de esta tesis es en el estudio de diversos aspectos del QKR2L que no fueron tratados en este trabajo. En la resonancia primaria en τ de este modelo, el comportamiento para $\tilde{\Delta} \neq m\pi$ se analizó numéricamente. Sin embargo, es posible que el mapa discreto obtenido para ese valor del parámetro τ permita obtener analíticamente la dependencia del segundo momento con el tiempo para tiempos largos. Análogamente con lo precisado para el caso del QKR con excitación dependiente del tiempo, para el QKR2L en resonancia secundaria en el parámetro τ el comportamiento balístico del momento se verificó de manera numérica. Tal vez aquí también sea posible aplicar las ideas de [14] para estudiar las resonancias secundarias en el régimen asintótico, así como la dependencia en el parámetro Δ . Por último, otra propuesta de estudio a futuro para el QKR2L consiste en analizar los distintos regímenes accesibles en el espacio de parámetros fuera del

subespacio $\beta = 0$. Esto puede ser útil tanto para estudiar la dinámica coherente de condiciones iniciales distribuidas en el espacio de momentos, como también la evolución del sistema a partir de estados no coherentes generados por distribuciones térmicas.

En lo que respecta al estudio de escenarios donde se introduce decoherencia al sistema, además del recién mencionado caso en que se consideran distribuciones térmicas en el instante inicial, un aspecto fundamental a estudiar en el futuro consiste en agregar al modelo del QKR2L el efecto del decaimiento espontáneo del estado excitado al estado base del átomo y la consiguiente emisión de un fotón. Este proceso tiene como consecuencia que la evolución del sistema será decoherente, independientemente de que se tome o no un estado puro como condición inicial. Para modelar este proceso, es posible obtener una ecuación maestra del tipo Lindblad para la matriz densidad [28, 25] acoplando el átomo al campo electromagnético cuantizado[41]. Otra posibilidad, tal vez más simple del punto de vista de la simulación computacional, consiste en estudiar la emisión espontánea como un proceso estocástico en el espacio de Hilbert, obteniéndose de esa forma una ecuación de Schroedinger estocástica que puede simularse computacionalmente mediante métodos de Monte Carlo [48, 49]. En [50] se aplican estas ideas a un problema similar al del QKR, donde la perturbación no aparece de manera impulsiva sino mediante una modulación de la fase de un potencial sinusoidal. Una posible avenida de trabajo a seguir en el futuro consiste entonces en aplicar las ideas allí propuestas al modelo del *Quantum Kicked Rotor* de dos niveles.

Apéndice A

Relación entre el *Kicked Rotor* y el modelo de Anderson

En este apéndice se presenta una muy somera descripción del modelo de Anderson y se muestra como el problema de hallar los autovectores del operador de Floquet del QKR es similar al de hallar los autovectores de la energía al del modelo de Anderson. La presentación de estas ideas sigue de cerca lo expuesto en [13, 5].

A.1. El modelo de Anderson

El modelo de Anderson describe la dinámica de un electron interactuando con una red cristalina con impurezas. En una dimensión, se tiene el hamiltoniano

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), \quad (\text{A.1})$$

donde los operadores ya se expresaron en la representación posición. El potencial $V(x)$ es el potencial debido a la red cristalina con espaciamento d . Las impurezas en esa red introducen componentes aleatorios en el potencial. Se desea hallar $\phi(x)$ y E que resuelven el problema de autovalores

$$H\phi(x) = E\phi(x). \quad (\text{A.2})$$

Si se realiza la aproximación *tight binding* [51] y se supone que el electron interactúa con un sólo átomo a la vez, la función de onda del electron se puede expresar en términos de la función de onda para la interacción con un solo átomo $\phi_0(x)$,

$$\phi(x) = \sum_n a_n \phi_0(x - nd). \quad (\text{A.3})$$

APÉNDICE A. RELACIÓN ENTRE EL *KICKED ROTOR* Y EL MODELO DE ANDERSON

Suponiendo que el solapamiento entre los términos de la solución anterior correspondientes a distintos sitios de la red se puede despreciar

$$\int dx \phi_0(x - nd)^* \phi_0(x - md) = \delta_{mn}, \quad (\text{A.4})$$

introduciendo una solución del tipo A.3 en A.2 se obtiene la ecuación para las a_n

$$\sum_{k \neq n} W_{kn} a_k + E_n^0 a_n = E a_n \quad (\text{A.5})$$

siendo

$$W_{kn} = \int dx \phi_0(x - nd)^* H \phi_0(x - md) \quad (\text{A.6})$$

y

$$E_n^0 = \int dx \phi_0(x - nd)^* H \phi_0(x - nd). \quad (\text{A.7})$$

El modelo de Anderson consiste en considerar en la ecuación A.5 que o bien W_{kn} o E_n^0 tienen componentes aleatorios, de manera tal de modelar el desorden en la red. Se puede ver entonces que las soluciones para los a_n son localizadas en el índice n y por lo tanto dan lugar a funciones de onda $\phi(x)$ con localización en el espacio.

A.2. El problema de autovectores de Floquet en el QKR

En esta sección se trata el problema de hallar los autovectores del operador de Floquet en el QKR. Se muestra que las ecuaciones que determinan estos autovectores son de la forma A.5.

El operador de Floquet del QKR está dado por la ecuación 3.33

$$U_T = e^{\frac{-i}{\hbar} \frac{J^2}{2I} T} e^{\frac{-iK}{\hbar} \cos(\theta)} = e^{-iA(J)} e^{-iV(\theta)} \quad (\text{A.8})$$

El problema consiste en hallar el autovector $|\Phi\rangle$ y el autovalor $e^{i\Phi}$ que verifiquen

$$U_T |\Phi\rangle = e^{i\Phi} |\Phi\rangle \quad (\text{A.9})$$

Tomando ahora $W(\theta)$ que verifique

$$e^{-iV(\theta)} = \frac{1 + iW(\theta)}{1 + iW(\theta)}, \quad (\text{A.10})$$

es decir que

$$W(\theta) = -\tan\left(\frac{V(\theta)}{2}\right), \quad (\text{A.11})$$

y redefiniendo el vector de estados como $|\tilde{\Phi}\rangle = (e^{i(A(J)-\Phi)} - 1)|\Phi\rangle$, se llega a que $|\tilde{\Phi}\rangle$ debe verificar

$$W(\theta)|\tilde{\Phi}\rangle + \cot\left(\frac{A(J) - \Phi}{2}\right)|\tilde{\Phi}\rangle. \quad (\text{A.12})$$

Proyectando ahora en la base de momento angular $|\tilde{\Phi}\rangle = \sum a_n|n\rangle$ se tiene que los a_n deben verificar una ecuación de la forma de la ecuación A.5 con

$$W_{mn} = \langle n|W(\theta)|m\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} W(\theta) e^{i\theta(m-n)} \quad (\text{A.13})$$

$$E_n^0 = \cot\left(\frac{A(n\hbar) - \Phi}{2}\right) \quad (\text{A.14})$$

$$E = -W_{nn}. \quad (\text{A.15})$$

La irregularidad de las secuencias W_{mn} y E_n^0 es responsable de la localización de los coeficientes a_n en el índice n .

Apéndice B

Momentos del QKR resonante en la representación de momento angular

En este apéndice se presenta en un poco más detalle el cálculo de los momentos estadísticos del QKR en términos de las condiciones iniciales en el espacio de momentos, dados en las expresiones 3.62 y 3.62.

Para obtener estas expresiones es necesario calcular las integrales

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \psi^*(\theta, t=0) \psi(\theta, t=0) \sin(\theta) \quad (\text{B.1})$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\theta |\psi(\theta, t=0)|^2 \sin^2(\theta) \quad (\text{B.2})$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} d\theta \psi^*(\theta, t=0) \left(\cos(\theta) \psi(\theta, t=0) + 2 \sin(\theta) \frac{\partial \psi(\theta, t=0)}{\partial \theta} \right) \quad (\text{B.3})$$

Para calcular estas cantidades en términos de los $a_l(0)$, se utiliza que estos se relacionan con $\psi(\theta, t=0)$ a través de una transformada de Fourier

$$\psi(\theta, t=0) = \sum_l \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a_l(0) e^{il\theta} \quad (\text{B.4})$$

Expresando las funciones sinusoidales como exponenciales complejas y utilizando que

$$\int \frac{d\theta}{2\pi} e^{i\theta(m-n)} = \delta_{mn} \quad (\text{B.5})$$

se llega a los resultados deseados intercambiando el orden entre las integrales y las sumatorias y operando.

**APÉNDICE B. MOMENTOS DEL QKR RESONANTE EN LA REPRESENTACIÓN
DE MOMENTO ANGULAR**

Apéndice C

Demostración de la relación 3.65

Se desea mostrar que se cumple la ecuación 3.65,

$$e^{-i\pi n^2} e^{-i\kappa \cos \theta} = e^{i\kappa \cos \theta} e^{-i\pi n^2}. \quad (\text{C.1})$$

Tomando los elementos de matriz del miembro izquierdo en la base de momento angular se tiene

$$\langle l | e^{-i\pi n^2} e^{-i\kappa \cos \theta} | m \rangle = e^{-i\pi l^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i\theta(m-l)} e^{-i\kappa \cos \theta}, \quad (\text{C.2})$$

donde se introdujo una clausura $1 = \int d\theta |\theta\rangle \langle \theta|$ a la izquierda del ket $|m\rangle$ y se utilizó que $\langle \theta | l \rangle = e^{il\theta} / \sqrt{2\pi}$. Tomando ahora el cambio de variable $\theta \rightarrow \theta + \pi$ se tiene

$$e^{-i\pi l^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i\theta(m-l)} e^{-i\kappa \cos \theta} = e^{i\pi(m-l-l^2)} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i\theta(m-l)} e^{i\kappa \cos \theta} \quad (\text{C.3})$$

donde los límites de integración no cambian al hacer la traslación de la variable dado que el integrando es periódico. Utilizando que $e^{i\pi l^2} = e^{i\pi l}$ para cualquier l entero se tiene finalmente que

$$\langle l | e^{-i\pi n^2} e^{-i\kappa \cos \theta} | m \rangle = e^{-i\pi m^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i\theta(m-l)} e^{i\kappa \cos \theta} \quad (\text{C.4})$$

El miembro de la derecha es el elemento de matriz entre $\langle l |$ y $|m\rangle$ del miembro de la derecha de C.1. Como la igualdad se cumple para todo m y l , queda demostrada la relación C.1.

Apéndice D

Aproximación de onda rotatoria

Se considera un Hamiltoniano correspondiente a la interacción de un átomo de dos niveles con una onda laser monocromática

$$H + H_0 + V(t), \quad (\text{D.1})$$

siendo

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar\omega_0}{2} (|e\rangle\langle g| - |g\rangle\langle e|) \quad (\text{D.2})$$

y

$$V(t) = \Omega(t) \cos(\omega_L t - k_L z) (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|). \quad (\text{D.3})$$

Pasando a la representación de interacción, definida como $|\Psi(t)\rangle_I = e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} |\Psi(t)\rangle$, se encuentra que la dinámica el vector de onda en la representación de interacción, $|\Psi(t)\rangle_I$, está determinada por la ecuación

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle_I}{dt} = V_I(t) |\Psi(t)\rangle_I, \quad (\text{D.4})$$

donde $V_I(t)$ es el operador $V(t)$ expresado en la representación de interacción

$$V_I(t) = e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} V(t) e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}}. \quad (\text{D.5})$$

La ecuación D.4 tiene como solución formal la serie de Dyson

$$|\Psi(t')\rangle_I = \mathcal{T} \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^{t'} dt V_I(t)} \right\} |\Psi(0)\rangle_I \quad (\text{D.6})$$

donde \mathcal{T} es el operador tiempo ordenado definido por

$$\mathcal{T}\{V(t_1)V(t_2)\} = V(t_1)V(t_2)\theta(t_1 - t_2) + V(t_2)V(t_1)\theta(t_2 - t_1) \quad (\text{D.7})$$

siendo $\theta(t)$ el escalón de Heavyside.

Tomando el término a primer orden en el desarrollo en $\frac{1}{\hbar}$ de la serie de Dyson se tiene

$$|\Psi(t')\rangle_I = \frac{-i}{\hbar} \int_0^{t'} dt V_I(t) |\Psi(0)\rangle_I. \quad (\text{D.8})$$

La evolución temporal a tiempos cortos queda entonces determinada por la integral

$$\begin{aligned} & \int_0^{t'} dt V_I(t) = \\ = & \int_0^{t'} dt \Omega(t) e^{i\frac{p^2}{2m}t} \frac{1}{2} \left(e^{i(\omega_L t - k_L z)} + e^{-i(\omega_L t - k_L z)} \right) \left(e^{i\omega_0 t} |e\rangle\langle g| + e^{-i\omega_0 t} |g\rangle\langle e| \right) e^{-i\frac{p^2}{2m}t} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

En esta integral al hacer los cuatro productos que resultan de multiplicar los factores que aparecen entre paréntesis aparecen dos tipos de términos, o sin dependencia temporal, o con una dependencia temporal de la forma $e^{i(\omega_L + \omega_0)t}$. Estos términos oscilan rápidamente y por lo tanto al integrarlos el resultado de la integral va a ser más chico que para los términos para los cuales el producto de los factores entre paréntesis queda independiente del tiempo. La aproximación de onda rotatoria consiste entonces en despreciar los terminos que dan lugar a $e^{i(\omega_L + \omega_0)t}$, lo que es equivalente a tomar el término $V(t)$ en el Hamiltoniano como

$$V(t) = \Omega(t) \left(\frac{e^{-i(\omega_L t - k_L z)}}{2} |e\rangle\langle g| + \frac{e^{i(\omega_L t - k_L z)}}{2} |g\rangle\langle e| \right). \quad (\text{D.10})$$

Bibliografía

- [1] H.G. Schuster and W. Wolf. *Deterministic Chaos. An Introduction*. WILEY-VCH, 2005.
- [2] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press.
- [3] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison Wesley.
- [4] W. Greiner. *Classical Mechanics. Systems of Particles and Hamiltonian Mechanics*. Springer, 2003.
- [5] L.E. Reichl. *The Transition to Chaos*. Springer-Verlag, 1992.
- [6] V. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer - Verlag.
- [7] B.V. Chirikov. Research concerning the theory of nonlinear resonance and stochasticity. *Preprint N 267, Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk*.
- [8] B.V. Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52 (5):263–379, 1979.
- [9] C. Cohen-Tannoudji. *Quantum Mechanics*. Wiley, 1977.
- [10] G. Casati, B. V. Chirikov, F.M. Izrailev, and J. Ford. Stochastic behaviour of a quantum pendulum under a periodic perturbation. *Lecture Notes in Physics*, 93:334–352, 1979.
- [11] B.V. Chirikov, F. M. Izrailev, and D. L. Shepelyanskii. Dynamical stochasticity in classical and quantum mechanics. *Soviet Scientific Review 2C*, 2, 1981.
- [12] B. V. Chirikov, F. M. Izrailev, and D. L. Shepelyansky. Quantum chaos: localization vs. ergodicity. *Physica S*, 33:77, 1988.
- [13] H. Stockmann. *Quantum Chaos: An Introduction*. Cambridge University Press.
- [14] F. M. Izrailev and D. L. Shepelyanskii. Quantum resonance for a rotator in a nonlinear periodic field. *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika*, 43:417–428, 1980.
- [15] F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha, Bala Sundaram, and M. G. Raizen. Atom optics realization of the quantum δ -kicked rotor. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4598–4601, Dec 1995.

BIBLIOGRAFÍA

- [16] C. F. Bharucha, J. C. Robinson, F. L. Moore, Bala Sundaram, Qian Niu, and M. G. Raizen. Dynamical localization of ultracold sodium atoms. *Phys. Rev. E*, 60:3881–3895, Oct 1999.
- [17] W. H. Oskay, D. A. Steck, V. Milner, B. G. Klappauf, and M. G. Raizen. Ballistic peaks at quantum resonance. *Optics Communications*, 179:137 – 148, 2000.
- [18] J. A. Currivan, A. Ullah, and M. D. Hoogerland. The initial velocity dependence of the quantum resonance in the delta-kicked rotor. *EPL (Europhysics Letters)*, 85(3):30005, 2009.
- [19] J. F. Kanem, S. Maneshi, M. Partlow, M. Spanner, and A. M. Steinberg. Observation of high-order quantum resonances in the kicked rotor. *Phys. Rev. Lett.*, 98:083004, Feb 2007.
- [20] J. Kempe. Quantum random walks: An introductory overview. *Contemporary Physics*, 44 (4):307–327, 2003.
- [21] A. Romanelli, A. Auyuanet, R. Siri, and V. Micenmacher. Sub-ballistic behavior in the quantum kicked rotor. *Physics Letters A*, 365(3):200 – 203, 2007.
- [22] A. Romanelli, R. Siri, and V. Micenmacher. Sub-ballistic behavior in quantum systems with lévy noise. *Phys. Rev. E*, 76:037202, Sep 2007.
- [23] A. Ambainis. Quantum walks and their algorithmic applications. *International Journal of Quantum Information*, 1 (4):507, 2003.
- [24] M. Santha. Quantum walk based search algorithms. *arXiv:quant-ph/0403120*.
- [25] G. Benenti, G. Casati, and G. Strini. *Principles of Quantum Computation and Information. Volume II: Basic Tools and Special Topics*. World Scientific, 2007.
- [26] V. Arnold. Instability of dynamical systems with several degrees of freedom (instability of motions of dynamic system with five-dimensional phase space). *Soviet Mathematics*, 5:581–585, 1964.
- [27] F. M. Izrailev. Simple models of quantum chaos: spectrum and eigenfunctions. *Physics Reports*, 196:299–392, 1990.
- [28] H. Breuer and F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2002.
- [29] D. R. Grempel, R. E. Prange, and S. Fishman. Quantum dynamics of a nonintegrable system. *Physical Review A*, 29:1639, 1984.
- [30] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical Review*, 109 (5):1492–1505, 1958.

-
- [31] I. Dana, E. E. Eisenberg, and N. Shnerb. Antiresonance and localization in quantum dynamics. <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/9608058.pdf>, 1996.
- [32] K.J. Challis S. A. Gardiner M. Saunders, P. L. Halkyard. Manifestation of quantum resonances and antiresonances in a finite-temperature dilute atomic gas. *Physical Review A*, 76, 2007.
- [33] P. L. Halkyard, M. Saunders, S. A. Gardiner, and K. J. Challis. Power-law behavior in the quantum-resonant evolution of the δ -kicked accelerator. *Phys. Rev. A*, 78:063401, Dec 2008.
- [34] G. J. de Valcárcel, E. Roldán, and A. Romanelli. Tailoring discrete quantum walk dynamics via extended initial conditions. *New Journal of Physics*, 12(12):123022, 2010.
- [35] A. Romanelli. Driving quantum walk spreading with the coin operator. *Physical Review A*, 80:42332, 2009.
- [36] M.C. Bañuls, C. Navarrete, A. Pérez, E. Roldán, and J.C. Soriano. Quantum walk with a time-dependent coin. *Physical Review A*, 73:062304, 2006.
- [37] M. G. Raizen. Quantum chaos with cold atoms. volume 41 of *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, pages 43 – 81. Academic Press, 1999.
- [38] Mark Saunders. *Manifestation of quantum resonant effects in the atom-optical delta-kicked accelerator*. PhD thesis, Durham University, 2009.
- [39] S. A. Gardiner. *Quantum Measurement, Quantum Chaos, and Bose-Einstein Condensates*. PhD thesis, Leopold-Franzens-Universität Innsbruck, 2000.
- [40] R. Scharf. Kicked rotator for a spin-1/2 particle. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 22:42234242, 1989.
- [41] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Atom-Photon Interactions. Basic Processes and Applications*. Wiley-Vch, 2004.
- [42] I. Carneiro, M. Loo, X. Xu, M. Girerd, V. Kendon, and P. L. Knight. Entanglement in coined quantum walks on regular graphs. *New Journal of Physics*, 7:156, 2005.
- [43] G. Abal, R. Siri, A. Romanelli, and R. Donangelo. Quantum walk on the line: Entanglement and nonlocal initial conditions. *Physical Review A*, 73:9, 2006.
- [44] A. Romanelli, R. Siri, G. Abal, A. Auyuanet, and R. Donangelo. Decoherence in the quantum walk on the line. *Physica A*, 347:137, 2005.
- [45] A. Romanelli and G. Hernández. Driving the resonant quantum kicked rotor via extended initial conditions. *The European Physical Journal D*, 64(1):131–136, 2011.
-

BIBLIOGRAFÍA

- [46] A. Romanelli and Guzmán Hernández. Anomalous diffusion in the resonant quantum kicked rotor. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(17):3420 – 3426, 2010.
- [47] G. Hernández and A. Romanelli. Resonant quantum kicked rotor with two internal levels. *Phys. Rev. A*, 87:042316, Apr 2013.
- [48] K Mølmer and Y. Castin. Monte carlo wavefunctions in quantum optics. *Quantum and Semiclassical Optics: Journal of the European Optical Society Part B*, 8(1):49, 1996.
- [49] R. Dum, P. Zoller, and H. Ritsch. Monte carlo simulation of the atomic master equation for spontaneous emission. *Phys. Rev. A*, 45:4879–4887, Apr 1992.
- [50] R. Graham and S. Miyazaki. Dynamical localization of atomic de broglie waves: The influence of spontaneous emission. *Phys. Rev. A*, 53:2683–2693, Apr 1996.
- [51] N. Ashcroft and D. Mermin. *Solid State Physics*. Harcourt, 1976.