



Predictibilidad en sistemas con retardo temporal

Cuencas de atracción, multiestabilidad y dinámica de atractores en espacios de dimensión infinita

Juan Pedro Tarigo Tauber

Programa de Desarrollo de las Ciencias Básicas - Física
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Junio de 2025



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



Programa de
Desarrollo de las
Ciencias Básicas

cap COMISIÓN
ACADÉMICA
DE POSGRADO

Predictibilidad en sistemas con retardo temporal

Cuencas de atracción, multiestabilidad y dinámica de
atractores en espacios de dimensión infinita

Juan Pedro Tarigo Tauber

Tesis de Maestría presentada al Programa de
Desarrollo de las Ciencias Básicas - Física y la
Facultad de Ciencias de la Universidad de la
República, como parte de los requisitos necesarios
para la obtención del título de Magíster en Física.

Directores:

Ph.D. Arturo C. Martí

Ph.D. Cecilia Stari

Montevideo – Uruguay

Junio de 2025

Tarigo Tauber, Juan Pedro

Predictibilidad en sistemas con retardo temporal / Juan Pedro Tarigo Tauber. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ciencias, 2025.

XII, 50 p. 29, 7cm.

Directores:

Arturo C. Martí

Cecilia Stari

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa - Física, 2025.

Referencias bibliográficas: p. 48 – 50.

1. Retardo Temporal, 2. Atractores, 3. Caos, 4. Multiestabilidad, 5. Entropía de Cuencas. I. Martí, Arturo C., Stari, Cecilia, . II. Universidad de la República, Programa de Desarrollo de las Ciencias Básicas - Física. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Ph.D. Marcelo Barreiro

Ph.D. Pablo Monzón

Ph.D. Tabaré Gallardo

Ph.D. Gustavo Sarasúa

Ph.D. Cristina Masoller

Montevideo – Uruguay
Junio de 2025

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a todos quienes han hecho posible la realización de esta tesis y que estuvieron presentes en cada etapa de este proceso, tanto en lo académico como en lo personal.

En primer lugar, quiero agradecer a mis tutores, Arturo y Cecilia, por su guía constante, su disposición permanente y la confianza que depositaron en mí. Sus sugerencias, correcciones y perspectivas fueron fundamentales para el desarrollo de este trabajo. También me gustaría agradecer a Cecilia C. por ayudarme en mis primeros pasos en el área.

A Mateo, Renzo, Felipe, Juan, Gonza, Maxi, Cami, Thomas, Caracé, Mai-col, Yamil y quienes nuclean los laboratorios 326 y 333, gracias por compartir conmigo el día a día, por sus ideas, su apoyo y por hacer que el trabajo siempre se sintiera un poco más liviano.

A mi familia, Ale, Felipe, Nacho y Clari, por estar siempre, por confiar en mí y por hacerme sentir acompañado. A Mica, por su paciencia, apoyo constante y por estar presente en cada paso.

Extiendo mi agradecimiento a PEDECIBA y la UdelaR por brindarme el entorno académico que hizo posible esta tesis. A Jimena por su preocupación y amabilidad, y por hacer este proceso infinitamente más sencillo. A la CAP por el apoyo económico que hizo posible esta etapa de formación y a ClusterUY por brindar la infraestructura para las simulaciones numéricas.

Finalmente, agradezco al tribunal de evaluación, Marcelo Barreiro, Pablo Monzón, Tabaré Gallardo, Gustavo Sarasúa, Cristina Masoller y Daniel Freire, por el tiempo dedicado a la lectura y corrección de este trabajo, así como por sus valiosas observaciones y sugerencias.

*Todo lo que ocurre, ocurre.
Todo lo que, al ocurrir, origina
otra cosa, hace que ocurra algo
más.
Todo lo que, al ocurrir, vuelve a
originarse, ocurre de nuevo.
Aunque todo ello no ocurre
necesariamente en orden
cronológico.*

Douglas Adams

RESUMEN

Hacer predicciones a largo plazo de los fenómenos que ocurren en la naturaleza es uno de los principales propósitos de la ciencia. Con este fin, la dinámica nace para poder modelar sucesos que ocurren en diversas áreas del conocimiento y poder determinar su comportamiento a largo plazo. Sin embargo, la mayoría de los modelos de sistemas naturales no admiten soluciones en forma de ecuaciones cerradas, por lo que es necesario emplear otras técnicas para el estudio de su evolución. A esto se le suma el problema de que muchos de estos sistemas son fuertemente dependientes de su estado inicial y que pequeños desvíos en estas condiciones producen dinámicas completamente distintas a largo plazo. Más específicamente, los sistemas con retardo temporal, cuya evolución no depende únicamente del estado actual del sistema sino que depende también de su estado en tiempos anteriores, son imprescindibles para modelar fenómenos en diversas áreas de la ciencia como la biología y las telecomunicaciones en donde los tiempos de transmisión de información son similares a los tiempos de procesamiento. Estos sistemas son particularmente sensibles a incertidumbres en las condiciones iniciales debido a que su dimensión es infinita.

En este trabajo exploramos el sistema de Mackey-Glass, un ejemplo paradigmático de sistema con retardo temporal que modela la producción de células y su liberación al torrente sanguíneo. Mostramos que presenta una gran diversidad de soluciones, incluyendo soluciones de equilibrio, periódicas y aperiódicas o caos al variar los parámetros del sistema. También observamos que para algunos valores de sus parámetros el sistema presenta multiestabilidad, es decir que coexisten más de una solución estable. Para poder cuantificar el impacto de la multiestabilidad en su predictibilidad empleamos distintas técnicas que van desde contar soluciones únicas, calcular el volumen de condiciones iniciales que evolucionan hacia cada atractor hasta calcular la entropía de cuencas adaptada a sistemas con retardo temporal. También calculamos los dos primeros exponentes de Lyapunov del sistema para cuantificar la predictibilidad de las soluciones aperiódicas y encontramos que existen distintas soluciones de este tipo. Además presentamos un método para reducir la dimensionalidad de

cualquier sistema con retardo temporal y emplear todas estas técnicas.
En este trabajo proponemos métodos para comprender los espacios de fase de los sistemas con retardo temporal y cuantificar su impacto en la predictibilidad de los mismos.

Palabras claves:

Retardo Temporal, Atractores, Caos, Multiestabilidad, Entropía de Cuencas.

ABSTRACT

Making long-term predictions about natural occurring phenomena is one of the main objectives of science. For this purpose, dynamics arises as a means to model events occurring in various disciplines and to determine their long-term behavior. However, most models of natural systems do not admit closed-form analytical solutions, which makes it necessary to use other techniques to study their evolution. This is aggravated by the problem that many of these systems are highly dependent on their initial state, and small deviations in these conditions lead to completely different long-term dynamics. More specifically, time-delay systems, whose evolution depends not only on their current state but also on its past states, are essential for modeling phenomena in various areas of science, such as biology and telecommunications, where information transmission times are comparable to processing times. These systems are particularly sensitive to uncertainties in the initial conditions due to being infinite-dimensional.

In this work, we explore the Mackey-Glass system, a paradigmatic example of a time-delay system that models the production of cells and their release into the bloodstream. We show that it presents a great diversity of solutions, including equilibrium, periodic, and aperiodic or chaotic solutions as system parameters vary. We also observe that, for some parameter values, the system exhibits multistability, meaning that more than one stable solution can coexist. To quantify the impact of multistability on its predictability, we employ various techniques, ranging from counting unique solutions and computing the volume of initial conditions that evolve toward each attractor to calculating basin entropy, adapted to time-delay systems. We also compute the first two Lyapunov exponents of the system to quantify the predictability of the aperiodic solutions and find that multiple such solutions coexist. Additionally, we present a method to reduce the dimensionality of any time-delay system to apply all these techniques.

In this work, we propose methods to understand the phase spaces of time-delay

systems and to quantify their impact on predictability. Keywords:

Delayed Systems, Attractors, Chaos, Multistability, Basin Entropy.

Tabla de contenidos

1	Introducción	1
1.1	Los sistemas dinámicos	2
1.2	Sistemas con retardo temporal	3
1.3	El modelo de Mackey-Glass	4
2	El sistema de Mackey-Glass	6
2.1	Discretización del sistema	6
2.2	Análisis de estabilidad lineal	7
2.3	Diagramas de bifurcación	10
3	Multiestabilidad en el sistema de Mackey-Glass	13
3.1	Coexistencia de soluciones	13
3.2	Como cuantificar la multiestabilidad	17
4	Entropía de cuencas en sistemas con retardo temporal	21
4.1	Entropía de cuencas	21
4.2	El pozo doble con retardo	25
4.3	Entropía de cuencas en el sistema de pozo doble con retardo	27
5	Medidas de predictibilidad en el sistema de Mackey-Glass	33
5.1	Reducción de la dimensionalidad del espacio de condiciones iniciales de un sistema con retardo temporal	35
5.2	Estabilidad y entropía de cuencas en sistemas de dimensión alta	35
5.3	Estabilidad y entropía de cuencas en el sistema de Mackey-Glass	39
5.4	Exponentes de Lyapunov	40
6	Conclusiones y perspectivas	44
6.1	El sistema de Mackey-Glass	44
6.2	Entropía de cuencas en sistemas con retardo temporal	46

Capítulo 1

Introducción

Uno de los propósitos fundamentales de la ciencia es hacer predicciones sobre los fenómenos de la naturaleza en base a nuestro conocimiento de su estado actual. Sin embargo, esto es difícil ya que la mayoría de los sistemas que encontramos en la naturaleza, ya sean físicos, biológicos, económicos o sociales, son intrínsecamente no lineales. Esta característica los distingue de los sistemas lineales, cuya dinámica puede predecirse con precisión mediante soluciones analíticas. En contraste, los sistemas no lineales rara vez admiten soluciones cerradas, y pequeñas variaciones en sus condiciones iniciales pueden producir cambios drásticos en su comportamiento. Tal como se explica en Strogatz, 2019, el hecho de que estos sistemas no cumplan con el principio de superposición impide descomponer sus soluciones en modos simples, lo que puede dar lugar a dinámicas complejas como bifurcaciones, oscilaciones y caos. La no linealidad introduce por tanto, un nivel de riqueza que hace que entender y predecir el comportamiento de estos sistemas sea uno de los grandes desafíos de la ciencia moderna. Esto resalta la necesidad de herramientas cualitativas, numéricas y geométricas para su análisis, especialmente en contextos donde la predictibilidad es limitada.

Los sistemas con retardo temporal constituyen una clase especial de sistemas no lineales que presentan desafíos aún mayores. En estos casos, el estado futuro del sistema no solo depende del estado actual sino también de su historia reciente, lo que genera una dinámica de dimensión infinita. Este tipo de sistemas es más difícil de analizar que los sistemas instantáneos y la predicción a largo plazo se vuelve especialmente compleja. Aunque se han desarrollado herramientas como los exponentes característicos de Lyapunov para estudiar la

sensibilidad a las condiciones iniciales, éstas no ofrecen una imagen completa del problema de la predictibilidad. En este trabajo nos centramos en este tipo de sistemas, y en particular en la predictibilidad a largo plazo del sistema de Mackey-Glass, un modelo clásico con retardo que ha servido como paradigma en el estudio de comportamientos complejos como el caos y la multiestabilidad.

1.1. Los sistemas dinámicos

La dinámica es la disciplina que estudia los cambios, en particular la evolución temporal de algún sistema. Esta disciplina abarca problemas de diversas áreas del conocimiento como pueden ser la ecología y la dinámica poblacional, la química, la biología, la economía, la informática y la física, entre otros. Estos sistemas pueden alcanzar estados de equilibrio, repetirse de manera cíclica o tener dinámicas más complejas. Matemáticamente, los sistemas dinámicos se dividen en dos grandes categorías. Por un lado, las ecuaciones diferenciales son definidas por Guckenheimer y Holmes, 1983 como:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t) \quad (1.1)$$

donde $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ es un vector y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función suave definida en algún subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Las ecuaciones diferenciales describen la dinámica de sistemas en tiempo continuo. Por otro lado, los mapas iterados $x_{n+1} = f(x_n)$ describen sistemas donde el tiempo es discreto (Strogatz, 2019).

Es usual en los sistemas dinámicos encontrar conjuntos atrayentes o atractores, definidos por Ott, 2002 como subconjuntos del espacio de fase al cual convergen asintóticamente regiones de condiciones iniciales. Una definición más rigurosa puede encontrarse en Milnor, 1985. El ejemplo más sencillo de atractor es un punto fijo atrayente, es decir una solución x^* tal que $\dot{x} = f(x^*) = 0$ ($f(x^*) = x^*$ en un mapa iterado) y las trayectorias de condiciones iniciales cercanas convergen a x^* . Si las trayectorias de condiciones iniciales cercanas no convergen a x^* decimos que el punto fijo es inestable (Alligood et al. 1998). El siguiente atractor más sencillo es el ciclo límite, que corresponde a orbitas cerradas en el espacio de fase que atraen trayectorias que parten de condiciones iniciales cercanas. También existen otros tipos de atractores. Uno de particular interés es el atractor extraño, término introducido por Ruelle y Takens, 1971, que es un conjunto de puntos en el espacio de fase en el cual la dinámica

del sistema es aperiódica y muy sensible a cambios en las condiciones iniciales (Strogatz, 2019). Este fenómeno hace que predecir el estado en un tiempo dado de un sistema que evoluciona hacia un atractor extraño sea difícil.

Es común que para un sistema dinámico coexistan más de un atractor y por lo tanto el estado final del sistema dependa de sus condiciones iniciales, a este fenómeno se lo conoce como multiestabilidad. Milnor, 1985 define al conjunto de condiciones iniciales que evolucionan a cada atractor como sus cuencas de atracción. La distribución de estas cuencas en el espacio de fase y la naturaleza de sus fronteras determinan la sensibilidad del sistema a incertezas en las condiciones iniciales. En los trabajos de Grebogi et al. 1983 y Daza et al. 2016 se presentan herramientas para poder cuantificar la incertidumbre en el estado final del sistema a partir de la topología de sus cuencas de atracción. En Tarigo, Stari y Martí, 2024 se presenta un método para cuantificar esta incertidumbre en sistemas donde la dimensión del espacio de fase es muy alta, por lo que explorar la totalidad de sus cuencas de atracción se vuelve ineficiente desde un punto de vista computacional y los tiempos de ejecución aumentan considerablemente.

1.2. Sistemas con retardo temporal

Dentro de los sistemas dinámicos existe un grupo de sistemas de particular interés en donde su evolución no solo depende de su estado actual sino también de su estado en tiempos anteriores. Estos sistemas, llamados sistemas con retardo temporal, son de gran interés en áreas como la física, la biología, la ingeniería, la ecología y las matemáticas (Erneux, 2009; Wernecke et al. 2019).

Estos sistemas pueden ser descritos por una ecuación diferencial con retardo temporal (DDE):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m), t) \quad (1.2)$$

donde $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ es un vector, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función suave definida en algún subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y τ_1, \dots, τ_m son los términos de retardo temporal. Para describir la evolución de los sistemas dados por la Ec. (1.2) se necesita conocer su historia, lo que hace que su espacio de fase sea de dimensión infinita como se muestra en Otto et al. 2019. Esto hace que los sistemas con retardo temporal produzcan dinámicas extremadamente complejas aún en

sistemas sencillos, exhibiendo oscilaciones autosostenidas cuando f es lineal y caos para sistemas univariados (Erneux, 2009), algo que no ocurre en sistemas sin retardo temporal. Además, estos sistemas presentan una gran coexistencia de atractores como se muestra en Masoller, 1994, Foss et al. 1997 y Amil, Cabeza y Marti, 2015, lo que dificulta su predicción a largo plazo.

1.3. El modelo de Mackey-Glass

Propuesto originalmente para entender el proceso de regulación hematópoyética, el sistema de Mackey-Glass (MG) describe la producción de glóbulos blancos, rojos o plaquetas en la médula ósea y su liberación al torrente sanguíneo y es un ejemplo paradigmático de un sistema no lineal con retardo temporal (Mackey y Glass, 1977). En su artículo, Mackey y Glass proponen una variante del sistema de MG para explicar ciertas enfermedades respiratorias y lo comparan con resultados experimentales.

En el modelo la evolución temporal de la densidad P de células en el torrente sanguíneo es:

$$\frac{dP}{dt}(t) = \frac{\beta_0 \theta^n P(t - \tau)}{\theta^n + P^n(t - \tau)} - \gamma P(t) \quad (1.3)$$

donde β_0 , θ , n y γ son constantes mientras que τ es el tiempo de retardo entre la producción de células nuevas y su maduración y liberación al torrente sanguíneo. Este modelo ha generado un gran interés por su capacidad de describir de forma precisa fenómenos complejos siendo un modelo sencillo (Bélair, 1995).

El modelo de MG resulta de utilidad no solo por sus aplicaciones a los problemas detallados anteriormente sino que su estudio ha permitido comprender fenómenos ocurrentes en otros sistemas con retardo temporal (Biswas y Banerjee, 2018). En otros trabajos Namañunas et al. 1995 y Amil, Cabeza y Marti, 2015 realizaron implementaciones electrónicas del sistema de Mackey-Glass en donde vieron que el sistema es robusto frente a la presencia de ruido y a cambios pequeños en los parámetros del sistema. En otro trabajo Junges y Gallas, 2012 muestran mecanismos de creación y destrucción aparente de ramas en el diagrama de bifurcación del sistema indicando rutas al caos complejas. Por otro lado en Amil, Cabeza, Masoller y Martí, 2015, Tarigo et al. 2022 y Tarigo, Stari y Martí, 2024 podemos observar que el sistema presenta coexistencia de una gran cantidad de atractores y es muy sensible a cambios en las condiciones

iniciales del mismo.

Capítulo 2

El sistema de Mackey-Glass

En este capítulo, introduciremos una discretización del sistema de MG con el objetivo de facilitar su análisis numérico y estudiar sus propiedades dinámicas. También estudiaremos la estabilidad lineal de los puntos fijos del sistema y emplearemos esta representación discreta para caracterizar la transición hacia comportamientos periódicos y caóticos mediante un análisis de bifurcaciones.

Para simplificar el análisis utilizaremos la variable adimensionada $x = P/\theta$ y redefinimos la escala temporal de manera que $t \rightarrow \gamma t$, por lo que el tiempo de retardo pasa a ser $\Gamma = \gamma\tau$. Luego de estos cambios la Ec. de MG (1.3) queda

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{x_\Gamma}{1 + x_\Gamma^n} - x \quad (2.1)$$

con $\alpha = \beta_0/\gamma$ y $x_\Gamma = x(t - \Gamma)$. Limitaremos el análisis de (2.1) a \mathbb{R}^+ ya que al ser P una densidad sus valores negativos no tienen sentido físico.

2.1. Discretización del sistema

La integración numérica de una ecuación diferencial con delay (DDE) puede llevarse a cabo a partir de métodos estándar para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias como los métodos de Runge-Kutta. Aunque estos métodos pueden tener problemas de estabilidad al aplicarse a DDEs, es posible adaptarlos utilizando pasos variables e interpolando las soluciones como se describe en Bellen y Zennaro, 2013. Estos métodos pueden ser computacionalmente intensivos debido a la necesidad de interpolar entre datos y al número de operaciones requeridas según su orden. Por esta razón en este trabajo integramos

el sistema de MG utilizando el mapa introducido en Amil, Cabeza y Marti, 2015. El mapa consiste en discretizar el tiempo en intervalos pequeños Δt tal que el tiempo de retardo queda dividido en N intervalos iguales, es decir $\Gamma = N\Delta t$. Asumiendo que la variable retardada es constante durante el intervalo Δt podemos integrar (2.1) para obtener la evolución del sistema en el intervalo:

$$x(t + \Delta t) = \left(x(t) - \alpha \frac{x_\Gamma}{1 + x_\Gamma^n} \right) e^{-\Delta t} + \alpha \frac{x_\Gamma}{1 + x_\Gamma^n}. \quad (2.2)$$

A partir de (2.2) podemos introducir la variable discreta $x_i = x(i\Delta t)$ de manera de describir la dinámica continua de (2.1) como un mapa de una única variable. Para obtener x_{i+1} es necesario conocer la variable en los N instantes previos. Un mapa unidimensional que depende de N instantes previos es equivalente a un mapa N -dimensional instantáneo, tal como se muestra en Masoller, 2003. Por simplicidad utilizaremos la misma notación x_i para las variables del mapa discreto, resultando en:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= e^{-\frac{\Gamma}{N}} x_1(t) + \left(1 - e^{-\frac{\Gamma}{N}} \right) \alpha \frac{x_N(t)}{1 + x_N^n(t)}, \\ x_i(t+1) &= x_{i-1}(t) \quad \forall \quad i = 2 \dots N \end{aligned} \quad (2.3)$$

A diferencia de un tiempo de retardo, todas las variables en (2.3) reproducen la dinámica de x_1 ; x_N representa la variable en tiempo retardado. Es sencillo ver que (2.3) converge a (2.1) cuando $\Gamma/N \rightarrow 0$, es decir cuando $N \rightarrow \infty$. La discretización en el mapa (2.3) es más rápida en tiempo de computación que otros métodos convencionales para resolver DDEs. Además esta discretización tiene la ventaja de ser exacta en el tiempo (Amil, Cabeza y Marti, 2015).

En adelante utilizaremos (2.3) para referirnos a simulaciones del sistema de MG tomando como parámetros α , Γ , n y N . Además, para cada simulación descartamos los datos iniciales correspondientes a la dinámica transitoria, conservando únicamente el régimen estacionario.

2.2. Análisis de estabilidad lineal

En la Fig. 2.1 podemos observar distintos ejemplos de estados finales que alcanza el sistema de MG al variar el tiempo de retardo Γ . Como podemos

observar el sistema admite soluciones de equilibrio, ciclos límite y soluciones aperiódicas. Estudiaremos la estabilidad de estas soluciones y la transición entre puntos fijos y ciclos límite a partir del análisis de estabilidad lineal de los puntos fijos siguiendo el procedimiento en Erneux, 2009, Capítulo 2.1 aplicado al sistema de MG.

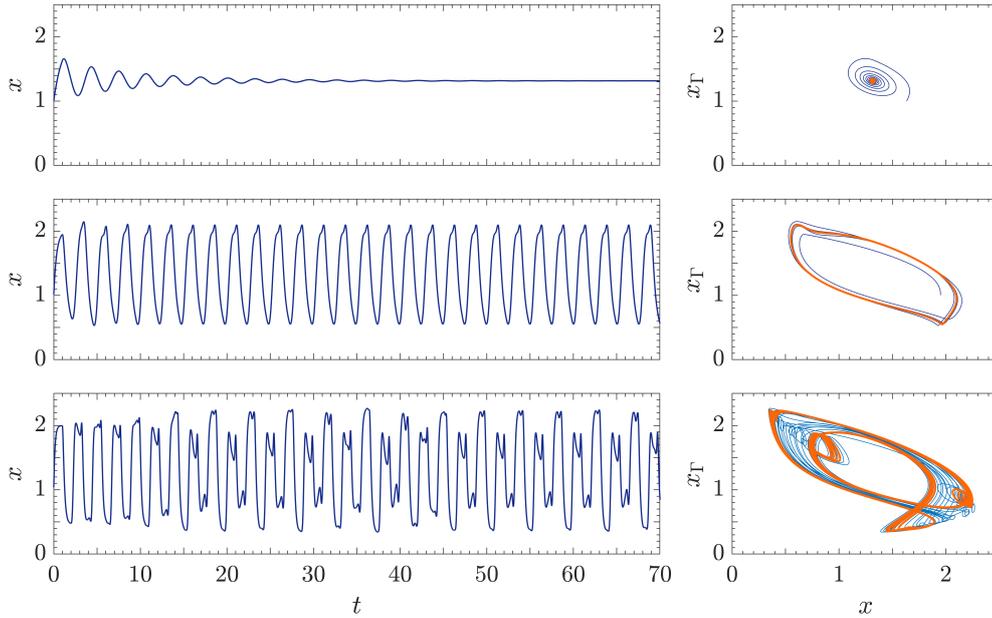


Figura 2.1: Ejemplos de transitorios y atractores en el sistema de MG. Los parámetros son $N = 1194$, $n = 4$ y $\alpha = 4$ para los tres atractores y $\Gamma = 2$ en el panel superior, $\Gamma = 4$ en el panel del medio y $\Gamma = 7$ en el panel inferior.

Para hallar los puntos fijos del sistema igualamos la expresión (2.1) a cero y obtenemos:

$$x_s = 0 \quad \text{y} \quad x_s = (\alpha - 1)^{\frac{1}{n}}. \quad (2.4)$$

Es importante señalar que la Ec. (2.1) también admite la solución $x_s = -(\alpha - 1)^{\frac{1}{n}}$ para n par pero no la consideraremos dado que es una solución negativa. Considerando el cambio de variable $u = x - x_s$ y asumiendo que u es pequeño obtenemos la siguiente ecuación linealizada:

$$\dot{u} = -u + \frac{\alpha}{1 + x_s^n} u_\Gamma - \frac{\alpha n x_s^n}{(1 + x_s^n)^2} u_\Gamma. \quad (2.5)$$

Empezaremos por el caso $x_s = 0$. Imponiendo una solución exponencial en

(2.5) obtenemos:

$$\lambda = -1 + \alpha e^{-\lambda\Gamma}. \quad (2.6)$$

Para valores de α mayores a uno, (2.6) admite soluciones positivas para todos los valores de Γ mayores a cero, de manera que $x_s = 0$ es estable cuando $\alpha \leq 1$ e inestable cuando $\alpha > 1$.

En el caso de $x_s = (\alpha - 1)^{\frac{1}{n}}$, el punto fijo existe únicamente cuando $\alpha \geq 1$. Realizando el mismo análisis que para $x_s = 0$ obtenemos:

$$\lambda = -1 + \left(1 - \frac{n(\alpha - 1)}{\alpha}\right) e^{-\lambda\Gamma}. \quad (2.7)$$

Como $x_s = (\alpha - 1)^{\frac{1}{n}}$ es el único punto fijo estable para $\alpha \geq 1$, su estabilidad puede cambiar únicamente en una bifurcación de Hopf, que es equivalente a asumir $\lambda = i\lambda_i$. Igualando la parte real e imaginaria de esta condición en (2.7) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(1 - \frac{n(\alpha - 1)}{\alpha}\right) \cos(\lambda\Gamma) - 1 \\ \lambda &= -\left(1 - \frac{n(\alpha - 1)}{\alpha}\right) \sin(\lambda\Gamma) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Definiendo el parámetro $s = \lambda\Gamma$ obtenemos la curva de la bifurcación de Hopf en función de los parámetros α , Γ y n :

$$\alpha = -\frac{n}{\left[1 - \frac{1}{\cos(s)} - n\right]} \quad \Gamma = -\frac{s}{\tan(s)}. \quad (2.9)$$

En la Fig. 2.2 podemos observar ambas curvas, $\alpha = 1$ donde cambia el punto fijo estable y la curva en (2.9) donde se produce la bifurcación de Hopf. Como podemos apreciar en la simulación los ciclos límites se hacen estables luego de la bifurcación de Hopf lo cual es coherente con el análisis anterior.

Podemos observar la gran cantidad de soluciones del sistema de MG en la Fig. 2.2 así como las diferentes estructuras que se forman en el espacio de parámetros. Tal como se muestra en la Fig. 2.2 existen diversos patrones de soluciones, en especial para tiempos de retardo grandes, donde esperamos soluciones caóticas.

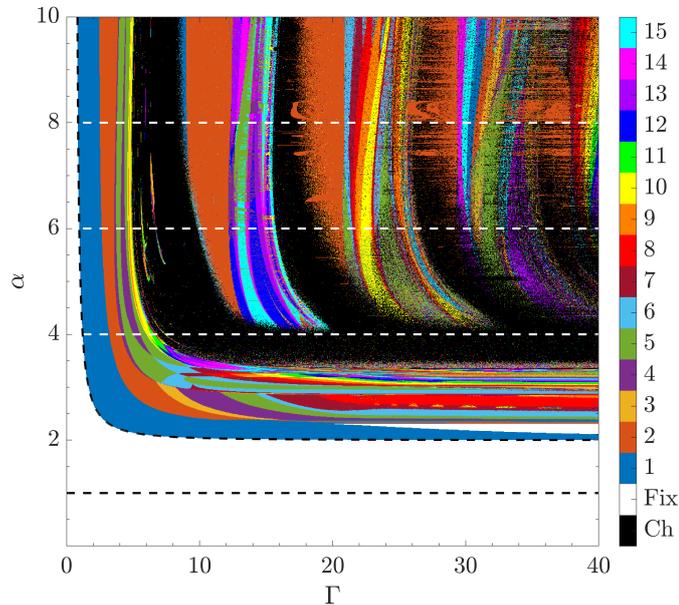


Figura 2.2: Espacio de parámetros del sistema de MG. En blanco se representan los puntos fijos del sistema y los colores representan la cantidad de picos en un periodo de los ciclos límite, los colores se reutilizan a partir de 16 picos por periodo. En negro se representan los atractores caóticos. Las curvas en negro representan las curvas analíticas donde cambia la estabilidad de los puntos fijos. Los parámetros del sistema son $N = 1194$ y $n = 4$.

2.3. Diagramas de bifurcación

Para estudiar las transiciones entre puntos fijos, ciclos límite y atractores caóticos obtuvimos diagramas de bifurcación del sistema de MG dejando α fijo y variando el parámetro de retardo Γ . En la Fig. 2.3 se muestran tres diagramas de bifurcación para distintos valores de α que corresponden a las líneas blancas de la Fig. 2.2. La creación y destrucción de ramas en diagramas de bifurcación es un fenómeno conocido en este sistema tal como muestran Junges y Gallas, 2012. Podemos apreciar este comportamiento en los tres diagramas de la Fig. 2.3. En la Fig. 2.3-(a) podemos observar cascadas de duplicación de periodo hasta $\Gamma = 8$, donde las trayectorias pasan a ser caóticas. Para las Figs. 2.3-(b) y (c) observamos un comportamiento similar, a excepción de que luego de la primer transición al caos el sistema vuelve a soluciones periódicas. Este comportamiento es coherente con las regiones periódicas que observamos en la Fig. 2.2. Este fenómeno implica que en aplicaciones practicas de sistemas con retardo se podría estabilizar el sistema para obtener oscilaciones

aumentando el parámetro de retardo temporal y no solo disminuyéndolo, lo cual podría ser útil en algunas aplicaciones. Por otro lado la cantidad de picos por período aumenta a medida que los valores de los parámetros del sistema aumentan, lo que implica que los atractores se hacen más complejos a medida que aumentan los parámetros de retardo y la intensidad del término no lineal.

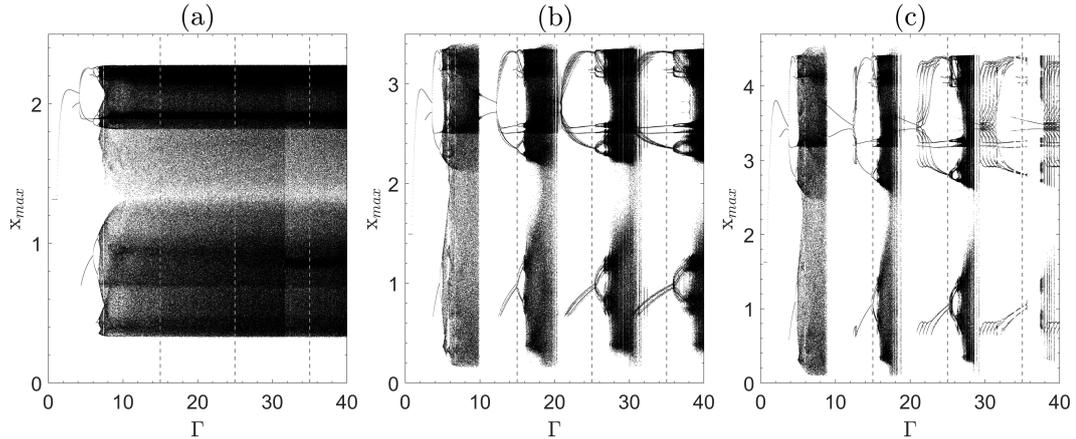


Figura 2.3: Diagramas de bifurcación del sistema de MG. Para cada valor de α y Γ utilizamos $x_{in}(t) = 1 \forall t \in [-\Gamma, 0)$ como condición inicial, descartamos un transitorio de 5000Γ y mostramos los máximos locales en un periodo. Los parámetros del sistema son $N = 1194$ y $n = 4$ y $\alpha = 4$ para el diagrama (a), $\alpha = 6$ para (b) y $\alpha = 8$ para (c).

En la Fig. 2.4 se muestran diagramas de bifurcación barriendo el parámetro de retardo en ambas direcciones para tres valores diferentes de α . Como podemos observar la Fig. 2.4 muestra resultados similares a la Fig. 2.3 con la diferencia que para $\alpha = 4$ observamos soluciones periódicas luego de la primer transición al caos, además de que los diagramas (a), (b) y (c) presentan resultados diferentes a los diagramas (d), (e) y (f) cuando se trata de los mismos parámetros del sistema, evidenciando la multiestabilidad del sistema y su dependencia a las condiciones iniciales. Como podemos observar en la Fig. 2.4 la multiestabilidad está presente para intervalos considerables de los parámetros del sistema y es necesario tener en cuenta la coexistencia de estos atractores ya que representan dinámicas muy diferentes para un mismo conjunto de parámetros. En el siguiente capítulo estudiaremos en profundidad el alcance de la multiestabilidad en el sistema de MG y exploraremos un primer acercamiento para poder cuantificar sus efectos.

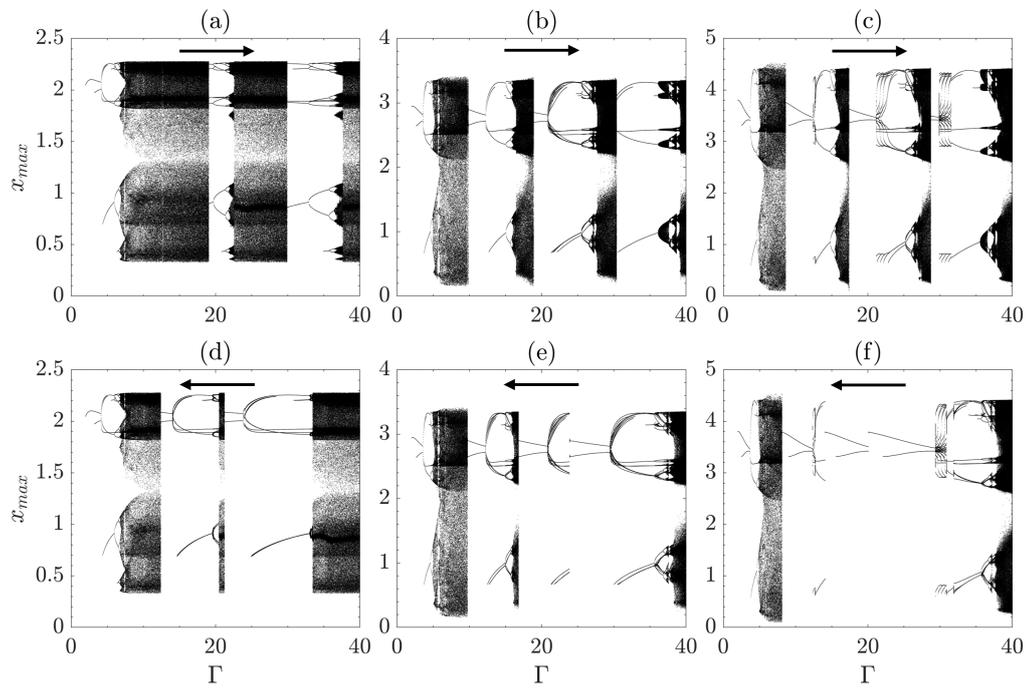


Figura 2.4: Histéresis en el sistema de MG. En los diagramas (a), (b) y (c), el sistema se inicializa con $x_{in}(t) = 1$ para $t \in [-\Gamma, 0)$ y se incrementa Γ utilizando la solución anterior como condición inicial. Luego, en (d), (e) y (f), Γ se reduce siguiendo el mismo procedimiento. Descartamos un transitorio de 2000Γ por punto. Los parámetros son $N = 1194$ y $n = 4$, con $\alpha = 4$ en (a) y (d), $\alpha = 6$ en (b) y (e), y $\alpha = 8$ en (c) y (f).

Capítulo 3

Multiestabilidad en el sistema de Mackey-Glass

Como vimos al final del capítulo anterior, el sistema de MG presenta multiestabilidad, es decir, la coexistencia de más de un atractor estable dependiendo de las condiciones iniciales. Este fenómeno fue reportado en Amil, Cabeza, Masoller y Martí, [2015](#) y Tarigo et al. [2022](#), y representa un aspecto clave en el análisis de la predictibilidad del estado final de los sistemas dinámicos. La presencia de más de un estado final estable implica que el sistema es sensible a incertidumbres en las condiciones iniciales, lo cual limita la capacidad de predecir la evolución del sistema. En este sentido, la cuantificación de la multiestabilidad es fundamental para poder describir el comportamiento del sistema y poder evaluar su grado de predictibilidad.

En este capítulo exploraremos el impacto de los parámetros del sistema en las estructuras de las cuencas de atracción. Por otro lado, analizaremos la cantidad de soluciones diferentes en función de los parámetros del sistema como un primer acercamiento a la cuantificación del impacto de la multiestabilidad en la predictibilidad del sistema.

3.1. Coexistencia de soluciones

A partir de los resultados de Amil, Cabeza, Masoller y Martí, [2015](#) seleccionamos dos puntos en el espacio de parámetros: (1) $(\Gamma_1 = 18, \alpha_1 = 4)$ y (2) $(\Gamma_2 = 20, \alpha_2 = 4)$ y tres condiciones iniciales diferentes a , b y ch que obtuvimos

variando los parámetros ϕ y x_{off} de la siguiente ecuación:

$$x_{in}(t) = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{7\pi t}{\Gamma} + \phi\right) \sin\left(\frac{7\pi t}{2\Gamma} + \frac{\phi}{2}\right) + x_{off} \quad (3.1)$$

con t en el intervalo $(-\Gamma, 0)$ para ilustrar la multiestabilidad en el sistema de MG. En la Fig. 3.1 mostramos seis series temporales y sus respectivos diagramas de recurrencia para los dos puntos del espacio de parámetros y las tres condiciones iniciales. Para ambos puntos podemos observar como las condiciones iniciales a y b resultan en ciclos límite periódicos mientras que ch evoluciona hacia un atractor caótico. También podemos observar cómo las características de las series periódicas dependen de las condiciones iniciales. Por ejemplo $a1$ tiene un período de 27.3 unidades de Γ y 4 picos por período mientras que $b1$ tiene un período de 83.0 unidades de Γ y 12 picos por período. Sin embargo podemos observar como al pasar de Γ_1 a Γ_2 el período se duplica y la cantidad de picos por período se multiplica por 2.5 para ambas condiciones iniciales, indicando que los mecanismos por el que se produce la bifurcación es similar en ambos casos.

Para estudiar los efectos de la multiestabilidad al variar los parámetros del sistema tomamos cuatro funciones de condiciones iniciales distintas, una función constante no nula, una función lineal, la Ec. (3.1) y otra combinación de funciones sinusoidales:

$$x_{in}(t) = 1 \quad (3.2)$$

$$x_{in}(t) = 0.7 \frac{t}{\Gamma} + 0.3 \quad (3.3)$$

$$x_{in}(t) = \frac{1}{40} \sin\left(\frac{7\pi t}{\Gamma} + \phi\right) \left[\sin\left(\frac{7\pi t}{2\Gamma} + \frac{\phi}{2}\right) + 4 \right] + x_{off} \quad (3.4)$$

donde ϕ y x_{off} son parámetros y $t \in [-\Gamma, 0)$. Usando estas funciones podemos identificar regiones del espacio de parámetros donde el sistema de MG presenta multiestabilidad. También podemos cuantificar la abundancia de soluciones diferentes en estas regiones.

Para identificar las regiones de multiestabilidad en la Fig. 3.2 mostramos cuatro diagramas de picos diferentes. Obtuvimos cada punto en la Fig. 3.2 evolucionando el mapa en la Ec. (2.3) con parámetros $n = 4$ y $N = 1194$ y las

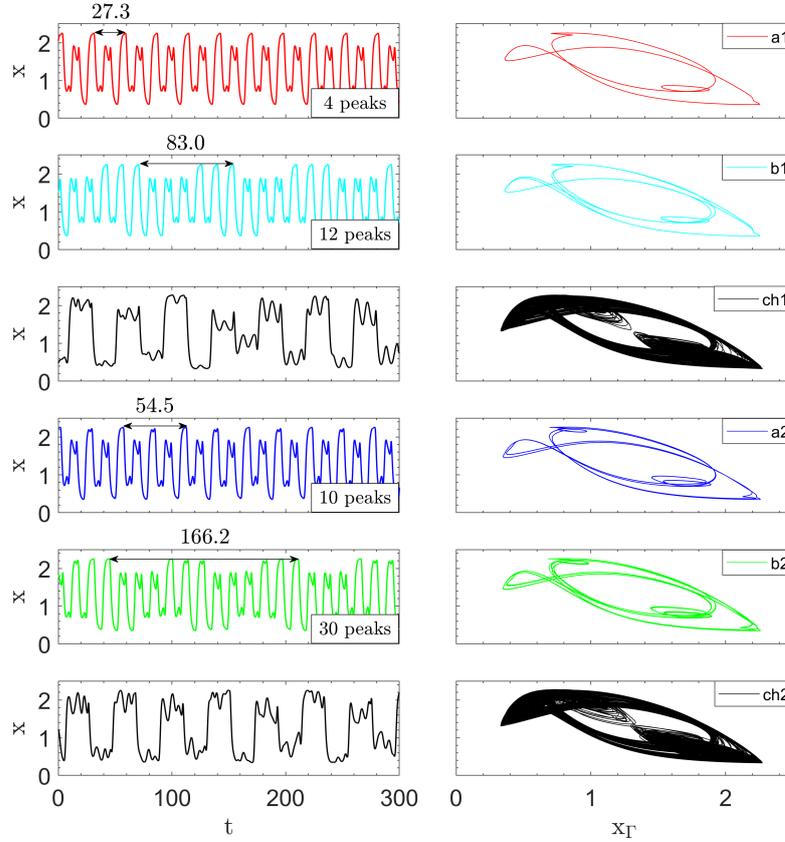


Figura 3.1: Coexistencia de soluciones en el sistema de MG al variar sus condiciones iniciales. Las series temporales $a1$, $b1$ y $ch1$ y sus respectivos diagramas de recurrencia corresponden a los parámetros $\Gamma = 18$ y $\alpha = 4$ mientras que los parámetros de $a2$, $b2$ y $ch2$ son $\Gamma = 20$ y $\alpha = 4$, el resto de los parámetros son $n = 4$ y $N = 1194$ para todas las series temporales. Las condiciones iniciales están dadas por la Ec. (3.1) con parámetros $\phi = 0$ y $x_{off} = 0.35$ para $a1$ y $a2$, $\phi = \pi$ y $x_{off} = 0.3$ para $b1$ y $b2$ y $\phi = \pi$ y $x_{off} = 0.4$ para $ch1$ y $ch2$. Para todas las series temporales se descartó un tiempo de transitorio de 2000Γ .

Ecs. (3.1)-(3.4) como condiciones iniciales. Podemos observar cómo los cuatro paneles presentan diferencias significativas a pesar de corresponder a la evolución del mismo sistema con los mismos parámetros. Estas diferencias se indican con cajas blancas en las regiones de interés. A partir de estas diferencias observamos cómo para las condiciones iniciales que utilizamos la multiestabilidad del sistema no está distribuida uniformemente en el espacio de parámetros, por ejemplo no encontramos multiestabilidad para valores de α menores que 3 o valores de Γ menores a 10. Es decir que para valores de los parámetros suficientemente pequeños el sistema de MG presenta una única solución estable

y la coexistencia de atractores ocurre al aumentar los parámetros del sistema. Por otro lado podemos observar cómo las diferentes regiones marcadas cambian para alguna función de condiciones iniciales y no para todas, lo que parece indicar que las nuevas soluciones dependen de la relación funcional de las condiciones iniciales.

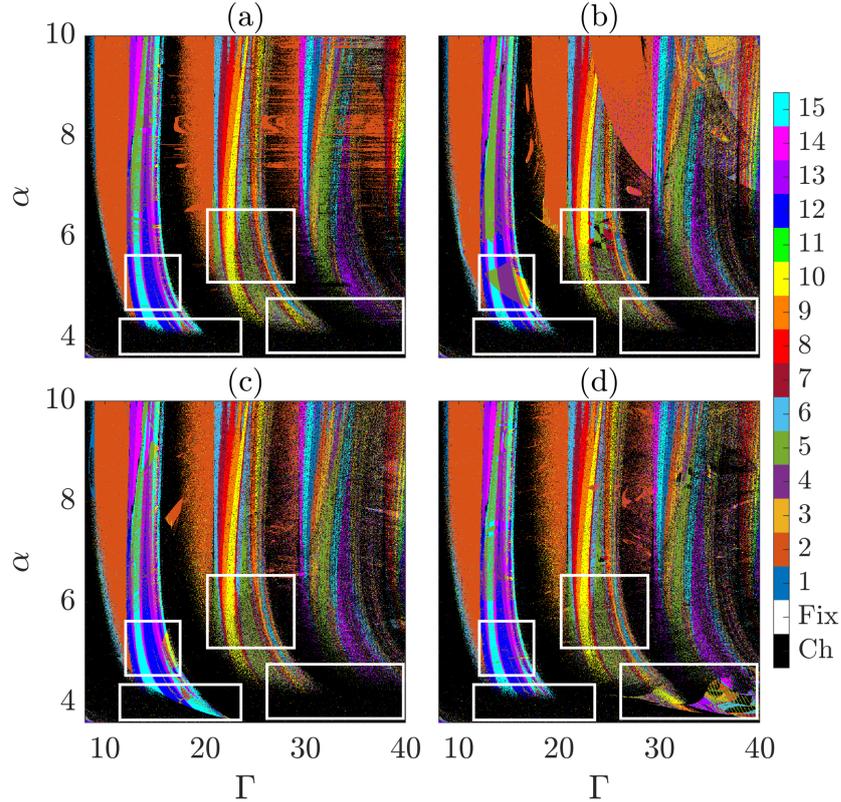


Figura 3.2: Diagrama de picos del sistema de MG para cuatro funciones de condiciones iniciales diferentes. Cada diagrama representa 1000x1000 puntos en el espacio de parámetros (Γ, α) . En color se representan la cantidad de picos en un periodo de los ciclos límite, los colores se reutilizan a partir de 16 picos por periodo. Las condiciones iniciales para cada punto corresponden a la Ec. (3.2) para el panel (a), (3.3) para el panel (b), (3.1) con $\phi = 0$ y $x_{off} = 0.3$ para el panel (c) y (3.4) con $\phi = 0$ y $x_{off} = 0.33$ para el panel (d). Para contar el número de picos registramos un tiempo de 200Γ luego de descartar un transitorio de 1000Γ .

Para poder cuantificar lo que observamos en la Fig. 3.2 en la siguiente sección contaremos la cantidad de soluciones al variar las condiciones iniciales. También presentaremos una proyección bidimensional del espacio de fase del sistema de MG a partir de las funciones de condiciones iniciales (3.1) y (3.4) con el fin de visualizar proyecciones de las cuencas de atracción del sistema.

3.2. Como cuantificar la multiestabilidad

Para contar la cantidad de soluciones en función de los parámetros del sistema limitamos el estudio a dos de las regiones marcadas en la Fig. 3.2, $(\alpha, \Gamma) \in [3.5, 4.5] \times [10, 24]$ y $(\alpha, \Gamma) \in [3.5, 4.5] \times [25, 40]$. Luego evolucionamos el sistema para cada punto tomando diez condiciones iniciales a partir de las Ecs. (3.1) y (3.4) para cada región respectivamente con $x_{off} = 0.35$ y $\phi = 4\pi i/10$ con $i = 0, 1, \dots, 9$. En las Figs. 3.3 y 3.4 mostramos los diagramas de picos para cada una de las regiones del espacio de parámetros con las diez condiciones iniciales. Las variaciones entre paneles muestran la multiestabilidad del sistema así como la gran cantidad de soluciones coexistentes incluso con pequeñas variaciones en las condiciones iniciales.

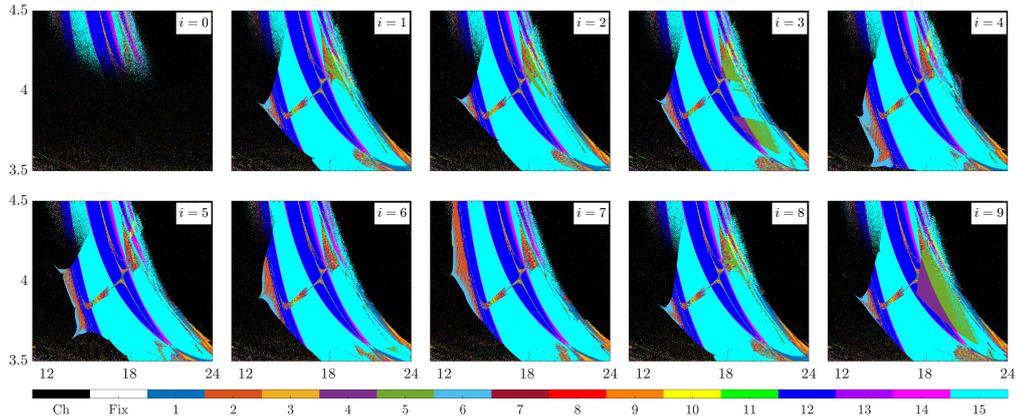


Figura 3.3: Diagrama de picos del sistema de MG para una familia de condiciones iniciales. Cada diagrama representa 500x500 puntos en el espacio de parámetros (Γ, α) . En color se representan la cantidad de picos en un periodo de los ciclos límite, los colores se reutilizan a partir de 16 picos por periodo. Las condiciones iniciales para cada punto corresponden a la Ec. (3.1) con $\phi = 4\pi i/10$ con $i = 0, 1, \dots, 9$ y $x_{off} = 0.35$. Para contar el número de picos registramos un tiempo de 200Γ luego de descartar un transitorio de 2000Γ .

Como podemos observar en las Figs. 3.3 y 3.4 el sistema presenta una gran variedad de soluciones estables al variar las condiciones iniciales. También podemos observar como algunos atractores están presentes para todas las condiciones iniciales mientras que otros se hacen presentes en regiones definidas del espacio de parámetros y persisten para algunos valores de i contiguos, lo que refuerza la idea de que las soluciones son muy dependientes de la forma funcional de las condiciones iniciales.

Para poder cuantificar esta observación contamos la cantidad de solucio-

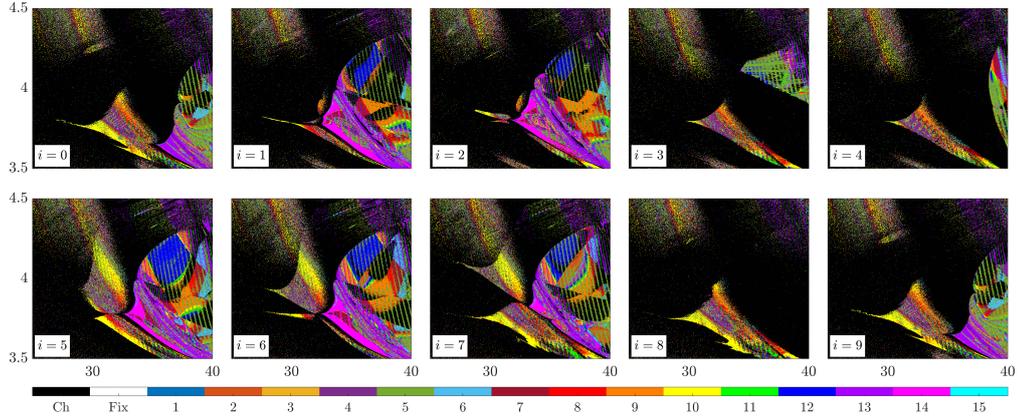


Figura 3.4: Diagrama de picos del sistema de MG para una familia de condiciones iniciales y una región particular del espacio de parámetros. Cada diagrama representa 500x500 puntos en el espacio de parámetros (Γ, α) . En color se representan la cantidad de picos en un periodo de los ciclos límite, los colores se reutilizan a partir de 16 picos por periodo. Las condiciones iniciales para cada punto corresponden a la Ec. (3.4) con $\phi = 4\pi i/10$ con $i = 0, 1, \dots, 9$ y $x_{off} = 0.35$. Para contar el número de picos registramos un tiempo de 200Γ luego de descartar un transitorio de 2000Γ .

nes diferentes obtenidas para cada punto del espacio de parámetros. En la Fig. 3.5 podemos observar la cantidad de soluciones diferentes en función de los parámetros del sistema obtenidas a partir de las Figs. 3.3 y 3.4. El sistema presenta regiones donde solo observamos soluciones caóticas (negro), otras donde no hay multiestabilidad (blanco), de biestabilidad (azul) y con un mayor número de coexistencia de soluciones. Es importante destacar que no distinguimos entre atractores aperiódicos, por lo que podría haber un mayor número de soluciones en regiones con ese tipo de atractor.

Para entender mejor el impacto de la multiestabilidad tomamos dos puntos correspondientes a los parámetros $(\alpha, \Gamma) = (4, 18)$ y $(\alpha, \Gamma) = (4, 20)$ y graficamos a qué solución evoluciona el sistema variando las condiciones iniciales. En la Fig. 3.6 podemos observar los diagramas correspondientes a cada par de parámetros. Podemos notar que ambos diagramas tienen la misma cantidad de soluciones coexistentes. Sin embargo, en el panel (b) observamos como las cuencas de atracción correspondientes a cada atractor están más mezcladas cuando se las compara con las del diagrama (a). Cualitativamente este efecto implica que las predicciones del estado final del sistema para los parámetros del diagrama (b) son más sensibles a cambios en las condiciones iniciales que las del diagrama (a).

El análisis que hicimos en la Fig. 3.5 de contar atractores coexistentes no

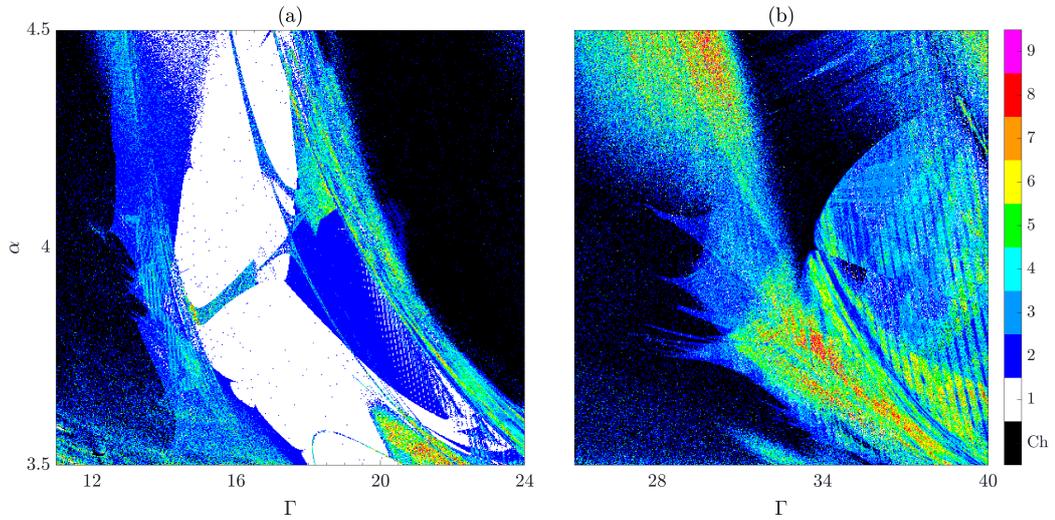


Figura 3.5: Cantidad de soluciones obtenidas al evolucionar el sistema variando las condiciones iniciales. Cada diagrama representa 500x500 puntos en el espacio de parámetros (Γ, α) . En color se representan la cantidad de soluciones diferentes obtenidas, en negro se muestran los puntos para los que unicamente observamos soluciones caóticas. En el panel (a) podemos observar la región y soluciones correspondientes a la Fig. 3.3 mientras que en el panel (b) observamos las correspondientes a la Fig. 3.4.

captura estas diferencias entre las cuencas de atracción y las incertidumbres en el estado final del sistema debido a ellas. Para poder cuantificarla en el capítulo 4 presentaremos el concepto de entropía de cuencas introducida por Daza et al. 2016 y la aplicaremos a un sistema sencillo con retardo temporal. Otro inconveniente del análisis realizado es que si bien en la Fig. 3.5 observamos que en ambos puntos solo hay dos atractores coexistentes. En la Fig. 3.6 vemos como realmente hay tres atractores, dos ciclos límite y uno caótico. Esto muestra la gran dependencia de este análisis con la familia de funciones iniciales utilizada. Para abordar este problema, en el capítulo 5 mostramos como reducir la dimensionalidad del espacio de fase de un sistema con retardo temporal y tomamos condiciones iniciales de forma aleatoria para independizarnos de la elección de las funciones utilizadas.

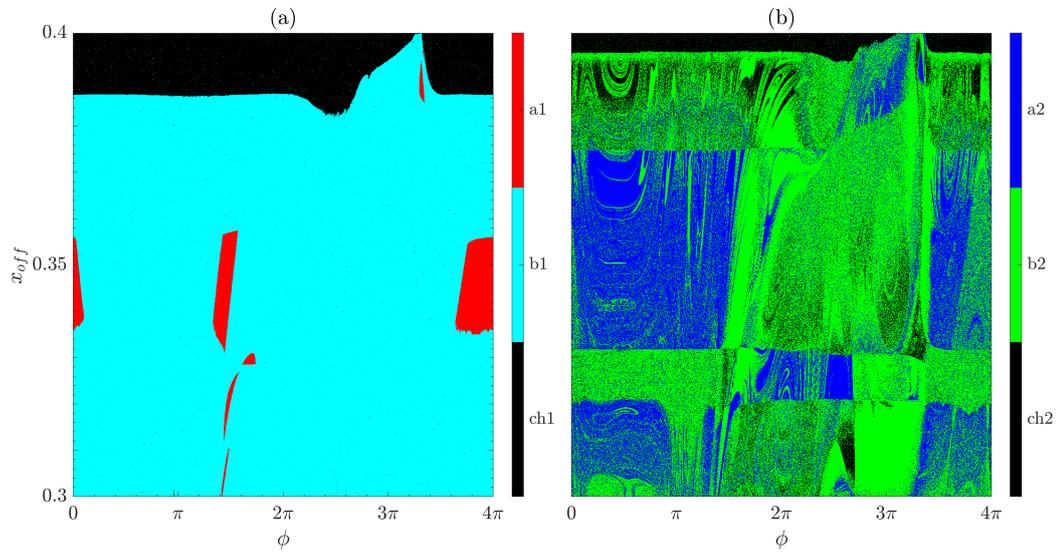


Figura 3.6: Coexistencia de soluciones al variar la función de condiciones iniciales. Cada diagrama representa 1000×1000 condiciones iniciales diferentes. Como condiciones iniciales utilizamos la familia de funciones representada en la Ec. (3.1). El panel (a) corresponde a los parámetros del sistema $(\alpha, \Gamma) = (4, 18)$ mientras que el panel (b) corresponde a $(\alpha, \Gamma) = (4, 20)$, con $n = 4$ y $N = 1194$. En ambos diagramas descartamos un transitorio de 2000Γ antes de determinar a qué solución evolucionó el sistema.

Capítulo 4

Entropía de cuencas en sistemas con retardo temporal

En este capítulo introduciremos el concepto de entropía de cuencas S_b y mostraremos cómo puede ser aplicada para estudiar el espacio de fase y las cuencas de atracción de los sistemas con retardo temporal. Para ello consideraremos un sistema de pozo doble con retardo temporal. Este sistema puede verse como una versión retardada de la forma normal de una bifurcación de horquilla. Este sistema es menos complejo que el sistema de MG y presenta comportamientos de interés que pueden verse también de forma analítica. El análisis de este sistema nos ayudará a entender algunas características de sistemas más genéricos como el de MG. El análisis de este capítulo puede trasladarse a cualquier sistema con retardo temporal.

4.1. Entropía de cuencas

Como mencionamos anteriormente, las cuencas de atracción vinculan un conjunto de condiciones iniciales con los distintos estados finales o atractores que puede alcanzar el sistema. El tamaño y distribución de estas cuencas de atracción en el espacio de fase del sistema y la naturaleza de sus fronteras permiten inferir la sensibilidad de su estado final debido a incertidumbres en las condiciones iniciales del mismo (Aguirre et al. 2009; McDonald et al. 1985).

A modo de ejemplo en la Fig. 4.1 podemos observar distintos espacios de fase correspondientes al sistema de Duffing forzado con distintos valores de sus parámetros tal como se muestra en el capítulo 2.2 de Guckenheimer y Holmes,

1983. A simple vista podemos percibir que las cuencas en el panel (a) son menos sensibles a cambios en las condiciones iniciales que las cuencas de los paneles (b) y (c). Sin embargo esta distinción no es clara entre los paneles (b) y (c), ya que el panel (b) hay un mayor número de atractores coexistentes que en el panel (c) pero las cuencas del panel (c) están más entremezcladas.

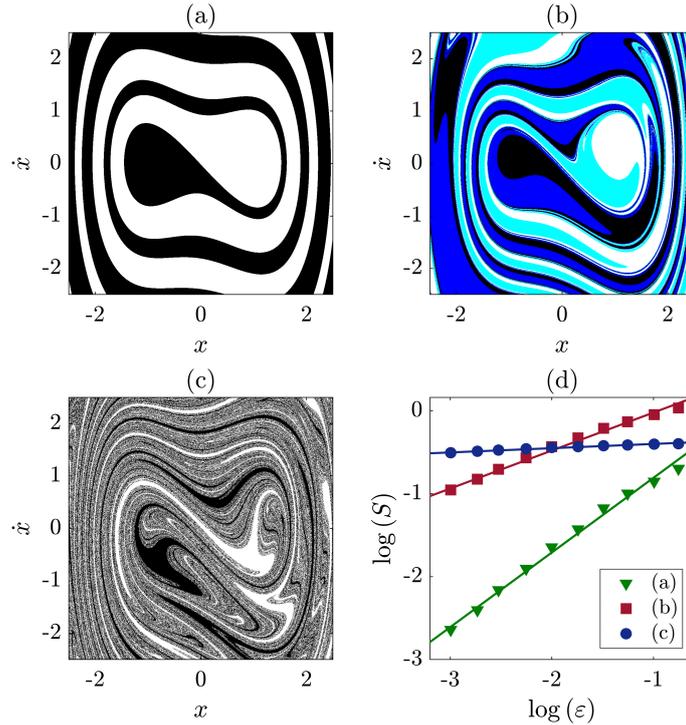


Figura 4.1: Ejemplo de cuencas de atracción en el sistema de Duffing forzado. Los paneles (a), (b) y (c) corresponden a distintos parámetros del término forzante; cada color corresponde a un atractor distinto. El panel (d) muestra el gráfico log-log de la entropía de cuencas en función del tamaño de la caja ϵ .

Para poder cuantificar estas diferencias, en Grebogi et al. 1983 introducen el exponente de incerteza α de una frontera entre cuencas de atracción para poder cuantificar esta sensibilidad del estado final de un sistema dinámico. Con este objetivo dividen el espacio de fase en cajas de tamaño lineal ϵ y cuentan que fracción de volumen del espacio de fase f contiene a la frontera.

Para fronteras simples como la que se muestra en la Fig. 4.2 podemos observar que $f \sim \epsilon$. Sin embargo, para fronteras fractales esperamos que la dependencia sea del estilo $f \sim \epsilon^\alpha$ con $\alpha \in [0, 1]$ definido como:

$$\alpha = D - d, \tag{4.1}$$

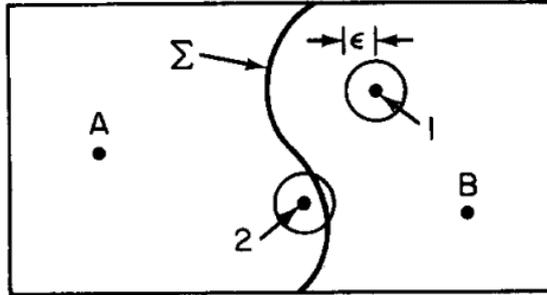


Figura 4.2: Región del espacio de fase dividida en dos cuencas de atracción de los atractores A y B por una frontera Σ . 1 y 2 representan dos condiciones iniciales con incertidumbre ε . Tomada de Grebogi et al. 1983.

donde D es la dimensión del espacio de fase del sistema y d es la dimensión fractal de la frontera entre las cuencas de atracción. Como la frontera divide al espacio de fase, en caso de una frontera simple $d = D - 1$ mientras que si es fractal $d > D - 1$.

Este método permite cuantificar la sensibilidad del estado final de un sistema con una única frontera entre cuencas de atracción, pero no permite el estudio de sistemas más complejos con un mayor número de fronteras diferentes entre distintos atractores. Con este fin, Daza et al. 2016 introducen el concepto de entropía de cuencas que consiste en un algoritmo similar al de Grebogi et al. 1983 pero ponderando el peso de cada caja por la suma de la entropía de Gibbs de cada atractor presente en la región del espacio de fase delimitada por la caja. De esta manera, si tenemos un sistema con N_A estados finales diferentes la entropía de cada caja queda:

$$S_i = - \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} \log p_{ij} \quad (4.2)$$

donde $m_i \in [1, N_A]$ es la cantidad de atractores distintos en la caja i y p_{ij} es la fracción de condiciones iniciales dentro de la caja i que terminan en el atractor j . La entropía de cuencas resulta simplemente en el promedio de la cantidad en expresada en (4.2):

$$S_b = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} S_i \quad (4.3)$$

donde N_b es el número total de cajas utilizadas. Cabe destacar que, a dife-

rencia de Daza et al. 2016, donde el espacio de fase se divide en cajas de manera regular, en este trabajo proponemos una estrategia alternativa basada en la elección aleatoria de cajas. Este método es posible gracias a que la ecuación (4.3) representa un promedio, lo que garantiza que al tomar suficientes muestras aleatorias la estimación converge al valor de la entropía de cuencas. Además, este procedimiento permite una reducción significativa del tiempo de cómputo en espacios de fase de alta dimensión (Tarigo, Stari, Masoller y Martí, 2024).

Para poder interpretar la entropía de cuencas tomamos como hipótesis que los estados finales dentro de cada caja son equiprobables, es decir que $p_{ij} = 1/m_i \forall j$, entonces sumando p_{ij} para cada atractor dentro de la caja obtenemos que $S_i = \log m_i$ y la entropía de cuencas resulta:

$$S_b = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} \log m_i. \quad (4.4)$$

Por otro lado N_k cajas contienen la misma cantidad de atractores, por lo que podemos decir que contienen a la frontera $k \in 1, \dots, k_{m\acute{a}x}$. De esta manera (4.4) se puede reescribir como:

$$S_b = \sum_{k=1}^{k_{m\acute{a}x}} \frac{N_k}{N_b} \log m_k. \quad (4.5)$$

Siguiendo el razonamiento realizado por Grebogi et al. 1983, la fracción de cajas que contienen a la frontera k escala con el tamaño de la caja como $N_k/N_b = n_k/\tilde{n} \varepsilon_k^\alpha$, donde n_k/\tilde{n} es una constante de proporcionalidad. Sustituyendo en (4.5) obtenemos:

$$S_b = \sum_{k=1}^{k_{m\acute{a}x}} \frac{n_k}{\tilde{n}} \varepsilon_k^{\alpha_k} \log m_k \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) es útil porque nos permite entender cuáles son los componentes que la entropía de cuencas cuantifica: en primer lugar n_k/\tilde{n} es una constante de normalización que refleja el tamaño de la frontera y es independiente del tamaño de la caja, α_k permite cuantificar la fractalidad de la frontera y por último m_k es la cantidad de atractores distintos que la frontera separa.

Como observamos al principio del capítulo, la Fig. 4.1 muestra tres espacios de fase diferentes correspondientes al sistema de Duffing con forzante. El panel

(d) muestra la entropía de cuencas para cada espacio de fase en función del tamaño de caja. En el caso del cálculo para los paneles (a) y (c), en los que solo hay coexistencia de dos atractores, el coeficiente angular de la recta representa la dimensión del espacio de fase menos el coeficiente de incerteza, por lo que el gráfico para el panel (a) muestra una frontera simple mientras que el del panel (c) muestra una frontera fractal, lo cual concuerda con lo que observamos en ambos casos. Por otro lado observamos que la entropía correspondiente al panel (b) es menor que la correspondiente al panel (c) para tamaños de caja menores a $\exp(-2)$ pero es mayor en el caso contrario, es decir que el sistema en (b) es más predecible que el sistema en (c) cuando las incertidumbres en las condiciones iniciales son pequeñas y lo contrario ocurre con incertidumbres grandes, lo que es razonable observando las cuencas de atracción.

Como hemos mostrado, la entropía de cuencas nos permite cuantificar la sensibilidad del estado final del sistema y compararla con la de otro sistema, incluso entre espacios de fase con distinto número de atractores. Además a partir de su análisis en función del tamaño de la caja podemos establecer qué sistema es más impredecible debido a la incertidumbre en las condiciones iniciales.

4.2. El pozo doble con retardo

Como primer acercamiento al uso de la entropía de cuencas aplicada a un sistema con retardo temporal, introduciremos un modelo simple de un sistema biestable al que le agregamos un término lineal retardado en el tiempo:

$$\dot{x}(t) = x(t) - x^3(t) + cx(t - \tau) \quad (4.7)$$

donde c es la intensidad del término retardado y τ el tiempo de retardo. La ecuación (4.7) admite tres soluciones estacionarias

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_{\pm} &= \pm\sqrt{1+c} \text{ con } c \geq -1, \end{aligned} \quad (4.8)$$

que existen independientemente del valor del tiempo de retardo.

En la Fig. 4.3 mostramos el diagrama de estabilidad de los puntos fijos así como ejemplos de los distintos transitorios del sistema. Siguiendo el análisis en

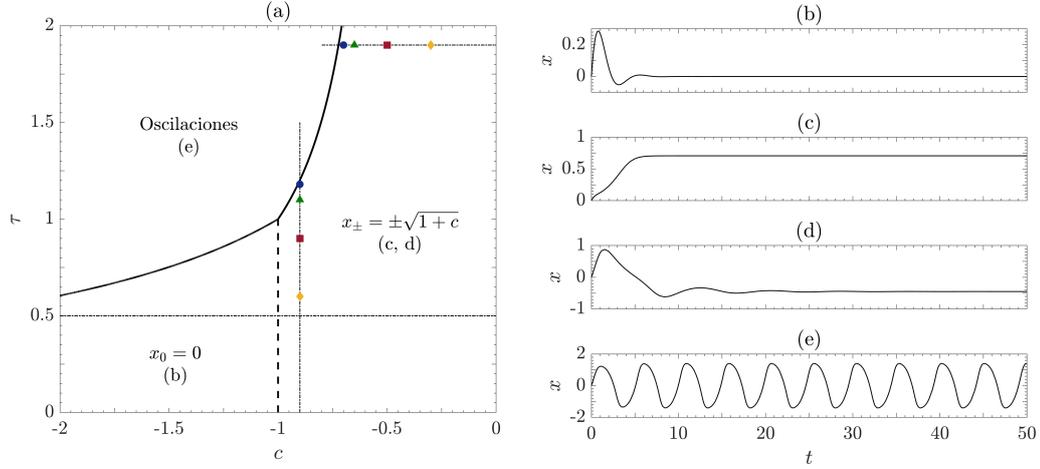


Figura 4.3: (a) Estabilidad lineal de los puntos fijos en el espacio de parámetros (c, τ) . Las líneas punteadas y los símbolos representan los parámetros analizados en las figuras a continuación. En la línea punteada el sistema experimenta una bifurcación tridente mientras que las solidas representan dos bifurcaciones de Hopf. (b-e) Dinámica transitoria y diferentes atractores del sistema, los parámetros (c, τ) son (b) $(-1.5, 0.5)$, (c) $(-0.5, 0.5)$, (d) $(-0.7, 1.2)$ y (e) $(-1.5, 1.5)$. Las condiciones iniciales están dadas por (4.12) con parámetros $a = 1$ y $x_{off} = 0$.

Tarigo, Stari, Masoller y Martí, 2024, para $c < -1$ la única solución estacionaria existente en el sistema es $x_0 = 0$. En $c = -1$, x_0 pierde estabilidad y nacen los otros dos puntos fijos $x_{\pm} = \pm\sqrt{1+c}$ por lo que el sistema experimenta una bifurcación tridente (indicada por la línea punteada en la Fig. 4.3). Hallamos las bifurcaciones de Hopf realizando el análisis de estabilidad lineal alrededor de los puntos fijos buscando soluciones del tipo $x = x_s \exp(\lambda t)$, siendo x_s cualquiera de las soluciones x_0 o x_{\pm} . En ambos casos obtuvimos la ecuación característica:

$$\lambda = 1 - 3x_s^2 + c \exp(-\lambda\tau) \quad (4.9)$$

Resolviendo (4.3) para $x_s = x_0$ obtenemos la siguiente solución paramétrica:

$$c = \frac{1}{\cos s} \quad \text{y} \quad \tau = -\frac{s}{\tan s} \quad (4.10)$$

correspondiente a la bifurcación de Hopf a la izquierda del punto $(c, \tau) = (-1, 1)$. Resolviendo (4.9) para $x_s = x_{\pm}$ obtenemos la solución paramétrica:

$$c = -\frac{2}{3 - \cos s} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{s(3 - \cos s)}{2 \sin s} \quad (4.11)$$

que corresponde a la bifurcación de Hopf a la derecha del punto $(c, \tau) = (-1, 1)$.

El punto $(c, \tau) = (-1, 1)$ corresponde a una bifurcación de codimensión dos donde se juntan ambas bifurcaciones de Hopf y la bifurcación tridente, Redmond et al. 2002 sostienen que se trata de una bifurcación de Takens-Bogdanov, donde un ciclo límite da lugar a una curva homoclínica permitiendo la coexistencia de otro ciclo límite con los puntos fijos del sistema (Guckenheimer y Holmes, 1983).

Cabe aclarar que el diagrama en el panel (a) de la Fig. 4.3 corresponde únicamente a la estabilidad de las soluciones x_0 y x_{\pm} y no a la estabilidad de las soluciones oscilatorias. De hecho, al final de este capítulo veremos que las oscilaciones no necesariamente nacen en las líneas marcadas por las bifurcaciones de Hopf tal como lo reportan en Redmond et al. 2002.

4.3. Entropía de cuencas en el sistema de pozo doble con retardo

Debido a que los sistemas con retardo temporal como (4.7) tienen un espacio de fase de dimensión infinita, calcular la entropía de cuencas presenta un desafío. Como primer acercamiento a este problema tomaremos una reducción del espacio de fase restringiendo las condiciones iniciales a una familia paramétrica de funciones de la forma:

$$x_{in}(t) = a \sin t + x_{off} \quad \forall t \in [-\tau, 0]. \quad (4.12)$$

Para hallar el estado final asintótico del sistema para cada condición inicial primero lo integramos utilizando un algoritmo de Runge-Kutta de segundo-tercer orden adaptado a sistemas con retardo temporal. Integramos (4.7) por un tiempo de 500s y clasificamos el estado final en uno de los $N_A = 4$ atractores posibles: el estado estacionario nulo x_0 , los estados estacionarios no nulos (x_+ , x_-) o una solución oscilatoria. Para la clasificación tomamos el valor promedio de los últimos 50 puntos de la variable \bar{x} y su desviación estándar σ_x , si $|\bar{x}| < 10^{-3}$ y $\sigma_x < 10^{-2}$ entonces el atractor es x_0 , si $|x_{\pm} - \bar{x}| < 10^{-3}$ y $\sigma_x < 10^{-2}$ el atractor es x_{\pm} respectivamente y si $\sigma_x > 10^{-2}$ entonces el atractor es el estado oscilatorio.

Luego calculamos la entropía de cuencas en el corte bidimensional del espacio de fase que obtenemos variando los parámetros de (4.12). Para calcular

entropía de cuencas tomamos cajas de forma aleatoria en este espacio. Podemos observar en la Fig. 4.4 que para un número de cajas N_b mayor a 10^4 la entropía converge a un valor por lo que utilizaremos $N_b = 10^4$ para calcular la entropía de cuencas. Utilizamos otras familias de funciones como condiciones iniciales obteniendo resultados similares.

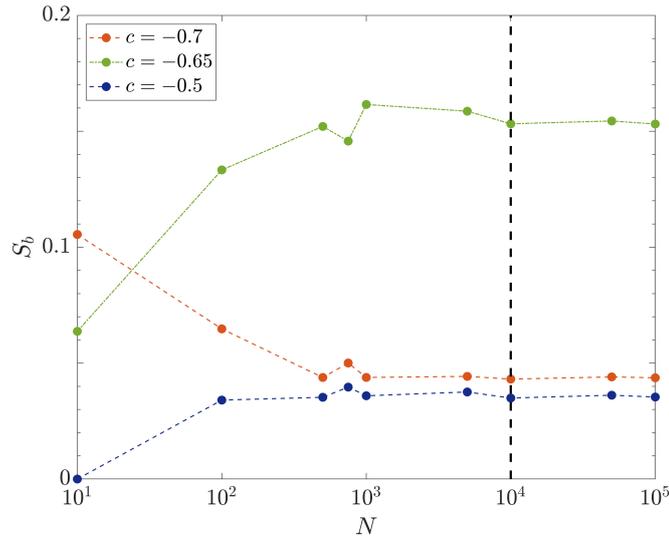


Figura 4.4: Convergencia de la entropía de cuencas en función de la cantidad de cajas utilizadas N_b (en escala logarítmica) para tres valores de c y $\tau = 1.9$. El largo de las cajas es $\varepsilon = 0.1$.

En la figura 4.5 mostramos ejemplos de las cuencas de atracción que obtenemos al usar (4.12) como condiciones iniciales, al variar los parámetros c y τ . Como se puede observar, las cuencas de atracción se mezclan cuando se va desde el panel (a) hacia el (c) (τ aumenta) o desde el panel (e) al (g) (c disminuye). Ambos casos corresponden a acercarse a la bifurcación de Hopf y podemos ver que, cualitativamente, ambos acercamientos producen resultados similares.

También podemos ver cómo cerca de la bifurcación de Hopf (Figs. 4.5.(d) y (h)) aparecen oscilaciones además de las soluciones estacionarias, cosa que no ocurre lejos de la bifurcación. Esto se puede deber a que el sistema sigue en un estado transitorio y no alcanzó el estado estacionario durante el tiempo de integración. Erneux, 2009 muestra que en este sistema los tiempos transitorios pueden ser largos. Para asegurarnos que las oscilaciones son estables y no un fenómeno de enlentecimiento crítico (Dakos et al. 2012) analizamos la amplitud de la oscilación en función del tiempo de integración, encontrando que si

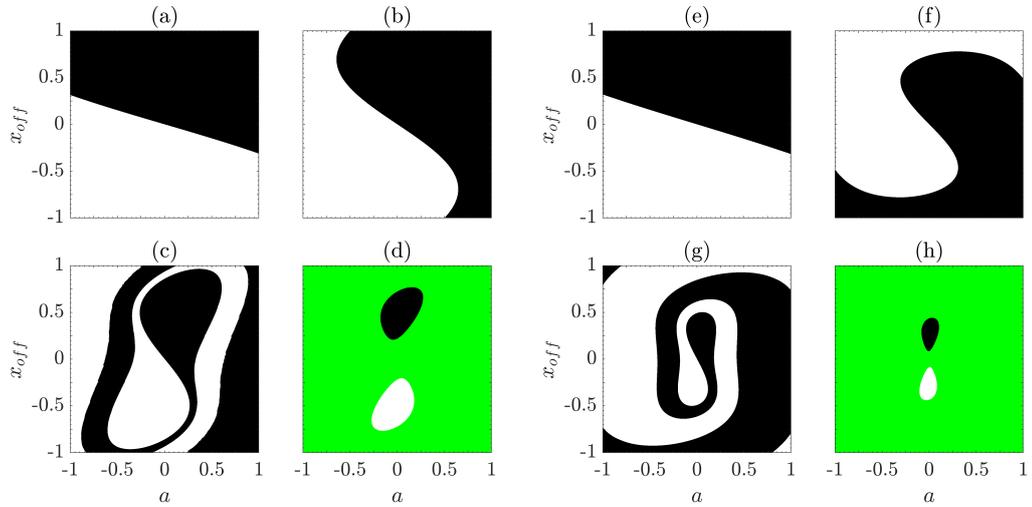


Figura 4.5: Cuencas de atracción en la sección bidimensional del espacio de fase definido por los parámetros de las condiciones iniciales. Para los paneles (a)-(d) los parámetros son $c = -0.9$ y τ varía según la línea vertical en la Fig. 4.3: (a) $\tau = 0.7$, (b) $\tau = 0.9$, (c) $\tau = 1.1$ y (d) $\tau = 1.18$. Para los paneles (e)-(h) son $\tau = 1.9$ y c varía según la línea horizontal en la Fig. 4.3: (e) $c = -0.3$, (f) $c = -0.5$, (g) $c = -0.65$ y (h) $c = -0.7$. Los colores representan el estado final asintótico del sistema, blanco y negro a los puntos fijos x_{\pm} mientras que el verde corresponde a soluciones oscilatorias. Cada diagrama consiste en 1001×1001 trayectorias.

bien la amplitud disminuye inicialmente luego se mantiene estable durante el resto de la simulación, indicando que las oscilaciones son estables. Además en Redmond et al. 2002 revelan que las soluciones oscilatorias pueden coexistir con los puntos fijos en una clase de sistemas no lineales de primer orden con retardo con simetría de reflexión que incluye el modelo propuesto en (4.7).

En la figura 4.6 mostramos la entropía de cuencas en función del tamaño de la caja ε para cada uno de los diagramas de la Fig. 4.5. Podemos observar cómo la relación entre la entropía de cuencas y el tamaño de caja es lineal en un gráfico log-log, lo que es de esperar según (4.3) debido a que las fronteras entre las cuencas de atracción son suaves. También podemos ver cómo el valor de la entropía de cuencas es acorde con la complejidad observada en la Fig. 4.5. Al acercarse a la bifurcación, la entropía de cuencas aumenta (amarillo, rojo y verde) pero muy cerca de la bifurcación la entropía de cuencas disminuye debido a la aparición de las oscilaciones (azul).

Para estudiar la evolución de la entropía de cuencas cuando los parámetros del sistema se acercan a las bifurcaciones, calculamos S_b a lo largo de tres curvas en el espacio de parámetros (c, τ) . Para ello calculamos la entropía de

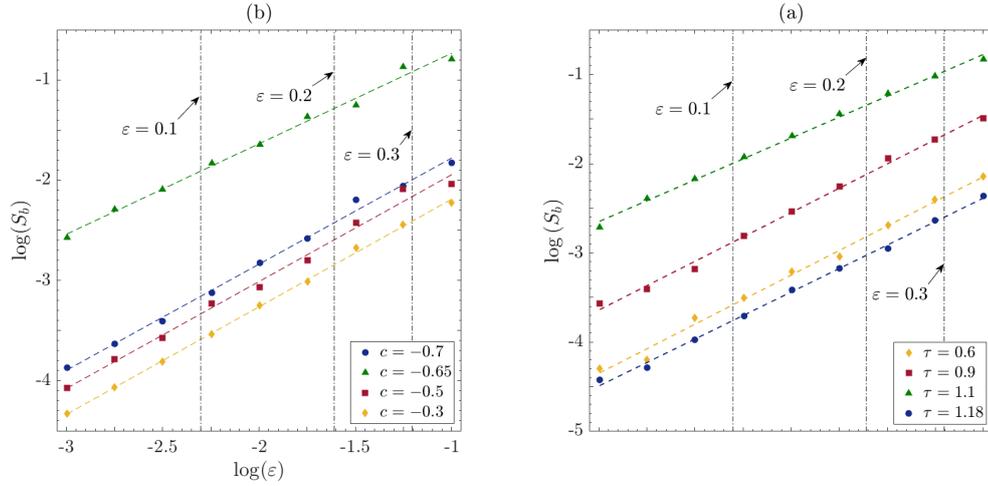


Figura 4.6: Gráfico log-log de S_b en función del tamaño de caja ε . Los símbolos representan entropías calculadas mientras que las líneas ajustes por mínimos cuadrados, todas las pendientes son 1 con incertidumbres menores al 3% y coeficientes de correlación $r^2 > 0.998$. En el panel (a) $c = -0.9$ mientras que en el (b) $\tau = 1.9$.

cuenas con cajas de tamaño lineal 0.1, 0.2 y 0.3 en función de los parámetros c y τ . Podemos observar los resultados en la Fig 4.7. En el panel (a) el sistema experimenta una bifurcación de horquilla en $c = -1$. Para $c \leq -1$, S_b es cero ya que existe un único atractor y cuando $c > -1$ los dos puntos fijos no triviales son estables. A pesar de la coexistencia de ambos puntos fijos, podemos ver como la entropía de cuencas se mantiene aproximadamente constante al variar c debido a que las cuencas de atracción no se modifican en la cercanía de esta bifurcación. Este resultado es consistente con los resultados descritos por Wagemakers et al. 2023 donde encontraron que en un sistema sin retardo la entropía de cuencas no varía al acercarse a una bifurcación de horquilla.

Podemos observar cómo varía la entropía de cuencas al variar los parámetros c y τ en el entorno de la bifurcación de Hopf en las figuras 4.7.(b) y (c). De un lado de la bifurcación de Hopf la entropía es nula debido a que únicamente la solución oscilatoria es estable. Luego de la bifurcación de Hopf las soluciones estacionarias x_{\pm} se vuelven estables y por lo tanto la entropía de cuencas aumenta hasta llegar a un punto máximo que corresponde al punto en donde la solución oscilatoria pierde estabilidad, luego de ese punto únicamente las soluciones x_{\pm} son estables y las cuencas de atracción se van simplificando por lo que la entropía de cuencas decrece. Lejos de la bifurcación su valor se mantiene constante debido a que las cuencas no varían en la región estudiada. Este comportamiento difiere del encontrado por Wagemakers

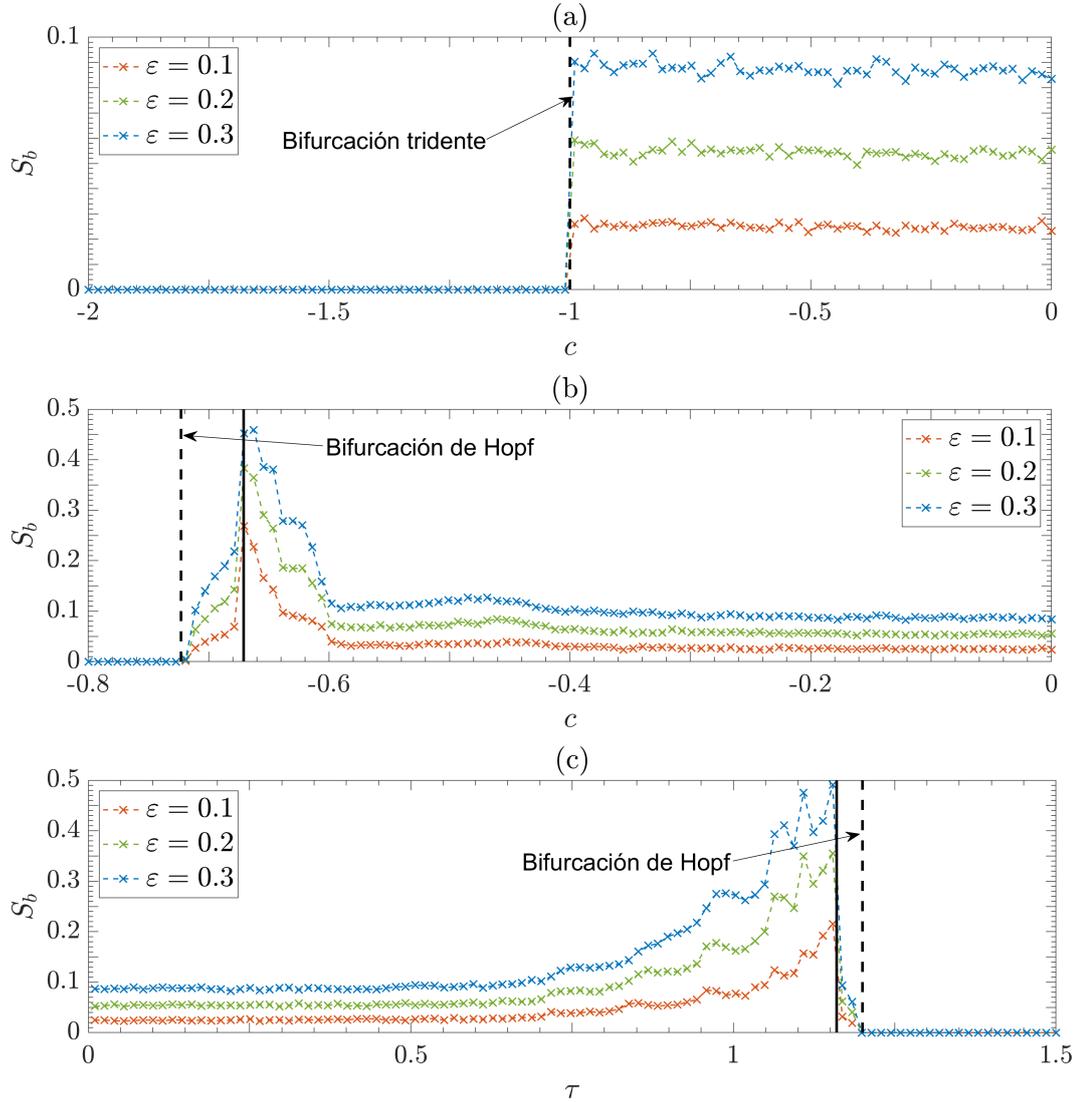


Figura 4.7: Entropía de cuencas en función de los parámetros del sistema. Las condiciones iniciales corresponden a la Ec. (4.12), donde los parámetros a y x_{off} se variaron entre -1 y 1 . (a) c varía mientras que $\tau = 0.5$ se mantiene fijo, (b) c varía mientras que $\tau = 1.9$ se mantiene fijo y (c) τ varía mientras que $c = -0.9$ se mantiene fijo. El tamaño lineal de cada caja es $\varepsilon = 0.1$ (rojo), $\varepsilon = 0.2$ (verde) y $\varepsilon = 0.3$ (azul) con 25, 100 y 225 trayectorias por caja respectivamente. En el panel (a) la línea punteada representa la bifurcación tridente mientras que en los paneles (b) y (c) las líneas punteadas representan la bifurcación de Hopf (cambio de estabilidad en los puntos fijos). Las líneas sólidas representan el cambio de estabilidad en las oscilaciones.

et al. 2023 para la bifurcación de Hopf subcrítica en un sistema sin retardo. Sin embargo esto se puede deber a que además de experimentar la bifurcación de Hopf (línea punteada), el modelo dado por (4.7) sufre otra bifurcación en la

que las oscilaciones pierden estabilidad (línea sólida) y en las inmediaciones de la bifurcación de Hopf la entropía de cuencas aumenta de manera lineal como observaron en Wagemakers et al. 2023.

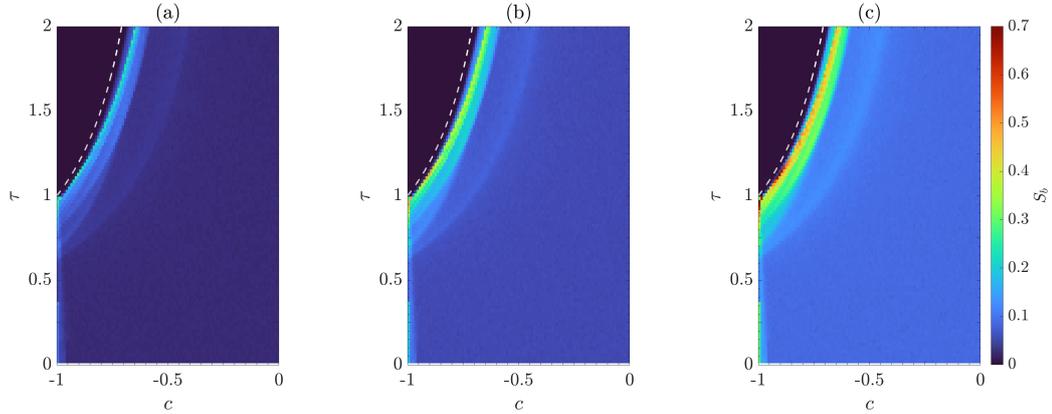


Figura 4.8: S_b en función de los parámetros (c, τ) para tamaños de caja (a) $\varepsilon = 0.1$, (b) 0.2 y (c) 0.3. El resto de parámetros son como los de la Fig. 4.7. La línea punteada corresponde a la bifurcación de Hopf dada por (4.11).

Por último, en la Fig. 4.8 vemos la entropía de cuencas en función de ambos parámetros del sistema en donde podemos ver cómo el máximo de la entropía de cuencas no corresponde con la bifurcación de Hopf, sino con la línea en donde las oscilaciones pierden estabilidad. La bifurcación de Hopf se corresponde con la región inmediatamente a la izquierda donde la entropía de cuencas disminuye linealmente a cero y la bifurcación tridente con la región de abajo donde la entropía de cuencas se mantiene constante y tiene un salto discontinuo a cero.

En este capítulo introducimos la entropía de cuencas y mostramos su utilidad para explorar las cuencas de atracción de un sistema con retardo temporal sencillo como (4.7). Por otro lado mostramos cómo estas cuencas de atracción tienen cambios significativos cerca de una bifurcación de Hopf, que no observamos para la bifurcación tridente. También mostramos cómo la entropía de cuencas sirve para detectar otra bifurcación que no aparece al hacer el análisis de estabilidad lineal. No obstante este análisis requiere que tomemos una familia de condiciones iniciales de manera arbitraria. En el siguiente capítulo veremos cómo podemos expandir esta técnica para poder estudiar los espacios de fase de los sistemas con retardo temporal de una manera menos arbitraria.

Capítulo 5

Medidas de predictibilidad en el sistema de Mackey-Glass

Estudiar la estabilidad global de sistemas como el de MG resulta difícil dado que no se puede recorrer su espacio de fase porque su dimensión es demasiado grande. Por este motivo resulta conveniente utilizar métodos que permitan cuantificar el tamaño y la estructura de las cuencas de atracción. Como mostramos en capítulos anteriores una forma de visualizar el espacio de fase de una DDE es hacer un corte bidimensional del mismo eligiendo una familia parametrizada de condiciones iniciales como se muestra en la Fig. 5.1, resolviendo (2.3) usando

$$x_i^{in} = A \sin(2\pi t_i) + x_{off} \quad (5.1)$$

con

$$t_i = -\frac{N-i+1}{N}\Gamma$$

como condiciones iniciales.

En la Fig. 5.1 podemos observar la riqueza del espacio de fase del sistema de MG a partir de los cambios en las estructuras de las cuencas de atracción y la naturaleza de sus fronteras de atracción al cambiar los parámetros del sistema. También podemos apreciar la coexistencia de una gran cantidad de soluciones diferentes. Si bien este método permite analizar el espacio de fase de las DDE tiene el inconveniente de ser muy dependiente de las funciones utilizadas para hacer el corte bidimensional y que se pierden las estructuras en el resto de las dimensiones del espacio de fase.

Para independizarnos de las funciones de condiciones iniciales utilizaremos

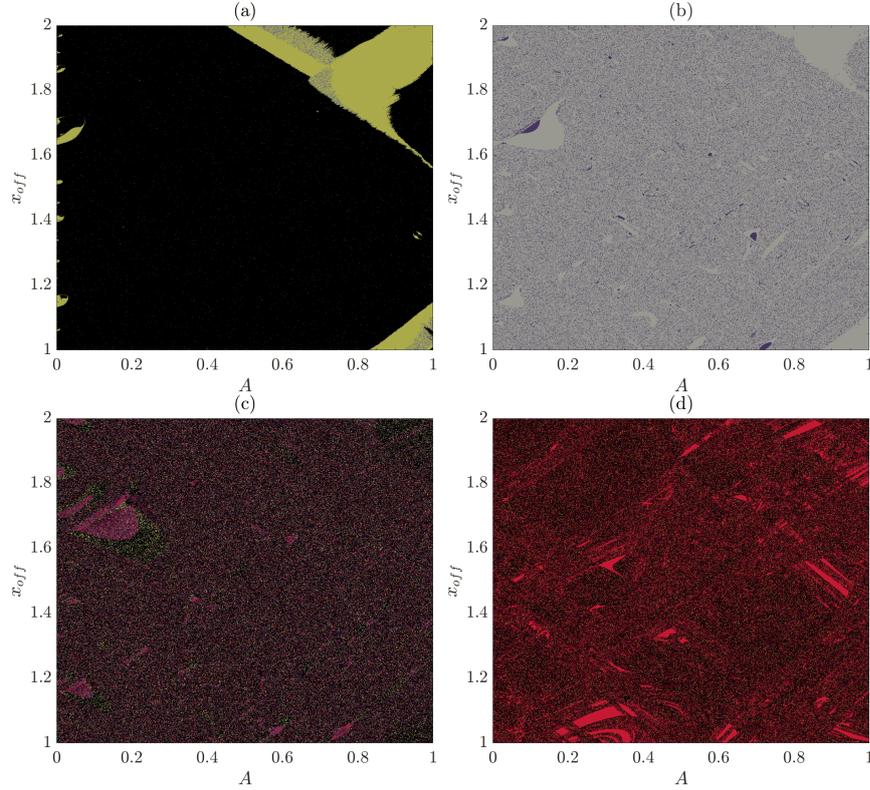


Figura 5.1: Cortes bidimensionales del espacio de fase del sistema de MG. En color se muestra el estado final del sistema partiendo de condiciones iniciales tomadas de (5.1). Cada color representa un ciclo límite distinto mientras que el negro corresponde a series caóticas. Los parámetros para cada panel son $(\alpha, \Gamma) = (4, 19.5)$ para el panel (a), $(4.4, 17.2)$ para (b), $(4.6, 18.2)$ para (c) y $(5.9, 19.7)$ para el panel (d).

dos técnicas para reducir la dimensionalidad del espacio de fase de una DDE. La primera basada en la expansión de la función de condiciones iniciales a partir de una base del espacio de funciones con dominio entre $[-\tau, 0]$ introducida por Leng et al. 2016. La segunda basada en la discretización de la DDE que utilizaremos para estudiar el sistema de MG como se muestra en Tarigo, Stari y Martí, 2024.

En este capítulo exploraremos el espacio de fase del sistema de MG utilizando la estabilidad de las cuencas (\mathbb{B}_S) introducida por Menck et al. 2013 y la entropía de cuencas.

Por otro lado, estudiaremos los exponentes de Lyapunov del sistema para cuantificar su predictibilidad en regiones donde hay presencia de atractores extraños. En particular analizaremos el máximo exponente de Lyapunov (MLE) para evaluar las regiones con atractores extraños y luego estudiaremos el segundo mayor para diferenciar regiones que tengan mayor incidencia del caos.

5.1. Reducción de la dimensionalidad del espacio de condiciones iniciales de un sistema con retardo temporal

Para poder calcular numéricamente la estabilidad de las cuencas de atracción o la entropía de cuencas para un sistema con retardo temporal es necesario reducir el espacio de condiciones iniciales a un espacio de dimensión finita. El espacio de condiciones iniciales en una DDE es el espacio de funciones definidas en el intervalo $[-\tau, 0]$ que llamaremos $\mathbf{C}[-\tau, 0]$. Como este espacio es de dimensión infinita, las cuencas de atracción del sistema también son de dimensión infinita. Para poder reducir la dimensionalidad de este espacio Leng et al. 2016 proponen que para una función $g \in \mathbf{C}[-\tau, 0] \mid \int g^2 < \infty$ y dada una base $\{f_1, f_2, \dots, f_m, \dots\} \subset \mathbf{C}[-\tau, 0]$ existe una secuencia única $\{a_1, a_2, \dots, a_m, \dots\}$ de manera que

$$g_m \triangleq a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_m f_m \left| \int_{-\tau}^0 g_m^2 dt \rightarrow \int_{-\tau}^0 g^2 dt \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty \quad (5.2)$$

donde los coeficientes a_i cumplen la condición $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$ tal como se indica en el capítulo 4 de Kolmogorov y Fomin, 1975. De esta manera podemos crear un conjunto $\mathbf{C}_{(m,\alpha)} \triangleq \{g_m \mid \sum_{i=0}^m a_i^2 < \alpha^2\} \subset \mathbf{C}[-\tau, 0]$ donde α es una constante positiva que limita el volumen del espacio de condiciones iniciales a estudiar. De esta manera tenemos un espacio de dimensión arbitraria m contenido en el espacio de fase de la DDE y podemos ver cómo $\mathbf{C}_{(m,\infty)} \rightarrow \mathbf{C}[-\tau, 0]$ cuando $m \rightarrow \infty$. $\mathbf{C}_{(m,\alpha)}$ permite calcular \mathbb{B}_S y S_b en sistemas con retardo temporal.

5.2. Estabilidad y entropía de cuencas en sistemas de dimensión alta

Debido a la alta dimensionalidad que pueden alcanzar los sistemas creados con los métodos explicados en la sección anterior, contar la cantidad de soluciones que terminan en cada atractor a partir de una partición regular del espacio para estimar la estabilidad de las cuencas de atracción y la entropía de cuencas puede ser una tarea computacionalmente demandante. Para estimar entonces ambas cantidades utilizamos métodos inspirados en el método

de Monte Carlo tal como se muestra en Metropolis y Ulam, 1949.

De esta manera para calcular la estabilidad de las cuencas de atracción tomamos 10^5 condiciones iniciales diferentes de manera aleatoria, integramos la evolución del sistema hasta alcanzar un atractor y tomamos la fracción de condiciones iniciales que terminan en cada atractor. A modo de ejemplo la Fig. 5.2 muestra \mathbb{B}_S para un sistema de dos neuronas de Hopfield con retardo definido como:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= -u_1(t) + 2 \tanh(u_1(t - \tau)) + \frac{11}{20} \tanh(u_2(t - \tau)) \\ \dot{u}_2(t) &= -u_2(t) + \frac{11}{20} \tanh(u_1(t - \tau)) + 2 \tanh(u_2(t - \tau)) \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde τ es el parámetro de retardo. Para $\tau \in [0, 5]$ la Ec. (5.3) tiene cuatro puntos fijos estables. Para construir $\mathbf{C}_{(m,\alpha)}$ se utilizó una base trigonométrica del espacio $\mathbf{C}[-\tau, 0]$

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} \\ f_i &= \sqrt{\frac{2}{\tau}} \cos\left(\frac{\pi(i+1)}{\tau}t\right) \text{ para } i \text{ impar} \\ f_i &= \sqrt{\frac{2}{\tau}} \sin\left(\frac{\pi i}{\tau}t\right) \text{ para } i \text{ par} \end{aligned} \quad (5.4)$$

con $i = 0 \dots m$.

En el panel (a) de la Fig. 5.2 podemos ver cómo para el sistema en (5.3) y tomando la base en (5.4) la estabilidad de las cuencas se mantiene estable a partir de $m = 15$, obteniendo los mismos resultados independientemente del valor de m , mostrando la robustez del método. En el panel (b) de la Fig. 5.2 podemos ver cómo dos de las cuencas de atracción se hacen cada vez más chicas hasta que los atractores dejan de ser estables y los otros dos atractores ocupan aproximadamente la mitad del espacio de fase cada uno. Además, Leng et al. 2016 muestran resultados similares para otras bases del espacio de fase.

Para el sistema de MG utilizaremos la discretización en (2.3) con $N = 396$ debido a su simplicidad y que este mapa discreto ya es un sistema de dimensión finita, por lo que no es necesario utilizar una base como (5.4).

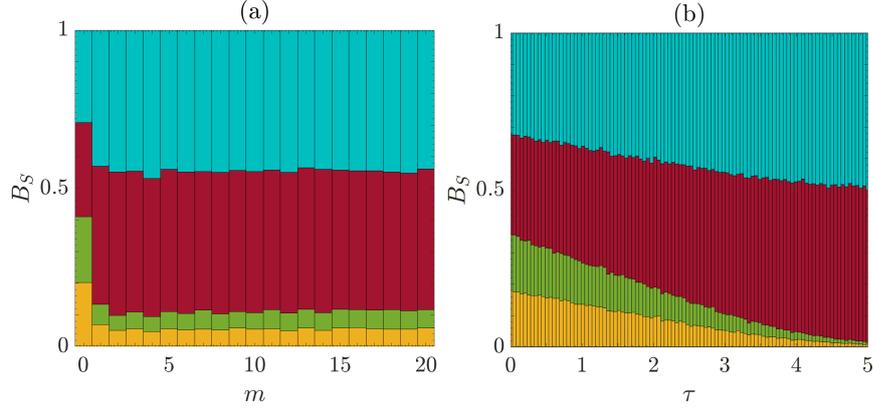


Figura 5.2: Estabilidad de las cuencas de atracción para dos neuronas de Hopfield con retardo. El panel (a) muestra \mathbb{B}_S en función de m la dimensión del espacio de condiciones iniciales $\mathbf{C}_{(m,\alpha)}$ con $\tau = 2$. El panel (b) muestra \mathbb{B}_S en función del tiempo de retardo τ para $m = 20$. Como base se utilizó la base ortonormal en (5.4) con $\alpha = 10$, observando resultados similares para otros valores de α .

Para el cálculo de la entropía de cuencas seguimos el procedimiento en Tarigo, Stari y Martí, 2024 que es similar al que utilizamos para la estabilidad de las cuencas. Recordemos que que la entropía de cuencas se calcula como:

$$S_b = -\frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} \log p_{ij}. \quad (5.5)$$

Para sistemas de dimensión grande el cálculo de la entropía de cuencas se vuelve computacionalmente costoso ya que el volumen del espacio de fase crece exponencialmente. Por esta razón resulta conveniente tomar una cantidad de cajas distribuidas de manera aleatoria en la región del espacio de fase a estudiar y no dividir toda la región en cajas de manera regular. Dado que la ecuación (5.5) es un promedio de la cantidad $p_{ij} \log p_{ij}$ sobre el número de cajas, el valor calculado tomando cajas de manera aleatoria debe converger al valor de la entropía de cuencas calculado tomando en cuenta todas las cajas posibles. Entonces para calcular la entropía de cuencas en el sistema de MG tomamos de manera aleatoria la posición del centro de cada caja y las trayectorias dentro de cada caja. Para los parámetros estudiados todas las coordenadas de los centros de cada caja se tomaron entre $0 + \varepsilon/2$ y $2 - \varepsilon/2$, debido a que los valores negativos no tienen significancia física en el modelo de MG y los valores mayores a 2 relajan a las mismas soluciones que dentro de este intervalo. Entonces tomamos los centros de cada caja de una distribución uniforme en este intervalo de manera que todas las condiciones iniciales estén en la región

de interés. Luego de tener los centros de las cajas tomamos las condiciones iniciales de otra distribución uniforme centrada en el centro y de tamaño lineal ε y determinamos a cuál de los atractores evoluciona cada una. Para el tamaño de las cajas tomamos $\varepsilon = 0.3$ pero encontramos resultados similares para otros valores de ε .

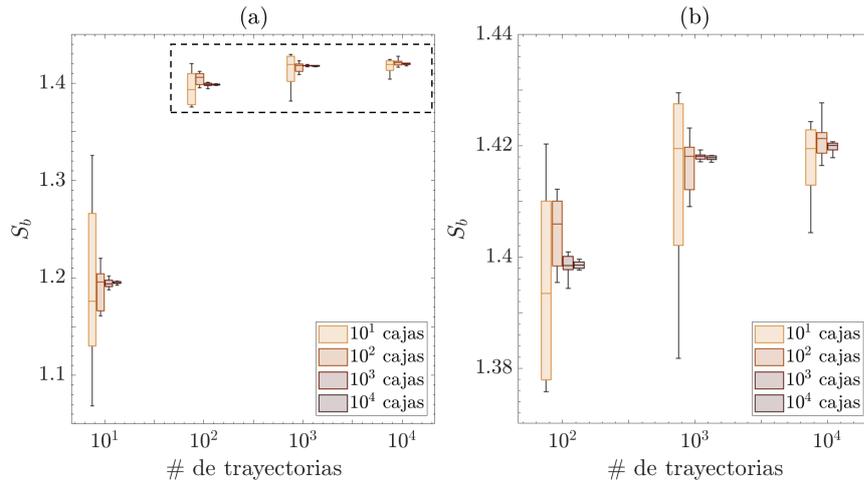


Figura 5.3: Convergencia de la entropía de cuencas en función de la cantidad de trayectorias por caja y del número de cajas. Para cada cantidad de cajas y trayectorias se realizaron 10 medidas de S_b , la línea de color muestra la mediana de las medidas, las cajas muestran los cuartiles inferior y superior y las barras de error muestran los valores máximo y mínimo que toman los datos. El panel (b) corresponde al recuadro marcado en el panel (a). Todos los puntos corresponden a los valores de los parámetros del sistema $\alpha = 5$, $\Gamma = 18$ y $n = 8$.

Para determinar el número óptimo de cajas y trayectorias por caja calculamos la entropía de cuencas variando ambos parámetros como mostramos en la Fig. 5.3. Podemos ver que aumentando la cantidad de trayectorias por caja, la entropía de cuencas converge a un valor y que si bien al aumentar la cantidad de cajas el promedio de las diez iteraciones no cambia, la dispersión entre iteraciones individuales si disminuye. A partir de los datos de la Fig. 5.3 y de un análisis similar realizado para otros parámetros del sistema de MG determinamos que para 100 cajas y 1000 trayectorias por caja la entropía de cuencas converge y que el tiempo de computación es razonablemente corto. De ahora en más utilizaremos 100 cajas y 1000 trayectorias por caja para todos los cálculos de la entropía de cuencas.

5.3. Estabilidad y entropía de cuencas en el sistema de Mackey-Glass

Empleando el método mencionado en la sección anterior calculamos la entropía de cuencas para el sistema de MG. En los paneles (a) y (c) de la Fig. 5.4 podemos ver cómo el sistema de MG presenta coexistencia de una gran variedad de soluciones diferentes, con regiones de hasta 16 soluciones coexistentes y que las regiones donde solo hay un atractor estable son pequeñas. Esto nos hace preguntarnos cómo son las cuencas de atracción del sistema y cómo son las fronteras que las separan. En los paneles (b) y (d) de la Fig. 5.4 mostramos la entropía de cuencas para ambas regiones. Como podemos observar en ambos paneles la entropía de cuencas es máxima a lo largo de una curva en el espacio de parámetros. Esto se debe a una transformación del espacio de fase del sistema y a partir de los resultados obtenidos en el capítulo anterior en un sistema con retardo temporal sencillo podemos inferir que es posible que el sistema de MG experimente una bifurcación a lo largo de esta curva. Más adelante veremos que esa curva se corresponde con la aparición de atractores caóticos. Por otro lado la Fig. 5.4 muestra que la entropía de cuencas no necesariamente se condice con la cantidad de atractores estables del sistema. Esto puede deberse a que aunque un atractor sea estable, su cuenca de atracción puede ser pequeña y por lo tanto ser poco probable evolucionar hacia ese atractor, por lo que su aporte al valor de la entropía es menor al de otros atractores.

Para corroborar este último punto en la Fig. 5.5 comparamos la entropía de cuencas con el tamaño de las cuencas de atracción de los atractores. Como podemos observar en los paneles (d) y (f) de la Fig. 5.5 en algunas regiones con gran coexistencia de atractores la entropía de cuencas es pequeña. Esto se debe a que una de las cuencas de atracción (en estos casos la del atractor caótico) ocupa un gran porcentaje del espacio de fase y las otras cuencas de atracción ocupan un volumen pequeño. También podemos observar como los valores más altos de la entropía de cuencas son en las regiones en donde el atractor caótico se hace estable lo que parece indicar que el sistema experimenta una crisis que da lugar a la dinámica caótica. Por otro lado observamos que en ocasiones un atractor da lugar a otro al variar los parámetros pero la entropía y el volumen de las cuencas de atracción se mantienen constantes. Una posible causa de este fenómeno es que si bien el atractor experimenta un cambio, las cuencas de atracción no, lo cual puede indicar que en esos casos el sistema no experimenta

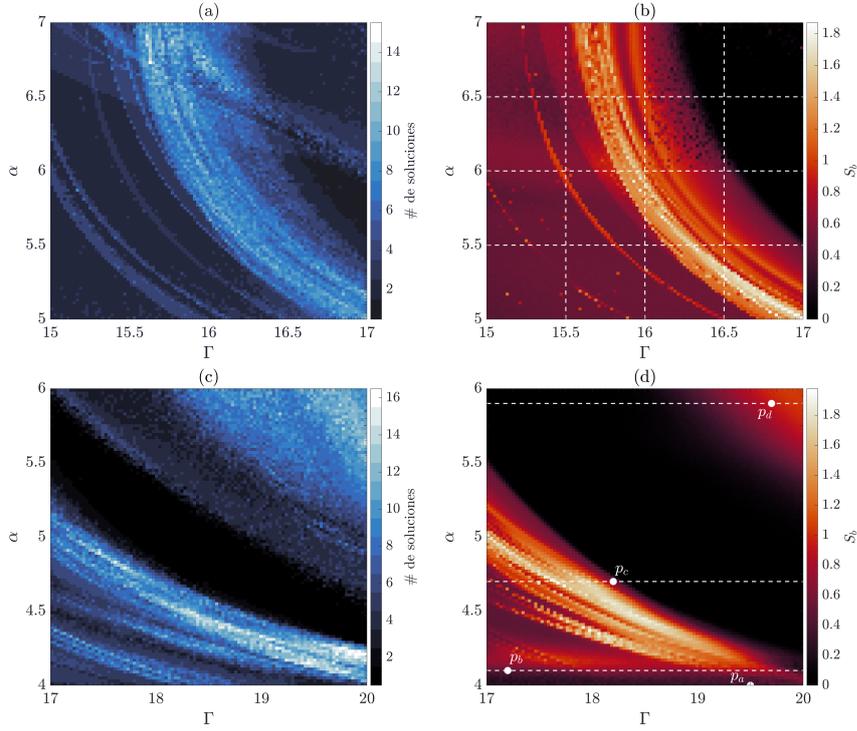


Figura 5.4: Multiestabilidad en el sistema de MG. Los paneles (a) y (c) muestran la cantidad de atractores distintos mientras que los paneles (b) y (d) muestran el valor de la entropía de cuencas en una región del espacio de parámetros. Para cada punto se utilizaron 10^5 condiciones iniciales distribuidas en 100 cajas de tamaño $\varepsilon = 0.3$. Para categorizar los distintos atractores utilizamos el período de las señales, la cantidad de máximos por período y el orden de esos máximos. Los puntos etiquetados como p_a , p_b , p_c y p_d corresponden a los paneles (a), (b), (c) y (d) de la Fig. 5.1 respectivamente mientras que las líneas punteadas corresponden a los paneles de la Fig. 5.5.

una bifurcación sino que es una continuación del mismo atractor que presenta cambios pero no afecta a las cuencas de atracción, tal como se muestra en Datsaris et al. 2023.

5.4. Exponentes de Lyapunov

Hasta este momento hemos estudiado únicamente medidas de predictibilidad asociadas a las incertidumbres en el espacio de fase del sistema. Estos indicadores son útiles en la medida de que si los atractores son conocidos y periódicos solo necesitamos saber a cuál evolucionara el sistema para hacer una predicción a largo plazo de su trayectoria. Sin embargo ya hemos mencionado que en los sistemas dinámicos existen soluciones estables que no son periódicas y que dificultan su predicción a largo plazo incluso conociendo el

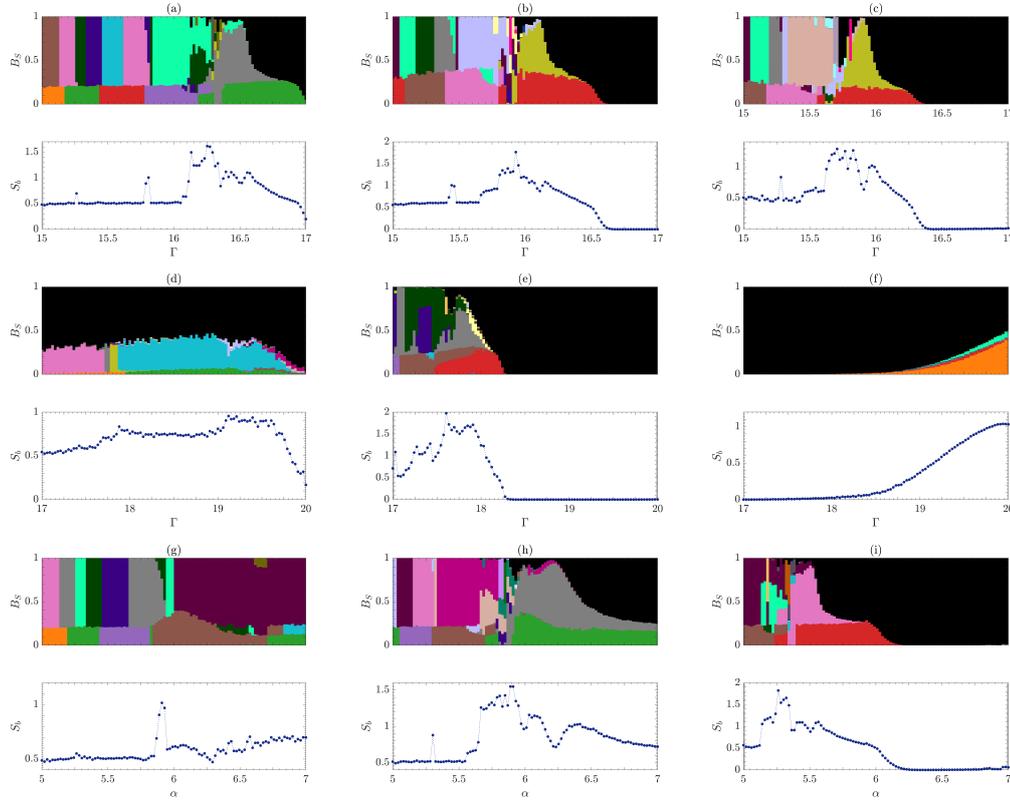


Figura 5.5: Estabilidad (arriba) y entropía (abajo) de cuencas para nueve curvas en el espacio de parámetros del sistema de MG. Para cada punto se utilizaron 10^5 condiciones iniciales distribuidas en 100 cajas de tamaño $\varepsilon = 0.3$. Para categorizar los distintos atractores utilizamos el período de las señales, la cantidad de máximos por período y el orden de esos máximos. En color se representan los diferentes ciclos límites mientras que en negro se muestran los atractores caóticos. Los parámetros de los paneles (a), (b) y (c) son $\Gamma \in [15, 17]$ y $\alpha = 5.5$, $\alpha = 5$ y $\alpha = 6.5$ respectivamente, en (d), (e) y (f) son $\Gamma \in [17, 20]$ y $\alpha = 4.1$, $\alpha = 4.7$, $\alpha = 5.9$ respectivamente y en (g), (h) e (i) son $\alpha \in [5, 7]$ y $\Gamma = 15.5$, $\Gamma = 16$ y $\Gamma = 16.5$ respectivamente.

atractor final del sistema. Para estudiar la predictibilidad de trayectorias de esta naturaleza en el sistema de MG utilizaremos los exponentes de Lyapunov (LE) introducidos por Lyapunov, 1892 para caracterizar la convergencia o divergencia exponencial de trayectorias cercanas. En particular el mayor de los LE, el MLE nos permite detectar si una trayectoria es caótica o no (Alligood et al. 1998).

Como mencionamos los LE cuantifican la separación entre trayectorias cercanas. Para hallarlos seguimos el método detallado en el capítulo 3 de Datsler y Parlitz, 2022: tomamos una condición inicial x_0 y le producimos una perturbación pequeña δ_0 , si ésta es lo suficientemente pequeña entonces la dinámica

del sistema puede aproximarse por su linealización y por lo tanto la separación entre ambas trayectorias $x(t)$ y $(x + \delta)(t)$ será exponencial, de la forma $\delta(t) \sim \delta_0 \exp(\lambda_1 t)$ donde definimos λ_1 como el MLE. Este procedimiento tiene el inconveniente de que debido a que el volumen de los atractores es finito $\delta(t)$ satura a tiempos largos. Para resolver esto se debe reiniciar $\delta(t)$ cada intervalos de tiempo pequeños y hallar λ_1 tomando el promedio de los valores que se obtuvieron. Para calcular otros LE debemos considerar un volumen en el espacio de fase. En particular, para calcular los primeros k exponentes de Lyapunov del sistema, realizamos k perturbaciones pequeñas de x_0 . Mediante la descomposición QR de la perturbación a cada paso podemos hallar los LE de una forma similar al MLE. El algoritmo es explicado en detalle como el algoritmo H2 en Geist et al. 1990 y en el apéndice A de Datseris y Parlitz, 2022.

En este capítulo calculamos los primeros dos LE del mapa finito (2.3) con parámetros $n = 8$ y $N = 100$, utilizando el algoritmo descrito en el apéndice A de Datseris y Parlitz, 2022.

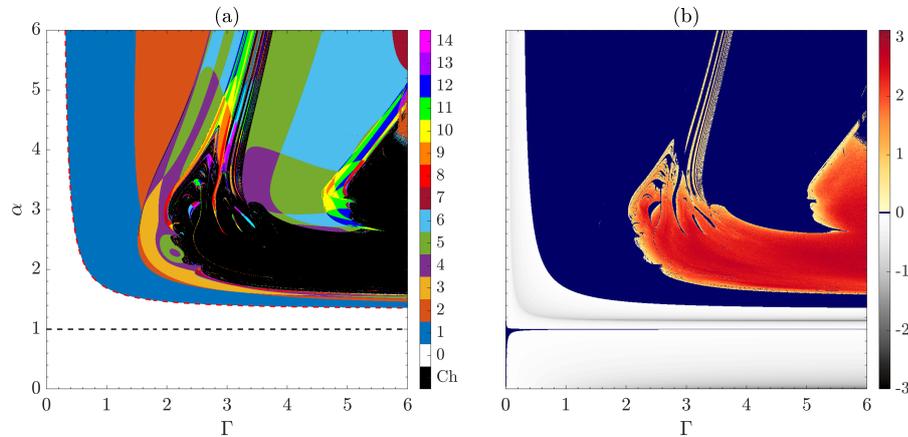


Figura 5.6: Máximo exponente de Lyapunov para el sistema de MG con $n = 8$. En el panel (a) se muestran las diferentes soluciones del sistema. En blanco se muestran los puntos fijos, en color el número de picos en un período para los ciclos límite y en negro los atractores caóticos. Las condiciones iniciales son $x_{in}(t) = 1 \forall t \in [-\Gamma, 0]$. Las líneas punteadas corresponden a los límites de estabilidad de los puntos fijos, $\alpha = 1$ y la bifurcación de Hopf (2.9). En el panel (b) se muestra el valor del MLE indicado en las barras de color. En azul se muestran los valores del MLE cercanos a cero. Debido a que el cálculo es una aproximación el valor del MLE no es exactamente cero para los ciclos límite por lo que tomamos como nulo todos los valores entre -0.003 y 0.03 .

En la Fig. 5.6 podemos observar cómo en las regiones donde el atractor

es uno de los puntos fijos el valor del MLE es negativo, en aquellas donde el atractor es un ciclo límite es cercano a cero y en aquellas donde las series temporales son aperiódicas el MLE es positivo. Además podemos observar cómo el MLE aumenta en la medida en la que los parámetros se alejan de las regiones donde los atractores son ciclos límite, lo que sugiere una transformación de los atractores caóticos.

Para entender mejor este último punto, en la Fig. 5.7 mostramos el primer y segundo exponente de Lyapunov para el sistema de MG. Como podemos observar, en la región donde el MLE es mayor el segundo exponente es positivo mientras que en las regiones más cercanas a los atractores periódicos el segundo exponente es cercano a cero. Esto indica que hay una transformación de los atractores caóticos que nuestros algoritmos no lograron distinguir. Si bien la presencia de estos dos atractores ocurre para distintos valores de los parámetros del sistema, es posible que haya coexistencia de más de un atractor extraño para un conjunto de parámetros del sistema.

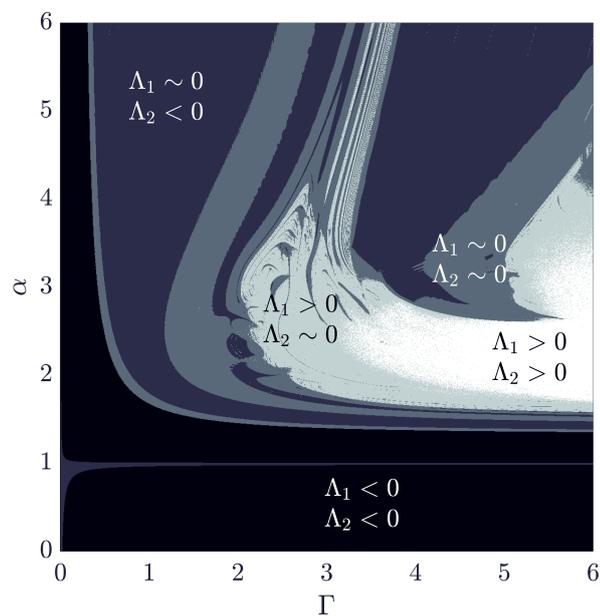


Figura 5.7: Valor de los dos exponentes de Lyapunov más grandes para el sistema de MG.

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo evaluamos la predictibilidad de los sistemas con retardo temporal a partir de su estudio analítico y numérico. Para ello tomamos como ejemplos al sistema de Mackey-Glass y un modelo de pozo doble con un término lineal retardado en el tiempo. Estudiamos la estabilidad lineal de sus soluciones y la presencia de múltiples soluciones estables en simultáneo para un mismo conjunto de parámetros. También incursionamos en la cuantificación de la estabilidad global de ambos sistemas caracterizando las cuencas de atracción de sus distintos atractores y sus fronteras. Por otro lado, en el sistema de Mackey-Glass analizamos el valor de los dos primeros exponentes de Lyapunov para cuantificar la sensibilidad su sensibilidad al estado inicial. Si bien implementamos estas técnicas para el estudio de estos dos sistemas, mostramos que estas pueden ser utilizadas para otros sistemas con retardo temporal.

6.1. El sistema de Mackey-Glass

Para el estudio del sistema de Mackey-Glass, comenzamos hallando sus soluciones de equilibrio $x_s = 0$ y $x_s = (\alpha - 1)^{1/n}$ y estudiamos la estabilidad lineal de ambas en función de los parámetros del sistema. Hallamos que el punto fijo $x_s = 0$ es estable para $\alpha \leq 1$ e inestable si $\alpha > 1$ para cualquier valor de los otros parámetros. Para el punto fijo $x_s = (\alpha - 1)^{1/n}$ encontramos que es estable en la región delimitada por $\alpha = 1$ y la curva dada por (2.9) en donde el punto fijo pierde estabilidad en una bifurcación de Hopf, dando lugar a soluciones oscilatorias.

Para su análisis numérico tomamos una discretización de la ecuación de

Mackey-Glass de la forma (2.3). Elegimos esta discretización del sistema ya que podemos ajustar su dimensión de manera arbitraria y es exacta en tiempo. Además, esta discretización presenta la ventaja de tomar menos tiempo que otros algoritmos para resolver ecuaciones diferenciales con retardo temporal como algoritmos de Runge-Kutta adaptados. A partir de la evolución numérica del sistema realizamos una caracterización del espacio de parámetros. Encontramos soluciones que evolucionan hacia ambos puntos fijos, perdiendo estabilidad en ambas curvas halladas a partir del análisis de estabilidad lineal, y una gran variedad de soluciones que evolucionan hacia diferentes ciclos límites y atractores extraños.

Para estudiar la transición del sistema del régimen periódico a uno caótico realizamos diversos diagramas de bifurcación, graficando los máximos locales de las soluciones en diferentes curvas del espacio de parámetros utilizando la solución anterior como condiciones iniciales al variar los parámetros. Hallamos que al recorrer las curvas en sentidos diferentes el sistema alcanza distintos estados estacionarios, cambiando las características de los ciclos límite o incluso variando entre ciclos límite y atractores extraños. De esta manera encontramos que el sistema de Mackey-Glass es multiestable, es decir que puede evolucionar a más de un atractor dependiendo del estado inicial del sistema. En las regiones donde encontramos multiestabilidad observamos similitudes en las rutas del sistema al caos y los patrones de duplicación de período.

La presencia de multiestabilidad en el sistema indica que el estado final al que evoluciona depende no solo de los parámetros del mismo sino también de su estado inicial. Por lo tanto para poder evaluar la predictibilidad del sistema es necesario caracterizar esta multiestabilidad y estudiar la sensibilidad del sistema a sus condiciones iniciales. Para poder cuantificar el impacto de la multiestabilidad en la predictibilidad del sistema primero contamos el número de diferentes atractores que puede alcanzar el sistema en función de sus parámetros. Encontramos que es un método sencillo para cuantificar la multiestabilidad pero que no es adecuado para estudiar la predictibilidad del sistema ya que no captura la estabilidad de las soluciones debido al tamaño de sus cuencas de atracción ni la naturaleza de sus fronteras. Para solucionar este problema estudiamos las cuencas de atracción del sistema al variar las condiciones iniciales en familias de funciones paramétricas y calculamos la entropía de cuencas sobre el espacio generado por estas funciones para poder cuantificar los cambios en las cuencas de atracción. Sin embargo, este método

tiene el inconveniente de ser dependiente de las familias de funciones utilizada.

Por último analizamos los exponentes de Lyapunov del sistema para poder cuantificar qué tan predecible es el sistema incluso cuando su comportamiento no es periódico. Observamos que el máximo exponente de Lyapunov aumenta al alejarse de las regiones de ciclos límites y que el segundo exponente de Lyapunov se hace positivo en regiones alejadas de la región periódica, lo cual parece indicar la presencia de más de un atractor extraño en el sistema.

6.2. Entropía de cuencas en sistemas con retardo temporal

Con el fin de comprender el significado de la entropía de cuencas aplicamos el método en un sistema menos complejo que corresponde a un pozo doble con retardo temporal (4.7). Esto es debido a que el sistema fue estudiado anteriormente en profundidad y sus diagramas de bifurcación son conocidos. Observamos que los cambios en la entropía de cuencas concuerdan con los cambios observados en las cuencas de atracción y sus fronteras permitiendo cuantificar la predictibilidad del sistema producto de cambios en las condiciones iniciales. Por otro lado observamos cómo la entropía de cuencas se mantiene constante cerca de la bifurcación tridente del sistema y aumenta al acercarse a las bifurcaciones de Hopf, comportamiento observado también en sistemas sin retardo temporal. Por último, la entropía de cuencas nos permitió identificar una nueva bifurcación no observada en el análisis de estabilidad lineal del sistema donde las oscilaciones son estables en coexistencia con los dos puntos fijos. El cálculo de la entropía de cuencas a partir de familias de funciones paramétricas tiene el inconveniente de depender de la forma funcional de las condiciones iniciales y poder dejar soluciones del sistema fuera del análisis.

Para resolver el problema de la dependencia de los resultados de las familias de funciones utilizamos un método para reducir la dimensionalidad del sistema a partir de la construcción de las condiciones iniciales utilizando una base de las funciones introducido por Menck et al. 2013, lo que permite extender el cálculo de la entropía de cuencas a cualquier sistema con retardo temporal.

Por último aplicamos este nuevo algoritmo en el sistema de Mackey-Glass, donde utilizamos el mapa discreto debido a que su dimensión ya es finita. Para calcular la entropía de cuencas, tomamos condiciones iniciales distribuidas

de manera aleatoria en el espacio de fase completo a diferencia del espacio paramétrico utilizado anteriormente, de manera de independizar el cálculo de la familia de funciones utilizada. Observamos que este método converge al valor de la entropía de cuencas al aumentar la cantidad de trayectorias analizadas. Esta nueva técnica permite utilizar la entropía de cuencas no solo en sistemas con retardo temporal sino en cualquier sistema de dimensión alta como pueden ser osciladores acoplados en una red. Utilizando este método también medimos el volumen relativo de las cuencas de atracción encontrando que hay regiones del sistema de Mackey-Glass donde hay coexistencia de varios atractores pero uno de ellos domina el espacio de fase por lo que la predictibilidad sigue siendo alta, lo que es reflejado luego por el cálculo de la entropía de cuencas. También observamos que la entropía de cuencas es máxima a lo largo de una curva en el espacio de parámetros del sistema de Mackey-Glass lo cual parece indicar que el sistema experimenta una crisis en esa región. Observando las trayectorias a lo largo de esa región podemos ver cómo a partir de esa línea el comportamiento caótico se hace estable.

Los métodos presentados abren nuevas posibilidades para el estudio de la predictibilidad en sistemas con retardo, con potencial para su aplicación en diversos contextos en donde la dinámica no lineal es de interés. En particular, calcular la entropía de cuencas mediante cajas aleatorias en lugar de una partición regular del espacio de fase representa una nueva forma de abordar el problema que permite estudiar espacios de fase de dimensión alta de manera más eficiente. Esta idea, validada en el sistema de Mackey-Glass, puede aplicarse a una amplia clase de sistemas con retardo temporal y extenderse a otros campos de la dinámica no lineal en donde los espacios de fase son de alta dimensión como redes de osciladores, modelos neuronales, o sistemas de control, donde la multiestabilidad y la sensibilidad a condiciones iniciales juegan un rol central.

En trabajos futuros sería interesante explorar la relación entre la entropía de cuencas y otras medidas de complejidad, como los espectros de Lyapunov o la extensión del transitorio del sistema. Además, la implementación de estas herramientas en sistemas experimentales, donde los retardos pueden aparecer de forma natural, podría abrir un nuevo campo de estudio en el análisis de la predictibilidad en presencia de ruido o incertidumbre. De este modo, el trabajo contribuye al entendimiento y el análisis de la estabilidad global de sistemas dinámicos complejos con memoria.

Referencias bibliográficas

- Aguirre, J., Viana, R. L., y Sanjuán, M. A. (2009). Fractal structures in nonlinear dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 81(1), 333-386.
- Alligood, K. T., Sauer, T. D., Yorke, J. A., y Chillingworth, D. (1998). Chaos: an introduction to dynamical systems. *SIAM Review*, 40(3), 732-732.
- Amil, P., Cabeza, C., y Marti, A. C. (2015). Exact discrete-time implementation of the Mackey–Glass delayed model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 62(7), 681-685.
- Amil, P., Cabeza, C., Masoller, C., y Martí, A. C. (2015). Organization and identification of solutions in the time-delayed Mackey-Glass model. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 25(4), 043112.
- Bélair, J. (1995). *Dynamical Disease: Mathematical Analysis of Human Illness; [the Papers are Based on a NATO Advanced Research Workshop Held in Mont Tremblant, Québec, Canada in February 1994]*. AIP Press.
- Bellen, A., y Zennaro, M. (2013). *Numerical methods for delay differential equations*. Oxford university press.
- Biswas, D., y Banerjee, T. (2018). *Time-Delayed Chaotic Dynamical Systems*. Springer.
- Dakos, V., van Nes, E. H., D’Odorico, P., y Scheffer, M. (2012). Robustness of variance and autocorrelation as indicators of critical slowing down. *Ecology*, 93, 264-271.
- Datseris, G., Luiz Rossi, K., y Wagemakers, A. (2023). Framework for global stability analysis of dynamical systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 33(7).
- Datseris, G., y Parlitz, U. (2022). *Nonlinear Dynamics: A Concise Introduction Interlaced with Code*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-91032-7>

- Daza, A., Wagemakers, A., Georgeot, B., Guéry-Odelin, D., y Sanjuán, M. A. F. (2016). Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems. *Sci. Rep.*, *6*(1), 1-10.
- Erneux, T. (2009). *Applied delay differential equations*. Springer.
- Foss, J., Longtin, A., Mensour, B., y Milton, J. (1997). Multistability and Delayed Recurrent Loops. *Phys. Rev. Lett.*, *76*, 708.
- Geist, K., Parlitz, U., y Lauterborn, W. (1990). Comparison of different methods for computing Lyapunov exponents. *Progress of theoretical physics*, *83*(5), 875-893.
- Grebogi, C., McDonald, S. W., Ott, E., y Yorke, J. A. (1983). Final state sensitivity: an obstruction to predictability. *Physics Letters A*, *99*(9), 415-418.
- Guckenheimer, J., y Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Vol. 42). Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1140-2>
- Junges, L., y Gallas, J. A. (2012). Intricate routes to chaos in the Mackey–Glass delayed feedback system. *Physics Letters A*, *376*(18), 2109-2116.
- Kolmogorov, A. N., y Fomin, S. V. (1975). *Introductory real analysis*. Courier Corporation.
- Leng, S., Lin, W., y Kurths, J. (2016). Basin stability in delayed dynamics. *Scientific reports*, *6*(1), 21449.
- Lyapunov, A. M. (1892). The general problem of motion stability. *Annals of Mathematics Studies*, *17*(1892).
- Mackey, M. C., y Glass, L. (1977). Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science*, *197*(4300), 287-289.
- Masoller, C. (1994). Coexistence of attractors in a laser diode with optical feedback from a large external cavity. *Phys. Rev. A*, *50*, 2569-2578.
- Masoller, C. (2003). Distribution of residence times of time-delayed bistable systems driven by noise. *Phys. Rev. Lett.*, *90*(2), 020601.
- McDonald, S. W., Grebogi, C., Ott, E., y Yorke, J. A. (1985). Fractal basin boundaries. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, *17*(2), 125-153.
- Menck, P. J., Heitzig, J., Marwan, N., y Kurths, J. (2013). How basin stability complements the linear-stability paradigm. *Nature physics*, *9*(2), 89-92.
- Metropolis, N., y Ulam, S. (1949). The monte carlo method. *Journal of the American statistical association*, *44*(247), 335-341.

- Milnor, J. (1985). On the Concept of Attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 99(2), 177-195. <https://doi.org/10.1007/BF01212280>
- Namajūnas, A., Pyragas, K., y Tamaševičius, A. (1995). An electronic analog of the Mackey-Glass system. *Physics Letters A*, 201(1), 42-46.
- Ott, E. (2002). *Chaos in Dynamical Systems* (2nd). Cambridge University Press.
- Otto, A., Just, W., y Radons, G. (2019). Nonlinear dynamics of delay systems: an overview. *Phil. Trans. Royal Soc. A*, 377, 20180389.
- Redmond, B. F., LeBlanc, V. G., y Longtin, A. (2002). Bifurcation analysis of a class of first-order nonlinear delay-differential equations with reflectional symmetry. *Physica D*, 166(3-4), 131-146.
- Ruelle, D., y Takens, F. (1971). On the Nature of Turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 20(3), 167-192. <https://doi.org/10.1007/BF01646553>
- Strogatz, S. H. (2019). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Chapman; Hall/CRC.
- Tarigo, J. P., Stari, C., Cabeza, C., y Martí, A. C. (2022). Characterizing multistability regions in the parameter space of the Mackey–Glass delayed system. *Eur. Phys. J. Spe. Top.*, 231(3), 273-281.
- Tarigo, J. P., Stari, C., Masoller, C., y Martí, A. C. (2024). Basin entropy as an indicator of a bifurcation in a time-delayed system. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 34(5).
- Tarigo, J. P., Stari, C., y Martí, A. C. (2024). Basin of attraction organization in infinite-dimensional delayed systems: A stochastic basin entropy approach. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 34(12).
- Wagemakers, A., Daza, A., y Sanjuán, M. A. F. (2023). Using the basin entropy to explore bifurcations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 175, 113963.
- Wernecke, H., Sándor, B., y Gros, C. (2019). Chaos in time delay systems, an educational review. *Phys. Rep.*, 824, 1-40.