

**Síntesis de audio por modelado físico de  
instrumentos musicales: tambores del candombe  
uruguayo**

Autor:

Pablo Amil

Directores de tesis:

Paulo A. A. Esquef

Carlos A. Negreira

Tribunal:

Cecilia Cabeza

Nicolás Benech

Javier Brum

Pablo Cancela

Martín Rocamora



### *Resumen*

El presente trabajo de tesis desarrolla un modelo físico útil para la síntesis del audio de tambores que tiene en cuenta la interacción con la cavidad de aire de forma detallada y la no linealidad por modulación de tensión en la membrana. Dicho modelo es verificado ajustando sus parámetros físicos a las medidas sobre tambores reales del candombe uruguayo. Por otro lado, se propone un modelo de síntesis para los golpes de madera y un método para ajustar sus parámetros de modo de producir sonidos perceptivamente iguales a un audio de referencia.

El primer modelo aquí desarrollado no está restringido solamente a los tambores del candombe uruguayo, sino a todos los membranófonos simples cuya caja esté abierta en el extremo opuesto a la membrana. Asimismo, el modelo puede ser extendido a tambores cerrados o con membrana en ambas bocas. La síntesis de la interacción con la cavidad resonante se hizo usando el método de la transformación funcional, el grado de detalle logrado usando este método sólo es comparable a trabajos previos que usan métodos de elementos finitos para resolver este problema. Sin embargo, estos últimos son mucho más costosos computacionalmente, y no aportan información analítica sobre el sistema físico.

Los resultados de este trabajo no sólo permiten sintetizar el audio producido por un tambor virtual con los parámetros físicos deseados, sino, que permiten aproximar de forma analítica las variaciones de frecuencia sufridas por los modos normales de la membrana debido a la interacción con la cavidad de aire.

### Agradecimientos

Encaminarse en la realización de una maestría es un proceso que tiene grandes altibajos de todo tipo. Quiero agradecer a las personas que me acompañaron en algún momento del camino, a Martín Rocamora, que me aconsejó desde el principio y prestó su ayuda (y sus tambores) en varios momentos; a mis tutores Paulo Esquef y Carlos Negreira, por su paciencia, sus consejos y su ayuda; a mi director académico Pablo Monzón, quien se encargó de toda la burocracia ante la SCAPA; a Luiz Wagner por su ayuda durante mi estancia en Rio de Janeiro; a todo el grupo de física no lineal y los habitantes del laboratorio 326 por aguantarme a Cecilia Cabeza, a Rodrigo García, a Alexandre L'Her, a Yamil Abraham, y a Gonzalo de Polsi, por nombrar algunos, y especialmente a Gonzalo Garay por leer y comentar algunos fragmentos del manuscrito; a los técnicos en electrónica y mecánica, Alejandro Lavarello y Luis Quiñones, por resolverme problemas y aportar ideas; y a todos los que me han tenido que aguantar durante este proceso y me han dado ánimos para seguir, mi familia, mis amigos y a Lina.

Quiero agradecer en particular a los miembros del tribunal que se tomaron el tiempo para leer el manuscrito y hacerme sugerencias para mejorarlo.

Quiero reconocer el apoyo económico que recibí de varias organizaciones, la ANII, la UdelaR, CAPES, CSIC y PEDECIBA. Asimismo, quiero reconocer el apoyo logístico que recibí de los grupos de acústica y física no lineal del Instituto de Física de Facultad de Ciencias, del los Laboratorios de Procesamiento de Señales de la Universidad Federal de Rio de Janeiro y del Laboratorio Nacional de Computación Científica.

# Índice general

<i>Resumen</i>	3
Agradecimientos	4
Capítulo 1. Introducción	7
1.1. Motivación	7
1.2. Síntesis de audio	7
1.3. Candombe uruguayo	8
1.4. Contenido de la tesis	9
Capítulo 2. Síntesis por modelado físico	11
2.1. Introducción	11
2.2. Modelo de Karplus-Strong para cuerdas pulsadas	12
2.3. Guías de ondas digitales	18
2.4. Redes de guías de ondas digitales	19
2.5. Método de la transformación funcional	22
Capítulo 3. Tambores del candombe uruguayo	37
3.1. Introducción	37
3.2. Descripción física	37
3.3. Modelo	38
Capítulo 4. Medidas y análisis	53
4.1. Los tambores	53
4.2. Dispositivos de medida	53
4.3. Análisis	55
4.4. Ajuste del modelo	59
Capítulo 5. Algoritmos de síntesis	63
5.1. Membrana	63
5.2. Madera	67
Capítulo 6. Resultados	71
6.1. Resultados de las medidas	71
6.2. Resultados de la síntesis	73
6.3. Análisis síntesis de madera	78
Capítulo 7. Conclusiones	85
7.1. Contribuciones del trabajo	85
7.2. Discusión y trabajo futuro	86
7.3. Trabajo futuro en general	87
Bibliografía	89

Apéndice A. Señales y sistemas	93
A.1. Tiempo continuo	93
A.2. Tiempo discreto	95
A.3. Transformaciones entre tiempo continuo y discreto	96

## Introducción

### 1.1. Motivación

La síntesis y el procesamiento digital de audio son herramientas cada vez más utilizadas en el mundo de la música, la producción audiovisual y los videojuegos [1, 2, 3, 4, 5], desde sonidos realistas para tocar en sintetizadores digitales en vivo, hasta interpretación automática de partituras. La síntesis por modelado físico implica una concordancia entre los procesos físicos que se llevan a cabo en el objeto cuyo sonido se intenta sintetizar, y la implementación en el sintetizador.

La investigación orientada al procesamiento de audio es un área creciente en Uruguay. En particular el desarrollo de modelos físicos para síntesis de audio es totalmente innovador en el país. Dicha investigación conjuga varias áreas del conocimiento. Técnicas de procesamiento digital de señales son usadas no solamente para sintetizar audio, sino también para entender mejor los mecanismos de producción de sonido de los instrumentos y el impacto que produce cada uno de los componentes. Aportar modelos físicos capaces de sintetizar el sonido de un instrumento es útil, entonces, para poder generar digitalmente una amplia gama de sonidos que imitan el sonido de un instrumento real, y también para comprender mejor la física subyacente a los modelos.

### 1.2. Síntesis de audio

La síntesis de audio consiste en generar sonidos artificialmente, generalmente para imitar instrumentos musicales u otros sonidos del mundo real. Existen varias técnicas de síntesis de audio desarrolladas al día de hoy en la literatura. La mayoría de las técnicas pueden ser clasificadas en una de dos categorías[6, 7]: síntesis basada en modelos físicos, o síntesis basada en sonido. La primera categoría agrupa todas las técnicas que, a partir de principios físicos, desarrollan algoritmos de síntesis que simulan la física del instrumento que se quiere sintetizar, hablaremos de estas en detalle en el capítulo 2 sobre síntesis por modelado físico. La segunda categoría tiene un enfoque totalmente distinto, se basa en el diseño de modelos adecuados para imitar aspectos temporales y espectrales del sonido que se quiere sintetizar, utilizando audios de referencia y sin considerar los principios físicos que participan en la generación del sonido. Hablaremos brevemente de algunos tipos de síntesis basada en sonido.

**1.2.1. Síntesis sustractiva.** La síntesis sustractiva se basa en el filtrado de una señal rica en componentes espectrales (por ejemplo, ruido blanco), cambiando sus propiedades espectrales, y temporales en caso de usar filtros dinámicos. Esta técnica no está restringida a sintetizar sonidos tonales, por lo que puede ser usada para sintetizar sonidos de golpes y otros similares. Un ejemplo de esta técnica será

utilizado más adelante en la sección 5.2 para sintetizar el sonido de madera de los tambores del candombe uruguayo. Otros ejemplos pueden encontrarse en [8, 9].

**1.2.2. Síntesis aditiva.** En la síntesis aditiva se construye una señal que es la suma de varios parciales sinusoidales cuyas características pueden variar con el tiempo. En su forma general la síntesis aditiva tiene la siguiente expresión [10]:

$$y[t] = \sum_{k=1}^K (A_k[t] + N_k[t] b[t]) \sin(\theta_k[t])$$

Donde  $y$  es la señal a ser sintetizada,  $t$  es el tiempo discreto,  $k$  es el número del parcial sinusoidal,  $K$  es el número total de parciales,  $A_k$  es la envolvente de amplitud del parcial  $k$ ,  $N_k$  es la envolvente del ruido del parcial  $k$ ,  $b$  es una señal de ruido (con espectro pasabajo), y  $\theta_k[t] = \theta_k[t-1] + 2^{F_k[t]}$  es la fase instantánea del parcial  $k$ , con  $F_k[t]$  la envolvente de frecuencia logarítmica<sup>1</sup>.

Muchos de los trabajos que utilizan este método lo hacen para resintetizar audios grabados [11, 12], aunque el método no está restringido a resintetizar audios existentes. También es posible modificar la resíntesis de un audio de modo de cambiar propiedades espectrales o temporales.

**1.2.3. Tabla de ondas.** La técnica de síntesis por tabla de ondas es la más directa de todas, consiste básicamente en reproducir de forma inteligente audios previamente grabados (o sintetizados). Para no almacenar todas las posibles notas y variantes que se quieran tocar, es necesario usar técnicas de filtrado, bucle, envolvente, cambio de tono, y otras [13].

### 1.3. Candombe uruguayo

El candombe es una expresión artística de procedencia afrouruguaya que involucra la música y la danza. La música es tocada por cuerdas de tambores que se dividen en tres categorías: chico, repique y piano. Cada uno de estos tambores distintos juega un rol en la estructura rítmica del candombe. El chico, el más pequeño y agudo de los tres, junto con el piano, el más grande y grave, conforman la base rítmica de la música del candombe y son por tanto los más estructurados en su ejecución. El repique es el tambor que tiene más expresividad al tocarse, es el que tiene mayor variabilidad a lo largo de la ejecución. En una cuerda de tambores hay varios intérpretes de cada uno de los tipos de tambor y los tocan mientras marchan por la calle.

El candombe surgió a fines del siglo XVIII en las reuniones de los afrodescendientes montevidianos. El nombre de candombe o “tango” fue acuñado para hacer referencia a las reuniones que los africanos organizaban para rendir culto a sus dioses [14]. Apareció registrado por primera vez en 1834 en un diario montevidiano para referirse a los bailes que las naciones de negros organizaban los domingos y feriados. Estas naciones eran sociedades donde se agrupaban los africanos de una misma procedencia para prestarse ayuda [15]. Visitantes de Montevideo de principios del siglo XIX hacen referencia a la fiesta de reyes del 6 de enero [16], siendo hasta hoy una fiesta de suma importancia para el candombe.

---

<sup>1</sup>La frecuencia logarítmica suele utilizarse porque su valor está íntimamente relacionado con la nota musical que se está sintetizando.

Hoy en día, el candombe es una parte importante de la cultura uruguaya. Los eventos anuales más importantes son el desfile de llamadas por barrio Sur y Palermo el viernes de carnaval, y el concurso oficial de carnaval en el Teatro de Verano, en el cual comparten escenario con otras expresiones artísticas autóctonas como la murga. Además desde mediados del siglo XX el candombe ha sido fusionado con diversos estilos de la música popular y académica. Varios artistas han usado la base de la batería del candombe en canciones de música popular.

#### **1.4. Contenido de la tesis**

Lo que resta de la tesis se divide de la siguiente manera: el capítulo 2 da una introducción a la síntesis por modelado físico y las técnicas más comúnmente utilizadas, prestando especial atención en el método de la transformación funcional; el capítulo 3 introduce los tambores del candombe uruguayo y desarrolla los resultados teóricos que precisaremos para la síntesis de audio y para el análisis de datos; el capítulo 4 describe el dispositivo experimental usado para tomar medidas sobre la membrana de algunos tambores, y el ulterior análisis que hicimos para recuperar parámetros físicos de interés a partir de los datos; el capítulo 5 describe los algoritmos de síntesis utilizados, detallando cada uno de los bloques; en el capítulo 6 mostraremos algunos resultados de las medidas y de los algoritmos de síntesis y compararemos ambos; por último en el capítulo 7 sacaremos algunas conclusiones del trabajo, revisaremos las carencias del modelo propuesto, y propondremos posibles trabajos futuros que complementarían la presente tesis.



## Síntesis por modelado físico

### 2.1. Introducción

La síntesis de audio por modelado físico implica una relación íntima entre el objeto real que produce sonido y el algoritmo computacional usado para generar artificialmente dicho sonido. Este tipo de técnicas permiten interpretar físicamente las señales intermedias en el proceso de síntesis, así como el resultado final. Además, el algoritmo de síntesis depende de unos pocos parámetros físicos que son eventualmente medibles (o ajustables usando audios reales), e incluso definirlos para simular el sonido de instrumentos antes de fabricarlos, pudiendo prever cómo afectará al sonido cambios en el diseño de los instrumentos. Este tipo de métodos suelen ser computacionalmente más costosos que otros basados en grabaciones, sin embargo, con la creciente potencia de los computadores y procesadores digitales de señales se están volviendo cada vez más estudiados y utilizados en la producción musical actual[17].

En el presente capítulo, mostraremos algunas de las técnicas de síntesis por modelado físico, comentando las ventajas y desventajas que presentan. En la sección 2.2, introduciremos el modelo de Karplus-Strong para cuerdas pulsadas, que se basa en una línea de retardo digital. En la sección 2.3, mostraremos las guías de ondas digitales unidimensionales, que son una extensión del modelo de Karplus-Strong aplicable a varios tipos de instrumentos musicales cuyo resonador pueda considerarse unidimensional y con baja dispersión. En la sección 2.4, deduciremos un modelo multidimensional de guías de ondas digitales, que puede ser utilizado para la síntesis de membranas, así como de cavidades resonantes o salas reverberantes. Por último en la sección 2.5, presentaremos el método de la transformación funcional, que se basa en una serie de transformaciones espaciales y temporales para, a partir de una ecuación en derivadas parciales, llegar a una función de transferencia multidimensional, este método resulta muy versátil y es útil, en principio, para cualquier sistema que pueda ser descrito por ecuaciones lineales en derivadas parciales. Además de las técnicas aquí revisadas, existen otras técnicas utilizadas tales como diferencias finitas [18, 19], y síntesis modal [20]. En los siguientes capítulos, utilizaremos intensivamente el método de la transformación funcional presentado en la sección 2.5, mientras que los otros métodos aquí presentados, están únicamente a modo de introducción.

Varias de estas secciones presuponen el conocimiento por parte del lector de diversas herramientas matemáticas. Las más importantes son descritas brevemente en el apéndice A, como la transformada de Laplace ( $X = \mathcal{L}[x]$ ) y la transformada  $\mathcal{Z}$  ( $X = \mathcal{Z}[x]$ ).

## 2.2. Modelo de Karplus-Strong para cuerdas pulsadas

El modelo fue propuesto en 1983 por Kevin Karplus y Alex Strong [21]. En el artículo original por Karplus y Strong, el modelo fue presentado simplemente como un algoritmo para síntesis, y no como un modelo físico en sí. Sin embargo, es posible llegar a él desde principios físicos aplicados a una cuerda. Esto permite interpretar físicamente cada parte del algoritmo, así como también modificarlo para producir nuevos algoritmos que produzcan otro tipo de sonidos. Dichos algoritmos, que generalizan el modelo de Karplus y Strong, emplean las llamadas guías de ondas digitales, que serán estudiadas en la sección 2.3.

**2.2.1. Deducción física del modelo.** Para comenzar, veamos el caso más simple. Una cuerda de sección despreciable sometida a una tensión,  $T$ , y que posee una densidad lineal de masa  $\lambda$  (masa por unidad de longitud). Sea  $y(x, t)$  la altura en tiempo  $t$  del punto que se encuentra en la posición  $x$ . Si suponemos que:  $\frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$ , entonces la segunda ley de Newton aplicada a un pedazo infinitesimal de la cuerda da por resultado la ecuación en derivadas parciales[22]:

$$(2.2.1) \quad \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

*2.2.1.1. Ondas viajeras.* Para resolver la ecuación 2.2.1 de forma general, vamos a implementar el siguiente cambio de variables (para un valor de  $c$  en principio arbitrario):

$$\begin{cases} \zeta = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$(2.2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} = c \left( \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación 2.2.1:

$$\lambda c^2 \left( \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 y = T \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 y$$

O equivalentemente:

$$(2.2.3) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta} \right) y = \frac{(\lambda c^2 - T)}{2(\lambda c^2 + T)} \left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) y$$

Eligiendo  $c = \sqrt{T/\lambda}$  la ecuación 2.2.3 se reduce a:

$$(2.2.4) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta} \right) y = 0$$

Reordenando 2.2.4 de la forma  $\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0$  puede deducirse que  $\frac{\partial y}{\partial \eta}$  no depende de  $\zeta$ , pues la derivada parcial es nula. Por tanto:

$$(2.2.5) \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = g(\eta)$$

Siendo  $g$  una función que dependerá de las condiciones iniciales. Para encontrar la forma completa de  $y$  alcanza integrar:

$$y(\zeta, \eta) = y(\zeta, 0) + \int_0^\eta \frac{\partial y}{\partial \eta}(\zeta, \tau) d\tau$$

Sustituyendo la ecuación 2.2.5:

$$y(\zeta, \eta) = y(\zeta, 0) + \int_0^\eta g(\tau) d\tau = f_r(\zeta) + f_l(\eta)$$

Donde  $f_r$  y  $f_l$  son funciones a determinar con las condiciones iniciales. Desahaciendo ahora el cambio de variable:

$$(2.2.6) \quad y(x, t) = f_r(x - ct) + f_l(x + ct)$$

La ecuación anterior se interpreta fácilmente como dos ondas que viajan en direcciones opuestas preservando su forma. El término con  $f_r$  genera ondas moviéndose en  $x$  crecientes a medida que avanza el tiempo y el término con  $f_l$  genera ondas moviéndose en  $x$  decrecientes a medida que avanza el tiempo. La velocidad de dichas ondas es exactamente  $c$  y es, por tanto, la velocidad de propagación en la cuerda.

2.2.1.2. *Cuerda fija en los extremos.* A la ecuación 2.2.6 le agregamos las condiciones de contorno:

$$(2.2.7) \quad \begin{cases} y(0, t) = 0 & \forall t \\ y(L, t) = 0 & \forall t \end{cases}$$

O sea, una cuerda de largo  $L$ , fija en ambos extremos. Sustituyendo la solución de onda viajera (ecuación 2.2.6) en estas condiciones de contorno:

$$\begin{cases} f_r(0 - ct) + f_l(0 + ct) = 0 \\ f_r(L - ct) + f_l(L + ct) = 0 \end{cases}$$

De donde se deduce que  $f_l(ct) = -f_r(-ct)$  y por tanto:

$$f_r(L - ct) = f_r(-L - ct)$$

Por lo que la función  $f_r$  es periódica de período  $2L$  y podemos escribir:

$$y(x, t) = f_r(x - ct) - f_r(-x - ct)$$

Cada punto de la cuerda ( $x$  fijo) se mueve en un movimiento periódico de período  $2L/c$ , por lo que podemos definir la frecuencia fundamental de esta cuerda como el inverso de dicho período, o sea:

$$f_0 = \frac{c}{2L}$$

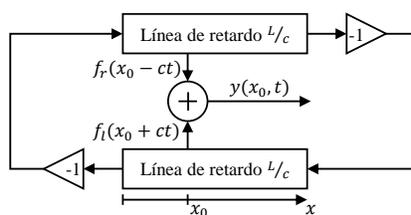


FIGURA 2.2.1. Esquema del modelo de una cuerda ideal con líneas de retardo.

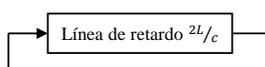


FIGURA 2.2.2. Esquema del modelo simplificado de una cuerda ideal.

Debe observarse que la información de todo el movimiento de la cuerda está contenida en un período ( $2L$ ) de la función  $f_r$ , o lo que es lo mismo, en el intervalo  $[0, L]$  de ambas funciones  $f_r$  y  $f_l$ .

*2.2.1.3. Modelo simple.* Una primera implementación simple, basada en la deducción anterior, consiste en modelar la cuerda como dos líneas de retardo: una representa la onda viajando hacia la derecha y la otra representa la onda viajando hacia la izquierda. Como se mostró en la sección anterior, las condiciones de borde ideales causan un rebote con un cambio de signo, y por tanto la onda que viajaba hacia un lado, cambia de signo y viaja hacia el otro al llegar al final de la cuerda. Dicho modelo se muestra en la figura 2.2.1.

Para implementar este modelo, basta implementar 2 líneas de retardo y conectarlas según el esquema. O alternativamente, se puede implementar una única línea de retardo de duración  $2L/c$  y conectar su salida directamente a su entrada (figura 2.2.2). De este modo nos apartamos un poco del modelo físico en pro de un modelo que sea más fácil de implementar.

*2.2.1.4. Rebote no ideal.* En una cuerda real, el extremo no está perfectamente quieto, sino que está sujeto a otro medio material que puede transmitir ondas. A causa de esto, parte de la onda que llega al final de la cuerda es transmitida al otro medio y parte es reflejada a la cuerda. Cómo son las ondas transmitidas y reflejadas depende de la impedancia acústica de ambos medios, en particular el coeficiente de reflexión puede escribirse como:

$$r(s) = \frac{z_c - z_p(s)}{z_c + z_p(s)}$$

Donde  $z_c$  es la impedancia de la cuerda y  $z_p$  es la impedancia del medio donde está sujeta la cuerda (por ejemplo el puente o la cejilla). Debe notarse que la impedancia del medio depende, en general, de la frecuencia, y por tanto el coeficiente de reflexión también (idealmente la impedancia de la cuerda es  $z_c = \lambda c$  por lo que la impedancia de la cuerda ideal es real y no depende de la frecuencia). Puede observarse cómo se recupera el modelo con los extremos fijos en el límite  $z_p \rightarrow +\infty$  en cuyo caso el coeficiente de reflexión tiende a  $-1$ . Se puede modificar el esquema

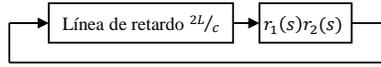


FIGURA 2.2.3. Esquema del modelo de cuerda con rebotes no ideales.

en la figura 2.2.1, cambiando los multiplicadores por filtros con transferencia  $r_1(s)$  y  $r_2(s)$ , o equivalentemente, modificar el esquema de la figura 2.2.2, agregando un filtro que sea la composición de los filtros correspondientes a ambos rebotes (figura 2.2.3).

**2.2.2. Implementación computacional del modelo.** La implementación computacional del modelo resulta bastante sencilla, deben implementarse dos cosas: por un lado la línea de retardo digital, y por otro lado un filtro digital que emule el comportamiento de las reflexiones. Una vez implementados dichos bloques sólo resta definir las condiciones iniciales y la salida del modelo para que pueda ser usado como algoritmo de síntesis. Ambas etapas deberán ser implementadas en tiempo discreto, por lo que debe elegirse una cierta frecuencia de muestreo,  $F_s$ . Una frecuencia demasiado alta, implica un costo computacional más elevado, y una frecuencia demasiado baja, implica menos armónicos sintetizados. Una frecuencia de muestreo de modo que todo el rango audible pueda ser sintetizado ( $F_s \gtrsim 40\text{kHz}$ ) es, a priori, suficiente.

*2.2.2.1. Línea de retardo digital.* Una implementación simple de una línea de retardo digital es una estructura con  $N$  espacios de memoria, una entrada, y una salida. En cada tiempo de muestreo entra un valor por la entrada y sale el valor que entró  $N$  tiempos de muestreo antes. Dicha línea de retardo tiene una transferencia igual a  $z^{-N}$  y un retardo constante igual a  $N$ . Puede ser implementada con  $N$  retardos unitarios puestos en cascada, o con una memoria que se lee y escribe de manera circular. Esta línea de retardo sólo puede tomar valores discretos de tiempo de retardo (un número entero de tiempos de muestreo), lo que no nos permite realizar ajustes finos a la frecuencia de la cuerda sintetizada. En el artículo de Karplus y Strong [21] la eficiencia computacional del algoritmo era de suma importancia debido a la potencia de los computadores en aquella época, y proponían solucionar este problema alterando la frecuencia de muestreo. Hoy en día, la eficiencia computacional (si bien siempre es algo a tener en cuenta) no es el factor clave, y además, la proliferación de los sistemas de audio digitales en computadoras y demás dispositivos, hacen conveniente el uso de frecuencias de muestreo estandarizadas. Por eso, resolveremos el problema agregando a la línea de retardo entero, un filtro digital en cascada que posea un retardo fraccionario [23, 24]. Esto, además, nos permitirá compensar por variaciones en la frecuencia sintetizada debido a cambios en el retardo del filtro digital que emula las reflexiones.

Existen varias maneras de implementar un retardo fraccionario arbitrario. Un filtro pasatodo con función de transferencia  $H(z) = \frac{-az+1}{z-a}$  tiene un retardo (a bajas frecuencias) de  $\delta = \frac{1+a}{1-a}$ .

Notemos primero que<sup>1</sup>  $|H(e^{j\theta})| = 1$ , ya que:

<sup>1</sup>Donde  $j = \sqrt{-1}$  es la unidad imaginaria.

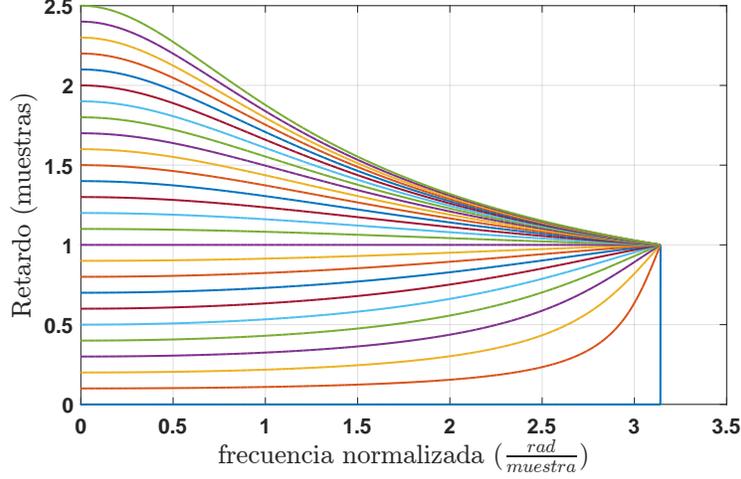


FIGURA 2.2.4. Retardo de fase para varios valores de  $\delta$  en función de la frecuencia normalizada<sup>1</sup>.

$$|H(e^{j\theta})| = \frac{|1 - ae^{j\theta}|}{|e^{j\theta} - a|} = |e^{j\theta}| \frac{|e^{-j\theta} - a|}{|e^{j\theta} - a|} = 1$$

Mientras que la fase, puede escribirse como:

$$\angle H(e^{j\theta}) = -2\text{Atan}\left(\frac{a \sin(\theta)}{1 - a \cos(\theta)}\right) - \theta \approx -\theta \frac{1+a}{1-a}$$

Donde la aproximación es para  $\theta \approx 0$ . El retardo de fase puede escribirse como:

$$-\frac{1}{\theta} \angle H(e^{j\theta}) = \frac{2}{\theta} \text{Atan}\left(\frac{a \sin(\theta)}{1 - a \cos(\theta)}\right) + 1 \approx \frac{1+a}{1-a}$$

Debe notarse que dicha aproximación se deteriora para valores de  $a$  cercanos a la unidad, o sea valores de  $\delta \gg 1$ . En la figura 2.2.4 se muestra el retardo de fase (sin aproximar) en función de la frecuencia para varios valores de  $\delta$ , donde puede verse que para frecuencias más altas el retardo fraccionario ya no cumple de manera tan satisfactoria su cometido.

Una opción un poco más sofisticada es usar un interpolador de Lagrange. La ventaja del interpolador de Lagrange es que puede elegirse el orden para tener tanta precisión como se desee. Un interpolador de Lagrange, no es más que tomar  $m$  muestras, encontrar el polinomio de grado  $m - 1$  que pasa por todos los puntos y evaluarlo en el punto correspondiente para obtener el retardo de fase deseado. El resultado de dicha evaluación es una combinación lineal de las  $m$  muestras, por lo que todo el proceso es un filtro digital del tipo FIR (respuesta al impulso finita,

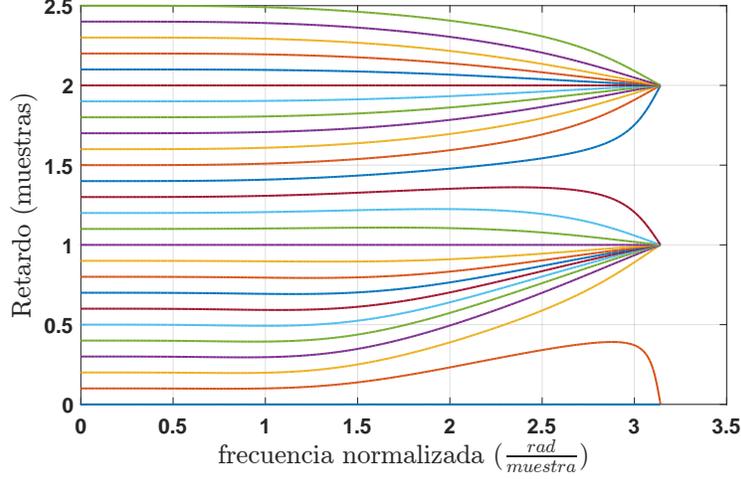


FIGURA 2.2.5. Retardo de fase de un interpolador de Lagrange de orden 4 para varios retardos fraccionarios.

por sus siglas en inglés). Esta opción presenta un retardo de fase mucho más plano (ver figura 2.2.5), incluso con órdenes bajos.

*2.2.2.2. Filtro de reflexiones.* Este filtro debe modelar las distintas velocidades con las que decaen los distintos armónicos. Es por esto, que además de la primera interpretación física de este filtro hecha más arriba, puede modelar pérdidas por interacción con el aire (debido a la viscosidad, y a la radiación acústica) u otros factores internos a la cuerda. Teniendo en cuenta que la frecuencia fundamental que se desea sintetizar es  $f_0$ , la señal pasa por el filtro cada un período  $T_0 = 1/f_0$ . Por lo tanto, si la respuesta del filtro es  $R(z)$  cada armónico<sup>2</sup> decae a una velocidad de:

$$v_n = 20f_0 \log_{10} \left| R \left( e^{2j \frac{nf_0}{F_s} \pi} \right) \right| \text{ dB/s}$$

Donde  $R \left( e^{2j \frac{nf_0}{F_s} \pi} \right)$  representa la respuesta del filtro digital en la frecuencia del  $n$ -ésimo armónico. Un filtro  $R(z)$  adecuado es lo que le da realismo al modelo de Karplus-Strong. Originalmente, propusieron un filtro simple de media móvil de la forma  $R(z) = \frac{1}{2} (1 + z^{-1})$ . Trabajos posteriores [24] proponen técnicas de ajuste del filtro usando audios reales, proponiendo una familia de filtros y ajustando sus parámetros para acercarse lo más posible a la evolución de los armónicos en el audio real.

*2.2.2.3. Condiciones iniciales y salida.* Las condiciones iniciales del modelo son, básicamente, los valores almacenados en la línea de retardo al comenzar a correr el algoritmo. Karplus y Strong propusieron inicializarla con valores aleatorios (ruido blanco), para que de esta manera el espectro inicial fuera rico en componentes

<sup>1</sup>La frecuencia normalizada  $\theta = 2\pi \frac{f}{F_s}$  es el equivalente en tiempo discreto de la frecuencia angular y expresa radianes por muestra de una oscilación.

<sup>2</sup>Los armónicos presentes en una cuerda ideal, son múltiplos de la frecuencia fundamental  $f_0$ , y por tanto el  $n$ -ésimo armónico tiene una frecuencia igual a  $nf_0$ .

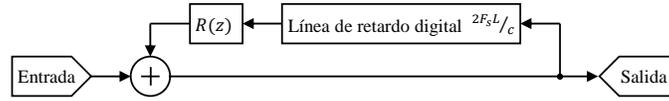


FIGURA 2.2.6. Implementación del modelo de Karplus-Strong en formato entrada-salida.

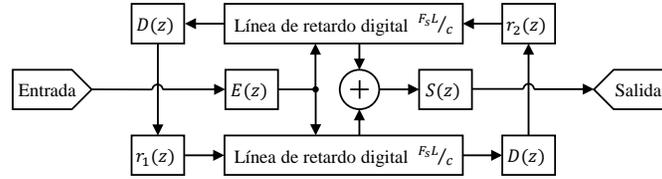


FIGURA 2.3.1. Esquema del modelo de cuerda pulsada usando guías de ondas digitales.

armónicas. A medida que avanza el tiempo las componentes de alta frecuencia van decayendo más rápidamente hasta que sólo es audible la frecuencia fundamental. Propusieron también como salida del sistema el punto a la salida del filtro  $R(z)$ . Esto es equivalente a proponer un sistema entrada-salida como en la figura 2.2.6 donde en la entrada se inyecta un pulso de ruido blanco de duración igual al largo de la línea de retardo.

### 2.3. Guías de ondas digitales

Las guías de ondas digitales son una generalización del modelo de Karplus-Strong, pero que son aplicables a otros tipos de instrumentos con interacciones más complicadas. Las guías de ondas digitales asignan a cada tramo de un objeto físico (unidimensional) capaz de transmitir ondas dos líneas de retardo, representando las ondas que van hacia un lado y hacia el otro. En cada extremo de estas líneas sucede algún proceso físico (más allá de la transmisión de ondas), como la interacción con otro componente del instrumento, y entonces con la información en las líneas de retardo, es posible reconstruir las variables físicas de interés para simular esta interacción o proceso.

**2.3.1. Ejemplo de cuerda pulsada.** Un primer ejemplo sencillo es rehacer el modelo de cuerda pulsada, este y otros ejemplos de simulación usando guías de ondas digitales se encuentran en [6] y [25]. Una ventaja de hacerlo de esta manera, en contraposición al modelo de Karplus-Strong, es que se consigue un modelo entrada-salida donde las entradas y las salidas son variables físicas de la cuerda real. Un modelo completo de cuerda pulsada es el mostrado en la figura 2.3.1, donde además de tener en cuenta los coeficientes de reflexión ( $r_1(z)$  y  $r_2(z)$ ), se tiene en cuenta una posible dispersión por la propagación de la onda a través de la cuerda ( $D(z)$ ). Además, se tiene en cuenta el filtro de entrada (para convertir la fuerza ejercida sobre la cuerda en desplazamiento,  $E(z)$ ) y el filtro de salida ( $S(z)$ ) que tienen en consideración todo lo que viene después de la cuerda (por ejemplo la transferencia del pickup de la guitarra y la electrónica subsiguiente, o la caja de resonancia y la radiación hacia el aire).

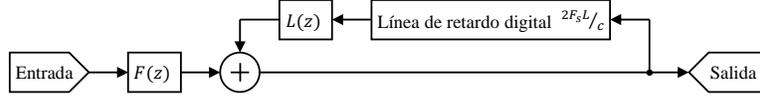


FIGURA 2.3.2. Esquema simplificado del modelo de cuerda pulsada usando guías de ondas digitales.

Es fácil ver que este modelo puede convertirse en un modelo muy similar al de la figura 2.2.6 reordenando los bloques. Una vez realizado ese proceso el modelo queda como en la figura 2.3.2 siendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} L(z) = r_1(z) r_2(z) D^2(z) \\ F(z) = S(z) \left[ \begin{array}{l} 1 + z^{-2N+2n_{out}} r_2(z) D(z) \\ z^{-n_{out}+n_{in}} + r_1(z) D(z) z^{-n_{out}-n_{in}} \end{array} \right] E(z) \end{array} \right.$$

Donde  $n_{in}$  es la posición de la entrada en el esquema anterior y  $n_{out}$  la posición de la salida medidas en muestras desde el extremo izquierdo del esquema en la figura 2.3.1, y  $N$  la parte entera de las líneas de retardo digitales.

## 2.4. Redes de guías de ondas digitales

Las redes de guías de ondas digitales sirven para modelar medios de más de una dimensión. Para ello se aproxima el medio multidimensional como un conjunto de medios unidimensionales cercanos que se disponen en todas las direcciones en las que las ondas se pueden propagar. Una membrana, entonces, se modela con un entramado de cuerdas muy cercanas unas de otras. Este método es útil para simular desde membranas [26] hasta salas reverberantes [27].

**2.4.1. Intersección de dos cuerdas.** A modo de ejemplo, encontraremos los coeficientes de transmisión y reflexión para dos cuerdas que están soldadas en un punto, el caso para tubos de aire es análogo y puede encontrarse en [25]. Suponemos dos cuerdas con densidades lineales  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , y que están sujetas a tensiones  $T_1$  y  $T_2$ . Llamemos  $x_1$  y  $x_2$  a las variables de distancia según cada cuerda, con el origen en la intersección, lugar en que ambas cuerdas están confinadas a moverse juntas. Suponemos las alturas ( $y_1$  e  $y_2$ ) de cada cuerda perpendiculares a ambas. La ecuación que rige el movimiento de ambas cuerdas es la ecuación 2.2.1 agregando los subíndices para obtener las ecuaciones correspondientes cada cuerda, y la condición de borde a la que están sometidas es:

$$(2.4.1) \quad y_1(0, t) = y_2(0, t)$$

Además de una ecuación que vincula las fuerzas ejercidas sobre el punto de intersección, que deben sumar cero, para evitar una aceleración infinita de un punto sin masa. Dicha condición se escribe como<sup>3</sup>:

$$(2.4.2) \quad T_1 [y_1'(0^+) - y_1'(0^-)] = -T_2 [y_2'(0^+) - y_2'(0^-)]$$

<sup>3</sup>Debe entenderse por  $y_1'(0^+)$  el límite  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\delta}$  y análogamente para  $y_1'(0^-)$ ,  $y_2'(0^+)$ , y  $y_2'(0^-)$ .

Resolveremos para una onda incidente desde los valores negativos de  $x_1$  de la primera cuerda. Por lo que tendremos una onda incidente:

$$y_1^{(i)}(x_1, t) = e^{j(\omega t - k_1 x_1)} \quad x_1 \leq 0$$

A su vez, tendremos tres ondas transmitidas y una reflejada:

$$\begin{cases} y_1^{(r)}(x_1, t) = r_1 e^{j(\omega t + k_1 x_1)} & x_1 \leq 0 \\ y_1^{(t)}(x_1, t) = t_{1,1} e^{j(\omega t - k_1 x_1)} & x_1 \geq 0 \\ y_2^{(t)}(x_2, t) = t_{1,2-} e^{j(\omega t + k_2 x_2)} & x_2 \leq 0 \\ y_2^{(t)}(x_2, t) = t_{1,2+} e^{j(\omega t - k_2 x_2)} & x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Por la condición en 2.4.1 y la continuidad de las funciones  $y_1$  y  $y_2$  se tiene que  $1 + r_1 = t_{1,1} = t_{1,2-} = t_{1,2+}$  por lo que simplemente los llamaremos  $r_1$  y  $t_1$ , entonces, agregando la condición en 2.4.2:

$$\begin{cases} 1 + r_1 = t_1 \\ T_1 [-t_1 k_1 - (-k_1 + r_1 k_1)] = -T_2 [-k_2 t_1 - k_2 t_1] \end{cases}$$

Lo que se simplifica en:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{T_1 k_1}{2T_2 k_2 + 2T_1 k_1} \\ r_1 = t_1 - 1 \end{cases}$$

Escribiendo los coeficientes en función de las impedancias acústicas ( $Z_i = \sqrt{\lambda_i T_i}$ ) y notando que  $k_i = \omega/c_i = \omega \sqrt{\lambda_i/T_i}$ :

$$\begin{cases} t_1 = \frac{Z_1}{2Z_2 + 2Z_1} \\ r_1 = t_1 - 1 \end{cases}$$

**2.4.2. Nudo de  $n$  ramas.** Una juntura de  $n$  cuerdas semiinfinitas (cuerdas que nacen en el punto de intersección sin necesariamente continuar hacia el otro lado), con impedancias arbitrarias, puede resolverse de manera análoga al caso anterior, llegando al resultado:

$$(2.4.3) \quad \begin{cases} t_i = \frac{Z_i}{Z_{tot}} \\ r_i = t_i - 1 \end{cases}$$

Donde  $t_i$  es el coeficiente de transmisión hacia las demás cuerdas de una onda incidente por la cuerda  $i$ -ésima,  $r_i$  es el coeficiente de reflexión hacia la propia cuerda  $i$ -ésima de la onda que por ella llega,  $Z_i$  es la impedancia acústica de cada cuerda, y  $Z_{tot} = \sum_{i=1}^n Z_i$  es la impedancia total del nodo.

En particular, es de nuestro interés, el caso en el que todas las impedancias acústicas son idénticas, en este caso la ecuación 2.4.3 se reduce a:

$$(2.4.4) \quad \begin{cases} t = \frac{1}{n} \\ r = \frac{1-n}{n} \end{cases}$$

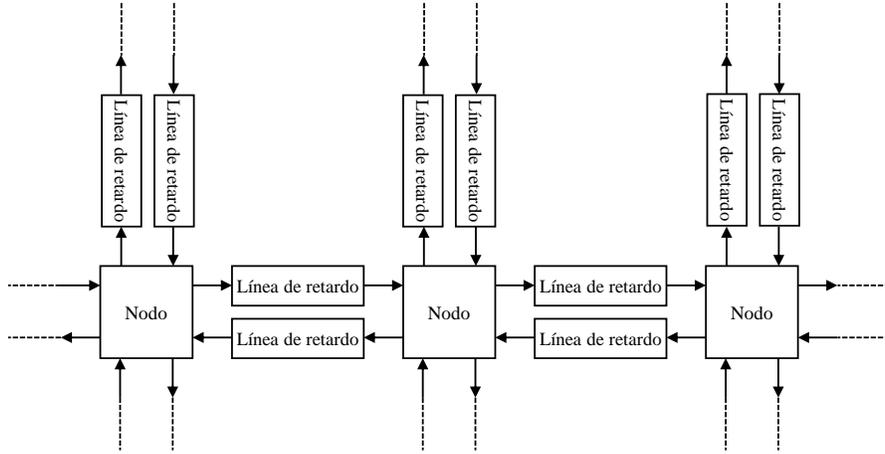


FIGURA 2.4.1. Esquema del modelo de membrana usando una red de guías de ondas.

**2.4.3. Modelo de membrana.** Modelaremos una membrana con un entramado de cuerdas soldadas en sus intersecciones. El entramado más sencillo es un entramado cuadrado con cuerdas idénticas arregladas en dos direcciones (una perpendicular a la otra) y equiespaciadas, sin embargo, pueden pensarse otros entramados. En cada intersección deben considerarse cuatro ondas incidentes y sus respectivas ondas transmitidas y reflejadas. Cada onda incidente será la salida de una línea de retardo y cada onda saliente se usará como entrada para otras líneas de retardo. Si consideramos una intersección de  $n$  ramas ( $n = 4$  para el caso de entramado cuadrado), cada una con una línea de retardo entrante ( $E_i$ ) y saliente ( $S_i$ ) la ecuación que define la onda saliente por la cuerda  $i$ -ésima es la suma de las  $n - 1$  ondas transmitidas y la onda reflejada, o sea:

$$(2.4.5) \quad S_i = \sum_{j \neq i} \frac{1}{n} E_j + \frac{1-n}{n} E_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E_j - E_i$$

Donde el término  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E_j$  en la ecuación 2.4.5 puede verse que es la altura en el punto de intersección de las cuerdas (la altura de la membrana en nuestro modelo). Para modelar una membrana completa usaremos, entonces, una grilla como en la figura 2.4.1, donde cada nodo corresponde a la ecuación 2.4.5 con sus cuatro entradas y cuatro salidas.

Además, resulta sencillo modelar cambios en la impedancia del medio, para este caso se debe modificar la ecuación 2.4.5 por:

$$S_i = \frac{\sum_{j=1}^n Z_j E_j}{\sum_{j=1}^n Z_j} - E_i$$

Para los nodos en la interfase entre regiones con distinta impedancia.

*2.4.3.1. Implementación.* La implementación de este modelo resulta sencilla y computacionalmente eficiente. Si se consideran líneas de retardo unitarias (maximizando así la resolución espacial), se necesitan:

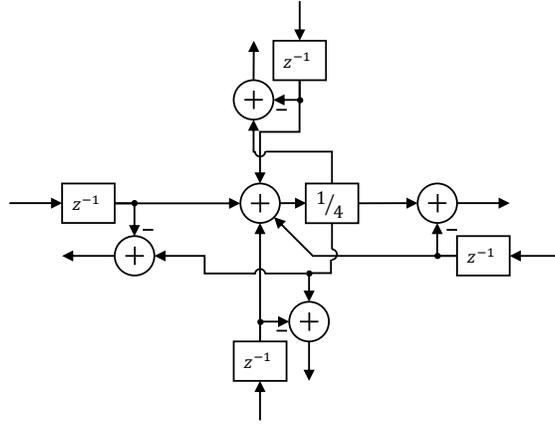


FIGURA 2.4.2. Implementación de la unidad básica para redes de guías de ondas digitales.

- 4 memorias (retardos) por cada nodo
- 7 sumas por nodo y por tiempo de muestreo
- 1 división entre 4, que resulta más eficiente que una división arbitraria

Formando así, unidades básicas como en la figura 2.4.2. Las fronteras deben realizarse con unidades especiales que implementen simplemente un coeficiente de reflexión.

## 2.5. Método de la transformación funcional

El método de la transformación funcional es, básicamente, la descomposición del sistema en modos normales, y la implementación de cada uno como un oscilador armónico digital. Con este método, se resuelve a partir de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales lineales con condiciones iniciales y condiciones de frontera, la evolución futura del sistema. El desarrollo teórico completo de este método puede encontrarse en [28].

**2.5.1. Teoría.** El método se aplica a ecuaciones en derivadas parciales con condiciones iniciales y condiciones de frontera definidas en un cierto espacio  $\mathcal{V}$ . Dicho problema puede escribirse de la forma:

$$(2.5.1) \quad \begin{cases} L_t [y(x, t)] + L_x [y(x, t)] + L_c [y(x, t)] = f_e(x, t) & \forall t \geq 0, x \in \mathcal{V} \\ y(x, 0) = y_0(x), \frac{\partial}{\partial t} y(x, 0) = y_1(x), \dots & \forall x \in \mathcal{V} \\ \dots, \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} y(x, 0) = y_{m-1}(x) & \\ L_b [y(x, t)] = f_b(x, t) & \forall t \geq 0, x \in \partial \mathcal{V} \end{cases}$$

Donde  $L_t$  es un operador que sólo contiene derivadas parciales respecto al tiempo,  $L_x$  es un operador que sólo contiene derivadas espaciales,  $L_c$  es el operador que contiene todos los términos con derivadas tanto espaciales como temporales,  $f_e$  representa una función de excitación,  $m$  representa el máximo orden en las derivadas temporales que aparece en  $L_t$  y  $L_c$ , mientras que  $y_j$  es la condición inicial para la derivada  $j$ -ésima,  $L_b$  es un operador para dar las condiciones de borde que sólo será evaluado en la frontera del espacio y no contiene derivadas temporales, y  $f_b$  son las condiciones de borde propiamente dichas.



$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{si } \mu = \nu \end{cases}$$

Una vez resuelto el problema pueden definirse la transformada de Sturm-Liouville y la transformada inversa de Sturm-Liouville de la siguiente manera:

$$(2.5.5) \quad \begin{cases} \mathcal{T}[Y(x, s)](\mu, s) = \bar{Y}(\mu, s) = \int_{x \in \mathcal{V}} K_{\mu}^*(x) Y(x, s) d\mathcal{V} \\ \mathcal{T}^{-1}[\bar{Y}(\mu, s)](x, s) = Y(x, s) = \sum_{\mu} K_{\mu}(x) \bar{Y}(\mu, s) \end{cases}$$

Donde hemos omitido la dependencia en la frecuencia compleja,  $s$ , de  $K_{\mu}$  debido a que en los problemas físicos de nuestro interés no existe tal dependencia. Notemos que al aplicar la transformación inversa y la transformación, se obtiene la función de entrada.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[\mathcal{T}^{-1}[\bar{Y}(\mu, s)](x, s)](\mu, s) &= \int_{x \in \mathcal{V}} K_{\mu}^*(x) \left( \sum_{\nu} K_{\nu}(x) \bar{Y}(\nu, s) \right) d\mathcal{V} = \\ &= \sum_{\nu} \bar{Y}(\nu, s) \int_{x \in \mathcal{V}} K_{\mu}^*(x) K_{\nu}(x) d\mathcal{V} \end{aligned}$$

Y por la condición de ortonormalidad de la ecuación 2.5.4:

$$\mathcal{T}[\mathcal{T}^{-1}[\bar{Y}(\mu, s)]] = \sum_{\nu} \bar{Y}(\nu, s) \delta_{\mu\nu} = \bar{Y}(\mu, s)$$

El análogo de la ecuación A.1.2 es el teorema de diferenciación ([28] ecuación 5.16), cuyo enunciado es:

$$(2.5.6) \quad \int_{x \in \mathcal{V}} K_{\mu}^*(x) L'_x[s, Y(x, s)] d\mathcal{V} = \beta_{\mu}(s) \bar{Y}(\mu, s) - \int_{x \in \partial\mathcal{V}} F_b(x, s) G_b[s, K_{\mu}(x)] d\partial\mathcal{V}$$

Donde el operador  $G_b[\cdot]$  es tal que se cumple (para dos funciones  $P(x, s)$  e  $Y(x, s)$  cualesquiera):

$$(2.5.7) \quad P(x, s) L'_x[s, Y(x, s)] - L'_x[s, P(x, s)] Y(x, s) =$$

$$= \nabla \{G_b[s, Y(x, s)] L_b[P(x, s)] - L_b[Y(x, s)] G_b[s, P(x, s)] L_b\}$$

El operador  $L_b$  es una extensión (cualquiera) del operador definido en 2.5.1 para todo el espacio  $\mathcal{V}$ .

Al aplicar esta transformación a la ecuación 2.5.2 se llega a:

$$(2.5.8) \quad d_t(s) \bar{Y}(\mu, s) + \beta_{\mu}(s) \bar{Y}(\mu, s) - \int_{x \in \partial\mathcal{V}} F_b(x, s) G_b[s, K_{\mu}(x)] d\partial\mathcal{V} = \bar{F}_e(\mu, s) + \bar{I}_0(\mu, s)$$

Definiendo:

$$(2.5.9) \quad \begin{cases} \bar{F}_b(x, s) = \int_{x \in \partial \mathcal{V}} F_b(x, s) G_b[s, K_\mu(x, s)] d\partial \mathcal{V} \\ \bar{G}(\mu, s) = \frac{1}{d_t(s) + \beta_\mu(s)} \end{cases}$$

Donde  $\bar{G}(\mu, s)$  es la función de transferencia multidimensional para la excitación, las condiciones iniciales, y las condiciones de frontera. Podemos escribir la ecuación anterior (2.5.8) en la siguiente forma:

$$(2.5.10) \quad \bar{Y}(\mu, s) = \bar{G}(\mu, s) [\bar{F}_e(\mu, s) + \bar{I}_0(\mu, s) + \bar{F}_b(x, s)]$$

En esta forma es sencillo interpretar  $\bar{G}(\mu, s)$  como una función de transferencia de los forzantes, las condiciones iniciales y las condiciones de contorno hacia el valor de  $\bar{Y}(\mu, s)$ .

### 2.5.1.3. Transformación del tiempo continuo al discreto.

Esta transformación nos permitirá tener como resultado la función de transferencia multidimensional en tiempo discreto, lo cual resulta de utilidad para los fines de síntesis de audio digital. Debe aplicarse una transformación que cambie la dependencia en la variable de frecuencia compleja ( $s$ ) por la variable de frecuencia compleja  $z$ . Existen varios métodos para realizar esta transformación, y la elección del método deberá hacerse teniendo en cuenta el problema particular, los métodos más usados son: transformación bilineal, transformación invariante al impulso, transformación invariante al paso, y la transformación invariante a la rampa. La transformación bilineal consiste, simplemente, en colocar una función de la variable  $z$  sustituyendo a la variable  $s$ , dicha función es:

$$s(z) = 2F_s \frac{z-1}{z+1}$$

Esta transformación es equivalente a, en una representación en variables de estado, sustituir los integradores continuos ( $\frac{1}{s}$ ) por integradores discretos usando la aproximación del trapecio, cuya transferencia es  $\frac{1}{2F_s} \frac{z+1}{z-1}$ . Esta transformación tiene las ventajas de realizarse de forma simple, y asegurar la estabilidad del sistema discreto (siempre que el sistema continuo lo sea). Sin embargo, sólo representa fielmente la señal continua a bajas frecuencias, presentando el fenómeno de alteración de frecuencias (frequency warping) para frecuencias más altas.

La transformación invariante al impulso es tal que, como el nombre lo indica, la respuesta al impulso del sistema en tiempo discreto resultante es igual al muestreo de la respuesta al impulso del sistema continuo original. Dicha transformación no tiene una expresión cerrada, sino que debe calcularse para cada transferencia. Para sistemas (llamados propios) en que la transferencia puede escribirse como una fracción de polinomios en  $s$  donde el denominador es de mayor o igual grado al numerador, la transformación puede hacerse descomponiendo la transferencia en una suma de términos de segundo orden, y cada término puede transformarse fácilmente. Esta transformación tiene la ventaja de preservar perfectamente todos los armónicos hasta la mitad de la frecuencia de muestreo, sin embargo, frecuencias mayores a esta pueden presentar aliasing. Si bien la estabilidad del sistema no está asegurada para el caso general, sí lo está para sistemas propios (y estables en tiempo continuo) [29].

Las transformaciones invariantes al paso y a la rampa son muy similares a la transformación invariante al impulso, presentando ventajas y desventajas similares.

La elección entre una de estas dependerá del tipo de señales de excitación, condiciones iniciales, y condiciones de frontera que se tengan en el problema. La excitación de algunos instrumentos musicales (los tambores en particular) es de corta duración, entregando mucha energía en poco tiempo, para luego dejar al instrumento oscilar libremente, en este caso, la transformación invariante al impulso es una elección adecuada.

Una vez efectuada una de estas transformaciones, se tendrá la función de transferencia multidimensional en su versión de tiempo discreto:  $\bar{G}(\mu, z)$ , además de las señales de entrada (excitación, condiciones iniciales, y condiciones de borde) muestreadas en tiempo discreto, obteniendo así la ecuación:

$$(2.5.11) \quad \bar{Y}(\mu, z) = \bar{G}(\mu, z) [\bar{F}_e(\mu, z) + \bar{I}_0(\mu, z) + \bar{F}_b(x, z)]$$

2.5.1.4. *Transformada de Sturm-Liouville inversa.* La transformación de Sturm-Liouville inversa es la definida en la ecuación 2.5.5, de donde se deduce que:

$$(2.5.12) \quad Y(x, z) = \sum_{\mu} K_{\mu}(x) \bar{G}(\mu, z) [\bar{F}_e(\mu, z) + \bar{I}_0(\mu, z) + \bar{F}_b(x, z)]$$

Aquí, cabe notar, que a los efectos de síntesis no se evaluará la función  $Y(x, z)$  en todos los puntos, sino sólo en algunos. Además, debe tenerse en cuenta que de los infinitos términos de la sumatoria, sólo una cantidad finita de ellos presentarán una frecuencia de resonancia por debajo de alguna frecuencia arbitraria (por ejemplo la mitad de la frecuencia de muestreo). Omitir los términos en los que las frecuencias de resonancia de la función de transferencia (ecuación 2.5.9) sea mayor que dicha cota, presenta un error pequeño. Si la frecuencia límite es elegida lo suficientemente alta, dicho error será inaudible en el audio sintetizado final.

2.5.1.5. *Transformada  $\mathcal{Z}$  inversa.* Para obtener una señal en tiempo discreto es preciso antitransformar la ecuación 2.5.12. Esto puede ser realizado analíticamente si se tienen expresiones cerradas para cada uno de los términos. Cuando esto no es así, pero es necesario separar las señales de excitación ( $\bar{F}_e(\mu, z)$  y  $\bar{F}_b(\mu, z)$ ) en una parte temporal y una parte espacial, o sea:

$$\begin{cases} \bar{F}_e(\mu, z) = \bar{F}_{e,x}(\mu) F_{e,t}(z) \\ \bar{F}_b(\mu, z) = \bar{F}_{b,x}(\mu) F_{b,t}(z) \end{cases}$$

o una suma de términos de esta forma. Debemos notar que las transformaciones espaciales operarán sólo sobre la función de  $\mu$  y las transformaciones temporales sólo sobre la función de  $z$ , por lo que esto es equivalente a que las funciones de excitación originales sean un producto de funciones de  $x$  y funciones de  $t$ , i.e.  $f_e(x, t) = f_{e,x}(x) f_{e,t}(t)$  y  $f_b(x, t) = f_{b,x}(x) f_{b,t}(t)$ . Entonces la ecuación 2.5.12 puede escribirse como (con condiciones iniciales nulas):

$$Y(x, z) = \sum_{\mu} K_{\mu}(x) [\bar{G}(\mu, z) \bar{F}_{e,x}(\mu) F_{e,t}(z) + \bar{G}(\mu, z) \bar{F}_{b,x}(\mu) F_{b,t}(z)]$$

Lo cual se reduce a:

$$Y(x, z) = \left[ \sum_{\mu} K_{\mu}(x) \bar{G}(\mu, z) \bar{F}_{e,x}(\mu) \right] F_{e,t}(z) + \left[ \sum_{\mu} K_{\mu}(x) \bar{G}(\mu, z) \bar{F}_{b,x}(\mu) \right] F_{b,t}(z)$$

Por lo que para cada punto donde quiera evaluarse la solución, pueden implementarse los filtros digitales correspondientes a las funciones de transferencia  $\sum_{\mu} K_{\mu}(x) \bar{G}(\mu, z) \bar{F}_{e,x}(\mu)$  y  $\sum_{\mu} K_{\mu}(x) \bar{G}(\mu, z) \bar{F}_{b,x}(\mu)$ , y aplicarlos respectivamente a las señales en tiempo discreto  $f_{e,t}[nT_s]$  y  $f_{b,t}[nT_s]$ .

### 2.5.2. Ejemplo de xilófono.

2.5.2.1. *Dedución.* Para ver cómo se aplica este método a un caso específico, lo aplicaremos a la vibración de un xilófono. Consideraremos una única barra unidimensional rígida, y modelaremos el agarre de la barra de forma distribuida. Hechas estas aproximaciones puede escribirse la ecuación de la forma[18]:

$$(2.5.13) \quad \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = -a^2 \left[ \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \eta \frac{\partial^5 w(x, t)}{\partial t \partial x^4} \right] - \gamma_B \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} - \frac{\chi}{M_B} w(x, t) + f(x, t)$$

Con:

$$a^2 = \frac{EI}{\rho S}$$

$w(x, t)$  el desplazamiento vertical,  $E$  el módulo de Young,  $I$  el momento a lo largo del eje  $x$ ,  $S$  la sección transversal,  $\rho$  la densidad volumétrica,  $\eta$  la constante viscoelástica,  $\gamma_B$  el coeficiente de amortiguamiento,  $\chi$  el coeficiente de fuerza restaurativa (modelo distribuido del soporte de la barra),  $M_B$  la masa total y  $f(x, t)$  la fuerza por unidad de distancia aplicada a la barra externamente dividida entre  $\rho S$ . Además, las condiciones de contorno, que son fuerza nula y torque nulo en los extremos de la barra pueden escribirse como:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} = 0 \end{array} \right\} x \in \{0, L\}$$

Siguiendo lo visto anteriormente, comenzaremos aplicando la transformada de Laplace a la ecuación 2.5.13:

$$(2.5.14) \quad s^2 W(x, s) = -a^2 \left[ \frac{\partial^4 W(x, s)}{\partial x^4} + \eta s \frac{\partial^4 W(x, s)}{\partial x^4} \right] - s \gamma_B W(x, s) - \frac{\chi}{M_B} W(x, s) + F(x, s)$$

$$\left( s^2 + s \gamma_B + \frac{\chi}{M_B} + a^2 (1 + \eta s) \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) W(x, s) = F(x, s)$$

Luego debemos aplicar la transformada de Sturm-Liouville, para ello debemos encontrar primero las funciones  $K_{\mu}(x, s)$  tales que:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 (1 + \eta s) \frac{\partial^4 K_{\mu}(x, s)}{\partial x^4} = \beta_{\mu}(s) K_{\mu}(x, s) \\ \frac{\partial^2 K_{\mu}(x, s)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 K_{\mu}(x, s)}{\partial x^3} = 0 \end{array} \right.$$

O equivalentemente:

$$(2.5.15) \quad \frac{\partial^4 K_{\mu}(x, s)}{\partial x^4} = \alpha_{\mu}(s)^4 K_{\mu}(x, s)$$

con

$$\alpha_{\mu}(s)^4 = \frac{\beta_{\mu}(s)}{a^2 (1 + \eta s)}$$

La solución general de la ecuación 2.5.15 es[30]:

$$K_\mu(x, s) = A \sin(\alpha_\mu(s)x) + B \cos(\alpha_\mu(s)x) + C \sinh(\alpha_\mu(s)x) + D \cosh(\alpha_\mu(s)x)$$

Imponiendo condiciones de frontera:

$$\left\{ \begin{array}{l} -B\alpha_\mu(s)^2 + D\alpha_\mu(s)^2 = 0 \\ -A\alpha_\mu(s)^3 + C\alpha_\mu(s)^3 = 0 \\ -A\alpha_\mu(s)^2 \sin(\alpha_\mu(s)L) - B\alpha_\mu(s)^2 \cos(\alpha_\mu(s)L) + C\alpha_\mu(s)^2 \sinh(\alpha_\mu(s)L) + \\ \quad + D\alpha_\mu(s)^2 \cosh(\alpha_\mu(s)L) = 0 \\ -A\alpha_\mu(s)^3 \cos(\alpha_\mu(s)L) + B\alpha_\mu(s)^3 \sin(\alpha_\mu(s)L) + C\alpha_\mu(s)^3 \cosh(\alpha_\mu(s)L) + \\ \quad + D\alpha_\mu(s)^3 \sinh(\alpha_\mu(s)L) = 0 \end{array} \right.$$

O, equivalentemente (notando que  $D = B$  y  $C = A$ ):

$$\begin{pmatrix} \sinh(\alpha_\mu(s)L) - \sin(\alpha_\mu(s)L) & \cosh(\alpha_\mu(s)L) - \cos(\alpha_\mu(s)L) \\ \cosh(\alpha_\mu(s)L) - \cos(\alpha_\mu(s)L) & \sin(\alpha_\mu(s)L) + \sinh(\alpha_\mu(s)L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual sólo tiene solución no trivial si:

$$\begin{vmatrix} \sinh(\alpha_\mu(s)L) - \sin(\alpha_\mu(s)L) & \cosh(\alpha_\mu(s)L) - \cos(\alpha_\mu(s)L) \\ \cosh(\alpha_\mu(s)L) - \cos(\alpha_\mu(s)L) & \sin(\alpha_\mu(s)L) + \sinh(\alpha_\mu(s)L) \end{vmatrix} = 0$$

Lo que reduce a:

$$\cosh(\alpha_\mu(s)L) \cos(\alpha_\mu(s)L) = 1$$

Las soluciones de esta ecuación no tienen forma cerrada, se puede reescribir como  $\cos(\alpha_\mu(s)L) = \frac{1}{\cosh(\alpha_\mu(s)L)}$  de modo que puede verse (figura 2.5.1) que las soluciones son un conjunto numerable, que tiende a las soluciones de  $\cos(\alpha_\mu(s)L) = 0$  para valores grandes de  $\alpha_\mu(s)$ . Además, estas soluciones no dependen de la variable  $s$  por lo que podemos llamarlas simplemente  $\alpha_\mu$  y nombrarlas según el orden en el que aparecen, empezando por  $\alpha_0 = 0$  y así.

Volviendo a la solución para  $K_\mu(x)$  se puede escribir:

$$K_\mu(x) = A \left[ \sin(\alpha_\mu x) + \sinh(\alpha_\mu x) + \frac{B}{A} (\cos(\alpha_\mu x) + \cosh(\alpha_\mu x)) \right]$$

con:

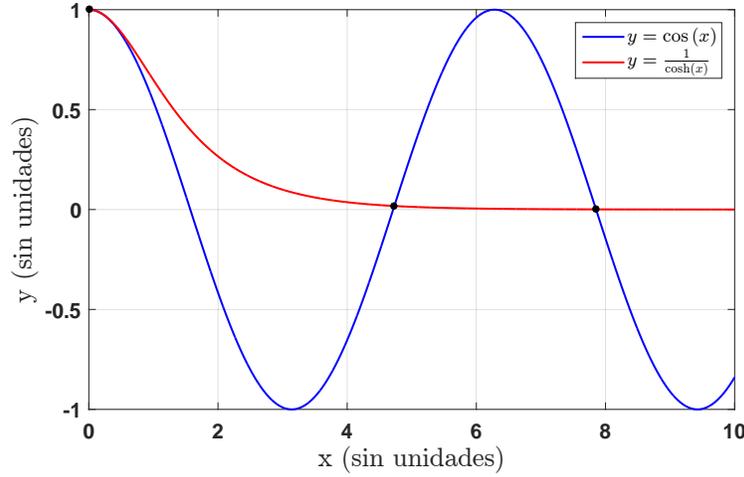
$$\frac{B}{A} = -\frac{\sinh(\alpha_\mu L) - \sin(\alpha_\mu L)}{\cosh(\alpha_\mu L) - \cos(\alpha_\mu L)} = \frac{\cos(\alpha_\mu L) - \cosh(\alpha_\mu L)}{\sin(\alpha_\mu L) + \sinh(\alpha_\mu L)}$$

Según convenga.

Normalizando:

$$\int_0^L K_\mu^*(x) K_\mu(x) dx = 1$$

$$A^2 \int_0^L \left| \sin(\alpha_\mu x) + \sinh(\alpha_\mu x) + \frac{B}{A} (\cos(\alpha_\mu x) + \cosh(\alpha_\mu x)) \right|^2 dx = 1$$

FIGURA 2.5.1. Gráficas de  $\cos(x)$  y  $\frac{1}{\cosh(x)}$ .

Con lo que se llega a:

$$A^2 = \frac{(\sin(\alpha_\mu L) + \sinh(\alpha_\mu L))}{(\sinh(\alpha_\mu L) - \sin(\alpha_\mu L)) L}$$

y por tanto

$$K_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left[ \frac{A}{B} (\sin(\alpha_\mu x) + \sinh(\alpha_\mu x)) + \cos(\alpha_\mu x) + \cosh(\alpha_\mu x) \right]$$

y:

$$\beta_\mu(s) = a^2(1 + \eta s)\alpha_\mu^4$$

De modo que queda definida la transformada de Sturm-Liouville para este problema particular. Transformando entonces la ecuación 2.5.14 llegamos a:

$$\left( s^2 + s\gamma_B + \frac{\chi}{M_B} + \beta_\mu(s) \right) \bar{W}(\mu, s) = \bar{F}(\mu, s)$$

De modo que:

$$(2.5.16) \quad \bar{G}(\mu, s) = \frac{\bar{W}(\mu, s)}{\bar{F}(\mu, s)} = \frac{1}{s^2 + s(\gamma_B + \eta\alpha_\mu^4) + \frac{\chi}{M_B} + a^2\alpha_\mu^4}$$

o, definiendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\mu = -\frac{\gamma_B + \eta\alpha_\mu^4}{2} \\ \omega_\mu^2 = a^2\alpha_\mu^4 + \frac{\chi}{M_B} - \frac{(\gamma_B + \eta\alpha_\mu^4)^2}{4} \end{array} \right.$$

la ecuación 2.5.16 puede escribirse de la siguiente manera:

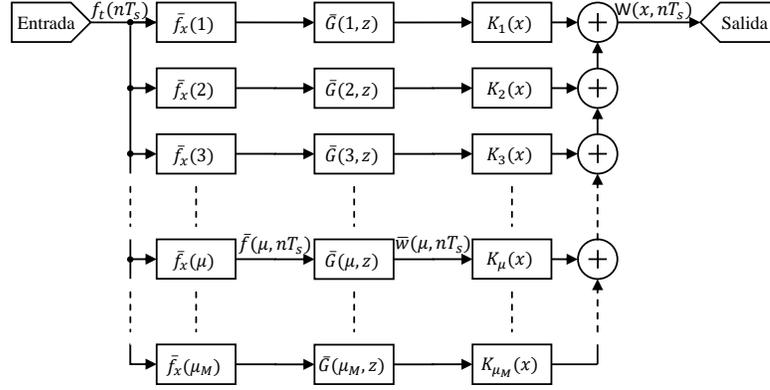


FIGURA 2.5.2. Esquema de la implementación del algoritmo de síntesis por FTM.

$$\bar{G}(\mu, s) = \frac{1}{(s - \sigma_\mu - j\omega_\mu)(s - \sigma_\mu + j\omega_\mu)}$$

Aplicando la transformación invariante al impulso, podemos escribir:

$$\bar{G}(\mu, z) = \frac{e^{\frac{\sigma_\mu}{F_s}} \sin\left(\frac{\omega_\mu}{F_s}\right)}{F_s \omega_\mu} \frac{z}{z^2 - 2e^{\frac{\sigma_\mu}{F_s}} \cos\left(\frac{\omega_\mu}{F_s}\right) z + e^{2\frac{\sigma_\mu}{F_s}}}$$

Ahora bien, si suponemos que la fuerza ejercida sobre la barra puede escribirse como  $f(x, t) = f_x(x) f_t(t)$ , entonces, aplicando la transformada inversa de Sturm-Liouville, podemos escribir la transferencia discreta:

$$\frac{W(x, z)}{F_t(z)} = \mathcal{T}^{-1} \left[ \frac{e^{\frac{\sigma_\mu}{F_s}} \sin\left(\frac{\omega_\mu}{F_s}\right)}{F_s \omega_\mu} \frac{z}{z^2 - 2e^{\frac{\sigma_\mu}{F_s}} \cos\left(\frac{\omega_\mu}{F_s}\right) z + e^{2\frac{\sigma_\mu}{F_s}}} \bar{f}_x(\mu) \right] (x, z)$$

Donde operando se puede llegar a:

$$\frac{W(x, z)}{F_t(z)} = \sum_{\mu} K_\mu(x) \frac{e^{\frac{\sigma_\mu}{F_s}} \sin\left(\frac{\omega_\mu}{F_s}\right)}{F_s \omega_\mu} \frac{z}{z^2 - 2e^{\frac{\sigma_\mu}{F_s}} \cos\left(\frac{\omega_\mu}{F_s}\right) z + e^{2\frac{\sigma_\mu}{F_s}}} \bar{f}_x(\mu)$$

**2.5.2.2. Implementación computacional.** Implementar un modelo entrada-salida una vez que se fijan la función espacial de excitación y el punto (o los puntos) de salida, implica implementar los filtros correspondientes a  $\bar{G}(\mu, z)$  y calcular los coeficientes constantes  $\bar{f}_x(\mu)$  y  $K_\mu(x)$ . Para ello debe elegirse un valor máximo  $\mu_M$  del índice  $\mu$ , por ejemplo de forma que  $\omega_{\mu_M} < \pi F_s$  y  $\omega_{1+\mu_M} \geq \pi F_s$ . Una vez hecho eso, deben disponerse como se muestra en el esquemático en la figura 2.5.2. Sólo restando generar la señal de entrada para sintetizar el audio (o usar una medida real de esta).

**2.5.3. Ejemplo cuerda no lineal.** Si bien el método es útil para problemas lineales, se lo puede modificar para implementar modelos no lineales. Vamos a implementar un modelo para sintetizar la no linealidad por modulación de tensión en una cuerda de guitarra que se propone en [31]. Dicho modelo se ha implementado usando líneas de retardo digitales [32]. Sin embargo, la implementación usando el método de la transformación funcional es novedosa en este trabajo.

*2.5.3.1. Deducción del modelo lineal.* La deducción del modelo lineal es análoga al ejemplo del xilófono y puede encontrarse completa en [33]. La ecuación en derivadas parciales que rige su movimiento es:

$$(2.5.17) \quad \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + d_1 \frac{\partial y}{\partial t} + d_3 \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} = f^{(ext)}(x, t)$$

Donde  $\rho$  es la densidad volumétrica de la cuerda,  $S$  la sección transversal,  $E$  el módulo de Young,  $I$  el momento a lo largo del eje  $x$ ,  $d_1$  y  $d_3$  son coeficientes de disipación. La cuerda está sujeta a las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y(0, t) = y(L, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L, t) = 0 \end{cases}$$

La base para la transformación de Sturm-Liouville es:

$$K_\mu^{(c)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\mu\pi x}{L}\right)$$

Y la función de transferencia multidimensional puede ser escrita como:

$$\bar{G}(\mu, s) = \frac{(\rho S)^{-1}}{(s - \sigma_\mu - j\omega_\mu)(s - \sigma_\mu + j\omega_\mu)}$$

Con:

$$\begin{cases} \sigma_\mu = -\frac{1}{2\rho S} \left[ d_3 \left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 - d_1 \right] \\ \omega_\mu^2 = \left[ \frac{EI}{\rho S} - \frac{d_3^2}{(2\rho S)^2} \right] \left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^4 + \left[ \frac{T}{\rho S} + \frac{d_1 d_3}{2(\rho S)^2} \right] \left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{d_1}{2\rho S}\right)^2 \end{cases}$$

*2.5.3.2. Deducción del modelo no lineal.* En el modelo no lineal, suponemos que la ecuación 2.5.17 es válida, pero consideraremos que la tensión varía linealmente con el largo total instantáneo de la cuerda, de la forma:

$$(2.5.18) \quad T = T_0 + T_{NL} = T_0 + \gamma \frac{L_v - L}{L}$$

Donde  $L$  es el largo de la cuerda en reposo,  $L_v$  es el largo instantáneo de la cuerda y  $\gamma = ES$  es el coeficiente de variación de tensión con el largo de la cuerda [32]. Para calcular  $L_v$  podemos ver que en un segmento entre  $x$  y  $x + dx$ , la cuerda tiene un largo de  $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x, t)\right)^2}$ , por lo que el largo total se puede escribir simplemente como:

$$L_v(t) = \int_{x=0}^L dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x, t)\right)^2}$$

Lo que a segundo orden puede escribirse como:

$$L_v(t) = \int_{x=0}^L dx \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} y(x, t) \right)^2 \right) = L + \frac{1}{2} \int_{x=0}^L dx \left( \frac{\partial}{\partial x} y(x, t) \right)^2$$

Si lo escribimos en función de  $\bar{y}_\mu(t)$  (la transformada de S-L de  $y(x, t)$ ):

$$\frac{L_v(t) - L}{L} = \frac{1}{2L} \int_{x=0}^L dx \left( \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\mu} K_{\mu}^{(c)}(x) \bar{y}_{\mu}(t) \right)^2$$

Donde operando puede escribirse:

$$\frac{L_v(t) - L}{L} = \frac{\pi^2}{2L^3} \sum_{\mu} \bar{y}_{\mu}(t)^2 \mu^2$$

Entonces:

$$T_{NL}(t) = ES \frac{\pi^2}{2L^3} \sum_{\mu} \bar{y}_{\mu}(t)^2 \mu^2$$

O definiendo  $Q_{\mu} = ES \frac{\pi^2 \mu^2}{2L^3}$  se puede escribir:

$$T_{NL}(t) = \sum_{\mu} Q_{\mu} \bar{y}_{\mu}(t)^2$$

Si sustituimos la ecuación 2.5.18 en la ecuación 2.5.17 se llega a:

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + d_1 \frac{\partial y}{\partial t} + d_3 \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} = f^{(ext)}(x, t) + T_{NL} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Y por tanto el término  $T_{NL} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  se aplica igual que la fuerza, por lo que podemos definir una fuerza no lineal efectiva:

$$f^{(NL)}(x, t) = T_{NL}(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t)$$

Tomando la transformada de Sturm-Liouville:

$$\bar{f}_{\mu}^{(NL)}(t) = -T_{NL}(t) \left( \frac{\mu\pi}{L} \right)^2 \bar{y}_{\mu}(t)$$

Definiendo  $R_{\mu} = -\left( \frac{\mu\pi}{L} \right)^2$ :

$$\bar{f}_{\mu}^{(NL)}(t) = T_{NL}(t) R_{\mu} \bar{y}_{\mu}(t)$$

**2.5.3.3. Implementación computacional.** La implementación computacional se basa en la implementación básica (figura 2.5.2) agregando el cálculo de la tensión no lineal, y sumando la fuerza  $\bar{f}_{\mu}^{(NL)}$  en cada oscilador, el esquema completo es el mostrado en la figura 2.5.3, donde debido a que la transferencia  $\bar{G}(\mu, z)$  es estrictamente propia<sup>4</sup>, el lazo de realimentación es implementable. Se implementó para una cuerda de guitarra metálica, la segunda cuerda (si), cuyos parámetros son

<sup>4</sup>En un filtro digital con transferencia estrictamente propia, o sea que el grado del denominador es mayor al del numerador, la salida en un instante de tiempo dado sólo depende de las entradas al filtro en instantes anteriores (y no en del actual).

Magnitud	Símbolo	Valor	Unidades
Densidad	$\rho$	1140	$\text{Kg m}^{-3}$
Módulo de Young	$E$	$5,4 \cdot 10^9$	Pa
Largo	$L$	0,65	m
Sección transversal	$S$	$0,5188 \cdot 10^{-6}$	$\text{m}^2$
Momento a lo largo del eje $x$	$I$	$0,171 \cdot 10^{-12}$	$\text{m}^4$
Tensión	$T$	60,97	N
Coefficiente de disipación independiente de la frecuencia	$d_1$	$8 \cdot 10^{-5}$	$\text{Kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$
Coefficiente de disipación dependiente de la frecuencia	$d_3$	$-1,4 \cdot 10^{-5}$	$\text{Kg m s}^{-1}$

CUADRO 1. Tabla de valores numéricos de los parámetros físicos usados para la síntesis de la cuerda no lineal [33].

los mostrados en el cuadro 1. Se excitó de modo que las oscilaciones de la cuerda tengan una amplitud pico a pico del orden de  $\sim 2\text{cm}$ . Se muestra en la figura 2.5.4 la evolución de la tensión no lineal de la cuerda, a partir de la cual puede deducirse que el efecto es notorio al principio, y que luego de que la amplitud de la oscilación decae un poco, los efectos de la modulación de tensión se hacen despreciables. La gráfica de tensión no lineal muestra un comportamiento oscilatorio con picos pronunciados al principio de la señal, esto se debe a las variaciones que sufre el largo instantáneo de la cuerda.

Un espectrograma aplicado a la señal  $y(x = 0,1755\text{m}, t)$  puede verse en la figura 2.5.5, donde se observan las variaciones de frecuencia en los armónicos más altos debido a la variación en la tensión (detalle en la figura 2.5.6). Debe notarse que si bien existe una no linealidad, no aparecen nuevos armónicos intensos (como podría esperarse con otro tipo de no linealidades), sino que se modifican las frecuencias de los armónicos del caso lineal, esto se debe principalmente a que la no linealidad es leve, lo cual avala haberla implementado sólo a segundo orden. Por último, en la figura 2.5.7, se comparan las señales producidas por el modelo no lineal, y por el modelo lineal, en esta figura puede apreciarse como la señal correspondiente al modelo no lineal se adelanta levemente respecto a la del modelo lineal (debido al aumento en la frecuencia de los armónicos), además la primera es levemente más pequeña debido a la mayor oposición que impone la cuerda al considerar la variación de tensión. Ambas señales aparentan crecer en amplitud en las primeras oscilaciones debido a que la relación de dispersión (inarmónica) para la cuerda con rigidez indica que las frecuencias más altas tienen mayor velocidad de propagación.

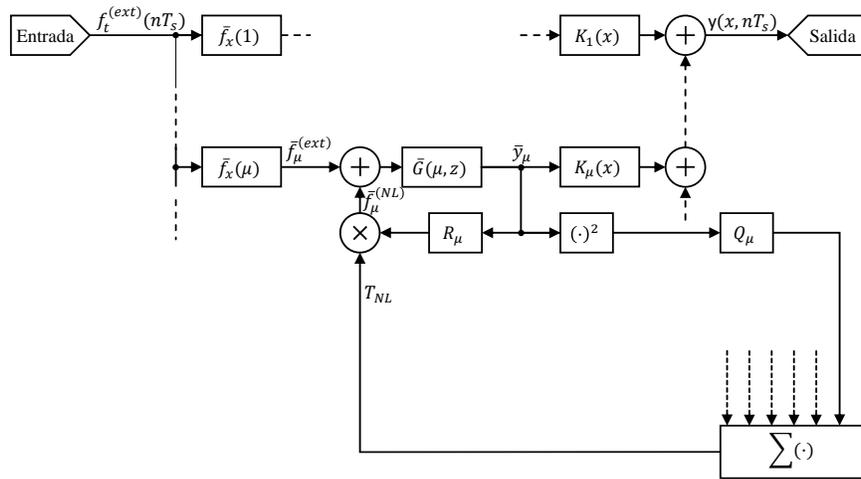


FIGURA 2.5.3. Esquema de la implementación de la no linealidad por modulación de tensión usando FTM.

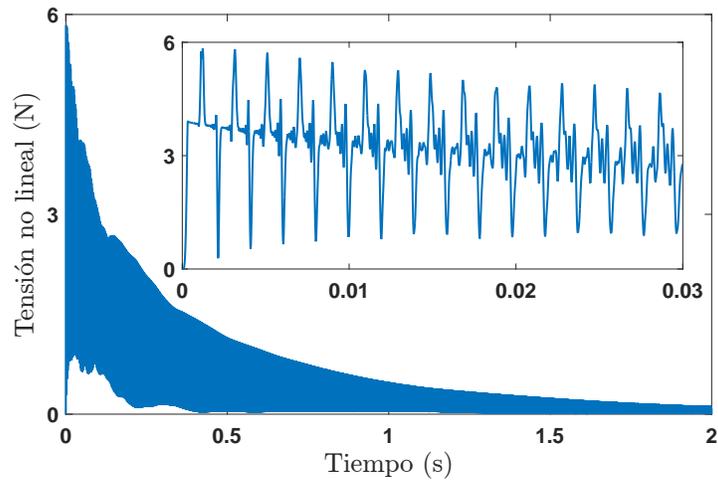


FIGURA 2.5.4. Gráfico de  $T_{NL}(t)$  con detalle del ataque inicial.

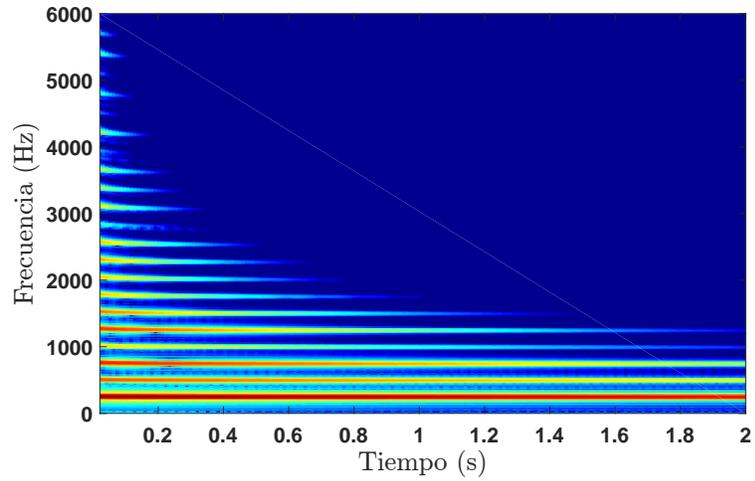


FIGURA 2.5.5. Espectrograma de la señal  $y(x = 0, 1755\text{m}, t)$ .  
 $F_s = 96\text{kHz}$ ,  $N_{win} = 4096$ ,  $N_{ol} = 3072$ .

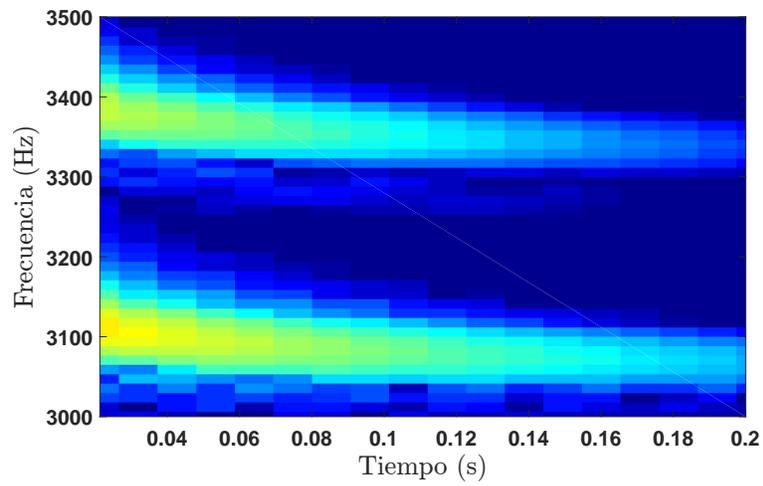


FIGURA 2.5.6. Detalle del espectrograma de la señal  $y(x = 0, 1755\text{m}, t)$ .

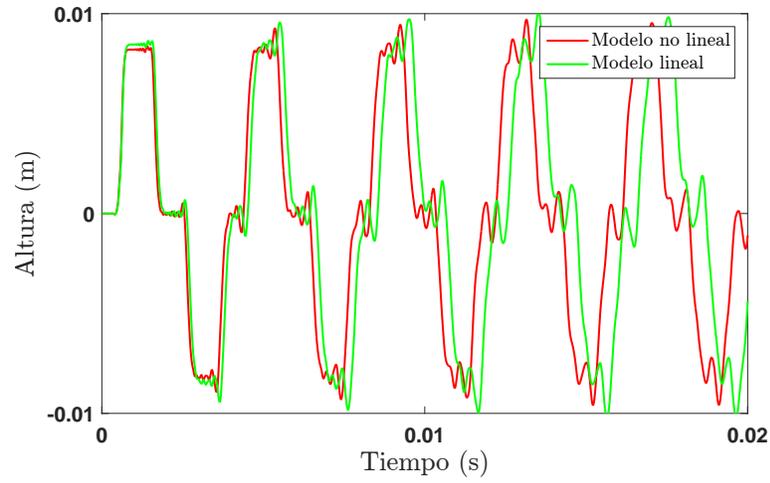


FIGURA 2.5.7. Comparación de las señales  $y(x = 0, 1755\text{m}, t)$  sintetizadas con el modelo no lineal (rojo) y lineal (verde).

## Tambores del candombe uruguayo

### 3.1. Introducción

Los tambores usados en el candombe uruguayo se dividen en tres tipos, chico repique y piano (de más chico a más grande). Si bien tienen sonidos bien diferentes entre ellos, y su rol en la cuerda de tambores es diferente, su diseño y construcción tienen grandes semejanzas, es por eso que el desarrollo del modelo se hará de idéntica manera para los tres, cambiando simplemente algunos parámetros que distinguen a los distintos tipos de tambor.

En la cuerda de tambores, el chico y el piano mantienen una base rítmica prácticamente inalterada a lo largo de la interpretación, mientras que el repique es el tambor que impone mayor expresividad en la cuerda debido a la gran variabilidad que suelen tener sus figuras rítmicas.

En lo que resta de este capítulo describiremos físicamente los tambores del candombe y sus principales formas de tocarlos, y luego desarrollaremos un modelo útil para la síntesis de audio.

### 3.2. Descripción física

Todos los tambores están contruidos de forma similar. Constan básicamente de un conjunto de duelas (tablas de madera con forma curva) en forma parecida a un cilindro que es más ancho en el centro que en las bocas, y una lonja de cuero se estira sobre la boca superior (figura 3.2.1). Además consta de otras piezas indispensables para mantener su estructura, su afinación, y poder sostenerlo para tocarlo. En el caso del dibujo, la lonja se sostiene con tachuelas y el tambor debe ser afinado al fuego antes de cada uso. Hoy en día es muy común ver en los tambores sistemas de afinación por medio de tensores.

Al tocarlo el intérprete utiliza un palo en su mano derecha (si fuere diestro), y utiliza su mano izquierda para golpear directamente sobre la lonja. Existen varios tipos de golpes que pueden utilizarse a la hora de tocar el tambor, los principales son:

- Palo, este sonido se produce con un golpe seco (sin rebotes) del palo sobre lonja a mitad de camino entre el centro y el borde.
- Mano, este sonido se produce golpeando la mano sobre el borde del tambor, dejando que los dedos reboten sobre la lonja y retirándolos rápidamente para dejar vibrar la lonja libremente.
- Masa, este sonido se produce golpeando con la mano entera sobre el centro de la lonja, y se mantiene en contacto con esta.
- Madera, este sonido se produce golpeando el palo sobre el costado del tambor y, generalmente, apoyando la mano sobre la lonja sin dejar que esta vibre.

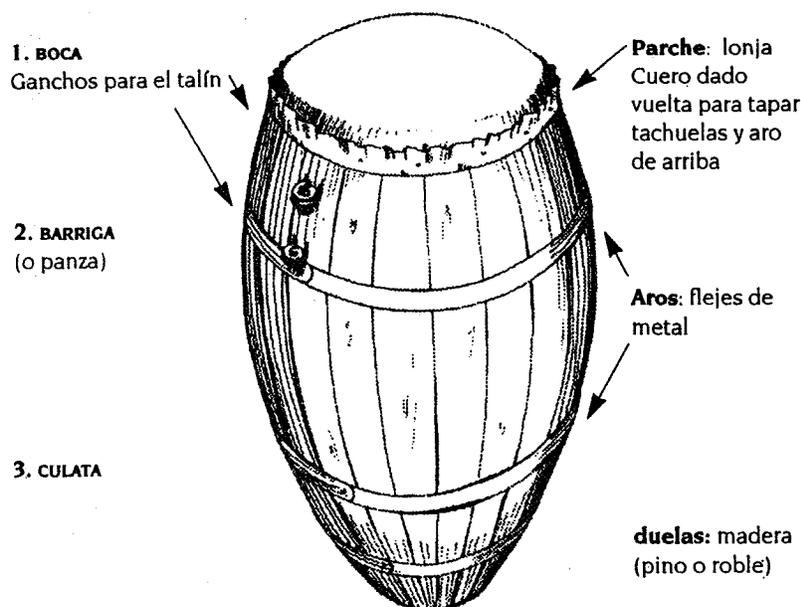


FIGURA 3.2.1. Dibujo del exterior de un tambor [15].

Existen muchas variantes de estos golpes, siendo probablemente la “galleta” (variante del golpe de mano) la más importante, que se usa en la figura básica al tocar el chico. Esta variante consiste, básicamente, en bajar la mano levemente inclinada de modo que los dedos no golpeen simultáneamente la lonja, perceptivamente se escucha un sólo golpe con un chasquido.

Debe notarse que a excepción de los sonidos que incluyen la madera, el sonido se produce y se irradia en la membrana, y es por esto que centraremos en ella nuestro estudio.

### 3.3. Modelo

Separaremos el modelado del tambor en el modelado del tambor en sí (membrana y cavidad de aire), y el modelado de la interacción con el palo. Escapa al alcance de esta tesis el modelado de la interacción distribuida entre la membrana y la mano, así como el modelado de la vibración de la madera en el golpe de madera. Sin embargo, este último sonido va a ser sintetizado utilizando un método de análisis-síntesis.

Comenzaremos por trabajar con un modelo lineal de la membrana teniendo en cuenta la rigidez debida al grosor, luego incorporaremos el modelado de la modulación de tensión, similar a lo hecho con la cuerda no lineal en la sección 2.5.3. Después estudiaremos un modelo simplificado de la cavidad de aire y su interacción con la membrana, y terminaremos presentando un modelo de interacción entre la membrana y el palo usado para golpearla.

**3.3.1. Modelo lineal de la membrana.** La altura de la membrana  $y(r, \varphi, t)$  puede modelarse por la siguiente ecuación[34]:

$$(3.3.1) \quad \begin{aligned} D\nabla^4 y(r, \varphi, t) + \sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(r, \varphi, t) - T\nabla^2 y(r, \varphi, t) + d_1 \frac{\partial}{\partial t} y(r, \varphi, t) + d_3 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 y(r, \varphi, t) = \\ = f^{(ext)}(r, \varphi, t) \end{aligned}$$

Con  $\sigma$  la densidad superficial de masa,  $T$  la tensión superficial en la membrana,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  la constante de rigidez,  $E$  el módulo de Young,  $h$  el grosor de la membrana,  $\nu$  el coeficiente de Poisson,  $d_1$  y  $d_3$  los coeficientes de disipación (independiente de la frecuencia y dependiente de la frecuencia respectivamente). A su vez  $\nabla^2$  corresponde al operador Laplaciano definido como la divergencia del gradiente, en coordenadas cilíndricas puede escribirse como  $\nabla^2(\cdot) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \cdot}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , u omitiendo el término con derivadas en  $z$  para coordenadas polares. El operador biarmónico,  $\nabla^4(\cdot) = \nabla^2[\nabla^2(\cdot)]$ , es simplemente aplicar dos veces el operador Laplaciano.

Sometida a las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y(r = R, \varphi, t) = 0 \\ \nabla^2 y(r = R, \varphi, t) = 0 \end{cases}$$

Además, vamos a suponer condiciones iniciales nulas, de modo que:

$$\begin{cases} y(r, \varphi, t = 0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} y(r, \varphi, t = 0) = 0 \end{cases}$$

Para el modelo lineal, vamos a suponer todos los parámetros como constantes, de modo que podemos aplicar el método de la transformación funcional. Para ello, aplicaremos los pasos solamente hasta la transformación de Sturm-Liouville, debido a que el modelo será modificado en las próximas subsecciones. Comenzaremos por aplicar Laplace a la ecuación 3.3.1:

$$(3.3.2) \quad D\nabla^4 Y(r, \varphi, s) + (d_3 s - T) \nabla^2 Y(r, \varphi, s) + (\sigma s^2 + d_1 s) Y(r, \varphi, s) = F^{(ext)}(r, \varphi, s)$$

Para poder aplicar la transformada de Sturm-Liouville, precisamos resolver el problema:

$$(3.3.3) \quad \begin{cases} [D\nabla^4 + (d_3 s - T) \nabla^2 + \sigma s^2 + d_1 s] K_{n,m}(r, \varphi) = \beta_{n,m}(s) K_{n,m}(r, \varphi) \\ K_{n,m}(r = R, \varphi) = 0 \\ \nabla^2 K_{n,m}(r = R, \varphi) = 0 \end{cases}$$

Para resolver el problema, vamos a resolver primero un problema auxiliar, y demostraremos que las funciones  $K_{n,m}$  son las mismas para ambos problemas. El problema auxiliar es:

$$(3.3.4) \quad \begin{cases} \nabla^2 K_{n,m}(r, \varphi) = \alpha_{n,m} K_{n,m}(r, \varphi) \\ K_{n,m}(r = R, \varphi) = 0 \end{cases}$$

Tales funciones cumplen, por definición, la primera condición de borde del problema original (ecuación 3.3.3). Además, dado que son autofunciones del operador Laplaciano, podemos ver que:

$$\nabla^2 K_{n,m}(r=R, \varphi) = \alpha_{n,m} K_{n,m}(r=R, \varphi) = 0$$

Por lo que también cumplen la segunda condición de borde. Y sustituyendo en la ecuación en derivadas parciales:

$$\left[ D(\alpha_{n,m})^2 + (d_3 s - T) \alpha_{n,m} + \sigma s^2 + d_1 s \right] K_{n,m}(r, \varphi) = \beta_{n,m}(s) K_{n,m}(r, \varphi)$$

Por lo que las soluciones al problema en la ecuación 3.3.4 son soluciones<sup>1</sup> al problema en la ecuación 3.3.3 con  $\beta_{n,m}(s) = D(\alpha_{n,m})^2 + (d_3 s - T) \alpha_{n,m} + \sigma s^2 + d_1 s$ .

Resolvamos, entonces, el problema de la ecuación 3.3.4, para ello, vamos a separarlo en un problema radial y un problema angular ( $K_{n,m}(r, \varphi) = \varrho_{n,m}(r) \Phi_n(\varphi)$ ), debido a la simetría de las condiciones de borde. El operador Laplaciano en coordenadas polares puede escribirse como:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Por lo que la ecuación 3.3.4 queda escrita como:

$$(3.3.5) \quad \begin{cases} \frac{\Phi_n(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varrho_{n,m}(r)}{\partial r} \right) + \frac{\varrho_{n,m}(r)}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_n(\varphi)}{\partial \varphi^2} = \alpha_{n,m} \varrho_{n,m}(r) \Phi_n(\varphi) \\ \varrho_{n,m}(r=R) = 0 \end{cases}$$

Y debe agregarse la condición:

$$(3.3.6) \quad \Phi_n(\varphi + 2\pi) = \Phi_n(\varphi)$$

para que la función  $\Phi_n$  esté bien definida. Multiplicando la ecuación en derivadas parciales anterior por  $\frac{r^2}{\varrho_{n,m}(r) \Phi_n(\varphi)}$  podemos llegar a<sup>2</sup>:

$$\frac{\Phi_n''(\varphi)}{\Phi_n(\varphi)} = \alpha_{n,m} r^2 - \frac{r}{\varrho_{n,m}(r)} \frac{\partial}{\partial r} (r \varrho'_{n,m}(r))$$

Donde un lado de la igualdad depende únicamente de la variable angular, y el otro, únicamente de la variable radial, por lo que ambos deben ser constantes (llamemos a dicha constante  $C_n$ ). Entonces:

$$\Phi_n''(\varphi) = C_n \Phi_n(\varphi)$$

Lo cual tiene una solución general de:

$$\Phi_n(\varphi) = A \cos(\phi \sqrt{-C_n}) + B \sin(\phi \sqrt{-C_n})$$

Imponiendo la ecuación 3.3.6 deducimos que  $\sqrt{-C_n} \in \mathbb{Z}$  por lo que fijamos  $C_n = -n^2$  y debido a que las funciones seno y coseno son linealmente independientes podemos definir:

<sup>1</sup>Debe tenerse en cuenta que las autofunciones que resuelven el problema auxiliar forman una base del espacio de funciones. Y cualquier base en la que cada elemento cumpla con las condiciones de borde y sea autofunción del operador espacial, es una solución al problema original.

<sup>2</sup>Donde la notación  $\Phi_n''(\varphi)$  significa  $\frac{\partial^2 \Phi_n(\varphi)}{\partial \varphi^2}$ , y análogamente para las demás funciones de una única variable.

$$(3.3.7) \quad \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \frac{\cos(n\varphi)}{\sqrt{\pi}} & \text{si } n > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{si } n = 0 \\ \frac{\sin(n\varphi)}{\sqrt{\pi}} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Donde las constantes fueron elegidas de modo que:

$$\int_0^{2\pi} \Phi_n^*(\varphi) \Phi_{n'}(\varphi) d\varphi = \delta_{n,n'}$$

Volviendo al problema radial, se llega a:

$$\begin{aligned} -n^2 &= \alpha_{n,m} r^2 - \frac{r}{\varrho_{n,m}(r)} \frac{\partial}{\partial r} (r \varrho'_{n,m}(r)) \\ \frac{r}{\varrho_{n,m}(r)} \frac{\partial}{\partial r} (r \varrho'_{n,m}(r)) - \alpha_{n,m} r^2 - n^2 &= 0 \\ r \frac{\partial}{\partial r} (r \varrho'_{n,m}(r)) + (-\alpha_{n,m} r^2 - n^2) \varrho_{n,m}(r) &= 0 \\ r \frac{\partial \varrho_{n,m}(r)}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \varrho_{n,m}(r)}{\partial r^2} + (-\alpha_{n,m} r^2 - n^2) \varrho_{n,m}(r) &= 0 \end{aligned}$$

Definiendo la variable auxiliar  $w = \sqrt{-\alpha_{n,m}} r$  y notando que entonces  $\frac{\partial}{\partial r} = \sqrt{-\alpha_{n,m}} \frac{\partial}{\partial w}$ , podemos escribir:

$$w \frac{\partial \varrho_{n,m}\left(\frac{w}{\alpha_{n,m}}\right)}{\partial w} + w^2 \frac{\partial^2 \varrho_{n,m}\left(\frac{w}{\alpha_{n,m}}\right)}{\partial w^2} + (w^2 - n^2) \varrho_{n,m}\left(\frac{w}{\alpha_{n,m}}\right) = 0$$

Definiendo la función  $W_{n,m}(w) = \varrho_{n,m}\left(\frac{w}{\alpha_{n,m}}\right)$ :

$$w W'_{n,m}(w) + w^2 W''_{n,m}(w) + (w^2 - n^2) W_{n,m}(w) = 0$$

Que es, exactamente, la ecuación de Bessel, por lo que sus soluciones, imponiendo que esté definida para  $r = 0$  son las funciones de Bessel de primera especie:

$$W_{n,m}(w) = J_n(w)$$

Deshaciendo los cambios de variable:

$$\varrho_{n,m}(r) = J_n(r\sqrt{-\alpha_{n,m}})$$

Imponiendo la condición de borde  $\varrho_{n,m}(r = R) = 0$ :

$$J_n(R\sqrt{-\alpha_{n,m}}) = 0 \Rightarrow R\sqrt{-\alpha_{n,m}} = \mu_{n,m} \Rightarrow \alpha_{n,m} = -\left(\frac{\mu_{n,m}}{R}\right)^2$$

Siendo  $\mu_{n,m}$  la raíz  $m$ -ésima de la función de Bessel<sup>3</sup> de primera especie de orden  $n$ . Normalizando:

<sup>3</sup>Sin contar la posible raíz en el origen.

$$\int_0^R r \left( J_n \left( \mu_{n,m} \frac{r}{R} \right) \right)^2 dr = \frac{R^2}{2} [J_{n+1}(\mu_{n,m})]^2$$

Entonces:

$$(3.3.8) \quad \varrho_{n,m}(r) = \frac{\sqrt{2}}{R J_{n+1}(\mu_{n,m})} J_n \left( \frac{\mu_{n,m}}{R} r \right)$$

De modo que, a partir de las ecuaciones 3.3.7 y 3.3.8:

$$K_{n,m}(r, \varphi) = \varrho_{n,m}(r) \Phi_n(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{R J_{n+1}(\mu_{n,m})} J_n \left( \frac{\mu_{n,m}}{R} r \right) \begin{cases} \frac{\cos(n\varphi)}{\sqrt{\pi}} & \text{si } n > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{si } n = 0 \\ \frac{\sin(n\varphi)}{\sqrt{\pi}} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Con

$$\beta_{n,m}(s) = \sigma s^2 + \left[ d_1 - d_3 \left( \frac{\mu_{n,m}}{R} \right)^2 \right] s + D \left( \frac{\mu_{n,m}}{R} \right)^4 + T \left( \frac{\mu_{n,m}}{R} \right)^2$$

Aplicando entonces la transformada de S-L a la ecuación 3.3.2 tenemos:

$$(3.3.9) \quad \beta_{n,m}(s) \bar{Y}_{n,m}(s) = \bar{F}_{n,m}^{(ext)}(s)$$

De donde se deduce la función de transferencia multidimensional para la membrana:

$$\bar{G}_{n,m}(s) = \frac{\bar{Y}_{n,m}(s)}{\bar{F}_{n,m}^{(ext)}(s)} = \frac{\sigma^{-1}}{s^2 + \left[ \frac{d_1}{\sigma} - \frac{d_3}{\sigma} \left( \frac{\mu_{n,m}}{R} \right)^2 \right] s + \frac{D}{\sigma} \left( \frac{\mu_{n,m}}{R} \right)^4 + \frac{T_0}{\sigma} \left( \frac{\mu_{n,m}}{R} \right)^2}$$

O definiendo:

$$\begin{cases} d_{n,m} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d_1}{\sigma} - \frac{d_3}{\sigma} \left( \frac{\mu_{n,m}}{R} \right)^2 \right] \\ \omega_{n,m}^2 = \frac{D}{\sigma} \left( \frac{\mu_{n,m}}{R} \right)^4 + \frac{T_0}{\sigma} \left( \frac{\mu_{n,m}}{R} \right)^2 - d_{n,m}^2 \end{cases}$$

Podemos escribir:

$$(3.3.10) \quad \bar{G}_{n,m}(s) = \frac{\bar{Y}_{n,m}(s)}{\bar{F}_{n,m}^{(ext)}(s)} = \frac{\sigma^{-1}}{s^2 + 2d_{n,m}s + \omega_{n,m}^2 + d_{n,m}^2}$$

En resumen, logramos escribir la transferencia multidimensional de la densidad superficial de fuerza a la posición de la membrana, escritas ambas en el dominio de la transformada de S-L. Este resultado permitiría integrar la evolución de la membrana ante cualquier fuerza sobre ella.

**3.3.2. Membrana no lineal.** La ecuación 3.3.1 describe un modelo lineal de membrana cuando todos los parámetros son constantes. Sin embargo, existen otro tipo de ondas que interaccionan de forma no lineal con las ondas transversales en estudio: ondas de compresión en la membrana. Por simplicidad, vamos a aproximar todos los efectos no lineales de interacción con otro tipo de ondas en una simple modulación de tensión en función de la superficie instantánea que tiene la membrana (procedimiento análogo al realizado para la cuerda en la sección 2.5.3). O sea, vamos a suponer que la tensión instantánea la podemos escribir como:

$$T = T_0 + \gamma \frac{S - S_0}{S_0}$$

Donde  $T$  es la tensión instantánea,  $T_0$  es la tensión cuando la membrana está en reposo,  $S_0 = \pi R^2$  es la superficie en reposo de la membrana,  $S$  es la superficie instantánea de la membrana, y  $\gamma = \frac{Eh}{1-\nu^2}$  es el coeficiente de variación de tensión con la superficie. Este modelo está basado en los trabajos de Avanzini y Marogna [35, 36].

*3.3.2.1. Cálculo de la superficie de la membrana.* Si escribimos la altura de la membrana como función de las coordenadas cartesianas, escritas como un vector  $\mathbf{x} = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))^t$ . Entonces, localmente la función  $y(\mathbf{x})$  puede ser aproximada por:

$$y(\mathbf{x}) \approx y(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla y(\mathbf{x}_0)$$

Por lo que un cuadrado  $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + l\hat{e}_1, \mathbf{x}_0 + l\hat{e}_1 + l\hat{e}_2, \mathbf{x}_0 + l\hat{e}_2\}$  se mapea en el paralelogramo con alturas  $\{y(\mathbf{x}_0), y(\mathbf{x}_0) + l\hat{e}_1 \nabla y(\mathbf{x}_0), y(\mathbf{x}_0) + (l\hat{e}_1 + l\hat{e}_2) \nabla y(\mathbf{x}_0), y(\mathbf{x}_0) + l\hat{e}_2 \nabla y(\mathbf{x}_0)\}$ , cuya área total puede escribirse como la norma del producto vectorial de los vectores  $(l, 0, l\hat{e}_1 \nabla y(\mathbf{x}_0))$  y  $(0, l, l\hat{e}_2 \nabla y(\mathbf{x}_0))$  o sea:

$$Á = l^2 \sqrt{1 + (\hat{e}_1 \nabla y(\mathbf{x}_0))^2 + (\hat{e}_2 \nabla y(\mathbf{x}_0))^2} = l^2 \sqrt{1 + \|\nabla y(\mathbf{x}_0)\|^2}$$

Por lo tanto, escribiendo la suma de Riemann con  $l \rightarrow 0$ , la superficie total de una función de dos variables puede escribirse como:

$$S = \iint_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}} \sqrt{1 + \|\nabla y(\mathbf{x})\|^2} d^2 \mathbf{x}$$

Para el problema de la membrana, podemos escribir el gradiente en polares y llegar a:

$$S = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{1 + \left[ \frac{\partial}{\partial r} y(r, \varphi) \right]^2 + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} y(r, \varphi) \right]^2} d\varphi dr$$

Lo que a segundo orden puede escribirse como:

$$S \approx \pi R^2 + \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial r} y(r, \varphi) \right]^2 + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} y(r, \varphi) \right]^2 \right\} \frac{d\varphi dr}{2}$$

Podemos escribirlo en función de  $\bar{y}_{n,m}(t)$  aplicando la transformada inversa de S-L:

$$\frac{S - S_0}{S_0} = \frac{1}{2\pi R^2} \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial r} \sum_{n,m} K_{n,m}(r, \varphi) \bar{y}_{n,m}(t) \right]^2 + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_{n,m} K_{n,m}(r, \varphi) \bar{y}_{n,m}(t) \right]^2 \right\} d\varphi r dr$$

Donde después de algunas manipulaciones algebraicas puede llegarse a:

$$\frac{S - S_0}{S_0} = \sum_n \sum_m \bar{y}_{n,m}(t)^2 \frac{\mu_{n,m}^2}{2\pi R^4}$$

Y por tanto escribir la tensión como:

$$(3.3.11) \quad T = T_0 + T_{NL} = T_0 + \frac{Eh}{2\pi R^4 (1 - \nu^2)} \sum_{n,m} \bar{y}_{n,m}(t)^2 \mu_{n,m}^2$$

Podemos ver que este resultado tiene una expresión similar al de la cuerda no lineal de la sección 2.5.3. Si sustituímos esta expresión de la tensión en la ecuación 3.3.1, podemos llegar a:

$$(3.3.12) \quad D\nabla^4 y(r, \varphi, t) + \sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(r, \varphi, t) - T_0 \nabla^2 y(r, \varphi, t) + d_1 \frac{\partial}{\partial t} y(r, \varphi, t) + d_3 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 y(r, \varphi, t) = f^{(ext)}(r, \varphi, t) + T_{NL} \nabla^2 y(r, \varphi, t)$$

Por lo que podemos aplicar la parte no lineal como una fuerza externa

$$f^{(NL)}(r, \varphi, t) = T_{NL}(t) \nabla^2 y(r, \varphi, t)$$

a la cual al aplicarle la transformada de S-L escribimos:

$$(3.3.13) \quad \bar{f}_{n,m}^{(NL)}(s) = T_{NL}(s) \alpha_{n,m} \bar{Y}_{n,m}(s) = -T_{NL}(s) \left( \frac{\mu_{n,m}}{R} \right)^2 \bar{y}_{n,m}(s)$$

Y la función de transferencia es igual a la de la fuerza externa debido a que ambas se aplican de la misma forma en la ecuación lineal (ec. 3.3.12), por lo que:

$$\frac{\bar{Y}_{n,m}(s)}{\bar{F}_{n,m}^{(NL)}(s) + \bar{F}_{n,m}^{(ext)}(s)} = \bar{G}_{n,m}(s) = \frac{\sigma^{-1}}{s^2 + 2d_{n,m}s + \omega_{n,m}^2 + d_{n,m}^2}$$

**3.3.3. Interacción con la cavidad de aire.** La interacción entre la cavidad resonante de aire contenida en el tambor y la membrana puede entenderse como dos sistemas independientes que interactúan bidireccionalmente. La posición de la membrana impone una condición de borde sobre la cavidad de aire en el tambor, perturbándola de su estado de reposo; mientras que la variación de presión en la cavidad de aire ejerce una fuerza sobre la membrana. Para poder resolver el sistema de forma cerrada, vamos a hacer ciertas suposiciones y aproximaciones sobre la cavidad de aire, y resolver la evolución de la presión en toda la cavidad. Luego, veremos cómo afecta esta presión a la membrana. Tomaremos las siguientes idealizaciones:

1. Aproximamos la cavidad por un cilindro de radio igual al radio de la membrana.
2. La presión en el lado abierto de la cavidad la asumimos constante.
3. La pared curva de la cavidad la consideramos rígida.

3.3.3.1. *Interacción Membrana→Aire.* En este sentido, la interacción se escribe como una condición de borde para la ecuación de onda de la cavidad, o sea, si  $\vec{u}(z, r, \varphi, t)$  es el desplazamiento del aire dentro de la cavidad y  $p(z, r, \varphi, t)$  la presión, entonces:

$$\vec{u}(z = 0, r, \varphi, t) \cdot \hat{e}_z = y(r, \varphi, t)$$

O, equivalentemente, usando  $-\nabla p = \rho_0 \ddot{\vec{u}}$ :

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_0 \ddot{\vec{u}}(z = 0, r, \varphi, t) \cdot \hat{e}_z = \rho_0 \ddot{y}(r, \varphi, t)$$

Tomaremos la ecuación de onda en el aire con disipación  $c^2 \nabla^2 p = \ddot{p} + q\dot{p}$  y las condiciones de borde:

$$\begin{cases} p(z = -L, r, \varphi, t) = 0 \\ \vec{u}(z, r = R, \varphi, t) \cdot \hat{e}_r = 0 \\ \vec{u}(z = 0, r, \varphi, t) \cdot \hat{e}_z = y(r, \varphi, t) \end{cases}$$

El término de disipación ( $q\dot{p}$ ) está agregado para evitar tiempos de decaimiento infinito, asegurando así la estabilidad del sistema. En el sistema real, el decaimiento se da por pérdidas de energía con el aire fuera de la cavidad, dicho mecanismo queda despreciado debido a las condiciones de frontera que tomamos. Podemos escribir las condiciones de frontera de manera equivalente como:

$$\begin{cases} p(z = -L, r, \varphi, t) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r}(z, r = R, \varphi, t) = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z}(z = 0, r, \varphi, t) = \rho_0 \ddot{y}(r, \varphi, t) \end{cases}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación de onda y las condiciones de borde llegamos a:

$$(3.3.14) \quad \begin{cases} c^2 \nabla^2 P = s^2 P + qsP \\ P(z = -L, r, \varphi, s) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial r}(z, r = R, \varphi, s) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z}(z = 0, r, \varphi, s) = -\rho_0 s^2 Y(r, \varphi, s) \end{cases}$$

Ahora debemos aplicar una transformada de Sturm-Liouville, para ello debemos resolver el sistema homogéneo i.e. encontrar todas las funciones espaciales  $K_{n',m',l}^{(aire)}(z, r, \varphi)$  tales que:

$$\begin{cases} c^2 \nabla^2 K_{n',m',l}^{(aire)} = \varsigma_{n',m',l} K_{n',m',l}^{(aire)} \\ K_{n',m',l}^{(aire)}(z = -L, r, \varphi) = 0 \\ \frac{\partial K_{n',m',l}^{(aire)}}{\partial r}(z, r = R, \varphi) = 0 \\ \frac{\partial K_{n',m',l}^{(aire)}}{\partial z}(z = 0, r, \varphi) = 0 \end{cases}$$

Para un cierto valor de  $\varsigma_{n',m',l}$ . Y que cumplan que:

$$\int_{-L}^0 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R K_{n',m',l}^{(aire)}(z,r,\varphi) K_{n'',m'',l'}^{(aire)*}(z,r,\varphi) r dr = \delta_{n',n''} \delta_{m',m''} \delta_{l,l'}$$

La solución a este problema la encontramos separando las variables  $z$ ,  $r$ , y  $\varphi$ , o sea escribimos  $K_{n',m',l}^{(aire)}(z,r,\varphi) = \zeta_l(z) \varrho_{n',m'}(r) \Phi_{n'}(\varphi)$ , de forma que la ecuación diferencial y las condiciones de borde se escriben como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_l(z) \Phi_{n'}(\varphi) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varrho'_{n',m'}(r)) + \zeta_l(z) \varrho_{n',m'}(r) \frac{1}{r^2} \Phi_{n'}''(\varphi) + \\ \quad + \varrho_{n',m'}(r) \Phi_{n'}(\varphi) \zeta_l''(z) = \frac{\varsigma_{n',m',l}}{c^2} \zeta_l(z) \varrho_{n',m'}(r) \Phi_{n'}(\varphi) \\ \zeta_l(z = -L) = 0 \\ \varrho'_{n',m'}(r = R) = 0 \\ \zeta_l'(z) = 0 \end{array} \right.$$

Trabajando con la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{r \varrho_{n',m'}(r)} \frac{\partial}{\partial r} (r \varrho'_{n',m'}(r)) + \frac{1}{r^2 \Phi_{n'}(\varphi)} \Phi_{n'}''(\varphi) + \frac{\zeta_l''(z)}{\zeta_l(z)} = \frac{\varsigma_{n',m',l}}{c^2}$$

Separando la variable  $z$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\zeta_l''(z)}{\zeta_l(z)} = -\beta_l^{(z)} \\ \frac{1}{r \varrho_{n',m'}(r)} \frac{\partial}{\partial r} (r \varrho'_{n',m'}(r)) + \frac{1}{r^2 \Phi_{n'}(\varphi)} \Phi_{n'}''(\varphi) = \frac{\varsigma_{n',m',l}}{c^2} + \beta_l^{(z)} \end{array} \right.$$

Resolviendo la ecuación en  $z$ :

$$\zeta_l(z) = A \sin\left(\sqrt{\beta_l^{(z)}} z\right) + B \cos\left(\sqrt{\beta_l^{(z)}} z\right)$$

Imponiendo las condiciones de borde que aplican sobre  $z$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \sin\left(-\sqrt{\beta_l^{(z)}} L\right) + B \cos\left(-\sqrt{\beta_l^{(z)}} L\right) = 0 \\ A \cos(0) - B \sin(0) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ B \cos\left(\sqrt{\beta_l^{(z)}} L\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\beta_l^{(z)}} L = \frac{\pi}{2} + l\pi \end{array} \right.$$

$$(3.3.15) \quad \beta_l^{(z)} = \left(\frac{1+2l}{2L}\pi\right)^2$$

Normalizando  $B$  para que  $\int_{-L}^0 |\zeta_l(z)|^2 dz = 1$

$$(3.3.16) \quad \zeta_l(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{1+2l}{2L}\pi z\right)$$

Volviendo al problema en  $r$  y  $\varphi$  obtenemos:

$$\frac{1}{r \varrho_{n',m'}(r)} \frac{\partial}{\partial r} (r \varrho'_{n',m'}(r)) + \frac{1}{r^2 \Phi_{n'}(\varphi)} \Phi_{n'}''(\varphi) = \frac{\varsigma_{n',m',l}}{c^2} + \left(\frac{1+2l}{2L}\pi\right)^2$$

Lo cual es el mismo problema de la ecuación 3.3.5 cambiando  $\alpha_{n,m}$  por  $\frac{\varsigma_{n',m',l}}{c^2} + \left(\frac{1+2l}{2L}\pi\right)^2$  y cambiando las condiciones de contorno, que en este caso es  $\varrho'_{n',m'}(r=R) = 0$  y por tanto, procediendo análogamente se llega a:

$$J'_{n'} \left( R \sqrt{-\frac{\varsigma_{n',m',l}}{c^2} - \left(\frac{1+2l}{2L}\pi\right)^2} \right) = 0 \Rightarrow R \sqrt{-\frac{\varsigma_{n',m',l}}{c^2} - \left(\frac{1+2l}{2L}\pi\right)^2} = \mu'_{n',m'}$$

$$\varsigma_{n',m',l} = -c^2 \left[ \left(\frac{1+2l}{2L}\pi\right)^2 + \left(\frac{\mu'_{n',m'}}{R}\right)^2 \right]$$

Siendo  $\mu'_{n,m}$  la raíz  $m$ -ésima de la derivada función de Bessel de primera especie de orden  $n$ . Podemos normalizar teniendo en cuenta que:

$$\int_0^R r \left( J_{n'} \left( \mu'_{n',m'} \frac{r}{R} \right) \right)^2 dr = \frac{R^2}{2} \left[ J_{n'}^2(\mu'_{n',m'}) - J_{n'+1}^2(\mu'_{n',m'}) \right]$$

Entonces:

$$(3.3.17) \quad \varrho_{n',m'}(r) = \frac{\sqrt{2}}{R \sqrt{J_{n'}^2(\mu'_{n',m'}) - J_{n'+1}^2(\mu'_{n',m'})}} J_{n'} \left( \frac{\mu'_{n',m'}}{R} r \right)$$

Entonces, por las ecuaciones 3.3.16, 3.3.7, y 3.3.17:

$$K_{n',m',l}^{(aire)}(z, r, \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{R \sqrt{J_{n'}^2(\mu'_{n',m'}) - J_{n'+1}^2(\mu'_{n',m'})}}$$

$$J_{n'} \left( \frac{\mu'_{n',m'}}{R} r \right) \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \left( \frac{1+2l}{2L} \pi z \right) \begin{cases} \frac{\cos(n'\varphi)}{\sqrt{\pi}} & \text{si } n' > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{si } n' = 0 \\ \frac{\sin(n'\varphi)}{\sqrt{\pi}} & \text{si } n' < 0 \end{cases}$$

Podemos entonces definir la transformada de Sturm-Liouville de la forma:

$$(3.3.18) \quad \bar{P}_{n',m',l}(s) = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-L}^0 dz K_{n',m',l}^{(aire)}(z, r, \varphi) P(z, r, \varphi, s)$$

Y la transformada inversa:

$$(3.3.19) \quad P(z, r, \varphi, s) = \sum_{n'} \sum_{m'} \sum_l K_{n',m',l}^{(aire)}(z, r, \varphi) \bar{P}_{n',m',l}(s)$$

Para resolver el problema de condiciones de borde no-homogéneas debemos encontrar el operador  $G_b$  tal que cumpla la condición en la ecuación 2.5.7 siendo  $L_b$  un operador que, en la frontera, evalúa las condiciones de borde de la ecuación. Teniendo en cuenta la siguiente igualdad,

$$c^2 (P \nabla^2 Y - Y \nabla^2 P) = c^2 \nabla (P \nabla Y - Y \nabla P)$$

se deduce que  $G_b$  es  $-c^2 I(\cdot)$  cuando  $L_b = \nabla$  y  $G_b = c^2 \nabla$  cuando  $L_b(\cdot) = I(\cdot)$

Transformando por S-L ambos lados de la ecuación en derivadas parciales original (ecuación 3.3.14) y tomando en cuenta el resultado en la ecuación 2.5.6:

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-L}^0 dz K_{n',m',l}^{(aire)} (c^2 \nabla^2 P) = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-L}^0 dz K_{n',m',l}^{(aire)} (s^2 P + qsP)$$

$$\begin{aligned} \varsigma_{n',m',l} \bar{P}_{n',m',l}(s) - \iint_{z=0} -\rho_0 s^2 Y(r, \varphi, s) (-c^2) K_{n',m',l}^{(aire)}(z, r, \varphi) dA = \\ = (s^2 + qs) \bar{P}_{n',m',l}(s) \end{aligned}$$

$$\bar{P}_{n',m',l}(s) = \frac{-\rho_0 s^2 c^2}{s^2 + qs - \varsigma_{n',m',l}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr Y(r, \varphi, s) K_{n',m',l}^{(aire)}(z=0, r, \varphi)$$

Debe notarse que la integral a la derecha no depende del subíndice  $l$ . Aplicando la transformada inversa de Sturm-Liouville (de la membrana):

$$\bar{P}_{n',m',l}(s) =$$

$$= \frac{-\rho_0 s^2 c^2}{s^2 + qs - \varsigma_{n',m',l}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr K_{n',m',l}^{(aire)}(z=0, r, \varphi) \left[ \sum_{n,m} K_{n,m}(r, \varphi) \bar{Y}_{n,m}(s) \right]$$

(3.3.20)

$$\bar{P}_{n',m',l}(s) = \frac{-\rho_0 s^2 c^2}{s^2 + qs - \varsigma_{n',m',l}} \sum_{n,m} \bar{Y}_{n,m}(s) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr K_{n',m',l}^{(aire)}(0, r, \varphi) K_{n,m}(r, \varphi)$$

Calculemos por un lado la siguiente integral:

$$I_{n',m',l,n,m}^{(M \leftrightarrow A)} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr K_{n',m',l}^{(aire)}(z=0, r, \varphi) K_{n,m}(r, \varphi) =$$

(3.3.21)

$$= \delta_{n,n'} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{2J_n(\mu'_{n,m'})}{\sqrt{J_n(\mu'_{n,m'})^2 - J_{n+1}(\mu'_{n,m'})^2}} \frac{\mu_{n,m}}{\mu_{n,m}^2 - (\mu'_{n,m'})^2} = \delta_{n,n'} I_{n',m',m}^{(M \leftrightarrow A)}$$

Sustituyendo en la ecuación 3.3.20:

$$\bar{P}_{n',m',l}(s) = \frac{-\rho_0 s^2 c^2}{s^2 + qs - \varsigma_{n',m',l}} \sum_m I_{n',m',m}^{(M \leftrightarrow A)} \bar{Y}_{n',m}(s)$$

Por lo tanto, podemos definir la función de transferencia multidimensional entre la membrana y el aire de la siguiente manera:

$$\bar{G}_{n',m',l,m}^{(M \rightarrow A)}(s) = \frac{\bar{P}_{n',m',l}(s)}{\bar{Y}_{n',m}(s)} = \frac{-\rho_0 s^2 c^2}{s^2 + qs - \zeta_{n',m',l}} I_{n',m',m}^{(M \leftrightarrow A)}$$

De modo que:

$$\bar{P}_{n',m',l}(s) = \sum_m \bar{G}_{n',m',l,m}^{(M \rightarrow A)}(s) \bar{Y}_{n',m}(s)$$

Con este resultado, es posible evaluar la evolución de la presión en cualquier punto de la cavidad de aire conociendo la posición de la membrana para todos los instantes de tiempo anteriores.

3.3.3.2. *Interacción Aire  $\rightarrow$  Membrana.* Una vez resuelta la evolución de la presión de aire dentro de la cavidad, podemos ver cómo esta afecta la evolución de la membrana. Para ello debemos calcular la presión que ejerce el aire sobre la membrana, una vez calculada debemos calcular la transformada de Sturm-Liouville usada para resolver la membrana para poder introducir dicha presión en el modelo de la membrana.

La expresión para la presión sobre la membrana, sale de realizar al transformada inversa y evaluar en  $z = 0$ , o sea:

$$\begin{aligned} P(z = 0, r, \varphi, s) &= \sum_{n'} \sum_{m'} \sum_l K_{n',m',l}^{(aire)}(z = 0, r, \varphi) \bar{P}_{n',m',l}(s) = \\ &= \sum_{n'} \sum_{m'} \sum_l \sum_m K_{n',m',l}^{(aire)}(z = 0, r, \varphi) \bar{G}_{n',m',l,m}^{(M \rightarrow A)}(s) \bar{Y}_{n',m}(s) \end{aligned}$$

Aplicar la transformada de Sturm-Liouville usada para resolver la membrana a la presión es:

$$\bar{P}_{n,m}(s) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr P(z = 0, r, \varphi, s) K_{n,m}(r, \varphi)$$

$$\bar{P}_{n,m}(s) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \left[ \sum_{n'} \sum_{m'} \sum_l K_{n',m',l}^{(aire)}(z = 0, r, \varphi) \bar{P}_{n',m',l}(s) \right] K_{n,m}(r, \varphi) =$$

$$= \sum_{n'} \sum_{m'} \sum_l \bar{P}_{n',m',l}(s) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr K_{n',m',l}^{(aire)}(z = 0, r, \varphi) K_{n,m}(r, \varphi) =$$

$$= \sum_{n'} \sum_{m'} \sum_l \bar{P}_{n',m',l}(s) \left[ \delta_{n,n'} I_{n',m',m}^{(M \leftrightarrow A)} \right] =$$

$$= \sum_{m'} \sum_l I_{n,m',m}^{(M \leftrightarrow A)} \bar{P}_{n,m',l}(s) =$$

$$= \sum_{m'} I_{n,m',m}^{(M \leftrightarrow A)} \left( \sum_l \bar{P}_{n,m',l}(s) \right)$$

Si defino la variable  $\Pi$  como un modelo en dos dimensiones de la presión de la siguiente manera:

$$\bar{\Pi}_{n',m'}(s) = \sum_l \bar{P}_{n',m',l}(s)$$

Entonces:

$$(3.3.22) \quad \bar{P}_{n,m}(s) = \sum_{m'} I_{n,m',m}^{(M \leftrightarrow A)} \bar{\Pi}_{n,m'}(s)$$

Y:

$$\bar{\Pi}_{n',m'}(s) = \sum_m \sum_l \bar{G}_{n',m',l,m}^{(M \rightarrow A)}(s) \bar{Y}_{n,m}(s)$$

O definiendo:

$$(3.3.23) \quad \bar{G}_{n',m'}^{(M \rightarrow A2d)}(s) = \sum_l \frac{-\rho_0 s^2 c^2}{s^2 + qs - \zeta_{n',m',l}}$$

$$(3.3.24) \quad \bar{\Pi}_{n',m'}(s) = \bar{G}_{n',m'}^{(M \rightarrow A2d)}(s) \sum_m I_{n',m',m}^{(M \leftrightarrow A)} \bar{Y}_{n',m}(s)$$

La presión del aire en la cavidad se aplica sobre la membrana simplemente como una fuerza, por lo que la transferencia entre la presión en la superficie y la membrana es la misma que para la fuerza externa. De modo que:

$$(3.3.25) \quad \frac{\bar{Y}_{n,m}(s)}{\bar{F}_{n,m}^{(NL)}(s) + \bar{F}_{n,m}^{(ext)}(s) + \bar{P}_{n,m}(s)} = \bar{G}_{n,m}(s)$$

**3.3.4. Excitación.** Para la producción de sonido es imprescindible entregarle energía inicial al sistema por medio de una excitación. Nos centraremos en la excitación por medio del palo, debido a que es la más fácil de reproducir en el laboratorio a la hora de tomar medidas y de modelar debido a que la fuerza sobre la membrana está bien localizada. Utilizaremos un modelo de contacto ampliamente usado en la bibliografía [35, 18, 37], definido según la siguiente ecuación:

$$(3.3.26) \quad F_p(g(t), \dot{g}(t)) = -([g(t)]_+)^{\alpha} (k + \lambda \dot{g}(t))$$

Donde  $g(t) = y(r_p, \varphi_p, t) - y_p(t)$  es la penetración del palo en la membrana (siendo  $y_p(t)$  la altura del palo,  $r_p$  y  $\varphi_p$  definen la posición de impacto),  $[x]_+ = \frac{1}{2}(x + |x|)$  es la función parte positiva,  $k$  es el parámetro de rigidez,  $\alpha$  depende de la geometría local de la membrana y  $\lambda$  es el coeficiente de disipación. Esta fuerza se supone bien localizada en el punto de impacto, y por tanto, la densidad superficial de fuerza correspondiente a la interacción con el palo la escribimos multiplicando la fuerza por deltas de Dirac:

$$f(r, \varphi, t) = F_p(g(t), \dot{g}(t)) \delta(r - r_p) \delta(\varphi - \varphi_p) \frac{1}{r}$$

A esta densidad de fuerza (que tiene unidades de presión) se la puede transformar fácilmente por S-L dando como resultado:

$$\bar{f}_{n,m}(t) = F_p(g(t), \dot{g}(t)) K_{n,m}(r_p, 0)$$

si tomamos el punto de impacto como referencia y por tanto  $\varphi_P = 0$ . A su vez, modelamos la evolución de la posición del palo simplemente como una masa puntual (lo cual, debido a la corta duración del contacto resulta satisfactorio), por tanto:

$$(3.3.27) \quad m_p \ddot{y}_p(t) = -F_p(g(t), \dot{g}(t))$$

Con  $m_p$  la masa efectiva del palo.



## Medidas y análisis

### 4.1. Los tambores

Tomamos medidas sobre tres tambores representativos del candombe uruguayo: un chico, un repique y un piano. Medimos también varias de sus dimensiones físicas que pueden verse en el cuadro 1. Un dibujo ilustrativo de dichas medidas se muestra en la figura 4.1.1. Puede verse que la aproximación que hicimos en el capítulo anterior, en donde consideramos la caja del tambor como un cilindro, no es cierta para ninguno de los tres tambores, ya que todos ellos, aproximadamente, duplican la circunferencia de la caja entre el fondo (donde es más pequeña) y cerca del medio (donde es ancha). Esto provocará una diferencia entre las frecuencias predichas y las reales de la caja de resonancia, siendo las últimas menores.

### 4.2. Dispositivos de medida

Para todas las medidas realizadas sobre la membrana de los tambores se usó el dispositivo MTI-2100 Fotonic<sup>TM</sup>Sensor. Este dispositivo es un medidor de distancia sin contacto basado en luz, es capaz de generar un voltaje que depende de forma conocida con la distancia entre la punta de prueba y una superficie reflectora que se desea medir.

**4.2.1. Principio de funcionamiento.** El dispositivo de medida consta, básicamente, de tres partes. Una lámpara incandescente que funciona como fuente de luz, un receptor capaz de medir la intensidad de luz recibida, y una punta de prueba conectada por hilos de fibra óptica a la lámpara y al receptor. La punta es círculo

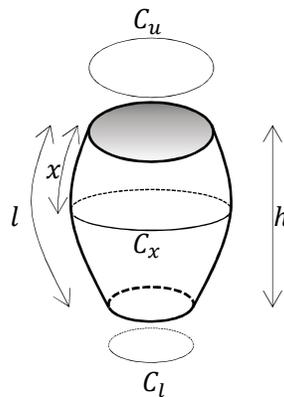


FIGURA 4.1.1. Dibujo esquemático de un tambor de candombe uruguayo con algunas medidas de interés.

Símbolo	Descripción	Chico	Repique	Piano
$h$	Altura del tambor	72,25	71,2	69,4
$C_u$	Circunferencia medida por fuera de la membrana	76	93,6	112,6
$l$	Largo de la curva de la caja	74,7	77,6	74,5
$C_l$	Circunferencia medida por fuera del fondo del tambor	68,5	85,9	83,5
$D_f$	Diámetro efectivo de vibración de la membrana	22,5	27,4	33,1
$C_{x_1}$	Circunferencia de la caja medida por fuera, a un largo $x_i$ de la membrana	120,4	104,4	127,4
$x_1$		24,5	4,6	5
$C_{x_2}$		133,2	146	169,2
$x_2$		36,5	22,8	25
$C_{x_3}$		123,3	164,8	166,8
$x_3$		48	42	41
$C_{x_4}$		78,1	-	101,3
$x_4$		50,2	-	68

CUADRO 1. Medidas físicas de los tambores utilizados para la toma de datos. Todos los valores en cm.

de unos  $\sim 2\text{mm}$  de diámetro con varios ( $\sim 100$ ) hilos de fibra óptica, de los cuales la mitad están conectados a la lámpara incandescente y la otra mitad al receptor. La lámpara incandescente provee una intensidad de luz que es posible variar para realizar la calibración del dispositivo, mientras que el receptor es sensible a la cantidad de luz recibida, convirtiéndola en un voltaje, y amplificando la señal resultante.

Cuando la punta de prueba es posicionada frente a una superficie reflectora la cantidad de luz que vuelve al receptor varía según la distancia de la punta a dicha superficie. Cuando la distancia es nula, la superficie refleja la luz de cada hilo de fibra óptica emisor de luz sobre sí mismo, por lo que nada de luz llega a los receptores. Si se aleja levemente la punta de la superficie reflectora, parte de la luz que se emite comienza a ser reflejada hacia los receptores, por lo que la intensidad total recibida aumenta. Este valor sigue en aumento hasta que el decaimiento de la intensidad con la distancia (ley cuadrática) provoca una disminución en la intensidad que llega al receptor, este proceso continúa para distancias que tienden a infinito, haciendo que la intensidad tienda a cero. Una gráfica de calibración de la respuesta se muestra en la figura 4.2.1, pueden apreciarse dos zonas que aproximan tendencias lineales: una zona muy sensible entre los valores de distancia de  $0,08 \sim 0,23\text{mm}$  y otra menos sensible entre los valores de distancia de  $1 \sim 3,1\text{mm}$ . Estas zonas son las que se utilizarán para la toma de datos, de modo de poder convertir el voltaje obtenido fácilmente en una señal de distancia.

**4.2.2. Montaje experimental.** Para tomar los datos de desplazamiento en la membrana del tambor, adherimos pequeños pedazos de papel metálico a la membrana para funcionar como superficie reflectora para usar con el Fotonic Sensor. La densidad superficial de dicho papel metálico es más de 10 veces menor que la membrana del tambor, por lo que sus efectos sobre la dinámica del sistema son mínimos.

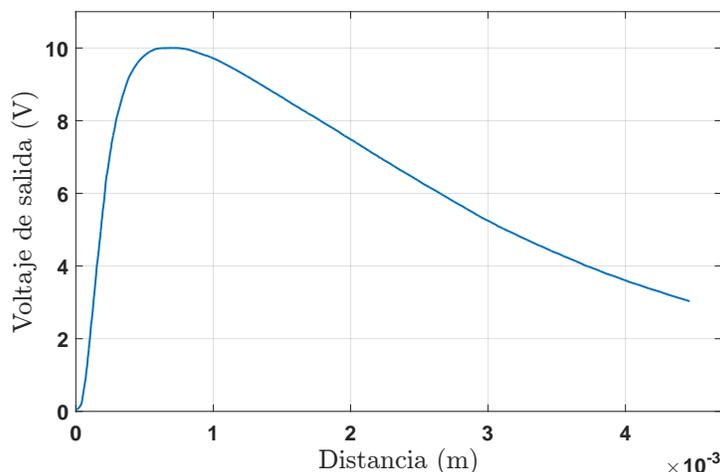


FIGURA 4.2.1. Gráfica de la respuesta estática de voltaje en función de la distancia de la superficie reflectora a la punta de prueba del Fotonic Sensor.

Montamos el tambor en un soporte que lo mantiene horizontal de modo de evitar tapar la boca opuesta a la membrana. Para excitar la membrana, dispusimos un un palo con una punta plástica de forma similar a los palos de madera usados al tocar el tambor, que estaba adherido a un parlante de modo que pudiéramos sincronizar el momento del golpe con la adquisición de datos. Usamos una interface digital para adquirir datos y para disparar un generador de señales con una señal de trigger (ver esquema en la figura 4.2.2). En la figura 4.2.3 se muestra una foto del dispositivo utilizado para la toma de datos sobre la membrana.

### 4.3. Análisis

El resultado del análisis pretende ser recuperar información útil de las medidas para ajustar el modelo además de corroborar si nos encontramos en la zona en que es razonable hacer la aproximación lineal de la membrana. Nos centraremos en encontrar los valores de frecuencia y velocidad de decaimiento de los modos predominantes en las señales adquiridas. Para eso, aplicaremos primero un algoritmo de reducción de ruido y luego un método basado en modelos lineales para estimar las frecuencias predominantes.

**4.3.1. Reducción de ruido.** Antes de analizar los datos, es conveniente reducir el ruido de medición, de modo que el análisis resulte más sencillo. Para esto, implementamos una versión modificada del algoritmo de Wiener [38]. Este algoritmo se basa en tres suposiciones importantes, que el ruido es aditivo, que el espectro del ruido es constante en el tiempo, y que el ruido no está correlacionado con la señal limpia. O sea suponemos que medimos la señal  $y$  de la forma:

$$y[n] = x[n] + r[n]$$

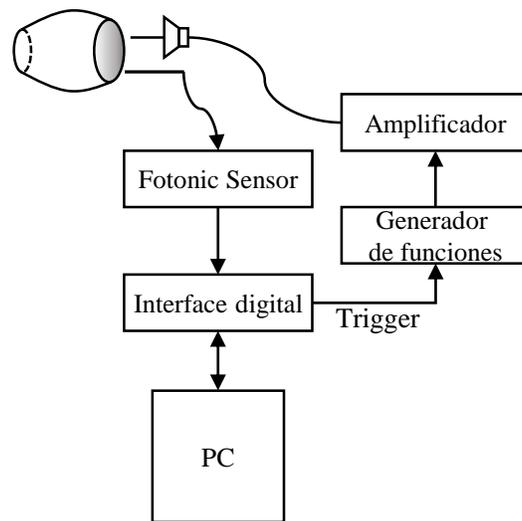


FIGURA 4.2.2. Esquema del montaje experimental.

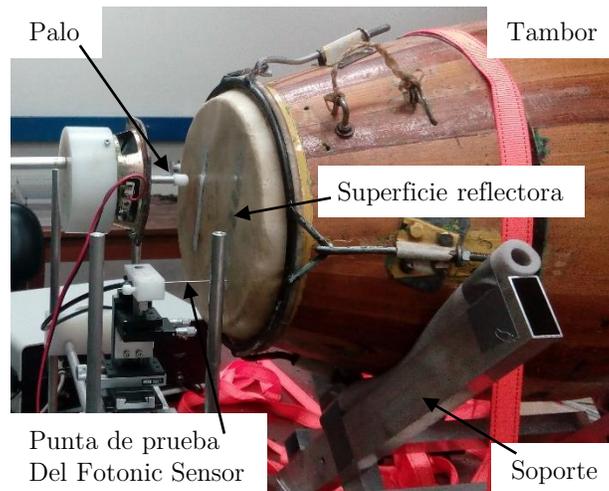


FIGURA 4.2.3. Foto del montaje experimental.

Donde  $x$  es la señal limpia, y  $r$  es una señal de ruido. A su vez suponemos que el espectro de la señal de ruido,  $r$ , no varía con el tiempo. O sea que para tamaños de ventana ( $N_{win}$ ) suficientemente grandes, podemos suponer que<sup>1</sup>:

$$(4.3.1) \quad |\text{DFT}_{N_W} \{r[n + i(N_{win} - N_{ol})] W[n]\} [m]|^2 = S_R[m]$$

independientemente del índice de ventana  $i$ , con  $W[n]$  una ventana temporal, para evitar discontinuidades al inicio y al fin de la señal, y  $N_{ol}$  el número de muestras

<sup>1</sup>Ver la definición 6 (sección A.2) de la transformada de Fourier discreta (DFT).

compartidas entre ventanas adyacentes. Este valor ( $S_R[m]$ ) puede ser estimado analizando las partes de la señal que deberían ser silenciosas. El algoritmo de Wiener propone aplicar a cada ventana un filtro de modo que:

$$(4.3.2) \quad \bar{X}[m, i] = \frac{S_X[m, i]}{S_X[m, i] + S_R[m]} Y[m, i]$$

Con:

$$\begin{aligned} Y[m, i] &= \text{DFT}_{N_W} \{y[n + i(N_{win} - N_{ol})] W[n]\} [m] \\ \bar{X}[m, i] &= \text{DFT}_{N_W} \{\bar{x}[n + i(N_{win} - N_{ol})] W[n]\} [m] \\ S_X[m, i] &= |\text{DFT}_{N_W} \{x[n + i(N_{win} - N_{ol})] W[n]\} [m]|^2 \end{aligned}$$

Donde  $\bar{x}[n]$  es la estimación de la señal limpia  $x[n]$ , y  $S_X[m, i]$  es la potencia espectral de la señal limpia  $x$  en la ventana  $i$ . Debido a que no se conoce, a priori, la potencia espectral de la señal limpia es preciso estimarla. Podemos hacerlo teniendo en cuenta que la señal limpia ( $x[n]$ ) y el ruido ( $r[n]$ ) los supusimos no correlacionados, por lo que se cumple que:

$$S_Y[m, i] = S_X[m, i] + S_R[m]$$

De donde se puede despejar  $S_X[m, i]$  y sustituir en la ecuación 4.3.2, donde se llega a que:

$$(4.3.3) \quad \bar{X}[m, i] = \begin{cases} \frac{S_Y[m, i] - S_R[m]}{S_Y[m, i]} Y[m, i] & \text{si } S_Y[m] > S_R[m] \\ 0 & \text{si } S_Y[m] \leq S_R[m] \end{cases}$$

Donde la separación por casos surge de que los tres valores ( $S_Y[m]$ ,  $S_X[m]$ , y  $S_R[m]$ ) deben ser no negativos. Una vez conseguida la estimación  $\bar{X}[m]$ , es posible recuperar  $\bar{x}[n]$  por ventanas, y la señal completa usando el método de superposición y suma (overlap and add [39]). Este algoritmo tiene varias características deseables, deja la fase de la señal inalterada, y a medida que la señal es más potente en comparación al ruido, la estimación de la señal limpia tiende asintóticamente a la señal medida.

Nosotros implementamos una modificación de este algoritmo, para robustificar la respuesta usamos una versión suavizada<sup>2</sup> del espectro de potencia  $S_Y[m, i]$  en la ecuación 4.3.3. De esta manera se evitan, en parte, los ruidos remanentes conocidos como “ruido musical” (“musical noise” [38]).

**4.3.2. Estimación de frecuencias.** Para la estimación de las frecuencias usaremos un algoritmo basado en modelos lineales, o sea, aproximaremos una versión acondicionada de la señal obtenida por la respuesta al impulso de un filtro digital. Para ello encontraremos transferencias:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{n_z} b_i z^{n_z - i}}{\sum_{l=0}^{n_p} a_l z^{n_p - l}} z^{n_p - n_z}$$

cuya respuesta al impulso aproxima una cierta señal  $x[n]$ .

<sup>2</sup>Se utilizó un filtro de mediana en tiempo-frecuencia. O sea, cada valor  $S_Y[m, i]$  fue sustituido por la mediana del conjunto de valores de  $S_Y[m', i']$  con  $m'$  variando alrededor de  $m$  e  $i'$  variando alrededor de  $i$ .

Dada una cierta señal  $x[n]$ , y los valores de  $n_p$  y  $n_z$  puede encontrarse la transferencia de la forma anterior de modo que su respuesta al impulso mejor aproxime la señal  $x[n]$  usando el algoritmo iterativo de Steiglitz-McBride [40, 41], este algoritmo minimiza la suma cuadrática de la diferencia entre la señal  $x[n]$  y la respuesta al impulso del filtro digital, o sea minimiza la cantidad

$$E = \sum_n |x[n] - h[n]|^2$$

Si se fija  $n_p = n_z$  (y el polinomio  $A(z)$  no contiene raíces múltiples), la respuesta al impulso del filtro es de la forma:

$$(4.3.4) \quad h[n] = \sum_{i=1}^{n_p} c_i p_i^n$$

con  $p_i$  son los polos de la transferencia  $H(z)$ . O sea, una suma de sinusoides con envolvente exponencial (polos complejos conjugados) y exponenciales (polos reales). Por lo que encontrar dicha transferencia, es equivalente a ajustar  $x[n]$  por una señal  $h[n]$  como en la ecuación 4.3.4, la cual contiene la información de frecuencia y velocidad de decaimiento de los modos principales en la señal.

Sin embargo, hay que tener ciertos cuidados al usar esta técnica con una señal de audio real. Existen dos problemas principales, elegir el número de polos y ceros que tendrá la transferencia, y, elegir (o acondicionar) la señal de manera adecuada para que el algoritmo funcione de manera correcta. Debe tenerse en cuenta que el algoritmo no asegura que la transferencia obtenida sea estable ni que sea realmente la que minimiza el error cuadrático de manera global, sino que el mínimo obtenido puede ser solamente local, por esto, no es conveniente usar órdenes demasiado grandes. Además, un orden demasiado grande, puede implicar un mejor ajuste de la señal, pero no necesariamente un mejor ajuste del modelo, o sea, una vez excedido el orden del modelo subyacente, el algoritmo va a ajustar el ruido de la señal, este problema es conocido como overfitting [42] (“sobreajustado”).

Otro problema a evitar es la aglomeración de polos a bajas frecuencias debido a una frecuencia de muestreo demasiado alta, por esto, es conveniente trabajar en fajas de frecuencia decimando<sup>3</sup> la señal original, y analizándola en varias etapas.

Para solucionar todos los posibles problemas mencionados proponemos un método en varias etapas. Primero elegimos bandas de frecuencias convenientes en las que la señal en estudio,  $y[n]$ , no contenga demasiados modos (lo que debe ser hecho con información a priori), llamemos  $f_{min}^{(i)}$  y  $f_{max}^{(i)}$  a las frecuencias mínima y máxima de la  $i$ -ésima banda elegida respectivamente. Luego diseñamos filtros digitales pasabanda (sean  $G^{(i)}(z)$ ) que atenúen las frecuencias fuera del rango  $(f_{min}^{(i)}, f_{max}^{(i)})$ . En cada banda generamos la señal  $y^{(i)}[n]$  cuya transformada  $z$  es:

$$Y^{(i)}(z) = G^{(i)}(z) Y(z)$$

A la que le hicimos una decimación de modo que  $f_{max}^{(i)} < \frac{1}{2m_i} F_s$ , con  $m_i$  el factor de decimación. Hecha la decimación, obtuvimos una señal  $w^{(i)}[n] = y^{(i)}[m_i n]$  con una frecuencia de muestreo  $F_s^{(i)} = \frac{F_s}{m_i}$ . Para evitar transitorios del filtro  $G^{(i)}(z)$ ,

<sup>3</sup>Se conoce como decimar, al proceso de reducir la frecuencia de muestreo de una señal digital.

y asegurarnos que se analiza la señal correspondiente a la vibración libre de la membrana (i.e. una vez acabada la interacción con el palo) es preciso definir un valor  $n_o^{(i)}$  a partir del cual la señal se analiza. Para ello encontramos el valor

$$n_{max}^{(i)} = \max \text{ind}_n \left( \left| w^{(i)} [n] \right| \right)$$

y definimos  $n_o^{(i)} = n_{max}^{(i)} + \lceil 5F_s^{(i)} T_{imp} \rceil$ , con  $\lceil \cdot \rceil$  la función techo y  $T_{imp} = 5\text{ms}$  un estimativo del tiempo de impacto del palo. También debemos elegir el largo de la señal  $w^{(i)} [n]$ , para ello calculamos un estimativo de la intensidad instantánea de la señal, y encontramos los puntos en la que esta decae al 0,01% (-40dB) de la intensidad inicial (el valor en  $n_o^{(i)}$ ) y al 0,0001% (-60dB) a los que llamamos  $n_{fa}^{(i)}$  y  $n_{ft}^{(i)}$  respectivamente. Seguidamente, aplicamos el algoritmo de Steiglitz-McBride con  $n_p = n_z = j$  para la señal  $w^{(i)} \left[ n + n_o^{(i)} - 1 \right]$  restringida al rango temporal  $\left[ 1, n_{fa}^{(i)} - n_o^{(i)} + 1 \right]$  (o sea, las muestras de la señal  $w^{(i)} [n]$  con  $n$  entre  $n_o^{(i)}$  y  $n_{fa}^{(i)}$ ) con lo que obtenemos el modelo  $H_j^{(i)}(z)$  y calculamos el valor:

$$(4.3.5) \quad S_j^{(i)} = \sum_{n=n_{fa}^{(i)}-n_o^{(i)}+2}^{n_{ft}^{(i)}-n_o^{(i)}+1} \left| w^{(i)} \left[ n + n_o^{(i)} - 1 \right] - h_j^{(i)} [n] \right|^2$$

Con  $h_j^{(i)} [n]$  la respuesta al impulso de  $H_j^{(i)}(z)$ .  $S_j^{(i)}$  representa el error cuadrático que presenta el modelo con la señal  $w^{(i)} [n]$  en el rango  $\left[ n_{fa}^{(i)} + 1, n_{ft}^{(i)} \right]$  (rango que no fue usado para ajustar el modelo), de esta manera, podemos evaluar que tan bien el modelo predice la señal  $w^{(i)} [n]$  y usarlo para evitar el overfitting. Para ello, se calculó  $S_j^{(i)}$  para un rango grande de valores de  $j$  y se buscó el valor que minimizara dicha cantidad. De esta manera, un valor excesivamente grande de  $j$  donde  $h_j^{(i)} [n]$  ajusta cada vez mejor la señal  $w^{(i)} [n]$  en el rango  $\left[ n_o^{(i)}, n_{fa}^{(i)} \right]$ , ajustará cada vez peor la misma señal en el rango  $\left[ n_{fa}^{(i)} + 1, n_{ft}^{(i)} \right]$  y puede ser descartado.

Una vez elegido el valor de  $n_p = n_z = j$ , pueden hallarse las raíces del denominador de  $H_j^{(i)}(z)$  y con ellas calcular las frecuencias y velocidades de decaimiento principales en la  $i$ -ésima banda. Realizando este procedimiento para varias bandas que cubran todo el rango de frecuencias que nos es de interés, podemos estimar la frecuencia y velocidad de decaimiento para todos los modos presentes en la señal.

#### 4.4. Ajuste del modelo

Para ajustar el modelo a los datos, es necesario calcular las frecuencias y velocidades de decaimiento que genera el modelo en función de los valores de los parámetros físicos, para luego poder ajustar dichos parámetros a las frecuencias y velocidades de decaimiento presentes en las medidas de la membrana. Hacer esto teniendo en cuenta la interacción completa con el aire no es posible, sin embargo, sí es posible obtener una muy buena aproximación teniendo en cuenta los modos de frecuencias más bajas del aire y de la membrana. Esto lo hicimos resolviendo

<sup>4</sup>Fue medido el grosor sin estirar de varias membranas de tambores del candombe uruguayo.

Parámetro	Símbolo	Método
Densidad volumétrica de la membrana	$\rho_m$	Estimado (usando [43])
Módulo de Young	$E$	Estimado (usando [43])
Coefficiente de Poisson	$\nu$	Estimado en 0,2
Coefficiente de disipación independiente de la frecuencia	$d_1$	Ajustado
Coefficiente de disipación dependiente de la frecuencia	$d_3$	Ajustado
Grosor de la membrana	$h$	Ajustado (limitado al grosor inicial <sup>4</sup> )
Tensión superficial en la membrana	$T$	Ajustado
Radio de la membrana	$R$	Medido
Largo del tambor	$L$	Medido
Densidad del aire	$\rho_0$	Estimado
Velocidad del sonido en el aire	$c$	Ajustado
Coefficiente de disipación del aire	$q$	Ajustado

CUADRO 2. Parámetros físicos. Cuadro de los parámetros físicos y la forma en que cada uno fue fijado.

el sistema realimentado de la ecuación 3.3.25 ignorando la fuerza no lineal y escribiendo la presión como función de la posición de la membrana. Dicho cálculo es en sí mismo un aporte importante al entendimiento de la física del problema y de los efectos de la interacción entre la membrana y la caja resonante.

Con un algoritmo para encontrar las frecuencias y velocidades de decaimiento en función de los parámetros físicos, y las frecuencias y velocidades de decaimiento medidas en los experimentos, es posible implementar un algoritmo de optimización el cual variando algunos parámetros físicos, mejore la coincidencia entre las frecuencias y velocidades de decaimiento predichas y medidas. Para esto es indispensable minimizar la cantidad de parámetros físicos a ajustar. Por lo que dividimos la optimización etapas:

- Primero los parámetros de disipación ( $q$ ,  $d_1$  y  $d_3$ ) se suponen nulos, y se ajustan únicamente los valores de las frecuencias de los modos principales variando la tensión, la velocidad del aire y el grosor de la membrana. Para ello se minimizó la suma cuadrática de la diferencia entre las primeras frecuencias predichas y las encontradas experimentalmente ( $\sum(\text{teórico} - \text{experimental})^2$ ).
- Luego ajustamos las velocidades de decaimiento de cada modo variando los parámetros de disipación ( $q$ ,  $d_1$  y  $d_3$ ). Para ello minimizamos la suma cuadrática de la desviación relativa ( $\sum(\frac{\text{teórico}}{\text{experimental}} - 1)^2$ ) de las velocidades de decaimiento para las frecuencias ajustadas.
- Por último, ajustamos todo junto (partiendo de los valores ya encontrados) para compensar por los pequeños cambios en las frecuencias introducidos por los parámetros de disipación no nulos. Para ello minimizamos una suma que contempla las diferencias tanto en las frecuencias como en las velocidades de decaimiento.

El resto de los parámetros físicos fueron medidos directamente o estimados, se muestra en el cuadro 2 un resumen de todos los parámetros físicos del modelo.

Decidimos ajustar la velocidad del sonido en el aire en el modelo debido a que las frecuencias predichas para un cilindro no corresponden con las de la caja del tambor que es más ancho en el centro. Usar una velocidad del sonido efectiva permite la coincidencia de las frecuencias de resonancia de la caja en el modelo y en la realidad.



## Algoritmos de síntesis

### 5.1. Membrana

Para implementar un algoritmo de síntesis para la membrana, usamos un esquema modular. Diseñamos 4 módulos correspondientes a la membrana en sí, a la cavidad de aire, a la interacción con el palo, y un módulo para generar las señales de salida. El primer módulo (membrana no lineal) es muy parecido al utilizado para la cuerda no lineal (figura 2.5.3), y es el centro de la síntesis. Las señales que comparten los módulos son las correspondientes a la posición de la membrana (transformada por S-L) y la fuerza realizada sobre la membrana (ídem). Este esquema modular nos permitirá en un futuro la inserción de nuevos módulos correspondientes a interacciones con otros agentes no contemplados en el desarrollo de esta tesis.

En la figura 5.1.1 mostramos un esquema de la interconexión entre los bloques y las señales que los comunican, las líneas gruesas representan señales vectoriales.

**5.1.1. Módulo de membrana.** El módulo correspondiente a la evolución no lineal de la membrana, será idéntico al módulo de evolución de la cuerda no lineal (figura 2.5.3) intercambiando los filtros calculados para la cuerda ( $\bar{G}(\mu, z)$ ) por la transformada invariante al impulso de los filtros calculados para la membrana ( $\bar{G}_{n,m}(s)$ ) y usando los valores de  $Q_{n,m}$  y  $R_{n,m}$ . Además deben modificarse las entradas y las salidas del módulo para interconectarlo con los demás módulos necesarios para la síntesis completa del tambor (figura 5.1.2).

Los parámetros de este módulo son los filtros  $\bar{G}_{n,m}(z)$  que surgen de aplicar la transformación invariante al impulso a los filtros  $\bar{G}_{n,m}(s)$  (ecuación 3.3.10). Los valores de  $Q_{n,m} = \frac{Eh}{2\pi R^4(1-\nu^2)}\mu_{n,m}^2$  (ecuación 3.3.11) y de  $R_{n,m} = -\left(\frac{\mu_{n,m}}{R}\right)^2$  (ecuación 3.3.13).

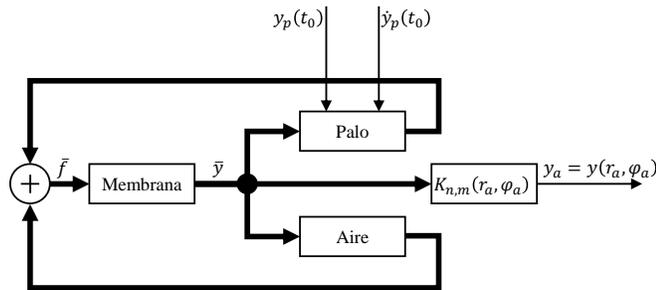


FIGURA 5.1.1. Esquema de la interconexión entre los bloques de síntesis.

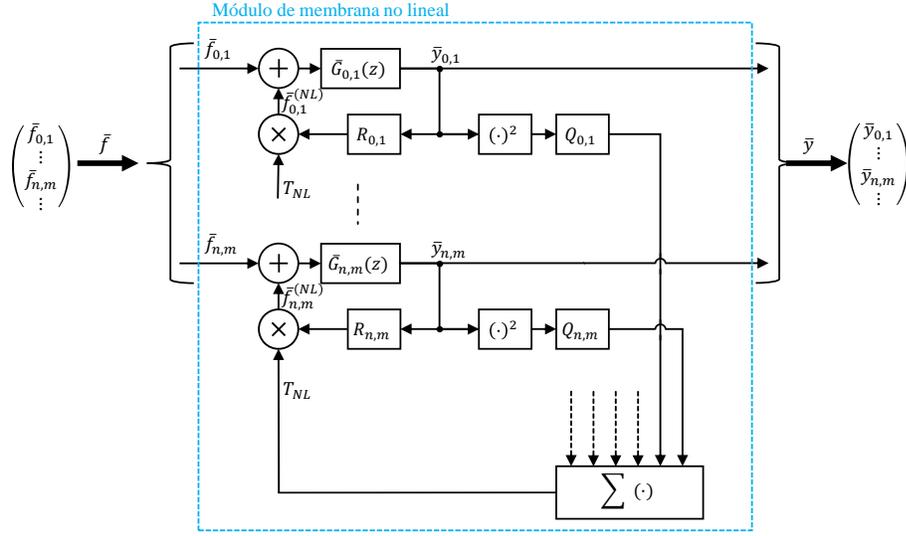


FIGURA 5.1.2. Esquema de la implementación del módulo de síntesis de la membrana no lineal. Recibe como entrada la fuerza ejercida sobre la membrana (transformada de S-L) y como salida la posición de la membrana.

Los valores de  $n$  y  $m$  a implementar los elegimos de modo que  $\omega_{n,m} \leq \omega_{max}$  (con  $\omega_{max}$  elegido según la precisión deseada) e imponiendo  $n \geq 0$  debido a que se toma como ángulo de referencia ( $\varphi = 0$ ) la posición de impacto del palo, y por ende los modos con  $n < 0$  no son excitados y resultaría en vano implementarlos.

**5.1.2. Módulo de cavidad de aire.** Este módulo implementa la síntesis de la interacción con la cavidad de aire contenida en el tambor. Implementa los filtros  $\bar{G}_{n,m'}^{(M \rightarrow A2d)}(z)$  que surgen de aplicar la transformada invariante al impulso a los filtros  $\frac{1}{s^2} \bar{G}_{n,m'}^{(M \rightarrow A2d)}(s)$  (ecuación 3.3.23) truncando la suma infinita en un número finito de términos y concatenando el resultado de dicho filtro con otro que implementa la derivada segunda temporal por diferencias finitas, o sea:

$$\bar{G}_{n,m'}^{(M \rightarrow A2d)}(z) = F_s^2 (z - 2 + z^{-1}) \sum_{l=0}^{l(n,m')^{(max)}} \mathcal{I}_{F_s} \left[ \frac{-\rho_0 c^2}{s^2 + qs - \zeta_{n,m',l}} \right]$$

Debe notarse que si bien la primer parte de este filtro es no causal (y por tanto imposible de implementar) el conjunto de ambos filtros resulta en una transferencia propia, por lo que el filtro es implementable.

A su vez se definen las entradas a los filtros ( $\bar{q}_{n,m'}$ ) de la siguiente manera (según la ecuación 3.3.24):

$$\bar{q}_{n,m'}[i] = \sum_m \mathcal{I}_{n,m,m'}^{(M \leftrightarrow A)} \bar{y}_{n,m}[i]$$

Y la salida del bloque (según la ecuación 3.3.22):

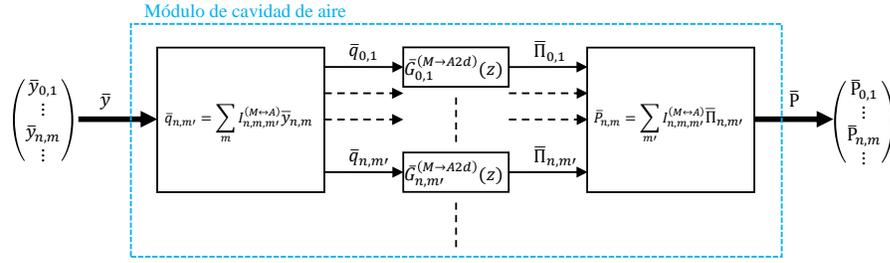


FIGURA 5.1.3. Esquema de la implementación del módulo de síntesis de la presión de aire. Recibe la posición de la membrana y devuelve la presión sobre la membrana.

$$\bar{P}_{n,m} [i] = \sum_{m'} I_{n,m,m'}^{(M \leftrightarrow A)} \bar{\Pi}_{n,m'} [i]$$

Los valores  $n$  y  $m'$  a implementar son elegidos de modo que  $\varsigma_{n,m',0} \leq \varsigma_{max}$  y  $n$  menor o igual al mayor valor de  $n$  utilizado en el módulo de la membrana. A su vez,  $l_{n,m'}^{(max)}$  es elegido de modo que  $\varsigma_{n,m',l_{n,m'}^{(max)}} \leq \varsigma_{max}$  y  $l_{n,m'}^{(max)} \leq l_{max}$ . Los valores de  $\varsigma_{max}$  y  $l_{max}$  deben ser elegidos según la precisión deseada en la síntesis del aire.

Puede verse un esquema de la implementación de este bloque en la figura 5.1.3, así como sus entradas y salidas. Debe notarse que la presión acústica (fuerza por unidad de área) y la densidad superficial de fuerza son exactamente lo mismo, por lo que la salida de este bloque es compatible con el vector de fuerzas compartido por todos los bloques.

**5.1.3. Módulo de interacción con el palo.** Este módulo recibe como entrada el vector  $\bar{y}$  y la salida es el vector de fuerza,  $\bar{f}$ . Los parámetros de este bloque son:  $m_p$  la masa efectiva del palo,  $r_p$  la distancia entre el centro de la membrana y la posición de impacto del palo, los parámetros de interacción  $\alpha$   $k$  y  $\lambda$ , y como variables de estado (condiciones iniciales) la altura y velocidad vertical del palo. Implementaremos directamente la ecuación 3.3.26 usando estimadores de  $g(t)$  y  $\dot{g}(t)$ , mientras que la evolución de las variables de estado del palo se resolverán mediante la transformación invariante al impulso.

Al aplicar la transformación invariante al impulso, las ecuaciones de la evolución del palo son:

$$\begin{cases} dy_p [i+1] = dy_p [i] - \frac{F_p [i]}{m_p F_s} \\ y_p [i+1] = y_p [i] + \frac{dy_p [i+1]}{F_s} \end{cases}$$

Donde  $dy_p [i]$  representa la velocidad del palo en el instante  $\frac{i}{F_s}$ . La altura de la membrana en el punto de impacto ( $y_m [i]$ ) la calculamos utilizando la transformada inversa de S-L de la siguiente manera;

$$y_m [i] = \sum_{n,m} \bar{y}_{n,m} [i] K_{n,m} (r_p, 0)$$

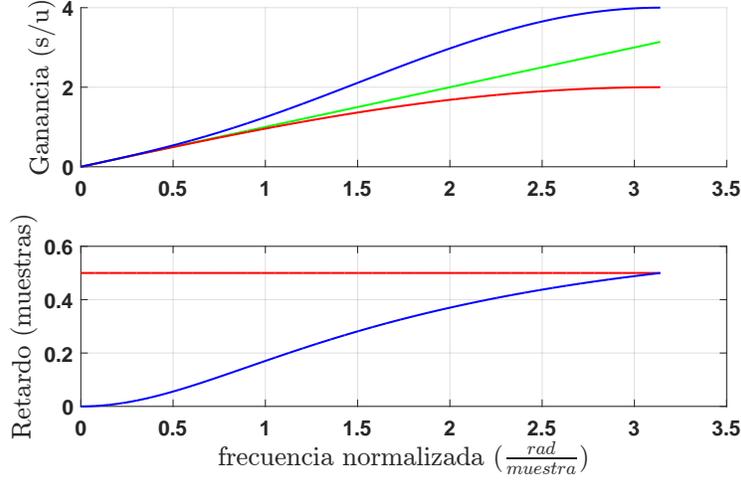


FIGURA 5.1.4. Gráfica comparativa de implementaciones de derivadas en tiempo discreto (se supone  $F_s = 1$ ). Arriba gráfica de ganancias de los filtros contra frecuencia normalizada de diferencias finitas hacia atrás (rojo), el filtro de la ecuación 5.1.1 (azul) y la ganancia ideal de la derivada (verde). Abajo el retardo de los filtros respecto a la derivada ideal.

La velocidad vertical de la membrana en el punto de impacto en el instante  $\frac{i}{F_s}$  ( $dy_m[i]$ ) la estimamos usando los últimos tres valores de la posición de la siguiente manera:

$$(5.1.1) \quad dy_m[i] = \left( \frac{3}{2}y_m[i] - 2y_m[i-1] + \frac{1}{2}y_m[i-2] \right) F_s$$

Lo que es equivalente a trazar una parábola que pase por los tres últimos valores de la posición y evaluar su derivada en el punto de interés. Este estimador tiene la ventaja (respecto a diferencias finitas hacia atrás) de tener un retardo de fase nulo a bajas frecuencias (ver figura 5.1.4). Con dichos datos puede definirse fácilmente la fuerza como:

$$F_p[i] = - \left( [y_m[i] - y_p[i]]_+ \right)^\alpha (k + \lambda \{dy_m[i] - dy_p[i]\})$$

Y el vector de salida del módulo:

$$\bar{f}_{n,m}[i] = K_{n,m}(r_p, 0) F_p[i]$$

Debe notarse que la fuerza es nula siempre que  $y_m[i] < y_p[i]$ , o sea, cuando el palo no está en contacto con la membrana. Cuando se cumple dicha condición, el módulo de interacción con el palo no contribuye a la suma total de fuerzas que se usan como entrada al bloque de la membrana.

**5.1.4. Módulo de salida.** El módulo de salida lo implementamos simplemente aplicando la transformada inversa de S-L al vector  $\bar{y}$ . Calculamos las constantes  $K_{n,m}(r_a, \varphi_a)$  para la posición de adquisición deseada y la salida en el instante  $\frac{i}{F_s}$  queda definida como:

$$y_a[i] = \sum_{n,m} K_{n,m}(r_a, \varphi_a) \bar{y}_{n,m}[i]$$

Este módulo podría ser alterado cambiando las constantes ( $K_{n,m}(r_a, \varphi_a)$ ) por funciones de transferencia que aproximen la transferencia de cada modo a (por ejemplo) la presión en un punto del espacio, de esta manera podría tenerse en cuenta la radiación de la membrana en el modelo.

## 5.2. Madera

Para la síntesis del sonido de madera (en el que el palo golpea el costado del tambor y no la membrana) diseñamos un algoritmo de análisis síntesis basado en un modelo ARMA (Auto Regressive Moving Average)[44] alimentado por ruido blanco multiplicado por una envolvente y filtrado por un filtro dinámico [45, 8]. Este enfoque se debe a la gran complejidad que presenta realizar un modelo físico apropiado para la vibración de la madera y luego implementarlo computacionalmente. Además, este sonido, por ser de corta duración y rico en componentes espectrales, no es percibido tonalmente, sino simplemente como un golpe. Este método de síntesis es aplicable a una señal de audio particular (llamémosle  $x[n]$ ), logrando resintetizar audios que son perceptivamente similares al original.

**5.2.1. Modelo de síntesis.** El modelo de síntesis se divide en 3 partes (figura 5.2.1), un generador de ruido blanco, un filtro dinámico, y un filtro ARMA. El generador ruido blanco lo conseguimos generando una serie de números aleatorios con distribución Gaussiana de varianza unitaria, el filtro dinámico modela la mayor velocidad con la que los componentes espectrales de mayor frecuencia decaen, y por eso es un filtro simple con un solo polo (variable) y una ganancia variable, de la forma:

$$(5.2.1) \quad H_d(z, n) = g[n] \frac{1 - p[n]}{z - p[n]} z$$

Los parámetros variables del filtro los asumiremos evolucionando según la siguiente familia de funciones:

$$(5.2.2) \quad \begin{cases} g[n] = a_1 e^{-d_1 n} + a_2 e^{-d_2 n} \\ p[n] = 1 - a_3 e^{-d_3 n} \end{cases}$$

Con  $d_i \geq 0$  y  $a_i \geq 0$ . Por lo que cuando el tiempo tiende a infinito, la ganancia se hace nula, y el polo del filtro se acerca a la unidad de modo que las frecuencias más altas se extinguen más rápidamente. El filtro ARMA es una fracción de polinomios e imita la parte estática de la forma espectral del sonido.

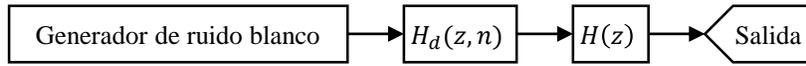


FIGURA 5.2.1. Esquema del modelo de síntesis de madera.

**5.2.2. Estimación del modelo ARMA.** El primer paso del análisis es estimar un modelo ARMA de la forma:

$$(5.2.3) \quad H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

a partir de la señal real de medidas sobre la madera. Es deseable que las raíces de ambos polinomios ( $A(z)$  y  $B(z)$ ) estén dentro del círculo unitario, de esta manera se asegura la estabilidad del filtro  $H(z)$  y de su filtro inverso. La estimación será hecha usando el método de error de predicción [46, 47] restringiendo las raíces de ambos polinomios a permanecer dentro del círculo unitario. El método de error de predicción minimiza el error (suma cuadrática) entre cada muestra y la predicción hecha para dicha muestra usando el modelo y las muestras anteriores. Dicho algoritmo está implementado en las versiones de MatLab en la función `armax`.

**5.2.3. Estimación del ruido de excitación.** Una vez estimado el modelo  $H(z)$  es posible aplicar el filtro inverso a la señal de audio del golpe de madera y obtener una señal cuya transformada  $z$  es:

$$(5.2.4) \quad Y(z) = H^{-1}(z)X(z)$$

La cual, si se usara para alimentar el modelo ARMA, se obtendría una reconstrucción perfecta de la señal original. La señal  $y[n]$  es una versión “blanqueada” de la señal  $x[n]$ , o sea que los componentes frecuenciales están balanceados. Para nuestro modelo de resíntesis  $y[n]$  debería ser simplemente ruido blanco multiplicado por el filtro dinámico. Para ajustar los valores del filtro dinámico hicimos un análisis en tiempo y frecuencia. Tomamos ventanas temporales de tamaño  $N_{win}$  y les calculamos la densidad de potencia espectral (PSD por sus siglas en inglés), y calculamos los valores de  $g$  y  $p$  del filtro  $H_d(z, n)$  de modo que la respuesta del filtro mejor se ajuste a dicha PSD. Hicimos esto para ventanas temporales cubriendo toda la señal y luego encontramos los valores de los parámetros haciendo un ajuste según las ecuaciones 5.2.2.

*5.2.3.1. Análisis por ventanas.* La señal  $y[n]$  es analizada en ventanas de largo  $N_{win}$ , compartiendo  $N_{ol}$  muestras las ventanas adyacentes. O sea, la  $i$ -ésima ventana abarca el conjunto de muestras  $[1 + i(N_{win} - N_{ol}), N_{win} + i(N_{win} - N_{ol})]$ . A cada ventana se le calcula la PSD, y es usada para ajustar los parámetros  $g$  y  $p$  en la ecuación correspondiente a:

$$(5.2.5) \quad |H_d(e^{j\theta})|^2 = \frac{g^2(1-p)^2}{1+p^2-2p\cos(\theta)}$$

obteniendo los valores de  $g_i$  y  $p_i$  correspondientes a la ventana analizada.

De modo que tenemos una aproximación (estática) de los parámetros del filtro dinámico por ventanas. Suponemos que cada valor encontrado aproxima el valor del filtro dinámico en medio de la ventana, o sea:

$$\begin{cases} g \left[ i (N_{win} - N_{ol}) + \frac{1+N_{win}}{2} \right] \approx g_i \\ p \left[ i (N_{win} - N_{ol}) + \frac{1+N_{win}}{2} \right] \approx p_i \end{cases}$$

Para todos los valores de  $i$ . Por lo que es posible hacer un ajuste de las ecuaciones 5.2.2 para encontrar los valores de  $a_i$  y  $d_i$ .



## Resultados

### 6.1. Resultados de las medidas

Tomamos medidas de la evolución de la altura de la membrana para los tres tambores, las cuales fueron analizadas según el método propuesto en la sección 4.3. Gracias a que el sistema es capaz de tomar medidas sincronizadas con la excitación de la membrana<sup>1</sup>, tomamos cada medida 16 veces y la promediamos de modo de reducir el ruido no correlacionado con la señal en un factor de 4 (12dB). Mostramos espectrogramas representativos de las medidas tomadas. En la figura 6.1.1 se muestra un espectrograma (hasta 5kHz) de la señal medida sobre un tambor chico después del proceso de promediado. Si bien la relación señal ruido es razonable ( $\sim 54\text{dB}$  entre el pico de la señal y el piso del ruido), le aplicamos el algoritmo de Wiener de reducción de ruido descrito en la subsección 4.3.1 (logrando una SNR de  $\sim 70\text{dB}$ ).

Una vez procesado por el algoritmo de reducción de ruido, estimamos las frecuencias predominantes de la señal y sus velocidades de decaimiento utilizando el

---

<sup>1</sup>i.e. podemos repetir la toma de datos de modo que el impacto se produzca a exactamente al mismo tiempo desde el inicio de la toma de datos.

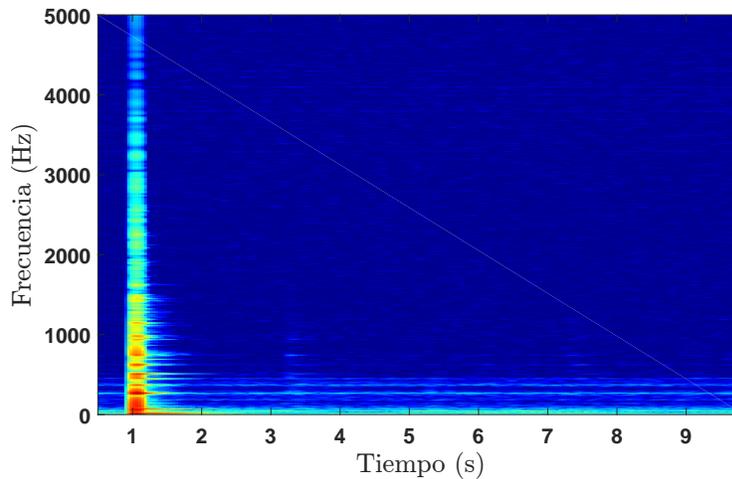


FIGURA 6.1.1. Espectrograma de la señal medida sobre la membrana de un chico.  $F_s = 400\text{kHz}$ ,  $N_{win} = 2^{17}$ ,  $N_{ol} = 7 \times 2^{14}$ .

Frecuencia mínima (Hz)	Frecuencia máxima (Hz)	Orden
0	40	13
40	660	17
660	1320	29
1320	2300	49
2300	4000	58

CUADRO 1. Datos de las bandas utilizadas para el análisis de la señal del chico. Se muestran las frecuencias máximas y mínimas y el orden que resultó de minimizar  $S_j^{(i)}$  (ecuación 4.3.5).

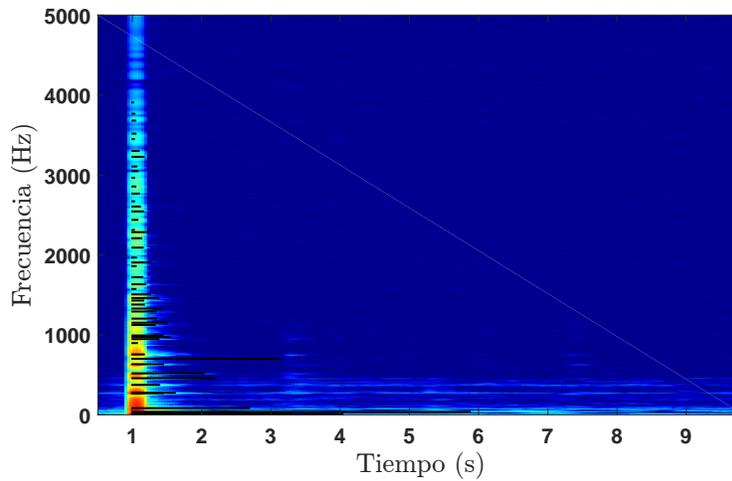


FIGURA 6.1.2. Espectrograma de la señal medida sobre la membrana de un chico con el algoritmo de reducción de ruido. En líneas negras se muestran las frecuencias detectadas por el algoritmo de detección de frecuencias. El largo de dichas líneas es inversamente proporcional a la velocidad de decaimiento de cada modo.  $F_s = 400\text{kHz}$ ,  $N_{win} = 2^{17}$ ,  $N_{ol} = 7 \times 2^{14}$ .

algoritmo propuesto en la subsección 4.3.2. Un espectrograma de la señal procesada junto al resultado del algoritmo de estimación de frecuencias es mostrado en la figura 6.1.2, en esta figura superponemos al espectrograma líneas correspondientes a cada una de las frecuencias estimadas cuyo largo es inversamente proporcional a la velocidad de decaimiento estimada para dicha frecuencia, mostramos además en la figura 6.1.3 una ampliación de la figura anterior de modo de poder apreciar mejor el resultado del algoritmo. Puede verse que la precisión del algoritmo es muy buena, aunque ciertos modos demasiado débiles o de velocidad de decaimiento demasiado rápida no son detectados, y algunos modos existentes pueden ser detectados por duplicado. Usamos 5 bandas para el análisis de esta señal, las frecuencias límite de cada banda y el orden de cada modelo lineal se muestra en el cuadro 1.

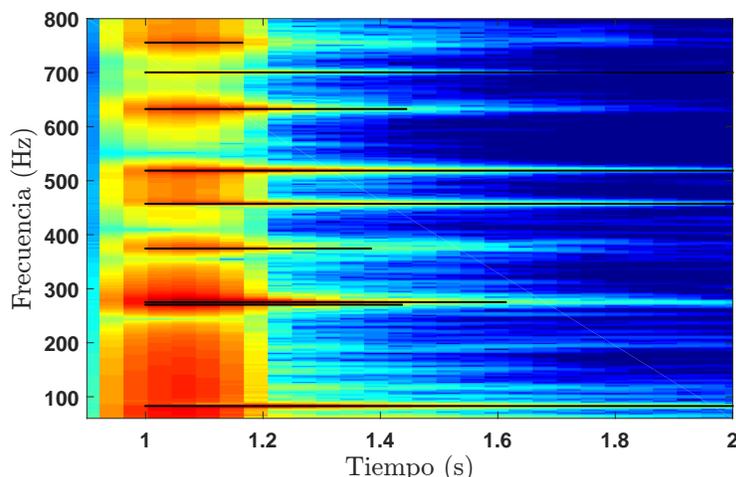


FIGURA 6.1.3. Detalle del espectrograma de la figura 6.1.2.

Mostramos en las figuras 6.1.4 y 6.1.6 espectrogramas similares al de la figura 6.1.2 pero en este caso para el repique y el piano respectivamente. Asimismo mostramos detalles de zonas interesantes del espectro de ambos tambores en las figuras 6.1.5 y 6.1.7.

El algoritmo de detección de frecuencias propuesto es, en términos generales, muy eficaz, permitiendo reconocer incluso modos muy cercanos en frecuencia. Sin embargo, una mala elección de las bandas de frecuencia (por ejemplo una banda que tenga muchos modos con velocidades de decaimiento muy dispares) puede influenciar negativamente el resultado final, así como variaciones del índice  $n_o^{(i)}$  (punto de inicio del análisis para cada banda) pueden atenuar los modos que decaen más rápidamente. Para las bandas de frecuencia más altas este número debió ser reducido respecto al propuesto para conseguir un mejor resultado. Además, en las bandas de más alta frecuencia los polos del modelo lineal ajustado tienen a aglomerarse cerca de la frecuencia de Nyquist<sup>2</sup> por lo que la resolución se ve deteriorada, una solución a este problema es aplicar el método propuesto en [48], que consiste básicamente en modular la señal en estudio por una exponencial compleja para llevar la banda de frecuencia de interés a la región de continua<sup>3</sup>.

## 6.2. Resultados de la síntesis

Encontramos los parámetros para cada uno de los tres tambores estudiados usando el método descrito en la sección 4.4 y usamos el algoritmo de síntesis explicado en la sección 5.1. Para usar el método de ajuste debimos ignorar algunas frecuencias detectadas por el algoritmo de detección de modos. Los modos de más baja frecuencia ( $\lesssim 50\text{Hz}$ ) fueron ignorados debido a que son más bajos de lo que es posible predecir con el modelo (con parámetros razonables) y suponemos que se

<sup>2</sup> $\frac{1}{2}F_s$ , o  $-1$  en el plano  $z$ .

<sup>3</sup>Frecuencia nula.

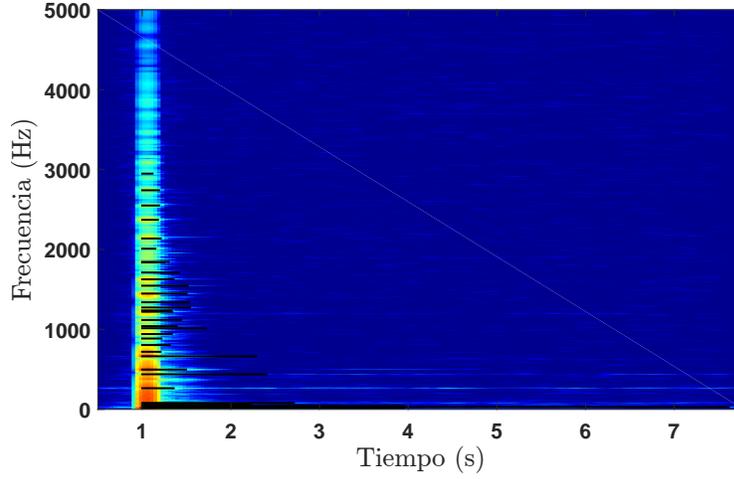


FIGURA 6.1.4. Espectrograma de la señal medida sobre la membrana de un repique con el algoritmo de reducción de ruido. En líneas negras se muestran las frecuencias detectadas por el algoritmo de detección de frecuencias. El largo de dichas líneas es inversamente proporcional a la velocidad de decaimiento de cada modo.  $F_s = 400\text{kHz}$ ,  $N_{win} = 2^{17}$ ,  $N_{ol} = 7 \times 2^{14}$ .

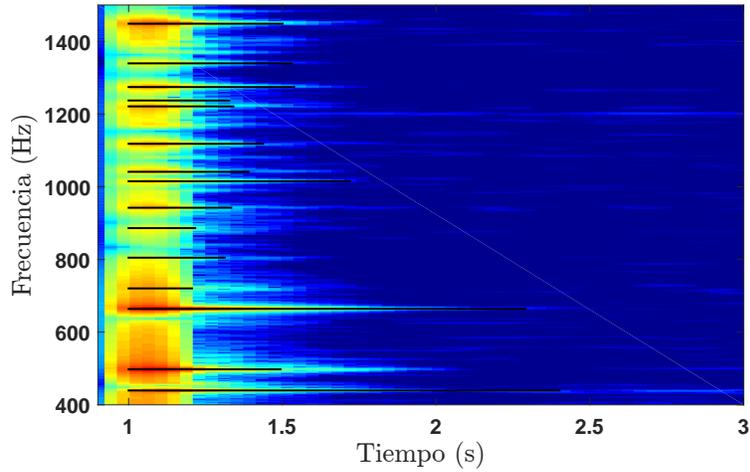


FIGURA 6.1.5. Detalle del espectrograma de la figura 6.1.4.

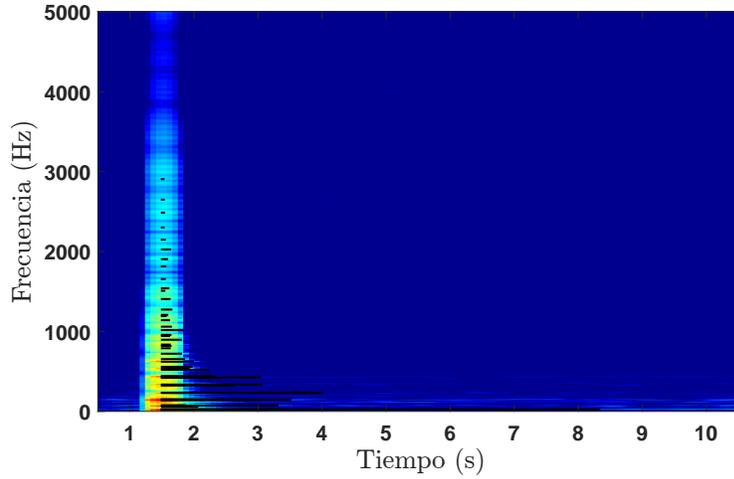


FIGURA 6.1.6. Espectrograma de la señal medida sobre la membrana de un piano con el algoritmo de reducción de ruido. En líneas negras se muestran las frecuencias detectadas por el algoritmo de detección de frecuencias. El largo de dichas líneas es inversamente proporcional a la velocidad de decaimiento de cada modo.  $F_s = 192\text{kHz}$ ,  $N_{win} = 2^{17}$ ,  $N_{ol} = 7 \times 2^{14}$ .

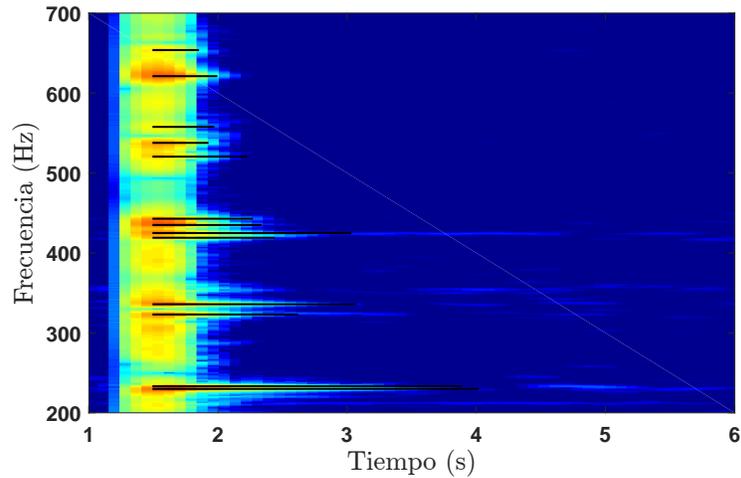


FIGURA 6.1.7. Detalle del espectrograma de la figura 6.1.6.

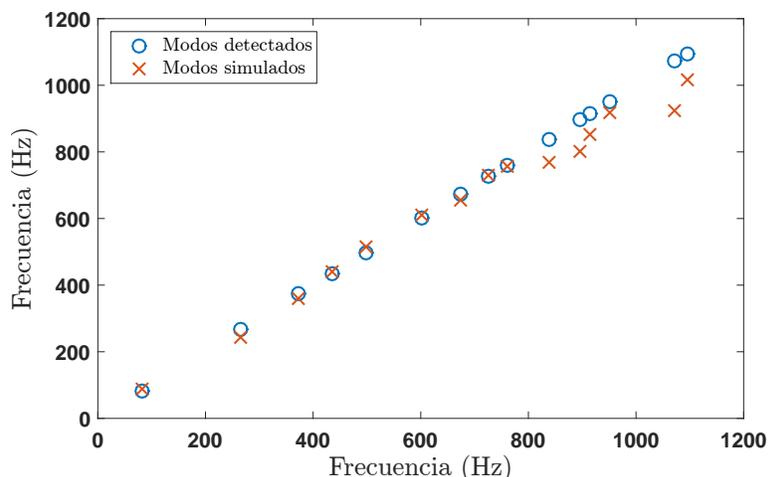


FIGURA 6.2.1. Frecuencias detectadas en las mediciones (círculos), y simuladas por el modelo (cruces).

deben a factores externos al tambor tales como reverberancias de la sala en la que fueron tomadas las medidas (la cual no era anecoica) y al movimiento del tambor todo debido a la elasticidad del apoyo que fue utilizado. Además, para los pares de frecuencia demasiado cercanas, sólo fue tomada en cuenta una de ellas (la de menor velocidad de decaimiento), dado que podemos suponer que se debe a un desdoblamiento de los modos con dependencia angular que el modelo no es capaz de predecir, o a un artificio del algoritmo de análisis que detecta un modo que es en realidad único por duplicado.

Al ajustar los parámetros del modelo (teniendo en cuenta la interacción con el aire) para los valores de frecuencia y velocidad de decaimiento detectados en la grabación del chico, encontramos que el modelo reproduce muy bien las 9 primeras frecuencias (ver figura 6.2.1). Con los parámetros ajustados para el modelo completo podemos calcular las frecuencias desacopladas de cada subsistema (membrana y aire) la frecuencia más baja de la caja de resonancia corresponde a unos 99Hz y la de la membrana a unos 296Hz. Ambos valores se ven alterados al considerar el sistema conjunto (debido a la interacción), pero ver los valores desacoplados permite interpretar cuál es el origen físico de cada una de estas frecuencias.

El artificio de cambiar la velocidad del sonido en el modelo (propuesto en la sección 4.4) compensa por la idealización de tomar la caja cilíndrica y permite reproducir mejor las frecuencias presentes en el tambor. La velocidad del sonido en el aire ajustada resultó un 17% más lenta que el valor de referencia ( $343\text{m/s}$ ), lo cual es razonable teniendo en cuenta las grandes variaciones en el ancho de la caja de resonancia que tiene el tambor (ver el cuadro 1 del capítulo 4). Un espectrograma de la síntesis es mostrado en la figura 6.2.2, la cual muestra gran similitud con su contraparte experimental (figura 6.1.1), lo que es mejor apreciado en los detalles de las figuras 6.2.3 y 6.1.3.

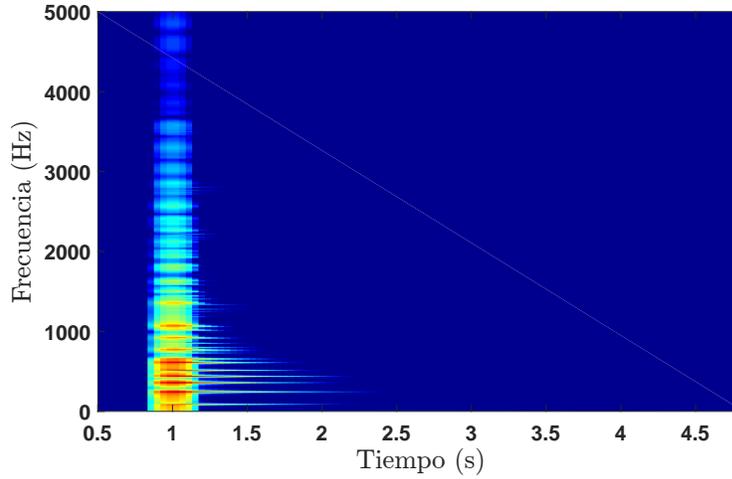


FIGURA 6.2.2. Espectrograma de la señal sintetizada de la altura de un punto de la membrana para un chico.  $F_s = 96\text{kHz}$ ,  $N_{win} = 2^{15}$ ,  $N_{ol} = 7 \times 2^{12}$ .

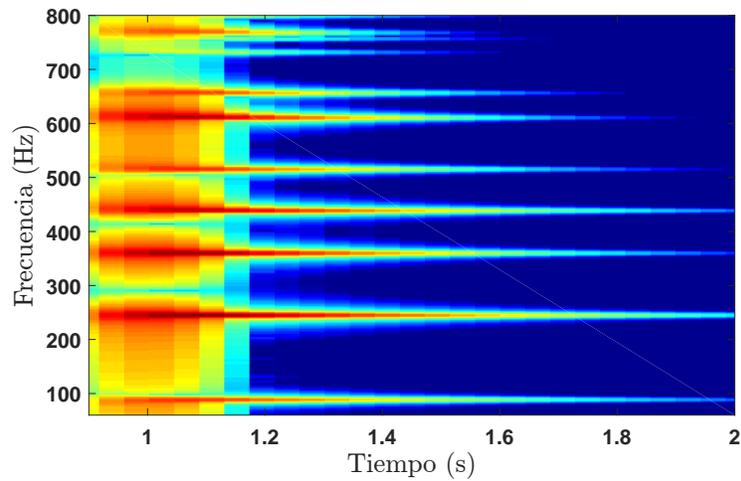


FIGURA 6.2.3. Detalle del espectrograma de la figura 6.2.2.

Para poder comprender mejor el efecto que tiene la caja de resonancia sobre el sonido del tambor, realizamos simulaciones en las que no se implementó la interacción con el aire manteniendo los mismos parámetros para la membrana que se ajustaron anteriormente. En las figuras 6.2.4 y 6.2.5 se muestra el espectrograma

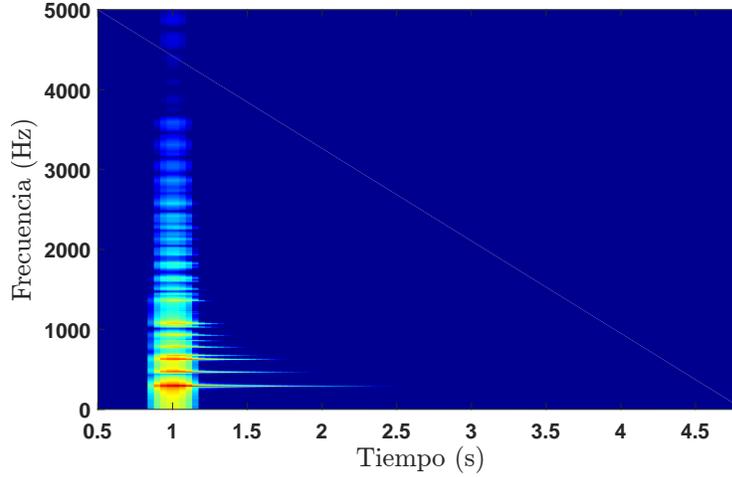


FIGURA 6.2.4. Espectrograma de la señal sintetizada de la altura de un punto de la membrana para un chico apagando el módulo de cavidad de aire en el algoritmo de síntesis.  $F_s = 96\text{kHz}$ ,  $N_{win} = 2^{15}$ ,  $N_{ol} = 7 \times 2^{12}$ .

del resultado de dicha simulación y un detalle de este espectrograma respectivamente. Al comparar estos resultados con la síntesis con aire pueden apreciarse dos grandes diferencias, la simulación teniendo en cuenta la interacción con el aire es mucho más rica en componentes frecuenciales debido los modos que aporta la caja de resonancia; además, las frecuencias correspondientes a los modos normales de la membrana se ven alteradas debido a la interacción. Otra diferencia que puede apreciarse mirando las series temporales de ambos casos (figura 6.2.6), es la amplitud de la oscilación de la membrana, en el caso con aire la oscilación es menor debido a la energía transferida a la caja de resonancia que no está siendo tenida en cuenta en el caso sin aire.

Realizamos el mismo tratamiento para los demás tambores, obteniendo resultados similares. En todos los casos la frecuencia fundamental de la caja de resonancia resultó más grave que la de la membrana, lo que suponemos que aporta gran parte del timbre característico de los tambores del candombe uruguayo.

### 6.3. Análisis síntesis de madera

Para realizar la resíntesis de los sonidos de madera, usamos el procedimiento propuesto en la sección 5.2, partiendo de grabaciones acústicas realizadas sobre los tres tambores. Mostraremos los pasos intermedios del algoritmo para la resíntesis de la grabación hecha con un tambor chico.

Partimos de la señal medida  $x[n]$  cuyo espectrograma se muestra en la figura 6.3.1. Puede observarse que hay ruido presente en la señal al existir frecuencias que no decaen hacia el final de la señal. Puede verse que a partir de los  $\sim 300\text{ms}$  la

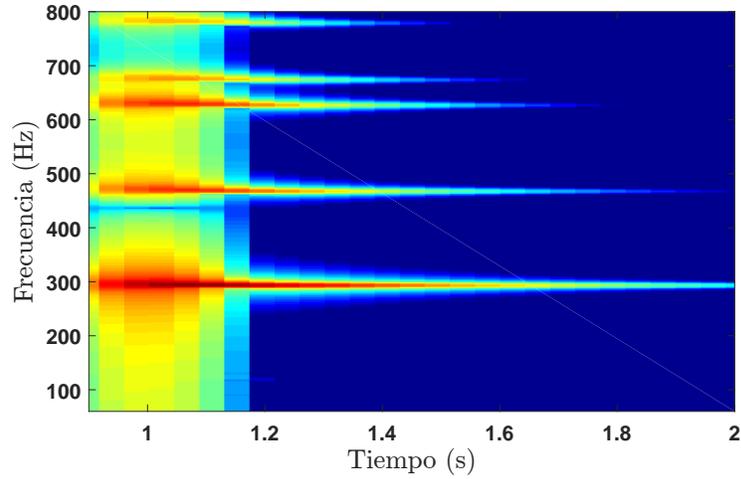


FIGURA 6.2.5. Detalle del espectrograma de la figura 6.2.4.

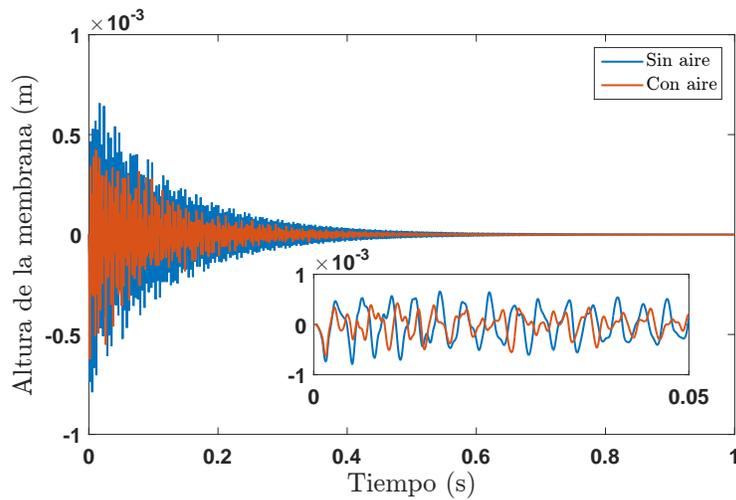


FIGURA 6.2.6. Evolución temporal sintetizada de la altura de un punto de la membrana para el caso con aire (naranja) y sin aire (azul).

señal tiene una potencia comparable con la del ruido, por lo que todos los ajustes serán hechos teniendo en cuenta la señal sólo hasta ese punto.

El primer paso del algoritmo de resíntesis es estimar el modelo ARMA (ecuación 5.2.3) con el algoritmo de error de predicción: utilizamos un orden de 50 para el polinomio  $A(z)$  y un orden de 15 para el polinomio  $B(z)$ . La razón de la diferencia

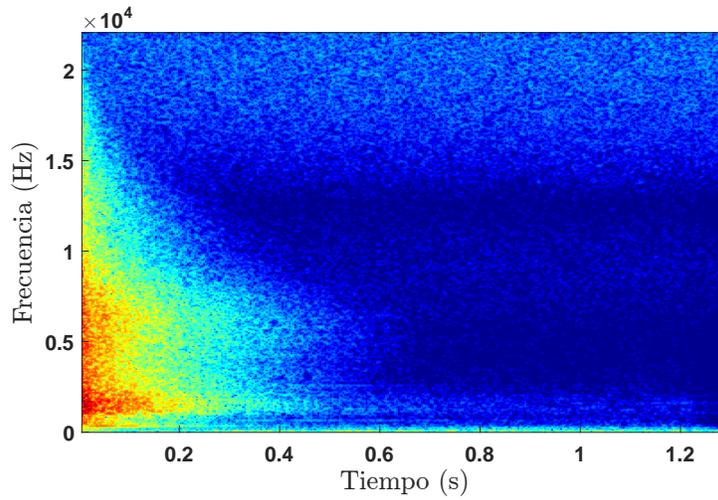


FIGURA 6.3.1. Espectrograma de la señal  $x[n]$ , medición acústica de un sonido de madera sobre un chico.  $F_s = 44,1\text{kHz}$ ,  $N_{win} = 630$ ,  $N_{ol} = 473$ .

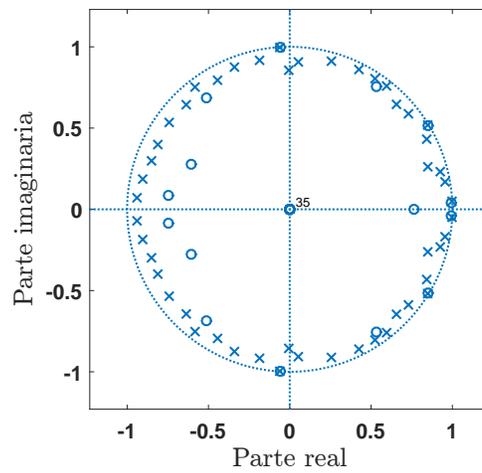


FIGURA 6.3.2. Representación de ceros y polos del modelo ARMA ajustado a la señal real. Los polos se muestran con cruces, mientras que los ceros se muestran con círculos, aparece también el círculo unitario dibujado a modo de referencia.

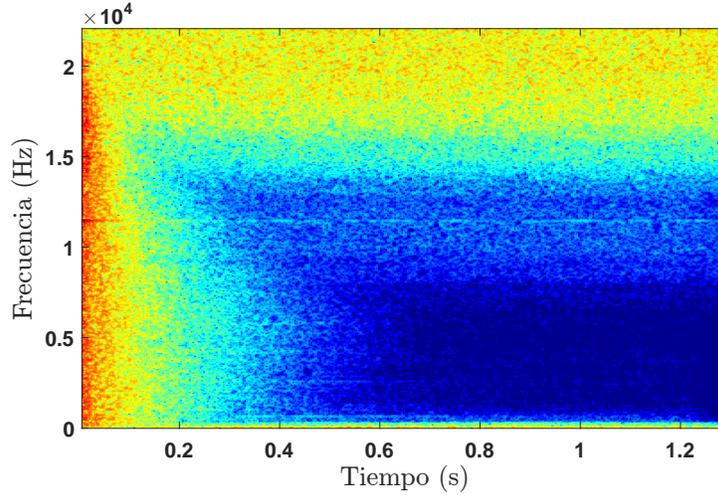


FIGURA 6.3.3. Espectrograma de la señal  $y[n]$  resultado de filtrar la señal original por el filtro ARMA inverso.  $F_s = 44,1\text{kHz}$ ,  $N_{win} = 630$ ,  $N_{ol} = 473$ .

en los órdenes es que de usar un orden mayor para  $B(z)$  más de sus raíces se acercarán al círculo unitario, obteniendo una respuesta frecuencial del filtro inverso con picos pronunciados, lo que dificulta el ulterior análisis de la señal  $y[n]$ . En la figura 6.3.2, se muestra el diagrama de ceros (raíces de  $B(z)$ ) y polos (raíces de  $A(z)$ ). Una vez estimado  $H(z)$  calculamos  $y[n]$  cuya transformada  $z$  está dada por la ecuación 5.2.4. Mostramos en la figura 6.3.3 un espectrograma de dicha señal.

Con la señal  $y[n]$  realizamos el análisis descrito en la subsección 5.2.3.1. Para ello es necesario ajustar la respuesta de un filtro como en la ecuación 5.2.1 para cada ventana temporal. Usamos ventanas de tamaño  $N_{win} = 1024$  y una cantidad de muestras solapadas de  $N_{ol} = 960$ . Mostramos el ajuste de la potencia espectral correspondiente a la ventana  $i = 85$  (correspondiente a un tiempo de unos  $\sim 134\text{ms}$ ) en la figura 6.3.4. El ajuste está hecho usando pesos correspondientes a la respuesta en frecuencia del filtro ARMA,  $|H(e^{j\theta})|$ , de modo de dar mayor importancia a las frecuencias que serán amplificadas en el resultado final, y menor importancia a las que serán atenuadas. Si bien las diferencias entre los datos y el ajuste son significativas, los datos provienen de una señal cuyo espectro es ruidoso, así como el resultado de la síntesis también lo será. Usar un filtro con más parámetros resultaría en un mejor ajuste de la potencia espectral en cada ventana, pero la evolución de los parámetros de dicho filtro sería mucho más compleja y debería ser analizada caso a caso. El método propuesto resulta más general y suficiente para modelar los rasgos más importantes del timbre del sonido de madera.

Una vez realizado el ajuste de los parámetros del filtro  $H_d(z, n)$  para cada ventana, debemos ajustar las funciones de evolución de los parámetros  $g[n]$  y  $p[n]$  según la ecuación 5.2.2. Mostramos en la figura 6.3.5 el ajuste de la función  $g[n]$  y los valores de  $g_i$  (estimados con el ajuste por ventanas) en escala logarítmica. Puede apreciarse claramente el ataque inicial con mayor velocidad de decaimiento ajustado

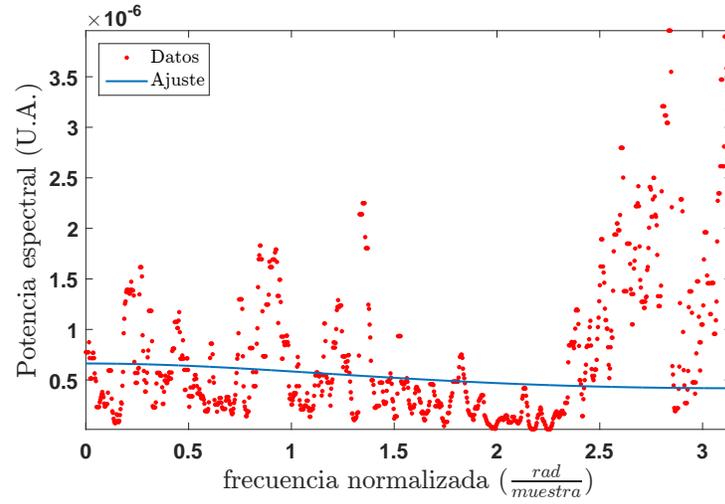


FIGURA 6.3.4. Datos de potencia espectral de la señal  $y[n]$  (puntos rojos) y ajuste según la ecuación 5.2.5 (línea azul) para una ventana centrada en  $\sim 134\text{ms}$ .

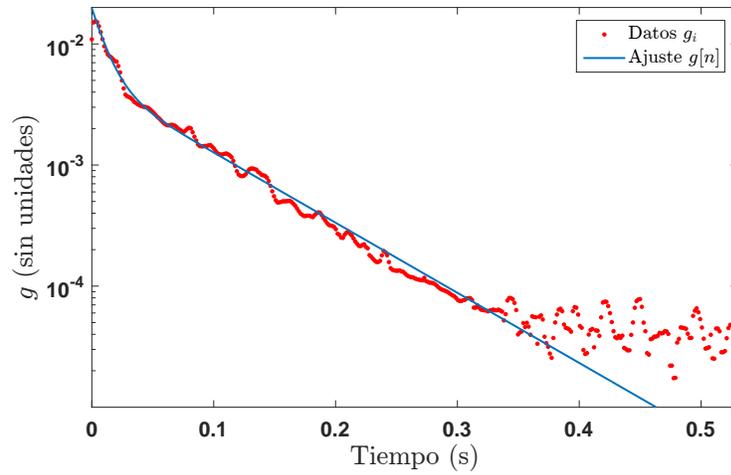


FIGURA 6.3.5. Valores de  $g_i$  estimados (puntos rojos) hallados por ventanas, y valores de  $g[n]$  (línea azul) ajustados según la ecuación 5.2.2. El eje de las ordenadas se muestra en escala logarítmica.

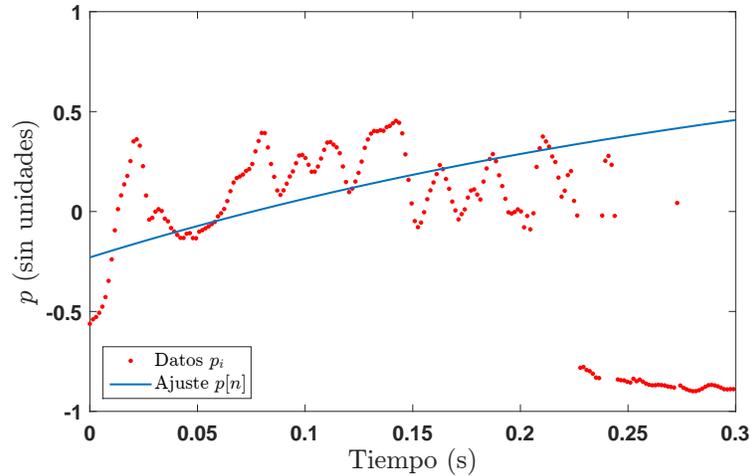


FIGURA 6.3.6. Valores de  $p_i$  estimados (puntos rojos) hallados por ventanas, y valores de  $p[n]$  (línea azul) ajustados según la ecuación 5.2.2.

gracias a la forma doble exponencial de  $g[n]$ , y puede verse también como a partir de unos  $\sim 300$ ms el piso de ruido evita que los valores de  $g_i$  sigan disminuyendo exponencialmente, manteniéndose aproximadamente constantes. En la figura 6.3.6 mostramos el ajuste de la función  $p[n]$  y los valores de  $p_i$  (estimados con el ajuste por ventanas), el ajuste está hecho usando pesos correspondientes a la función  $g[n]$  ajustada previamente, de esta forma damos mayor importancia a los momentos en que la potencia del resultado final es mayor, y evitamos ajustar los últimos valores donde la potencia es demasiado pequeña y las propiedades espectrales del ruido de fondo afectan la estimación de los valores de  $p_i$ . Puede verse que la evolución de los valores de  $p_i$  es bastante más compleja que la función que la ajusta, sin embargo, por la corta duración del sonido un ajuste tendencial resulta suficiente para conseguir audios sintéticos perceptivamente iguales.

Una vez ajustados todos los parámetros del algoritmo, resintetizamos el sonido de madera de un chico, el espectrograma de la señal obtenida se muestra en la figura 6.3.7. Comparando los espectrogramas de las figuras 6.3.1 y 6.3.7, puede verse la gran coincidencia que hay entre ellos, con la ventaja de que el audio resintetizado carece de ruido de fondo.

Realizamos el mismo procedimiento para audios grabados sobre un repique y un piano, mostramos en la figura 6.3.8 los espectrogramas originales y resintetizados para los sonidos de madera de ambos tambores.

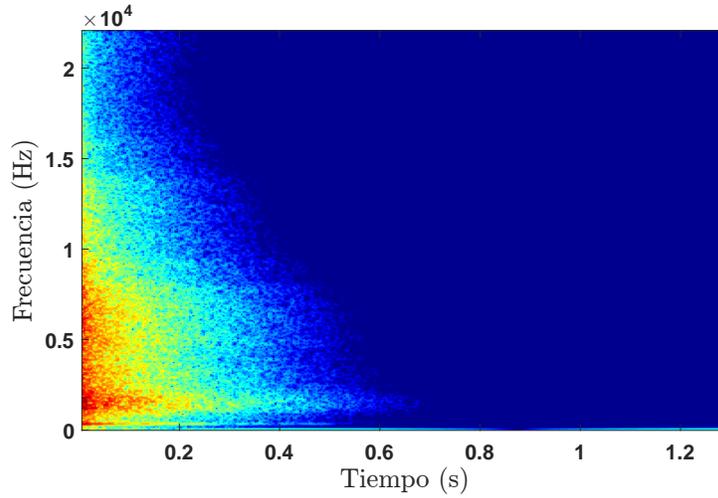


FIGURA 6.3.7. Espectrograma de la señal resintetizada del sonido de madera de un chico.  $F_s = 44,1\text{kHz}$ ,  $N_{win} = 630$ ,  $N_{ol} = 473$ .

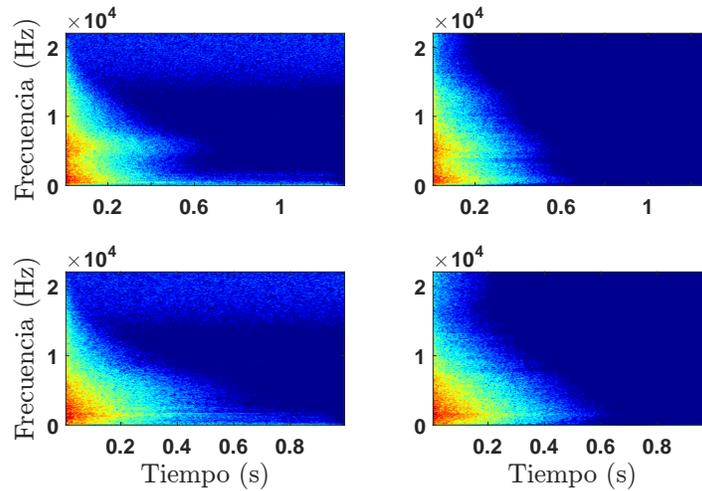


FIGURA 6.3.8. Espectrogramas de las señales medidas y resintetizadas de sonidos de madera de un repique y un piano. En la izquierda están los espectrogramas de las señales medidas mientras que la derecha los de las señales resintetizadas. Arriba están las señales correspondientes al repique mientras que abajo están las señales correspondientes al piano.  $F_s = 44,1\text{kHz}$ ,  $N_{win} = 630$ ,  $N_{ol} = 473$ .

## Conclusiones

*“Essentially, all models are wrong,  
but some are useful”*

*George Edward Pelham Box, 1987*

### 7.1. Contribuciones del trabajo

La interacción de la membrana con el aire en la bibliografía suele tener dos enfoques, simplificado o computacional. En [35], lo hacen de manera simplificada modelando al aire como un resorte y un amortiguador. En [49] suponen la presión en la cavidad (cerrada) constante, de modo que sólo la compresibilidad del aire es tenida en cuenta. Los trabajos que consideran la interacción completa, como [50], utilizan un enfoque de diferencias finitas que es mucho más costoso computacionalmente y no aporta resultados analíticos sobre la interacción. En todos los casos mencionados, estudiaron el caso de una cavidad cerrada. En el presente trabajo hicimos un desarrollo teórico que permite calcular de manera analítica el efecto de la interacción del aire sobre la membrana, el cual además es útil para implementar un algoritmo de síntesis basado en dichos resultados.

Derivamos un modelo no lineal (inspirado en el modelo propuesto en [35] para membranas) a una cuerda de guitarra. Dicho modelo no necesita medir ningún parámetro físico extra en comparación con el modelo lineal, por lo que con la misma información sobre el sistema real que en [33] podemos implementar un algoritmo de síntesis levemente más complejo que tiene en cuenta la no linealidad por modulación de tensión de la cuerda. Los resultados obtenidos son sensiblemente más realistas que los producidos por el modelo lineal. Además nuestro algoritmo no contiene bucles libres de retardo por lo que su implementación es directa, mientras que en el modelo propuesto en [35] es necesario resolver una ecuación no lineal implícita para cada paso temporal.

Aplicamos el método de la transformación funcional a la ecuación unidimensional de un xilófono de madera, cuya implementación resulta mucho más eficiente que el método de diferencias finitas utilizado en [18], además de que permite evaluar la evolución temporal de cualquier punto arbitrario sobre la barra.

Propusimos un algoritmo de síntesis para los sonidos de madera de los tambores del candombe uruguayo y un método eficaz para ajustar sus parámetros de modo que el resultado de la síntesis sea perceptivamente similar a algún audio de referencia. Este método resulta eficiente de implementar y el sonido resultante es muy realista. Sin embargo, las interpretaciones físicas de los parámetros del algoritmo son muy limitadas.

Desarrollamos un método innovador para medir vibraciones de instrumentos musicales, el que nos permitió medir directamente el desplazamiento en función del tiempo en un punto arbitrario de la membrana.

## 7.2. Discusión y trabajo futuro

A lo largo del desarrollo teórico de la tesis hicimos varias idealizaciones sobre el tambor para poder escribir las ecuaciones que lo modelan y sintetizar su sonido. Cada una de esas idealizaciones implica desprestigiar una parte de la realidad en pos de un modelo tratable. Esto no quiere decir que no se puedan desarrollar modelos que tomen en cuenta más detalles que el aquí desarrollado, sino que su elaboración implica un trabajo que excede los límites de esta tesis. Vamos a mencionar algunas de las idealizaciones más importantes, mencionar los efectos que tienen sobre el sonido y proponer formas de incorporarlas al modelo de síntesis.

**7.2.1. Simetría rotacional.** Durante todo el desarrollo del modelo, usamos ecuaciones que son invariantes ante rotaciones sobre el eje de simetría del tambor. Por esta causa, todos los modos normales que tienen una dependencia angular ( $n \neq 0$ ) están duplicados<sup>1</sup> y sólo es necesario elegir inteligentemente el sistema de referencia para poder evitar el modelado duplicado de modos (nosotros tomamos  $n \geq 0$ , y alineamos el punto de excitación de modo que de tener en cuenta los modos correspondientes a  $n < 0$  su evolución fuera idénticamente nula). De existir algún componente del tambor que rompa con dicha simetría, todos los modos duplicados se desdoblarían en dos frecuencias diferentes que tendrán características similares en tanto el rompimiento de la simetría sea leve.

Hay dos principales fuentes que pueden romper con la simetría del problema, la anisotropía de la tensión y la no uniformidad de la membrana.

*7.2.1.1. Anisotropía de la tensión.* La anisotropía de la tensión significa que la afinación del tambor no esté hecha de manera perfectamente igual en todas las direcciones, y si bien hay trabajos que se esfuerzan en afinar los tambores para cumplir mejor con el modelo, la realidad en una cuerda de tambores (y en la mayoría de los músicos que tocan membranófonos) es que cada intérprete afina su instrumento a oído, de manera manual y artesanal hasta que el sonido cumpla con sus expectativas, por lo que la anisotropía de la tensión siempre estará presente, y seguramente también una no uniformidad en la tensión.

Considerar este fenómeno implica cambiar en la ecuación 3.3.1 la tensión, que es un escalar, por un tensor de rango 2 que actúa entre la operación gradiente y la operación divergencia, que en dicha ecuación están simplificadas en el operador laplaciano[51]. Hecho este cambio, no es posible encontrar una transformación de Sturm-Liouville de forma analítica, por lo que para modificar el desarrollo usado debería resolverse el problema de SL numéricamente antes de implementar el algoritmo de síntesis.

*7.2.1.2. No uniformidad en la membrana.* Todos los parámetros físicos de la membrana que consideramos uniformes y constantes son, si se hila más fino, una función del punto material. Esto es especialmente cierto para los tambores del candombe uruguayo cuya membrana está hecha de cuero de vaca preparado a mano. Una vez más, resolver el problema de SL para funciones arbitrarias de los parámetros físicos no es posible analíticamente por lo que para mantener el algoritmo

---

<sup>1</sup>Existen dos modos linealmente independientes que comparten sus características espectrales.

de síntesis aquí propuesto, sería necesario resolver dicho problema numéricamente antes de correr el algoritmo de síntesis. Además estimar la forma en que varían los parámetros en la membrana sería un problema en sí mismo.

**7.2.2. Cavidad cilíndrica.** En el desarrollo de la interacción de la membrana con el aire en la subsección 3.3.3 aproximamos dicha cavidad como un cilindro perfecto. Si bien esto puede ser una muy buena representación para muchos membranófonos, para los tambores del *candombe* uruguayo esta aproximación separa apreciablemente el modelo de la realidad (ver cuadro 1 del capítulo 4). Esta separación provoca un desvío entre las frecuencias predichas y las reales. Implementamos una solución a primer orden que consta de variar la velocidad de sonido en el aire del modelo para acercar las frecuencias de los modos normales calculadas a las medidas sobre el tambor, sin embargo, la distribución de las frecuencias no será la misma. Esto puede generar grandes diferencias en el resultado final si en alguno de los dos casos una frecuencia del aire coincide con una frecuencia de la membrana y resuenan.

Para tener en cuenta otras formas de cavidad es necesario poder resolver el problema de SL para esa geometría. Investigar otro tipo de geometrías donde sea posible resolver el problema de SL de modo de aproximar mejor la forma real del tambor puede ser una línea de investigación interesante para mejorar los resultados analíticos y numéricos de este trabajo.

**7.2.3. Radiación al aire.** La radiación acústica al aire de la membrana y de la cavidad resonante a través de la boca opuesta a la membrana componen la mayor fuente de pérdida energética en el tambor. Su modelado es omitido en el modelo propuesto, aunque sus efectos son parcialmente modelados entre los parámetros de disipación ( $d_1$ ,  $d_3$  y  $q$ ) que debieron ser ajustados de modo de contemplar no sólo las pérdidas internas del sistema, sino también la radiación al aire. Esto genera una diferencia de las velocidades de decaimiento de los modos del modelo y los reales.

Modelar la radiación hacia el aire puede permitir, no solamente modelar mejor la síntesis de la evolución de la membrana en sí, sino también sintetizar el campo de presiones generado por el tambor (o sea, el sonido). Avances en este sentido pueden encontrarse en [52], en donde estudian el campo de presiones generado por una membrana sintetizada con el método de la transformación funcional.

### 7.3. Trabajo futuro en general

Por motivos de extensión, tiempo y dificultad, varios aportes interesantes que podrían haberse incluido en el presente trabajo no fueron hechos. Mencionamos algunos de los más interesantes a continuación.

**7.3.1. Modelado de la generación del sonido de madera.** El sonido de madera en los tambores del *candombe* es un sonido corto y de gran riqueza espectral, en el que prácticamente no se distinguen modos aislados. Se hicieron algunos intentos infructíferos de modelarlo basándonos en el modelo para campanas tubulares propuesto en [53]. Sin embargo, el sistema conformado por el cuerpo del tambor es mucho más complejo y no puede ser reducido a un modelo 2D uniforme. El grosor de la madera y la interacción no lineal entre las distintas tablas del cuerpo son los que dan la riqueza espectral del sonido resultante. Modelar ambas cosas implica un conocimiento y modelado profundo de la interacción entre los distintos componentes del cuerpo del tambor.

**7.3.2. Modelado de la interacción de la membrana con la mano.** En la confección del modelo de síntesis usamos como fuente de excitación modelos de interacción que aproximan la interacción como concentrada en un solo punto de la membrana. Si bien esta aproximación resulta razonable para el golpe de un palo, no lo es tanto para los golpes en los que se utilizan las manos directamente sobre la membrana. Modelar la interacción distribuida entre la mano y la membrana no sólo sería útil para los golpes en los que se golpea la membrana con la mano, sino también para los golpes en los que golpeando con el palo, el sonido de la membrana es apagado con la mano.

**7.3.3. Evoluciones más complejas de la posición del palo.** En la interpretación de los tambores del candombe, se usan algunos golpes de palo en los que se le aplica una fuerza de modo de conseguir sonidos diferentes, por ejemplo rebotes o presionar la membrana. Cuando esto es así la evolución de la posición del palo propuesta en la ecuación 3.3.27 no es válida, y sería necesario considerar la fuerza y el torque aplicados al palo por el intérprete, así como considerar al palo un cuerpo rígido y no simplemente una masa puntual.

**7.3.4. Determinación de los parámetros del palo.** En el modelo de síntesis hay varios parámetros referentes al palo y a la interacción entre el palo y la membrana (introducidos en la subsección 3.3.4). Dichos parámetros no alteran las frecuencias y velocidades de decaimiento del sistema, pero sí la energía entregada a cada modo durante el impacto. Es por esto que el timbre del audio resultante de la síntesis es sensible a variaciones en los valores de estos parámetros, los cuales fueron fijados mediante prueba y error para conseguir un sonido realista. La determinación empírica o teórica de dichos parámetros, y su dependencia con las distintas formas de interpretación aportarían herramientas para usar de forma más fácil el algoritmo de síntesis.

**7.3.5. Mejor sistema de medida.** El sistema de medida utilizado presentó varios inconvenientes para poder medir lo que realmente queríamos medir. La sala en la que tomamos medidas idealmente debería haber sido anecoica y aislada, sin embargo, no contamos con una sala de esas características por lo que las medidas que tomamos están contaminadas con la interacción entre la sala y la membrana, y con ruido acústico proveniente de fuera del laboratorio que ejerce fuerza sobre la membrana. Además, debido a que las mediciones de desplazamiento de la membrana las hicimos de forma absoluta, el movimiento rígido del tambor entero es registrado por nuestro montaje junto con las oscilaciones de la membrana. Mejorar el soporte utilizado para sostener el tambor y la punta de prueba es imprescindible para tomar medidas de mejor calidad que las mostradas en este trabajo.

## Bibliografía

- [1] Mäki-Patola T., Laitinen J., Kanerva A., Takala T. Experiments with virtual reality instruments // Proceedings of the 2005 conference on New interfaces for musical expression / National University of Singapore. — 2005. — P. 11–16.
- [2] Van Den Doel K., Kry P. G., Pai D. K. Foleyautomatic: physically-based sound effects for interactive simulation and animation // Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques / ACM. — 2001. — P. 537–544.
- [3] Turchet L., Serafin S., Dimitrov S., Nordahl R. Physically based sound synthesis and control of footsteps sounds // 13th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-10). — 2010. — P. 161–168.
- [4] Bouënard A., Wanderley M. M., Gibet S. Gesture control of sound synthesis: Analysis and classification of percussion gestures // Acta Acustica united with Acustica. — 2010. — Vol. 96, no. 4. — P. 668–677.
- [5] Lloyd D. B., Raghuvanshi N., Govindaraju N. K. Sound synthesis for impact sounds in video games // Symposium on Interactive 3D Graphics and Games / ACM. — 2011. — P. PAGE–7.
- [6] Smith J. O. Physical audio signal processing: For virtual musical instruments and digital audio effects. — 2012.
- [7] Cook P. R. Real sound synthesis for interactive applications. — CRC Press, 2002.
- [8] Aramaki M., Kronland-Martinet R. Analysis-synthesis of impact sounds by real-time dynamic filtering // Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on. — 2006. — Vol. 14, no. 2. — P. 695–705.
- [9] Huovilainen A., Välimäki V. New approaches to digital subtractive synthesis // Proceedings of the International Computer Music Conference, Barcelona, Spain. — 2005. — P. 399–402.
- [10] Beauchamp J. W. Analysis, synthesis, and perception of musical sounds. — Springer, 2007.
- [11] Smith J. O., Serra X. PARSHL: an analysis/synthesis program for non-harmonic sounds based on a sinusoidal representation. — CCRMA, Department of Music, Stanford University, 1987.
- [12] Depalle P., Garcia G., Rodet X. Tracking of partials for additive sound synthesis using hidden markov models // Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1993. ICASSP-93., 1993 IEEE International Conference on / IEEE. — Vol. 1. — 1993. — P. 225–228.
- [13] Kahrs M., Brandenburg K. Applications of digital signal processing to audio and acoustics. — Springer Science & Business Media, 1998. — Vol. 437.
- [14] Andrews G. R., Azcárate B. G. Negros en la nación blanca: historia de los afro-uruguayos, 1830-2010. — Linardi y Risso, 2011.
- [15] Ferreira L. Los tambores del candombe. — BPR Publishers, 1997.
- [16] Goldman G. Candombe: salve Baltasar!: la fiesta de reyes en el barrio sur de Montevideo. — Perro Andaluz Ediciones, 2003.
- [17] Bilbao S. Numerical Sound Synthesis: Finite Difference Schemes and Simulation in Musical Acoustics. — Wiley Online Library, 2009.
- [18] Chaigne A., Doutaut V. Numerical simulations of xylophones. i. time-domain modeling of the vibrating bars // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1997. — Vol. 101, no. 1. — P. 539–557.
- [19] Hiller L., Ruiz P. Synthesizing musical sounds by solving the wave equation for vibrating objects: Part 1 // Journal of the Audio Engineering Society. — 1971. — Vol. 19, no. 6. — P. 462–470.
- [20] Van den Doel K., Pai D. K. Modal synthesis for vibrating objects // Audio Anecdotes. AK Peter, Natick, MA. — 2003. — P. 8.

- [21] Karplus K., Strong A. Digital synthesis of plucked-string and drum timbres // *Computer Music Journal*. — 1983. — P. 43–55.
- [22] Fletcher N. H., Rossing T. *The physics of musical instruments*. — Springer Science & Business Media, 2012.
- [23] Jaffe D. A., Smith J. O. Extensions of the karplus-strong plucked-string algorithm // *Computer Music Journal*. — 1983. — P. 56–69.
- [24] Karjalainen M., Välimäki V., Jánosy Z. Towards high-quality sound synthesis of the guitar and string instruments // *Proceedings of the International Computer Music Conference / Citeseer*. — 1993. — P. 56–56.
- [25] Välimäki V., Pakarinen J., Erkut C., Karjalainen M. Discrete-time modelling of musical instruments // *Reports on progress in physics*. — 2005. — Vol. 69, no. 1. — P. 1.
- [26] Van Duyne S. A., Smith J. O. Physical modeling with the 2-d digital waveguide mesh // *Proceedings of the International Computer Music Conference / INTERNATIONAL COMPUTER MUSIC ASSOCIATION*. — 1993. — P. 40–40.
- [27] Kelloniemi A., Savioja L., Välimäki V. Simulation of room acoustics using 2-d digital waveguide meshes // *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2006. ICASSP 2006 Proceedings. 2006 IEEE International Conference on / IEEE*. — Vol. 5. — 2006. — P. V–V.
- [28] Trautmann L., Rabenstein R. *Digital sound synthesis by physical modeling using the functional transformation method*. — Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003.
- [29] Gabel R. A., Roberts R. A. *Signals and linear systems*. — John Wiley & Sons, 2009.
- [30] Bronshtein I., Semendiaev K., Rojas I. H., Bernardo E. A. *Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes*. — Mir, 1973.
- [31] Legge K., Fletcher N. Nonlinear generation of missing modes on a vibrating string // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1984. — Vol. 76, no. 1. — P. 5–12.
- [32] Tolonen T., Välimäki V., Karjalainen M. Modeling of tension modulation nonlinearity in plucked strings // *Speech and Audio Processing, IEEE Transactions on*. — 2000. — Vol. 8, no. 3. — P. 300–310.
- [33] Rabenstein R., Trautmann L. Digital sound synthesis of string instruments with the functional transformation method // *Signal Processing*. — 2003. — Vol. 83, no. 8. — P. 1673–1688.
- [34] Rossing T., Fletcher N. H. *Principles of vibration and sound*. — Springer Science & Business Media, 2012.
- [35] Avanzini F., Marogna R. A modular physically based approach to the sound synthesis of membrane percussion instruments // *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*. — 2010. — Vol. 18, no. 4. — P. 891–902.
- [36] Marogna R., Avanzini F. Physically-based synthesis of nonlinear circular membranes // *Proc. Int. Conf. Digital Audio Effects (DAFx-09)*. — 2009. — P. 373–379.
- [37] Bilbao S., Torin A., Chatziioannou V. Numerical modeling of collisions in musical instruments // *Acta Acustica united with Acustica*. — 2015. — Vol. 101, no. 1. — P. 155–173.
- [38] Godsill S., Rayner P., Cappé O. *Digital audio restoration*. — Springer, 2002.
- [39] Diniz P. S., Da Silva E. A., Netto S. L. *Digital signal processing: system analysis and design*. — Cambridge University Press, 2010.
- [40] Steiglitz K., McBride L. A technique for the identification of linear systems // *Automatic Control, IEEE Transactions on*. — 1965. — Vol. 10, no. 4. — P. 461–464.
- [41] McClellan J. H., Lee D. Exact equivalence of the steiglitz-mcbride iteration and iqml // *Signal Processing, IEEE Transactions on*. — 1991. — Vol. 39, no. 2. — P. 509–512.
- [42] Hawkins D. M. The problem of overfitting // *Journal of chemical information and computer sciences*. — 2004. — Vol. 44, no. 1. — P. 1–12.
- [43] Alaskan A. M., BAŞARAN B., Nalbat S. Structural and physicomechanical characteristics of leatherheads used in various percussion instruments. // *Journal of Textile & Apparel/Tekstil ve Konfeksiyon*. — 2013. — Vol. 23, no. 1.
- [44] Hayes M. H. *Statistical digital signal processing and modeling*. — John Wiley & Sons, 2009.
- [45] Aramaki M., Kronland-Martinet R. Analysis-synthesis of impact sounds // *Proceedings of the European Signal Processing Conference*. — na, 2004.
- [46] Åström K. J. Maximum likelihood and prediction error methods // *Automatica*. — 1980. — Vol. 16, no. 5. — P. 551–574.
- [47] Caines P. Prediction error identification methods for stationary stochastic processes // *Automatic Control, IEEE Transactions on*. — 1976. — Vol. 21, no. 4. — P. 500–505.

- [48] Karjalainen M., Esquef P. A. A., Antsalo P. et al. Frequency-zooming arma modeling of resonant and reverberant systems // *Journal of the Audio Engineering Society*. — 2002. — Vol. 50, no. 12. — P. 1012–1029.
- [49] Gottlieb H. Effect of air cavity on the annular drum // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1982. — Vol. 71, no. 4. — P. 1025–1027.
- [50] Bilbao S. Time domain simulation and sound synthesis for the snare drum // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 2012. — Vol. 131, no. 1. — P. 914–925.
- [51] Mei C. Free vibrations of circular membranes under arbitrary tension by the finite-element method // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1969. — Vol. 46, no. 3B. — P. 693–700.
- [52] Rabenstein R. Spatial sound synthesis for circular membranes.
- [53] Rabenstein R., Koch T., Popp C. Tubular bells: A physical and algorithmic model // *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*. — 2010. — Vol. 18, no. 4. — P. 881–890.



## Señales y sistemas

En este apéndice se pretende dar una breve introducción a algunas herramientas usadas en el contenido de la tesis con las que el lector debe estar familiarizado para entenderla completamente.

### A.1. Tiempo continuo

Se denomina señal en tiempo continuo a una función del tiempo,  $t$  (variable real independiente). Una señal escalar es una función del tiempo en un cuerpo (por ejemplo los reales, o los complejos). A las señales complejas (y a las reales por extensión) puede aplicárseles la transformada de Laplace definida como sigue:

DEFINICIÓN 1. Transformada de Laplace Unilateral

La transformada de Laplace,  $\mathcal{L}$ , toma una señal  $x(t)$  y devuelve una función de la frecuencia compleja  $s$ ,  $X(s)$  que se suele notar con la misma letra que la señal pero en mayúscula. Está definida por la siguiente ecuación integral<sup>1</sup>:

$$(A.1.1) \quad \mathcal{L}[x(t)](s) = X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Asimismo, la transformada inversa de Laplace queda definida por:

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)](t) = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s=\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

Donde  $\sigma_0$  es tal que está a la derecha de todos los polos de  $X(s)$ .

Dicha transformación simplifica las derivadas temporales y las condiciones iniciales en problemas algebraicos. Veamos cómo opera sobre las derivadas temporales. Para ello calculemos:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right](s) = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

Resolviendo por partes:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right](s) = (x(t) e^{-st})\Big|_{t=0^-}^{+\infty} - \int_{0^-}^{+\infty} x(t) (-s) e^{-st} dt =$$

---

<sup>1</sup>Debe entenderse por  $\int_{0^-}^{+\infty} \cdot dt$  el límite  $\lim_{\delta \rightarrow 0^-} \int_{\delta}^{+\infty} \cdot dt$ .

$$(A.1.2) \quad = -x(0^-) + s \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = sX(s) - x(0^-)$$

Los sistemas en tiempo continuo son entes que transforman una función del tiempo (continuo) en otra. Son de especial interés los sistemas LTI (lineales e invariantes en el tiempo por sus siglas en inglés), que cumplen dos propiedades:

**DEFINICIÓN 2. Linealidad**

*Se dice que un sistema  $\mathcal{S}$ , inicialmente en reposo, es lineal si y sólo si, para todo par de señales  $x(t)$  e  $y(t)$  y para todo escalar  $\alpha$  se cumple que:*

$$\mathcal{S}[\alpha x(t) + y(t)] = \alpha \mathcal{S}[x(t)] + \mathcal{S}[y(t)]$$

**DEFINICIÓN 3. Invarianza en el tiempo**

*Si definimos el sistema retardo en el tiempo de la siguiente manera:*

$$\mathcal{R}_\tau[x(t)] = x(t - \tau)$$

*Con  $\tau \in \mathbb{R}^+$ . Entonces se dice que un sistema  $\mathcal{S}$ , es invariante en el tiempo si y sólo si conmuta con el retardo, o sea si se cumple que:*

$$\mathcal{S}\{\mathcal{R}_\tau[x(t)]\} = \mathcal{R}_\tau\{\mathcal{S}[x(t)]\}$$

*Para toda función  $x(t)$  y para todo retardo  $\tau \in \mathbb{R}^+$ .*

Además, los sistemas físicos cumplen con la propiedad de causalidad definida de la siguiente manera.

**DEFINICIÓN 4. Causalidad**

*Se dice que un sistema  $\mathcal{S}$ , es causal si para todo par de señales  $x(t)$  e  $y(t)$  tales que  $x(t) = y(t) \forall t < t_0$  y para todo  $t_0$  se cumple que:*

$$\mathcal{S}[x(t)] = \mathcal{S}[y(t)] \forall t < t_0$$

A los sistemas LTI, se les asocia la función de transferencia definida de la siguiente manera<sup>2</sup>:

$$\mathcal{L}\{\mathcal{S}[x(t)]\}(s) = H_S(s) \mathcal{L}[x(t)](s)$$

---

<sup>2</sup>En esta definición está implícito que la transferencia sólo depende del sistema y no de la señal.

## A.2. Tiempo discreto

Se denomina señal en tiempo discreto a una función del tiempo discreto,  $n$  (índice natural). Una señal escalar es una función del tiempo discreto en un cuerpo (por ejemplo los reales, o los complejos). A las señales complejas (y a las reales por extensión) puede aplicárseles la transformada de  $\mathcal{Z}$  definida como sigue:

DEFINICIÓN 5. Transformada  $\mathcal{Z}$  Unilateral

La transformada  $\mathcal{Z}$ , toma una señal  $x[n]$  y devuelve una función de la frecuencia compleja  $z$ ,  $X(z)$  que se suele notar con la misma letra que la señal pero en mayúscula. Está definida por la siguiente suma infinita:

$$(A.2.1) \quad \mathcal{Z}\{x[n]\}(z) = X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

Asimismo, la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa queda definida por:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}[n] = x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{n-1} dz$$

Con  $\mathcal{C}$  una curva que rodee una vez en sentido antihorario todos los polos de  $X(z)$ .

Dicha transformación simplifica los atrasos temporales y las condiciones iniciales en problemas algebraicos. Veamos cómo opera sobre el operador atraso. Para ello calculemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x[n-n_0]\}(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x[n-n_0] z^{-n} = \\ &= z^{-n_0} \sum_{n=-n_0}^{+\infty} x[n] z^{-n} = z^{-n_0} \left\{ X(z) + \sum_{n=-n_0}^{-1} x[n] z^{-n} \right\} \end{aligned}$$

En tiempo discreto se definen de manera análoga al tiempo continuo los sistemas LTI y la causalidad, donde la única diferencia es que el operador atraso es un atraso entero. Asimismo se define de manera análoga la transferencia de un sistema como:

$$\mathcal{Z}\{\mathcal{S}[x[n]]\}(z) = H_{\mathcal{S}}(z) \mathcal{Z}[x[n]](z)$$

DEFINICIÓN 6. Transformada de fourier discreta (DFT por sus siglas en inglés)

La transformada de fourier discreta, toma una señal  $x[n]$  finita de largo  $N$  y devuelve otra señal del mismo largo que se suele notar como  $X[m]$  con la misma letra que la señal pero en mayúscula y cambiando el nombre del índice entero. Está definida por la siguiente suma:

$$\text{DFT}_N\{x[n]\}[m] = X[m] = \sum_{n=1}^N x(n) e^{\frac{(-2\pi j)(n-1)(m-1)}{N}}$$

Asimismo, la transformada inversa queda definida por:

$$\text{DFT}_N^{-1} \{X[m]\} [n] = x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N X(k) e^{\frac{(2\pi j)(n-1)(m-1)}{N}}$$

Esta transformación es útil para aproximar la transformada de fourier numéricamente. Puede verse que, de hecho, es equivalente a muestrear la transformada de fourier de una versión periódica de la señal original [39].

### A.3. Transformaciones entre tiempo continuo y discreto

Existen varias razones para transformar señales del tiempo continuo al discreto y viceversa. El muestreo de señales continuas (para almacenado, transmisión digital o procesamiento) implica transformar una señal en tiempo continuo en otra en tiempo discreto. Si hablamos de señales de audio digitales, estas deben pasar por un proceso de conversión digital-analógica para poder ser reproducidas, o sea, se debe transformar una señal de tiempo discreto en otra de tiempo continuo. Asimismo, para propósitos de síntesis, control, o filtrado, deben convertirse sistemas de tiempo continuo en sistemas de tiempo discreto.

Un muestreador ideal de frecuencia  $F_s$ , transforma una señal de tiempo continuo en una señal de tiempo discreto de la siguiente manera:

$$x[n] = x\left(\frac{n}{F_s}\right)$$

Donde debe entenderse que las señales  $x[n]$  y  $x(t)$  son entes distintos, y estamos abusando de la notación al llamarlos de la misma forma. Según el teorema de muestro de Nyquist-Shannon, si la señal en tiempo discreto no tiene componentes encima de la mitad de la frecuencia de muestreo ( $F_s$ ) entonces es posible reconstruir la señal a partir de sus muestras (la señal en tiempo discreto). Si la señal original no es acotada en frecuencia se produce aliasing, o sea que los componentes encima de la mitad de la frecuencia de muestreo son reconstruídos en frecuencias menores.

Transformar sistemas continuos en equivalentes discretos permite generar equivalentes digitales a sistemas reales, este procedimiento es de suma importancia para la síntesis de audio. Hay varios métodos existentes para realizar esta transformación, por lo que vamos a revisar los más importantes, y en particular, los que son usados en el contenido de esta tesis.

**A.3.1. Transformación invariante al impulso.** La idea de esta transformación es obtener un sistema en tiempo discreto cuya respuesta al impulso (discreto) tenga la misma forma que la respuesta al impulso (continuo) del sistema continuo original. O sea, si  $h(t)$  es la respuesta al impulso del sistema continuo, queremos que la respuesta al impulso del sistema discreto sea:

$$h[n] = \frac{1}{F_s} h\left(\frac{n}{F_s}\right)$$

Donde el factor  $\frac{1}{F_s}$  es para mantener la respuesta del sistema discreto ante cambios en la frecuencia de muestreo. Esta transformación puede escribirse en términos de la transformada de Laplace y la transformada  $\mathcal{Z}$  de la siguiente manera:

$$(A.3.1) \quad H(z) = \mathcal{I}_{F_s} [H(s)] = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{F_s} \mathcal{L}^{-1} [H(s)] \left( \frac{n}{F_s} \right) \right\} (z)$$

Notemos que, según la expresión anterior, la transformación invariante al impulso queda definida como una composición de transformaciones lineales (Laplace inversa, evaluación, producto por una constante y transformada  $\mathcal{Z}$ ), por lo que es una transformación lineal. Como ejemplo, veamos cómo aplica esta transformación sobre un sistema de segundo grado de la manera:

$$H(s) = \frac{as + b}{s^2 + 2ds + \omega^2 + d^2}$$

Calculemos primero la respuesta al impulso de este sistema a partir de la transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1} \{H(s)\} (t) = \frac{a}{\omega} e^{-dt} [\omega \cos(\omega t) - d \sin(\omega t)] + \frac{b}{\omega} e^{-dt} \sin(\omega t)$$

Por lo tanto, la respuesta al impulso del sistema discreto deberá ser:

$$h[n] = \frac{a}{\omega F_s} e^{-dn/F_s} \left[ \omega \cos \left( \omega \frac{n}{F_s} \right) - d \sin \left( \omega \frac{n}{F_s} \right) \right] + \frac{b}{\omega F_s} e^{-dn/F_s} \sin \left( \omega \frac{n}{F_s} \right)$$

O equivalentemente:

$$h[n] = \frac{a}{\omega F_s} \exp \left( \frac{d}{F_s} \right)^{-n} \left[ \omega \cos \left( \frac{\omega}{F_s} n \right) - d \sin \left( \frac{\omega}{F_s} n \right) \right] + \frac{b}{\omega F_s} \exp \left( \frac{d}{F_s} \right)^{-n} \sin \left( \frac{\omega}{F_s} n \right)$$

Cuya transformada  $\mathcal{Z}$  es:

$$H(z) = \frac{\exp \left( \frac{-d}{F_s} \right) az \left[ \omega \exp \left( \frac{d}{F_s} \right) z - \omega \cos \left( \frac{\omega}{F_s} \right) - d \sin \left( \frac{\omega}{F_s} \right) \right] + b \sin \left( \frac{\omega}{F_s} \right) z}{\omega F_s \left[ z^2 - 2 \exp \left( \frac{-d}{F_s} \right) \cos \left( \frac{\omega}{F_s} \right) z + \exp \left( \frac{-2d}{F_s} \right) \right]}$$