



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY



FACULTAD DE  
INGENIERÍA  
UDELAR

# **Estudio sobre monitoreo estructural y desarrollo de un método fotogramétrico**

**Agustín Vidal**

**Tutor:**

**Prof. Dr. Ing. Agustín Spalvier**

**Cotutor:**

**Prof. Dra. Alina Aulet**

Tesina correspondiente a la Unidad Curricular Proyecto de Investigación e Innovación en  
Ingeniería Estructural de la carrera Ingeniería Civil  
Grado en Ingeniería Civil

Instituto de Estructuras y Transporte  
Facultad de Ingeniería  
Universidad de la República  
Uruguay  
2024

*"Long story short, I survived"*  
*Dr. Taylor Swift*

# Agradecimientos

*Quiero agradecer a todas aquellas personas que de una forma u otra lograron ayudarme a obtener el trabajo aquí presentado:*

*A mis tutores, Agustín Spalvier y Alina Aulet, por su ayuda y guía brindadas en la elaboración y llevada a cabo de este proyecto,*

*A mi familia y amigos, que son los cimientos de mi vida, por apoyarme en este trayecto y estar para mí en todo momento,*

*A Camila Soria y Bruna Curbelo por el apoyo en la realización de los ensayos y su compañía durante todo el proyecto,*

*A Leandro Domenech, por proveer el código computacional para el procesamiento de las imágenes y ayudar a comprenderlo.*

*A mis compañeros de oficina, por el excelente ambiente laboral y su.*

## Resumen

*El monitoreo de salud estructural de infraestructuras civiles es un área de rápido crecimiento, pero aún incipiente en Uruguay. El uso de monitoreo estructural (ME) permite la detección temprana de diversas patologías que puedan ser tratadas previas a que conlleven un costo elevado. El presente trabajo se basa en el desarrollo y caracterización de un sistema fotogramétrico de bajo costo que sea empleable como ensayo no destructivo (END) para ME. Además del diseño del dispositivo a emplear, el estudio realizado se focaliza en los primeros ensayos de caracterización del dispositivo, incluyendo ensayos acerca de la necesidad de iluminación interna, ensayos estáticos y cuasiestáticos de carga. De estos se desprende una precisión del sistema bajo estas características del orden de las décimas de milímetros. Luego, se presentan los parámetros y causales de error determinados y se focaliza acerca de cuales son los siguientes pasos a tomar para poder caracterizar completamente el método y determinar su rango de aplicación.*

*Finalmente, mediante el monitoreo de una viga de madera en laboratorio, se compara el método fotogramétrico desarrollado con métodos estáticos y dinámicos de medición tradicionales, obteniendo resultados semejantes para los ensayos estáticos como para los dinámicos en el dominio de la frecuencia. Además, durante el monitoreo de dicha viga, se aprecia qué tan sensible es cada método ante la introducción de una patología para observar que tan factible es la identificación de la aparición de la misma en estructuras reales.*

**Palabras clave:** ensayos no destructivos, monitoreo estructural, fotogrametría

## Abstract

*Structural Health Monitoring (SHM) of civil infrastructures is a rapidly growing area, nevertheless, it is still in its early stages in Uruguay. The use of SHM allows for early detection of a plethora of pathologies that can be treated before the expenses of doing so are immensely costly. The following study is based on the development and characterisation of a low-cost photogrammetric system which can be used as Non-Destructive Testing (NDT) for SHM. Apart from the design of said system, the study focalises in its first characterisation tests, which include testing regarding the need for an internal light source, static testing and quasistatic testing. From this, it can be inferred that the system's precision under these characteristics has a magnitude in the range of the decimals of a millimetre. Moreover, the error parameters and its determined causes are presented, and the focus is turned to which are the next steps needed to be taken to fully characterise the developed method and determine its application range.*

*Lastly, through in-lab monitoring of a wooden beam, the developed photogrammetric method is compared to traditional static and dynamic NDT used in SHM, yielding similar results for static methods and dynamic methods in the frequency domain. Furthermore, throughout the beam's monitoring period, it is a goal to observe how sensitive each methodology is to the introduction of a pathology to determine how plausible it is to identify it in a real scale structure.*

**Keywords:** non-destructive testing, structural health monitoring, photogrammetry

# Índice

<b>Agradecimientos</b>	<b>ii</b>
<b>Resumen</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Ensayos No Destructivos y Monitoreo Estructural . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	2
<b>2. Desarrollo y caracterización de un Método Fotogramétrico</b>	<b>4</b>
2.1. Introducción . . . . .	4
2.2. Diseño del dispositivo . . . . .	5
2.3. Bases conceptuales sobre el Procesamiento de Imágenes Digitales . . . . .	6
2.3.1. Conceptos básicos de luz acromática y cromática . . . . .	7
2.3.2. Formulación de un modelo de una imagen simple . . . . .	7
2.3.3. Resolución espacial y resolución de intensidad . . . . .	8
2.3.4. Fundamentos del color . . . . .	8
2.3.5. El modelo HSI/HSV de color . . . . .	9
2.3.6. Rebanado de intensidad y codificación de color . . . . .	10
2.3.7. Rebanado de color . . . . .	11
2.4. Antecedentes . . . . .	11
2.4.1. Aplicación de la fotogrametría al monitoreo de un puente - Valença <i>et al</i> [17] . . . . .	11
2.4.2. Estudios piloto de mediciones de deformaciones en puentes con fotogrametría - Hans-Gerd Maas <i>et al</i> [1] . . . . .	13
2.4.3. Implementación de sensores láser para medir desplazamientos en estructuras - Franco <i>et al</i> [7] . . . . .	14
2.4.4. Método fotogramétrico pragmático para medir desplazamientos en puentes - Serrano <i>et al</i> [14] . . . . .	14
2.5. Análisis teórico . . . . .	15
2.5.1. Longitud representada por cada píxel . . . . .	15
2.5.2. Descripción del procesamiento de imágenes digitales empleado . . . . .	16
2.6. Ensayo sobre la variación del ángulo de la cámara con respecto a la hoja . . . . .	17
2.6.1. Materiales y métodos . . . . .	17
2.6.2. Análisis de resultados . . . . .	18
2.6.3. Conclusiones . . . . .	18
2.7. Ensayo sobre iluminación del dispositivo . . . . .	19
2.7.1. Materiales y métodos . . . . .	19
2.7.2. Análisis de resultados . . . . .	19

2.7.3.	Conclusiones . . . . .	21
2.8.	Ensayos de punto fijo de corta duración . . . . .	21
2.8.1.	Materiales y métodos . . . . .	21
2.8.2.	Análisis de resultados . . . . .	23
2.8.3.	Conclusiones . . . . .	24
2.9.	Ensayos de punto fijo de larga duración . . . . .	25
2.9.1.	Materiales y métodos . . . . .	25
2.9.2.	Análisis de resultados por ensayo . . . . .	26
2.9.3.	Análisis de resultados por distancia . . . . .	32
2.9.4.	Conclusiones . . . . .	37
2.10.	Ensayo de carga . . . . .	38
2.10.1.	Materiales y métodos . . . . .	38
2.10.2.	Análisis de resultados . . . . .	39
2.10.3.	Conclusiones . . . . .	44
2.11.	Conclusiones . . . . .	45
<b>3.</b>	<b>Caso de estudio: Monitoreo de viga de madera</b>	<b>47</b>
3.1.	Introducción . . . . .	47
3.2.	Bases conceptuales sobre el Análisis Dinámico . . . . .	47
3.2.1.	Sistemas de un Solo Grado de Libertad (SDOF) . . . . .	47
3.2.2.	Sistemas de Múltiples Grados de Libertad (MDOF) . . . . .	48
3.3.	Sistemas de un grado de libertad generalizado . . . . .	50
3.4.	Antecedentes de ME en estructuras de madera . . . . .	51
3.4.1.	Métodos utilizando END . . . . .	51
3.4.2.	Parámetros de interés y técnicas de monitoreo para estructuras de madera	52
3.4.3.	Casos de estudio . . . . .	53
3.5.	Materiales y métodos . . . . .	54
3.5.1.	Metodología de análisis estático . . . . .	56
3.5.2.	Metodología de análisis dinámico . . . . .	56
3.6.	Análisis de resultados . . . . .	57
3.6.1.	Comparación de métodos estáticos . . . . .	57
3.6.2.	Comparación de métodos dinámicos . . . . .	59
3.6.3.	Identificación de patología . . . . .	65
3.6.4.	Cálculo de la masa del dispositivo . . . . .	68
3.7.	Conclusiones . . . . .	70
<b>4.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>72</b>
	<b>Referencias</b>	<b>75</b>

<b>A. Descripción del funcionamiento del script final</b>	<b>76</b>
A.1. Calibración de los parámetros intrínsecos de la cámara . . . . .	76
A.2. Función auxiliar: track_points_new . . . . .	76
A.3. Función auxiliar: track_laser_new . . . . .	78
A.4. Función auxiliar: extrinsic_trans_step_new . . . . .	81
A.5. Función auxiliar: extrinsic_trans_new . . . . .	82
A.6. Función auxiliar: track_image_new . . . . .	83
A.7. Función auxiliar: calib_parTh . . . . .	84
A.8. Función auxiliar: calib_parTh1 . . . . .	85
A.9. Función auxiliar: calib_parTh2 . . . . .	86
A.10. Función auxiliar: cal_param . . . . .	87
A.11. <i>Script</i> principal: processing . . . . .	88
<b>B. Desarrollo de la solución de los SDOF amortiguados</b>	<b>90</b>
B.1. Sistemas no amortiguados de vibración libre . . . . .	90
B.2. Sistemas no amortiguados de vibración forzada . . . . .	90
B.3. Sistemas amortiguados de vibración libre . . . . .	91
B.4. Sistemas amortiguados de vibración forzada . . . . .	91
<b>C. Desarrollo de la solución de los MDOF no amortiguados</b>	<b>92</b>
C.1. Sistemas no amortiguados de vibraciones . . . . .	92
C.2. Sistemas no amortiguados de vibración forzada . . . . .	92
C.3. Propiedades Ortogonales . . . . .	93
C.4. Sistemas con amortiguamiento estructural de vibración forzada . . . . .	93

# Índice de Figuras

1.	Esquema de la instrumentación del método fotogramétrico . . . . .	4
2.	Hoja utilizada . . . . .	5
3.	Interior del dispositivo diseñado . . . . .	6
4.	Cono de colores del espacio RGB [12] . . . . .	9
5.	Cubo de colores del espacio HSV [4] . . . . .	10
6.	Esquema de la instrumentación llevados a cabo por Valença <i>et al</i> [17] . . . . .	12
7.	Esquematzación de cómo se mide el ángulo $\alpha$ . . . . .	18
8.	Diferencia de las medidas obtenidas con el promedio de las medidas del primer escalón para el ensayo con luz LED . . . . .	19
9.	Diferencia de las medidas obtenidas con el promedio de las medidas del primer escalón para el ensayo con luz natural . . . . .	20
10.	Diferencia de las medidas obtenidas con el promedio de las mismas para el ensayo con luz natural excluyendo <i>outliers</i> . . . . .	21
11.	Láser impactando en el dispositivo para los ensayos de corta duración . . . . .	22
12.	Diferencia de las medidas obtenidas con el promedio de las medidas del primer escalón . . . . .	23
13.	Variación de la medida por escalón y coordenada . . . . .	24
14.	Configuración de los ensayos de larga duración . . . . .	26
15.	Flecha de las medidas para el Ensayo 1 de larga duración . . . . .	27
16.	Flecha de las medidas para el Ensayo 2 de larga duración . . . . .	27
17.	Flecha de las medidas para el Ensayo 3 de larga duración . . . . .	27
18.	Flecha de las medidas para el Ensayo 4 de larga duración . . . . .	28
19.	Flecha de las medidas para el Ensayo 4 de larga duración reducido . . . . .	28
20.	Variación de la medida por escalón y coordenada - Ensayo 1 . . . . .	29
21.	Variación de la medida por escalón y coordenada - Ensayo 2 . . . . .	30
22.	Variación de la medida por escalón y coordenada - Ensayo 3 . . . . .	30
23.	Variación de la medida por escalón y coordenada - Ensayo 4 . . . . .	31
24.	Variación de la medida por escalón y coordenada - Ensayo 4 reducido . . . . .	31
25.	Flecha de las medidas en función del tiempo para los ensayos de larga duración a 1,35 m de distancia . . . . .	32
26.	Flecha de las medidas en función del tiempo para los ensayos de larga duración a 2,83 m de distancia . . . . .	33
27.	Flecha de las medidas en función del tiempo para los ensayos de larga duración a 6,00 m de distancia . . . . .	33
28.	Flecha de las medidas en función del tiempo para los ensayos de larga duración a 1,35 m de distancia sin el Ensayo 2 . . . . .	34
29.	Flecha de las medidas en función del tiempo para los ensayos de larga duración a 2,83 m de distancia sin el Ensayo 2 . . . . .	34

30.	Flecha de las medidas en función del tiempo para los ensayos de larga duración a 6,00 m de distancia sin el Ensayo 2 . . . . .	34
31.	Variación de la medida por escalón y coordenada - 1,35 m . . . . .	35
32.	Variación de la medida por escalón y coordenada - 2,83 m . . . . .	35
33.	Variación de la medida por escalón y coordenada - 6,00 m . . . . .	36
34.	Variación de la medida por escalón y coordenada - 6,00 m reducido . . . . .	36
35.	Configuración del ensayo de carga . . . . .	38
36.	Esquema del ensayo sobre viga de madera . . . . .	39
37.	Flecha del comparador (azul) y del dispositivo (naranja) para la fase 1 del ensayo de carga . . . . .	40
38.	Flecha del comparador (azul) y del dispositivo (naranja) para la fase 3 del ensayo de carga . . . . .	40
39.	Flecha del dispositivo en función de la del comparador para el Ciclo 1 de carga/descarga . . . . .	41
40.	Flecha del dispositivo en función de la del comparador para el Ciclo 2 de carga/descarga . . . . .	41
41.	Flecha del dispositivo en función de la del comparador para el Ciclo 3 de carga/descarga . . . . .	41
42.	Flecha (mm) de la coordenada horizontal medida por el método fotogramétrico en función del tiempo . . . . .	42
43.	Diferencias entre las flechas medidas por ambos dispositivos en mm tomando como iguales las medidas iniciales de cada ciclo . . . . .	43
44.	Diferencias relativas entre las flechas medidas por ambos dispositivos tomando como iguales las medidas iniciales de cada ciclo . . . . .	43
45.	Diferencia de la medida (mm) para un mismo escalón, por coordenada y sección	44
46.	Diagrama de sistemas SDOF . . . . .	47
47.	Diagrama de sistema MDOF de un pórtico de dos niveles . . . . .	49
48.	Instrumentación en la viga de madera del ensayo de monitoreo . . . . .	55
49.	Esquema del ensayo de monitoreo sobre viga de madera . . . . .	55
50.	Flecha del dispositivo en función de la del comparador para los ensayos de carga	57
51.	Diferencia entre la flecha del dispositivo y la del comparador en función de la del comparador para los ensayos de carga . . . . .	58
52.	Diferencia relativa entre la flecha del dispositivo y la del comparador en función de la del comparador para los ensayos de carga . . . . .	58
53.	Gráfico utilizado para identificar frecuencias capturadas por el método fotogramétrico para la Etapa 3 para las medidas con golpe en el tercio derecho de la viga . . . . .	60
54.	Gráfico utilizado para identificar frecuencias mediante <i>peak picking</i> para los acelerómetros . . . . .	60

55.	Gráfico utilizado para identificar frecuencias capturadas por el método fotogramétrico para la Etapa 1 . . . . .	61
56.	Gráfico utilizado para identificar frecuencias capturadas por el método fotogramétrico para la Etapa 3 para las medidas con golpe en el medio de la viga y desplazamiento inicial impuesto . . . . .	61
57.	Gráfico de una señal obtenida con acelerómetros de amplitud en función del tiempo . . . . .	62
58.	Gráfico de los desplazamientos obtenidos con el método fotogramétrico de amplitud en función del tiempo para la Etapa 1 . . . . .	63
59.	Gráfico de los desplazamientos obtenidos con el método fotogramétrico de amplitud en función del tiempo para la Etapa 3 para las primeras tres medidas . . . . .	63
60.	Gráfico de los desplazamientos obtenidos con el método fotogramétrico de amplitud en función del tiempo para la Etapa 3 para las segundas tres medidas . . . . .	64
61.	Desplazamiento horizontal medido por el dispositivo en función del tiempo para los ensayos dinámicos . . . . .	64
62.	Modelo de elementos finitos para la Etapa 1 . . . . .	65
63.	Modelo de elementos finitos para la Etapa 3 . . . . .	65
64.	Deformación de la viga del modelo computacional para la Etapa 3 . . . . .	66
65.	Primer modo de vibración del modelo computacional para la Etapa 3 . . . . .	66
66.	Cuadrícula utilizada para obtener parámetros intrínsecos de la cámara . . . . .	76
67.	Código de la función auxiliar <code>track_points_new</code> . . . . .	77
68.	Ejemplo imagen <i>iBW</i> obtenida en el código <code>track_laser_new</code> . . . . .	78
69.	Código de la función auxiliar <code>track_laser_new</code> . . . . .	79
70.	Ejemplo primera imagen <i>iBW</i> obtenida en el código <code>track_laser_new</code> . . . . .	80
71.	Ejemplo imagen final <i>iBW</i> obtenida en el código <code>track_laser_new</code> . . . . .	81
72.	Código de la función auxiliar <code>extrinsic_trans_step_new</code> . . . . .	82
73.	Código de la función auxiliar <code>extrinsic_trans_new</code> . . . . .	83
74.	Código de la función auxiliar <code>track_image_new</code> . . . . .	83
75.	Código de la función auxiliar <code>calib_parTh</code> . . . . .	84
76.	Código de la función auxiliar <code>calib_parTh1</code> . . . . .	85
77.	Código de la función auxiliar <code>calib_parTh2</code> . . . . .	87
78.	Código de la función auxiliar <code>cal_param</code> . . . . .	88
79.	Código del <i>script</i> principal <code>processing</code> . . . . .	88

# Índice de Tablas

1.	Resultados obtenidos por Valença <i>et al</i> [17] para vigas de hormigón armado . .	13
2.	Desplazamientos (mm) obtenidos por Serrano <i>et al</i> [14] para los sistemas <i>láser</i> <i>+ cámara y punto + cámara</i> . . . . .	15
3.	Distancia entre la cámara y la hoja donde se proyecta el láser para ensayo de variación de ángulo . . . . .	18
4.	Desviación estándar del set de medidas para cada ángulo . . . . .	18
5.	Flecha máxima (mm) para cada ensayo, por coordenada . . . . .	23
6.	Desviación estándar ( $\mu\text{m}$ ) de la variación de la flecha de cada escalón para cada ensayo, por coordenada . . . . .	24
7.	Flecha máxima (mm) en valor absoluto para cada Ensayo de larga duración, por coordenada y distancia . . . . .	29
8.	Desviación estándar ( $\mu\text{m}$ ) de la variación de la flecha de cada escalón para cada ensayo, por coordenada y distancia . . . . .	32
9.	Desviación estándar (mm) de la diferencia de la flecha entre los métodos, por coordenada y sección . . . . .	43
10.	Desviación estándar ( $\mu\text{m}$ ) de la variación de la flecha de cada escalón, por coordenada y sección . . . . .	44
11.	Rigideces ( $EI$ ) promedio obtenidas utilizando comparadores y el método foto- gramétrico, con sus respectivas desviaciones estándar ( $\sigma$ ) . . . . .	59
12.	Flechas máximas numéricas y experimentales para la Etapa 3 en el ciclo de carga	67
13.	Frecuencias del primer modo de vibración ( $f$ ) medida por los acelerómetros . .	67
14.	Razón de amortiguamiento ( $\xi$ ) y su desviación estándar ( $\sigma$ ) calculado a partir de las mediciones de los acelerómetros . . . . .	68

# 1. Introducción

## 1.1. Ensayos No Destructivos y Monitoreo Estructural

Las estructuras civiles se construyen para satisfacer un propósito específico, como proporcionar vivienda, hospedar industrias, saneamiento, entre otras. Tradicionalmente, los proyectistas se centran en cumplir los requisitos para que esto sea viable y garantizar una vida útil determinada en la estructura.

Hoy en día, las estructuras tales como puentes y edificios, se diseñan para que se mantengan en pie durante no más de un siglo. Esto no implica que no puedan soportar más tiempo del previsto, especialmente si se realizan tareas de mantenimiento, reparación y refuerzo. No obstante, es común realizar estas tareas posterior a que se observe una falla cuando ya el costo de reparación es elevado o cuando se realizan inspecciones visuales, las cuales pueden no evidenciar todas las patologías y defectos que una estructura presenta.

De esta problemática es que surgen los Ensayos No Destructivos (END) y el Monitoreo Estructural (ME). Los END consisten en métodos de detección de anomalías, fallas y patologías en estructuras mediante técnicas, como la utilización de ondas de ultrasonido o medición de frecuencia de transmisión de ondas, que permiten caracterizar a las estructuras sin dañarlas. El ME consiste en la aplicación de END para poder, a lo largo de un período de tiempo prolongado, observar cómo se comporta una estructura y qué cambios, si los hay, esta sufre durante el período de tiempo observado. La recolección de información del ME se realiza de forma remota (idealmente) manteniendo el instrumental vinculado a la estructura. Es debido a esto que para el ME se busca utilizar instrumental de menor coste y en mayor cantidad.

El ME ha experimentado considerable atención y expansión mundial en las últimas tres décadas debido a que las herramientas computacionales han mejorado su capacidad de procesamiento, almacenamiento y transmisión de datos, y los instrumentos de medición han sufrido una mejoría considerable en la precisión alcanzada. Esto ha hecho que los métodos aplicados se vuelvan más económicos y se puedan utilizar a gran escala sin significar un excesivo costo. [6]

Debido a este desarrollo tecnológico, el ME que se puede aplicar hoy en día permite obtener información acerca de la integridad estructural de una estructura. El espectro en el que se encuentra esta información es muy amplio ya que incluye detección de daños locales (como fisuras o pérdidas de sección), daños globales (corrosión generalizada), movimientos globales de la estructura, descensos, giros de antenas, entre otras. Ejemplos de estas circunstancias se pueden observar en los trabajos realizados por Spalvier *et al* [16], Albert *et al* [1] y Labonnote *et al* [10].

Tradicionalmente, se utilizan LVDTs (*Linear Variable Displacement Transducer*) y/o com-

paradores para obtener desplazamientos. Estos instrumentos, además de ser ampliamente accesibles, cuentan con excelente precisión, del orden de las centésimas o milésimas de milímetro, y son de fácil implementación en estructuras pequeñas y ambientes controlados (como un laboratorio). No obstante, su uso tiene desventajas como que se limita la cantidad de puntos de estudio a la cantidad de instrumentos de medida que se tengan y que bajo ciertas condiciones su posicionamiento es complejo o directamente no viable. Estas circunstancias son, por ejemplo, estudios deresistencia a fuego o cuando se tienen luces libres grandes ya que se tiene que recurrir a la construcción de una estructura adicional para tener un punto de referencia considerado inmóvil.

Como alternativa a los métodos convencionales, se encuentran los métodos fotogramétricos. Estos métodos, mediante el uso de varias cámaras, ofrecen el potencial de generar medidas en 3 dimensiones de múltiples puntos, y, además, se tiene que el objeto medido no se ve afectado por el instrumento de medición debido a que es un método que no requiere del contacto entre estos dos objetos. Si los desplazamientos que se quieren medir, o que se esperan, se encuentran restringidos en una recta o un plano, es decir, en una o dos direcciones, se puede prescindir del uso de múltiples cámaras y adoptar un sistema con una única cámara. [1, 14, 17]

Otro tipo de ME que se puede realizar es mediante el estudio de los parámetros dinámicos de una estructura y cómo estos evolucionan con respecto al tiempo. Para esto es preciso tener previo conocimiento de cómo deberían de cambiar estos parámetros ante diversas patologías. Un tipo de END que se puede realizar para este fin es el análisis modal de las estructuras. Este análisis consiste en el estudio de las frecuencias a las que vibra un elemento para poder inferir de las mismas cambios en una estructura o poder crear un modelo teórico usándolo como base. Si bien las mediciones de las frecuencias tradicionalmente se obtienen con acelerómetros, los métodos fotogramétricos también pueden ser utilizados con este fin, como se describe más adelante. [5]

## 1.2. Objetivos

En este trabajo se busca estudiar diversos métodos de Monitoreo Estructural, con especial énfasis en los métodos fotogramétricos. Se busca, en este aspecto, introducirse en estas técnicas para las mediciones de desplazamientos de estructuras y cómo se pueden utilizar para la detección de posibles problemas en la integridad estructural. Adicionalmente, se espera profundizar en los conocimientos de qué métodos tradicionales de medición se pueden utilizar para el ME y cómo estos se aplican.

Más específicamente, se busca poder desarrollar una técnica fotogramétrica basada en el uso de una cámara y un láser, caracterizando su precisión y fuentes de error mediante ensayos de laboratorio. Además, mediante una simulación de monitoreo de una viga de madera, se espera poder comparar los resultados obtenidos por el método desarrollarlo con los obtenidos

con metodologías tradicionales.

## 2. Desarrollo y caracterización de un Método Fotogramétrico

### 2.1. Introducción

Se torna la atención del presente estudio al desarrollo de un END basado en métodos fotogramétricos que, en un futuro, sea aplicable en el ME. Esto requiere que el método desarrollado sea de fácil instrumentación y de bajo costo. Para ser posible este desarrollo, se profundiza acerca de las bases del procesamiento de imágenes digitales y se presentan los antecedentes de métodos fotogramétricos ya empleados. Es importante interiorizarse con el procesamiento de imágenes digitales ya que el dispositivo basa su funcionalidad en la correcta aplicación del mismo.

El sistema que se busca desarrollar consta en la utilización de tres elementos básicos, una cámara, un láser y una mira. La idea es colocar el láser, externo a una estructura cuyos desplazamientos se quieren medir, apuntando hacia la mira, la cual, en conjunto con la cámara, son solidarias al desplazamiento a medir. La mira es tal que contiene 4 puntos de referencia rojos fijos de tamaño y distancia conocidos. La cámara toma una serie de imágenes a lo largo del tiempo a la mira con el láser impactando sobre ella y, luego, mediante procesamiento de estas imágenes digitales, se obtiene la posición del láser con respecto a los puntos de referencia. El desplazamiento de la estructura en el punto donde se encuentran la cámara y la mira es la diferencia entre las posiciones del láser con respecto a los puntos de referencia. La Figura 1 muestra de manera esquemática dónde se planea ubicar el dispositivo en una estructura real con el láser apuntándole desde fuera.

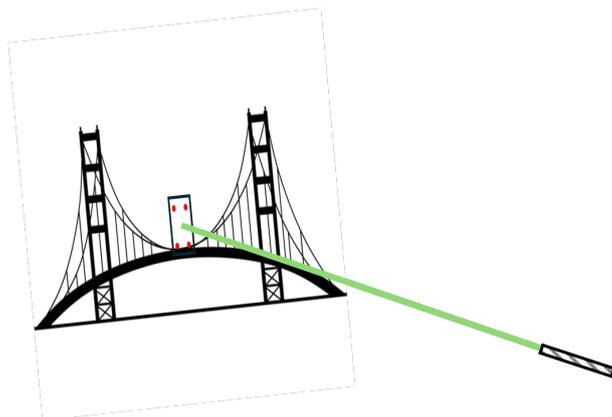


Figura 1: Esquema de la instrumentación del método fotogramétrico

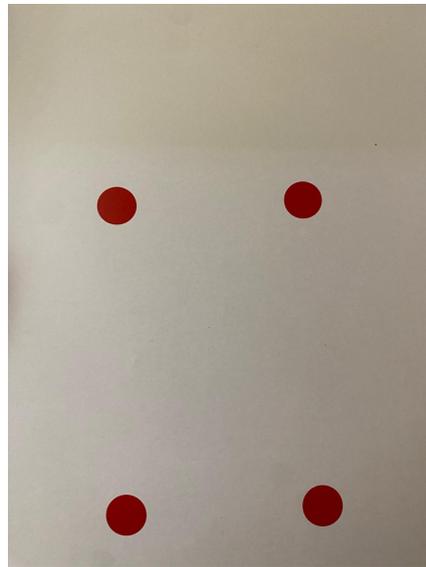
Se espera poder desarrollar un sistema de bajo costo y de fácil instrumentación que sea capaz de medir desplazamientos del orden del milímetro con una precisión de un orden de magnitud inferior.

## 2.2. Diseño del dispositivo

La hoja sobre la cual impacta el láser es una hoja blanca con 4 puntos rojos conocidos colocados en forma de que sean los vértices de un rectángulo, como se muestra en la Figura 2. Las distancias entre estos, como también su diámetro, no son necesariamente fijas, pero para todos los ensayos realizados se utilizan las siguientes medidas:

- Separación horizontal:  $s_x = 5$  cm
- Separación vertical:  $s_y = 8$  cm
- Diámetro:  $\phi = 1$  cm

Se utilizan estas distancias para que exista suficiente espacio entre los puntos para que el láser pueda enfocarse con relativa facilidad, pero, a su vez, se evitan separaciones grandes entre puntos para tener la mayor resolución espacial posible.



**Figura 2: Hoja utilizada**

Tanto la cámara como la hoja se colocan en una caja que las protege de los diversos factores ambientales para que estos no las afecten. Estos incluyen pero no se ven limitados a que la hoja se moje y que el viento genere desplazamientos en cualquiera de los dos elementos del sistema. El interior de la caja se muestra en la Figura 3. Las dimensiones de la caja son de 20 cm  $\times$  40 cm  $\times$  30 cm.

Adicionalmente, para prevenir diferencias en la iluminación del sistema causadas por factores ambientales tales como nubosidad o la variación de la intensidad de la luz solar a lo largo del día, la caja ha de ser lo suficientemente grande para que estas variaciones no sean registradas por los elementos. Asimismo, la caja se provee de iluminación interna en la forma de dos luces LED. La necesidad de evitar estas variaciones y de incluir esta iluminación interna se describen en Subsección 2.7.

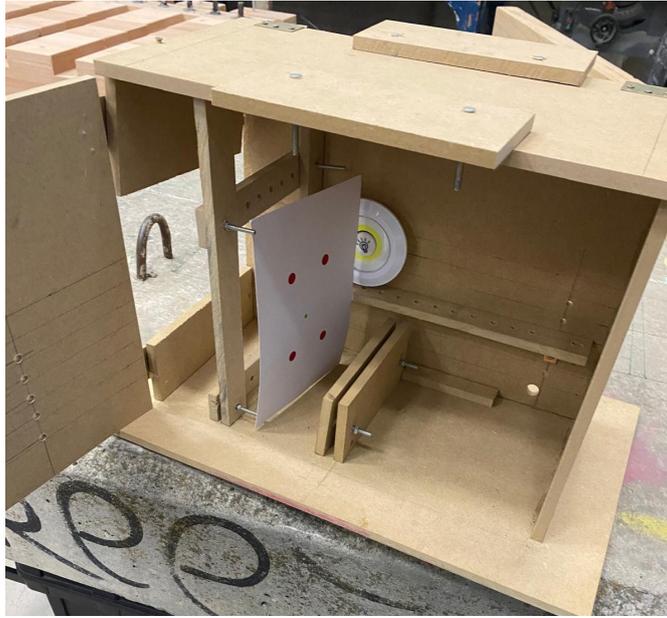


Figura 3: Interior del dispositivo diseñado

### 2.3. Bases conceptuales sobre el Procesamiento de Imágenes Digitales

Es preciso comenzar con qué es una imagen y una imagen digital. De acuerdo con Gonzalez *et al.* [8], una imagen es una función bidimensional  $f(x, y)$  donde  $x$  e  $y$  son coordenadas espaciales y  $f$  es la amplitud en cualquier par de coordenadas, denominada intensidad o nivel de gris de una imagen en ese punto. En una imagen digital ambas coordenadas espaciales y el valor de la intensidad de  $f$  son todas cantidades finitas y discretas, es decir, una imagen digital está compuesta de un número finito de elementos que tienen asociados una ubicación y valor particular. A estos elementos se los denomina *elementos de imagen*, *pels* o *píxels*, siendo esta última la más usual y la que se utilizará en este trabajo. [8]

En el presente trabajo trataremos al procesamiento de imágenes digitales de la misma forma que lo hacen Gonzalez *et al.* [8], es decir, como aquello que abarca los procesos cuyos *inputs* y *outputs* sean imágenes, y que, adicionalmente, incluye a los procesos que extraen atributos de las imágenes llegando hasta el reconocimiento de objetos individuales inclusive. Se puede dividir al procesamiento de imágenes digitales en dos amplias categorías, (1) los métodos cuyos *inputs* y *outputs* son imágenes y (2) los métodos donde los *inputs* son imágenes pero los *outputs* son atributos extraídos de las imágenes. [8]

Un ejemplo de los primeros métodos es el denominado *mejora de imagen*, que se define como la manipulación de una imagen para que esta sea más adecuada que la original para una aplicación específica. Es importante resaltar que este método se realiza con un fin específico desde el comienzo, por lo que, es una técnica orientada a solucionar un problema. Por otra parte, se tiene como ejemplo de procesamiento de imágenes con atributos como *outputs* a la

extracción del color de cada píxel de una imagen. [8]

### 2.3.1. Conceptos básicos de luz acromática y cromática

A la luz que se encuentra vacía de cualquier color se la denomina luz *acromática* (o monocromática) y su único atributo es su intensidad. Debido a que la luz monocromática se percibe como variando desde el negro al gris al blanco, es común que se refiera a la intensidad de esta como *nivel de gris*. El rango de valores de la luz acromática de negro a blanco es usualmente referido como *escala de grises* (o *greyscale*), y las imágenes monocromáticas son usualmente conocidas como *imágenes greyscale*. [8]

La luz *cromática* (a color) se encuentra en el espectro electromagnético de energía, con una longitud de onda situada en el espectro visible entre  $0,43 \mu\text{m}$  a  $0,79 \mu\text{m}$ . Más aun, se utilizan para describir la luz cromática otras tres cantidades:

- **Radiancia:** cantidad total de energía que fluye desde la fuente lumínica, usualmente medida en watts ( $W$ ).
- **Luminancia:** medida de la cantidad de energía que un observador percibe de una fuente lumínica, medida en lumens ( $lm$ ).
- **Brillo:** es un descriptor subjetivo de la percepción de la luz que es casi imposible de medir. Representa la noción acromática de la intensidad y es un factor principal en la descripción de cómo se siente al color. [8]

### 2.3.2. Formulación de un modelo de una imagen simple

Se sabe que una imagen digital monocromática se encuentra descrita por una función  $f(x, y)$ , esta es una cantidad escalar y queda determinada por la fuente de la imagen ya que sus valores son proporcionales a la energía emanada por la fuente física. Consecuentemente, se tiene que esta función es finita y no negativa. [8] Es decir,

$$0 \leq f(x, y) < \infty. \quad (1)$$

La función  $f(x, y)$  se caracteriza por dos componentes, (1) la cantidad de iluminación de la fuente que incide en el campo observado (*iluminación*), y (2) la cantidad de iluminación reflejada por los objetos del campo (*reflectancia*), por lo que sus valores se encuentran entre 0 (absorción total) y 1 (reflectancia total). Se los define como  $i(x, y)$  y  $r(x, y)$  respectivamente, y su producto da como resultado  $f(x, y)$ , es decir,

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y) \quad (2)$$

$$0 \leq i(x, y) < \infty$$

$$0 \leq r(x, y) \leq 1.$$

Mientras que la naturaleza de la iluminación está dada por la fuente lumínica, la reflectancia queda caracterizada por los objetos fotografiados.[8]

Denotando la intensidad de una imagen monocromática como  $l = f(x, y)$ , se tiene que  $l$  está comprendida entre un valor mínimo  $L_{min}$  y un valor máximo  $L_{max}$ , que a priori solo tienen que ser no negativos y finitos. Se puede tomar como rango práctico  $[L_{min}, L_{max}] = [10, 1000]$  para iluminaciones comunes de interiores sin iluminación adicional. No obstante, es usual normalizar este rango a  $[0, 1]$ . [8]

Se define el *rango dinámico* de un sistema de imágenes como el ratio entre la máxima intensidad medible a la menor intensidad medible por el sistema. Asociado a este concepto se tiene el *contraste* de una imagen, que es definido como la diferencia en intensidad entre la máxima y mínima intensidad de una imagen.[8]

### 2.3.3. Resolución espacial y resolución de intensidad

La *resolución espacial* es la medida del menor detalle discernible en una imagen y puede expresarse de varias maneras, como, por ejemplo, píxeles por unidad de longitud. En cambio, la *resolución de intensidad* refiere al menor cambio de nivel de intensidad discernible. A diferencia del muestreo espacial (píxeles) usado para generar una imagen digital, que tiene una discreción considerable, esto no sucede con respecto al número de niveles de intensidad. Como consecuencia de las construcciones típicas de los *hardwares* de los dispositivos que contienen las imágenes digitales, el número de niveles de intensidad usualmente es un número entero potencia de dos. Es común referirse a la cantidad de *bits* usados para cuantificar la intensidad como la resolución de intensidad.[8]

El número de *bits* ( $b$ ) requerido para almacenar una imagen digital está dado por

$$b = M \times N \times k, \quad (3)$$

donde  $M$  es el número de filas,  $N$  es el número de columnas y  $k$  es el exponente al que se eleva 2 para determinar la cantidad de niveles de intensidad  $L$  ( $L = 2^k$ ).[8]

### 2.3.4. Fundamentos del color

En imágenes digitales, los colores primarios de la luz son el rojo, verde y azul. Estos son discernibles por su longitud de onda en el espectro visible. De acuerdo con la Comisión Internacional de la Iluminación (CIE - por su sigla en francés) estipula que las longitudes de onda para los colores rojo, verde y azul son 700 nm, 546,1 nm y 435,8 nm respectivamente. [8]

Las características generalmente usadas para distinguir un color de otro son:

- **Brillo:** personifica la noción acromática de la intensidad.
- **Matiz:** atributo asociado a la predominancia de una longitud de onda en una mezcla de longitudes de onda. El matiz representa al color dominante, tal como es percibido por el observador.
- **Saturación:** refiere a la relativa pureza de la cantidad de luz blanca mezclada con un matiz. El espectro de colores puros están saturados completamente, con el grado de saturación siendo inversamente proporcional a la cantidad de luz agregada. [8]

El matiz y la saturación juntos son llamados *cromaticidad*, y, consecuentemente, un color puede ser caracterizado por su brillo y su cromaticidad. La cantidad de rojo, verde y azul necesarios para formar cualquier color particular son llamados valores *tristímulos*, y, denotados  $X$ ,  $Y$ , y  $Z$ . Un color es, entonces, especificado por sus *coeficientes tricromáticos*, definidos en las siguientes ecuaciones [8]

$$x = \frac{X}{X + Y + Z} \quad (4)$$

$$y = \frac{Y}{X + Y + Z} \quad (5)$$

$$z = \frac{Z}{X + Y + Z}. \quad (6)$$

Las ventajas de utilizar el modelo HSI (matiz, saturación, brillo por sus siglas en inglés), también llamado HSV, por sobre el RGB (rojo, verde, azul por sus siglas en inglés) son que el HSI corresponde más próximamente a la forma en la que los humanos describen e interpretan los colores, y que desacopla el color y la información *greyscale* de una imagen, haciéndola apropiada para el uso de varias técnicas en *greyscale*. La Figura 4 es una representación gráfica de como se identifican los colores en el modelo HSV. [12]

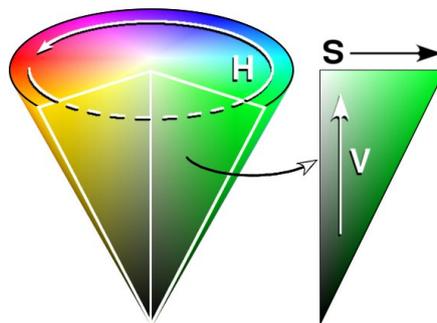
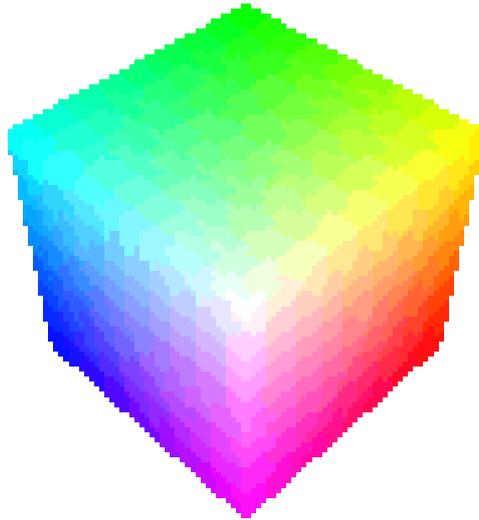


Figura 4: Cono de colores del espacio RGB [12]

### 2.3.5. El modelo HSI/HSV de color

Las imágenes RGB se componen de tres imágenes de intensidad *greyscale* (representando rojo, verde y azul), por lo que es fácil obtener la intensidad de una imagen RGB. Se puede

pensar en los colores como un punto en un cubo (representado en la Figura 5) donde cada eje representa la cantidad de rojo ( $R$ ), verde ( $G$ ) y azul ( $B$ ). Estos valores se encuentran comprendidos entre 0 y 1, por lo que el espacio de colores queda con forma de cubo. En esta forma, el vértice de punto  $[0,0,0]$  representa el negro y el vértice de punto  $[1,1,1]$  representa el blanco. La intensidad de un punto está dada por el plano perpendicular a la recta que une a los ya descritos vértices al cual el punto pertenece. El matiz se puede discernir mediante el plano que une el punto a considerar, el negro y el blanco.[8]



**Figura 5: Cubo de colores del espacio HSV [4]**

Las ecuaciones que permiten convertir las coordenadas normalizadas de RGB a HSI, descritas por Gonzalez *et al* [8], son

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{\frac{1}{2}[(R - G) + (R - B)]}{[(R - G)^2 + (R - B)(G - B)]^{1/2}} \right) \quad (7)$$

$$H = \begin{cases} \theta & \text{si } B \leq G \\ 360^\circ - \theta & \text{si } B > G \end{cases} \quad (8)$$

$$S = 1 - \frac{3}{R + G + B} [\min(R, G, B)] \quad (9)$$

$$I = \frac{1}{3}(R + G + B) \quad (10)$$

### 2.3.6. Rebanado de intensidad y codificación de color

El proceso de imágenes de pseudo color consiste en asignar colores a valores de gris basado en un criterio específico. Dentro de los primeros y más simples ejemplos de estos procesos se encuentra el rebanado de intensidad y codificación de color. Interpretando una imagen como una función tridimensional, este método se puede ver como la colocación de planos paralelos al plano de coordenadas de la imagen, donde cada uno de ellos *reban* la función en el área

de intersección.

Si se le asigna un color diferente a cada lado del plano, cualquier píxel cuyo nivel de intensidad se encuentre por encima del plano será codificado con un color, y cualquier píxel cuyo nivel de intensidad se encuentre por debajo del plano será codificado con otro color. Como resultado se obtiene una imagen de dos colores cuya apariencia relativa se puede controlar moviendo el plano de rebanado a lo largo del eje de intensidad.

### 2.3.7. Rebanado de color

Resaltar un rango específico de color en una imagen es útil para separar objetos de sus entornos. La idea básica es, o bien resaltar los colores de interés para que se distingan del resto fácilmente, o usar la región definida por los colores para mayor procesamiento.

Un píxel de color es una cantidad  $n$ -dimensional, siendo cada dimensión uno de los colores utilizados para describir al resto ( $n = 3$  para las imágenes RGB y HSI). Como consecuencia de esto, las funciones de transformación de colores son más complejas que sus homólogas en escala de grises. Una de las maneras más sencillas de rebanar una imagen a color es mapear los colores por fuera del rango de interés con un color no predominante y neutral.

## 2.4. Antecedentes

### 2.4.1. Aplicación de la fotogrametría al monitoreo de un puente - Valença *et al* [17]

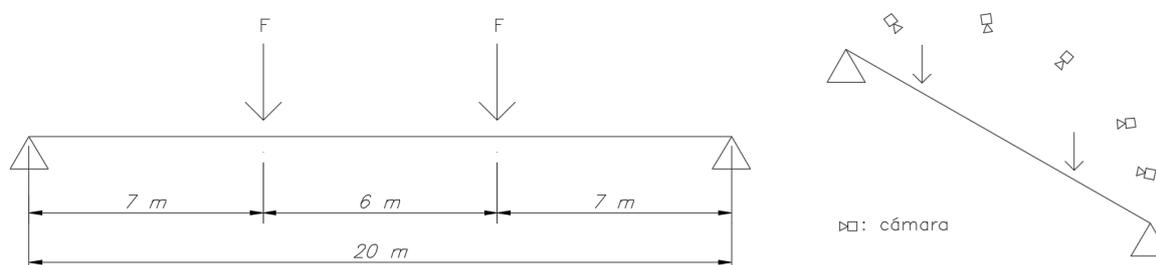
Valença *et al* [17] buscaron desarrollar la aplicación de un método fotogramétrico para la medición de desplazamientos para el ME. Llevaron a cabo ensayos de calibración y validación comparando los resultados con métodos tradicionales de medición. Estos ensayos consistieron, en estudios de laboratorio evaluando vigas de hormigón armado de gran longitud (20 m), y, posteriormente, el monitoreo de una pasarela peatonal donde el uso de métodos tradicionales de medición son dificultosos o inviables.

La metodología aplicada por Valença *et al* [17] consistió en la construcción de un modelo 3D de la estructura a partir de la toma de una serie de imágenes con varias cámaras para cada instante medido. En estas imágenes se observaron tanto puntos de referencia fijos externos a la estructura a medir como puntos identificables pertenecientes a la estructura (objetivos). Cada punto objetivo fue fotografiado por al menos dos cámaras diferentes, cuyas direcciones eran no colineales.

El principal parámetro identificado por Valença *et al* [17] que afecta la precisión de su metodología y que también lo hace para el método a desarrollar en este estudio fue la *cobertura fotográfica*. La cobertura fotográfica es el porcentaje del área de cada fotografía que tiene

información relevante, es decir, qué porcentaje de la imagen es la estructura a medir. Cuanto más grande sea este valor, mayor es la precisión.

Para el caso de las vigas de hormigón armado, se estudiaron cuatro vigas de 20 m de longitud con una sección de 0,30 m x 0,50 m; dos vigas fueron monitoreadas hasta su falla y las otras dos fueron sujetas a cargas permanentes constantes por un período de tiempo, observándose principalmente las deformaciones diferidas. Cada par de vigas fue estudiada en un laboratorio diferente y, en consecuencia, tuvieron diferentes condiciones de borde y posicionamiento de las cámaras. Todos los ensayos fueron de carga de 4 apoyos. La Figura 6 muestra un esquema de la instrumentación de los ensayos. [17]



**Figura 6: Esquema de la instrumentación llevados a cabo por Valença *et al* [17]**

Para los ensayos de falla, las vigas lograron soportar una deformación vertical máxima superior a los 700 mm y se evaluó fotogramétricamente desplazamientos impuestos en varias instancias, llegando a una flecha máxima de 700 mm. Por otra parte, para los ensayos de deformaciones diferidas, se evaluaron fotogramétricamente los desplazamientos previo a la introducción de la carga, 2 horas y media después de aplicada y, posteriormente, cada 15 días durante 88 días. En este ensayo se obtuvo una deformación vertical máxima de aproximadamente 160 mm. [17]

De estos ensayos se obtuvieron resultados prometedores, ya que en ambos la diferencia, en promedio, entre el método fotogramétrico y los LVDTs fue inferior al 1%. Los resultados se muestran en la Tabla 1, donde el residual hace referencia a la diferencia entre la medida del método y a la de los LVDTs (considerada como correcta). En esta tabla se aprecia como, a pesar de que ambos ensayos obtuvieron resultados semejantes, el ensayo de carga permanente obtuvo diferencias levemente inferiores. Ellos concluyeron que esto es debido a que se tenía una mayor cobertura fotográfica en esta instancia. Además, es preciso denotar que la media cuadrática del residual fue inferior a 1 px en ambas instancias.

**Tabla 1: Resultados obtenidos por Valença *et al* [17] para vigas de hormigón armado**

	Ensayo al fallo	Ensayos carga permanente
Diferencia promedio (%)	0,96	0,83
Diferencia promedio (mm)	2,19	0,52
Media cuadrática del residual (px)	0,32	0,30
Cobertura fotográfica (%)	30	38

En lo que respecta al monitoreo del puente hecho por Valença *et al* [17], no se pudo comparar los resultados obtenidos por el método fotogramétricos ya que solo se podía colocar LVDTs en un número limitado de puntos y el uso de ensayos topográficos tardaría demasiado tiempo. Sin embargo, se planteó que hubo mayores fuentes de error que en los laboratorios debido a situaciones como estar a contraluz, ángulos de las cámaras no eficientes y vibraciones generadas por viento y el pasaje de personas. Todos estos factores son posibles fuentes de error en la implementación en campo del sistema desarrollado en este estudio.

#### **2.4.2. Estudios piloto de mediciones de deformaciones en puentes con fotogrametría - Hans-Gerd Maas *et al* [1]**

Hans-Gerd Maas *et al* [1] hicieron estudios sobre un sistema monocular diseñado para la medición de desplazamientos uni y bidireccional con el fin de verificar la aplicabilidad práctica y la precisión de este método fotogramétrico.

En primera instancia, se hizo un ensayo de carga de 4 puntos de un bloque de hormigón de 2 m de largo midiendo sus desplazamientos en 3 puntos mediante sensores convencionales. En paralelo, se captó una secuencia de imágenes mediante una videocámara (precisión de 6 Mpx) y una cámara (precisión de 0,7 Mpx y frecuencia de captura de imagen de 1 Hz). Estas cámaras apuntaban a objetivos circulares blancos de 14 mm de diámetro en un fondo negro (correspondiente a 7 píxeles de la cámara de menor resolución). Se observó que para obtener los menores errores posibles, la cámara debía estar lo más perpendicular a la estructura posible.[1]

Posteriormente, se utilizó el método fotogramétrico planteado por Hans-Gerd Maas *et al* [1] para la evaluación de un puente de 27 m de luz. La evaluación consistió en la introducción de carga en forma de 3 camiones de 44 toneladas cada uno en distintos puntos. Las medidas para este ensayo fueron tomadas por un lado por una serie de LVDTs colocados en el puente (con un rango de 10 mm), y, por otro lado, por una cámara de resolución de 1 Mpx con frecuencia de imagen de 1 Hz ubicada a 32 m del puente con un rango de visión de 32,5 m. [1]

En ambos ensayos realizados se llegó a la conclusión de que a pesar de que la precisión del método fotogramétrico no es del orden del de los métodos tradicionales, sí tienen la precisión suficiente para la amplia mayoría de aplicaciones de ME. Se vio que la precisión potencial se encuentra en el rango  $L/200.000 - L/300.000$ , donde  $L$  es la mayor dimensión captada por la cámara. [1]

#### **2.4.3. Implementación de sensores láser para medir desplazamientos en estructuras - Franco *et al* [7]**

Los estudios realizados por Franco *et al* [7] utilizaron, al igual que Hans-Gerd Maas *et al* [1], un método fotogramétrico monocular para comparar su desempeño contra LVDTs y acelerómetros. Se desarrolló un ensayo de vibración libre a un pórtico de referencia para comparar al sistema monocular con las medidas de un LVDT, y, luego, se realizó el mismo ensayo pero sin los LVDT para evitar el amortiguamiento generado por estos, y, en cambio, se utilizó un acelerómetro.

La configuración que se utilizó para los ensayos llevados a cabo por Franco *et al* [7] consiste en la colocación de un láser solidario al elemento móvil (mesa vibratoria en este caso) cuya luz impacta en una hoja fija y una cámara, también fija, que capta la imagen. La cámara tiene una resolución de 320 x 240 píxel y una frecuencia de 30 cuadros por segundo.

Para ambos ensayos llevados a cabo, la diferencia entre la frecuencia del movimiento medida por el sensor y la medida por el LVDT o acelerómetro fue de 0,01 Hz, lo que representa diferencias porcentuales de 0,27 % y 0,34 % respectivamente. En lo que respecta a las diferencias de la razón de amortiguamiento, las diferencias fueron de 0,15 % y 0,02 % respectivamente, lo que implicó diferencias relativas de 2,94 % y 0,67 %. [7]

#### **2.4.4. Método fotogramétrico pragmático para medir desplazamientos en puentes - Serrano *et al* [14]**

Serrano *et al* [14] estudiaron la precisión de dos sistemas monoculares, uno denominado *punto + cámara* y otro denominado *láser + cámara*. El primer sistema constó de una cámara que grababa el movimiento de un punto solidario a la estructura que se deformaba, mientras que el segundo sistema constó de un láser solidario a la estructura proyectando a una superficie que una cámara fija capta. Este último es similar a la disposición del dispositivo desarrollado, con la diferencia que se fija la cámara en lugar del láser.

En el laboratorio, se midieron los desplazamientos de pruebas estáticas y dinámicas sobre un pieza de madera de 2,45 m de largo y una sección de 19 cm x 2 cm, donde todos los sistemas de medición se colocaron a la mitad de la luz. [14] La instrumentación de los distintos métodos fotogramétricos en los ensayos de laboratorio llevados a cabo por Serrano *et al* [14] fueron los siguientes:

- Método *punto + cámara*: se adhirió una pantalla de referencia a la parte lateral de la pieza de madera y se ubicó a la cámara a 1,5 m de distancia de este a la misma altura.
- Método *láser + cámara*: se colocó a 1,5 m del espécimen la pantalla de proyección, y, el láser, se colocó a la mitad de la luz de la pieza de madera.

En la Tabla 2 se muestran los valores medidos de los desplazamientos de acuerdo con los dos sistemas evaluados comparados con aquellas medidas por el comparador, asumido como verdadero. [14]

**Tabla 2: Desplazamientos (mm) obtenidos por Serrano *et al* [14] para los sistemas *láser + cámara* y *punto + cámara***

Etapa	Carga 1	Carga 1 y2	Carga 2	Sin Carga
<i>Láser + cámara</i>	3,61	7,74	4,31	0,14
Deformímetro	3,78	7,87	4,25	0,25
Diferencia	0,17	0,13	0,06	0,11
<i>Punto + cámara</i>	3,80	7,86	4,22	0,25
Deformímetro	3,78	7,87	4,25	0,25
Diferencia	0,02	0,01	0,03	0,00

Los ensayos de medición en puentes fueron solo realizados con la configuración *punto + cámara* debido a que este mostró resultados preliminares más prometedores. No obstante, se hipotetizó que la diferencia de la configuración *láser + cámara* puede mejorarse si:

- La cámara y la superficie de proyección fueran solidarias a la estructura y el láser se encontrase fijo.
- Se usara un telescopio para proyectar el láser; reduciendo el tamaño del punto proyectado y la divergencia de la luz. [14]

## 2.5. Análisis teórico

### 2.5.1. Longitud representada por cada píxel

Es preciso conocer cuál es la resolución espacial que nuestro sistema tiene para saber cuál es la precisión de un píxel, ya que la segunda depende directamente de la primera. Se tiene que la hoja a la que se le toman fotografías debe contener como mínimo cuatro puntos rojos de 1 cm de diámetro cuyos centros forman un rectángulo de medidas  $s_x \times s_y = 5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ . Consecuentemente, como mínimo, la distancia en vertical que ha de cubrir la imagen es de 9 cm en vertical y 6 cm en horizontal.

Todas las cámaras utilizadas en los ensayos descritos en la Subsección 2.8 y la Subsección 2.9 tienen una definición de 12 Mpx y las fotografías tienen una relación largo-ancho de 4:3. Es decir, las imágenes constan de 4.000 px en vertical y 3.000 px en horizontal. Como

consecuencia, la limitante de unidad de medida por píxel en este caso será la longitud vertical.

Se tiene que la resolución espacial máxima (a la que denotaremos  $sp_{res}$ ) que puede obtenerse es dada por la siguiente ecuación:

$$sp_{res,max} = \frac{9 \text{ cm}}{4.000 \text{ px}} = 0,0225 \text{ mm/px.} \quad (11)$$

No obstante, se debe tener en consideración que la imagen tendrá un margen por fuera de los puntos rojos. Este margen, que se considera de 3 cm, es necesario ya que si cualquiera de los puntos rojos de referencia no se encuentra íntegramente en la imagen, se pueden generar errores en el procesamiento. Consecuentemente, la resolución espacial resulta:

$$sp_{res} = \frac{9 \text{ cm} + 2 \times 3 \text{ cm}}{4.000 \text{ px}} = 0,0375 \text{ mm/px.} \quad (12)$$

### 2.5.2. Descripción del procesamiento de imágenes digitales empleado

El procesamiento de las imágenes digitales que emplea el método fotogramétrico está dado por la modificación de un *script* originalmente escrito por el MSc. Ing. Leandro Domenech. Este fue reestructurado para su uso en el programa *MatLab*.

Se vio la necesidad de modificar el *script* original por el que se desarrolla en el Apéndice A debido a que cuando se comenzaron a realizar los ensayos descritos en Subsección 2.7, el programa no lograba identificar correctamente la posición del láser.

El *script* original funciona sin problemas únicamente cuando se tiene una iluminación constante general como la que se encuentra en habitaciones interiores con iluminación artificial. Sin embargo, cuando la iluminación proviene desde el interior del sistema diseñado o con la variabilidad de la iluminación natural, este no funciona adecuadamente. En muchas ocasiones se reconocía solo parcialmente al láser, o, en lugar del láser, el programa reconocía partes blancas iluminadas de la hoja como el láser.

El *script* modificado, en líneas generales, sigue estos pasos:

1. Obtiene los parámetros intrínsecos de la cámara utilizada.
2. Calibra los parámetros para considerar *thresholds* que serán utilizados posteriormente.
3. Obtiene las coordenadas de los puntos rojos y corrige los parámetros extrínsecos en base a distancias conocidas.
4. Obtiene la posición del láser en relación a los puntos rojos, y, consecuentemente, las coordenadas dentro de la imagen corregida.
5. Itera los pasos 3 y 4 para todas las imágenes que están en la carpeta a procesar.

Las modificaciones que se le realizaron al *script* original fueron (1) la inclusión de la determinación de los parámetros que se usan para considerar los *thresholds* y (2) la forma en la que se reconoce al láser en la imagen, usando rebanado y codificación de color.

En primera instancia, se tenía que los parámetros *thresholds* denominados *parTh*, *parTh1* y *parTh2* (descritos en el Apéndice A) debían de ser determinados previos a correr el programa. Para que se pudiera correr el *script* sin necesidad de tener que hacer una evaluación previa, se escribieron las funciones auxiliares *cal\_param*, *calib\_parTh*, *calib\_parTh1* y *calib\_parTh2*. Gracias a estas funciones se pueden calibrar los parámetros al momento de procesar las imágenes de una manera semi-automatizada. Estas funciones también se incluyen en el Apéndice A.

Además, originalmente, el láser (de color verde) se obtenía mediante una ponderación de qué tanta componente verde tenían los píxeles y del valor de saturación del píxel. Sin embargo, cuando la imagen quedaba poco iluminada ningún punto era reconocido, y, ante cierta iluminación, las partes blancas de la hoja eran identificadas como el láser, generando error. Cuando no se reconocía ningún punto, era debido a que ninguno llegaba a tener una intensidad tal que superara el *threshold*, en cambio, en la otra situación adversa, la intensidad de las tonalidades blancas provocaban que fueran considerados como verdes. El *script* modificado reconoce el láser mediante el reconocimiento de una gran proporción de verde en el píxel, habiendo previamente eliminado el verde de aquellos píxeles con alta componente azul.

## 2.6. Ensayo sobre la variación del ángulo de la cámara con respecto a la hoja

### 2.6.1. Materiales y métodos

Se realiza un ensayo para medir que tanto varía la precisión de las medidas, si es que lo hace, al variar el ángulo que forma la cámara utilizada con la hoja donde se proyecta el láser. El ángulo  $\alpha$  se mide de la manera que se muestra en la Figura 7.

Se toman 5 fotografías para cada uno de los ángulos medidos ( $\alpha = 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 105^\circ, 120^\circ$ ) y se mide la distancia que las medidas individuales tienen con el promedio de medidas. La diferencia de la cámara a la hoja en cada set de medidas se muestra en la Tabla 3.

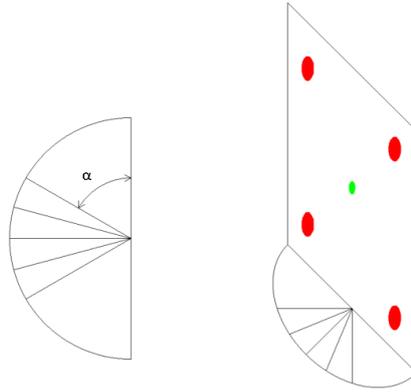


Figura 7: Esquemmatización de cómo se mide el ángulo  $\alpha$

Tabla 3: Distancia entre la cámara y la hoja donde se proyecta el láser para ensayo de variación de ángulo

Ángulo ( $\alpha$ )	60°	75°	90°	105°	120°
Distancia Hoja-Cámara (cm)	9,8	11,5	11,2	11,7	12,0

El ensayo se realiza con los siguientes parámetros:

- Distancia del láser a la estructura: 0,31 m
- Hoja utilizada: Mate 350
- Cámara utilizada: *iPhone 11*

### 2.6.2. Análisis de resultados

Las desviaciones estándares obtenidas para cada uno de los sets de medida para cada ángulo se muestran en la Tabla 4. De estos valores se concluye que cuanto más alejado se encuentre el ángulo de los 90°, mayor es la variabilidad de las medidas, y, por ende, mayor es la incertidumbre de la medida obtenida.

Tabla 4: Desviación estándar del set de medidas para cada ángulo

Ángulo ( $\alpha$ )	60°	75°	90°	105°	120°
Desviación Estándar ( $\mu\text{m}$ )	18,5	13,1	11,6	14,6	17,4

### 2.6.3. Conclusiones

En base a los resultados obtenidos, se puede concluir que la posición de la cámara con respecto a la hoja que minimiza las variaciones es tenerla directamente frontal. Es decir, con  $\alpha = 90^\circ$ . A pesar de esto, pequeñas variaciones en este ángulo generan aumentos muy leves en la variabilidad de las medidas.

## 2.7. Ensayo sobre iluminación del dispositivo

### 2.7.1. Materiales y métodos

Se realizan dos sets de medidas variando la fuente de iluminación del dispositivo; (1) iluminación LED dentro del dispositivo, y (2) iluminación natural a Sol y sombra. La metodología empleada es por 5 minutos tomar 5 medidas cada 30 segundos. El punto a detectar es un punto verde dibujado manualmente en la hoja de diámetro  $\phi = 4,24$  mm. La cámara utilizada fue la de un *iPhone 11* (definición de 12 Mpx).

Las condiciones ambientales para el ensayo con luz natural, realizado fuera del laboratorio, son:

- Temperatura: 10°C
- Humedad: 66 %
- Viento: 30 km/h con ráfagas de hasta 41 km/h

### 2.7.2. Análisis de resultados

La Figura 8 muestra la diferencia de las medidas obtenidas con el promedio de las medidas del primer escalón para el ensayo con luz LED. Se puede apreciar que, para ambas coordenadas, no hay un patrón que relacione las diferencias con el promedio del primer escalón de medidas, sino que son valores aparentemente aleatorios. Adicionalmente, la diferencia entre la medida más grande y la más chica es inferior a 0,01 mm.

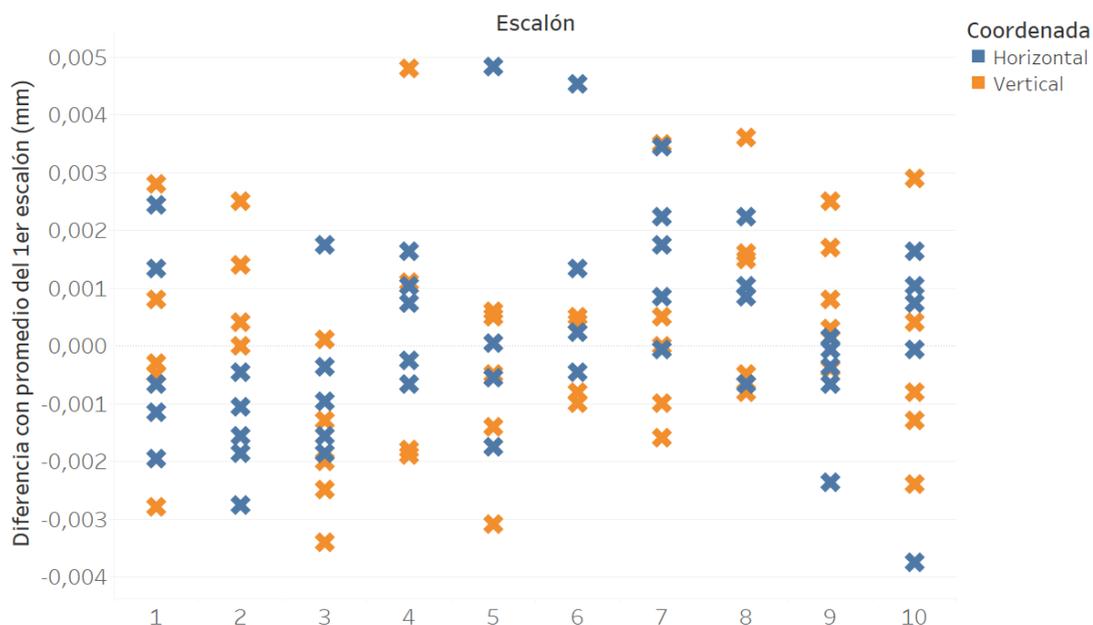
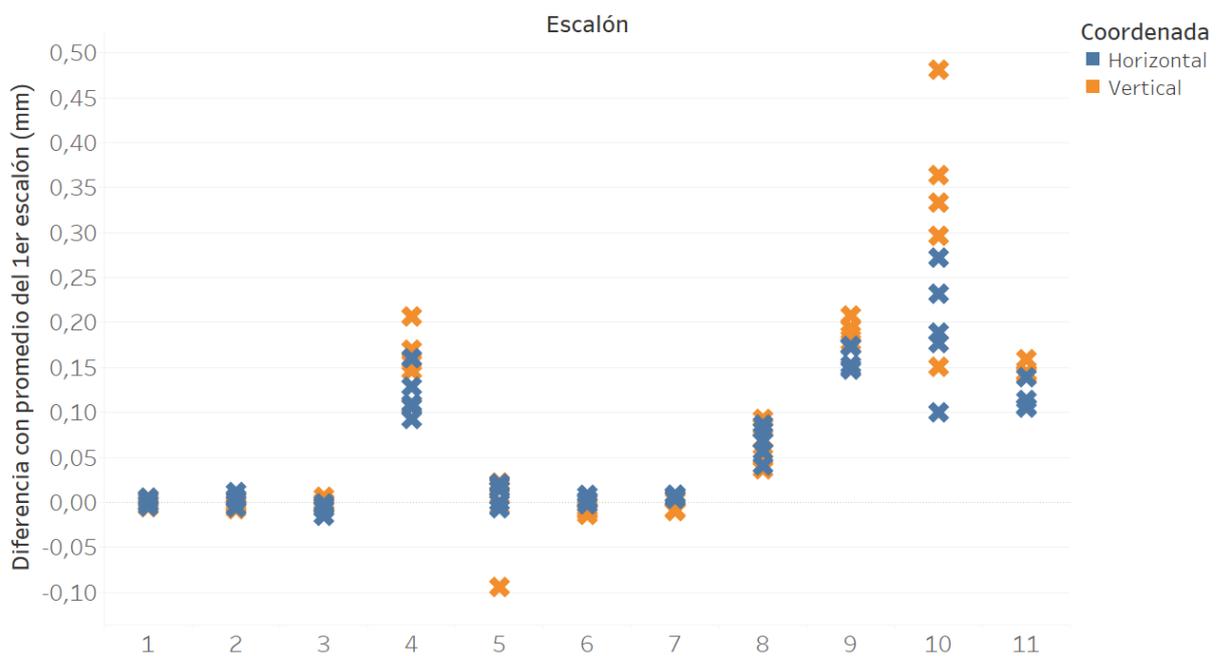


Figura 8: Diferencia de las medidas obtenidas con el promedio de las medidas del primer escalón para el ensayo con luz LED

La amplitud del rango en el que se encuentran todas las medidas obtenidas es menor a la resolución espacial que se tiene ( $sp_{max}$ ), y, por lo tanto, se concluye que es una iluminación aceptable para realizar ensayos.

En contraste, la Figura 9 muestra que la la diferencia de las medidas obtenidas con el promedio de las mismas para el ensayo con luz natural tiene una variabilidad de un orden de magnitud mayor, la diferencia más grande entre medidas es de 0,58 mm. Esta diferencia es significativamente mayor a  $sp_{max}$ , por lo que sin mayor procesamiento los resultados no serían aceptables.



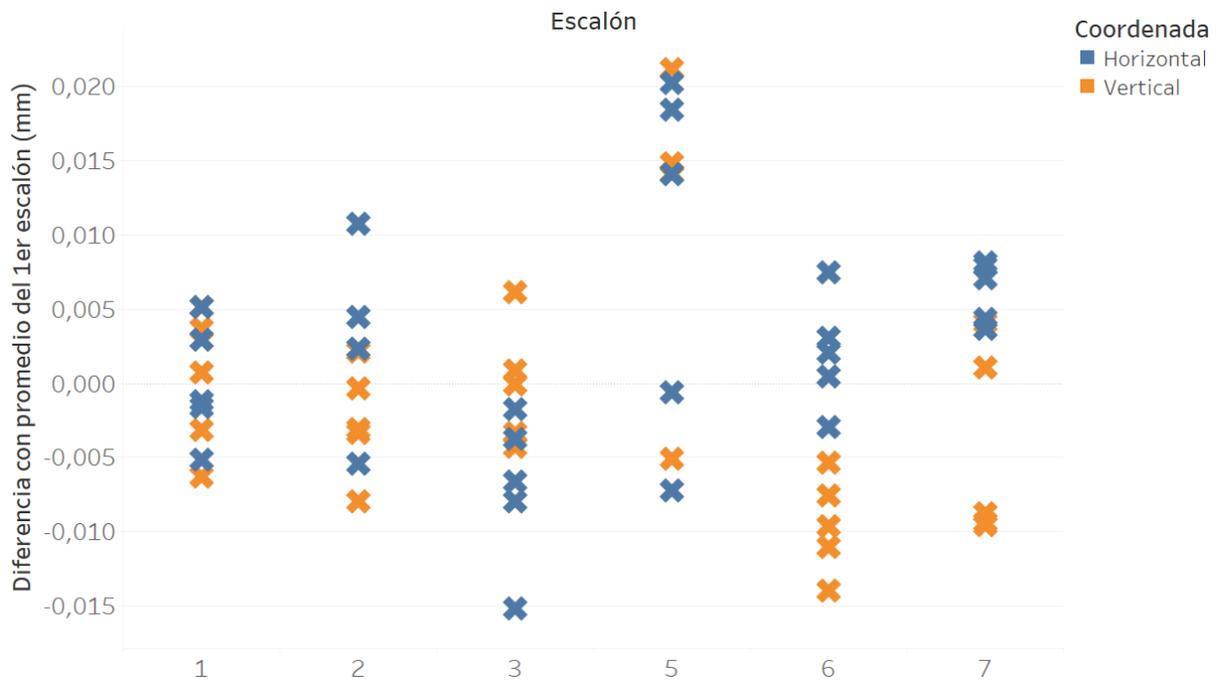


Figura 10: Diferencia de las medidas obtenidas con el promedio de las mismas para el ensayo con luz natural excluyendo *outliers*

### 2.7.3. Conclusiones

Cuando se comparan los resultados de ambos ensayos, se denota que incluso cuando se excluyen los escalones donde el Sol impactó directamente, si se utiliza la luz natural como fuente de iluminación se obtienen variaciones de medida mayores. Además, para lograr un procesamiento correcto en todo el ensayo, se necesita mayor tiempo de procesamiento. Consecuentemente, se concluye que el uso de iluminación LED dentro del dispositivo es la mejor alternativa.

## 2.8. Ensayos de punto fijo de corta duración

### 2.8.1. Materiales y métodos

Para evaluar el efecto de distintos láseres y distintas condiciones de apoyo de los mismos, se realiza una serie de ensayos de corta duración donde todo el sistema se mantiene estático. El dispositivo y el láser se encuentran apoyados en cada extremo de un pórtico metálico de 5,81 m de luz libre. El ensayo consta de la toma de 5 medidas cada 30 segundos durante 5 minutos. La Figura 11 muestra cómo el láser impacta en el dispositivo colocado en el pórtico metálico fijo.



**Figura 11: Láser impactando en el dispositivo para los ensayos de corta duración**

El láser 1 es un puntero de la marca FBCI. Tiene una potencia de 5 mW y una distancia máxima de luz en la oscuridad de 1000 m.

El láser 2 es un puntero de modelo PM Laser 303 de la marca Cowpaj. Tiene una potencia de 1000 mW y una distancia máxima de luz en la oscuridad de 2000 m.

El láser 3 es un puntero de la marca Dinsum. Tiene una distancia máxima de luz en la oscuridad de 3500 m.

Para las condiciones de borde se considera (1) apoyado sobre unos bloques que inmovilizan su desplazamiento y (2) sujetado con 2 pinzas, una en cada extremo, que se asumen fijas.

El láser, en todos los ensayos, se encuentra a 5,81 m del dispositivo. Los láseres y condiciones de apoyo del mismo para cada uno de los ensayos fueron los siguientes:

1. Láser 1 apoyado
2. Láser 1 sujetado con pinzas (las pinzas se apoyan en el pórtico)
3. Láser 2 apoyado

#### 4. Láser 3 apoyado

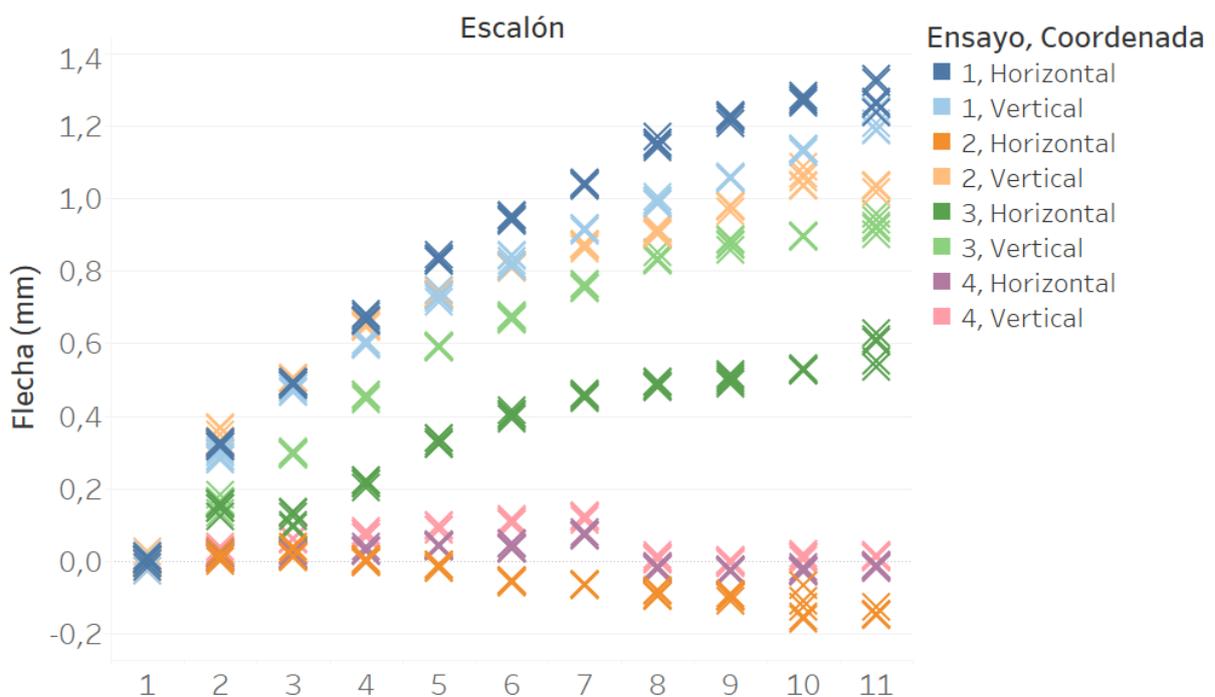
##### 2.8.2. Análisis de resultados

La Figura 12 muestra la flecha en milímetros marcada por el dispositivo para cada medida tomando como posición original el promedio de las medidas del primer escalón. A pesar de que la flecha debería de mantenerse constante en cero, aquí se puede observar como para los láseres 1 y 2 hay una clara tendencia al aumento de la flecha de magnitud no despreciable a lo largo del tiempo. No obstante, para esta corta duración, la gráfica da señales de que existe una tendencia a la estabilización de la medida. Las diferencias máximas obtenidas por coordenada y por láser se reflejan en la Tabla 5.

A partir de lo expuesto en la Tabla 5 se puede observar que los resultados obtenidos para el láser 3 (Ensayo 4) son de un orden inferior al del resto. Más aún, también se denota que el láser 2 (Ensayo 3) obtiene medidas inferiores a las obtenidas para el láser 1 cuando se encuentran bajo las mismas condiciones de apoyo (Ensayo 1).

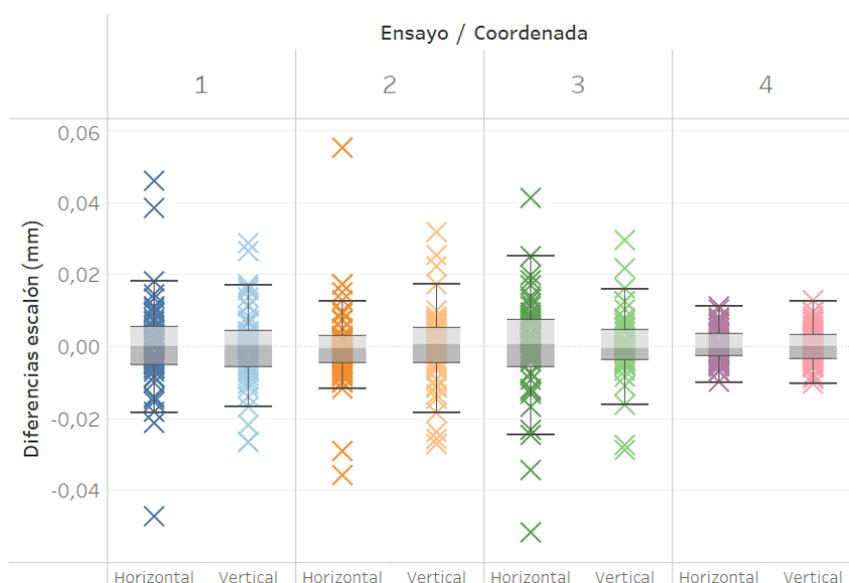
**Tabla 5: Flecha máxima (mm) para cada ensayo, por coordenada**

	Ensayo 1 Láser 1 (apoyado)	Ensayo 2 Láser 1 (sujetado)	Ensayo 3 Láser 2 (apoyado)	Ensayo 4 Láser 3 (apoyado)
Coordenada Vertical	1,239	1,088	0,957	0,125
Coordenada Horizontal	1,328	0,146	0,627	0,079



**Figura 12: Diferencia de las medidas obtenidas con el promedio de las medidas del primer escalón**

La Figura 13 muestra la diferencia de cada medida individual con respecto al promedio de las medidas de su escalón (con el *boxplot* superpuesto, donde los bigotes excluyen las medidas por fuera del *boxplot* por 1,5 veces el rango intercuartil) y la Tabla 6 muestra la desviación estándar de estas diferencias. Aquí se puede ver que el Ensayo 4 (correspondiente al uso del láser 3) tiene una desviación estándar considerablemente menor que el resto, entre un tercio y la mitad del resto aproximadamente. No obstante, todas se encuentran por debajo de las 15  $\mu\text{m}$ , por lo que no se observa gran variabilidad en ningún ensayo.



**Figura 13: Variación de la medida por escalón y coordenada**

**Tabla 6: Desviación estándar ( $\mu\text{m}$ ) de la variación de la flecha de cada escalón para cada ensayo, por coordenada**

	Ensayo 1 Láser 1 (apoyado)	Ensayo 2 Láser 1 (sujetado)	Ensayo 3 Láser 2 (apoyado)	Ensayo 4 Láser 3 (apoyado)
Coordenada Vertical	10,8	10,9	9,6	5,0
Coordenada Horizontal	13,2	11,8	14,4	4,5

### 2.8.3. Conclusiones

De los resultados expuestos, se observa que las medidas varían en función del tiempo, sin embargo, las diferencias para un mismo escalón de carga son muy pequeñas según lo esperado. Si las diferencias fueran por variaciones inmediatas aleatorias, se esperaría que los valores de la Figura 13 y la Tabla 6 fueran más elevados y en la Figura 12 no se vería una tendencia clara; serían elevaciones y depresiones aleatorias de los valores.

Se concluyó que hay tres posibles causas de estas variaciones: (1) movimiento de la hoja dentro del dispositivo, (2) giro del láser, y (3) calentamiento interno del láser.

Para la primera posibilidad de causal de error se analizó si las coordenadas de los centros de los puntos rojos cambiaron. Esto se debe a que si estas cambian, es de esperar que las del láser también lo hagan ya que son referidas a las de los puntos rojos.

Las coordenadas de los centros de los puntos rojos no se desplazaron, en ningún momento, más de 2 px, por lo que basado en este movimiento no se deberían observar variaciones superiores a 0,1 mm. Consecuentemente, las diferencias observadas en estos ensayos no se atribuye a este error.

Para la segunda posibilidad de causal de error se analizó qué giro, con respecto al centro del láser, tendría que haber ocurrido para que se diera la diferencia máxima de 1,328 mm. Teniendo en cuenta que se la distancia al láser es de 5,81 m, se tiene que:

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{1,328 \text{ mm}}{5,81 \text{ m}} \right) = 0,0131^\circ = 2,29 \times 10^{-4} \text{ rad.} \quad (13)$$

El giro necesario para producir este desplazamiento es imperceptible, no obstante, este no debería haber ocurrido en ninguno de los ensayos, especialmente en los que se restringió el movimiento del láser mediante los apoyos, ya que estos carecen de factores de fluencia.

La tercera causal de error surge como consecuencia de la observación de que al culminar los ensayos 1 al 3 se denotó que el láser había experimentado un incremento en su temperatura al tacto. Cuando se considera que el Ensayo 4 tuvo flechas significativamente menores, y que con el láser 3 no se apreció un cambio en su temperatura al tacto, se concluye que esta sí es una posible causal de error. Es preciso notar que el calentamiento no impactó en la forma ni tamaño del láser registrado, si no que lo que ocurrió fue meramente un movimiento, lo que da señales de que el calentamiento interno induce un giro en el láser.

Además, los errores del Ensayo 4 sí podrían ser por las combinaciones de las dos primeras causales de error consideradas, es decir, por un mínimo movimiento de la hoja y un giro mucho menor al analizado previamente (equivalentemente a la Ecuación 13, se tendría un ángulo de giro no superior a  $\theta = 0,0012^\circ = 2,15 \times 10^{-5} \text{ rad}$ ).

## **2.9. Ensayos de punto fijo de larga duración**

### **2.9.1. Materiales y métodos**

Para evaluar el efecto del calentamiento interno del láser se realiza, en una modalidad similar a la de los ensayos de corta duración, una serie de ensayos en un período de tiempo más prolongado.

Para estos ensayos se toman 5 medidas cada minuto por 3 minutos en cuatro sets, comenzando en los minutos 0, 15, 30 y 45. Los láseres utilizados son los mismos que se usaron en la Subsección 2.8, con excepción, del láser 1, que fue modificado para poder encenderlo y apagarlo externamente. Esto significa que del puntero se desprenden dos metros de cable flexible en cuyo final se encuentra la batería del mismo y un *switch* para encenderlo y apagarlo. La Figura 14 muestra la configuración de los ensayos.

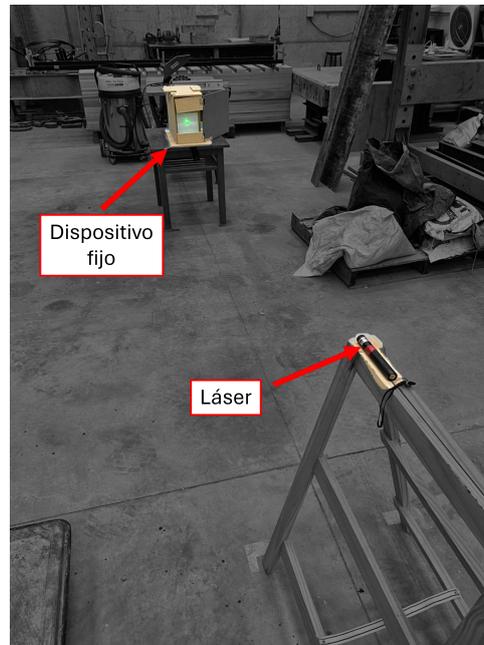


Figura 14: Configuración de los ensayos de larga duración

En total se realizaron, para 3 distancias (1,35 m, 2,83 m y 6,00 m), 4 ensayos de 16 escalones cada uno. Los ensayos se diferencian de la siguiente manera:

- **Ensayo 1:** láser 1 encendiéndolo solo para la toma de medidas y dejándolo apagado el restante del tiempo (intermitente).
- **Ensayo 2:** láser 2 encendido durante todo el ensayo (continuo).
- **Ensayo 3:** láser 3 encendido durante todo el ensayo (continuo).
- **Ensayo 4:** láser 1 encendido durante todo el ensayo (continuo).

### 2.9.2. Análisis de resultados por ensayo

Los resultados de la flecha aparente, que debería mantenerse constante en cero, para los Ensayos 1 a 4 se muestran en la Figura 15, Figura 16, Figura 17 y Figura 18 respectivamente. Para el Ensayo 4 se puede apreciar que hay una clara diferencia entre las medidas de los primeros 3 minutos a los 6,00 m de distancia con respecto al resto. Por este motivo se concluyó que debe haber habido un error durante su medición por lo que se excluyen estas medidas; los resultados del Ensayo 4 reducido se muestran en la Figura 19.

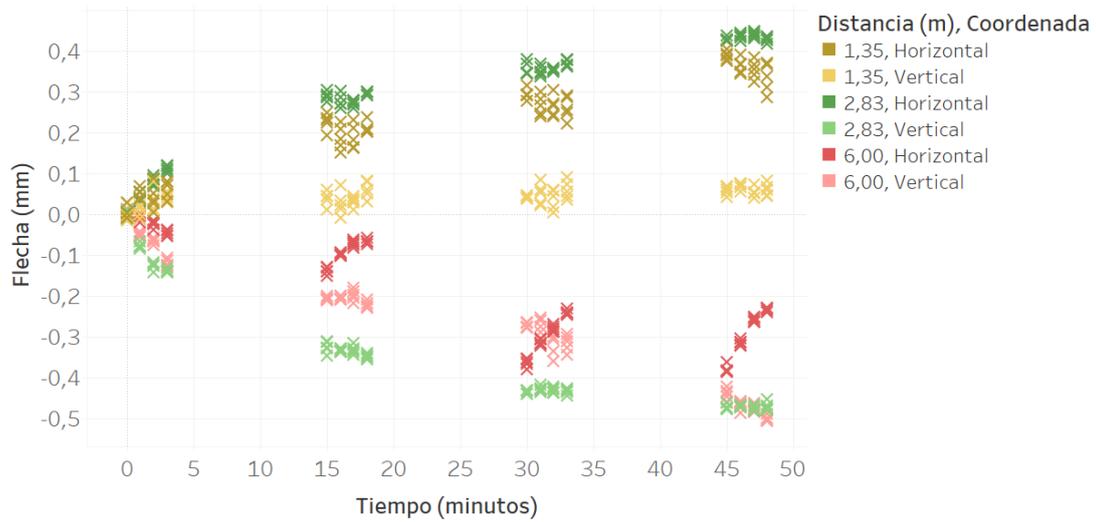


Figura 15: Flecha de las medidas para el Ensayo 1 de larga duración

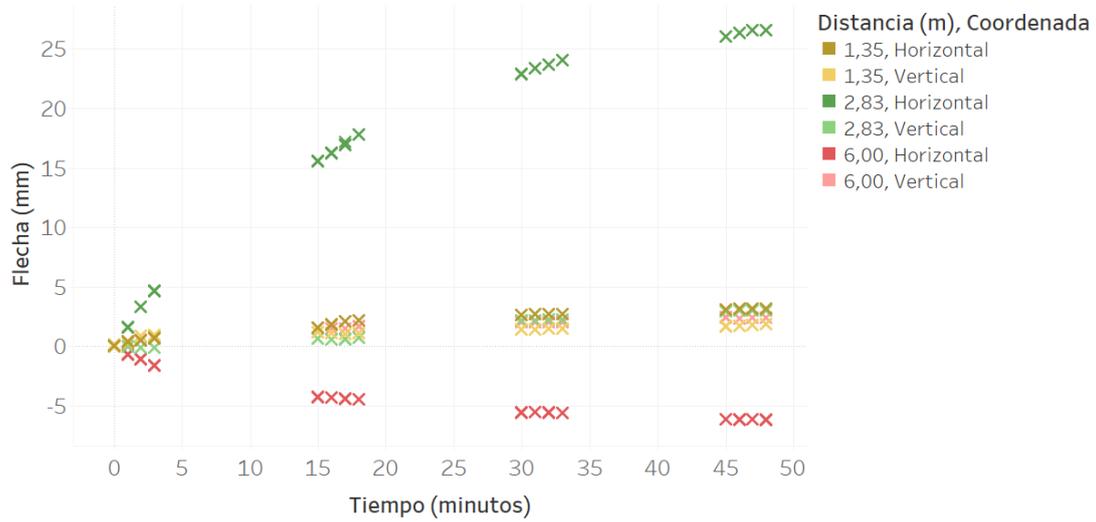


Figura 16: Flecha de las medidas para el Ensayo 2 de larga duración

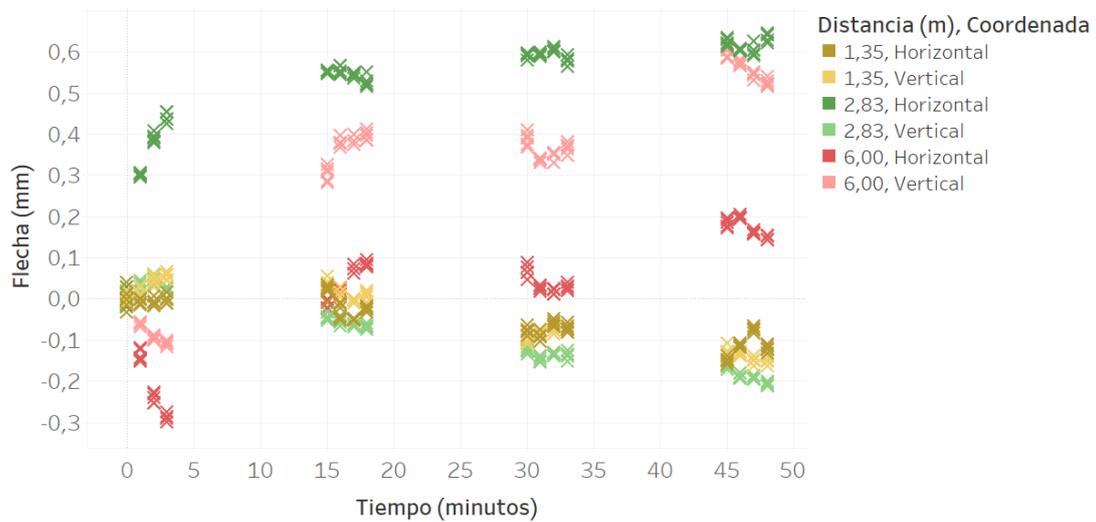


Figura 17: Flecha de las medidas para el Ensayo 3 de larga duración

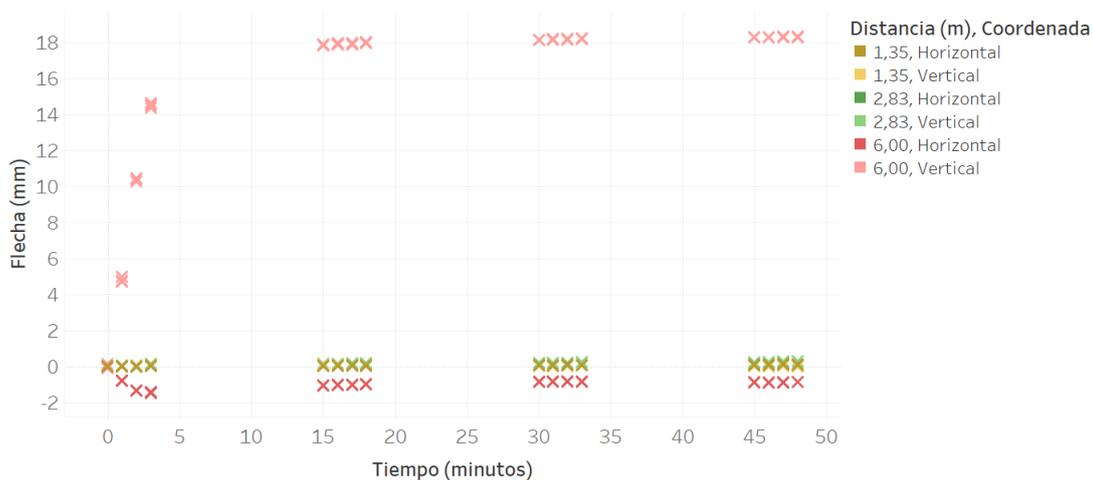


Figura 18: Flecha de las medidas para el Ensayo 4 de larga duración

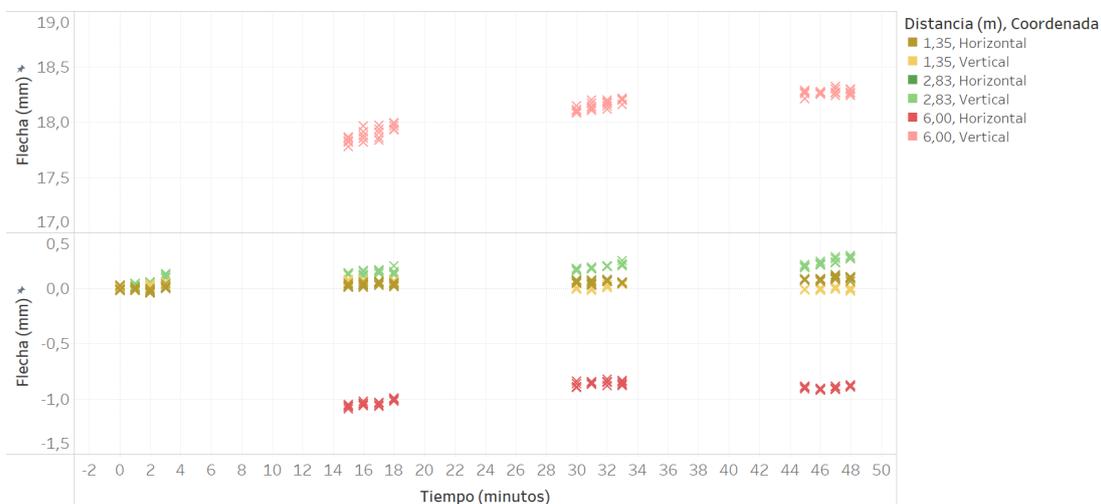


Figura 19: Flecha de las medidas para el Ensayo 4 de larga duración reducido

En base a las susodichas gráficas y a la Tabla 7, se puede apreciar que el láser 1 genera flechas menores en estos ensayos que a las generadas en los ensayos de corta duración ya descritos. Adicionalmente, se observa que el láser 2 genera flechas superiores a las obtenidas para los restantes láseres, y que, el láser que pareciera minimizar la flecha máxima es el láser 3.

La Figura 20, Figura 21, Figura 22, Figura 23 muestran la diferencia de cada medida individual con respecto al promedio de las medidas de su escalón y la Tabla 8 muestra la desviación estándar de estas diferencias. La Figura 24 muestra la diferencia de cada medida individual con respecto al promedio de las medidas de su escalón para el Ensayo 4 descontando las medidas de los primeros 3 minutos para los 6,00 m de distancia por los motivos ya expuestos.

Tabla 7: Flecha máxima (mm) en valor absoluto para cada Ensayo de larga duración, por coordenada y distancia

	Coordenada	1,35 m	2,85 m	6,00 m
<b>Ensayo 1</b> Láser 1 (intermitente)	Horizontal	0,403	0,448	0,388
	Vertical	0,091	0,483	0,507
<b>Ensayo 2</b> Láser 2 (continuo)	Horizontal	3,146	26,565	6,258
	Vertical	1,819	2,992	2,424
<b>Ensayo 3</b> Láser 3 (continuo)	Horizontal	0,159	0,646	0,299
	Vertical	0,163	0,211	0,611
<b>Ensayo 4</b> Láser 1 (continuo)	Horizontal	0,120	0,120	1,511
	Vertical	0,075	0,293	18,320
<b>Ensayo 4 reducido</b> Láser 1 (continuo)	Horizontal	0,120	0,120	0,247
	Vertical	0,075	0,293	0,494

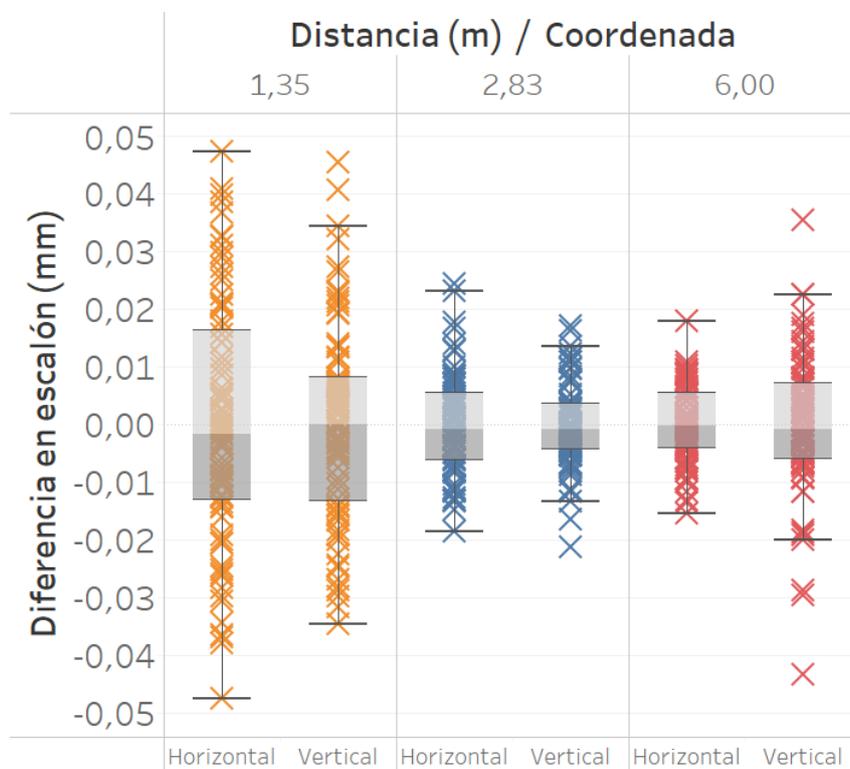


Figura 20: Variación de la medida por escalón y coordenada - Ensayo 1

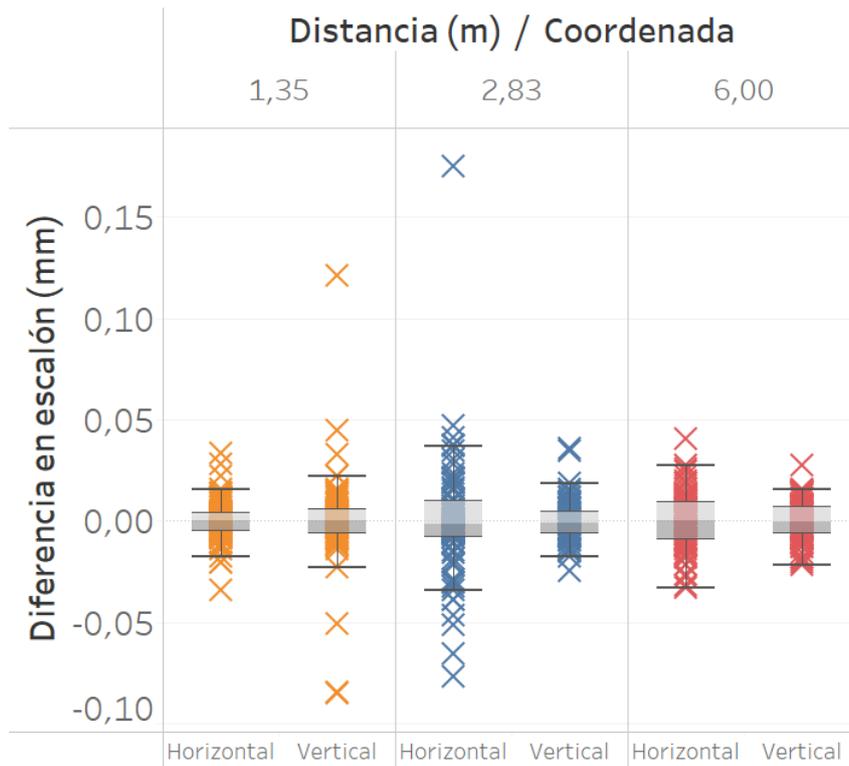


Figura 21: Variación de la medida por escalón y coordenada - Ensayo 2

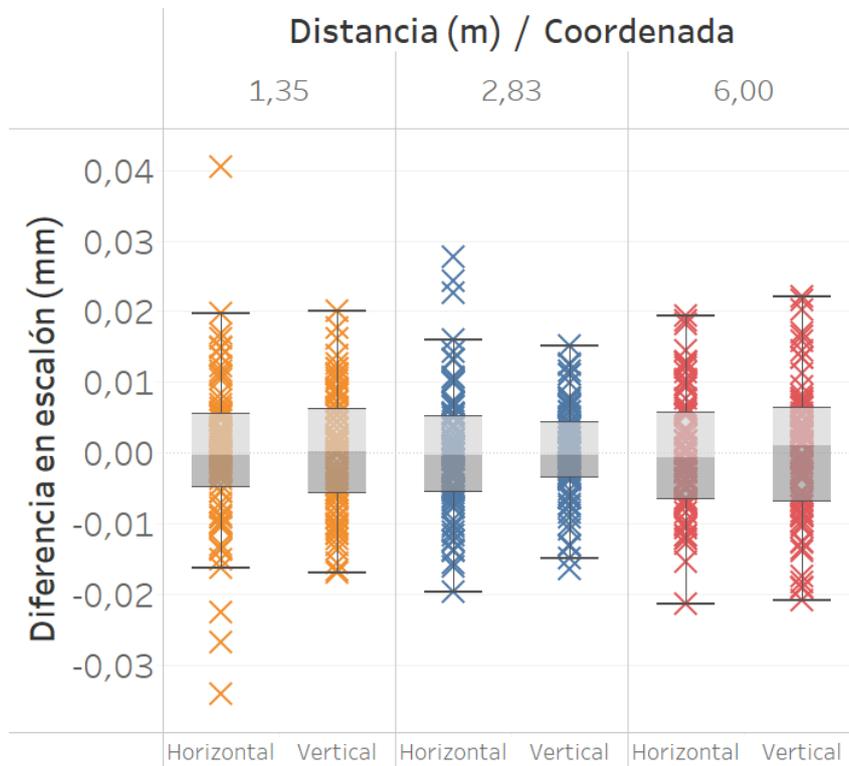


Figura 22: Variación de la medida por escalón y coordenada - Ensayo 3

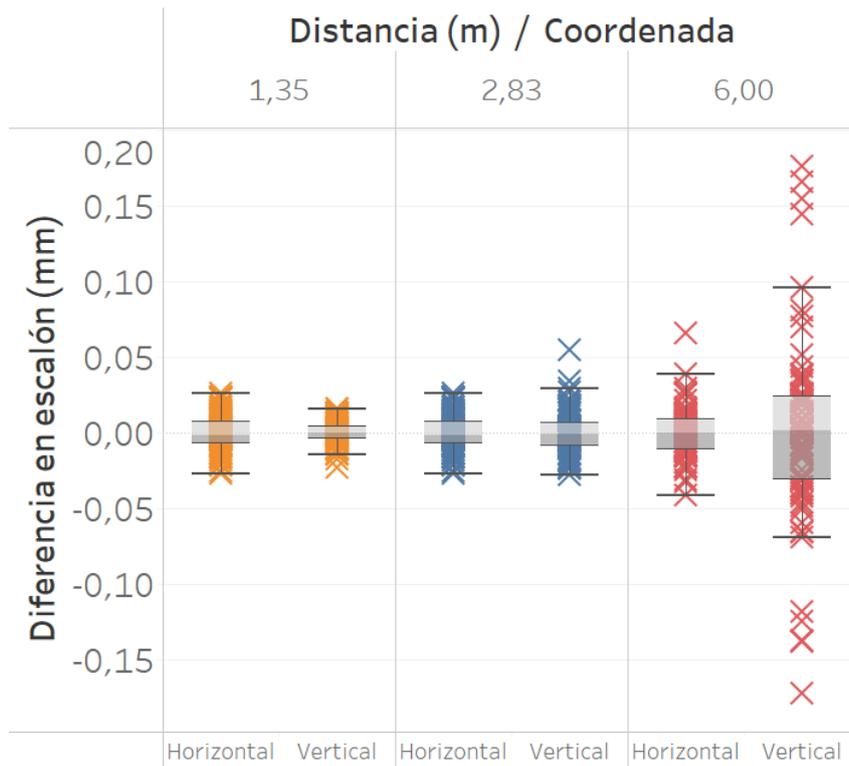


Figura 23: Variación de la medida por escalón y coordenada - Ensayo 4

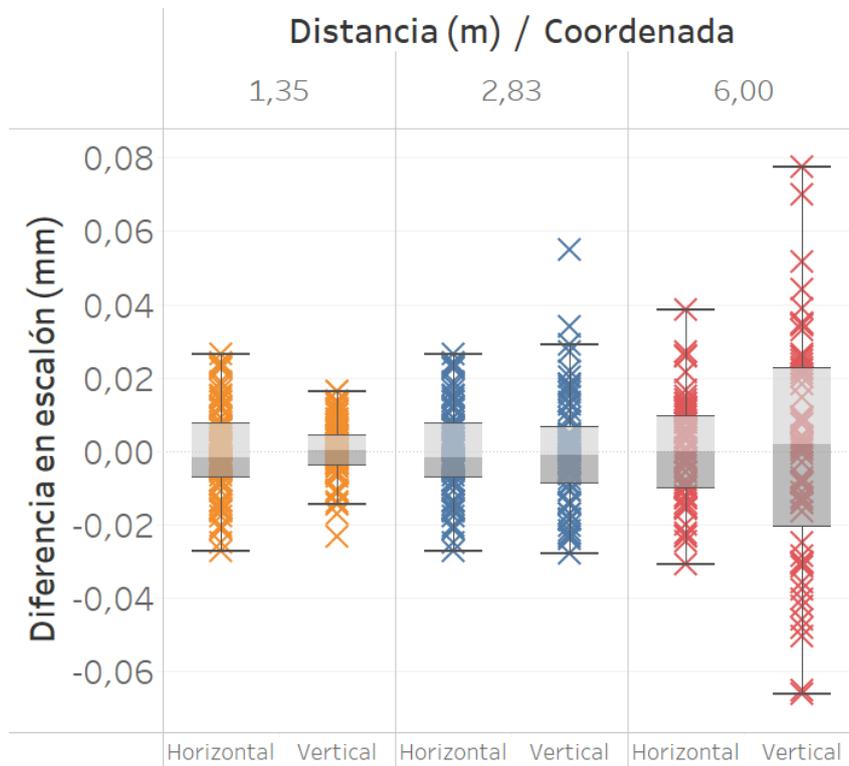


Figura 24: Variación de la medida por escalón y coordenada - Ensayo 4 reducido

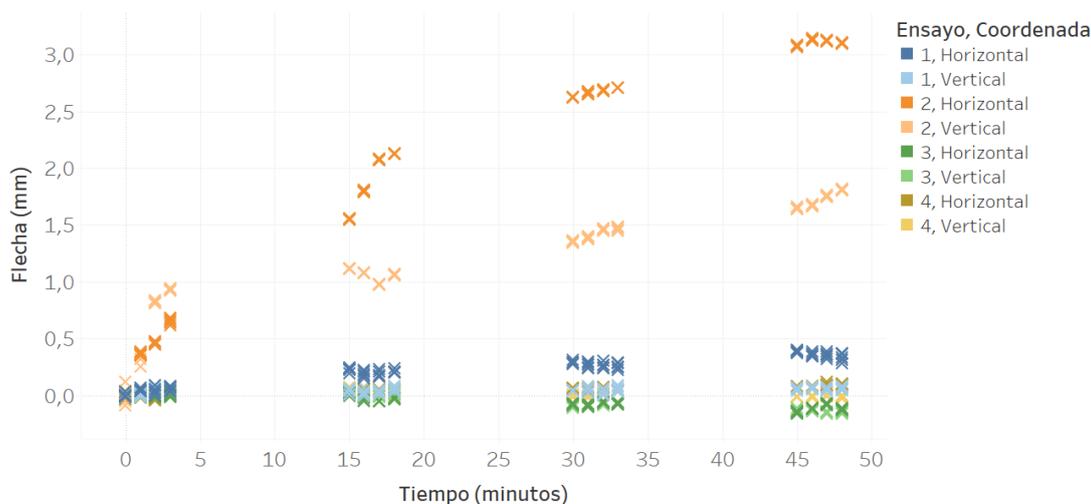
**Tabla 8: Desviación estándar ( $\mu\text{m}$ ) de la variación de la flecha de cada escalón para cada ensayo, por coordenada y distancia**

	Coordenada	1,35 m	2,85 m	6,00 m
<b>Ensayo 1</b> Láser 1 (intermitente)	Horizontal	17,1	7,1	12,0
	Vertical	21,3	8,6	6,5
<b>Ensayo 2</b> Láser 2 (continuo)	Horizontal	22,6	9,7	9,6
	Vertical	10,2	29,8	13,8
<b>Ensayo 3</b> Láser 3 (continuo)	Horizontal	8,4	6,7	9,7
	Vertical	10,7	9,0	8,5
<b>Ensayo 4</b> Láser 1 (continuo)	Horizontal	8,0	14,4	60,2
	Vertical	12,2	12,2	16,7
<b>Ensayo 4 reducido</b> Láser 1 (continuo)	Horizontal	8,0	14,4	30,8
	Vertical	12,2	12,2	13,6

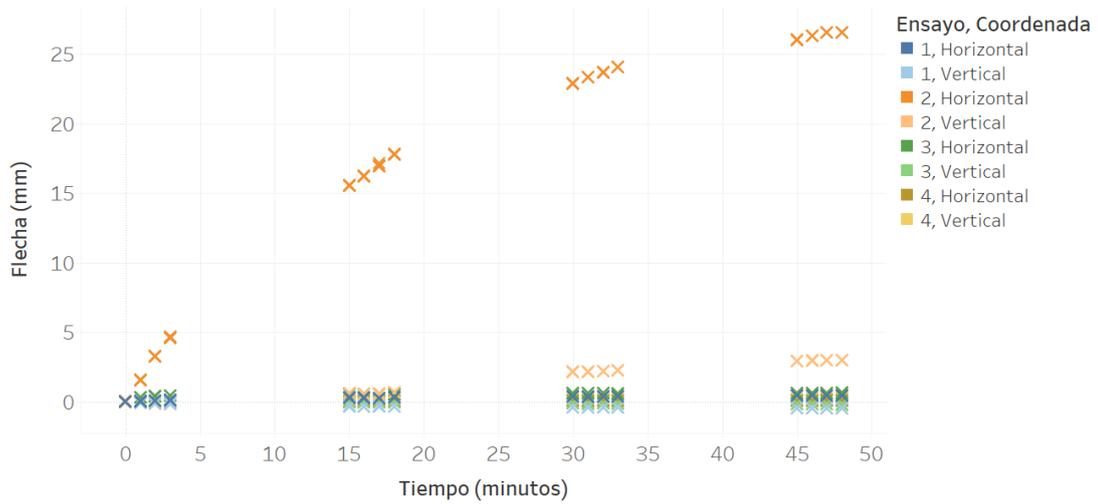
Si bien no se puede apreciar un patrón distintivo que determine la magnitud de la variabilidad de las medidas en base a la distancia entre el dispositivo y el láser, sí se aprecia claramente que en la mayoría de los casos, el láser 3 es el que presenta la menor variabilidad, y, en los casos donde no lo hace, es por una diferencia despreciable; del orden de las decenas de micrómetros.

### 2.9.3. Análisis de resultados por distancia

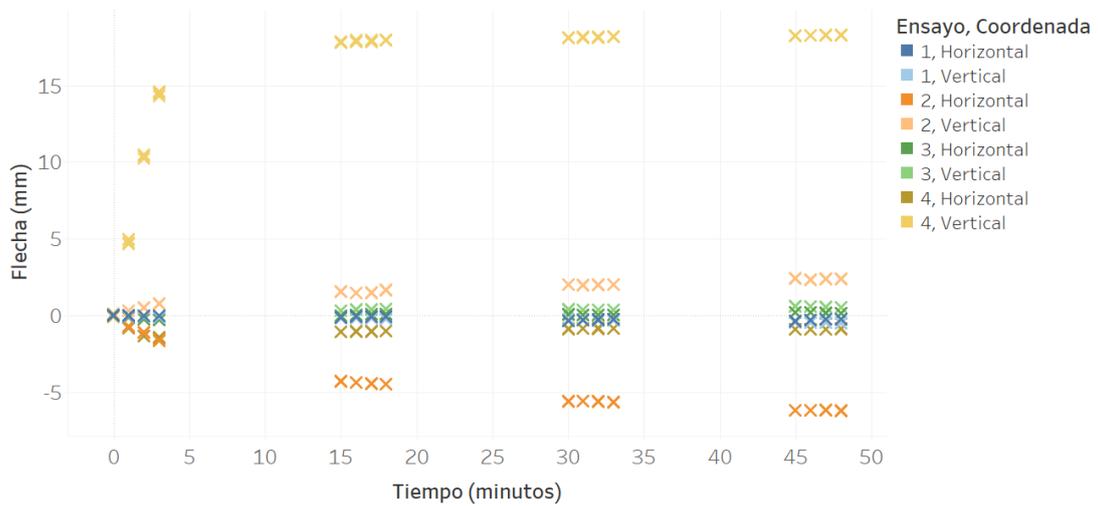
Los resultados de la flecha en función del tiempo para los ensayos, de las distancias 1,35 m, 2,83 m y 6,00 m, se muestran en la Figura 25, la Figura 26 y la Figura 27 respectivamente. Estas figuras muestran claramente que, a misma distancia, el Ensayo 2 genera una flecha máxima muy superior a las que se obtienen en el resto de los ensayos; es entre 10 y 50 veces más grande. Para esto último se excluye el primer set de medidas para el Ensayo 3 a los 6,00 m por lo ya expuesto.



**Figura 25: Flecha de las medidas en función del tiempo para los ensayos de larga duración a 1,35 m de distancia**



**Figura 26: Flecha de las medidas en función del tiempo para los ensayos de larga duración a 2,83 m de distancia**



**Figura 27: Flecha de las medidas en función del tiempo para los ensayos de larga duración a 6,00 m de distancia**

En la Figura 28, la Figura 29 y la Figura 30 se muestran las gráficas de la flecha en función del tiempo para las distancias 1,35 m, 2,83 m y 6,00 m respectivamente, excluyendo los resultados del Ensayo 2. En base a lo expuesto en estas figuras y en la Tabla 7, se podría concluir que el Ensayo 1, en promedio, es el que ocasiona una flecha más grande para todas las distancias dentro de los tres ensayos estudiados. Luego, el Ensayo 3 muestra flechas máximas levemente superiores a las del Ensayo 4 reducido en casi la totalidad de los ensayos.

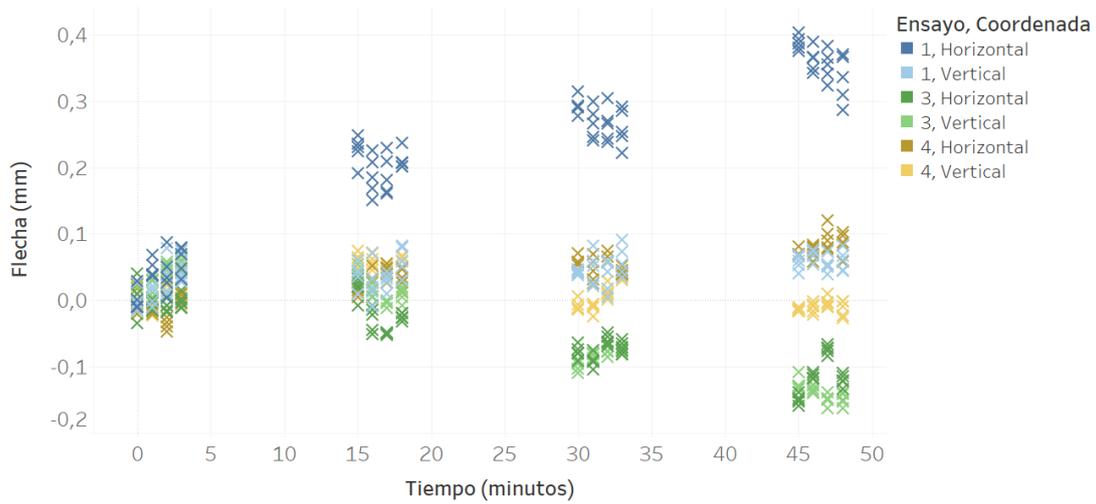


Figura 28: Flecha de las medidas en función del tiempo para los ensayos de larga duración a 1,35 m de distancia sin el Ensayo 2

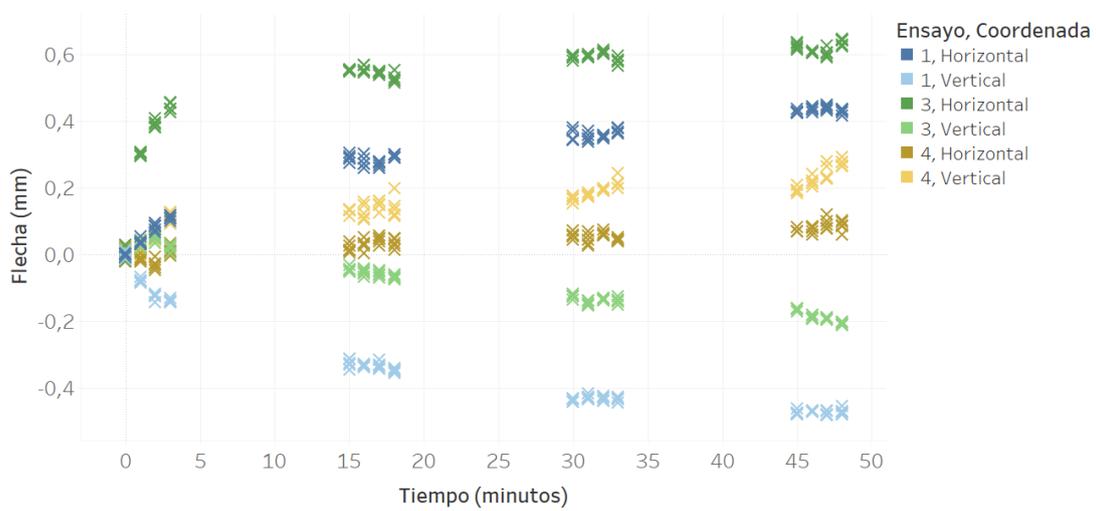


Figura 29: Flecha de las medidas en función del tiempo para los ensayos de larga duración a 2,83 m de distancia sin el Ensayo 2

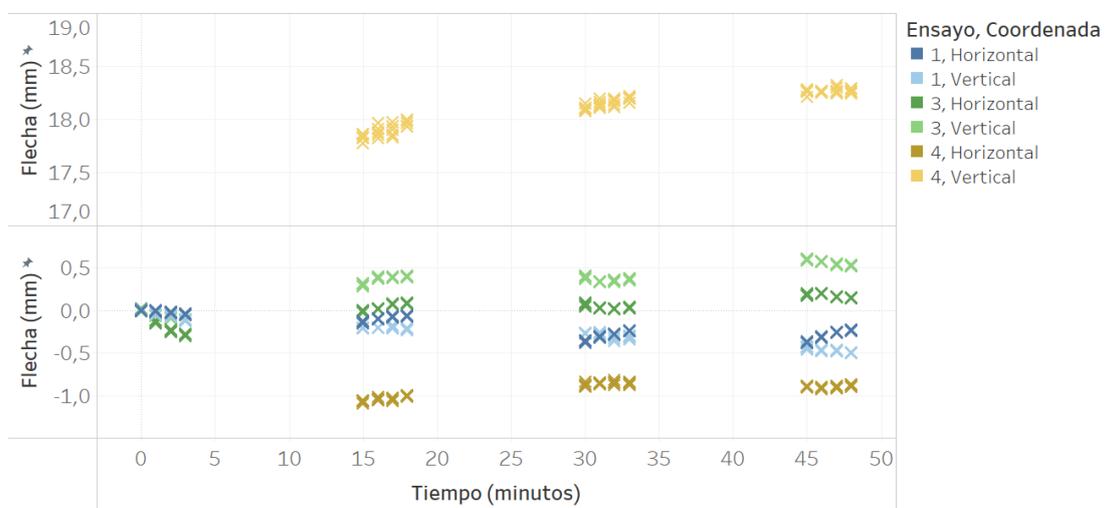


Figura 30: Flecha de las medidas en función del tiempo para los ensayos de larga duración a 6,00 m de distancia sin el Ensayo 2

La Figura 31, Figura 32, y Figura 33 muestran la diferencia de cada medida individual con respecto al promedio de las medidas de su escalón. La Figura 34 muestra la diferencia de cada medida individual con respecto al promedio de las medidas de su escalón para el Ensayo 4 descontando las medidas de los primeros 3 minutos para los 6,00 m de distancia por los motivos ya expuestos.

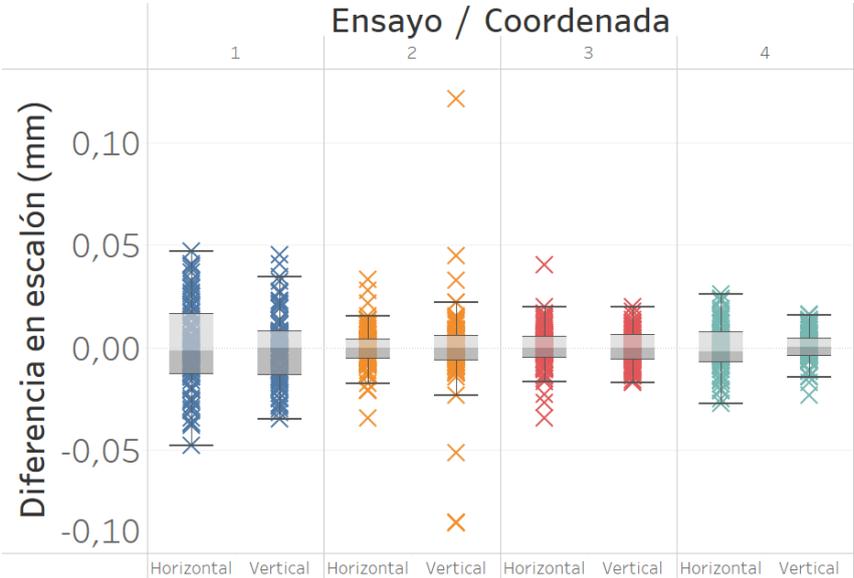


Figura 31: Variación de la medida por escalón y coordenada - 1,35 m

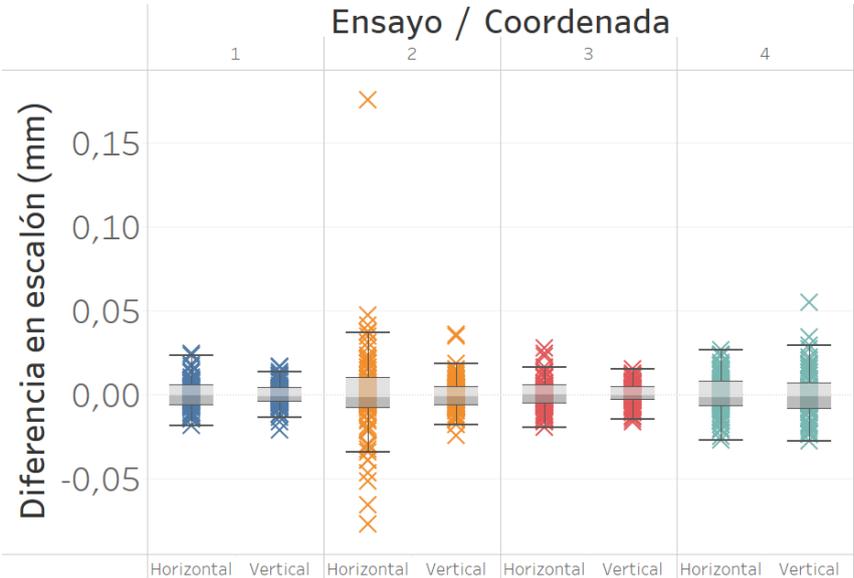
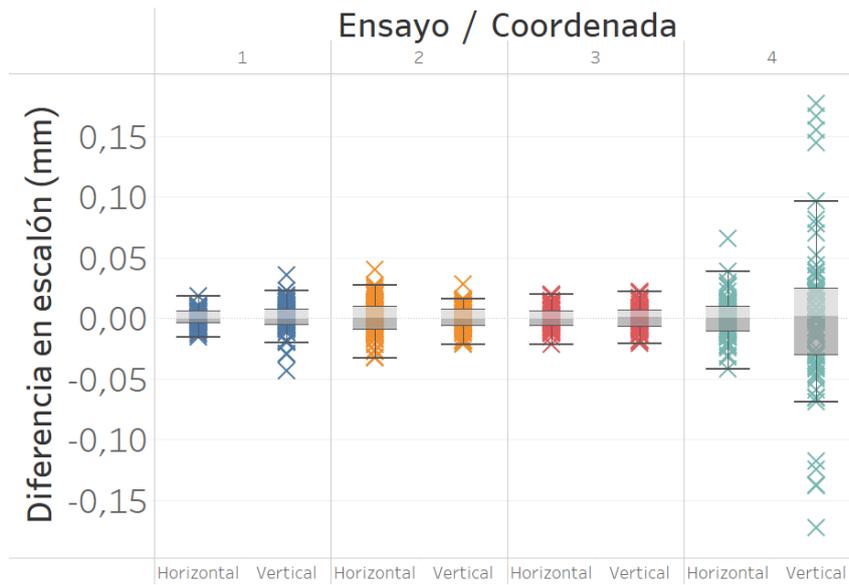
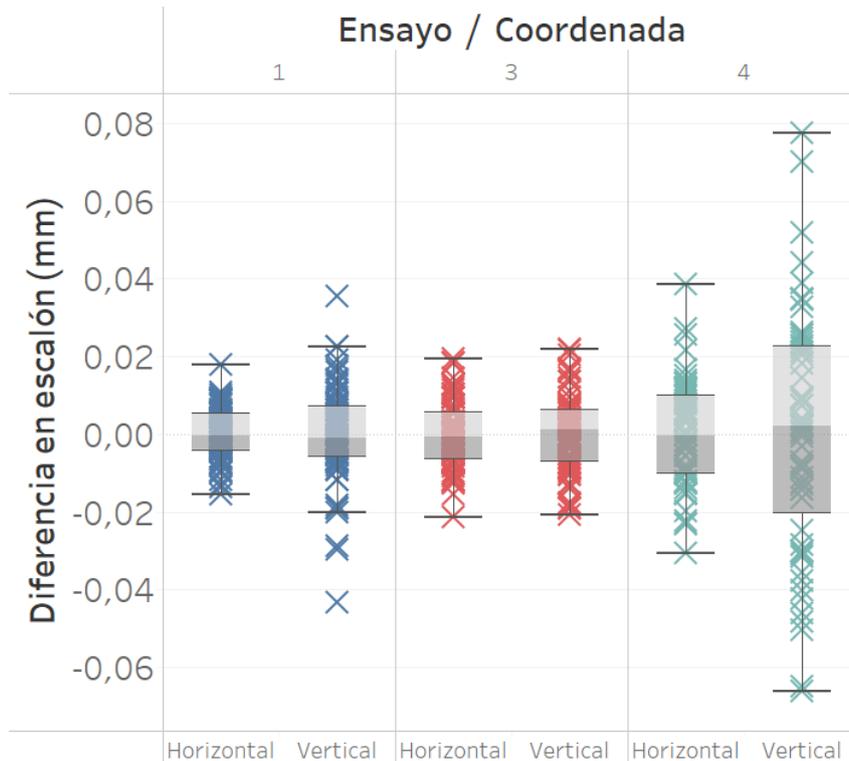


Figura 32: Variación de la medida por escalón y coordenada - 2,83 m



**Figura 33: Variación de la medida por escalón y coordenada - 6,00 m**



**Figura 34: Variación de la medida por escalón y coordenada - 6,00 m reducido**

En base a estos gráficos y a lo mostrado en Tabla 8, se deduce que no hay una clara diferencia que establezca para que láser se obtiene la mayor variabilidad de medidas en un mismo escalón. A pesar de esto, sí se puede reconocer que el Ensayo 3 es el que en líneas generales minimiza la variabilidad de las medidas.

#### 2.9.4. Conclusiones

En base a lo ya expuesto se llega a que no hay una relación entre el láser y la variación de la medida del método fotogramétrico. Además, esta variación intra-escalón es del orden de las céntimas de milímetro, lo que se considera dentro del rango aceptable. Es debido a esto que se confirma la hipótesis de que el error registrado en los ensayos se debe a sucesos presentados a lo largo del tiempo, y, consecuentemente no es asociado a errores en la toma de la imagen ni el procesamiento de la misma.

Al comparar los distintos ensayos, se pudo observar que para el rango de distancias estudiado (1,35 m a 6,00 m) este no es un factor que influya en la flecha medida (que debería ser cero) ni en la variabilidad de las medidas al corto plazo. Más aún, fue posible identificar que, en promedio, el Ensayo 2 es el que maximizó la flecha obtenida mientras que los Ensayos 3 y 4 son los que obtienen los valores de flecha máxima más chicos.

Teniendo en consideración que para los Ensayos de corta duración el láser 1 tuvo flechas aparentes menores que el 2 pero en los ensayos de larga duración el resultado opuesto, se concluye que lo que produce el error en la medida es el calentamiento interno del láser. Esto es debido a que para los ensayos de larga duración, el láser 1 tenía la batería por fuera del dispositivo con la luz LED permitiendo una mayor refrigeración del láser, y, por ende, no generó movimientos en este.

Otro argumento que apoya esta última conclusión es que una vez removida la batería de dentro del láser 1, este obtuvo resultados similares a los del láser 3, que no presenta calentamiento apreciable al finalizar los ensayos. Asimismo, para el láser 1 tanto encendido continuamente como intermitente, las flechas máximas son del mismo orden de magnitud; incluso registrando menores flechas máximas para el primero. Se tiene como posible causal de esta diferencia que al oprimir el interruptor, a pesar de encontrarse separado del puntero, únicamente unido por un cable flexible de 2 m de longitud, se generaban movimientos no apreciables a simple vista del puntero.

Teniendo en consideración lo antes explicitado, se considera como la mejor alternativa para proseguir con los ensayos, el uso de un láser de emisión de luz LED de forma continuo. En cuanto a qué láser utilizar, se descarta en primera instancia el láser 2 debido a la mayor magnitud de las flechas obtenidas en todos los ensayos, y luego el láser 1 debido a que no se pudo identificar cual fue la problemática que llevó a las variaciones excesivas de medidas en los primeros minutos del ensayo a 6,00 m de distancia. Por consiguiente, se decide continuar utilizando el láser 3.

## 2.10. Ensayo de carga

### 2.10.1. Materiales y métodos

Se realizó, como parte de la caracterización del método fotogramétrico, un ensayo de carga en una viga de madera entre dos períodos de medición estática con el láser a 4,23 m de la viga. Además de medir los desplazamientos verticales de la viga mediante el método fotogramétrico, se miden mediante un comparador digital de apreciación 0,001 mm.

El dispositivo se coloca centrado en una viga de madera de luz libre 2,68 m, cuya sección es de 15,1 cm x 5,0 cm. Las cargas que se colocarán en la estructura son pesas de aproximadamente 1 kg, y se colocan simultáneamente a 0,60 m de cada apoyo. Se modelan apoyos puntuales mediante el apoyo de la viga sobre una barra de acero colocada transversalmente al eje de la viga. La configuración se muestra en la Figura 35, y el esquema de esta disposición se presenta en la Figura 36.

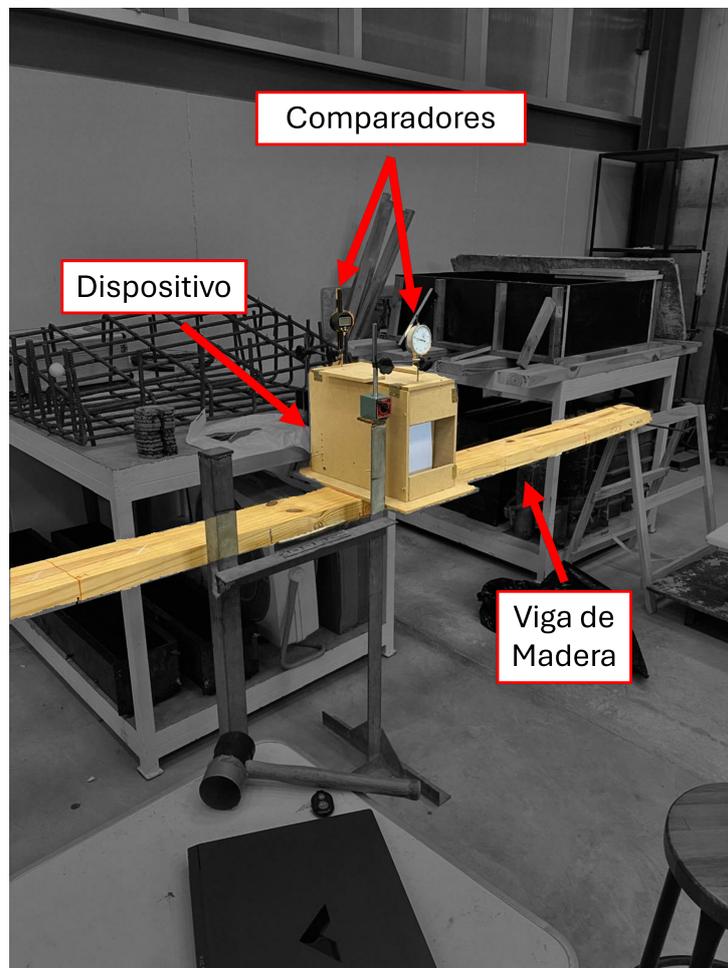
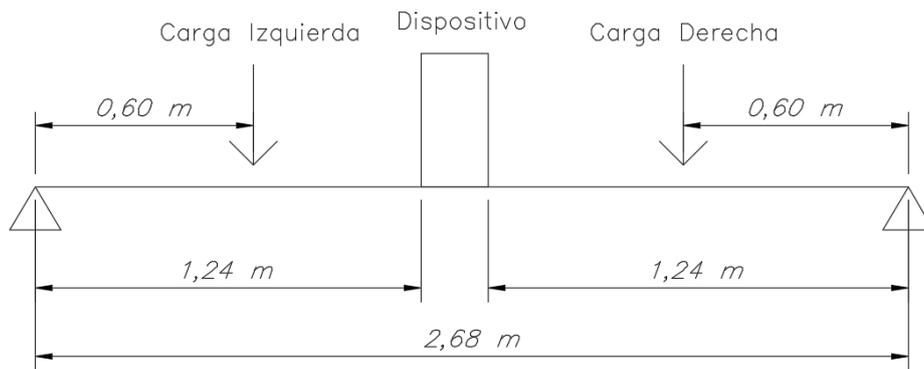


Figura 35: Configuración del ensayo de carga



**Figura 36: Esquema del ensayo sobre viga de madera**

El ensayo se organizó en 3 fases:

1. Del minuto 0 al 15 se registraron las medidas por minuto en los intervalos 0-2 minutos, 6-8 minutos y 12-14 minutos. En esta fase no se colocó carga en la estructura, es decir, se asemeja a los ensayos de punto fijo realizados con anterioridad.
2. Del minuto 15 al 33 se realizaron 3 ciclos de carga y descarga colocando las pesas de aproximadamente 1 kg en los puntos ya indicados, tomando medidas cuasiestáticas entre los escalones de carga.
3. Del minuto 33 al 47 se repite el procedimiento de la primera sección para los intervalos 35-37 minutos, 40-42 minutos y 45-47 minutos.

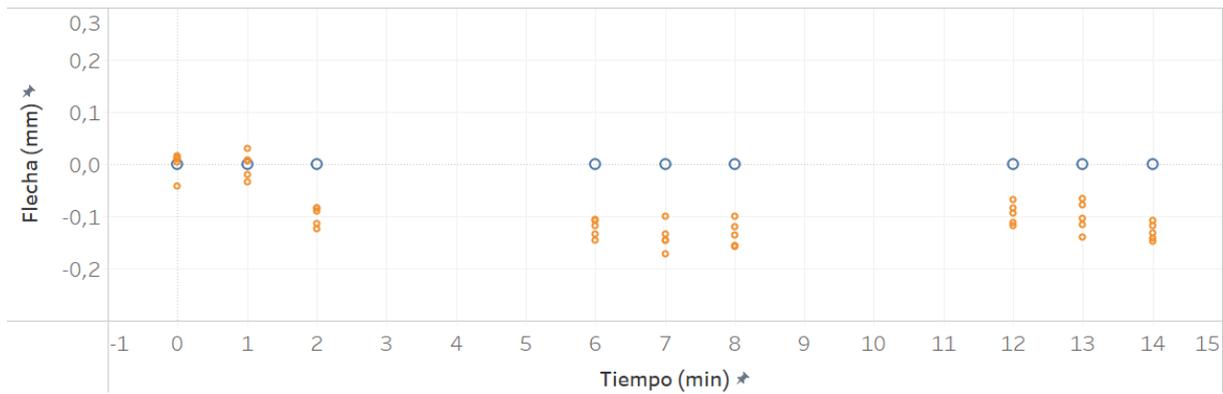
El láser utilizado para el ensayo de carga fue el láser 3 dejándolo encendido de manera continua.

### 2.10.2. Análisis de resultados

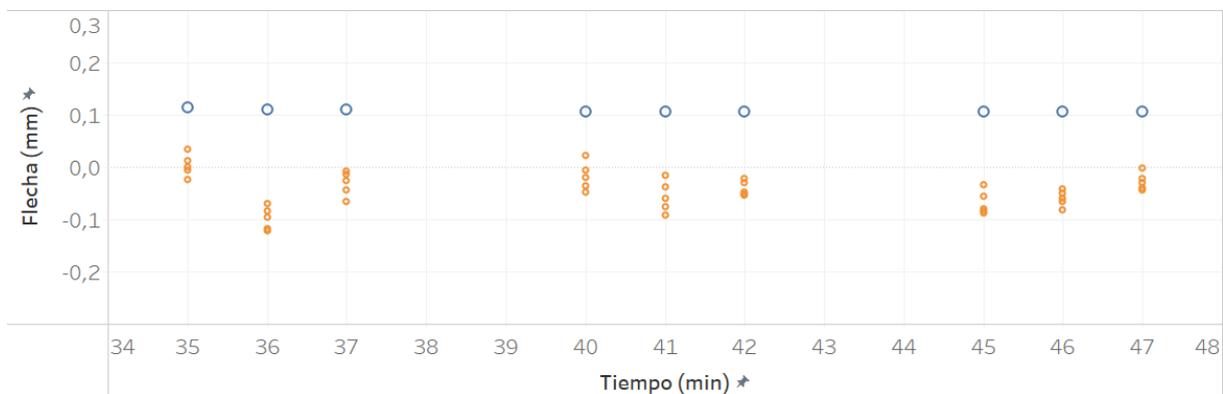
La comparación de las flechas del comparador y del dispositivo a lo largo de las fases estáticas del ensayo (1 y 3) se muestran en la Figura 37 y la Figura 38 respectivamente.

Se denota que, como se puede apreciar en la Figura 37 y la Figura 38, la diferencia máxima entre cualquier medida individual del dispositivo y la del comparador es de 0,233 mm. Consecuentemente, la medida del dispositivo (tomado como el promedio de las medidas individuales) siempre tiene una diferencia menor a esta.

Adicionalmente, cuando se consideran las medidas de la fase 3 obtenidas mediante el dispositivo desarrollado de tal forma que la medida a los 35 minutos coincida con la del comparador, la previamente mencionada diferencia máxima es de 0,173 mm.

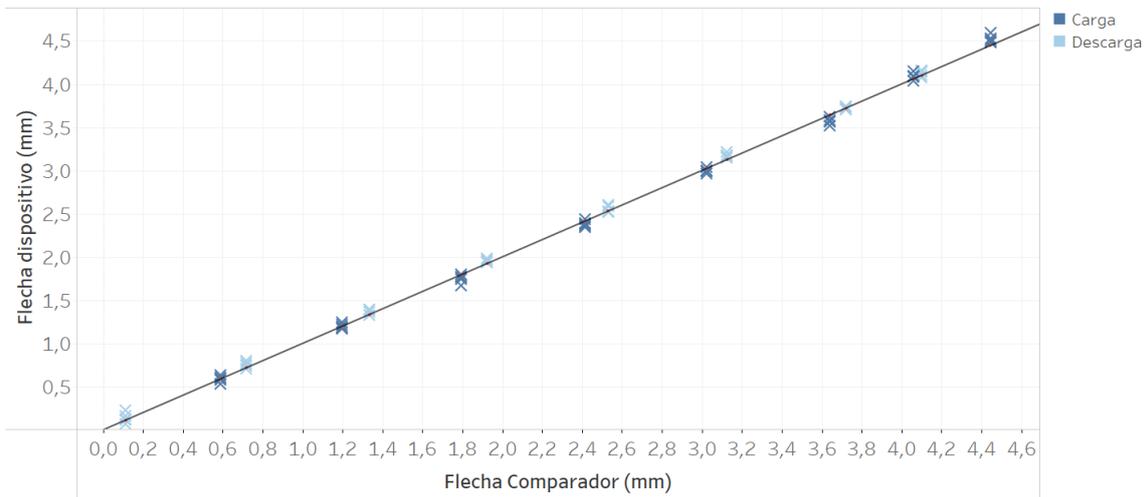


**Figura 37:** Flecha del comparador (azul) y del dispositivo (naranja) para la fase 1 del ensayo de carga

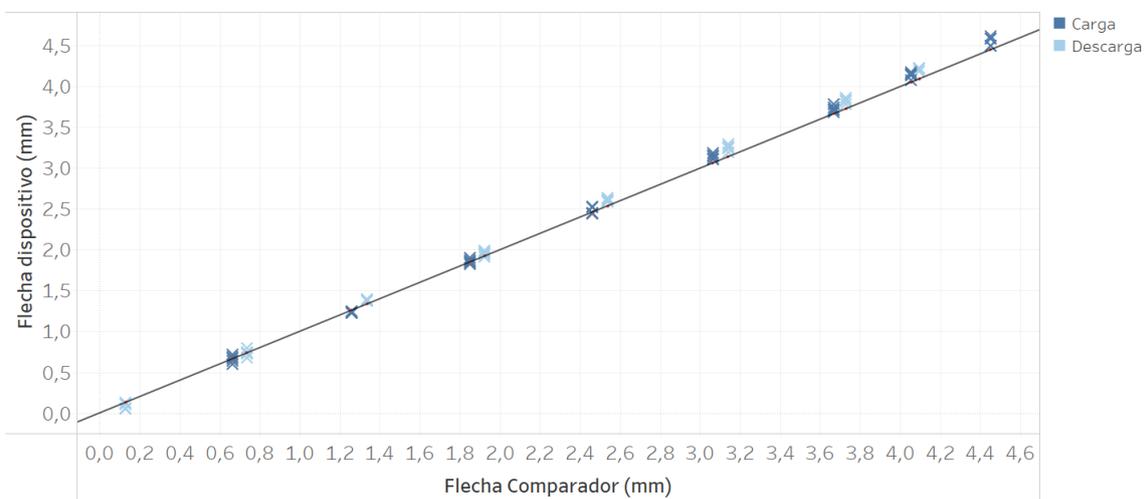


**Figura 38:** Flecha del comparador (azul) y del dispositivo (naranja) para la fase 3 del ensayo de carga

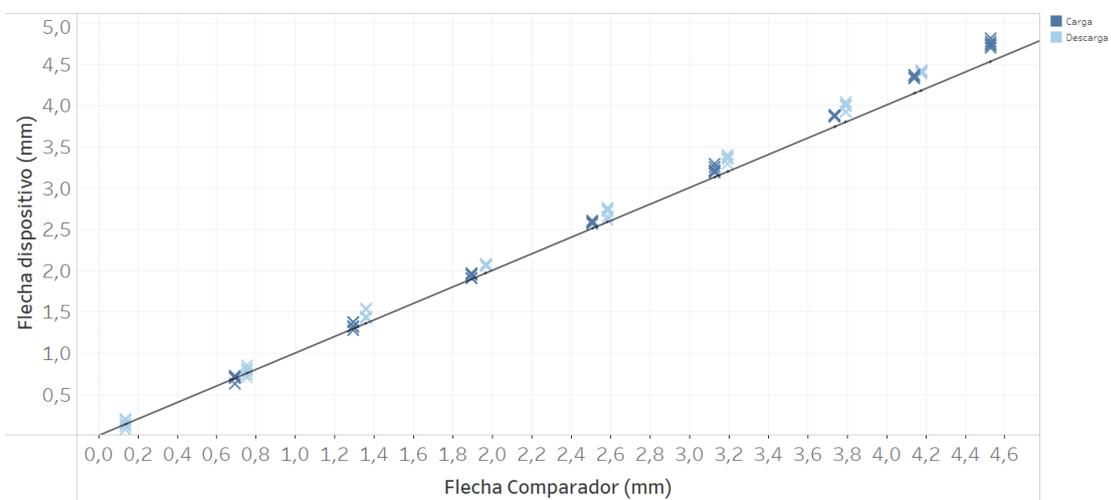
En lo que respecta a la fase 2 del ensayo, donde se efectúan los 3 ciclos de carga y descarga, se analizará cada uno por separado ajustando las medidas del primer escalón de carga para cada ciclo del dispositivo para que esta coincida con la flecha del comparador. Las gráficas de la flecha del dispositivo en función de la del comparador se representan en la Figura 39, la Figura 40 y la Figura 41 para los ciclos de carga/descarga 1, 2 y 3 respectivamente. Superpuesta a las ya descritas gráficas se encuentra la recta  $x = y$ , es decir, la recta donde idealmente se encontrarían las medidas del dispositivo.



**Figura 39: Flecha del dispositivo en función de la del comparador para el Ciclo 1 de carga/descarga**



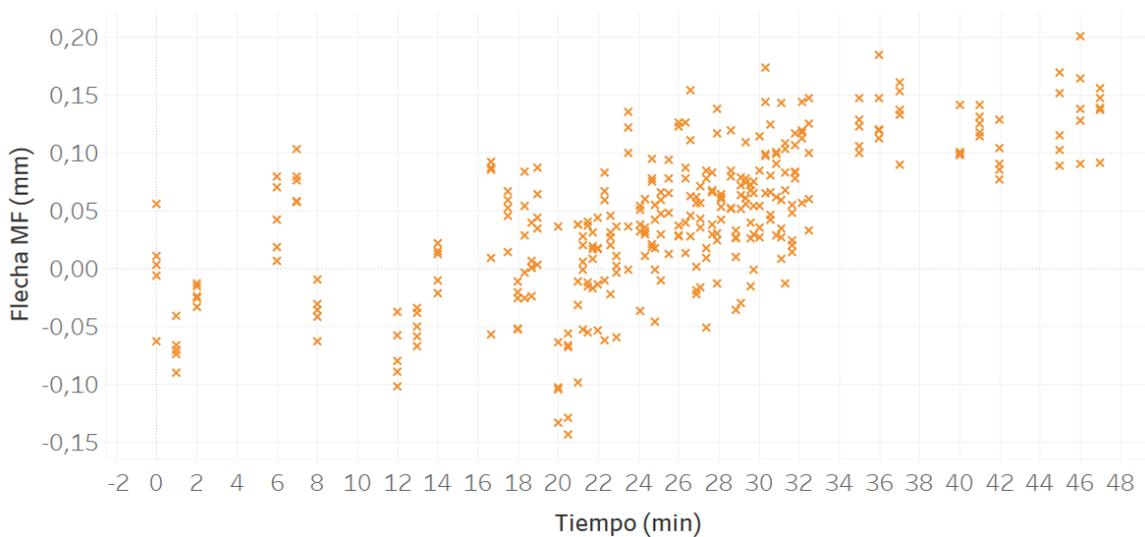
**Figura 40: Flecha del dispositivo en función de la del comparador para el Ciclo 2 de carga/descarga**



**Figura 41: Flecha del dispositivo en función de la del comparador para el Ciclo 3 de carga/descarga**

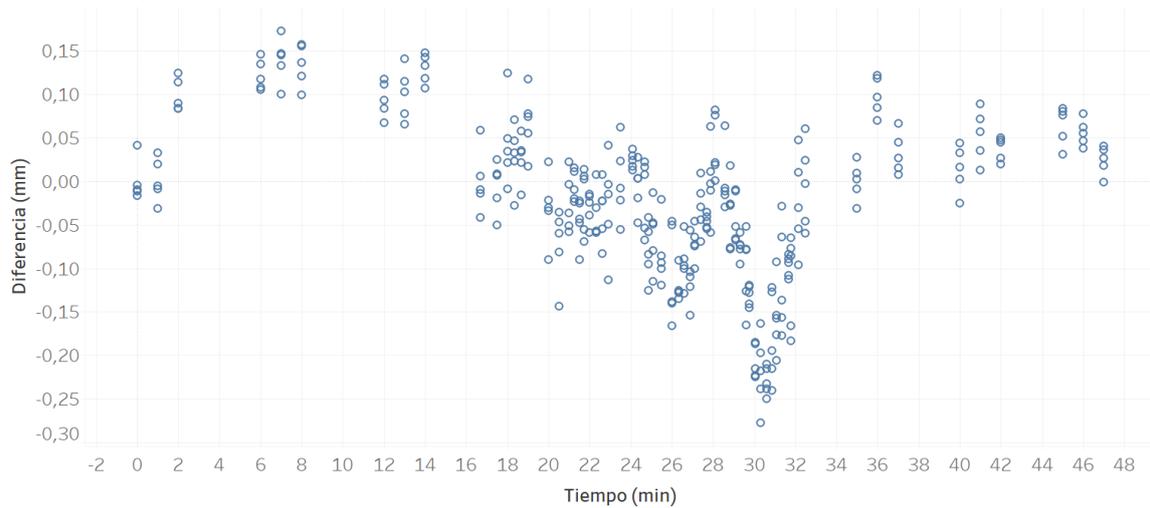
En la Figura 39, la Figura 40 y la Figura 41 se puede observar que las medidas obtenidas por el comparador y aquellas obtenidas con el método fotogramétrico son prácticamente coincidentes, con una diferencia máxima es inferior a 0,3 mm. No obstante, sí se puede observar que existe la tendencia al aumento de la diferencia entre las medidas con el aumento de la flecha.

En la Figura 42 se puede apreciar la flecha de la coordenada horizontal (que debería mantenerse en 0) en función del tiempo. Si bien todas las diferencias son del orden esperado (inferiores a 0,20 mm), se nota un leve aumento de la misma durante los ensayos de carga que luego se conserva para la última sección estática del ensayo.



**Figura 42: Flecha (mm) de la coordenada horizontal medida por el método fotogramétrico en función del tiempo**

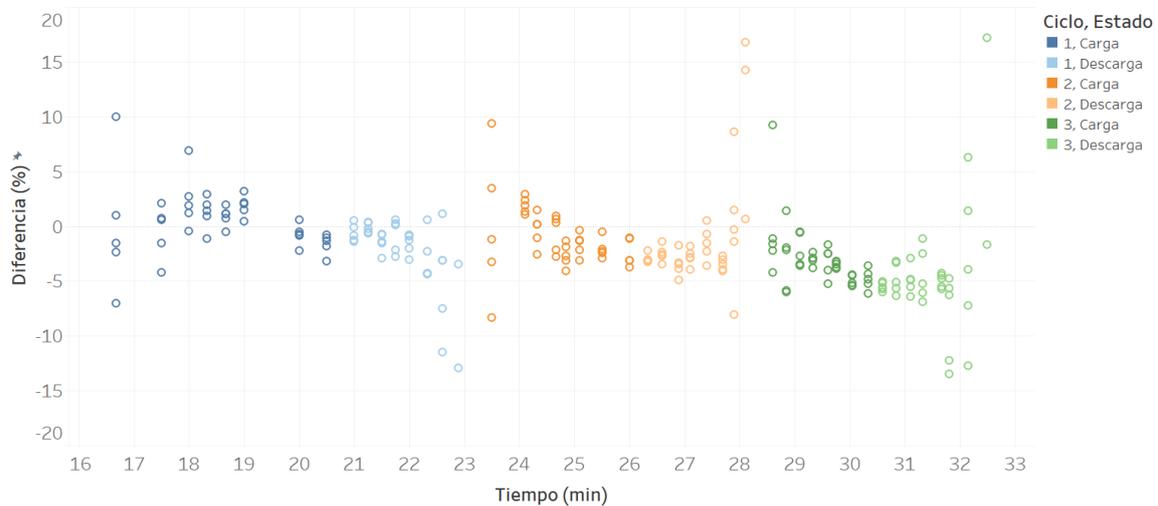
La Tabla 9 muestra las desviación estándar para la diferencia entre las medidas individuales y la medida promedio del escalón para cada sección, separando los ciclos de carga/descarga entre sí. Se puede apreciar que las diferencias que se generan en la dirección vertical indican que se aumenta la diferencia a medida que se realizan nuevos ensayos de carga. Esto también se puede ver reflejado en la Figura 43 que muestra la diferencia absoluta entre las medidas para la dirección vertical en función del tiempo y la Figura 44 que muestra la diferencia relativa entre las medidas para la dirección vertical en función del tiempo para ciclos de carga y descarga.



**Figura 43:** Diferencias entre las flechas medidas por ambos dispositivos en mm tomando como iguales las medidas iniciales de cada ciclo

**Tabla 9:** Desviación estándar (mm) de la diferencia de la flecha entre los métodos, por coordenada y sección

	Estático 1	Ciclo 1	Ciclo 2	Ciclo 3	Estático 2
Horizontal	0,052	0,054	0,043	0,042	0,028
Vertical	0,055	0,048	0,058	0,082	0,034

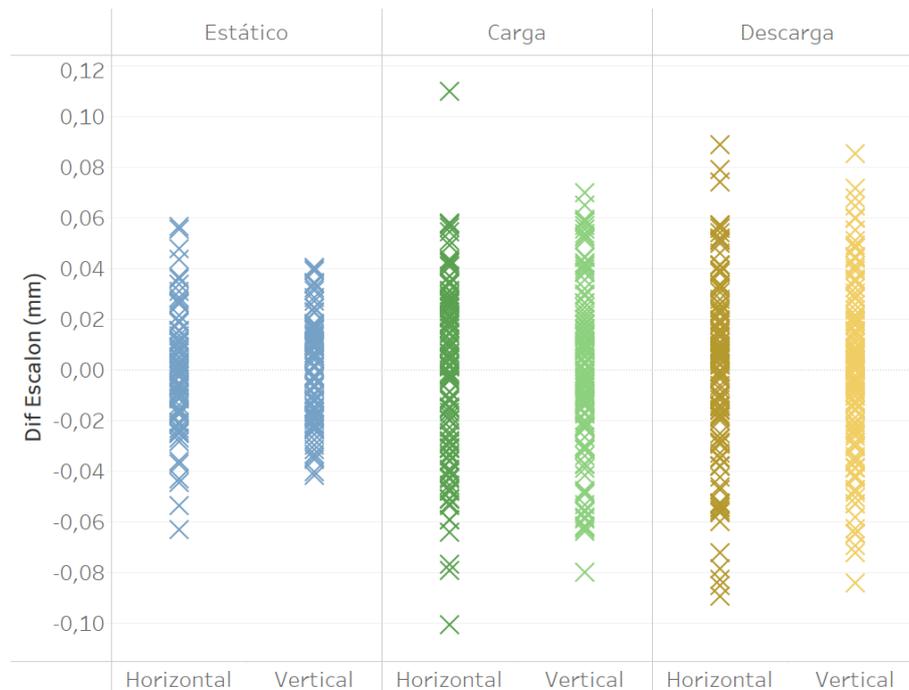


**Figura 44:** Diferencias relativas entre las flechas medidas por ambos dispositivos tomando como iguales las medidas iniciales de cada ciclo

La Figura 45 muestra la diferencia entre cada medida individual del método fotogramétrico y la del promedio de su escalón, mientras que la Tabla 10 muestra la desviación estándar de esta variabilidad de medidas por coordenada y ciclo. Aquí se puede observar como se tienen variaciones pequeñas. Aunque se aprecian variaciones superiores durante los ciclos de carga/descarga que en los estáticos, esta diferencia es también pequeña (inferior a 0,02 mm en su desviación estándar).

**Tabla 10: Desviación estándar ( $\mu\text{m}$ ) de la variación de la flecha de cada escalón, por coordenada y sección**

	Estático 1	Ciclo 1	Ciclo 2	Ciclo 3	Estático 2
Horizontal	21,6	37,5	37,4	32,1	24,0
Vertical	20,7	32,6	30,7	36,3	19,9



**Figura 45: Diferencia de la medida (mm) para un mismo escalón, por coordenada y sección**

### 2.10.3. Conclusiones

Se concluye que las diferencias entre el método tradicional (comparador) y el método desarrollado se encuentran en el orden de los esperado en base a lo estudiado en la Subsección 2.8 y la Subsección 2.9. Esto es debido a que en ningún momento se registraron diferencias superiores a 0,3 mm.

En cuanto a la variabilidad de las medidas, sí se observó una variación superior en los ensayos de carga que la registrada para los ensayos previos, empero no se aleja del valor de estos. A su vez, la variación de medidas de un mismo escalón es de un orden inferior a la diferencia entre la medida del comparador y la del dispositivo, por lo que se considera aceptable.

Es preciso denotar que el motivo por el cual al pasar los ciclos de carga/descarga la diferencia entre las flechas aumentó y no se pudo identificar la causa de esto. Este asunto requiere de un estudio en mayor profundidad que se realizará en el trabajo futuro.

## 2.11. Conclusiones

Se pudo desarrollar un dispositivo en base al uso de un láser y una cámara adaptando el programa de procesamiento de imágenes digitales creado por MSc. Ing. Leandro Domenech y caracterizarlo a partir de ensayos estáticos y cuasiestáticos identificando diversas causales de error. Se tiene que los valores esperables de error, y por tanto la incertidumbre del sistema, son de 0,2 mm para el percentil 85 (con error máximo de 0,6 mm).

Los causales de error identificados y parámetros estudiados fueron los siguientes:

1. Ángulo de la cámara con respecto a la hoja donde el láser impacta
2. Fuente de iluminación del dispositivo
3. Pequeños giros del láser
4. Calentamiento interno del láser
5. Distintos tipos de láseres
6. Distancia entre el dispositivo y el láser

**1)** Se denotó que el ángulo de la cámara con respecto a la hoja donde el láser impacta influye en la variabilidad de las medidas, y que tener la cámara lo más frontal posible (90° en la Figura 7) es donde se minimiza esta variabilidad, siendo esta de 11,6  $\mu\text{m}$ .

**2)** Se observó que para no aumentar el tiempo de procesamiento y poder automatizarlo lo más posible, una iluminación de intensidad constante es lo más adecuado. Además, se tiene que a baja iluminación, la identificación de los puntos rojos y el láser tiene un error significativo; hasta el punto de no poder procesar la imagen.

Consecuentemente, se optó por el uso de dos luces LED interiores al dispositivo, que se encuentra casi completamente aislado de luz externa.

**3)** Se observó que pequeños giros del láser pueden ocasionar errores significativos en la medida del dispositivo. Para el rango observado, un giro del orden  $1 \times 10^{-4}$  rad puede generar errores de hasta 1 mm.

En base a esto, se tiene que el soporte del láser debe ser muy rígido ya que debe prevenir estos giros. Adicionalmente, se hipotetiza que el giro puede darse por efectos internos del láser, como se explica en el punto 4.

**4)** En base a los ensayos estáticos de corta y larga duración, se puede apreciar que de tener al láser continuamente encendido sin una ventilación adecuada, este se calienta y genera

errores en las mediciones del dispositivo. Estos errores pueden ser causados por la aparición de giros internos del láser durante el calentamiento del láser.

**5)** Se mostró también que aquellos láseres que tienen una batería externa o no sufren calentamiento al estar encendidos por tiempos prolongados minimizan el error del dispositivo.

Además, los ensayos realizados dan la percepción de que cuanto más distancia de luz en oscuridad (parámetro dado por el fabricante) tenga el láser utilizado, menor será el error del dispositivo.

**6)** Se ensayó a distintas distancias en el rango de 1 a 6 metros y no se observó ninguna correlación entre el aumento de la distancia y el valor del error del dispositivo. Es decir, para el rango de distancias estudiado, este no es un factor influyente en el error del sistema.

Aún teniendo en consideración todos los factores ya descritos, se tienen causales de error que no han podido ser identificados. Para la identificación de los motivos de causa de estos errores se requiere un estudio más profundo del asunto, lo que se podrá estudiar en el futuro. Se identifican los errores debido a los siguientes motivos:

- En los ensayos estáticos, se siguen observando diferencias sesgadas, a pesar de minimizar todos los errores de causa detectada.
- Se observa, en el ensayo de carga, que la diferencia entre el método fotogramétrico y el comparador aumenta al aumentar la flecha para los ciclos de carga/descarga. Además, estas diferencias se agrandan con los sucesivos ciclos.

### 3. Caso de estudio: Monitoreo de viga de madera

#### 3.1. Introducción

Habiendo caracterizado el dispositivo desarrollado, se busca emplearlo en un estudio de ME de laboratorio sobre una viga de madera. El objetivo del estudio es poder comparar al método fotogramétrico con una serie de métodos tradicionales de medición, tanto estáticos como dinámicos. A su vez, se podrá apreciar la diferencia de precisión en la toma de medidas del dispositivo cuando este se utiliza de manera estática o cuasiestática y cuando se utiliza de manera dinámica.

Finalmente, se busca discernir entre cuáles métodos son capaces de apreciar e identificar la introducción de una patología a lo largo del tiempo. Esto se logra mediante el análisis de los resultados obtenidos para todos los métodos y comparándolos con distintos modelos computacionales de elementos finitos.

#### 3.2. Bases conceptuales sobre el Análisis Dinámico

La dinámica estructural es una área amplia de estudio que involucra el análisis de estructuras sometidas a cargas dependientes del tiempo y, que consecuentemente, tienen respuestas también dependientes del tiempo. Si bien la mayoría de las aplicaciones actuales de la dinámica estructural son enfocadas en el diseño de estructuras para que las mismas soporten cargas tales como el viento y sismos, esta área de estudio también puede emplearse en END, y, consecuentemente, en ME. [15]

##### 3.2.1. Sistemas de un Solo Grado de Libertad (SDOF)

El sistema más básico de vibración es el de un Solo Grado de Libertad (SDOF por sus siglas en inglés), que puede representar convenientemente algunas tipologías estructurales. Los sistemas de Múltiples Grados de Libertad (MDOF por sus siglas en inglés) son más complejos pero logran representar más adecuadamente las estructuras. Los SDOF se representan por una masa puntual  $m$ , un resorte de constante de proporcionalidad  $k$  y un amortiguador viscoso de constante de proporcionalidad  $c$  sujetos a una fuerza  $p(t)$  dependiente del tiempo. Esto se muestra en la Figura 46. [5, 15]

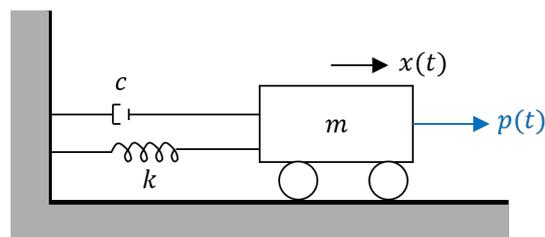


Figura 46: Diagrama de sistemas SDOF

Dado que la masa puede moverse producto de la fuerza, el sistema es gobernado por la siguiente ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \quad (14)$$

donde  $x$  es la desviación de la posición en el equilibrio. [5, 15]

Cuando se tiene un sistema de vibración libre ( $p(t) = 0$ ), se tiene que el análisis devuelve la solución periódica [5, 15]

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t} s^{i\omega'_1 t} \quad (15)$$

donde

- $\alpha = \xi \bar{\omega}_1$  es la tasa de amortiguamiento (con  $\alpha$  real positivo),
- $\omega'_1 = \bar{\omega}_1 \sqrt{1 - \xi^2}$  es la frecuencia natural del sistema amortiguado,
- $\xi = c/(2\sqrt{km})$  es la razón de amortiguamiento,
- $\bar{\omega}_1 = \sqrt{k/m}$  es la frecuencia natural del sistema no amortiguado (en estructuras reales, la diferencia entre  $\omega'_1$  y  $\bar{\omega}_1$  es muy baja y se les tiende a llamar a ambas indistintamente frecuencia natural),
- $x_0$  es la amplitud, que puede ser un complejo.

Cuando un sistema SDOF amortiguado es forzado por una fuerza externa de la forma  $p = p_0 e^{i\Omega t}$ , con  $p_0$  complejo, se tiene que la función de respuesta frecuencial (FRF), definida como la receptividad  $R = x_0/p_0$ , está dada por [15]

$$R(\Omega) = \frac{1}{(k - \Omega^2 m) + i\Omega c}. \quad (16)$$

El desarrollo de cómo se obtiene el resultado mostrado en la Ecuación 16 se describe en el Apéndice B.

### 3.2.2. Sistemas de Múltiples Grados de Libertad (MDOF)

Un sistema MDOF es aquel que tiene  $N$  grados de libertad con  $N > 1$ . Se focaliza el desarrollo en sistemas cuyo comportamiento dinámico es determinado predominantemente por la combinación de efectos de inercia y rigidez, adicionando también un amortiguamiento. Estos sistemas son los típicos utilizados para describir estructuras estáticas y que se relacionan con la amplia mayoría de casos en donde se requiere la aplicación de análisis modal. Un ejemplo de un sistema MDOF con  $N = 2$  es un pórtico de dos niveles con masas concentradas por nivel; la Figura 47 muestra un esquema del mismo y el modelo masa-resorte-amortiguador para el mismo. [5]

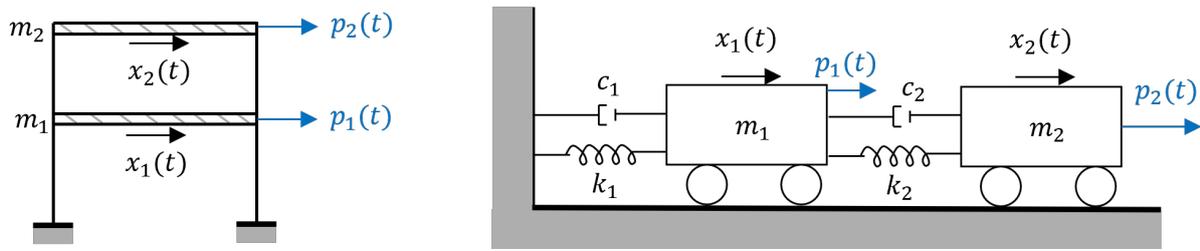


Figura 47: Diagrama de sistema MDOF de un pórtico de dos niveles

La ecuación que gobierna el movimiento de los MDOF es

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [D] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{p(t)\}. \quad (17)$$

Esta ecuación es análoga a la presentada para SDOF en la Ecuación 14, con la diferencia de que en este caso  $[M]$ ,  $[K]$  y  $[D]$  son matrices de masa, rigidez y amortiguamiento de dimensión  $N \times N$ , y  $\{x(t)\}$ ,  $\{\dot{x}(t)\}$ ,  $\{\ddot{x}(t)\}$  y  $\{p(t)\}$  son vectores de dimensión  $N \times 1$ . [5, 9, 15]

Cuando se tienen vectores posición y fuerzas de la forma

$$\{x(t)\} = \{x_0\} e^{i\omega t} \quad (18)$$

$$\{p(t)\} = \{p_0\} e^{i\omega t} \quad (19)$$

se tiene que el Modelo Modal se puede definir como la multiplicación de dos matrices diagonales; la primera conteniendo las  $n$ -ésimas frecuencias de vibración  $\bar{\omega}_n^2$  y la segunda conteniendo las  $n$ -ésimas formas modales  $\psi_n$  correspondientes a las frecuencias modales. [5]

Reescribiendo la ecuación de movimiento de la forma

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + ([K] + i[D]) \{x(t)\} = \{p(t)\} \quad (20)$$

y suponiendo un modelo de amortiguamiento de Rayleigh descrito por Ewins [5], es decir,

$$[D] = \beta [K] + \gamma [M], \quad (21)$$

se tiene que las formas modales son iguales al sistema no amortiguado y los valores propios son complejos. Estos son de la forma

$$\lambda_n^2 = \bar{\omega}_n^2 (1 + i\eta_n) \quad (22)$$

donde

- $\bar{\omega}_n^2 = k_n/m_n$  es la frecuencia angular de vibración del  $n$ -ésimo modo,
- $\eta_n = \beta + \gamma/\bar{\omega}_n^2$  es el factor de pérdida de amortiguamiento estructural del  $n$ -ésimo modo. [5]

El desarrollo de como se obtienen estos resultados se describe en el Apéndice C.

### 3.3. Sistemas de un grado de libertad generalizado

Los sistemas SDOF asumen que la masa se encuentra concentrada en un punto y el movimiento de los mismos se encuentra limitado a una única dirección. Sin embargo, las estructuras reales no cumplen con estas condiciones y podrían de expresarse como sistemas MDOF, cuya complejidad es notoriamente superior. Una solución práctica a esta problemática es forzar a que la respuesta de la estructura sea similar a la de un sistema SDOF. A esto se lo conoce como sistema de un grado de libertad generalizado. Otras estructuras tienen propiedades de rigidez y masa distribuidas en lugar de concentradas, y por lo tanto no es posible modelarlas directamente con los desarrollados SDOF ni MDOF previamente mencionados, pero sí mediante SDOF generalizado.[3]

Los sistemas se fuerzan a comportarse como un SDOF mediante la restricción impuesta de que solo puedan exhibir una única forma y el grado de libertad represente la amplitud del desplazamiento permitido para esta configuración. [3]

Como se lo fuerza a trabajar como un sistema SDOF, el sistema queda descrito por la ecuación

$$m^* \ddot{x}(t) + c^* \dot{x}(t) + k^* x(t) = p^*(t) \quad (23)$$

donde

- $m^*$  es la masa generalizada del sistema
- $c^*$  es el amortiguamiento generalizado del sistema
- $k^*$  es la rigidez generalizada del sistema
- $p^*$  es la carga efectiva generalizada del sistema
- $Z(t)$  es la coordenada generalizada del sistema donde el desplazamiento  $v(x) = \psi(x)Z(t)$ .
- $\psi(x)$  es la función de forma asumida. [3]

Como consecuencia, en sistemas de vibración libre no amortiguados ( $p^* = 0$  y  $c^* = 0$ ), se cumple que

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}}. \quad (24)$$

De acuerdo con Clough y Penzien [3], la masa y rigidez generalizadas se pueden escribir como

$$m^* = \int_0^L m(x)\psi(x)^2 dx + \sum m_i \psi_i'^2 + \sum j_i \psi_i'^2 \quad (25)$$

$$k^* = \int_0^L EI [\psi''(x)]^2 dx + \int_0^L k(x)\psi(x)^2 dx + \sum k_i \psi_i^2 \quad (26)$$

donde

- $m(x)$  es la masa por unidad de longitud de los sistemas distribuidos
- $m_i$  es la masa de los elementos puntuales
- $j_i$  es el momento de inercia en el centro de masa de los elementos puntuales
- $EI(x)$  es la rigidez de los sistemas distribuidos
- $k(x)$  es la rigidez por unidad de longitud por los resortes externos distribuidos
- $k_i$  es la rigidez aportada por los resortes puntuales.

### 3.4. Antecedentes de ME en estructuras de madera

Palma *et al* [11] realizaron una revisión en 2020 de los métodos disponibles ME de estructuras de madera utilizando END y diversos casos de estudio. A continuación se describen sus hallazgos.

#### 3.4.1. Métodos utilizando END

Es preciso saber que los END tienen tanto ventajas como desventajas y que no todos los END sirven para detectar todos los tipos de daños o parámetros variables. Estos pueden variar de muy locales hasta globales. Mientras que END locales son eficaces identificando y cuantificando daños, estos deben de emplearse en las zonas donde el daño ocurre; debe realizarse un estudio previo para determinar su ubicación. En contrapartida, los END globales no tienen por qué ser colocados en un área específica, sin embargo, son menos sensibles y la correlación entre los parámetros medidos y el daño no siempre es directo. [11]

#### Métodos basados en vibraciones

Los métodos basados en vibraciones suponen que los cambios inducidos por daños en la rigidez, masa o disipación de energía pueden determinarse mediante la respuesta dinámica de una estructura o elemento estructural. Las características medidas más usuales para estos métodos son la frecuencia modal y los vectores de forma modal. [11]

Estos métodos son de los pocos que sirven como END globales, sin embargo, para grandes dimensiones de la estructura, las frecuencias modales más bajas (que son las usualmente medidas) son menos sensibles al daños y pueden llegar a no identificar o localizar el daño. Las frecuencias modales altas pueden identificar daños locales, pero, son más difíciles de identificar que las bajas. [11]

Las principales desventajas de estos métodos son (1) la gran cantidad de instrumentos requeridos para localizar el daño que genera el cambio en los parámetros dinámicos y (2) la

dificultad de extraer información pertinente basada en excitaciones del ambiente.[11]

Se tiene que los parámetros físicos, estados de los materiales y daños en la madera medibles por métodos basados en vibraciones son (1) módulo de elasticidad, (2) rigidez y (3) propiedades dinámicas. [11]

### **Métodos fotogramétricos (ópticos)**

Los métodos ópticos pueden ser utilizados para medir desplazamientos y vibraciones, y, pueden ser utilizados para gran variedad de situaciones (incluidas mediciones desde distancias grandes hasta distancias pequeñas). Asimismo, pueden ser utilizadas tanto como técnicas globales como locales. [11]

Palma *et al* [11] focalizan su estudio en los métodos fotogramétricos en donde se identifica en imágenes digitales puntos reconocibles de la estructura, lo que difiere del método desarrollado en que este fija puntos y mide la variación de la posición de un láser externo a la estructura. No obstante, muchas de las conclusiones a las que se llegan pueden trasladarse al método estudiado en este trabajo. Además, se resalta que ya hay instancias en donde se han utilizados métodos fotogramétricos en estructuras de madera, como puentes, para medir desplazamientos, deformaciones y vibraciones.

Se concluyó que los parámetros físicos, estados de los materiales y daños en la madera medibles por los métodos fotogramétricos estudiados por Palma *et al* [11] son (1) deformaciones y (2) módulo de elasticidad; este último mediante ensayos cuasiestáticos.

#### **3.4.2. Parámetros de interés y técnicas de monitoreo para estructuras de madera**

Debido a que el ME se encuentra enfocado en la captura de cambios en las propiedades de los materiales, obtener estimados precisos de propiedades claves en otras instancias (como la densidad o inhomogeneidades) puede no ser tan relevante para los propósitos del ME. [11]

El monitoreo de desplazamientos o deformaciones no tiene especificaciones particulares en el caso de elementos estructurales de madera, ya que otras técnicas de monitoreo pueden ser empleadas en su lugar directamente. No obstante, el control de los desplazamientos sigue siendo de suma importancia debido a que en numerosas ocasiones es esta la limitante, en lugar de la resistencia, del diseño. [11]

Los parámetros de relevancia para el ME definidos por Palma *et al* [11] son (1) contenido de humedad, (2) descomposición, (3) daño por insectos, (4) delaminaciones y rajaduras, (5) deformaciones y desplazamientos y (6) esfuerzos internos.

## **Delaminación y rajaduras**

Las delaminaciones y rajaduras longitudinales son causantes usuales de fallas en estructuras de madera. Sus causas varían desde adhesivos que no funcionan correctamente hasta condiciones climáticas adversas no previstas en el diseño. La detección de líneas de adhesivo defectuosas durante la construcción y servicio de una estructura se vuelven primordiales. Si bien las delaminaciones son difíciles de detectar visualmente, se han desarrollado END para que esto sea posible. [11]

El uso de métodos basados en vibraciones es efectivo para la detección de estas patologías, mas se encuentra limitado a técnicas de vibraciones transversales. Estas técnicas evalúan las frecuencias modales y las propiedades de amortiguamiento de los elementos sujetos a vibraciones perpendiculares al eje del elemento. La presencia de rajaduras o delaminaciones puede detectarse mediante variaciones en estos parámetros. No obstante, es preciso mencionar que estas técnicas son altamente dependientes de las condiciones de borde, y estas pueden cambiar con el ajuste de tornillos o fricción entre las conexiones. [11]

El uso de métodos ópticos ha sido empleado con éxito para el estudio del comienzo de rajaduras y su desarrollo. Sin embargo, para los métodos estudiados por Palma *et al* [11] se tuvo que, debido a los estrictos requerimientos de instrumentación, el estudio ha estado limitado casi exclusivamente a estudios de laboratorio. Además, su desempeño en el largo plazo es cuestionable debido a la necesidad de que se repitan las condiciones ambientales y de superficie para poder comparar imágenes tomadas en diferentes instancias. [11]

## **Deformaciones y desplazamientos**

La mayoría de las técnicas de monitoreo de deformaciones y desplazamientos son aquellas basadas en métodos ópticos. Palma *et al* [11] describen que para vanos de grandes longitudes, técnicas que emplean objetivos de luz LED infrarroja y cámaras son de uso ya mostrado y pueden llegar a tener una precisión del orden del milímetro en los ensayos de laboratorio y hasta un error máximo de 2 mm en desplazamientos de 100 mm a distancias de 23 m del objetivo.

### **3.4.3. Casos de estudio**

La mayoría de los casos de estudios que Palma *et al* [11] describen son basados en la medición de contenido de humedad debido a su alta correlación con el comportamiento y durabilidad de la madera, y su bajo costo y simplicidad de instrumentación. [11]

El caso de estudio que estudia el empleo de monitoreo mediante la medición de deforma-

ción y cambios en los parámetros dinámicos a partir de vibraciones descrito por Palma *et al* [11] son estudios en Suecia cuyos resultados fueron presentados por Serrano [13].

Para el monitoreo de los desplazamientos se pudo medir durante dos años consecutivos (setiembre 2007 a setiembre 2009) y, al momento de publicación, se esperaba que continuara por dos años más. Se observó una clara disminución de la razón de crecimiento de la flecha de la estructura a partir del año del comienzo de las mediciones. No es en vano resaltar que la flecha máxima medida (18 mm) fue del orden esperado. [13]

En lo que respecta a los estudios de vibraciones, Serrano [13] solo presenta conclusiones preliminares. No se extrajeron resultados para el largo plazo, si no que solo se compararon los resultados obtenidos con el amortiguamiento esperado y con el cálculo previo de la primera frecuencia natural de un elemento.

### 3.5. Materiales y métodos

Para evaluar la sensibilidad del método fotogramétrico diseñado a la introducción de una patología, se realiza una serie de ensayos de laboratorio que buscan simular, de manera acelerada en el tiempo, las mediciones que se tomarían durante el monitoreo de una estructura. Estos consisten en la medición de los desplazamientos en el centro de una viga de madera ante la respuesta dinámica de un pulso y durante un ensayo cuasiestático de carga, para varios estados de la misma viga de madera.

Como simulación de patología, se introducen cortes de 0,5 cm de ancho y 1,3 cm de altura en la viga en varios puntos de la viga. Estos cortes pretenden simular el efecto que posibles fisuras o agentes biológicos puedan tener sobre el elemento estructural, generándole una disminución en su rigidez. Se consideran tres etapas de deterioro:

- Etapa 1: sin deterioro, no se colocan cortes.
- Etapa 2: se colocan dos cortes (F2 y F3) en la superficie inferior del tercio central de la viga.
- Etapa 3: se colocan dos cortes adicionales (F1 y F4) en la superficie inferior de los tercios exteriores de la viga.

Además de realizar los ensayos de madera con el sistema fotogramétrico, se realizan medidas con 3 acelerómetros (a los que denominaremos A0, A1 y A2) de sensibilidad del entorno de  $10 \text{ mV/m/s}^2$  para los ensayos dinámicos y 2 comparadores para los ensayos de carga. La instrumentación del ensayo se muestra en la Figura 48 y su esquematización se muestra en la Figura 49. En esta última figura se muestra en color rojo donde se colocan los acelerómetros, en azul donde se realizan los cortes en la viga en la etapa 2 (F2 y F3) y en la etapa 3 (F1 y

F4) y en verde donde se colocan las pesas para los ensayos de carga.

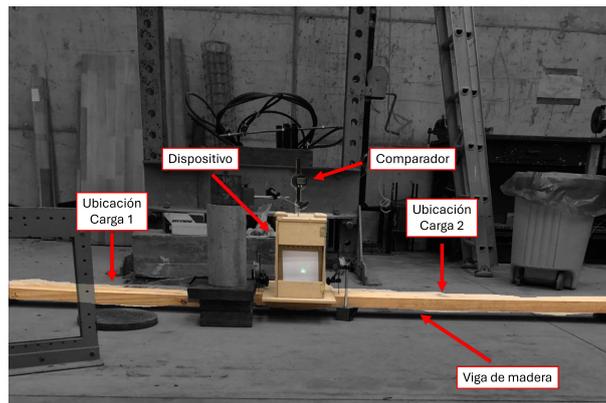


Figura 48: Instrumentación en la viga de madera del ensayo de monitoreo

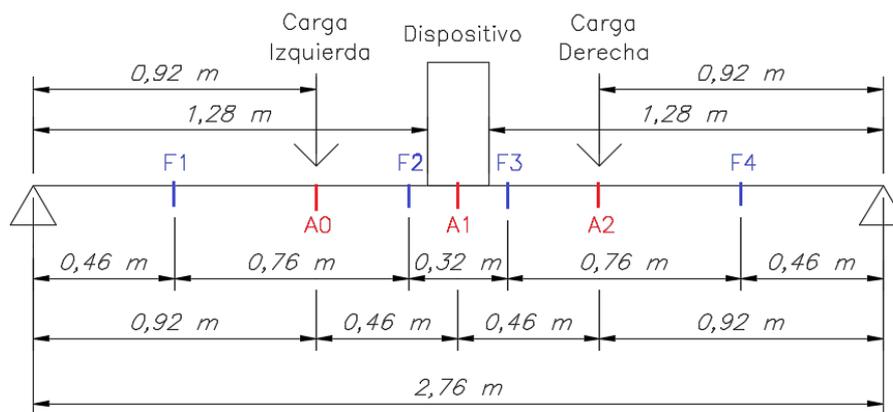


Figura 49: Esquema del ensayo de monitoreo sobre viga de madera

Las mediciones dinámicas con los acelerómetros se toman 10 veces para cada etapa, 5 sin el dispositivo fotogramétrico por sobre la viga y 5 con este colocado. Los resultados que se obtienen bajo la primera hipótesis son comparados contra un modelo computacional de elementos finitos.

En cada etapa se toman 3 mediciones a una velocidad de fotogramas de 30 fps de la respuesta a un pulso mediante el método fotogramétrico impactando la viga a 92 cm del apoyo derecho. Adicionalmente, para la etapa 3 se realizan dos mediciones impactando la viga debajo del dispositivo en el centro de la viga y otra imponiendo un desplazamiento inicial manual a una velocidad de fotogramas de 60 fps.

Los comparadores se colocan, alineados en el sentido perpendicular al eje de la viga, por sobre el dispositivo de medición fotogramétrico. Para obtener el desplazamiento que se toma como real se realiza una ponderación de las mediciones de los comparadores en base a su distancia en el sentido perpendicular al eje de la viga con la hoja donde impacta la luz de láser.

### 3.5.1. Metodología de análisis estático

El análisis estático se basa en la obtención de la rigidez ( $EI$ ) de la viga de madera. Conociendo la geometría de la viga y el peso de las cargas junto con su ubicación, se puede obtener la rigidez si se supone a la viga como simplemente apoyada. En este caso, la rigidez queda dada por la ecuación

$$EI = \frac{23(m_i + m_d)gL^3}{1296\delta} \quad (27)$$

donde

- $m_i$  es la masa de la carga colocada a un tercio de la viga,
- $m_d$  es la masa de la carga colocada a dos tercios de la viga,
- $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  es la aceleración gravitatoria,
- $L = 2,76 \text{ m}$  es la longitud de la viga,
- $\delta$  es la flecha del punto medio de la viga.

### 3.5.2. Metodología de análisis dinámico

El análisis dinámico en el dominio del tiempo se realiza mediante el gráfico de la amplitud de la medida captada por el instrumento en función del tiempo. Se mide la razón de amortiguamiento  $\xi$  mediante el cálculo del decaimiento libre descrito por Clough y Penzien [3]:

$$\xi = \frac{\ln(v_n/v_{n+m})}{2\pi m} \quad (28)$$

donde  $v_n$  y  $v_{n+m}$  representan las amplitudes de los  $n$ -ésimos y  $(n + m)$ -ésimos picos de la curva. Consecuentemente, en este caso,  $m$  representa la cantidad de picos de diferencias que hay entre las dos amplitudes analizadas.

El análisis dinámico en el dominio de la frecuencia se realiza mediante *peak picking* del gráfico de las frecuencias obtenidas a través de la transformada de Fourier de las medidas obtenidas por los acelerómetros y el dispositivo desarrollado.

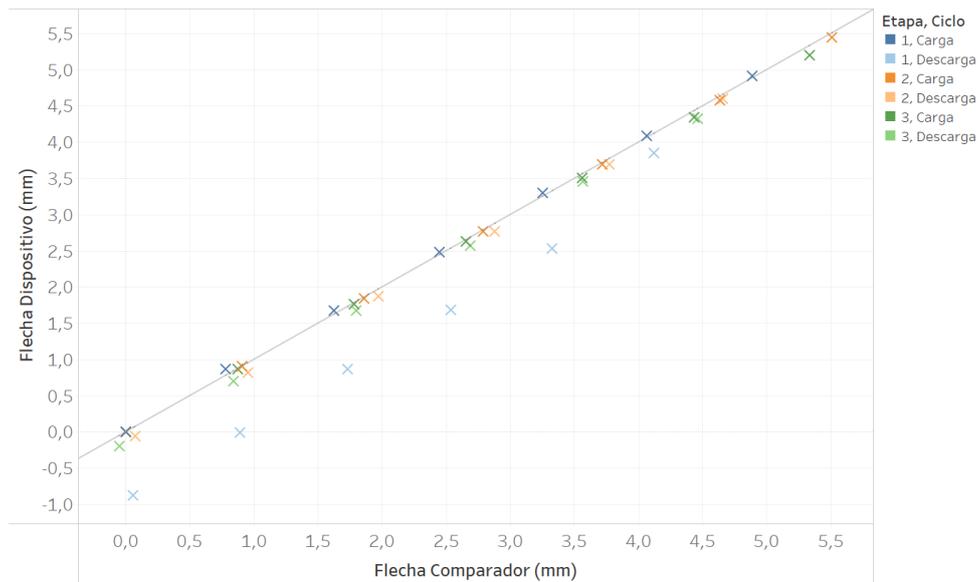
Además de los análisis de los resultados en los dominios de la frecuencia y el tiempo, se busca determinar la masa del dispositivo y compararla con la real (obtenida pesándola en una balanza). Esto se realiza mediante el análisis del sistema como un SDOF generalizado donde se modela al dispositivo como una carga puntual en el centro de la viga.

Para realizar los análisis dinámicos en este estudio se utiliza una frecuencia de muestreo de 2000 Hz durante 5 segundos, es decir, se toman 10 mil puntos.

### 3.6. Análisis de resultados

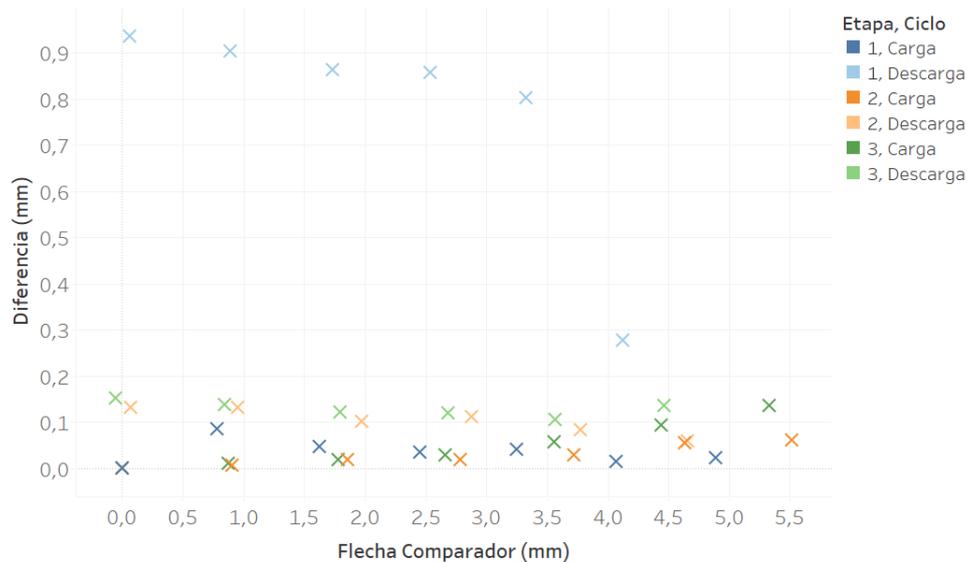
#### 3.6.1. Comparación de métodos estáticos

La Figura 50 muestra, para cada uno de los ensayos de carga, la flecha obtenida mediante el método fotogramétrico contra la flecha obtenida mediante los comparadores para un mismo escalón de carga. Asimismo, se traza superpuesta al gráfico la recta  $x = y$ , donde idealmente deberían de encontrarse todos los valores.

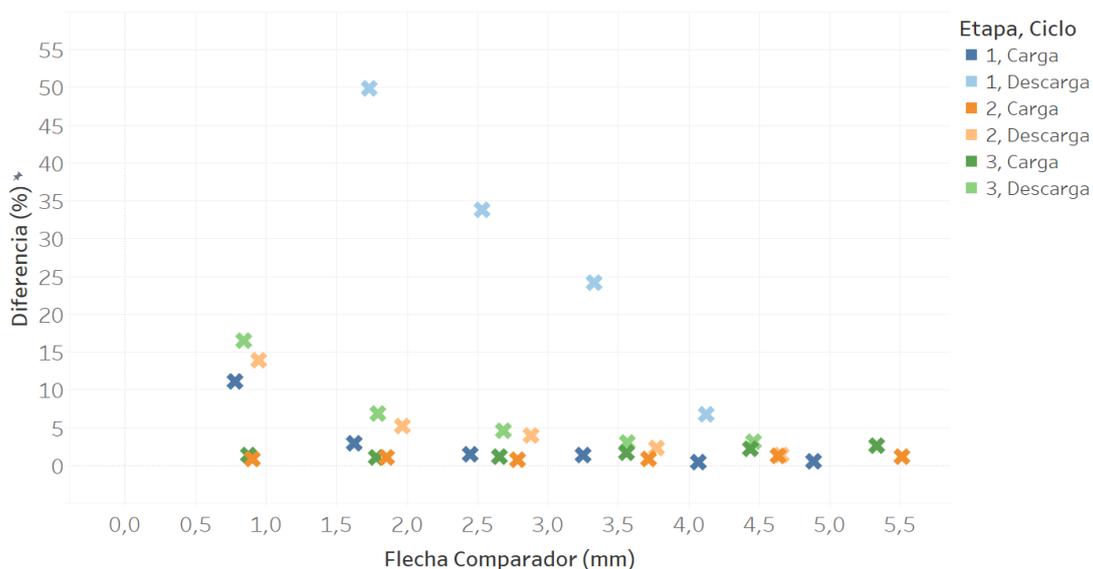


**Figura 50: Flecha del dispositivo en función de la del comparador para los ensayos de carga**

Adicionalmente, en la Figura 51 y la Figura 52 se muestra la diferencia entre las flechas obtenidas por ambos métodos en función de la flecha obtenida mediante los comparadores en valor absoluto y relativo respectivamente, distinguiendo entre ciclos de carga y descarga y por la etapa en la que se realizaron.



**Figura 51:** Diferencia entre la flecha del dispositivo y la del comparador en función de la del comparador para los ensayos de carga



**Figura 52:** Diferencia relativa entre la flecha del dispositivo y la del comparador en función de la del comparador para los ensayos de carga

Se puede apreciar que la diferencia entre las mediciones de ambos métodos se encuentra por debajo de 0,2 mm en todo momento a excepción del ciclo de descarga de la primera etapa. Estas diferencias superiores en este ciclo no provienen de una causa que haya sido identificada, pero sí se los toma como valores anómalos ya que, por fuera de estos, el valor de las diferencias es consistentemente similar. Como consecuencia, se descartan estas medidas para posterior análisis.

A diferencia de lo expuesto en la Subsección 2.10, el error en estos ensayos no tiende a aumentar con la flecha, sino que el aumento de la diferencia observada es creciente a lo largo del tiempo. Motivo por el cual, a flechas similares, el ciclo de descarga exhibe diferencias más

grandes que el ciclo de carga de la misma etapa.

La Tabla 11 muestra las rigideces ( $EI$ ) promedio calculadas, según lo expuesto en la Subsección 3.5.1, a partir de los desplazamientos obtenidos y las cargas de valores conocidos, y, las desviaciones estándar ( $\sigma$ ) de las mismas. Para la obtención de estos valores no se tiene en consideración la descarga de la Etapa 1 por lo ya expuesto.

**Tabla 11: Rigideces ( $EI$ ) promedio obtenidas utilizando comparadores y el método fotogramétrico, con sus respectivas desviaciones estándar ( $\sigma$ )**

		$EI$ (kNm <sup>2</sup> )	Diferencia (%)	$\sigma$ (kNm <sup>2</sup> )
Etapa 1	Comparador	9,24	2,76	0,14
	Dispositivo	9,07		0,21
Etapa 2	Comparador	7,97	3,10	0,17
	Dispositivo	8,22		0,29
Etapa 3	Comparador	8,44	4,41	0,14
	Dispositivo	8,63		0,14

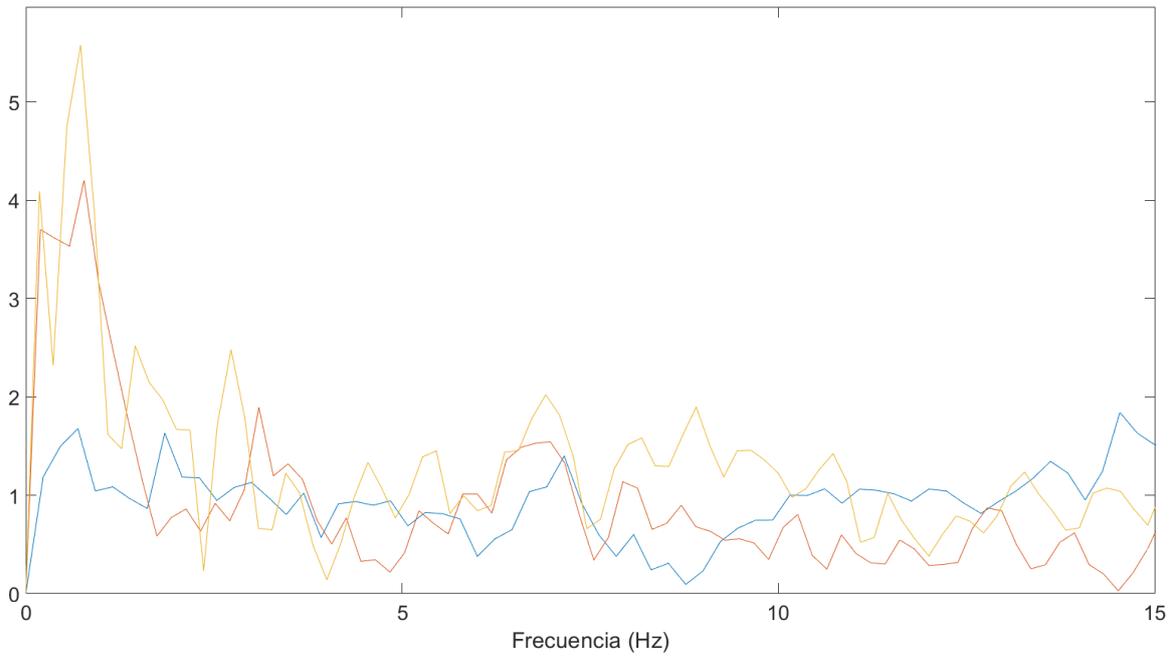
En base a estos resultados se puede apreciar que no hay grandes diferencias en la obtención de la rigidez estática por los distintos métodos evaluados. Además, se puede observar en los resultados expuestos que las rigideces obtenidas para cada etapa otorgan poca variabilidad debido a que la desviación estándar es baja; coeficientes de variación ( $\sigma/EI$ ) inferiores al 3,5%.

### 3.6.2. Comparación de métodos dinámicos

Debido a una baja iluminación en el interior del dispositivo causado por el agotamiento de las baterías de las luces LED, las medidas de esta etapa con el método fotogramétrico no pudieron ser correctamente procesadas y no se las puede comparar con los resultados obtenidos con los acelerómetros.

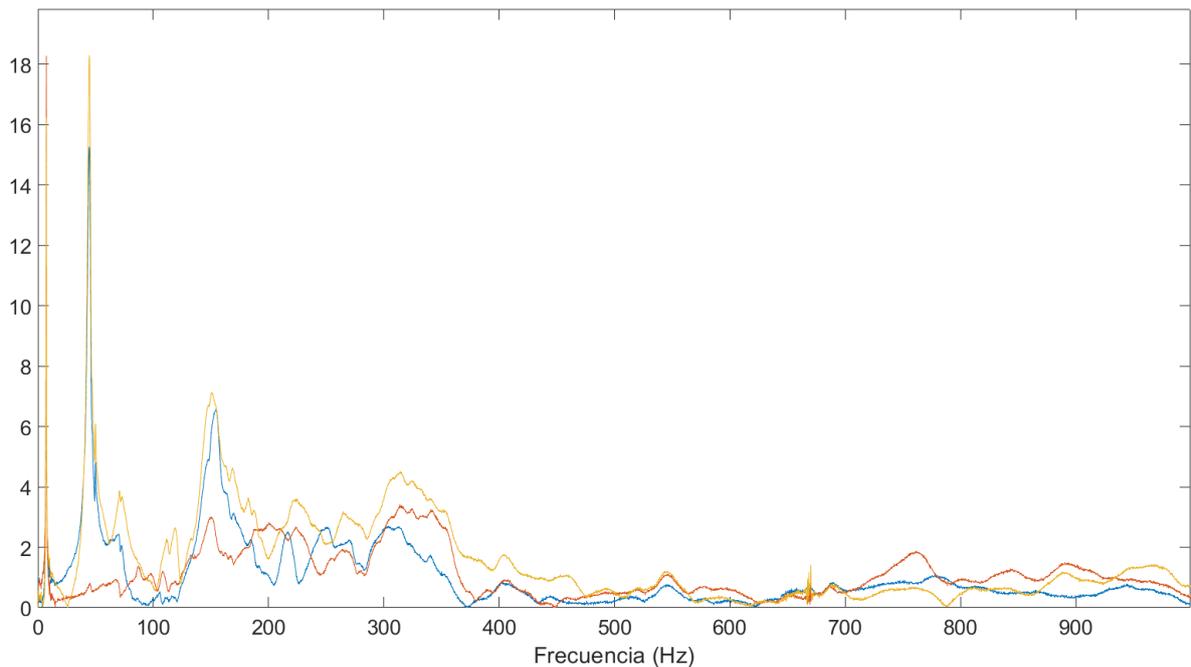
#### **Análisis en el dominio de la frecuencia**

En este análisis, se pudo obtener la frecuencia del primer modo de vibración en todas las etapas para todas las señales claramente. No obstante, en el caso del método fotogramétrico, no fue posible la detección de los picos para la frecuencia deseada cuando se golpeó a la viga en su tercio para la Etapa 3 (este problema se aprecia en la Figura 53, que muestra el gráfico utilizado para la identificación de frecuencias en estas condiciones). Esto fue consecuencia de que no se logra discernir ningún pico; quedan ocultos por el ruido del sistema.

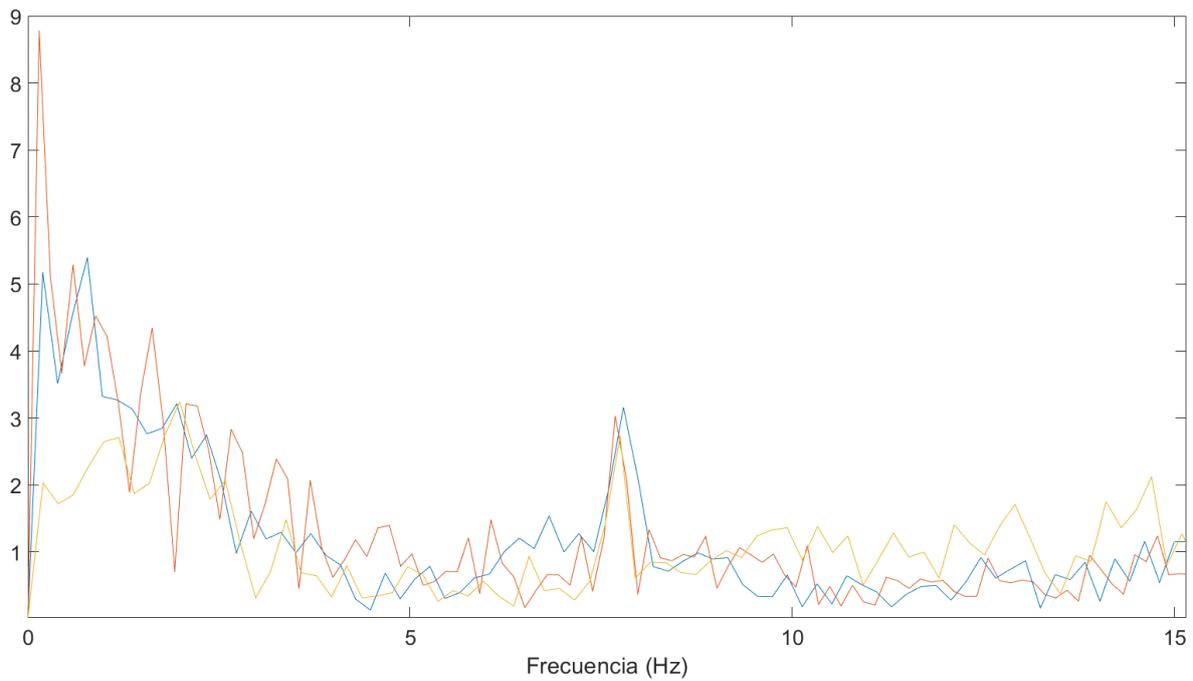


**Figura 53:** Gráfico utilizado para identificar frecuencias capturadas por el método fotogramétrico para la Etapa 3 para las medidas con golpe en el tercio derecho de la viga

Para la Etapa 1, la frecuencia obtenida mediante los acelerómetros cuando el dispositivo se encuentra colocado fue de 7,8 Hz; la Figura 54 muestra uno de los gráficos utilizados para identificar esta frecuencia. Por su parte, el método desarrollado arrojó, para cada medida, las frecuencias 7,69 Hz, 7,75 Hz y 7,79 Hz; la Figura 55 muestra el gráfico utilizado para la identificación de estas 3 frecuencias.

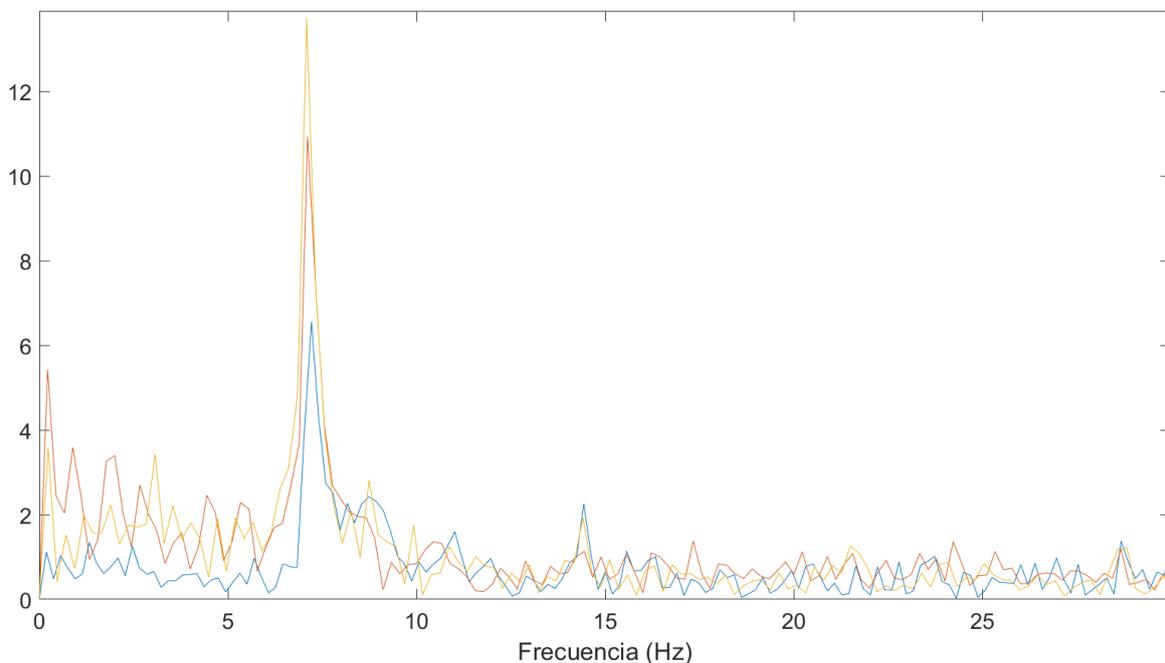


**Figura 54:** Gráfico utilizado para identificar frecuencias mediante *peak picking* para los acelerómetros



**Figura 55: Gráfico utilizado para identificar frecuencias capturadas por el método fotogramétrico para la Etapa 1**

Para la Etapa 3, las frecuencias obtenidas mediante los acelerómetros cuando el dispositivo se encuentra colocado se encuentran entre 7,4 Hz y 7,2 Hz. Esto se debe a que, a diferencia de lo visto en la Etapa 1, los picos parecen encontrarse entre estas dos frecuencias dado que las amplitudes son muy similares y se forma una mesetas entre ellas. Es decir, la resolución en frecuencia no es suficiente para captar correctamente este pico.



**Figura 56: Gráfico utilizado para identificar frecuencias capturadas por el método fotogramétrico para la Etapa 3 para las medidas con golpe en el medio de la viga y desplazamiento inicial impuesto**

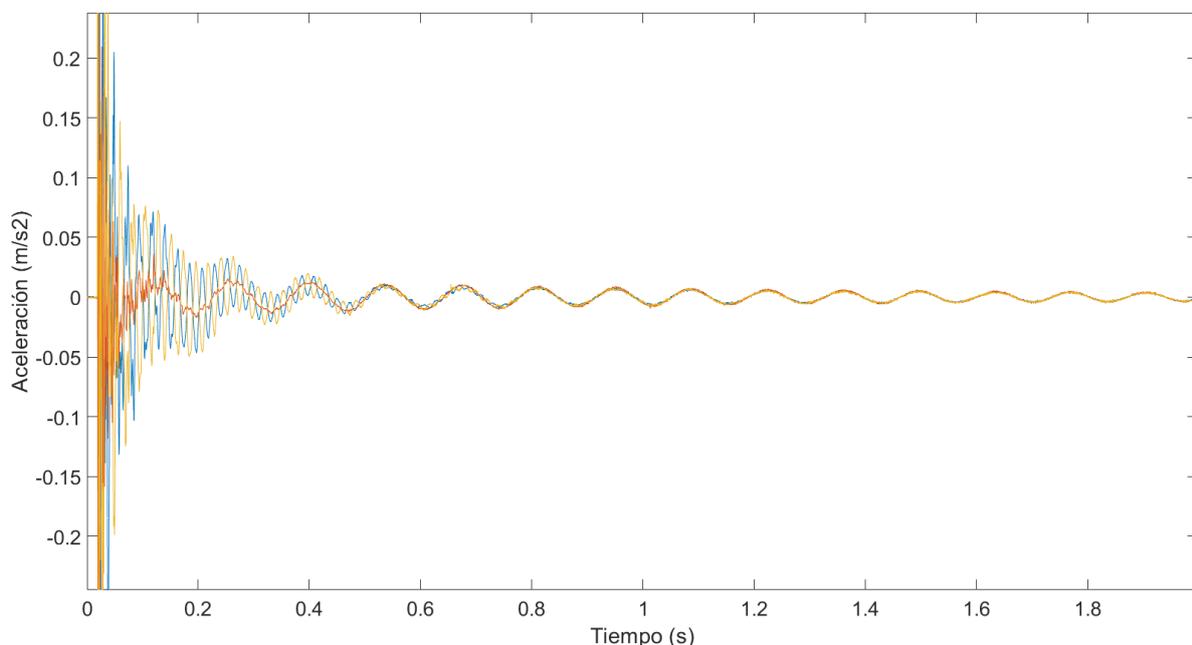
Los resultados obtenidos por el método fotogramétrico cuando sí se pudieron identificar los picos son para cada medida 7,09 Hz, 7,11 Hz y 7,22 Hz; la Figura 56 muestra el gráfico utilizado para esta identificación, donde la curva azul representa la señal con el desplazamiento inicial impuesto.

Todos los resultados comparables para las Etapas 1 y 2 conllevan una diferencia inferior al 5%. Considerando que la precisión de los acelerómetros solo permite identificar escalones de frecuencia de 0,2 Hz, no se considera a esta diferencia como una diferencia significativa.

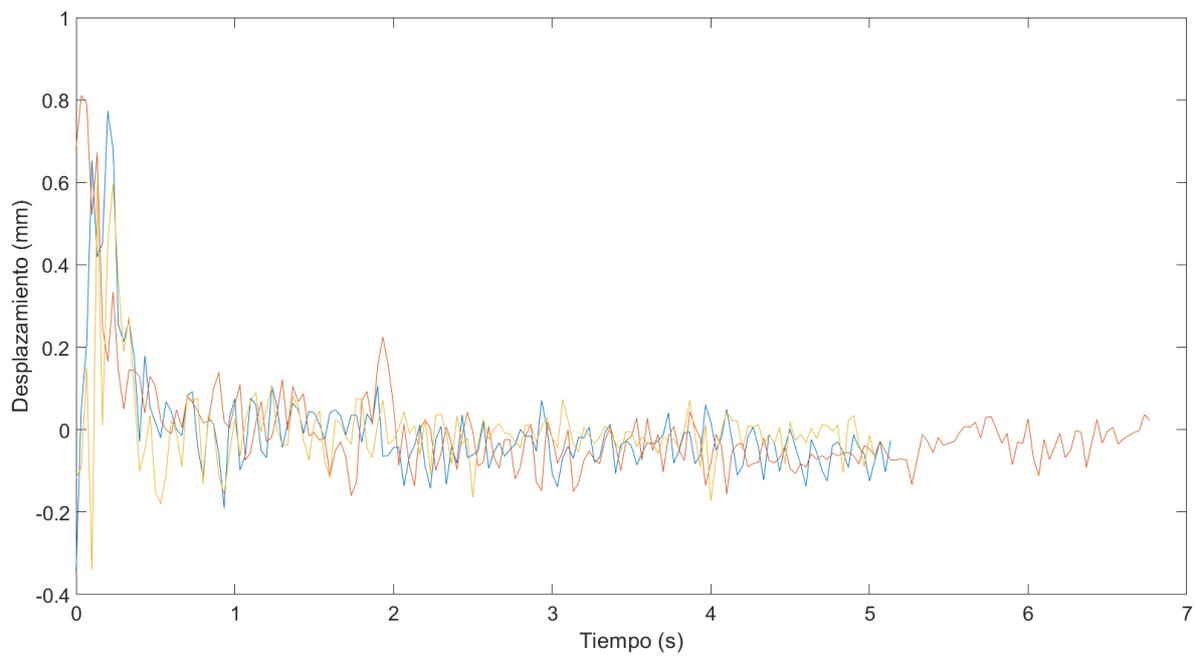
### **Análisis en el dominio del tiempo**

Mientras que para las medidas tomadas por los acelerómetros el previamente descrito análisis se puede realizar sin mayores inconvenientes a partir de los gráficos que se obtienen (un ejemplo de estos gráficos se muestra en la Figura 57), el análisis no se puede realizar en los gráficos que se obtienen con el método fotogramétrico. Esto deriva de que no se puede apreciar claramente un patrón de crestas y valles; en la Figura 58, la Figura 59 y la Figura 60, que muestran los desplazamientos en función del tiempo captadas por el dispositivo señalado, se aprecia el problema descrito.

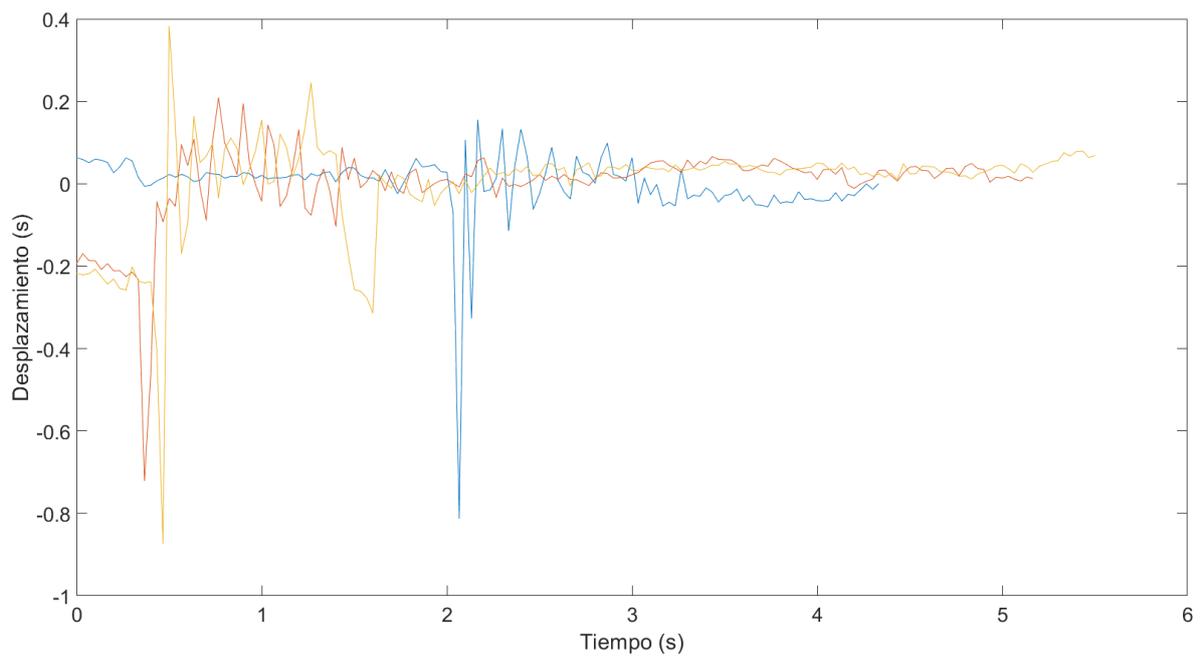
Los resultados y discusión del análisis de decaimiento libre de las señales captadas por los acelerómetros se encuentran en la Subsubsección 3.6.3.



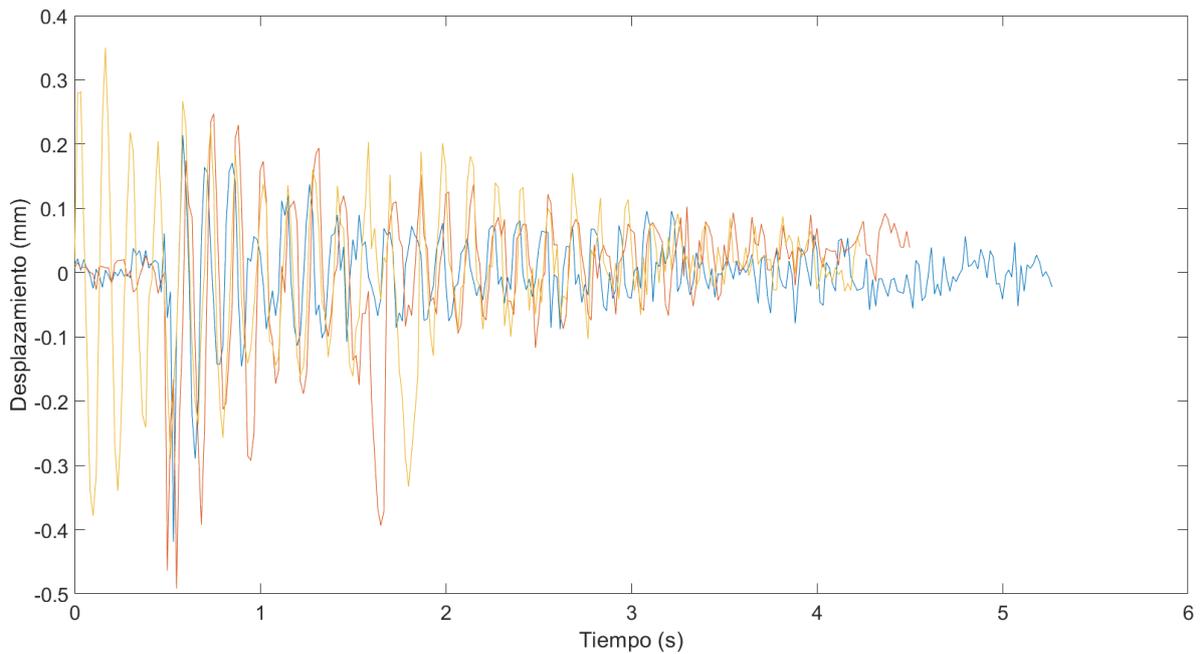
**Figura 57:** Gráfico de una señal obtenida con acelerómetros de amplitud en función del tiempo



**Figura 58:** Gráfico de los desplazamientos obtenidos con el método fotogramétrico de amplitud en función del tiempo para la Etapa 1



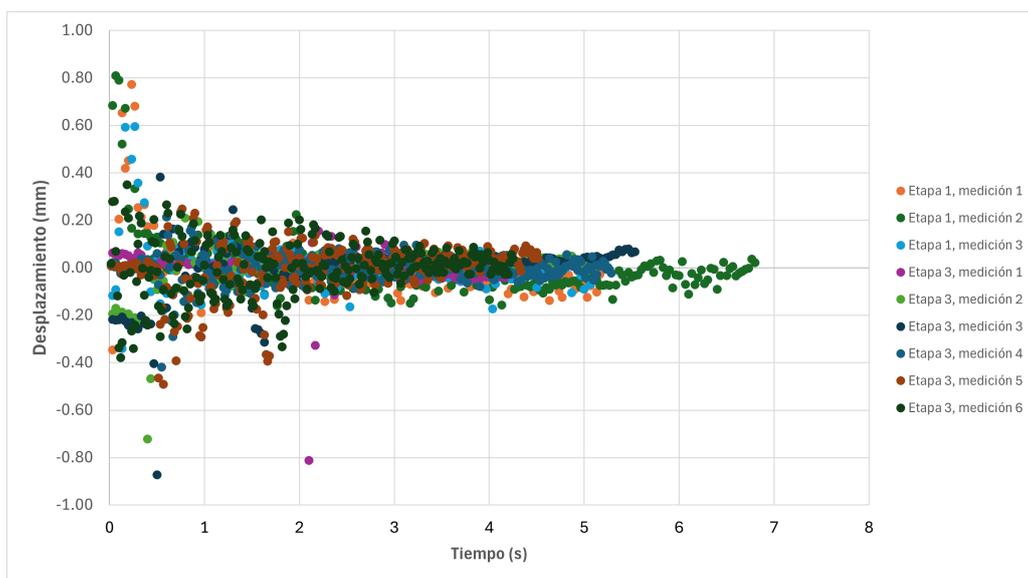
**Figura 59:** Gráfico de los desplazamientos obtenidos con el método fotogramétrico de amplitud en función del tiempo para la Etapa 3 para las primeras tres medidas



**Figura 60:** Gráfico de los desplazamientos obtenidos con el método fotogramétrico de amplitud en función del tiempo para la Etapa 3 para las segundas tres medidas

#### **Análisis del error con la coordenada horizontal**

La Figura 61 muestra el desplazamiento horizontal en función del tiempo medida por el método fotogramétrico. Aquí se puede apreciar que se tienen medidas no nulas para la coordenada horizontal de mayor magnitud que para aquellas apreciadas en los ensayos cuasiestáticos en el mismo intervalo de tiempo (intraescalón). Sin embargo, estos errores son menores a 0,2 mm después de 2 segundos del pulso. Además, se puede ver una tendencia a la disminución de estas variaciones a lo largo que la vibración se amortigua en la estructura, como es esperable.



**Figura 61:** Desplazamiento horizontal medido por el dispositivo en función del tiempo para los ensayos dinámicos

### 3.6.3. Identificación de patología

Para comparar los resultados obtenidos experimentales en la identificación de la patología se realizan dos modelos de elementos finitos en el programa *COMSOL Multiphysics*. Ambos modelos tienen la geometría inicial conocida ( $b = 15,1$  cm,  $h = 5,0$  cm y  $L = 2,76$  m) y luego se le introducen los cortes también conocidos; la Figura 62 y la Figura 63 muestran estos modelos con las geometrías para la Etapa 1 y la Etapa 3 respectivamente. Los valores obtenidos en los modelos son denominados como valores teóricos.

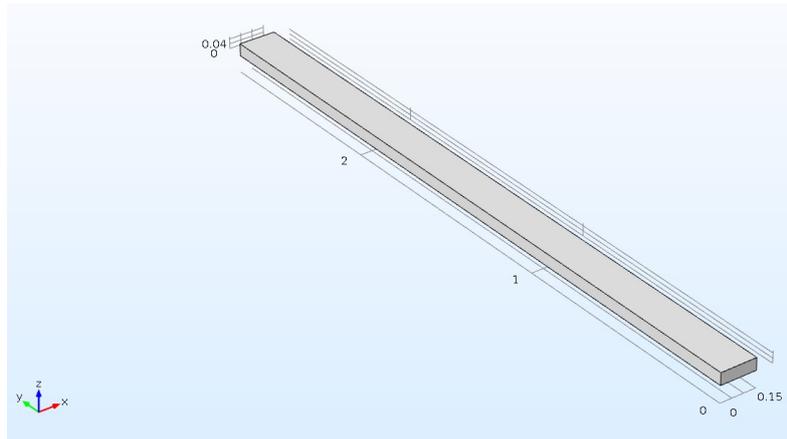


Figura 62: Modelo de elementos finitos para la Etapa 1

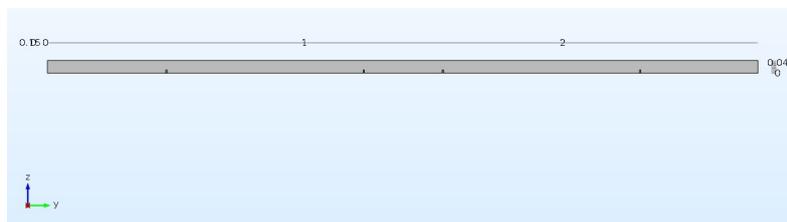
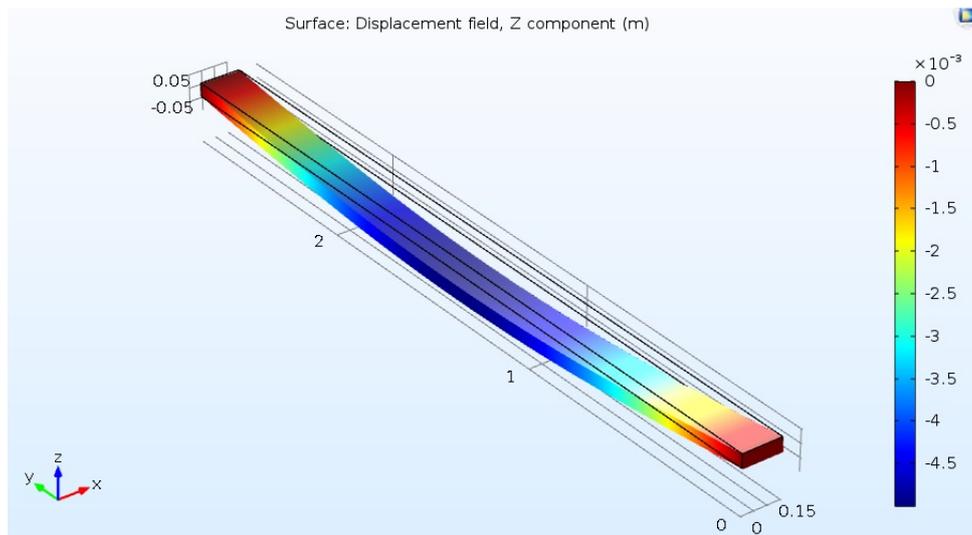


Figura 63: Modelo de elementos finitos para la Etapa 3

El primer modelo se utiliza para comparar los resultados experimentales cuasiestáticos. Consecuentemente, se lo modela con un módulo de elasticidad  $E$  derivado de la rigidez obtenida por el método tradicional en la Etapa 1. Este valor se obtiene mediante la ecuación

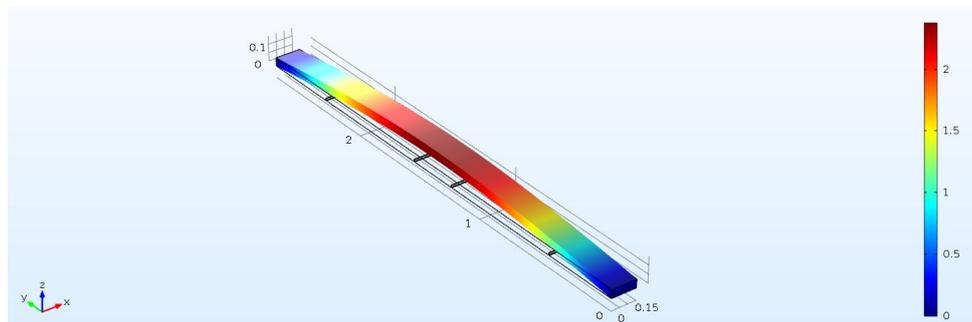
$$E = \frac{(EI)_{\text{Etapa 1}}}{I_0} = 5,84 \text{ GPa.} \quad (29)$$

—A partir de este modelo, se calcula que las flechas en el punto medio de la viga para la última carga en las Etapas 1, 2 y 3 son 4,87 mm, 5,17 mm y 5,22 mm respectivamente. La Figura 64 muestra el modelo deformado para la Etapa 3.



**Figura 64: Deformación de la viga del modelo computacional para la Etapa 3**

El segundo modelo se utiliza para comparar los resultados experimentales dinámicos en el orden de la frecuencia. Como módulo de elasticidad dinámico y densidad de la madera se toman los valores obtenidos por Briano *et al* [2] para el mismo tipo de vigas;  $E = 6,3$  GPa y  $\rho = 464$  kg/m<sup>3</sup>. De este modelo se obtienen que las frecuencias del primer modo de vibración para las Etapas 1, 2 y 3 son de 10,953 Hz, 10,671 Hz y 10,602 Hz respectivamente. La Figura 65 muestra el modelo con los resultados para la Etapa 3.



**Figura 65: Primer modo de vibración del modelo computacional para la Etapa 3**

En lo que respecta a la identificación de la patología mediante el método estático, se debería observar una disminución de la rigidez (equivalente a un aumento de la flecha máxima a misma carga) con las sucesivas etapas. Sin embargo, como se aprecia en la Figura 50 y la Tabla 11, a pesar de que en la primera etapa sí se observe la mayor rigidez, no se da una tendencia al descenso de la rigidez. Esto es debido a que la flecha máxima de la etapa 2 es superior a la de la etapa 3, cuando debería ser lo contrario.

En base al modelo computacional realizado, se obtiene que la disminución de la rigidez para las Etapas 2 y 3 deberían ser de 5,6 % 6,7 %, con respecto a la de la Etapa 1. Los resultados experimentales muestran una diferencia considerable para con la Etapa 2 (variación de rigidez de 6,6 % 13,7 %) pero despreciable para la Etapa 3 (variación de rigidez de 6,6 %); exhibido

en la Tabla 11.

La Tabla 12 muestra los valores de las flechas del modelo numérico y experimentales para cada escalón de carga de la Etapa 3 con sus diferencias. Aquí se observa que a pesar de que la diferencia entre las medidas teóricas y experimentales aumenta, la diferencia porcentual entre las mismas es prácticamente constante. Además, la relación entre las rigideces de la Etapa 1 y la Etapa 3 son las esperables. Empero, la diferencia en la Etapa 2 entre lo medido experimentalmente y el resultado teórico sí es significativa, especialmente porque la rigidez de la Etapa 2 debería ser superior a la de la Etapa 3 pero las medidas experimentales no lo reflejan. No se atribuye la diferencia en errores de medición de los métodos empleados ya que en todas las demás instancias estos devuelven medidas precisas, en cambio, se atribuye este cambio a posibles modificaciones leves de la geometría de la estructura al colocarla luego de realizados los dos primeros cortes.

**Tabla 12: Flechas máximas numéricas y experimentales para la Etapa 3 en el ciclo de carga**

	Carga 1	Carga 2	Carga 3	Carga 4	Carga 5	Carga 6
Flecha teórica (mm)	0,87	1,74	2,61	3,48	4,35	5,22
Flecha experimental (mm)	0,88	1,78	2,66	3,56	4,44	5,33
Diferencia (mm)	0,01	0,04	0,05	0,08	0,09	0,11
Diferencia (%)	0,8	2,5	1,9	2,4	2,1	2,2

Al analizarse los resultados obtenidos mediante los acelerómetros en el dominio de la frecuencia, se encontró que existe una notoria diferencia entre aquellas señales que fueron obtenidas cuando se tenía el dispositivo por sobre la viga y cuando no. Esto se ve reflejado en la Tabla 13. Consecuentemente, se realizan dos diferentes análisis con respecto a la identificación de la patología:

1. Se comparan los valores obtenidos sin el dispositivo colocado contra el segundo modelo computacional y se busca un patrón que permita identificar la aparición de los cortes para estas medidas.
2. Se busca un patrón que permita identificar la aparición de los cortes para los valores obtenidos con el acelerómetro con el dispositivo colocado y con el método fotogramétrico.

**Tabla 13: Frecuencias del primer modo de vibración ( $f$ ) medida por los acelerómetros**

	Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3
Sin dispositivo colocado	11,4 Hz	11,0 Hz	10,8 Hz
Con dispositivo colocado	7,8 Hz	7,4 Hz	7,4/7,2 Hz

Las frecuencias del modelo numérico muestran una disminución en la frecuencia de 2,6 % y 3,2 % para cada etapa. Sin embargo, las disminuciones de frecuencia medidas por los acelerómetros cuando el dispositivo no se encuentra colocado fueron de 3,5 % y 5,2 %. Si bien estas variaciones son superiores, tienen el mismo orden de magnitud y se encuentran dentro de los límites esperables como consecuencia de la apreciación de 0,2 Hz que se tiene con las mediciones con los acelerómetros.

Se tiene que, tanto con el dispositivo colocado como sin él, a medida que se efectuaron los cortes, las frecuencias de vibraciones fueron disminuyendo. Esto representa que la pérdida de rigidez primó por sobre la pérdida de masa experimentada por la viga. Consecuentemente, se aprecia que el método dinámico estudiado es más sensible a cambios en zonas que afecten en gran medida la rigidez. Asimismo, el método no permite identificar en qué zona ocurre la patología si no se cuenta con información previa de qué tipo de patología se observa, y, para zonas que no afecten la rigidez del elemento de gran manera, se necesita un daño mucho más avanzado para que este sea identificado.

En lo que respecta al análisis de decaimiento libre, para todas las señales tomadas con acelerómetros para cada Etapa se toman 6 picos con amplitudes  $v_0, \dots, v_6$  y se calcula  $\xi$  de la manera descrita en la Ecuación 28 tomando  $n = 0$  y  $m = 1, \dots, 5$ . Es decir, para cada señal se calculan 5  $\xi$ . La Tabla 14 muestra los  $\xi$  promedio para cada etapa y su desviación estándar ( $\sigma$ ), discretizando las señales obtenidas con el dispositivo colocado y sin él.

**Tabla 14: Razón de amortiguamiento ( $\xi$ ) y su desviación estándar ( $\sigma$ ) calculado a partir de las mediciones de los acelerómetros**

	Etapa 1		Etapa 2		Etapa 3	
	$\xi$ (%)	$\sigma$ (%)	$\xi$ (%)	$\sigma$ (%)	$\xi$ (%)	$\sigma$ (%)
Sin dispositivo colocado	0,86	0,16	0,72	0,16	0,96	0,24
Con dispositivo colocado	0,84	0,21	0,99	0,21	1,43	0,38

En base a los resultados se aprecia que la razón de amortiguamiento muestra una tendencia al aumento con la aparición de los cortes. Sin embargo, esto no es cierto en todo momento y las diferencias exhibidas son pequeñas, del orden de la desviación estándar de las mediciones. Estas, a la vez, son grandes en comparación con los valores medidos (entre 18 % y 27 %). Como consecuencia de esto, se concluye que este parámetro no es muy sensible a la patología introducida en la viga.

#### 3.6.4. Cálculo de la masa del dispositivo

La viga de madera, ya sea con el dispositivo colocado como sin él, es un elemento de masa distribuida. Consecuentemente, no es completamente modelable como un SDOF. Sin embargo, para identificar qué masa tiene el dispositivo a partir de las frecuencias obtenidas

con los acelerómetros se realiza el análisis de SDOF generalizado. Esto se logra permitiendo que los desplazamientos tengan la forma

$$v(x, y) = \psi(x) \times Z(t) \quad (30)$$

donde  $\psi(x)$  es la función de forma y  $Z(t)$  es una coordenada generalizada. Se considera que para el primer modo de vibración la función de forma será de forma sinusoidal tal que sea nula en los extremos y tenga un valor de 1 en su punto medio, es decir,

$$\psi(x) = \text{sen} \left( \frac{\pi}{L} x \right). \quad (31)$$

Como supuestos se toma el módulo de elasticidad dinámico de la madera obtenido por Briano *et al* [2] para el tipo de madera estructural utilizado ( $E = 6,3$  GPa) y que todas las propiedades ( $\rho, E, I, A$ ) son constantes a lo largo de la viga. A partir de esto se busca en primera instancia calcular la masa generalizada,  $m_v^*$ , y rigidez generalizada,  $k_v^*$ , de la viga por sí sola. Estas se calculan a partir de las ecuaciones:

$$m_v^* = \int_0^L m(x) \psi(x)^2 dx = \int_0^L \rho A \text{sen}^2 \left( \frac{\pi}{L} x \right) dx = \frac{\rho AL}{2} \quad (32)$$

$$k_v^* = \int_0^L EI [\psi''(x)]^2 dx = \int_0^L EI \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \text{sen}^2 \left( \frac{\pi}{L} x \right) dx = \frac{\pi^4 EI}{2L^3} \quad (33)$$

Luego, sabiendo que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m_v^*}{k_v^*}} \quad (34)$$

se obtiene que

$$\rho = \frac{EI\pi^4}{AL^4\omega_0^2} = 429 \text{ kg/m}^3 \quad (35)$$

donde:

- $\omega_0 = 2\pi f_0$  es la frecuencia en rad/s de vibración del primer modo de la viga por sí sola, con  $f_0 = 11,4$  Hz
- $A = 5 \text{ cm} \times 15,1 \text{ cm}$
- $I = 5 \text{ cm} \times (15,1 \text{ cm})^3 / 12$

Para poder calcular la masa del dispositivo se tienen que calcular la masa generalizada,  $m^*$ , y la rigidez generalizada,  $k^*$ , del sistema en conjunto. Como el dispositivo no le proporciona rigidez al sistema, se tiene que

$$m^* = m_v^* + M \times [\psi(x = L/2)]^2 = \frac{\rho AL}{2} + M \quad (36)$$

$$k^* = k_v^* = \frac{\pi^4 EI}{2L^3} \quad (37)$$

donde  $M$  es la masa del dispositivo que se quiere determinar.

Ahora, teniendo que la frecuencia obtenida fue de  $f_1 = 7,8$  Hz y que es válida la relación

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{m^*}{k^*}} \quad (38)$$

se tiene que

$$M = \frac{\pi^4 EI}{2L^3 \omega_1^2} - \frac{\rho AL}{2} = 5,07 \text{ kg} \quad (39)$$

Se tiene, entonces, una diferencia entre la masa del dispositivo calculada mediante el análisis experimental y la medida por una balanza (5,31 kg) de 4,5%. Esta diferencia es del orden de lo esperado dado la precisión de las frecuencias medidas y que se tomó al dispositivo como carga puntual cuando en realidad tiene un ancho no íntegramente despreciable (20 cm, equivalente a 7,2% de la luz libre).

Como comentario adicional, es preciso notar que la gran variación de las frecuencias obtenidas es debida a que la masa del dispositivo es significativa con respecto a la de la viga. La masa de la viga con la densidad ya calculada es de 8,94 kg, por lo que el dispositivo representa un 59% de la masa de la misma. En una estructura real se espera que esto no ocurra ya que son mucho más rígidas y masivas.

### 3.7. Conclusiones

Se pudo apreciar que es posible realizar tanto análisis cuasiestático como dinámico en el dominio de la frecuencia mediante el método fotogramétrico con resultados similares a los obtenidos por métodos tradicionales. Empero, el análisis dinámico en el dominio del tiempo no fue realizable con el dispositivo, y, se registraron dificultades para realizar el análisis en el dominio de la frecuencia cuando los desplazamientos iniciales generados por el pulso no superaron 1 mm. Consecuentemente, sería de una gran complejidad poder realizar cualquier tipo de análisis dinámico en estructuras de gran escala donde lograr, con un único pulso, una vibración con esa amplitud puede ser dificultoso.

Por otra parte, en lo que respecta a la identificación de la patología, se obtuvo una gran variedad de resultados. Dividiéndolo por método de análisis se obtiene:

- **Rigidez estática:** si bien en la Etapa 2 se identificó un problema en la medición, se puede ver que los resultados de la Etapa 3 son coherentes con los resultados de la Etapa 1. Se concluye que es una patología identificable cuando esta se encuentra avanzada o afecta determinadas zonas, sin embargo, el método aplicado no permite la detección de en qué zona es que se encuentra localizada la patología.
- **Frecuencia de vibración:** se pudo apreciar una clara disminución de la frecuencia del primer modo de vibración con el progreso de las etapas, mas el análisis se encuentra

limitado por las mismas restricciones que para los métodos cuasiestáticos. La disminución es de 5,3 % para las medidas con métodos tradicionales y de 7,8 % para las medidas con el método fotogramétrico. A pesar de esto, se pudo estimar, con una exactitud aceptable, el peso del dispositivo.

- **Razón de amortiguamiento:** si bien es posible la identificación de las razones de amortiguamientos, estas no muestran una tendencia clara, especialmente cuando se considera que el valor de la desviación estándar es aproximadamente un cuarto del valor de la medida. Se concluye, entonces, que no es posible la identificación de esta patología con este método en las condiciones del ensayo, probablemente a causa de las condiciones e borde.

Finalmente, se logró determinar la masa del dispositivo mediante un cálculo dinámico con un error de 4,5 %. Este error se encuentra dentro de lo esperable como consecuencia de la apreciación del instrumento y las hipótesis de cálculo consideradas (tomar el dispositivo como carga puntual y forzar a la estructura a tener una respuesta similar a la de un sistema SDOF).

## 4. Conclusiones

Se realizó una modificación del *script* para el procesamiento de las imágenes captadas por el método a desarrollar. Se observó que para que este procesamiento tuviese las menores variabilidades posibles ( $11,6 \mu\text{m}$ ) para medidas de un momento dado se tiene que contar con iluminación constante dentro del dispositivo y posicionar la cámara lo más frontal posible a la mira.

Para caracterizar el error, medido como la diferencia entre la medida del método y una conocida o de un método tradicional, se realizaron una serie de ensayos a corto y largo plazo estáticos y un ensayo de carga cuasiestático. De estos se obtiene que el error es siempre inferior a los 0,6 mm en medidas del orden del milímetro cuando la distancia del láser a la mira es inferior a los 6 m. Además, se reconoció la necesidad de evitar que el láser se caliente ya que esto induce a errores en la medición.

Asimismo, el método fotogramétrico fue comparado con los resultados obtenidos mediante acelerómetros en ensayos dinámicos en el dominio de la frecuencia obteniendo diferencias con estos inferiores al 5% de frecuencia de vibración. Sin embargo, con el dispositivo no se pudo obtener la frecuencia de vibración y el análisis en el dominio del tiempo fue imposible de realizar cuando las amplitudes de las señales son del mismo orden que el ruido.

En contrapartida, aún es necesario profundizar en varios aspectos del método antes de que este pueda tener un uso exitoso para ME. Dentro de estos se encuentran:

- La necesidad de automatizar el sistema. Esto implicaría que se puedan tomar las mediciones de forma remota y que el dispositivo procese las imágenes y devuelva los resultados o que, por lo menos, este envíe las imágenes directamente a una computadora.
- La fuente del error generado en los ensayos donde tanto el láser como el dispositivo se encuentran fijos. Si se logra minimizar este error, puede llegar a obtenerse una mayor precisión en general.
- La necesidad de llevar a cabo ensayos donde la distancia entre el láser y el dispositivo sean mayores a las medidas en este estudio (6 m) y ensayos de campo donde se pueda apreciar la existencia de algún factor ambiental o externo que no se haya considerado.

Se concluye que se pudo sentar las bases del desarrollo de un método fotogramétrico basado en el uso de una cámara y un láser de bajo costo y fácil implementación. En otras palabras, con posterior automatización del sistema y ensayos de campo, se considera que el método desarrollado podrá utilizarse eficazmente para ME.

En cuanto a lo que de ME en general se refiere, se trabajó con varias técnicas de mediciones tradicionales; medición de desplazamientos con comparadores y medición con acelerómetros

para su análisis dinámico en los dominios del tiempo y la frecuencia. Además, se pudo realizar un estudio de cómo se procesan las mediciones de las mismas y se evaluó que tan sensibles son a la introducción de una patología mediante la simulación de la misma en el laboratorio.

Se tiene que la patología simulada puede ser identificada mediante el análisis estático de los desplazamientos y el dinámico en el dominio de la frecuencia. Esto es posible siempre y cuando la patología esté localizada en una zona de gran influencia en la rigidez de la estructura o sea generalizada en el mismo. Esto se debe a que se observaron reducciones de la rigidez de 8,7 % y de la frecuencia de vibración del primer modo de 7,8 %. A pesar de esto, es preciso notar que el análisis en el dominio del tiempo fue posible pero no es un parámetro sensible a la patología estudiada ya que no se aprecia ningún patrón de variación de la razón de amortiguamiento.

## Referencias

- Albert, J., Maas, H.-G., Schade, A., & Schwarz, W. (2002). Pilot studies on photogrammetric bridge deformation measurement.
- Briano, E., & Rodríguez, F. (2021). *Efectos elásticos y acustoelásticos en piezas de madera aserrada de tamaño estructural*. Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.
- Clough, R., & Penzien, J. (1975). *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill. <https://books.google.com.uy/books?id=UdxRAAAAMAAJ>
- Dilmen, N. (2014). Color Cube -1. [https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo\\_de\\_color\\_HSV#/media/Archivo:HSV\\_cone.jpg](https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_de_color_HSV#/media/Archivo:HSV_cone.jpg)
- Ewins, D. J. (2000). *Modal Tesing: theory, practice and application*. Research Studies Press Ltd.
- Farrar, C. R., & Worden, K. (2007). An introduction to structural health monitoring. *Philosophical Transactions of the Royal Society*. <https://doi.org/10.1098/rsta.2006.1928>
- Franco, J. M., Murcia, J. H., Esp. Gómez, D., & Ph.D Thompson, P. (s.f.). Implementación de sensores láser para medir desplazamientos en estructuras.
- Gonzalez, R. C., & Woods, R. E. (2006). *Digital Image Processing (3rd Edition)*. Prentice-Hall, Inc.
- Labonnote, N. (2012). *Damping in Timber Structures* (Tesis doctoral).
- Labonnote, N., Rønnquist, A., & Malo, K. (2013). Experimental evaluations of material damping in timber beams of structural dimensions. *Wood Science and Technology*, 47. <https://doi.org/10.1007/s00226-013-0556-5>
- Palma, P., & Steiger, R. (2020). Structural health monitoring of timber structures – Review of available methods and case studies. *Construction and Building Materials*, 248, 118528. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.118528>
- Pierce, E. (2005). Cono de colores del espacio HSV. [https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo\\_de\\_color\\_HSV#/media/Archivo:HSV\\_cone.jpg](https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_de_color_HSV#/media/Archivo:HSV_cone.jpg)
- Serrano, E. (2009). *Documentation of the Limnologen Project Overview and Summaries of Sub Projects Results*.
- Serrano, N. A., Zuñiga, B. A., & Gallardo, J. M. (2018). Método fotogramétrico pragmático para medir desplazamientos en puentes. *I+D Tecnológico*.
- Spalvier, A. (2020). *Experimental and theoretical developments for the acoustoelastic characterization and stress-monitoring of concrete materials and structures* (Tesis doctoral). Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.
- Spalvier, A., Vidal, A., García, S., Reina, M., González de la Barrera, J., Ihlenfeld, M., & Nicuesa, F. (2023). First experiences of Civil Structural Health Monitoring in Uruguay. *Latam-SHM 2023*. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.23967/latam.2024.034>

Valença, J., Júlio, E., & Araujo, H. (2008). Application of photogrammetry to bridge monitoring.

## A. Descripción del funcionamiento del *script* final

El *script* consta de un código principal que llama a diversas funciones auxiliares. En primer lugar se describirá cómo se calibran los parámetros intrínsecos de la cámara con la función misma de *MatLab*, luego se explicará que hacen las funciones auxiliares a las que llama el *script* principal, y, finalmente, se muestra el funcionamiento de este.

### A.1. Calibración de los parámetros intrínsecos de la cámara

El mismo programa *MatLab* tiene incluida una función para calibrar los parámetros intrínsecos de la cámara. Es necesario para utilizarla proveer entre 10 y 20 fotografías de una cuadrícula similar a un tablero de ajedrez (Figura 66) con medidas conocidas sacadas desde distintos ángulos y distancias.

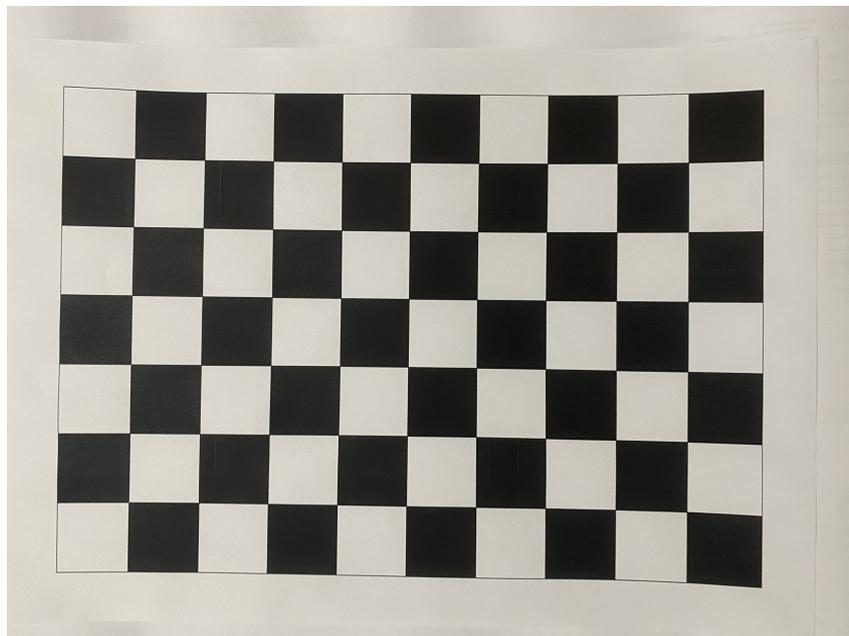


Figura 66: Cuadrícula utilizada para obtener parámetros intrínsecos de la cámara

Una vez que la aplicación corre, devuelve los parámetros y se los almacena bajo el nombre de *cameraParams.mat*.

### A.2. Función auxiliar: *track\_points\_new*

La función auxiliar *track\_points\_new* (cuyo código se muestra en la Figura 67) devuelve una tabla con las propiedades de los cuatro puntos rojos y una imagen binarizada donde aparecen los puntos reconocidos en blanco y el resto en negro. Los argumentos de entrada son una imagen a color y un parámetro (*parTh*) que modifica qué considerar como punto y qué no.

```

1 function [rProps, iBW] = track_points_new (iRGB, parTh)
2
3     iHSV = rgb2hsv (iRGB);
4     ig = iHSV(:, :, 2) .* im2double(255 - iRGB(:, :, 2));
5     igMax = max (ig ());
6     igTh = parTh / igMax;
7     iBW = imbinarize (ig * igTh, 255 / 256);
8
9     puntos =4;
10    rProps = regionprops ('table', iBW, 'Area', 'Centroid', 'BoundingBox');
11    [~,i] = maxk (rProps.Area, puntos);
12    rProps = rProps(i, :);
13
14    cG = mean (rProps.Centroid);
15    rProps.Angle = rProps.Centroid - cG;
16    rProps.Angle = angle (rProps.Angle(:, 1) + rProps.Angle(:, 2) * 1i);
17    rProps = sortrows (rProps, 'Angle');
18    end

```

Figura 67: Código de la función auxiliar `track_points_new`

Las líneas 3 a 7 procesan la imagen a color de entrada obteniendo la imagen binarizada (*iBW*) que es salida de la función, un ejemplo de la misma se muestra en la Figura 68. Para ello se realizan los siguientes pasos:

1. Consigue una imagen en formato HSV a través de la imagen a color RGB.
2. Obtiene una imagen donde el valor asociado a cada píxel es el producto entre la saturación del mismo en la imagen HSV y la componente de verde de la imagen RGB que le falta para tener la componente verde máxima.
3. Se binariza la imagen previamente obtenida considerando como *threshold* el valor 255/256. Para tomar en consideración distintos tipos de influencia en las imágenes como menor cantidad de luz o clara saturación de la componente del láser, a los valores de la imagen *ig* se los multiplica por un factor que depende de un parámetro variable. Este parámetro (*parTh*) se calibra previamente; cómo calibrarlo se explica en la Subsección A.7.

Las líneas 9 a 12 obtienen las propiedades (área, posición del centro y entre qué cotas se encuentra) de los *n* elementos más grandes identificables en *iBW*. El número *n* de elementos a considerar se define en la línea 9; en este caso se toma 4, la cantidad de números rojos a identificar.

Las líneas 14 a 17 ordenan los elementos identificados (puntos rojos de la hoja) en función del ángulo formado con el centro de gravedad de los cuatro elementos. Este ángulo se mide en radianes, antihorario, tomando como cero la horizontal hacia la derecha.

El reordenamiento de los elementos previamente descritos se realiza como consecuencia de que luego de su identificación (hasta línea 12) estos se encuentran ordenados de acuerdo a su

área únicamente.

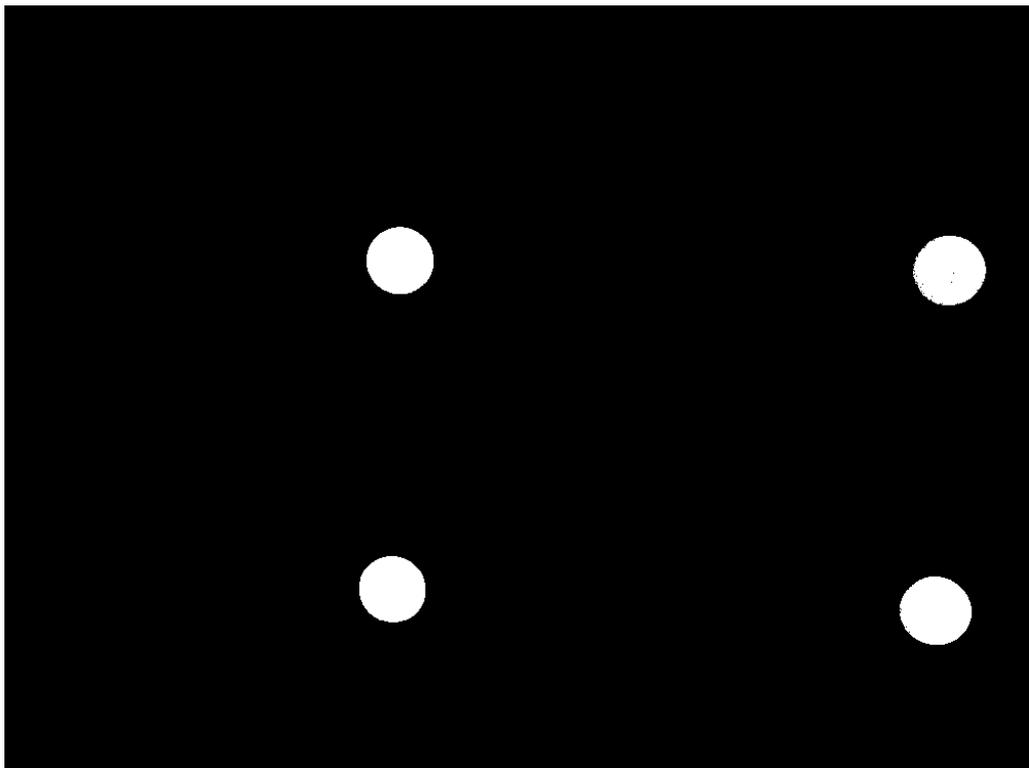


Figura 68: Ejemplo imagen *iBW* obtenida en el código *track\_laser\_new*

### A.3. Función auxiliar: *track\_laser\_new*

La función auxiliar *track\_laser\_new* (cuyo código se muestra en la Figura 69) devuelve la posición del centro del láser a partir de la imagen a color y dos parámetros (*parTh1* y *parTh2*) que modifican cómo se consideran los *thresholds* utilizados.

Las líneas 3 a 5 definen las componentes verde, roja y azul de cada uno de los píxeles de la imagen de entrada (líneas 7 a 15). Luego, se le reescribe la componente verde como cero a aquellos píxeles que tengan una proporción de verde menor al 45% y una componente azul elevada. Esto se realiza para que al momento de identificar al láser solo se tomen los verdes que efectivamente pertenecen al láser y no aquellos que tienen una alta componente verde solo por ser cercanos al blanco.

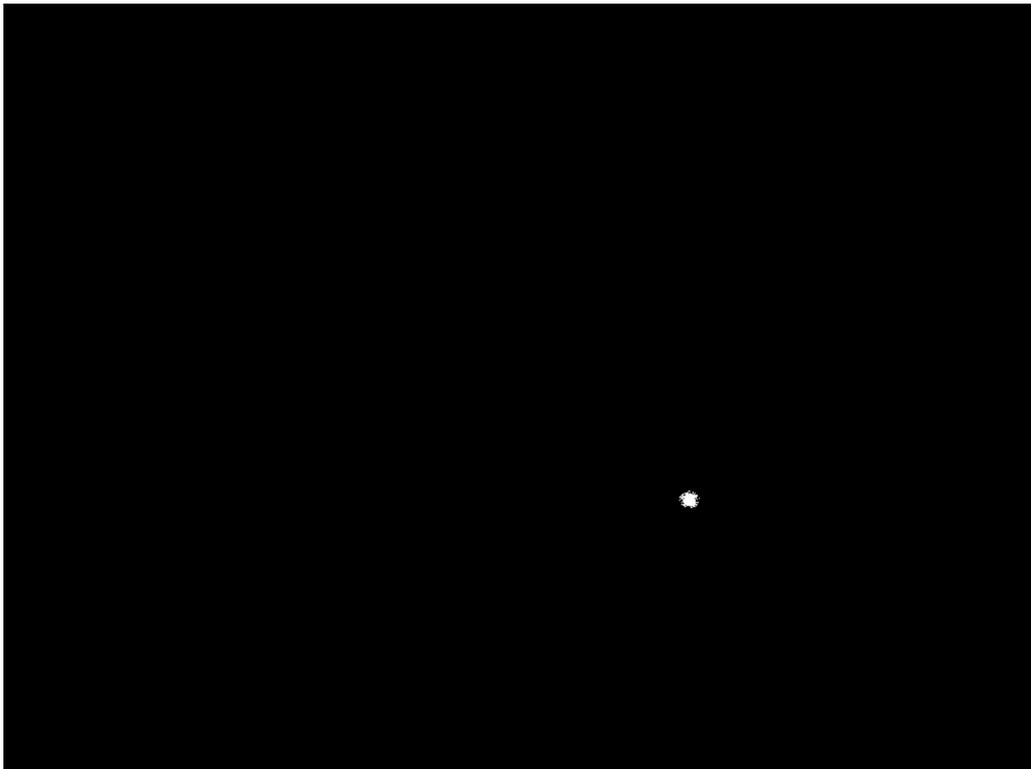
Las líneas 17 a 19 llevan a definir una imagen binaria (*iBW*) donde se identifican como unos (blancos en la imagen) a los píxeles con componente verde mayor a *iGTh* y cero al resto (negro en la imagen). El valor del *threshold* se obtiene mediante como la componente más elevada de verde que tenga la imagen menos un parámetro variable que se calibra previamente, lo que se explica en la Subsección A.8. Un ejemplo de la imagen binarizada que se debe obtener se muestra en la Figura 70.

```

1 function [cF] = track_laser_new (iRGB, parTh1, parTh2)
2
3     iG = iRGB(:,:,2);
4     iR = iRGB(:,:,1);
5     iB = iRGB(:,:,3);
6
7     for i = 1:length(iB(:))
8         iProp = iG(i) / (iG(i) + iR(i) + iB(i));
9         if iProp < 0.45
10            iG(i) = 0;
11        end
12        if iB(i) > 200
13            iG(i) = 0;
14        end
15    end
16
17    iGMax = max (iG(:));
18    iGTh = im2double (iGMax - parTh1);
19    iBW = imbinarize (iG,iGTh);
20
21    rProps = regionprops ('table', iBW, 'Area', 'BoundingBox');
22    [~, i] = max (rProps.Area);
23    box = rProps.BoundingBox (i, :);
24
25    iRGB = imcrop (iRGB, box);
26    iG = iRGB(:,:,2);
27    iR = iRGB(:,:,1);
28    iB = iRGB(:,:,3);
29    for i = 1:length(iB(:))
30        iProp = iG(i) / (iG(i) + iR(i) + iB(i));
31        if iProp < 0.45
32            iG(i) = 0;
33        end
34        if iB(i) > 200
35            iG(i) = 0;
36        end
37    end
38    igF = im2double(iG);
39
40    igFMax = max (igF ());
41    igFTh = igFMax - parTh2 / 256;
42    iBW = imbinarize (igF, igFTh);
43
44    rProps = regionprops ('table', iBW, igF, 'Area', 'WeightedCentroid');
45    [~, i] = max (rProps.Area);
46    cF = rProps.WeightedCentroid (i, :) + box (1 : 2);
47
48    end

```

Figura 69: Código de la función auxiliar track\_laser\_new



**Figura 70:** Ejemplo primera imagen *iBW* obtenida en el código *track\_laser\_new*

Las líneas 21 a 23 obtienen en que región (o *box*) se encuentra el láser, discerniéndolo cómo el elemento de mayor tamaño dentro de *iBW*. Luego, la línea 25 recorta la imagen de entrada para que solo se represente la sección que contiene al láser.

Las líneas 26 a 37 extraen las componentes verde, roja y azul de la imagen recortada y lleva a cero la componente verde de los píxeles con menos de 45% de verde y aquellos con una componente azul mayor a 200. Luego, en la línea 38, se extra una imagen *greyscale* de la componente verde de la imagen recortada modificada.

Las líneas 40 a 42 cambian la imagen *iBW* a una imagen binarizada que surge a partir de la imagen recortada modificada y considerando el *threshold* como una función dependiente del parámetro variable *parTh2* (un ejemplo de como debe de resultar esta imagen se muestra en la Figura 71). Este parámetro se calibra previamente y se explica en la Subsección A.9.

Finalmente, las líneas 44 a 46 extraen las coordenadas del centro del láser a partir de *iBW* y se las lleva a las coordenadas que representarían en la imagen original. Esto se logra mediante la suma de las coordenadas obtenidas y de las coordenadas del punto inferior izquierdo de la región utilizada para recortar la imagen.



Figura 71: Ejemplo imagen final *iBW* obtenida en el código *track\_laser\_new*

#### A.4. Función auxiliar: *extrinsic\_trans\_step\_new*

La función auxiliar *extrinsic\_trans\_step\_new* devuelve una transformación proyectiva y una imagen a color a partir de una imagen a color, valores de coordenadas horizontal y vertical, el diámetro de los puntos rojos y el parámetro variable *parTh*. La imagen de salida es tal que se le aplicó la transformada proyectiva a la de entrada y se la recorta para que se muestre solo la ventana donde están los puntos rojos. El código de la función auxiliar se muestra en la Figura 72.

La línea 3 de la función establece las distancias que deben tener entre sí los puntos rojos para representar fielmente la realidad, lo que se hace con los parámetros de entrada *sx* y *sy*. Es preciso resaltar que el programa lee las imágenes con un giro de  $90^\circ$  antihorario con respecto a cómo esta fue tomada, y, por ende, la coordenada horizontal será la posición en vertical y viceversa. Las líneas 4 a 6, por su parte, determinan el tamaño de la imagen de entrada.

La línea 8 llama a la función auxiliar *track\_points\_new* para poder obtener las propiedades de los puntos rojos y así determinar el espacio comprendido entre ellos. Esto último se realiza con el código de las líneas 10 a 15.

Luego, en las líneas 17 a 22, se calcula cuál es la transformación proyectiva a realizarse para poder procesar la imagen de entrada de tal manera que las distancias entre los centros de los puntos rojos se correspondan con las ingresadas teóricas. Una vez obtenida la transformación proyectiva *tform*, se transforma la imagen de entrada y el rectángulo que contiene a los puntos rojos. Esto se realiza en las líneas 24 a 26.

Finalmente, en las líneas 28 a 36, se calcula el rectángulo modificado y se recorta la imagen de entrada en base a este con un margen en todas las direcciones.

```

1 function [tform, iRGB] = extrinsic_trans_step_new (iRGB, sx, sy, d, parTh)
2
3     fixedPoints = [0 0; sx 0; sx sy; 0 sy];
4     [sizeOY, sizeOX, ~] = size (iRGB);
5     boxOX = [0; sizeOX; sizeOX; 0];
6     boxOY = [0; 0; sizeOY; sizeOY];
7
8     [rProps, iPoints] = track_points_new (iRGB, parTh);
9
10    rProps.BoundingBox (:, 3:4) = rProps.BoundingBox (:, 1:2) + ...
11                                rProps.BoundingBox (:, 3:4);
12    box1Min = min (rProps.BoundingBox (:, 1:2));
13    box1Max = max (rProps.BoundingBox (:, 3:4));
14    box1X = [box1Min(1); box1Max(1); box1Max(1); box1Min(1)];
15    box1Y = [box1Min(2); box1Min(2); box1Max(2); box1Max(2)];
16
17    distX = max (rProps.Centroid (:, 1)) - min (rProps.Centroid (:, 1));
18    distY = max (rProps.Centroid (:, 2)) - min (rProps.Centroid (:, 2));
19    dist = [distX distY];
20    fixedPoints = max (dist ./ (max(fixedPoints) - min(fixedPoints))) * ...
21                    fixedPoints;
22    tform = fitgeotrans (rProps.Centroid, fixedPoints, 'projective');
23
24    iRGB = imwarp (iRGB, tform);
25    [boxTX, boxTY] = transformPointsForward(tform, boxOX, boxOY);
26    [box2X, box2Y] = transformPointsForward(tform, box1X, box1Y);
27
28    boxTXMin = min (boxTX); boxTYMin = min (boxTY);
29    box2XMin = min (box2X); box2YMin = min (box2Y);
30    box2XMax = max (box2X); box2YMax = max (box2Y);
31    box2 = [(box2XMin - boxTXMin) (box2YMin - boxTYMin) ...
32            (box2XMax - boxTXMin) (box2YMax - boxTYMin)];
33    marginX = d / sx * (box2XMax - box2XMin);
34    marginY = d / sy * (box2YMax - box2YMin);
35    box2 = box2 + [- marginX / 2, - marginY / 2, marginX, marginY];
36    iRGB = imcrop (iRGB, box2);
37
38    end

```

Figura 72: Código de la función auxiliar `extrinsic_trans_step_new`

## A.5. Función auxiliar: `extrinsic_trans_new`

La función auxiliar `extrinsic_trans_new` (cuyo código se muestra en la Figura 73) itera el procedimiento de la función `extrinsic_trans_step_new` hasta que el error máximo obtenido es menor a un valor dado en la línea 4 o se itera, como máximo, la cantidad de veces establecida en la línea 3.

Como consecuencia de ser una función que itera otra, `extrinsic_trans_new` tiene los mismos argumentos de entrada que la función que itera: una imagen a color, valores de coordenadas horizontal y vertical, el diámetro de los puntos rojos y el parámetro variable `parTh`.

```

1 function [iRGB] = extrinsic_trans_new (iRGB, sx, sy, d, parTh)
2
3     iteMax = 5;
4     errMax = 10 ^ (-3);
5
6     [tform, iRGB] = extrinsic_trans_step_new (iRGB, sx, sy, d, parTh);
7     errM = abs (tform.T (1:2, 1:2) - eye(2));
8     err = max (errM (:));
9     ite = 1;
10
11 while (err >= errMax) && (ite < iteMax)
12     [tform, iRGB] = extrinsic_trans_step_new (iRGB, sx, sy, d, parTh);
13     errM = abs (tform.T (1:2, 1:2) - eye(2));
14     err = max (errM (:));
15     ite = ite + 1;
16 end
17
18 end

```

Figura 73: Código de la función auxiliar `extrinsic_trans_new`

## A.6. Función auxiliar: `track_image_new`

La función auxiliar `track_image_new`, mediante el uso de otras funciones auxiliares ya descritas, devuelve las coordenadas de los puntos rojos y del láser. Para esto toma como argumentos de entrada una imagen a color, los valores de coordenadas horizontal y vertical, el diámetro de los puntos rojos y los parámetros variables `parTh`, `parTh1` y `parTh2`.

```

1 function [c, laser, points, iRGB, flag, iPoints, iLaser] = track_image_new (iRGB, sx, sy, d, ...
2     parTh, parTh1, parTh2)
3
4     flag = 0;
5     fixedPoints = [0 0; sx 0; sx sy; 0 sy];
6
7     try
8         load cameraParams.mat cameraParams
9         iRGB = undistortImage (iRGB, cameraParams, 'OutputView', 'valid');
10
11     catch
12         flag = 1;
13     end
14
15     [iRGB] = extrinsic_trans_new (iRGB, sx, sy, d, parTh);
16
17     [rProps, iPoints] = track_points_new (iRGB, parTh);
18     points = rProps.Centroid;
19
20     [laser, iLaser] = track_laser_new (iRGB, parTh1, parTh2);
21     tform = fitgeotrans (points, fixedPoints, 'projective');
22     [c(1), c(2)] = transformPointsForward(tform, laser(1), laser(2));
23
24     end

```

Figura 74: Código de la función auxiliar `track_image_new`

La línea 5 define las distancia que debe haber entre los puntos rígidos en base a los argumentos de entrada.

Las líneas 7 a 13 cargan los parámetros intrínsecos de la cámara, que fueron calibrados previamente como se desarrolló en Subsección A.1, y se aplica el procesamiento a la imagen de entrada para corregir las distorsiones intrínsecas que genera. En el caso de que no se puedan cargar los susodichos parámetros, la función seguirá corriendo con normalidad pero el argumento *flag* (introducido en la línea 4 con valor 0) tendrá valor 1 para alertar de la situación.

Luego, en la línea 15 se corrigen los parámetros extrínsecos a la cámara con la ya vista función *extrinsic\_trans\_new* para después utilizar la imagen de retorno como argumento de entrada en las funciones *track\_points\_new* y *track\_laser\_new*. Estas últimas dos funciones se usan para encontrar las posiciones de los puntos rojos y el láser en las líneas 17 a 18 y 20 a 22 respectivamente.

### A.7. Función auxiliar: *calib\_parTh*

La función auxiliar *calib\_parTh* (cuyo código se muestra en la Figura 75), a partir de una imagen de color y un valor inicial del parámetro *parTh*, devuelve el parámetro adaptado para que sea óptimo para las imágenes a procesar.

```
1 function [parTh] = calib_parTh (iRGB, parTh)
2
3     check = 0;
4
5     while check == 0
6         [rProps, iBW] = track_points_new(iRGB,parTh);
7         figure,imshow(iBW)
8         check = input('check=');
9         if check == 0
10            parTh = input('Poner nuevo parTh=');
11        end
12    end
13
14 end
```

Figura 75: Código de la función auxiliar *calib\_parTh*

La función define, en la línea 3, la variable *check* como cero e itera hasta que esta variable cambié de valor.

La iteración mostrada en las líneas 5 a 12 llama a la función *track\_points\_new* para poder mostrar la imagen binaria final (línea 7) y que está pueda ser analizada para ver si el parámetro es adecuado. Si lo es, se debe marcar *check* como 1 y se termina de iterar, si no lo es, se lo marca como cero. En este momento el programa pedirá el nuevo valor de *parTh* y se lo debe ingresar para continuar la iteración.

Un aumento del parámetro *parTh* genera que más píxeles tengan un valor tal que queden por encima del *threshold* y una disminución del mismo genera el efecto contrario. Se debe

tener esto en consideración al momento de la elección del nuevo *parTh* en la iteración. Se debe buscar un valor de *parTh* tal que la imagen *iBW* que se grafica sea similar a la mostrada en la Figura 68.

## A.8. Función auxiliar: *calib\_parTh1*

La función auxiliar *calib\_parTh1* (cuyo código se muestra en la Figura 76), a partir de una imagen de color y un valor inicial del parámetro *parTh1*, devuelve el parámetro adaptado para que sea óptimo para las imágenes a procesar y una imagen binarizada. Este último argumento de salida es necesario para el procesamiento de la función auxiliar *calib\_parTh2*.

```
1 function [parTh1, iBW] = calib_parTh1 (iRGB, parTh1)
2
3     iG = iRGB(:,:,2);
4     iR = iRGB(:,:,1);
5     iB = iRGB(:,:,3);
6
7     for i = 1:length(iB(:))
8         iProp = iG(i) / (iG(i) + iR(i) + iB(i));
9         if iProp < 0.45
10            iG(i) = 0;
11        end
12        if iB(i) > 200
13            iG(i) = 0;
14        end
15    end
16
17    iGMax = max (iG(:));
18
19    check = 0;
20
21    while check == 0
22        iGTh = im2double (iGMax - parTh1);
23        iBW = imbinarize (iG,iGTh);
24        figure, imshow(iBW)
25        check = input('check=');
26        if check == 0
27            parTh1 = input('Poner nuevo parTh1=');
28        end
29    end
30    end
```

Figura 76: Código de la función auxiliar *calib\_parTh1*

Esta función trabaja de manera similar al comienzo de la función *track\_laser\_new* ya que tiene como objetivo poder calibrar el parámetro *parTh1* usado en esta. Se busca, mediante un proceso iterativo, que la imagen *iBW* sea parecida a la mostrada en la Figura 70.

Las líneas 3 a 5 extraen las componentes roja, verde y azul de la imagen de entrada para

luego, en las líneas 7 a 15, llevar a 0 la componente verde si se cumple alguna de las dos siguientes condiciones:

1. La proporción de la componente verde es menor a 45 % (líneas 8 a 11).
2. La componente azul es mayor a 200, con máximo de 255 (líneas 12 a 14).

Luego, se realiza una iteración mientras que la variable *check* (definida en la línea 19 como 0) siga siendo cero. Esta iteración obtiene un *threshold*, a partir de la componente verde máxima (definida en la línea 17) y el parámetro *parTh1*, con el cual se binariza la imagen *greyscale* a partir de *iG*.

Una vez obtenida la imagen *iBW*, esta se grafica y se pide que se cambie o mantenga el valor de *check* de acuerdo a si *iBW* está apta para continuar con el procesado. En caso negativo, se pedirá que se ingrese el nuevo valor del parámetro *parTh1*.

Un aumento de *parTh1* implica un aumento del *threshold*, y, consecuentemente, una disminución de los puntos que quedan como 1 en *iBW*. En caso de disminución de *parTh1*, sucede lo contrario.

## A.9. Función auxiliar: *calib\_parTh2*

La función auxiliar *calib\_parTh1* (cuyo código se muestra en la Figura 77), a partir de una imagen de color, una imagen binaria (*iBW*) y un valor inicial del parámetro *parTh2*, devuelve el parámetro adaptado para que sea óptimo para las imágenes a procesar.

Al igual que la función *calib\_parTh1*, esta función opera de manera similar a la función *track\_laser*, con la diferencia de que esta función es similar a la parte final de *track\_laser* y no al comienzo de la misma.

En primer lugar, en las líneas 3 a 5, se encuentra el rectángulo en el cuál está contenido el láser dentro de la imagen. Esto se hace en el entendimiento de que el láser es el elemento más grande que se encuentra en la imagen binaria *iBW*.

Una vez obtenido el rectángulo que contiene el láser, se recorta la imagen a color de entrada (línea 7) y se extraen las componentes roja, verde y azul de la imagen recortada (líneas 8 a 10). Al igual que ya fue descrito anteriormente, se modifica la componente verde llevando a cero los píxeles con menos de 45 % de verde y/o más de 200 (sobre 255) de azul (líneas 11 a 19).

En las líneas 23 a 31 se realiza una iteración de calibración del parámetro *parTh2*. La iteración concluye cuando la variable *check* (descrita en la línea 21 como cero) deje de tener un valor nulo.

```

1 function [parTh2] = calib_parTh2 (iRGB, iBW, parTh2)
2
3 rProps = regionprops ('table', iBW, 'Area', 'BoundingBox');
4 [~, i] = max (rProps.Area);
5 box = rProps.BoundingBox (i, :);
6
7 iRGB = imcrop (iRGB, box);
8 iG = iRGB(:,:,2);
9 iR = iRGB(:,:,1);
10 iB = iRGB(:,:,3);
11 for i = 1:length(iB(:))
12     iProp = iG(i) / (iG(i) + iR(i) + iB(i));
13     if iProp < 0.45
14         iG(i) = 0;
15     end
16     if iB(i) > 200
17         iG(i) = 0;
18     end
19 end
20
21 check = 0;
22
23 while check == 0
24     igFTh = igFMax - parTh2/256;
25     iBW = imbinarize (igF,igFTh);
26     figure,imshow(iBW)
27     check = input('check=');
28     if check == 0
29         parTh2 = input('Poner nuevo parTh2=');
30     end
31 end
32
33 end

```

Figura 77: Código de la función auxiliar `calib_parTh2`

En las líneas 24 a 26 se obtiene una nueva imagen binarizada a partir de la componente verde modificada de la imagen recortada tomando como *threshold* un valor derivado del máximo valor de verde en la imagen recortada y del parámetro *parTh2*.

Posteriormente, se grafica *iBW* y se pide que se introduzca el valor de *check*. Aquí se introduce un valor no nulo si la imagen es adecuada para continuar el procesamiento (similar a la mostrada en la Figura 71) y 0 si se debe continuar iterando. En el segundo caso, se pedirá un nuevo valor de *parTh2* para seguir realizando la iteración con este valor.

## A.10. Función auxiliar: `cal_param`

La función `cal_param` (cuyo código se muestra en la Figura 78) aglomera las 3 funciones auxiliares de calibración de parámetros (*parTh*, *parTh1* y *parTh2*) y devuelve los parámetros calibrados. Para esto necesita, como argumentos de entrada, la imagen a color a procesar y los valores iniciales de los 3 parámetros.

Las funciones llamadas son *calib\_parTh* (línea 3), *calib\_parTh1* (línea 5) y *calib\_parTh2* (línea 7), que calibran *parTh*, *parTh1* y *parTh2* respectivamente.

```

1 function [parTh, parTh1, parTh2] = cal_param(iRGB,parTh, parTh1, parTh2)
2
3 parTh = calib_parTh(iRGB,parTh);
4
5 [parTh1,iBW] = calib_parTh1 (iRGB, parTh1);
6
7 parTh2 = calib_parTh2 (iRGB, iG, iBW, parTh2);
8
9 end

```

Figura 78: Código de la función auxiliar *cal\_param*

### A.11. *Script* principal: processing

El *script processing* tiene como finalidad obtener la posición del láser con respecto a los puntos rojos para cada una de las imágenes a analizar. El código del *script* se muestra en la Figura 79.

```

1 folder = 'Imagenes';
2 scale = 1;
3 sx = scale * 79.6;
4 sy = scale * 49.7;
5 d = scale * 10.3;
6
7 parTh = 1.8;
8 parTh1 = 40;
9 parTh2 = 50;
10
11 folderInfo = dir (strcat (folder, '/*.jpg'));
12 fileN = size (folderInfo, 1);
13
14 c = zeros (fileN, 2);
15 laser = zeros (fileN, 2);
16 points = zeros (4, 2, fileN);
17 check = 0;
18 imcal = strcat (folder, '/', folderInfo(1).name);
19 imcal = imread (imcal);
20 [parTh, parTh1, parTh2] = cal_param(imcal,parTh, parTh1, parTh2);
21
22 tic
23 parfor i = 1 : fileN
24     filename = strcat (folder, '/', folderInfo(i).name);
25     image = imread (filename);
26     [c(i, :), laser(i, :), points(:, :, i)] = ...
27         track_image_new (image, sx, sy, d, parTh, parTh1, parTh2);
28     fprintf ('Archivo %d de %d procesado\n', i, fileN);
29 end
30 toc
31
32 clear i filename image

```

Figura 79: Código del *script* principal processing

Entre las líneas 1 y 9 se definen argumentos básicos:

- Línea 1: el directorio (carpeta) desde donde se extraerán las imágenes a procesar.
- Línea 2: la escala a utilizar para las medidas. Una escala de uno devuelve las medidas en milímetros.
- Líneas 3 a 5: los valores de las distancias vertical y horizontal entre centros de los puntos rojos y el diámetro de los mismos. El valor se introduce en milímetros y luego se multiplica por la escala.
- Líneas 7 a 9: los parámetros *parTh*, *parTh1* y *parTh2*, por defecto que se calibrarán posteriormente.

Las líneas 11 y 12 definen que se buscará para procesar, dentro de la ya descrita carpeta, los archivos guardados como *.jpg* y el número *fileN*, que tendrá la misma cantidad de filas que archivos a procesar se hayan leído.

Las líneas 14 a 16 definen el tamaño de los elementos que se irán completando con los datos obtenidos de cada imagen a procesar. Inicialmente, todas estas matrices son nulas.

Las líneas 18 y 19 extraen la primera imagen a procesar para poder usarla como base para los procesos de iteración para calibrar los parámetros definidos en las líneas 7 a 9. Esto se realiza en la línea 20.

Finalmente, en las líneas 23 a 29, se leen una por una las imágenes a procesar y se aplica la función *track\_image\_new* para obtener los datos deseados. El programa devuelve el tiempo transcurrido para procesar todos los archivos y quedan almacenadas, en el elemento *c*, las coordenadas del láser en todas las imágenes.

## B. Desarrollo de la solución de los SDOF amortiguados

Como ya se describió en la Ecuación 14, la ecuación que gobierna un SDOF depende de 4 parámetros:

1. La masa:  $m$
2. La constante elástica:  $k$
3. La constante de amortiguamiento:  $c$
4. Esfuerzos dependientes del tiempo:  $p(t)$  [5, 15]

### B.1. Sistemas no amortiguados de vibración libre

En el caso de sistemas de vibración libre sin amortiguamiento, como lo describen Spalvier [15] y Ewins [5], esta ecuación se puede reducir a:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (40)$$

Las soluciones periódicas a la Ecuación 40 dependen de la frecuencia angular de vibración del sistema  $\omega$  (que en este caso es igual a la frecuencia natural angular del sistema  $\bar{\omega}_1 = \sqrt{k/m}$ ). Estas soluciones se presentan en la donde  $x_0$  es una constante compleja dependiente de las condiciones iniciales. [5, 15]

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t} \quad (41)$$

Se debe notar que la frecuencia angular  $\omega$  y la frecuencia  $f$  del sistema están relacionadas por un factor de  $2\pi$ , como se muestra en la Ecuación 42. [15]

$$\omega = 2\pi f \quad (42)$$

### B.2. Sistemas no amortiguados de vibración forzada

Cuando se tiene una vibración forzada periódica no amortiguada dada con frecuencia de forzado  $\Omega$  dada por la Ecuación 43, se tiene que la solución del sistema es la representada en la Ecuación 44. Es preciso remarcar que tanto  $x_0$  como  $p_0$  son constantes complejas. [15]

$$p(t) = p_0 e^{i\Omega t} \quad (43)$$

$$x(t) = x_0 e^{i\Omega t} \quad (44)$$

Definiendo la *receptancia* como  $R = x_0/p_0$ , se tiene que es usual caracterizar las funciones de respuesta frecuencial (FRF) por esta. En este caso, se tiene que la FRF es la dada por la

Ecuación 45. [15]

$$R(\Omega) = \frac{x_0}{p_0} = \frac{1}{k - \Omega^2 m} \quad (45)$$

### B.3. Sistemas amortiguados de vibración libre

Para sistemas amortiguados de vibración libre, el análisis de la ecuación que gobierna el sistema es la dada por la Ecuación 46. Esta depende de la tasa de amortiguamiento  $\alpha = \xi \bar{\omega}_1$  (donde  $\xi = c/2(\sqrt{km})$ ) y de la frecuencia angular natural del sistema  $\omega'_1 = \bar{\omega}_1 \sqrt{1 - \xi^2}$ . [15]

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t} e^{i\omega'_1 t} \quad (46)$$

Esta solución de modo singular de vibración tiene una frecuencia natural compleja compuesta por dos partes:

1. Imaginaria u oscilatoria: una frecuencia  $\omega_0$
2. Real o decaimiento: una razón de amortiguamiento  $\xi$ . [5]

Adicionalmente, como la razón de amortiguamiento  $\xi$  tiende a ser mucho menor que 1 para vigas de madera aserrada (en el entorno de 0,005-0,02 [10]), la frecuencia de vibración natural del sistema ( $\omega'_1$ ) es ligeramente menor que la de un sistema no amortiguado ( $\bar{\omega}_1$ ). [15]

### B.4. Sistemas amortiguados de vibración forzada

Cuando los sistemas SDOF se ven forzados por una fuerza de la forma descrita en la Ecuación 43, la receptancia de la FRF es compleja y dada por la Ecuación 47. [15]

$$R(\Omega) = \frac{1}{(k + \Omega^2 m) + i\Omega c} \quad (47)$$

$$|R(\Omega)| = \frac{|x_0|}{|p_0|} = \frac{1}{\sqrt{(k - \Omega^2 m)^2 + (\Omega c)^2}} \quad (48)$$

Consecuentemente, tanto la receptancia como la respuesta tienen máximos cuando  $\Omega = \omega'_1$ . No obstante, a diferencia del caso sin amortiguamiento, la receptancia y la respuestas no tienden a infinito. [15]

## C. Desarrollo de la solución de los MDOF no amortiguados

### C.1. Sistemas no amortiguados de vibraciones

Cuando se tienen sistemas MDOF no amortiguados de vibración libre, con el vector posición escrito de la forma presentada en la Ecuación 18, se puede reducir la ecuación general de movimiento a la presentada en la Ecuación 49. [5, 15]

$$([K] - \omega^2 [M]) \{x_0\} e^{i\omega t} = 0 \quad (49)$$

Las únicas soluciones no triviales a este sistema se encuentran dadas por las soluciones a la ecuación en donde el determinante del primer término se iguala a cero (Ecuación 50). De aquí se obtienen las  $N$  frecuencias naturales del sistema no amortiguado  $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_N)$ . [15]

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (50)$$

Las  $n$ -ésima forma modal  $(\psi_1)$  del sistema se obtiene sustituyendo en la Ecuación 49 la frecuencia natural a la cual está asociada  $(\bar{\omega}_n)$ . La solución completa puede expresarse, entonces, como dos matrices diagonales de dimensiones  $N \times N$ ; una conteniendo las frecuencias naturales y otra conteniendo las descripciones de sus formas modales correspondientes. [5, 15]

### C.2. Sistemas no amortiguados de vibración forzada

Cuando se tiene a los sistemas no amortiguados se les considera una vibración forzada de la forma descrita en la Ecuación 19, se puede reescribir la ecuación que gobierna el sistema de manera que los vectores  $\{x_0\}$  y  $\{p_0\}$  se relacionen a través de una matriz cuyos coeficientes son funciones de la frecuencia  $\omega$ . Esta relación se muestra en la Ecuación 51. [5]

$$\{x_0\} = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} \{p_0\} \quad (51)$$

De la Ecuación 51 se deduce que la FRF, a la que se notara para MDOF como  $[\alpha(\omega)]$ , tiene la forma expuesta en la Ecuación 52. Cada elemento de esta matriz se obtiene de la forma que muestra la Ecuación 53. [5]

$$[\alpha(\omega)] = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} \quad (52)$$

$$\alpha_{jk} = \left( \frac{\{x_0\}_j}{\{p_0\}_k} \right) \quad (53)$$

### C.3. Propiedades Ortogonales

Los modelos modales cuentan con propiedades (propiedades ortogonales) que son de gran relevancia: masa modal ( $[m_n]$ ) y rigidez modal ( $[k_n]$ ). Estas se definen mediante las matrices de masa y rigidez y el vector que describe la forma modal de cada modo de vibración de un sistema. Se definen mediante la Ecuación 54 y la Ecuación 55 respectivamente. [5]

$$[\Psi]^T [M] [\Psi] = [m_n] \quad (54)$$

$$[\Psi]^T [K] [\Psi] = [k_n] \quad (55)$$

Como la matriz de vectores propios se encuentra sujeta a un factor de escala arbitrario, los valores de  $m_n$  y  $k_n$  no son únicos. Lo que si es único, independientemente del factor de escala utilizado, es el valor del cociente  $k_n/m_n$ , que coincide con el valor propio  $\bar{\omega}_n^2$ . El proceso de normalización de estos valores más relevante es el de **normalización de masa**. Los vectores de normalización de masa ( $[\Phi]$ ) cumplen la propiedad mostrada en la Ecuación 56 (la Ecuación 57 es un corolario de esto). [5]

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (56)$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\bar{\omega}_n^2] \quad (57)$$

### C.4. Sistemas con amortiguamiento estructural de vibración forzada

Para el análisis de los sistemas MDOF con amortiguamiento estructural de vibración forzada se considerará la ecuación que gobierna el sistema como se presenta en la Ecuación 58 y a la matriz de amortiguamiento  $[D]$  como se define en la Ecuación 59. [5]

$$[M] \{\ddot{x}\} + ([K] + i[D]) \{x\} = \{p\} \quad (58)$$

$$[D] = \beta [K] + \gamma [M] \quad (59)$$

Si se realiza el mismo análisis que se realizó para el caso no amortiguado para el caso sin excitación con una solución de la forma  $\{x\} = \{x_o\}e^{i\omega t}$ , se puede obtener que los valores propios solución del problema complejo son dependientes de la frecuencia natural  $\omega$  y del factor de pérdida por amortiguamiento  $\eta$ ; la expresión para el  $n$ -ésimo valor propio se muestra en la Ecuación 60.[5]

$$\lambda_n^2 = \omega_n^2(1 + \eta_n) \quad (60)$$

$$\eta_n = \beta + \gamma/\omega_n^2 \quad (61)$$

Cuando el sistema es forzado, se diferencian los valores propios  $\lambda_n$  de los del caso sin excitación en que ahora depende de la frecuencia de vibración natural del sistema  $\bar{\omega}_n$  en lugar de la frecuencia natural de vibración del sistema no amortiguado  $\omega_n$ . [5]

Bajo estas circunstancias se tiene que la matriz de FRF  $[\alpha(\omega)]$  tiene coeficientes definidos por la fórmula explicitada en la Ecuación 62. [5]

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{\{\psi_j\}_n \{\psi_k\}_n}{(k_r - \omega^2 m_n) + i\eta_n k_n} \quad (62)$$