BELLEZA DE LA MATEMÁTICA

Introducción

El matemático Denis POISSON (1781 – 1840) escribió, en un momento de euforia y entusiasmo:

"La vida es buena únicamente por dos cosas: descubrir matemáticas y enseñar matemáticas"

Esta reflexión hará sonreír a la mayoría de los lectores de estas notas, encontrando que la frase es de un fanatismo realmente exagerado. Sin embargo, debe tenerse en cuenta la fecha en que fue expresada, o sea en un tiempo en que el mundo no ofrecía los atractivos con los cuales convivimos en el mundo moderno: facilidad de la comunicación, facilidad de viajar para conocer otros lugares, acceso a la música y al cine, el impresionante mundo que ofrece Internet, etc., etc.. La gente no podía disfrutar de todas esas ventajas y, si alguien tenía la suerte de ser aficionado a una actividad creativa que le llenaba la existencia, como por ejemplo la pintura, la música, la escritura, la ciencia, etc., se trasformaba fácilmente en un fanático de esa actividad. Por supuesto hoy en día también, una persona creativa se vuelve obsesionada con su actividad, pero la toma como una motivación personal y no se anima a enunciar una frase tan categórica y tan general.

En esta introducción, expresaré una idea que siempre me ha causado gran asombro y que se relaciona con mi amor a la Matemática. He comprobado, una gran cantidad de veces, que personas supuestas "cultas", a menudo egresadas universitarias, confiesan con orgullo, cuando se habla de las Matemáticas, que nunca entendieron nada acerca de esa disciplina cuando tuvieron que aprender algo en los cursos obligatorios que tuvieron que recibir (por ejemplo en la enseñanza secundaria) y tampoco les interesó en lo más mínimo. Repito que , con orgullo y con cierto desprecio, se vanaglorian de su ignorancia y creen que la Matemática, solamente enseña a realizar "cuentas", como cuando les enseñaron a sumar, restar, etc.. Por otro lado, se burlan de alguien que no sabe responder si se le pregunta quien fue el autor de "Hamlet" o quien escribió "Don Quijote de la Mancha" o quien era Beethoven, riéndose de la ignorancia de su interlocutor. Sin embargo, si Vd. le pregunta al que se rió y se cree tan "culto" qué es lo que dice el teorema de Pitágoras o qué significa la "media aritmética" de un conjunto de números, Vd. se queda sin respuesta o , con orgullo, su interlocutor le dice alegremente que nunca entendió nada acerca

de lo que mencionaba el profesor. Me molesta mucho que esas personas tan "cultas" desprecien la ignorancia que comprobaron acerca de una pregunta de literatura o de música, no se dan cuenta que ellos también son "ignorantes" al desconocer algo tan simple relacionado con la Matemática.
Ellos creen que la Matemática consiste solamente en manejar rápidamente las operaciones aprendidas en la escuela primaria (sumar, restar, etc,). Por tal motivo, cuando se enteran que alguien es docente de Matemáticas, ellos le dicen: debes ser muy hábil con los "números", refiriéndose a las "cuentas" aprendidas en la escuela, pensando que ese docente debe ser muy rápido para el llamado "cálculo mental"; pero ellos ignoran que la Matemática que enseña ese docente no tiene mucho que ver con la rapidez mental que tenga para hacer las operaciones elementales.

1 – Resolviendo problemas

Los antiguos pensadores y filósofos griegos opinaban que las matemáticas despiertan la mente y purifican el intelecto, dan vida a nuestras ideas y destierran la ignorancia con la cual nacemos....En mi caso, confieso que amo las Matemáticas porque me producen diversión y alegría. En cierto modo y, expresando mi opinión con cierta cursilería, me invocan formas invisibles del alma.

¿En qué momento se agudizan esas sensaciones? Obviamente cuando se logra resolver un problema, originado a veces en la vida real, que a primera vista parece difícil e inaccesible. Descubrí esa pasión ya en mis años jóvenes, cuando realizaba mis primeros aprendizajes en la enseñanza media, en particular cuando lograba encontrar una solución a algún desafío (especialmente en el área de la Geometría euclídea) que nos lanzaba un inolvidable profesor que me hizo descubrir el atractivo de las Matemáticas. Me resulta difícil transmitir la alegría que sentía cuando lograba llegar a la solución...

Como ejemplo de elegancia y sencillez de razonamiento, propongo este conocido resultado de la Geometría elemental:

Demostrar que las tres bisectrices de un triángulo son concurrentes

Esta simple propiedad, que para el iniciado en Geometría no es tan obvia, tiene una solución que forma parte de la belleza de las Matemáticas. Observe el lector la sencillez de este razonamiento:

Si el triángulo es ABC, sea I la intersección de las bisectrices de $\hat{A}$ y $\hat{B}$.

Por pertenecer a la bisectriz de $\hat{A}$, el punto I es equidistante de AB y AC; por pertenecer a la bisectriz de $\hat{B}$, el punto I es equidistante de AB y BC. Combinando ambas observaciones, I resulta equidistante de AC y BC; esto significa que I pertenece a la bisectriz de $\hat{C}$. De modo que las tres bisectrices son concurrentes (incidentalmente, I es el incentro de ABC).

Dejamos al lector que recuerde que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos semirrectas concurrentes es la bisectriz del ángulo formado por esas dos semirrectas y que refresque la muy elemental demostración de esa propiedad.

Deseo sugerir alguna estrategia para el lector que desee resolver algún problema que se le propone: además de comprender el problema, sus datos y su objetivo, recomendamos respetar estas dos sugerencias:

a) elegir una buena notación de los datos: mayúsculas, minúsculas, letras griegas, símbolos lógicos, etc.; de este modo, será más natural recordar fórmulas en que intervienen los datos y el manejo de los mismos resultará más familiar;
b) cuando el problema presenta una simetría respecto a ciertos datos del mismo, no deshacer esa simetría en el planteo ni en la búsqueda de la solución, porque de lo contrario aparecerán seguramente dificultades adicionales. Un ejemplo bien simple para ilustrar mi idea: se conoce la suma S y el producto p de dos números incógnitos x,y; no es recomendable plantear el sistema de las dos ecuaciones y resolverlo por ejemplo eliminando la y para hallar x; se hallarán dos parejas de números, (2,3) y (3,2) en el caso por ejemplo de S=5 y p=6, según el nombre (x o y) que se atribuya a cada uno de los números 2 y 3. Pero el problema sólo necesitaba hallar los números 2 y 3 sin importar el nombre de las incógnitas. Resulta mucho más simple y elegante plantear la ecuación $z^2 - Sz + p = 0$, que, al resolverla, nos dará directamente los dos números que responden al objetivo planteado. He dado este ejemplo para un problema excesivamente elemental para ilustrar en forma muy simple la idea que encierra mi recomendación. En el caso de un problema mucho más complejo y con muchos datos, reiteramos que es muy importante respetar toda simetría que aparezca respecto a determinadas variables del problema

2 – Algunas ideas que muestran la belleza de las Matemáticas

El lector debe tener en cuenta que, en general, la solución más elegante de un problema suele ser también la más simple. Siempre recuerdo la famosa anécdota relativa a la infancia de Gauss, que ese genio matemático gustaba de relatar en los años de su vejez: un sádico maestro de escuela pedía a sus pobres alumnos (entre los cuales estaba el niño Gauss de diez años de edad) que sumaran todos los números enteros del 1 al 100, haciéndolos competir para ser el primero en encontrar el resultado correcto. Ante el asombro del maestro, el niño Gauss, mientras sus compañeros sufrían realizando las interminables sumas, dio inmediatamente el resultado (5050), habiendo observado que en el conjunto ordenado del 1 al 100 dos números equidistantes de los extremos tenían siempre la misma suma (101); tratándose de 50 parejas, Gauss realizó inmediatamente la operación 50x101.

Tuve conocimiento de una situación, a mi juicio similar a la de esa anécdota, que se produjo en una clase moderna de enseñanza media: un docente de Matemáticas había introducido en sus clases los números complejos y su operatoria y propuso entonces a sus alumnos una prueba escrita con el siguiente problema: dos ciertos números complejos tienen suma 2 y producto 3; se pedía calcular la suma de los inversos de esos números. He aquí los pasos que el docente esperaba de sus alumnos, buscando así verificar si habían asimilado sus enseñanzas acerca de las operaciones con números complejos:

1) Llamando x, y a los complejos considerados, resolver el sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=3 \end{cases}$
2) Llegando a la ecuación resolvente $z^2 - 2z + 3 = 0$, cuyas raíces son obviamente imaginarias, resolverla hallando los números x, y.
3) Calcular los inversos de x e y, usando el método enseñado en clase según el cual, para realizar una división, debe emplearse el conjugado del divisor.
4) Sumar los dos inversos obtenidos.

Pero, ¡cuál fue el asombro del docente cuando uno de los alumnos, que no había escrito nada, le dijo que el resultado era 2/3 ! Ese alumno, evidentemente un joven muy bien dotado, se había percatado que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{2}{3}$. Sin pretender con esto compararlo con Gauss, es obvio que su astucia fue similar a la desplegada por Gauss en la anécdota citada.

He expuesto esas anécdotas para que el lector no pierda de vista lo que mencioné anteriormente: **muy a menudo, la solución más elegante de un problema es también la más simple.** Intento motivarlo así para que, en lo posible, reflexione sobre cada problema tratando de aplicar las propiedades más obvias y más simples, por ejemplo teniendo en cuenta de no deshacer la simetría del problema cuando éste presenta esa simetría y de emplear notaciones y símbolos que le resulten familiares, provenientes de la formación matemática que haya recibido en su pasado como estudiante.

Agrego una pequeña observación. Las matemáticas son también útiles en la vida cotidiana: hay personas que son adictas a juegos solitarios pero que no gustan de los juegos del tipo de las palabras cruzadas y prefieren los acertijos en los cuales deben aplicar, para salir victoriosos, sus aptitudes para razonar correctamente. Esos son en general acertijos que pueden provenir de situaciones de la vida cotidiana y les exigen, para resolverlos, aplicar razonamientos que contienen reflexiones de carácter lógico. Los enunciados son comprensibles para todos y en general no se requiere alguna base matemática; pero en algunos es necesario algo de matemática elemental. De todos modos, si se requiere o no alguna formación básica, es indispensable que el usuario tenga alguna aptitud para razonar lógicamente. Es naturalmente una gran ventaja estar habituado a razonar como lo hace al resolver un tema matemático..
Hay matemáticos profesionales que se han dedicado a los "pasatiempos" matemáticos y citaremos por ejemplo a Martín Gardner y a Adrián Paenza, cuyos libros pueden resultar muy entretenidos para los lectores que hayan tenido alguna familiaridad con las matemáticas.

3 – Los pilares de la Matemática

En este breve artículo sobre la belleza de la Matemática, no hemos podido ignorar a los grandes genios de la Historia que nos han permitido disfrutar de la belleza de sus descubrimientos, ya que gracias a ellos hemos conocido toda la parte básica en que se apoyan el Cálculo Infinitesimal, la Geometría, la Trigonometría, el Álgebra, la Aritmética, la Teoría Combinatoria, etc. y permiten a los matemáticos actuales lograr a hacer los formidables avances que se han producido en la Ciencia que tanto amamos y generar la famosa frase de Poisson que hemos evocado al principio de este artículo.

Cuando se evocan los hechos más relevantes en la historia de la Matemática, es bien sabido que ocupa un primerísimo lugar la mención a Newton y Leibniz como "inventores" del Cálculo Diferencial e Integral , en el siglo XVII. Esos dos grandes genios matemáticos nacieron en la misma época (Newton en 1642, Leibniz en 1646) y fallecieron en fechas cercanas (Newton en 1727, Leibniz en 1716). Isaac NEWTON nació y vivió en Inglaterra, mientras que Gotfried LEIBNIZ nació y vivió en Alemania. Pero , en realidad, el primero que utilizó métodos infinitesimales para obtener importantes aplicaciones en el cálculo de áreas de figuras curvilíneas y volúmenes de cuerpos limitados por superficies curvas fue …..el gran Arquímedes; éste declaró que seguramente sus descendientes formalizarían y darían rigor a esos métodos de cálculo, lo cual efectivamente se consolidó después de … ¡20 siglos! Pero, por supuesto, no deben sacarse méritos a Newton y Leibniz que, tantos años después de Arquímedes, fueron realmente los primeros en construir los pilares del Cálculo Infinitesimal. El azar (o el estado de avance de la Matemática en esos años) hizo que, en forma totalmente independiente, Newton (en Inglaterra) y Leibniz (en Alemania) obtuvieran esos avances espectaculares que son la base del Cálculo (no perder de vista la dificultad de las comunicaciones en aquellos años). Lamentablemente, nacionalismos mal aplicados produjeron grandes controversias acerca de cual de ellos era el verdadero creador…Un caso similar pero menos acentuado se dio con respecto al famoso triángulo de Pascal o de Tartaglia de Análisis Combinatorio (Pascal en Francia, Tartaglia en Italia…)

Por tales razones, he querido aquí simplemente mencionar algunos nombres que no pueden ser ignorados y que he elegido entre la numerosísima cantidad de los matemáticos de antaño y de tiempos cercanos, considerando los más representativos de su ciencia o los que fueron realmente genios creadores. Esa elección es una tarea muy incómoda ya que me he impuesto mencionar sólo 20 nombres, con las consecuentes limitaciones; seguramente, para algún lector versado, puede resultar inaceptable que en esta lista no aparezca algún nombre a su juicio muy importante; pido disculpas por esas omisiones pero no se tiene otra opción si se quiere presentar una lista limitada. He aquí los nombres que he retenido:

EUCLIDES – ARQUÍMEDES – DESCARTES – FERMAT- PASCAL –
NEWTON – LEIBNIZ – EULER - LAGRANGE – LAPLACE –
FOURIER – **GAUSS –** CAUCHY – ABEL – GALOIS –
WEIERSTRASS – RIEMANN – DEDEKIND – POINCARÉ – CANTOR

He destacado el nombre de Gauss porque ha sido considerado por sus colegas como "el Príncipe de los Matemáticos".
En nuestra época actual cito a los grandes profesionales como George Polya y Terence Tao, que a pesar de ser matemáticos de altísimo nivel han querido escribir, pensando en los estudiantes actuales, propuestas de problemas "elementales" y consejos sobre su resolución, que ayuden en la formación de los futuros matemáticos.

Me ha interesado profundamente conocer la historia de los genios matemáticos como seres humanos y no solamente por la importancia de sus creaciones. Como ya lo hemos dicho, entre las personas llamadas "cultas" se desprecia naturalmente a quien no conoce lo básico acerca de Cervantes, Shakespeare o Victor Hugo, pero muchas de esas personas "cultas" confiesan con orgullo (??) no saber de qué habla el teorema de Pitágoras o ignorar los nombres de Fermat, Euler o Gauss. La excusa que manejan es a menudo: "nunca entendí nada acerca de las matemáticas y tampoco sentí ningún interés en saber algo al respecto…", invocando naturalmente a sus tiempos de alumno escolar o liceal. No es necesario ser escritor profesional para conocer la existencia de los escritores mencionados, ni tampoco filósofo para tener una idea de lo que nos legaron Bergson, Poincaré o Bertrand Russell . Pero creo que los docentes de Matemáticas de la enseñanza media deberían recibir nociones sobre la evolución de la Matemática desde la antigüedad hasta nuestros días y ser informados acerca de los nombres más célebres; podrán así a su vez transmitir a sus alumnos por lo menos la nacionalidad de los grandes matemáticos y la época en que vivieron; esos nombres no pueden ser ignorados en una formación razonable de los aspirantes al Bachillerato, así como no pueden ser ignorados Cervantes o Shakespeare… Esta idea por supuesto se aplicaría a todas las áreas importantes de la Ciencia en general y no solamente a las Matemáticas.

En esta breve evocación de los pilares de la Matemática, no puedo dejar de mencionar que también la Matemática ha contribuido a encontrar las leyes que a su vez son los pilares de la Física y del conocimiento del Universo Con las limitaciones del caso, voy a recordar las 5 ecuaciones que han sido a menudo consideradas como las leyes que cambiaron el mundo y sobre las cuales se apoya la Física. Para cada una de esas ecuaciones, indicaremos el nombre del creador de la misma:

1) $F = g\frac{m_A m_B}{d^2}$ Ley universal de la gravedad (Isaac Newton)

2) $p + \mu gh + \frac{\mu}{2}v^2 =$ constante Ley de la presión hidráulica (Daniel Bernoulli)

3) $\nabla E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ Ley de la inducción electromagnética (Michel Faraday)

4) $\Delta Q_{universo} > 0$ Segunda ley de la Termodinámica (Rudolf Clausius)

5) $E = mc^2$ Ley de la Relatividad especial (Albert Einstein)

Finalmente, en este breve vistazo histórico de la Matemática, deseamos llamar la atención del lector acerca de un esfuerzo realizado por los matemáticos de nuestros días: ellos han creado una especie de "árbol genealógico" conteniendo los antecesores y los descendientes de un matemático individualizado por su nombre; naturalmente, se trata de un árbol "académico" y no "familiar". Ese árbol está disponible en nuestros días en un sitio de Internet. Si el lector es un matemático profesional, puede ingresar al árbol con su nombre y descubrir así sus "descendientes" (alumnos que lo han tenido como tutor en estudios de post-grado) y sus "antecesores". Sólo se puede ascender hasta aproximadamente el siglo XVII, pues para tiempos más remotos es muy difícil obtener información que relacione a los distintos matemáticos en actividades comunes.; pero quizás Vd. pueda descubrir que …¡es "descendiente" de Euler o de Lagrange! Es una experiencia emocionante, ¿verdad?

Ing. Isi HAIM