



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



FACULTAD DE
INGENIERÍA

Optimización estructural utilizando la derivada topológica y el método de los elementos finitos extendido

Santiago Matías Delgado Torres

Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural
Instituto de Estructuras y Transporte de la Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Junio de 2025



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



FACULTAD DE
INGENIERÍA

Optimización estructural utilizando la derivada topológica y el método de los elementos finitos extendido

Santiago Matías Delgado Torres

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural, Instituto de Estructuras y Transporte de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Ingeniería Estructural.

Director:

D.Sc. Prof. Alfredo Canelas Botta

Director académico:

D.Sc. Prof. Alfredo Canelas Botta

Montevideo – Uruguay

Junio de 2025

Delgado Torres, Santiago Matías

Optimización estructural utilizando la derivada topológica y el método de los elementos finitos extendido / Santiago Matías Delgado Torres. - Montevideo: Universidad de la República, Instituto de Estructuras y Transporte de la Facultad de Ingeniería, 2025.

XXXIII, 387 p.: il.; 29, 7cm.

Director:

Alfredo Canelas Botta

Director académico:

Alfredo Canelas Botta

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa en Ingeniería Estructural, 2025.

Referencias bibliográficas: p. 278 – 297.

1. Optimización estructural, 2. XFEM, 3. Derivada topológica. I. Canelas Botta, Alfredo, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Dr. Prof. Pablo Castrillo Green

Dr. Prof. Franz Chouly

D.Sc. Prof. Antonio André Novotny

Dr.Ing. Prof. Jorge Martín Pérez Zerpá

Dr. Prof. Gabriel Usera Velasco

Montevideo – Uruguay

Junio de 2025

Para el Abuelo Torres, por ser
una ejemplar persona en mi vida
sin quien no sería hoy quien soy

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mi tutor Alfredo Canelas por sus interminables consejos, tanto a nivel de la Maestría como a nivel futuro en el ámbito académico. Su apoyo continuo y sus ideas ante las distintas dificultades han sido imprescindibles para poder realizar esta tesis.

Agradezco a la Comisión Académica de Posgrado por otorgarme una beca de finalización de posgrado.

Agradezco a los miembros de la SCAPA-Civil, en particular a Ana Abreu por ayudarme inicialmente con el ingreso y primeros pasos de la Maestría y a Jorge Pérez Zerpa por responder mis constantes consultas acerca de la gestión de la Maestría y por los buenos consejos de redacción en trabajos de cursos de grado y posgrado.

Agradezco a mis amigos Guille, Cami, Maia, Fausto, Mauro, Perri, la gente del Falso Taller del Amor, la gente del Tensor de Inercia, y todos aquellos que me están faltando en esta lista por el apoyo constante y soportar mis interminables ocurrencias. En particular quiero agradecer a Marto y a Fede que son los que más molesté y más me bancaron la cabeza en los momentos de mayor estrés. Le doy un agradecimiento especial a Santiago Montouliu por ayudarme incontables veces a entender la matemática detrás de algunos temas de este trabajo. También le agradezco con cariño a Daniel Rodríguez Peña, mi primer profesor de física en el liceo, quien despertó mi pasión por las ciencias exactas.

A mis compañeros del IMFIA les doy un cálido agradecimiento por ser esa compañía diaria que a pesar de las dificultades siempre me acompañan. En especial agradezco a mis compañeros antiguos y actuales de oficina del IMFIA: Caro, Pau, Maya, Agus, Dani, Lucas, Eli, Michu y Facu que a pesar de que no les interesa demasiado la optimización estructural me han escuchado, me han dado consejos y siempre sus buenas opiniones.

Le doy un enorme agradecimiento a Pablo Santoro, por haberme abierto

las puertas al mundo académico, haberme dado un continuo apoyo y confianza y mostrarme mis fortalezas aún cuando yo no puedo verlas.

A mis padres Marina y Alfredo y a mi hermano Rodrigo, muchísimas gracias por haber estado siempre ahí, en las buenas y en las malas, en los momentos de humor e incoherencias y en los momentos serios e importantes. Sin ellos hoy no sería yo quien soy y por eso les agradezco de corazón.

Y por último, aunque no por eso menos importante, muchísimas gracias a Romi, mi corazoncito; por esas tardes de estudio, ese apoyo incondicional, ese aguante y esa paciencia. Sin su fuerza y su motivación para seguir siempre mejorando; este trabajo, y todo lo que está por venir, no sería lo que es. Muchas gracias por estar siempre ahí mi luz.

*One might even say we have been
empowered by the universe to
figure itself out — and we have
only just begun*

Neil deGrasse Tyson

RESUMEN

El tema central de esta tesis es el diseño óptimo de estructuras, el cual es la disciplina que busca utilizar de la forma más eficientemente posible los materiales que conforman una estructura. En la situación mundial actual, donde el cambio climático acelerado es una realidad desalentadora, esta filosofía de diseño es fundamental.

En esta tesis se trabajó con el concepto de la derivada topológica en conjunto con el método de los elementos finitos extendido, los cuales ya han sido utilizados para optimización topológica de estructuras en otros trabajos pero nunca antes en conjunto. La derivada se basa en analizar la sensibilidad de cierto funcional respecto a una perturbación en la topología del dominio, siendo entonces la principal herramienta del método de optimización. Por otra parte, la extensión del método de los elementos finitos enriquece la versión tradicional con funciones de forma especializadas para la geometría obtenida lo que permitió reducir el costo computacional del método que es usualmente elevado. Además, en este trabajo se detectaron deficiencias en las formulaciones del método presentes en la bibliografía con lo cual se propuso una nueva formulación del método.

Se realizaron ejemplos numéricos que muestran la aplicabilidad del método desarrollado, no solo para la obtención de estructuras que maximizan su rigidez sino además con reducción de regiones de tensiones elevadas. Finalmente, quedan evidenciadas algunas posibles ramas de investigación a futuro como ser extender el método a estructuras de mayor complejidad junto con la extensión a acciones dependientes de la geometría como ser aquellas provenientes de la interacción fluido-estructura.

Palabras claves:

Optimización estructural, XFEM, Derivada topológica.

ABSTRACT

This thesis' main topic is the structural optimum design, defined as the discipline that searches for the most efficient way to make use of the materials that make a structure. In the current global situation, where the rapid climate change is a daunting reality, this design philosophy is fundamental.

In this thesis, the topological derivative concept together with the extended finite element method were employed. Those two were already used in previous works of structural topology optimization but never before used in conjunction. The derivative is based on studying the sensitivity of a certain functional towards a small perturbation of the domain topology, thus making it the main tool of the optimization methodology. On the other hand, the finite element method extension enriches the traditional version with specialized shape functions for the obtained geometry, thereby reducing the computational cost of the method which is usually high. Furthermore, in this work, deficiencies in the method's formulations present in the literature were detected, after which improvements were proposed.

Numerical examples were conducted that show the developed method's applicability, not only for obtaining structures as rigid as possible, but also to reduce high stress regions. Finally, some possible future research lines are made clear. Some of them may be to extend the method to structures of higher complexity and also to use geometry dependent loads as those derived from fluid-structure interaction.

Keywords:

Structural optimization, XFEM, Topological derivative.

Lista de figuras

2.1	Esquema del problema plano de elasticidad lineal	8
2.2	Esquema del problema plano de elasticidad lineal para dos ma- teriales	13
2.3	Ejemplo de dominio finito simplemente conexo	17
2.4	Ejemplo de dominio finito no simplemente conexo	18
2.5	Ejemplo de dominio infinito no simplemente conexo	18
3.1	Discretización de una placa rectangular agujereada para el FEM. Diagrama basado en uno similar de Sadd (2009)	21
3.2	Transformación entre las coordenadas intrínsecas y reales	28
3.3	Esquema de las localizaciones de los puntos de Gauss en triángulos	30
3.4	Definición de nodos extendidos y elementos extendidos	32
3.5	Ejemplo de función de nivel para definir una estructura	35
3.6	Estructura asociada a la función de nivel de la Figura 3.5	35
3.7	Esquema unidimensional del cálculo de w_n para la propuesta de Sukumar et al. (2001)	37
3.8	Esquema de la barra de dos materiales sometida a tracción	37
3.9	Esquema unidimensional del cálculo de w_n para la propuesta de Moës et al. (2003)	39
3.10	Esquema unidimensional del cálculo de w_n para la propuesta de Fries (2008)	41
3.11	Esquema unidimensional del cálculo de las funciones de inter- polación para la propuesta de Makhija y Maute (2014)	44
3.12	Clasificación de los tres tipos de elementos para el XFEM im- plementado	45
3.13	Representación gráfica de N_n en un elemento genérico	46
3.14	Representación gráfica de la construcción de g en un EX genérico	47
3.15	Representación gráfica de las w_n en un EX genérico	48

3.16	Ejemplo de w_n para estudiar continuidad y rango de influencia .	49
3.17	Posibles subregiones de integración para los EX	50
3.18	Sistemas de coordenadas intrínsecas para las subregiones	51
3.19	Ejemplo de sembrado inicial de huecos para optimización topológica de estructuras	54
3.20	Esquema conceptual del proceso de optimización topológica de isolíneas	58
3.21	Esquema conceptual del método MMC	60
3.22	Esquema del dominio perturbado topológicamente. Basado en un esquema similar de Novotny y Sokołowski (2013).	62
3.23	Esquema del método de optimización de burbuja	73
3.24	Esquema del método de optimización de Amstutz y Andrä (2006)	80
4.1	Esquema del problema de tracción en una placa circular con inclusión	88
4.2	Mallas consideradas para el análisis del caso de estudio de la placa circular	89
4.3	Detalle de una parte de la interfase para ambas mallas en el caso de estudio de la placa circular	90
4.4	Error δ_W para la propuesta de Moës et al. (2003)	91
4.5	Error $\delta_{\mathbf{u}}$ para la propuesta de Moës et al. (2003)	92
4.6	Error $\delta_{\boldsymbol{\sigma}}$ para la propuesta de Moës et al. (2003)	92
4.7	Puntos donde se dan los máximos errores para la propuesta de Moës et al. (2003). Puntos XFEM y cruces FEM en malla conforme	93
4.8	Comparación en detalle de soluciones de u_x para $\gamma = 10^6$	95
4.9	Comparación en detalle de soluciones de u_x para $\gamma = 10^{-6}$. . .	96
4.10	Detalle a σ_{xx} en los elementos de máximo error para $\gamma = 10^6$. .	97
4.11	Esquema de la barra de dos materiales y dos interfases sometida a tracción	98
4.12	Malla utilizada para evaluar el XFEM de Moës et al. (2003) para la barra de dos interfases	98
4.13	Campo de desplazamientos horizontales de la prueba de tracción en barra de dos interfases para la propuesta de Moës et al. (2003)	99
4.14	Representación gráfica en un EX de N^{ari}	102
4.15	Representación gráfica de las funciones g de Moës et al. (2003) y de la nueva propuesta en dos EX adyacentes genéricos	103

4.16	Representación gráfica de las w_n de la nueva propuesta en dos EX genéricos	104
4.17	Campo de desplazamientos horizontales de la prueba de tracción en barra de dos interfases para el nuevo XFEM	108
4.18	Error δ_W para la nueva propuesta de XFEM	109
4.19	Error $\delta_{\mathbf{u}}$ para la nueva propuesta de XFEM	110
4.20	Error $\delta_{\boldsymbol{\sigma}}$ para la nueva propuesta de XFEM	110
4.21	Comparación en detalle de u_x para $\gamma = 10^{-6}$ con el nuevo XFEM	111
4.22	Comparación en detalle de u_x para $\gamma = 10^6$ con el nuevo XFEM	112
4.23	Detalle a σ_{xx} en los elementos de máximo error para $\gamma = 10^6$ con el nuevo XFEM	112
4.24	Error δ_W para la nueva propuesta de XFEM para distintos γ y tamaños de malla	114
4.25	Error $\delta_{\mathbf{u}}$ para la nueva propuesta de XFEM para distintos γ y tamaños de malla	114
4.26	Error $\delta_{\boldsymbol{\sigma}}$ para la nueva propuesta de XFEM para distintos γ y tamaños de malla	115
4.27	Error $\delta_{\boldsymbol{\sigma}}$ para las dos propuestas de XFEM para $\gamma = 10^6$	115
5.1	Representación gráfica de $\Phi(s)$	121
5.2	Esquema de dominios para el problema de optimización estructural	122
5.3	Mapas de los valores tomados por $\Xi(\boldsymbol{\sigma})$ para estado plano de tensiones, $\nu = 0,3$ y $E_M/E_V = 10^3$	130
5.4	Ejemplo de rugosidades en la geometría producto de la interpolación lineal	139
5.5	Geometría en la zona de estudio y DT de la función objetivo para el análisis de generación de rugosidades	140
5.6	Posibles geometrías propuestas por la DT	141
5.7	Ejemplo del funcionamiento de la técnica de Garcia (2010) para suavizar la geometría	145
5.8	Suavizado de las geometrías de la Figura 5.6 con la técnica de Garcia (2010) con $\varsigma = 0,7$	146
5.9	Ejemplo del funcionamiento del método LOWESS para suavizar la geometría	148

5.10	Suavizado de las geometrías de la Figura 5.6 con el método LOWESS con $\varsigma = 10^{-2}$	149
5.11	Ejemplo del funcionamiento del refinamiento global	153
5.12	Ejemplo del funcionamiento del refinamiento local	155
5.13	Ejemplo de mallado anisótropo con el mallador programado . .	156
5.14	Ejemplo del funcionamiento del remallado de Cortellessa et al. (2023)	157
5.15	Ejemplo del funcionamiento del remallado de Cui et al. (2023) .	158
5.16	Ejemplo del funcionamiento del remallado de Li et al. (2021) . .	159
5.17	Ejemplos de una barra genérica para el criterio de suavidad . . .	161
6.1	Dominio y condiciones iniciales del primer ejemplo	164
6.2	Malla considerada para el caso base del primer ejemplo	165
6.3	Estructura final optimizada del caso base del primer ejemplo . .	166
6.4	Tensiones de von Mises en el resultado del caso base del primer ejemplo	167
6.5	Función de nivel en el resultado del caso base del primer ejemplo	167
6.6	Resultados intermedios para el caso base del primer ejemplo . .	168
6.7	Avances de las componentes del LA en el caso base del primer ejemplo	169
6.8	DT de la complacencia y tensiones de von Mises para la primera iteración	170
6.9	DT de la complacencia y tensiones de von Mises para la décima iteración	170
6.10	Estructura obtenida en el primer ejemplo en caso usar una malla no simétrica	171
6.11	No simetría de la DT nodal que induce pérdida de simetría en la geometría final	172
6.12	Estructuras obtenidas en el primer ejemplo en caso de no usar algoritmos de suavizado	173
6.13	Resultados intermedios para el caso de la Figura 6.12a	173
6.14	Estructuras obtenidas en el primer ejemplo en caso de calcular la DT como el promedio de los valores nodales	174
6.15	Geometría optimizada en el primer ejemplo en caso de usar $E_V = 0,2$	175

6.16	Estructuras obtenidas para el primer ejemplo del análisis de sensibilidad al tamaño de malla y objetivo de área ocupable . .	178
6.17	Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a c para el primer ejemplo	180
6.18	Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a c para el primer ejemplo	181
6.19	Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a ς_0 para el primer ejemplo	183
6.20	Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a ς_0 para el primer ejemplo	183
6.21	Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a ϱ_ς para el primer ejemplo	184
6.22	Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a ϱ_ς para el primer ejemplo	185
6.23	Geometría final obtenida para el primer ejemplo con $\Delta_{ \Omega }^* = 10\%$	185
6.24	Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a $\Delta_{ \Omega }^*$ para el primer ejemplo. Unidades %	186
6.25	Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a $\Delta_{ \Omega }^*$ para el primer ejemplo	186
6.26	Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a $\Delta_{ \Omega }^{\text{máx}}$ para el primer ejemplo. Unidades %	187
6.27	Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a $\Delta_{ \Omega }^{\text{máx}}$ para el primer ejemplo	188
6.28	Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a ν para el primer ejemplo	189
6.29	Geometrías finales del primer ejemplo obtenidas por los métodos con XFEM. Métodos A a D según la Tabla 5.1	191
6.30	Geometrías finales del primer ejemplo obtenidas por el FEM sin remallado desde distintas mallas. Método E según la Tabla 5.1 .	192
6.31	Ejemplo de interpretación de una zona gris	192
6.32	Geometrías finales del primer ejemplo obtenidas por los métodos de FEM con refinamiento global. Métodos F según la Tabla 5.1	193
6.33	Geometrías finales del primer ejemplo obtenidas por los métodos de FEM con refinamiento local. Métodos G según la Tabla 5.1	193
6.34	Geometría y malla final del primer ejemplo obtenida por el método de Cortellessa et al. (2023)	194

6.35 Geometría y malla final del primer ejemplo obtenida por el método de Cui et al. (2023)	194
6.36 Geometría y malla final del primer ejemplo obtenida por el método de Li et al. (2021)	195
6.37 Dominio y condiciones iniciales del segundo ejemplo	199
6.38 Estructura optimizada obtenida para el segundo ejemplo en caso de solamente considerar $\mathbf{q}_2$	200
6.39 Estructura optimizada obtenida para el segundo ejemplo en caso de solamente considerar $\mathbf{q}_3$	201
6.40 Estructura optimizada obtenida para el segundo ejemplo en caso de solamente considerar $\mathbf{b}$	201
6.41 Estructura optimizada obtenida para el segundo ejemplo en caso de solamente considerar $\mathbf{b}$ y no aplicar restricción al área ocupada	202
6.42 DT de la complacencia y tensiones de von Mises para la tercera iteración del problema de la Figura 6.40	203
6.43 Geometría obtenida sin convergencia para el segundo ejemplo, en caso de únicamente considerar $\mathbf{b}$ y no considerar el término $2(\gamma - 1)\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}$ en la Ecuación (5.26)	204
6.44 Estructura final optimizada del caso base del segundo ejemplo .	204
6.45 Ampliaciones a la estructura optimizada del caso base del segundo ejemplo	205
6.46 DT de la función objetivo del problema del LA en el resultado del caso base del segundo ejemplo	207
6.47 Función de nivel en el resultado del caso base del segundo ejemplo	208
6.48 Resultados intermedios para el caso base del segundo ejemplo .	208
6.49 Avances de las componentes del LA en el caso base del segundo ejemplo	209
6.50 Estructura obtenida en el segundo ejemplo en caso de no utilizar una malla simétrica	210
6.51 Geometrías obtenidas en las iteraciones 49 a 51 para el segundo ejemplo en caso de no hacer obligatorio el tablero	211
6.52 Geometría optimizada obtenida para el segundo ejemplo en caso de solamente considerar $\mathbf{b}$ y no considerar obligatorio el tablero	213
6.53 Estructuras obtenidas para el segundo ejemplo del análisis de sensibilidad al tamaño de malla y objetivo de área ocupable . .	215

6.54	Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a c del segundo ejemplo	218
6.55	Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sen- sibilidad respecto a c para el segundo ejemplo	220
6.56	Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a ς_0 del segundo ejemplo	221
6.57	Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sen- sibilidad respecto a ς_0 para el segundo ejemplo	221
6.58	Geometrías finales del segundo ejemplo obtenidas por los méto- dos con XFEM. Métodos A a D según la Tabla 5.1	223
6.59	Geometría ejemplo del problema de interacción entre interfaces de Moës et al. (2003) en resultados del puente	224
6.60	Deformadas de la estructura de la Figura 6.59 para el EC de $\mathbf{q}_2$ según las propuestas del XFEM	224
6.61	Geometrías finales del segundo ejemplo obtenidas por el FEM sin remallado desde distintas mallas. Método E según la Tabla 5.1	225
6.62	Geometrías finales del segundo ejemplo obtenidas por los méto- dos de FEM con refinamiento global. Métodos F según la Tabla 5.1	226
6.63	Geometrías finales del segundo ejemplo obtenidas por los méto- dos de FEM con refinamiento local. Métodos G según la Tabla 5.1	226
6.64	Dominio y condiciones iniciales del tercer ejemplo	230
6.65	Malla regular para estudiar la convergencia en tensiones del gancho	231
6.66	Tensiones de von Mises en el gancho para distintos tamaños de malla	231
6.67	Valores máximos en el gancho en función del tamaño del elemento	232
6.68	Malla considerada para el caso base del tercer ejemplo	232
6.69	Esquema de D_S para el caso base del tercer ejemplo	233
6.70	Estructura final optimizada del caso base del tercer ejemplo . . .	234
6.71	Función de nivel del resultado del caso base del tercer ejemplo .	235
6.72	DT y tensiones equivalentes de von Mises para la primera ite- ración del caso base del tercer ejemplo	236
6.73	Resultados intermedios para el caso base del tercer ejemplo . . .	237
6.74	Avance de las componentes del LA para el caso base del tercer ejemplo	238
6.75	Avance del área ocupada por la estructura respecto al área total para el caso base del tercer ejemplo	238

6.76	Avance de la tensión de von Mises máxima en los puntos de cuadratura de Gauss para el caso base del tercer ejemplo	239
6.77	Resultado del caso base del tercer ejemplo en caso de no controlar las tensiones máximas	240
6.78	Mallas de FEM conformes a las interfases para medir las tensiones máximas	241
6.79	Tensiones de von Mises en la malla de FEM conforme de tamaño similar para el caso de base del tercer ejemplo	241
6.80	Geometrías optimizadas para el tercer ejemplo en caso de usar mallas estructuradas	243
6.81	Estructura final optimizada del caso base del tercer ejemplo si $D_S = D$	246
6.82	Estructuras finales optimizadas del tercer ejemplo si se usa una malla no estructurada muy fina	247
6.83	Estructuras obtenidas para el tercer ejemplo del análisis de sensibilidad al tamaño de malla y objetivo de área ocupable	250
6.84	Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a ς_0 del tercer ejemplo. Valores de ς_0 multiplicados por 1000	254
6.85	Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a ς_0 para el tercer ejemplo	255
6.86	Tensiones máximas del análisis de sensibilidad respecto a ς_0 para el tercer ejemplo	256
6.87	Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a α del tercer ejemplo	257
6.88	Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a α para el tercer ejemplo	258
6.89	Tensiones máximas del análisis de sensibilidad respecto a α para el tercer ejemplo	259
6.90	Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a $\bar{\sigma}_{VM}$ del tercer ejemplo	261
6.91	Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a $\bar{\sigma}_{VM}$ para el tercer ejemplo	261
6.92	Tensiones máximas del análisis de sensibilidad respecto a $\bar{\sigma}_{VM}$ para el tercer ejemplo	262
6.93	Geometrías finales del tercer ejemplo obtenidas por los métodos con XFEM. Métodos A a D según la Tabla 5.1	264

6.94	Geometrías finales del tercer ejemplo obtenidas por el FEM sin remallado desde distintas mallas. Método E según la Tabla 5.1	265
6.95	Geometrías finales del tercer ejemplo obtenidas por los métodos de FEM con refinamiento global. Métodos F según la Tabla 5.1	266
6.96	Geometrías finales del tercer ejemplo obtenidas por los métodos de FEM con refinamiento local. Métodos G según la Tabla 5.1	267
7.1	Casos posibles de interfases con elementos tetraédricos	277
A.1	Esquema de llamadas del código de optimización estructural	300
C.1	Placa infinita con inclusión sometida a un estado tensional genérico	336
C.2	Placa infinita con inclusión sometida a tensiones en su borde. Esquema del problema de la Ecuación (C.116)	347
D.1	Esquema del problema de tracción en una placa circular con inclusión	356
D.2	Condición de borde en la cara exterior de la placa circular	361
D.3	Resultados de la tracción en placa circular con inclusión con $\gamma = 10^{-6}$	373
D.4	Resultados de la tracción en placa circular con inclusión con $\gamma = 1374$	
D.5	Resultados de la tracción en placa circular con inclusión con $\gamma = 10^6$	375
E.1	Esquema del problema de una inclusión dentro de una placa infinita sometida a tracción uniaxial. Esquema basado en uno similar de Kavati (2005)	376
E.2	Tensión σ_{rr} en la inclusión para la placa infinita con inclusión	387
E.3	Tensión $\sigma_{\theta\theta}$ en la inclusión para la placa infinita con inclusión	387
E.4	Tensión $\sigma_{r\theta}$ en la inclusión para la placa infinita con inclusión	387

Lista de tablas

3.1	Tabla de posiciones y pesos de los puntos de Gauss para triángulos (Oñate, 2009)	30
3.2	Tabla de posiciones y pesos de los puntos de Gauss para segmentos (Oñate, 2009)	31
4.1	Órdenes de convergencia del FEM y de la nueva propuesta del XFEM	116
5.1	Resumen de los métodos comparados en el Capítulo 6	160
6.1	Tiempos de ejecución promedio de cien pruebas de la función bench	164
6.2	Características de las mallas que se consideraron para las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla del primer ejemplo . . .	176
6.3	Parámetros c y ς_0 empleados en las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla y M del primer ejemplo	177
6.4	Complacencias finales obtenidas en las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla y M para el primer ejemplo	179
6.5	Costo computacional de las distintas tareas, según el tamaño de malla, para el primer ejemplo	179
6.6	Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a c para el primer ejemplo .	182
6.7	Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a ς_0 para el primer ejemplo .	183
6.8	Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a ϱ_ς para el primer ejemplo	185
6.9	Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a $\Delta_{ \Omega }^*$ para el primer ejemplo	187

6.10	Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a $\Delta_{ \Omega }^{\text{máx}}$ para el primer ejemplo	188
6.11	Coeficiente de penalidad cuadrática utilizado en las pruebas de comparación entre métodos para el primer ejemplo	190
6.12	Costo computacional y complacencia final para los distintos métodos de análisis en el ejemplo de la ménsula	196
6.13	Suavidad, zonas grises y complejidad para los distintos métodos de análisis en el ejemplo de la ménsula	197
6.14	Complacencias finales obtenidas para los distintos EC por separado y en total para distintas geometrías optimizadas del segundo ejemplo	206
6.15	Características de las mallas que se consideraron para las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla del segundo ejemplo . . .	214
6.16	Parámetros c y ς_0 empleados en las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla y M del segundo ejemplo	215
6.17	Complacencias finales obtenidas en las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla y M para el segundo ejemplo	217
6.18	Costo computacional de las distintas tareas, según el tamaño de malla, para el segundo ejemplo	217
6.19	Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a c para el segundo ejemplo	220
6.20	Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a ς_0 para el segundo ejemplo	222
6.21	Parámetros utilizados en las pruebas de comparación entre métodos para el segundo ejemplo	222
6.22	Costo computacional y complacencia final para los distintos métodos de análisis en el ejemplo del puente	227
6.23	Suavidad, zonas grises y complejidad para los distintos métodos de análisis en el ejemplo del puente	229
6.24	Complacencia, funcional de tensiones y tensión máxima en puntos de cuadratura para el caso base del tercer ejemplo, con y sin control de tensiones	240
6.25	Tensiones de von Mises máximas en D_S para el caso base del tercer ejemplo, con y sin control de tensiones	242
6.26	Tensiones de von Mises máximas en D_S en función de la malla .	244

6.27	Costo computacional de las tareas clásicas según el tipo de malla para el gancho	244
6.28	Costo computacional de las tareas del funcional de tensiones según el tipo de malla para el gancho	245
6.29	Características de las mallas que se consideraron para las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla del tercer ejemplo	249
6.30	Parámetros c y ς_0 empleados en las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla y M del tercer ejemplo	249
6.31	Complacencias finales obtenidas en las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla y M para el tercer ejemplo	251
6.32	Tensiones máximas obtenidas en las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla y M para el tercer ejemplo, medidas con la malla de cada prueba	252
6.33	Tensiones máximas obtenidas en las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla y M para el tercer ejemplo, medidas con la malla muy fina	252
6.34	Costo computacional de las tareas clásicas, según el tamaño de malla, para el tercer ejemplo	253
6.35	Costo computacional de las tareas del funcional de tensiones según el tamaño de malla para el tercer ejemplo	253
6.36	Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a ς_0 para el tercer ejemplo .	256
6.37	Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a α para el tercer ejemplo .	259
6.38	Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a $\overline{\sigma}_{VM}$ para el tercer ejemplo	261
6.39	Parámetros utilizados en las pruebas de comparación entre métodos para el tercer ejemplo	263
6.40	Costo computacional y complacencia final para los distintos métodos de análisis en el ejemplo del gancho	268
6.41	Tensiones de von Mises máximas de los resultados de los distintos métodos de análisis en el ejemplo del gancho	269
6.42	Suavidad, zonas grises y complejidad para los distintos métodos de análisis en el ejemplo del gancho	270
A.1	Coordenadas intrínsecas límites de las subregiones	305

Lista de símbolos

Símbolo	Descripción	Pág.
$:$	Producto escalar entre tensores	12
$\llbracket \cdot \rrbracket$	Función de salto	14
$\nearrow$	Límite lateral por la izquierda. $a \nearrow b$ es $a \rightarrow b$ tal que $a < b$	332
$\searrow$	Límite lateral por la derecha. $a \searrow b$ es $a \rightarrow b$ tal que $a > b$	62
∂_x	Derivada parcial respecto a la coordenada x	15
a_x	Componente según x de una incógnita extendida del problema del XFEM	32
$\mathbf{a}$	Incógnita extendida del problema del XFEM	32
$\mathbf{A}$	Vector global de incógnitas extendidas	33
$\mathbf{A}^{(e)}$	Vector elemental de incógnitas extendidas	49
$\mathcal{A}$	Funcional bilineal de la formulación débil del problema plano de elasticidad lineal	65
$\mathbf{b}$	Densidad de fuerzas de volumen	8
$B_{x_0, \epsilon}$	Bola de centro x_0 y radio ϵ	62
$\mathbf{B}^{(e)}$	Matriz de relación desplazamiento-deformación del elemento en el método tradicional	23
$\mathbf{B}_{\mathbf{w}}^{(e)}$	Matriz de relación incógnitas adicionales-deformación del elemento en el XFEM	49
$\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{(e)}$	Matriz de relación grados de libertad-deformación del elemento en el XFEM	49
$\mathbb{B}$	Tensor auxiliar del cálculo de la derivada topológica del funcional de tensiones	128
$\tilde{\mathbb{B}}$	Tensor auxiliar del cálculo de la derivada topológica del funcional de tensiones	128
c	Coefficiente de penalidad cuadrática del área en el Lagrangiano Aumentado	125

Símbolo	Descripción	Pág.
$\mathbf{C}$	Matriz representativa del tensor elástico en el método de los elementos finitos	24
$\mathbb{C}$	Tensor elástico	10
D	Región del espacio ocupable por la estructura	8
D_S	Región del espacio ocupable por la estructura donde se limitan las máximas tensiones	121
$D_T f$	Derivada topológica del funcional f	62
E	Módulo de Young	8
E_M	Módulo de Young del material estructural	13
E_V	Módulo de Young del material blando que modela los vacíos	13
$\mathbf{EX}$	Vector lógico que identifica si un elemento es extendido	303
$f(\epsilon)$	Función regularizadora de la derivada topológica	62
$\mathbf{F}_b$	Vector global de fuerzas nodales de volumen	26
$\mathbf{F}_b^{(e)}$	Vector elemental de fuerzas nodales de volumen	26
$\mathbf{F}_q$	Vector global de fuerzas nodales de contacto	26
$\mathbf{F}_q^{(e)}$	Vector elemental de fuerzas nodales de contacto	26
g	Función auxiliar utilizada para las funciones de interpolación extendidas	35
$\mathbf{GLR}$	Vector lógico de grados de libertad restringidos	310
$H(x)$	Función de Heaviside	42
$\mathbf{I}$	Tensor identidad de segundo orden	10
$\mathbf{II}$	Tensor identidad de cuarto orden	10
$J(\mathbf{w})$	Expresión integral genérica	66
$\mathbf{J}$	Jacobiano del cambio de coordenadas reales a intrínsecas	29
$\mathbf{J}^{\text{SR}}$	Jacobiano del cambio de coordenadas intrínsecas del elemento a las de subregión	51
$\mathcal{J}$	Función de costo	62
$\mathcal{J}^{\text{LA}}$	Función de costo con términos del Lagrangiano Aumentado	125
k^σ	Derivada del integrando del funcional de tensiones	129
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez global	26
$\mathbf{K}^{(e)}$	Matriz de rigidez elemental	25
$\mathcal{K}$	Matriz del término derecho del problema adjunto del funcional de tensiones	129
ℓ	Funcional lineal de la formulación débil del problema plano de elasticidad lineal	65

Símbolo	Descripción	Pág.
M	Fracción objetivo del área ocupable	119
$\mathbf{M}$	Tensor métrico	155
$\mathbb{M}$	Matriz de masa	122
$\mathbf{n}$	Vector unitario normal	11
N_j	Función de interpolación tradicional para el nodo j -ésimo	22
N^{ari}	Función de interpolación de arista extendida	102
$\mathbf{N}$	Matriz global de funciones de interpolación tradicionales	22
$\mathbf{N}^{(e)}$	Matriz elemental de funciones de interpolación tradicionales	22
$\mathcal{N}_{el}$	Cantidad de elementos en la malla de elementos finitos	24
$\mathcal{N}_{no}$	Cantidad de nodos en la malla de elementos finitos	22
$\mathcal{N}_{\mathbf{X}}$	Cantidad de incógnitas extendidas	32
$\mathbb{P}_\gamma$	Tensor de polarización	127
$\mathbf{q}$	Tensión aplicada de contacto	8
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales	8
$\text{SIT}_{\text{máx}}$	Máximo de subiteraciones de la búsqueda lineal	134
$\mathcal{S}$	Funcional de exceso de tensiones	120
$\mathbb{S}$	Tensor auxiliar del cálculo de la derivada topológica del funcional de tensiones	128
$\mathbf{t}$	Vector unitario tangente	332
$\mathbf{T}_M$	Tolerancia en el cumplimiento del objetivo de área final	134
$\mathbb{T}$	Tensor auxiliar del cálculo de la derivada topológica del funcional de tensiones	128
u_x	Componente según x del vector desplazamiento	9
$\mathbf{u}$	Vector desplazamiento	8
$\mathbf{u}_c$	Vector desplazamiento en el apoyo	11
$\mathbf{U}$	Vector global de desplazamientos nodales	22
$\mathbf{U}_c$	Vector de valores prescritos para los grados de libertad del XFEM	310
$\mathbf{U}^{(e)}$	Vector elemental de desplazamientos nodales	22
$\mathbf{U}_{\mathbf{X}}^{(e)}$	Vector elemental de grados de libertad en el XFEM	49
$\mathcal{U}$	Espacio de funciones admisibles para el problema continuo	12
$\mathcal{U}^h$	Espacio de funciones admisibles para el problema discreto	24
$\mathfrak{U}$	Vector global de grados de libertad del problema adjunto del funcional de tensiones	129
$\mathbf{v}$	Vector de desplazamientos virtuales	12

Símbolo	Descripción	Pág.
$\mathbf{v}$	Velocidad del cambio de forma	69
$\mathbf{v}$	Vector solución del problema adjunto	66
$\mathbf{V}$	Vector global de desplazamientos virtuales nodales	24
$\mathbf{V}^{(e)}$	Vector elemental de desplazamientos virtuales nodales	25
$\mathcal{V}$	Espacio de variaciones admisibles para el problema continuo	12
$\mathcal{V}^h$	Espacio de variaciones admisibles para el problema discreto	24
w_j	Función de interpolación extendida para la incógnita extendida j -ésima	32
W_j^e	Complacencia asociada al estado de carga j -ésimo	119
W_j^i	Trabajo de las fuerzas internas asociado al estado de carga j -ésimo	325
$\mathbf{W}$	Matriz global de funciones de interpolación extendidas	32
$\mathbf{X}^{(e)}$	Matriz geométrica elemental	28
$\mathbb{1}_\Omega$	Función característica del dominio Ω	119
α	Coefficiente de penalidad del funcional de tensiones	120
χ	Tercer potencial de Kolosov-Muskhelishvili	16
$\delta\mathcal{A}$	Variación del funcional bilineal por una perturbación topológica	66
δJ_1	Variación parcial de la función de costo respecto al estado	66
δJ_2	Variación parcial de la función de costo respecto al dominio	66
$\delta\ell$	Variación del funcional lineal por una perturbación topológica	66
$\delta_{\mathbf{u}}$	Error numérico en desplazamientos	88
δ_W	Error numérico en energía	88
$\delta_{\boldsymbol{\sigma}}$	Error numérico en tensiones	88
$\Delta_{ \Omega }^{\text{máx}}$	Cambio máximo de área por iteración	134
$\Delta_{ \Omega }^*$	Cambio mínimo de área como criterio de optimalidad	134
ϵ	Radio de una bola	62
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformaciones infinitesimales	8
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Tensor de deformaciones infinitesimales virtuales	12
ε_{xx}	Componente del tensor de deformaciones en la base cartesiana	9
ε_{yy}	Componente del tensor de deformaciones en la base cartesiana	9
ε_{xy}	Componente del tensor de deformaciones en la base cartesiana	9
ε_{rr}	Componente del tensor de deformaciones en la base polar	321
$\varepsilon_{r\theta}$	Componente del tensor de deformaciones en la base polar	333
$\varepsilon_{\theta\theta}$	Componente del tensor de deformaciones en la base polar	321

Símbolo	Descripción	Pág.
η	Coordenada intrínseca	27
$\eta_{\mathcal{G}}$	Coordenada de un punto de Gauss	29
η_m^{SR}	Coordenada intrínseca de la subregión m -ésima	50
η_3^{Ψ}	Coordenada intrínseca de la división de subregiones en el bor- de entre nodos 1 y 3	51
γ	Contraste entre el material a incluir y el material de base	87
Γ_D	Frontera con condición de borde de Dirichlet	8
Γ_N	Frontera con condición de borde de Neumann	8
κ	Constante material de Kolosov	16
$\varkappa$	Coefficiente de búsqueda lineal	133
λ	Primera constante de Lamé	10
μ	Segunda constante de Lamé	10
$\nabla^s(\cdot)$	Gradiente simétrico $\nabla^s(\cdot) = \frac{1}{2}\nabla(\cdot) + \frac{1}{2}(\nabla(\cdot))^T$	9
ν	Coefficiente de Poisson	8
$\omega_{\mathcal{G}}$	Peso del punto de Gauss	29
Ω	Región del espacio ocupada por la estructura	8
$\Omega_j^{(e)}$	Región ocupada por el elemento finito j -ésimo	24
$\Omega_{\xi,\eta}^{(e)}$	Región ocupada por el elemento finito de referencia	29
$\Omega_{\xi,\eta}^{(e-\text{SR})^m}$	Región ocupada por la subregión de integración m -ésima del elemento finito de referencia	50
$\Omega_{\xi,\eta}^{(e-\text{SR})^m}$	Región ocupada por la subregión de integración m -ésima en sus propias coordenadas intrínsecas	51
Ω_{ϵ}	Región del espacio ocupada por la estructura perturbada to- pológicamente	62
Ω_{τ}	Región del espacio ocupada por la estructura perturbada to- pológicamente y deformada	69
Ω^*	Geometría de la estructura optimizada	119
$ \Omega $	Área ocupada por la estructura	119
ϕ	Función de tensiones de Airy	14
Φ	Integrando del funcional de tensiones	121
ψ	Segundo potencial de Kolosov-Muskhelishvili	16
Ψ	Función de nivel	33
Ψ_{D_T}	Función de nivel propuesta por la derivada topológica	132
ρ	Densidad de los elementos para el FEM	152
ϱ_{ς}	Coefficiente de decaimiento del coeficiente de suavizado	134

Símbolo	Descripción	Pág.
σ	Tensor de tensiones	8
σ_{xx}	Componente del tensor de tensiones en la base cartesiana	10
σ_{xy}	Componente del tensor de tensiones en la base cartesiana	10
σ_{yy}	Componente del tensor de tensiones en la base cartesiana	10
σ_{rr}	Componente del tensor de tensiones en la base polar	321
$\sigma_{r\theta}$	Componente del tensor de tensiones en la base polar	322
$\sigma_{\theta\theta}$	Componente del tensor de tensiones en la base polar	321
σ_{VM}	Tensión de von Mises	121
$\bar{\sigma}_{\text{VM}}$	Tensión de von Mises máxima admisible	120
Σ_ϵ	Tensor de energía-momentum de Eshelby	328
σ_I	Máxima tensión principal del tensor de tensiones	129
σ_{II}	Segunda tensión principal del tensor de tensiones	129
ς	Coeficiente de suavizado	76
ς_0	Coeficiente de suavizado inicial	134
τ	Parámetro del análisis de sensibilidad al cambio de forma	69
Θ	Ángulo entre la función de nivel actual y la propuesta por la derivada topológica	133
Υ	Primer potencial de Kolosov-Muskhelishvili	16
ξ	Coordenada intrínseca	27
$\xi_{\mathcal{G}}$	Coordenada de un punto de Gauss	29
ξ_m^{SR}	Coordenada intrínseca de la subregión m -ésima	50
ξ_1^Ψ	Coordenada intrínseca de la división de subregiones en el borde entre nodos 1 y 2	51
ξ_2^Ψ	Coordenada intrínseca de la división de subregiones en el borde entre nodos 2 y 3	51
Ξ	Función integral sin solución analítica de la derivada topológica del funcional de tensiones	128
ζ	Multiplicador de Lagrange del Lagrangiano Aumentado	70

Lista de siglas

Sigla	Aclaración	Pág.
DT	Derivada Topológica	5
EB	Elementos Blandos	45
EC	Estados de Carga	80
ER	Elementos Rígidos	45
EX	Elementos Extendidos	45
FEM	Método de los Elementos Finitos Tradicional	5
LA	Lagrangiano Aumentado	118
XFEM	Método de los Elementos Finitos Extendido	5

Tabla de contenidos

Lista de figuras	XI
Lista de tablas	XX
Lista de símbolos	XXIII
Lista de siglas	XXIX
1 Introducción	1
2 Descripción del problema de base	7
2.1 Problema plano de elasticidad lineal	7
2.2 Formulación fuerte del problema de dos materiales	13
2.3 Resolución compleja del problema	14
3 Estado del arte	20
3.1 Método de los elementos finitos extendido	20
3.1.1 Presentación del método tradicional	21
3.1.2 Herramientas de integración numérica	27
3.1.3 Extensión del método de elementos finitos	31
3.2 Derivada topológica	61
3.2.1 Concepto de la derivada topológica	62
3.2.2 Métodos de cálculo de la derivada topológica	63
3.2.3 Derivada topológica en optimización topológica de es- tructuras	71
4 Método de análisis estructural	86
4.1 Problemáticas del XFEM preexistente	86

4.1.1	Caso de estudio: tracción uniaxial en placa circular con inclusión	87
4.1.2	Segundo caso de estudio: barra con dos interfases sometida a tracción	97
4.2	Desarrollo de un nuevo XFEM	101
4.2.1	XFEM por aristas extendidas	101
4.2.2	Particularidades de la implementación numérica	106
4.2.3	Desempeño de la nueva propuesta del XFEM	107
5	Metodología de optimización estructural	118
5.1	Modelo de optimización estructural	119
5.2	Método del Lagrangiano Aumentado	124
5.3	Implementación de la derivada topológica	126
5.4	Algoritmo de optimización desarrollado	132
5.5	Suavizado de la función de nivel	138
5.5.1	Presentación de la necesidad de suavizado	138
5.5.2	Técnicas de suavizado	143
5.5.3	Consideraciones especiales del suavizado	149
5.6	Comparación de métodos	150
5.6.1	Métodos de análisis comparados	151
5.6.2	Criterios de comparación de métodos	159
6	Resultados numéricos	163
6.1	Ejemplo 1: Ménsula	164
6.1.1	Caso de base	165
6.1.2	Análisis de decisiones algorítmicas	170
6.1.3	Análisis de sensibilidad	175
6.1.4	Comparación entre métodos de análisis	190
6.2	Ejemplo 2: Puente	198
6.2.1	Presentación del problema	198
6.2.2	Ejemplos con los EC por separado	199
6.2.3	Caso de base con todos los EC	204
6.2.4	Análisis de decisiones algorítmicas	210
6.2.5	Análisis de sensibilidad	213
6.2.6	Comparación entre métodos de análisis	222
6.3	Ejemplo 3: Gancho	229

6.3.1	Presentación del problema	229
6.3.2	Caso de base	232
6.3.3	Análisis de decisiones algorítmicas	242
6.3.4	Análisis de sensibilidad	247
6.3.5	Comparación entre métodos de análisis	262
7	Conclusiones y trabajo futuro	272
7.1	Conclusiones	272
7.2	Propuestas de trabajo futuro	275
	Referencias bibliográficas	278
	Anexos	298
Anexo A	Códigos implementados	299
Anexo B	Fórmulas de la elasticidad en coordenadas polares.	321
Anexo C	Cálculo de las derivadas topológicas.	323
Anexo D	Tracción uniaxial en una placa circular con inclusión	355
Anexo E	Tensiones en una inclusión dentro de una placa infinita.	376

Capítulo 1

Introducción

Esta tesis se enmarca en el campo de la optimización estructural. La optimización estructural se define como el “establecimiento racional de un diseño estructural que es el mejor de todos los posibles diseños dentro de un objetivo prescrito y dada una serie de limitaciones geométricas y/o de comportamiento” (Eschenauer et al. 1997). La anterior definición resulta muy adecuada para esta tesis, en donde se aborda un problema de optimización estructural que consiste en encontrar el diseño que maximice una cierta medida cuantitativa del desempeño estructural, considerando además restricciones geométricas y mecánicas. Más precisamente, se limita el volumen total del material estructural utilizado y los valores máximos de las tensiones que ocurren en la estructura. Con respecto a la definición, es importante aclarar que los métodos de optimización estructural desarrollados en esta tesis no pueden asegurar la obtención de un óptimo global del problema de optimización, puesto que carecen de condiciones suficientes de optimalidad y que están basados en métodos heurísticos. Sin embargo, estos métodos heurísticos han sido utilizados con éxito en el pasado en la solución de diferentes problemas de ingeniería, incluyendo problemas de optimización estructural, permitiendo la obtención de diseños de excelente desempeño, siendo además relativamente económicos desde el punto de vista del costo computacional.

Existen diferencias conceptuales entre el diseño estructural clásico y el diseño basado en la optimización estructural. Estas diferencias fueron presentadas por Arora (2017), quien destaca que la optimización estructural parte de formular el problema de diseño como un problema matemático de optimización. Otra diferencia entre las filosofías de diseño es que en el diseño clásico

se chequean criterios de desempeño estructural y económicos, y en caso de cumplirlos se termina el proceso iterativo. Por otra parte, en la optimización estructural, los criterios de desempeño se consideran como restricciones del problema de optimización, y el proceso iterativo se termina si se llega a una condición de optimalidad. La última gran diferencia radica en que los cambios de diseño, ya sea por no cumplir criterios de desempeño o la condición de optimalidad, constituyen un proceso basado en la experiencia y en la intuición para el diseño clásico, y basado en criterios matemáticos de optimización para el diseño óptimo. En este documento, la filosofía de diseño de las estructuras que se presentan es la de optimización estructural.

El cambio climático ha preocupado a la comunidad científica y civil en los años más recientes. En el marco de este fenómeno, el mundo ha tomado medidas para intentar reducir la emisión de gases de efecto invernadero. La industria de la construcción es una de las principales emisoras de gases de efecto invernadero, particularmente en la producción de hormigón y acero (United Nations, 2022). Para reducir las emisiones de gases, algunos países han comenzado a tomar medidas como la sustitución de los materiales por otros de menor huella de carbono, como ser la madera (Dangel, 2019). En este ámbito la optimización estructural tiene el potencial de jugar un gran papel, al actuar en sinergia con la sustitución por materiales de menor huella de carbono, haciendo que estos materiales sean utilizados en la forma más eficiente posible.

Los primeros antecedentes para la obtención de estructuras con geometrías optimizadas son los métodos analíticos estudiados por Michell (1904). Las geometrías obtenibles a partir de estos métodos corresponden al mínimo global del problema de optimización estructural de minimizar la complacencia para cierta restricción del área ocupable, problema considerado en varias partes de esta tesis. A pesar de lo anterior, las geometrías de Michell (1904) presentan varios inconvenientes importantes para su uso práctico. El primer inconveniente es que las estructuras obtenidas no son fácilmente materializables, por ser reticulados de infinitas barras de sección transversal de magnitud diferencial (en estructuras planas) o entramados de cáscaras de espesor diferencial (en estructuras tridimensionales) (Lewiński et al. 2019). De todas formas, estos resultados funcionan como guía del diseño estructural, no solo por ilustrar cuál es la disposición geométrica adecuada para los elementos estructurales, sino también al cuantificar con precisión los valores alcanzables para las funciones de desempeño. El segundo y más importante inconveniente es que solamen-

te existen soluciones exactas de los métodos analíticos de Michell (1904) para unos pocos casos particulares. En general, como presenta el libro de Lewiński et al. (2019), se aplican métodos numéricos para obtener resultados aproximados de las estructuras de Michell.

Por los motivos discutidos en el párrafo anterior, en general existe gran preferencia por los métodos computacionales de optimización estructural. Una forma de clasificar dichos métodos es según la naturaleza de la variable de diseño, destacándose tres categorías principales (Bendsøe y Sigmund, 2004): 1) los utilizados para optimización de parámetros, 2) los utilizados para optimización de forma y 3) los utilizados para optimización topológica. En los siguientes párrafos se describen las características principales de cada uno de estos métodos.

Los métodos de optimización de parámetros son los de formulación más simple de los tres tipos, pues consisten en obtener la configuración óptima de un conjunto finito de parámetros (Arora, 2017). Los métodos de optimización de parámetros son aplicables a problemas de estructuras discretas, donde existe un conjunto finito de parámetros que definen cierta configuración estructural específica. Son métodos apropiados, por ejemplo, cuando se tiene la geometría de la estructura definida y solamente resta determinar espesores y secciones transversales. La gran desventaja de estos métodos es que poseen una menor libertad de diseño respecto a los otros, quienes permiten considerar normalmente un espacio de diseño más amplio. A pesar de lo anterior, los métodos de optimización de parámetros son muy utilizados para la obtención de geometrías optimizadas (Arora, 2017; Rozvany, 1993), entre los que se destaca el método de la estructura de base (ground structure method) (Bendsøe y Sigmund, 2004; Christensen y Klarbring, 2009).

Los métodos de optimización de forma se basan en modificar la geometría de una estructura continua (Choi y Kim, 2005). Este método de optimización trae consigo un nivel mayor de complejidad respecto a los métodos de optimización de parámetros, visto que la variable de diseño del problema de optimización en este caso pertenece a un conjunto de dimensión infinita. Como indicaron Choi y Kim (2005), los métodos de optimización de forma poseen la gran ventaja de poder utilizar los conceptos de derivada material y espacial, bien entendidos en la mecánica del continuo. Estos métodos de optimización estructural son muy utilizados en optimización de piezas mecánicas, destacándose su uso en la búsqueda de formas aerodinámicas (Delfour y Sabidussi, 1992). El principal

inconveniente de los métodos de optimización de forma es que no permiten modificar la topología de la configuración estructural, con lo cual, en los casos que se espere la existencia de huecos en la configuración optimizada, se debe partir de diseños iniciales especiales. Para sortear la anterior dificultad, Allaire et al. (2004) desarrollaron un método de optimización, basado en los métodos de optimización de forma, que permite obtener configuraciones ahuecadas similares a las obtenidas con métodos de optimización topológica.

Los métodos de optimización topológica se basan en encontrar la geometría óptima de una estructura en cierta región prescrita. A diferencia de los métodos de optimización de forma, la conectividad de la estructura no es conocida de antemano, y se busca encontrar el número, forma y ubicación óptima de los huecos (Bendsøe y Sigmund, 2004). Estos métodos son parte de un campo de la matemática más amplio que los métodos previos, por lo que a su vez forman parte de un área menos consolidada. Además, dada la naturaleza de la significativa dificultad de estos problemas de optimización, se tiene una gran presencia de métodos heurísticos como los considerados en esta tesis. En contraposición, los métodos de optimización topológica poseen la gran ventaja de no requerir partir de un diseño inicial bueno para obtener la estructura óptima.

Históricamente, la optimización topológica de estructuras ha tenido el inconveniente de proporcionar diseños de difícil construcción, sobre todo por la presencia de cavidades interiores en la estructura. Con el avance de la metodología BIM (Azhar et al. 2012) se ha comenzado a realizar impresión tridimensional de estructuras (Sakin y Kiroglu, 2017). La impresión tridimensional de estructuras promete ser una buena alternativa para solventar la dificultad de construcción de las estructuras topológicamente optimizadas, lo que ha sido evidenciado en trabajos recientes (*e.g.* Lara y Delgado, 2023; Ma et al. 2006; Uslu Uysal y Kahveci, 2023; Weerg, 2023). Estos nuevos avances en la industria de la construcción hacen de la optimización topológica de estructuras un área de especial interés.

Existen diversos métodos para la optimización topológica de estructuras. Uno de los métodos más utilizados es el SIMP (Bendsøe y Sigmund, 1999) el cual se basa en determinar una función de densidad de material, que vale entre cero y uno, donde cero son los vacíos, uno el material sólido sin poros y cualquier valor intermedio sería un material poroso. Se penalizan los valores intermedios de las densidades para favorecer diseños donde no existan zonas

porosas, es decir, solamente con regiones sólidas no porosas y zonas vacías. Recientemente han surgido los métodos basados en la Derivada Topológica (DT) (Novotny y Sokołowski, 2013), la cual se basa en medir la sensibilidad de un funcional a la creación de un hueco, o región de cambio de material, de tamaño diferencial en el dominio. Dichos métodos poseen la ventaja de obtener soluciones sin regiones porosas y sin requerir aplicar ningún tipo de penalización.

Uno de los principales inconvenientes de los métodos de optimización basados en la DT es el alto costo computacional del análisis estructural de las geometrías obtenidas, el cual suele realizarse mediante el Método de los Elementos Finitos Tradicional (FEM). Como presentaron Amstutz y Andrä (2006), pioneros en los métodos de optimización basados en la DT, los métodos suelen requerir numerosos refinamientos de la malla de elementos finitos hasta llegar a una malla considerablemente fina, lo que deriva en este alto costo computacional.

El Método de los Elementos Finitos Extendido (XFEM) es una variante del FEM que fue desarrollada inicialmente para modelar la propagación de fisuras en problemas de mecánica de la fractura, y que tiene la ventaja de no requerir la actualización de la malla de elementos finitos (Belytschko y Black, 1999; Moës et al. 1999). Esta variante se basa en introducir variables adicionales y funciones de interpolación especializadas para tratar una discontinuidad. Previo a esta tesis se esperaba que el uso del XFEM permitiera reducir los costos del análisis estructural al evitar el uso de mallas densas o la necesidad de su refinamiento frecuente. El XFEM ya había sido utilizado en algoritmos de optimización topológica (Abdi et al. 2014; Duysinx et al. 2006), aunque nunca antes en conjunto con la DT.

A partir de todo lo anterior, el objetivo principal de esta tesis fue combinar el XFEM con el concepto de la DT con la motivación de reducir el costo computacional de los métodos de optimización topológica de estructuras. Se decidió el uso conjunto de estos dos métodos esperando lograr una sinergia entre la habilidad del XFEM para modelar interfases entre dos materiales y el concepto de la DT para estudiar la sensibilidad al cambio local de material. Se hace hincapié en que el enfoque del trabajo no es comparar métodos de optimización topológica en general, sino exclusivamente investigar si el uso del XFEM permite mejorar el desempeño de los métodos basados en la DT.

El manuscrito consta de siete capítulos, incluyendo el actual de introduc-

ción, y cinco anexos. En el Capítulo 2 se introduce el problema plano de elasticidad lineal para introducir al lector a los principales conceptos que se abordan a lo largo de todo el documento. Además, se incluyen los elementos básicos de la resolución analítica del problema plano de elasticidad lineal, usando métodos de variable compleja.

En el Capítulo 3 se describe el estado del arte de los principales temas de esta tesis, específicamente el XFEM y la DT. Por un lado se describe el XFEM y sus usos más recientes en optimización estructural y por otro lado se presenta en detalle el concepto de la DT, algunos lineamientos generales sobre su cálculo y su uso más reciente en optimización estructural.

En el Capítulo 4 se describe la implementación del XFEM para el análisis estructural del problema plano de elasticidad lineal. En primer lugar se presentan algunos inconvenientes de las implementaciones conocidas del XFEM que dificultan al problema de optimización considerado. Luego se presenta una nueva propuesta de XFEM, la cual es utilizada en el método de optimización propuesto en esta tesis.

En el Capítulo 5 se describe el desarrollo del método propuesto de optimización estructural. Se presenta la formulación matemática del problema de optimización, el cual es basado en el concepto de la DT, y utiliza el XFEM para el análisis estructural. Se incluye además un pseudocódigo del método implementado y la metodología empleada para comparar el desempeño del método propuesto frente a otros ya existentes.

En el Capítulo 6 se presentan los resultados de la aplicación del método desarrollado en tres casos distintos. Se presenta además un análisis de sensibilidad de la solución respecto a los parámetros del método y una comparación de su desempeño frente a otros métodos ya existentes.

Finalmente, en el Capítulo 7 se presentan las principales conclusiones del trabajo de investigación de esta tesis. Se destaca que el método propuesto resultó efectivo en la resolución del problema de optimización estructural. Además permitió reducir costos computacionales, en parte debido al uso del XFEM, y en parte gracias a la aplicación de algunas técnicas específicas. Se destaca además la obtención de una nueva propuesta de XFEM que soluciona algunas dificultades presentes en las implementaciones existentes. En este capítulo también se presentan algunas propuestas de líneas de investigación y mejoras al método propuesto que quedan como trabajo futuro.

Capítulo 2

Descripción del problema de base

Como punto de partida a este trabajo de investigación, previo a adentrarse en los detalles del XFEM y el uso de la DT como metodología de optimización estructural, resulta imprescindible presentar la formulación matemática del *problema plano de elasticidad lineal*, el cual gobierna el comportamiento de las estructuras estudiadas. Las ecuaciones de este problema se presentan en la Sección 2.1. Las incógnitas que se definen en dicha sección, junto con las ecuaciones que las relacionan, constituyen la base teórica sobre la cual se asientan los demás contenidos presentados en este documento. A continuación, se presenta en la Sección 2.2 la formulación fuerte del problema de elasticidad de dos materiales, utilizado para la metodología de análisis estructural. Posteriormente, se presenta en la Sección 2.3 una metodología de resolución analítica del problema, basada en variables complejas. Esta metodología de resolución permitió obtener un resultado analítico utilizado para verificar el método de análisis estructural y que sirvió también como base para comprender los análisis asintóticos en el cálculo de las DT.

2.1. Problema plano de elasticidad lineal

Como fue mencionado anteriormente, en esta sección se presentan los conceptos fundamentales del problema plano de elasticidad lineal para el material isótropo lineal. La descripción de esta sección está basada en la presentada por Sadd (2009).

El problema plano de elasticidad lineal consiste en hallar los siguientes tres campos: los desplazamientos ($\mathbf{u}$), el tensor de deformaciones ($\boldsymbol{\varepsilon}$) y el tensor de tensiones ($\boldsymbol{\sigma}$). Estas tres incógnitas se encuentran relacionadas entre sí por ciertas ecuaciones de campo, y deben además verificar las condiciones de borde que se desarrollan a continuación.

Se asume que una región $\Omega \subseteq D \subset \mathbb{R}^2$ está ocupada por un material elástico y lineal de módulo de Young E y coeficiente de Poisson ν . La estructura compuesta por este material se encuentra sometida a la acción de un sistema de fuerzas y condiciones de borde como se muestra en la Figura 2.1. Se considera que D es la región ocupable por la estructura, Ω es la región ocupada por la estructura, $\mathbf{b}$ es la densidad de fuerzas externas de volumen, $\mathbf{q}$ es la densidad de fuerzas externas de superficie (tensión aplicada), Γ_N es la región del borde donde se conoce la tensión aplicada y Γ_D es la región del borde donde se conocen los desplazamientos.

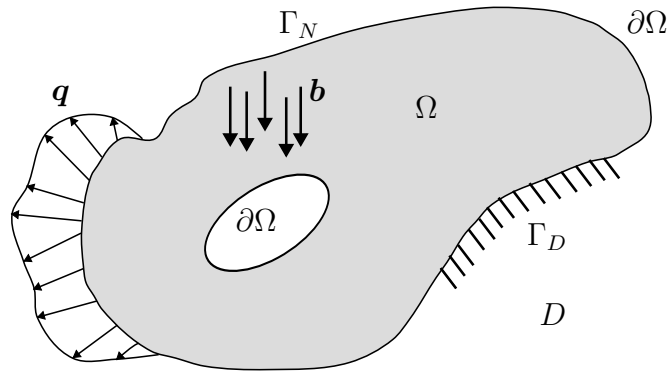


Figura 2.1: Esquema del problema plano de elasticidad lineal

En la bibliografía se conoce Γ_D como el borde con condición de Dirichlet y Γ_N como el borde con condición de Neumann (Cheng y Cheng, 2005). Normalmente, en los libros de elasticidad y similares, se asume que en Γ_N se conocen las dos componentes de la tensión aplicada, en Γ_D se conocen las dos componentes del campo de desplazamientos y estos dos conjuntos son disjuntos (Sadd, 2009). A lo largo de este capítulo, en el cual se presentan los conceptos básicos del problema, se considera que esto es así pero, como bien señaló Sadd (2009), existen bordes donde se conoce una componente de los desplazamientos y otra componente de la tensión. Dichos bordes se tienen, por ejemplo, cuando existen los comúnmente denominados *apoyos deslizantes*. También, existen bordes donde no se conocen ni los desplazamientos ni las tensiones pero sí una relación entre ellos. Estos bordes se tienen, por ejemplo, cuando existen los

comúnmente denominados *apoyos elásticos* y en la bibliografía se los conoce como bordes con condición de Robin (Gustafson, 1998). Estos bordes especiales no se consideran en este capítulo con el fin de simplificar la presentación del problema plano de elasticidad lineal, visto que no introducen cambios conceptuales significativos, pero sí se consideran en el análisis de los siguientes capítulos.

El campo de desplazamientos $\mathbf{u}$ es la principal incógnita del problema plano de elasticidad lineal pues, como se presenta a continuación, permite hallar las otras dos incógnitas directamente. A grandes rasgos, el campo de desplazamientos indica, para cada punto de la estructura, el movimiento producido por las fuerzas y condiciones de borde actuantes. Consecuentemente, $\mathbf{u}$ es una función vectorial de dimensión dos en el problema plano. Es común analizar el campo de desplazamientos en función de sus componentes en una base cartesiana como se muestra en la Ecuación (2.1), donde u_x es la componente según el eje x , u_y es la componente según el eje y y $\mathbf{e}_x$ y $\mathbf{e}_y$ son vectores de norma unitaria en el sentido de los ejes x e y , respectivamente. La descomposición del campo de desplazamientos en sus componentes es muy utilizada a lo largo de toda esta tesis.

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y \quad (2.1)$$

El tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ está dado por la Ecuación (2.2), la cual señala que el tensor coincide con la parte simétrica del gradiente de los desplazamientos. Este tensor es de segundo orden y admite una representación matricial al utilizar una base de $\mathbb{R}^2$. En la base cartesiana toma la forma de la Ecuación (2.3), donde ε_{xx} se denomina deformación según el eje x , ε_{yy} se denomina deformación según el eje y y ε_{xy} es la mitad de la denominada distorsión angular entre los ejes x e y .

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) = \nabla^s(\mathbf{u}) \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Finalmente el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ es el que caracteriza las fuerzas internas en la estructura. En el caso del material elástico isótropo lineal que se consideró en esta tesis, el tensor de tensiones se obtiene directamente del

tensor de deformaciones a partir de la Ecuación (2.4). En esta ecuación $\mathbb{C}$ se denomina *tensor elástico* y está dado por la Ecuación (2.5), donde $\mathbb{I}$ es el tensor identidad de cuarto orden, $\mathbf{I}$ es el tensor identidad de segundo orden y λ y μ son el primer y segundo parámetro de Lamé, respectivamente (Malvern, 1969). No es difícil ver que la expresión dada aquí coincide con la versión basada en componentes dada por Sadd (2009). La relación entre los parámetros de Lamé y el módulo de Young y coeficiente de Poisson se presenta a la brevedad.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.4)$$

$$\mathbb{C} = 2\mu\mathbb{I} + \lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (2.5)$$

De forma análoga al tensor de deformaciones, el tensor de tensiones admite una representación matricial al utilizar una base de $\mathbb{R}^2$. En la base cartesiana el tensor toma la forma de la Ecuación (2.6), donde σ_{xx} se denomina componente normal de la tensión para planos normales al eje x , σ_{yy} se denomina componente normal de la tensión para planos normales al eje y y σ_{xy} se denomina tensión rasante según el eje x para planos normales al eje y .

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Existen dos formulaciones clásicas diferenciadas del problema plano de elasticidad lineal, denominadas estado plano de tensiones y estado plano de deformaciones (Timoshenko y Goodier, 1951). El estado plano de tensiones es un caso particular del problema de elasticidad tridimensional, caracterizado por la presencia de algunas componentes nulas en el tensor de tensiones, específicamente las componentes σ_{xz} , σ_{yz} y σ_{zz} (ver más detalles en el libro de Sadd (2009)). El estado plano de tensiones suele presentarse en el análisis de placas delgadas. Por otra parte, el estado plano de deformaciones es un caso particular caracterizado por la presencia de algunas componentes nulas en el tensor de deformaciones, específicamente las componentes ε_{xz} , ε_{yz} y ε_{zz} . El estado plano de deformaciones suele presentarse en el análisis de elementos de gran longitud donde existen restricciones en el desplazamiento según la dirección $\mathbf{e}_z$. Si bien los estados planos de tensiones y deformaciones modelan situaciones muy diferentes, la formulación matemática bidimensional de ambos problemas difiere solamente en la definición de los parámetros de Lamé en términos del módulo de Young y el coeficiente de Poisson del material isótropo. El primer

parámetro de Lamé está dado por la Ecuación (2.7) y el segundo parámetro de Lamé está dado por la Ecuación (2.8), de acuerdo con el libro de Timoshenko y Goodier (1951).

$$\lambda = \begin{cases} \frac{\nu E}{1 - \nu^2} & \text{Estado plano de tensiones} \\ \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \text{Estado plano de deformaciones} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{Ambos casos} \quad (2.8)$$

Resta definir las ecuaciones que gobiernan el problema plano de elasticidad lineal. La primera es la Ecuación (2.9) conocida como *ecuación puntual de equilibrio*. Además, se tienen las condiciones de borde, donde en Γ_D se tiene una condición cinemática expresada por la Ecuación (2.10) y en Γ_N una condición mecánica expresada por la Ecuación (2.11), donde $\mathbf{n}$ es el vector de norma unitaria, normal a $\partial\Omega$ y saliente a Ω .

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (2.9)$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{u}_c \quad (2.10)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})|_{\Gamma_N} = \mathbf{q} \quad (2.11)$$

La *formulación fuerte* del problema plano de elasticidad lineal se presenta en la Ecuación (2.12). Se puede demostrar que si las condiciones de borde de Dirichlet son adecuadas, entonces existe y es única la solución del problema anterior (Sección 6.2, Sadd, 2009). Un detalle no menor es que si uno logra obtener una solución para $\mathbf{u}$, entonces es fácil obtener la solución de las demás incógnitas del problema ya que las deformaciones y tensiones se calculan directamente a partir de los desplazamientos.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 & \text{en } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon} & \text{en } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_c & \text{en } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{q} & \text{en } \Gamma_N \end{array} \right. \quad (2.12)$$

A continuación se presentan algunos conceptos para introducir la denominada *formulación débil*. Esta última formulación fue utilizada en reiteradas ocasiones en esta tesis, principalmente por ser la base del XFEM. El primer concepto que se introduce es el producto escalar entre tensores de segundo orden (:), el cual se define como se presenta en la Ecuación (2.13), donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son tensores y A_{jk} es la componente de la fila j y columna k de una representación matricial de $\mathbf{A}$ (Maas et al. 2019). Se destaca que para que la definición anterior sea correcta, la representación matricial de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ debe ser en la misma base ortonormal.

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 A_{jk} B_{jk} \quad (2.13)$$

Otros conceptos previos que se introducen son el espacio de funciones admisibles $\mathcal{U}$ y el espacio de variaciones admisibles $\mathcal{V}$, dados por las Ecuaciones (2.14) y (2.15), respectivamente (Sección 8.1, Novotny y Sokołowski, 2013). La notación $H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ define el espacio funcional de Hilbert de orden uno para funciones de Ω a $\mathbb{R}^2$. Las funciones de $H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ son aquellas funciones que devuelven vectores de $\mathbb{R}^2$, cuadrado integrables en Ω , cuyas derivadas parciales son también cuadrado integrables (Tartar, 2007).

$$\mathcal{U} := \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \text{ t.q. } \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_D} = \mathbf{u}_c \right\} \quad (2.14)$$

$$\mathcal{V} := \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \text{ t.q. } \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_D} = 0 \right\} \quad (2.15)$$

A partir de los anteriores conceptos se presenta el primer teorema de los trabajos virtuales. Dicho teorema estipula que, dado $\mathbf{u}$ solución del problema plano de elasticidad lineal, se cumple la Ecuación (2.16) para cualquier desplazamiento virtual $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. En la anterior ecuación $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ es el tensor de deformaciones virtuales, el cual se define en la Ecuación (2.17).

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_N \quad (2.16)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \mathbf{v} \quad (2.17)$$

A partir del primer teorema de los trabajos virtuales se define la *formulación débil* del problema que consiste en encontrar $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ que verifique la

Ecuación (2.16) para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Bajo ciertas hipótesis precisas, el teorema de Lax-Milgram prueba que la formulación débil admite una solución única. Además, dicha solución coincide con la de la formulación fuerte cuando esta última existe (Brenner y Scott, 2008).

2.2. Formulación fuerte del problema de dos materiales

En la Figura 2.2 se presenta el esquema del problema de elasticidad plana con dos materiales, necesario para la estrategia de optimización estructural. Se considera que D es el dominio del problema, Ω es la región ocupada por un material rígido y $D \setminus \bar{\Omega}$ es la región ocupada por un material blando. Se considera que el material rígido posee un módulo de Young E_M y un coeficiente de Poisson ν_M . Por otra parte, se considera que el material blando posee un módulo de Young E_V y un coeficiente de Poisson ν_V .

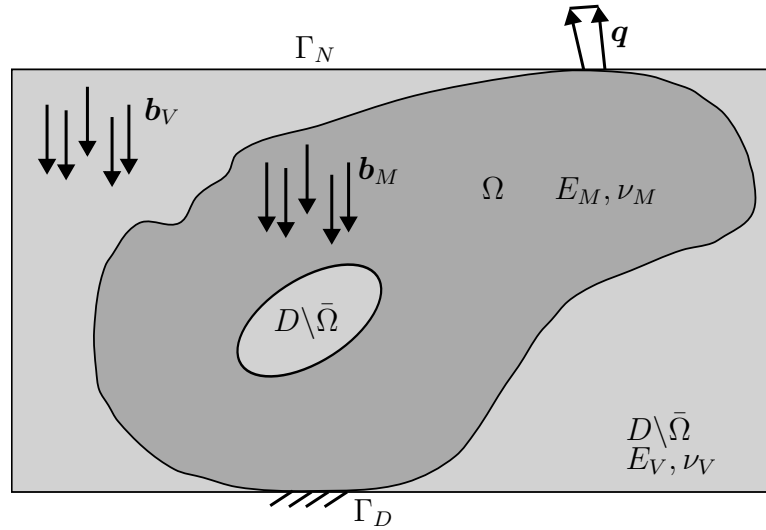


Figura 2.2: Esquema del problema plano de elasticidad lineal para dos materiales

La formulación fuerte del problema de elasticidad de dos materiales se presenta en la Ecuación (2.18). Las tres primeras ecuaciones son las ecuaciones de campo del problema de un solo material, donde $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ se define en la Ecuación (2.19), con $\mathbb{C}_M$ y $\mathbb{C}_V$ el tensor $\mathbb{C}$ calculados con las propiedades E_M y ν_M y E_V y ν_V , respectivamente. Las siguientes dos ecuaciones son las condiciones de borde del problema original, que se mantienen sin cambios. Finalmente, las últimas dos ecuaciones son las que aseguran una unión perfecta entre los dos

materiales en las interfases internas. En estas últimas ecuaciones se considera que $\llbracket \cdot \rrbracket$ es la función de salto bajo la notación de Silhavy, la cual se presenta en la Ecuación (2.20), y donde se recuerda que $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a $\partial\Omega$ y saliente a Ω .

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 & \text{en } D \setminus \partial\Omega \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon} & \text{en } D \setminus \partial\Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} & \text{en } D \setminus \partial\Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_c & \text{en } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = q & \text{en } \Gamma_N \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \rrbracket = 0 & \text{en } D \cap \partial\Omega \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = 0 & \text{en } D \cap \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2.18)$$

$$\mathbb{C}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbb{C}_M & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbb{C}_V & \text{si } \mathbf{x} \in D \setminus \bar{\Omega} \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\llbracket f \rrbracket(\mathbf{x}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (f(\mathbf{x} - \alpha \mathbf{n}) - f(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{n})) \quad (2.20)$$

2.3. Resolución compleja del problema

En las secciones anteriores se presentó el problema plano de elasticidad lineal para uno y dos materiales. Ahora, en esta sección, se introduce un método de resolución analítica, con variables complejas, del problema anterior. Este método fue utilizado para los cálculos analíticos que se realizaron para validar el método de análisis, lo que amerita su presentación. Esta sección está basada principalmente en las secciones 7.5, 10.2 y 10.4 del libro de Sadd (2009). En toda esta sección se considera que $\mathbf{b} = 0$, lo que no es un impedimento para el uso en esta tesis de los conceptos presentados, pues los cálculos analíticos que se realizaron no tenían fuerzas de volumen.

Para la resolución del problema plano de elasticidad lineal con variables complejas se parte del concepto de la *función de tensiones de Airy* (Sadd, 2009). Esta función $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función auxiliar que permite hallar las componentes del tensor de tensiones. En la sección 7.5 del libro de Sadd (2009) se indica que las componentes del tensor de tensiones en coordenadas cartesianas, en un problema sin fuerzas de volumen, se calculan a partir de la función de tensiones de Airy según se presenta en la Ecuación (2.21). En la

ecuación anterior $\partial_x(\cdot)$ es la derivada parcial respecto a coordenada x y $\partial_{xy}^2(\cdot)$ es la derivada parcial segunda, primero respecto a la coordenada y y luego respecto a la coordenada x . La existencia de la función de tensiones de Airy asegura el cumplimiento de la Ecuación (2.9) (Sadd, 2009).

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \partial_{yy}^2 \phi \\ \sigma_{yy} = \partial_{xx}^2 \phi \\ \sigma_{xy} = -\partial_{xy}^2 \phi \end{cases} \quad (2.21)$$

La función de tensiones de Airy satisface una ecuación diferencial en el caso en que no existan fuerzas de volumen. Dicha ecuación se presenta en la Ecuación (2.22) y es la denominada ecuación biarmónica.

$$\nabla^4 \phi = \nabla^2(\nabla^2 \phi) = 0 \quad (2.22)$$

Definida la función de tensiones de Airy se procede a presentar cómo se utilizan las variables complejas para resolver el problema de elasticidad plana. En primer lugar se recuerda que un número complejo z cualquiera se puede representar como presenta la Ecuación (2.23), donde i se denomina *unidad imaginaria* y se define tal que $i^2 = -1$. Se define además el complejo conjugado $\bar{z}$ como se presenta en la Ecuación (2.24).

$$z = x + iy \quad (2.23)$$

$$\bar{z} = x - iy \quad (2.24)$$

La idea de formular el problema de elasticidad con números complejos surge de notar que cualquier punto de $\mathbb{R}^2$ de coordenadas x e y se puede expresar en función de un único complejo z según la Ecuación (2.25). Análogamente, el campo de desplazamientos $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ de la Ecuación (2.1), se puede expresar como un número complejo según presenta la Ecuación (2.26). Con esta idea se logra transformar el problema plano de elasticidad lineal de tener dos incógnitas reales a tener una única incógnita compleja.

$$\begin{cases} x = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{u} = u_x + iu_y \quad (2.26)$$

Como presentó Sadd (2009), la Ecuación (2.22) se expresa en función de la variable compleja de la Ecuación (2.23) como presenta la Ecuación (2.27). De esta última ecuación surge que la función de tensiones de Airy se puede formular en términos de dos funciones de variable compleja como presenta la Ecuación (2.28). Las funciones $\Upsilon(z)$ y $\chi(z)$ se denominan *primer y tercer potencial de Kolosov-Muskhelishvili* (Muskhelishvili, 1977).

$$\partial_{zz}^2 \partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 \phi = 0 \quad (2.27)$$

$$\phi = \text{Re}(\bar{z}\Upsilon(z) + \chi(z)) \quad (2.28)$$

De manera similar a la función de tensiones de Airy, la expresión compleja del campo de desplazamientos también se puede expresar en términos de funciones de variable compleja como muestra la Ecuación (2.29), donde $\psi(z) = \partial_z \chi(z)$ es el *segundo potencial de Kolosov-Muskhelishvili*. κ es la *constante de Kolosov* y se expresa en función del coeficiente de Poisson según muestra la Ecuación (2.30) (Muskhelishvili, 1977). Para evitar la distinción entre estado plano de tensiones y de deformaciones se observó que la constante de Kolosov admite una expresión única en función de los parámetros de Lamé, la cual se presenta en la Ecuación (2.31).

$$2\mu\mathbf{u} = \kappa\Upsilon(z) - z\overline{\partial_z\Upsilon(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (2.29)$$

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{Estado plano de tensiones} \\ 3-4\nu & \text{Estado plano de deformaciones} \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \quad (2.31)$$

En términos generales, resolver el problema de elasticidad plana con variables complejas consiste en encontrar los dos primeros potenciales de Kolosov-Muskhelishvili tales que se verifiquen todas las condiciones de borde. Al encontrar los dos primeros potenciales, se calculan la función de tensiones de Airy, las tensiones y los desplazamientos para cualquier punto del dominio. A

continuación se presentan las soluciones generales de los potenciales en tres casos distintos.

El primer caso de interés es un dominio finito simplemente conexo, es decir que no posee huecos en su interior, como el que se presenta en la Figura 2.3. Para este problema en particular, Sadd (2009) presentó que la solución genérica está dada por las Ecuaciones (2.32) y (2.33), donde a_n y b_n son constantes complejas a ser determinadas con las condiciones de borde del problema a estudiar.

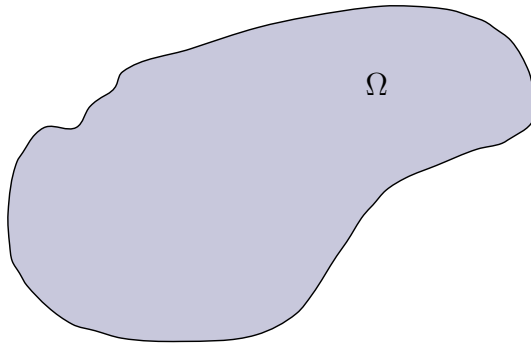


Figura 2.3: Ejemplo de dominio finito simplemente conexo

$$\Upsilon(z) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n z^n \quad (2.32)$$

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} b_n z^n \quad (2.33)$$

El segundo caso de interés son los dominios finitos no simplemente conexos como el que se presenta en la Figura 2.4. En este caso Sadd (2009) presentó que la solución genérica de los potenciales está dada por las Ecuaciones (2.34) y (2.35), donde c_n y d_n son constantes complejas a ser determinadas con las condiciones de borde del problema a estudiar, $\mathcal{N}_H$ es la cantidad de huecos interiores, F_k es la fuerza neta aplicada sobre el hueco k -ésimo y z_k es un punto interior al hueco k -ésimo. Se hace notar que F_k se expresa como un número complejo con el mismo criterio que se utilizó en la Ecuación (2.26).

$$\Upsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (c_n z^n) - \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_H} \frac{F_k}{2\pi(1+\kappa)} \log(z - z_k) \quad (2.34)$$

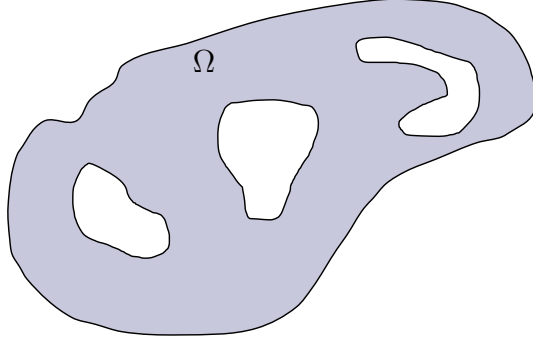


Figura 2.4: Ejemplo de dominio finito no simplemente conexo

$$\psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (d_n z^n) + \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_H} \frac{\kappa \overline{F_k}}{2\pi(1+\kappa)} \log(z - z_k) \quad (2.35)$$

El último caso de interés son los dominios infinitos no simplemente conexos como el que se presenta en la Figura 2.5. En este caso la solución genérica de los potenciales está dada por las Ecuaciones (2.36) y (2.37), donde e_n y f_n son constantes complejas a ser determinadas, y σ_{xx}^∞ , σ_{yy}^∞ y σ_{xy}^∞ son las componentes del tensor de tensiones en el infinito. No se considera el caso de dominio infinito simplemente conexo ya que en este caso las tensiones en todo el dominio coinciden con las tensiones en el infinito.

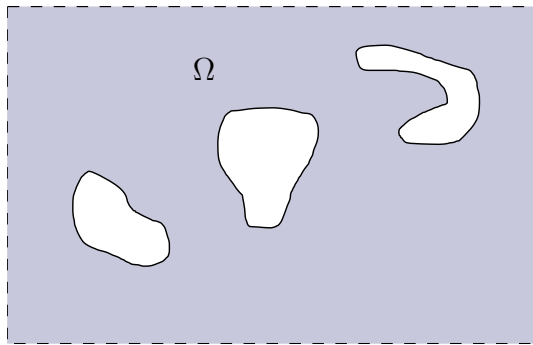


Figura 2.5: Ejemplo de dominio infinito no simplemente conexo

$$\Upsilon(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (e_n z^{-n}) - \frac{\sum_{k=1}^{\mathcal{N}_H} F_k}{2\pi(1+\kappa)} \log(z) + \left(\frac{\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{4} \right) z \quad (2.36)$$

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (f_n z^{-n}) + \frac{\kappa \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_H} \overline{F_k}}{2\pi(1+\kappa)} \log(z) + \left(\frac{-\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty + 2i\sigma_{xy}^\infty}{2} \right) z \quad (2.37)$$

Finalmente se destaca que la metodología para utilizar el método de resolución con variables complejas, se basa en imponer cierto orden a las series de las soluciones genéricas y con las condiciones de borde intentar resolver y hallar las constantes. Este método no permite resolver cualquier problema pero amplía el espectro de los problemas solucionables analíticamente y en particular permitió realizar los cálculos analíticos de los Anexos D y E.

Capítulo 3

Estado del arte

En este capítulo se describe la literatura que, a nivel del conocimiento del autor de esta tesis, abarca lo actualmente publicado en referencia a la temática de este trabajo y en lo que se fundamenta esta investigación. En primer lugar, en la Sección 3.1 se presenta el XFEM y su desarrollo matemático y se incluyen aplicaciones del método en el área de la optimización estructural. Posteriormente en la Sección 3.2 se presenta el concepto de la DT, algunas nociones de su cálculo y el potencial que presenta como herramienta de búsqueda de la topología óptima.

3.1. Método de los elementos finitos extendido

En la resolución del problema plano de elasticidad lineal, y otros problemas de utilidad para los métodos computacionales de optimización topológica, es de común utilización el FEM, tal y como se adelantó en el Capítulo 1 y se identifica en la mayoría de los artículos de la Sección 3.2. Previo a analizar el XFEM, resulta de gran utilidad realizar una breve presentación del FEM aplicado al problema plano de elasticidad lineal de un solo material descrito en la Sección 2.1. Dicha presentación se realiza, a continuación, en la Sección 3.1.1. Luego se incluyen algunas herramientas de integración numéricas de gran utilidad para el XFEM en la Sección 3.1.2. Una vez descrito el FEM se presenta la extensión del método para obtener el XFEM en la Sección 3.1.3, donde se señalan los primeros antecedentes y los avances más recientes en el área.

3.1.1. Presentación del método tradicional

La presentación del FEM que aquí se hace está basada fundamentalmente en lo presentado por Oñate (2009), aunque en ocasiones se indican otras referencias. En pocas palabras, el FEM se basa en transformar un problema continuo en un problema discreto mediante el empleo de una discretización, definida por una malla de *nodos* y *elementos*. Los nodos son aquellos puntos donde se calculan las incógnitas del problema, las cuales, en general para el problema plano de elasticidad lineal, son los desplazamientos. Los elementos son las partes del dominio discretizado que conectan a los nodos y donde se aplican las ecuaciones del problema tras interpolar los valores nodales de las incógnitas. Un ejemplo de una placa rectangular con agujeros circulares discretizada para este método se presenta en la Figura 3.1.

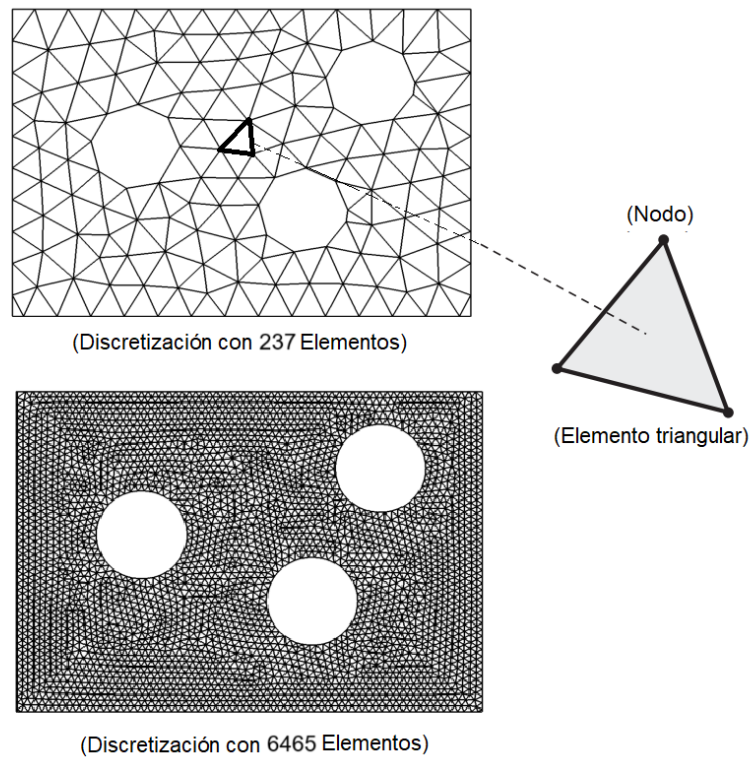


Figura 3.1: Discretización de una placa rectangular agujereada para el FEM. Diagrama basado en uno similar de Sadd (2009)

Existen numerosas formas de discretizar el dominio, entre las cuales se destacan los triángulos y cuadriláteros, y distintas formas de interpolar las variables nodales a los elementos, como ser funciones lineales, cuadráticas, e incluso de mayor orden. En términos generales, las soluciones de elementos

finitos obtenidas con interpolaciones de mayor grado conducen a un error que es un infinitésimo de mayor orden en el tamaño del elemento, pero también son más costosas computacionalmente y de análisis más dificultoso (Oñate, 2009; Zienkiewicz y Taylor, 2005). Para esta tesis se decidió utilizar los elementos triangulares de tres nodos según presentó Oñate (2009), los cuales se extendieron según se describe en detalle en el Capítulo 4.

En términos de la aproximación del FEM, el campo de desplazamientos en cualquier punto del dominio se escribe según presenta la Ecuación (3.1), donde $\mathcal{N}_{no}$ es la cantidad de nodos de la malla de elementos finitos, $u_{x,n}$ y $u_{y,n}$ son las componentes del desplazamiento en el nodo n -ésimo según los ejes x e y , respectivamente; N_n es la función de interpolación tradicional para el nodo n -ésimo, $\mathbf{N}$ es la matriz presentada en la Ecuación (3.2) y $\mathbf{U}$ es el vector presentado en la Ecuación (3.3). La matriz $\mathbf{N}$ se denomina matriz de funciones de interpolación tradicionales y $\mathbf{U}$ se denomina vector de desplazamientos nodales. Se destaca que las entradas de $\mathbf{U}$ son los *grados de libertad* del problema.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_{no}} N_n u_{x,n} \\ \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_{no}} N_n u_{y,n} \end{pmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{U} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_n & 0 & \dots & N_{\mathcal{N}_{no}} & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_n & \dots & 0 & N_{\mathcal{N}_{no}} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{U} = (u_{x,1} \ u_{y,1} \ \dots \ u_{x,n} \ u_{y,n} \ \dots \ u_{x,\mathcal{N}_{no}} \ u_{y,\mathcal{N}_{no}})^T \quad (3.3)$$

Las funciones de interpolación N_n son funciones lineales por partes, continuas en general, derivables en el interior de cada elemento y cumplen que valen uno en su nodo y cero en los demás, tal y como presenta la Ecuación (3.4), donde x_j e y_j son las coordenadas del nodo j -ésimo. Como la función de interpolación del nodo n -ésimo es nula en todos los elementos salvo aquellos que tengan dicho nodo, se definen una matriz $\mathbf{N}^{(e)}$ y un vector $\mathbf{U}^{(e)}$ específicos de un elemento según muestran las Ecuaciones (3.5) y (3.6), donde los índices representan los tres nodos del elemento, con cualquier origen pero siempre en sentido antihorario.

$$N_n(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{si } j \neq n \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{N}^{(e)} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{U}^{(e)} = (u_{x,1} \ u_{y,1} \ u_{x,2} \ u_{y,2} \ u_{x,3} \ u_{y,3})^T \quad (3.6)$$

La formulación basada en el elemento cobra particular importancia a la hora de definir el campo de deformaciones y tensiones dentro del elemento finito. Lo anterior se basa en la Ecuación (3.7), la cual es válida para un solo elemento. Dicha ecuación declara que el campo de desplazamientos dentro de un elemento solamente depende del desplazamiento de los nodos de dicho elemento. De idéntica forma, las deformaciones y tensiones en un elemento solamente dependen del desplazamiento de los nodos del elemento.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U} = \mathbf{N}^{(e)}\mathbf{U}^{(e)} \quad (3.7)$$

A continuación se sigue la metodología presentada en el capítulo cuatro del libro de Oñate (2009), la cual se basa en definir las deformaciones a partir del campo de desplazamientos aproximado por el método y consecuentemente definir las tensiones. Definidos ambos campos se utiliza el primer teorema de los trabajos virtuales, presentado en la Sección 2.1, para obtener el sistema de ecuaciones del método. El tensor de deformaciones, en formato vectorial y para un elemento en particular, se presenta en la Ecuación (3.8), donde $\mathbf{B}^{(e)}$ es la matriz de relación entre los desplazamientos nodales y las deformaciones en el elemento para el método tradicional. La matriz $\mathbf{B}^{(e)}$ se presenta en la Ecuación (3.9).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{(e)}\mathbf{U}^{(e)} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{B}^{(e)} = \begin{pmatrix} \partial_x N_1 & 0 & \partial_x N_2 & 0 & \partial_x N_3 & 0 \\ 0 & \partial_y N_1 & 0 & \partial_y N_2 & 0 & \partial_y N_3 \\ \partial_y N_1 & \partial_x N_1 & \partial_y N_2 & \partial_x N_2 & \partial_y N_3 & \partial_x N_3 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

El tensor de tensiones, en formato vectorial y para un elemento en parti-

cular, se presenta en la Ecuación (3.10), donde $\mathbf{C}$ es la matriz representativa del tensor elástico en el FEM. La matriz $\mathbf{C}$ se presenta en la Ecuación (3.11) y está definida en función de los parámetros de Lamé. El motivo por el cual se expresa de esta manera es para evitar la distinción entre el estado plano de tensiones y el estado plano de deformaciones.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\mathbf{B}^{(e)}\mathbf{U}^{(e)} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

El espacio de funciones admisibles $\mathcal{U}^h$ y el espacio de variaciones admisibles $\mathcal{V}^h$, en el caso del problema discreto vía FEM, están dados por las Ecuaciones (3.12) y (3.13), respectivamente, donde el superíndice h indica la dependencia implícita con la discretización. En las anteriores ecuaciones se entiende por Γ_D^h al conjunto de grados de libertad del vector $\mathbf{U}$ que están restringidos por la condición de borde de Dirichlet. $\mathbf{V}$ es un vector de idéntica forma que $\mathbf{U}$ pero sus entradas son desplazamientos virtuales nodales.

$$\mathcal{U}^h := \{\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U} \text{ t.q. } \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{2\mathcal{N}_{no}} \text{ con } \mathbf{U}|_{\Gamma_D^h} = \mathbf{u}_c\} \quad (3.12)$$

$$\mathcal{V}^h := \{\mathbf{v} = \mathbf{N}\mathbf{V} \text{ t.q. } \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2\mathcal{N}_{no}} \text{ con } \mathbf{V}|_{\Gamma_D^h} = 0\} \quad (3.13)$$

Previo a utilizar el teorema de los trabajos virtuales se presenta el resultado de la Ecuación (3.14), donde $\mathcal{N}_{el}$ es la cantidad de elementos de la malla, $\Omega_j^{(e)}$ es el elemento j -ésimo, φ es una función cualquiera y Ω_h es la aproximación de la geometría real Ω en la discretización empleada. Ω_h y Ω , para los elementos triangulares, solamente coinciden en el caso en que no se tengan bordes curvos. La Ecuación (3.14) indica que la integral en toda la estructura discretizada coincide con la suma de las integrales en todos los elementos. Existe un resultado completamente análogo para los bordes. Otro resultado de gran utilidad se presenta en la Ecuación (3.15), donde $\mathbf{R}^{(e)}$ es simplemente una matriz $6 \times (2\mathcal{N}_{no})$ con ceros y unos que funciona como matriz de restricción que elimina todas las entradas de $\mathbf{U}$ excepto las de $\mathbf{U}^{(e)}$, a las que devuelve en

el orden necesario.

$$\int_{\Omega_h} \varphi d\Omega = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{el}} \int_{\Omega_j^{(e)}} \varphi d\Omega \quad (3.14)$$

$$\mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)} \mathbf{U} \quad (3.15)$$

Ahora, se considera en Ω_h el teorema de los trabajos virtuales, presentado en la Ecuación (2.16), al que se le incorpora la Ecuación (3.14) y se obtiene la Ecuación (3.16). Las Ecuaciones (3.8) y (3.10) se sustituyen en la primera integral de la Ecuación (3.16) para obtener la Ecuación (3.17), donde se introduce $\mathbf{K}^{(e)}$, la cual se denomina *matriz de rigidez elemental* (Zienkiewicz y Taylor, 2005). En la Ecuación (3.16) $\#\Gamma_N$ es la cantidad de segmentos del borde que poseen condición de Neumann y Γ_{Nj} es su segmento j -ésimo. La definición explícita de $\mathbf{K}^{(e)}$ se presenta en la Ecuación (3.18).

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{el}} \int_{\Omega_j^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{el}} \int_{\Omega_j^{(e)}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \sum_{j=1}^{\#\Gamma_N} \int_{\Gamma_{Nj}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} d\Gamma_N \quad (3.16)$$

$$\int_{\Omega_j^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega = \int_{\Omega_j^{(e)}} \mathbf{V}^{(e)\text{T}} \mathbf{B}^{(e)\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} d\Omega = \mathbf{V}^{(e)\text{T}} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega_j^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{B}^{(e)} d\Omega \quad (3.18)$$

De manera análoga a la introducción de la matriz de rigidez elemental, en la Ecuación (3.19) se presenta el resultado de sustituir las formulaciones del FEM en la primera integral del término derecho de la Ecuación (3.16). El vector obtenido, el cual se presenta de forma explícita en la Ecuación (3.20), se denomina *vector elemental de fuerzas nodales de volumen*. Por otra parte, se sigue un procedimiento análogo para la segunda integral del término derecho y se obtiene la Ecuación (3.21). El vector obtenido, el cual se presenta en la Ecuación (3.22), se denomina *vector elemental de fuerzas nodales de contacto*. Se destaca que la formulación elemental está bien definida para esta última integral ya que los bordes del dominio solamente tienen un único elemento asociado.

$$\int_{\Omega_j^{(e)}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega_j^{(e)}} \mathbf{V}^{(e)\text{T}} \mathbf{N}^{(e)\text{T}} \mathbf{b} \, d\Omega = \mathbf{V}^{(e)\text{T}} \mathbf{F}_b^{(e)} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{F}_b^{(e)} = \int_{\Omega_j^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)\text{T}} \mathbf{b} \, d\Omega \quad (3.20)$$

$$\int_{\Gamma_{Nj}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_N = \int_{\Gamma_{Nj}} \mathbf{V}^{(e)\text{T}} \mathbf{N}^{(e)\text{T}} \mathbf{q} \, d\Gamma_N = \mathbf{V}^{(e)\text{T}} \mathbf{F}_q^{(e)} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{F}_q^{(e)} = \int_{\Gamma_{Nj}} \mathbf{N}^{(e)\text{T}} \mathbf{q} \, d\Gamma_N \quad (3.22)$$

Se sustituyen las Ecuaciones (3.17), (3.19) y (3.21) en la Ecuación (3.16) y se obtiene la Ecuación (3.23). Esta última ecuación está expresada en términos de sumatorias de las formulaciones basadas en el elemento. Para obtener una expresión global se sustituye la Ecuación (3.15) y se obtiene la Ecuación (3.24), donde los términos nuevos están dados por las Ecuaciones (3.25) a (3.27). Los términos nuevos se denominan matriz de rigidez global y vectores globales de fuerzas nodales. El proceso de crear la matriz y vectores globales se denomina *ensamblado* (Bazzano y Pérez Zerpá, 2017) y existen diversos métodos para hacerlo computacionalmente, además del uso de la matriz $\mathbf{R}^{(e)}$. El método considerado en esta tesis fue el de crear una matriz dispersa (Golub y Van Loan, 2013) según se presenta en el Anexo A.

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{el}} \mathbf{V}^{(e)\text{T}} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{el}} \mathbf{V}^{(e)\text{T}} \mathbf{F}_b^{(e)} + \sum_{j=1}^{\#\Gamma_N} \mathbf{V}^{(e)\text{T}} \mathbf{F}_q^{(e)} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{V}^{\text{T}} (\mathbf{K} \mathbf{U}) = \mathbf{V}^{\text{T}} (\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_q) \quad (3.24)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{el}} \mathbf{R}^{(e)\text{T}} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{R}^{(e)} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{F}_b = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{el}} \mathbf{R}^{(e)\text{T}} \mathbf{F}_b^{(e)} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{F}_q = \sum_{j=1}^{\#\Gamma_N} \mathbf{R}^{(e)\text{T}} \mathbf{F}_q^{(e)} \quad (3.27)$$

Como la Ecuación (3.24) debe cumplirse para cualquier vector $\mathbf{V}$ que cum-

pla la restricción presentada para el espacio $\mathcal{V}^h$ en la Ecuación (3.13), se obtiene el sistema de ecuaciones lineales de la Ecuación (3.28). Se debe notar que, dado que hay ciertas entradas de $\mathbf{V}$ que deben ser nulas, solamente se deben cumplir las filas del sistema de ecuaciones no asociadas a dichas entradas nulas. Se tiene entonces $2\mathcal{N}_{no} - \#\Gamma_{Dh}$ ecuaciones, donde $\#\Gamma_{Dh}$ es la cantidad de grados de libertad restringidos por la condición de borde de Dirichlet. Como la cantidad de incógnitas coincide con la cantidad de ecuaciones, el sistema se encuentra bien definido. Además, si el problema de la Sección 2.1 tiene condiciones de borde tales que la solución sea única, el sistema de ecuaciones de la Ecuación (3.28) también tiene solución única (Brenner y Scott, 2008). El proceso de incorporar las condiciones de borde de Dirichlet en el método considerado en esta tesis se discute brevemente en la Sección 3.1.3.4 y en detalle en el Anexo A.

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_q \quad (3.28)$$

Un resultado no menor se incluyó en el libro de Hughes (2000), el cual indica que la solución del FEM es la proyección (para cierto producto interno) de la solución del problema continuo al espacio $\mathcal{U}^h$. Lo anterior implica que la solución obtenida es la mejor aproximación posible, dada la discretización y funciones de interpolación que se consideren.

3.1.2. Herramientas de integración numérica

3.1.2.1. Coordenadas intrínsecas

Para obtener la matriz de rigidez y los vectores de fuerza nodales, tanto del FEM como del XFEM, se requieren calcular varias integrales en los elementos, como se presentó anteriormente (ver por ejemplo las Ecuaciones (3.18) y (3.20)). En el FEM se utiliza un cambio de variable para calcular todas las integrales en un único dominio (elemento de referencia) (Oñate, 2009). En la Figura 3.2 se presenta dicho cambio de variable, donde el elemento en las coordenadas (ξ, η) es el *elemento de referencia* y el elemento en las coordenadas (x, y) es el elemento real. Las coordenadas ξ y η son denominadas *coordenadas intrínsecas* (Oñate, 2009) y dicho elemento siempre toma la geometría dada por los nodos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Las integrales realizadas en el elemento de referencia son más sencillas por tres motivos principales. El primer motivo es, como ya se mencionó, el hecho de

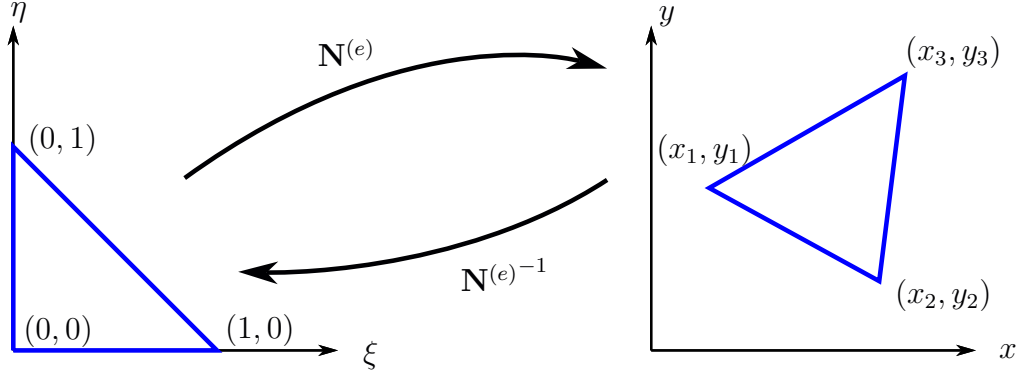


Figura 3.2: Transformación entre las coordenadas intrínsecas y reales

que todas las integrales se hacen en el mismo dominio. El segundo motivo es que las funciones de interpolación tradicionales de elementos triangulares lineales toman formas sencillas y fácilmente calculables en el elemento de referencia, las cuales se presentan en las Ecuaciones (3.29) a (3.31). El tercer motivo es que las coordenadas intrínsecas facilitan el uso de técnicas de integración numérica por cuadratura de Gauss, tema que se discute más adelante.

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (3.29)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \xi \quad (3.30)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \eta \quad (3.31)$$

La transformación desde el elemento de referencia al elemento real es sencilla a partir de las funciones de interpolación tradicionales. Se define la matriz $\mathbf{X}^{(e)}$, denominada matriz geométrica elemental, como presenta la Ecuación (3.32), donde (x_i, y_i) son las coordenadas reales del nodo i -ésimo del elemento. Las coordenadas reales se obtienen en función de las coordenadas intrínsecas según presenta la Ecuación (3.33). Esta transformación es invertible, pero la inversa no es requerida de forma explícita en esta tesis.

$$\mathbf{X}^{(e)} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$\begin{pmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \mathbf{N}^{(e)}(\xi, \eta) \mathbf{X}^{(e)} \quad (3.33)$$

La integral de una función cualquiera φ en el elemento j -ésimo, se calcula en el elemento de referencia utilizando el cambio de variable como presenta la Ecuación (3.34), donde $\Omega_{\xi, \eta}^{(e)}$ es el elemento de referencia en coordenadas intrínsecas y $|\mathbf{J}|$ es el determinante Jacobiano de la transformación. Dicho Jacobiano se define como presenta la Ecuación (3.35), donde se utilizan las Ecuaciones (3.29) a (3.31) y (3.33).

$$\int_{\Omega_j^{(e)}} \varphi(x, y) d\Omega = \int_{\Omega_{\xi, \eta}^{(e)}} |\mathbf{J}| \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} \partial_\xi x & \partial_\xi y \\ \partial_\eta x & \partial_\eta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\xi N_1 & \partial_\xi N_2 & \partial_\xi N_3 \\ \partial_\eta N_1 & \partial_\eta N_2 & \partial_\eta N_3 \end{pmatrix} \mathbf{X}^{(e)} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}^{(e)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.1.2.2. Integración por cuadratura de Gauss

Para calcular integrales en el elemento de referencia de una forma eficiente se decidió hacer uso del método de cuadratura de Gauss, según se describe el libro de Oñate (2009). En esencia, el método se basa en convertir la integral en una sumatoria ponderada del integrando evaluado en puntos específicos. Lo anterior se presenta en la Ecuación (3.36), donde $\xi_{\mathcal{G}}^n$ y $\eta_{\mathcal{G}}^n$ son las coordenadas intrínsecas del punto de Gauss n -ésimo y $\omega_{\mathcal{G}}^n$ es el peso de Gauss correspondiente. La cantidad necesaria de puntos de integración es usualmente pequeña, por lo cual este método es más eficiente que otros métodos más generales de integración numérica.

$$\int_{\Omega_{\xi, \eta}^{(e)}} \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{n=1}^{n=\# \text{ Punt. de Gauss}} \varphi(\xi_{\mathcal{G}}^n, \eta_{\mathcal{G}}^n) \omega_{\mathcal{G}}^n \quad (3.36)$$

En el caso de integrales en triángulos se conocen las coordenadas y los pesos de los puntos de Gauss mínimos necesarios para calcular exactamente integrales de polinomios de distintos grados (Oñate, 2009). En la Figura 3.3 se presentan, en un triángulo genérico, las localizaciones de los puntos de Gauss

en las tres combinaciones utilizadas en esta tesis.

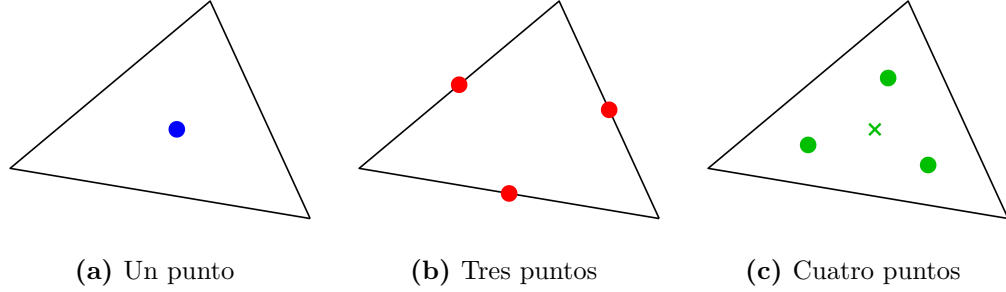


Figura 3.3: Esquema de las localizaciones de los puntos de Gauss en triángulos

La Tabla 3.1 presenta, en coordenadas intrínsecas, la localización y los pesos de las combinaciones de puntos de Gauss utilizadas en esta tesis. La tabla presenta además el grado de polinomio que es integrado en forma exacta. Los valores presentados en esta tabla se utilizaron tanto para el cálculo de las integrales de la matriz de rigidez como para el cálculo de los funcionales del problema de optimización estructural y sus DT según se discute en el Capítulo 5.

Tabla 3.1: Tabla de posiciones y pesos de los puntos de Gauss para triángulos (Oñate, 2009)

# Puntos	ξ_g	η_g	ω_g	Grado
1	1/3	1/3	1/2	1
3	0,5	0,5	1/6	2
	0,0	0,5	1/6	
	0,5	0,0	1/6	
4	1/3	1/3	-0,281250000	3
	0,6	0,2	0,260416667	
	0,2	0,6	0,260416667	
	0,2	0,2	0,260416667	

Existen casos, como por ejemplo las cargas de superficie, que implican realizar el cálculo de una integral en un borde en vez de en el interior del dominio. Para estos casos, también se considera un esquema de coordenadas intrínsecas, las cuales parametrizan un segmento de borde en la coordenada $\xi \in [-1, 1]$. Dicha transformación presenta un Jacobiano $\mathbf{J} = L/2$, donde L es la longitud del segmento real. Para estos casos también se cuenta con un método de integración en puntos de Gauss, donde las coordenadas y pesos para los casos considerados en esta tesis se presentan en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2: Tabla de posiciones y pesos de los puntos de Gauss para segmentos (Oñate, 2009)

# Puntos	ξ_g	ω_g	Grado
1	0	2	1
2	$1/\sqrt{3}$	1	3
	$-1/\sqrt{3}$	1	

3.1.3. Extensión del método de elementos finitos

3.1.3.1. Concepto del XFEM

El primer antecedente para el XFEM parece ser el artículo presentado por Belytschko y Black (1999). En este artículo los autores presentaron un método para modelar fisuras sin tener que adaptar la malla de elementos finitos de forma explícita a la geometría de la fisura. Lo anterior lo hicieron al incorporar incógnitas adicionales a los nodos cercanos a la fisura y adicionar funciones de interpolación especializadas asociadas a las nuevas incógnitas. Si bien este artículo sembró las bases de lo que es hoy el XFEM, la propuesta no lograba representar cualquier tipo de fisura e implicaba remallar cuando la fisura era muy larga o con curvas pronunciadas. El anterior inconveniente va en contra del objetivo del XFEM de lograr modelar fenómenos sin tener que remallar, cuestión que el artículo mencionado en el siguiente párrafo pudo mejorar.

El siguiente trabajo pionero para el XFEM es el artículo presentado por Moës et al. (1999). En este artículo los autores mejoraron la propuesta de Belytschko y Black (1999) al incorporar variables adicionales a lo largo de toda la fisura. Dichas variables caracterizan la apertura y movimiento relativo de la fisura mediante funciones de Haar. Con estas nuevas variables se pudo modelar cualquier fisura que admitiera ser discretizada por segmentos rectos en el interior de los elementos. En dicho artículo se pudo estudiar la propagación de fisuras sin tener que remallar, logrando así la primera formulación formal del XFEM.

Una conclusión principal del artículo de Moës et al. (1999) es que el XFEM se caracteriza por introducir nuevas variables en los nodos de la malla y funciones de forma especializadas para caracterizar algún tipo de discontinuidad. En el trabajo pionero, el origen de la discontinuidad fueron fisuras, las cuales generan discontinuidades en el campo de desplazamientos. Por otra parte, en esta tesis las discontinuidades son relativas al cambio de material del problema

de elasticidad, lo que genera discontinuidades en el campo de deformaciones. A pesar de la diferencia, la filosofía de trabajo del XFEM pudo ser aplicada como se presenta más adelante.

La Figura 3.4 presenta la definición, según se consideran en esta tesis, de los componentes principales del XFEM: los *nodos extendidos* y los *elementos extendidos*. A partir de una discontinuidad (fisura o interfase entre materiales) en el dominio, se considera que los nodos extendidos son aquellos asociados a los elementos cortados por la discontinuidad. En los nodos extendidos es donde se definen las variables adicionales o extendidas del problema. Luego, se define que los elementos extendidos son aquellos donde las variables extendidas afectan al campo de desplazamientos interpolado. En el caso de esta tesis y el trabajo de Moës et al. (1999), los elementos extendidos son aquellos elementos cortados por la discontinuidad. Otros autores han definido a los elementos extendidos como aquellos que poseen algún nodo extendido pero esta definición no tuvo aplicación para esta tesis.

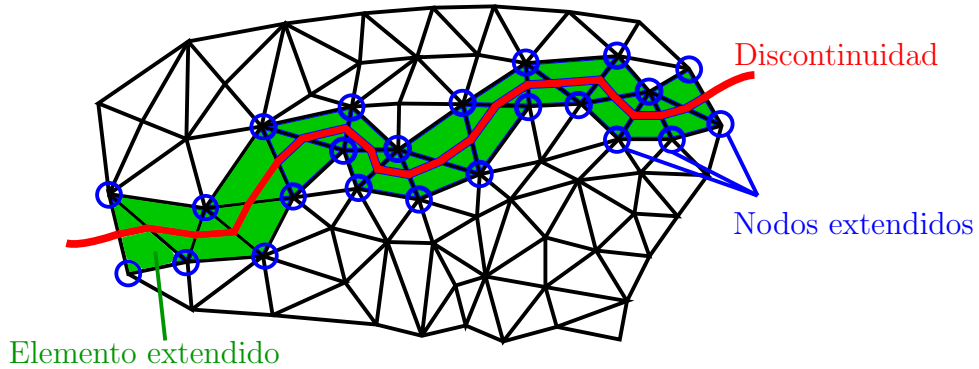


Figura 3.4: Definición de nodos extendidos y elementos extendidos

Otro trabajo importante en el desarrollo del XFEM fue el artículo de Dolbow et al. (2001), donde se empleó por primera vez el nombre del método. En este artículo los autores incluyeron una aplicación del método, donde incorporaron una ley constitutiva no lineal que incluye la fricción en la fisura. Además, los autores echaron luz sobre un posible método para hacer la integración de las funciones de interpolación adicionales en los elementos extendidos.

Se concluyó de los anteriores artículos que el campo de desplazamientos en el XFEM es según la Ecuación (3.37), donde $\mathcal{N}_{\mathbf{x}}$ es la cantidad de incógnitas adicionales, $a_{x,n}$ y $a_{y,n}$ son las componentes de la incógnita adicional n -ésima $\mathbf{a}_n$ según los ejes x e y , respectivamente; w_n es la función de interpolación especializada para la incógnita adicional n -ésima, $\mathbf{W}$ es la matriz presentada

en la Ecuación (3.38) y $\mathbf{A}$ es el vector presentado en la Ecuación (3.39). La matriz $\mathbf{W}$ se denomina *matriz de funciones de interpolación extendidas* y $\mathbf{A}$ se denomina *vector de grados de libertad extendidos*. Para esta tesis se definió que cada incógnita adicional es un par $\mathbf{a}_n = (a_{x,n} \ a_{y,n}) \in \mathbb{R}^2$, por lo que la cantidad de grados de libertad extendidos es $2\mathcal{N}_{\mathbf{x}}$.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_{no}} N_n u_{x,n} + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_{\mathbf{x}}} w_n a_{x,n} \\ \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_{no}} N_n u_{y,n} + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_{\mathbf{x}}} w_n a_{y,n} \end{pmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{U} + \mathbf{W}\mathbf{A} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \dots & w_n & 0 & \dots & w_{\mathcal{N}_{\mathbf{x}}} & 0 \\ 0 & w_1 & \dots & 0 & w_n & \dots & 0 & w_{\mathcal{N}_{\mathbf{x}}} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{A} = (a_{x,1} \ a_{y,1} \ \dots \ a_{x,n} \ a_{y,n} \ \dots \ a_{x,\mathcal{N}_{\mathbf{x}}} \ a_{y,\mathcal{N}_{\mathbf{x}}})^T \quad (3.39)$$

Por lo dicho en los párrafos anteriores, el XFEM consiste en agregar variables adicionales a algunos nodos, los cuales se denominan nodos extendidos, e incorporar funciones de interpolación especializadas en los elementos extendidos. Las funciones de interpolación especializadas y las variables adicionales definen las distintas propuestas de XFEM existentes. Un detalle no menor es que, según la propuesta, un nodo extendido puede llegar a tener más de una incógnita adicional.

3.1.3.2. Método de la función de nivel

Si bien, como fue mencionado anteriormente, el origen del XFEM fue el estudio de problemas de elasticidad con material fisurado; desde el artículo de Sukumar et al. (2001) se ha utilizado también para modelar interfases entre dos materiales. En este artículo, al igual que en la mayoría de las propuestas de XFEM para dos materiales y huecos, se hizo uso del método de la *función de nivel*. Dada la importancia del método de la función de nivel, primero se presenta sus conceptos básicos antes de discutir las propuestas de XFEM.

El trabajo más citado en la bibliografía como origen del método de la función de nivel es el artículo de Osher y Sethian (1988), en el cual se lo utilizó para modelar la propagación de una llama. En dicho artículo se definió una función auxiliar $\Psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz continua, tal que la zona donde $\Psi > 1$ define la zona quemada y la zona donde $\Psi < 1$ define la zona sin

quemar. Lo anterior implica que, en dicho artículo, $\Psi = 1$ define la interfase entre ambas zonas. Los autores utilizaron la función Ψ , a la cual denominaron función de nivel, ya que la velocidad de propagación de la llama depende de la curvatura de la interfase. Según indicaron los autores, analizar el problema mediante la función de nivel resultaba más sencillo que a partir de los métodos tradicionales de rastrear la interfase (Zabusky, 1988) o de volumen de fluido (Noh y Woodward, 1976). El motivo detrás de una más sencilla resolución es que, con el método de la función de nivel, el problema original pasa a ser resolver una ecuación de Hamilton-Jacobi para la función de nivel. Por otra parte, con el método de rastreo de la interfase tienden a ocurrir inestabilidades, fundamentalmente si existen cambios topológicos como ser reconexiones de la interfase, y por el método de volumen de fluido no es explícito calcular la curvatura de la interfase.

Se entiende entonces que el método de la función de nivel separa el dominio en dos subdominios utilizando una función auxiliar Ψ tal que la interfase entre los subdominios es una curva de nivel de dicha función. Además de modelar la propagación de una llama, el método ha sido recientemente utilizado para modelar un mismo material en dos estados distintos (Canelas et al. 2019), para analizar la dinámica de dos fluidos no miscibles (Sharma, 2015), para el tratamiento de imágenes por computadora (Lin et al. 2004), para modelar estructuras de más de un material como los casos que se presentan más adelante en esta sección, entre otros.

En esta tesis se consideró la aplicación de la función de nivel para el caso de estructuras de más de un material. Dicha aplicación es en la que se basan las propuestas de XFEM que se presentan a continuación. En esta tesis, al igual que en el artículo de Sukumar et al. (2001), se considera que la zona $\Psi > 0$ define la estructura (define Ω), la zona $\Psi < 0$ define los vacíos (define $D \setminus \overline{\Omega}$) y la curva $\Psi = 0$ define la interfase (define $\partial\Omega$) tal y como presenta la Ecuación (3.40). Un ejemplo de esta aplicación se presenta en las Figuras 3.5 y 3.6, donde la Figura 3.5 presenta una función de nivel de ejemplo y la Figura 3.6 presenta la estructura asociada a dicha función de nivel, en la cual se consideró el color negro para la estructura y blanco para los vacíos. Una posible interpretación que surge de esta definición de la función de nivel es que hace las veces de una distancia signada (positiva para estructura, negativa para vacíos) del punto a la interfase más cercana.

$$x \in \begin{cases} \Omega & \Leftrightarrow \Psi(x) > 0 \\ D \setminus \overline{\Omega} & \Leftrightarrow \Psi(x) < 0 \\ \partial\Omega & \Leftrightarrow \Psi(x) = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

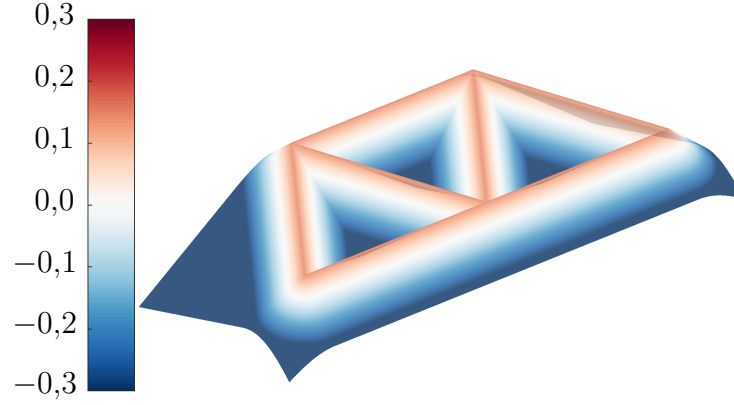


Figura 3.5: Ejemplo de función de nivel para definir una estructura



Figura 3.6: Estructura asociada a la función de nivel de la Figura 3.5

3.1.3.3. Propuestas de XFEM para modelar interfaces

Con el método de la función de nivel presentado, se introducen en esta sección las propuestas de XFEM para interfaces entre dos materiales actualmente publicadas. La primer propuesta, la cual sigue siendo utilizada, es la que propusieron Sukumar et al. (2001). En dicha propuesta se consideró que la función de interpolación extendida asociada al nodo n -ésimo fuera la función de interpolación tradicional multiplicada por una función g , como presenta la Ecuación (3.41). Para definir la función g en primer lugar se consideró que la función de nivel Ψ solamente está definida en los nodos y su valor en el dominio se interpola mediante las funciones de interpolación tradicionales, según

muestra la Ecuación (3.42). Luego, los autores consideraron que la función g valdría $|\Psi|$ en los elementos cortados y en el resto se consideraría una función suavizada mediante un algoritmo descrito en el artículo.

$$w_n = gN_n \quad (3.41)$$

$$\Psi = \sum_{n=1}^{N_{no}} N_n \Psi_n \quad (3.42)$$

En base a la propuesta de Sukumar et al. (2001) y el uso de elementos triangulares lineales se obtiene que los elementos que tienen interfase son aquellos en los que uno de sus tres nodos tiene signo distinto en Ψ al de los otros dos. Además, dado que la función de nivel se interpola en el elemento con las funciones de interpolación tradicionales, se tiene que en un mismo elemento la interfase es un segmento de recta. Estos resultados fueron utilizados en la formulación de XFEM que se consideró en esta tesis y son válidos además para todas las propuestas que se presentan a continuación.

La Figura 3.7 presenta un esquema, en el caso unidimensional, de cómo se calculan y cómo quedan las funciones de interpolación extendidas para la propuesta de Sukumar et al. (2001). En la figura los círculos negros representan los nodos y las barras negras los elementos. La imagen (a) de la figura muestra un ejemplo de función de nivel que, dado el cambio de signo, define una interfase en el tercer elemento separando las regiones de diferente material. La imagen (b) muestra la función g que en el caso unidimensional de una sola interfase es uniforme salvo en el elemento cortado que vale $|\Psi|$. Vale notarse que en casos de más dimensiones, o de un mayor número de interfases, la función fuera del elemento cortado no es necesariamente uniforme y se obtiene por un algoritmo de regularización descrito en el artículo. Finalmente se presenta en las imágenes (c) y (d) de la figura las funciones de interpolación extendidas para las variables adicionales del tercer y cuarto nodo, respectivamente. La figura muestra que las variables adicionales admiten un salto en la derivada del desplazamiento en la interfase sin perder la continuidad de desplazamientos. Una desventaja de la propuesta de Sukumar et al. (2001) es que el desplazamiento de los nodos extendidos deja de coincidir con la variable que los representa en el FEM ya que las funciones de interpolación extendidas son no nulas en sus respectivos nodos.

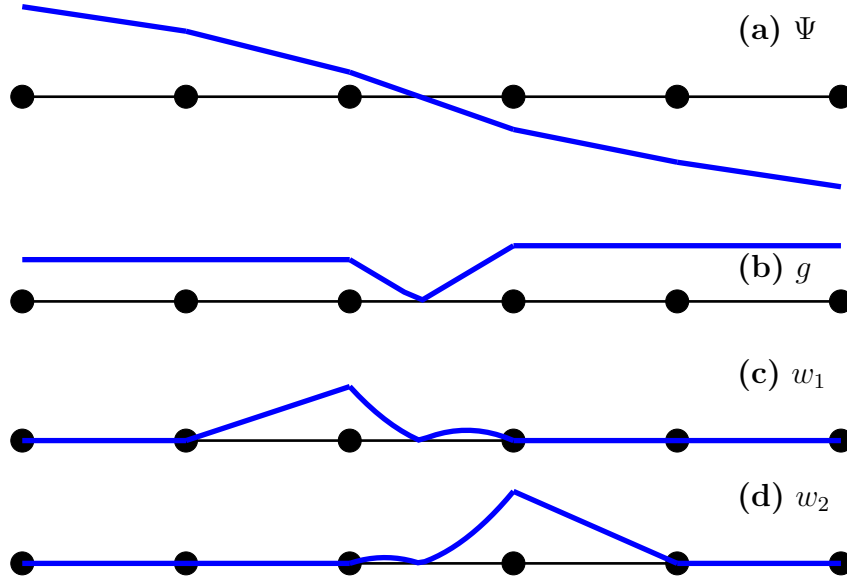


Figura 3.7: Esquema unidimensional del cálculo de w_n para la propuesta de Sukumar et al. (2001)

En el artículo, Sukumar et al. (2001) observaron en algunos ejemplos que al reducir el tamaño del elemento la solución numérica con el XFEM pareció converger a las soluciones exactas con un orden cercano al óptimo. Se define por orden óptimo de convergencia para el XFEM el obtenido por el FEM con una malla conforme a la discontinuidad. Por otra parte los autores estudiaron el problema de la barra de dos materiales sometida a tracción, el cual se presenta en la Figura 3.8, donde se aseguraron que la interfase cortara elementos. Los autores observaron que la propuesta de extensión logra resolver exactamente dicho problema.

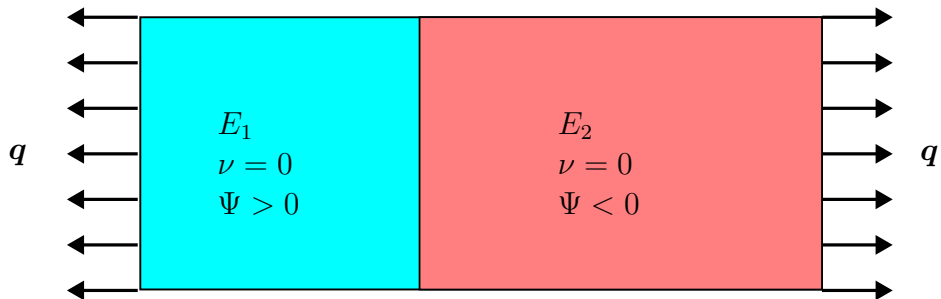


Figura 3.8: Esquema de la barra de dos materiales sometida a tracción

La gran dificultad de la propuesta de Sukumar et al. (2001) es el algoritmo de suavizado que consideraron para obtener la función g fuera de los elementos

cortados. Dicho algoritmo implica identificar los nodos que comparten conectividad con los nodos extendidos, lo que requiere identificar todos los elementos que poseen algún nodo extendido, y calcular las distancias entre una gran proporción de estos nodos y los extendidos. Por estos dos motivos el método puede ser dificultoso de ser aplicado a análisis que requieran modificar continuamente la geometría como es el caso de los métodos de optimización topológica. Como punto adicional, las dos propuestas que se presentan a continuación presentaron mejores ordenes de convergencia que la propuesta de Sukumar et al. (2001) en los ejemplos que los autores de estas nuevas propuestas presentaron.

La siguiente propuesta que se presenta es la que introdujeron Moës et al. (2003). De manera análoga a la anterior, las funciones de interpolación extendidas de esta propuesta se calculan según la Ecuación (3.41). La diferencia con la propuesta de Sukumar et al. (2001) es que en este caso la función g está dada por la Ecuación (3.43). La función g , en este caso denominada *función de cresta*, presenta la ventaja de ser nula salvo en el interior de los elementos extendidos.

$$g = \sum_{n=1}^{N_{no}} N_n |\Psi_n| - \left| \sum_{n=1}^{N_{no}} N_n \Psi_n \right| \quad (3.43)$$

Se presenta en la Figura 3.9 el esquema unidimensional del cálculo de las funciones de interpolación extendidas de la propuesta de Moës et al. (2003), con el mismo formato que la Figura 3.7. La imagen (a) nuevamente presenta una función de nivel de ejemplo que define una interfase en el tercer elemento. Luego, la imagen (b) de la figura muestra la forma que toma el primer término de la función g , el cual representa la interpolación a los elementos finitos del valor absoluto de los valores nodales de la función de nivel. La imagen (c) muestra la forma que toma el segundo término de la función g , el cual representa el valor absoluto de la función de nivel ya interpolada. De las imágenes (b) y (c) queda claro el motivo por el cual la función g es siempre no negativa y es nula en todos los elementos salvo los extendidos. Finalmente, la imagen (d) muestra la forma que toma la función g en este caso y las imágenes (e) y (f) muestran las funciones de interpolación extendidas para las variables adicionales del tercer y cuarto nodo, respectivamente. Nuevamente se obtiene que las variables adicionales admiten un salto en la derivada del desplazamiento en la interfase sin perder la continuidad. Adicionalmente, esta propuesta tiene la ventaja de que, como las funciones de interpolación extendidas son nulas

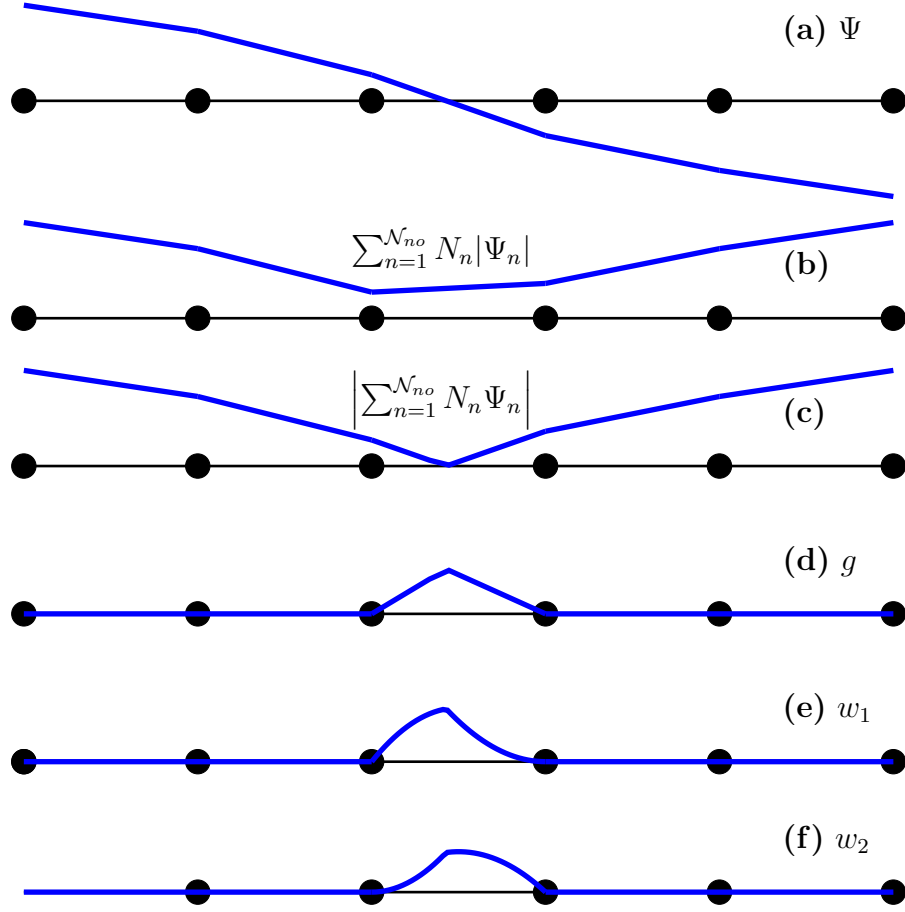


Figura 3.9: Esquema unidimensional del cálculo de w_n para la propuesta de Moës et al. (2003)

en los nodos, el desplazamiento de todos los nodos mantiene la representación dada por el FEM. Esto último es de gran utilidad para la interpretación de resultados, ya que las variables tradicionales del FEM representan los desplazamientos nodales y las variables adicionales representan las perturbaciones en el campo de desplazamientos

En su artículo, Moës et al. (2003) también hicieron algunos ejemplos en los cuales se volvió a ver que, al reducir el tamaño de los elementos, la solución numérica con el XFEM converge a las soluciones exactas con un orden de convergencia cercano al óptimo y mejor que el obtenido con la propuesta de Sukumar et al. (2001). Si bien en el artículo los autores no estudiaron el problema de la Figura 3.8; en el marco de esta tesis se identificó que esta propuesta también lo logra resolver exactamente. Se destaca que no se identificaron en la bibliografía desventajas significativas a la propuesta de Moës et al. (2003)

para modelar interfases entre dos materiales distintos.

Otra propuesta de XFEM fue hecha por Fries (2008), la cual se basa nuevamente en la Ecuación (3.41). El autor de dicha propuesta identificó que, para funciones g genéricas, aparecen problemas en los elementos de transición, a los cuales definieron como los elementos que poseen simultáneamente nodos extendidos y nodos tradicionales. El motivo de estos problemas es que la función g no puede obtenerse exactamente en los elementos de transición ya que la suma de las funciones de interpolación tradicionales de los nodos extendidos no es igual a uno en dichos elementos. El problema está en que, si la función g es no uniforme, las variables extendidas introducen términos indeseados de orden mayor al de las funciones de interpolación tradicionales que no pueden ser compensados.

Para resolver los problemas del párrafo anterior, Fries (2008) propuso modificar la función g al multiplicarla por una función de rampa, tal que la función se mantuviera incambiada en los elementos extendidos, nula en los elementos tradicionales y con una variación continua en los elementos de transición. Dicha modificación para g se presenta en la Ecuación (3.44). Además de esta modificación, el autor indicó que es necesario introducir variables adicionales, no solo a los nodos extendidos sino también a los nodos de los elementos de transición.

$$g^{\text{mod}} = g \sum_{n=1}^{N_{\mathbf{x}}} N_n \quad (3.44)$$

Las modificaciones presentadas por Fries (2008) no son exclusivas para modelar interfases entre dos materiales distintos, sino genéricas para el XFEM. Para el problema de modelar interfases, el autor consideró funciones g distintas para cada nodo, lo que llevó a una nueva expresión para las funciones de interpolación extendidas dada por la Ecuación (3.45). Las funciones g_n están basadas en la considerada por Sukumar et al. (2001), con un corrimiento dado por el valor de $|\Psi|$ en el nodo extendido asociado a la variable adicional n -ésima, como muestra la Ecuación (3.46), para asegurar un valor nulo en su nodo. Se destaca que, a diferencia de la propuesta de Sukumar et al. (2001), la propuesta de Fries (2008) no requiere de ningún tipo de algoritmo de suavizado.

$$w_n = g_n^{\text{mod}} N_n \quad (3.45)$$

$$g_n = \left| \sum_{j=1}^{N_{no}} N_j \Psi_j \right| - |\Psi_{\text{nodo ext. } n}| \quad (3.46)$$

Se presenta en la Figura 3.10 el esquema unidimensional del cálculo de las funciones de interpolación de la propuesta de Fries (2008), con el mismo formato que las figuras anteriores. Nuevamente la imagen (a) de la figura muestra la función de nivel de ejemplo que define una interfase solo en el tercer elemento. Luego, la imagen (b) muestra las formas que toman las funciones g_n para esta propuesta y la imagen (c) muestra las formas que dichas funciones toman al aplicar la modificación de la Ecuación (3.44). Finalmente la imagen (d) muestra las funciones de interpolación especializadas para las cuatro variables adicionales asociadas a los nodos dos a cinco.

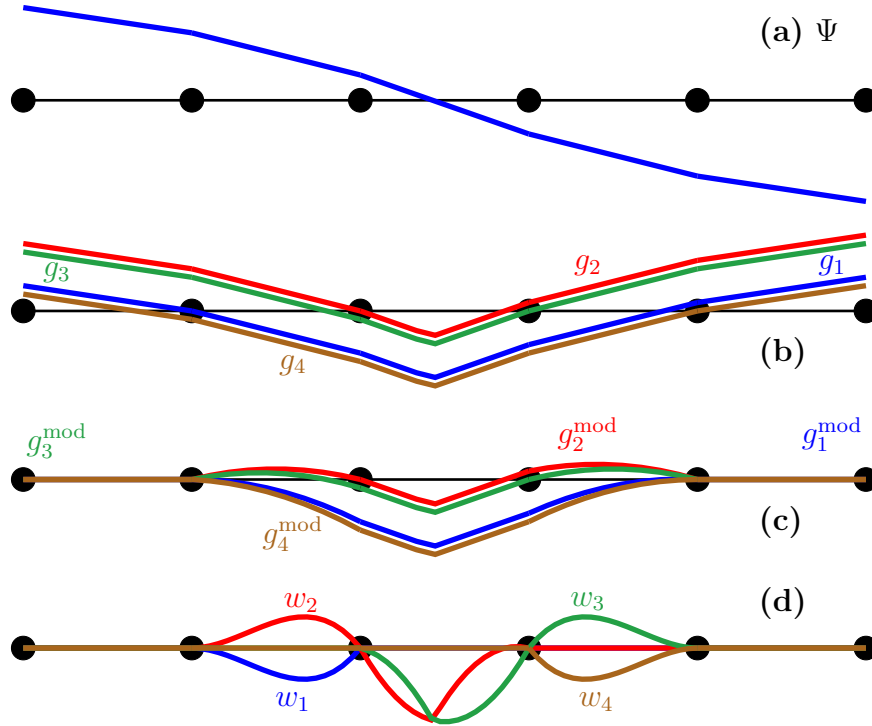


Figura 3.10: Esquema unidimensional del cálculo de w_n para la propuesta de Fries (2008)

Al igual que en todas las propuestas anteriores, se obtiene que las variables adicionales admiten un salto en la derivada en el desplazamiento en la interfase sin perder la continuidad de desplazamientos. La gran ventaja que presenta esta propuesta respecto a la de Sukumar et al. (2001) es que las variables adicionales de los nodos dos y cinco permiten resolver cualquier cualquier efecto

no deseado en los elementos de transición, ya que solamente afectan el campo de desplazamientos en dichos elementos. Como punto adicional, al igual que la propuesta de Moës et al. (2003), las funciones de interpolación extendidas son nulas en los nodos, por lo cual el desplazamiento de los nodos mantiene la representación de los desplazamientos nodales dada por el FEM.

Fries (2008) analizó la convergencia al reducir el tamaño de los elementos en una placa circular sometida a tracción uniforme. Se obtuvo que la solución numérica con el XFEM de Fries (2008) converge, al reducir el tamaño del elemento, a las soluciones exactas con una tasa cercana a la óptima. También se obtuvo que la tasa de convergencia era mayor a la obtenida con la propuesta de Sukumar et al. (2001). En el marco de esta tesis también se identificó que esta propuesta logra resolver exactamente el problema de la Figura 3.8. Como punto adicional, la propuesta de Fries (2008) es superior a la de Sukumar et al. (2001) por no necesitar el algoritmo de suavizado.

A pesar de las ventajas que presenta la propuesta de Fries (2008) frente a la de Sukumar et al. (2001), sigue siendo inferior a la propuesta de Moës et al. (2003) para extender los elementos triangulares de tres nodos. Un primer motivo detrás de la anterior afirmación radica en que esta propuesta mantiene la dificultad que presentaba la propuesta de Sukumar et al. (2001) de tener que identificar los elementos de transición. Otro motivo, es el hecho que la propuesta de Fries (2008) incluye más incógnitas que la propuesta de Moës et al. (2003). A la propuesta de Moës et al. (2003) no le son de utilidad las modificaciones propuestas por Fries (2008) ya que la función g es, por definición, nula en los elementos no cortados.

Otra propuesta fue considerada en el artículo de Sukumar et al. (2001) para modelar huecos y no interfases entre materiales. En dicha propuesta, los autores consideraron un caso particular del XFEM, en el cual no incluyeron variables adicionales sino que el campo de desplazamientos lo calcularon según la Ecuación (3.47), donde $H(x)$ es una función Heaviside dada por la Ecuación (3.48). Se tiene entonces que en la propuesta de Sukumar et al. (2001) para huecos no se modelan los desplazamientos de la región que modela los vacíos, lo que muestra por qué no es una propuesta capaz de modelar interfases entre dos materiales distintos, sino solamente capaz de modelar huecos.

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_{no}} N_n(x) H(x) \mathbf{u}_n \quad (3.47)$$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi(x) > 0 \\ 0 & \text{si } \Psi(x) \leq 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

Sukumar et al. (2001) analizaron la convergencia del método en el caso de una placa infinita sometida a tracción uniaxial con un hueco interior y obtuvieron un orden de convergencia óptimo pero, como dicha propuesta no modela los desplazamientos de la fracción vacía, no sería capaz de resolver exactamente el problema de la Figura 3.8. A pesar de sus dificultades, esta propuesta es fácil de implementar y rápida de utilizar ya que no requiere más variables que el FEM.

Una última propuesta, que solamente es capaz de modelar huecos y no interfaces entre dos materiales, fue hecha por Makhija y Maute (2014), quienes a su vez se basaron en el artículo de Hansbo y Hansbo (2004). Dicha propuesta está basada en la de Sukumar et al. (2001) para huecos pero los autores identificaron que, si las funciones de interpolación tradicionales de un mismo nodo pasan por zonas no conectadas de un mismo material, ocurren errores significativos en la solución. Lo anterior puede ocurrir en el caso que dos interfaces se encuentren separadas por una distancia menor al tamaño de un elemento. Para solventar este problema los autores decidieron que, si se da dicho caso, se introducen nuevas incógnitas y se separa la función de interpolación de las distintas partes materiales.

Para ilustrar los conceptos de la propuesta de Makhija y Maute (2014), se presenta en la Figura 3.11 un esquema unidimensional de la forma que toman las funciones de interpolación de dicha propuesta. Similar a las figuras anteriores, la imagen (a) presenta una función de nivel de ejemplo, con la particularidad que en este caso se definen dos interfaces, una en cada uno de los dos elementos adyacentes al cuarto nodo. La propuesta de Sukumar et al. (2001) considera las funciones de interpolación presentadas en la imagen (b) de la Figura 3.11, con las incógnitas allí indicadas, con la salvedad que el tramo que en la figura se le asigna la variable adicional $\mathbf{a}_1$, sería también asociado a la variable $\mathbf{u}_4$. Como el cuarto nodo se encuentra bajo la situación problemática que Makhija y Maute (2014) identificaron, se asignan incógnitas diferentes a cada tramo permitiendo desvincular los desplazamientos de las dos interfaces.

En el artículo, Makhija y Maute (2014) no hicieron análisis de convergencia del método, pero ya que las modificaciones respecto al de Sukumar et al. (2001) son localizadas, se espera que tenga un orden de convergencia similar. Los

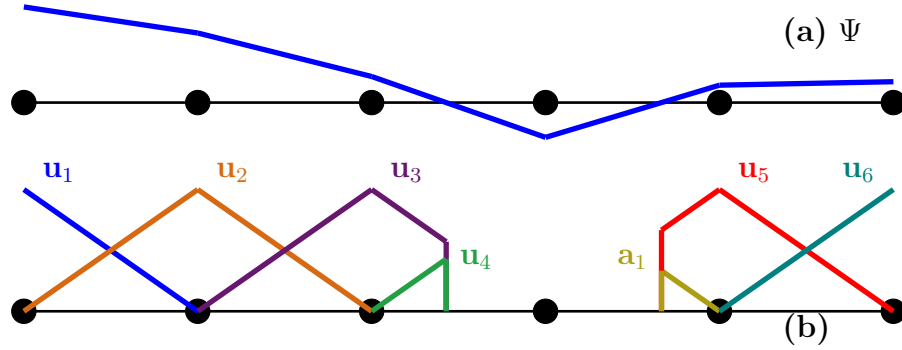


Figura 3.11: Esquema unidimensional del cálculo de las funciones de interpolación para la propuesta de Makhija y Maute (2014)

autores sí analizaron un caso de una barra cortada, sometida a desplazamientos de tracción, y observaron que las modificaciones realizadas lograron solucionar el problema de esfuerzos irreales que aparecían con la propuesta de Sukumar et al. (2001) para huecos.

Ya que en esta tesis fue de interés modelar razonablemente bien la fracción vacía además de la fracción asociada al material estructural, se consideró inicialmente que la propuesta de Moës et al. (2003) es la más adecuada. De todas formas se destaca el inconveniente identificado por Makhija y Maute (2014), el cual tiene particular interés en la propuesta del XFEM que se hizo para este trabajo de investigación.

Un detalle que se observó en todas las propuestas del XFEM presentes en la bibliografía es que en ningún caso se analizó el comportamiento de las soluciones numéricas en el caso que la diferencia de rigidez entre los dos materiales fuera de varios órdenes de magnitud. Los casos estudiados por Fries (2008), Moës et al. (2003) y Sukumar et al. (2001) fueron siempre asociados a diferencias de rigidez de razón 10 y las propuestas para huecos de Makhija y Maute (2014) y Sukumar et al. (2001) solamente permiten modelar el material estructural y no los huecos.

3.1.3.4. Consideraciones generales del XFEM en problemas con mallas de elementos triangulares lineales

En esta sección se presentan algunas consideraciones generales del uso del XFEM en mallas triangulares y decisiones de implementación en el cálculo de la matriz de rigidez, vector de fuerzas y aplicación de apoyos. Si bien todo se presenta con la propuesta de Moës et al. (2003), la mayor parte de las cosas

son aplicables casi directamente para el resto de las propuestas, y en particular para la propuesta de esta tesis, presentada en el Capítulo 4.

En primer lugar, en el XFEM se clasifican los elementos en tres tipos, según la función de nivel de sus nodos. El primer tipo son los Elementos Rígidos (ER), que se caracterizan por cumplir $\Psi > 0$ en sus tres nodos y representan, en el caso del problema de optimización estructural, zonas totalmente ocupadas por el material estructural. El segundo tipo son los Elementos Blandos (EB), que se caracterizan por cumplir $\Psi < 0$ en sus tres nodos y representan zonas totalmente ocupadas por los vacíos. Finalmente se tienen los Elementos Extendidos (EX), en los cuales existe un nodo cuya función de nivel tiene signo contrario al de los otros dos nodos. Los EX son, para el problema de optimización estructural, elementos parcialmente ocupados por material estructural y por vacíos. Un esquema de esta clasificación es dado en la Figura 3.12, donde se presenta con una línea punteada naranja la interfase real entre los dos materiales, con una curva roja la interfase modelada por el XFEM, la cual está formada por segmentos de recta en cada elemento debido a la interpolación de la función de nivel de los nodos, y en azul, blanco y celeste se representan los ER, EB y EX, respectivamente.

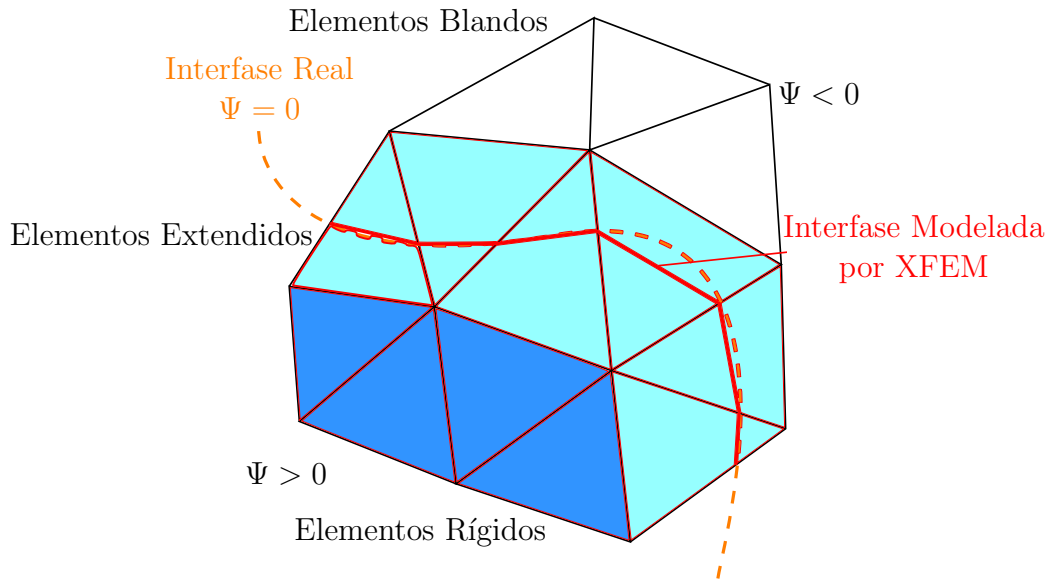


Figura 3.12: Clasificación de los tres tipos de elementos para el XFEM implementado

Los grados de libertad del problema del XFEM son los desplazamientos de los nodos de la malla (incógnitas del FEM) y las incógnitas adicionales que enriquecen el desplazamiento en los EX. Según se discutió en la Sección 3.1.1,

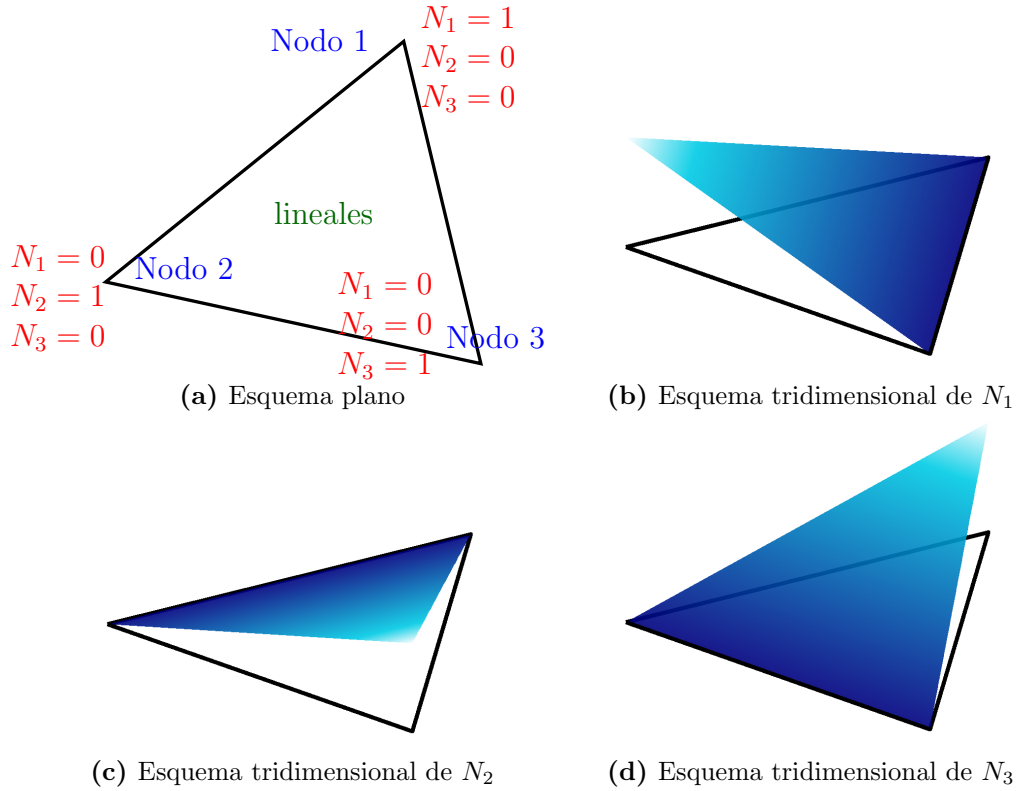


Figura 3.13: Representación gráfica de N_n en un elemento genérico

los desplazamientos de los nodos se interpolan a los elementos en base a las funciones de interpolación tradicionales N_n . Dichas funciones de interpolación tradicionales, para los elementos triangulares, se presentan gráficamente en la Figura 3.13. La Figura 3.13a presenta en un esquema plano la forma que toman las tres funciones de interpolación en el elemento, es decir todas lineales en el interior y con valor nulo en los nodos salvo en el nodo correspondiente a cada función de interpolación, en el cual valen 1. Luego, las Figuras 3.13b a 3.13d presentan en formato tridimensional con mapas de color las distintas funciones de interpolación. En dichos mapas los colores más claros representan los valores más altos. Estas funciones son las únicas funciones de interpolación que aplican en los ER y EB.

Para definir los grados de libertad adicionales asociados al XFEM, en primer lugar, en la Figura 3.14, se representa gráficamente la forma que toma la función g (Ecuación (3.43)) de la propuesta de Moës et al. (2003) en un EX. Los mapas de color de la figura emplean colores claros hacia los valores más altos y se conserva la escala de colores en toda la figura. En la Figura 3.14a se presenta una función de nivel con cambio de signo genérica, la cual define una interfase ($\Psi = 0$) que se representa con la línea gruesa roja. Luego, las

Figuras 3.14b y 3.14c presentan el primer y el segundo término del cálculo de la función g . Específicamente, la Figura 3.14b presenta la interpolación con las funciones de interpolación tradicionales del valor absoluto de la función de nivel en los nodos; y la Figura 3.14c presenta el valor absoluto de la función de nivel una vez interpolada. La diferencia de ambas genera la función g , según presenta la Figura 3.14d. En la Figura 3.14d se visualiza que la función g toma el nombre de función cresta por valer 0 en el borde no cortado, 0 en todos los nodos y crecer linealmente hasta la interfase.

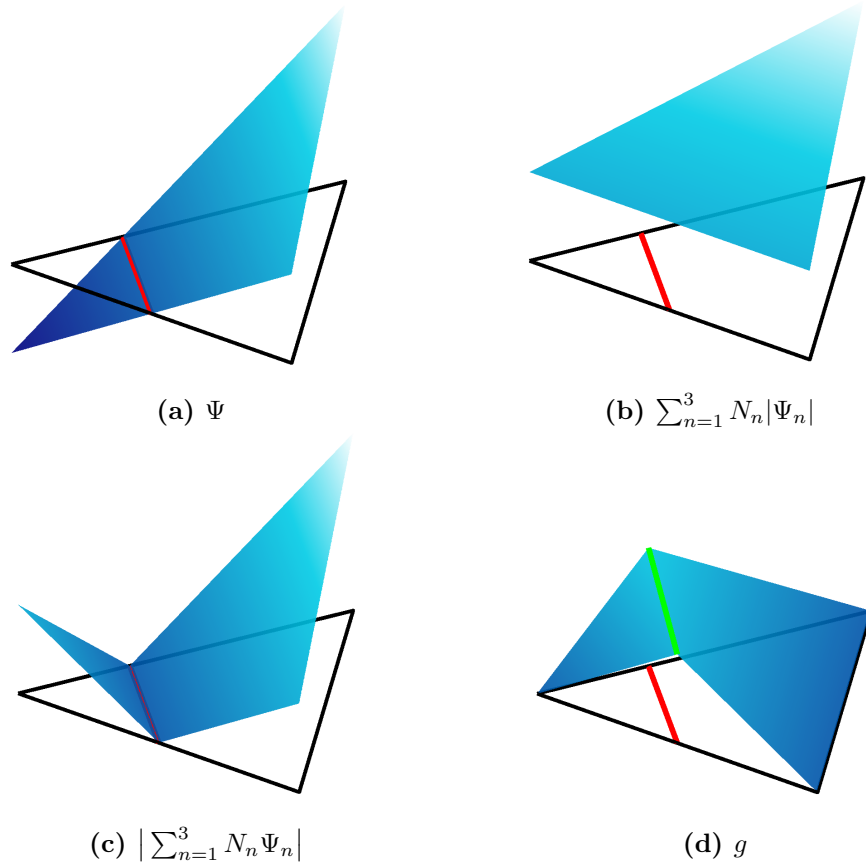


Figura 3.14: Representación gráfica de la construcción de g en un EX genérico

Los grados de libertad adicionales en la propuesta de Moës et al. (2003) son asociados a los nodos pertenecientes a los EX y solamente existe un par $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ por nodo. Para dicha propuesta se definen las funciones de interpolación extendidas (w_n) en el elemento según se presenta en la Figura 3.15, donde los colores más claros representan valores más altos. Se tiene que estas funciones son polinómicas de segundo grado a cada lado de la interfase, continuas en el interior del elemento, derivables en el interior del elemento salvo

en la interfase y nulas en los tres nodos y en el borde no cortado. Finalmente, se tiene que la cantidad de grados de libertad del problema del XFEM con la propuesta de Moës et al. (2003) es dos veces el número de nodos de la malla sumado a dos veces el número de nodos pertenecientes a los EX.

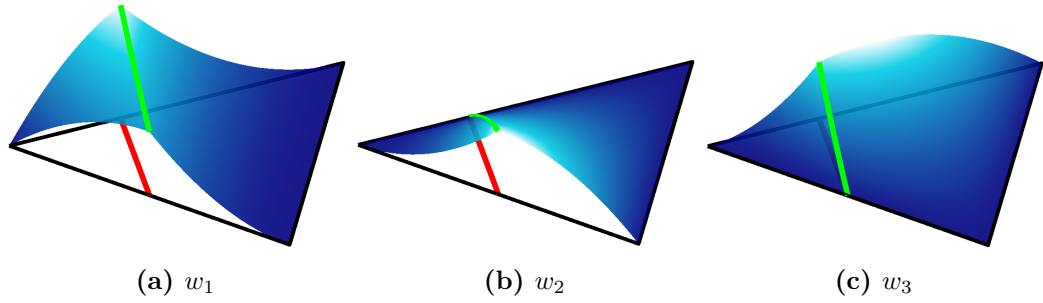


Figura 3.15: Representación gráfica de las w_n en un EX genérico

De los grados de libertad del problema se tiene que el campo de desplazamientos en los ER y EB depende únicamente de las incógnitas del FEM, es decir de los desplazamientos de los nodos de la malla. Por otro lado, los desplazamientos en los EX dependen de las incógnitas tradicionales y adicionales. De esta manera, y dado el valor nulo de las funciones de interpolación extendidas en los nodos, se tiene que las incógnitas adicionales están asociadas a la magnitud de la discontinuidad de las derivadas de los desplazamientos en la interfase.

Un detalle no menor de la propuesta de Moës et al. (2003) es que también en el caso bidimensional preserva la continuidad de desplazamientos. La afirmación anterior es pues, por construcción, la función g es continua y las funciones de interpolación tradicionales también lo son. Para ilustrar gráficamente esta continuidad, se presenta la Figura 3.16, la cual representa una inclusión que solamente contiene un único nodo. En la figura se mantiene el formato de representación gráfica anteriormente utilizado, en el cual la línea roja representa la interfase. La Figura 3.16a muestra tridimensionalmente la forma adoptada por la función g en este caso, donde se presenta con un color distinto cada elemento. Luego, la Figura 3.16b presenta la forma adoptada por la función de interpolación extendida de la incógnita adicional asociada al nodo central, utilizando los colores correspondientes a cada elemento de la Figura 3.16a. Se aprecia claramente en la Figura 3.16b la continuidad de dicha función de interpolación y por lo tanto de los desplazamientos inducidos por su incógnita adicional asociada.

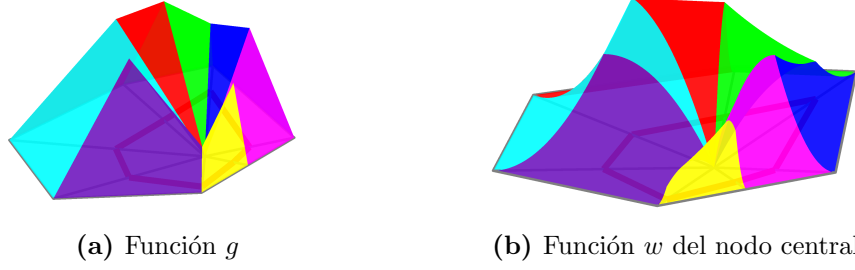


Figura 3.16: Ejemplo de w_n para estudiar continuidad y rango de influencia

En la Figura 3.16b se presenta un resultado que presenta gran importancia para el Capítulo 4, el cual es el rango de influencia de las interfases. La Figura 3.16b muestra que varios elementos cortados comparten la misma función extendida correspondiente al nodo común. Lo anterior implica que las funciones de forma extendidas de los distintos elementos están relacionadas. Esta relación es una de las principales causas de los problemas que se analizan en el Capítulo 4 y que es resuelta con la propuesta del XFEM de esta tesis.

La matriz de rigidez elemental de los EX se define, en coordenadas intrínsecas, según la Ecuación (3.49), la cual es completamente análoga a la Ecuación (3.18), con $\mathbf{B}_{\mathbf{X}}^{(e)}$ en lugar de $\mathbf{B}^{(e)}$. La matriz $\mathbf{B}_{\mathbf{X}}^{(e)}$ se define según la Ecuación (3.50), donde $\mathbf{B}_{\mathbf{W}}^{(e)}$ se define según la Ecuación (3.51). La Ecuación (3.50) proviene de un vector de grados de libertad de un EX definido como muestra la Ecuación (3.52), donde $\mathbf{A}^{(e)}$ es el vector de grados de libertad extendidos, que se define según la Ecuación (3.53).

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega_{\xi,\eta}^{(e)}} |\mathbf{J}| \mathbf{B}_{\mathbf{X}}^{(e)\top} \mathbf{C} \mathbf{B}_{\mathbf{X}}^{(e)} d\xi d\eta \quad (3.49)$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{X}}^{(e)} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{(e)} & \mathbf{B}_{\mathbf{W}}^{(e)} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{W}}^{(e)} = \begin{pmatrix} \partial_x w_1 & 0 & \partial_x w_2 & 0 & \partial_x w_3 & 0 \\ 0 & \partial_y w_1 & 0 & \partial_y w_2 & 0 & \partial_y w_3 \\ \partial_y w_1 & \partial_x w_1 & \partial_y w_2 & \partial_x w_2 & \partial_y w_3 & \partial_x w_3 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{U}_{\mathbf{X}}^{(e)} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{(e)} \\ \mathbf{A}^{(e)} \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{A}^{(e)} = \begin{pmatrix} a_{x,1} & a_{y,1} & a_{x,2} & a_{y,2} & a_{x,3} & a_{y,3} \end{pmatrix}^T \quad (3.53)$$

La Ecuación (3.49) presenta una complejidad mayor que para los ER y EB. Lo anterior es porque tanto $\mathbf{C}$ como $\mathbf{B}_{\mathbf{W}}^{(e)}$ son discontinuos en la interfase. La discontinuidad de $\mathbf{C}$ es por definición y la de $\mathbf{B}_{\mathbf{W}}^{(e)}$ es porque las funciones de interpolación extendidas tienen derivada discontinua en la interfase por construcción. Dicha discontinuidad hace que la cuadratura de Gauss habitual no obtenga resultados precisos. Algunos autores (*e.g.* Dolbow et al. 2001; Dréau et al. 2010) separaron el dominio de integración por subregiones, como presenta la Figura 3.17. En cada subregión, $\mathbf{C}$ es uniforme y $\mathbf{B}_{\mathbf{W}}^{(e)}$ admite una expresión polinómica.

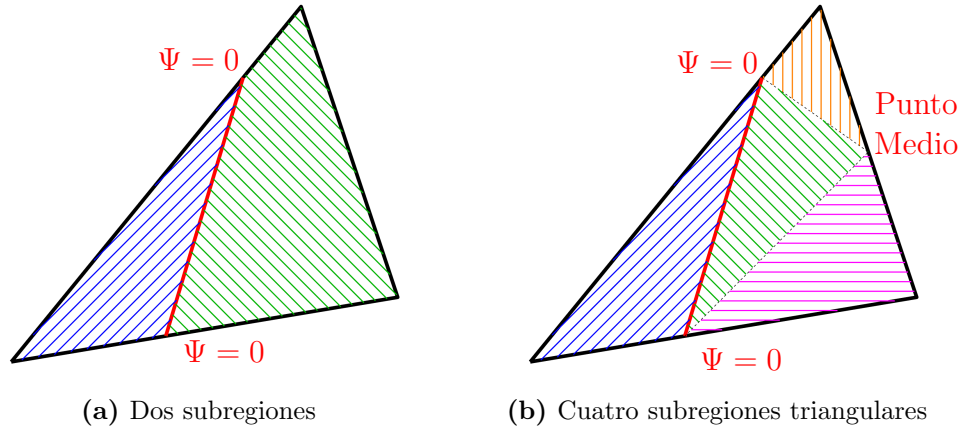


Figura 3.17: Posibles subregiones de integración para los EX

La opción de la Figura 3.17a soluciona los problemas de continuidad del integrando pero posee la dificultad de que uno de los dos dominios de integración es trapezoidal. En esta tesis, al igual que en los artículos de Dolbow et al. (2001) y Dréau et al. (2010), se prefirió utilizar una división del dominio trapezoidal en base a tres triángulos como presenta la Figura 3.17b. En esta última opción se cuenta con cuatro subregiones triangulares, en las cuales el integrando admite una expresión polinómica, lo que permite el uso de la cuadratura habitual para triángulos. Al considerar las cuatro subregiones de integración, la Ecuación (3.49) queda según presenta la Ecuación (3.54), donde $\Omega_{\xi,\eta}^{(e-SR)^m}$ es la subregión m -ésima, en las coordenadas intrínsecas del elemento completo. Para aplicar el método de cuadratura de Gauss se requiere considerar sistemas de coordenadas intrínsecas para cada subregión como presenta la Figura 3.18, donde ξ_m^{SR} y η_m^{SR} son las coordenadas intrínsecas de la subregión m -ésima.

$$\mathbf{K}^{(e)} = \sum_{m=1}^{m=4} \left(\int_{\Omega_{\xi,\eta}^{(e-SR)^m}} |\mathbf{J}| \mathbf{B}_{\mathbf{X}}^{(e)T} \mathbf{C} \mathbf{B}_{\mathbf{X}}^{(e)} d\xi d\eta \right) \quad (3.54)$$

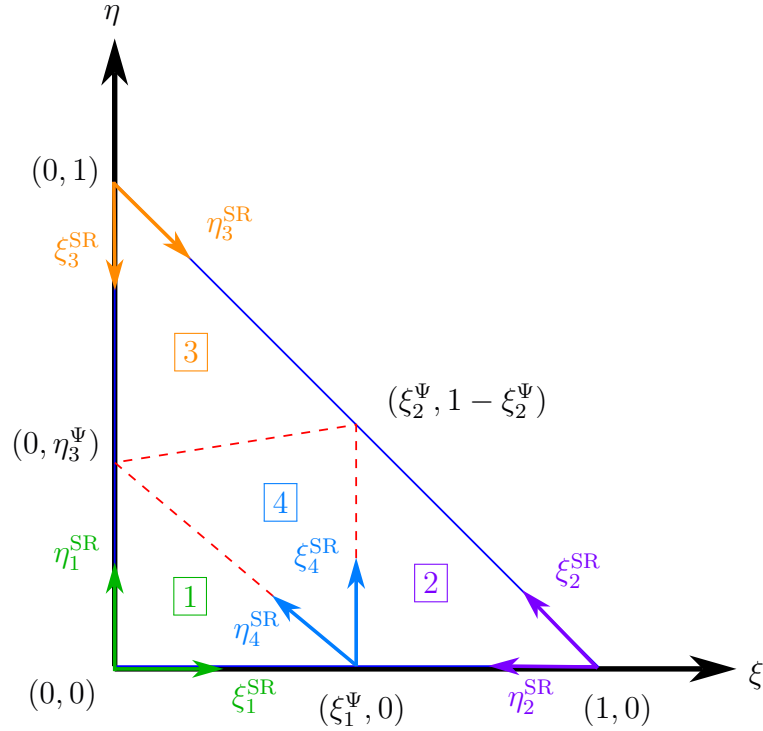


Figura 3.18: Sistemas de coordenadas intrínsecas para las subregiones

Teniendo en cuenta las coordenadas intrínsecas de cada subregión, la Ecuación (3.54) se reescribe según presenta la Ecuación (3.55), donde $\Omega_{\xi^{\text{SR}}, \eta^{\text{SR}}}^{(e-\text{SR})m}$ es la subregión m -ésima en sus propias coordenadas intrínsecas y $\mathbf{J}_m^{\text{SR}}$ es el Jacobiano del cambio de coordenadas de las intrínsecas del elemento a las de la subregión m -ésima. La Ecuación (3.55) es la expresión que finalmente se termina calculando por cuadratura de Gauss, según el grado de $\mathbf{B}_\mathbf{x}^{(e)}$ de cada propuesta.

$$\mathbf{K}^{(e)} = \sum_{m=1}^{m=4} \left(\int_{\Omega_{\xi^{\text{SR}}, \eta^{\text{SR}}}^{(e-\text{SR})m}} |\mathbf{J}| |\mathbf{J}_m^{\text{SR}}| \mathbf{B}_\mathbf{x}^{(e)\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{B}_\mathbf{x}^{(e)} d\xi_m^{\text{SR}} d\eta_m^{\text{SR}} \right) \quad (3.55)$$

El vector de fuerzas $\mathbf{F} = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_q$ incluye el efecto de todas las cargas aplicadas, según se describió en el Capítulo 2. Para esta tesis se consideraron tres tipos de fuerzas aplicadas: fuerzas concentradas (puntuales), fuerzas de superficie aplicadas en bordes de elemento y fuerzas de volumen. En primer lugar, las fuerzas concentradas se asumieron siempre aplicadas en algún nodo de la malla de elementos finitos. Lo anterior permite simplificar la implementación de este tipo de fuerzas y en general es posible situar nodos en todas las cargas concentradas al crear la malla. De esta forma, el aporte de una carga concentrada al vector de fuerzas se aplica directamente en las entradas correspondientes al desplazamiento del nodo donde se aplica la carga.

Para las fuerzas de superficie ($\mathbf{q}$) aplicadas en bordes de elemento, se calcula el trabajo realizado por dicha fuerza como presenta la Ecuación (3.56). En la anterior ecuación se consideró, sin perder generalidad, que la carga se aplica entre los nodos 1 y 2. Además, se consideró que el elemento posee incógnitas adicionales ya que las w_n son nulas en un elemento no extendido y como N_3 es nula en el borde entre los nodos 1 y 2 las sumatorias no incluyen las incógnitas del tercer nodo. Del análisis anterior se tiene que el trabajo realizado por la fuerza aplicada en el borde se reescribe según presenta la Ecuación (3.57), donde A_n y B_n se presentan en las Ecuaciones (3.58) y (3.59).

$$\int_{\text{nodo}_1}^{\text{nodo}_2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \, d\partial\Omega = \int_{\text{nodo}_1}^{\text{nodo}_2} \mathbf{q} \cdot \left(\sum_{n=1}^{n=2} (N_n \mathbf{v}_n) + \sum_{n=1}^{n=2} (w_n \mathbf{a}_n) \right) d\partial\Omega \quad (3.56)$$

$$\int_{\text{nodo}_1}^{\text{nodo}_2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \, d\partial\Omega = \sum_{n=1}^{n=2} (A_n \cdot \mathbf{v}_n) + \sum_{n=1}^{n=2} (B_n \cdot \mathbf{a}_n) \quad (3.57)$$

$$A_n = \int_{\text{nodo}_1}^{\text{nodo}_2} N_n \mathbf{q} \, d\partial\Omega \quad (3.58)$$

$$B_n = \int_{\text{nodo}_1}^{\text{nodo}_2} w_n \mathbf{q} \, d\partial\Omega \quad (3.59)$$

En las ecuaciones anteriores los A_n representan el aporte de las cargas de superficie en el vector de fuerzas en las entradas correspondientes a los grados de libertad tradicionales, mientras que los B_n representan el aporte en las entradas correspondientes a los grados de libertad extendidos. Para el cálculo de A_n se decidió utilizar el método de cuadratura de Gauss para segmentos. Luego, para el cálculo de B_n se hace notar que si no existe interfase en el borde cargado su valor es nulo. Lo anterior se asocia a que la función g es nula en el borde no cortado y por lo tanto las funciones w_n son nulas también. Luego, si el borde cargado posee interfase, la integral de la Ecuación (3.59) se realiza por cuadratura de Gauss, separando el segmento en dos subregiones a un lado y otro de la interfase.

Finalmente, para las fuerzas de volumen se sigue un procedimiento muy similar al de las fuerzas de superficie, necesitando además considerar los tres nodos de cada elemento. Además, de forma análoga a la matriz de rigidez, en los EX se realiza la integral separando en las cuatro subregiones de la

Figura 3.18. Lo anterior es necesario tanto para la componente asociada a los grados de libertad tradicionales como adicionales, ya que $\mathbf{b}_M \neq \mathbf{b}_V$ en términos generales, y la división de subregiones separa adecuadamente ambos materiales.

En cuanto a los apoyos, un procedimiento de solución muy popular, utilizado también en esta tesis, es el de reducción del sistema de ecuaciones. Este procedimiento consiste en montar un sistema de ecuaciones cuyas únicas incógnitas son los desplazamientos no conocidos. El sistema reducido se consigue típicamente eliminando filas y columnas del sistema global, y modificando correspondientemente el vector de fuerzas nodales.

3.1.3.5. XFEM en optimización topológica de estructuras

Dadas las capacidades analizadas del XFEM para modelar interfases entre dos materiales sin la necesidad de modificar la malla de elementos finitos, se tiene un gran beneficio en su uso como método para el análisis estructural de los métodos de optimización topológica de estructuras. La primera referencia en utilizar el XFEM en optimización topológica de estructuras es el artículo publicado por Duysinx et al. (2006), donde se optimizaron estructuras que maximizaran la rigidez en base al método de la función de nivel. El método de la función de nivel no se utilizó únicamente para representar la geometría de la estructura sino además como base del algoritmo de optimización estructural.

El método de optimización estructural basado en el método de la función de nivel se caracteriza por identificar en cada nodo la sensibilidad que presentan las funciones de desempeño y las restricciones del modelo de optimización frente a variaciones de la función de nivel y luego, a partir de un método de descenso por gradientes o similar (Luenberger y Ye, 2008), converger a una geometría optimizada. El principal inconveniente que presenta el método de optimización basado en la función de nivel es que los nodos interiores a un material no presentan sensibilidad al cambio diferencial de la función de nivel, ya que no modificarían de ninguna forma la geometría de la estructura. Lo anterior implica que el método no podría generar huecos en el dominio en problemas bidimensionales, solo modificar la forma, eliminar o unir huecos ya existentes en la estructura. Por este motivo, en el artículo de Duysinx et al. (2006) se partió para todos los ejemplos de un sembrado inicial de huecos en el dominio de análisis como muestra la Figura 3.19. Como punto adicional,

Duysinx et al. (2006) utilizaron la propuesta de Sukumar et al. (2001) para huecos para el XFEM y consideraron una aproximación en el cálculo de la sensibilidad de los nodos de borde en la cual despreciaron la contribución de los elementos cortados.



Figura 3.19: Ejemplo de sembrado inicial de huecos para optimización topológica de estructuras

Posteriormente con el artículo de Van Miegroet y Duysinx (2007) se consolidó el XFEM con el método de la función de nivel para optimización topológica de estructuras. En dicho artículo los autores utilizaron la propuesta de Sukumar et al. (2001) para huecos para obtener estructuras sometidas a restricciones en su tensión máxima. Los autores observaron que la propuesta de Sukumar et al. (2001) puede tener alguna sobreestimación de las tensiones en los elementos de borde cuando algún nodo se encontrase muy cerca del borde. Por el anterior motivo consideraron un método de geometría adaptable tal que si un elemento fuera muy chico se modificara la función de nivel de su nodo material tal que pasara a ser parte del borde de la geometría.

Hoy en día el XFEM junto con el método de la función de nivel es bastante utilizado en optimización topológica de estructuras para las que se busca maximizar la rigidez con cierto objetivo del volumen o área ocupada. Recientemente Villanueva y Maute (2014) utilizaron la propuesta de Makhija y Maute (2014) en problemas de más de un material, empleando un método de penalización para evitar solapamientos y desprendimientos entre los materiales sin recurrir a propuestas de XFEM para interfases como la de Moës et al. (2003). Los autores consideraron un filtro lineal para suavizar la función de nivel y consideraron un preconditionamiento al problema de análisis estructural. Posteriormente, Jenkins y Maute (2015, 2016) consideraron la propuesta de Makhija y Maute (2014), la cual generalizaron, para optimizar problemas de interacción fluido-estructura en problemas de estructuras que percibieran desplazamientos relativamente pequeños. Se destaca que en el primer artículo (Jenkins y Maute, 2015) desarrollaron la optimización de la parte seca de la estructura y en el

segundo (Jenkins y Maute, 2016) desarrollaron la optimización de la parte en contacto con el fluido. Barthold y Materna (2015) utilizaron la propuesta de Moës et al. (2003) para optimización estructural de maximización de la rigidez e introdujeron un método de remallado para mejorar el análisis de sensibilidad a la función de nivel. Nanthakumar et al. (2015) optimizaron nanoestructuras y también utilizaron la propuesta de Moës et al. (2003), donde se incorporó un fenómeno particular en las superficies similar a la capilaridad. Se hace notar que el método de Nanthakumar et al. (2015) presentó muchas iteraciones antes de alcanzar la convergencia. Luego Zhang et al. (2017) utilizaron el método de la función de nivel con la propuesta de Makhija y Maute (2014) e incorporaron una restricción de la cantidad de huecos que debía presentar la estructura. El método de Zhang et al. (2017) presentó dificultades en problemas intrínsecamente simétricos en los cuales más de un hueco quisiera eliminarse a la vez y además presentó muchas iteraciones. Sharma et al. (2017) presentaron un método semi-analítico para facilitar el cálculo de sensibilidades de diversos funcionales de utilidad para optimización estructural, en el caso de emplear la propuesta de XFEM de Makhija y Maute (2014). Geiss et al. (2019a) introdujeron un método basado en la ecuación de calor para regularizar la función de nivel que surge del análisis de sensibilidad del método e incorporaron un tipo particular de penalización a la propuesta de Makhija y Maute (2014) para evitar que la interfase se acercara demasiado a un nodo. Jansen (2019) utilizó la propuesta de Sukumar et al. (2001) para huecos e incorporó una restricción en la cual se limitara el mínimo espesor de los elementos estructurales. Si bien el autor reconoció las ventajas de la propuesta de Makhija y Maute (2014), decidió no utilizarla pues las restricciones que consideró impedían la dificultad que Makhija y Maute (2014) identificaron. Wang et al. (2020) consideraron un problema multiobjetivo, en el cual utilizaron una malla gruesa de FEM para el análisis estructural y una malla bastante más fina para la función de nivel. En dicho problema los autores utilizaron la propuesta de Sukumar et al. (2001) para definir la matriz de rigidez del FEM con la malla gruesa, definiendo la distribución de materiales dentro de un elemento finito en base a la malla más fina de la función de nivel. En dicho esquema los autores identificaron microestructuras artificialmente rígidas para las cuales crearon un filtro que las eliminara. Barrera y Maute (2020) avanzaron en eliminar la ambigüedad en las geometrías obtenidas en función de la función de nivel para elementos de mayor orden que triángulos o tetraedros y obtuvieron resultados que tendían

a presentar varias decenas de iteraciones. De et al. (2023) avanzaron en el problema de robustez estructural utilizando un gradiente estocástico y un método adjunto, basado en los métodos desarrollados por Sharma et al. (2017), para el cálculo de dicho gradiente.

El método de la función de nivel con XFEM también se utilizó en optimización estructural para maximizar la rigidez con métodos de XFEM asociados a fisuras, específicamente la propuesta de Moës et al. (1999). En primer lugar Liu et al. (2016) encararon problemas de optimización multimaterial en los cuales se consideró que las interfases entre ambos materiales tuvieran un comportamiento cohesivo. Como el modelo de cohesión utiliza la separación entre las partes se consideró el modelo de Moës et al. (1999). Los problemas que resolvieron fueron no lineales por el modelo de cohesión, lo que colaboró en que se requirieran varios cientos de iteraciones en todos los casos para alcanzar las estructuras optimizadas. Luego, Noël et al. (2017) hicieron optimización no lineal, incluyendo efectos de daño en la estructura a partir de las deducciones analíticas de Noël et al. (2016). En el trabajo de Noël et al. (2017) se incluyó una penalización del perímetro para evitar soluciones muy complejas con muchas barras finas e incluyeron una regularización lineal para la función de nivel.

El XFEM con el método de la función de nivel también ha sido utilizado recientemente para optimizar estructuras en las que se limita la máxima tensión como el artículo de Sharma y Maute (2018). En dicho artículo los autores utilizaron la propuesta de Makhija y Maute (2014) con una penalización especial para evitar que los nodos quedaran muy cerca de la interfase. Además, utilizaron los cálculos analíticos hechos por Sharma et al. (2017) para hacer el análisis de sensibilidad y utilizaron estrategias de regularización para evitar sobreestimaciones de las tensiones.

Otras aplicaciones recientes del XFEM con el método de la función de nivel son para optimizar anclajes o cuerpos incrustados en otro (Behrou et al. 2017; Lawry y Maute, 2018), optimización de impresión tridimensional de materiales que sufren deformaciones en el proceso de fabricación producto de la temperatura (Geiss et al. 2019b) y ubicación de refuerzos en una matriz más débil (Hilchenbach y Ramm, 2015). Salvo el artículo de Hilchenbach y Ramm (2015), todos los anteriores utilizaron la propuesta de Makhija y Maute (2014). Behrou et al. (2017) implementaron un método de lagrangiano estabilizado para considerar la cohesión entre las interfases y evitar problemas de penetración de

dominios, y utilizaron un filtro regularizador para la función de nivel. Lawry y Maute (2018) implementaron el problema de anclajes para más de un material, aunque siempre asumiendo que los huecos se encontraban dentro de un solo material. Lawry y Maute (2018) además consideraron problemas de elasticidad en grandes deformaciones con un material neo-Hookean. Geiss et al. (2019b) consideraron penalidades de perímetro y gradiente de la función de nivel para regularizar las soluciones. Hilchenbach y Ramm (2015) optimizaron la posición de fibras en un polímero reforzado o armaduras en un hormigón armado, utilizando la propuesta de Moës et al. (2003) para las interfases entre los materiales y la propuesta de Moës et al. (1999) para las fisuras. Como punto adicional, Hilchenbach y Ramm (2015) avanzaron bastante en el cálculo de la sensibilidad de un funcional de complacencia que incluyera los efectos de las regiones fisuradas y no fisuradas del hormigón armado.

Otra metodología de optimización topológica de estructuras que ha ganado bastante renombre por su sinergia con el XFEM es el método de optimización con isolíneas desarrollado por Abdi et al. (2014). El método de optimización topológica con isolíneas se basa en el esquema presentado en la Figura 3.20, la cual se describe a continuación. Se parte de una geometría inicial cualquiera y se realiza el análisis estructural para las cargas a las que esté sometida la estructura. Luego se calcula algún campo sencillo representativo del aporte estructural que tenga cada punto, como ser la tensión de von Mises o la densidad de energía de deformación. Posteriormente, mediante un criterio preestablecido, se define que el nuevo borde de la estructura sea la isolínea asociada a cierto valor del campo anterior. Finalmente se repite el proceso hasta llegar a un criterio de optimalidad preestablecido. Una de las principales ventajas de este método es que no requiere partir de una condición inicial con sembrado de huecos.

El primer trabajo en el que se utilizó el método de isolíneas para optimización topológica de estructuras con XFEM fue el artículo de Abdi et al. (2014), en el cual los autores declararon que permite el uso de mallas gruesas y utilizaron la propuesta de Sukumar et al. (2001) para huecos. En dicho trabajo se mostró que este método de optimización no requiere del uso de algoritmos de regularización de la función de nivel. Finalmente, se destaca que la cantidad de iteraciones para lograr la convergencia se encontró en el entorno de 80 a 200.

El método de isolíneas ha sido recientemente utilizado en optimización

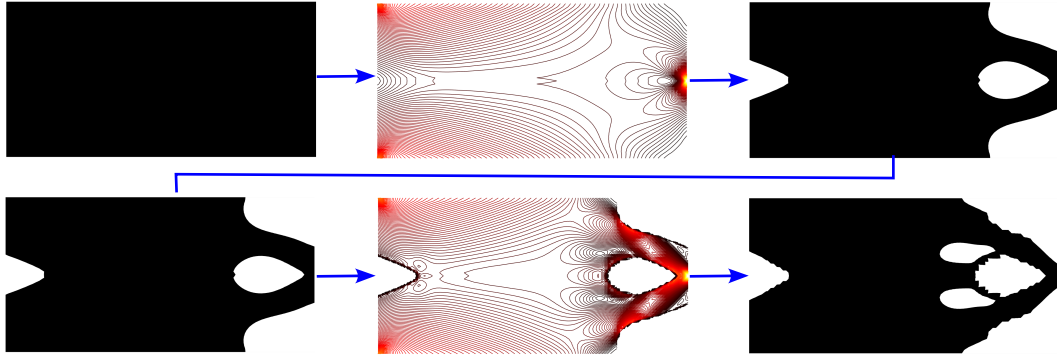


Figura 3.20: Esquema conceptual del proceso de optimización topológica de aislíneas

estructural para optimizar estructuras que maximicen su rigidez para cierta fracción preestablecida del área o volumen ocupable. En primer lugar, Abdi et al. (2018) utilizaron también la propuesta de Sukumar et al. (2001) para huecos y extendieron el método para encarar problemas estructurales no lineales al minimizar el trabajo complementario de los escalones de carga. Posteriormente Martínez-Frutos y Herrero-Pérez (2018) utilizaron el mismo esquema de Abdi et al. (2014) para trabajar el problema de optimización robusta, donde incluyeron incertidumbre en las cargas y propiedades materiales. Luego, Latifi Rostami et al. (2021) utilizaron el método de aislíneas con la propuesta de Sukumar et al. (2001) para huecos para analizar problemas de robustez estructural con incertidumbre epistémica. Finalmente, recientemente Chroni et al. (2024) utilizaron el método de aislíneas para problemas bimateriales, para lo que emplearon la propuesta de Moës et al. (2003).

El método de aislíneas se presenta como un método potente, que no requiere el uso de sembrado de huecos. A pesar de las ventajas que presenta se destaca que tiende a presentar un número elevado de iteraciones hasta la convergencia respecto a otros métodos, particularmente el que se presenta en esta tesis. Otro problema que presenta el método de aislíneas es que no parece ser fácil identificar un campo representativo para los problemas en los que se busca minimizar valores grandes de tensión.

Como fue mencionado en el Capítulo 1, el SIMP (Bendsøe y Sigmund, 1999) es un método muy utilizado para optimización topológica de estructuras. De todas formas su uso directo con el XFEM es poco común. Se identificaron únicamente los artículos de Lee y Shin (2015) y Wang et al. (2022), como casos donde se emplearon en conjunto el SIMP y el XFEM. En el artículo de Lee

y Shin (2015) se utilizó la propuesta de Sukumar et al. (2001) para interfases y, como en el SIMP, se calculó una función de densidad en los nodos. La gran diferencia con el SIMP para el FEM es que para el análisis estructural se interpoló la densidad a puntos de integración de Gauss y luego se consideraron partes materiales y vacíos en un mismo elemento. Por otra parte, el artículo de Wang et al. (2022) se basó en el análisis multiobjetivo de Wang et al. (2020), que usó la propuesta de Sukumar et al. (2001) para huecos, para atacar problemas con limitación de la tensión máxima.

A pesar del bajo uso del SIMP en forma directa con el XFEM, recientemente surgió un método que acopla el SIMP con el método de la función de nivel. Este método, desarrollado inicialmente por Barrera et al. (2020), surgió para utilizar el método de la función de nivel sin tener que utilizar un sembrado artificial de huecos. El sembrado de huecos se lo hace mediante el mencionado acople. Este acople se basa en considerar de forma simultánea la función de densidad del SIMP y la función de nivel y, a partir de métodos de penalización, considerar que puntos donde la densidad baje mucho hacen negativa la función de nivel y crean huecos. En el artículo de Barrera et al. (2020) se utilizó la propuesta de Makhija y Maute (2014) y un método de regularización de la función de nivel dado por el artículo de Geiss et al. (2019a).

El método de acople entre SIMP y función de nivel ha sido utilizado recientemente en otros artículos sobre optimización estructural con el XFEM, siempre considerando la propuesta del XFEM de Makhija y Maute (2014). En primer lugar Jansen y Pierard (2020) se basaron bastante en el trabajo de Jansen (2019) e incorporaron microestructuras que resolvieron por métodos de homogeneización. Posteriormente, Barrera et al. (2022) avanzaron sobre el trabajo original de Barrera et al. (2020) al incorporar un método de penalidad para limitar el tamaño mínimo de los componentes estructurales a obtener. Finalmente, Kuci y Jansen (2022) utilizaron la metodología de acople para limitar las tensiones máximas en la estructura considerando un problema de elastoplasticidad.

Otros métodos que se han visto utilizados en optimización estructural junto con el XFEM son el método de las asíntotas móviles (MMA por sus siglas en inglés; Svanberg, 1987) y el método de los componentes móviles y deformables (MMC por sus siglas en inglés; Zhang et al. 2016). El MMA es un método que se basa en introducir un par de límites a las incógnitas de diseño (función de nivel o densidad) y, a partir del desarrollo matemático presente en la re-

ferencia, estabilizar las funciones de desempeño, las restricciones y aumentar la velocidad de convergencia al modificar inteligentemente dichos límites. Se destaca que el MMA es usado como un algoritmo eficiente de optimización no lineal para el método de sensibilidad con la función de nivel, por lo que no impide la necesidad del sembrado de huecos inicial. El MMA fue utilizado por Ma et al. (2021) para optimizar estructuras que presentaran componentes débiles pero obligatorios en la estructura. Ma et al. (2021) utilizaron la propuesta de Moës et al. (2003) para modelar la interfase entre el material estructural y los componentes débiles a los cuales modela con un comportamiento cohesivo, aunque no utilizaron el XFEM para modelar los huecos. El MMA también fue utilizado por Zhao et al. (2022) para optimizar estructuras con restricciones de la máxima tensión admisible. La gran particularidad del artículo de Zhao et al. (2022) es que analizaron un problema multiescala, donde además de optimizar la macroestructura, optimizaron la microestructura y es en ella que consideraron la propuesta de Sukumar et al. (2001) para huecos.

El método MMC es un método conceptualmente distinto a todos los anteriores. En vez de optimizar una función de densidad o de nivel para obtener la estructura óptima; el método optimiza la posición y forma de un número finito de componentes preestablecidos, según presenta la Figura 3.21. Este método, desarrollado inicialmente por Zhang et al. (2016) ha sido recientemente utilizado con el XFEM para mejorar la representación de las fronteras de los componentes en una malla fija. En particular, en el artículo de Wang et al. (2021) se utilizó la propuesta de Sukumar et al. (2001) para huecos y el método MMC para optimizar estructuras que maximizaran su rigidez. También, Xu et al. (2020) utilizaron este método para optimizar estructuras multiescala con la propuesta de Sukumar et al. (2001) para huecos, si bien solamente utilizaron el MMC para obtener la microestructura. Un detalle interesante del MMC es que no requiere ningún algoritmo de regularización de la función de nivel aunque sí requiere de una definición inicial de los componentes a utilizar.



Figura 3.21: Esquema conceptual del método MMC

El XFEM también fue utilizado por Marzok y Waisman (2024a, 2024b) para optimizar la sección de vigas de sección constante. En sus artículos los autores hicieron una propuesta del XFEM específica para vigas, de menor costo computacional que considerar elementos tridimensionales. Luego, utilizando el SIMP, optimizaron la sección transversal para maximizar las frecuencias naturales de vibración (Marzok y Waisman, 2024a) y para reducir el peso en vigas con limitaciones de desplazamientos, tensiones y pandeo lateral (Marzok y Waisman, 2024b). Según declararon los autores, parecen ser los primeros en optimizar la sección de la viga, en función de la resistencia al pandeo lateral, considerando su longitud en vez de maximizar únicamente la inercia torsional o similar mediante la función de Prandtl.

La única publicación que se identificó que combina el XFEM con el concepto de la DT en optimización estructural, es el artículo de congreso publicado por el autor de esta tesis (Delgado y Canelas, 2023). En dicho artículo se discutieron resultados preliminares para algunos de los ejemplos presentados en esta tesis. En varias ocasiones, en muchos de los artículos en los que utilizaron el XFEM con el método de la función de nivel hicieron mención a la posibilidad de utilizar la DT como metodología para el sembrado de huecos, mas no se identificó ningún artículo que así lo haga. Además, en ninguna publicación se utilizó la DT como criterio de optimización como sí se hace en esta tesis. El anterior análisis permite concluir que, en el mejor conocimiento del autor de este documento, lo que se presenta en los siguientes capítulos es novedoso.

3.2. Derivada topológica

Los métodos de optimización de estructuras requieren estimar, de forma directa o indirecta, la sensibilidad de cierto funcional a cambios en los parámetros que definen el problema. En este marco, la DT tiene la particularidad de estimar directamente la sensibilidad del funcional ante un cambio topológico del dominio, por ejemplo la creación de un hueco de tamaño infinitesimal. Con esa particularidad en mente, en primer lugar en la Sección 3.2.1 se presenta el concepto de la DT. Posteriormente en la Sección 3.2.2 se presentan los métodos de cálculo más usuales. Finalmente en la Sección 3.2.3 se presenta el uso reciente de la DT en métodos de optimización topológica de estructuras.

3.2.1. Concepto de la derivada topológica

En este trabajo se consideró la definición de la DT como presentaron Novotny y Sokołowski (2013). Para ello se parte de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado que se ve sometido a una pequeña perturbación $B_{x_0, \epsilon} = x_0 + \epsilon\omega$, de tamaño $\epsilon \geq 0$, tal que $\overline{B_{x_0, \epsilon}} \subseteq \Omega$ como se presenta en la Figura 3.22. Se considera que x_0 es un punto arbitrario interior de Ω y ω es un dominio fijo de $\mathbb{R}^n$.

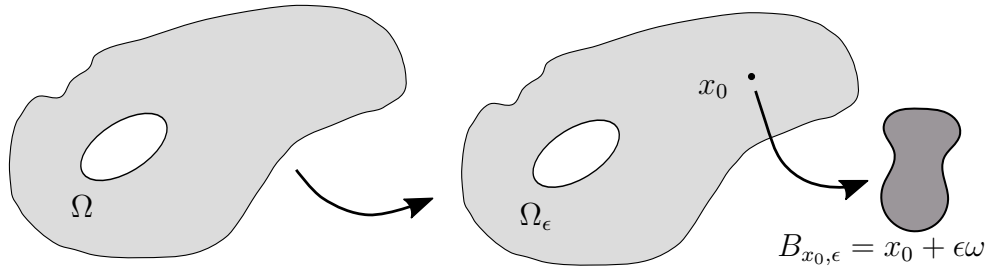


Figura 3.22: Esquema del dominio perturbado topológicamente. Basado en un esquema similar de Novotny y Sokołowski (2013).

Se define $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{B_{x_0, \epsilon}}$ como el dominio perturbado y $\mathcal{J} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ como un funcional que depende de la geometría del dominio, con $\mathcal{O} \in \mathbb{P}(D) = \{\Omega \mid \Omega \subseteq D\}$ una cierta familia de dominios para los cuales tiene sentido el cálculo del funcional. Se asume que el funcional admite la expansión presentada en la Ecuación (3.60), donde $f(\epsilon)$, denominada *función regularizadora*, es una función no negativa, monótona creciente tal que $f(\epsilon) \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \searrow 0$, $o(f(\epsilon))$ es el resto, el cual satisface la Ecuación (3.61) y $D_T \mathcal{J}(x_0)$ es la derivada topológica de $\mathcal{J}(\Omega)$ evaluada en el punto x_0 . De la anterior expresión, la DT se define según se muestra en la Ecuación (3.62), donde se destaca que depende explícitamente del punto centro de la perturbación e implícitamente de la forma ω de la perturbación y de $f(\epsilon)$. Vale la pena destacar que $f(\epsilon)$ en general está dada por una única familia de funciones, por ejemplo $f(\epsilon) = a\epsilon^2$, y la única dependencia de la DT con $f(\epsilon)$ es un factor de escala a .

$$\mathcal{J}(\Omega_\epsilon) = \mathcal{J}(\Omega) + f(\epsilon)D_T \mathcal{J}(x_0) + o(f(\epsilon)) \quad (3.60)$$

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{o(f(\epsilon))}{f(\epsilon)} = 0 \quad (3.61)$$

$$D_T \mathcal{J}(x_0) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\mathcal{J}(\Omega_\epsilon) - \mathcal{J}(\Omega)}{f(\epsilon)} \quad (3.62)$$

En su libro, Novotny y Sokołowski (2013) mostraron que el concepto de la DT puede ser utilizado tanto para analizar la sensibilidad a la nucleación de huecos en el dominio como para analizar la sensibilidad a la nucleación de inclusiones. Para esta tesis se consideró el segundo caso, por lo cual $B_{x_0, \epsilon}$ es una región de diferente material. En este escenario la definición de la DT se extiende a todo D y Ω_ϵ pasa a ser la región ocupada por la estructura perturbada topológicamente y su expresión depende de x_0 según se presenta en la Ecuación (3.63).

$$\Omega_\epsilon = \begin{cases} \Omega \setminus \overline{B_{x_0, \epsilon}} & \text{si } x_0 \in \Omega \\ \Omega \cup B_{x_0, \epsilon} & \text{si } x_0 \notin \Omega \end{cases} \quad (3.63)$$

En términos generales, suele ser laborioso (o incluso imposible) obtener una expresión cerrada para las DT de funcionales genéricos. Lo anterior se debe a que los funcionales $\mathcal{J}$ suelen depender de la solución de un problema de ecuaciones en derivadas parciales. Para ejemplificar lo anterior se considera el funcional dado por la Ecuación (3.64), donde $\mathbf{u}$ es el desplazamiento solución del problema plano de elasticidad lineal bimaterial. Para este ejemplo, la función $\mathcal{J}(\Omega_\epsilon)$ no solo implica modificar el tensor elástico para tener en cuenta el cambio de material en la integral, sino considerar el desplazamiento $\mathbf{u}_\epsilon$ solución del problema plano de elasticidad lineal bimaterial en el cuerpo perturbado. Estimar la variación del funcional causada por la variación de la solución suele ser la gran dificultad del cálculo de las DT. Algunos autores de artículos que utilizaron el XFEM en optimización topológica de estructuras, identificaron la anterior gran dificultad como la principal limitante en el uso de la DT para optimización topológica (*e.g.* Kuci y Jansen, 2022).

$$\mathcal{J}(\Omega) = \int_D \mathbb{C}(\Omega) \nabla^s(\mathbf{u}) : \nabla^s(\mathbf{u}) d\Omega \quad (3.64)$$

3.2.2. Métodos de cálculo de la derivada topológica

Existen distintos métodos para el cálculo de las DT de diversos funcionales. A continuación se presentan los cuatro métodos más importantes que se identificaron para el cálculo de funcionales utilizados en optimización es-

tructural. Estos cuatro métodos son: el método directo, el método adjunto (Amstutz, 2006), el método lagrangiano (Delfour, 2018; Gangl y Sturm, 2020) y el método de sensibilidad topológica basado en variación de forma (Novotny y Sokołowski, 2013).

3.2.2.1. Método directo

El *método directo* se basa en utilizar directamente la definición de la DT dada por la Ecuación (3.62). Lo anterior hace que el método directo sea el más sencillo de analizar, lo que se compensa por ser un método de difícil aplicación para casos complejos. Para evaluar el impacto del cambio de dominio en el sistema de ecuaciones diferenciales se suele hacer algún tipo de *ansatz* para aproximar la solución. Un *ansatz* muy utilizado para el problema plano de elasticidad lineal fue propuesto por Kozlov et al. (1999) el cual se presenta en la Ecuación (3.65), donde $\hat{\mathbf{u}}_\epsilon$ es el desplazamiento solución de un problema exterior de solución calculable por el método de variables complejas presentado en la Sección 2.3 y $\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon$ es un resto.

$$\mathbf{u}_\epsilon = \mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}}_\epsilon + \tilde{\mathbf{u}}_\epsilon \quad (3.65)$$

El método directo ha sido utilizado para calcular varias DT de utilidad para optimización topológica de estructuras y problemas similares. Hintermüller et al. (2012) utilizaron el método directo para calcular la DT del error cuadrático total en la resolución de problemas inversos. Lopes et al. (2015) utilizaron el método directo junto con el *ansatz* de Kozlov et al. (1999) para calcular la DT de la energía potencial total del problema plano de elasticidad lineal. Giusti et al. (2016) utilizaron el *ansatz* de Kozlov et al. (1999) para calcular la DT de la energía potencial total para el problema de elasticidad lineal anisótropo y heterogéneo. Lopes et al. (2017) utilizaron el método directo para calcular la DT de la complacencia en un problema de elasticidad lineal con contacto que tiene fricción. Xavier y Novotny (2017) utilizaron el *ansatz* de Kozlov et al. (1999) para calcular la DT de la energía potencial total en el problema plano de elasticidad lineal para un problema que tiene presión hidrostática uniforme en los vacíos. Yaghmaei et al. (2020) utilizaron el método directo para calcular la DT cuando la perturbación consiste en eliminar un elemento de una malla del FEM. Calisti et al. (2021) utilizaron el método directo con leves modificaciones para calcular la DT de las componentes del tensor de homogeneización de

segundo orden. Castañar et al. (2022) utilizaron el método directo para calcular la DT de la complacencia en elasticidad de cuerpos incompresibles. En esta tesis, en el Anexo C se utilizó el método directo para calcular la DT del área.

3.2.2.2. Método adjunto

El *método adjunto* es, probablemente, el método más utilizado para el cálculo de las DT. Se presenta a continuación el método según lo presentó Amstutz (2006) pues fue pionero en el uso del método en el caso de nucleación de inclusiones en el dominio. Antes de entrar en el resultado principal del método adjunto se realizan algunas definiciones. En primer lugar se hace notar que la formulación débil del problema plano de elasticidad lineal se reescribe como: encontrar $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ tal que se verifique la Ecuación (3.66), donde $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ está dada por la Ecuación (3.67) y $\ell(\cdot)$ está dada por la Ecuación (3.68).

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (3.66)$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_D (\mathbb{C}(\Omega) \nabla^s(\mathbf{u})) : \nabla^s(\mathbf{v}) \, d\Omega \quad (3.67)$$

$$\ell(\mathbf{v}) = \int_D \mathbf{b}(\Omega) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \, d\partial\Omega \quad (3.68)$$

En el problema perturbado, la formulación débil del problema plano de elasticidad lineal pasa a ser: encontrar $\mathbf{u}_\epsilon \in \mathcal{U}$ tal que se verifique la Ecuación (3.69). En dicha ecuación $\mathcal{A}_\epsilon(\cdot, \cdot)$ y $\ell_\epsilon(\cdot)$ son según se presentan en las Ecuaciones (3.70) y (3.71), respectivamente. En la Ecuación (3.70), $\mathbb{C}(\Omega_\epsilon)$ es el tensor elástico que resulta de tener en cuenta las propiedades elásticas de la inclusión en $B_{x_0, \epsilon}$. De forma análoga, $\mathbf{b}(\Omega_\epsilon)$ es el vector de fuerzas de volumen que tiene en cuenta un posible cambio dentro de la inclusión.

$$\mathcal{A}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{v}) = \ell_\epsilon(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (3.69)$$

$$\mathcal{A}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{v}) = \int_D (\mathbb{C}(\Omega_\epsilon) \nabla^s(\mathbf{u}_\epsilon)) : \nabla^s(\mathbf{v}) \, d\Omega_\epsilon \quad (3.70)$$

$$\ell_\epsilon(\mathbf{v}) = \int_D \mathbf{b}(\Omega_\epsilon) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega_\epsilon + \int_{\Gamma_N} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \, d\partial\Omega_\epsilon \quad (3.71)$$

Los funcionales $\mathcal{J}(\Omega)$ suelen surgir a partir de funcional típicamente inte-

gral $J(\mathbf{w})$, con $\mathbf{w} \in \mathcal{U}$, en el caso particular en que $\mathbf{w}$ es la solución $\mathbf{u}$. De esta manera, para los funcionales integrales $J_0 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ y $J_\epsilon : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, se cumplen las Ecuaciones (3.72) y (3.73). Según se discutió en la observación sobre la dificultad del cálculo de las DT, el funcional $\mathcal{J}(\Omega_\epsilon)$ implica simultáneamente la modificación de la expresión integral de $J_0(\mathbf{w})$ a $J_\epsilon(\mathbf{w})$ y la modificación de la solución $\mathbf{w}$ del problema plano de elasticidad lineal desde $\mathbf{u}$ a $\mathbf{u}_\epsilon$.

$$\mathcal{J}(\Omega) = J_0(\mathbf{u}) \quad (3.72)$$

$$\mathcal{J}(\Omega_\epsilon) = J_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) \quad (3.73)$$

Con las definiciones anteriores se define el problema adjunto, en el dominio perturbado y en su formulación débil, como encontrar $\mathbf{v}_\epsilon \in \mathcal{V}$ tal que se verifique la Ecuación (3.74). El término de la derecha de la anterior ecuación se define como la derivada de Fréchet de $\mathcal{J}_\epsilon$ evaluada en $\mathbf{u}$ aplicada a la dirección $\mathbf{v}$. De forma análoga, se define el problema adjunto en el dominio imperturbado como encontrar $\mathbf{v}$ tal que verifique la Ecuación (3.75). La diferencia entre ambos problemas son las definiciones de $\mathcal{A}$ y J , donde la segunda es siempre evaluada en $\mathbf{u}$, solución del problema plano de elasticidad lineal imperturbado. El hecho de tener que resolver un problema adicional, denominado problema adjunto, es lo que da el nombre al método.

$$\mathcal{A}_\epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{v}_\epsilon) = - \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} J_\epsilon(\mathbf{u}), \mathbf{v} \right\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (3.74)$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = - \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} J_0(\mathbf{u}), \mathbf{v} \right\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (3.75)$$

Según presentó Amstutz (2006), el método adjunto para el cálculo de las DT se basa en asumir que existen, para cada x_0 , funciones $\delta\mathcal{A}$, $\delta\ell$, δJ_1 y δJ_2 tales que cumplan las Ecuaciones (3.76) a (3.79). Se destaca que los restos $o(f(\epsilon))$ no son necesariamente iguales en las cuatro ecuaciones, simplemente son funciones que cumplen la Ecuación (3.61).

$$(\mathcal{A}_\epsilon - \mathcal{A}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{v}_\epsilon) = f(\epsilon)\delta\mathcal{A} + o(f(\epsilon)) \quad (3.76)$$

$$(\ell_\epsilon - \ell_0)(\mathbf{v}_\epsilon) = f(\epsilon)\delta\ell + o(f(\epsilon)) \quad (3.77)$$

$$J_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) = J_\epsilon(\mathbf{u}) + \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} J_\epsilon(\mathbf{u}), \mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{u} \right\rangle + f(\epsilon)\delta J_1 + o(f(\epsilon)) \quad (3.78)$$

$$J_\epsilon(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}) + f(\epsilon)\delta J_2 + o(f(\epsilon)) \quad (3.79)$$

Finalmente, la DT se calcula como presenta la Ecuación (3.80). A partir de la ecuación anterior, el método adjunto es un método más fácilmente aplicable a casos más complejos que el método directo, si bien en la mayoría de los casos implica resolver un problema de ecuaciones diferenciales parciales adicional. De todas formas se destaca que se requieren ciertas hipótesis, no siempre presentes, sobre la suavidad de algunos funcionales. Principalmente, el método adjunto requiere que $\mathcal{J}_\epsilon$ sea diferenciable Fréchet y los funcionales $\mathcal{A}$ y ℓ admitan los desarrollos presentados.

$$D_T \mathcal{J}(x_0) = \delta \mathcal{A}(x_0) - \delta \ell(x_0) + \delta J_1(x_0) + \delta J_2(x_0) \quad (3.80)$$

El método adjunto también fue utilizado para calcular varias DT de utilidad en optimización topológica de estructuras y problemas similares. En primer lugar, Sokołowski y Źochowski (1999) son los primeros en definir con rigurosidad matemática la DT y utilizaron el método adjunto para calcular la DT de funcionales integrales de formas cuadráticas en el problema de elasticidad lineal. Garreau et al. (2001) utilizaron el método adjunto, en el caso de nucleación de huecos en el dominio, para funcionales genéricos bajo ciertas condiciones de regularidad. Sokołowski y Źochowski (2001) utilizaron el método para calcular la DT de la energía potencial total y un funcional asociado a criterios de fluencia en el problema de elasticidad lineal bajo la hipótesis de nucleación de huecos. Posteriormente, Amstutz (2006) avanzó en el método adjunto y calculó la DT de funcionales genéricos con ciertas condiciones de regularidad para el problema de elasticidad lineal en el caso de inclusiones con diferente material. Giusti et al. (2009) utilizaron el método adjunto para el cálculo de la DT de las componentes del tensor elástico de homogeneización de primer orden. Amstutz y Novotny (2010) utilizaron el método adjunto para el cálculo de la DT de un funcional que penalizara zonas donde la tensión de von Mises superara cierto límite en el problema de elasticidad lineal. Luego, Amstutz y Novotny (2011) utilizaron el método adjunto para calcular la DT de funcionales genéricos con condiciones de regularidad específicas en el problema de la losa de Kirchhoff. Canelas et al. (2011) utilizaron el método adjunto para calcular la

DT de un funcional asociado al potencial magnético en un problema de fundición electromagnética. Bonnet y Delgado (2013) utilizaron este método para calcular la DT de funcionales de forma basados en la energía para el problema de elasticidad anisótropa. Más recientemente, Ren y Zhang (2021) utilizaron el método adjunto para calcular la DT de momentos estadísticos basados en la complacencia para un método polinómico de optimización robusta. Miyajima et al. (2023) calcularon la DT de un funcional que maximiza desplazamientos en función de la complacencia y limitación de tensiones con un funcional similar al de Amstutz y Novotny (2010). Feng et al. (2023) utilizaron el método adjunto en el problema de elasticidad lineal para un funcional que incluye restricciones dimensionales. Cui et al. (2024) utilizaron el método adjunto para funcionales de forma genéricos, con hipótesis de regularidad, para el problema de elasticidad lineal anisótropa y heterogénea. En esta tesis, en el Anexo C, se utilizó el método adjunto en el cálculo de la DT del funcional de limitación de tensiones.

3.2.2.3. Método de sensibilidad topológica basado en variación de forma

El método de *sensibilidad topológica basado en variación de forma* es otro método que ha sido bastante utilizado para el cálculo de las DT. La presentación que aquí se hace es la ofrecida en el libro de Novotny y Sokołowski (2013), donde Novotny es uno de los desarrolladores de la metodología. Para el cálculo de la DT, este método se basa en la sensibilidad a la variación de forma del funcional $\mathcal{J}$, la cual se describe a continuación, partiendo desde el dominio perturbado topológicamente. El método de sensibilidad topológica basado en variación de forma convierte el problema de análisis de sensibilidad topológica en un problema de análisis de sensibilidad de forma, el cual no es tampoco sencillo, pero bastante más conocido. Además el método que se presenta es, al menos desde un punto de vista ingenieril, más intuitivo que el método adjunto.

Como fue adelantado en la introducción, la sensibilidad de un funcional a la variación de forma indica la tasa de cambio del funcional al perturbarse la geometría del dominio pero sin la creación de huecos en él, es decir sin modificar su topología (Capítulo 6, Choi y Kim, 2005). En el caso del método de sensibilidad topológica basado en variación de forma, el dominio que ve modificada su forma es la estructura ya perturbada topológicamente (Ω_ϵ). Por lo

anterior se define la geometría de la estructura perturbada topológicamente y variada de forma Ω_τ como presenta la Ecuación (3.81), donde τ es el parámetro de variación de forma y $\mathbf{v}$ es el campo de velocidades asociado a la variación de forma. En el caso del método analizado, el campo de velocidades es un campo vectorial diferenciable que debe cumplir los requisitos presentados en la Ecuación (3.82), donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a $\partial B_{x_0, \epsilon}$ y saliente al cuerpo perturbado. Con un campo de velocidades tal que cumpla la Ecuación (3.82), se tiene que la variación de forma resulta en aumentar el tamaño de la perturbación de ϵ a $\epsilon + \tau$.

$$\Omega_\tau := \{x_\tau \in \mathbb{R}^2, x_\tau = x + \tau \mathbf{v}, x \in \Omega_\epsilon\} \quad (3.81)$$

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \begin{cases} -\mathbf{n} & \text{en } \partial B_{x_0, \epsilon} \\ 0 & \text{en } \partial \Omega \cup \partial D \end{cases} \quad (3.82)$$

La sensibilidad a la variación de forma se define como presenta la Ecuación (3.83), donde $\frac{d}{d\tau}$ es la derivada total con respecto a τ según se define en los libros de mecánica del continuo (Kundu et al. 2016). En términos generales se suele hacer referencia a Ω_τ como la *configuración espacial* del problema de variación de forma y a Ω_ϵ como la *configuración material*. En particular, las propiedades mecánicas para cada punto x_τ de la configuración espacial son las del punto material x asociado. Para el cálculo de la derivada total del funcional $\mathcal{J}(\Omega_\tau)$, la cual suele ser (y efectivamente es en los funcionales considerados en esta tesis) la derivada de una expresión integral, se recurre al *teorema de transporte de Reynolds* según se presenta en la Ecuación (3.84) (Kundu et al. 2016), donde $\phi(\tau, x)$ es un campo espacial genérico.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\Omega_\tau) - \mathcal{J}(\Omega_\epsilon)}{\tau} = \frac{d}{d\tau} \mathcal{J}(\Omega_\tau) \Big|_{\tau=0} \quad (3.83)$$

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_\tau} \phi(\tau, x) d\Omega_\tau = \int_{\Omega_\tau} \partial_\tau \phi(\tau, x) d\Omega_\tau + \int_{\partial \Omega_\tau} \phi(\tau, x) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\partial \Omega_\tau \quad (3.84)$$

Finalmente, Novotny y Sokołowski (2013) en su libro mostraron que la definición de la DT dada por la Ecuación (3.62) es equivalente a la que se presenta en la Ecuación (3.85), la cual es posible debido a que existen homeomorfismos entre los espacios Ω_ϵ y Ω_τ . La ecuación anterior implica que la sensibilidad a la

nucleación de una perturbación en el dominio, cuando el tamaño de dicha perturbación tiende a cero, es equivalente a la sensibilidad a aumentar el tamaño de dicha perturbación cuando su tamaño es infinitesimal.

$$D_T \mathcal{J}(x_0) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\partial_\epsilon f(\epsilon)} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\Omega_\tau) - \mathcal{J}(\Omega_\epsilon)}{\tau} = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\partial_\epsilon f(\epsilon)} \frac{d}{d\tau} \mathcal{J}(\Omega_\tau) \Big|_{\tau=0} \quad (3.85)$$

Al igual que los métodos anteriores, el método de sensibilidad topológica basado en variación de forma ha sido utilizado en el cálculo de DT de utilidad en optimización topológica de estructuras. Giusti et al. (2008) utilizaron la metodología para calcular la DT de la energía potencial total en el problema plano de elasticidad lineal. Giusti et al. (2010) también utilizaron el método para calcular la DT de la energía potencial total del problema de transferencia de calor estacionario. Silva et al. (2011) utilizaron el método de sensibilidad topológica basado en variación de forma para calcular la tasa de liberación de energía producto de fisuras desde el dominio sin fisuras en base a la DT. Más recientemente Baiges et al. (2019) utilizaron el método para calcular la DT de la complacencia en un problema con cierto grado de aleatoriedad en las cargas. En esta tesis, en el Anexo C, en el cálculo presentado de la DT de la complacencia, se consideró el método de sensibilidad topológica basado en variación de forma.

3.2.2.4. Método lagrangiano

Finalmente, el *método lagrangiano* es otro método que ha comenzado a ganar renombre en el cálculo de las DT no fácilmente resolubles por los métodos anteriores. Uno de los primeros trabajos en utilizar este método para calcular DT fue publicado por Delfour (2018). En dicho artículo el autor notó que el funcional $\mathcal{J}$ se encuentra sujeto a una restricción dada por el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (ecuación de campo), por lo que puede definirse un lagrangiano dado por la Ecuación (3.86). En la ecuación anterior, ζ es el multiplicador de Lagrange asociado a la Ecuación (3.69). La Ecuación (3.86) se basó en el artículo de Gangl y Sturm (2020) por su mayor claridad. Luego, el método se basa principalmente en utilizar la propiedad de que el óptimo es el punto silla del lagrangiano y operar desde ahí.

$$\mathcal{L}(\Omega_\epsilon, \mathbf{u}_\epsilon, \zeta)(\mathbf{v}) = J_\epsilon(\mathbf{u}) + \zeta (\mathcal{A}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{v}) - \ell_\epsilon(\mathbf{v})) \quad (3.86)$$

Luego, los artículos de Gangl y Sturm (2020) y Sturm (2020) avanzaron sobre el método. En particular, Sturm (2020) lo utilizó para calcular DT de funcionales asociados a problemas semilineales y Gangl y Sturm (2020) lo utilizaron para problemas cuasilineales. En ambos artículos llegaron, de forma similar al método adjunto, a una expresión de la DT en base a la suma de derivadas de distintos términos del lagrangiano. En ambos artículos consideraron la ecuación del *estado adjunto promediado* como hallar ζ_ϵ tal que se verifique la Ecuación (3.87) (Laurain y Sturm, 2016). El adjunto promediado, si bien presenta una expresión más compleja que la del problema adjunto, es una de las principales herramientas utilizadas en el método lagrangiano.

$$\int_0^1 \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathcal{L}(\Omega_\epsilon, s\mathbf{u}_\epsilon + (1-s)\mathbf{u}, \zeta_\epsilon)(\varphi), \mathbf{v} \right\rangle ds = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{V} \quad (3.87)$$

Más recientemente Gangl y Sturm (2022) propusieron un método numérico para calcular la DT de problemas elípticos lineales o no, en dos o tres dimensiones. Dicho método se basó en el método lagrangiano según lo discutieron los anteriores artículos. Gangl y Sturm (2022) llegaron a una expresión genérica para la DT que requiere resolver tres sistemas de ecuaciones diferenciales: el problema de base, el problema adjunto y un tercero. Según declararon los autores, el método numérico es una herramienta de utilidad cuando el problema adjunto, o el de base, no presentan solución única. Se destaca que Gangl y Sturm (2022) obtuvieron la DT de la complacencia en el problema de elasticidad en grandes desplazamientos con el modelo material de Saint-Venant-Kirchhoff.

Si bien el método lagrangiano no ha sido tan utilizado en el cálculo de las DT en problemas de optimización topológica de estructuras; se ha visto que parecer ser un método de mucha utilidad en los cálculos más complejos. En esta tesis no se utilizó este método en ningún cálculo.

3.2.3. Derivada topológica en optimización topológica de estructuras

Las DT han tenido gran utilidad en diversos problemas de Ingeniería y ramas similares. La derivada ha tenido utilidad en el procesamiento de imágenes por computadora (Auroux et al. 2006), en la obtención de tomografías (Auroux et al. 2010), en el diseño de conductores de calor (Giusti et al. 2010), en

procesos de fundición electromagnética (Canelas et al. 2011), en la identificación de inclusiones (Hintermüller et al. 2012), en el diseño de motores (Gangl et al. 2016), en el diseño de sistemas de conducción de fluidos (Ruspini et al. 2019) y en optimización estructural. A continuación se analiza el uso de las DT en optimización topológica de estructuras y se identifican los principales métodos desarrollados.

Dada la capacidad analizada de la DT de medir la sensibilidad de algún funcional a la modificación local del material, parece intuitivo su uso como indicador en algoritmos de optimización topológica de estructuras. Efectivamente, la primer referencia en utilizar la DT en optimización topológica de estructuras es el artículo publicado por Eschenauer et al. (1994), donde se optimizaron estructuras que maximizaran la rigidez estructural, cumpliendo además una restricción de igualdad en el volumen ocupable. Se destaca que al momento de publicación del artículo de Eschenauer et al. (1994), la DT aún no contaba con una formulación matemática rigurosa, lo cual continuaría así hasta el artículo de Sokołowski y Żochowski (1999).

3.2.3.1. Método de optimización de burbuja

El método que desarrollaron Eschenauer et al. (1994) se denomina método de burbuja. El método se basa en un esquema como el presentado en la Figura 3.23, donde se parte de una estructura inicial sin huecos la cual se optimiza. Inicialmente, en base a métodos de optimización de forma, se modifican los bordes de dicha estructura hasta llegar a una geometría optimizada sin nucleación de huecos. Posteriormente, en base a una función que denominaron *función característica del problema de optimización estructural* se define si es conveniente para la función objetivo crear un hueco en el interior del dominio (existen puntos donde dicha función característica es negativa) y en caso afirmativo se lo crea (en el punto donde la función fuera mínima). Si bien Eschenauer et al. (1994) la denominaron función característica, dicha función fue muy similar a la DT de la función objetivo. Luego se repite el paso de optimización de forma, en el cual se incluyen modificaciones a la geometría del hueco nucleado en el paso anterior. El algoritmo continúa hasta que no sea conveniente crear nuevos huecos. En base a este algoritmo se lograron optimizar estructuras clásicas en aproximadamente treinta iteraciones. En la concepción inicial de dicho método no se utilizó una función de nivel para representar la

geometría sino que los bordes se los parametrizó con curvas conocidas. Es por el motivo anterior que el método del artículo de Eschenauer et al. (1994) tiene la importante desventaja de requerir un remallado constante para adaptarse a la geometría de los bordes.

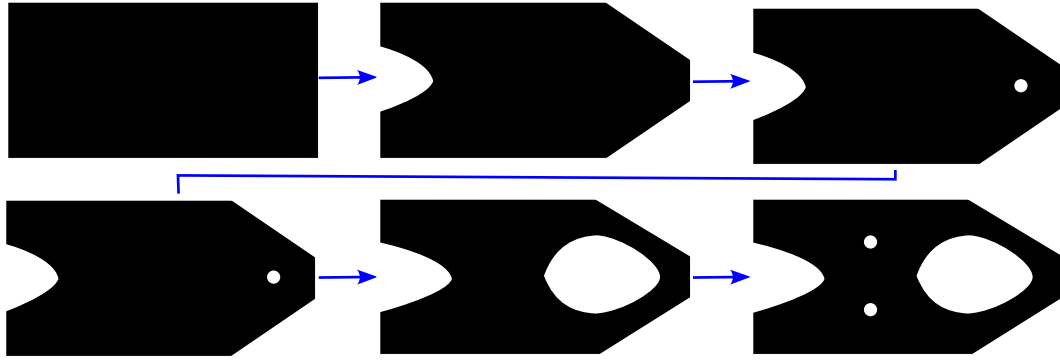


Figura 3.23: Esquema del método de optimización de burbuja

Si bien el método de burbuja no es de los métodos más utilizados en optimización topológica de estructuras basados en la DT, existen algunos artículos recientes en los que sí se utilizó. Riehl y Steinmann (2015) utilizaron un método similar al de burbuja, en el cual se emplea el FEM y progresivamente se retiran elementos de los bordes de la geometría en base a la DT. Luego, avanzada la optimización de forma, el método que utilizaron remueve elementos del interior del dominio también en base a la DT. La ventaja del método de Riehl y Steinmann (2015) sobre el de Eschenauer et al. (1994) es que no necesitan remallar tan seguido, solamente en algunos pasos de suavizado de bordes. Posteriormente, Ullah y Trevelyan (2016) utilizaron una adaptación del método de burbuja en la cual consideraron una geometría dada por una función de nivel en una malla fija y el análisis estructural lo realizaron en base al método de los elementos de contorno. El método de Ullah y Trevelyan (2016) requiere remallar la malla del método de los elementos de contorno, la cual es de una dimensión menor a la geometría del problema estructural, en todos los pasos del algoritmo de optimización estructural. Además, el método de Ullah y Trevelyan (2016) requirió cientos de iteraciones para las geometrías clásicas. Más recientemente, Cai y Zhang (2020) emplearon el método de burbuja parametrizando los bordes con curvas de forma similar a arcos de elipse, a las que denominaron *smoothly deformable implicit curve*, y empleando para el análisis estructural el método de la celda finita (Düster et al. 2008). El método de la celda finita es un método basado en el FEM, con algunas similitudes con el

XFEM, en donde se habilita considerar geometrías no solidarias a la malla de elementos finitos, lo que permite representar las modificaciones en los bordes de la geometría sin remallado. La diferencia fundamental entre el método de la celda finita y el XFEM es que el primero se basa en generar celdas embebidas en los elementos originales donde ocurre la discontinuidad, mientras que el segundo, como se presentó en la Sección 3.1.3.1, se basa en incluir funciones de interpolación extendidas dentro de los mismos elementos cortados. Otra diferencia menor es que el método de la celda finita no es fácilmente empleable con mallas no estructuradas y el XFEM no presenta ninguna diferencia en si la malla es estructurada o no. El método de Cai y Zhang (2020) se utilizó originalmente para resolver problemas de optimización estructural a volumen fijo minimizando la complacencia y para mecanismos complacientes a volumen fijo; y fue recientemente extendido por Cai et al. (2023) y Zhang et al. (2023) para cáscaras. En los artículos de Cai et al. (2023) y Zhang et al. (2023) se optimizaron cáscaras de Kirchhoff-Love, en la cual la geometría de la superficie media la parametrizan mediante NURBS y los huecos en el dominio los parametrizan utilizando el método de Cai y Zhang (2020).

Se han desarrollado otros métodos de optimización topológica de estructuras en base a la DT que toman sus bases del método de la burbuja pero que a su vez utilizan el método de la función de nivel para optimizar y representar la geometría. En particular, Allaire et al. (2005) son de los pioneros en utilizar la DT en conjunto con el método de la función de nivel en optimización topológica de estructuras. En su artículo, Allaire et al. (2005) emplearon la derivada de forma para modificar la geometría de la estructura y cada cierto número de pasos del algoritmo de optimización estructural emplearon los valores mínimos de la DT para crear un hueco en la estructura. Al emplear la función de nivel, el método de Allaire et al. (2005) no requiere modificar la malla de elementos finitos, aunque las geometrías obtenidas no son necesariamente suaves. Dicho método fue recientemente utilizado por Tan y Zhu (2023) para optimizar estructuras multimateriales a complacencia con volumen fijo empleando el FEM para el análisis estructural y el método de los elementos finitos Galerkin-discontinuos para la evolución de la geometría.

Otro método muy similar al método de burbuja fue desarrollado por Wang et al. (2004), quienes son otros de los pioneros en el uso conjunto de la DT con el método de la función de nivel. El método de Wang et al. (2004) se basa en remover progresivamente de la estructura los puntos donde la DT sea

mínima, imponiendo una remoción de material fija en cada iteración. Recién una vez que el volumen alcanzado es el objetivo se pasa a hacer optimización de forma para obtener la geometría optimizada. Este método, el cual requiere pocas iteraciones, fue utilizado por Zhang y Zhang (2016), quienes emplearon una extensión del método de la función de nivel a la que denominaron función de nivel local. El método de Zhang y Zhang (2016) emplea las funciones de nivel locales para solamente definir dicha función cerca de los bordes y reducir el costo computacional, pero requiere de varias reinicializaciones de dichas funciones y muchas iteraciones. Desai et al. (2021) atacaron un problema de optimización topológica multiparamétrico en el cual, además de optimizar la geometría de la estructura en sí, optimizaron la localización y orientación de un conjunto de fibras. Desai et al. (2021) emplearon el método de Wang et al. (2004) para agregar progresivamente fibras a la estructura. Se destaca que todos los artículos identificados en los cuales se utilizó el método de Wang et al. (2004), emplearon el FEM sin ningún tipo de remallado y en todos los casos se tuvo una representación de los bordes no muy buena.

3.2.3.2. Métodos basados en una ecuación de evolución de la función de nivel

Otro grupo de métodos basados en la función de nivel y la DT para optimización topológica de estructuras son los que modifican la función de nivel en base a algún tipo de ecuación de transporte. Los primeros métodos de este estilo (Burger et al. 2004; HINTERMÜLLER, 2005; YAGHMAEI et al. 2020) se basan en la Ecuación (3.88), la cual es la ecuación de Hamilton-Jacobi con un término fuente agregado. En dicha ecuación t hace las veces de un pseudo-tiempo y $\mathbf{v}$ es un vector de velocidad de modificación de la geometría, el cual se suele obtener a partir de expresiones de sensibilidad de forma. Burger et al. (2004) y HINTERMÜLLER (2005) fueron otros de los pioneros en optimización topológica combinando la DT con el método de la función de nivel pero ninguno de los dos realizó optimización estructural. HINTERMÜLLER (2005), quien hizo tratamiento de imágenes, basó su método en un esquema de dos pasos, en los que inicialmente se emplea la Ecuación (3.88) sin el término de $\nabla\Psi$ para hacer optimización topológica pura y luego de cierto punto se continúa sin el término fuente para hacer optimización de forma pura. Burger et al. (2004), quienes resolvieron problemas inversos, simplemente utilizaron la Ecuación (3.88) com-

binando ambos efectos. El método de Burger et al. (2004) fue utilizado para optimización topológica por Khan et al. (2019), quienes trabajaron en problemas de optimización topológica de estructuras a complacencia con volumen fijo. El principal aporte de Khan et al. (2019) fue combinar el método de Burger et al. (2004) con el método Galerkin sin malla (*element free Galerkin* en inglés), pero no lograron mejoras significativas en la representación de la geometría final. Por último lugar, Yaghmaei et al. (2020) emplearon un método similar considerando la Ecuación (3.88) sin el término de $\nabla\Psi$ en todo el método de optimización, y lo utilizaron para maximizar frecuencias de vibraciones de losas magento-reológicas. Se destaca que para no obtener geometrías muy rugosas Yaghmaei et al. (2020) emplearon un filtro que promedia la función de nivel entre nodos.

$$\partial_t\Psi + \mathbf{v} \cdot \nabla\Psi = D_T\mathcal{J} \quad (3.88)$$

Otro método de optimización estructural basado en la resolución de una ecuación de evolución de la función de nivel que incluye la DT, fue presentado por Yamada et al. (2010). Su método es uno de los más utilizados para optimización topológica de estructuras con la DT, junto con el de Amstutz y Andrä (2006) que se presenta más adelante en esta misma sección, y se basa en utilizar la Ecuación (3.89). Dicha ecuación es una versión análoga a la clásica ecuación de reacción y difusión de trazadores, utilizando la DT como término fuente. En este método, el parámetro ς cumple el rol de un parámetro de difusión y ayuda a regularizar la función de nivel y obtener geometrías suavizadas. Al igual que los métodos anteriores basados en ecuaciones de transporte, el método de Yamada et al. (2010) requiere la resolución de la Ecuación (3.89) en cada iteración del algoritmo de optimización estructural, lo que en ocasiones requiere de muchos pasos de pseudo-tiempo cortos para cumplir condiciones clásicas de ecuaciones de evolución como ser la condición de Courant-Friedrichs-Lewy.

$$\partial_t\Psi - \varsigma\nabla^2\Psi = D_T\mathcal{J} \quad (3.89)$$

El método de Yamada et al. (2010) ha sido muy utilizado en los años recientes para optimizar estructuras a complacencia con una restricción de volumen. Se destaca que en la mayoría de los artículos identificados se utilizó el FEM sin ningún tipo de algoritmo de remallado. En primer lugar Cui et al. (2016)

fueron los primeros en hacer optimización multimaterial con el método de la ecuación de reacción-difusión. La formulación multimaterial la consideraron con el método de la función de nivel en un esquema en el cual solamente se permiten cambios específicos entre dos materiales. Posteriormente, Martínez-Frutos y Ortigosa (2021) parecen ser pioneros en optimizar robustez estructural con la DT, donde se define la robustez estructural como evitar colapsos globales a partir de fallas locales. El método de Martínez-Frutos y Ortigosa (2021) se basa en minimizar la complacencia en escenarios de fallas aleatorios y el valor esperado de excesos de cierta complacencia límite. Casi en simultáneo, Ren y Zhang (2021) consideraron un método de descomposición polinómica de momentos estadísticos y la DT de los coeficientes de estos polinomios para optimizar estructuras incluyendo aleatoriedad de cargas y propiedades mecánicas de los materiales. Miki y Yamada (2021) consideraron optimización topológica de estructuras creadas por el método de manufactura aditiva. En su artículo, emplearon el método de las deformaciones inherentes para sumarle a la complacencia un término que penalice las deformaciones térmicas volumétricas causadas por el método de fabricación. Lo anterior fue expandido en el artículo de Miki (2023), en el cual le agregó condiciones al problema de optimización estructural tal que las estructuras sean autosoportantes en el proceso de fabricación. Las condiciones agregadas son de limitar el ángulo máximo de la estructura respecto a la dirección de fabricación y un problema multifísica con transferencia de temperatura para evitar zonas de goteo. Además, Miki (2023) calculó las DT de dichas restricciones. Noda et al. (2022) utilizaron el método de Yamada et al. (2010) para optimización multimaterial, con una nueva formulación en la cual consideran una matriz de funciones de nivel, lo que facilita la ecuación de evolución pero aumenta el número de incógnitas. Noda et al. (2022) optimizaron tanto estructuras a complacencia como la generación de mecanismos complacientes. Posteriormente, Noda et al. (2024) extendieron el artículo de Noda et al. (2022) para incluir un material anisótropo reforzado con fibras, al cual no solo se optimizó su localización sino además su orientación. Oka et al. (2023) mejoraron el método de Yamada et al. (2010) utilizando el método acelerado de descenso por gradientes de Nesterov. Finalmente, Feng y Yamada (2024) y Feng et al. (2023) utilizaron el método de la ecuación de reacción-difusión para optimización multimaterial, en el cual consideraron la formulación que presentó Noda et al. (2022), y consideraron el proceso de fabricación de la manufactura aditiva. Para tener en cuenta el proceso de fa-

bricación, los anteriores autores consideraron optimización de las estructuras por piezas, las cuales presentan restricciones al tamaño máximo fabricable y restricciones asociadas al proceso de ensamblado, las cuales definieron con un problema multifísica.

Algo a destacar del método de Yamada et al. (2010) es que en muchos de los artículos en los que se empleó (*e.g.* Feng y Yamada, 2024; Feng et al. 2023; Miyajima et al. 2023; Noda et al. 2022, 2024) se utilizó una franja de transición de las propiedades materiales en los bordes. Esta franja de transición logra que las propiedades materiales no sean discontinuas en la interfase entre el material estructural y el material blando que representa los vacíos. Si bien la franja de transición disminuye la precisión del análisis estructural, en los artículos se declara que mejora significativamente la convergencia del método de la ecuación de reacción-difusión.

Se identificaron también varios artículos en los que se utilizó el método de Yamada et al. (2010) para optimización de estructuras a complacencia, en los que se empleó el FEM pero con algoritmos de remallado. En primer lugar, Li et al. (2021) presentaron un método en el cual se remalla en cada iteración adaptándose a la geometría de la estructura, con tamaño de elemento creciente al alejarse de los bordes. Posteriormente, Cortellessa et al. (2023) presentaron un algoritmo en el cual, cada cierto número de iteraciones del método de la ecuación de reacción-difusión, se rehace la malla de elementos finitos. La malla de elementos finitos de Cortellessa et al. (2023) es de un tamaño de elemento uniforme en la parte material y anisótropa y estirada según la dirección de los bordes en los vacíos. Finalmente, Cui et al. (2023, 2024) presentaron un método, al cual denominaron restricción exacta de volumen, el cual requiere en cada iteración remallar para adaptar la geometría al borde. Según los autores de estos últimos artículos, la única forma de tener una restricción exacta de volumen con el método de Yamada et al. (2010) es con su método de remallado.

Otros usos del método de Yamada et al. (2010) en optimización topológica ha sido el de optimización de mecanismos complacientes (Miyajima et al. 2023) y en la colocación de refuerzos para prevenir fisuración (Wu et al. 2020). Del artículo de Miyajima et al. (2023) se destaca que fueron los primeros, según se identificó, que aplicaron una restricción de tensiones en la geometría final y además usaron el método de la ecuación de reacción-difusión. Por su parte, Wu et al. (2020) simplificaron el cálculo de la DT de la tasa de liberación de energía por fisuración, linealizándola por partes.

En una filosofía similar a la de Yamada et al. (2010), Oliver et al. (2019) propusieron un método en el cual aplican lentamente la restricción de volumen en base a un lagrangiano. En el algoritmo de Oliver et al. (2019) se parte de resolver un problema de optimización estructural a volumen fijo, en general más grande que la restricción de volumen objetivo, resolviendo una ecuación de reacción-difusión con un suavizado lagrangiano. Una vez alcanzada la estructura optimizada para cierta restricción del volumen se actualiza dicha restricción y se repite el algoritmo.

Un último método de optimización estructural basado en una ecuación de evolución que incluye la DT, fue presentado por Yaghmaei y Ghoddosian (2019). Estos autores trabajaron en optimización de losas, tanto en base a minimización de complacencia como maximización de frecuencias de vibración. La ecuación que emplearon fue una muy similar a la ecuación de reacción-difusión, pero basada en la ecuación de flexión de una placa en una fundación elástica. En dicha ecuación, la DT hace las veces de carga y la constante de la fundación hace las veces de difusión. Este método no se lo ha visto utilizado en más artículos pero es aún bastante reciente.

3.2.3.3. Método de descenso por la DT

Otro método basado en la función de nivel y la DT para optimización topológica de estructuras fue desarrollado por Amstutz y Andrä (2006). Estos autores se basaron en los métodos de optimización de punto fijo y la condición que en el óptimo la DT de la función objetivo es positiva en todo el dominio (si es un problema de minimización). La condición de optimalidad anterior se justifica por el hecho que en el óptimo cualquier cambio local de material sería contraproducente y aumentaría el valor de la función objetivo. El método de Amstutz y Andrä (2006) desarrolla un algoritmo iterativo el cual se presenta en la Figura 3.24. En un mismo paso, el algoritmo define una geometría propuesta por la DT, la cual se basa en un método similar a descenso por gradientes, y luego interpola la función de nivel de la geometría propuesta y la de la geometría anterior para obtener la geometría del siguiente paso. Por esta interpolación entre dos funciones de nivel, algunos autores han denominado el método como *SLERP* (Spherical linear interpolation, Ferrer et al. 2018). Este método es el que se utilizó en esta tesis pues no requiere el paso adicional de resolver una ecuación de transporte, lo que normalmente implica un costo

computacional importante, y porque se ha utilizado con éxito en diversos problemas de optimización, por ejemplo el considerado por Amstutz y Novotny (2010), en el cual se limitan las máximas tensiones. Los detalles de cómo el método de Amstutz y Andrä (2006) define la geometría propuesta por la DT y cómo realiza la interpolación se presentan en el Capítulo 5.

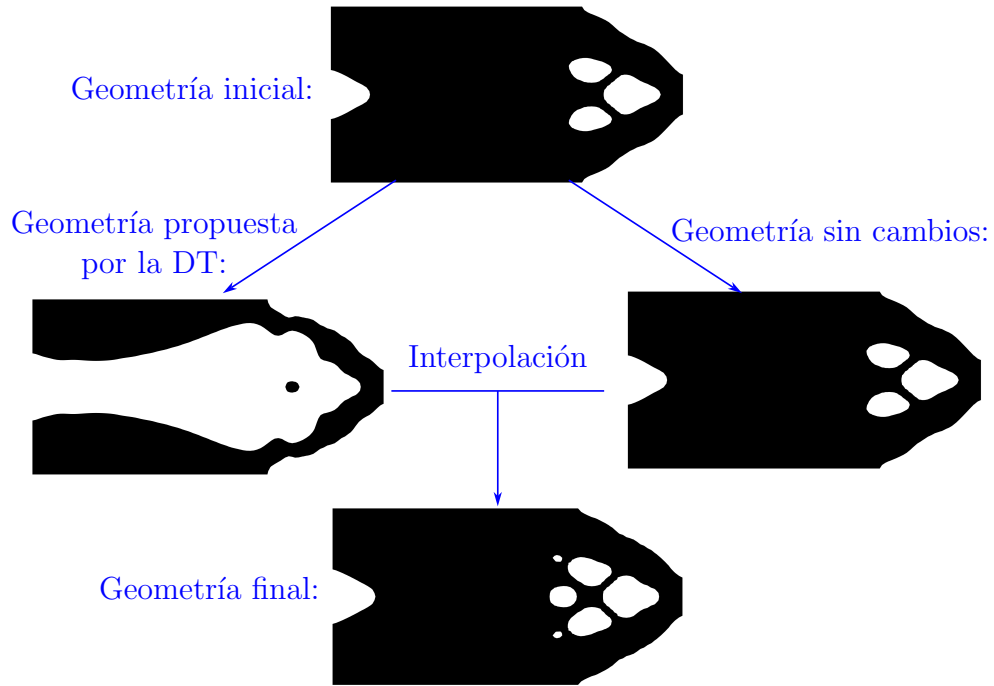


Figura 3.24: Esquema del método de optimización de Amstutz y Andrä (2006)

El método de Amstutz y Andrä (2006) ha sido muy utilizado en los años recientes para optimización de estructuras en base a minimización de la complacencia, en la mayoría de los casos empleando el FEM para el análisis estructural y el cálculo de la DT. Los primeros en utilizar el método fueron los mismos Amstutz y Andrä (2006), quienes declararon que lo mejor es emplear una misma malla para la función de nivel y el FEM, debido al elevado costo computacional del FEM y al hecho que de utilizar una malla más fina para la función de nivel se identificaron inestabilidades en la geometría final. Amstutz y Andrä (2006) en general comenzaron con mallas de elementos finitos gruesas y al final de su método emplearon refinamientos globales de la malla de elementos finitos para mejorar la representación de la geometría. Posteriormente, Lopes et al. (2015) ampliaron el método para optimizar estructuras sometidas a varios Estados de Carga (EC) y también emplearon refinamientos globales al final del método. Giusti et al. (2016) por su parte utilizaron el método sin

refinar la malla, en problemas de elasticidad anisótropa en la que trabajaron en un problema multiescala, aunque sin considerar la parte de optimización de la microestructura. Torii et al. (2016) emplearon el método de Amstutz y Andrä (2006) con refinamiento global para un problema estocástico, en el cual utilizaron métodos estadísticos para definir la DT del peor escenario. Posteriormente, Lopes et al. (2017) desarrollaron el cálculo de la DT para un problema con fricción entre dos cuerpos y optimizaron en base al método de Amstutz y Andrä (2006) con refinamiento global. Xavier y Novotny (2017) desarrollaron el cálculo de la DT para problemas con presión interna y lo utilizaron junto con el método de Amstutz y Andrä (2006) con refinamiento global para optimizar estructuras con presión hidrostática dependiente del diseño. Ferrer et al. (2018) partieron del trabajo de Giusti et al. (2016) e incluyeron optimización de la microestructura seleccionando en cada paso la mejor microestructura de un catálogo que resolvieron de forma desacoplada. Oliver et al. (2018) ampliaron el problema de Ferrer et al. (2018) resolviendo el catálogo de microestructuras en base al método de Amstutz y Andrä (2006). Luego Gangl (2020) y Romero Onco y Giusti (2020) generalizaron casi en simultáneo el método de Amstutz y Andrä (2006) para problemas multimateriales. La diferencia entre las propuestas de Gangl (2020) y Romero Onco y Giusti (2020) radica en la definición de los distintos materiales en base a la función de nivel: Gangl (2020) empleó un vector de $(n - 1)$ funciones de nivel (siendo n el número de distintos materiales) y definió el material según la posición del vector en un espacio $(n - 1)$ -dimensional, mientras que Romero Onco y Giusti (2020) utilizaron $(n - 1)$ funciones de nivel pero los materiales los definieron en un esquema de descarte, donde la primer función define si es material uno o a definir por la siguiente función, la segunda define si es material dos o a definir y así sucesivamente. Finalmente, Novotny et al. (2021) mejoraron el problema de optimizar estructuras sometidas únicamente a su peso propio y emplearon el método de Amstutz y Andrä (2006) con refinamiento global para obtener las geometrías optimizadas.

Basados en el método de Amstutz y Andrä (2006), Baiges et al. (2019) modificaron la búsqueda lineal en la interpolación del método original. En el método de Amstutz y Andrä (2006) se hace una búsqueda lineal, durante la interpolación lineal, que parte de la geometría propuesta por la DT y busca en dirección a la geometría incambiada (detalles de como es esta búsqueda lineal se presentan en el Capítulo 5). Por otra parte, Baiges et al. (2019) desa-

rollaron un método heurístico para hacer más eficiente dicha búsqueda lineal. Baiges et al. (2019) emplearon su método adaptado, junto con el FEM-cortado (*Cut-FEM* en inglés), para resolver problemas de optimización estructural con aleatoriedad, particularmente minimizando el valor esperado y la varianza de la complacencia. El método FEM-cortado que dichos autores emplearon es una adaptación del FEM, en el cual la interfase presenta un refinamiento local especializado para lograr capturar adecuadamente la geometría. En base al método de Amstutz y Andrä (2006) con la búsqueda lineal de Baiges et al. (2019) y empleando nuevamente el FEM, Castañar et al. (2022) extendieron el problema de optimización estructural a materiales incompresibles. La principal dificultad que presentó el trabajo de Castañar et al. (2022) es que debieron calcular la DT de este caso y decidieron plantear un problema de elasticidad en el cual agregaron como incógnitas las presiones y las deformaciones desviadoras. Además, los autores notaron que el material blando no podría tener igual coeficiente de Poisson que el material estructural, puesto que la incompresibilidad agregaría una rigidez al material blando no física. Posteriormente, Castañar et al. (2024) extendieron lo analizado en su artículo anterior para optimizar estructuras incompresibles sometidas a la interacción fluido-estructura. Al igual que los trabajos analizados en el estado del arte del XFEM (Jenkins y Maute, 2015, 2016), Castañar et al. (2024) optimizaron únicamente la parte seca de la estructura, pero emplearon FEM para la parte sólida y un método adaptativo euleriano-lagrangiano para el fluido.

El método de Amstutz y Andrä (2006) también se ha usado para optimización de estructuras en la que se incluye una restricción de la tensión máxima, desde el artículo pionero de Amstutz y Novotny (2010). En dicho artículo los autores presentaron un funcional de tensiones que penalizara zonas donde la tensión de von Mises supera cierto límite. Los autores dedujeron la DT del funcional y posteriormente emplearon el método de Amstutz y Andrä (2006), con el FEM y refinamientos de la malla, para optimizar las estructuras evitando zonas de tensiones elevadas. El desarrollo de Amstutz y Novotny (2010) fue posteriormente utilizado por Lopes et al. (2017) para incluir muchos EC. Luego dos Santos et al. (2018) extendieron el trabajo de Lopes et al. (2017) para un problema de optimización estructural estocástico. De forma similar a otros trabajos presentados en esta sección, los autores descompusieron el algoritmo de optimización estocástico en dos pasos intercalados: un primer paso estocástico, en el cual para una geometría dada se define el peor escenario de

las variables aleatorias, y un segundo paso de optimización determinista, en el cual se actualiza la geometría en base al método de Amstutz y Andrä (2006) en función del peor escenario del primer paso.

Además de minimización de la complacencia, el método de Amstutz y Andrä (2006) también se ha utilizado en otras aplicaciones de optimización estructural y otras. Lopes y Novotny (2016) emplearon el método, junto con el funcional de tensiones de Amstutz y Novotny (2010), para hacer optimización estructural de mecanismos complacientes con limitación de tensiones. Posteriormente, Ganghoffer et al. (2018) emplearon el método para resolver un problema de optimización topológica que permitiera crear microestructuras tales que el material macroscópico tuviera coeficiente de Poisson negativo. Carvalho et al. (2021) fueron pioneros en emplear el método de Amstutz y Andrä (2006) en placas para hacer minimización de complacencia o maximización de frecuencias naturales. Vale la pena aclarar que Romero Onco y Giusti (2020) ya habían hecho optimización de placas pero solamente minimizando la complacencia. Finalmente, Calisti et al. (2023) generaron un problema de optimización de microestructuras, donde emplearon el método de Amstutz y Andrä (2006) para generar materiales sólidos que presentaran comportamientos constitutivos de segundo orden asociados a los gradientes de las deformaciones.

3.2.3.4. Otros métodos de optimización estructural

Además de los métodos anteriormente analizados en los que se utilizó la DT para optimización estructural, también se han visto algunos artículos aislados donde se utilizaron otros métodos. En primer lugar, en el artículo de Takalozadeh y Yoon (2017) se utilizó el método de los componentes móviles y deformables, el cual se analizó al final de la Sección 3.1.3.5 (ver Figura 3.21). En dicho artículo, los autores modificaron en base a la DT el cálculo de la sensibilidad a los parámetros geométricos de los componentes. Lo que los autores hicieron fue definir la sensibilidad del funcional como una suma de la DT en las zonas cercanas a los bordes de los componentes. Vale la pena destacar que Takalozadeh y Yoon (2017) consideraron para el análisis estructural el FEM sin ningún tipo de remallado.

Un último método de optimización topológica de estructuras que se identificó fue propuesto por Kobayashi et al. (2021), quienes son los únicos, en el

mejor conocimiento del autor de la tesis, que lo han utilizado a la fecha. En este trabajo los autores en vez de optimizar estructuras bi o tridimensionales, como suele hacerse con la DT, optimizaron estructuras formadas por componentes unidimensionales. Esta metodología tiene similitud con el método de los componentes móviles y deformables en el sentido de que optimiza la estructura en base a componentes. La gran diferencia entre ambas metodologías es que el método de Kobayashi et al. (2021) no mantiene un número constante de componentes sino que se van añadiendo componentes durante el proceso de optimización. Una vez creados los componentes, los únicos parámetros de diseño son la posición de sus extremos y la sección transversal, análogo a lo que sería una clásica optimización de parámetros como se discutió en el Capítulo 1. Para la creación de los componentes, los autores emplearon una nueva versión de la DT a la cual definieron *derivada topológica de dos puntos*, en la cual se mide la sensibilidad de un funcional a la creación de un ligamento fino que conecte dos puntos.

Finalmente, y para terminar con los antecedentes del uso de la DT en optimización estructural, se hace una mención especial a los siguientes tres artículos. Estos tres artículos, utilizaron la DT en optimización estructural pero de una forma no convencional, es decir sin utilizarla como medida de sensibilidad de la función objetivo sino con algún otro fin. En primer lugar, Martínez-Frutos et al. (2019) encararon el problema de optimización estructural buscando que las geometrías obtenidas no fueran muy sensibles a la posible aparición de poros en el proceso de fabricación. Martínez-Frutos et al. (2019) emplearon la DT como una medida de la sensibilidad a la aparición de poros y la utilizaron como una restricción de desigualdad (la DT debe ser menor a cierto valor) en el problema de optimización estructural. Posteriormente, Ferrer (2019) presentó una nueva propuesta para el clásico método SIMP, en la cual la interpolación de las propiedades materiales para densidades intermedias la definieron a partir de resultados de las DT. Según declararon los autores, el método obtenido presentó mejores tasas de convergencia que el SIMP original. Finalmente, Zhang et al. (2022) trabajaron en la optimización de refuerzos para reducir los daños por fisuración. Dichos autores emplearon la DT de la tasa de liberación de energía por fisuración como parte de la función objetivo y realizaron optimización en base al método de sensibilidad clásica, el cual, como se analizó en la Sección 3.1.3.5, requiere del sembrado inicial de huecos. Se destaca que Zhang et al. (2022) emplearon para el análisis estructural una

versión mejorada del FEM denominada IG-FEM, cuya traducción al español es *método de los elementos finitos con enriquecimiento de interfase*. El IG-FEM posee algunas similitudes con el XFEM con la diferencia fundamental que el primero define nodos adicionales en la interfase entre dos materiales mientras que el XFEM incorpora incógnitas adicionales y funciones de interpolación especializadas.

Al igual que se concluyó en la Sección 3.1.3, la única publicación que se identificó que combina el XFEM con el concepto de la DT para optimización topológica de estructuras es el artículo de congreso publicado por el autor de esta tesis (Delgado y Canelas, 2023). Vale notar que sí existe un antecedente en el uso conjunto del XFEM con el concepto de la DT en el artículo de Canelas et al. (2024), quienes buscaron la solución de un problema inverso. El único otro trabajo que combina un método similar al XFEM con la DT para optimización estructural fue el hecho por Zhang et al. (2022) pero, además de las diferencias entre el IG-FEM y el XFEM, en dicho artículo no se utilizó la DT como criterio de optimización como sí se hace en esta tesis. Nuevamente, se concluye que, en el mejor conocimiento del autor de este documento, lo que se presenta en los siguientes capítulos es novedoso.

Capítulo 4

Método de análisis estructural

En este capítulo se describe la metodología de análisis estructural de las geometrías que se obtienen con el método de optimización estructural, el cual se presenta en el Capítulo 5. Se entiende por análisis estructural la resolución del problema plano de elasticidad lineal para un EC específico, en aras de utilizar el campo de desplazamientos para calcular otras funciones de interés como ser la complacencia, tensiones y las DT. El método implementado está basado en los elementos triangulares de tres nodos con posterior extensión, según se discutió en la Sección 3.1. En primer lugar, en la Sección 4.1 se presentan los problemas que se identificaron en las propuestas de la bibliografía y sus principales causas. Luego, en la Sección 4.2 se presenta el desarrollo de una nueva propuesta del XFEM, la cual es la que posteriormente se utilizó en el método de optimización estructural. En esta última sección se presenta además el desempeño de la nueva propuesta frente a las problemáticas identificadas y análisis numérico de convergencia frente al tamaño de los elementos finitos.

4.1. Problemáticas del XFEM preexistente

Por lo discutido en el Capítulo 3, la mejor de las propuestas del XFEM para modelar dos materiales es la que propusieron Moës et al. (2003). El motivo radica en que, como los autores mostraron, el método converge con orden cercano al óptimo en los casos que estudiaron y logra resolver exactamente el ejemplo de la barra de dos materiales sometida a tracción que se presentó en la Figura 3.8. Además, en contraste con la propuesta hecha por Fries (2008), es más sencilla de implementar y posee un menor número de incógnitas. Co-

mo punto adicional, el resto de las propuestas que se presentaron no modelan adecuadamente el material débil, lo cual es necesario en el método de optimización estructural de esta tesis. La razón es poder generalizar el método de optimización estructural desarrollado para cualquier contraste entre las rigideces de los materiales, no solo material estructural y vacíos. Adicionalmente, dicha generalización permite utilizar el XFEM como herramienta de análisis en diferentes problemas, no solo de optimización estructural.

En esta sección se procede a presentar las problemáticas que se identificaron a la propuesta de Moës et al. (2003), las cuales dificultan su uso en algunos casos considerados del problema de optimización estructural. Para hacer lo anterior se analizó el desempeño del XFEM en un caso de estudio similar al que analizaron Moës et al. (2003) y Sukumar et al. (2001) en sus respectivos artículos, el cual se presenta a continuación.

4.1.1. Caso de estudio: tracción uniaxial en placa circular con inclusión

4.1.1.1. Introducción y metodología

El caso de estudio considerado es una placa circular de radio $R_e = 2$, con una inclusión circular centrada de radio $R_i = 1$, en estado plano de tensiones, sometido a una tracción uniaxial de valor $S = 1$ por unidad de longitud del eje perpendicular a la dirección de la fuerza, según muestra la Figura 4.1. Ambos materiales poseen el mismo coeficiente de Poisson, $\nu = 0,3$ y distinto módulo de Young: el de la placa exterior es $E = 1$ y el de la inclusión es $E = \gamma$. La solución de este problema, junto con algunos mapas de los campos de tensiones y desplazamientos para distintos valores de γ se presentan en el Anexo D.

El motivo de tratar el problema anterior radica en que los problemas que se utilizaron en la bibliografía para validar las distintas propuestas de XFEM poseen algunas deficiencias. El caso que analizó Fries (2008) posee simetría de revolución, la cual impide ver los problemas que se analizan en esta sección. Por otra parte, Moës et al. (2003) y Sukumar et al. (2001) no consideraron una solución analítica exacta, puesto que emplearon una solución aproximada en base a una placa infinita.

Para estudiar el desempeño del XFEM preexistente se consideraron tres medidas de error. La primera medida se presenta en la Ecuación (4.1), donde

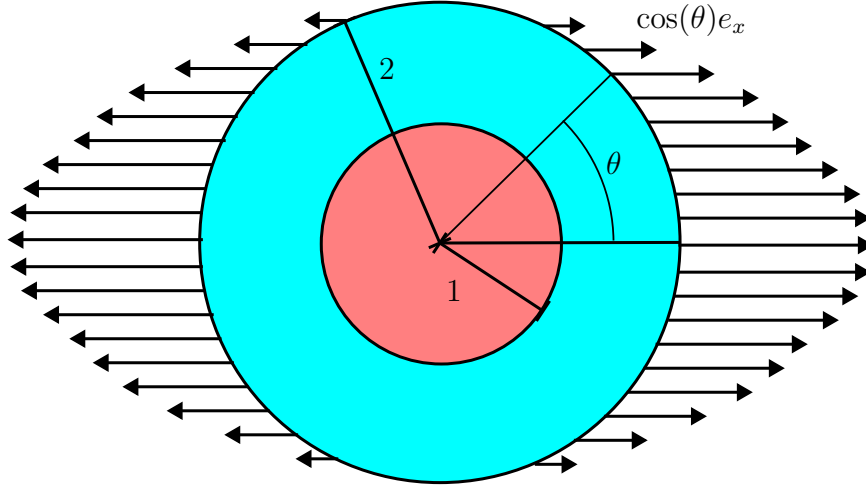


Figura 4.1: Esquema del problema de tracción en una placa circular con inclusión

$\mathbf{u}$ es el vector desplazamiento resultado del método numérico, $\mathbf{u}^{\text{sol}}$ es su solución analítica y la norma es la euclidiana calculada punto a punto. La segunda medida de error se presenta en la Ecuación (4.2), donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones resultado del método numérico y $\boldsymbol{\sigma}^{\text{sol}}$ es su solución analítica. Finalmente, la tercera medida es el error en la norma de la energía, siendo la única considerada en el artículo de Sukumar et al. (2001), la cual se presenta en la Ecuación (4.3), donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de deformaciones resultado del método numérico y $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sol}}$ es su solución analítica. Se tiene que la primera medida indica el máximo error en desplazamientos, la segunda medida indica el máximo error en tensiones y la tercera medida es un error global en base a la energía de deformación. Se destaca además que el error en la norma de la energía es la magnitud que se minimiza con las soluciones del FEM y XFEM.

$$\delta_{\mathbf{u}} = \text{máx}\{||\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\text{sol}}||\} \quad (4.1)$$

$$\delta_{\boldsymbol{\sigma}} = \text{máx}\{\sqrt{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{\text{sol}}) : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{\text{sol}})}\} \quad (4.2)$$

$$\delta_W = \sqrt{\left(\int_D (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{\text{sol}}) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sol}})\right)} \quad (4.3)$$

Se compara el desempeño del XFEM de Moës et al. (2003) en el problema de la Figura 4.1 en una malla no conforme a la inclusión con el desempeño del FEM en una malla conforme a la inclusión. Para hacer dicha comparación se

utilizaron dos mallas de elementos finitos cuadradas con una inclusión circular como presenta la Figura 4.2. En el contorno de dichas mallas se impusieron los desplazamientos analíticos de la solución del problema de la Figura 4.1, tal y como muestra la figura. La malla del XFEM es regular y estructurada como muestra la Figura 4.3a y la inclusión se representa con la función de nivel. Por otra parte, la malla del FEM es no estructurada y se adapta a la geometría de la inclusión como muestra la Figura 4.3b. Ambas mallas poseen una cantidad similar de nodos y elementos, dado que la malla del XFEM posee 5000 elementos y 2601 nodos y la del FEM posee 4818 elementos y 2504 nodos. Además, para realizar un análisis adicional, se consideró un análisis con el FEM en la malla estructurada de la Figura 4.2a, en la cual los elementos cortados son constituidos del material más rígido. En todos los resultados de la Sección 4.1.1.2 se denomina *FEM no conforme* a los resultados dados por este último análisis.

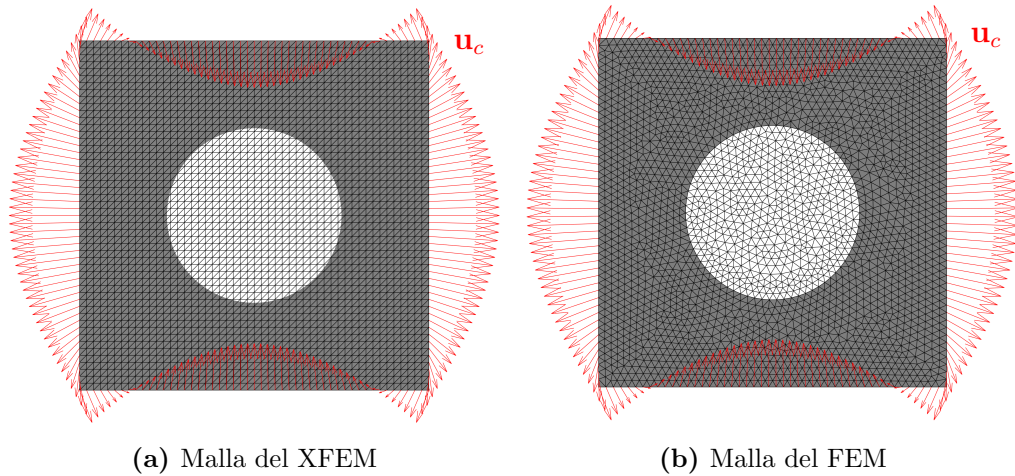


Figura 4.2: Mallas consideradas para el análisis del caso de estudio de la placa circular

Para el cálculo de los errores se decidió utilizar el método de cuadratura de Gauss, considerando 79 puntos por elemento, o por subregión en el caso de los EX del XFEM. La localización de los 79 puntos y sus respectivos pesos se obtuvieron del artículo de Dunavant (1985). El error δ_W se obtuvo directamente del método de cuadratura, mientras que los errores δ_u y δ_σ se obtuvieron del punto de Gauss con mayor error.

Según se discutió en el Capítulo 3, los autores de las distintas propuestas del XFEM observaron una buena convergencia de las soluciones obtenidas al

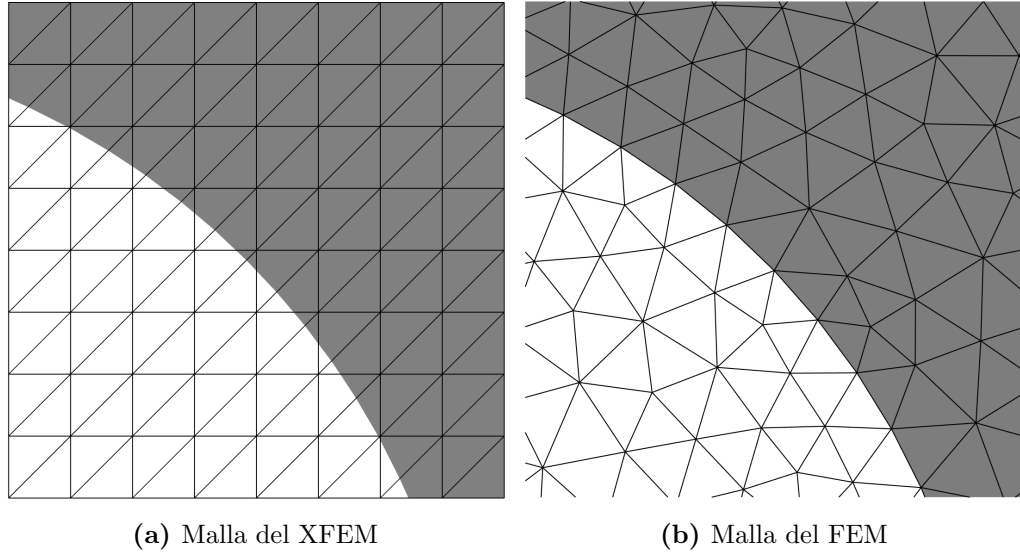


Figura 4.3: Detalle de una parte de la interfase para ambas mallas en el caso de estudio de la placa circular

reducir el tamaño de los elementos, pero no analizaron el comportamiento para grandes contrastes entre las rigideces entre los dos materiales. Por el anterior motivo, en este caso de estudio se analizó el comportamiento del XFEM y del FEM para valores de γ entre 10^{-9} y 10^9 . A continuación se presentan los resultados obtenidos de dicho análisis.

4.1.1.2. Resultados del caso de estudio

En primer lugar se presenta la Figura 4.4, la cual presenta, para el XFEM y para el FEM en ambas mallas, el comportamiento del error δ_W al modificar varios órdenes el valor de γ . Se hace notar que dicha figura está en escala doble logarítmica. En esta figura, al igual que en las siguientes relacionadas con los errores δ_σ y δ_u , se retiró del gráfico el caso $\gamma = 1$, para el cual todos los métodos son capaces de obtener soluciones exactas, a menos de errores de representación numérica. En la Figura 4.4 se muestra que para $\gamma < 1$, los errores del XFEM y del FEM en la malla conforme son de magnitud similar, en general siendo el error del XFEM algo mayor. Estos resultados son consistentes con los presentados por Moës et al. (2003), quienes declararon que el XFEM presentaba convergencia similar al FEM. Por otra parte, para $\gamma > 1$, el error del XFEM crece bastante respecto al del FEM, siendo hasta 45 veces mayor. Además, en este caso el error del XFEM es incluso mayor que el error del FEM no conforme. Por lo tanto, para $\gamma < 1$ se tiene que la solución del XFEM con

una malla no conforme puede ser, en términos generales, tan buena como una del FEM en una malla conforme, no ocurre lo mismo para $\gamma > 1$. De todas formas se destaca que esta medida del error no es adecuada para identificar grandes errores locales.

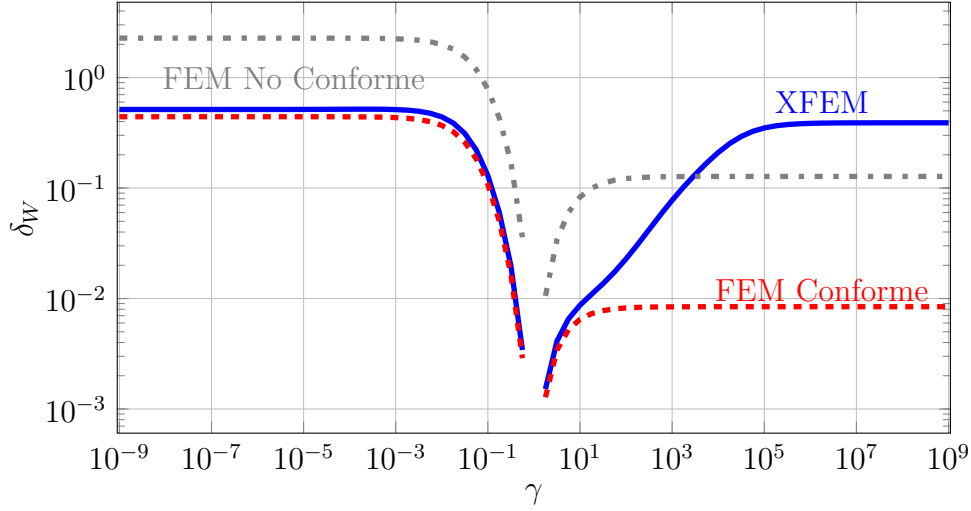


Figura 4.4: Error δ_W para la propuesta de Moës et al. (2003)

Se presenta en la Figura 4.5 el error δ_u para los tres métodos, también en escala doble logarítmica. En la figura se ve que para contrastes pequeños entre las rigideces, los errores son similares entre el XFEM y el FEM en la malla conforme. Por otro lado, cuando el contraste entre las rigideces es muy grande ($\gamma \ll 1$ o $\gamma \gg 1$) se tiene un error en los desplazamientos que es aproximadamente 40 veces mayor en el XFEM que en el FEM en malla conforme. Además, para $\gamma \gg 1$ los errores del XFEM son casi idénticos a los del FEM en la malla no conforme y para $\gamma \ll 1$ los errores del XFEM son incluso mayores a los del FEM en la malla no conforme.

La Figura 4.6 presenta el error δ_σ para ambos métodos, también en escala doble logarítmica. En esta figura se muestra que para $\gamma < 1$, los errores del XFEM son bastante similares a los del FEM en la malla conforme, salvo el intervalo $\gamma \in [10^{-5}, 10^{-3}]$, donde el error es algo mayor. Además, para $\gamma < 1$, los errores del XFEM son siempre menores a los del FEM en la malla no conforme. Por otro lado, para $\gamma > 1$, es decir cuando el material interior es más rígido que el exterior, los errores del XFEM son casi 5000 veces más grandes que los del FEM en la malla conforme y 500 veces mayores que los de la malla no conforme. En particular, para $\gamma > 10^3$ existen puntos con tensiones calculadas casi 40 veces mayores a la máxima tensión analítica.

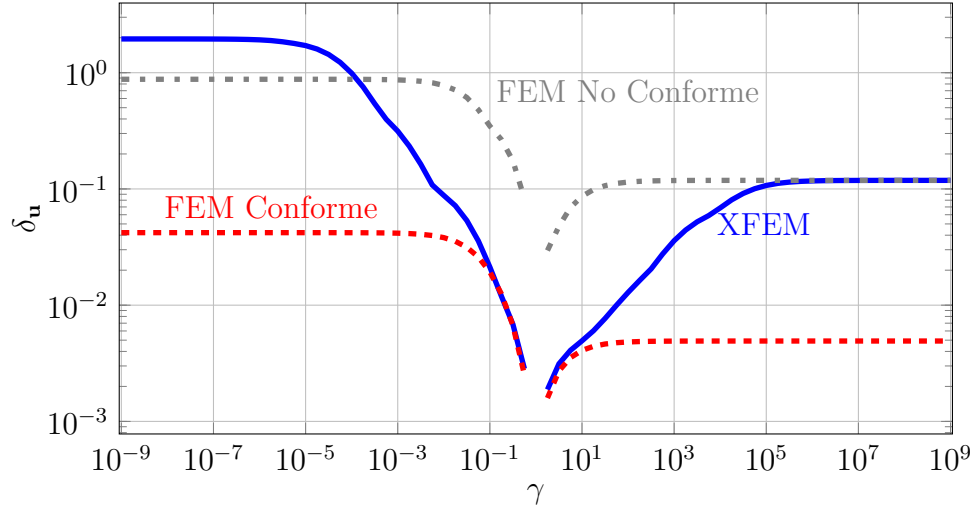


Figura 4.5: Error $\delta_{\mathbf{u}}$ para la propuesta de Moës et al. (2003)

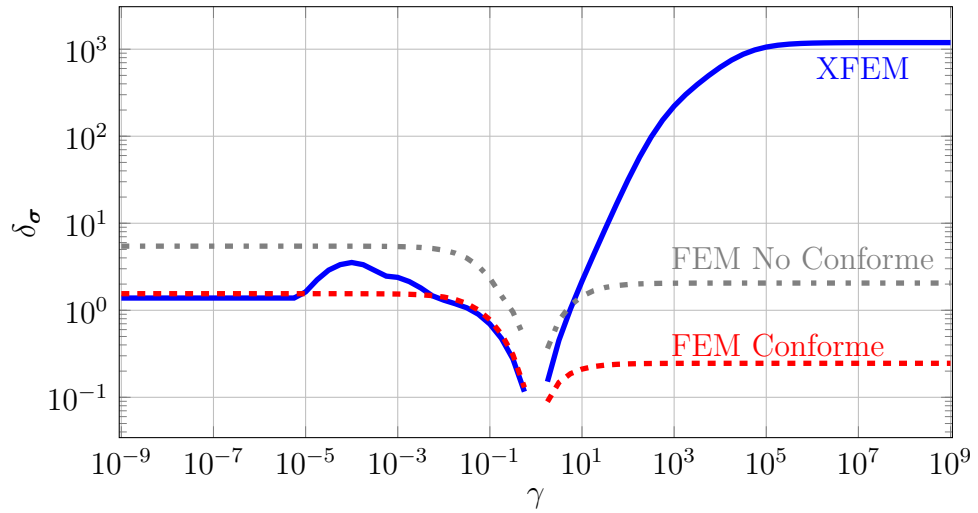


Figura 4.6: Error δ_{σ} para la propuesta de Moës et al. (2003)

Vale la pena resaltar que δ_W muestra el comportamiento global de la solución mientras que $\delta_{\mathbf{u}}$ y δ_{σ} identifican errores locales. Dicha diferencia es importante para analizar la relevancia de cada error. Los errores de tipo local son muy relevantes para esta tesis pues se ha visto que pueden afectar los resultados de algunos usos de la propuesta de Moës et al. (2003).

Finalmente, en la Figura 4.7 se presentan los puntos donde ocurren los máximos que derivan en los errores $\delta_{\mathbf{u}}$ y δ_{σ} . Los colores de los puntos se asocian a los distintos valores de γ según la barra de color y los puntos circulares son resultados del XFEM y las cruces del FEM en malla conforme. En el caso de la Figura 4.7a se ve en primer lugar que los puntos de máximo error en

desplazamientos para el FEM son, como era esperable, en las zonas de mayor gradiente en las tensiones, según los mapas del Anexo D. Por otra parte, para el XFEM los puntos de máximo error se dan en general dentro de la inclusión para $\gamma < 1$ y fuera de ella para $\gamma > 1$, es decir siempre en el material más blando. Además, todos los puntos se encuentran cercanos a la interfase. En el caso de la Figura 4.7b se obtiene que los puntos de máximo error son para ambos muy cercanos a la interfase, lo que es consistente con que sean las zonas de mayor tensión en valor absoluto.

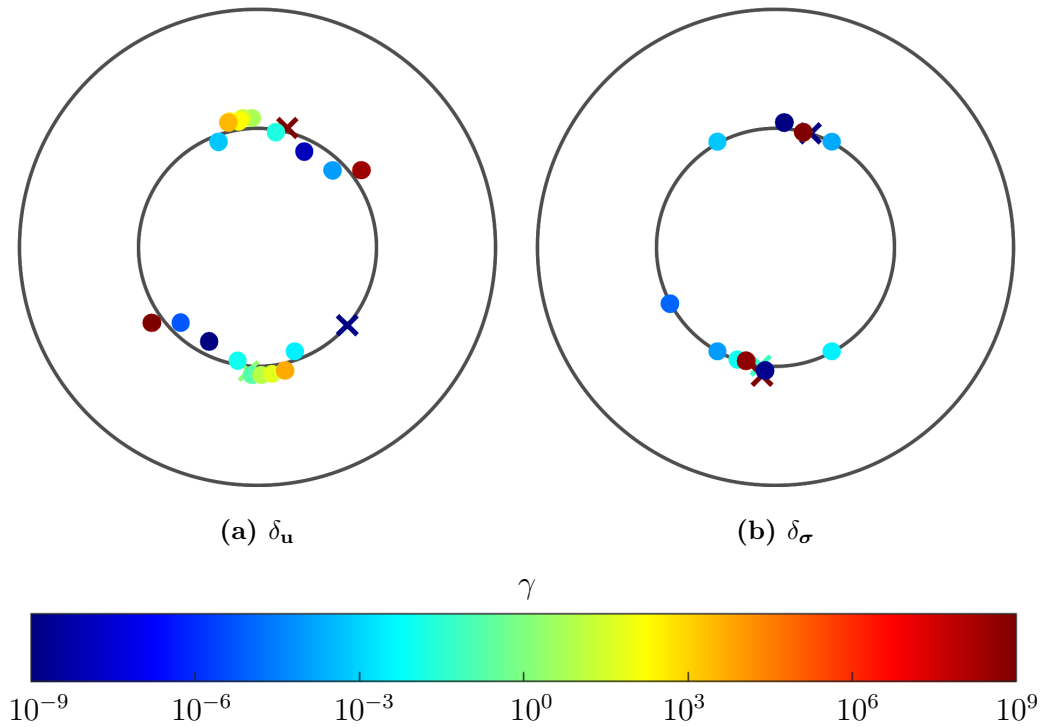


Figura 4.7: Puntos donde se dan los máximos errores para la propuesta de Moës et al. (2003). Puntos XFEM y cruces FEM en malla conforme

De las Figuras 4.4 a 4.6 se concluye que para contrastes elevados la propuesta del XFEM preexistente no es muy precisa. Por un lado, en los casos en que la inclusión posee una rigidez significativamente menor al material exterior, la parte de la inclusión presenta errores en los desplazamientos bastante mayores a los calculados por el FEM en una malla conforme. Por el otro lado, en los casos en los que la inclusión posee una rigidez muy elevada respecto al material exterior, los tres errores son más de 30 veces mayores en el XFEM que en el FEM. Se destaca además que para $\gamma > 10^5$ los errores en las tensiones son totalmente inaceptables, siendo del orden de 1190, cuando la tensión

máxima analítica es menor a 10. Se destaca además que el único intervalo en el cual los tres errores fueron similares entre el XFEM y el FEM, fue entre $\gamma = 0,1$ y $\gamma = 10$, similar al utilizado en los artículos de Fries (2008), Moës et al. (2003) y Sukumar et al. (2001). Como el análisis comparativo realizado fue hecho con mallas de cantidad similar de nodos y elementos, se tiene que las diferencias de error no se asocian a diferencias en la discretización del dominio. A continuación se procede a analizar las principales fuentes de esta problemática.

4.1.1.3. Discusión de la fuente de error

Para analizar el motivo detrás de los errores se analiza en detalle los campos de desplazamientos y tensiones en algunos puntos problemáticos. En primer lugar, la Figura 4.8 muestra los campos de u_x obtenidos para $\gamma = 10^6$, en la región de x entre $-0,80$ y $-0,48$ y y entre $-1,04$ y $-0,72$. En los cuatro gráficos se representó con una línea gruesa azul la interfase, analítica en la Figura 4.8a y numérica en las Figuras 4.8b a 4.8d. Además, se dibujaron las respectivas mallas en las soluciones numéricas. En primer lugar, al comparar las Figuras 4.8a y 4.8c se obtiene que el FEM en malla conforme logra captar adecuadamente el campo de desplazamientos y logra marcar un cambio de pendiente en la interfase. En contraposición, la Figura 4.8b muestra que el campo de desplazamientos lejos de la interfase se resuelve adecuadamente pero no se obtiene el comportamiento esperado en la interfase. En particular, las dos regiones destacadas de dicha figura muestran que el campo de desplazamientos de los EX aparenta ser idéntico al obtenido con el FEM no conforme como muestra la Figura 4.8d. Parece que en situaciones de contraste muy elevado, el XFEM no logra utilizar las variables adicionales para adaptar el campo de desplazamientos en los EX, lo que obliga a los EX a comportarse de forma similar a un elemento tradicional del material más rígido.

Por otro lado, en la Figura 4.9 se presentan los campos de u_x obtenidos por los métodos numéricos y la solución analítica para el caso $\gamma = 10^{-6}$. Los cuatro gráficos se hicieron en la región de x entre $-0,72$ y $-0,4$ e y entre $-0,96$ y $-0,64$. En este caso la interfase se dibujó con una línea gruesa roja. Nuevamente se obtuvo que el FEM en malla conforme a la interfase logra captar adecuadamente el cambio de pendiente de la solución en la interfase. Por otro lado, la Figura 4.9b muestra que el XFEM sí es capaz de marcar

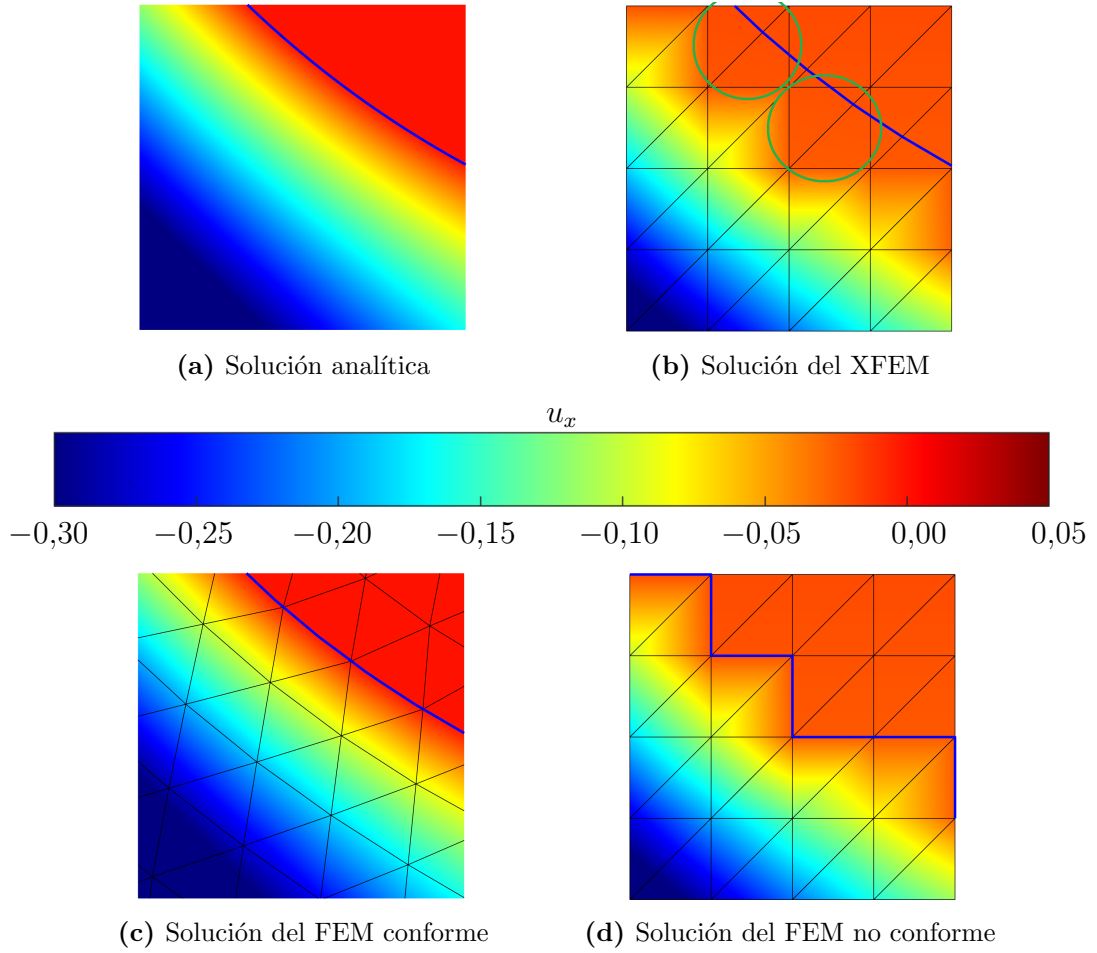


Figura 4.8: Comparación en detalle de soluciones de u_x para $\gamma = 10^6$

un cambio de pendiente en la interfase, a pesar de no estar explícitamente mallada, pero no logra resolver adecuadamente el campo de desplazamientos en el material más blando. En particular, se destacaron dos regiones en dicha figura, las cuales presentan un campo de desplazamientos extraño, de forma escalonada. En este caso, al comparar las Figuras 4.9b y 4.9d, se obtiene que el campo de desplazamientos no es equivalente al proporcionado por el FEM no conforme. A pesar de lo anterior, se tiene que los EX, al modificar la pendiente de la solución del lado blando de la interfase, introducen grandes errores en los elementos adyacentes del material blando.

Finalmente, la Figura 4.10 muestra el campo de la tensión σ_{xx} en la región dada por x entre $-0,32$ y $-0,16$ e y entre $-1,04$ y $-0,88$ para $\gamma = 10^6$. La curva azul es la interfase. La figura muestra que el error en las tensiones es localizado y se asocia a las incógnitas adicionales del XFEM, lo que queda evidenciado

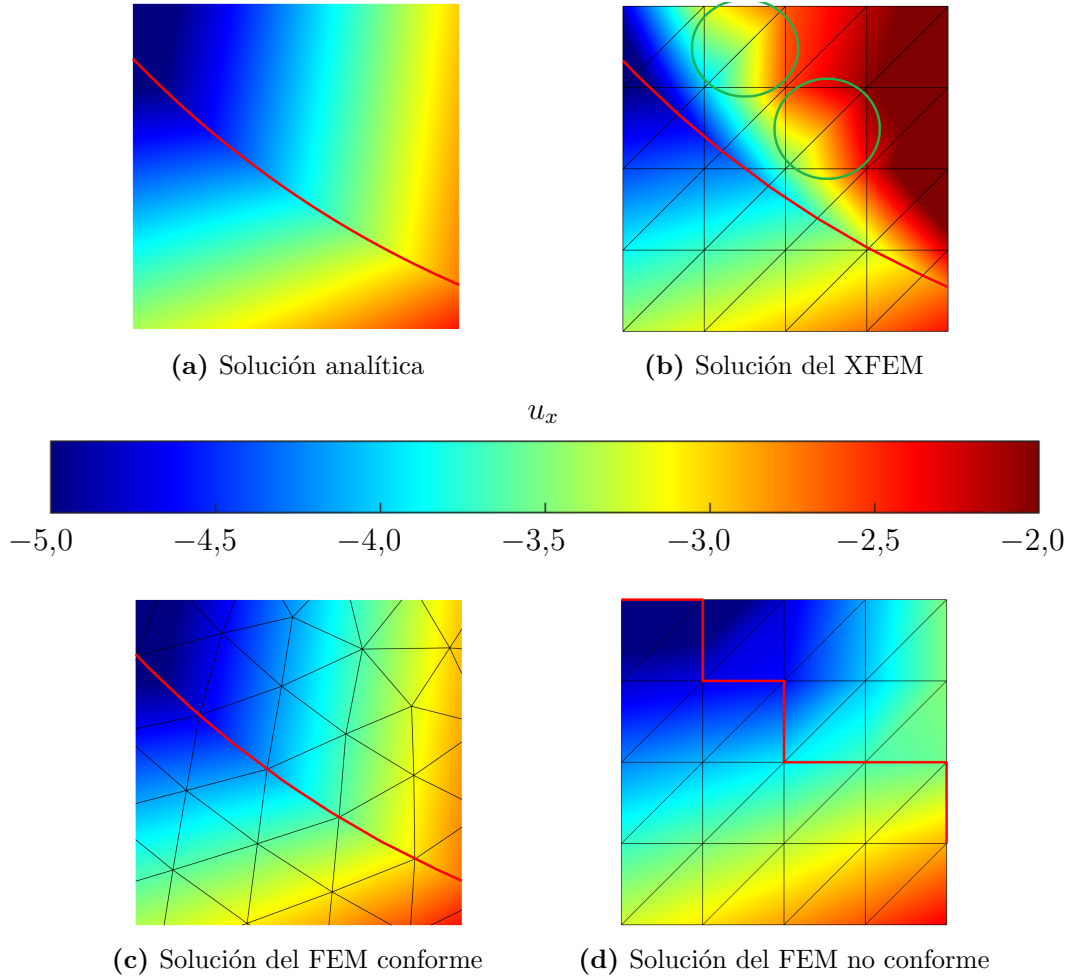


Figura 4.9: Comparación en detalle de soluciones de u_x para $\gamma = 10^{-6}$

por la variación lineal que presenta. Este comportamiento se relaciona a la rigidez artificial discutida para la Figura 4.8, donde las incógnitas extendidas, al haber intentado generar un cambio de pendiente en la interfase, introdujeron deformaciones en el material más rígido, las cuales se tradujeron en tensiones muy elevadas.

Las Figuras 4.8 a 4.10 muestran que la fuente del error del XFEM se asocia a una mala resolución dentro de los EX en el caso que las diferencias de rigidez entre los dos materiales sea muy grande. En términos generales, las soluciones generan errores importantes en los desplazamientos del material blando y errores importantes en las tensiones del material rígido. Si bien en el caso con inclusión rígida el comportamiento de los EX fue análogo al de elementos rígidos, no fue así para el caso en el cual la inclusión es blanda.

Finalmente se concluye que las propuestas preexistentes del XFEM no lo-

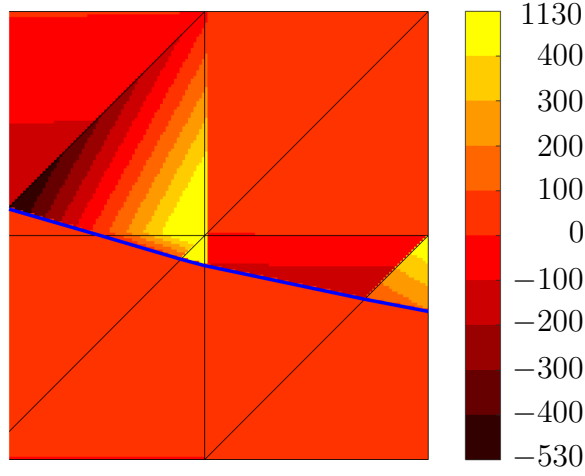


Figura 4.10: Detalle a σ_{xx} en los elementos de máximo error para $\gamma = 10^6$

gran resolver adecuadamente problemas en los cuales el contraste entre rigideces es elevado. En los casos en los cuales ambos materiales presentan tensiones apreciables ($\gamma > 100$) el XFEM se comporta como si los EX fueran del material más rígido, como si prioriza mejorar la precisión del desplazamiento del lado rígido y las tensiones del lado blando. Por otra parte, en los casos en los cuales solamente el material más rígido presenta tensiones apreciables ($\gamma < 0,01$) el XFEM prioriza resolver adecuadamente los campos de desplazamientos y tensiones en el material más rígido, adaptando los desplazamientos del material blando, sin gran precisión en su resolución, a los del rígido.

4.1.2. Segundo caso de estudio: barra con dos interfases sometida a tracción

Para continuar con el análisis de posibles fuentes de error, se presenta ahora un segundo caso de estudio, el cual se presenta en la Figura 4.11. Este caso es el de una barra de dos materiales con dos interfases sometida a tracción. En el Capítulo 3 se discutió que la propuesta de Moës et al. (2003) es capaz de resolver exactamente el problema de la barra de dos materiales con una única interfase, incluso si la interfase no es mallada explícitamente. Por lo tanto, en principio sería de esperar que la propuesta también resuelva exactamente el problema de la Figura 4.11, pero, como se presenta a continuación, no es necesariamente así.

Para el análisis se consideró la malla de la Figura 4.12, en la cual la columna central de nodos presenta interfase a izquierda y a derecha. La zona gris

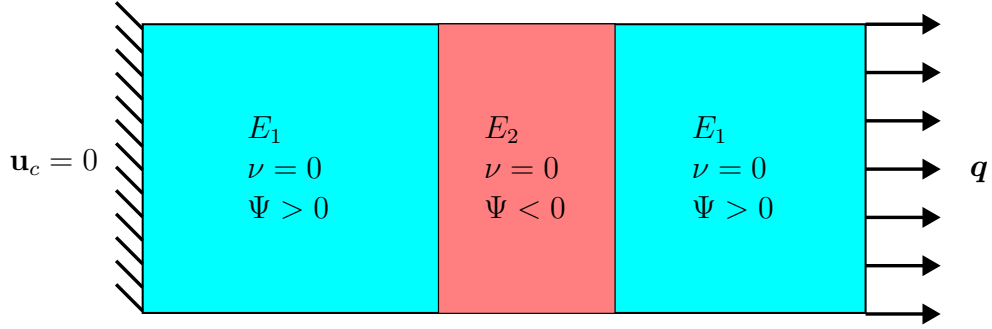


Figura 4.11: Esquema de la barra de dos materiales y dos interfaces sometida a tracción

representa el material 1 con $E_1 = 1$ y la zona blanca representa el material 2 con $E_2 = 0,5$. La elección de la malla no fue fortuita sino que muestra que la propuesta de XFEM no es adecuada si existen interfaces muy próximas entre sí. Si se hubiera escogido una malla más fina, en la cual las interfaces estuvieran separadas por al menos un EB, la solución sí sería exacta. Por lo tanto, la dificultad que a continuación se presenta es similar a la que identificaron Makhija y Maute (2014) para la propuesta de Sukumar et al. (2001) para huecos y que solucionaron con su propuesta.

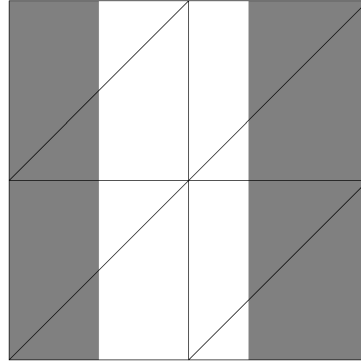


Figura 4.12: Malla utilizada para evaluar el XFEM de Moës et al. (2003) para la barra de dos interfaces

En la Figura 4.13 se presenta el campo de desplazamientos horizontales en la línea horizontal $y = 0,5$ para el problema de la Figura 4.11, el cual se resolvió con una fuerza $q = 1$. Vale la pena destacar que, si bien se presentan los resultados para una línea horizontal particular, los resultados no varían significativamente respecto a qué línea se escoja. En particular la Figura 4.13a muestra el campo de desplazamientos obtenido con el XFEM superpuesto con la solución analítica. Dicha figura muestra que el XFEM da una solución razo-

nable, con quiebres en las derivadas en las interfases, pero que no es exacta. La Figura 4.13b reafirma la no exactitud de los resultados al graficar la diferencia entre la solución numérica y la analítica.

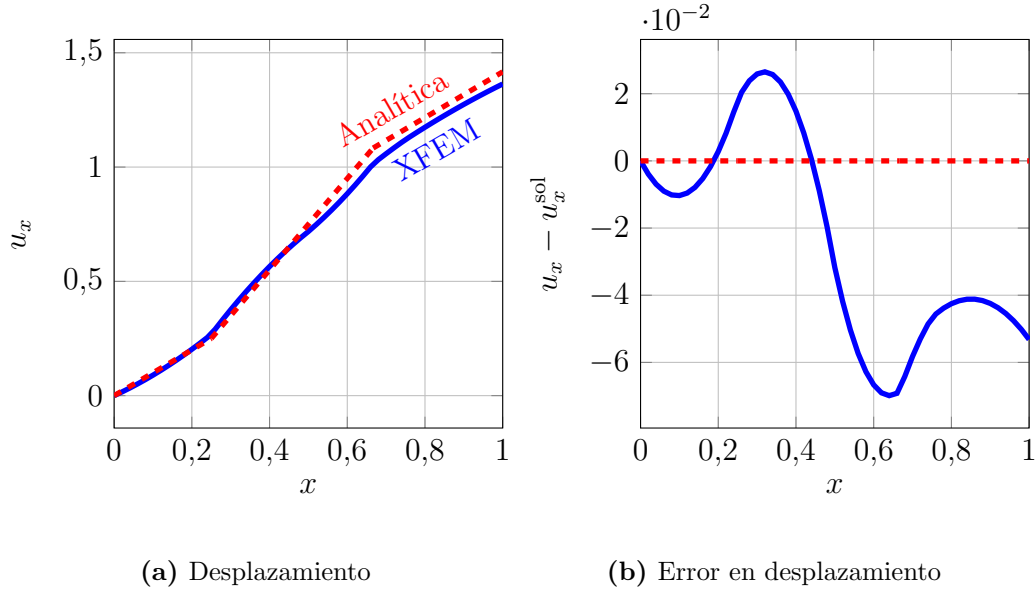


Figura 4.13: Campo de desplazamientos horizontales de la prueba de tracción en barra de dos interfases para la propuesta de Moës et al. (2003)

El principal motivo por el cual la propuesta de Moës et al. (2003) no logra resolver exactamente el problema anterior se asocia a que no se logran independizar los movimientos de ambas fases. Las incógnitas adicionales de la columna central de nodos parecen no ser capaces de permitir representar simultáneamente los cambios de pendiente que ocurren en las dos interfases. Si se hubiera separado las interfases por al menos un EB existirían dos columnas de nodos extendidos, las cuales permitirían resolver exactamente, pero al acercar las interfases se superponen dichos nodos y se pierden grados de libertad. Si se recuerda que una posible interpretación de las incógnitas adicionales es que están asociadas al salto en la derivada del campo de desplazamientos producida por la interfase, entonces se comprende por qué las interfases muy juntas son un problema: obligan a que las mismas variables extendidas permitan representar dos saltos diferentes, y eso no es posible. La propuesta de Sukumar et al. (2001) para interfases cae bajo el mismo problema, ya que las variables normales y extendidas de la columna central de nodos tienen efectos simultáneos en las tres regiones cercanas y separadas por las interfases. La propuesta de Fries (2008) tampoco logra solucionar el problema ya que es muy

similar a la de Sukumar et al. (2001) en los EX, y este caso no presenta ningún elemento de transición.

En principio este problema podría no ser grave si no existieran zonas de pequeño espesor. Por lo tanto, si la formulación de optimización estructural de esta tesis evitara la aparición de componentes finos, el problema podría no presentarse. La dificultad del anterior análisis es que el problema en estudio es muy particular, con interfases rectas y paralelas a la estructura de la malla.

Si bien en principio las dificultades de ambos casos de estudios parecen independientes, se teorizó que la falta de suficiente libertad de interpolación como para poder representar cambios de pendiente arbitrarios en las interfases para las distintas fases, manteniendo continuidad, es la raíz de las dificultades presentadas. En el caso del caso de estudio de la Sección 4.1.1, las interfases curvas y cerradas, combinadas con grandes contrastes, introducen los errores significativos respecto al FEM en malla conforme. Por otro lado, en el caso de estudio de esta subsección, la cercanía de dos interfases inducen en errores no esperados, a pesar de que el contraste de rigideces no sea significativo.

Si bien la evidencia numérica presentada no es determinante en cuanto a la interpretación dada de las dificultades observadas con el XFEM; la idea de enriquecer la interpolación de los desplazamientos, dotándola de algunas características de la interpolación del FEM en malla conforme, es lo que motivó a la propuesta de XFEM de la Sección 4.2. Además, como se muestra en dicha sección, la nueva propuesta logra mejorar considerablemente los problemas observados en esta sección.

Un detalle no menor es que los autores de las propuestas del XFEM de la bibliografía declararon que sus propuestas convergían, según el error δ_W , a la solución analítica al reducir el tamaño del elemento, con órdenes similares a los del FEM con malla conforme. Sin embargo, en las referencias de la bibliografía no se consideraron contrastes de rigideces mayores que 10, y no se consideraron las medidas de error δ_u y δ_σ consideradas aquí. La aplicación de optimización topológica de esta tesis requiere un análisis estructural al menos tan bueno como el FEM en malla conforme con un tamaño de elemento similar, para cualquier contraste, en particular contrastes elevados, lo cual no lo están permitiendo las propuestas de la bibliografía.

A pesar de las problemáticas discutidas en esta sección, según se presenta en el Capítulo 6 y en varios artículos del Capítulo 3, la propuesta de Moës et al. (2003) es capaz, en términos generales, de obtener resultados razonables

para el problema de optimización cuando se considera una magnitud global, como la complacencia, como criterio de optimización estructural. De todas formas, las problemáticas identificadas sí perjudican la optimización estructural. En primer lugar, la propuesta de Moës et al. (2003) presenta problemas si la solución presenta elementos estructurales finos, lo cual es esperable cuando las proporciones de material sólido objetivo son bajas. En segundo lugar, las propuestas de la bibliografía presentan problemas cuando es necesaria la determinación precisa de las tensiones en el material rígido, como en el caso que se limitan las tensiones. Finalmente y más importante aún, la propuesta de Moës et al. (2003) puede admitir la presencia de elementos discontinuos, que presentan una continuidad artificial por efecto del problema presentado en la Sección 4.1.2. Estos problemas hicieron conveniente, para el método de optimización estructural de esta tesis, mejorar la propuesta del XFEM, según se presenta en la siguiente sección.

4.2. Desarrollo de un nuevo XFEM

A partir de lo analizado en la sección anterior, se desarrolló para esta tesis una nueva propuesta del XFEM que permite mejorar las deficiencias observadas. En primer lugar, en la Sección 4.2.1 se presenta la formulación para el caso bidimensional de la nueva propuesta de XFEM. Luego, en la Sección 4.2.2 se presentan brevemente las principales particularidades de su implementación numérica, contrastándolas con las discutidas anteriormente en la Sección 3.1.3.4. Finalmente, en la Sección 4.2.3 se presenta el desempeño de la nueva propuesta de XFEM frente a las dificultades de la Sección 4.1, incorporando además un análisis de convergencia de los distintos errores.

4.2.1. XFEM por aristas extendidas

4.2.1.1. Definición de las funciones g

La formulación bidimensional de la nueva propuesta de XFEM se basa en definir una función g_i por cada *arista extendida*, a diferencia de las propuestas de Moës et al. (2003) y Sukumar et al. (2001), en las cuales se define una función g global. Las aristas extendidas se definen como los bordes de los EX que son además cortados por la interfase entre los dos materiales. Lo

anterior implica que en cada EX existen únicamente dos aristas extendidas y cada arista extendida puede tener un máximo de dos EX asociados. La idea de definir una función g_i por arista extendida, tomó como inspiración las *incógnitas de elemento* que suelen ser utilizadas en el modelado computacional de la elastoplasticidad (de Souza Neto et al. 2008). Al definir una g_i por arista extendida, se aumenta el enriquecimiento de la interpolación, reduciendo el rango de influencia de cada incógnita extendida, según lo discutido cuando se presentó la Figura 3.16.

Para definir las funciones g_i de las aristas extendidas se considera la función de interpolación de arista N^{ari} como presenta la Figura 4.14. En la figura se consideró, sin perder generalidad, que uno de los nodos tiene un valor positivo en la función de nivel y los otros dos un valor negativo. La Figura 4.14a muestra en un esquema en planta la forma que toma N^{ari} en un EX, en el caso que la arista en estudio sea la celeste. Para definir N^{ari} se divide el elemento en cuatro subregiones, las cuales coinciden con las subregiones de integración discutidas en la Sección 3.1.3.4, y se considera que N^{ari} es lineal en las tres subregiones que toquen la arista, con valor 1 en el cruce entre la interfase y el borde del elemento y 0 en los otros dos vértices, y nula en la subregión que no toca la arista. En la Figura 4.14b se presenta un esquema tridimensional de N^{ari} donde se ve que toma la forma de una pirámide de base trapezoidal. Vale la pena destacar que en el EX existen dos funciones N^{ari} , una por cada arista extendida, y cada una colabora para definir una función g_i distinta, las cuales dan lugar a dos familias de funciones extendidas.

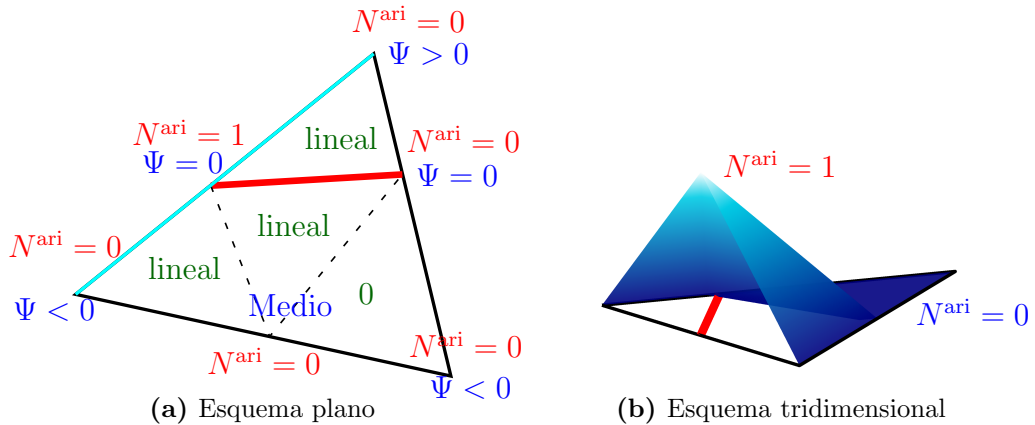


Figura 4.14: Representación gráfica en un EX de N^{ari}

Las funciones g_i de las aristas extendidas no son otra cosa que el conjunto de funciones N^{ari} asociadas a la arista de interés tal y como presenta la Ecuación

ción (4.4). De esta forma se presenta en la Figura 4.15 una comparación en dos EX adyacentes de las funciones g de Moës et al. (2003) y la función g asociada a la arista compartida de la nueva propuesta del XFEM.

$$g_i = N^{\text{ari}} \quad (4.4)$$

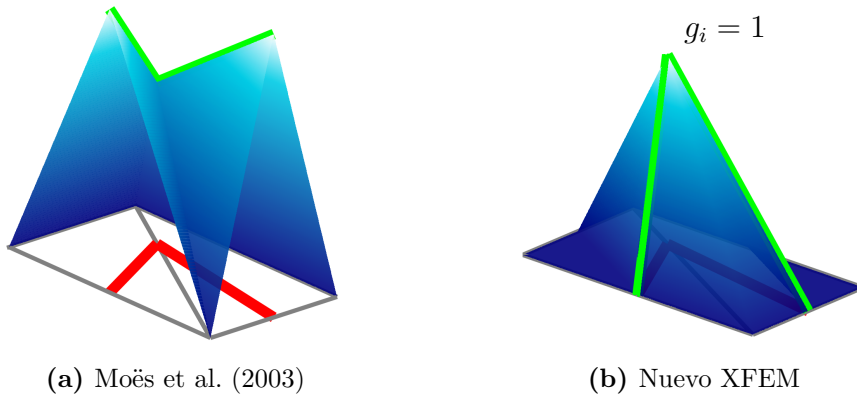


Figura 4.15: Representación gráfica de las funciones g de Moës et al. (2003) y de la nueva propuesta en dos EX adyacentes genéricos

La Figura 4.15a presenta la conocida función de cresta de la propuesta preexistente, en la cual los valores de los distintos cruces borde-interfase están vinculados entre sí, como ya se discutió con la Figura 3.16. Por otro lado la Figura 4.15b muestra la forma tomada por la función g_i de la arista compartida en la nueva propuesta. La figura muestra que la función g_i toma la forma de pirámide de base hexagonal y es no nula solamente en uno de los cruces, el cruce de la interfase con la arista asociada a g_i . Por lo tanto, los parámetros de las funciones de forma extendidas que deriven de esta función g_i no afectan los valores de l desplazamiento en los demás cruces. Las diferentes funciones g_i permiten entonces una interpolación más rica al desvincular desde un principio los valores en los diferentes cruces. Se destaca además que las funciones g_i son continuas, lineales por partes e independientes entre sí.

4.2.1.2. Funciones de interpolación extendidas

Las funciones de interpolación extendidas, asociadas a una arista extendida, se calculan como antes (Ecuación (3.41)). En la Figura 4.16 se presentan gráficamente estas funciones para la función g_i de la Figura 4.15b. En todas las

figuras se representó con una línea roja la interfase en los elementos y con una línea verde la proyección de la línea roja sobre la superficie de la función. Las Figuras 4.16a y 4.16b presentan las funciones de interpolación extendidas para los dos nodos de la arista, en particular la Figura 4.16a presenta la función del nodo A y la Figura 4.16b la del nodo B. Se destaca que las dos anteriores son funciones de interpolación que tienen soporte en dos elementos. Luego, las Figuras 4.16c y 4.16d presentan las funciones de interpolación extendidas para los nodos no pertenecientes a la arista, del elemento ABC y ABD, respectivamente. Se destaca que estas dos últimas solamente tienen soporte en un único elemento cada una.

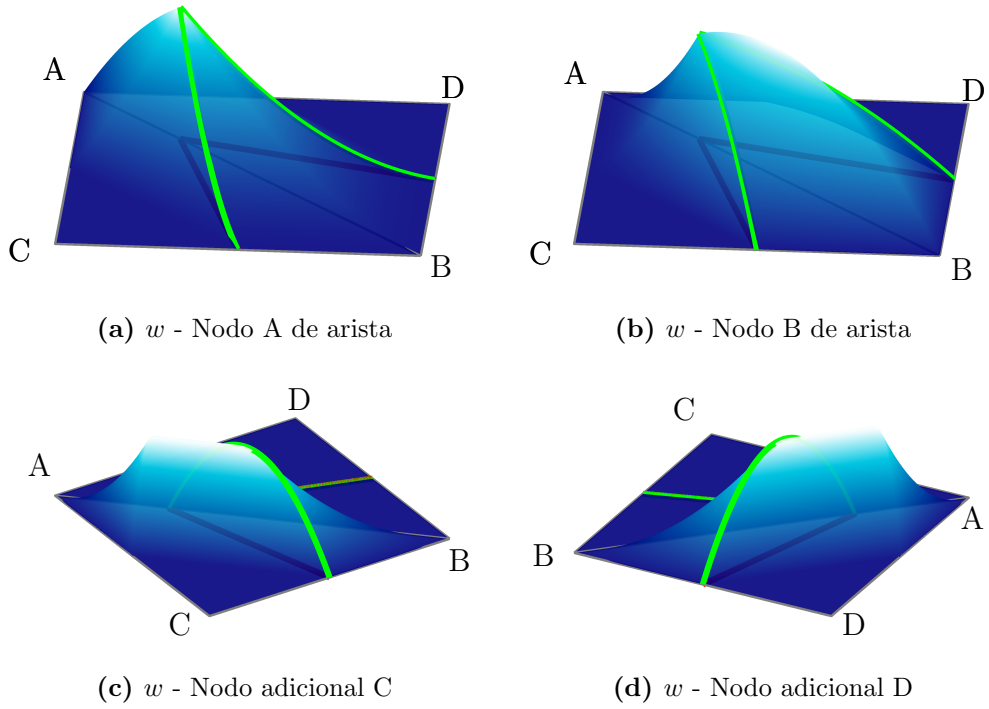


Figura 4.16: Representación gráfica de las w_n de la nueva propuesta en dos EX genéricos

Al igual que en la propuesta de XFEM preexistente, las funciones de interpolación extendidas son continuas en todo el dominio, lo que asegura la continuidad de desplazamientos. Por otra parte, dado que la función g_i de la arista extendida tiene derivada discontinua en la interfase, también lo tienen las funciones de interpolación. Se tiene entonces que la principal diferencia de estas funciones de interpolación extendidas, respecto a las de la propuesta preexistente, es que tienen soporte en hasta un máximo de dos elementos, permitiendo desvincular en cierta medida las interpolaciones de los distintos

segmentos de interfase. Un detalle que tienen las nuevas funciones w_n es que son además de derivada discontinua en los bordes de las subregiones de la Figura 4.14, incluyendo los no asociados a la interfase. Esta discontinuidad en la derivada no es del todo deseable, pues no presenta un motivo físico para su existencia, sino que surge por construcción. De todas formas, se nota que la interpolación no requiere derivadas continuas, y de hecho son discontinuas en todos los bordes de elemento. Por lo tanto, no se redujo la regularidad de la interpolación original del FEM. Como punto adicional, dicho salto artificial en la derivada no es necesariamente una desventaja, puesto que ocurriría por ejemplo si se utilizara el FEM clásico en una malla localmente refinada considerando las subregiones de los EX como elementos individuales.

La formulación del campo de desplazamientos del nuevo XFEM sigue siendo dada por la Ecuación (3.37). La principal diferencia radica en que en la propuesta de Moës et al. (2003) el campo de desplazamientos dentro de un EX está dado por dos familias de incógnitas en los nodos del elemento: las tres incógnitas del FEM y las tres incógnitas adicionales. En la nueva propuesta, el campo de desplazamientos dentro de un EX está dado por tres familias de incógnitas: las tres incógnitas del FEM y dos ternas de incógnitas adicionales, una por cada arista extendida. De esta forma el campo de desplazamientos en un EX en la nueva propuesta queda determinado por nueve incógnitas.

De la discusión anterior se visualiza una desventaja de la nueva propuesta de XFEM, sobre todo desde el punto de vista del costo computacional, la cual es el aumento de incógnitas adicionales. En la propuesta de Moës et al. (2003), cada nodo extendido solamente posee una incógnita adicional y en términos generales la cantidad de nodos extendidos suele ser similar a la cantidad de elementos extendidos. Para ejemplificar lo anterior, en el caso de estudio de la Sección 4.1.1 la cantidad de elementos extendidos es 170 y la cantidad de nodos extendidos es también 170. Por otro lado, en la nueva propuesta se tiende a crear cuatro incógnitas adicionales por cada arista cortada y la cantidad de aristas cortadas suele ser similar a la cantidad de elementos extendidos. Por lo tanto, en términos generales, la nueva propuesta crea aproximadamente cuatro veces más incógnitas adicionales que la de Moës et al. (2003). En el caso de estudio de la Sección 4.1.1 se tiene que la cantidad de aristas extendidas es 170 y la cantidad de incógnitas adicionales de la nueva propuesta es 680.

Un detalle no menor de la formulación del XFEM en base a funciones g_i por arista extendida es que es necesario que la interfase no pase por los nodos de

la malla. Para ello, un primer paso del análisis estructural consiste en corregir los valores nodales de la función de nivel, respetando una cota mínima en valor absoluto, de forma tal que se cumpla la Ecuación (4.5). Esta corrección sería además necesaria para una correcta definición de la DT en los nodos, debido a que esta última no es continua sobre la interfase. El valor 10^{-6} de la Ecuación (4.5) se obtuvo mediante una serie de pruebas y es un compromiso entre permitir una geometría libre de la interfase y evitar generar subregiones muy pequeñas y tener nodos muy cercanos a la interfase.

$$|\Psi_n| \geq 10^{-6} \quad (4.5)$$

4.2.2. Particularidades de la implementación numérica

Se presentan a continuación las principales particularidades de implementación numérica que tiene la nueva propuesta de XFEM, en particular contrastadas con las consideraciones generales discutidas en el Capítulo 3 (ver la Sección 3.1.3.4). Se destaca que no se presentan aquí los detalles de la implementación realizada en esta tesis. El lector interesado en dichos detalles puede consultar los códigos del Anexo A.

La principal dificultad de implementar la nueva propuesta, y además uno de los puntos donde se debe tener mayor cuidado, es la definición de las aristas extendidas y la identificación de qué grados de libertad afectan a un EX particular. La lógica empleada en la implementación realizada se basa en crear una matriz que identifique para cada EX qué aristas le corresponden, una matriz que numere las aristas extendidas y una matriz que relacione los números de nodo y los números de arista extendida con los números de grados de libertad adicionales correspondientes. En contraposición, para la propuesta de Moës et al. (2003) alcanza con definir qué elementos son EX y tener un vector que indique para cada nodo qué grado de libertad corresponde a su incógnita extendida si corresponde.

La expresión fundamental de la matriz de rigidez elemental para los EX sigue siendo según se presentó en la Ecuación (3.49), donde $\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{(e)}$ en este caso toma la expresión de la Ecuación (4.6). La Ecuación (4.6) es muy similar a la Ecuación (3.50) con la salvedad que se consideran dos matrices $\mathbf{B}_{\mathbf{w}_i}^{(e)}$, una por cada una de las familias de incógnitas asociadas a cada arista extendida. Las matrices $\mathbf{B}_{\mathbf{w}_i}^{(e)}$ son según se presentan en la Ecuación (4.7), donde $w_{i,j}$ es la

función de interpolación extendida asociada a la arista extendida i -ésima y al nodo j -ésimo del elemento. Luego, dado que $\mathbf{B}_{\mathbf{W}_i}^{(e)}$ es lineal en cada subregión, la integral de la matriz de rigidez del elemento se hace con tres puntos de Gauss por subregión.

$$\mathbf{B}_{\mathbf{X}}^{(e)} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{(e)} & \mathbf{B}_{\mathbf{W}_1}^{(e)} & \mathbf{B}_{\mathbf{W}_2}^{(e)} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{W}_i}^{(e)} = \begin{pmatrix} \partial_x w_{i,1} & 0 & \partial_x w_{i,2} & 0 & \partial_x w_{i,3} & 0 \\ 0 & \partial_y w_{i,1} & 0 & \partial_y w_{i,2} & 0 & \partial_y w_{i,3} \\ \partial_y w_{i,1} & \partial_x w_{i,1} & \partial_y w_{i,2} & \partial_x w_{i,2} & \partial_y w_{i,3} & \partial_x w_{i,3} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Finalmente, en lo referente al vector de fuerzas y apoyos, los únicos detalles a destacar son en las fuerzas de superficie aplicadas en bordes de elemento y en los apoyos de borde de elemento. En ambos casos, los únicos grados de libertad extendidos que se ven afectados son los asociados al borde donde se aplica la carga o apoyo, si este borde es además una arista extendida.

4.2.3. Desempeño de la nueva propuesta del XFEM

Tras presentar la formulación de la nueva propuesta de XFEM, resta ahora presentar su desempeño en los casos de análisis de la Sección 4.1, y mostrar que la nueva propuesta logra solucionar, o al menos mejorar, todas las problemáticas anteriormente presentadas.

4.2.3.1. Barra con dos interfases sometida a tracción

En primer lugar se aplica la nueva propuesta al caso de la barra de dos interfases sometida a tracción de la Sección 4.1.2. Nuevamente se consideró la malla de la Figura 4.12 con las mismas propiedades materiales. También se volvió a considerar una fuerza $\mathbf{q} = 1$. En la Figura 4.17 se presenta el campo de desplazamientos horizontales en la línea horizontal $y = 0,5$ para dicho problema. Nuevamente se destaca que, si bien se presentan los resultados para una línea horizontal particular, los resultados no varían respecto a qué línea se escoja. En particular, la Figura 4.17a muestra el campo de desplazamientos obtenido con el XFEM propuesto, el cual se solapa perfectamente con la solución analítica. Además, la Figura 4.17b muestra que las diferencias entre los resultados analíticos y numéricos son del orden de la precisión de la compu-

tadora, y por lo tanto atribuible completamente a los errores de representación y cálculos en la aritmética de punto flotante.

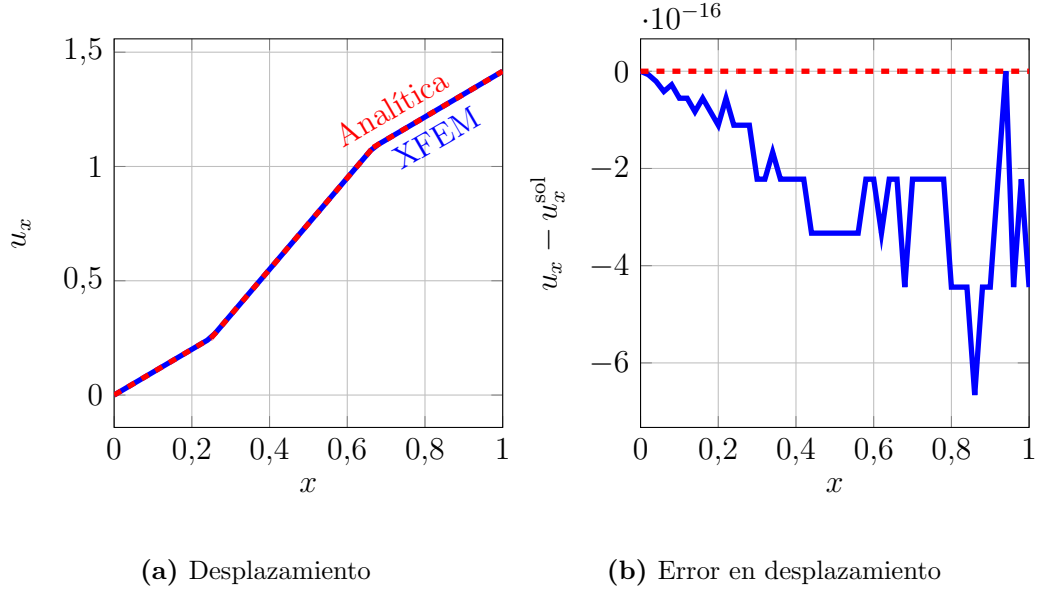


Figura 4.17: Campo de desplazamientos horizontales de la prueba de tracción en barra de dos interfaces para el nuevo XFEM

4.2.3.2. Desempeño a grandes contrastes entre las rigideces

A continuación se presentan los gráficos de las Secciones 4.1.1.2 y 4.1.1.3 con la nueva propuesta de XFEM. Para las pruebas se volvió a utilizar la malla de la Figura 4.2a y tampoco se consideró el caso de $\gamma = 1$ por lo ya discutido. Nuevamente los errores se calcularon a partir del método de cuadratura de Gauss, considerando por elemento o subregión la combinación de 79 puntos del artículo de Dunavant (1985). Nuevamente, el error δ_W se obtuvo directamente del método de cuadratura, mientras que los errores δ_u y δ_σ se obtuvieron del punto de Gauss con mayor error.

En primer lugar se presenta en la Figura 4.18, en escala doble logarítmica, el comportamiento del error δ_W para distintos valores de γ con la propuesta nueva del XFEM. En este caso se tiene que para valores de $\gamma < 1$ la nueva propuesta conserva el comportamiento del XFEM preexistente, con errores de orden similar al FEM en malla conforme. En contraposición, la nueva propuesta del XFEM logra un comportamiento muy distinto al del XFEM de la bibliografía, presentando errores muy similares a los del FEM en malla conforme, mientras el error del XFEM preexistente crecía varios órdenes. De esta

figura se desprende un resultado muy positivo, el cual muestra que, para todo valor de γ , la nueva propuesta de XFEM da una solución que, en términos generales, puede tan buena como la del FEM en malla conforme. De todas formas, nuevamente se recuerda que este error no es adecuado para identificar grandes errores locales.

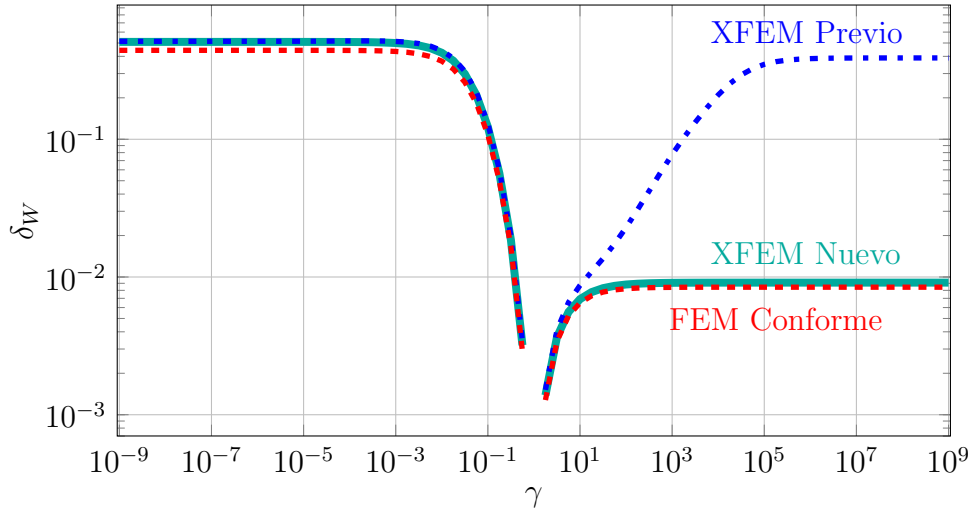


Figura 4.18: Error δ_W para la nueva propuesta de XFEM

A continuación, se presenta en la Figura 4.19 el error δ_u en escala doble logarítmica para el nuevo XFEM. Este caso contrasta significativamente con el XFEM preexistente pues en todo el rango de γ la nueva propuesta de XFEM arroja errores apenas mayores a los del FEM en malla conforme. Este resultado también es muy positivo pues muestra que la nueva propuesta de XFEM parece lograr representar adecuadamente el comportamiento diferenciado entre los dos materiales, sin la necesidad de mallar la interfase explícitamente.

Finalmente, la Figura 4.20 presenta el error δ_σ en escala doble logarítmica para la nueva propuesta del XFEM. Al igual que el XFEM preexistente, la nueva propuesta para valores de $\gamma < 1$ arroja errores similares al FEM conforme e incluso algo menores. En contraposición, para valores de $\gamma > 1$ la nueva propuesta continúa dando errores mayores al FEM, en este caso 50 veces mayores, pero que igual son de magnitud razonable, ya que son del orden de la máxima tensión analítica.

De las Figuras 4.18 a 4.20 se obtiene que la nueva propuesta de XFEM logró reducir significativamente los errores de la propuesta preexistente para grandes contrastes entre las distintas rigideces. En particular, los principales inconvenientes del XFEM en δ_u y δ_W parecen haber desaparecido por com-

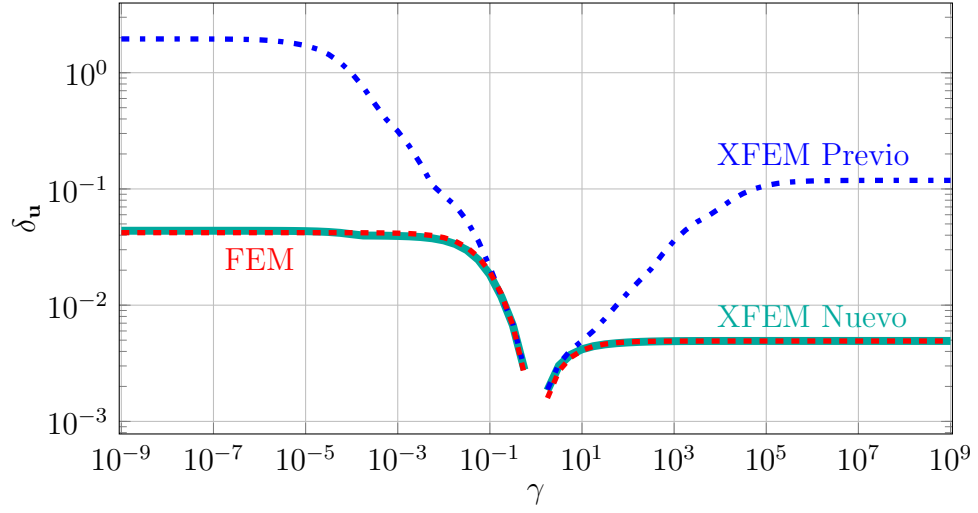


Figura 4.19: Error δ_u para la nueva propuesta de XFEM

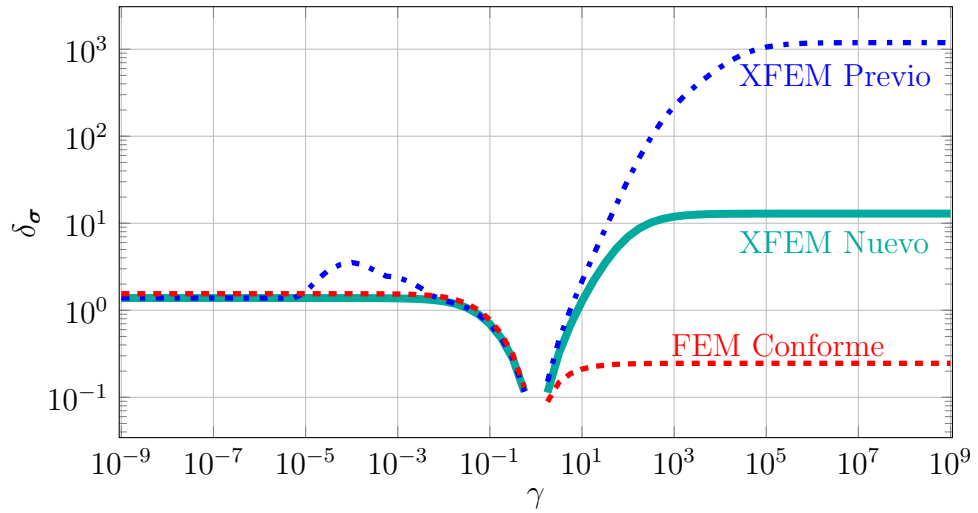


Figura 4.20: Error δ_σ para la nueva propuesta de XFEM

pleto. A continuación en las Figuras 4.21 a 4.23 se presentan detalles de los distintos comportamientos para demostrar que efectivamente la mayoría de los problemas han sido resueltos en gran medida.

En primer lugar la Figura 4.21 presenta los campos de u_x obtenidos por el XFEM y comparado con la solución analítica para el caso $\gamma = 10^{-6}$. Estos gráficos se hicieron en la misma región que los de la Figura 4.9. La Figura 4.21b contrasta notablemente con la Figura 4.9b; la nueva propuesta del XFEM logró captar los desplazamientos de ambos materiales, sin generar zonas de deformación elevada. Además se destaca que en este caso también se logró capturar el cambio de pendiente sobre la interfase sin haberla mallado explícitamente.

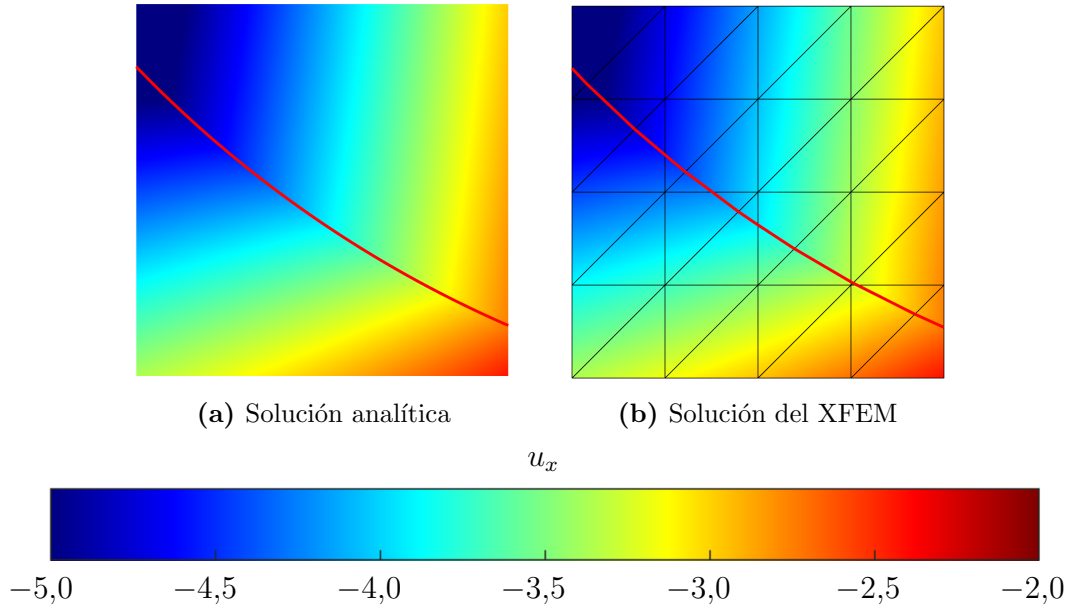


Figura 4.21: Comparación en detalle de u_x para $\gamma = 10^{-6}$ con el nuevo XFEM

La Figura 4.22 muestra los campos de u_x obtenidos para $\gamma = 10^6$ en la misma región que la considerada en la Figura 4.8. En este caso es aún más significativa la diferencia entre los resultados del XFEM preexistente y los resultados de la nueva propuesta, dado que la nueva propuesta logra obtener el cambio de pendiente directamente sobre la interfase. Además, al comparar las Figuras 4.8b y 4.22b se nota que desaparecieron las zonas de rigidez artificial.

Finalmente la Figura 4.23 presenta el campo de la tensión σ_{xx} en la misma región que la Figura 4.10. Esta figura muestra que el problema de grandes tensiones no se eliminó por completo, pero sí se logró reducir significativamente. La reducción significativa queda demostrada por el hecho que en la Figura 4.10 la tensión máxima rondaba el valor 1130, mientras que en la Figura 4.23 la tensión máxima es de 13,7. Además, la zona de tensión atípicamente elevada es en la nueva propuesta de un área bastante menor a la del XFEM preexistente. Resulta interesante notar además la forma que toman las tensiones en los EX, en las cuales se visualizan las geometrías de las subregiones de integración.

Se destaca que la propuesta nueva del XFEM logró resolver la mayoría de los problemas del XFEM preexistente. Sin embargo, la estimación de las tensiones para contrastes elevados continúa siendo menos precisa que la obtenida con el FEM en malla conforme. A pesar del comentario anterior, se resalta que la situación que se presenta en el problema de optimización estructural,

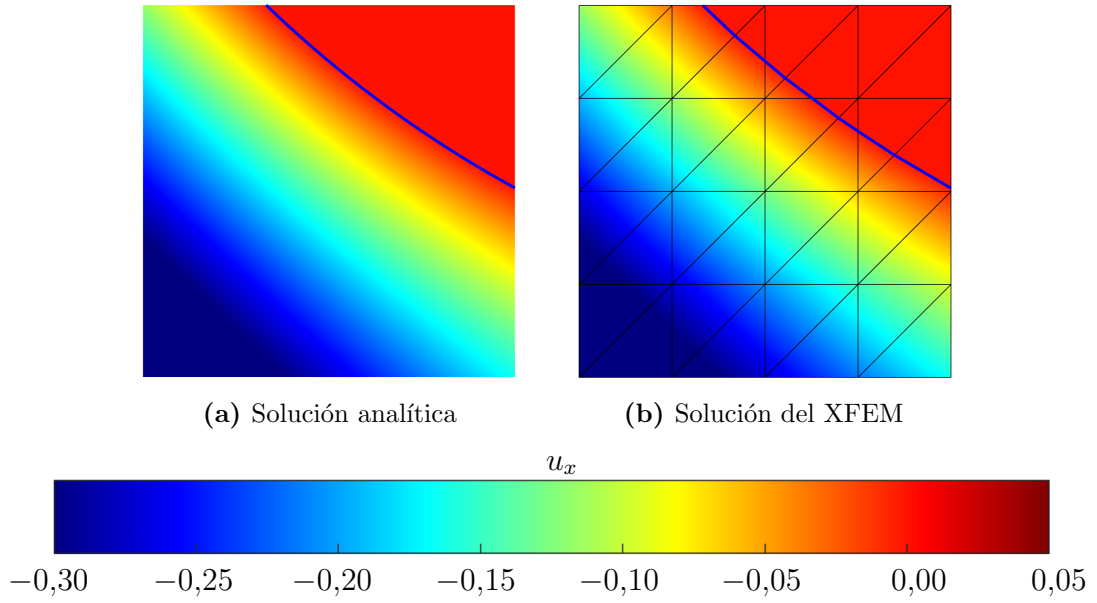


Figura 4.22: Comparación en detalle de u_x para $\gamma = 10^6$ con el nuevo XFEM

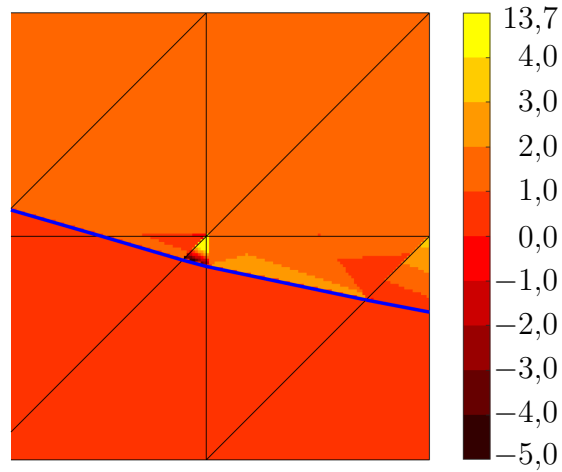


Figura 4.23: Detalle a σ_{xx} en los elementos de máximo error para $\gamma = 10^6$ con el nuevo XFEM

en particular en los ejemplos del Capítulo 6, se encuentra asociada a $\gamma \ll 1$, es decir situaciones en las que el material más rígido es el único con tensiones apreciables, y las *inclusiones* son del material blando. En dichas situaciones, la nueva propuesta del XFEM no presenta ninguna de las deficiencias de las propuestas de la bibliografía.

4.2.3.3. Análisis de convergencia

Para finalizar la validación de la nueva propuesta del XFEM, se presenta un estudio de la convergencia de la solución según el tamaño de los elementos finitos. Lo anterior se asocia a asegurar que la nueva propuesta no haya perdido la propiedad de la propuesta de Moës et al. (2003) de que la convergencia del error δ_W sea cercana a la óptima, tal como ocurre con el FEM con una malla conforme a la interfase. Para hacer el análisis de convergencia se volvió a utilizar el caso de estudio de la Sección 4.1.1, utilizando nuevamente mallas como las presentadas en la Figura 4.2, es decir una malla estructurada no conforme a la inclusión para el XFEM y una malla no estructurada conforme a la inclusión para el FEM. Para la malla estructurada del XFEM se hicieron pruebas desde 5 subdivisiones en ambas direcciones, cuya malla presentó 36 nodos y 50 elementos, hasta 500 subdivisiones en ambas direcciones, cuya malla presentó 251001 nodos y 500000 elementos. Para las mallas del FEM se buscó elegir un tamaño de elemento que generara cantidades de nodos y elementos similares a las del XFEM. A modo de ejemplo, la malla más gruesa del FEM presentó 39 nodos y 52 elementos y la malla más fina del FEM presentó 253366 nodos y 504826 elementos. Se hicieron pruebas con valores de $\gamma \in \{10^{-6}, 10^{-1}, 10^6\}$ para tener un caso en el cual la inclusión fuera mucho menos rígida que el material exterior, uno en el cual la inclusión fuera levemente más blanda que el material exterior y uno en el cual la inclusión fuera mucho más rígida que el material exterior. Nuevamente, para el cálculo de los errores se empleó el método de cuadratura de Gauss con 79 puntos por elemento, o subregión en el caso de los EX.

En primer lugar se presenta la Figura 4.24, donde se muestra en escala doble logarítmica el comportamiento de δ_W al reducir el tamaño del elemento para los distintos valores de γ y métodos numéricos. En la figura, las curvas de color verde corresponden a la nueva propuesta del XFEM, las curvas de color rojo corresponden al FEM en malla conforme, las curvas continuas a los resultados para $\gamma = 10^{-1}$, las ralladas para $\gamma = 10^{-6}$ y las punteadas para $\gamma = 10^6$. La Figura 4.24 muestra que efectivamente la nueva propuesta del XFEM logra conservar el orden de convergencia deseado, el cual es similar aunque ligeramente menor que el del FEM.

A continuación se presenta la Figura 4.25, donde se muestra en escala doble logarítmica el comportamiento de δ_u al reducir el tamaño del elemento para

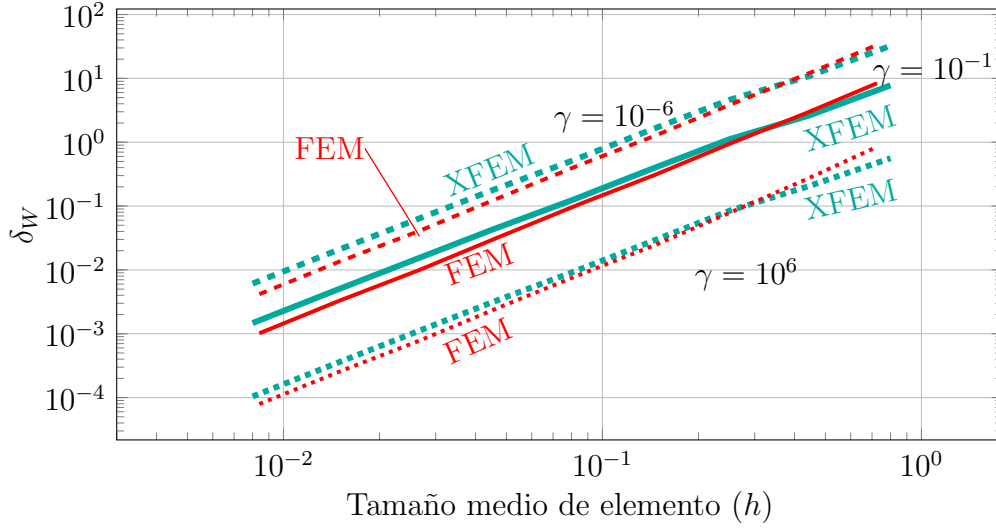


Figura 4.24: Error δ_W para la nueva propuesta de XFEM para distintos γ y tamaños de malla

distintos valores de γ . El formato de las curvas es idéntico al considerado en la Figura 4.24. Esta figura muestra que la nueva propuesta del XFEM también presenta una convergencia respecto al error δ_u de orden similar al del FEM.

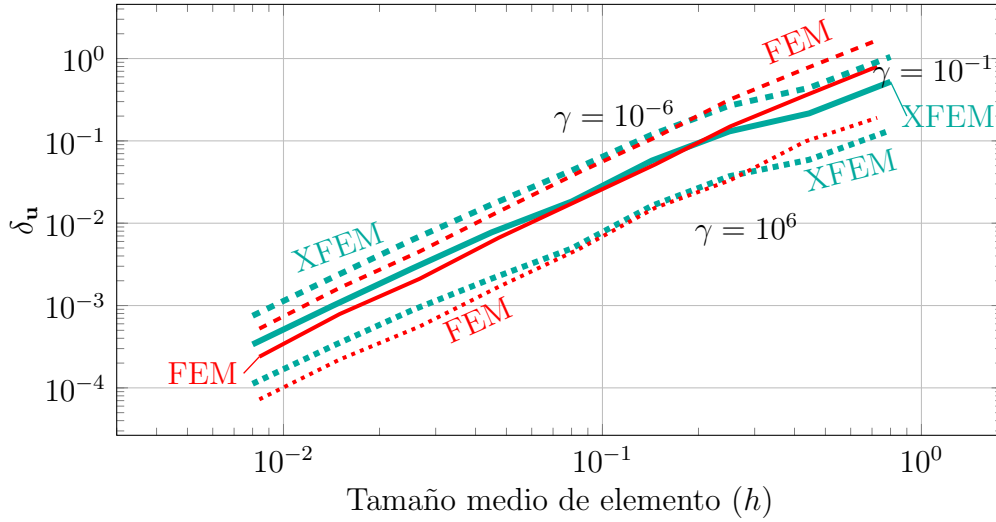


Figura 4.25: Error δ_u para la nueva propuesta de XFEM para distintos γ y tamaños de malla

A continuación se presenta en la Figura 4.26 el análisis de convergencia de δ_σ , con el mismo formato que las figuras anteriores. En este caso se excluyó la curva del XFEM para $\gamma = 10^6$ pues el error δ_σ no tiende a cero en ese caso, y es analizado por separado. Se ve que para $\gamma < 1$ el XFEM también presenta

convergencia en el δ_σ aunque de orden menor al FEM. Finalmente se presenta en la Figura 4.27 el comportamiento de δ_σ en el caso $\gamma = 10^6$ para las dos propuestas del XFEM. En esta última figura se visualiza que, si bien ambas propuestas presentan errores en tensiones que crecen al disminuir el tamaño del elemento, la nueva propuesta presenta mejores resultados en todo el rango de tamaño medio de elemento.

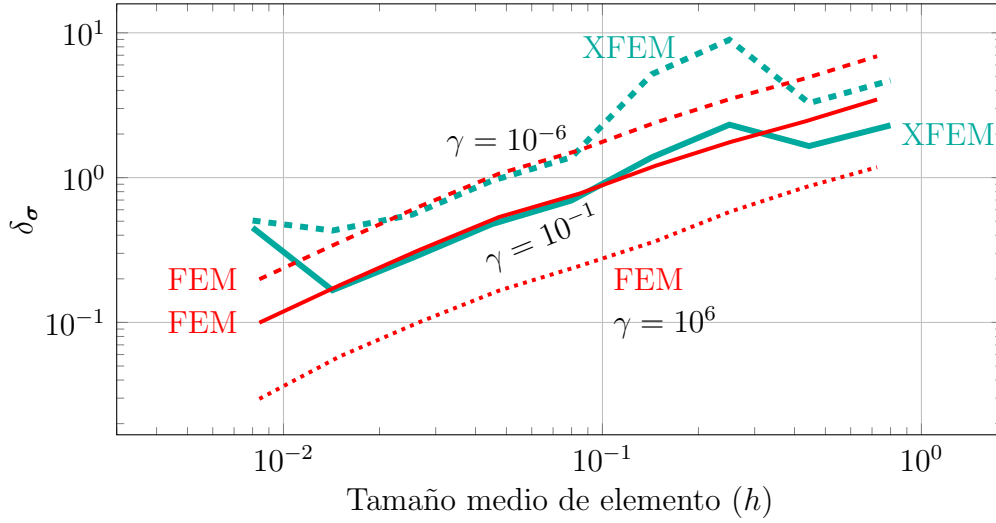


Figura 4.26: Error δ_σ para la nueva propuesta de XFEM para distintos γ y tamaños de malla

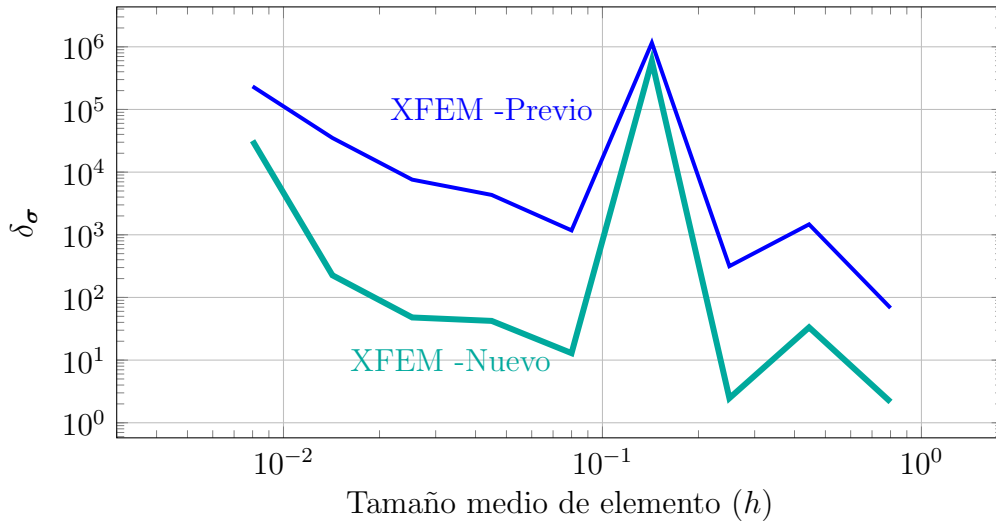


Figura 4.27: Error δ_σ para las dos propuestas de XFEM para $\gamma = 10^6$

Para complementar las figuras anteriores, se presenta en la Tabla 4.1 las tasas de convergencia para los distintos métodos y valores de γ . El orden de

convergencia $\Delta\delta_W/\Delta h$, denota la pendiente del gráfico de la Figura 4.24, es decir la pendiente luego de aplicar el logaritmo a ambas variables. El coeficiente de Pearson se presenta para mostrar que los ajustes lineales propuestos para calcular el orden de convergencia fueron adecuados. La última columna de la tabla presenta la relación que existe entre la tasa de convergencia de la nueva propuesta del XFEM y la tasa de convergencia del FEM. El valor más chico de dicha relación para el error δ_W es 0,909 por lo cual se cumple que la nueva propuesta de XFEM continúa presentando una convergencia cercana a la óptima. A modo de referencia, en el artículo de Moës et al. (2003), la relación mínima entre la tasa de convergencia del XFEM frente al FEM fue de 0,91 para la propuesta de Moës et al. (2003) y de 0,65 para la propuesta de Sukumar et al. (2001) para interfases, destacándose ambas propuestas no evaluadas considerando contrastes tan elevados.

Tabla 4.1: Órdenes de convergencia del FEM y de la nueva propuesta del XFEM

Error	γ	Método	Orden de convergencia		Tasa XFEM/FEM
			$\Delta\delta/\Delta h$	Coef. Pearson	
δ_W	10^{-6}	XFEM	1,87	1,000	0,926
		FEM	2,01	1,000	
	10^{-1}	XFEM	1,87	1,000	0,924
		FEM	2,02	1,000	
	10^{+6}	XFEM	1,88	1,000	0,909
		FEM	2,07	1,000	
δ_u	10^{-6}	XFEM	1,58	0,996	0,863
		FEM	1,83	1,000	
	10^{-1}	XFEM	1,60	0,997	0,875
		FEM	1,83	1,000	
	10^{+6}	XFEM	1,55	0,997	0,865
		FEM	1,80	0,999	
δ_σ	10^{-6}	XFEM	0,65	0,888	0,823
		FEM	0,78	0,996	
	10^{-1}	XFEM	0,54	0,897	0,691
		FEM	0,78	0,996	

Como comentario final del capítulo, se destaca que se logró desarrollar una nueva propuesta del XFEM la cual, al considerar una mayor libertad en las interpolaciones de los distintos segmentos de las interfases, logró mejorar significativamente las dificultades del XFEM de la bibliografía. En primer lugar, como se presentó en la Figura 4.17, se logró resolver el problema de la interacción entre dos interfases cercanas al haber desvinculado las interpolaciones

de las distintas aristas extendidas. Además, según quedó evidenciado en las Figuras 4.18 a 4.22, se vieron solucionados la mayoría de los problemas identificados. El único problema que no se solucionó completamente es el de la precisión del cálculo de las tensiones en los EX. Sin embargo, la precisión mejoró notablemente en comparación con el XFEM preexistente. Como punto adicional, se vuelve a destacar que la situación más usual en el problema de optimización estructural es asociada a $\gamma \ll 1$. En dichas situaciones, la nueva propuesta del XFEM no presenta ninguna de las deficiencias de las propuestas de la bibliografía. Como punto adicional, se corroboró que la convergencia de la nueva propuesta del XFEM frente al error de la norma de la energía mantiene un orden cercano al óptimo. La nueva propuesta implica aproximadamente cuatro veces más incógnitas adicionales que el XFEM preexistente, aunque en problemas normales no implica un incremento significativo del costo computacional, pues el número de incógnitas adicionales suele ser reducido en comparación con el número de incógnitas propias del FEM. Finalmente, se menciona que, según se presenta en el Capítulo 6, la nueva propuesta permite resolver con éxito los problemas de optimización estructural presentados en esta tesis, sin presentar inconvenientes de componentes discontinuos o errores en el cálculo de las tensiones.

Capítulo 5

Metodología de optimización estructural

Tras haber presentado en el capítulo anterior el método de análisis estructural que se consideró en esta tesis; se presenta en este capítulo la metodología de optimización estructural implementada. El método se basó principalmente en los artículos de Amstutz y Andrä (2006), dos Santos et al. (2017) y Lopes et al. (2015), en los cuales se ajusta la función de nivel Ψ , presentada en el Capítulo 3 y considerada para la definición de las interfases en el XFEM del Capítulo 4, hasta lograr una geometría optimizada.

Se presenta en el Sección 5.1 la formulación matemática del problema considerado de optimización estructural. En la Sección 5.2 se presenta el método del Lagrangiano Aumentado (LA) utilizado para resolver el problema de optimización. Se presenta en la Sección 5.3 el método que se utilizó para incorporar las DT a la metodología de optimización. Se presenta en la Sección 5.4 el pseudocódigo del método desarrollado y sus principales características. En la Sección 5.5 se presentan las técnicas de suavizado de la función de nivel que se utilizaron en el método propuesto. En dicha sección se presenta la necesidad de aplicar técnicas de suavizado y su fundamento matemático. Finalmente, en la Sección 5.6 se muestra la metodología considerada para comparar el desempeño del método implementado que emplea el XFEM contra alternativas que utilizan el FEM.

5.1. Modelo de optimización estructural

Desde un punto de vista conceptual, el problema de optimización de base que se consideró para la optimización topológica de estructuras es: *encontrar la estructura más rígida posible para cierta fracción del área ocupable por la estructura*. Esta formulación conceptual se refleja en la Ecuación (5.1), donde Ω^* es la geometría de la estructura optimizada, $|\Omega|$ es el área de la zona ocupada por la estructura, $|D|$ es el área de la zona ocupable por la estructura y M es la fracción objetivo del área ocupable. Se destaca que $|\Omega|$ se calcula según la Ecuación (5.2), donde $\mathbb{1}_\Omega$ es la función característica de Ω , la cual se presenta en la Ecuación (5.3). La formulación conceptual de base contrasta con la utilizada por Amstutz y Andrä (2006), ya que los autores consideraron un área final libre que se obtiene de sumar un costo asociado a $|\Omega|$ a la función objetivo del problema de optimización.

$$\Omega^* = \arg \max_{|\Omega|=M|D|} \{Rigidez\ estructural\} \quad (5.1)$$

$$|\Omega| = \int_D \mathbb{1}_\Omega \, d\Omega \quad (5.2)$$

$$\mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases} \quad (5.3)$$

Como medida de rigidez estructural típicamente se considera el inverso de la complacencia para un EC dado, como consideraron Amstutz y Andrä (2006). Para un EC dado la complacencia se calcula según la Ecuación (5.4), donde la dependencia con la configuración estructural es dada por los cambios en la solución del problema y el campo de fuerzas de volumen. Como la complacencia crece al aumentar los desplazamientos donde se aplica la carga; se tiene una medida indirecta e inversamente proporcional de la rigidez estructural. Además, la complacencia es una medida escalar dependiente del dominio, lo que permite considerarla para el problema de optimización. La versión del problema de optimización, en función de la complacencia, se presenta en la Ecuación (5.5).

$$W^e(\Omega) = \int_D \mathbf{b}(\Omega) \cdot \mathbf{u}(\Omega) \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}(\Omega) \, d\Gamma_N \quad (5.4)$$

$$\Omega^* = \arg \min_{|\Omega|=M|D|} \{W^e(\Omega)\} \quad (5.5)$$

El principal inconveniente de considerar el problema de la Ecuación (5.5) con un único EC es que los resultados obtenidos suelen ser muy sensibles a incertidumbres en las cargas (Ben-Tal y Nemirovski, 1997). Por este motivo, en esta tesis se decidió minimizar la suma de las complacencias de varios EC de forma similar a como hicieron Lopes et al. (2015). La principal diferencia es que Lopes et al. (2015) consideraron la energía potencial total, la cual es proporcional a la complacencia en problemas de elasticidad lineal. Dicha propuesta es una opción viable para aumentar la robustez de los resultados obtenidos, si bien hay que ser cuidadoso en la selección de los EC según indicaron Ben-Tal y Nemirovski (1997). El problema de optimización que incorpora los EC se presenta en la Ecuación (5.6), donde $\#EC$ es la cantidad de EC independientes considerados.

$$\Omega^* = \arg \min_{|\Omega|=M|D|} \left\{ \sum_{j=1}^{j=\#EC} W_j^e(\Omega) \right\} \quad (5.6)$$

Como se presenta, en particular, en el tercer ejemplo del Capítulo 6, las estructuras optimizadas derivadas del problema de la Ecuación (5.6) pueden presentar regiones donde la tensión equivalente sea bastante mayor a la tensión equivalente media en la estructura. Lo anterior es potencialmente un problema para la estructura final, por lo que se planteó un problema de optimización que permita limitar las máximas tensiones equivalentes. Se consideró entonces la propuesta hecha por Amstutz y Novotny (2010), en la cual se agrega una penalidad a la función objetivo basada en las máximas tensiones equivalentes. Dicha propuesta se presenta en la Ecuación (5.7), donde α es el coeficiente de penalidad del término de las tensiones equivalentes, $\mathcal{S}_j$ es el funcional de tensiones para el EC j -ésimo y $\bar{\sigma}_{VM}$ es la tensión equivalente máxima a la que se limita la estructura. Finalmente, $\mathcal{J}(\Omega)$ es el funcional que se busca minimizar con el problema de optimización estructural.

$$\Omega^* = \arg \min_{|\Omega|=M|D|} \left\{ \mathcal{J}(\Omega) := \sum_{j=1}^{j=\#EC} (W_j^e(\Omega) + \alpha \mathcal{S}_j(\Omega, \bar{\sigma}_{VM})) \right\} \quad (5.7)$$

El funcional de tensiones se define según se presenta en la Ecuación (5.8) (Lopes y Novotny, 2016). En la anterior ecuación $\sigma_{\text{VM}j}$ es la tensión equivalente de von Mises para el EC j -ésimo, la cual se define en la Ecuación (5.9) en función de las componentes del tensor de tensiones. Por otra parte, $\Phi(s)$ es la función que se presenta en la Ecuación (5.10). Dicha función tiene la particularidad, como se muestra en la Figura 5.1, de ser casi nula hasta que la tensión de von Mises alcanza la tensión límite y luego comienza a crecer en forma aproximadamente lineal sin perder la derivabilidad en ningún punto. Finalmente, D_S es la parte del dominio ocupable por la estructura donde se admite el chequeo de las tensiones máximas. En general, para el problema de optimización estructural en el que se controlan las tensiones, Lopes y Novotny (2016) no incluyeron en D_S las regiones cercanas a los apoyos o a los puntos de aplicación de cargas concentradas, como muestra la Figura 5.2, pues pueden esperarse tensiones grandes en dichas regiones y no es posible limitarlas sin afectar la convergencia del método de optimización. Esto último se muestra en un ejemplo de la Sección 6.3.

$$\mathcal{S}_j = \int_{\Omega \cap D_S} \Phi \left(\frac{\sigma_{\text{VM}j}^2}{\sigma_{\text{VM}}^2} \right) d\Omega \quad (5.8)$$

$$\sigma_{\text{VM}} = \sqrt{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 - 3(\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2)} \quad (5.9)$$

$$\Phi(s) = (1 + s^{32})^{1/32} - 1 \quad (5.10)$$

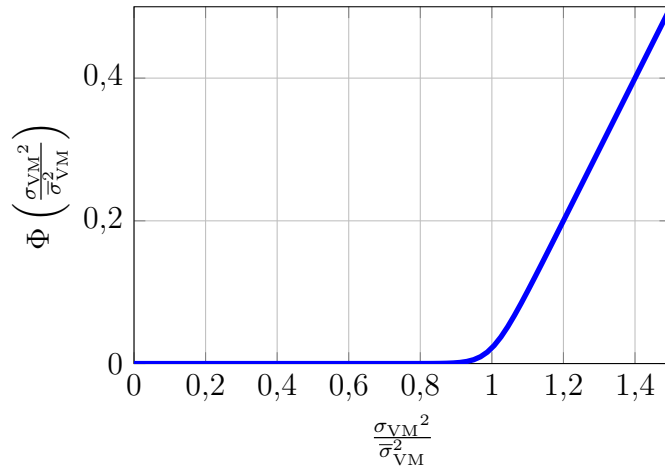


Figura 5.1: Representación gráfica de $\Phi(s)$

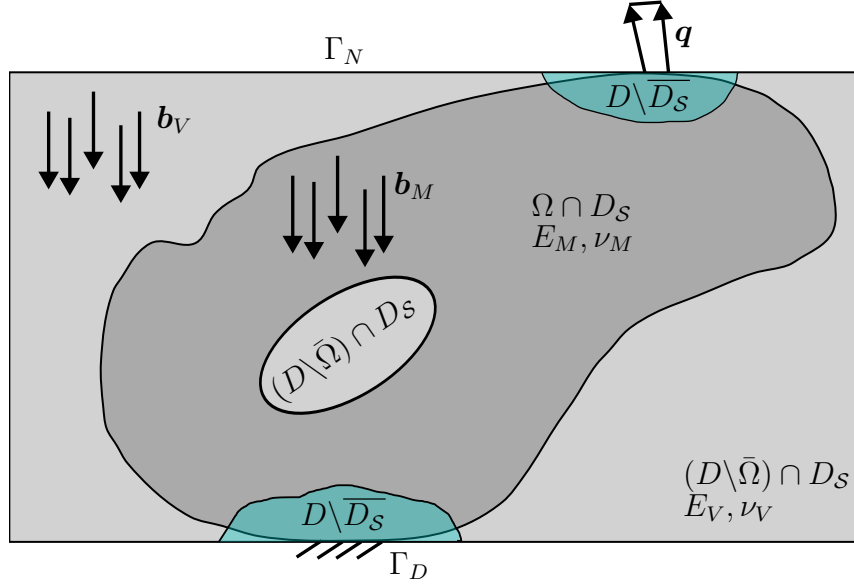


Figura 5.2: Esquema de dominios para el problema de optimización estructural

Se destaca que, dada la no linealidad de $\mathcal{S}_j(\Omega)$, el problema de la Ecuación (5.7) no es capaz de limitar las tensiones acumuladas del caso en que algunos EC ocurran simultáneamente. De todas formas, como el principal objetivo es evitar tener regiones de tensiones significativamente mayores que el resto de la estructura, se considera que el problema de la Ecuación (5.7) es adecuado (dos Santos et al. 2017).

En términos generales, el problema de optimización sobre el cual se trabajó en esta tesis es el presentado en la Ecuación (5.7). La dificultad principal de dicho problema de optimización es que es de dimensión infinita. A partir del método de la función de nivel se sustituye la variable del problema de optimización por Ψ , la cual, como se discutió anteriormente, se discretizó en la malla del XFEM por sus valores nodales. Como indicaron Amstutz y Andrä (2006) en su artículo, si una misma función de nivel se multiplica por un escalar, la geometría de la estructura es la misma; por lo que se elimina ese grado de libertad restringiendo la norma de Ψ a uno. La norma se la consideró como la inducida por el producto interno de la Ecuación (5.11), donde a y b son funciones con idéntica regularidad que Ψ . A nivel del dominio discretizado del XFEM, dicho producto interno se lo calcula según se presenta en la Ecuación (5.12), donde $\mathbb{M}$ es la denominada matriz de masa. La matriz de masa es una matriz cuadrada, de tamaño $\mathcal{N}_{no} \times \mathcal{N}_{no}$, cuya componente j, k se calcula como se presenta en la Ecuación (5.13). La notación que se utiliza para la norma de las funciones de nivel en lo que sigue de este capítulo, se presenta en

la Ecuación (5.14).

$$a \cdot b = \int_D ab \, d\Omega \quad (5.11)$$

$$a \cdot b = a^T \mathbb{M} b \quad (5.12)$$

$$(\mathbb{M})_{j,k} = \int_D N_j N_k \, d\Omega \quad (5.13)$$

$$\|\Psi\| = \sqrt{\Psi^T \mathbb{M} \Psi} \quad (5.14)$$

Al considerar la función de nivel como la variable de optimización, se define un nuevo problema de optimización de dimensión $\mathcal{N}_{no} - 1$ dado por la Ecuación (5.15). La notación $\Omega^* \leftarrow \Psi^*$ implica que Ω^* es la geometría de la estructura inducida por la función de nivel Ψ^* . La función característica $\mathbb{1}_\Omega$ en el caso discreto, necesaria para el cálculo de $|\Omega|$, está dada por la Ecuación (5.16). Nótese que el cálculo exacto de los funcionales, en el problema discreto dado por el XFEM, se presenta en detalle en el Anexo A.

$$\begin{aligned} \Omega^* \leftarrow \Psi^* = \arg \min_{\|\Psi\|=1} \{ \mathcal{J}(\Omega) \} \\ \text{sometido a } |\Omega| = M|D| \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_{no}} N_n(\mathbf{x}) \Psi_n > 0 \\ 0 & \text{si } \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_{no}} N_n(\mathbf{x}) \Psi_n \leq 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

Se tiene entonces que el modelo de optimización estructural busca encontrar la geometría de la estructura que mejor satisfaga el objetivo de minimizar $\mathcal{J}(\Omega)$. Con dicho objetivo en mente, a priori sería suficiente con modelar en todo momento únicamente la fracción estructural, es decir únicamente Ω y no todo D . Sin embargo, este procedimiento impediría que el procedimiento iterativo de optimización coloque material estructural en regiones donde lo hubiera quitado. Por el anterior motivo, el desarrollo del método requiere modelar la estructura y los vacíos, lo que implica el uso del problema de elasticidad plana de dos materiales presentado en la Sección 2.2 y para el cual se desarrolló el XFEM en el Capítulo 4. Las regiones del dominio consideradas para el pro-

blema de optimización estructural son según se presentaron en la Figura 5.2, donde D es la región ocupable por la estructura, Ω es la región ocupada por la estructura, modelada por un material de propiedades E_M y ν_M y $D \setminus \bar{\Omega}$ es la región ocupada por los vacíos, modelada por un material de propiedades E_V y ν_V . Además se consideró que el campo de densidad de fuerzas de volumen es uniforme en cada material y vale $\mathbf{b}_M$ en Ω y $\mathbf{b}_V$ en $D \setminus \bar{\Omega}$.

Para esta tesis se consideró $\nu_M = \nu_V = \nu$, puesto que simplifica ampliamente el cálculo de las DT dado que para modelar los vacíos alcanza con considerar un material idéntico de rigidez disminuida. Si bien en casi todos los ejemplos presentados en esta tesis se consideró que el módulo de Young del material blando que modela los vacíos (E_V) es mucho menor al módulo de Young del material estructural (E_M), no es imperativa esta consideración. Considerar contrastes menores entre los módulos de Young permite generalizar el método de optimización estructural para optimizar estructuras en las cuales se considere como material blando una versión menos densa del material estructural, cosa útil en la manufactura aditiva. Finalmente, como el origen de las fuerzas de volumen es en general la fuerza gravitatoria, se considera que se cumple la relación de la Ecuación (5.17), la que sería análoga a considerar que la rigidez de un material es proporcional a su densidad. La Ecuación (5.17) simplifica el cálculo de algunas DT y es consistente con considerar tanto el caso en el que se modelan vacíos como el caso en el cual el material blando es una versión menos densa del material estructural.

$$\mathbf{b}_V = \left(\frac{E_V}{E_M} \right) \mathbf{b}_M \quad (5.17)$$

5.2. Método del Lagrangiano Aumentado

El problema de optimización estructural de la sección anterior (Ecuación (5.15)) es un problema de optimización con restricciones. En esta tesis se decidió hacer uso de un problema auxiliar sin la restricción del área de la estructura empleando el *método del Lagrangiano Aumentado*. Este método fue utilizado en muchos de los artículos de optimización topológica de estructuras discutidos en el estado del arte (*e.g.* Ferrer et al. 2018; Gangl, 2020; Lopes et al. 2015; Martínez-Frutos et al. 2019; Ren y Zhang, 2021; Romero Onco y Giusti, 2020; Tan y Zhu, 2023; Torii et al. 2016). El problema de optimización

auxiliar se presenta en la Ecuación (5.18), donde $\mathcal{J}^{\text{LA}}(\Omega, c, \zeta)$ es la función objetivo con términos del LA, los cuales se describen a continuación.

$$\Omega^* \leftarrow \Psi^* = \arg \min_{\|\Psi\|=1} \{ \mathcal{J}^{\text{LA}}(\Omega, c, \zeta^*) \} \quad (5.18)$$

El método del LA que aquí se presenta está basado en lo descrito en el libro de Luenberger y Ye (2008). La función objetivo con términos del LA es según se presenta en la Ecuación (5.19), donde c es el coeficiente de penalidad cuadrática de la restricción del área y ζ es el multiplicador de Lagrange de dicha restricción. El método se basa en partir de cierto valor de c_0 inicial y $\zeta_0 = 0$ e ir ajustando el valor de ζ tal que tienda al valor correcto ζ^* , en el cual, por el teorema de los multiplicadores de Lagrange, los problemas de las Ecuaciones (5.15) y (5.18) son equivalentes. Por lo tanto, la solución del problema de optimización auxiliar de la Ecuación (5.18) busca converger hacia el óptimo del problema original de la Ecuación (5.15).

$$\mathcal{J}^{\text{LA}}(\Omega, c, \zeta) = \mathcal{J}(\Omega) + \zeta(|\Omega| - M|D|) + \frac{c}{2}(|\Omega| - M|D|)^2 \quad (5.19)$$

Como presenta el libro de Luenberger y Ye (2008), un paso típico del método del LA se basa en partir de un par de valores ζ_k y c_k y hallar el óptimo del problema de la Ecuación (5.18). De dicha optimización se obtiene una geometría optimizada Ω_k^* . Luego, se actualiza el valor del multiplicador según la Ecuación (5.20) y el valor del coeficiente de penalidad cuadrática según la Ecuación (5.21) y se repite el proceso para encontrar la geometría Ω_{k+1}^* . El método termina cuando se cumplen ciertos criterios de optimalidad y de cumplimiento de la restricción en el área ocupada. El valor 2, por el cual se actualiza el coeficiente de penalidad cuadrática, es una elección muy comúnmente utilizada en este método (Luenberger y Ye, 2008).

$$\zeta_{k+1} = \zeta_k + c_k(|\Omega_k^*| - M|D|) \quad (5.20)$$

$$c_{k+1} = 2c_k \quad (5.21)$$

5.3. Implementación de la derivada topológica

Con el objetivo de modificar la función de nivel para lograr alcanzar una geometría optimizada, en esta tesis se decidió hacer uso de la DT de $\mathcal{J}^{\text{LA}}$ presentada en la sección anterior. Como la DT cumple las reglas básicas del Cálculo (Novotny y Sokołowski, 2013), se calculan por separado las derivadas de los distintos funcionales y se suman independientemente una de otra como presenta la Ecuación (5.22). Un detalle no menor de la descomposición de la DT de la función $\mathcal{J}^{\text{LA}}$ como la suma de las DT de sus componentes es que en todos los casos se debe considerar la misma forma de perturbación topológica y función regularizadora $f(\epsilon)$. Para el método que se desarrolló en este trabajo de investigación se consideró siempre una perturbación circular de radio ϵ y por lo tanto $f(\epsilon)$ está dada por la Ecuación (5.23).

$$D_T \mathcal{J}^{\text{LA}} = (\zeta + c(|\Omega| - M|D|)) D_T |\Omega| + \sum_{j=1}^{j=\#\text{EC}} \left(D_T W_j^e + \alpha D_T \mathcal{S}_j \right) \quad (5.22)$$

$$f(\epsilon) = \pi \epsilon^2 \quad (5.23)$$

A partir de las consideraciones del párrafo anterior, se obtienen las expresiones que adquieren las DT para $x_0 \in D \setminus \partial\Omega$ según se presenta a continuación. Las deducciones de todas las expresiones para las correspondientes DT se presentan en el Anexo C. El excluir la interfase entre el material blando que modela los vacíos y el material estructural en el cálculo de las DT se asocia a que la derivada no es continua en la interfase. Lo anterior no implica ningún inconveniente práctico, pues lo que se utiliza en el método de optimización es un valor nodal de la DT y los nodos de la malla no pertenecen a la interfase, según se discutió en el Capítulo 4. En primer lugar, la derivada del área ocupada por Ω es según se muestra en la Ecuación (5.24), donde la segunda igualdad se basa en la definición de dominios en base a la función de nivel.

$$D_T |\Omega|(x_0) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{si } x_0 \in \Omega \\ +1 & \text{si } x_0 \notin \Omega \end{array} \right\} = -\text{sign}(\Psi(x_0)) \quad (5.24)$$

Previo a presentar las DT de la complacencia y el funcional de penalización de tensiones, se discute una función de gran relevancia utilizada en ambas

expresiones. Dicha función es el *contraste entre el material a incluir y el material de base* γ . Esta función indica el contraste entre las rigideces del material de la perturbación topológica (material a incluir) y el material previo a la perturbación (material de base). Para el método de optimización estructural desarrollado, se consideró que la DT presenta para las zonas de material estructural la sensibilidad a la nucleación de una inclusión del material blando que representa los vacíos. Por otro lado, se consideró que la DT presenta para las zonas de material blando la sensibilidad a la nucleación de una inclusión del material estructural. A partir del análisis anterior, γ queda definido según presenta la Ecuación (5.25). Se recuerda que para esta tesis se consideraron $\nu_M = \nu_V$ y la Ecuación (5.17), por lo cual γ engloba todas las propiedades del cambio de material asociado a la perturbación topológica.

$$\gamma(x_0) = \begin{cases} \frac{E_V}{E_M} & \text{si } x_0 \in \Omega \\ \frac{E_M}{E_V} & \text{si } x_0 \notin \Omega \end{cases} \quad (5.25)$$

Para la complacencia del EC j -ésimo, la expresión de la DT es como se muestra en la Ecuación (5.26). Dicha expresión está basada en el artículo de Lopes et al. (2015), con la sutil diferencia de un factor dos respecto a la expresión reportada. Esta diferencia se asocia a que Lopes et al. (2015) consideraron la DT del opuesto de la energía potencial total, mientras que para esta tesis se consideró la de la complacencia. El tensor $\mathbb{P}_\gamma$ es denominado tensor de polarización y está dado por la Ecuación (5.27), donde α_1 y α_2 son constantes materiales dadas por las Ecuaciones (5.28) y (5.29), respectivamente.

$$D_T W_j^e = (\mathbb{P}_\gamma \boldsymbol{\sigma}_j) : \boldsymbol{\varepsilon}_j + 2(\gamma - 1) \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{u}_j \quad (5.26)$$

$$\mathbb{P}_\gamma = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma \alpha_2} \left((1 + \alpha_2) \mathbb{I} + \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma \alpha_1} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \quad (5.27)$$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \quad (5.28)$$

$$\alpha_2 = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \quad (5.29)$$

Finalmente, la derivada del funcional de tensiones para el estado de cargas

j -ésimo está dada por la Ecuación (5.30), basada en los artículos de Amstutz y Novotny (2010) y Lopes y Novotny (2016), con modificaciones presentadas en el Anexo C. En dicha ecuación, $\mathbb{T}$, $\mathbb{B}$, $\tilde{\mathbb{B}}$ y $\mathbb{S}$ son tensores auxiliares cuyas expresiones se presentan en las Ecuaciones (5.31) a (5.34), donde α_1 y α_2 son los que se presentaron en las Ecuaciones (5.28) y (5.29). Luego, $\mathbb{1}_{D_S}$ es la función característica del dominio donde se admite el chequeo de tensiones máximas. Finalmente, $\mathbf{v}_j$ es la solución a un problema adjunto para el EC j -ésimo, el cual se discute a continuación, y $\Xi(\boldsymbol{\sigma}_j)$ es una expresión integral en función del tensor de tensiones del EC j -ésimo, la cual no posee solución analítica conocida y que se discute más adelante. Se hace notar que, al igual que en la Ecuación (5.24), se utilizó $\text{sign}(\Psi)$ en base a la definición de dominios con la función de nivel para simplificar la notación.

$$\begin{aligned}
D_T \mathcal{S}_j = & (\gamma - 1) \left((\mathbb{I} + \mathbb{T}) \boldsymbol{\sigma}_j : \nabla^s(\mathbf{v}_j) - \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{v}_j \right. \\
& + \frac{\mathbb{1}_{D_S} \text{sign}(\Psi)}{(1-\gamma)\bar{\sigma}_{VM}^2} \Phi' \left(\frac{\sigma_{VMj}^2}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) \mathbb{T} \mathbb{B} \boldsymbol{\sigma}_j : \boldsymbol{\varepsilon}_j \Big) - \mathbb{1}_{D_S} \text{sign}(\Psi) \Phi \left(\frac{\sigma_{VMj}^2}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) \\
& + \mathbb{1}_{D_S} (1 - \mathbb{1}_\Omega) \left(\Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}} \boldsymbol{\sigma}_j : \boldsymbol{\sigma}_j}{2\bar{\sigma}_{VM}^2} + \frac{\mathbb{T} \tilde{\mathbb{B}} \boldsymbol{\sigma}_j : \boldsymbol{\sigma}_j}{\bar{\sigma}_{VM}^2} + \frac{\mathbb{T} \tilde{\mathbb{B}} \mathbb{T} \boldsymbol{\sigma}_j : \boldsymbol{\sigma}_j}{2\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) \right. \\
& \left. - \Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}} \boldsymbol{\sigma}_j : \boldsymbol{\sigma}_j}{2\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) - \frac{\mathbb{T} \tilde{\mathbb{B}} \boldsymbol{\sigma}_j : \boldsymbol{\sigma}_j}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \Phi' \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}} \boldsymbol{\sigma}_j : \boldsymbol{\sigma}_j}{2\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) \right) \\
& + \frac{\mathbb{1}_{D_S} \mathbb{1}_\Omega}{\pi} \left(\Xi(\boldsymbol{\sigma}_j) + \Phi' \left(\frac{\sigma_{VMj}^2}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) \mathbb{S} \boldsymbol{\sigma}_j : \boldsymbol{\sigma}_j \right)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\mathbb{T} = \frac{1 - \gamma}{1 + \alpha_2 \gamma} \left(\alpha_2 \mathbb{I} + \frac{1}{2} \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1 + \alpha_1 \gamma} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \right) \tag{5.31}$$

$$\mathbb{B} = 6\mu \mathbb{I} + (\lambda - 2\mu) (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \tag{5.32}$$

$$\tilde{\mathbb{B}} = 3\mathbb{I} - (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \tag{5.33}$$

$$\mathbb{S} = \frac{\pi(1 - \gamma)^2}{4\bar{\sigma}_{VM}^2(1 + \alpha_2 \gamma)^2} \left(10\mathbb{I} + \left(3 \left(\frac{1 + \alpha_2 \gamma}{1 + \alpha_1 \gamma} \right)^2 - 5 \right) (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \right) \tag{5.34}$$

El problema adjunto de la DT del funcional de penalización de tensiones es, en su forma débil, encontrar $\mathbf{v}_j \in \mathcal{V}$ tal que se verifique la Ecuación (5.35), donde $\mathbf{u}_j$ es el desplazamiento solución del problema plano de elasticidad lineal

para el EC j -ésimo y k_j^σ es según se presenta en la Ecuación (5.36).

$$\int_D \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_j) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = - \int_D k_j^\sigma \mathbb{B} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_j) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (5.35)$$

$$k_j^\sigma = \frac{\mathbb{1}_{\Omega \cap D_S}}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \Phi' \left(\frac{\sigma_{VM}^2(\mathbf{u}_j)}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) \quad (5.36)$$

Empleando el XFEM, el problema adjunto de la Ecuación (5.35) se resuelve a partir de la Ecuación (5.37), donde $\mathbf{U}_j$ es el vector solución del XFEM para el problema plano de elasticidad lineal, $\mathbf{u}_j$ es el vector de los grados de libertad del problema adjunto, el cual toma un formato análogo al del vector $\mathbf{U}$ para los desplazamientos, y $\mathcal{K}_j$ es una matriz auxiliar utilizada para calcular un simil de vector de fuerzas para el problema adjunto. Todos los términos con subíndice j en la Ecuación (5.37) indican dependencia con el EC j -ésimo. La matriz $\mathcal{K}_j$ se presenta en la Ecuación (5.38), donde $\mathbf{R}^{(e)}$ es la matriz de restricción que se discutió en la Sección 3.1.1 para el ensamblado de las matrices y vectores globales. Los detalles de la generación y ensamblado de la matriz $\mathcal{K}_j$ en el código implementado se presentan en el Anexo A.

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_j = -\mathcal{K}_j \mathbf{U}_j \quad (5.37)$$

$$\mathcal{K}_j = \int_D k_j^\sigma \mathbf{R}^{(e)T} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbb{B} \mathbf{C} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{R}^{(e)} \, d\Omega \quad (5.38)$$

Luego, la expresión integral $\Xi(\boldsymbol{\sigma}_j)$ es según la Ecuación (5.39), donde la dependencia del integrando con t y θ está dada por $\Delta \boldsymbol{\sigma}$, si bien no se presentó explícitamente en la ecuación para simplificar la notación. Por su parte, $\Delta \boldsymbol{\sigma}(t, \theta)$ se presenta en la Ecuación (5.40), donde σ_I y σ_{II} son las tensiones principales mayor y menor, respectivamente, del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_j$. Se define como tensiones principales a los valores propios del tensor de tensiones.

$$\Xi = \int_0^1 dt \int_0^{2\pi} \frac{1}{t^3} \left(\Phi \left(\frac{\sigma_{VM}^2}{\bar{\sigma}_{VM}^2} + \Delta \boldsymbol{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{\sigma_{VM}^2}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) - \Delta \boldsymbol{\sigma} \Phi' \left(\frac{\sigma_{VM}^2}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) \right) d\theta \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma(t, \theta) = & \frac{(\gamma-1)t^2}{2\bar{\sigma}_{VM}^2(1+\alpha_2\gamma)} \left(\left(2 + 3\frac{1+\alpha_2\gamma}{1+\alpha_1\gamma} \right) (\sigma_I^2 - \sigma_{II}^2) \cos(2\theta) \right. \\
& \left. + 3(2 - 3t^2)(\sigma_I - \sigma_{II})^2 \cos(4\theta) \right) \\
& + \frac{(\gamma-1)^2 t^4}{4\bar{\sigma}_{VM}^2(1+\alpha_2\gamma)^2} \left(3(\sigma_I + \sigma_{II})^2 \left(\frac{1+\alpha_2\gamma}{1+\alpha_1\gamma} \right)^2 \right. \\
& + (3(2 - 3t^2)^2 + 4\cos^2(2\theta))(\sigma_I - \sigma_{II})^2 \\
& \left. + 6(2 - 3t^2)^{\frac{1+\alpha_2\gamma}{1+\alpha_1\gamma}} (\sigma_I^2 - \sigma_{II}^2) \cos(2\theta) \right) \quad (5.40)
\end{aligned}$$

Dado que la expresión integral $\Xi(\sigma_j)$ no tiene un resultado analítico conocido, en esta tesis se decidió utilizar un método de cálculo desacoplado, al igual que utilizaron Amstutz y Novotny (2010). Este método consistió en calcular una única vez los valores de Ξ para distintos valores de γ , propiedades materiales y tensores de tensiones. Los anteriores valores se guardaron en diversas tablas. Luego, durante la ejecución del algoritmo de optimización estructural que se presenta más adelante, se hace una búsqueda de tabla para obtener el valor de $\Xi(\sigma_j)$ según las propiedades materiales, contraste y tensor de tensiones del problema en particular. En la Figura 5.3 se presentan, a modo de ejemplo, unos mapas de los valores que presenta Ξ para un estado plano de tensiones, un coeficiente de poisson de 0,3 y una relación entre los módulos de Young del material estructural y el material blando de 10^3 . Nótese que las Figuras 5.3a y 5.3b tienen distinto eje vertical pero idéntica escala de colores.

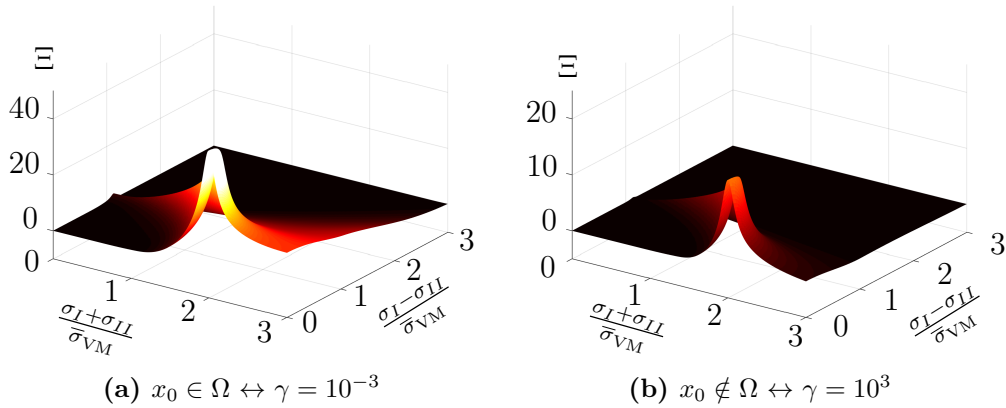


Figura 5.3: Mapas de los valores tomados por $\Xi(\sigma)$ para estado plano de tensiones, $\nu = 0,3$ y $E_M/E_V = 10^3$

Las Ecuaciones (5.24), (5.26) y (5.30) permiten calcular la DT de la Ecua-

ción (5.22) en un punto genérico $x_0 \in D \setminus \bar{\Omega}$. En la metodología de optimización estructural desarrollada se emplean valores nodales para las DT, por lo cual a continuación se presenta cómo se obtienen dichos valores nodales. En el caso de la DT del área ocupada por la estructura, su valor nodal se obtiene directamente de la Ecuación (5.41), es decir en función del signo de la función de nivel del nodo en análisis.

$$(D_T|\Omega|)_n = -\text{sign}(\Psi_n) \quad (5.41)$$

En el caso de las DT de la complacencia y el funcional de tensiones el tratamiento es distinto. De forma similar a lo propuesto por Gangl (2020), se decidió calcular un promedio ponderado de la DT en la zona de influencia del nodo, según presenta la Ecuación (5.42) para la complacencia y el nodo n -ésimo. La Ecuación (5.42) presenta la particularidad de que en los nodos extendidos se incluyen zonas para las cuales el cálculo de la DT es asociado a un material distinto al del nodo en análisis. Lo anterior no es correcto desde un punto de vista de rigurosidad matemática, pero ha probado ser útil para obtener un mejor desempeño del algoritmo de suavizado que se presenta en la Sección 5.5. En el primer ejemplo del Capítulo 6 se presenta un caso en el cual la DT de la complacencia se calculó directamente como el promedio de las calculadas en el nodo por todos su elementos asociados. Dicho ejemplo muestra que el suavizado adicional proporcionado por la Ecuación (5.42) es beneficioso para obtener buenos resultados.

$$(D_TW_j^e)_n = \frac{\int_D N_n D_TW_j^e d\Omega}{\int_D N_n d\Omega} \quad (5.42)$$

Se destaca que los cálculos del valor nodal de la DT del área y las DT de la complacencia y funcional de tensiones son distintos. Esta diferencia surgió de algunas pruebas que mostraron que la opción implementada resultó ser la más eficiente y con mejores velocidades de convergencia. Finalmente, se aclara que los detalles de la implementación del cálculo de las DT y el pasaje a un valor nodal según la Ecuación (5.42) se presentan en el Anexo A.

5.4. Algoritmo de optimización desarrollado

El método de optimización que se desarrolló está basado principalmente en lo publicado en los artículos de Amstutz y Andrä (2006) y Lopes et al. (2015). Se consideró un método heurístico iterativo de punto fijo, inspirado en los métodos de descenso (Luenberger y Ye, 2008), en el que la dirección de movimiento de la función de nivel está dada por Ψ_{D_T} de la Ecuación (5.43), en donde $(D_T \mathcal{J}^{\text{LA}})^{\text{mod}}$ es según la Ecuación (5.44) y Ψ^k es la función de nivel asociada a la iteración k -ésima, la cual define una geometría Ω_k , y un conjunto de parámetros del método del LA ζ y c . La Ecuación (5.44) se utilizó para regularizar la DT, puesto que la DT puede variar varios órdenes. En lo que sigue se hace referencia a Ψ_{D_T} como la *función de nivel propuesta por la DT* y su geometría inducida como la *geometría propuesta por la DT*, puesto que son las primeras que se prueban en un paso típico del método de optimización estructural.

$$(\Psi_{D_T})_n = \frac{(D_T \mathcal{J}^{\text{LA}})_n^{\text{mod}} \text{sign}(\Psi_n^k)}{\|(D_T \mathcal{J}^{\text{LA}})_n^{\text{mod}} \text{sign}(\Psi_n^k)\|} \quad (5.43)$$

$$(D_T \mathcal{J}^{\text{LA}})^{\text{mod}} = \text{sign}(D_T \mathcal{J}^{\text{LA}}) \log(1 + |D_T \mathcal{J}^{\text{LA}}|) \quad (5.44)$$

La justificación de la Ecuación (5.43) surge de la condición suficiente para un mínimo local del problema de optimización estructural dada por la Ecuación (5.45), la cual fue utilizada en el artículo de Amstutz y Andrä (2006). Dicha condición es intuitiva debido a que implica que cualquier cambio local de material implica incrementar el valor del funcional $\mathcal{J}^{\text{LA}}$. Dos versiones equivalentes de la Ecuación (5.45) son las Ecuaciones (5.46) y (5.47). Por lo tanto, una condición suficiente para un mínimo local es que la función de nivel optimizada tenga igual signo que la propuesta por la DT, lo que justifica que esta segunda sea una buena dirección de movimiento.

$$D_T \mathcal{J}^{\text{LA}}(x_0) > 0 \quad \forall x_0 \in D \quad (5.45)$$

$$\begin{cases} \Psi_{D_T}(x_0) > 0 & \text{si } x_0 \in \Omega^* \\ \Psi_{D_T}(x_0) < 0 & \text{si } x_0 \in D \setminus \overline{\Omega^*} \end{cases} \quad (5.46)$$

$$\begin{cases} \Psi_{D_T}(x_0) > 0 & \text{si } \Psi^* > 0 \\ \Psi_{D_T}(x_0) < 0 & \text{si } \Psi^* < 0 \end{cases} \quad (5.47)$$

La condición de optimalidad utilizada en los artículos de Amstutz y Andrä (2006) y Lopes et al. (2015), entre otros, es que el ángulo Θ de la Ecuación (5.48) sea nulo. La condición anterior es más exigente que la Ecuación (5.47) ya que implica que Ψ^* y Ψ_{D_T} sean colineales. A pesar de lo anterior, es de fácil implementación y justifica la búsqueda lineal para el cambio de la función de nivel entre iteraciones, la cual se presenta a continuación.

$$\Theta = \arccos(\Psi_{D_T}^T \mathbb{M} \Psi^k) \quad (5.48)$$

Una iteración típica del método de optimización estructural de Amstutz y Andrä (2006), a la cual se denomina como la iteración k -ésima sin perder generalidad, se basa en partir de Ψ^k y calcular Ψ_{D_T} y Θ según las Ecuaciones (5.43) y (5.48). Luego, la función de nivel Ψ^{k+1} de la siguiente iteración se calcula como muestra la Ecuación (5.49), presentada originalmente por Amstutz y Andrä (2006), donde $\varkappa$ es un coeficiente de búsqueda lineal. La búsqueda lineal consiste en evaluar el funcional $\mathcal{J}^{\text{LA}}(\Omega_{k+1})$ para valores decrecientes de $\varkappa$ hasta obtener un descenso del valor del funcional respecto al obtenido con Ψ^k . Inicialmente se define $\varkappa := 1$ y su valor se redefine iterativamente por la regla $\varkappa := \varkappa/2$ cada vez que no se obtiene un descenso en el valor del funcional.

$$\Psi^{k+1} = \frac{1}{\sin(\Theta)} \left(\sin((1 - \varkappa)\Theta) \Psi^k + \sin(\varkappa\Theta) \Psi_{D_T} \right) \quad (5.49)$$

La búsqueda lineal de la Ecuación (5.49) es la interpolación del método de Amstutz y Andrä (2006) por la cual algunos autores han denominado al método como SLERP (Ferrer et al. 2018). Es una búsqueda lineal muy similar a la regla de Armijo (Luenberger y Ye, 2008), con la salvedad que no asegura suficiente descenso del funcional sino que simplemente asegura descenso. Finalmente se destaca que, como presentaron Amstutz y Andrä (2006), la Ecuación (5.49) asegura $\|\Psi^{k+1}\| = 1$.

El método desarrollado para esta tesis para combinar el método de Amstutz y Andrä (2006) con el XFEM se presenta en el Pseudocódigo 1. Este pseudocódigo es un resumen del código implementado, el cual es obtenible en el Anexo A. Las entradas al método de optimización estructural son: la región del espacio ocupable por la estructura D , la función de nivel inicial Ψ^0 , los

EC, la fracción objetivo del área ocupable M , la tolerancia en el cumplimiento del objetivo de área final $\mathbf{T}_M$, el coeficiente de penalidad cuadrática del LA inicial c , el coeficiente de penalidad del funcional de exceso de tensiones α , la región del espacio donde se admite chequeo de tensiones elevadas D_S , la tensión equivalente máxima admisible en dicha región $\bar{\sigma}_{VM}$, el coeficiente de suavizado de la función de nivel inicial ς_0 , la constante de decaimiento del coeficiente de suavizado ϱ_ς , la definición del cambio mínimo de área como criterio de optimalidad $\Delta_{|\Omega|}^*$, la definición del cambio máximo admisible de área por iteración $\Delta_{|\Omega|}^{\max}$ y el máximo número de subiteraciones en la búsqueda lineal $\text{SIT}_{\max}$. La única salida del método de optimización estructural es la estructura *optimizada* Ω^* , inducida por una función de nivel optimizada Ψ^* . En los siguientes párrafos se discuten algunos detalles y bloques del pseudocódigo que requieren aclaración, junto con algunos parámetros del método hasta ahora no presentados ($\mathbf{T}_M$, ς_0 , ϱ_ς , $\Delta_{|\Omega|}^*$, $\Delta_{|\Omega|}^{\max}$ y $\text{SIT}_{\max}$).

El algoritmo de optimización estructural consiste en realizar un cierto número de iteraciones hasta que se cumpla una condición de optimalidad y el área ocupada por la estructura sea la fracción objetivo, a menos de una tolerancia. Las Líneas 5 a 10 presentan los pasos elementales del método, ya que en ellos se calcula la función objetivo de la iteración actual, su DT y Ψ_{DT} . Se destaca que las Líneas 5 y 29 son los únicos dos puntos de todo el método donde se hace el análisis estructural de las geometrías obtenidas, y que la Línea 6 es el único punto donde se calculan las DT. La definición inicial $\mathcal{J}_{new}^{\text{LA}} := \mathcal{J}_{old}^{\text{LA}} + 1$ de la Línea 9 es un artilugio para permitir el inicio de la búsqueda lineal. Una vez pasado el bloque de las Líneas 5 a 10 se procede a la operativa propia de optimización.

Las Líneas 11 a 13 presentan la condición de parada del algoritmo de optimización estructural. La condición $\text{abs}(|\Omega|_{old}/|D| - M) \leq \mathbf{T}_M$ verifica que el área ocupada por la estructura se encuentre a menos de la tolerancia $\mathbf{T}_M$ de la fracción objetivo, y la condición $\text{abs}(|\Omega|_{new} - |\Omega|_{old})/|D| < \Delta_{|\Omega|}^*$ funciona como criterio de optimalidad. Este bloque es la única posible salida del algoritmo de optimización estructural y devuelve la estructura optimizada. La segunda condición de la Línea 11 implica que una geometría se encuentra suficientemente optimizada si el cambio de área ocupada entre las geometrías inducidas por Ψ^k y Ψ_{DT} es menor a una fracción $\Delta_{|\Omega|}^*$ del área total. Esta condición de optimalidad contrasta con la utilizada en los artículos de Amstutz y Andrä (2006) y Lopes et al. (2015), en los cuales se consideró como criterio que $|\Theta|$ fuera

Pseudocódigo 1: Algoritmo de optimización estructural con XFEM

Entradas: $D, \Psi^0, EC, M, \mathbf{T}_M, c, \alpha, D_S, \bar{\sigma}_{VM}, \varsigma_0, \varrho_\varsigma, \Delta_{|\Omega|}^*, \Delta_{|\Omega|}^{m\acute{a}x},$
 $SIT_{m\acute{a}x}$

Salidas : Ω^*

```

1  $k := 0;$ 
2  $|\Omega| \leftarrow \Psi^k;$ 
3  $\zeta := 0$  ; flag := VERADERO;
4 Mientras que flag = VERADERO Hacer
5   Obtener  $\mathcal{J}^{LA}$  según la Ecuación (5.19) con  $\Psi^k$ ;
6   Obtener  $D_T \mathcal{J}^{LA}$  según la Ecuación (5.22) con  $\Psi^k$ ;
7    $\Psi_{D_T} \leftarrow (\Psi^k; D_T \mathcal{J}^{LA})$  según la Ecuación (5.43);
8    $\Theta \leftarrow (\Psi^k; \Psi_{D_T})$  según la Ecuación (5.48);
9    $\Psi_{old} := \Psi^k$ ;  $|\Omega|_{old} := |\Omega|$ ;  $\mathcal{J}_{old}^{LA} := \mathcal{J}^{LA}$ ;  $\mathcal{J}_{new}^{LA} := \mathcal{J}_{old}^{LA} + 1$ ;  $\varkappa := 1$ ;
10   $|\Omega|_{new} \leftarrow \Psi_{D_T}$ ;
11  Si  $\text{abs}(|\Omega|_{old}/|D| - M) \leq \mathbf{T}_M$  Y  $\text{abs}(|\Omega|_{new} - |\Omega|_{old})/|D| < \Delta_{|\Omega|}^*$ 
    Entonces
12    flag := FALSO;
13     $\Omega^* \leftarrow \Psi_{old}$ ;
14  Si no
15    Si  $\text{abs}(|\Omega|_{new} - |\Omega|_{old})/|D| < \Delta_{|\Omega|}^*$  Entonces
16       $\zeta := \zeta + c(|\Omega|_{old} - M|D|)$ ;  $c := 2c$ ;
17      Volver a la Línea 6;
18    Si no
19      Mientras que  $\text{abs}(|\Omega|_{new} - |\Omega|_{old})/|D| > \Delta_{|\Omega|}^{m\acute{a}x}$  Hacer
20         $\varkappa := \varkappa/2$ ;
21         $\Psi_{new} \leftarrow (\Psi_{old}; \Psi_{D_T}; \varkappa; \Theta)$  según la Ecuación (5.49);
22         $|\Omega|_{new} \leftarrow \Psi_{new}$ ;
23      Fin
24      SIT := 0;
25      Mientras que  $\mathcal{J}_{new}^{LA} > \mathcal{J}_{old}^{LA}$  Y SIT <  $SIT_{m\acute{a}x}$  Hacer
26        SIT := SIT + 1;  $\varsigma := \varsigma_0/\varrho_\varsigma^{\text{SIT}-1}$ ;
27         $\Psi_{new} \leftarrow (\Psi_{old}; \Psi_{D_T}; \varkappa; \Theta)$  según la Ecuación (5.49);
28        Obtener  $\Psi^{k+1}$  suavizando  $\Psi_{new}$  con  $\varsigma$ ;
29        Obtener  $\mathcal{J}_{new}^{LA}$  según la Ecuación (5.19) con  $\Psi^{k+1}$ ;
30         $\varkappa := \varkappa/2$ ;
31      Fin
32      Si  $\mathcal{J}_{new}^{LA} > \mathcal{J}_{old}^{LA}$  Entonces
33         $\zeta := \zeta + c(|\Omega|_{old} - M|D|)$ ;  $c := 2c$ ;
34      Fin
35       $k := k + 1$ ;
36    Fin
37  Fin
38 Fin

```

menor a cierta tolerancia. El motivo tras el cambio de criterio radica en la necesidad de suavizado de la función de nivel, la cual se presenta en detalle en la Sección 5.5 e impide que Θ tienda a un valor nulo.

Las Líneas 15 a 17 conforman el bloque principal del método del LA puesto que analizan si es necesario ajustar el multiplicador y el coeficiente de penalidad según se discutió en la Sección 5.2. En primer lugar, el bloque estudia si se cumple el criterio de optimalidad del párrafo anterior y, en caso positivo, se ajustan los parámetros del método según las Ecuaciones (5.20) y (5.21). Lo anterior se basa en que, si se llega a este bloque y se cumple el criterio de optimalidad, la estructura se encuentra optimizada para los parámetros actuales del método, pero no se cumplió la restricción del área ocupada y por lo tanto se debe continuar el proceso con nuevos parámetros. Actualizados los parámetros, el método de optimización estructural regresa a la Línea 6 para repetir el proceso.

Las Líneas 19 a 23 conforman un bloque que permite evitar que el cambio de área en una iteración sea muy grande. En algunos casos, sobre todo al inicio del método de optimización estructural o tras el cambio de los parámetros del LA, el cambio de área propuesto por Ψ_{D_T} es muy grande y puede dificultar la convergencia del método. Para evitar lo anterior, en el método se incluyó como parámetro de entrada un valor máximo admisible de cambio de área por iteración $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}}$ y las Líneas 19 a 23 se encargan de imponerlo. Dicho bloque se encarga de iniciar la búsqueda lineal, puesto que menores $\varkappa$ implican menores cambios de área, hasta que se obtenga que el cambio de área propuesto sea menor al cambio admisible.

Las Líneas 25 a 31 conforman el bloque que ejecuta la búsqueda lineal anteriormente descrita en base a una serie de subiteraciones. Para evitar problemas de convergencia, se consideró un número máximo de subiteraciones $\text{SIT}_{\text{máx}}$ tal que si se alcanza dicho número se termina la búsqueda lineal, incluso aunque no se haya obtenido descenso del valor del funcional. Antes de evaluar el eventual descenso del funcional, se suavizan las funciones de nivel obtenidas a partir de la Ecuación (5.49), puesto que de no hacerlo las geometrías obtenidas serían rugosas. Los métodos de suavizado empleados utilizan como parámetro de entrada un coeficiente de suavizado ς , el cual se disminuye a medida que avanza la búsqueda lineal según la Ecuación (5.50), donde ς_0 es el coeficiente de suavizado inicial y ϱ_ς es la constante de decaimiento del suavizado. La presentación de la necesidad de suavizado, los métodos empleados para hacerlo

y el motivo detrás del decaimiento del suavizado se discuten en detalle en la Sección 5.5.

$$\varsigma = \frac{\varsigma_0}{\varrho_{\varsigma}^{\text{SIT}-1}} \quad (5.50)$$

Finalmente, las Líneas 32 a 34 hacen que si la búsqueda lineal se finalizó porque se alcanzó el máximo de subiteraciones sin lograr descenso del funcional, se ajusten los parámetros del LA de forma análoga a como se haría si se tiene una geometría optimizada. Esta decisión algorítmica se asocia a asumir que si la búsqueda lineal no logra obtener descenso, entonces la geometría actual es suficientemente óptima. Lo anterior resulta en un criterio heurístico pero que probó funcionar adecuadamente.

Algunas consideraciones prácticas que se tuvieron en cuenta en el método implementado son las siguientes. En primer lugar, cuando se tiene más de un EC, se decidió que, para disminuir el tiempo de cómputo, la creación de la matriz de rigidez global solamente se realice para el primer EC, puesto que de no ocurrir cambios de Ψ no se modifica la rigidez de la estructura. Lo anterior no pudo ser realizado para la matriz $\mathcal{K}$ del problema adjunto del cálculo de la DT del funcional de tensiones, ya que esta última depende de las tensiones obtenidas en cada EC. Por otra parte, se destaca que en problemas intrínsecamente simétricos, en los cuales se espere que la estructura optimizada sea simétrica, es conveniente emplear una malla simétrica. Una muestra de la conveniencia de la simetría de la malla se presenta en el primer ejemplo del Capítulo 6. Finalmente, en esta tesis se consideró la posibilidad de que algunas partes de la estructura sean mantenidas obligatoriamente, lo que se logró a partir de forzar que los nodos asociados tengan función de nivel positiva y que dichos nodos no participen en las Ecuaciones (5.43), (5.48) y (5.49). Un ejemplo de estructura donde se mantuvo obligatoriamente una parte es presentado en el segundo ejemplo del Capítulo 6.

Finalmente, a modo de cierre de esta sección, se hace notar que el método implementado es heurístico y, si bien está inspirado en los métodos de descenso, no se una demostración teórica que asegure que la dirección de movimiento sea de descenso. Además, el método no puede asegurar la obtención de un óptimo global del problema de optimización estructural, por lo cual los resultados obtenidos se denominan *estructuras optimizadas* y no óptimas. Sin embargo, el método de Amstutz y Andrä (2006) ha sido utilizado con éxito en el pasado en

problemas de optimización estructural, según se discutió en el Capítulo 3, con resultados de excelente desempeño. Luego, como se presenta en el Capítulo 6, las modificaciones realizadas para permitir el uso conjunto del XFEM con el método de Amstutz y Andrä (2006), resultaron en buenos desempeños del método heurístico de optimización estructural.

5.5. Suavizado de la función de nivel

En la sección anterior se presentó el algoritmo general del método de optimización estructural, en el cual se indicaron pasos de suavizado de Ψ . En esta sección se presenta, en primer lugar, los motivos por los cuales el método de optimización estructural de Amstutz y Andrä (2006), al combinarlo con el XFEM, requiere de un algoritmo de suavizado de Ψ . Luego se discuten las técnicas de suavizado empleadas en esta tesis y su fundamento matemático y finalmente se discuten algunas consideraciones especiales que se tuvieron en esta tesis.

5.5.1. Presentación de la necesidad de suavizado

Si no se hubiera considerado un algoritmo de suavizado de la función de nivel se generarían progresivamente rugosidades en la geometría de la estructura obtenida por el método de optimización estructural. Dichas rugosidades ocurren principalmente por dos motivos: La interpolación lineal de funciones de nivel y el valor de la DT en los nodos extendidos. A continuación se presentan estos efectos.

Para ilustrar las rugosidades generadas por la interpolación lineal se presenta un ejemplo en la Figura 5.4. La Figura 5.4a presenta la geometría generada a partir de una función de nivel Ψ_1 , para la cual se presentan sus valores nodales. Por otra parte, la Figura 5.4b presenta otra geometría generada a partir de una función de nivel Ψ_2 . Las dos geometrías anteriores son, en términos generales, suaves. Por otra parte, la Figura 5.4c presenta la geometría obtenida al interpolar una función de nivel según $\Psi = 0,35\Psi_1 + 0,65\Psi_2$, donde se señala con un círculo rojo una rugosidad generada en dicha interpolación. Se destaca que si bien la interpolación del método de Amstutz y Andrä (2006) no sigue exactamente la fórmula presentada, sí admite una de idéntica relación normalizada entre los valores nodales, lo que derivaría en una geometría idéntica. Lo

anterior implica que las rugosidades presentadas pueden producirse aún bajo la interpolación del método. Si bien en este ejemplo simple la rugosidad no es significativa, sí muestra la posibilidad de que se generen rugosidades asociadas a la interpolación entre dos geometrías; en particular si la interfase se mueve bastante.

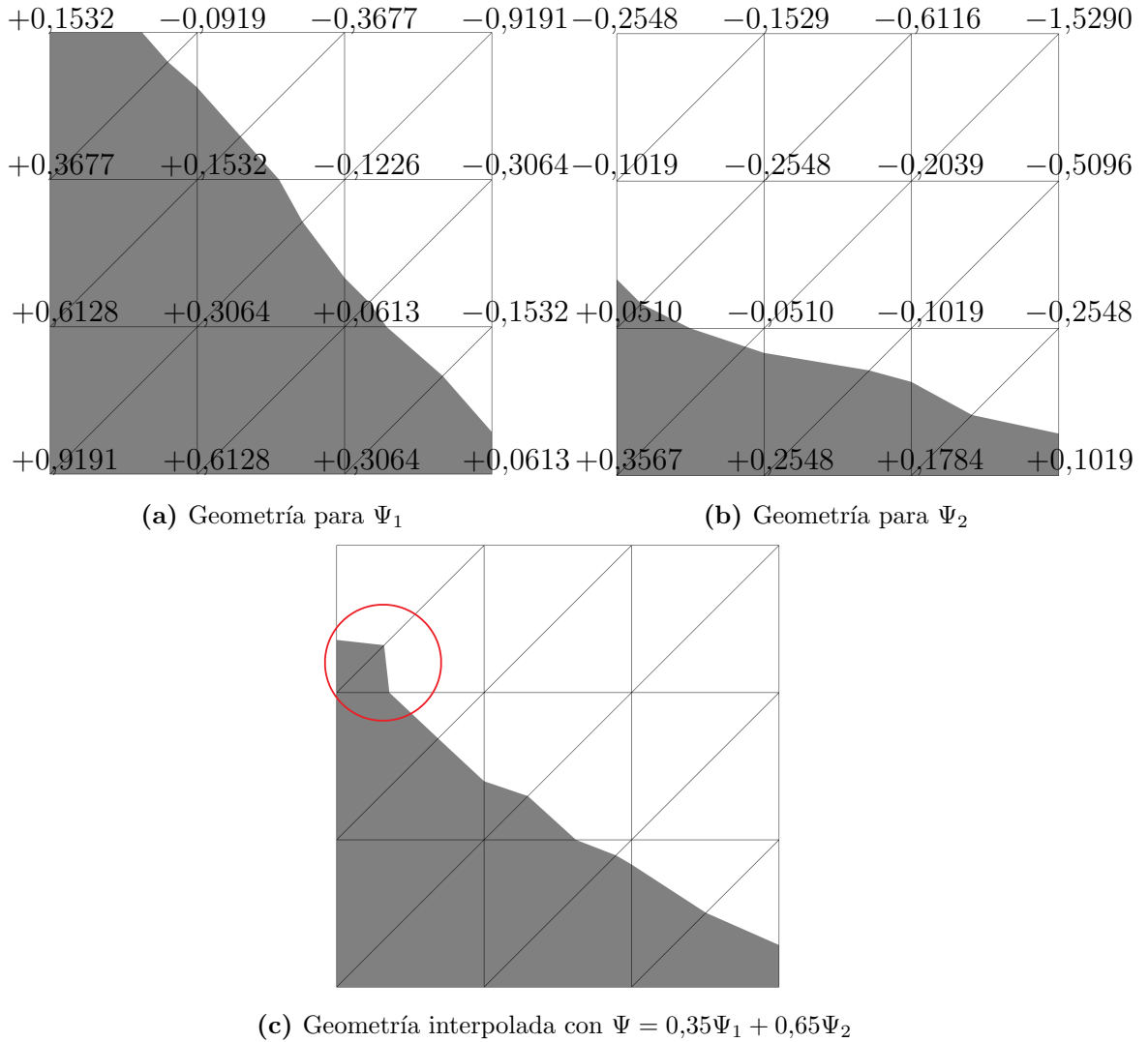


Figura 5.4: Ejemplo de rugosidades en la geometría producto de la interpolación lineal

A continuación se analiza cómo el cálculo de la DT en los nodos extendidos puede ocasionar que la función de nivel Ψ_{DT} propuesta por la DT, y presentada en la Ecuación (5.43), induzca geometrías rugosas. Para ilustrar lo anterior se vuelve a emplear el caso de estudio de la placa circular sometida a tracción presentado en la Sección 4.1.1. En este caso se considera que la placa exterior

es la estructura y posee un módulo de Young $E_M = 1$ y la inclusión son los vacíos y poseen un material blando de módulo de Young $E_V = 10^{-3}$. Además, se estudia la región de x entre $-0,80$ y $-0,48$ y y entre $-1,04$ y $-0,72$.

En la Figura 5.5 se presenta la situación inicial del caso de estudio. En particular, en la Figura 5.5a se presenta la geometría inicial, la cual es, en términos generales, suave. Si bien esta geometría se construyó específicamente para este caso de análisis, representa una geometría suave obtenible en una iteración genérica del método de optimización estructural. Por otra parte, la Figura 5.5b presenta en un mapa de colores los valores calculados con el XFEM para $D_T \mathcal{J}^{\text{LA}}$. Se consideró en el cálculo $\zeta = 3,884$, un valor de M tal que $|\Omega| = M|D|$ y $\alpha = 0$ (sin chequeo de tensiones máximas). Además, se representó la interfase con una línea roja. Un detalle a destacarse es la no continuidad de la DT en la interfase, producto de que σ , ε y γ no son continuos en ella.

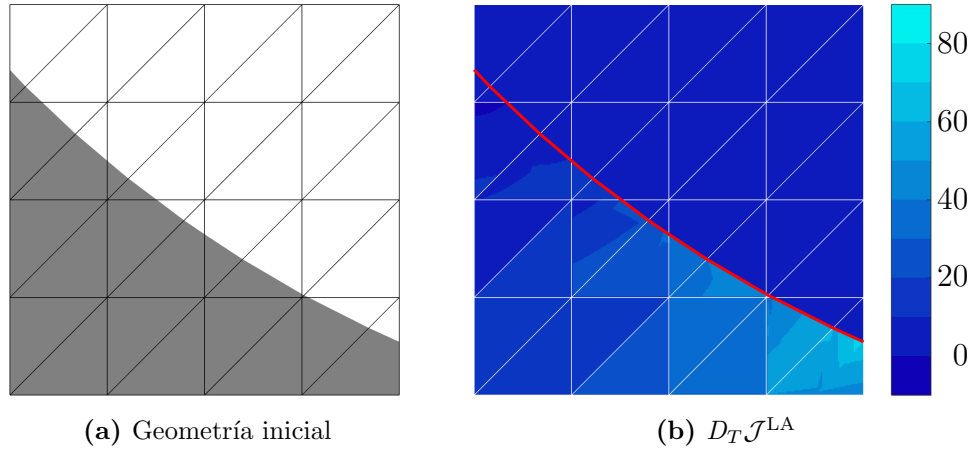


Figura 5.5: Geometría en la zona de estudio y DT de la función objetivo para el análisis de generación de rugosidades

La no continuidad de la DT en la interfase es la principal fuente de las rugosidades que se presentan a continuación. Los nodos que pertenecen a diferentes regiones materiales calculan sus DT de forma muy dispar. Luego, como la función de nivel propuesta por la DT se calcula según la Ecuación (5.43), se tiene un comportamiento distinto en el cálculo de Ψ_{D_T} en los nodos de distintas regiones. Ese comportamiento distinto se asocia a que las zonas de $\Psi > 0$ presentan $D_T \mathcal{J}^{\text{LA}}$ con valores relativamente similares entre sí, y por ende Ψ_{D_T} de dichas zonas presentan valores de orden similar, y lo mismo sucede con las zonas de $\Psi < 0$.

En la Figura 5.6 se presentan dos posibles geometrías inducidas por Ψ_{D_T} ,

calculada a partir de $D_T \mathcal{J}^{LA}$ de la Figura 5.5b, diferenciadas según dos métodos de cálculo de la DT nodal. La Figura 5.6a presenta la geometría que se obtiene de obtener la DT nodal a partir de su valor en las coordenadas asociadas al nodo. Por otra parte, la Figura 5.6b presenta la geometría que se obtiene de obtener la DT nodal a partir del promedio ponderado de la Ecuación (5.42). La Figura 5.6 muestra que ambas propuestas de cálculo generan geometrías altamente rugosas, asociadas a la no continuidad de la DT en la interfase. La principal diferencia entre ambas propuestas es que la Figura 5.6a muestra que la interfase se ajusta a la malla, quedando muy cerca de los nodos que pertenecen a la fracción blanda, de forma similar a lo que ocurriría si se toman los EX como pertenecientes al material rígido, mientras que la Figura 5.6b muestra un comportamiento más caótico pero menos cercano a los nodos de la fracción blanda.

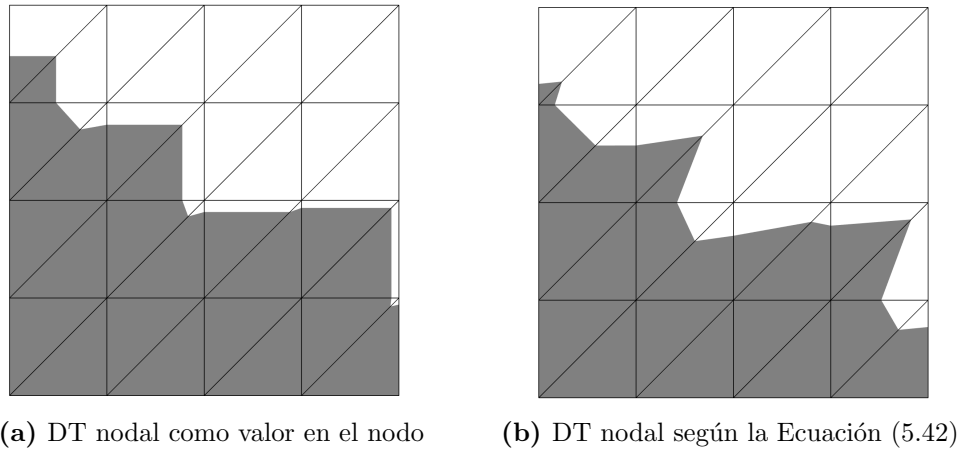


Figura 5.6: Posibles geometrías propuestas por la DT

El problema de la rugosidad en la geometría propuesta por la DT está relacionada puramente a la discontinuidad de la DT en las interfases. Si bien no se presenta aquí, las geometrías que se obtienen en el momento de nucleación de huecos son en términos generales suaves, lo que se asocia a la continuidad de la DT en un mismo material.

A partir del anterior análisis, las dos fuentes de rugosidades presentan sinergia entre sí. Por un lado, la interpolación entre dos funciones de nivel puede generar rugosidades aún en el caso en el cual las dos geometrías de interpolación sean suaves. Por el otro, la geometría inducida por la DT puede ser rugosa de por sí, lo que implica que la interpolación ya parte de una geometría rugosa, aumentando las rugosidades posteriores.

Se hace notar que el método de optimización estructural desarrollado en esta tesis no logra suavizar naturalmente las interfases. Por el contrario, a medida que progresa el algoritmo de optimización estructural, el deterioro de la suavidad de las interfases tiende a empeorar. En el Capítulo 6 se presentan, en particular en la Sección 6.1.2.2, dos ejemplos en los cuales no se utilizó un algoritmo de suavizado. Uno de los ejemplos se hizo con una malla estructurada y el otro con una malla no estructurada. Dichos ejemplos ilustran las rugosidades predichas, muestran el aumento progresivo de dichas rugosidades y confirman la necesidad de un suavizado.

Las rugosidades presentadas se consideraron un problema para el método de optimización estructural. Lo anterior se debe a que la inmensa mayoría de las estructuras optimizadas de los artículos discutidos en el Capítulo 3 poseen geometrías relativamente suaves, en particular aquellas que surgen de mallas muy finas o remallados frecuentes. Además, resulta intuitivo esperar que las geometrías optimizadas deban ser suaves y se debe notar que los resultados antiintuitivos no suelen ser de aceptación por los ingenieros. Por los puntos anteriores, resultó necesario aplicar alguna técnica de suavizado al método de optimización estructural.

Un detalle a destacar es que el problema de las rugosidades no había sido identificado anteriormente en la bibliografía de optimización estructural con el método de Amstutz y Andrä (2006). Lo anterior se debe a que, como se presentó en la Sección 3.2.3.3, la mayoría de los trabajos publicados donde se utilizó el método de Amstutz y Andrä (2006) emplearon el FEM. Al utilizar el FEM, los elementos cortados en general son tratados como un material poroso, según se adelantó para el método SIMP en el Capítulo 1. La densidad de dichos elementos se calcula como la proporción del área del elemento del material estructural, por lo que no importa la forma exacta de la interfase sino simplemente la magnitud de la fracción estructural. Lo anterior muestra que el problema de las rugosidades es intrínseco al hecho de utilizar la DT junto con el XFEM.

Uno de los objetivos de la tesis fue emplear el XFEM para obtener geometrías que no requirieran de mallas de elementos finitos muy finas o de un remallado frecuente. Por lo discutido en el párrafo anterior, el uso del XFEM con el método de Amstutz y Andrä (2006) genera geometrías que poseen rugosidades y gran dependencia con la geometría de la malla, según se presentó en la Figura 5.6. Lo anterior implicó buscar una solución al problema de las

rugosidades y surgieron dos principales alternativas: usar una malla más fina para el XFEM que para Ψ o aplicar algoritmos de suavizado de Ψ .

La alternativa de utilizar una malla más fina para el XFEM presenta algunas deficiencias. En primer lugar, va en contra de la filosofía de trabajo usual en optimización estructural de tener una única malla para los diversos análisis. Además, si bien el uso de mallas de distinto tamaño es directo en mallas regulares y estructuradas, no es trivial su uso cuando se emplean mallas no estructuradas con zonas de refinamiento. Las dificultades anteriores son reales pero no muy significativas. Una gran deficiencia del uso de mallas de distinto tamaño es que en varias situaciones sucede una de dos situaciones: la malla de Ψ es muy gruesa o la malla del XFEM es muy fina. Si la malla de Ψ es muy gruesa, se tiene muy poca libertad de las geometrías a generar y es probable que se generen estructuras rugosas por esa poca libertad. Por otro lado, si la malla del XFEM es muy fina se tienen grandes costos computacionales del análisis estructural, lo cual se buscó evitar. Por los motivos anteriores no se utilizó en esta tesis distintos tamaños de malla. Como punto adicional, el uso de mallas distintas reduce las rugosidades asociadas al cálculo de Ψ_{DT} en los nodos cercanos a las interfases, pero no modifica las rugosidades asociadas a la interpolación.

Por lo descrito en el párrafo anterior, en esta tesis se decidió emplear un algoritmo de suavizado de la función de nivel. El uso de algoritmos de suavizado o regularización no son extraños en la optimización topológica de estructuras. Por un lado es común el uso de filtros, tanto con el SIMP (Barrera et al. 2020) como con el método de la función de nivel (Geiss et al. 2019a). Por otro lado, el método de Yamada et al. (2010) para optimización topológica con la DT utiliza un parámetro de difusión como suavizado y regularización de la geometría. Finalmente, se destaca el artículo de Canelas et al. (2024), en el cual se utilizó el XFEM y la DT para resolver un problema inverso y requirieron el uso de algoritmos de suavizado.

5.5.2. Técnicas de suavizado

Para esta tesis se emplearon dos técnicas para el suavizado de Ψ . Para las mallas estructuradas regulares se empleó el método presentado en el artículo de Garcia (2010). Por otro lado, para mallas no estructuradas, en particular aquellas con zonas de refinamiento, se empleó el método LOWESS (en inglés:

locally weighted scatterplot smoothing; Cleveland, 1979). El motivo tras la distinción es que el método de Garcia (2010) probó ser más rápido, más robusto y menos sensible a parámetros que el método LOWESS, pero solamente funciona en mallas regulares. A continuación se presentan los principales fundamentos matemáticos de ambos métodos.

5.5.2.1. Suavizado de Garcia (2010)

La técnica de suavizado de Garcia (2010) es un método sencillo y eficiente de suavizado que ha sido utilizado anteriormente en problemas de uso conjunto del XFEM con la DT (Canelas et al. 2024). Si bien en los siguientes párrafos se presentan las bases del método en problemas unidimensionales, se destaca que en el artículo se presentó la generalización a n dimensiones. Además, en el artículo se presentaron unas técnicas de transformación, denominadas de *coseno discreto*, que permiten hacer más eficiente la operativa de suavizado. Finalmente también se destaca que en el artículo se presentaron herramientas para tratar valores faltantes o pesos relativos de los datos.

El método se basa en asumir que se tiene una serie de medidas y , equiespaciadas, las cuales surgen de una magnitud $\hat{y}$ suave sumada a un error δ . Lo anterior se presenta en la Ecuación (5.51). Para las magnitudes del problema de optimización estructural, y hace las veces de Ψ_{DT} y $\hat{y}$ hace las veces de la función de nivel suavizada.

$$y = \hat{y} + \delta \quad (5.51)$$

Para calcular $\hat{y}$, ya que se asume que es suave, se busca minimizar el funcional $F(\hat{y})$ de la Ecuación (5.52), donde ς es el coeficiente de suavizado y $P(\hat{y})$ es una penalidad asociada a la rugosidad de $\hat{y}$. Garcia (2010) tomó $P(\hat{y})$ según la Ecuación (5.53), donde $\mathbf{D}$ es la matriz cuadrada tridiagonal presentada en la Ecuación (5.54) para el caso de datos equiespaciados una distancia h . Las anteriores ecuaciones implican que la rugosidad se mide a partir de la derivada segunda y el suavizado busca minimizar la magnitud de dicha derivada.

$$F(\hat{y}) = \|\hat{y} - y\|^2 + \varsigma P(\hat{y}) \quad (5.52)$$

$$P(\hat{y}) = \|\mathbf{D}\hat{y}\|^2 \quad (5.53)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

Garcia (2010) mostró que minimizar el funcional de la Ecuación (5.52) es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones lineales de la Ecuación (5.55). Se resalta que en el artículo se incluyeron además algunos artilugios numéricos para transformar el sistema de ecuaciones anterior a una expresión menos costosa computacionalmente.

$$(\mathbf{I} + \varsigma \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \hat{y} = y \quad (5.55)$$

En la Figura 5.7 se presenta una justificación de por qué la técnica de Garcia (2010) es útil para suavizar las geometrías obtenidas con Ψ_{D_T} . La Figura 5.7a presenta la geometría de la Figura 5.6b, con dos transectas identificadas con colores azul (nodos BAC) y rojo (nodos DAE). De dichas transectas se obtiene que el análisis que se realiza se asocia al nodo A, pero se destaca que extensible a cualquier nodo extendido. La Figura 5.7b presenta los valores que toma la función de nivel en ambas transectas, identificando además con una línea punteada el valor $\Psi = 0$ que simboliza la interfase.

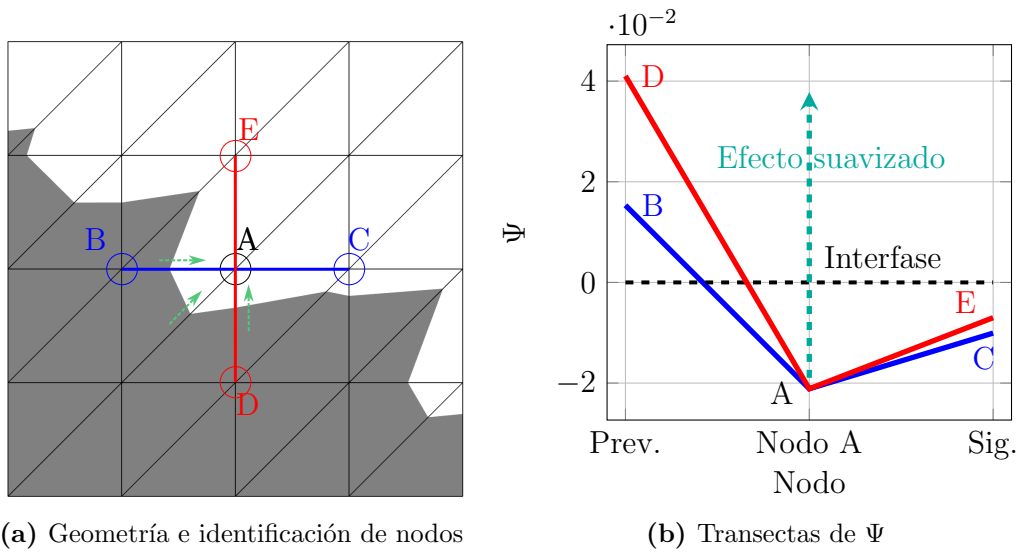
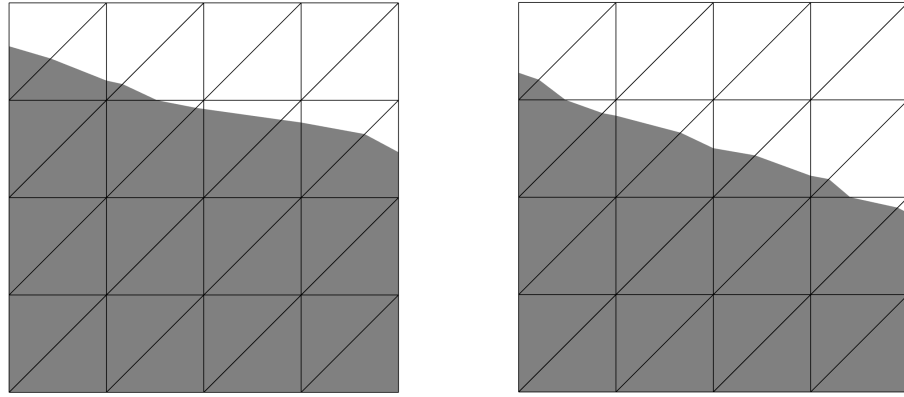


Figura 5.7: Ejemplo del funcionamiento de la técnica de Garcia (2010) para suavizar la geometría

El funcional que minimiza el suavizado de Garcia (2010) pondera, en base al coeficiente de suavizado ς , entre no modificar significativamente los valores de Ψ_{DT} y minimizar las derivadas segundas. $\varsigma = 0$ no modifica la geometría inicial, mientras que mayores valores de ς reducen las derivadas segundas, modificando la geometría. Para el nodo A de la Figura 5.7, minimizar la derivada segunda implica aumentar el valor de su función de nivel, según muestra la Figura 5.7b. Si se aumenta el valor de Ψ en A y se mantienen fijos todos los demás, las interfases entre B y A y entre D y A se desplazan hacia A. Dicho efecto se muestra con las flechas verdes en la Figura 5.7a, lo que genera un suavizado de la rugosidad presente, tal y como era deseable.

Se presenta en la Figura 5.8 las geometrías de la Figura 5.6 suavizadas por la técnica de Garcia (2010) con un coeficiente de suavizado $\varsigma = 0,7$. En primer lugar se obtuvo que la técnica de Garcia (2010) efectivamente fue eficaz para suavizar las geometrías altamente rugosas obtenidas por la DT. Además, se nota que ambos métodos de cálculo de la DT nodal pueden ser adecuadamente suavizados y ninguno de los dos resultó más beneficioso que el otro frente al problema de las rugosidades.



(a) DT nodal como valor en el nodo

(b) DT nodal según la Ecuación (5.42)

Figura 5.8: Suavizado de las geometrías de la Figura 5.6 con la técnica de Garcia (2010) con $\varsigma = 0,7$

5.5.2.2. Suavizado por LOWESS

El método LOWESS para el suavizado es un método más costoso computacionalmente que la técnica de Garcia (2010), pero que permite el uso de distribuciones irregulares de datos. A continuación se presentan las bases del método según se discutió en el artículo de Cleveland (1979). Al igual que para

el método de Garcia (2010), el método se presenta para problemas unidimensionales, pero es rápidamente generalizable a problemas de n dimensiones.

Al igual que el método de Garcia (2010), el método LOWESS se basa en asumir la Ecuación (5.51) y la diferencia reside en cómo estima $\hat{y}$. En el caso del método LOWESS, la estimación surge de una regresión polinómica ponderada local. En lo que sigue se discute el análisis para el nodo n -ésimo, entendiéndose que el proceso se repite para todos. En primer lugar se define h_n como la distancia $|x_k - x_n|$ del $[\varsigma \mathcal{N}_{no}]$ -ésimo nodo en orden de proximidad, donde ς es el coeficiente de suavizado de este método. Se tiene entonces que ς vale entre 0 y 1 e indica la fracción del total de nodos que son utilizados en el suavizado. Luego, el peso w_k para la regresión ponderada se define según la Ecuación (5.56), donde W es la función presentada en la Ecuación (5.57)

$$w_k = W\left(\frac{|x_k - x_n|}{h_n}\right) \quad (5.56)$$

$$W = \begin{cases} (1 - |x|^3)^3 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (5.57)$$

A continuación, el método calcula los coeficientes $\hat{\beta}_j^n$ que minimizan el funcional de la Ecuación (5.58), donde d es el grado del polinomio que se ajusta localmente y x_k es la coordenada del nodo k -ésimo. En esta tesis se decidió considerar $d = 1$. Luego, el valor suavizado de y_n se calcula como presenta la Ecuación (5.59). Se destaca que en el artículo de Cleveland (1979) se presenta un método para tratar valores atípicos, que se basa en hacer unos pasos adicionales de regresión robusta, pero no se aplicó en esta tesis pues Ψ_{DT} normalmente no presenta valores atípicos.

$$F(\beta_j^n) = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_{no}} w_k (y_k - \beta_0^n - \beta_1^n x_k - \dots - \beta_d^n x_k^d)^2 \quad (5.58)$$

$$\hat{y}_n = \sum_{j=0}^d \hat{\beta}_j^n x_n^j \quad (5.59)$$

De la explicación anterior se visualiza por qué el método LOWESS es más costoso computacionalmente que el método de Garcia (2010). Mientras que el método de Garcia (2010) solamente resuelve un sistema de ecuaciones para todos los nodos, el método LOWESS calcula, para cada nodo, las distancias

de todos a él, ordena dichas distancias y resuelve un sistema de ecuaciones por nodo para la regresión. Por otro lado, en ningún momento se utilizó ninguna hipótesis de regularidad, lo que permite su uso en mallas no estructuradas con refinamientos locales.

En la Figura 5.9 se presenta una justificación de por qué el método LOWESS también es útil para suavizar las geometrías obtenidas con Ψ_{DT} . Nuevamente el análisis presentado es únicamente para el nodo A, pero fácilmente extensible a otros nodos. La Figura 5.9a presenta la geometría de la Figura 5.6b, con las mismas dos transectas de la Figura 5.7a e indicando el alcance h_A del suavizado. Por tanto, para este ejemplo se consideró ς tal que $\lfloor \varsigma \mathcal{N}_{no} \rfloor = 6$. La Figura 5.9b nuevamente presenta los valores que toma la función de nivel en ambas transectas, además identificando con una línea punteada el valor $\Psi = 0$ que simboliza la interfase. Además, se incluyen como curvas punteadas cian, para la línea BAC, y magenta, para la línea DAE, las curvas obtenidas de la regresión local.

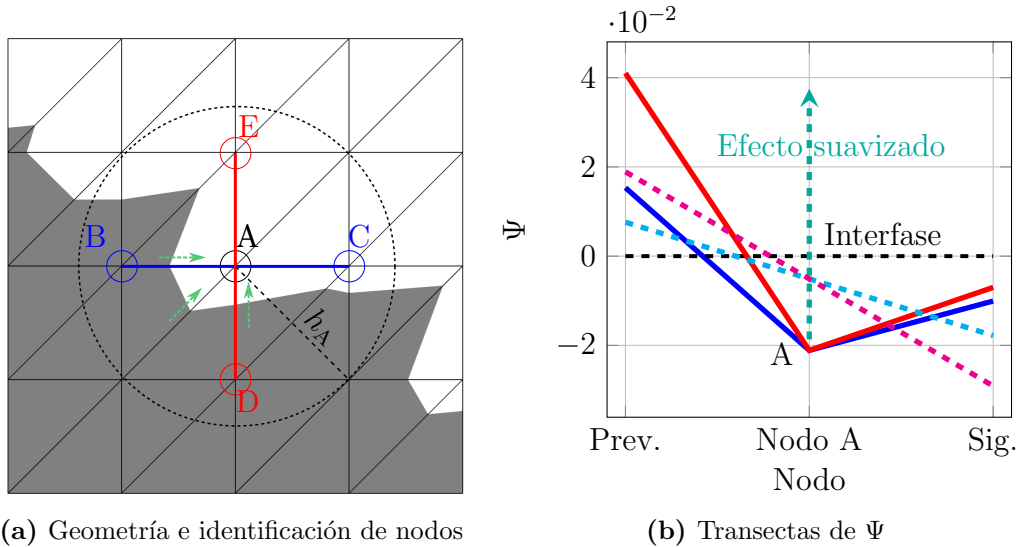


Figura 5.9: Ejemplo del funcionamiento del método LOWESS para suavizar la geometría

Ya que las curvas punteadas magenta y cian de la Figura 5.9b representan el ajuste polinómico del suavizado en las cercanías del nodo A, se tiene que el método LOWESS busca aumentar el valor de su función de nivel. Por lo tanto, al igual que lo discutido en la Figura 5.7, si se aumenta el valor de Ψ en A y se mantienen fijos todos los demás, las interfases se mueven como representan las flechas verdes de la Figura 5.9a. Por lo tanto, una vez más, se reduce la

rugosidad presente.

Finalmente, se presenta en la Figura 5.10 las geometrías de la Figura 5.6 suavizadas por LOWESS con un coeficiente de suavizado $\varsigma = 10^{-2}$. En primer lugar, se obtuvo que el método LOWESS también fue eficaz para suavizar las geometrías altamente rugosas obtenidas por la DT. Además, nuevamente se tiene que ambos métodos de cálculo de la DT nodal pueden ser adecuadamente suavizados. Lo anterior implica que si bien en esta tesis se tuvo preferencia por el método de la Ecuación (5.42), ambos métodos son viables para el cálculo de la DT nodal desde el punto de vista del suavizado.

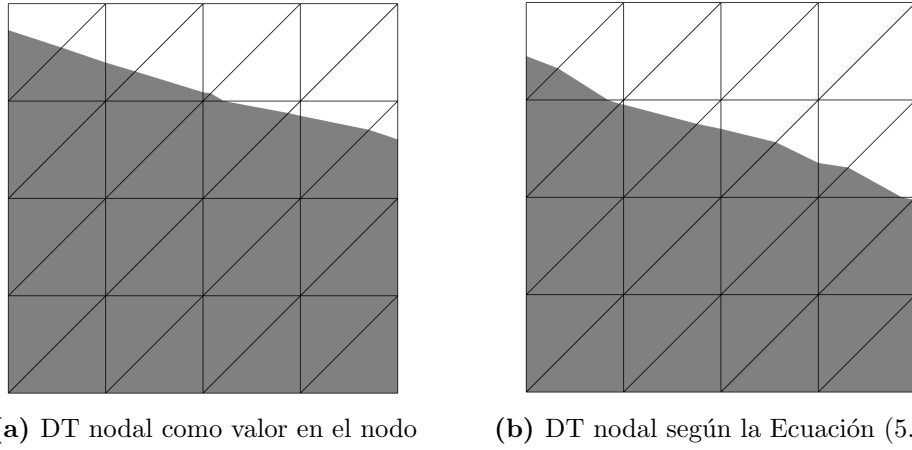


Figura 5.10: Suavizado de las geometrías de la Figura 5.6 con el método LOWESS con $\varsigma = 10^{-2}$

5.5.3. Consideraciones especiales del suavizado

A pesar de que, según se presentó en la Sección 5.5.2, las técnicas de suavizado fueron muy eficaces para lograr suavizar las geometrías; se hace mención a que el suavizado forma parte de un compromiso necesario para el método de optimización estructural. La afirmación anterior se asocia a que las geometrías calculadas por el método de la Sección 5.4 sin suavizado, surgen en función de criterios matemáticos de optimización estructural, mientras que el suavizado no. Por lo tanto, algunas consideraciones especiales que se tuvieron en el desarrollo del método, provienen de procurar despreciar en la menor medida posible los resultados del paso de optimización estructural.

En primer lugar, en esta tesis se decidió suavizar todas las geometrías obtenidas en la búsqueda lineal, previo a chequear el eventual descenso del

funcional $\mathcal{J}^{\text{LA}}$. Lo anterior contrasta con el artículo de Canelas et al. (2024), donde se suavizaron las geometrías obtenidas después de la búsqueda lineal. Lo realizado en esta tesis implica un mayor tiempo de cómputo por la necesidad de un mayor número de ejecuciones de las técnicas de suavizado. Por otro lado, al suavizar la geometría previo al chequeo del descenso del funcional, se garantiza que la geometría de una siguiente iteración haya implicado un descenso del funcional $\mathcal{J}^{\text{LA}}$. Si se hubiera suavizado la geometría pasada la búsqueda lineal, no se tendría garantías de que el funcional efectivamente haya descendido en la iteración.

De la mano de la consideración del párrafo anterior, surgió la conveniencia de aplicar un método de decaimiento del coeficiente de suavizado durante la búsqueda lineal de la Ecuación (5.49). Lo anterior se realizó en aras de evitar superposiciones de suavizado. La búsqueda lineal de esta tesis reduce el coeficiente $\varkappa$ hasta encontrar un descenso del funcional y cuando $\varkappa \rightarrow 0$ la geometría debería ser similar a la inicial de la iteración. La geometría inicial de un paso típico del método del Pseudocódigo 1 ya se encuentra suavizada en su propia búsqueda lineal, por lo tanto es necesario que cuando $\varkappa \rightarrow 0$ el suavizado de la geometría sea mínimo. Además, si el suavizado para $\varkappa \rightarrow 0$ es apreciable, pueden ocurrir cambios artificiales en la conectividad de la estructura producto únicamente del suavizado.

5.6. Comparación de métodos

Como fue adelantado en la introducción, el objetivo principal de esta tesis fue combinar el XFEM con el algoritmo de optimización descrito en la Sección 5.4 con la motivación de reducir el costo computacional de los métodos de optimización topológica de estructuras. Para analizar el cumplimiento de este objetivo, se comparó el desempeño del XFEM desarrollado en esta tesis con otras propuestas del FEM como metodología de análisis estructural. A continuación, se presenta en primer lugar las metodologías de análisis estructural contra las que se comparó y posteriormente se introducen las variables de comparación y cómo se midieron.

5.6.1. Métodos de análisis comparados

5.6.1.1. Otras propuestas de XFEM con y sin suavizado

Una de las principales comparaciones que se hizo fue entre la propuesta del XFEM desarrollada para esta tesis, y presentada en la Sección 4.2, y la propuesta de Moës et al. (2003), la cual se describió en las Secciones 3.1.3.3 y 3.1.3.4 y que presenta los problemas mostrados en la Sección 4.1. El principal motivo de esta comparación es que la propuesta de Moës et al. (2003) utiliza un menor número de grados de libertad extendidos que la propuesta de esta tesis, por lo cual es potencialmente menos costosa computacionalmente. Se buscó en esta comparación ver si las dificultades identificadas en la propuesta de Moës et al. (2003) son significativas para el método de optimización presentado o si, a pesar de dichas dificultades, esta propuesta logra obtener el mejor desempeño. Para utilizar la propuesta de Moës et al. (2003) se utilizó directamente el Pseudocódigo 1, considerando dicha propuesta para el análisis estructural y cálculo de las DT.

Por otra parte, como se discutió en la Sección 5.5, el método de optimización topológica de estructuras requiere de un algoritmo de suavizado de la función de nivel para evitar resultados con geometrías muy rugosas. Este algoritmo consume cierto tiempo y memoria y tiene el potencial de implicar un mayor número de iteraciones para lograr la convergencia. Por estos motivos, se compararon los métodos del XFEM mencionados con y sin algoritmo de suavizado. El motivo detrás de estas comparaciones fue analizar si el beneficio de obtener una estructura menos rugosa compensa el costo computacional del algoritmo de suavizado.

5.6.1.2. FEM sin remallado

Luego, lógicamente se comparó el XFEM con metodologías basadas en el FEM. Se consideraron inicialmente dos posibles enfoques para utilizar el FEM: Considerar la función de nivel definida en los elementos y considerar la función de nivel definida en los nodos de la malla. La primera opción posee la ventaja que es directo notar que los elementos con $\Psi > 0$ pertenecen a Ω y el resto pertenecen a $D \setminus \overline{\Omega}$. La desventaja de esta propuesta es que el uso de la DT no es del todo adecuado, puesto que las perturbaciones topológicas consistirían en modificar todo un elemento. La desventaja de esta propuesta es que produce

interfases extremadamente rugosas (definidas por las aristas existentes de la malla) y por lo tanto requiere utilizar un remallado local iterativo, que es lo que se quiere evitar. Por el motivo anterior, se descartó la primera propuesta. Al considerar la función de nivel definida en los nodos de la malla se tiene, de forma análoga al XFEM, que cuando un elemento tiene sus tres nodos con $\Psi > 0$ pertenece a Ω y cuando tiene sus tres nodos con $\Psi < 0$ pertenece a $D \setminus \bar{\Omega}$. La dificultad de este enfoque radica en los elementos cuyos nodos no tienen todos el mismo signo. Para solventar la anterior dificultad se consideró una formulación basada en una función densidad, la cual se presenta en la Ecuación (5.60). La función densidad es una función que depende de cada elemento y vale entre 0 y 1, indicando la proporción del elemento finito ocupada por Ω . Para el cálculo de $|\Omega \cap \Omega_j^{(e)}|$ se consideró la división en subregiones de integración como se presentó en la Sección 3.1.3.4 para el XFEM. El método de la función densidad ρ es el usado en la mayoría de los artículos en los que se empleó la DT para optimización estructural, según se presentó en la Sección 3.2.3.

$$\rho_j = \frac{|\Omega \cap \Omega_j^{(e)}|}{|\Omega_j^{(e)}|} \quad (5.60)$$

El cálculo de la matriz de rigidez y las DT se modificó para el FEM según la función de densidad. Para la matriz de rigidez se consideró que en cada elemento el módulo de Young está dado por la Ecuación (5.61), la cual es una interpolación lineal en función de la densidad. Para las DT se consideró la misma interpolación, como presenta la Ecuación (5.62) para un funcional genérico, donde $(D_T \mathcal{J})_{\Omega \rightarrow D \setminus \bar{\Omega}}$ es el valor de la DT si la perturbación fuera de pasar Ω a $D \setminus \bar{\Omega}$ y $(D_T \mathcal{J})_{D \setminus \bar{\Omega} \rightarrow \Omega}$ es la contraria. Un detalle a destacar es que en el cálculo de $D_T \mathcal{S}_j$ se consideró que todo elemento con $\rho < 1$ no pertenece a $D_S \cap \Omega$.

$$E = \rho E_M + (1 - \rho) E_V \quad (5.61)$$

$$D_T \mathcal{J} = \rho (D_T \mathcal{J})_{\Omega \rightarrow D \setminus \bar{\Omega}} + (1 - \rho) (D_T \mathcal{J})_{D \setminus \bar{\Omega} \rightarrow \Omega} \quad (5.62)$$

Para el FEM se consideraron propuestas sin modificación de la malla de elementos finitos durante la ejecución del método de optimización estructural y propuestas con modificación. Dentro de las propuestas sin remallado se

consideró el FEM en la misma malla utilizada para los XFEM y el FEM en una malla con uno, dos y tres refinamientos globales, previos a la optimización estructural. Las distintas propuestas de remallado se presentan a continuación, comenzando en la Sección 5.6.1.3 con el refinamiento global.

5.6.1.3. FEM con refinamiento global

Una de las primeras propuestas que se consideró para modificar la malla del FEM durante la ejecución del método de optimización estructural fue la de refinamiento global. Este refinamiento fue utilizado por Amstutz y Andrä (2006) y por varios autores que se basaron en su método. La lógica general del refinamiento global se presenta en la Figura 5.11, donde la Figura 5.11a presenta una malla original y la Figura 5.11b presenta la misma malla refinada. En el caso de la Figura 5.11b se presenta en color negro la malla original y en color rojo los bordes nuevos generados por el refinamiento. Nótese que los bordes negros de la Figura 5.11b forman parte de la malla refinada. De la figura se infiere que el refinamiento global se basa en dividir todos los bordes de la malla original a la mitad y todos los elementos en cuatro elementos conformes a los nuevos nodos.

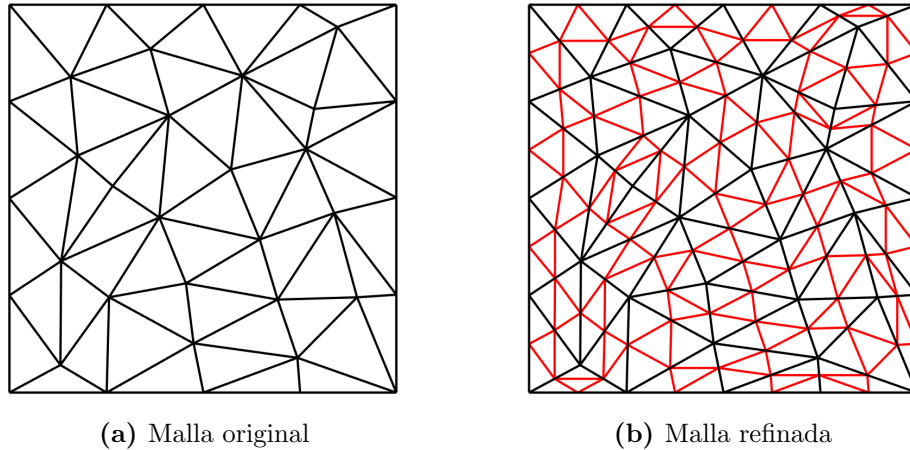


Figura 5.11: Ejemplo del funcionamiento del refinamiento global

En este remallado, al igual que en todos los otros que se presentan más adelante, se consideró que Ψ se interpola a la nueva malla a partir de la malla original y sus funciones de interpolación tradicionales. Finalmente, se hace notar que en primer lugar se consideró el caso en el cual el refinamiento global se hace cada vez que se actualizan los parámetros del LA, según presentó el Pseu-

docódigo 1. El anterior criterio se basó en refinar cada vez que la estructura se encontrara suficientemente optimizada. Por otro lado, también se consideró el caso en el cual el refinamiento global se hace solamente al final del algoritmo de optimización estructural, es decir una vez que se alcanzó la estructura optimizada Ω^* que cumple el objetivo de área ocupada. En estos últimos casos en primer lugar se obtiene Ω^* , luego se refina la malla y a continuación se vuelve ejecutar el Pseudocódigo 1 partiendo del Ψ refinado, la nueva malla y valores actualizados de c y ζ . Esta técnica, considerada por ejemplo en el artículo de Amstutz y Andrä (2006), busca primero obtener una geometría con una malla gruesa y luego con sucesivos refinamientos mejorar su definición. En esta tesis se consideró refinar una, dos o tres veces al final del método como casos contra los que se comparó el método de optimización con XFEM desarrollado en esta tesis.

5.6.1.4. FEM con refinamiento local

Otro de los métodos de remallado que se consideró para el FEM fue el de refinamiento local. Este refinamiento se basó en modificar la malla solamente en la cercanía de los elementos cortados por la interfase. En la Figura 5.12 se presenta la lógica del refinamiento local. En la Figura 5.12a se presenta la malla original a ser refinada, en la cual se agregó la interfase con una línea punteada azul. Luego, en la Figura 5.12b se presenta la misma malla refinada. Nuevamente en color negro se presenta la malla original y en color rojo los bordes nuevos generados por el refinamiento. En este caso el refinamiento local se basa en dividir los elementos cortados por la interfase en las subregiones de integración de la Sección 3.1.3.4. Luego, se dividen a la mitad los elementos de transición, en los cuales la división inicial cortó un borde.

Al igual que el refinamiento global, se consideraron cuatro casos de estudio para el refinamiento local. Se consideró el caso en el cual el refinamiento local se realiza cada vez que se actualizan los coeficientes del LA. También se consideró el caso en el cual el refinamiento se hace solamente al final del algoritmo de optimización estructural, una, dos o tres veces.

5.6.1.5. Remallado de Cortellessa et al. (2023)

Otros tres métodos de remallado considerados para el FEM son los de Cortellessa et al. (2023), Cui et al. (2023) y Li et al. (2021). Estos tres métodos

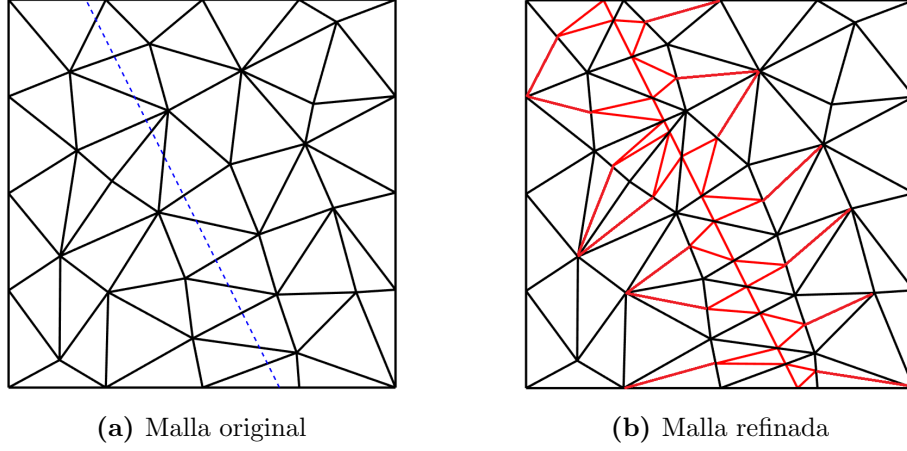


Figura 5.12: Ejemplo del funcionamiento del refinamiento local

surgieron para el problema de optimización estructural con la DT de Yamada et al. (2010), pero se decidió probarlos con el método de Amstutz y Andrä (2006) para comparar con el método de esta tesis. La dificultad de estos tres métodos es que requieren el uso de un mallador. Lo anterior es particularmente cierto para el método de Cortellessa et al. (2023), dado que genera mallas anisótropas.

La mayoría de las mallas no estructuradas realizadas en esta tesis fueron hechas con el software BlueKenue[®] (NRC Canada, 2018). En el caso del método de Cortellessa et al. (2023), se requirió que el mallador pudiera ser ejecutado durante la ejecución del algoritmo de optimización estructural, lo cual no es posible con BlueKenue. Dado que el código desarrollado para esta tesis fue hecho en MATLAB[®] (The MathWorks Inc., 2018) y MATLAB no posee un mallador anisótropo integrado, se decidió generar un mallador propio.

El mallador fue desarrollado a partir del artículo de Bossen y Heckbert (1996). En dicho artículo los autores presentaron un método para realizar mallas anisótropas en base a un campo de tensores métricos $\mathbf{M}$. El tensor métrico para un mallador bidimensional se define como presenta la Ecuación (5.63), donde r_1 y r_2 son el tamaño objetivo de los elementos en dos direcciones ortogonales entre sí y θ es el ángulo de la dirección de tamaño r_1 respecto al eje x .

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/r_1^2 & 0 \\ 0 & 1/r_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

En la implementación del método de Bossen y Heckbert (1996) en esta

tesis, se decidió modificar los valores límites de las escalas para los criterios de eliminación e inserción de nodos para acelerar la convergencia del método. Se decidió que un nodo solamente es eliminado si su escala es menor a 0,5 y que se inserte un nodo en un borde si su escala es mayor a $\sqrt{2}$. Las dos escalas anteriores valen 1 en el artículo. Se destaca que en los casos en los cuales existen grandes gradientes en el campo de tensores métricos, como suele suceder en el método de Cortellessa et al. (2023), el método de Bossen y Heckbert (1996) puede no converger, por lo que además se limitó el máximo de iteraciones posibles a 10 veces la cantidad de nodos de la malla. Finalmente, se presenta en la Figura 5.13 un ejemplo de malla anisótropa generada con el mallador programado, la cual muestra que el método es eficaz para generar mallas con esta característica.

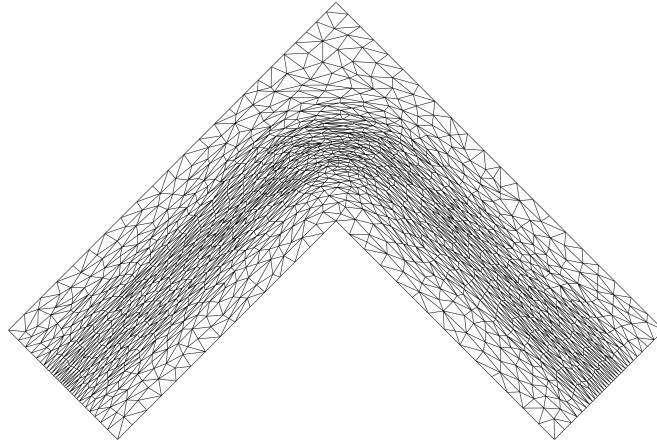


Figura 5.13: Ejemplo de mallado anisótropo con el mallador programado

El método de Cortellessa et al. (2023) se basa en que las zonas con $\Psi > 0$ les corresponde una malla no estructurada isotrópica de tamaño de elemento similar a la malla previa al remallado y las zonas con $\Psi < 0$ les corresponde una malla anisótropa, estirada según la dirección de la interfase. El método exacto para el cálculo de los tensores métricos se presentó en el artículo y en esta tesis se consideraron los valores $\beta = 10$ y $TOL = 0,2$ como parámetros del método. Cómo el remallado de Cortellessa et al. (2023) se desarrolló para el método de optimización de Yamada et al. (2010) y el cálculo de los tensores métricos para la región con $\Psi < 0$ depende de la forma adoptada por la función de nivel; se decidió en primer lugar hacer una transformación de la función de nivel obtenida con el método de esta tesis a una distancia signada, la cual es similar a lo que sería obtenido del método de Yamada et al. (2010). Finalmente,

como ejemplo se presenta en la Figura 5.14 una malla remallada con el método de Cortellessa et al. (2023), donde se asumió $\Psi < 0$ en la región a la izquierda de la interfase.

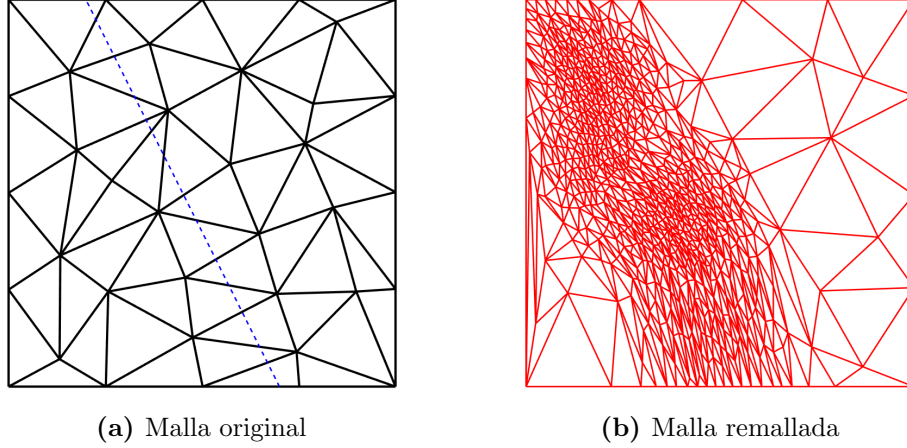


Figura 5.14: Ejemplo del funcionamiento del remallado de Cortellessa et al. (2023)

Para el método de remallado de Cortellessa et al. (2023), solamente se consideró el caso en el cual el refinamiento se hace cada cinco iteraciones del método del Pseudocódigo 1. La elección del número de iteraciones entre refinamientos es consistente con el número escogido en el artículo. Lo anterior se asocia a que en el artículo se escogió remallar cada 15 iteraciones, pero en general se presentaron tres veces más iteraciones en el método del artículo que en el de esta tesis.

5.6.1.6. Remallado de Cui et al. (2023)

El método de remallado de Cui et al. (2023) consiste en remallar en todas las iteraciones del método de optimización estructural, de forma tal que la malla sea siempre conforme a las interfaces y el tamaño medio de elemento se mantenga aproximadamente constante. Un ejemplo se presenta en la Figura 5.15, donde la Figura 5.15b muestra la malla remallada, la cual posee un tamaño de elemento similar al de la Figura 5.15a. La interfase se representa en la Figura 5.15a con una línea punteada azul y se tiene que la malla remallada la representa explícitamente. Se destaca que para implementar este método en esta tesis, nuevamente se hizo uso del mallador desarrollado en base al artículo de Bossen y Heckbert (1996). Se hace notar que en este método, a los nodos colocados en la interfase se les aplicó un valor $\Psi = 10^{-4}$ para asegurar elemen-

tos con densidad $\rho = 1$ del lado ocupado por la estructura y $\rho \rightarrow 0$ del lado ocupado por los vacíos.

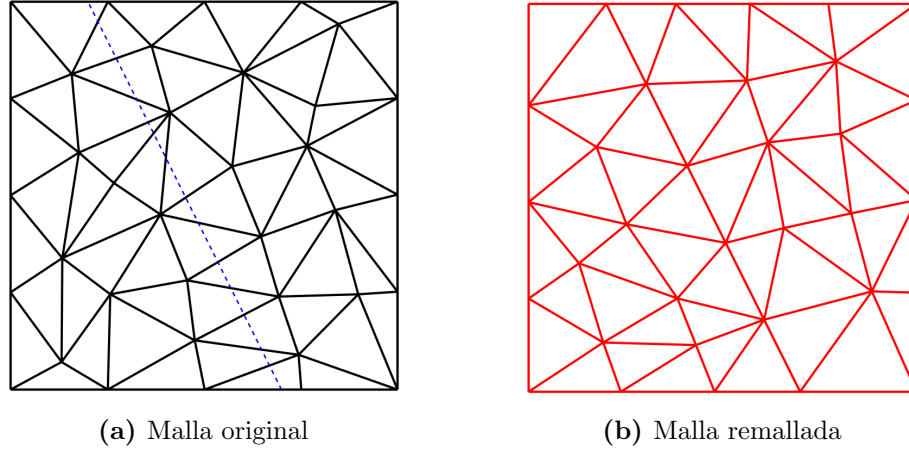


Figura 5.15: Ejemplo del funcionamiento del remallado de Cui et al. (2023)

5.6.1.7. Remallado de Li et al. (2021)

Finalmente, el método de remallado de Li et al. (2021) es muy similar al método de Cui et al. (2023). Al igual que dicho método, se considera un remallado en todas las iteraciones del método de optimización estructural. La diferencia entre ambos métodos es que el método de Li et al. (2021) reduce el tamaño de elemento cerca de las interfases y lo aumenta lejos de ellas. En esta tesis se consideró el caso del artículo en el cual el tamaño de elemento cerca de las interfases es la mitad del de la malla antes de comenzar el método de optimización estructural, y lejos de las interfases hasta 2,5 veces más grande. Además, el coeficiente h_{grad} del método fue considerado igual a 1,1.

La Figura 5.16 muestra un ejemplo del remallado de Li et al. (2021), el cual muestra el comportamiento presentado, si bien no hay puntos tan lejos de la interfase como para notar el factor de 2,5 en los elementos más grandes. Se destaca que nuevamente se hizo uso del mallador desarrollado en base al artículo de Bossen y Heckbert (1996) para implementar este método. Nótese que en este caso también se aplicó un valor $\Psi = 10^{-4}$ a los nodos colocados en la interfase.

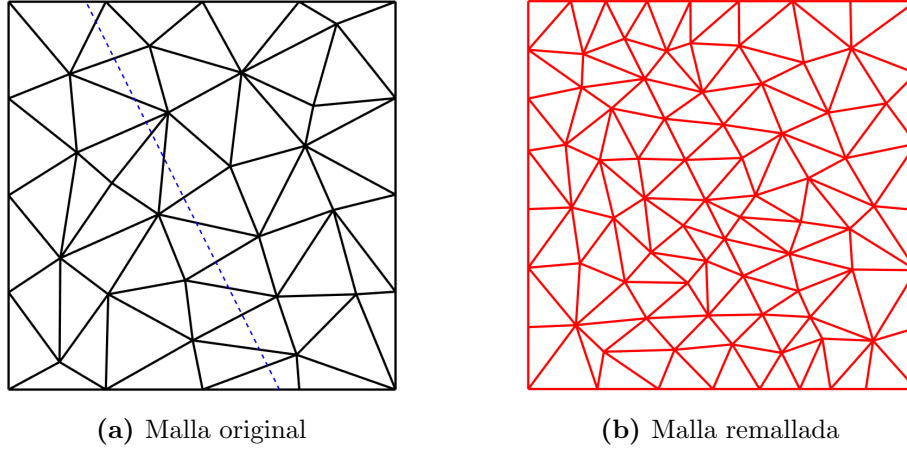


Figura 5.16: Ejemplo del funcionamiento del remallado de Li et al. (2021)

5.6.1.8. Resumen de los métodos comparados

En la Tabla 5.1 se presenta un resumen de todos los distintos análisis comparados en el Capítulo 6 para evaluar el desempeño del método de optimización estructural con el XFEM desarrollado en esta tesis. La tabla presenta las 16 combinaciones consideradas de metodologías de análisis estructural, presencia o no de suavizado de la función de nivel y métodos de modificación de la malla durante el proceso de optimización estructural. Además, la Tabla 5.1 es utilizada en el Capítulo 6 para facilitar la identificación de las distintas combinaciones según su primer columna.

5.6.2. Criterios de comparación de métodos

Para comparar los métodos presentados en la Tabla 5.1 se consideraron varios criterios: costo computacional, suavidad de la geometría final, porcentaje de zonas grises, complejidad estructural, complacencia final y, en el caso que se controlen las máximas tensiones, tensión máxima alcanzada. En los siguientes párrafos se presenta cada uno de estos criterios y cómo se los midió.

El costo computacional se analizó en base a dos medidas: el tiempo de ejecución y la memoria requerida por el método. Ambos se midieron empleando la función `profile` de MATLAB® con la opción de registrar memoria. En la mayoría de los casos se realizaron diez pruebas por método, a menos que el tiempo de ejecución fuera mayor a una hora, buscando que las condiciones iniciales del computador fueran las más similares posibles. Para esto último, todas las pruebas de medición de costo computacional se hicieron tras

Tabla 5.1: Resumen de los métodos comparados en el Capítulo 6

Id.	Método de análisis	Observaciones
A	XFEM de aristas	Con suavizado
B	XFEM de Moës et al. (2003)	Con suavizado
C	XFEM de aristas	Sin suavizado
D	XFEM de Moës et al. (2003)	Sin suavizado
E	FEM	Sin remallado
FLA	FEM	Refinamiento global c/ actualización LA
F1	FEM	1 refinamiento global al final
F2	FEM	2 refinamientos globales al final
F3	FEM	3 refinamientos globales al final
GLA	FEM	Refinamiento local c/ actualización LA
G1	FEM	1 refinamiento local al final
G2	FEM	2 refinamientos locales al final
G3	FEM	3 refinamientos locales al final
H	FEM	Remallado Cortellessa et al. (2023)
I	FEM	Remallado Cui et al. (2023)
J	FEM	Remallado Li et al. (2021)

reiniciar el computador y ejecutando únicamente la aplicación de MATLAB®. Además, tras lo recomendado por Roberson (2012), se decidió incorporar un calentamiento al código, ejecutando una iteración del método en un caso con interfases, previo a la medición. Se destaca que en las pruebas en las que se midió costo computacional, se retiró del código la opción de generación de figuras y guardado de resultados intermedios y se descartaron todas aquellas pruebas en las que la memoria requerida presentara valores atípicos.

La suavidad de la geometría final es el único de los criterios de comparación considerados que fue cualitativo. Este criterio se utilizó fundamentalmente para comparar los resultados entre los XFEM con y sin el suavizado de la Sección 5.5, ya que las pruebas sin suavizado son potencialmente menos costosas computacionalmente. Se consideraron cuatro categorías distintas, en base a la similitud con las geometrías de la barra genérica de la Figura 5.17, suave (Figura 5.17a), levemente rugosa (Figura 5.17b), rugosa (Figura 5.17c) y muy rugosa (Figura 5.17d).

El porcentaje de zonas grises se define para el FEM como el área de los elementos con $0 < \rho < 1$ respecto al área total. Esta medida se empleó para penalizar los casos de FEM en los cuales el método habilitó muchas zonas con densidades intermedias, puesto que estas zonas son de difícil interpretación al momento de manufactura de las geometrías obtenidas. En el caso de las

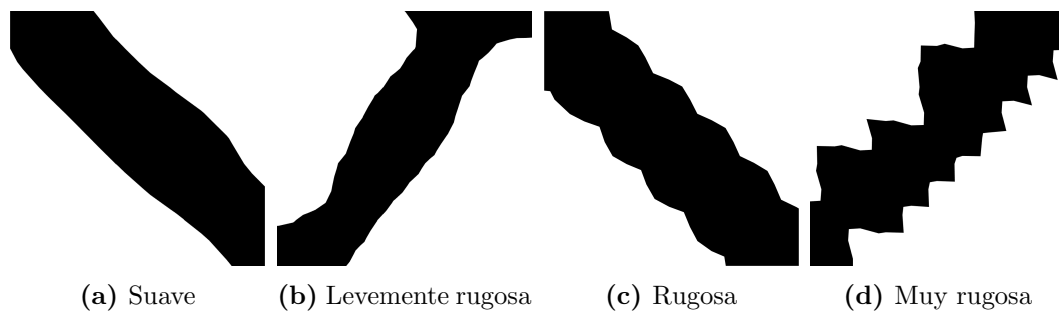


Figura 5.17: Ejemplos de una barra genérica para el criterio de suavidad

pruebas con XFEM, el porcentaje de zonas grises es nulo, ya que las interfases son representadas explícitamente.

La complejidad estructural es otro de los parámetros que se analizó y se la midió como el número de huecos presentes en la geometría final. Valores reducidos de complejidad estructural no fueron considerados problemáticos pero sí valores que fueran atípicos para cada problema particular.

La complacencia final es utilizada para analizar la eficacia de la optimización estructural para cada método. Para ello se midió la complacencia con el XFEM de Moës et al. (2003) para los métodos B y D de la Tabla 5.1 y con el FEM para los casos E a J, y se midió para todos los casos con el XFEM de aristas extendidas presentado en el Capítulo 4. El motivo de la segunda medida es que el XFEM de aristas extendidas arroja un valor preciso de la complacencia, según se discutió en la Sección 4.2, sin importar el contraste y la presencia de barras finas, mientras que el XFEM de Moës et al. (2003) puede arrojar valores extraños según se discutió en la Sección 4.1 y el FEM puede falsear los resultados si hay zonas grises de magnitud importante. Por lo tanto, la medida con el método de análisis utilizado en la optimización es para evaluar la eficacia de la optimización y la medida con el XFEM de aristas extendidas es para evaluar la verdadera complacencia de las geometrías optimizadas.

Finalmente, la tensión máxima alcanzada, utilizada para analizar la eficacia del control de máximas tensiones en los casos que se aplicó, se midió utilizando el FEM en una malla conforme a las interfases obtenidas por los distintos métodos. En el caso de los resultados obtenidos con XFEM, donde las interfases se representan explícitamente, las mallas de FEM conformes utilizadas para el cálculo de la tensión se crearon como mallas no estructuradas que utilizan las interfases calculadas por el XFEM como borde. Por otro lado, en el caso de los resultados obtenidos con FEM, donde las interfases no se representaron

explícitamente y pueden darse zonas grises, se consideró que las mallas de FEM para el cálculo de la tensión fueran mallas que solamente representaran las zonas con $\rho > 0$. Luego, en los elementos de las nuevas mallas se interpoló ρ y se utilizó en cada elemento $E = \rho E_M$. Nótese que en las mallas para medición de la tensión no se modeló la fracción ocupada por el material blando que representa los vacíos.

Para la medición de la tensión máxima alcanzada, se utilizaron en todos los casos dos mallas de elementos finitos, una malla de tamaño de elemento similar al empleado en la optimización estructural y una malla de tamaño de elemento 16 veces más chica que la considerada como malla inicial para las pruebas con el XFEM. La malla más fina se utilizó para medir las máximas tensiones con precisión. Por otro lado, la malla más gruesa se utilizó para corroborar, en caso de que la malla fina arrojara tensiones elevadas, si el motivo de la limitación insuficiente de las máximas tensiones se asoció a deficiencias en la optimización estructural o a falta de un nivel de discretización suficiente. Nótese que siempre que se presenta la tensión máxima alcanzada se hace referencia a la tensión máxima en D_S , no considerándose las zonas donde no se controló la tensión máxima.

Capítulo 6

Resultados numéricos

En este capítulo se presentan los resultados de tres ejemplos resueltos con el método presentado en el Capítulo 5. Los ejemplos cumplen el rol de casos de estudio donde se analiza la validez y la sensibilidad a parámetros del código desarrollado, junto con la comparación del desempeño obtenido por el método propuesto en la Sección 5.4 (que utiliza el método de análisis XFEM presentado en la Sección 4.2), y por otras variantes del método de Amstutz y Andrä (2006), discutidos en detalle en el Sección 5.6, que utilizan el FEM.

En todos los ejemplos, salvo que se indique lo contrario, se considera un módulo de Young para el material estructural $E_M = 1$, un módulo de Young para el material que simula los vacíos $E_V = 10^{-3}$ y un coeficiente de Poisson para ambos materiales $\nu = 0,3$. Además, en todos los casos en los que se mencione el XFEM, a menos que se indique lo contrario, se hace referencia a la propuesta de XFEM desarrollada para esta tesis en el Capítulo 4.

Para las corridas del código en las que se presentan tiempos de cómputo, se utilizó una Laptop con un procesador AMD Ryzen 7 3750H de 2,3 GHz y una memoria RAM instalada de 16,0 GB. Además, todas las corridas fueron realizadas en MATLAB® versión R2018b (The MathWorks Inc., 2018). Para caracterizar la velocidad del computador utilizado se utilizó la función **bench** de MATLAB®, la cual hace seis pruebas estandarizadas y mide el tiempo de ejecución de cada una. En la Tabla 6.1 se presentan los resultados promedio de 100 pruebas de la función **bench**, donde los nombres de las pruebas son los que utiliza la función, las cuales fueron hechas bajo las mismas condiciones consideradas para las pruebas de comparación de tiempo según se discutió en la Sección 5.6 y con la Laptop anteriormente mencionada.

Tabla 6.1: Tiempos de ejecución promedio de cien pruebas de la función **bench**

Prueba	Tiempo de ejecución (s)
Prueba 1 (LU)	0,3291
Prueba 2 (FFT)	0,1350
Prueba 3 (ODE)	0,0182
Prueba 4 (Sparse)	0,1491
Prueba 5 (2-D)	0,4382
Prueba 6 (3-D)	0,6473

6.1. Ejemplo 1: Ménsula

El primer ejemplo está asociado a la estructura que se presenta en la Figura 6.1. Esta estructura es una ménsula cuya configuración inicial Ω_0 y dominio D se encuentran materializados por un rectángulo de largo 2 y alto 1. Se consideró que en la cara izquierda el desplazamiento es nulo en ambas direcciones y en el medio de la cara derecha se aplicó una carga vertical descendente de valor 1. Se consideró que la estructura se encuentra en un estado plano de tensiones.



Figura 6.1: Dominio y condiciones iniciales del primer ejemplo

Este ejemplo es muy utilizado en la bibliografía (*e.g.* Abdi et al. 2014; Amstutz y Andrä, 2006; Gangl, 2020; Liu et al. 2016; Romero Onco y Giusti, 2020) para validar métodos de optimización topológica por lo que es de gran interés considerarlo en esta tesis. En este ejemplo inicial no se limitan las tensiones, lo que permite hacer un primer análisis del trabajo conjunto del XFEM con la DT en métodos de optimización estructural para el problema más sencillo de minimizar la complacencia.

6.1.1. Caso de base

Se hizo un primer caso de base a partir del cual se hicieron los consecuentes análisis de sensibilidad a los parámetros del método de optimización estructural. En este ejemplo se utilizó una malla estructurada regular, con 100 divisiones en la dirección horizontal y 50 divisiones en la dirección vertical, totalizando en 5151 nodos y 10000 elementos triangulares. La malla, presentada en la Figura 6.2, es simétrica respecto a un eje horizontal ubicado a mitad de altura pues, por la simetría de condiciones de borde y antisimetría de cargas, se esperaba una geometría optimizada simétrica respecto a dicho eje. Lo anterior es válido por el hecho que los materiales considerados no presentan diferencias en el comportamiento a tracción y compresión.

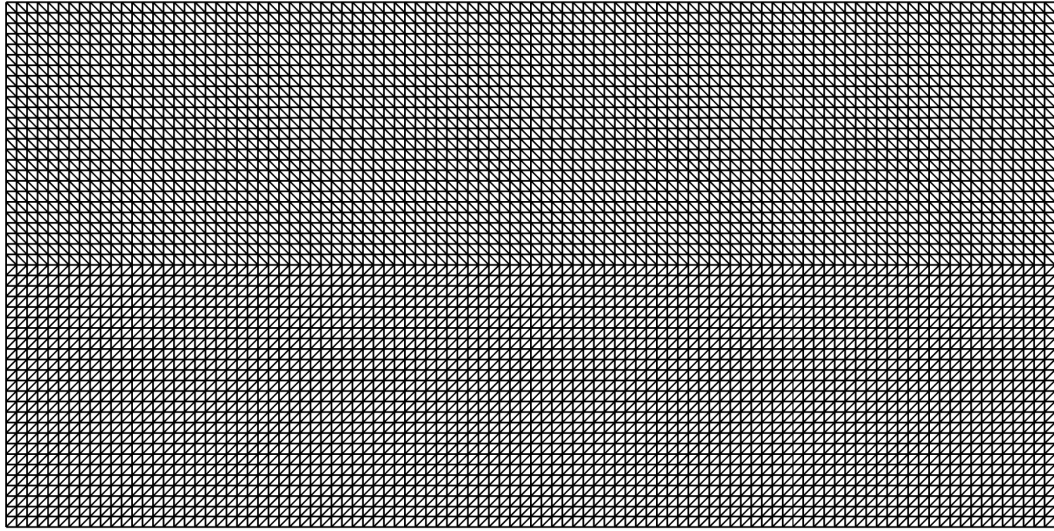


Figura 6.2: Malla considerada para el caso base del primer ejemplo

Para el caso base se consideró un área objetivo del 50 % ($M = 0,5$) con una tolerancia $\mathbf{T}_M = 1$ %, un coeficiente inicial de penalidad cuadrática del LA $c_0 = 16$, un cambio mínimo de área como criterio de optimalidad $\Delta_{|\Omega|}^* = 1,5$ %, un cambio máximo de área por iteración $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}} = 100$ %, un máximo de subiteraciones de la búsqueda lineal $\text{SIT}_{\text{máx}} = 10$, un coeficiente de penalidad del funcional de tensiones $\alpha = 0$ (no se limitaron las tensiones), un coeficiente de suavizado inicial $\varsigma_0 = 0,65$ y un coeficiente de decaimiento del suavizado $\varrho_\varsigma = 1,2$. Con los anteriores parámetros el método convergió en 19 iteraciones y obtuvo la estructura optimizada de la Figura 6.3, la cual es consistente con los resultados esperados de la bibliografía.

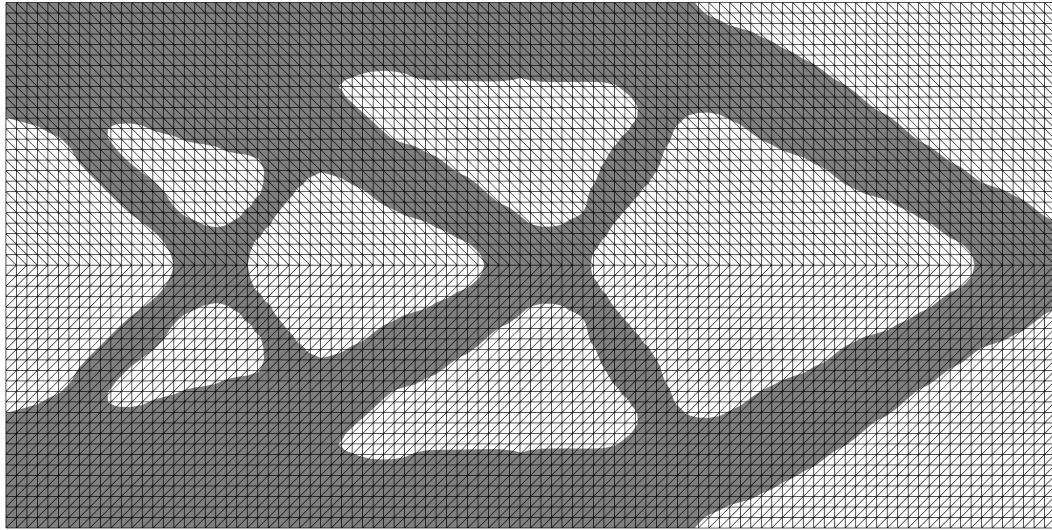


Figura 6.3: Estructura final optimizada del caso base del primer ejemplo

En la Figura 6.3 se presenta claramente la ventaja del XFEM para poder representar contornos oblicuos en la malla de elementos finitos sin la necesidad de remallar o agregar nuevos nodos. Además el uso del XFEM permitió cierta suavidad en la geometría de los huecos generados y se perciben bordes curvos, con mayor curvatura en la unión entre las distintas partes de la estructura. Lo anterior se percibe fundamentalmente en el punto medio de la cruz ubicada más cerca del apoyo. De todas formas, se aprecia alguna rugosidad en el resultado final por lo cual la solución obtenida podría no ser adecuada como producto final a construir, aunque sí ser insumo para métodos de optimización de forma.

Un resultado de interés se presenta en la Figura 6.4, en la cual se presentan las tensiones equivalentes de von Mises en la estructura final del caso base. Se utilizaron las tensiones de von Mises como una medida de la magnitud de la tensión en la estructura. Se obtiene que la geometría optimizada es una en la cual se tiende a uniformizar la magnitud de la tensión. Lo anterior es en lo que se basa el método de optimización estructural propuesto por Abdi et al. (2014), lo cual lo hacía un buen método heurístico de optimización pero con la dificultad de una necesidad elevada de iteraciones. Los puntos donde la tensión crece respecto a los valores medios son en los encuentros entre los elementos de la estructura, la zona cercana a los apoyos, en la cual existe una restricción geométrica que no le permite a la estructura existir más allá del rectángulo inicial, y el punto de aplicación de la carga concentrada donde se alcanzó el valor máximo de 30,88.

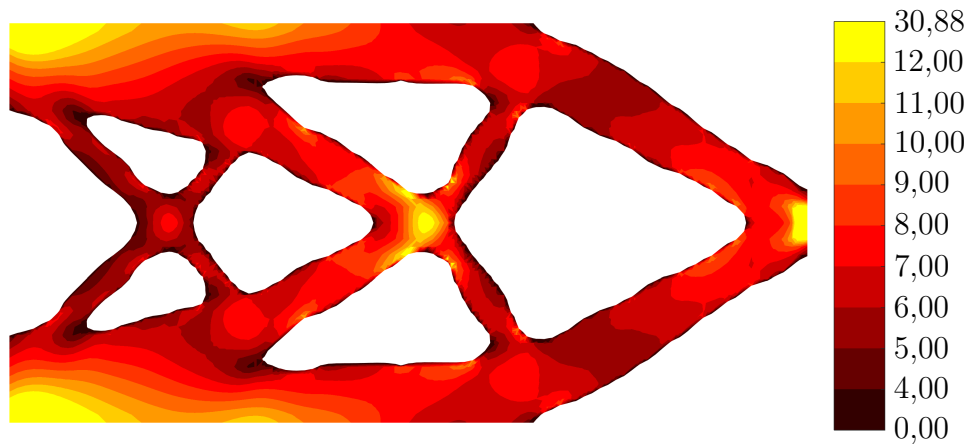


Figura 6.4: Tensiones de von Mises en el resultado del caso base del primer ejemplo

En la Figura 6.5 se presenta en formato tridimensional la función de nivel obtenida al final de las iteraciones. Se ve que en el método de optimización en base a la derivada topológica las zonas de los vacíos tienden a quedar con funciones de nivel uniformes y negativas. Por otro lado, las zonas de función de nivel positivo sí presentan variación punto a punto. Resulta de especial interés notar que la forma de la función de nivel final posee cierta similitud con la distribución espacial presentada de las tensiones de von Mises.

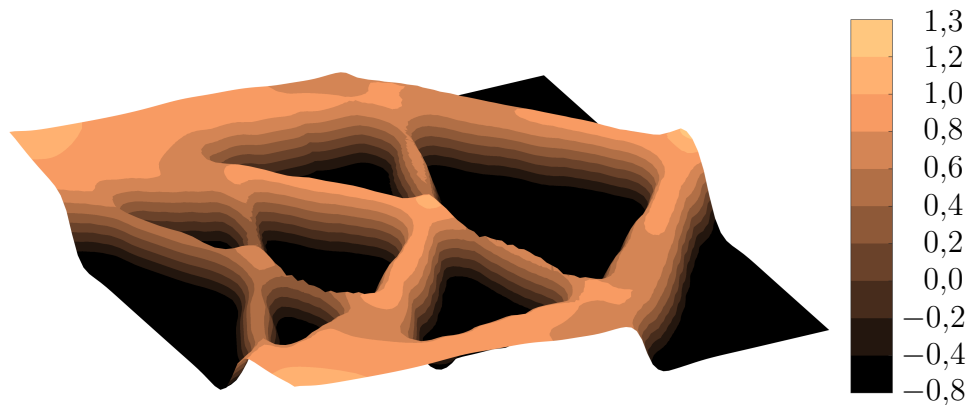


Figura 6.5: Función de nivel en el resultado del caso base del primer ejemplo

En la Figura 6.6 se presentan las geometrías obtenidas en iteraciones intermedias a modo de animación del método. En primer lugar, se muestra en la Figura 6.6a como los primeros grandes huecos se generaron en las esquinas del lado derecho del rectángulo inicial, zonas que intuitivamente aportan la menor rigidez a la estructura. En las sucesivas iteraciones se nota como el método es capaz de generar nuevos huecos hasta llegar a un límite, dado por la resolución de la malla de elementos finitos y el aporte de rigidez de las distintas

partes de la estructura, a partir del cual se comienzan a unir huecos. Luego de unidos algunos huecos el método es capaz de eliminar algunas componentes de la estructura y engrosar otras como muestran las Figuras 6.6f y 6.6g, lo que destaca la importancia de haber modelado la parte de los vacíos como un material blando. Finalmente, al comparar la Figura 6.6h con el resultado final de la Figura 6.3 se nota la posibilidad de existencia de iteraciones relacionadas con la regularización de la solución final.

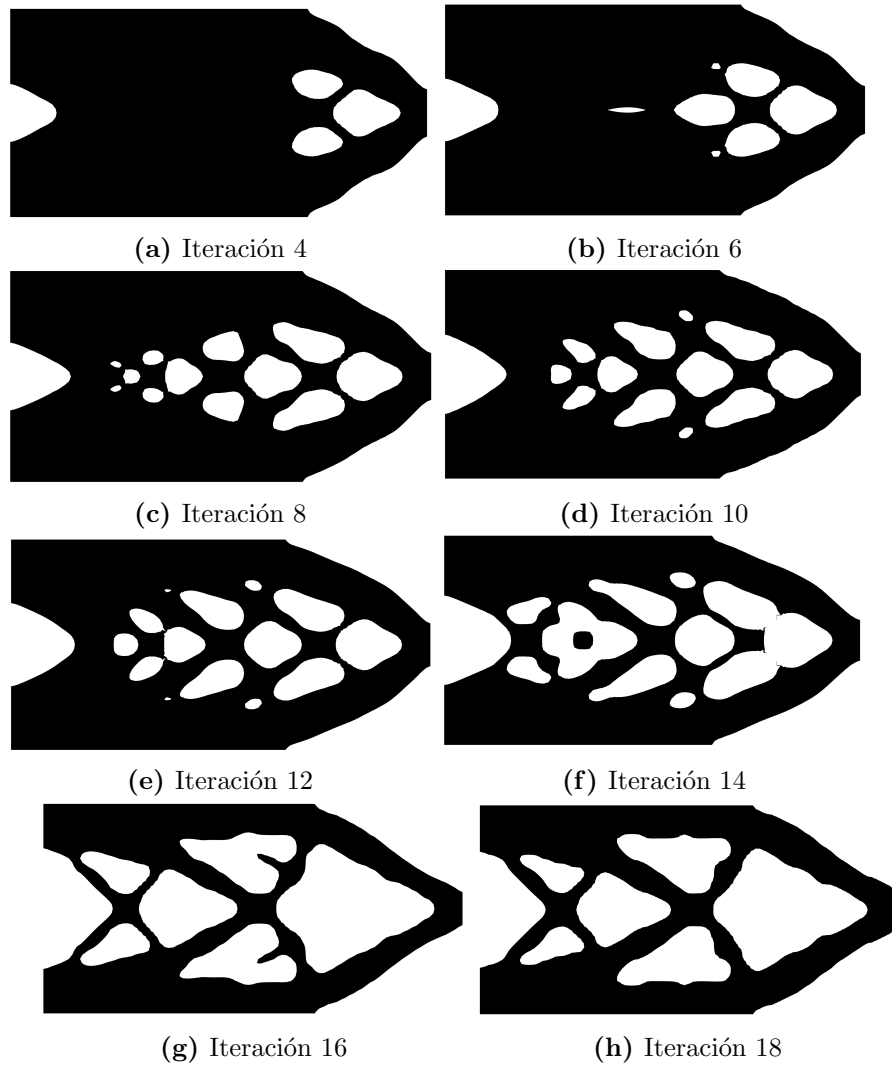
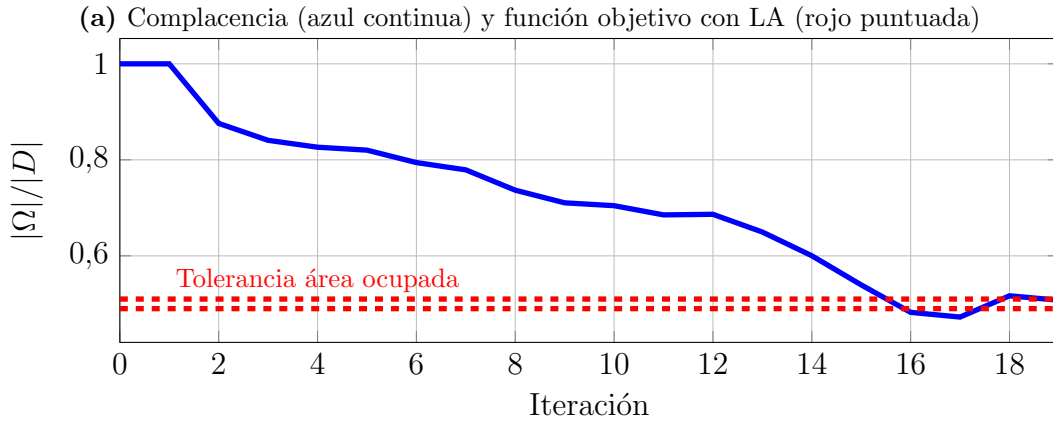
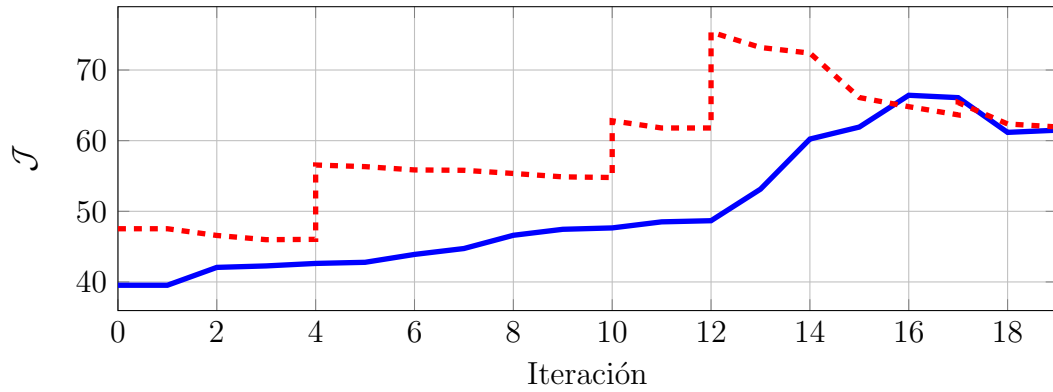


Figura 6.6: Resultados intermedios para el caso base del primer ejemplo

Para complementar el análisis anterior se presenta en la Figura 6.7 el comportamiento en función del número de iteración de los distintos funcionales del problema de optimización estructural. En primer lugar, en la Figura 6.7a se presenta $\mathcal{J}$, que en este ejemplo coincide con la complacencia, y $\mathcal{J}^{\text{LA}}$. Como se

esperaba, a medida que el área ocupada por la estructura disminuye, crece la complacencia pero de forma controlada asegurando un decrecimiento de $\mathcal{J}^{\text{LA}}$. Los saltos en la función $\mathcal{J}^{\text{LA}}$ se deben a actualizaciones del multiplicador de Lagrange entre iteraciones. Por otra parte, en la Figura 6.7b se presenta la convergencia del área ocupada por la estructura, donde las líneas punteadas rojas representan la tolerancia dada para el valor final. Se obtiene que el método converge rápidamente al valor de área buscado, similar al método de Wang et al. (2004) pero con un mayor control en la remoción y posible re-agregado de material. Finalmente, se nota que se podrían hacer algunas iteraciones adicionales para mejorar el resultado pero que dicha mejora no sería significativa.



(b) Área ocupada por la estructura respecto al área total

Figura 6.7: Avances de las componentes del LA en el caso base del primer ejemplo

Finalmente, en las Figuras 6.8 y 6.9 se comparan mapas de los valores de la DT de la complacencia y de las tensiones de von Mises para la primera y décima iteración, respectivamente. De estos gráficos se obtiene que, si bien los

valores numéricos difieren, las distribuciones espaciales de D_TW^e y de σ_{VM} son muy similares. Lo anterior refuerza lo ya discutido de que las tensiones de von Mises son un buen indicador del desempeño estructural punto a punto. De todas formas, se obtiene que la DT es superior ya que da una indicación clara en base al método de Amstutz y Andrä (2006) en qué puntos se debe modificar el material, en tanto que la tensión de von Mises requiere definir un umbral en cada iteración (Abdi et al. 2014). Como punto adicional, en los ejemplos siguientes, presentados en las Secciones 6.2 y 6.3, se presentan nuevos casos donde la tensión de von Mises no sería suficiente como criterio de optimización estructural.

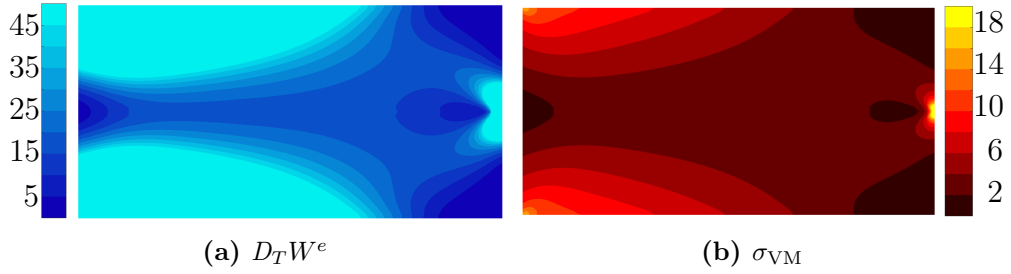


Figura 6.8: DT de la complacencia y tensiones de von Mises para la primera iteración

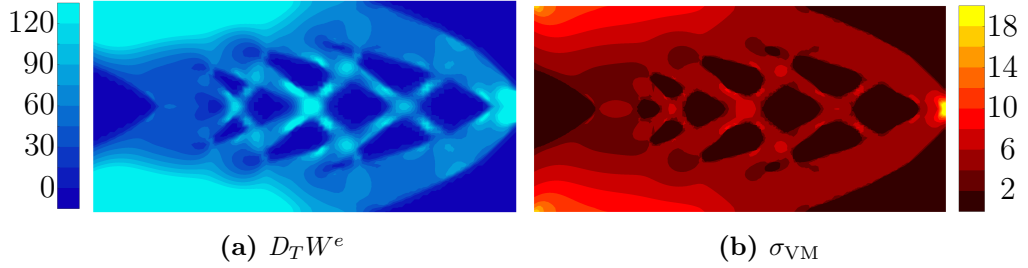


Figura 6.9: DT de la complacencia y tensiones de von Mises para la décima iteración

6.1.2. Análisis de decisiones algorítmicas

En el desarrollo del método de optimización estructural se tomaron varias decisiones, según se discutieron en el Capítulo 5. A continuación se analizan y justifican algunas de estas decisiones utilizando la ménsula como caso de estudio. En particular se analiza la conveniencia de emplear mallas simétricas en problemas intrínsecamente simétricos, la necesidad del algoritmo de suavizado de la función de nivel y el uso del promedio en base a la función de

interpolación N en el cálculo de la DT nodal. Adicionalmente, se presenta al final de esta sección un caso en el cual el contraste entre los dos materiales fue reducido para mostrar que el método es general para cualquier contraste.

6.1.2.1. Simetría de la malla

En primer lugar, se analiza la conveniencia de usar mallas simétricas en problemas intrínsecamente simétricos. Para cumplir dicho objetivo se repitió el caso de base, con los mismos parámetros empleados originalmente, pero utilizando una malla equivalente a la de la Figura 6.2 sin la simetría aplicada. En este caso el método convergió en 18 iteraciones y se obtuvo la estructura optimizada de la Figura 6.10. Se tiene que la estructura obtenida no es simétrica como sí se obtuvo cuando se utilizó una malla simétrica.

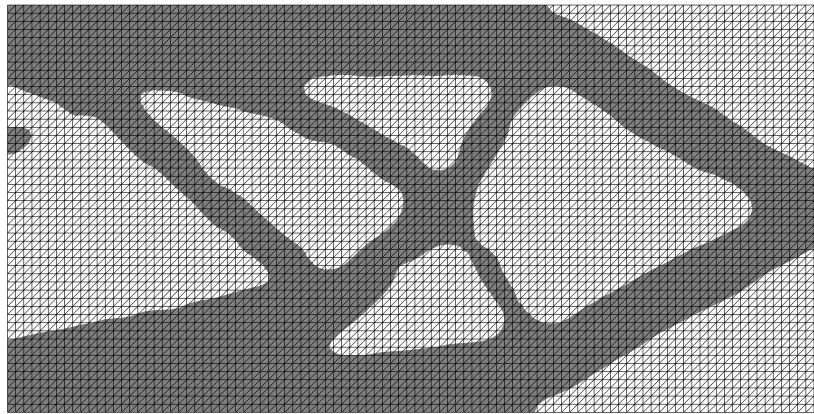


Figura 6.10: Estructura obtenida en el primer ejemplo en caso usar una malla no simétrica

El motivo de la no simetría del resultado final radica en la propagación de no simetrías en el cálculo de la DT. En la Figura 6.11 se presenta, para la primera iteración (estructura sin vacíos), los valores de la DT nodal en una transecta ubicada en $x = 1,8$ para los casos de malla simétrica (curva azul continua) y no simétrica (curva roja discontinua). El gráfico se muestra dividido en la abscisa 0,5, donde el cuadro izquierdo muestra los valores calculados de la DT nodal para las distintas coordenadas verticales y el cuadro derecho muestra la diferencia obtenida entre dos valores que deberían ser simétricos. A modo de ejemplo, el valor presentado para la coordenada vertical $y = 0,8$ es la diferencia entre la DT nodal de $y = 0,8$ y la de $y = 0,2$.

En el cuadro izquierdo de la Figura 6.11 se presenta que las diferencias entre los cálculos de la malla simétrica y no simétrica son muy pequeños. Además

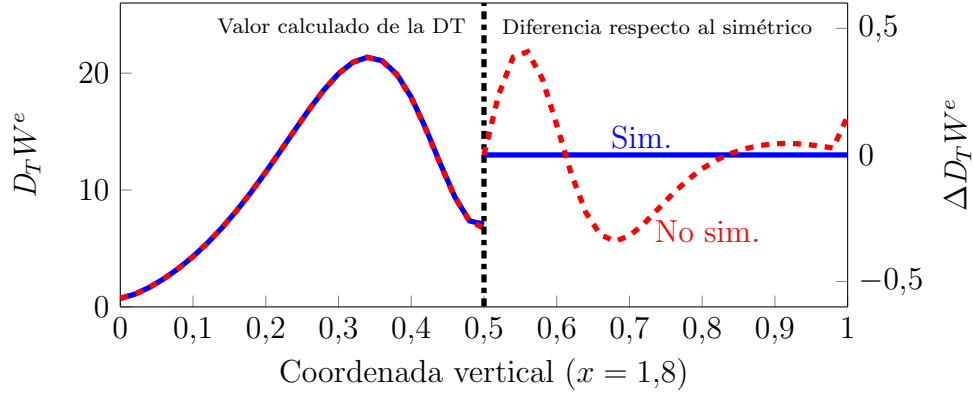


Figura 6.11: No simetría de la DT nodal que induce pérdida de simetría en la geometría final

se presenta en el cuadro de la derecha que la malla simétrica no presenta diferencias en el cálculo de la DT para los nodos que deberían ser simétricos. Por otra parte, la malla no simétrica sí presenta diferencias en dichos nodos que son del orden del 5 % de los valores de la DT (nótese que el gráfico a la derecha las diferencias están representadas en otra escala). El motivo detrás de esta diferencia se asocia por un lado a leves diferencias en la resolución del problema plano de elasticidad lineal por la no simetría de los elementos finitos y por el otro a diferencias en el dominio de integración para el cálculo de la DT nodal. De todas formas, si se hubiera calculado la DT como el valor en el nodo, promediado entre los distintos elementos, el problema se hubiera mantenido, puesto que las zonas a promediar también serían diferentes.

Se destaca que en trabajos previos en los que se utilizó la DT con el algoritmo de Amstutz y Andrä (2006), según se analizó en el Capítulo 3, no se identificaron menciones de la conveniencia del uso de mallas simétricas. Lo anterior probablemente se deba a que, al utilizarse el FEM con el método de densidad por elemento y no poder representar una geometría exacta sin remallar, las diferencias en la simetría de la DT no generarían geometrías sensiblemente distintas que luego se propagaran a una no simetría en la estructura final.

6.1.2.2. Algoritmo de suavizado

Para verificar la necesidad del algoritmo de suavizado, según se adelantó en el Sección 5.5, se realizaron dos pruebas numéricas, ambas con idénticos parámetros que el caso base salvo que se consideró un parámetro de suavizado

$\varsigma_0 = 0$. Una de las pruebas se hizo con la misma malla estructurada de la Figura 6.2. La otra prueba se realizó con una malla no estructurada, de 5309 nodos y 10318 elementos, para mostrar que el empleo de mallas no estructuradas no evita la necesidad del suavizado. En la Figura 6.12 se presentan las geometrías obtenidas de ambas pruebas. En la Figura 6.12a se observan grandes rugosidades de la geometría obtenida. Por otro lado, la Figura 6.12b muestra un mejor resultado, pero igual las rugosidades de la geometría son muy importantes.

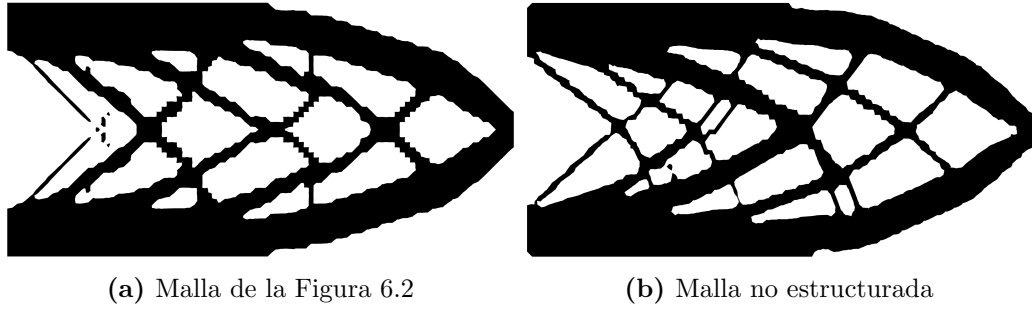


Figura 6.12: Estructuras obtenidas en el primer ejemplo en caso de no usar algoritmos de suavizado

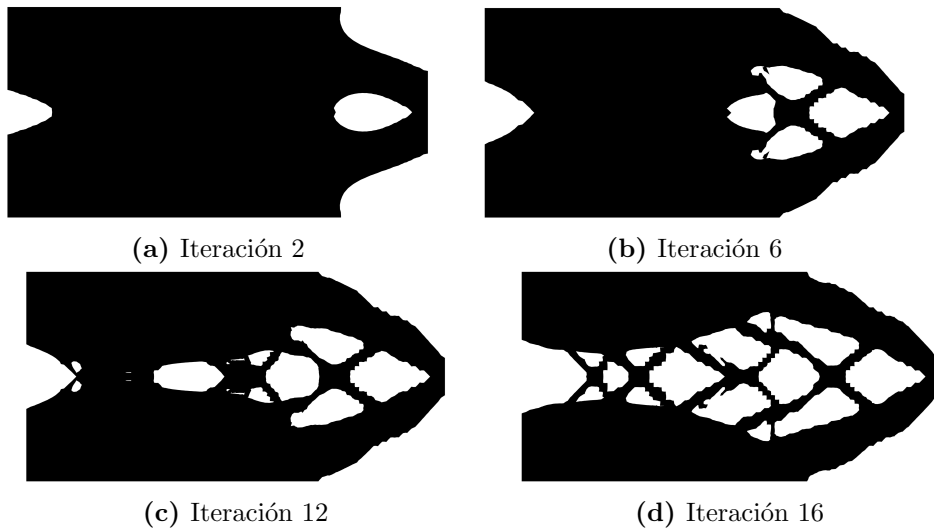


Figura 6.13: Resultados intermedios para el caso de la Figura 6.12a

En la Figura 6.13 se presentan las geometrías obtenidas en iteraciones intermedias para el caso de la malla estructurada. La Figura 6.13a muestra que los primeros pasos del método de optimización estructural, en el cual se crean nuevos huecos, la geometría es bastante suave. Luego las Figuras 6.13b a 6.13d presentan que, como se había adelantado en la Sección 5.5, a medida que

avanza el algoritmo de optimización las rugosidades se hacen cada vez más importantes.

De las anteriores figuras se confirma lo predicho en el Capítulo 5 de que el suavizado de la función de nivel es un paso necesario para el método de optimización estructural desarrollado en esta tesis.

6.1.2.3. Método de cálculo de la DT nodal

Para analizar las diferencias entre los métodos de cálculo de la DT nodal se hicieron pruebas calculando la DT como el promedio de los valores en el nodo de los distintos elementos. En particular, en la Figura 6.14 se presentan las geometrías obtenidas de utilizar los mismos parámetros que para el caso de base, salvo que el valor inicial del coeficiente de penalidad cuadrática del LA se tomó $c = 12$. La geometría obtenida en la Figura 6.14a muestra que ambos métodos de cálculo permiten obtener muy buenos resultados si se utiliza un algoritmo de suavizado. Por su parte, la geometría obtenida en la Figura 6.14b, al compararla con la Figura 6.12a, muestra que, sin suavizado, los resultados del método de cálculo de la DT nodal según la Ecuación (5.42) pueden ser menos rugosos.

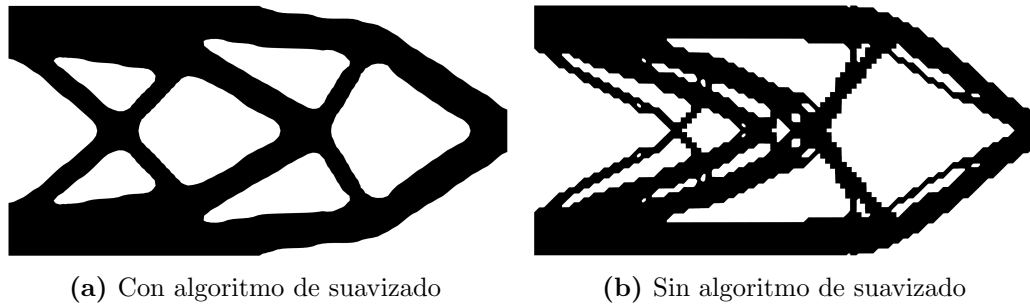


Figura 6.14: Estructuras obtenidas en el primer ejemplo en caso de calcular la DT como el promedio de los valores nodales

De la Figura 6.14 se obtuvo que el uso de la Ecuación (5.42) para el cálculo de la DT nodal no es imperativo para obtener buenos resultados sino que se pueden obtener por cualquiera de los dos métodos discutidos. De todas formas, se hace mención al hecho que las pruebas utilizando la Ecuación (5.42) han otorgado, en términos generales, mejores convergencias y resultados que el método de cálculo que utiliza el promedio de los valores elementales en el nodo.

6.1.2.4. Solución con contraste reducido

Según se discutió en el Capítulo 5, específicamente al final de la Sección 5.1, el método desarrollado en esta tesis es general para cualquier contraste; si bien en la mayoría de los ejemplos se consideró un contraste elevado entre los dos materiales de forma tal de modelar un único material y vacíos. En esta sección se presenta un ejemplo en el cual se consideraron los mismos parámetros del caso base, pero se consideró $E_V = 0,2$, es decir un material apenas cinco veces menos rígido que el material principal. Nótese que en este problema la restricción del área a ocupar sigue siendo que el material más rígido ocupe el 50 % del área disponible. Este ejemplo representaría un caso de una ménsula que sería conformada por dos materiales, uno más rígido y otro levemente más blando.

En la Figura 6.15 se presenta la geometría obtenida para este caso de análisis, donde el color azul representa el material con $E_M = 1$ y el color naranja el material con $E_V = 0,2$. La figura muestra una geometría en la cual el material más rígido se situó en los principales caminos de carga, junto con dos entradas en el medio para recibir las sollicitaciones de cortante. Este resultado fue el esperado en base a otros artículos de la bibliografía en los que se utilizaron contrastes bajos (*e.g.* Chroni et al. 2024), lo que confirma que el método desarrollado es extensible a contrastes bajos entre los dos materiales.

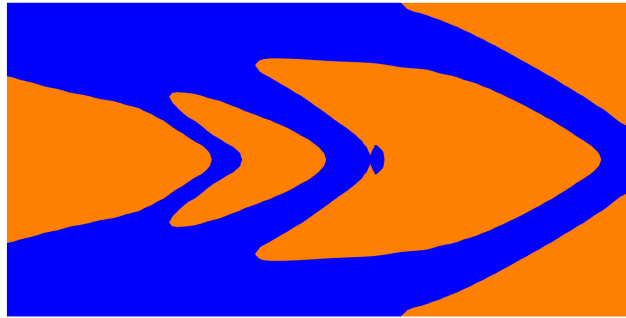


Figura 6.15: Geometría optimizada en el primer ejemplo en caso de usar $E_V = 0,2$

6.1.3. Análisis de sensibilidad

El método de optimización estructural descrito en el Capítulo 5 utiliza numerosos parámetros de entrada. A continuación se analiza la sensibilidad a dichos parámetros, comenzando con la sensibilidad al tamaño de malla y a la fracción objetivo del área ocupable.

6.1.3.1. Sensibilidad al tamaño de malla y a la fracción objetivo del área ocupable

El análisis de sensibilidad al tamaño de malla y a la fracción objetivo del área ocupable se realizaron juntos puesto que son dos entradas del método que están muy relacionadas entre sí, como se discute a continuación. Se consideraron cinco tamaños de malla, los cuales se denominan: muy fino, fino, base, grueso y muy grueso. La malla de tamaño base fue la considerada en el caso de base (ver la Figura 6.2), mientras que el resto son mallas estructuradas que surgieron de aumentar, o disminuir, la cantidad de divisiones en ambos ejes. La Tabla 6.2 presenta las principales características de dichas mallas. Luego, se consideraron cinco objetivos de área ocupable desde $M = 0,3$ hasta $M = 0,7$ con un paso de 0,1. En total se consideraron 25 pruebas para este análisis de sensibilidad.

Tabla 6.2: Características de las mallas que se consideraron para las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla del primer ejemplo

Malla	Div. según hor.	Div. según vert.	$\mathcal{N}_{no}$	$\mathcal{N}_{el}$
Muy fina	400	200	80601	160000
Fina	200	100	20301	40000
Base	100	50	5151	10000
Gruesa	52	26	1431	2704
Muy gruesa	24	12	325	576

Para las pruebas se consideraron los mismos valores de los parámetros de entrada del método de optimización estructural, salvo el valor inicial de c y ς_0 , los cuales se consideraron según presenta la Tabla 6.3. Se procuró, en la medida de lo posible, que pruebas con igual malla mantuvieran el mismo ς_0 y pruebas con igual objetivo del área ocupable mantuvieran el mismo c . Se hace notar que las pruebas con la malla más gruesa no generaron buenos resultados a menos que el coeficiente de suavizado fuera nulo.

En la Figura 6.16 se presentan los resultados para las 25 pruebas anteriormente descritas. En primer lugar, como muestran las Figuras 6.16d y 6.16e, se tiene que para objetivos bajos del área ocupable, las mallas gruesas no permiten obtener resultados aceptables. Por otra parte, el resto de las figuras muestran que los resultados son, en términos generales, muy buenos, puesto que se obtuvieron geometrías muy similares a las presentadas en otros artículos de la bibliografía. Se destaca que la malla base y la malla gruesa son mallas

Tabla 6.3: Parámetros c y ς_0 empleados en las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla y M del primer ejemplo

Malla		Fracción objetivo del área ocupada				
		$M = 0,3$	$M = 0,4$	$M = 0,5$	$M = 0,6$	$M = 0,7$
Muy fina	c	8,0	11,0	16,0	18,5	21,0
	ς_0	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85
Fina	c	8,0	11,0	16,0	18,5	21,0
	ς_0	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65
Base	c	8,0	11,0	16,0	18,5	21,0
	ς_0	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65
Gruesa	c	8,0	11,0	16,0	18,5	21,0
	ς_0	0,05	0,15	0,25	0,20	0,25
Muy gruesa	c	8,0	11,0	16,0	18,5	21,0
	ς_0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

relativamente gruesas, puesto que por ejemplo Gangl (2020) y Romero Onco y Giusti (2020) consideraron mallas de aproximadamente 30000 elementos para este problema, y a pesar de serlo obtuvieron buenos resultados. Por otra parte, se hace notar que en algunas de las pruebas, por ejemplo la de la Figura 6.16o, se obtuvieron componentes extraños, como por ejemplo partes flotantes. Lo anterior muestra que el criterio de optimalidad considerado, si bien en la mayoría de las pruebas otorgó buenos resultados, no es infalible y en algunos casos será necesario aplicar alguna técnica de postprocesamiento.

Si se recorre la Figura 6.16 en dirección horizontal, se observa que a mayor finura de la malla mayor es el número de huecos que se obtuvieron. Lo anterior es consistente con el hecho que con tamaños de elementos menores se pueden obtener componentes estructurales de menor ancho. Nótese que a pesar de la capacidad del XFEM de lograr representar geometrías no necesariamente conformes a la malla, la presencia de componentes de pequeño ancho es dificultosa puesto que en un elemento finito no puede haber más de una única interfase. Finalmente, si se recorre la figura en dirección vertical, se observa que a menor objetivo del área ocupable, menor es la cantidad de huecos. Lo anterior es también consistente con el análisis de la dificultad de obtener componentes de pequeño ancho, y además se relaciona con la necesidad de un mayor espacio ocupado por huecos.

En la Tabla 6.4 se presentan las complacencias finales obtenidas en las 25 pruebas. Para que los resultados sean comparables, todas estas complacencias se calcularon utilizando la malla muy fina, interpolando la función de nivel

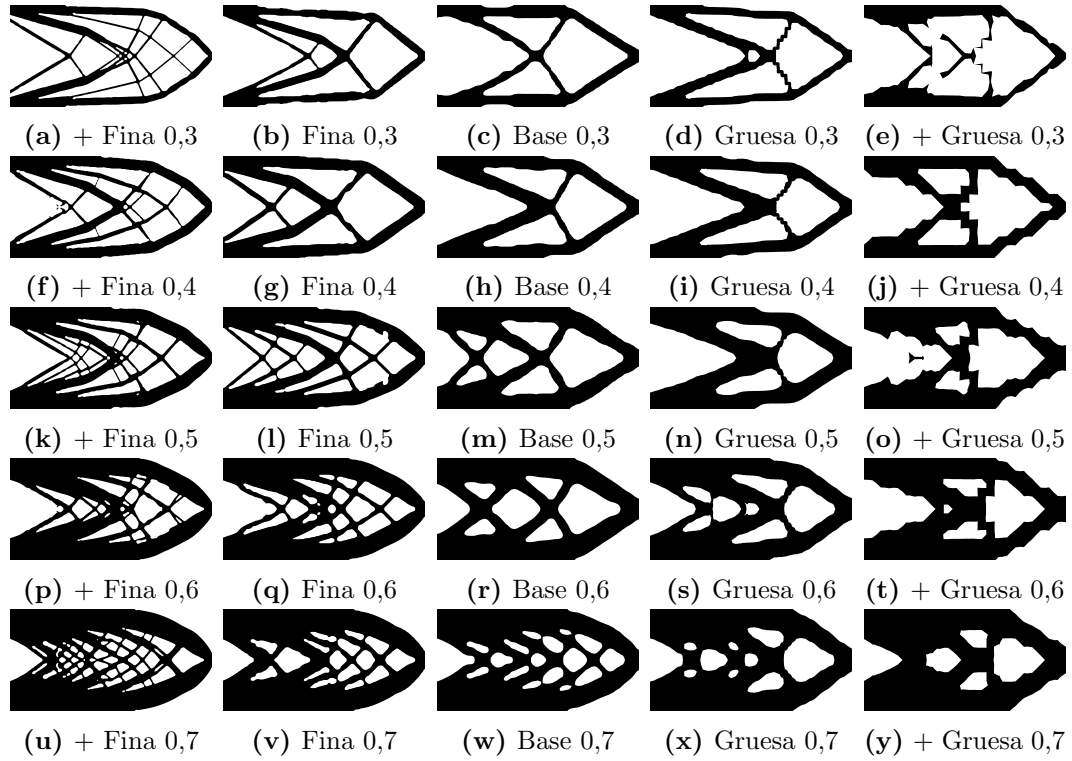


Figura 6.16: Estructuras obtenidas para el primer ejemplo del análisis de sensibilidad al tamaño de malla y objetivo de área ocupable

desde las mallas más gruesas. En primer lugar se destaca que para $M = 0,6$ y para $M = 0,7$, los resultados son muy similares entre sí para todas las mallas. Además, para $M = 0,4$ y para $M = 0,5$ también se da el mismo resultado, salvo para la malla muy gruesa. El único caso en el cual la malla muy fina da resultados apreciablemente mejores que el resto es para $M = 0,3$. Lo anterior muestra que efectivamente el XFEM resultó adecuado para obtener buenos resultados con mallas relativamente gruesas. Por otro lado, se destaca que si bien en el caso $M = 0,3$ la malla muy fina fue la que presentó los mejores resultados, en el caso $M = 0,7$ fue la malla base la que dio el menor valor de complacencia. Los resultados anteriores muestran que para el método desarrollado en esta tesis, no es conveniente emplear mallas excesivamente finas a menos que el objetivo del área a ocupar no sea muy bajo.

Finalmente, en la Tabla 6.5 se presenta el costo computacional de las tres principales tareas del método de optimización estructural, es decir el análisis estructural, el cálculo de la DT de la complacencia y el suavizado de Ψ . Las pruebas se hicieron para las cinco mallas, siempre para las estructuras finales obtenidas con $M = 0,5$. Se ve que para todas las mallas el análisis estructural

Tabla 6.4: Complacencias finales obtenidas en las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla y M para el primer ejemplo

Malla	Complacencia final				
	$M = 0,3$	$M = 0,4$	$M = 0,5$	$M = 0,6$	$M = 0,7$
Muy gruesa	631,96	90,00	78,53	57,86	49,23
Gruesa	106,76	80,28	65,39	55,13	49,41
Base	109,60	76,82	62,62	54,82	48,59
Fina	101,20	76,52	64,41	54,14	49,01
Muy fina	95,80	78,67	63,04	53,58	48,88

es la tarea más costosa, tanto desde el punto de vista del tiempo de cómputo como de la memoria requerida. Por otra parte, se tiene que el suavizado en mallas regulares con la técnica de Garcia (2010) es muy poco costoso tanto en tiempo como en memoria. El aumento del costo computacional al aumentar la cantidad de nodos de la malla, refuerza la conclusión del párrafo anterior de que no es conveniente emplear mallas excesivamente finas para los casos en que M no sea muy bajo.

Tabla 6.5: Costo computacional de las distintas tareas, según el tamaño de malla, para el primer ejemplo

Malla	Tareas a analizar					
	Anál. estructural		$D_T W^e$		Suavizado	
	Tiempo (s)	Memoria (MB)	Tiempo (s)	Memoria (MB)	Tiempo (s)	Memoria (MB)
Muy gruesa	0,500	$\leq 0,01$	0,331	$\leq 0,01$	0,071	$\leq 0,01$
Gruesa	1,121	3,42	0,852	$\leq 0,01$	0,066	$\leq 0,01$
Base	2,916	9,86	2,071	$\leq 0,01$	0,068	$\leq 0,01$
Fina	12,358	37,87	8,313	0,50	0,098	$\leq 0,01$
Muy fina	64,312	128,89	29,274	1,03	0,092	1,23

6.1.3.2. Sensibilidad al coeficiente de penalidad cuadrática del LA

Para el análisis de sensibilidad al coeficiente de penalidad cuadrática del LA se consideraron la misma malla y parámetros del caso base, excepto c , el cual se varió. Se hicieron pruebas con valores iniciales del coeficiente de penalidad cuadrática $c = 1$ hasta $c = 30$ con un paso de 1. En total se consideraron 30 pruebas para este análisis de sensibilidad.

En la Figura 6.17 se presentan las geometrías obtenidas para las 30 pruebas de este análisis de sensibilidad. La Figura 6.17g posee una alerta indicada por

el símbolo $\dagger$ en su pie de figura para indicar que el método de optimización estructural no alcanzó la convergencia para dicho caso. En este caso de no convergencia, la geometría presentada es la obtenida en una de las últimas iteraciones previo a cortar forzosamente el método.

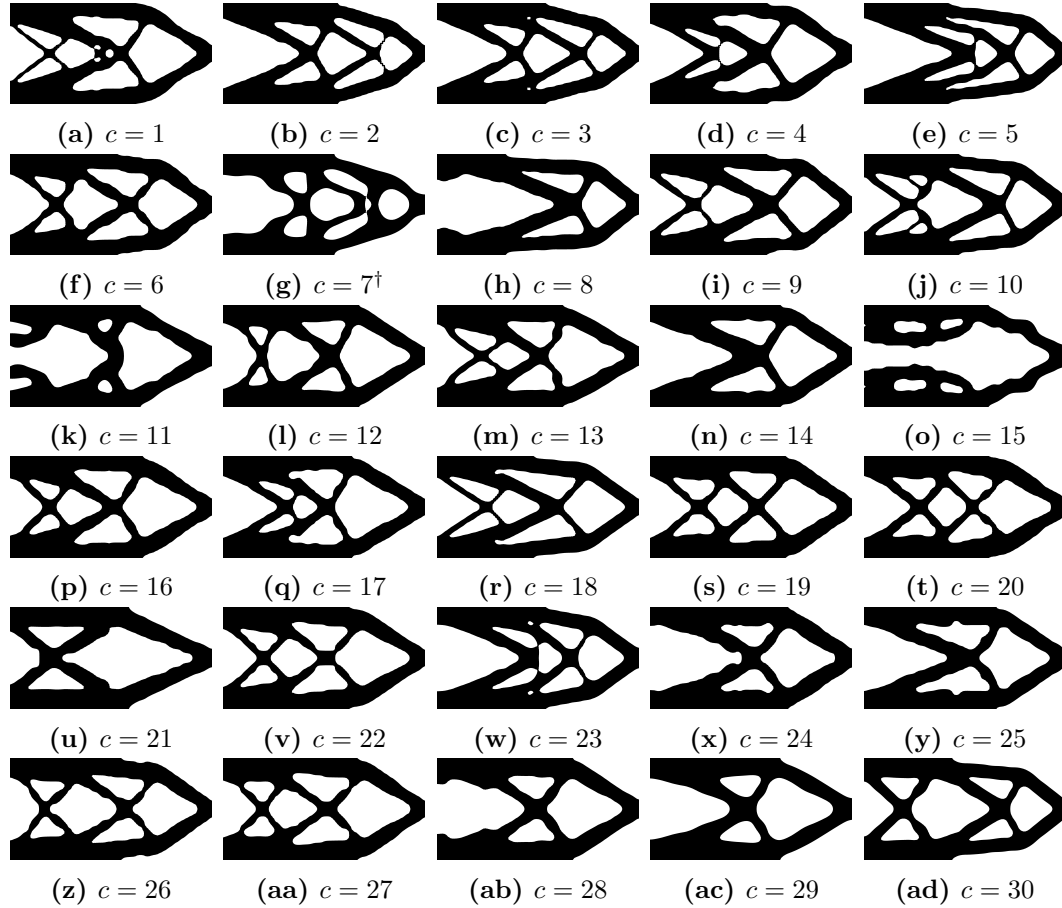


Figura 6.17: Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a c para el primer ejemplo

Lo primero que se obtiene de la Figura 6.17 es que el método es bastante sensible al coeficiente de penalidad cuadrática del LA, presentándose varias tipologías estructurales distintas. A pesar de lo anterior, se tiene que la mayoría de los casos, salvo para $c \in \{7; 11; 15; 21\}$, las geometrías obtenidas son consistentes con lo esperado de la bibliografía. En particular, las geometrías presentadas con $c = 11$ y $c = 15$ parecen ser poco eficientes. En lo referente a la rugosidad de la estructura, la mayoría de los casos presentaron componentes suaves o levemente rugosos según los criterios de la Figura 5.17. Los únicos casos que presentaron componentes muy rugosos fueron $c = 2$ y $c = 4$, donde se obtuvieron componentes de muy pequeño ancho.

Para analizar cuantitativamente los resultados obtenidos, se presenta en la Figura 6.18 la complacencia final (curva azul continua y eje de las ordenadas izquierdo) y la cantidad de iteraciones (curva roja punteada y eje de las ordenadas derecho) para los distintos valores de c . El caso $c = 7$, en el cual el método no alcanzó la convergencia, fue retirado del gráfico. En primer lugar se observa que no se registró ningún patrón específico, sino que los valores máximos de W^e y del número de iteraciones surgieron en casos particulares. En particular se obtuvo que la complacencia de la mayoría de los casos es similar, a pesar de las diferencias en los resultados geométricos. Los casos donde la complacencia se hace mayor al resto son para $c \in \{8; 11; 15; 21\}$, donde 11 y 15 ya se había predicho que debían ser malos resultados en la Figura 6.17. Algo similar ocurre para el número de iteraciones, en el cual la mayoría de las pruebas se concentró entre 12 y 25 iteraciones.

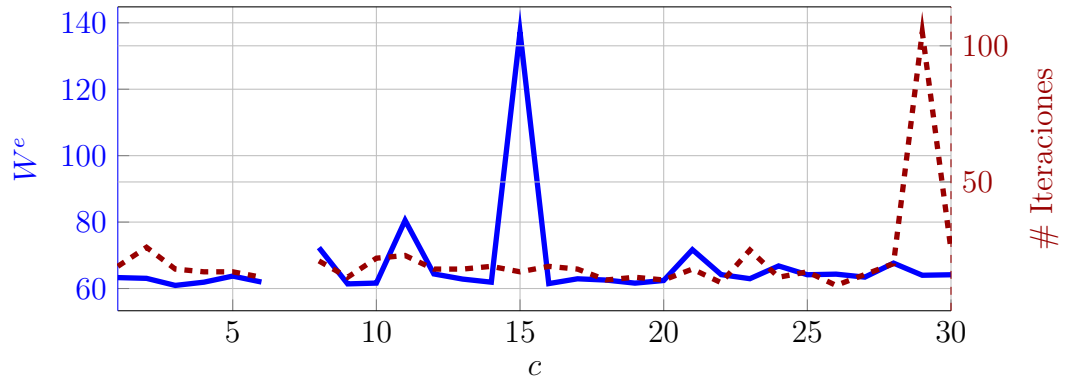


Figura 6.18: Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a c para el primer ejemplo

Finalmente, para complementar la Figura 6.18, se presentan en la Tabla 6.6 algunos estadísticos de la complacencia final y la cantidad de iteraciones para estas pruebas. Ambas medidas presentaron promedios cercanos a la mayoría de los resultados y desviaciones estándar muy cercanas al valor del promedio. Lo anterior confirma que los casos en los cuales se obtuvieron complacencias grandes o un gran número de iteraciones son atípicos. Por otra parte también se obtuvo que el mejor resultado, en base a la complacencia, se obtuvo para $c = 3$, el cual es cercano a la mayoría del resto de los resultados.

Tabla 6.6: Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a c para el primer ejemplo

Estadístico	Complacencia final	Cantidad de iteraciones
Promedio	66,943	21
Desv. estándar	14,120	17
Máximo (¿Dónde?)	137,172 ($c = 15$)	105 ($c = 29$)
Mínimo (¿Dónde?)	60,932 ($c = 3$)	12 ($c = 26$)

6.1.3.3. Sensibilidad al coeficiente de suavizado inicial

Para el análisis de sensibilidad al coeficiente de suavizado inicial, nuevamente se consideró la misma malla y parámetros del caso base, salvo por ς_0 , el cual se varió. En este caso se hicieron 20 pruebas, modificando ς_0 desde $\varsigma_0 = 0,05$ hasta $\varsigma_0 = 1,00$ con un paso de 0,05.

En la Figura 6.19 se presentan las geometrías obtenidas para las 20 pruebas de este análisis. Nuevamente se tuvo un caso en el cual el método no convergió, dado por $\varsigma_0 = 0,30$ y la Figura 6.19f. Luego, al igual que en el caso de c , se obtuvo que el método es bastante sensible al coeficiente de suavizado inicial, obteniéndose diversas tipologías. Además, al igual que lo que se presentó en la Sección 6.1.3.1, se obtuvieron resultados en los cuales se presentan componentes flotantes. Los casos con ς_0 entre 0,05 y 0,25 obtuvieron geometrías con una complejidad estructural significativamente mayor al resto. Lo anterior se debe a que al ser el coeficiente de suavizado menor, se admite la generación de componentes más finos y rugosos que con mayores suavizados. De todas formas, a pesar de la gran sensibilidad, nuevamente se obtuvo que la mayoría de los resultados fueron muy similares a los presentados en la bibliografía, salvo para $\varsigma_0 \in \{0,30; 0,50; 0,70\}$, y, en el caso de $\varsigma_0 \geq 0,40$, se obtuvieron resultados en general suaves o levemente rugosos.

Luego, en la Figura 6.20 y la Tabla 6.7 se presentan los resultados cuantitativos para las 20 pruebas, considerando el mismo formato que fue utilizado en la Sección 6.1.3.2. En este caso los suavizados menores obtuvieron ligeramente mejores resultados a nivel de complacencia, si bien se recuerda que fueron más rugosos, y los casos con suavizados mayores obtuvieron un menor número de iteraciones. De las desviaciones estándar de la Tabla 6.7 se obtuvo que la sensibilidad al coeficiente de suavizado inicial, si bien significativa, fue menor a la sensibilidad al parámetro c . Además, los valores de complacencia mínimos obtenidos fueron cercanos a los mínimos obtenidos al variar c .

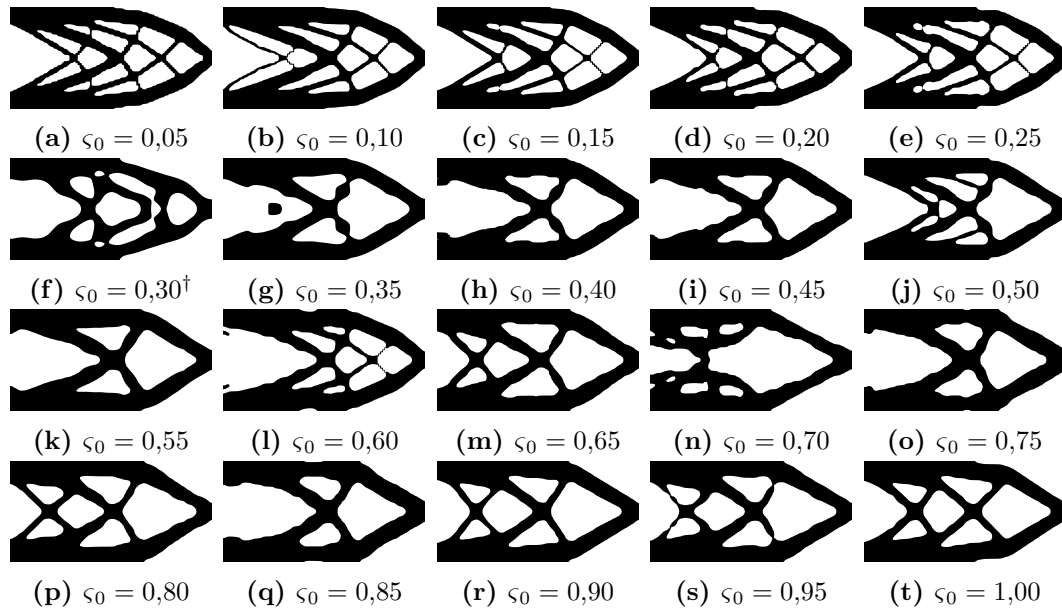


Figura 6.19: Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a ς_0 para el primer ejemplo

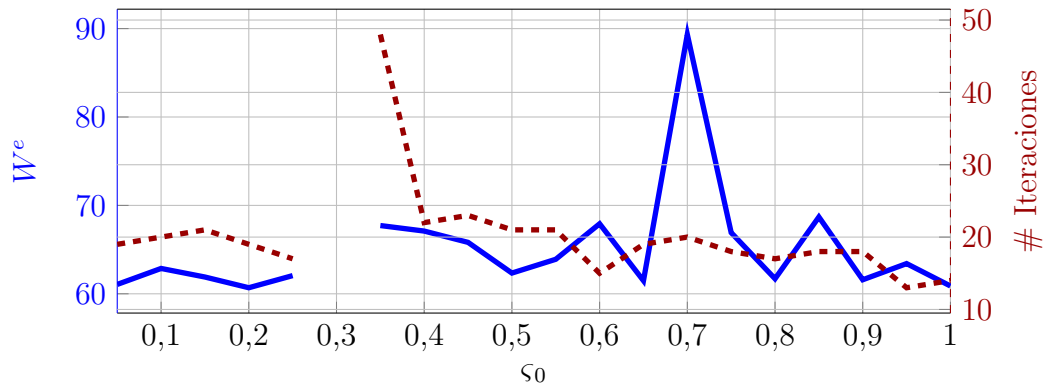


Figura 6.20: Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a ς_0 para el primer ejemplo

Tabla 6.7: Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a ς_0 para el primer ejemplo

Estadístico	Complacencia final	Cantidad de iteraciones
Promedio	65,126	20
Desv. estándar	6,453	7
Máximo (¿Dónde?)	89,332 ($\varsigma_0 = 0,70$)	48 ($\varsigma_0 = 0,35$)
Mínimo (¿Dónde?)	60,686 ($\varsigma_0 = 0,20$)	13 ($\varsigma_0 = 0,95$)

6.1.3.4. Sensibilidad al coeficiente de decaimiento del suavizado

Luego, para el análisis de sensibilidad al coeficiente de decaimiento del suavizado se consideraron 10 pruebas, modificando ϱ_ς desde $\varrho_\varsigma = 1,0$ hasta $\varrho_\varsigma = 1,9$, con un paso de 0,1. Se recuerda que $\varrho_\varsigma = 1,0$ equivale a no tener decaimiento en el coeficiente de suavizado. En primer lugar, en la Figura 6.21 se presentan las geometrías obtenidas para las 10 pruebas. En este caso se obtuvo que el método es algo sensible al coeficiente de suavizado, pero no tanto como a los dos parámetros anteriores. Además, en este caso se obtuvo convergencia en la totalidad de las pruebas realizadas. Las pruebas con decaimientos mayores presentaron geometrías en general más rugosas y con un mayor número de huecos, lo que es coherente con que el suavizado iteración a iteración es potencialmente menor. Como punto adicional se obtuvo que todas las pruebas generaron buenos resultados, exceptuando la Figura 6.21e, en la cual permaneció un componente flotante.

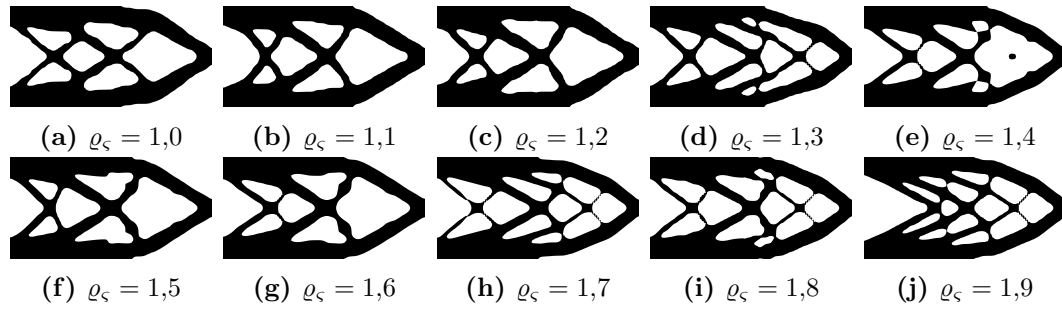


Figura 6.21: Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a ϱ_ς para el primer ejemplo

Luego la Figura 6.22 y la Tabla 6.8 presentan los resultados cuantitativos con el mismo formato que los casos anteriores. En este caso no se nota ninguna tendencia respecto a la complacencia pero sí se obtuvo que todas las pruebas presentaron valores finales muy buenos, todos a menos del 10 % del promedio y cercanos a los mejores casos obtenidos anteriormente. Por otra parte sí se notó una leve tendencia a un mayor número de iteraciones a mayor decaimiento del suavizado.

6.1.3.5. Sensibilidad al cambio mínimo de área como criterio de optimalidad

A continuación se analiza la sensibilidad al cambio mínimo de área empleado como criterio de optimalidad. En este caso se hicieron pruebas desde

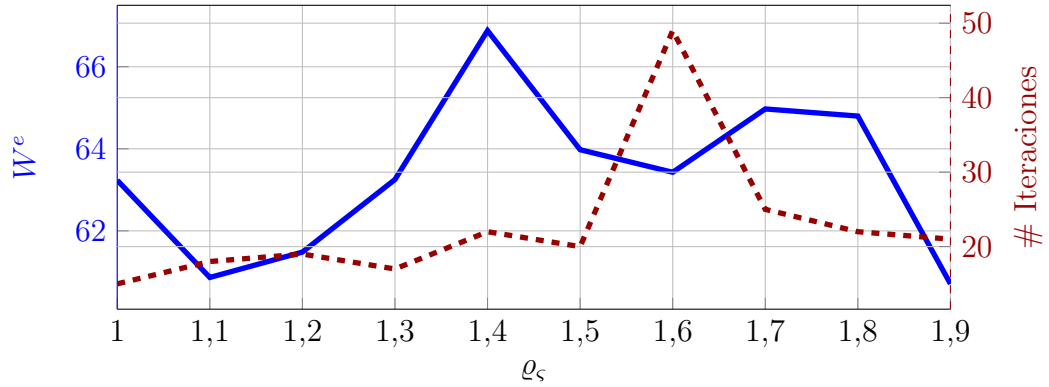


Figura 6.22: Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a ρ_s para el primer ejemplo

Tabla 6.8: Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a ρ_s para el primer ejemplo

Estadístico	Complacencia final	Cantidad de iteraciones
Promedio	63,360	23
Desv. estándar	1,951	10
Máximo (¿Dónde?)	66,881 ($\rho_s = 1,4$)	49 ($\rho_s = 1,6$)
Mínimo (¿Dónde?)	60,708 ($\rho_s = 1,9$)	15 ($\rho_s = 1,0$)

$\Delta_{|\Omega|}^* = 0,25\%$ hasta $\Delta_{|\Omega|}^* = 2,5\%$ con un paso de $0,25\%$. Se recuerda que $\Delta_{|\Omega|}^*$ es el criterio para considerar si una geometría es suficientemente óptima para el problema del LA con parámetros específicos. Por lo tanto, valores más altos de $\Delta_{|\Omega|}^*$ implican un criterio más laxo para determinar si una estructura es óptima. Por ese motivo no se consideraron valores muy grandes de $\Delta_{|\Omega|}^*$, puesto que serían criterios poco aceptables. En la Figura 6.23 se presenta, como ejemplo, la geometría obtenida para $\Delta_{|\Omega|}^* = 10\%$, la cual es inaceptable y posee una complacencia de 93,11.

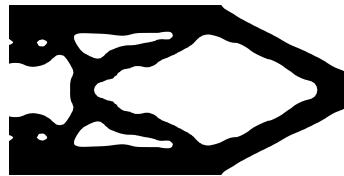


Figura 6.23: Geometría final obtenida para el primer ejemplo con $\Delta_{|\Omega|}^* = 10\%$

En primer lugar se presenta en la Figura 6.24 las geometrías obtenidas para las 10 pruebas de este análisis de sensibilidad. Se obtuvo que, para el rango de $\Delta_{|\Omega|}^*$ considerado, la sensibilidad no fue muy significativa. Además, en este caso

todas las pruebas lograron la convergencia, con resultados esperables según la bibliografía y geometrías suaves o levemente rugosas sin elementos flotantes.

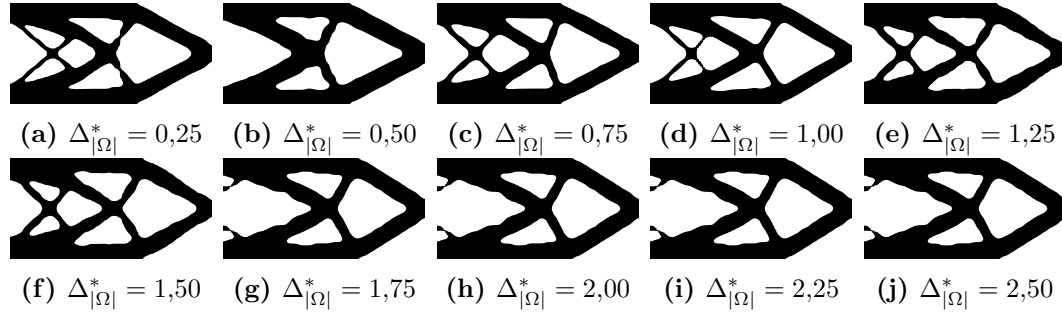


Figura 6.24: Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a $\Delta^*_{|\Omega|}$ para el primer ejemplo. Unidades %

La Figura 6.25 y la Tabla 6.9 presentan los resultados cuantitativos para este análisis de sensibilidad. En este caso se nota una tendencia de que a criterios de optimalidad más laxos, mayor es la complacencia obtenida, si bien, en las pruebas realizadas, todos los valores obtenidos son similares. El anterior resultado es consistente con la prueba de la Figura 6.23, la cual presentó una complacencia bastante mayor a las otras 10. Por otra parte, también se notó una tendencia a presentar menor cantidad de iteraciones al utilizar un valor mayor de $\Delta^*_{|\Omega|}$, presentándose demasiadas iteraciones para los casos con $\Delta^*_{|\Omega|} < 0,75$ %. Se tiene entonces que $\Delta^*_{|\Omega|}$ es un parámetro de gran importancia, el cual debe escogerse chico pero procurando que la elección no implique demasiadas iteraciones.

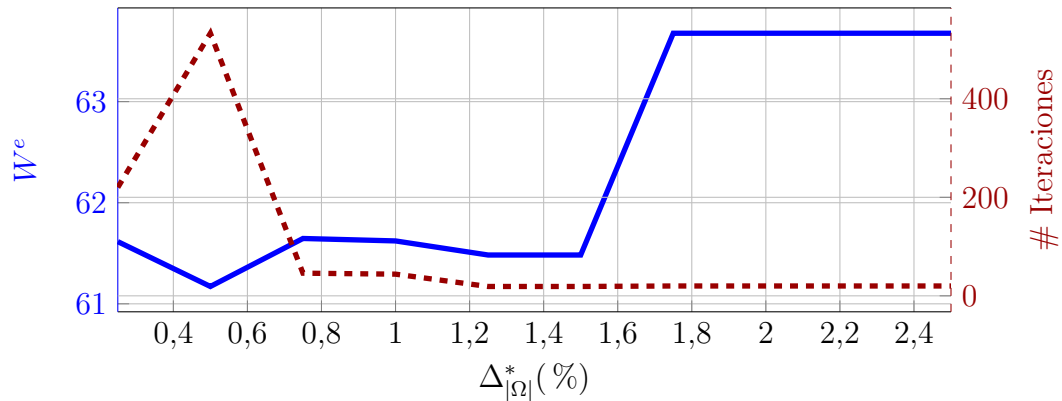


Figura 6.25: Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a $\Delta^*_{|\Omega|}$ para el primer ejemplo

Tabla 6.9: Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a $\Delta_{|\Omega|}^*$ para el primer ejemplo

Estadístico	Complacencia final	Cantidad de iteraciones
Promedio	62,373	96
Desv. estándar	1,130	165
Máximo (¿Dónde?)	63,677 ($\Delta_{ \Omega }^* = 1,75 \%$)	533 ($\Delta_{ \Omega }^* = 0,50 \%$)
Mínimo (¿Dónde?)	61,172 ($\Delta_{ \Omega }^* = 0,50 \%$)	19 ($\Delta_{ \Omega }^* = 1,25 \%$)

6.1.3.6. Sensibilidad al cambio máximo de área por iteración

Para analizar la sensibilidad al máximo cambio de área admisible por iteración se realizaron 9 pruebas modificando $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}}$. Se recuerda que $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}}$ es el máximo cambio de área que se considera admisible para comenzar la búsqueda lineal del método de optimización estructural del Capítulo 5. Es decir, funciona como una restricción sobre cuánto se admite modificar la geometría por iteración. Por lo tanto se hicieron pruebas con $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}} \in \{0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10; 20; 50; 100\} \%$ para probar varios órdenes del parámetro.

En la Figura 6.26 se presentan las geometrías obtenidas para las pruebas de este análisis de sensibilidad. Se ve que para valores grandes de $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}}$ (Figuras 6.26a a 6.26d) la sensibilidad no es muy significativa, sino que las geometrías son muy similares entre sí y todas suaves o levemente rugosas. Por otra parte, para $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}} < 2 \%$ los resultados son muy malos, obteniéndose además que para $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}} = 0,5 \%$ y para $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}} = 0,2 \%$ el método no logró la convergencia. Estos resultados muestran que el método funciona significativamente mejor para valores grandes de $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}}$, es decir dándole libertad a la DT para que modifique la geometría según considere necesario.

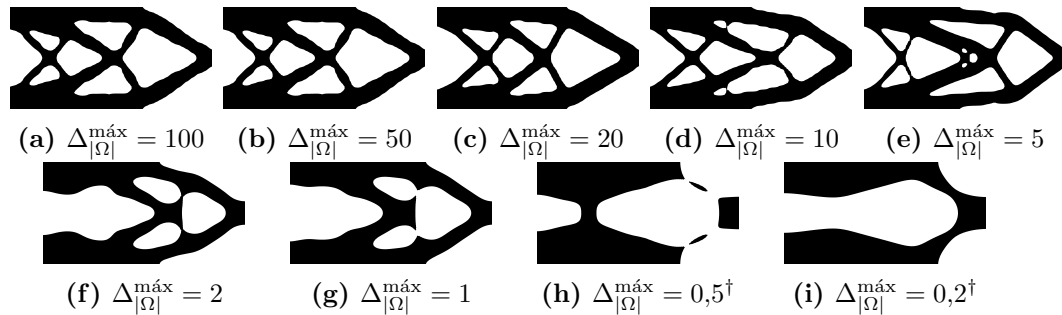


Figura 6.26: Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}}$ para el primer ejemplo. Unidades %

Por otra parte en la Figura 6.27 y en la Tabla 6.10 se presentan los resul-

tados cuantitativos para este análisis. En la figura, la cual posee el eje de las abscisas en escala logarítmica, se observa claramente que la complacencia y el número de iteraciones tienden a decrecer a medida que crece $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}}$. Si bien, como muestra la tabla, el mínimo resultado de complacencia se obtuvo para $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}} = 20 \%$; dicho valor mínimo es similar a los mínimos obtenidos del resto de los análisis de sensibilidad de la Sección 6.1.3 por lo que no es significativo. De este análisis se determinó que, para el resto de las pruebas de esta tesis, se consideró siempre $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}} = 100 \%$ y no se restringió al método de Amstutz y Andrä (2006) a la hora de modificar la geometría.

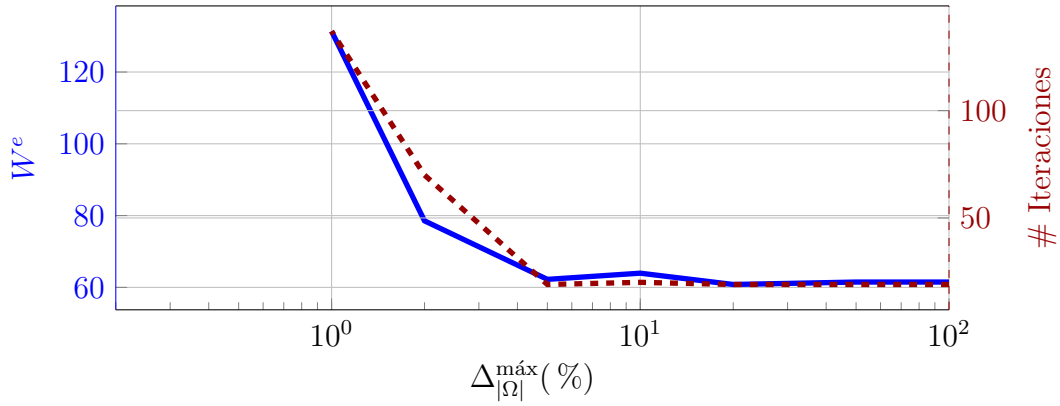


Figura 6.27: Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}}$ para el primer ejemplo

Tabla 6.10: Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}}$ para el primer ejemplo

Estadístico	Complacencia final	Cantidad de iteraciones
Promedio	74,264	43
Desv. estándar	25,939	45
Máximo (¿Dónde?)	131,357 ($\Delta_{ \Omega }^{\text{máx}} = 1 \%$)	137 ($\Delta_{ \Omega }^{\text{máx}} = 1 \%$)
Mínimo (¿Dónde?)	60,805 ($\Delta_{ \Omega }^{\text{máx}} = 20 \%$)	19 ($\Delta_{ \Omega }^{\text{máx}} = 100 \%$)

6.1.3.7. Sensibilidad al coeficiente de Poisson

Como último análisis de sensibilidad se probaron distintos coeficiente de Poisson, empleando en la mayoría de las pruebas los mismos parámetros del caso base. Se consideraron los casos desde $\nu = 0$ a $\nu \approx 0,5$ con un paso de 0,1. El caso $\nu \approx 0,5$ se lo consideró utilizando $\nu = 0,499$. Además, exclusivamente

en el caso $\nu = 0$ se consideró $c = 20$. Este análisis fue realizado únicamente para observar cómo se modifican las estructuras optimizadas al variar ν .

En la Figura 6.28 se presentan las geometrías obtenidas de modificar el coeficiente de Poisson. Resulta interesante notar que, si bien se observan algunas diferencias entre los resultados para los distintos coeficientes de Poisson, las geometrías son bastante similares entre sí. Esta similitud muestra que una estructura optimizada puede ser empleada para materiales elásticos, isótropicos y lineales de un amplio rango de coeficientes de Poisson. Si bien dicha estructura no sería la óptima para todos los coeficientes de Poisson, sí sería capaz de lograr un excelente desempeño.

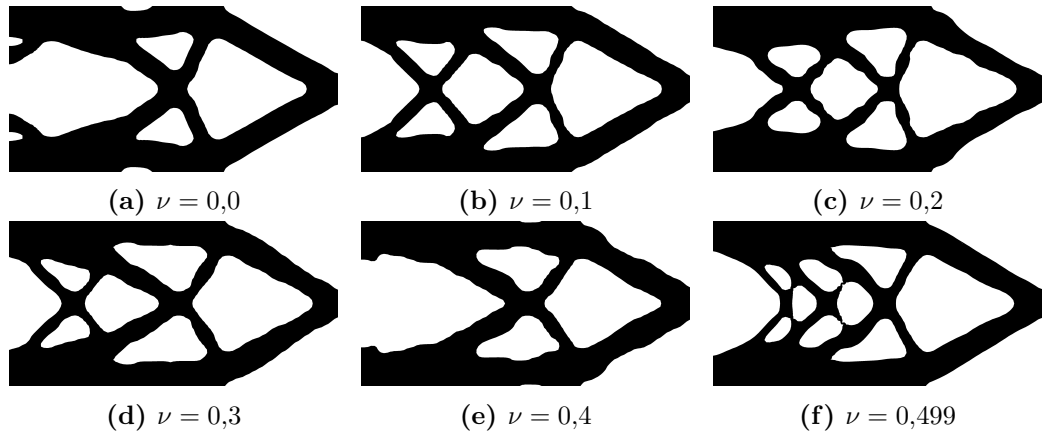


Figura 6.28: Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a ν para el primer ejemplo

6.1.3.8. Comentarios finales del análisis de sensibilidad

De los análisis de sensibilidad anteriores se observó que el método de optimización estructural desarrollado en esta tesis es bastante sensible a sus parámetros de entrada. Además, existieron casos en los cuales, para combinaciones específicas de parámetros, el método no logró converger. Esta gran sensibilidad no es ideal, puesto que se requieren variar muchos parámetros para obtener soluciones óptimas. De todas formas se hace notar que la mayoría de los parámetros, salvo los asociados al suavizado, son asociados al mismo método de Amstutz y Andrä (2006) con LA y no a las modificaciones hechas para ser utilizado con el XFEM. Adicionalmente, la mayoría de los resultados, salvo algunos diseños particulares que intuitivamente se notó que no eran buenos, presentaron resultados finales de complacencia similares entre sí y muy

cercanos a los mínimos obtenidos. Por lo tanto, a pesar de que la sensibilidad es significativa, su impacto en los resultados finales no lo fue tanto. Finalmente se destaca que los únicos parámetros que sí proporcionaron sensibilidades muy importantes y sin una tendencia demasiado clara fueron c y ς_0 . De lo anterior se tiene que para el uso del método de optimización estructural, es recomendable escoger ϱ_ς , $\Delta_{|\Omega|}^*$ y $\Delta_{|\Omega|}^{\max}$ una única vez y solamente considerar c y ς_0 como los parámetros de calibración del método.

6.1.4. Comparación entre métodos de análisis

En esta sección se presenta la comparación entre los distintos métodos para el ejemplo de la ménsula, según lo discutido en la Sección 5.6. Para estas pruebas se consideraron los mismos parámetros del caso base para todos los métodos, exceptuando el coeficiente de penalidad cuadrática del LA, el cual se tomó diferente para cada método de análisis estructural según se presenta en la Tabla 6.11. La selección de dichos valores surgió para cada método del análisis de sensibilidad a c en una ponderación entre la cantidad de iteraciones y el resultado final de complacencia. A continuación se presentan los resultados obtenidos por los distintos métodos y, sobre el final de la sección, se presentan los resultados de los criterios de comparación.

Tabla 6.11: Coeficiente de penalidad cuadrática utilizado en las pruebas de comparación entre métodos para el primer ejemplo

	Método de análisis estructural		
	XFEM aristas	XFEM Moës et al. (2003)	FEM
c	19	18	10

En la Figura 6.29 se presentan los resultados obtenidos para los cuatro casos en los que se consideró el XFEM, las dos figuras de la izquierda con el XFEM desarrollado en esta tesis y las dos figuras de la derecha con el XFEM de Moës et al. (2003). En la Figura 6.29b se nota lo adelantado en el Capítulo 4, que para problemas de optimización en los que se minimiza una magnitud global (complacencia) la propuesta de Moës et al. (2003) es capaz de obtener buenos resultados. Por otro lado, en la Figura 6.29d, se nota la presencia del problema de interacción entre interfases cercanas discutido en la Sección 4.1.2, puesto que se observan componentes formados por bloques discontinuos.

En la Figura 6.30 se presentan los resultados obtenidos con el FEM sin ningún tipo de refinamiento durante la optimización estructural. Se recuerda

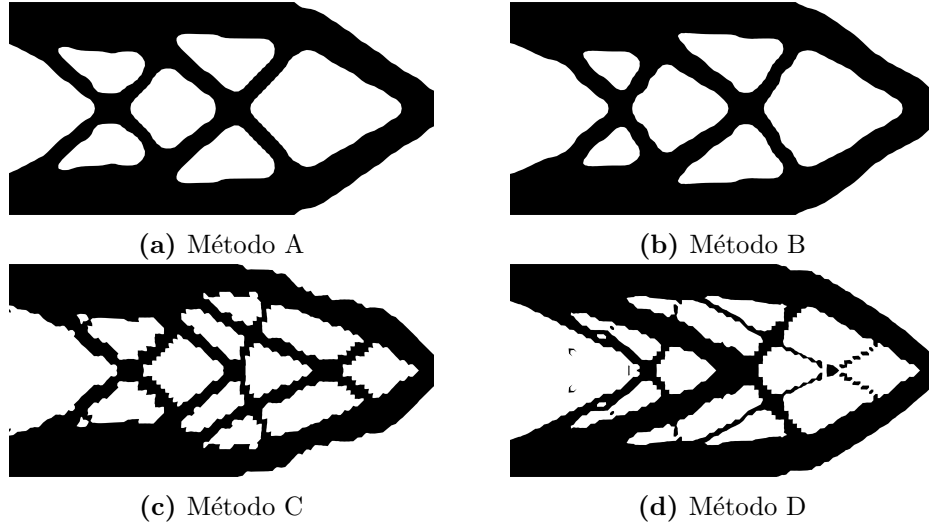


Figura 6.29: Geometrías finales del primer ejemplo obtenidas por los métodos con XFEM. Métodos A a D según la Tabla 5.1

que la Figura 6.30a presenta los resultados con el FEM en la malla del caso base y las Figuras 6.30b a 6.30d presentan los resultados partiendo de mallas con uno, dos o tres refinamientos globales. De las cuatro figuras se observa el comportamiento adelantado en la Sección 6.1.3.1 de que a mayor finura de la malla inicial, mayor es la cantidad de huecos. Además, en particular en la Figura 6.30a, se observan las denominadas *zonas grises*, es decir elementos con densidad ρ intermedia entre 0 y 1. Para esta tesis se consideró que el tono de gris indica el valor de ρ , con grises claros para $\rho \rightarrow 0$ y grises oscuros para $\rho \rightarrow 1$.

Como fue discutido en la Sección 5.6, las zonas grises son zonas de difícil interpretación al momento de manufactura de las geometrías obtenidas. Un ejemplo se presenta en la Figura 6.31, donde la Figura 6.31a presenta un componente estructural de la Figura 6.30a, el cual está completamente formado por zonas grises. Para manufacturar dicha pieza se debe obtener una geometría tal que efectivamente garantice que el área en cada elemento sea acorde a ρ . Un posible método para lograr dicha geometría es utilizar la función de nivel, puesto que la densidad se definió a partir de la geometría propuesta por Ψ . En la Figura 6.31b se presenta la geometría asociada a Ψ , la cual no es continua y por lo tanto inadmisibles. Esta es una primer dificultad de los métodos con FEM, que no se presentan con el XFEM de esta tesis.

En la Figura 6.32 se presentan las geometrías obtenidas para los cuatro casos del FEM con refinamiento global. La Figura 6.32a presenta la estructura

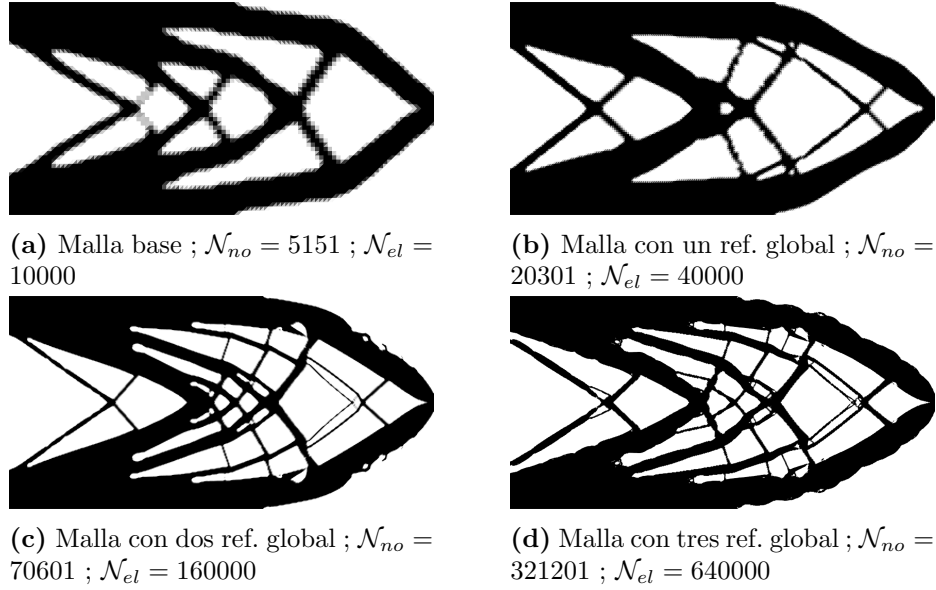


Figura 6.30: Geometrías finales del primer ejemplo obtenidas por el FEM sin remallado desde distintas mallas. Método E según la Tabla 5.1

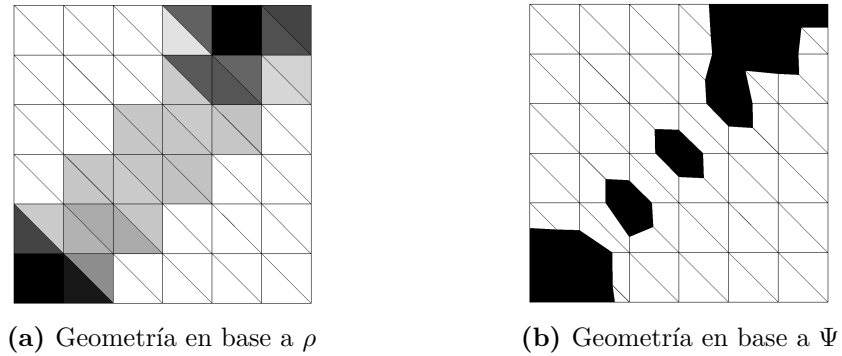


Figura 6.31: Ejemplo de interpretación de una zona gris

final obtenida para el método en el cual se refina cada actualización de los parámetros del LA, la cual no convergió. La no convergencia en este caso no se debió a en sí al algoritmo de optimización estructural sino a que los requisitos de memoria superaron la capacidad de la computadora empleada. El resto de las figuras muestran que la relevancia de las zonas grises se redujo con mayores refinamientos pero que algunas de las barras permanecieron rugosas.

En la Figura 6.33 se presentan las geometrías obtenidas para los cuatro casos del FEM con refinamiento local. En este caso los cuatro casos lograron la convergencia y mejoraron la definición de la geometría a mayores refinamientos, no presentándose en ningún lugar zonas grises de interpretación ambigua como la de la Figura 6.31. A pesar de lo anterior, se hace notar que la zona asociada

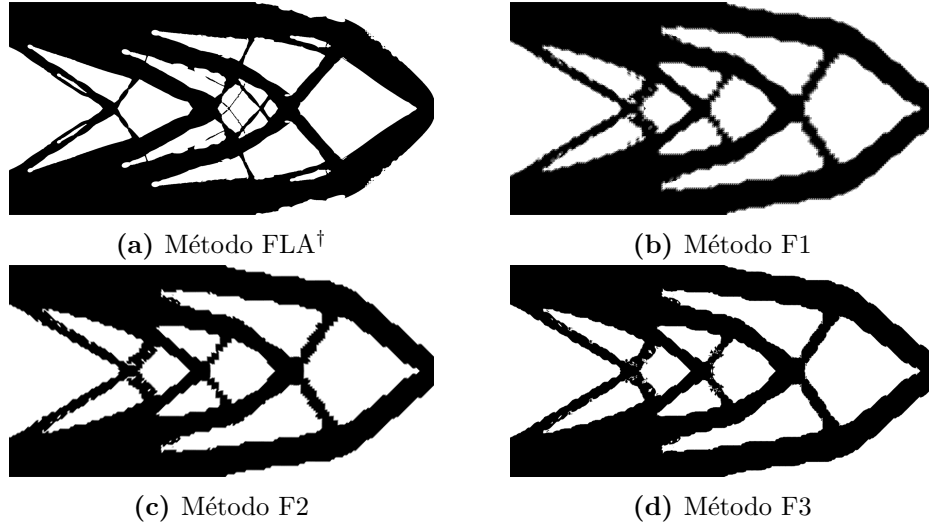


Figura 6.32: Geometrías finales del primer ejemplo obtenidas por los métodos de FEM con refinamiento global. Métodos F según la Tabla 5.1

a la Figura 6.31 no fue exitosamente corregida con los refinamientos realizados al final del algoritmo.

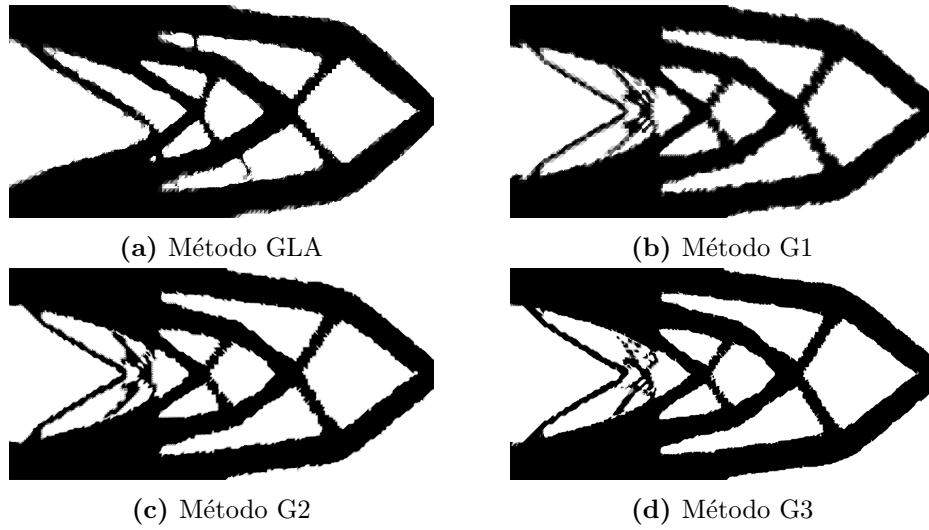


Figura 6.33: Geometrías finales del primer ejemplo obtenidas por los métodos de FEM con refinamiento local. Métodos G según la Tabla 5.1

Finalmente se presentan los resultados para los tres casos particulares desarrollados para el método de optimización de Yamada et al. (2010). En primer lugar, en la Figura 6.34 se presentan los resultados obtenidos para el método de Cortellessa et al. (2023). En la Figura 6.34a se nota que la geometría obtenida con el método de Cortellessa et al. (2023) fue bastante buena, si bien presenta algunas rugosidades leves y pequeñas zonas grises. Por otro lado, en

la Figura 6.34b se ve la malla final generada con el método de Cortellessa et al. (2023) la cual no es tan buena ya que genera muchos elementos cerca de las esquinas de los huecos.

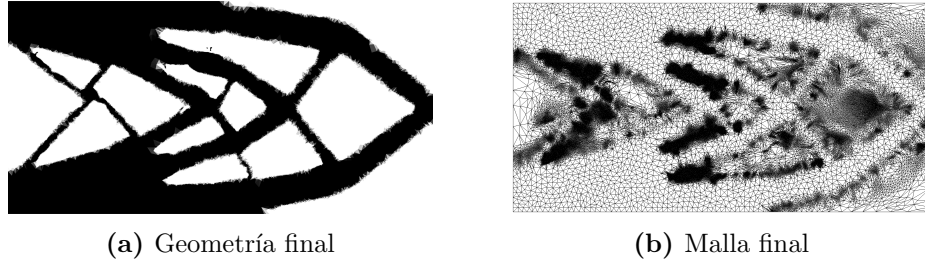


Figura 6.34: Geometría y malla final del primer ejemplo obtenida por el método de Cortellessa et al. (2023)

En la Figura 6.35 se presentan los resultados obtenidos por el método de Cui et al. (2023). La geometría obtenida resultó suave y sin ningún tipo de ambigüedad en su definición, similar a los resultados con el XFEM. De forma similar, se presenta en la Figura 6.36 los resultados obtenidos por el método de Li et al. (2021), la cual también muestra un buen resultado, con una geometría suave y correctamente definida. Además, la Figura 6.36b presenta la malla final obtenida para el método de Li et al. (2021) donde se nota claramente la reducción del tamaño de elemento cerca de las interfases y su ampliación lejos de ellas.

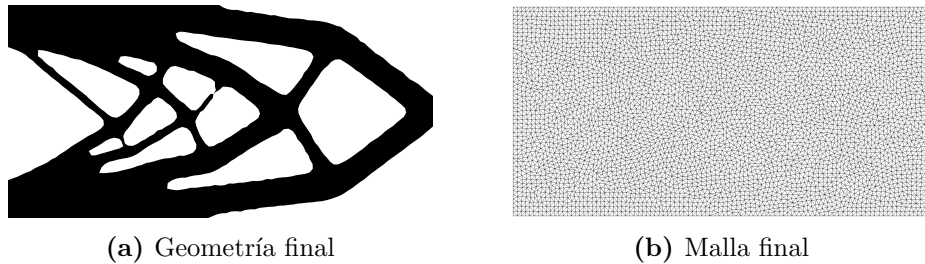


Figura 6.35: Geometría y malla final del primer ejemplo obtenida por el método de Cui et al. (2023)

En la Tabla 6.12 se presentan los resultados de costo computacional y complacencia final para los distintos métodos. La primer columna identifica los distintos métodos según se presentó en la Tabla 5.1. En dicha tabla se consideró la notación para distinguir las cuatro mallas del método E como E-x, donde x representa la cantidad de refinamientos globales que se aplicaron inicialmente. La columna de cálculo de la complacencia denominada “= que

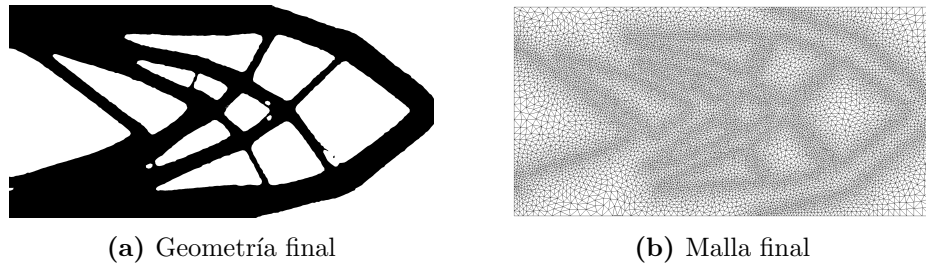


Figura 6.36: Geometría y malla final del primer ejemplo obtenida por el método de Li et al. (2021)

opt”, refiere a la complacencia calculada con el mismo método de análisis con el cual se realizó la optimización estructural. La conveniencia de incluir esta columna refiere a que el método de optimización en cada caso buscó minimizar los resultados presentados en esa columna. En el caso del XFEM de Moës et al. (2003) se incluye el cálculo hecho por el XFEM desarrollado en esta tesis puesto que, según se discutió en el Capítulo 4, la propuesta preexistente puede arrojar valores incorrectos si existen componentes estructurales muy finos o se da el fenómeno de interfases discontinuas de la Figura 6.29d. Del argumento anterior se nota que la diferencia entre los valores calculados de complacencia en el método B es reducida, mientras que para el método D es cercana al 5 %. Para el FEM se incluyó el cálculo hecho por el XFEM de esta tesis como metodología para interpretar zonas grises de tamaño apreciable, como la considerada en la Figura 6.31.

En la Tabla 6.12 se obtuvo que el mejor resultado, en referencia a la función minimizada, se obtuvo con la propuesta de Cui et al. (2023) pero dicha propuesta fue muy costosa computacionalmente. El método I requirió una memoria más de 5 veces mayor a la requerida por el método de esta tesis y tardó casi 400 veces más. Este gran costo computacional fue incluso mayor para las propuestas de Cortellessa et al. (2023) y Li et al. (2021). Si bien es esperable que el gran costo se debe a que el método de mallado empleado no fue muy eficiente y podría ser mejorado; no se espera que se pueda reducir tanto como para que estos tres métodos sean competentes con las propuestas con el XFEM. Por el anterior motivo, en las Secciones 6.2 y 6.3 no se vuelven a incluir los métodos de Cortellessa et al. (2023), Cui et al. (2023) y Li et al. (2021).

Al comparar las propuestas del XFEM se obtuvo que ambas generaron muy buenos resultados, y ambas fueron más eficaces y eficientes en sus propuestas con suavizado. En particular, la propuesta con XFEM de Moës et al.

Tabla 6.12: Costo computacional y complacencia final para los distintos métodos de análisis en el ejemplo de la ménsula

Método	Costo computacional		Complacencia final	
	Tiempo (s)	Memoria (MB)	= que opt.	XFEM aristas
A	206,780	5,565	61,621	61,621
B	151,234	5,512	61,047	61,145
C	373,552	6,922	67,804	67,804
D	209,318	5,513	63,458	66,792
E-0	118,583	5,513	61,091	68,733
E-1	870,695	22,023	62,012	63,540
E-2	2780,652	89,054	64,004	67,340
E-3	23658,154	357,176	64,484	65,679
F1	226,386	16,512	64,581	66,297
F2	594,238	67,283	65,177	66,792
F3	2535,194	267,324	64,293	65,009
GLA	176,704	11,639	65,441	66,695
G1	383,663	5,654	65,217	71,690
G2	505,292	6,221	66,269	72,218
G3	775,075	14,040	66,420	72,840
H	414202,525	64,180	62,696	63,895
I	80893,967	30,019	60,052	60,058
J	99080,783	24,594	63,834	63,836

(2003) generó un resultado con menor complacencia, un requisito de memoria levemente menor y un 36,7 % más rápido que la propuesta de esta tesis. De todas formas se destaca que ambas propuestas con XFEM y suavizado fueron más rápidas, menos exigentes en memoria y más eficaces que la mayoría de los métodos salvo el FEM sin refinamiento en la malla original y el FEM con refinamiento local en cada actualización de los parámetros del LA.

Finalmente, en la Tabla 6.13 se presentan los resultados en base a la calidad de las geometrías obtenidas. Nuevamente se utilizó la notación E-x para distinguir las cuatro mallas del método E, donde x representa la cantidad de refinamientos globales realizados inicialmente. En primer lugar se tiene que las propuestas que emplearon el XFEM en la optimización estructural fueron las de menor número de huecos, lo que indirectamente implica una mayor facilidad de manufactura. De todas formas, la mayoría de los resultados no presentaron más de 15 huecos, salvo las dos propuestas con el FEM sin refinamiento partiendo de mallas muy finas. Por otra parte, se tiene que las propuestas que emplearon el FEM presentaron geometrías con rugosidades apreciables, salvo

aquellas que partieron de mallas muy finas o presentaron refinamientos o remallados frecuentes. Además, la presencia de zonas grises de magnitud apreciable fue un problema no menor en varias de las propuestas con FEM, en particular la E desde la malla base. Se destaca que las dos propuestas que resultaron más rápidas que las dos propuestas que emplearon el XFEM con suavizado, generaron geometrías que son de una calidad inferior.

Tabla 6.13: Suavidad, zonas grises y complejidad para los distintos métodos de análisis en el ejemplo de la ménsula

Método	Suavidad	% de zonas grises	Complejidad estructural
A	Levemente rugosa	0,0	6
B	Levemente rugosa	0,0	6
C	Muy rugosa	0,0	13
D	Muy rugosa	0,0	15
E-0	Rugosa	12,7	9
E-1	Levemente rugosa	7,4	16
E-2	Suave	5,8	40
E-3	Levemente rugosa	3,2	61
F1	Muy rugosa	7,4	9
F2	Muy rugosa	3,8	9
F3	Levemente rugosa	2,1	9
GLA	Muy rugosa	4,4	10
G1	Rugosa	8,8	12
G2	Levemente rugosa	4,6	13
G3	Rugosa	2,6	12
H	Levemente rugosa	6,9	10
I	Suave	0,0	10
J	Suave	0,0	13

A modo de resumen de la comparación entre métodos, los dos métodos en los que se emplearon propuestas del XFEM con suavizado lograron, empleando una malla relativamente gruesa, generar estructuras optimizadas de gran desempeño, con una geometría apenas levemente rugosa y sin ningún tipo de ambigüedad. La propuesta de esta tesis resultó ser 4,21 veces más rápida que la más rápida (E-1) de las propuestas con el FEM que obtuvieron resultados con suavidad y falta de ambigüedad competentes con las obtenidas por el XFEM. Además, también requirió 3,96 veces menos memoria computacional. Por otro lado, para este problema en particular, la propuesta de XFEM de Moës et al. (2003) resultó ser la más eficiente, ya que logró resultados tan buenos como la propuesta de esta tesis, siendo 36,7 % más rápida. Del análisis anterior se con-

chuye que, al menos en el problema de optimización estructural de la ménsula, se cumplió el objetivo principal de la tesis, ya que la combinación con el XFEM logró mejorar el desempeño del método de optimización estructural basado en la DT.

6.2. Ejemplo 2: Puente

6.2.1. Presentación del problema

En esta sección se desarrolla el segundo ejemplo, el cual está asociado a la estructura que se presenta en la Figura 6.37. Esta estructura es un bloque rectangular, cuya configuración inicial Ω_0 y dominio D se encuentran materializados por un rectángulo de largo 3 y alto 1. Se consideró que las dos esquinas inferiores poseen desplazamientos nulos en ambas direcciones y los centros de las caras izquierda y derecha poseen desplazamientos nulos en la vertical. Además se consideró que la franja de alto 0,05, cuya cara superior dista 0,45 de la cara superior del rectángulo, debía ser mantenida obligatoriamente. Sobre la estructura se consideró que actúan cuatro EC independientes. El primer EC consistió en una densidad de fuerzas de volumen descendente de módulo $|\mathbf{b}_M| = 0,4$, tal que en el material blando verifique la Ecuación (5.17). El segundo EC consistió en una fuerza de contacto descendente de módulo $|\mathbf{q}_2| = 10$ aplicada sobre la franja que se decidió mantener obligatoriamente. Finalmente, el tercer y cuarto EC consistieron en fuerzas de contacto horizontales, de módulo $|\mathbf{q}_3| = 1$ aplicadas sobre la misma franja que el segundo EC. La diferencia entre el tercer y cuarto EC es que el primero es positivo de izquierda a derecha y el segundo de derecha a izquierda. Finalmente se consideró que la estructura se encuentra en un estado plano de tensiones.

Este problema se interpreta como la optimización estructural de un puente en el cual no se admite la colocación de apoyos intermedios. En este caso los apoyos fijos en las esquinas inferiores funcionan como posibles apoyos de una infraestructura, la franja que debe ser mantenida obligatoriamente como el tablero de la estructura y los apoyos deslizantes bajo el tablero como posibles estribos. Luego, el primer EC funciona como peso propio de la estructura, el segundo EC como una posible sobrecarga de uso por tránsito sobre el tablero y el tercer y cuarto EC como posibles cargas de frenado.

Este ejemplo fue considerado por Giusti et al. (2009) y Ren y Zhang (2021),

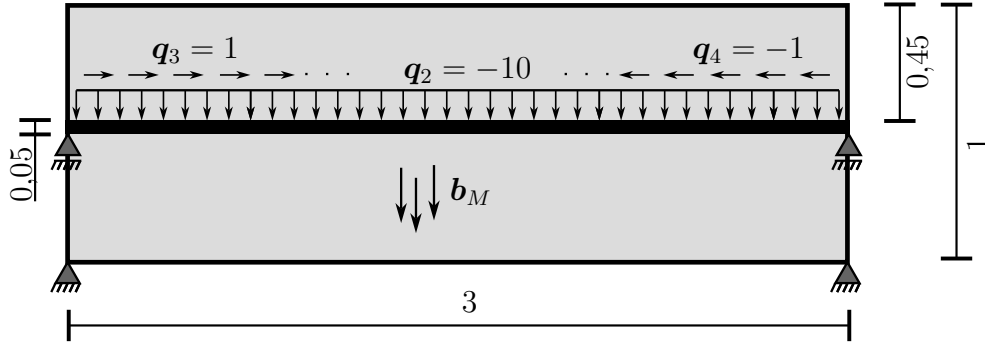


Figura 6.37: Dominio y condiciones iniciales del segundo ejemplo

si bien ellos solamente consideraron el segundo EC, y por Lopes et al. (2015), quienes consideraron las mismas cargas que aquí. Para esta tesis el problema tuvo particular interés para analizar el efecto de considerar varios EC. Además se lo utilizó para analizar la optimización de estructuras sometidas a fuerzas de volumen, en las cuales la tensión equivalente de von Mises no sería suficiente como índice según el cual avanzar en la optimización estructural. También se lo utilizó como caso de análisis en el cual se decidió conservar obligatoriamente una parte de la geometría. Finalmente, el ejemplo fue utilizado para la comparación entre metodologías de análisis en un caso de mayor complejidad que el de la Sección 6.1.

Salvo que se indique lo contrario, para este problema se consideró una malla estructurada regular, con 180 elementos en la dirección horizontal y 60 elementos en la dirección vertical. Esta malla totaliza en 11041 nodos y 21600 elementos. Además, dada la simetría del problema, se esperaba obtener una geometría optimizada simétrica respecto al eje vertical central. Por lo tanto, se utilizó una malla simétrica respecto a dicho eje vertical.

6.2.2. Ejemplos con los EC por separado

Previo a analizar la optimización estructural que combina los cuatro EC, se analizan los resultados de optimizar la estructura de la Figura 6.37 para cada uno de los EC de forma independiente. De esta forma se presenta la utilidad de considerar un método de optimización que considere varios EC y además se permite analizar la optimización de estructuras sometidas únicamente a fuerzas de volumen. Dada la particularidad de la optimización del primer EC, este último se deja para el final de esta subsección.

Para todos los casos de un único EC se consideraron los mismos parámetros

de entrada del método, salvo los EC y el coeficiente de penalidad cuadrática del LA. Se consideró un área objetivo del 30 % ($M = 0,3$) con una tolerancia $\mathbf{T}_M = 1\%$, un cambio mínimo de área como criterio de optimalidad $\Delta_{|\Omega|}^* = 0,5\%$, un cambio máximo de área por iteración $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}} = 100\%$, un máximo de subiteraciones de la búsqueda lineal $\text{SIT}_{\text{máx}} = 10$, un coeficiente de suavizado inicial $\varsigma_0 = 0,45$ y un coeficiente de decaimiento del suavizado $\varrho_\varsigma = 1,2$. Además, no se limitaron las tensiones.

6.2.2.1. Optimización para sobrecarga en el tablero

En primer lugar se presentan la optimización de la estructura considerando únicamente la carga $\mathbf{q}_2$, asociada a la sobrecarga de tránsito en el tablero. Para este caso se consideró $c = 2200$ y la geometría obtenida se presenta en la Figura 6.38.

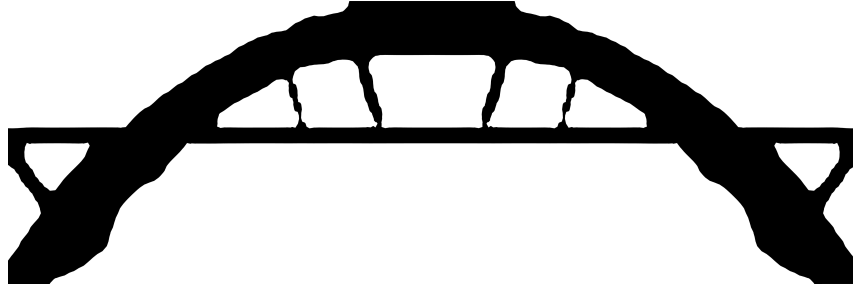


Figura 6.38: Estructura optimizada obtenida para el segundo ejemplo en caso de solamente considerar $\mathbf{q}_2$

La geometría obtenida es bastante esperable para una estructura de un puente, obteniéndose un arco para tomar las cargas y algunos tensores que conectan el tablero con dicho arco. Se hace notar que los tensores resultaron bastante finos para la malla considerada, lo que derivó en que los resultados fueran rugosos. El efecto de que los tensores fueran muy finos se dio para todos los valores de c que se probaron para la situación con únicamente la carga $\mathbf{q}_2$.

6.2.2.2. Optimización para cargas de frenado

A continuación se presenta la optimización de la estructura considerando únicamente la carga $\mathbf{q}_3$ asociada a las cargas de frenado en el tablero. Para este caso se consideró $c = 50$ y la geometría obtenida se presenta en la Figura 6.39.

En este caso la geometría obtenida es muy mala como estructura final de un puente, pero es bastante eficiente para tomar exclusivamente las cargas de



Figura 6.39: Estructura optimizada obtenida para el segundo ejemplo en caso de solamente considerar q_3

frenado. La geometría obtenida, salvo el tablero obligatorio, es muy similar a geometrías de ménsulas cortas presentadas en la bibliografía. Este primer resultado muestra la importancia de optimizar las estructuras frente a varios EC para evitar obtener geometrías muy específicas de pequeño rango de aplicabilidad.

6.2.2.3. Optimización para fuerzas de volumen

Finalmente se presenta la optimización de la estructura considerando únicamente las fuerzas de volumen. Para este caso se consideró $c = 1$ y la geometría optimizada, obtenida en 12 iteraciones, se presenta en la Figura 6.40. En dicha estructura se muestra claramente el efecto de haber considerado obligatoria la franja ocupada por el tablero, puesto que el resto de la estructura se adapta principalmente a lograr apoyar dicho tablero.



Figura 6.40: Estructura optimizada obtenida para el segundo ejemplo en caso de solamente considerar b

Adicionalmente, en la Figura 6.40 se notan dos componentes verticales de gran grosor, ubicados a ambos extremos de la estructura. Estos dos componentes surgieron de la restricción al área objetivo de 30 %. Lo anterior implica que se podría haber encontrado una geometría de menor área que tuviera una complacencia menor pero, para lograr el requisito $|\Omega| \approx M|D|$, el método colocó material estructural en las zonas que fueran lo menos perjudiciales posible. Dichos componentes verticales se apoyan de forma cuasi directa sobre los apoyos,

lo que hace que su presencia no aumente considerablemente la complacencia. Para ilustrar lo anterior se presenta en la Figura 6.41 el resultado de ejecutar el método de optimización estructural en este mismo problema pero sin considerar la restricción al área ocupada. En este caso no se generaron dichos componentes verticales y además la complacencia obtenida es de 0,557, a diferencia de la estructura de la Figura 6.40 cuya complacencia es de 0,824, es decir casi 50 % mayor.



Figura 6.41: Estructura optimizada obtenida para el segundo ejemplo en caso de solamente considerar $\mathbf{b}$ y no aplicar restricción al área ocupada

Los resultados de las Figuras 6.40 y 6.41 son particularmente buenos pues muestran que el método desarrollado es capaz de obtener buenos resultados para estructuras sometidas únicamente a fuerzas de volumen. Lo anterior era esperable a partir de los resultados del artículo de Novotny et al. (2021) pero en este caso se consideró además la presencia de componentes estructurales que deben ser conservados.

A continuación, se continúa con el análisis comparativo entre la DT y las tensiones equivalentes de von Mises iniciado al final de la Sección 6.1.1, particularmente en las Figuras 6.8 y 6.9. En la Figura 6.42 se comparan mapas de los valores de la DT de la complacencia y de las tensiones equivalentes de von Mises para la tercera iteración del problema en el cual solamente se consideraron fuerzas de volumen. En este caso, en el cual las fuerzas de volumen son las únicas fuerzas actuando en la estructura, las distribuciones espaciales de $D_T W^e$ y de σ_{VM} son apreciablemente distintas. Lo anterior se debe principalmente al término $2(\gamma - 1)\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}$ de la Ecuación (5.26), lo que genera que zonas de la estructura con grandes desplazamientos presenten una derivada $D_T W^e$ muy pequeña. Un ejemplo claro de distinto comportamiento entre la DT de la complacencia y las tensiones de von Mises es en la zona del tablero, donde $D_T W^e$ toma valores negativos a pesar de ser una de las zonas más solicitadas según σ_{VM} . Este resultado permite afirmar que la tensión de von Mises no

es admisible como índice según el cual avanzar en la optimización estructural en problemas donde las fuerzas de volumen son dominantes, como sí podría funcionar para el problema de la ménsula en la Sección 6.1.

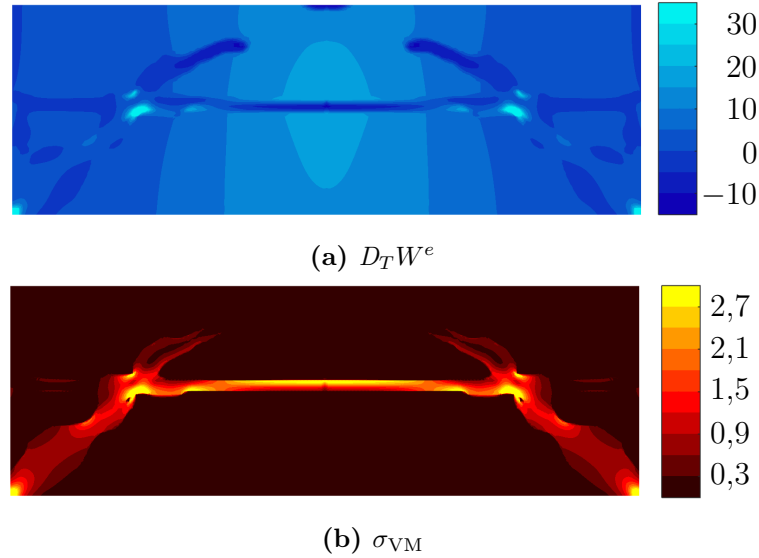


Figura 6.42: DT de la complacencia y tensiones de von Mises para la tercera iteración del problema de la Figura 6.40

Finalmente se presenta la importancia del término $2(\gamma - 1)\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}$ en la DT de la complacencia. Para ello se presenta en la Figura 6.43 la geometría obtenida de una prueba en la cual no se incluyó dicho término en el cálculo de D_TW^e . En primer lugar, se hace notar que el método no logró converger, sino que el resultado surge de la geometría final alcanzada antes de que comenzaran a diverger los valores de ζ y c . En segundo lugar, se nota que la geometría a la que tendió el algoritmo es similar a la obtenida al optimizar únicamente para la sobrecarga en el tablero (Figura 6.38), lo que muestra que la DT buscó reforzar las partes más solicitadas de la estructura pero no reducir la carga en zonas perjudiciales.

En la mayoría de los artículos en los que se utilizó la DT para optimización topológica de estructuras no se consideraron casos en los que las fuerzas aplicadas dependan de la geometría. El resultado de la Figura 6.43 se mostró como un llamado de atención a no poder despreciar, en el cálculo de las DT, el efecto de las variaciones en las fuerzas que dependen de la geometría. Este fue uno de los principales motivos por los cuales se extendió la DT del funcional de penalización de tensiones respecto a lo presentado por Amstutz y Novotny (2010) para incluir fuerzas de volumen.

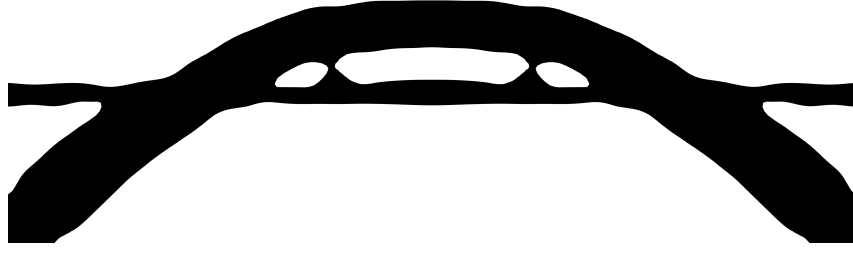


Figura 6.43: Geometría obtenida sin convergencia para el segundo ejemplo, en caso de únicamente considerar $\mathbf{b}$ y no considerar el término $2(\gamma - 1)\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}$ en la Ecuación (5.26)

6.2.3. Caso de base con todos los EC

Tras analizar en la sección anterior la optimización para cada uno de los EC por separado, se presenta aquí el caso de base para la optimización del segundo ejemplo. Este caso de base incluye todos los EC y es a partir del cual se hicieron los consecuentes análisis de sensibilidad. Para este caso se utilizó la malla descrita al final de la Sección 6.2.1, un área objetivo del 30 % ($M = 0,3$) con una tolerancia $\mathbf{T}_M = 1\%$, un coeficiente de penalidad cuadrática del LA $c = 2800$, un cambio mínimo de área como criterio de optimalidad $\Delta_{|\Omega|}^* = 0,5\%$, un cambio máximo de área por iteración $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}} = 100\%$, un máximo de subiteraciones de la búsqueda lineal $\text{SIT}_{\text{máx}} = 10$, un coeficiente de suavizado inicial $\varsigma_0 = 0,45$, un coeficiente de decaimiento del suavizado $\varrho_\varsigma = 1,2$ y no se controlaron las máximas tensiones. Con los anteriores parámetros, el método convergió en 20 iteraciones y obtuvo la estructura optimizada de la Figura 6.44, la cual es consistente con los resultados presentados en los artículos de Giusti et al. (2009), Lopes et al. (2015) y Ren y Zhang (2021).



Figura 6.44: Estructura final optimizada del caso base del segundo ejemplo

La Figura 6.44 muestra que el XFEM nuevamente logró obtener una estructura optimizada con una buena definición de la geometría. En la Figura 6.45 se presentan dos ampliaciones a la geometría de la Figura 6.44, en las cuales se incluyó la malla de elementos finitos. En ambas figuras se muestra que el XFEM también logró representar geometrías oblicuas a la malla sin la necesidad de agregar nodos nuevos. En la Figura 6.45a se visualiza que aquellos componentes estructurales de gran grosor, como ser el arco, se obtuvieron con gran suavidad. Por otro lado, la Figura 6.45b muestra que los tensores que conectan el arco con el tablero, al ser de un espesor reducido, presentaron rugosidades leves.

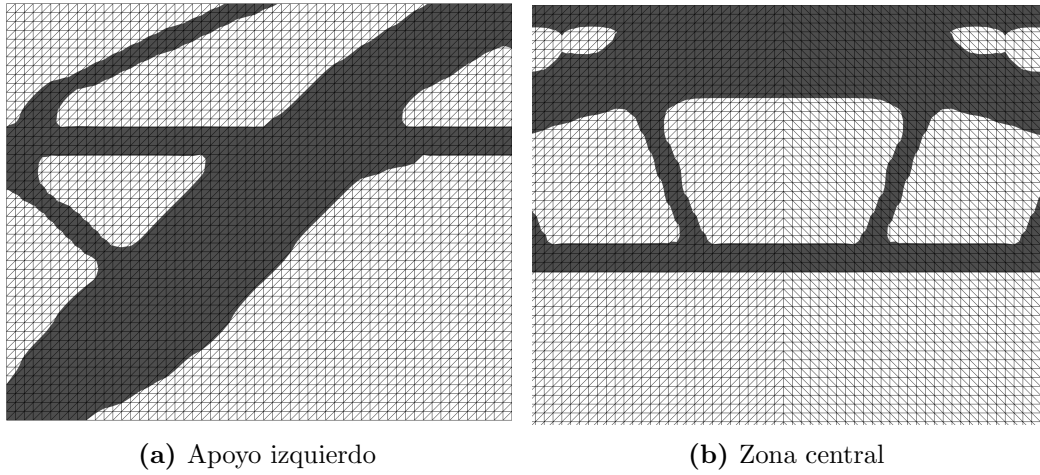


Figura 6.45: Ampliaciones a la estructura optimizada del caso base del segundo ejemplo

En el Capítulo 5 se discutió sobre la importancia de no optimizar la estructura para EC específicos, motivo por el cual en esta tesis se consideró un problema de optimización que surge de la suma de las complacencias de todos los EC presentes en la estructura. Para complementar dicha discusión, se presenta en la Tabla 6.14 las complacencias obtenidas para los EC por separado y la suma de los cuatro, para las geometrías de la Sección 6.2.2 y del caso base.

Se hace notar que si bien la estructura que fue optimizada para únicamente $\mathbf{b}_M$ fue la de la Figura 6.40, la que presentó una complacencia menor para este EC fue la de la Figura 6.38. Un fenómeno similar ocurre con la optimización frente a $\mathbf{q}_2$ y las estructuras de las Figuras 6.38 y 6.44. En el caso de la optimización de $\mathbf{b}_M$ se entiende que el origen de este resultado extraño se asocia a la obligatoriedad del tablero y a la restricción a ocupar el 30% del área disponible. Para converger hacia la estructura de la Figura 6.40 el método

en primer lugar apuntó hacia una estructura similar a la de la Figura 6.41, la cual posee una complacencia para $\mathbf{b}_M$ menor a cualquiera de las presentadas en la Tabla 6.14, y luego agregó material estructural donde pareciera menos problemático. Para la estructura optimizada para $\mathbf{q}_2$ se entiende que el origen de la diferencia se asocia a que el método rápidamente eliminó algunos componentes que en las primeras iteraciones no aportaban rigidez significativa para $\mathbf{q}_2$ pero sí a las otras cargas pero que en la geometría final sí podrían haber sido de gran utilidad.

Tabla 6.14: Complacencias finales obtenidas para los distintos EC por separado y en total para distintas geometrías optimizadas del segundo ejemplo

Estructuras	Complacencias finales			
	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{b}_M$	Total
Figura 6.38	6149,326	528,629	0,667	7207,251
Figura 6.39	18504,474	48,373	2,761	18603,980
Figura 6.40	73979,886	2052,154	0,824	78085,018
Figura 6.44	5770,862	252,676	0,704	6276,918

En la Tabla 6.14 se presenta que la geometría que surgió de optimizar únicamente para $\mathbf{q}_2$ fue la más rígida para las fuerzas de volumen y además tuvo un muy buen desempeño para $\mathbf{q}_2$. A pesar del gran desempeño frente a estas dos cargas, dicha geometría no fue muy buena para las cargas de frenado en el tablero, presentando una complacencia más de 10 veces mayor a la obtenida por la estructura que fue diseñada específicamente para resistir dichas cargas. Por otra parte, la geometría obtenida del caso base, en la cual se consideraron los cuatro EC, resultó la más eficiente, obteniendo una complacencia total más de 15 % menor a la optimizada para resistir únicamente $\mathbf{q}_2$. Lo anterior se basó en que a pesar de que la complacencia obtenida para $\mathbf{b}$ fue algo mayor y la obtenida para $\mathbf{q}_2$ estuvo en el mismo orden, la complacencia para las cargas de frenado fue de aproximadamente la mitad. Finalmente, se destaca que el hecho que la complacencia total para la estructura que fue optimizada únicamente para $\mathbf{q}_2$ no fuera notoriamente mayor a la que optimizada para los cuatro EC, muestra que $\mathbf{q}_2$ es la carga principal.

Del análisis de los dos párrafos anteriores se concluye que la optimización de los cuatro EC considerados de forma simultánea permite obtener un diseño que, si bien es potencialmente menos eficiente para cada EC en particular, es más robusto para la variación de las cargas. Además, como sucedió en este ejemplo, el optimizar para varios EC en simultáneo, puede ayudar a que el método

no elimine componentes de utilidad en las iteraciones iniciales. Se destaca además que el método desarrollado en esta tesis permitió obtener este tipo de soluciones lo que aumenta la generalidad del método frente a lo presentado para la ménsula.

En la Figura 6.46 se presenta la DT de la función objetivo que incluye los términos del LA al final de la optimización. En primer lugar, en dicha figura se observa que en la mayor parte de la estructura $D_T \mathcal{J}^{\text{LA}}$ es positiva, salvo en el tablero y en zonas de pequeño tamaño. En base a la condición suficiente para un mínimo local del problema de optimización dada por la Ecuación (5.45), dicha figura muestra que el método convergió, bajo ciertas tolerancias, a un mínimo local. Los valores negativos en el tablero no son relevantes, puesto que el tablero no fue parte de la geometría modificable. Otro resultado de interés de la Figura 6.46 es la gran variabilidad que puede poseer la DT, lo que queda evidenciado por el valor máximo de 3579505. Es por esta gran variabilidad que el uso de la Ecuación (5.44) fue conveniente.



Figura 6.46: DT de la función objetivo del problema del LA en el resultado del caso base del segundo ejemplo

Luego, en la Figura 6.47 se presenta en formato tridimensional la función de nivel obtenida al final de las iteraciones. Al igual que en la ménsula, se ve que el método de optimización desarrollado en esta tesis tiende a dejar las zonas con vacíos con un valor uniforme de Ψ . Por otro lado, se ve que las zonas, exceptuando el tablero, correspondientes al material estructural presentaron una distribución similar a la presentada en la Figura 6.46.

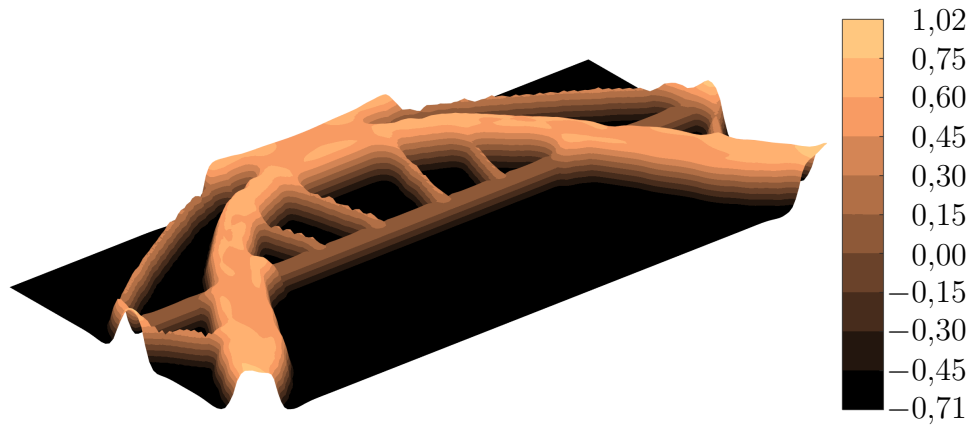


Figura 6.47: Función de nivel en el resultado del caso base del segundo ejemplo

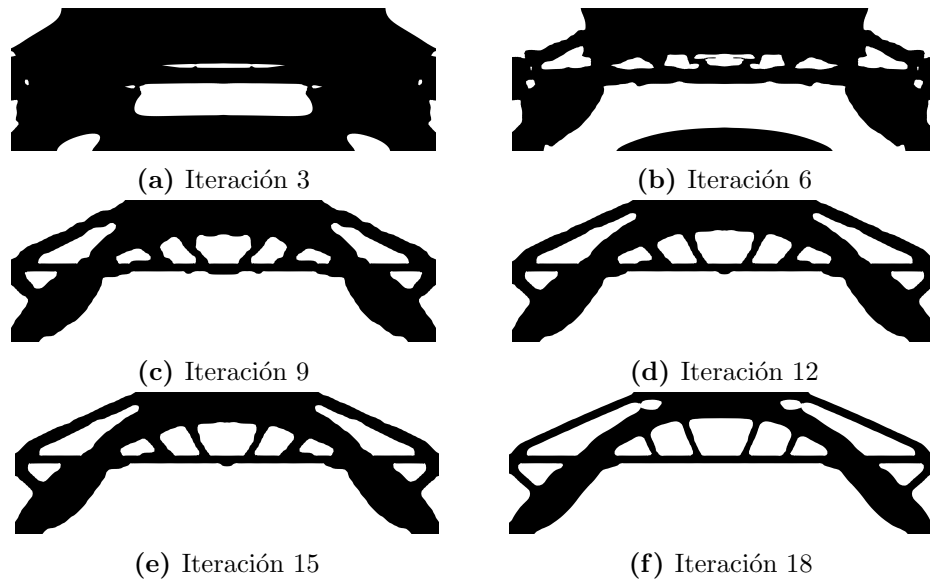


Figura 6.48: Resultados intermedios para el caso base del segundo ejemplo

Al igual que lo realizado con la ménsula, en la Figura 6.48 se presentan las geometrías obtenidas en iteraciones intermedias a modo de animación del método. En la Figura 6.48a se ve como el primer gran hueco surge en el centro de la estructura, dado por una zona de pequeñas tensiones por estar esta zona sometida a tensiones análogas a las de flexión pura. Dada la obligatoriedad de mantener el tablero, dicho hueco queda cortado por su presencia. Luego la Figura 6.48b muestra el avance del método, donde se nota que en las primeras iteraciones existe una zona inferior de material estructural, en general flotante, que tarda en ser eliminada. Dicha zona fue presentada también en el artículo de Ren y Zhang (2021). Finalmente, las Figuras 6.48c a 6.48f muestran el avance

del método, ya con la topología final, ajustando y regularizando la geometría para llegar al objetivo de área ocupada.

Finalmente, en la Figura 6.49 se presenta el comportamiento en función del número de iteración de los distintos funcionales del problema de optimización estructural. En la Figura 6.49a se presenta la complacencia con una curva continua de color azul y $\mathcal{J}^{\text{LA}}$ con una curva punteada roja. Los saltos en $\mathcal{J}^{\text{LA}}$ se asocian a actualizaciones de los parámetros del LA. Por otra parte, en la Figura 6.49b se presenta el cambio del área ocupada por la estructura, donde las líneas punteadas rojas presentan la tolerancia dada para el valor objetivo.

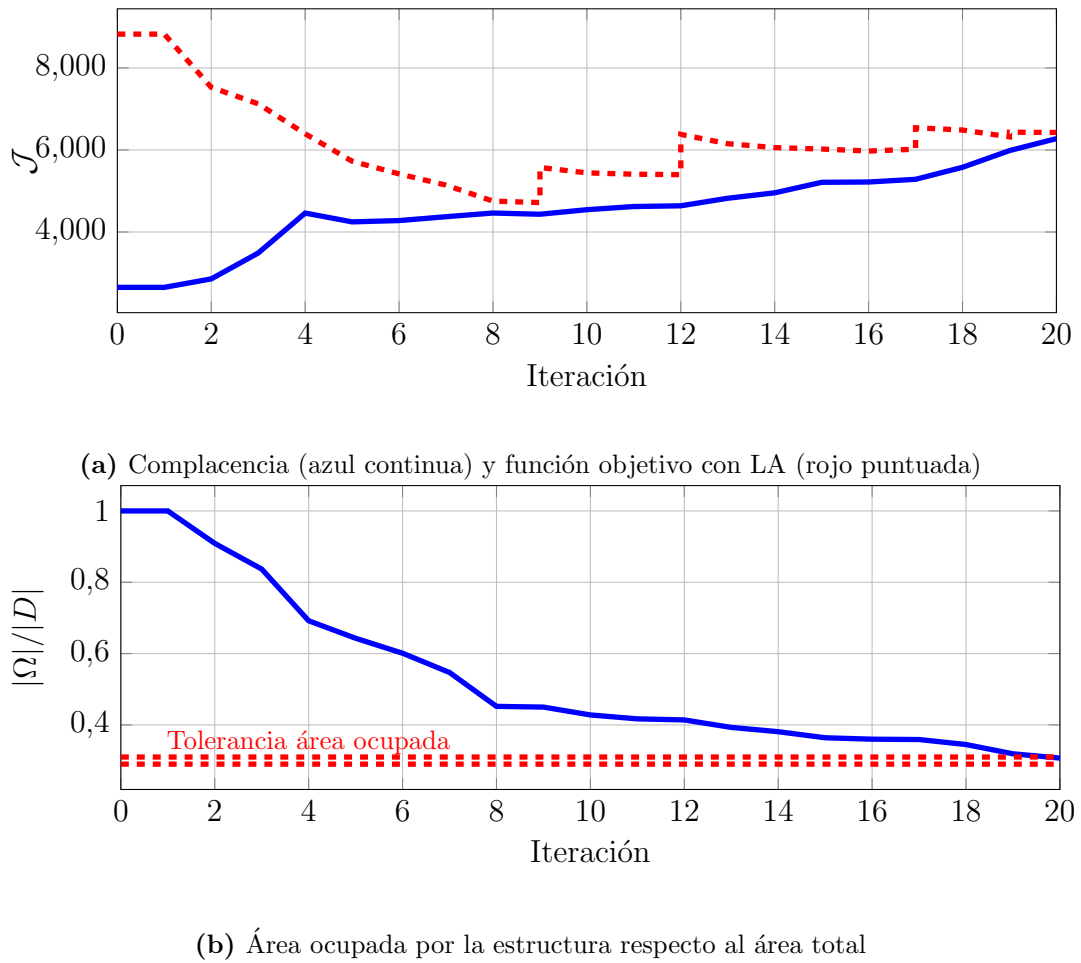


Figura 6.49: Avances de las componentes del LA en el caso base del segundo ejemplo

En la Figura 6.49 se obtuvo un rápido descenso del área ocupada hasta la iteración 8, en la cual se tuvo un área ocupada de aproximadamente 45 % y luego el método continúa removiendo material hasta alcanzar el objetivo. Por otro lado, se tuvo un aumento controlado de la complacencia a medida que se

reducía el área ocupada por la estructura, pero siempre logrando un descenso del LA.

6.2.4. Análisis de decisiones algorítmicas

En esta subsección se continúa el análisis de las decisiones asociadas al método de optimización estructural, iniciado con la ménsula en la Sección 6.1.2. En primer lugar se presenta que en este caso de mayor porte la simetría de la malla sigue siendo conveniente para obtener geometrías simétricas en problemas intrínsecamente simétricos. Luego se presenta que el mantener el tablero de forma obligatoria no fue simplemente parte de la definición del problema sino que además fue necesario para obtener buenas soluciones.

6.2.4.1. Simetría de la malla

Para verificar la conveniencia de utilizar mallas simétricas en problemas intrínsecamente simétricos, se presenta en la Figura 6.50 la geometría obtenida de repetir el caso base con idénticos parámetros pero utilizando una malla no simétrica con respecto al eje vertical central. Nuevamente, al igual que lo sucedido con la ménsula en la Sección 6.1.2.1, la estructura obtenida no es simétrica, como si sucedió en el caso de la Figura 6.44.

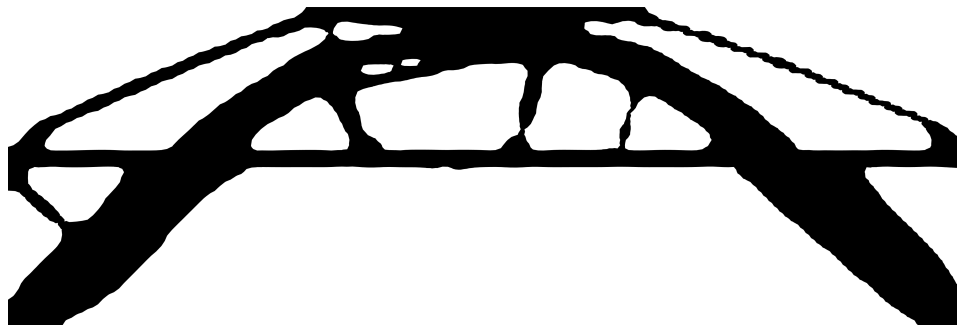


Figura 6.50: Estructura obtenida en el segundo ejemplo en caso de no utilizar una malla simétrica

Los motivos por los cuales no se obtuvieron resultados simétricos son análogos a los discutidos para la ménsula. Por lo tanto, se concluye que aún en este problema de mayor porte, en el cual las cargas son simétricas en vez de anti-simétricas, la simetría de la malla es conveniente para lograr obtener resultados simétricos.

Se hace notar que la simetría de la geometría final, a pesar de ser esperable en los problemas simétricos, no es una condición necesaria para obtener buenos resultados. Por ejemplo, la estructura presentada en la Figura 6.50 posee una complacencia final de 6496,998, la cual es menos de un 5 % mayor que la obtenida por el caso de base.

6.2.4.2. Obligatoriedad del tablero para todos los EC

Según se indicó en la presentación del problema dada en la Sección 6.2.1, la franja de altura 0,05 que representa el tablero del puente debía ser mantenida de forma obligatoria. Lo anterior puede considerarse como un criterio de diseño, en el cual el tablero debe ser obligatoriamente mantenido para asegurar el tránsito sobre la estructura. Luego, en las Secciones 6.2.2 y 6.2.3, se presentó la optimización bajo dicho criterio de diseño y se obtuvo que el método desarrollado es capaz de obtener buenas soluciones en problemas donde es mandatorio conservar partes de la estructura. En esta sección se presenta como la obligatoriedad de mantener el tablero fue necesario además para obtener buenos resultados del problema.

Se hizo la prueba considerando exactamente los mismos parámetros que el caso base pero sin incluir la obligatoriedad de mantener el tablero. El método en este caso no logró converger y se presenta en la Figura 6.51 las geometrías obtenidas en tres iteraciones consecutivas. Las tres figuras muestran que las geometrías obtenidas son bastante malas. Además, se tiene que en las iteraciones consecutivas el tablero desaparece, reaparece y vuelve a desaparecer.

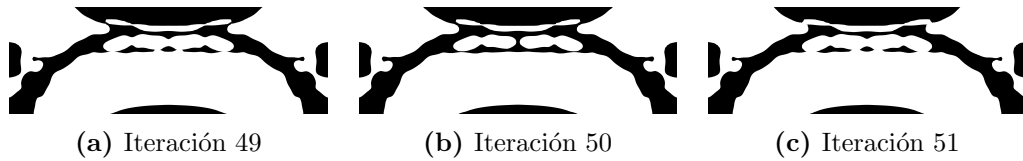


Figura 6.51: Geometrías obtenidas en las iteraciones 49 a 51 para el segundo ejemplo en caso de no hacer obligatorio el tablero

El motivo detrás de la no convergencia y las desapariciones y reapariciones sucesivas del tablero se asocia a las fuerzas de contacto aplicadas sobre la franja superior del tablero. Al ser las fuerzas de contacto distribuidas en una línea, no generan un aumento sustancial de las tensiones en su punto de aplicación. Por lo tanto, cuando el tablero se encuentra presente, la DT de la complacencia en el tablero suele ser reducida, según presentó la Figura 6.46. Al ser la DT

reducida, el método de optimización estructural tiende a eliminar esta parte tal y como presenta el pasaje de la Figura 6.51b a la Figura 6.51c. Luego, como las cargas pasan a estar aplicadas en el material blando, se generan las mismas tensiones que ocurrían cuando se aplicaban en el material estructural pero las deformaciones son mucho mayores que originalmente; en el caso del contraste utilizado en esta tesis, 1000 veces mayores. Por lo tanto, la DT de la complacencia en el tablero suele ser muy grande cuando el tablero no se encuentra presente, lo que genera que el método tienda a reincorporar dicho componente, tal y como presenta el pasaje de la Figura 6.51a a la Figura 6.51b.

A partir del análisis realizado en el párrafo anterior, para el método de optimización estructural desarrollado en esta tesis es necesario que zonas de aplicación de fuerzas de contacto sean mantenidas de forma obligatoria para asegurar la convergencia. Lo anterior no fue necesario en el caso de la fuerza concentrada aplicada en la ménsula puesto que genera tensiones elevadas en su punto de aplicación. Estas tensiones elevadas aseguran que la DT siempre sea elevada en el punto de aplicación de la fuerza, lo que asegura que el método no busque retirar el material estructural de allí.

6.2.4.3. Obligatoriedad del tablero para el caso solo con fuerzas de volumen

Adicionalmente se decidió repetir la prueba de optimización para el caso en el que solamente se aplicaran las fuerzas de volumen. En primer lugar para mostrar que, al igual que las cargas concentradas, las fuerzas de volumen no requieren considerar el mantenimiento de alguna zona de la estructura. En segundo lugar para notar la geometría obtenible por el método para el caso de optimización bajo fuerzas de volumen en el caso de no aplicar la restricción de conservar el tablero.

Para este problema se volvió a considerar los mismos parámetros utilizados en la Sección 6.2.2.3 pero sin considerar la obligatoriedad del tablero. En este caso el método convergió en 28 iteraciones y obtuvo la geometría presentada en la Figura 6.52. La geometría obtenida para este problema es muy buena y posee gran similitud con las obtenidas por Novotny et al. (2021) y algunas obras tradicionales de puentes romanos.

Al comparar el resultado de la Figura 6.52 con el obtenido originalmente en la Figura 6.40 se nota como originalmente la obligatoriedad del tablero forzó



Figura 6.52: Geometría optimizada obtenida para el segundo ejemplo en caso de solamente considerar b y no considerar obligatorio el tablero

al método a obtener una geometría menos óptima. Lo anterior queda además respaldado por el hecho que la complacencia obtenida por la estructura sin la restricción del tablero es de 0,274, mientras que con el tablero fue de 0,824.

Finalmente se hace notar que nuevamente se nota la presencia de dos componentes verticales de gran grosor en los extremos de la estructura, los cuales surgieron de la restricción al área objetivo de 30 %. En este caso, si se hubiera eliminado la restricción del área final, la estructura que se hubiera obtenido sería la vacía, puesto que es la que menor complacencia genera. Lo anterior fue lo discutido originalmente en el artículo de Novotny et al. (2021) por el cual incluyeron una penalidad al área ocupada, la cual en esta tesis no es necesaria dado que se asegura un objetivo de área a ocupar.

6.2.5. Análisis de sensibilidad

Tras lo presentado para la ménsula en el Sección 6.1.3, se presenta en esta sección, en este caso de mayor complejidad, la sensibilidad a los tres parámetros para los cuales el método resultó más sensible. Por lo tanto, se presenta en primer lugar la sensibilidad al tamaño de malla y fracción objetivo del área ocupable. Luego se presenta la sensibilidad al coeficiente de penalidad cuadrática del LA y finalmente se presenta la sensibilidad al coeficiente de suavizado inicial.

6.2.5.1. Sensibilidad al tamaño de malla y a la fracción objetivo del área ocupable

Para las pruebas de análisis de sensibilidad al tamaño de malla y a la fracción objetivo del área ocupable, se consideraron cinco tamaños de malla

distintos, los cuales se denominaron: muy fino, fino, base, grueso y muy grueso. Todas las mallas fueron consideradas estructuradas con simetría respecto al eje vertical central. En la Tabla 6.15 se presenta la cantidad de divisiones en ambas direcciones, la cantidad de divisiones que se consideraron en el espesor del tablero y la cantidad de nodos y elementos que presentaron cada una de las cinco mallas. Se hace notar que la malla base coincide con la que fue utilizada en las pruebas anteriores y en las pruebas de comparación de métodos de la Sección 6.2.6. Por otra parte, se consideraron cinco objetivos del área ocupable, desde un 20 % ($M = 0,2$) hasta un 40 % ($M = 0,4$) con un paso de 5 %. En total se consideraron 25 pruebas para este análisis.

Tabla 6.15: Características de las mallas que se consideraron para las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla del segundo ejemplo

Malla	Div. hor.	Div. vert.	# div. tablero	$\mathcal{N}_{no}$	$\mathcal{N}_{el}$
Muy fina	540	180	9	97921	194400
Fina	360	120	6	43681	86400
Base	180	60	3	11041	21600
Gruesa	120	40	2	4961	9600
Muy gruesa	60	20	1	1281	2400

En todas las pruebas se consideraron los mismos parámetros que en el caso base de la Sección 6.2.3, exceptuando c y ς_0 , los cuales se consideraron según se presenta en la Tabla 6.16. Nuevamente se procuró que pruebas con idéntica malla tuvieran el mismo coeficiente de suavizado inicial y pruebas con idéntico objetivo de área ocupable tuvieran el mismo coeficiente de penalidad cuadrática inicial.

En la Figura 6.53 se presentan las geometrías obtenidas para las 25 pruebas de este análisis de sensibilidad. En primer lugar se ve que para todas las mallas de elementos finitos y para todos los objetivos de área a ocupar, los resultados fueron bastante buenos, presentando geometrías acordes a lo esperado. Además, a diferencia de lo que sucedió para la ménsula, no se notó que la malla muy gruesa no fuera capaz de resolver los casos con fracciones pequeñas del área objetivo. De todas formas, se aclara que la malla muy gruesa del puente fue bastante más fina que la de la ménsula. Adicionalmente, los resultados fueron de geometrías por lo general suaves o levemente rugosas. La excepción a la afirmación anterior son los resultados de la malla muy gruesa que sí fueron bastante rugosos.

En la Figura 6.53 se notó que a mayor finura de la malla mayor fue la

Tabla 6.16: Parámetros c y ς_0 empleados en las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla y M del segundo ejemplo

Malla		Fracción objetivo del área ocupada				
		$M = 0,20$	$M = 0,25$	$M = 0,30$	$M = 0,35$	$M = 0,40$
Muy fina	c	550	2300	2800	1000	1300
	ς_0	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15
Fina	c	550	700	2800	1000	1300
	ς_0	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30
Base	c	550	2300	2800	3300	3500
	ς_0	0,35	0,45	0,45	0,45	0,45
Gruesa	c	550	2100	2800	3300	3400
	ς_0	0,30	0,35	0,50	0,50	0,50
Muy gruesa	c	550	1600	2800	2500	2700
	ς_0	0,10	0,05	0,30	0,20	0,20

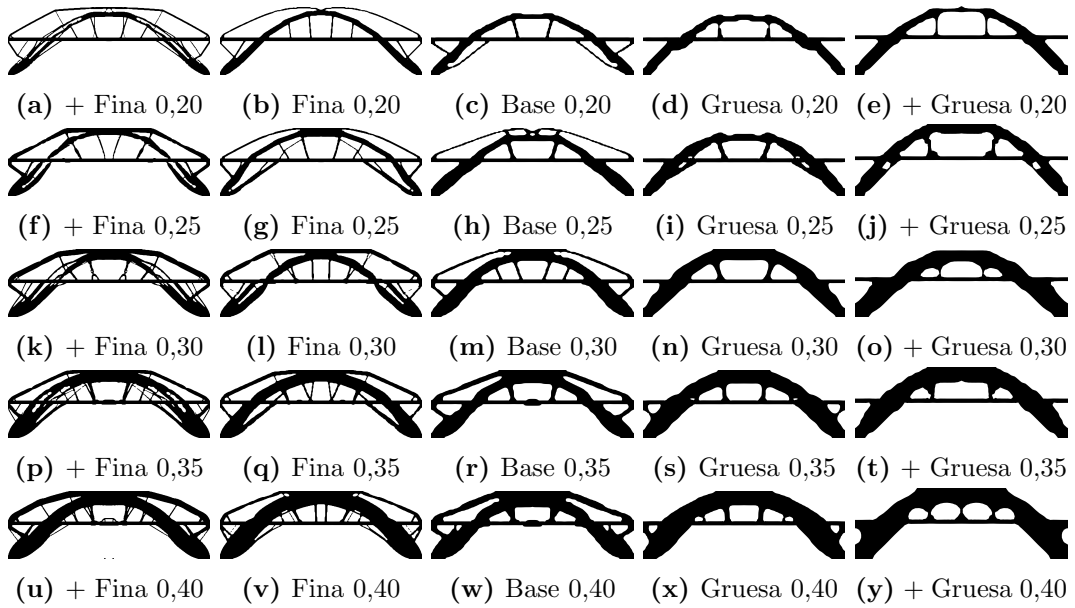


Figura 6.53: Estructuras obtenidas para el segundo ejemplo del análisis de sensibilidad al tamaño de malla y objetivo de área ocupable

cantidad de huecos presentes en la geometría final, lo que es acorde con los resultados presentados para la ménsula. En lo referente al objetivo de área a ocupar, en las mallas base a muy gruesa la topología de la estructura final no se modificó significativamente, sino que las principales diferencias resultaron en el grosor de los diversos componentes. En cambio, para las mallas muy fina y fina, sí se notaron cambios apreciables entre las geometrías obtenidas para distintos objetivos del área ocupable, lo que está asociado a la mayor libertad

de diseño que poseen estas mallas.

Los resultados asociados a la malla muy fina resultaron, en términos generales, muy complejos, con numerosos componentes de pequeño espesor. Lo anterior no fue muy beneficioso para dichas mallas ya que además no aparentan ser los mejores resultados. Se destaca además que en los objetivos de área ocupada elevados se suele generar algún tipo de engrosamiento o estructura adicional en el centro del tablero para aumentar su rigidez. Finalmente, la última diferencia notable entre los distintos resultados es que la estructura exterior al arco no se mantuvo en los resultados de las mallas más gruesas y en las mallas más finas tuvo un mayor grosor. Si bien el motivo de mantener dicha estructura exterior se asocia a la tendencia a converger a mínimos locales, se destaca que, según se discute en los próximos análisis de sensibilidad, los resultados que presentaron dicha estructura tendieron a arrojar menores valores de complacencia final.

A continuación, en la Tabla 6.18 se presentan las complacencias finales obtenidas en las 25 pruebas anteriores. Nuevamente, para que los resultados sean comparables, las complacencias se calcularon interpolando la función de nivel de las mallas más gruesas a la muy fina y realizando el análisis estructural con esta última. De forma similar a lo sucedido con la ménsula, para el objetivo grande de área a ocupar, todas las mallas obtuvieron geometrías con complacencias similares entre sí y para $M = 0,2$ fue la malla muy fina la que obtuvo la mejor geometría, la cual tuvo una complacencia significativamente menor al resto. Si bien en todos los casos las geometrías con menores complacencias fueron obtenidas con las mallas fina y muy fina, se hace notar que para $M = 0,4$ todas las mallas obtuvieron geometrías con complacencias similares entre sí y para $M = 0,25$ y $M = 0,3$ la malla base también obtuvo muy buenos resultados. Por lo tanto se vuelve a concluir que para el método de esta tesis no es conveniente emplear mallas excesivamente finas, a menos que el objetivo de área a ocupar sea muy reducido.

Finalmente, en la Tabla 6.18 se presenta el costo computacional, según el tamaño de malla, para las tres tareas principales del algoritmo de optimización estructural. Estas tareas son el análisis estructural, el cálculo de la DT de la complacencia y el suavizado de la geometría. Al ser el número de EC mayor que uno, la tabla se la realizó considerando el mismo procedimiento que en el algoritmo de optimización estructural. Lo anterior implica que el análisis estructural que se presenta en la tabla incluye los cuatro cálculos de la solución

Tabla 6.17: Complacencias finales obtenidas en las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla y M para el segundo ejemplo

Malla	Complacencia final				
	$M = 0,20$	$M = 0,25$	$M = 0,30$	$M = 0,35$	$M = 0,40$
Muy gruesa	13929,59	11552,41	8574,86	8774,02	5742,26
Gruesa	14228,86	9702,97	8712,73	6536,39	5490,36
Base	12361,51	10030,75	6858,97	6518,79	5571,80
Fina	10978,99	8526,20	7014,28	5818,11	5214,75
Muy fina	10283,48	9066,36	6688,51	5848,39	5252,62

del XFEM para los cuatro EC, ensamblando la matriz de rigidez una única vez. Además, el cálculo de la DT incluye los cuatro cálculos para los cuatro EC. Finalmente, el suavizado solamente se hace para una geometría específica y no implica un mayor costo a mayor número de EC. Además, de forma análoga a lo hecho con la ménsula, el cálculo de los costos computacionales se hizo para las cinco mallas con el resultado final de las pruebas con $M = 0,3$.

Tabla 6.18: Costo computacional de las distintas tareas, según el tamaño de malla, para el segundo ejemplo

Malla	Tareas a analizar					
	Anál. estructural		$D_T W^e$		Suavizado	
	Tiempo (s)	Memoria (MB)	Tiempo (s)	Memoria (MB)	Tiempo (s)	Memoria (MB)
Muy gruesa	2,870	2,95	1,040	0,04	0,094	$\leq 0,01$
Gruesa	7,696	8,83	2,368	$\leq 0,01$	0,069	$\leq 0,01$
Base	19,323	20,86	5,396	1,03	0,074	$\leq 0,01$
Fina	89,379	72,38	16,783	1,02	0,082	0,50
Muy fina	277,161	149,54	34,803	1,04	0,093	1,50

En la Tabla 6.18 se repite el resultado de que el suavizado en mallas estructuradas según la técnica de Garcia (2010) posee un costo computacional despreciable frente al resto de las tareas. Por otra parte, en todos los casos, el análisis estructural resultó ser la tarea más costosa, aún al considerar varios EC, y aumenta rápidamente el costo con la finura de la malla. Por lo tanto, una vez más, en la elección de la malla es conveniente escoger la malla más gruesa posible tal que permita obtener buenos resultados, gracias a que el XFEM permite obtener una buena definición de la geometría.

Finalmente, se destaca que el cálculo de la DT se hace una única vez por iteración, mientras que el análisis estructural y el suavizado se hacen en cada

una de las subiteraciones de la búsqueda lineal del método. Por lo tanto, al menos en los casos en que no se controlen las máximas tensiones, en caso de querer reducir los tiempos de cálculo del método se deberá priorizar reducir el costo del análisis estructural.

6.2.5.2. Sensibilidad al coeficiente de penalidad cuadrática del LA

Para analizar en el puente la sensibilidad al coeficiente de penalidad cuadrática del LA se realizaron 30 pruebas, con los mismos parámetros que el caso base, modificando c desde 100 hasta 3000 con un paso de 100. En la Figura 6.54 se presentan las geometrías finales de dichas 30 pruebas.

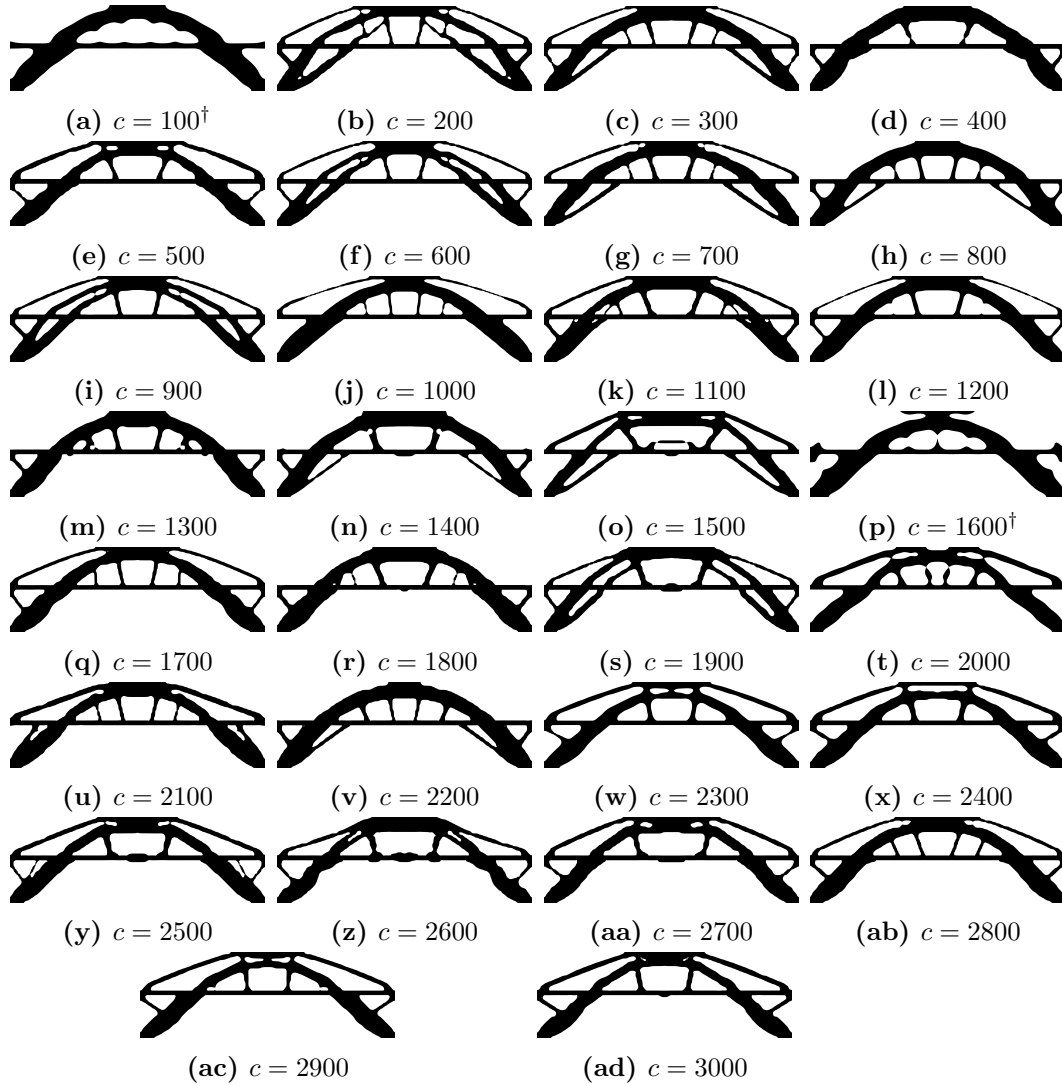


Figura 6.54: Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a c del segundo ejemplo

Las Figuras 6.54a y 6.54p tienen una alerta dada por el símbolo † en su pie de figura para representar que para dichos coeficientes el método no convergió. En ambos casos, la geometría presentada es la asociada a la centésima iteración. Al ser 2 pruebas en 30 las que no convergieron, se tiene que el método de optimización estructural sigue presentando una buena tasa de éxito en este caso de mayor complejidad que la ménsula, si bien la probabilidad de fallo fue mayor.

Nuevamente se tiene que el método es bastante sensible a c , presentándose bastante variación en las geometrías de los resultados. Todos los resultados que convergieron mantuvieron una geometría de arco apoyado en los apoyos inferiores que sostiene al tablero en base a algunos tensores. Los únicos casos en que el arco no mantiene su geometría característica son las Figuras 6.54b y 6.54o, donde la geometría del arco es similar a la de un reticulado. Por otra parte, la mayoría de los resultados conservaron la estructura exterior del arco que no se encontraba presente en los resultados de las mallas más gruesas de la Figura 6.53. Adicionalmente, la mayoría de las geometrías presentaron dos tensores uniendo el arco con el tablero, si bien es esperable que las que presentaron cuatro tensores hayan obtenido una complacencia menor.

A pesar de la gran sensibilidad presentada, se obtuvo que la mayoría de los resultados, salvo aquellos que presentaron componentes muy finos como la Figura 6.54y, obtuvieron geometrías suaves o levemente rugosas. Además, salvo los casos que no convergieron y las Figuras 6.54b, 6.54o y 6.54t las geometrías obtenidas son similares a las obtenidas por Giusti et al. (2009) y Lopes et al. (2015).

A continuación en la Figura 6.55 y en la Tabla 6.19 se presentan los resultados cuantitativos del análisis anterior, no considerando los casos que no convergieron. En la Figura 6.55 se nota que no hay una relación clara entre la complacencia final y c pero sí parece ser que los valores mayores del coeficiente de penalidad permitieron un menor número de iteraciones totales. Por otro lado, los valores de complacencia final se mantuvieron más estables que para la ménsula, sin obtenerse valores significativamente mayores al resto. En contraposición, sí se observaron varios casos donde el número de iteraciones fue mucho mayor al promedio, alcanzándose las 300 iteraciones para $c = 800$.

En la Tabla 6.19 se nota que el caso considerado como de base resultó muy bueno, puesto que obtuvo una complacencia apenas mayor al mejor de los casos ($c = 300$) y apenas cuatro iteraciones más que el que convergió más rápido

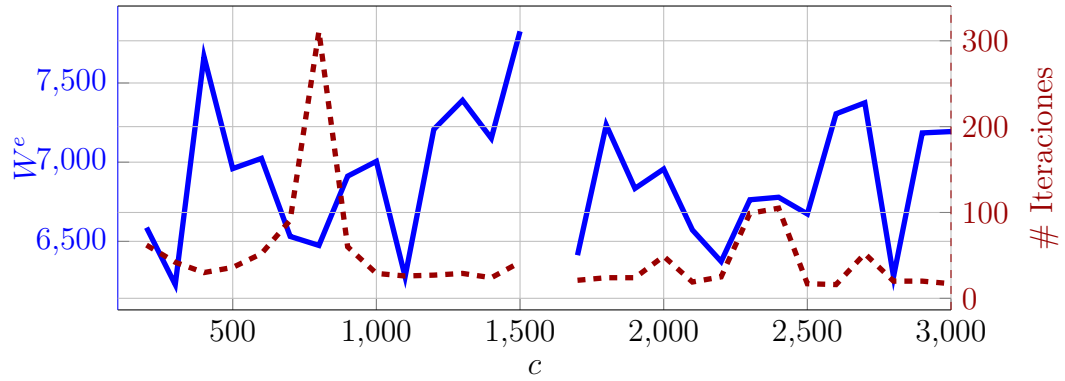


Figura 6.55: Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a c para el segundo ejemplo

Tabla 6.19: Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a c para el segundo ejemplo

Estadístico	Complacencia final	Cantidad de iteraciones
Promedio	6898,910	49
Desv. estándar	426,179	57
Máximo (¿Dónde?)	7826,189 ($c = 1500$)	311 ($c = 800$)
Mínimo (¿Dónde?)	6226,979 ($c = 300$)	16 ($c = 2600$)

($c = 2600$). Finalmente, se destaca que los mejores tres resultados, dados por $c \in \{300, 1100, 2800\}$ y las Figuras 6.54c, 6.54k y 6.54ab, respectivamente, fueron casos en los que se mantuvo la estructura exterior al arco. Además, salvo el resultado de la Figura 6.54v el cual es muy bueno, los resultados donde no se mantuvo la estructura exterior resultaron menos eficientes en términos generales que los que sí la mantuvieron.

6.2.5.3. Sensibilidad al coeficiente de suavizado inicial

Para el análisis de sensibilidad al coeficiente de suavizado inicial en el puente se hicieron 12 pruebas manteniendo los mismos parámetros del caso base, salvo ς_0 que se varió desde $\varsigma_0 = 0$ hasta $\varsigma_0 = 0,55$ con un paso de 0,05. Se presenta en la Figura 6.56 las geometrías obtenidas para las doce pruebas, donde se tiene que en todos los casos el método logró converger. En primer lugar se tiene que todas las pruebas arrojaron geometrías similares a lo esperado según la bibliografía y solamente una de las pruebas terminó con algún componente flotante. A su vez, se tiene que todas las pruebas con $\varsigma_0 > 0,05$ mantuvieron la estructura exterior del arco y solamente los resultados con $\varsigma_0 < 0,2$ presen-

taron geometrías muy rugosas. Finalmente se concluye que, al igual que en la ménsula, el método es muy sensible al coeficiente de suavizado inicial.

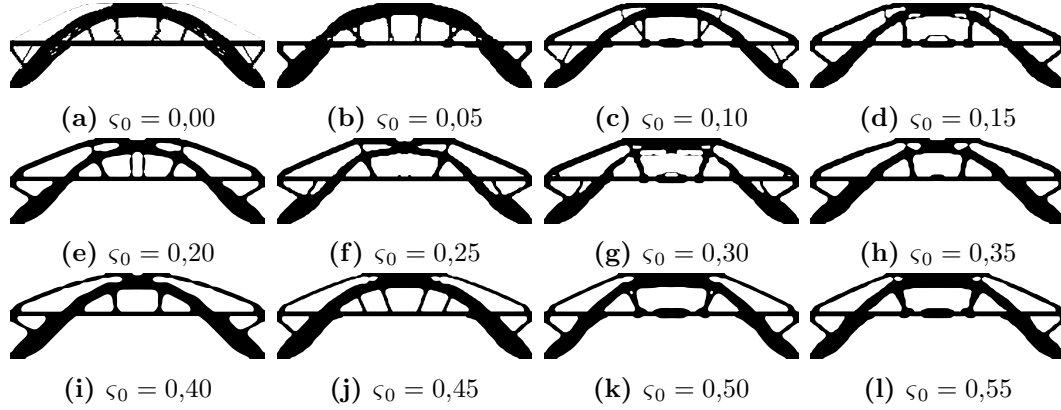


Figura 6.56: Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a ς_0 del segundo ejemplo

Se presenta en la Figura 6.57 los resultados de complacencia final y cantidad de iteraciones para todas las pruebas realizadas. A diferencia de la ménsula, no se obtuvo ninguna tendencia clara de la dependencia de los resultados con el coeficiente de suavizado inicial. Además, se ve que la mayoría de las pruebas presentaron menos de 30 iteraciones, si bien existe una en la cual le llevó al método más de 150 para lograr converger.

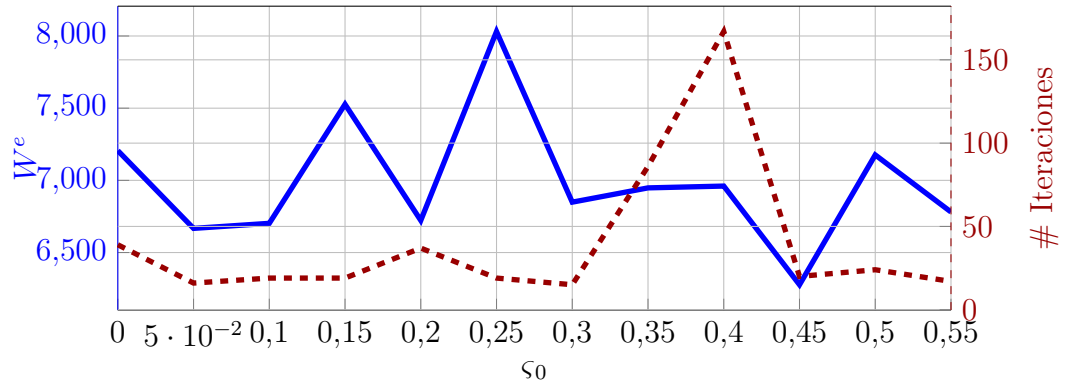


Figura 6.57: Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a ς_0 para el segundo ejemplo

Finalmente, se presenta en la Tabla 6.20 los principales estadísticos obtenidos de este análisis de sensibilidad. Se obtuvo que a nivel de complacencia final, todos los resultados obtuvieron valores cercanos entre sí, con un coeficiente de variación menor al 10 %. En contraposición, el número de iteraciones fue más

variable, con un valor mínimo de 15 y un valor máximo de 167. Además, el caso de base se presentó como un muy buen resultado, puesto que presentó la mínima complacencia, la cual es un 10 % menor que el promedio, y presentó un número de iteraciones no mucho mayor que el mínimo.

Tabla 6.20: Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a ς_0 para el segundo ejemplo

Estadístico	Complacencia final	Cantidad de iteraciones
Promedio	6987,269	40
Desv. estándar	455,915	45
Máximo (¿Dónde?)	8031,089 ($\varsigma_0 = 0,25$)	167 ($\varsigma_0 = 0,40$)
Mínimo (¿Dónde?)	6276,918 ($\varsigma_0 = 0,45$)	15 ($\varsigma_0 = 0,30$)

6.2.6. Comparación entre métodos de análisis

Finalmente, en esta sección se presenta la comparación entre los distintos métodos para el ejemplo del puente, según lo discutido en la Sección 5.6. Este análisis complementa al análisis hecho para la ménsula, puesto que estudia las diferencias de desempeño en un caso con varios EC. Para estas pruebas se consideraron la misma malla del caso base y los mismos parámetros, exceptuando el coeficiente de penalidad cuadrática del LA y el coeficiente de suavizado inicial, los cuales se tomaron según presenta la Tabla 6.21. La elección de ς_0 para la prueba con el XFEM de Moës et al. (2003) y la elección de c para todas las pruebas surgieron de respectivos análisis de sensibilidad, escogiendo parámetros tales que los métodos tuvieran un muy buen desempeño entre complacencia final y cantidad de iteraciones. A continuación se presentan las geometrías obtenidas con los distintos métodos de análisis y posteriormente se discuten los resultados de los criterios de comparación. Se recuerda que, según lo discutido en la Sección 6.1.4, no se incluyen los métodos H, I y J según la Tabla 5.1 por requerir un tiempo de cálculo excesivo.

Tabla 6.21: Parámetros utilizados en las pruebas de comparación entre métodos para el segundo ejemplo

Parámetro	Método							
	A	B	C	D	E	F	GLA	G1 a G3
c	2800	1600	1200	1600	2300	2800	2000	2400
ς_0	0,45	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

En primer lugar, en la Figura 6.58 se presentan las geometrías obtenidas para las pruebas con el XFEM. Las Figuras 6.58a y 6.58c presentan los resultados utilizando el XFEM desarrollado en esta tesis y las Figuras 6.58b y 6.58d presentan los resultados utilizando la propuesta del XFEM de Moës et al. (2003). Nuevamente se obtuvo lo adelantado en el Capítulo 4 de que la propuesta de Moës et al. (2003) permite obtener buenos resultados para el problema de minimizar la complacencia, aún en el caso en el cual se consideren fuerzas de volumen. Finalmente, se hace notar que en este problema los métodos del XFEM sin suavizado obtuvieron geometrías similares a los métodos con suavizado, con algún componente adicional, pero con una rugosidad significativamente mayor.

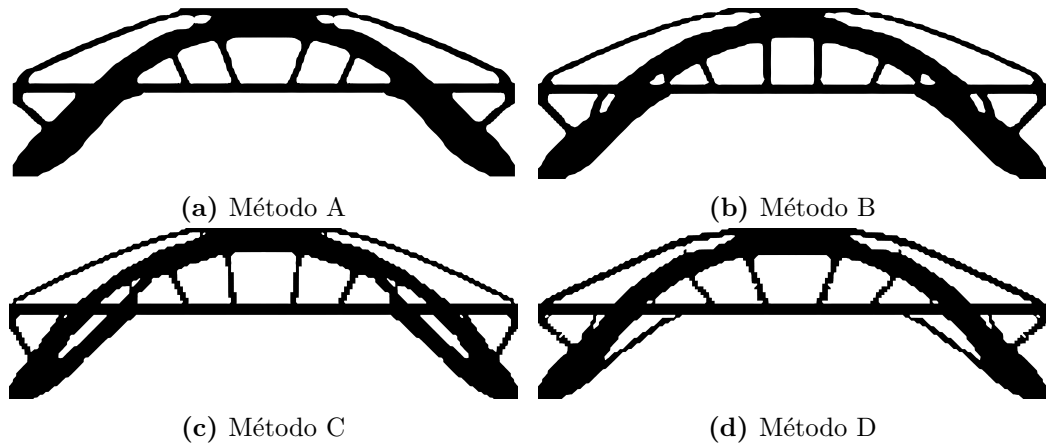


Figura 6.58: Geometrías finales del segundo ejemplo obtenidas por los métodos con XFEM. Métodos A a D según la Tabla 5.1

A pesar de lo mencionado en el párrafo anterior de que el método de Moës et al. (2003) permite obtener muy buenos resultados, a continuación se presenta un caso en el cual el problema de interacción entre interfases cercanas genera dificultades para el problema de optimización estructural en el caso que no se utilice suavizado. Si bien la Figura 6.58d presentó un buen resultado, en el cual el XFEM de Moës et al. (2003) generó una buena geometría; si se hubiera considerado $c = 1400$ el resultado sería el presentado en la Figura 6.59, donde se tiene que los tensores centrales son discontinuos.

Para mostrar por qué la propuesta de Moës et al. (2003) admite resultados como el de la Figura 6.59, se presenta en la Figura 6.60 las deformadas calculadas por ambas propuestas del XFEM para dicha geometría con la carga q_2 . Ambas figuras se realizaron con la misma escala de deformada y la misma

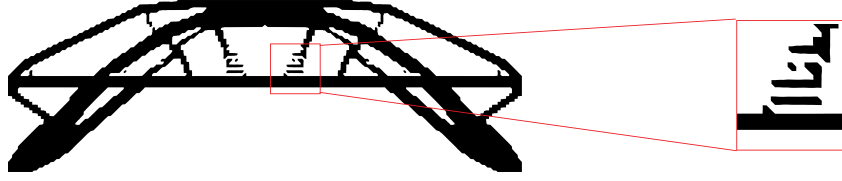


Figura 6.59: Geometría ejemplo del problema de interacción entre interfaces de Moës et al. (2003) en resultados del puente

escala de colores, la cual utiliza los colores más cálidos para los mayores desplazamientos. La Figura 6.60b muestra que los tensores discontinuos no deberían ser capaces de sostener el tablero. De todas formas, se debe notar que el material blando sí colabora levemente a la rigidez de dichos tensores, lo que queda evidenciado porque los fragmentos flotantes se ubican en la prolongación del tensor en la configuración deformada. Por otra parte, la Figura 6.60a muestra que la propuesta de Moës et al. (2003) considera que los tensores sí aportan una rigidez apreciable, lo que es asociado al problema de interacción entre interfaces cercano discutido en la Sección 4.1.2. Como los tensores aportan rigidez, el método no tiene motivos para modificar su geometría. Por lo tanto, si bien las dificultades analizadas de la propuesta de Moës et al. (2003) no impiden que el método pueda obtener buenos resultados para minimización de complacencia; el método no está exento de sufrir errores por dichas dificultades.



(a) Análisis con Moës et al. (2003) (b) Análisis con XFEM de la Sección 4.2

Figura 6.60: Deformadas de la estructura de la Figura 6.59 para el EC de q_2 según las propuestas del XFEM

En la Figura 6.61 se presentan los resultados obtenidos con el FEM sin remallados durante la ejecución del método. La Figura 6.61d presenta una alerta dada por el símbolo $\dagger$ en su pie de figura para mostrar que no logró converger. La geometría presentada en dicha figura es la última iteración alcanzada, la cual tiene $|\Omega|/|D| \approx 48\%$. El motivo de la no convergencia se asocia a que el método fue muy costoso computacionalmente, dado que llegar a la geometría

de la Figura 6.61d tomó más de cinco días, y siempre el computador se apagó o reinició antes de finalizarla. En la Figura 6.61a se nota la presencia de zonas grises e incluso de zonas ambiguas como las presentadas anteriormente en la Figura 6.31. Vale notarse que la conexión entre los tensores y el tablero fueron en todos los casos zonas grises.

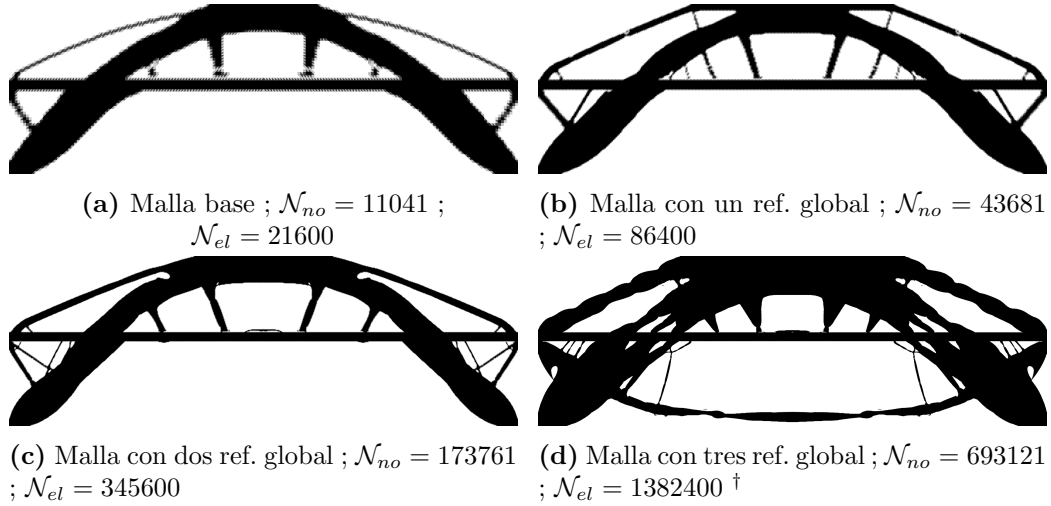


Figura 6.61: Geometrías finales del segundo ejemplo obtenidas por el FEM sin remallado desde distintas mallas. Método E según la Tabla 5.1

En la Figura 6.62 se presentan los resultados obtenidos con el FEM con refinamiento global. Nuevamente el método de refinar globalmente cada vez que se actualizan los parámetros del LA no logró converger, y la última geometría obtenida se presenta en la Figura 6.62a. El motivo detrás de la imposibilidad de converger radica en que se alcanzó una malla muy fina que el computador no pudo soportar. Luego, las Figuras 6.62b a 6.62d muestran que los resultados con uno, dos o tres refinamientos globales al final del método presentaron geometrías extrañas, de gran complejidad estructural, lo que en parte se debe a la conexión con zonas grises entre el tablero y los tensores.

Finalmente se presenta en la Figura 6.63 los resultados obtenidos con el FEM y refinamientos locales. En este caso todas la geometrías obtenidas resultaron muy rugosas. Además en todos los casos se presentó un gran número de elementos flotantes o similares. En particular, los resultados del problema con refinamientos locales hechos al final presentaron bastantes dificultades para solucionar las zonas grises en la conexión entre el tablero y los tensores, lo que derivó en las geometrías complejas que se obtuvieron.

En referencia a los criterios de comparación, se presenta en primer lugar

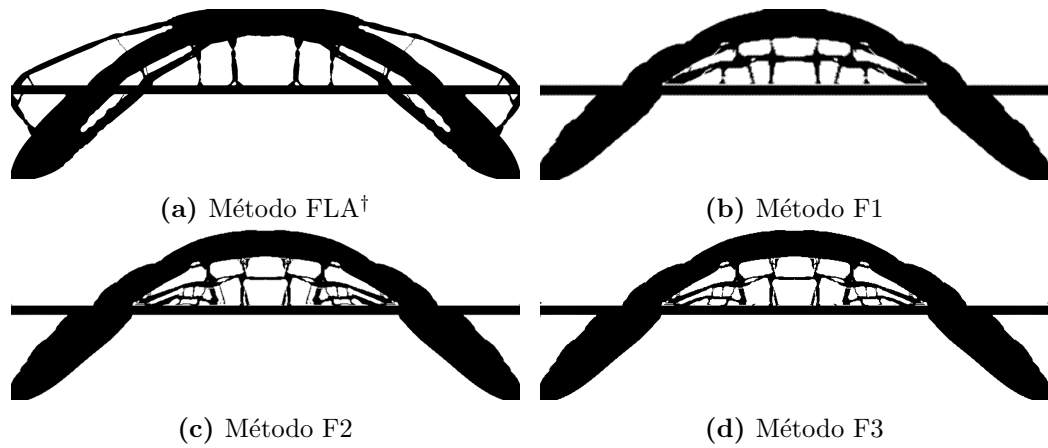


Figura 6.62: Geometrías finales del segundo ejemplo obtenidas por los métodos de FEM con refinamiento global. Métodos F según la Tabla 5.1

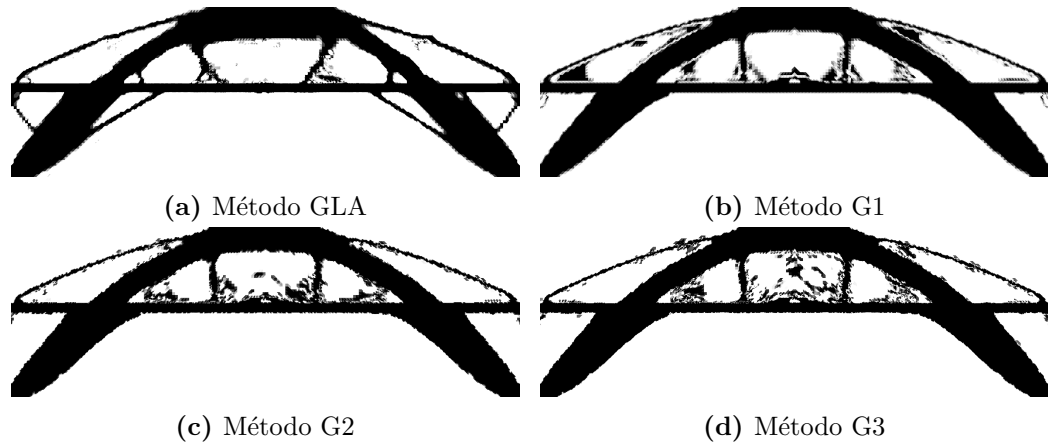


Figura 6.63: Geometrías finales del segundo ejemplo obtenidas por los métodos de FEM con refinamiento local. Métodos G según la Tabla 5.1

en la Tabla 6.22 la comparación entre los costos computacionales obtenidos y las complacencias finales, para analizar qué métodos fueron más eficientes y eficaces para el problema de optimización estructural planteado. La primera columna presenta la identificación del método para todos aquellos que convergieron, según se presentó en la Tabla 5.1, donde la distinción entre las distintas mallas del método E se identifica con la notación E-x con x la cantidad de refinamientos globales que se aplicaron inicialmente. Luego, las siguientes dos columnas presentan el tiempo que le tomó a los métodos obtener sus respectivos resultados y el costo en memoria. Finalmente, las últimas dos columnas presentan los resultados de complacencia final obtenida. Se recuerda que la primera columna representa el cálculo de la complacencia con el método con el que se realizó la optimización estructural, mientras que la segunda columna

representa el cálculo con el XFEM desarrollado en esta tesis, como medida de corrección de los cálculos de Moës et al. (2003) y de interpretación de las zonas grises.

Tabla 6.22: Costo computacional y complacencia final para los distintos métodos de análisis en el ejemplo del puente

Método	Costo computacional		Complacencia final	
	Tiempo (s)	Memoria (MB)	= que opt.	XFEM aristas
A	1700,898	11,894	6276,918	6276,918
B	1322,620	11,893	6333,011	6366,083
C	1720,587	13,211	6408,669	6408,669
D	984,762	11,894	6351,570	6773,882
E-0	793,004	11,893	6487,912	15723,374
E-1	3848,452	47,561	6452,385	11519,119
E-2	31571,130	192,883	7125,158	7564,820
F1	2877,166	35,805	7674,079	11917,067
F2	10399,271	144,660	8333,435	9112,860
F3	58174,948	578,602	9867,775	9997,715
GLA	1717,973	21,532	7440,474	8278,810
G1	1427,732	11,892	7159,815	8626,228
G2	2000,025	12,052	7636,592	8689,014
G3	2695,357	20,152	7807,574	8776,184

En primer lugar se nota que todas las propuestas que utilizaron el FEM presentaron una complacencia final calculada con el XFEM desarrollado en esta tesis significativamente mayor que la obtenida por el FEM. Lo anterior se asocia a las zonas grises en la conexión entre los tensores y el tablero en dichos resultados, lo cual muestra que la metodología utilizada para mantener obligatoriamente alguna zona de la estructura, no resultó adecuada para el FEM. Por el motivo anterior, en las siguientes comparaciones solamente se consideran los resultados de complacencia final “= que opt.” para cuantificar el desempeño de las pruebas que emplearon el FEM.

En este problema, el mejor resultado en base al valor de complacencia final, fue obtenido con el método desarrollado en esta tesis con el XFEM de aristas extendidas. Luego, las propuestas de FEM en las que se utilizaron diversos tipos de remallado obtuvieron complacencias finales mayores que superan en más de 10 % al valor obtenido por el método A. De lo anterior se obtiene que los únicos métodos que obtuvieron complacencias competentes con la obtenida por el método de esta tesis son todas las propuestas con XFEM y las propuestas con FEM E-0 y E-1. Además, se hace notar que E-1 requirió más del doble de

tiempo para lograr obtener su resultado y un costo en memoria cuatro veces mayor que el método de esta tesis.

Finalmente, comparando las propuestas del XFEM, se obtuvo que el método de Moës et al. (2003) sin suavizado fue la más eficiente de todas, requiriendo un tiempo de cómputo similar al FEM sin remallado en la malla original. De todas formas, vale notarse que su cálculo de complacencia con el XFEM de esta tesis aumentó significativamente y que puede presentar las dificultades presentadas en la Figura 6.60. Luego, el XFEM de Moës et al. (2003) con suavizado resultó más eficiente que el XFEM de esta tesis, siendo en este caso un 28 % más rápido. Además, la complacencia obtenida por el XFEM de Moës et al. (2003) resultó muy similar a la obtenida por el XFEM de esta tesis.

Finalmente, en la Tabla 6.23 se presentan los resultados en base a la calidad de las geometrías obtenidas, con la misma notación para distinguir las mallas del método E. En primer lugar se tiene que los métodos A y E desde la malla base fueron los que presentaron menor número de huecos y por ende menor complejidad estructural. De todas formas, salvo los métodos F2 y F3, la mayoría de los métodos presentó un número reducido de huecos en la geometría final. Por otra parte, las propuestas que emplearon el FEM presentaron en general rugosidades elevadas o dificultades para representar adecuadamente la geometría, exceptuando las propuestas E, desde las mallas con uno y dos refinamientos globales, F1 y F2. Finalmente, la presencia de zonas grises de magnitud apreciable fue un problema no menor en las propuestas con FEM, en particular la E-0. Se destaca que la única propuesta con FEM que resultó más rápida que el XFEM de esta tesis con suavizado, generó una geometría que es de una calidad deteriorada.

A modo de resumen de la comparación entre métodos, los dos métodos en los que se emplearon propuestas del XFEM con suavizado lograron, empleando una malla gruesa, generar estructuras optimizadas de gran desempeño, con una geometría apenas levemente rugosa y sin ningún tipo de ambigüedad; incluso en este caso de varios EC y fuerzas de volumen. Solamente una propuesta del FEM logró obtener una complacencia, suavidad y falta de ambigüedad competitiva con las obtenidas por el XFEM, y fue la propuesta en que se utilizó el FEM sin remallado en una malla con un refinamiento global. Esta propuesta demoró 2,26 veces más y requirió 3,99 veces más memoria computacional que la propuesta de esta tesis. Por otro lado, para este problema en particular, la propuesta del XFEM de Moës et al. (2003) resultó ser la más eficiente, puesto que logró

Tabla 6.23: Suavidad, zonas grises y complejidad para los distintos métodos de análisis en el ejemplo del puente

Método	Suavidad	% de zonas grises	Complejidad estructural
A	Levemente rugosa	0,0	9
B	Levemente rugosa	0,0	13
C	Muy rugosa	0,0	17
D	Muy rugosa	0,0	15
E-0	Rugosa	9,1	9
E-1	Levemente rugosa	5,4	19
E-2	Suave	2,8	26
F1	Levemente rugosa	4,4	18
F2	Levemente rugosa	2,8	42
F3	Muy rugosa	1,1	44
GLA	Muy rugosa	3,8	16
G1	Muy rugosa	8,5	16
G2	Muy rugosa	5,0	11
G3	Muy rugosa	4,5	23

resultados tan buenos como la propuesta de esta tesis, siendo 28 % más rápida. Del análisis anterior se concluye que las dificultades de la propuesta de Moës et al. (2003) no son problemáticas para el problema de optimización estructural de minimización de complacencia cuando se utiliza el suavizado. Finalmente se concluye que, también en el problema de optimización estructural del puente, se cumplió el objetivo principal de la tesis, dado que la combinación con el XFEM logró mejorar el desempeño del método de optimización estructural basado en la DT.

6.3. Ejemplo 3: Gancho

6.3.1. Presentación del problema

En esta sección se desarrolla el tercer ejemplo asociado a la estructura que se presenta en la Figura 6.64. Esta estructura es un gancho cuya configuración inicial Ω_0 y dominio D se encuentran materializados por una L cuya esquina posee dimensiones 2×2 y sus brazos vuelan una longitud de 4. Se consideró que en la cara superior los desplazamientos son nulos en ambas direcciones y en el medio de la cara derecha se aplicó una carga vertical descendente de valor 1.

Este ejemplo es un clásico para problemas de optimización estructural en

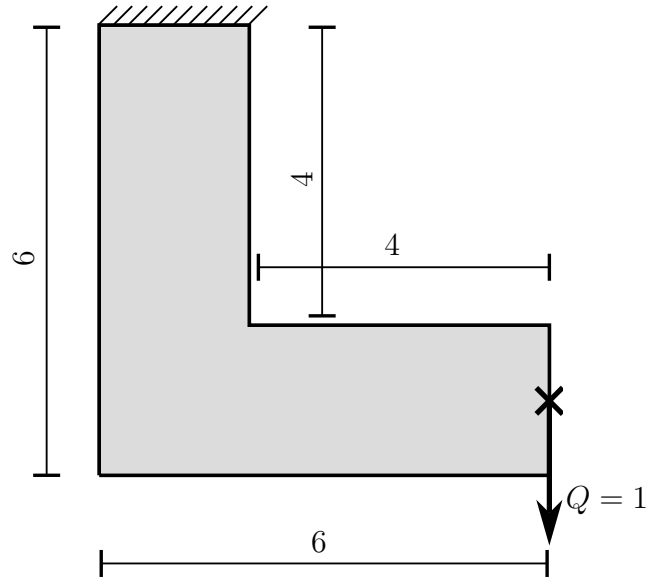


Figura 6.64: Dominio y condiciones iniciales del tercer ejemplo

los que se limitan las máximas tensiones y ha sido considerado en numerosos artículos, incluidos algunos en los que se utilizó el XFEM o la DT (*e.g.* Amstutz y Novotny, 2010; Castañar et al. 2022; Kuci y Jansen, 2022; Martínez-Frutos et al. 2019; Miyajima et al. 2023; Sharma y Maute, 2018; Wang et al. 2022; Zhang et al. 2022). Lo anterior se debe a que esta estructura, para esta configuración de cargas, presenta tensiones no acotadas en la solución analítica en la esquina que posee un ángulo interno de 270° . Para ilustrar este argumento se presenta un análisis de convergencia en tensiones y desplazamientos con el tamaño de elemento para una malla estructurada como la presentada en la Figura 6.65. En la Figura 6.66 se presentan mapas de la tensión de von Mises para esta estructura para dos valores distintos del tamaño de elemento h y se indican los valores alcanzados en la esquina y el punto de aplicación de la carga. Al comparar ambas subfiguras se nota que las tensiones se encuentran acotadas en todo el dominio y son calculables con una malla relativamente gruesa, salvo en la esquina y en el punto de aplicación de la carga, donde a medida que aumenta la finura de la malla las tensiones crecen.

Por otra parte, se presenta en la Figura 6.67 el comportamiento del máximo desplazamiento (Figura 6.67a) y de la máxima tensión (Figura 6.67b) al reducir el tamaño del elemento. Se nota que a pesar de que los desplazamientos convergen rápidamente al reducir el tamaño del elemento, no ocurre lo mismo con las tensiones, las cuales aparentan diverger. En la figura se presenta además

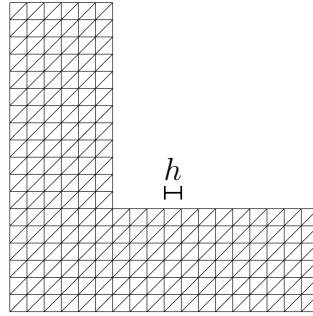


Figura 6.65: Malla regular para estudiar la convergencia en tensiones del gancho

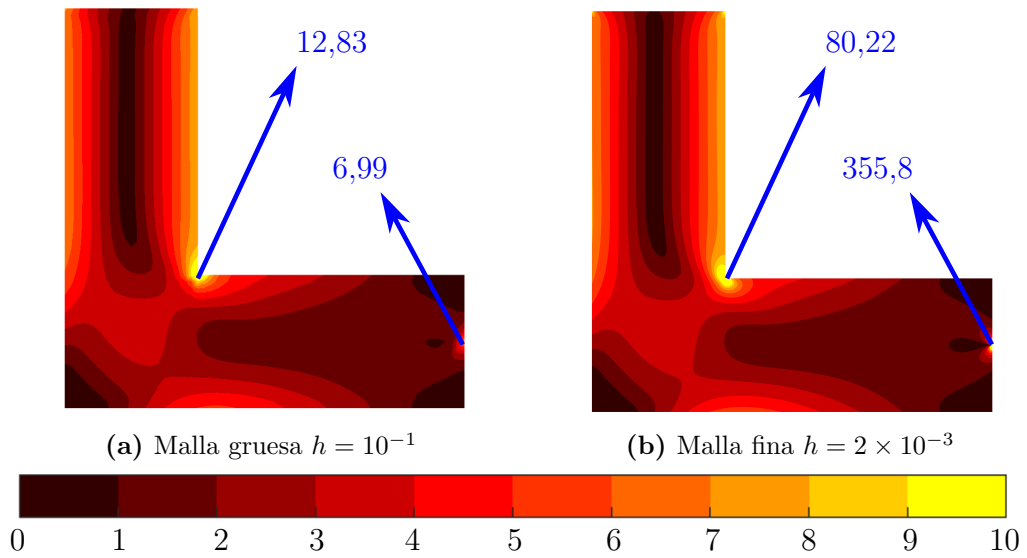


Figura 6.66: Tensiones de von Mises en el gancho para distintos tamaños de malla

con una curva discontinua roja, el comportamiento de la máxima tensión de von Mises a más de 0,1 de la esquina y del punto de aplicación de carga y se aprecia que sí converge al reducir el tamaño del elemento.

Por el análisis anterior, resulta de especial interés este caso para analizar el comportamiento del método de optimización que limita las máximas tensiones. Se destaca el comportamiento presentado en la Figura 6.66, la cual plantea la conveniencia del uso de una malla no estructurada, con mayor refinamiento en la esquina, para captar el notorio gradiente de tensiones. La malla considerada para el caso base del tercer ejemplo se presenta en la Figura 6.68 y posee 6444 nodos, 12495 elementos, un tamaño medio de elemento cerca de la esquina de 0,0225 y lejos de la esquina de 0,0675. Se hace notar que dicha malla es la que se utilizó para la mayor parte de los análisis de esta sección. El uso de la malla no estructurada va de la mano con la filosofía de trabajo de utilizar el XFEM,

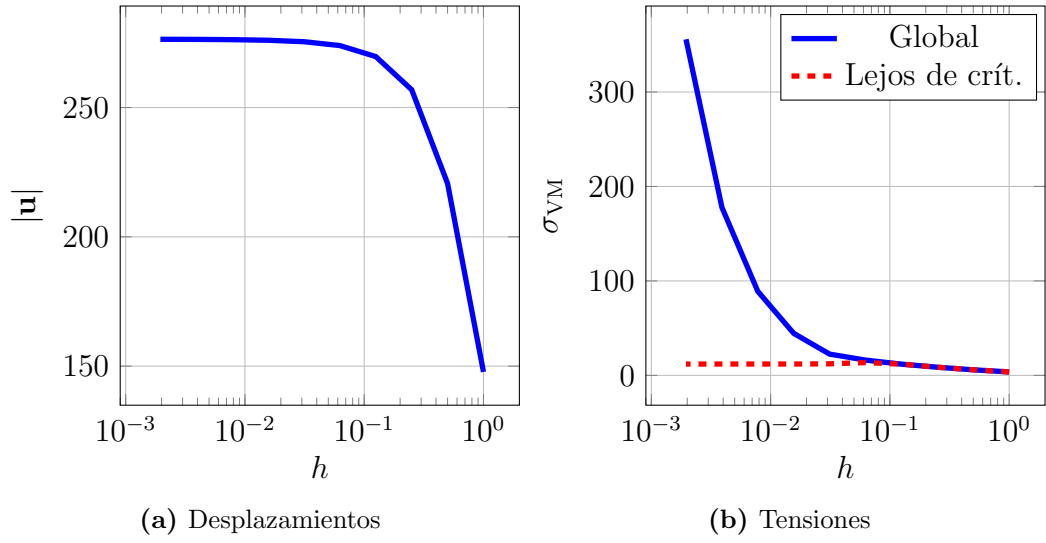


Figura 6.67: Valores máximos en el gancho en función del tamaño del elemento

al buscar utilizar una malla lo más gruesa posible pero que capte el aumento de tensiones de la esquina.

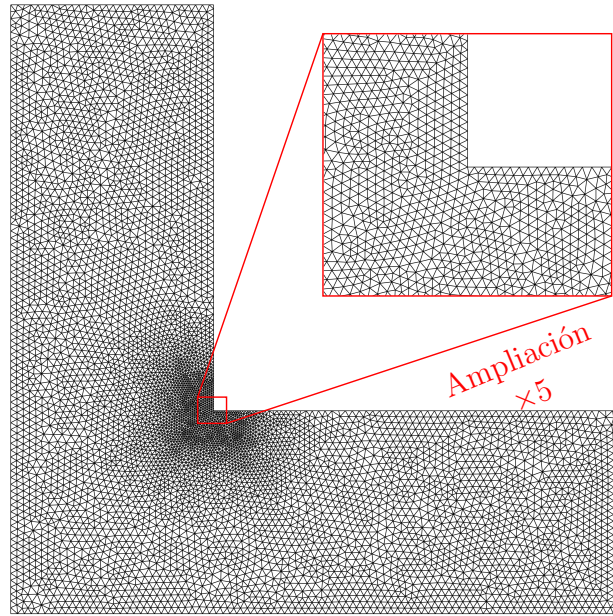


Figura 6.68: Malla considerada para el caso base del tercer ejemplo

6.3.2. Caso de base

A continuación se presenta y discute el caso base del tercer ejemplo, el cual es el que posteriormente se utiliza en la comparación entre métodos de análisis.

En este caso se consideró el funcional $\mathcal{J}$ de la Ecuación (5.7) con α no nulo, es decir que se consideró la penalización de las tensiones de von Mises. Se utilizó la malla de elementos finitos presentada en la Figura 6.68, un área objetivo del 50 % del área disponible ($M = 0,5$) con una tolerancia $\mathbf{T}_M = 1 \%$, un coeficiente de penalidad cuadrática del LA inicial $c_0 = 2$, un cambio mínimo de área como criterio de optimalidad $\Delta_{|\Omega|}^* = 1 \%$, un cambio máximo de área por iteración $\Delta_{|\Omega|}^{\text{máx}} = 100 \%$, un máximo de subiteraciones de la búsqueda lineal $\text{SIT}_{\text{máx}} = 10$, un coeficiente de suavizado inicial $\varsigma_0 = 0,0035$, un coeficiente de decaimiento del suavizado $\varrho_\varsigma = 1,3$, un coeficiente de penalidad del funcional de tensiones $\alpha = 10^5$ y una tensión máxima admisible $\bar{\sigma}_{\text{VM}} = 25$. Nótese que el coeficiente de suavizado inicial es mucho menor al de los casos bases de la ménsula y el puente, dado que en este caso se utilizó el suavizado LOWESS en vez de la técnica de Garcia (2010) (Ver la Sección 5.5). Además, se consideró que $D_{\mathcal{S}}$ fuera todo D salvo los elementos que estuvieran a menos de 0,5 del punto de aplicación de la carga. En el caso de la malla utilizada, $D_{\mathcal{S}}$ está dado por la zona oscura de la Figura 6.69.



Figura 6.69: Esquema de $D_{\mathcal{S}}$ para el caso base del tercer ejemplo

Con los parámetros presentados, el método logró converger en 18 iteraciones y obtuvo la geometría presentada en la Figura 6.70. En primer lugar se destaca que el XFEM desarrollado en esta tesis logró obtener un buen resultado, muy similar a los presentados en la bibliografía. Además, como muestra la ampliación a la malla de la esquina, el XFEM permitió una muy buena definición de la geometría sin modificar la malla. Se destaca el hecho de que la conexión con el apoyo está dada por dos barras verticales, una más ancha que la otra. Lo anterior implica que esta solución no es muy buena para car-

gas horizontales, lo que refuerza algunos de los comentarios de la Sección 6.2 sobre la importancia de considerar varios EC en la optimización estructural. Finalmente se destaca que el hecho de que la barra vertical de la derecha sea más ancha que la de la izquierda es muy razonable, ya que dicha barra está traccionada por efecto de la sollicitación axial y del momento flector, mientras que el momento flector comprime a la barra izquierda, generando en ella una fuerza neta menor.

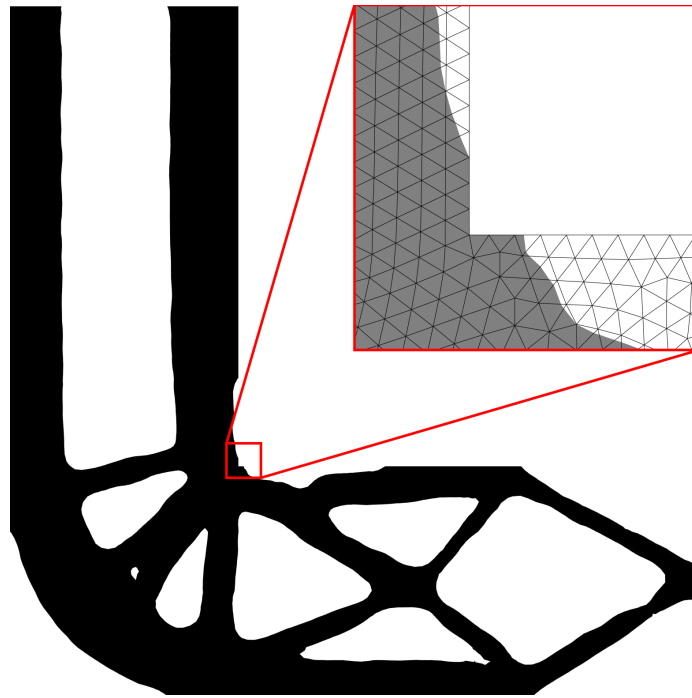


Figura 6.70: Estructura final optimizada del caso base del tercer ejemplo

Si bien la geometría de la Figura 6.70 muestra un claro redondeo de la esquina problemática del gancho, la ampliación muestra que se continúa con la presencia de un ángulo entrante. El motivo de que esta esquina no se suavice completamente se asocia principalmente a una discretización insuficiente. El método logra redondear la esquina, pero luego tiende a volver a colocar material estructural en ella. Como la nueva esquina se produce en muy pocos elementos, no se logra captar adecuadamente un gran aumento de la tensión, lo que no conduce a un nuevo redondeo. Este fenómeno se vio también en las geometrías presentadas en otros artículos de optimización con XFEM (Kuci y Jansen, 2022; Wang et al. 2022). Por lo tanto, el resultado de la Figura 6.70 si bien es muy bueno, requiere algún tipo de postprocesamiento para terminar de suavizar dicha esquina antes de ser manufacturado.

En la Figura 6.71 se presenta en formato tridimensional la forma que toma la función de nivel para la geometría optimizada del caso base. En primer lugar, al igual que para la ménsula y el puente, se nota que las zonas ocupadas por el material blando que representa los vacíos poseen una función de nivel cuasi uniforme. Lo anterior se basa en que la DT en dichas zonas es cuasi uniforme, puesto que la nucleación de una inclusión rígida en el material blando, lejos del material más rígido, no genera un efecto que dependa significativamente de su punto de nucleación. Por otra parte, se nota que la zona de la esquina problemática es donde se alcanzaron los mayores valores de la función de nivel, lo que evidencia el conflicto entre buscar agregar material para reducir la complacencia y buscar redondear la esquina para reducir las tensiones.

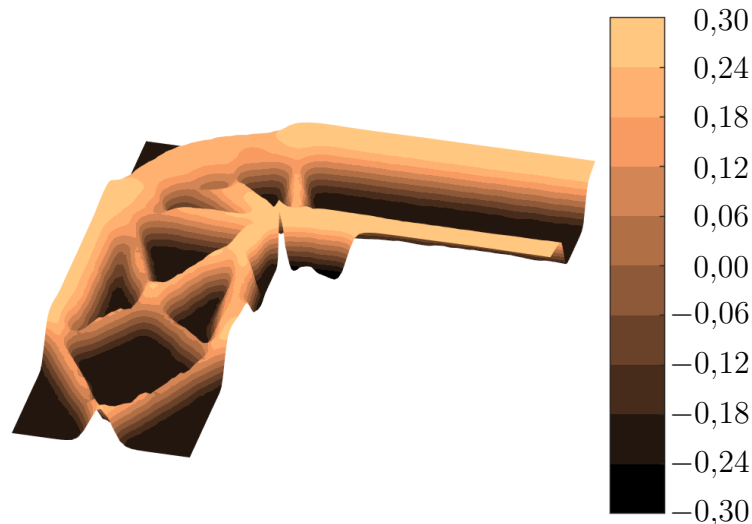


Figura 6.71: Función de nivel del resultado del caso base del tercer ejemplo

A continuación, se continúa con el análisis comparativo entre la DT y las tensiones equivalentes de von Mises iniciado al final de la Sección 6.1.1 y avanzado en la Sección 6.2.2.3. En la Figura 6.72 se comparan los mapas de los valores de las DT y de las tensiones de von Mises para la primera iteración del caso base del tercer ejemplo. En todas las escalas de color se indicó los valores máximo y mínimo alcanzados en cada caso y las escalas de la DT son todas la misma.

En este caso, al comparar las Figuras 6.72a y 6.72b se tiene que, lejos de la esquina, la distribución de las tensiones de von Mises y de la DT de la función objetivo son similares entre sí, de forma análoga a lo que sucedía para la ménsula. Por el contrario, cerca de la esquina, donde las tensiones de von Mises son máximas, la DT de la función objetivo alcanza sus valores mínimos

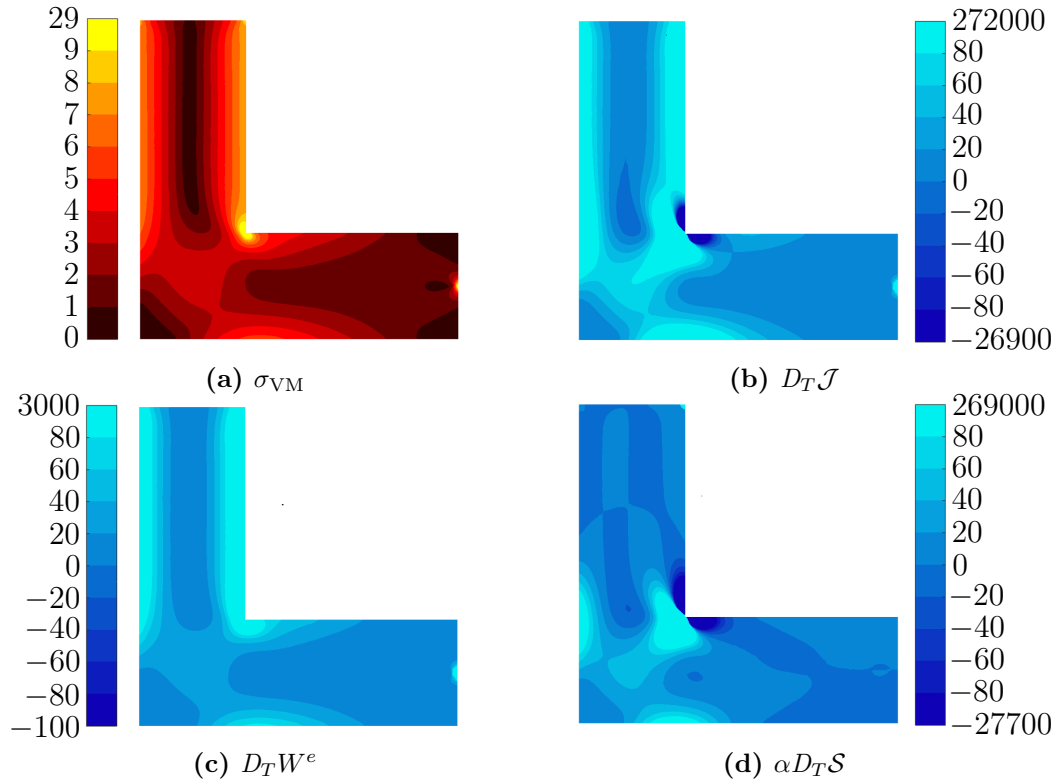


Figura 6.72: DT y tensiones equivalentes de von Mises para la primera iteración del caso base del tercer ejemplo

(en una región cercana a los bordes) y máximos (en una región más alejada de los bordes). Lo anterior se debe principalmente a las diferencias entre las DT de la complacencia y del funcional de penalización de tensiones mayorado por el coeficiente de penalidad.

Como se presenta en las Figuras 6.72c y 6.72d, la DT de la complacencia sí posee una distribución similar a la tensión de von Mises, pero no ocurre lo mismo con la DT del funcional de tensiones. La $\alpha D_T S$ es casi nula en la mayor parte del dominio, pero cerca de la esquina tiende a presentar unos valores muy grandes que tienden a suavizar dicha esquina. La gran diferencia entre las Figuras 6.72a y 6.72b permite afirmar que la tensión de von Mises es un mal índice según el cual avanzar en la optimización estructural en problemas en los cuales se controlen las máximas tensiones, tal y como se discutió en el Capítulo 3 para la propuesta de Abdi et al. (2014).

En la Figura 6.73 se presentan resultados intermedios del método de optimización estructural a modo de animación. En la Figura 6.73a se nota que inicialmente el método se encarga de redondear la esquina para evitar las grandes tensiones. Luego, en las Figuras 6.73b y 6.73c se muestra como progresa el

redondeo de la esquina mientras se continúa con la optimización estructural del resto de la estructura. Se hace notar que en la séptima iteración ya se generó un pequeño ángulo entrante como el presentado en la Figura 6.70. Luego, las Figuras 6.73d a 6.73f muestran el avance del método de optimización estructural, donde se destaca que el redondeo de la esquina se va achatando levemente. Lo anterior se asocia a que, por efecto de la optimización de la complacencia y por el suavizado de la función de nivel, se tiende a recuperar parte de la esquina siempre y cuando las tensiones calculadas con el XFEM no superen el límite con claridad.

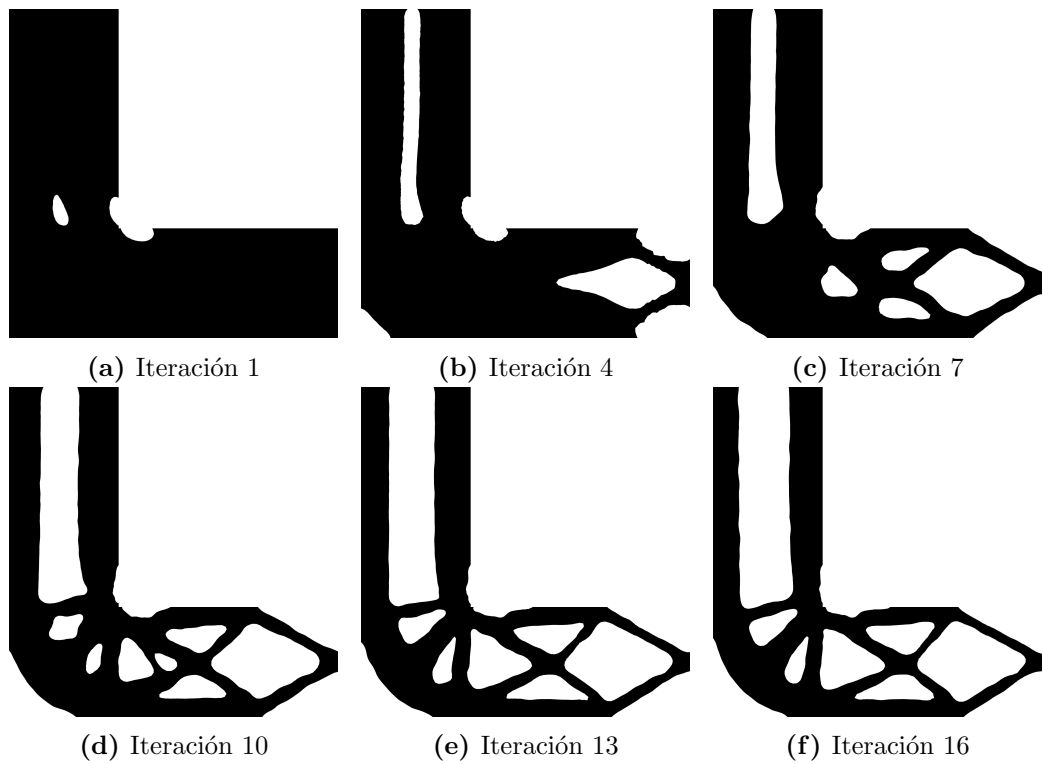


Figura 6.73: Resultados intermedios para el caso base del tercer ejemplo

Se presenta en las Figuras 6.74 a 6.76 el avance de los distintos términos del problema de optimización estructural a medida que avanza el método. En primer lugar en la Figura 6.74 se presentan los tres principales funcionales, donde se destaca que el funcional de tensiones ya se encuentra multiplicado por su coeficiente de penalidad. Se ve como en la primera iteración el funcional de tensiones se hace casi nulo y luego no vuelve a crecer significativamente. Por otro lado se nota que la complacencia va creciendo a medida que se reduce el área ocupada hasta su objetivo, mientras que el LA presenta descenso en todas las iteraciones.

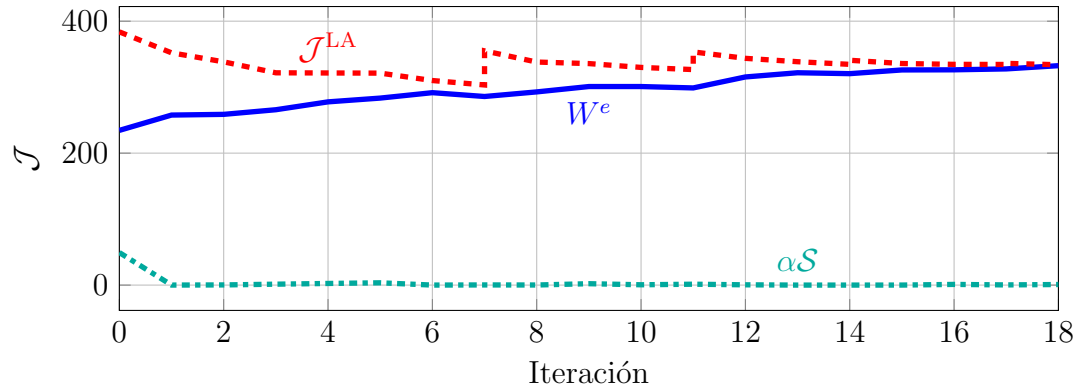


Figura 6.74: Avance de las componentes del LA para el caso base del tercer ejemplo

En la Figura 6.75 se presenta el avance del área ocupada por la estructura hasta su objetivo. Al igual que en los ejemplos anteriores se ve que el método se basa principalmente en remover material estructural rápidamente y de una forma conveniente, tal que la complacencia crezca lo menos posible y el funcional de penalización de tensiones se mantenga casi nulo.

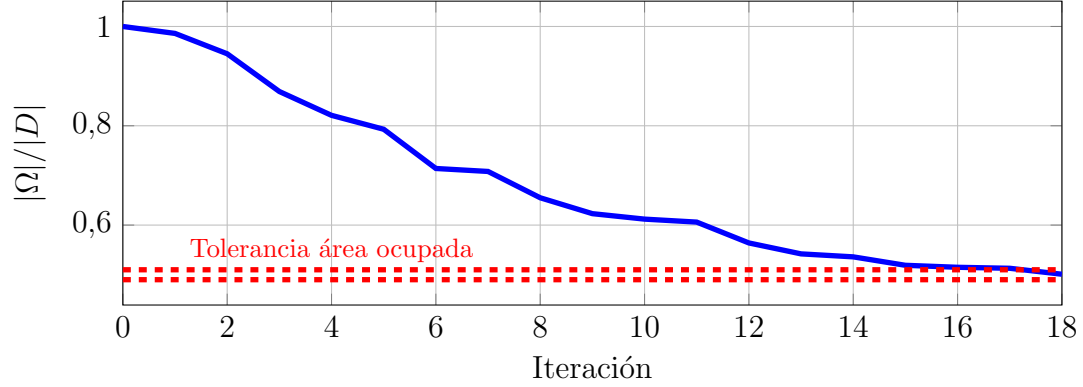


Figura 6.75: Avance del área ocupada por la estructura respecto al área total para el caso base del tercer ejemplo

Finalmente en la Figura 6.76 se presenta la tensión de von Mises máxima alcanzada en los puntos de cuadratura de Gauss utilizados en el cálculo del funcional de tensiones, sin contar los elementos ubicados fuera de D_S y las fracciones vacías. Según se discute en detalle en el Anexo A, se consideró un único punto de cuadratura en los ER y tres puntos de cuadratura por subregión en los EX. La figura muestra que, salvo en iteraciones particulares, la tensión rara vez fue menor a la tensión máxima admisible. Lo anterior es esperable para

un método de penalidad fija como el considerado en esta tesis, ya que estos métodos no aseguran que la condición se cumpla mandatoriamente sino que se la intente controlar. Además, se destaca que si bien la tensión máxima inicial fue cercana a 40 ($\sigma_{VM}^2/\bar{\sigma}_{VM}^2 \approx 2,56$), las tensiones en las últimas iteraciones apenas llegan a 30 ($\sigma_{VM}^2/\bar{\sigma}_{VM}^2 \approx 1,44$) lo que muestra un buen desempeño del algoritmo de control de las tensiones máximas.

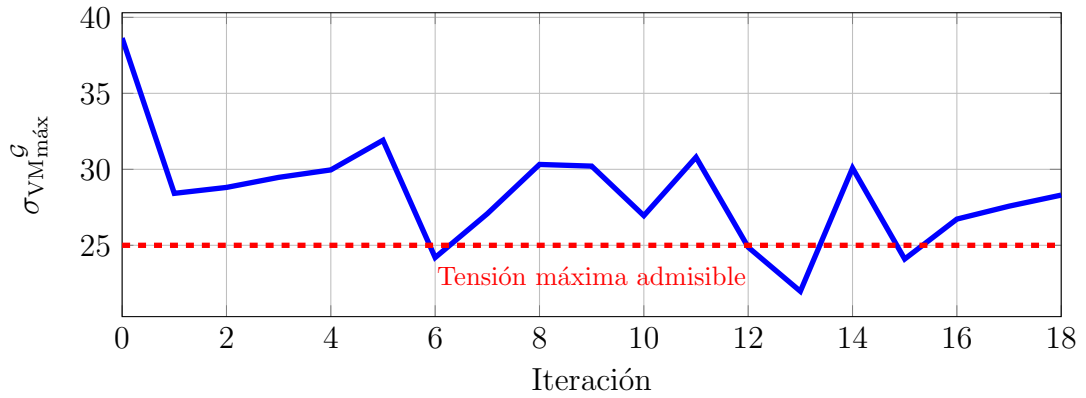


Figura 6.76: Avance de la tensión de von Mises máxima en los puntos de cuadratura de Gauss para el caso base del tercer ejemplo

Para complementar el análisis anterior, se presenta en la Figura 6.77 la geometría optimizada en el caso de considerar $\alpha = 0$, es decir si no se hubieran controlado las tensiones máximas. Se nota que la geometría optimizada sin controlar las máximas tensiones es muy similar a la obtenida en la Figura 6.70, salvo que no se generó ningún tipo de redondeo de la esquina. Lo anterior muestra que efectivamente la esquina tiende a ser conservada por los métodos de optimización de complacencia.

En la Tabla 6.24 se presenta una comparación entre los resultados del caso base con y sin control de las tensiones máximas. Nótese que la tensión máxima de la tabla es la tensión de von Mises máxima en los puntos de cuadratura de Gauss de los elementos dentro de D_S . Se nota que el haber redondeado el ángulo entrante en la Figura 6.70 aumentó aproximadamente un 10% el valor final de la complacencia, pero logró obtener una tensión máxima apenas superior al límite planteado, mientras que para la estructura de la Figura 6.77 la tensión máxima fue casi que el doble de la tensión límite. Además, el funcional de penalización de tensiones fue dos órdenes mayor en el caso de la estructura sin control de tensiones que en la estructura con control.

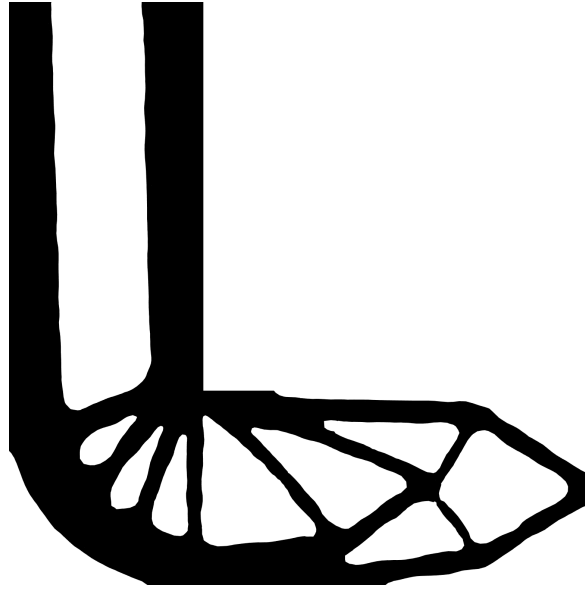


Figura 6.77: Resultado del caso base del tercer ejemplo en caso de no controlar las tensiones máximas

Tabla 6.24: Complacencia, funcional de tensiones y tensión máxima en puntos de cuadratura para el caso base del tercer ejemplo, con y sin control de tensiones

Funcional	Coeficiente de penalidad de tensiones	
	$\alpha = 10^5$	$\alpha = 0$
Complacencia	332,546	315,350
Funcional de tensiones	$8,774 \times 10^{-6}$	$8,082 \times 10^{-4}$
Tensión máxima	28,305	45,828

Para complementar el análisis anterior se presenta el cálculo de las tensiones de von Mises máximas en D_S según el método presentado en la Sección 5.6 para la comparación entre metodologías de análisis. Para ello se crearon mallas de FEM conformes a las interfaces, una de tamaño de elemento similar a la malla de base y otra con elementos 16 veces más chicos. En la Figura 6.78 se presentan ambos tipos de malla para la geometría de la Figura 6.70. En la Figura 6.79 se presenta un mapa de las tensiones de von Mises generadas en la estructura optimizada del caso base, donde se nota que la zona de la esquina redondeada es donde se dan las máximas tensiones y en particular en la esquina remanente. De este mapa se obtuvo que la componente de control de las tensiones máximas fue exitoso, ya que para una malla de tamaño de elemento similar no se generaron tensiones que superaran ampliamente el límite establecido, y solamente se superó en una zona de tamaño reducido.

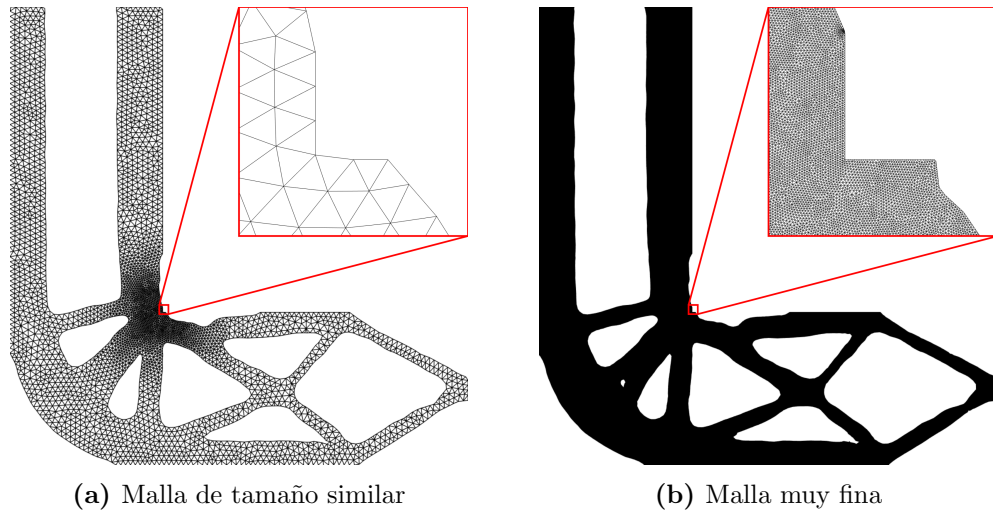


Figura 6.78: Mallas de FEM conformes a las interfaces para medir las tensiones máximas

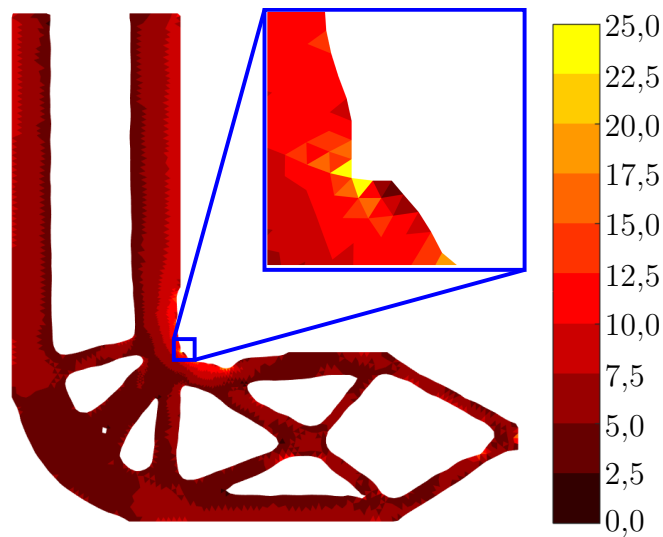


Figura 6.79: Tensiones de von Mises en la malla de FEM conforme de tamaño similar para el caso de base del tercer ejemplo

En la Tabla 6.25 se presentan las tensiones máximas obtenidas según ambas mallas para las dos geometrías optimizadas presentadas anteriormente. En primer lugar se destaca que para ambas mallas la estructura generada con control de las tensiones máximas obtuvo tensiones menores. Además, para un tamaño de elemento similar al utilizado en la optimización estructural la tensión máxima alcanzada es apenas un 6 % mayor que la tensión límite. Por otro lado, para la malla muy fina se tiene que la esquina que no fue perfectamente redondeada sí genera tensiones de magnitud no despreciable. Lo anterior mues-

tra que el método no es perfecto y que solamente puede ser capaz de controlar las tensiones calculables por el XFEM en la malla utilizada y no las tensiones analíticas del problema plano de elasticidad lineal en el continuo.

Tabla 6.25: Tensiones de von Mises máximas en D_S para el caso base del tercer ejemplo, con y sin control de tensiones

Estructura	Malla de medición	
	Malla de tamaño similar	Malla muy fina
Con control de tensiones	26,475	98,167
Sin control de tensiones	43,492	158,079

Del caso base del tercer ejemplo se concluye que el método de optimización desarrollado con el XFEM de esta tesis fue exitoso para generar estructuras en las cuales se controlen las máximas tensiones. De todas formas se debe notar que el método no es perfecto y que puede permanecer algún ángulo entrante de tamaño similar a los elementos y que las tensiones que se obtienen no son estrictamente menores a la tensión límite. Un posible camino de mejora del método podría ser utilizar α variable, como c , o utilizar el LA para las tensiones máximas. En la Sección 6.3.4 se presenta un análisis de sensibilidad al coeficiente de penalidad de las tensiones que permite arrojar luz sobre esta discusión.

6.3.3. Análisis de decisiones algorítmicas

En esta subsección se continúa el análisis de las decisiones asociadas al método de optimización estructural iniciada en los ejemplos anteriores. En primer lugar se presenta la conveniencia del uso de mallas no estructuradas para los problemas de control de máximas tensiones en regiones problemáticas de tamaño reducido, como es el caso de la esquina del gancho. Luego se presenta la conveniencia de excluir una región cercana al punto de aplicación de una carga concentrada de D_S .

6.3.3.1. Uso de mallas no estructuradas

Para analizar la conveniencia del uso de las mallas no estructuradas se hicieron dos pruebas con mallas estructuradas de distintos tamaños. Se utilizó una malla gruesa, con un tamaño de elemento 0,0625, el cual es similar al tamaño de elemento de la Figura 6.68 lejos de la esquina, y se utilizó una

mallas finas, con un tamaño de elemento 0,0222, el cual es similar al tamaño de elemento de la Figura 6.68 cerca de la esquina. La malla gruesa presentó 5313 nodos y 10240 elementos mientras que la malla fina presentó 41041 nodos y 81000 elementos.

Para estas pruebas se utilizaron los mismos parámetros que para el caso base, salvo el coeficiente de suavizado inicial el cual se tomó $\varsigma_0 = 0,27$. La diferencia nuevamente radica en las diferencias de los suavizados LOWESS y de Garcia (2010), dado que para las mallas estructuradas se utilizó el segundo. En base a estos parámetros se obtuvieron las geometrías presentadas en la Figura 6.80. La Figura 6.80a muestra una geometría muy similar a la presentada en la Figura 6.77, en la cual no se controlaron las máximas tensiones. Lo anterior muestra que la malla más gruesa no pudo captar el aumento de tensiones en la esquina y por lo tanto no tuvo necesidad de suavizar. Por otra parte, la Figura 6.80b muestra un adecuado redondeo de la esquina, si bien se produce un pequeño ángulo entrante de tamaño similar a los elementos. Además, la cantidad de huecos obtenida es mucho mayor a la presentada por el caso base.

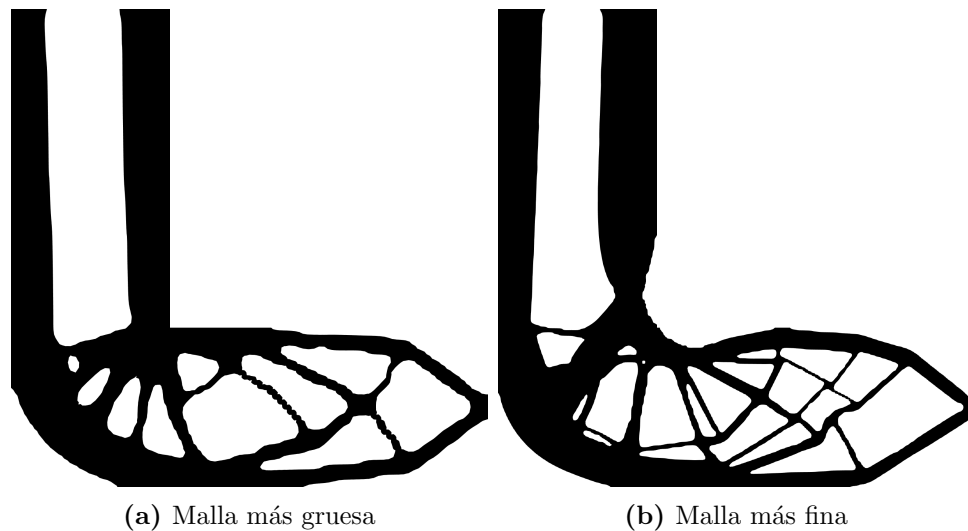


Figura 6.80: Geometrías optimizadas para el tercer ejemplo en caso de usar mallas estructuradas

De la Figura 6.80 se confirma la necesidad de usar una malla fina cerca de la esquina para poder captar el aumento de tensiones en ella y así producir el redondeo de la esquina entrante. Por lo tanto, una malla estructurada, de tamaño similar al que posee la malla no estructurada lejos de la esquina, no es adecuada para el problema de controlar las máximas tensiones.

A continuación se presenta en la Tabla 6.26 las tensiones de von Mises

máximas obtenidas con mallas de FEM conformes a las interfases. Al igual que lo presentado en el caso base, se consideró una malla de tamaño similar a las utilizadas en la optimización y una 16 veces más fina que la del caso base. La tabla muestra que los tres métodos fueron efectivos para controlar las tensiones en sus respectivas mallas, puesto que en ningún caso se superó notablemente la tensión límite. Lo anterior verifica que la malla estructurada gruesa no suavizó la esquina simplemente por no identificar regiones que superaran la tensión límite. Además, se nota que aun en los casos que se redondeó la esquina, la presencia de un pequeño ángulo entrante genera tensiones de gran magnitud en la malla de FEM conforme muy fina.

Tabla 6.26: Tensiones de von Mises máximas en D_S en función de la malla

Estructura	Malla de medición	
	Malla de tamaño similar	Malla muy fina
Malla no estructurada	26,475	98,167
Malla estructurada gruesa	24,519	164,585
Malla estructurada fina	27,381	55,891

En las Tablas 6.27 y 6.28 se presentan los costos computacionales de las distintas tareas del algoritmo de optimización estructural para las tres mallas. La Tabla 6.27 presenta el costo de las tres tareas del problema de optimización clásico que fue utilizado en los ejemplos de la ménsula y el puente. Por otro lado, la Tabla 6.28 presenta el costo de las dos principales tareas asociadas al control de las tensiones: el cálculo de $\mathcal{S}$ y el cálculo de su DT.

Tabla 6.27: Costo computacional de las tareas clásicas según el tipo de malla para el gancho

Malla	Tareas a analizar					
	Anál. estructural		$D_T W^e$		Suavizado	
	Tiempo (s)	Memoria (MB)	Tiempo (s)	Memoria (MB)	Tiempo (s)	Memoria (MB)
No est.	6,999	12,61	5,370	0,52	6,207	$\leq 0,01$
Est. grue.	6,842	12,15	4,597	$\leq 0,01$	0,117	$\leq 0,01$
Est. fina	45,711	68,54	21,560	1,00	0,100	1,12

De las Tablas 6.27 y 6.28 se obtiene que los costos computacionales de la malla no estructurada y la malla estructurada gruesa son similares en todas las tareas, exceptuando el suavizado. La diferencia en el costo del suavizado se basa en lo discutido en la Sección 5.5 de que el suavizado de Garcia (2010) es

Tabla 6.28: Costo computacional de las tareas del funcional de tensiones según el tipo de malla para el gancho

Malla	Tareas a analizar			
	Funcional Tensiones		$D_T \mathcal{S}$	
	Tiempo (s)	Memoria (MB)	Tiempo (s)	Memoria (MB)
No est.	1,502	$\leq 0,01$	10,165	12,61
Est. grue.	1,599	$\leq 0,01$	9,154	12,15
Est. fina	7,002	0,50	45,061	68,54

más rápido que el suavizado LOWESS. Por otro lado, el costo computacional de la malla estructurada más fina es notablemente mayor al de la malla no estructurada en todas las tareas exceptuando el suavizado.

Del análisis realizado en esta sección se concluye que es conveniente el uso de mallas no estructuradas para los problemas de control de máximas tensiones, puesto que las mallas estructuradas poseen deficiencias para reconocer las tensiones elevadas en regiones problemáticas. Si se utiliza una malla estructurada que logre obtener adecuadamente las tensiones en la esquina, el costo computacional total es elevado, sin lograr una mejora significativa de los resultados lejos de la esquina. Por otro lado, si se utiliza una malla estructurada de costo computacional similar al de la malla no estructurada, la esquina no es adecuadamente redondeada, puesto que no se identifican las tensiones elevadas. Finalmente, las mallas no estructuradas permiten una adecuada representación de las tensiones en la esquina, y conducen a su redondeo, sin la necesidad de tener una malla muy fina lejos de ella.

6.3.3.2. Exclusión del punto de aplicación de la carga de $D_{\mathcal{S}}$

En esta sección se muestra que excluir de $D_{\mathcal{S}}$ una región cercana a un punto de aplicación de una carga concentrada es conveniente para la convergencia del método de optimización estructural. Para ello se hicieron pruebas en las cuales $D_{\mathcal{S}} = D$ cuyos resultados se discuten a continuación.

En primer lugar se hace notar que la conveniencia está muy asociada al nivel de finura de la malla en el punto de aplicación de la carga. Lo anterior se verifica al ejecutar el caso base considerando $D_{\mathcal{S}} = D$, donde el método convergió en 20 iteraciones y obtuvo la geometría de la Figura 6.81. Esta geometría es muy similar a la obtenida originalmente en la Figura 6.70, lo que muestra que el haber considerado $D_{\mathcal{S}} = D$ no modificó significativamente los

resultados obtenidos.

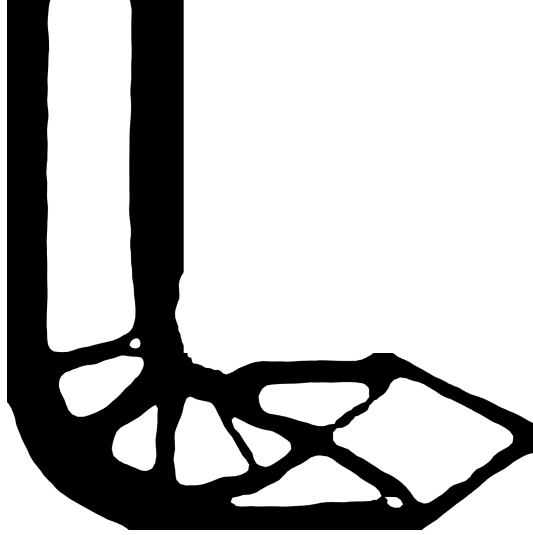


Figura 6.81: Estructura final optimizada del caso base del tercer ejemplo si $D_S = D$

El resultado anterior se asocia a que la malla utilizada es muy gruesa en el punto de aplicación de la carga y no nota que las tensiones en ese punto son elevadas. Por lo tanto, la consideración de excluir una región cercana al punto de aplicación de la carga de D_S solo puede ser conveniente si la malla en el punto de la aplicación de la carga es suficientemente fina.

Por otra parte, se ejecutó el método de optimización estructural considerando $D_S = D$ en una malla bastante más fina que la del caso base. Se consideró una malla no estructurada con un tamaño medio de elemento cerca de la esquina de 0,05625 y lejos de la esquina de 0,01687, la cual posee 86306 nodos y 171099 elementos. Además, se consideraron los mismos parámetros del caso base salvo el coeficiente de suavizado inicial, el cual se consideró $\varsigma_0 = 0,001$. En este caso el método convergió en 18 iteraciones y obtuvo el resultado de la Figura 6.82a. Por otro lado, si se hubiera considerado D_S como en la Figura 6.69, el resultado hubiera sido la estructura de la Figura 6.82b.

El resultado de la Figura 6.82a muestra que el redondeo de la esquina es insuficiente, mientras que el de la Figura 6.82b sí presenta un buen redondeo. La diferencia entre ambos resultados es D_S , lo cual muestra que haber considerado D_S igual a D afectó negativamente la convergencia del método.

El motivo detrás de que las tensiones no pudieran ser adecuadamente controladas para $D_S = D$ se debe principalmente al método de actualización de la función de nivel en base a la búsqueda lineal de la Ecuación (5.49) y al hecho

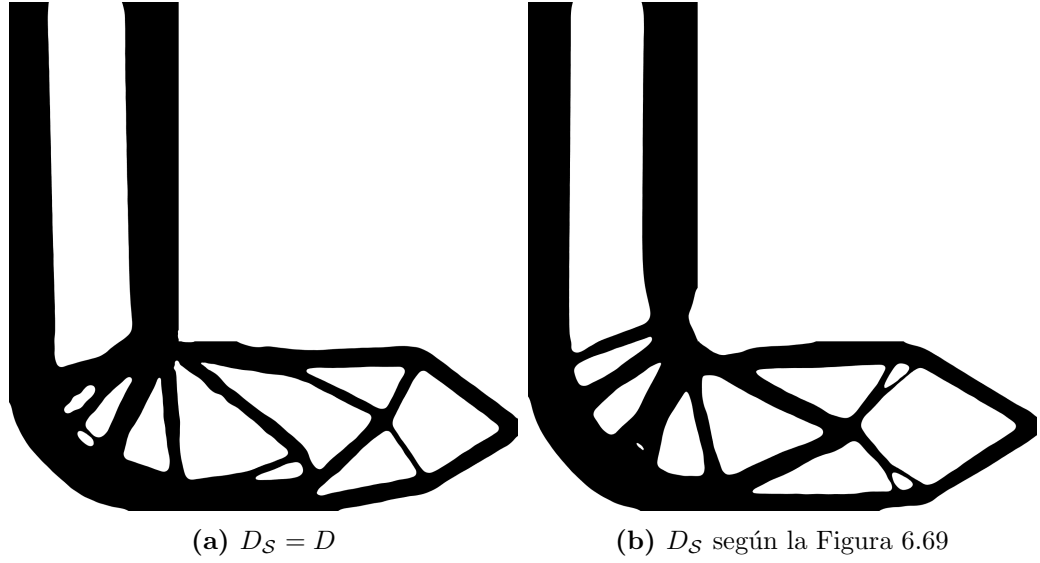


Figura 6.82: Estructuras finales optimizadas del tercer ejemplo si se usa una malla no estructurada muy fina

que la función de nivel es elevada en la esquina a redondear y en el punto de aplicación de la carga, según presentó la Figura 6.71. Luego, la derivada $D_T \mathcal{S}$ tiende a generar una función Ψ_{D_T} que redondea la esquina, pero que además tiende a desconectar el punto de aplicación de la carga con el resto de la estructura. Por lo tanto, la búsqueda lineal avanza y solamente logra hacer cambios significativos en las zonas donde $|\Psi|$ es reducido, es decir relativamente lejos de la esquina y el punto de aplicación de la carga, lo que complica la reducción del funcional de tensiones. Lo anterior queda además visto por el hecho que $\mathcal{S}$ al inicio del método fue 0,0015 y el de la Figura 6.82a es $\mathcal{S} = 0,0014$, mientras que el de la Figura 6.82b es $\mathcal{S} = 1,899 \times 10^{-5}$.

Finalmente, en estos casos se vio que excluir zonas cercanas al punto de aplicación de cargas concentradas es conveniente para obtener buenos resultados del método de control de grandes tensiones. Lo anterior es particularmente cierto en el caso en el cual la malla cerca del punto de aplicación de la carga sea muy fina.

6.3.4. Análisis de sensibilidad

Para continuar con el análisis de sensibilidad iniciado en los ejemplos anteriores, se presenta en esta sección la sensibilidad a los parámetros del método de optimización estructural que aún no se presentaron. Los anteriores paráme-

tros son el coeficiente de penalidad del funcional de tensiones α y la tensión límite $\bar{\sigma}_{VM}$. Adicionalmente, se presenta el análisis de sensibilidad al tamaño de malla y a la fracción objetivo del área ocupable de este problema y el análisis de sensibilidad al coeficiente de suavizado inicial, dado que se modificó la técnica de suavizado.

Para esta sección, en todos los casos en los que se comparan las tensiones máximas obtenidas al final de la optimización, su cálculo se hizo como la máxima tensión en los puntos de cuadratura de Gauss. Lo anterior refiere a comparar la efectividad del control de máximas tensiones en las mallas empleadas.

6.3.4.1. Sensibilidad al tamaño de malla y a la fracción objetivo del área ocupable

Tras lo presentado en las secciones anteriores, se presenta aquí el análisis de sensibilidad al tamaño de malla y a la fracción objetivo del área ocupable en un problema en el cual se buscó controlar las máximas tensiones. Nuevamente se consideraron cinco tamaños de malla, los cuales se denominan: muy fino, fino, base, grueso y muy grueso. La malla de tamaño base fue la considerada en las secciones anteriores (ver la Figura 6.68), mientras que el resto son mallas no estructuradas que surgieron de aumentar, o disminuir, el tamaño de elemento cerca de la esquina y lejos de ella. La Tabla 6.29 presenta las principales características de dichas mallas, donde el tamaño del elemento en la esquina refiere al tamaño de los elementos en un radio de 0,5 de la esquina problemática del gancho y el tamaño del elemento lejos refiere al tamaño de elemento máximo considerado en el mallado. Las mallas realizadas aumentan progresivamente el tamaño del elemento con un factor geométrico de 1,05. Por otra parte, se consideraron cinco objetivos de área ocupable desde $M = 0,3$ hasta $M = 0,7$ con un paso de 0,1. Al igual que en los casos anteriores, se consideraron 25 pruebas para este análisis de sensibilidad.

Para las pruebas se consideraron los mismos valores de los parámetros de entrada del método de optimización estructural, salvo el valor inicial de c y ς_0 , los cuales se consideraron según se presenta en la Tabla 6.30. Al igual que en los casos anteriores, se procuró que pruebas con igual malla mantuvieran el mismo ς_0 y pruebas con igual objetivo del área ocupable mantuvieran el mismo c . Al igual que en la ménsula, las pruebas con la malla muy gruesa no

Tabla 6.29: Características de las mallas que se consideraron para las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla del tercer ejemplo

Malla	Tam. elem. esquina	Tam. elem. lejos	$\mathcal{N}_{no}$	$\mathcal{N}_{el}$
Muy fina	0,0056	0,0168	86306	171099
Fina	0,0112	0,0338	22753	44741
Base	0,0225	0,0675	6444	12495
Gruesa	0,0450	0,1350	2154	4101
Muy gruesa	0,0900	0,2700	850	1575

lograron converger a menos que el coeficiente de suavizado fuera nulo.

Tabla 6.30: Parámetros c y ς_0 empleados en las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla y M del tercer ejemplo

Malla		Fracción objetivo del área ocupada				
		$M = 0,3$	$M = 0,4$	$M = 0,5$	$M = 0,6$	$M = 0,7$
Muy fina	c	0,8	1,2	2,0	2,8	3,4
	ς_0	0,0005	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010
Fina	c	0,8	1,2	2,0	2,8	3,4
	ς_0	0,0010	0,0015	0,0020	0,0020	0,0020
Base	c	0,8	1,2	2,0	2,8	3,4
	ς_0	0,0025	0,0030	0,0035	0,0035	0,0035
Gruesa	c	0,8	1,2	2,0	2,8	3,4
	ς_0	0,0020	0,0030	0,0030	0,0030	0,0030
Muy gruesa	c	0,8	1,2	2,0	2,8	3,4
	ς_0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

En la Figura 6.83 se presentan los resultados para las 25 pruebas anteriormente descritas. En primer lugar se nota que, para todas las mallas y objetivos de área a ocupar, los resultados obtenidos son buenos, en particular para $M \geq 0,4$ y para las tres mallas más finas. La anterior afirmación se basa en que las geometrías obtenidas son similares a las presentadas en la bibliografía. A pesar de lo anterior, se destaca que la malla muy gruesa no logró redondear la esquina problemática en ninguno de los cinco objetivos de área a ocupar. De forma similar, la malla gruesa llegó a hacer un símil de redondeado en algunos casos pero que no se consideran totalmente aceptables. Los resultados anteriores fueron esperables dados los análisis de la necesidad de una malla fina cerca de la esquina problemática realizados anteriormente para este ejemplo.

Por otra parte, si bien los resultados de las tres mallas más finas para $M \geq 0,4$ son muy buenos en términos generales, no sucede lo mismo para $M = 0,3$. Las dos mallas más finas presentaron problemas en la convergencia y

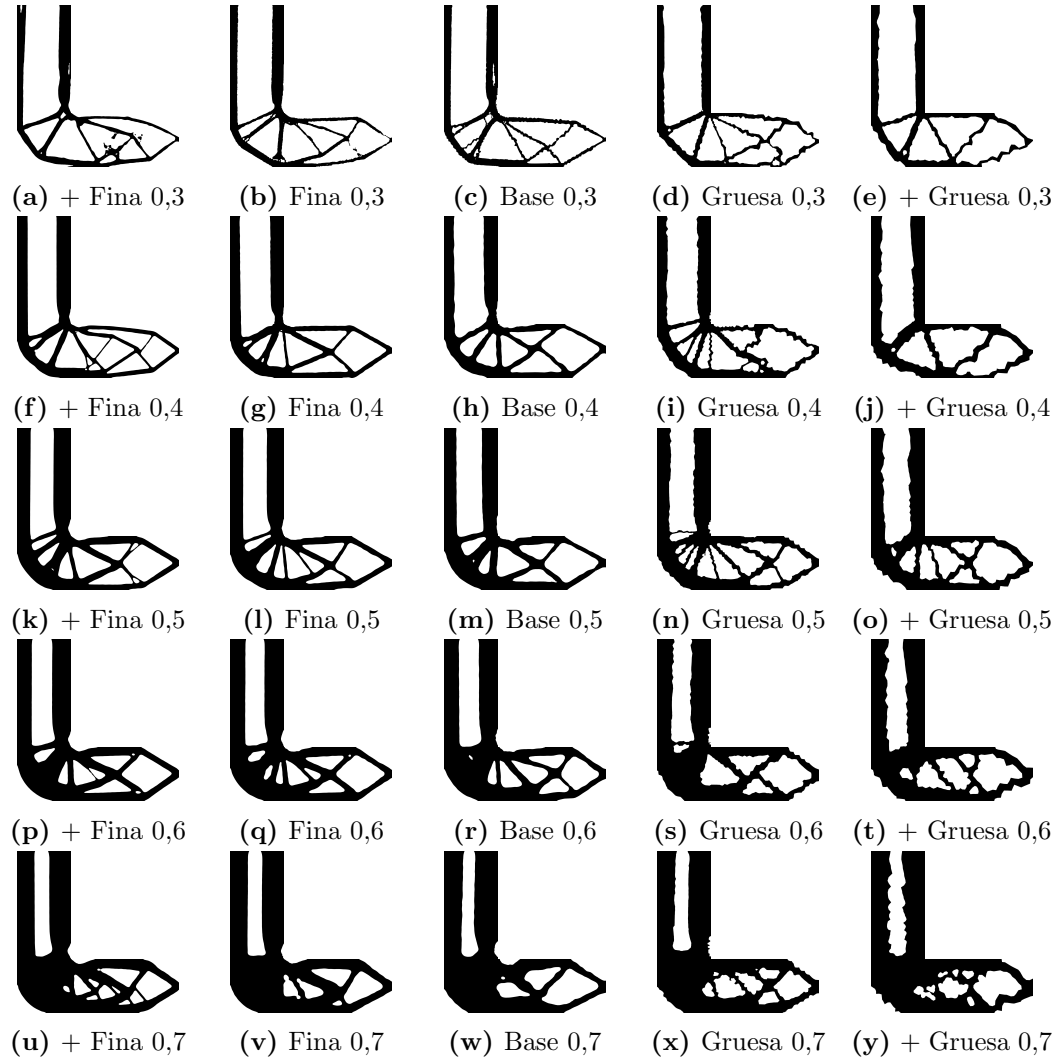


Figura 6.83: Estructuras obtenidas para el tercer ejemplo del análisis de sensibilidad al tamaño de malla y objetivo de área ocupable

terminaron presentando algunos componentes flotantes. Por otro lado, la malla base, para la cual en la mayoría de los resultados se obtuvo geometrías suaves o levemente rugosas, presentó una estructura muy rugosa. Esta estructura rugosa se debe por un lado a una dificultad para resolver la estructura con $M = 0,3$ y por otro a la dificultad de obtener componentes estructurales de pequeño ancho. Se recuerda que dicha dificultad se asocia a que, a pesar de la capacidad del XFEM de lograr representar geometrías no necesariamente conformes a la malla, no se puede tener más de una interfase por elemento para los elementos triangulares lineales. El motivo detrás de la dificultad para obtener buenos resultados para $M = 0,3$ se asocia a que la tensión se asemeja a la límite en toda la estructura. Por lo tanto, el método tiene dificultades para

converger y avanzar cuando en toda la estructura la tensión es alta.

Una diferencia notable de los resultados para el gancho, respecto a los presentados en los dos ejemplos anteriores, es que no se nota para las fracciones más pequeñas del área a ocupar el efecto de que a mayor finura de la malla mayor es la cantidad de huecos en la estructura. Lo anterior se asocia a que el método no admite la presencia de componentes finos con igual facilidad que cuando solamente se minimizaba la complacencia, ya que son propensos a presentar grandes tensiones. Por otro lado, sí se notó que para $M = 0,6$ y $M = 0,7$ aumentó la cantidad de huecos con la finura de la malla, lo que es consistente con el argumento anterior.

En la Tabla 6.31 se presentan las complacencias finales obtenidas en las 25 pruebas. Nuevamente, para que los resultados sean comparables, todas las complacencias se calcularon utilizando la malla muy fina, interpolando la función de nivel desde las mallas más gruesas. En primer lugar se destaca que la malla muy gruesa devolvió los peores resultados en complacencia en casi todos los casos, salvo el caso de la malla fina con $M = 0,3$ que presentó cierta discontinuidad. Este resultado es particularmente interesante, dado que la malla muy gruesa no fue capaz de redondear la esquina, por lo que se esperaban complacencias menores. Por otro lado, los mejores resultados para la complacencia fueron en general de las mallas base y fina, lo que rectifica la conclusión de los ejemplos de la ménsula y el puente de la no conveniencia de usar mallas demasiado finas a menos que sea estrictamente necesario.

Tabla 6.31: Complacencias finales obtenidas en las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla y M para el tercer ejemplo

Malla	Complacencia final				
	$M = 0,3$	$M = 0,4$	$M = 0,5$	$M = 0,6$	$M = 0,7$
Muy gruesa	617,59	523,81	361,47	326,93	291,80
Gruesa	575,54	454,24	336,16	311,27	277,62
Base	540,85	408,25	334,52	295,48	298,31
Fina	830,49	390,23	331,05	297,34	273,56
Muy fina	583,56	394,98	332,89	298,91	275,10

A continuación se presenta en las Tablas 6.32 y 6.33 los valores de las tensiones de von Mises máximas alcanzadas en los puntos de cuadratura de Gauss de las distintas geometrías. En la Tabla 6.32 se presentan las tensiones en los puntos de cuadratura de cada malla, para evaluar la efectividad del control de tensiones en cada caso. Por otro lado, en la Tabla 6.33 se presentan las

máximas tensiones en los puntos de cuadratura de la malla muy fina, tras interpolar la función de nivel desde las mallas más gruesas, para comparar las pruebas entre sí. De la primera tabla se obtuvo que las mallas más gruesas fueron efectivas en la mayoría de los casos para controlar las tensiones en su propia malla, mientras que la malla base y fina solo para $M \geq 0,4$ y la muy fina para $M \geq 0,6$. Por otra parte, de la segunda tabla se ve que ninguna fue perfecta para redondear la esquina problemática, ya que todas terminaron con al menos un remanente en forma de ángulo entrante que generó importantes tensiones. Estos ángulos entrantes finales no pueden ser eliminados con seguridad, solamente reducirlos al reducir el tamaño de la malla.

Tabla 6.32: Tensiones máximas obtenidas en las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla y M para el tercer ejemplo, medidas con la malla de cada prueba

Malla	Tensión máxima en los puntos de cuadratura				
	$M = 0,3$	$M = 0,4$	$M = 0,5$	$M = 0,6$	$M = 0,7$
Muy gruesa	25,134	34,404	21,960	19,007	18,687
Gruesa	28,961	26,161	25,729	26,754	24,486
Base	85,741	29,529	28,305	39,957	27,063
Fina	173,168	29,714	29,524	25,995	30,862
Muy fina	57,644	54,371	32,777	30,556	27,848

Tabla 6.33: Tensiones máximas obtenidas en las pruebas de sensibilidad al tamaño de malla y M para el tercer ejemplo, medidas con la malla muy fina

Malla	Tensión máxima en los puntos de cuadratura				
	$M = 0,3$	$M = 0,4$	$M = 0,5$	$M = 0,6$	$M = 0,7$
Muy gruesa	123,751	108,438	87,700	75,498	84,096
Gruesa	83,408	58,414	67,565	63,495	64,976
Base	90,756	46,938	46,197	51,865	33,481
Fina	119,695	33,179	34,592	29,986	33,196
Muy fina	57,644	54,371	32,777	30,556	27,848

Finalmente se presenta en la Tabla 6.34, para las tareas clásicas, y en la Tabla 6.35, para las tareas asociadas al control de las tensiones, el costo computacional según los distintos tamaños de malla. En primer lugar se destaca que el cálculo del funcional de penalización de tensiones es la tarea menos costosa del método, si bien su costo en tiempo no es despreciable dado que debe hacerse en todas las subiteraciones de la búsqueda lineal. Por otro lado, el análisis estructural y el cálculo de la DT del funcional de tensiones son las tareas más costosas en memoria y de las más costosas en tiempo, aunque el

análisis estructural debe hacerse en todas las subiteraciones, y el cálculo de la DT una sola vez por iteración. Finalmente se hace notar que, a diferencia de cuando se utiliza el suavizado de Garcia (2010) para mallas estructuradas, el suavizado LOWESS es muy costoso a nivel de tiempo, sobretodo para las mallas más finas, creciendo más rápido que las otras tareas con la finura de la malla. El aumento del costo computacional al aumentar la cantidad de nodos de la malla, refuerza la conclusión de que no es conveniente emplear mallas excesivamente finas a menos que sea estrictamente necesario.

Tabla 6.34: Costo computacional de las tareas clásicas, según el tamaño de malla, para el tercer ejemplo

Malla	Tareas a analizar					
	Anál. estructural		$D_T W^e$		Suavizado	
	Tiempo (s)	Memoria (MB)	Tiempo (s)	Memoria (MB)	Tiempo (s)	Memoria (MB)
Muy gruesa	1,572	2,82	1,081	$\leq 0,01$	0,423	$\leq 0,01$
Gruesa	2,480	6,28	1,822	$\leq 0,01$	1,061	$\leq 0,01$
Base	4,555	12,61	3,139	1,02	4,497	$\leq 0,01$
Fina	13,120	37,35	7,961	1,05	39,711	$\leq 0,01$
Muy fina	49,619	119,84	25,094	1,02	501,048	1,32

Tabla 6.35: Costo computacional de las tareas del funcional de tensiones según el tamaño de malla para el tercer ejemplo

Malla	Tareas a analizar			
	Funcional Tensiones		$D_T \mathcal{S}$	
	Tiempo (s)	Memoria (MB)	Tiempo (s)	Memoria (MB)
Muy gruesa	0,346	$\leq 0,01$	2,112	3,84
Gruesa	0,617	$\leq 0,01$	3,855	6,28
Base	1,097	$\leq 0,01$	7,831	12,61
Fina	3,158	$\leq 0,01$	17,008	37,35
Muy fina	7,486	1,03	47,012	119,85

6.3.4.2. Análisis de sensibilidad al coeficiente de suavizado inicial

A continuación se analiza la sensibilidad al coeficiente de suavizado inicial en el caso del gancho. El motivo de repetir el análisis de sensibilidad a este coeficiente es que en este caso se utilizó el método de suavizado LOWESS en vez de la técnica de Garcia (2010). Para hacer este análisis de sensibilidad se

consideraron 12 pruebas, modificando ς_0 desde 0 hasta 0,0055, con un paso de 5×10^{-4} .

Se presentan en la Figura 6.84 las geometrías obtenidas por los distintos coeficientes de suavizado. La Figura 6.84j posee una alerta dada por el símbolo $\dagger$ en su pie de figura para indicar que no alcanzó la convergencia. En primer lugar, se obtuvo que el método sigue siendo muy sensible al coeficiente de suavizado inicial, a pesar de la diferencia metodológica con los dos ejemplos anteriores. Por otro lado, sí se notó que a mayor coeficiente de suavizado inicial menor fue el redondeado final de la esquina problemática. Lo anterior implica que en buena parte la reducción del redondeado de la esquina presentada en el caso base fue consecuencia del suavizado y de que las tensiones se mantuvieran controladas. Finalmente se obtuvo que para $1,5 \times 10^{-3} \leq \varsigma_0 \leq 3,5 \times 10^{-3}$ las estructuras obtenidas fueron suaves o levemente rugosas. Para los coeficientes de suavizado inicial menores a $1,5 \times 10^{-3}$ las estructuras fueron rugosas debido a una falta de suavizado. Por otro lado, para los coeficientes de suavizado inicial mayores a $4,0 \times 10^{-3}$ las estructuras fueron rugosas por dificultades en la convergencia de las búsquedas lineales que generaron grandes decaimientos del coeficiente de suavizado.

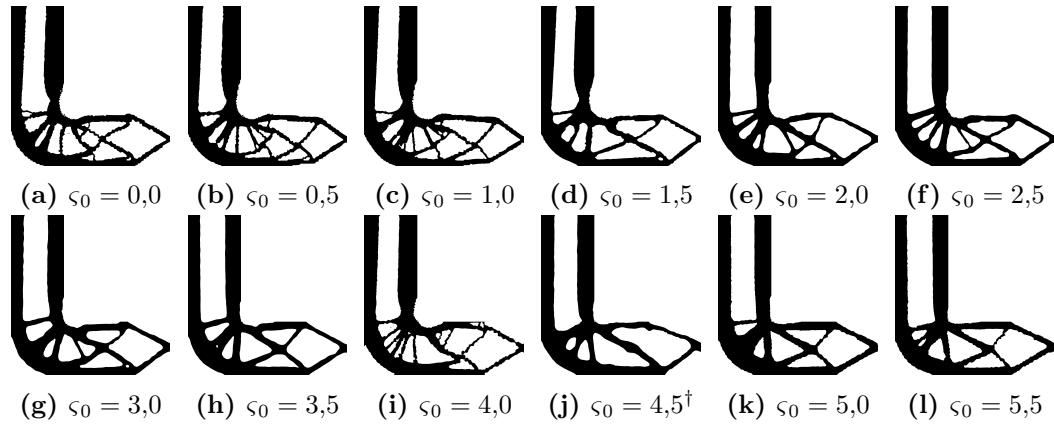


Figura 6.84: Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a ς_0 del tercer ejemplo. Valores de ς_0 multiplicados por 1000

En las Figuras 6.85 y 6.86 se presentan los valores finales de complacencia, la máxima tensión de von Mises en los puntos de cuadratura y la cantidad de iteraciones hasta la convergencia de las 11 pruebas que convergieron. Se notó que para las pruebas realizadas la complacencia fue sensible respecto al coeficiente de suavizado inicial, si bien en menor medida que lo sucedido para la ménsula. Además, se obtuvo una tendencia de que a mayor coeficiente de

suavizado inicial menor la complacencia final. Por otra parte, la cantidad de iteraciones sí fue muy sensible al coeficiente de suavizado inicial, obteniéndose casos con pocas decenas de iteraciones y casos con casi doscientas. En este caso se notó una tendencia de requerir un mayor número de iteraciones para un coeficiente de suavizado muy chico o muy grande.

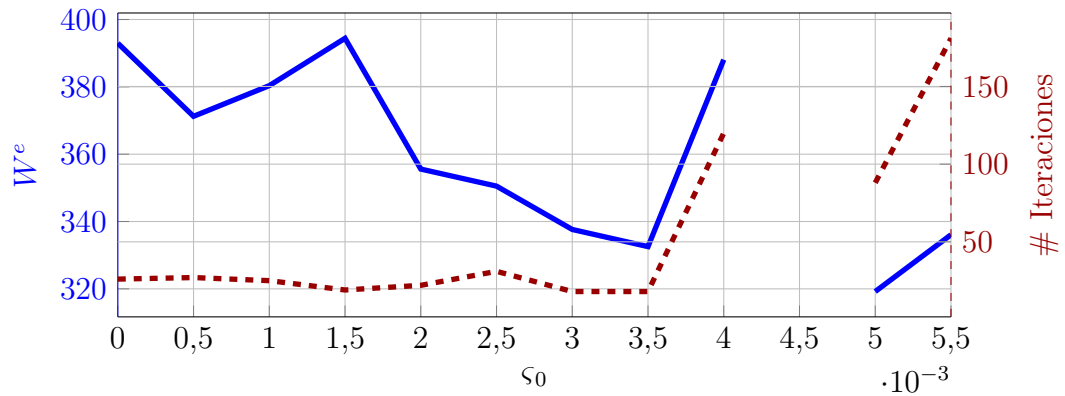


Figura 6.85: Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a s_0 para el tercer ejemplo

En la Figura 6.86 se ve que en la mayoría de las pruebas la tensión máxima alcanzada fue bastante mayor a la tensión máxima admisible. Los únicos casos en los que la tensión de von Mises en los puntos de cuadratura fue menor a 30 fue en los casos en los que más se redujo el redondeo de la esquina. Por lo tanto, la reducción del redondeo de la esquina asociada al suavizado no es un problema, siempre y cuando el método se asegure de que no se vuelva a generar un ángulo entrante de un tamaño importante.

Finalmente, en la Tabla 6.36 se presentan los principales estadísticos de la complacencia final y la cantidad de iteraciones para las pruebas de sensibilidad al coeficiente de suavizado inicial. Se ve en la tabla que la complacencia final efectivamente no fue tan sensible al coeficiente de suavizado inicial, ya que el mínimo y el máximo no son muy dispares entre sí. Por otro lado, la cantidad de iteraciones sí fue demasiado sensible, dado que el máximo alcanzado es hasta 10 veces mayor al mínimo. Además se ve que el caso base no fue el mejor resultado en ninguna de las medidas (complacencia, tensión máxima o iteraciones) pero presentó un buen equilibrio entre las tres.

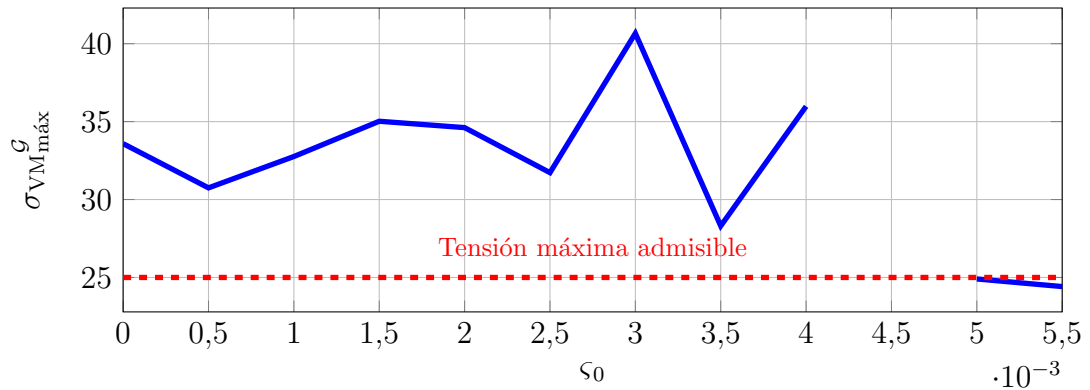


Figura 6.86: Tensiones máximas del análisis de sensibilidad respecto a ζ_0 para el tercer ejemplo

Tabla 6.36: Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a ζ_0 para el tercer ejemplo

Estadístico	Complacencia final	Cantidad de iteraciones
Promedio	359,872	52
Desv. estándar	26,833	54
Máximo (¿Dónde?)	394,412 ($\zeta_0 = 0,0015$)	181 ($\zeta_0 = 0,0055$)
Mínimo (¿Dónde?)	319,202 ($\zeta_0 = 0,0050$)	18 ($\zeta_0 = 0,0030$)

6.3.4.3. Análisis de sensibilidad al coeficiente de penalidad de las tensiones

Para el análisis de sensibilidad al coeficiente de penalidad del funcional de tensiones, se hicieron 20 pruebas, modificando el coeficiente de penalidad desde $\alpha = 10^4$ hasta $\alpha = 2 \times 10^5$, con un paso de 10^4 , y cinco pruebas adicionales con penalidades altas dadas por $\alpha \in \{3; 4; 6; 8; 10\} \times 10^5$. El resto de los parámetros del método de optimización estructural se los consideró idénticos a los del caso de base.

En la Figura 6.87 se presentan las geometrías de las estructuras optimizadas de las 25 pruebas descritas anteriormente. En primer lugar se hace notar que existen varias pruebas en las cuales se colocó una alerta, dada por el símbolo †, en su pie de figura para indicar que no lograron converger. En todos estos casos, el resultado presentado es la geometría resultado de la quincuagésima iteración. Se tuvo que para valores no muy grandes del coeficiente de penalidad ($\alpha \leq 1,5 \times 10^5$) el método pudo alcanzar la convergencia en todos los casos, si bien fue difícil para la de $\alpha = 2 \times 10^4$. Por otro lado, para valores grandes de α el método

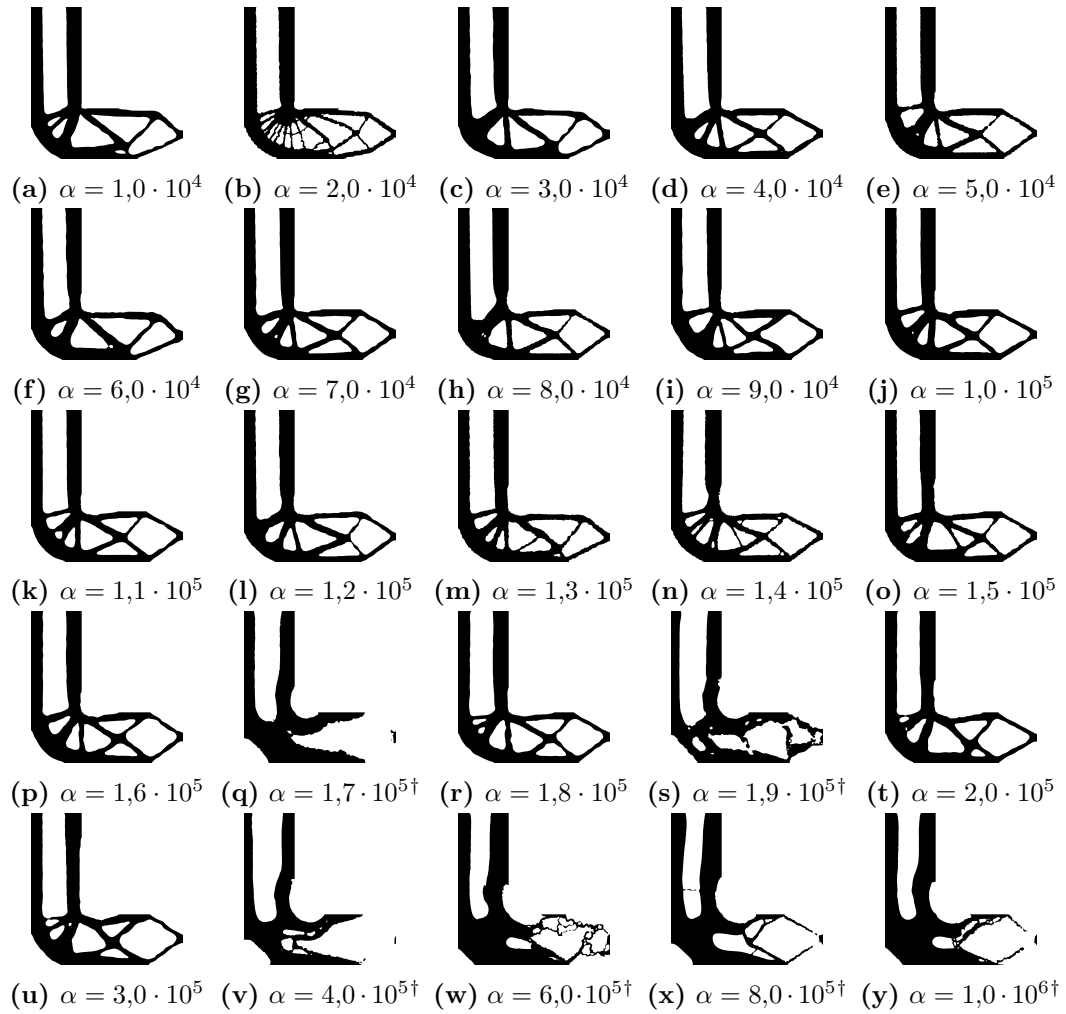


Figura 6.87: Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a α del tercer ejemplo

presentó mayores dificultades para converger, siendo incapaz de hacerlo para $\alpha \geq 4 \times 10^5$, pudiendo incluso presentar geometrías discontinuas. Por lo tanto se obtiene que utilizar penalidades al funcional de tensiones elevadas desde un principio no es una buena técnica, dado que puede afectar muy negativamente a la convergencia.

En la Figura 6.87 se nota que si bien el método es sensible al coeficiente de penalidad del funcional de tensiones, no lo es tanto como a otros parámetros, lo cual se ve por el hecho que las geometrías obtenidas son en general muy similares entre sí. La única diferencia notable entre las distintas geometrías es que para α mayores aumentó el alcance de la zona redondeada de la arista. En la Figura 6.87a el redondeo es muy local, casi no apreciándose que se haya redondeado el ángulo entrante. Por otra parte, en las Figuras 6.87t y 6.87u el

redondeo es muy importante afectando apreciablemente la geometría entre la aplicación de la carga y la esquina problemática. Además, las Figuras 6.87v a 6.87y muestran un redondeo gigantesco realizado en las primeras iteraciones del método de optimización estructural.

Se destaca que, como se presentó para el caso base, el método suele redondear en las primeras iteraciones la esquina problemática y luego mantener dicho redondeo siempre y cuando las tensiones no superen el límite con claridad. Es por este motivo que las pruebas con α mayores presentan un mayor alcance de la zona redondeada, dado que el redondeado de las primeras iteraciones fue muy grande.

A continuación se presenta en la Figura 6.88 el comportamiento de la complacencia y el número total de iteraciones para converger en función de α . Se retiraron del gráfico todas las pruebas que no alcanzaron la convergencia. En la figura se ve que, al igual que para la mayoría de los parámetros, el número de iteraciones para alcanzar la convergencia no presentó ninguna tendencia clara, presentando valores muy variables entre las distintas pruebas. Por otro lado, sí se notó para la complacencia una tendencia débil a crecer a medida que aumenta el coeficiente de penalidad. Lo anterior es consistente con un mayor alcance de la zona de redondeado para valores grandes de α . Además, un α mayor dá más relevancia al funcional de tensiones y quita relevancia a la complacencia.

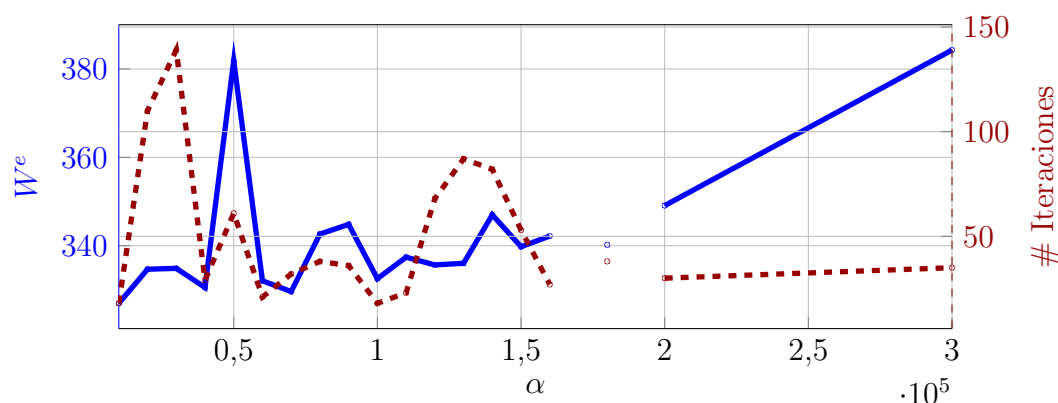


Figura 6.88: Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a α para el tercer ejemplo

En la Tabla 6.37 se presentan los principales estadísticos de la complacencia y la cantidad de iteraciones. De la tabla se obtiene que la complacencia

no fue muy sensible al coeficiente de penalidad de tensiones, presentando un coeficiente de variación menor al 5 %. Además, el valor mínimo ocurrió para el menor valor de α y el valor máximo para el mayor valor de α que alcanzó la convergencia. Por otro lado, el número de iteraciones para converger sí fue muy sensible a la penalidad, presentando un coeficiente de variación de más del 50 %.

Tabla 6.37: Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a α para el tercer ejemplo

Estadístico	Complacencia final	Cantidad de iteraciones
Promedio	342,224	49
Desv. estándar	15,570	33
Máximo (¿Dónde?)	384,279 ($\alpha = 300000,0000$)	139 ($\alpha = 30000,0000$)
Mínimo (¿Dónde?)	326,974 ($\alpha = 10000,0000$)	18 ($\alpha = 10000,0000$)

Finalmente, se presenta en la Figura 6.89 la máxima tensión de von Mises en los puntos de cuadratura de Gauss en función de α . Como era de esperar, a medida que crece el coeficiente de penalidad del funcional de tensiones, se hace menor la máxima tensión de von Mises. Además, para valores grandes de α se deja de violar la condición $\sigma_{VM} \leq \bar{\sigma}_{VM}$. Estos resultados muestran que el uso de penalidades grandes es muy importante para obtener un adecuado control de las tensiones máximas.

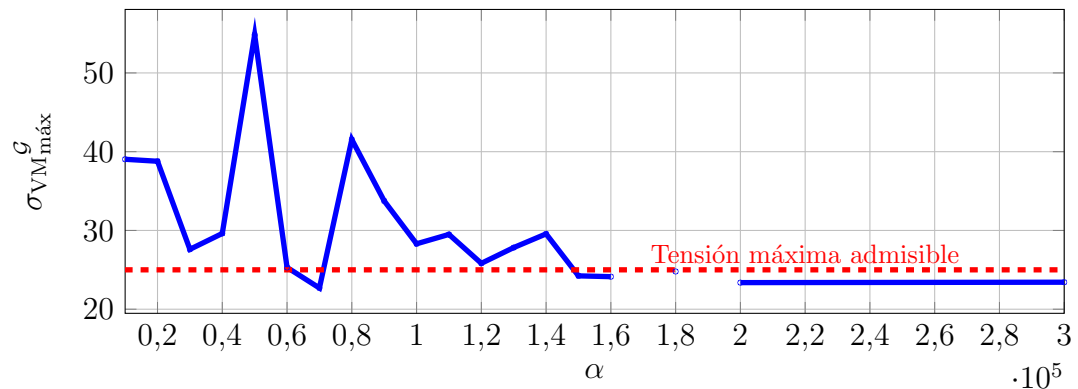


Figura 6.89: Tensiones máximas del análisis de sensibilidad respecto a α para el tercer ejemplo

De los resultados del análisis de sensibilidad al coeficiente de penalidad del funcional de tensiones se obtiene una discrepancia sobre la mejor técnica para seleccionarlo. Por un lado, coeficientes de penalidad grandes generan

un redondeo muy importante de la esquina, potencialmente innecesario como se vio en la Sección 6.3.4.2, debido a un excesivo redondeo en las primeras iteraciones. Por otro lado, coeficientes de penalidad chicos no limitan adecuadamente la tensión máxima, ni siquiera para la malla en la que se optimizó. Estas dificultades están relacionadas al hecho de que en esta tesis se consideró un coeficiente de penalidad del funcional de tensiones fijo. Si en cambio se considera un coeficiente de penalidad relativamente pequeño al inicio, de forma tal que el redondeo inicial no sea exagerado, y a medida que avanza el método se hace crecer dicho coeficiente; potencialmente se solucionen las dificultades presentadas. La posibilidad de considerar coeficientes de penalidad en tensiones variables o emplear un método similar al LA para limitar las tensiones bajo alguna tolerancia, se consideran como trabajo futuro.

6.3.4.4. Análisis de sensibilidad a la tensión límite

Finalmente se considera el análisis de sensibilidad a la tensión límite $\bar{\sigma}_{VM}$, para lo cual se hicieron 11 pruebas desde $\bar{\sigma}_{VM} = 20$ hasta $\bar{\sigma}_{VM} = 30$ con un paso de 1. Se consideraron en todos los casos los mismos parámetros del caso base salvo α , el cual se redujo a la mitad para $\bar{\sigma}_{VM} \in \{20; 21; 22\}$ para permitir la convergencia. Se presenta en la Figura 6.90 las geometrías optimizadas de las pruebas, excluyendo la de $\bar{\sigma}_{VM} = 25$, dado que es la del caso de base. En general, salvo la prueba de la Figura 6.90f la cual presentó una geometría muy rugosa, las pruebas presentaron geometrías similares entre sí, con geometrías suaves o levemente rugosas. La diferencia notable entre los distintos resultados es el alcance del redondeo de la esquina problemática, de forma similar a lo sucedido con α .

Se presentan en la Tabla 6.38 los principales estadísticos asociados a la complacencia y al número de iteraciones respecto a $\bar{\sigma}_{VM}$. En términos generales se obtuvo que el método es menos sensible a este parámetro que a otros, siendo que los coeficientes de variación no son tan grandes. El caso de $\bar{\sigma}_{VM} = 26$ genera una complacencia y una cantidad de iteraciones muy grandes, que afectan al cálculo de la desviación estándar.

En la Figura 6.91 se presenta el comportamiento de la complacencia y la cantidad de iteraciones para los distintos valores de $\bar{\sigma}_{VM}$. En el caso de la complacencia, se ajustó la escala vertical del gráfico de forma que se visualicen mejor los resultados de todas las pruebas, menos la de $\bar{\sigma}_{VM} = 26$. En general se

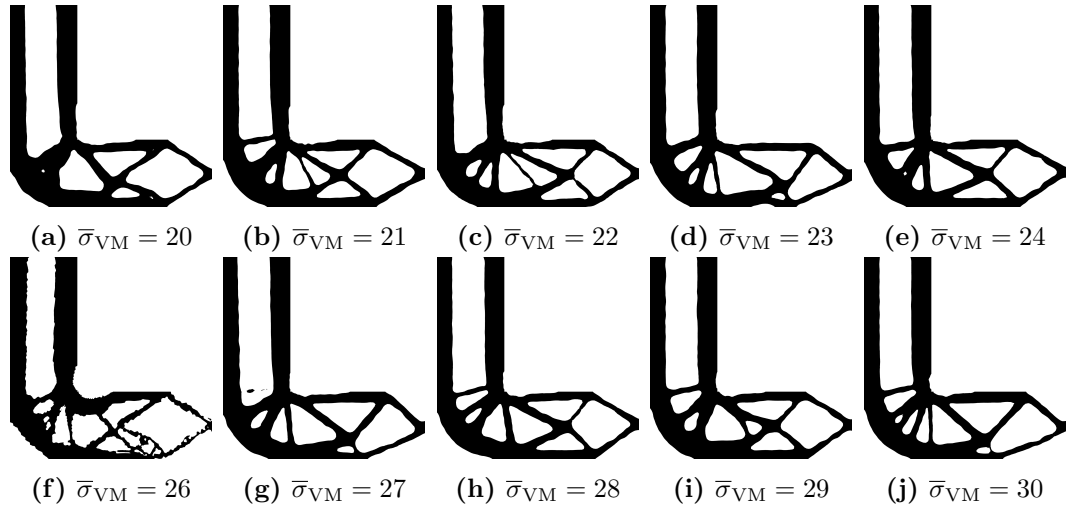


Figura 6.90: Geometrías finales para el análisis de sensibilidad respecto a $\bar{\sigma}_{VM}$ del tercer ejemplo

Tabla 6.38: Estadísticos de la complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a $\bar{\sigma}_{VM}$ para el tercer ejemplo

Estadístico	Complacencia final	Cantidad de iteraciones
Promedio	342,724	32
Desv. estándar	30,641	18
Máximo (<i>¿Dónde?</i>)	432,323 ($\bar{\sigma}_{VM} = 26$)	84 ($\bar{\sigma}_{VM} = 26$)
Mínimo (<i>¿Dónde?</i>)	328,286 ($\bar{\sigma}_{VM} = 29$)	18 ($\bar{\sigma}_{VM} = 25$)

obtuvo una tendencia de menores complacencias a mayores valores de $\bar{\sigma}_{VM}$ y un comportamiento similar, aunque más débil, para la cantidad de iteraciones.

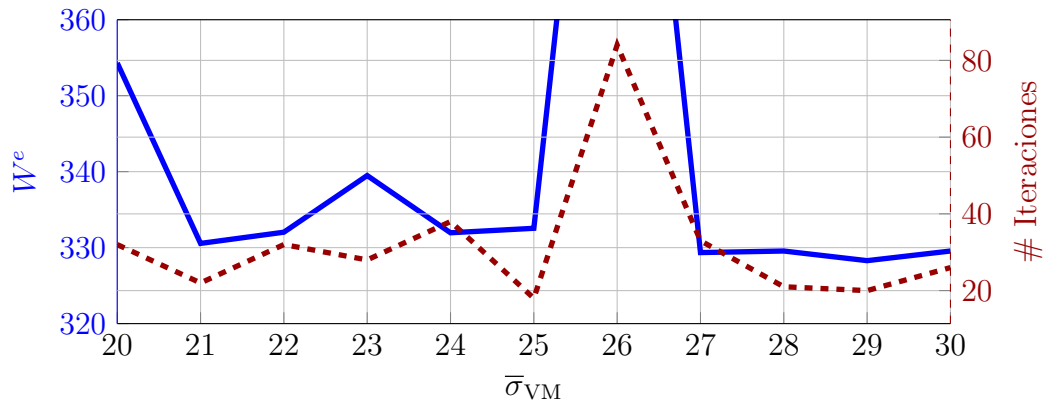


Figura 6.91: Complacencia final y cantidad de iteraciones del análisis de sensibilidad respecto a $\bar{\sigma}_{VM}$ para el tercer ejemplo

Finalmente, se presenta en la Figura 6.92 el comportamiento de las tensiones de von Mises máximas en los puntos de cuadratura en función de $\bar{\sigma}_{VM}$. Se tiene que en la mayoría de los casos, salvo $\bar{\sigma}_{VM} = 24$ y $\bar{\sigma}_{VM} = 26$, las tensiones máximas obtenidas fueron similares a las admisibles. Lógicamente, lo anterior implica que la tensión máxima en la estructura aumentó para mayores valores de $\bar{\sigma}_{VM}$. Además, se tuvo que el método fue eficaz, en la mayoría de los casos, en limitar las tensiones para distintos límites.

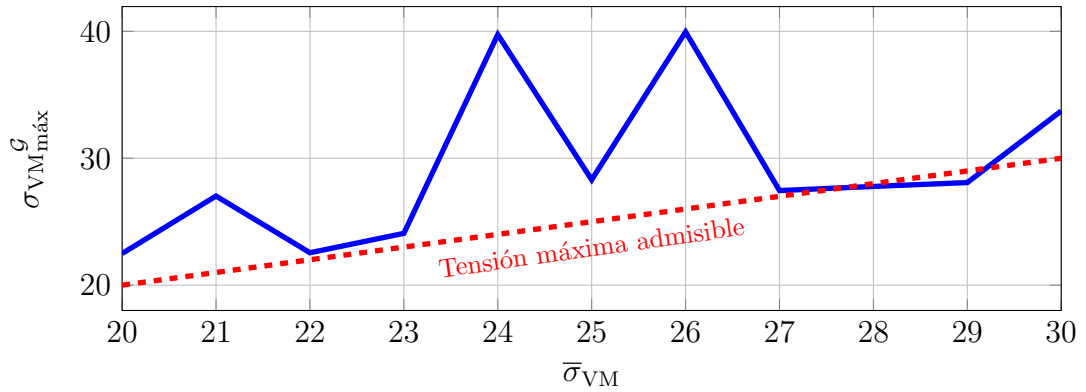


Figura 6.92: Tensiones máximas del análisis de sensibilidad respecto a $\bar{\sigma}_{VM}$ para el tercer ejemplo

De los resultados de este análisis de sensibilidad se obtiene que si el interés de controlar las tensiones es evitar puntos de tensiones excesivamente grandes, la selección de $\bar{\sigma}_{VM}$ no genera mucha sensibilidad. En estos casos la estrategia sería considerar un valor de $\bar{\sigma}_{VM}$ notablemente más chico que el valor de la tensión en la esquina para la malla empleada y notablemente más grande que el valor de la tensión lejos de la esquina. Por otra parte, $\bar{\sigma}_{VM}$ puede ser escogido en base a las propiedades resistentes del material, en cuyo caso la estrategia sería limitar las tensiones a la resistencia del material.

6.3.5. Comparación entre métodos de análisis

Finalmente, en esta sección se presenta la comparación entre los distintos métodos para el ejemplo del gancho, según lo discutido en la Sección 5.6. Este análisis complementa los hechos en los ejemplos anteriores, puesto que estudia las diferencias de desempeño en un caso con control de tensiones. Para estas pruebas se consideraron la misma malla del caso base y los mismos parámetros, exceptuando el coeficiente de penalidad cuadrática del LA inicial y el coeficien-

te de suavizado inicial. El coeficiente de suavizado inicial se tomó nulo para las pruebas de FEM y de XFEM sin suavizado y el coeficiente de penalidad cuadrática del LA inicial se tomó según se presenta en la Tabla 6.39. La elección de c para todas las pruebas surgió de respectivos análisis de sensibilidad, escogiendo parámetros que tuvieran un buen desempeño entre complacencia final, limitación de las tensiones y cantidad de iteraciones. Al igual que en los ejemplos anteriores, se presentan a continuación las geometrías obtenidas con los distintos métodos de análisis y posteriormente se discuten los resultados de los criterios de comparación. Se recuerda que, según lo discutido en la Sección 6.1.4, no se incluyen los métodos H, I y J según la Tabla 5.1 por requerir un tiempo de cálculo excesivo.

Tabla 6.39: Parámetros utilizados en las pruebas de comparación entre métodos para el tercer ejemplo

Parámetro	Método						
	A	B	C	D	E	F	G
c	2,0	1,7	2,0	0,8	1,6	1,6	1,9

En primer lugar se presenta en la Figura 6.93 los resultados obtenidos por los cuatro métodos que utilizan el XFEM. Las Figuras 6.93a y 6.93c presentan los resultados con el XFEM desarrollado en esta tesis y las Figuras 6.93b y 6.93d los resultados con el XFEM de Moës et al. (2003). En estas figuras se ve que la propuesta de Moës et al. (2003) también es capaz de obtener buenos resultados para el problema de control de las tensiones.

Se recuerda que los resultados aquí presentados son los mejores de un análisis de sensibilidad al coeficiente c para cada método. Se vio, en los distintos análisis de sensibilidad, que la propuesta de Moës et al. (2003) presenta en general una mayor dificultad para converger que la propuesta de esta tesis, requiriendo en la mayoría de las pruebas más de 50 iteraciones. Lo anterior fue aún más notable para las pruebas sin suavizado, en las cuales más de la mitad no lograron converger. Estos fenómenos se cree que están asociados a la menor precisión en el cálculo de las tensiones en los EX de la propuesta de Moës et al. (2003) respecto a la de esta tesis.

Lo discutido en el párrafo anterior es muy relevante, dado que, según se discutió en las Secciones 6.1.3, 6.2.5 y 6.3.4, el método de optimización estructural es bastante sensible a sus parámetros. Por lo tanto, si no resulta que el XFEM de Moës et al. (2003) sea notablemente más rápido que el XFEM de

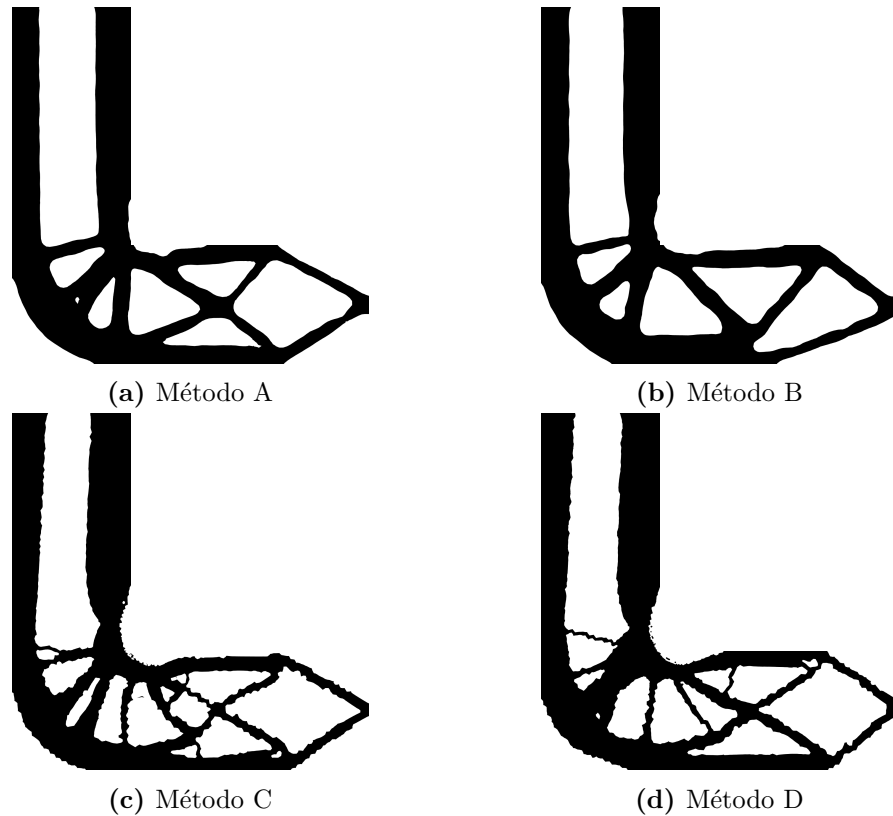


Figura 6.93: Geometrías finales del tercer ejemplo obtenidas por los métodos con XFEM. Métodos A a D según la Tabla 5.1

esta tesis, como sí sucedió para los problemas de la ménsula y el puente, se tiene que la nueva propuesta de XFEM es una muy buena solución al problema de optimización estructural con control de tensiones, debido a su mayor robustez.

En la Figura 6.94 se presentan los resultados obtenidos por el FEM sin remallados, partiendo desde distintas mallas. La Figura 6.94d presenta una alerta dada por el símbolo † para indicar que no terminó el proceso de optimización estructural. El motivo por el cual el FEM en la malla con tres refinamientos globales no terminó se debe a que le estaba tomando 4 horas cada iteración y por lo tanto no se le permitió avanzar demasiado. Por otro lado se nota en las Figuras 6.94a y 6.94b la presencia de zonas grises y zonas ambiguas como las presentadas anteriormente en la ménsula (ver la Figura 6.31). Además se nota que los tres resultados mostraron un comportamiento extraño en la zona de redondeo, con componentes flotantes o grandes rugosidades. Ese comportamiento se vio además en buena parte de la Figura 6.94c.

En la Figura 6.95 se presentan los resultados obtenidos por el FEM con refi-

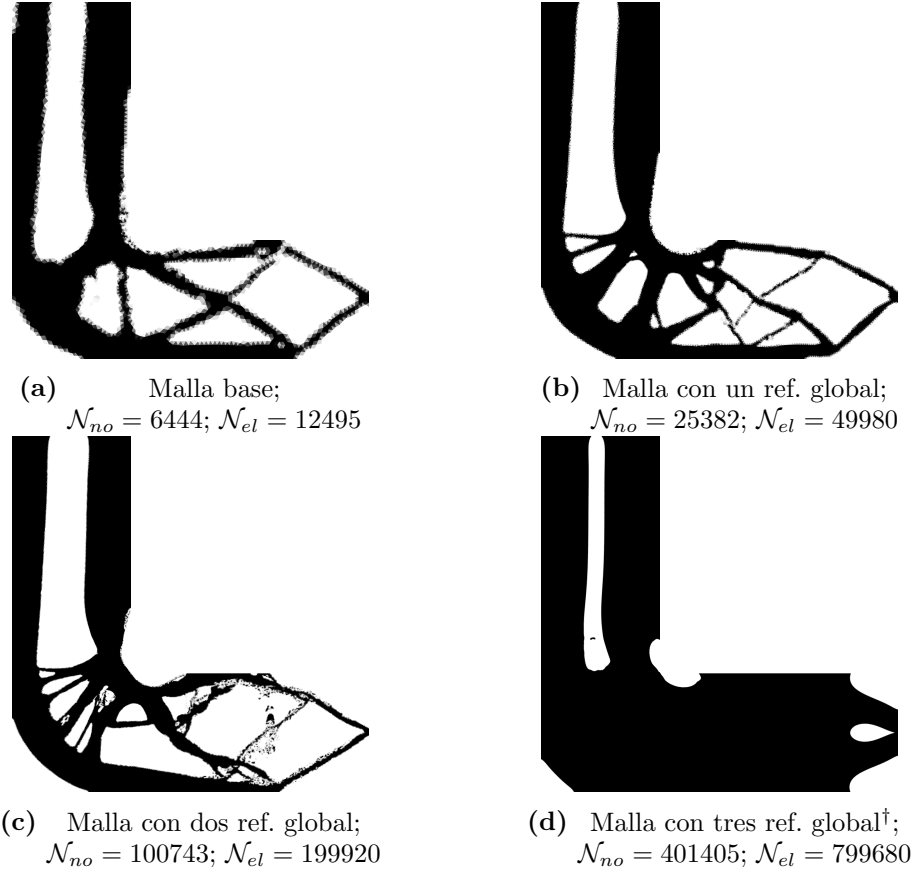


Figura 6.94: Geometrías finales del tercer ejemplo obtenidas por el FEM sin remallado desde distintas mallas. Método E según la Tabla 5.1

namientos globales. Los métodos FLA y F3 no lograron terminar de ejecutarse; el primero porque el costo computacional se hizo excesivo y el computador no pudo procesarlo y el F3 porque los términos del LA comenzaron a diverger. Por su parte, las Figuras 6.95b y 6.95c obtuvieron resultados similares a los de la bibliografía, pero presentaron rugosidades y componentes flotantes en la zona de redondeado del ángulo entrante. Además, la zona ambigua del resultado de la Figura 6.94a no fue muy bien resuelta por el método F1 y el método F2 se vio muy perjudicado.

Finalmente, se presenta en la Figura 6.96 los resultados obtenidos por el FEM con refinamiento local. En este caso se obtuvo que el método con refinamiento local en cada actualización de los parámetros del LA presentó un muy buen resultado, con rugosidades leves, un redondeado adecuado de la arista y sin zonas ambiguas. De todas formas es de notar que presentó varias zonas grises. Por otro lado, los métodos con refinamientos locales al final del método

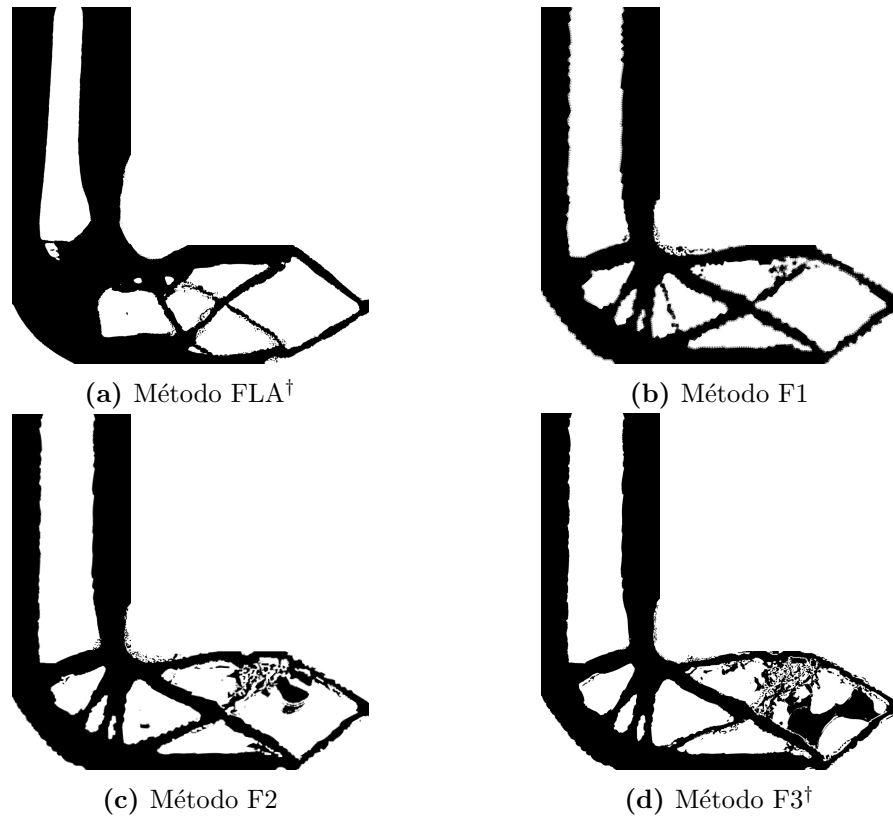


Figura 6.95: Geometrías finales del tercer ejemplo obtenidas por los métodos de FEM con refinamiento global. Métodos F según la Tabla 5.1

no presentaron tan buenos resultados. La Figura 6.96b presenta una estructura rugosa, que además posee rugosidades y elementos flotantes apreciables en la zona de redondeo. La Figura 6.96c presentó rugosidades mayores que la asociada al método G1, con mayor presencia de elementos flotantes en la zona de la esquina problemática. Finalmente la Figura 6.96d no logró converger, dado que los parámetros del LA comenzaron a diverger.

Se destaca que para el problema del gancho los métodos con refinamiento local y global presentaron bastantes problemas, siendo varios los que no alcanzaron a converger. Lo anterior muestra que este tipo de refinamiento no es muy adecuado para el problema de optimización con control de las máximas tensiones. Una posible solución, contra la cual se podrá comparar el XFEM como trabajo futuro, es de utilizar algún tipo de refinamiento especializado.

En referencia a los criterios de optimización, se presenta en la Tabla 6.40 la comparación de los costos computacionales y la complacencia final entre los distintos métodos. La primera columna presenta la identificación de los distintos métodos según la Tabla 5.1, donde la notación E-x hace referencia

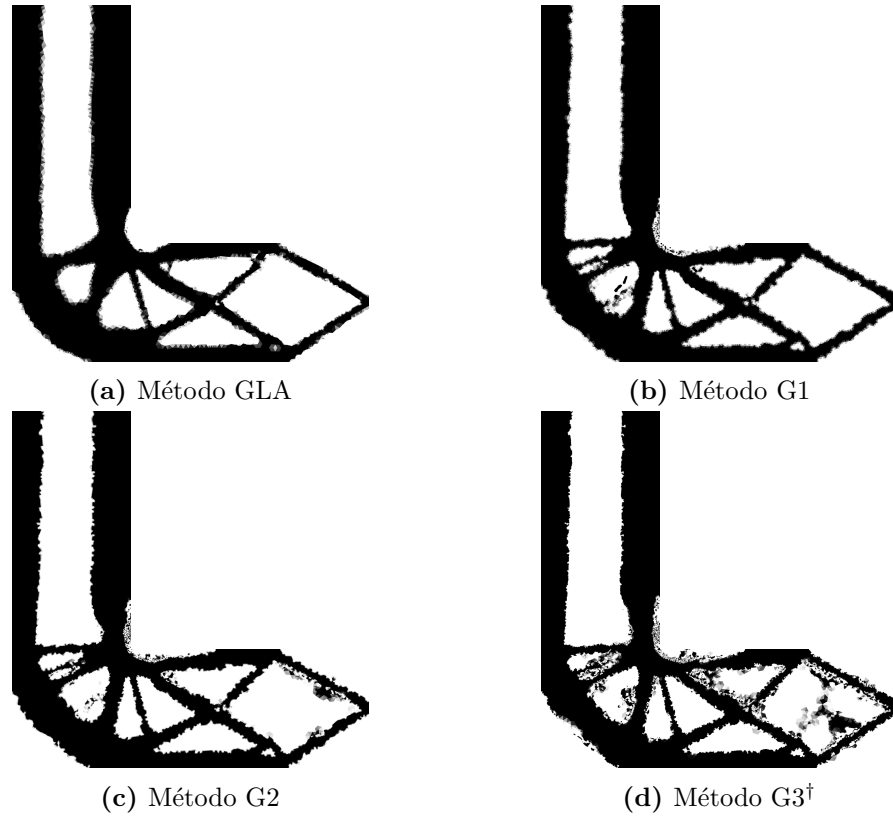


Figura 6.96: Geometrías finales del tercer ejemplo obtenidas por los métodos de FEM con refinamiento local. Métodos G según la Tabla 5.1

al método E en una malla con x refinamientos globales. Luego las siguientes dos columnas presentan el tiempo total que le llevó a los métodos obtener sus respectivos resultados y la memoria requerida. Las últimas dos columnas presentan la complacencia obtenida en la última iteración, donde se recuerda que la primer columna presenta el cálculo con el mismo método utilizado en la optimización y la segunda el cálculo con el XFEM desarrollado en esta tesis.

De la Tabla 6.40 en primer lugar se obtiene que casi todas las pruebas obtuvieron complacencias similares con el método de análisis utilizado en cada caso. Por otra parte, dos de las tres pruebas con el método E presentaron una complacencia calculada con el XFEM de esta tesis bastante mayor a la calculada por el FEM. Lo anterior muestra que las zonas grises ambiguas de dichos resultados fueron problemáticas dado que su posible interpretación como función de nivel generó una discontinuidad. Se destaca que las mejores complacencias fueron obtenidas con las propuestas de XFEM, tanto la de esta tesis como la de Moës et al. (2003).

A nivel de tiempos y costo en memoria, se tuvo que las propuestas de

Tabla 6.40: Costo computacional y complacencia final para los distintos métodos de análisis en el ejemplo del gancho

Método	Costo computacional		Complacencia final	
	Tiempo (s)	Memoria (MB)	= que opt.	XFEM aristas
A	635,216	12,611	332,546	332,546
B	624,162	9,414	333,430	333,652
C	835,329	14,468	392,962	392,962
D	440,578	9,504	379,307	385,724
E-0	609,093	6,910	422,649	686,064
E-1	5146,641	27,523	399,499	453,195
E-2	14640,785	119,695	427,026	578,769
F1	1039,686	27,518	373,270	430,881
F2	3360,785	54,500	392,504	443,875
GLA	631,664	11,533	359,340	371,513
G1	811,029	9,845	374,014	393,091
G2	1254,416	17,161	394,961	414,392

FEM sin refinamiento desde las mallas más finas, junto con las propuestas con refinamientos globales, fueron bastante más costosas que las demás. Luego sí se notó que la propuesta del XFEM de Moës et al. (2003) sin suavizado fue más rápida que el resto, lo que contrasta con la comparación entre las propuestas con y sin suavizado de la ménsula y el puente. Este resultado muestra lo considerable que es el costo computacional del suavizado de LOWESS, lo que es un posible punto de mejora del método desarrollado en esta tesis. Se tiene que el resto de las pruebas (A, B, C, E-0, GLA y G1) presentan duraciones similares, y costos en memoria competitivos entre sí.

Finalmente, comparando las dos propuestas de XFEM con suavizado, se obtuvo que en este caso la propuesta de esta tesis obtuvo tiempos muy similares a la propuesta de Moës et al. (2003) aunque el costo en memoria fue levemente mayor. Esto muestra que la propuesta de esta tesis, al mejorar la precisión en el cálculo de las tensiones, logra ser competitiva con la propuesta de Moës et al. (2003) para el problema de optimización en el que se controlan las máximas tensiones.

A continuación se presenta en la Tabla 6.41 la comparación entre las tensiones de von Mises máximas de los resultados obtenidos por los distintos métodos. Se recuerda que esta tensión se obtuvo con una malla de FEM conforme a las interfases, una de tamaño similar a la utilizada en la optimización y otra 16 veces más fina que la malla utilizada para las propuestas del XFEM.

Tabla 6.41: Tensiones de von Mises máximas de los resultados de los distintos métodos de análisis en el ejemplo del gancho

Método	Tensión máxima	
	Malla similar	Malla muy fina
A	26,475	98,167
B	27,735	96,602
C	27,226	68,276
D	28,179	73,785
E-0	17,594	79,265
E-1	19,451	43,824
E-2	33,939	67,193
F1	21,430	50,279
F2	24,933	35,321
GLA	29,937	104,237
G1	32,842	459,289
G2	32,826	98,758

De la tercera columna de la Tabla 6.41 se obtiene que ninguno de los métodos fue capaz de reducir las máximas tensiones más allá de lo calculable por sus propias mallas, lo que muestra que los ángulos entrantes remanentes es un problema intrínseco de la metodología y no del XFEM. Por otra parte, la segunda columna muestra que todos los métodos fueron eficaces en términos generales para reducir la tensión en sus propias mallas. Vale notar que las propuestas con refinamiento local, salvo la GLA, y la propuesta de FEM con la malla con dos refinamientos globales, son las que presentaron las máximas tensiones. Por otra parte, solamente las propuestas de FEM sin refinamiento en las mallas más gruesas obtuvieron tensiones menores al límite.

Finalmente, en la Tabla 6.42 se presentan los resultados en base a la calidad de las geometrías obtenidas, con la misma notación para distinguir las mallas del método E que las dos tablas anteriores. En primer lugar se nota que en este caso no se notó una gran diferencia en la cantidad de huecos entre las distintas metodologías. Los métodos que más huecos presentaron fueron los XFEM sin suavizado y el FEM en las dos mallas más finas. Por otra parte, las propuestas que emplearon el FEM, en particular la E-0 y las de refinamientos locales, presentaron un gran porcentaje de zonas grises, que en ocasiones generaron componentes de geometría ambigua. Finalmente vale notar que las únicas propuestas que presentaron una geometría adecuadamente definida y sin rugosidades considerables fueron las dos propuestas de XFEM con suavizado

y, parcialmente, las E-1 y GLA, si bien estas últimas presentaron rugosidades y componentes flotantes en la zona del redondeo de la esquina problemática.

Tabla 6.42: Suavidad, zonas grises y complejidad para los distintos métodos de análisis en el ejemplo del gancho

Método	Suavidad	% de zonas grises	Complejidad estructural
A	Suave	0,0	7
B	Suave	0,0	5
C	Muy rugosa	0,0	13
D	Muy rugosa	0,0	11
E-0	Rugosa	14,2	6
E-1	Levemente rugosa	7,9	14
E-2	Rugosa	6,5	20
F1	Rugosa	7,9	7
F2	Muy rugosa	5,3	7
GLA	Levemente rugosa	8,2	9
G1	Rugosa	9,1	10
G2	Muy rugosa	6,7	9

A modo de resumen de la comparación entre métodos, los dos métodos en los que se emplearon propuestas de XFEM con suavizado lograron, empleando una malla relativamente gruesa, generar estructuras optimizadas de gran desempeño, con un adecuado control de las máximas tensiones, con una geometría suave y sin ningún tipo de ambigüedad. Los resultados del XFEM con suavizado presentaron en todos los casos un pequeño ángulo entrante en la zona de la esquina problemática que no pudo ser removido. Este pequeño ángulo fue de una escala similar al tamaño de los elementos y también estuvo presente en las propuestas de FEM, aunque en ocasiones camuflado entre zonas grises. Por lo tanto, esta deficiencia en el control de las máximas tensiones se basa en deficiencias de los elementos triangulares lineales para poder calcular las grandes tensiones que ocurren en ángulos entrantes y solamente puede mejorarse empleando refinamientos sucesivos en la esquina o aumentando el grado de la aproximación de elementos finitos.

Dos propuestas del FEM lograron obtener una complacencia, suavidad y falta de ambigüedad competitiva con las obtenidas por el XFEM y fueron las del FEM sin remallado en la malla con un refinamiento global y la propuesta con refinamientos locales en cada actualización de los parámetros del LA. La primera de estas dos propuestas fue 8,1 veces más lenta que la propuesta de XFEM de esta tesis y 2,2 veces más costosa en memoria. En contraposición,

la propuesta con refinamientos locales en cada actualización de los parámetros del LA presentó costos en tiempos y memoria muy similares a las propuestas del XFEM con suavizado. De todas formas se destaca que esta última presentó zonas grises en el 8,2 % de D lo que dificulta su interpretación. Además, todas las propuestas del FEM que obtuvieron resultados finales presentaron una geometría rugosa o con componentes flotantes en la zona del redondeo de la esquina, lo que induce un nuevo nivel de dificultad de interpretación de los resultados. Estas rugosidades y componentes flotantes posiblemente se solucionen con un criterio de optimalidad en el método de optimización estructural más restrictivo, pero las propuestas del XFEM con suavizado mostraron que no lo requieren para obtener buenos resultados.

Finalmente, se concluye que en este problema nuevamente se cumplió el objetivo principal de la tesis, dado que la combinación con el XFEM con técnicas de suavizado de la función de nivel logró mejorar el desempeño del método de optimización estructural basado en la DT. Se destaca que las propuestas del XFEM de Moës et al. (2003) y de esta tesis resultaron en resultados similares, con costos competitivos entre sí. Por otro lado, dada la gran sensibilidad del método de optimización estructural a sus parámetros, la propuesta de Moës et al. (2003) presentó una menor robustez que la propuesta de esta tesis, presentando una mayor dificultad para converger. De los dos puntos anteriores se concluye que para el problema de optimización estructural con control de las máximas tensiones, la propuesta de XFEM desarrollada en esta tesis es ligeramente superior a la de Moës et al. (2003).

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

7.1. Conclusiones

En esta tesis se describió el desarrollo de un método novedoso de optimización topológica de estructuras en el cual se combinaron el XFEM con el concepto de la DT. Se presentó una nueva propuesta de extensión del XFEM para el problema de elasticidad plana de dos materiales, la cual logró solucionar problemas identificados cuando la diferencia de rigidez entre los dos materiales es elevada y cuando dos interfases se encuentran muy cercanas entre sí. Se presentaron además las consideraciones especiales requeridas para combinar adecuadamente el XFEM con la DT. La principal conclusión de esta investigación es que el objetivo principal se cumplió, puesto que el XFEM reduce al menos a la mitad los costos en tiempos y memoria de los métodos de optimización topológica basados en la DT de similar calidad en la representación de la geometría.

La nueva propuesta de XFEM se caracteriza por introducir variables adicionales relacionadas a los efectos en el campo de desplazamientos introducidos por las aristas cortadas. La principal diferencia de la nueva propuesta con las propuestas anteriores es que en cada elemento cortado existen nueve variables que describen el campo de desplazamientos en su interior cuando originalmente eran seis. La otra gran diferencia es que logra independizar las interpolaciones asociadas a una arista cortada de la otra, lo que permitió solucionar la problemática de las propuestas originales.

La principal ventaja que presenta la nueva propuesta es que logró solucionar la mayor parte de los problemas existentes de las propuestas anteriores asocia-

dos a una mala resolución del campo de desplazamientos en los EX cuando los dos materiales modelados presentan gran diferencia de rigidez. Como punto adicional, la propuesta de esta tesis logra solucionar otro problema identificado en la propuesta utilizada originalmente, bajo la existencia de un nodo que tuviera todos sus elementos con interfase. En las propuestas originales, dada esa situación, el campo de desplazamientos alrededor de dicho nodo sería susceptible a sufrir errores apreciables. Otra ventaja de la propuesta de extensión es que mantiene cierto nivel de simpleza en su desarrollo, visto que se basa en las funciones de interpolación tradicionales y la idea de función de cresta de la propuesta original.

En contraste con lo último del párrafo anterior, la principal desventaja es que la nueva propuesta incrementa el número de grados de libertad, respecto a la propuesta original, para una misma malla y función de nivel. En términos generales, en la propuesta original existen dos grados de libertad adicionales por cada nodo extendido, donde la cantidad de nodos extendidos tiende a ser similar a la cantidad de elementos cortados. En la nueva propuesta, por cada arista cortada tiende a crearse ocho grados de libertad adicionales, mientras que la cantidad de aristas cortadas suele ser similar a la cantidad de elementos cortados. De esta forma, la nueva propuesta crea aproximadamente cuatro veces más incógnitas adicionales que la propuesta original. De todas formas, en un problema tradicional en que las incógnitas adicionales son un pequeño porcentaje del total, esta desventaja es poco significativa.

Finalmente, en lo referente al método de optimización estructural se vio que la nueva propuesta del XFEM es competitiva en el costo de tiempo y memoria con la propuesta original, si bien para los problemas de la ménsula y el puente fue un 28 % más lenta. Sí se destaca que la nueva propuesta del XFEM no presentó algunos problemas que sí presentó la propuesta original como la generación de componentes estructurales discontinuos. Además, en el caso del problema de optimización con control de las máximas tensiones, la nueva propuesta del XFEM presentó tiempos de cómputo similares a la propuesta original y una mayor robustez frente a la variación de los parámetros del método desarrollado.

La combinación del XFEM con la DT para el método de optimización estructural resultó ampliamente satisfactoria para permitir el análisis con mallas gruesas sin tener que modificar la malla en sucesivos análisis. Por otra parte, esta propuesta requiere incorporar algún mecanismo de suavizado de la fun-

ción de nivel. Se hace notar que dicho suavizado no implica un incremento significativo del costo computacional en mallas estructuradas.

La principal desventaja del método desarrollado es lo sensible que es a los distintos parámetros de optimización y lo difícil que suele ser seleccionarlos. Como punto adicional, el método no permite garantizar su convergencia y bajo alguna combinación no ideal de parámetros se vio que puede fallar en la obtención de una topología conveniente. Además, el método en ocasiones produjo estructuras algo rugosas, por lo cual las soluciones obtenidas pueden no ser adecuadas como producto final, aunque sí ser utilizadas como insumos para metodologías de optimización de forma. Finalmente, la necesidad de emplear un algoritmo de suavizado derivó en la imposibilidad de obtener resultados con barras muy finas.

Se hace notar que la aparición de soluciones rugosas no es sistemática, y una adecuada selección de los parámetros las evita. Por otra parte, el algoritmo de suavizado facilita la obtención de soluciones de menor complejidad de manufactura y menos sensibles a imperfecciones. Finalmente, la gran sensibilidad a parámetros si bien es real, no es intrínseca del XFEM, sino del modelo de optimización estructural que carece de condiciones suficientes de optimalidad y el método de análisis estructural tan solo introduce los parámetros adicionales del suavizado.

Finalmente, se destaca que el objetivo principal de la tesis se cumplió de forma muy satisfactoria. La afirmación anterior se basa en que las propuestas que emplearon el FEM con o sin remallados presentaron tiempos de cómputo y costos en memoria al menos dos veces más grandes que las propuestas que emplearon el XFEM o presentaron geometrías muy rugosas o con cierta ambigüedad. La propuesta que empleó el FEM sin remallados en la misma malla que las propuestas con XFEM presentó en general costos computacionales apreciablemente menores, pero en general sus resultados fueron muy ambiguos. Por otra parte, las propuestas que emplearon el XFEM, tanto la nueva propuesta como la original, pudieron obtener muy buenos resultados, con geometrías bien definidas y pudiendo emplear mallas relativamente gruesas sin la necesidad de remallados. Además, se destaca que para el problema de optimización estructural en el cual se minimiza la complacencia y no se controlan las máximas tensiones, la propuesta del XFEM original fue la más eficiente, mientras que la nueva propuesta de XFEM es fuertemente recomendada cuando se controlen las máximas tensiones.

7.2. Propuestas de trabajo futuro

Durante el transcurso de la investigación surgieron posibles mejoras al código desarrollado junto con algunos caminos por los cuales se puede ampliar el alcance del método de optimización estudiado. Dichas mejoras no se hicieron en el marco de esta tesis, puesto que se escapaban de los objetivos principales del trabajo de investigación. A continuación se presentan las principales líneas de investigación o propuestas de mejoras al código que surgieron, esperando puedan ser tomadas por futuros investigadores del área de la optimización estructural.

Una primer propuesta de trabajo futuro es mejorar algunas deficiencias identificadas en el método de optimización estructural. Una primer deficiencia es el criterio de optimalidad empleado el cual, si bien logró obtener muy buenos resultados, condujo a la presencia de componentes flotantes en algunas soluciones. Una posible propuesta de mejora es emplear un criterio similar, basado en el cambio de área en una iteración; pero en vez de calcular el cambio neto de área, calcular el área de las zonas que cambian su material. Otra posible mejora del método es considerar un coeficiente de penalidad del funcional de tensiones variable. Se identificó que valores iniciales grandes generan problemas, mientras que valores pequeños son insuficientes para limitar adecuadamente las tensiones. Por lo tanto, se propone la posibilidad de considerar un coeficiente de penalidad que crezca cada cierto número de iteraciones, o emplear un método de LA al funcional de tensiones para forzar el cumplimiento de la restricción en la tensión máxima bajo alguna tolerancia.

Otra propuesta de trabajo futuro es buscar optimizar el tiempo de cálculo del código. En particular, sería importante mejorar el ensamblado de la matriz de rigidez del problema de elementos finitos extendido. El ensamblado es el paso más lento del método de optimización, por la resolución del análisis estructural y por la definición del problema adjunto cuando se minimizan tensiones, y es entonces el aspecto crítico a mejorar. Lo anterior podría lograrse ensamblado en cada iteración solamente los componentes adicionales que aportan los elementos extendidos, y aquellos que cambian completamente su material. De esta manera solamente se deben modificar las componentes de la matriz de rigidez asociadas a los elementos modificados, los cuales suelen ser una pequeña fracción del total. En cuanto a mejorar el desempeño del código cuando se limitan las tensiones de von Mises, se propone investigar la posibi-

lidad de modificar el análisis y pasar de un cálculo integral del funcional de tensiones a un cálculo nodal. En caso de apreciarse que el cálculo nodal no implicara incurrir en errores apreciables; se lograría reducir el tiempo de cálculo de dicho análisis por eliminar la integración numérica. Otra posible mejora sería hacer un análisis de Taylor, o similar, sobre la integral que no posee solución analítica del análisis de tensiones, para así evitar hacer la integración de forma desacoplada y tener que recurrir a una búsqueda de tabla. Otra posible línea de mejora de la eficiencia del método es obtener una técnica de suavizado de la función de nivel para las mallas no estructuradas más eficiente que el método LOWESS, el cual es muy costoso para mallas relativamente finas.

Otra posible forma de mejorar el desempeño del código es investigar el uso del paquete de herramientas *Partial Differential Equation Toolbox* de MATLAB®, el cual tiende a ser muy utilizado para la resolución de problemas mediante el método de los elementos finitos tradicional. Lo que se propone es identificar cómo incorporar el XFEM en dicho paquete para aprovechar su potencial.

Otra propuesta de trabajo futuro es continuar con el desarrollo de la nueva propuesta del XFEM para lograr resolver el problema de una mala determinación de las tensiones en el material más rígido en los casos que exista un gran contraste entre rigideces y ambos materiales presenten tensiones no despreciables. Se propone desarrollar algún método de regularización de las tensiones en las subregiones de pequeño tamaño.

Como línea de investigación futura se propone extender el método de optimización estructural al problema de elasticidad tridimensional. Desde el punto de vista del método de optimización estructural no se presenta ninguna dificultad adicional a las ya analizadas en esta tesis, sino que la dificultad surge del desarrollo del método de análisis estructural. Si se utilizara la formulación del XFEM de Moës et al. (2003), la dificultad solamente estaría en la definición de los subdominios de integración. En cambio, si se decide utilizar la formulación propuesta en esta tesis, presentada en la Sección 4.2, la dificultad es mayor. El motivo del aumento de dificultad radica en que la misma definición de las funciones de interpolación especializadas depende de la cantidad de nodos del elemento que tengan una función de nivel con un mismo signo. En la Figura 7.1 se ilustra dicha dificultad en el caso de utilizar elementos con forma tetraédrica. Se obtiene que en el caso de tener tres nodos con el mismo signo la interfase es un triángulo como se muestra en la Figura 7.1a y en el caso de que sean

dos positivos y dos negativos la interfase es un cuadrilátero como se muestra en la Figura 7.1b. En caso de considerar elementos con un mayor número de nodos, las dificultades crecen, puesto que el tipo de interfase no solo depende del número de nodos de igual signo sino también de su posición.

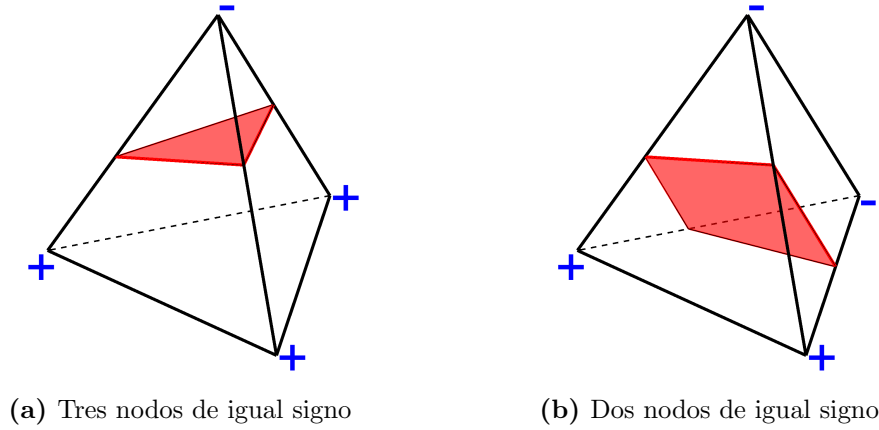


Figura 7.1: Casos posibles de interfases con elementos tetraédricos

Finalmente, se propone extender la metodología para considerar fuerzas de diferente naturaleza a las presentadas. En primer lugar, se propone extender la metodología para poder emplear fuerzas de naturaleza estocástica en la optimización estructural, de forma similar a lo que fue discutido en algunas referencias del Capítulo 3 (*e.g.* Latifi Rostami et al. 2021; Martínez-Frutos y Ortigosa, 2021; Ren y Zhang, 2021; Torii et al. 2016). Por otro lado, se propone extender la metodología para incorporar fuerzas que dependan de la geometría de la estructura, además del peso propio. El incorporar al esquema de optimización fuerzas que dependan de la geometría, permitiría sentar las bases para que el código pueda ser utilizado para la optimización de estructuras sometidas a la acción de fluidos, como ser viento, corrientes de agua u oleaje.

Referencias bibliográficas

- Abdi, M., Ashcroft, I., y Wildman, R. (2018). Topology optimization of geometrically nonlinear structures using an evolutionary optimization method. *Engineering Optimization*, 50(11), 1850-1870. <https://doi.org/10.1080/0305215X.2017.1418864>
- Abdi, M., Wildman, R., y Ashcroft, I. (2014). Evolutionary topology optimization using the extended finite element method and isolines. *Engineering Optimization*, 46(5), 628-647. <https://doi.org/10.1080/0305215X.2013.791815>
- Allaire, G., Jouve, F., y Toader, A.-M. (2004). Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 194(1), 363-393. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.09.032>
- Allaire, G., de Gournay, F., Jouve, F., y Toader, A.-M. (2005). Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. *Control and Cybernetics*, 34(1), 59-80.
- Amstutz, S., y Novotny, A. A. (2010). Topological optimization of structures subject to Von Mises stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41, 407-420. <https://doi.org/10.1007/s00158-009-0425-x>
- Amstutz, S. (2006). Sensitivity analysis with respect to a local perturbation of the material property. *Asymptotic Analysis*, 49(1-2), 87-108.
- Amstutz, S., y Andrä, H. (2006). A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 216(2), 573-588. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.12.015>
- Amstutz, S., y Novotny, A. A. (2011). Topological asymptotic analysis of the Kirchhoff plate bending problem. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 17(3), 705-721. <https://doi.org/10.1051/cocv/2010010>
- Arora, J. S. (2017). *Introduction to Optimum Design* (4.^a ed.). Academic Press. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-15344-5>

- Auroux, D., Jaafar-Belaid, L., y Rjaibi, B. (2010). Application of the topological gradient method to tomography [Special issue: TAMTAM'09]. *Revue Africaine de la Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées*, 13, 91-104. <https://doi.org/10.46298/arima.1939>
- Auroux, D., Masmoudi, M., y Jaafar-Belaid, L. (2006). Image restoration and classification by topological asymptotic expansion. *Variational Formulations in Mechanics: Theory and Applications*.
- Azhar, S., Khalfan, M., y Maqsood, T. (2012). Building information modeling (BIM): now and beyond [Special issue on BIM]. *Australasian Journal of Construction Economics and Building*, 12(4), 15-28. <https://doi.org/10.5130/ajceb.v12i4.3032>
- Baiges, J., Martínez-Frutos, J., Herrero-Pérez, D., Otero, F., y Ferrer, A. (2019). Large-scale stochastic topology optimization using adaptive mesh refinement and coarsening through a two-level parallelization scheme. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 343, 186-206. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.08.028>
- Barrera, J. L., Geiss, M. J., y Maute, K. (2020). Hole seeding in level set topology optimization via density fields. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 61, 1319-1343. <https://doi.org/10.1007/s00158-019-02480-8>
- Barrera, J. L., Geiss, M. J., y Maute, K. (2022). Minimum feature size control in level set topology optimization via density fields. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 65, 94. <https://doi.org/10.1007/s00158-021-03096-7>
- Barrera, J. L., y Maute, K. (2020). Ambiguous phase assignment of discretized 3D geometries in topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 369, 113201. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113201>
- Barthold, F.-J., y Materna, D. (2015). A modified extended finite element method approach for design sensitivity analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 104(3), 209-234. <https://doi.org/10.1002/nme.4930>
- Bazzano, J. B., y Pérez Zerpa, J. M. (2017). *Introducción al Análisis No Lineal de Estructuras: texto del curso Análisis No Lineal de Estructuras* (1.^a ed.). Facultad de Ingeniería, Universidad de la República. <https://doi.org/20.500.12008/22106>

- Behrou, R., Lawry, M., y Maute, K. (2017). Level set topology optimization of structural problems with interface cohesion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 112(8), 990-1016. <https://doi.org/10.1002/nme.5540>
- Belytschko, T., y Black, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5), 601-620. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-0207\(19990620\)45:5<601::aid-nme598>3.0.co;2-s](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0207(19990620)45:5<601::aid-nme598>3.0.co;2-s)
- Bendsøe, M. P., y Sigmund, O. (1999). Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 69, 635-654. <https://doi.org/10.1007/s004190050248>
- Bendsøe, M. P., y Sigmund, O. (2004). *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications* (2.^a ed.). Springer Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-05086-6>
- Ben-Tal, A., y Nemirovski, A. (1997). Robust Truss Topology Design via Semi-definite Programming. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Optimization*, 7(4), 991-1016. <https://doi.org/10.1137/S1052623495291951>
- Bonnet, M., y Delgado, G. (2013). The topological derivative in anisotropic elasticity. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 66(4), 557-586. <https://doi.org/10.1093/qjmam/hbt018>
- Bossen, F. J., y Heckbert, P. S. (1996). A pliant method for anisotropic mesh generation. *5th International Meshing Roundtable*, 63-74.
- Brenner, S. C., y Scott, L. R. (2008). *The Mathematical Theory of Finite Element Methods* (3.^a ed.). Springer New York, NY. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-75934-0>
- Burger, M., Hackl, B., y Ring, W. (2004). Incorporating topological derivatives into level set methods. *Journal of Computational Physics*, 194(1), 344-362. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.09.033>
- Cai, S., Zhang, H., y Zhang, W. (2023). An integrated design approach for simultaneous shape and topology optimization of shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 415, 116218. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116218>
- Cai, S., y Zhang, W. (2020). An adaptive bubble method for structural shape and topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics*

- and *Engineering*, 360, 112778. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.112778>
- Calisti, V., Lebée, A., Novotny, A. A., y Sokołowski, J. (2021). Sensitivity of the second order homogenized elasticity tensor to topological microstructural changes. *Journal of Elasticity*, 144, 141-167. <https://doi.org/10.1007/s10659-021-09836-6>
- Calisti, V., Lebée, A., Novotny, A. A., y Sokołowski, J. (2023). Emergence of elastostatic strain-gradient effects from topological optimization. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 100, 104979. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.104979>
- Canelas, A., Abreu, A. I., y Roche, J. R. (2024). Detection of scatterers using a XFEM-BEM level set solver based on the topological derivative. *Inverse Problems*, 40, 015007. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/ad0e26>
- Canelas, A., Novotny, A. A., y Roche, J. R. (2011). A new method for inverse electromagnetic casting problems based on the topological derivative. *Journal of Computational Physics*, 230(9), 3570-3588. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.01.049>
- Canelas, A., Pereira, A., Roche, J. R., y Brancher, J. P. (2019). Solution of the equilibrium problem in electromagnetic casting considering a solid inclusion in the melt. *Mathematics and Computers in Simulation*, 160, 126-137. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2018.12.009>
- Carvalho, F. S., Ruschinsky, D., Giusti, S. M., Anflor, C. T. M., y Novotny, A. A. (2021). Topological derivative-based topology optimization of plate structures under bending effects. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 63, 617-630. <https://doi.org/10.1007/s00158-020-02710-4>
- Castañar, I., Baiges, J., y Codina, R. (2024). Topology optimization of incompressible structures subject to fluid-structure interaction. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 67, 90. <https://doi.org/10.1007/s00158-024-03770-6>
- Castañar, I., Baiges, J., Codina, R., y Venghaus, H. (2022). Topological derivative-based topology optimization of incompressible structures using mixed formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 390, 114438. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114438>
- Cheng, A. H.-D., y Cheng, D. T. (2005). Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(3), 268-302. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2004.12.001>

- Choi, K. K., y Kim, N. H. (2005). *Structural Sensitivity Analysis and Optimization 1: Linear Systems* (1.^a ed.). Springer New York, NY. <https://doi.org/10.1007/b138709>
- Christensen, P. W., y Klarbring, A. (2009). *An Introduction to Structural Optimization* (1.^a ed.). Springer Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8666-3>
- Chroni, E., Bakalakos, S., Sotiropoulos, G., y Papadopoulos, V. (2024). Topology optimization of bi-material structures with Iso-XFEM. *Composite Structures*, 331, 117902. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2024.117902>
- Cleveland, W. S. (1979). Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots. *Journal of the American Statistical Association*, 74(368), 829-836. <https://doi.org/10.1080/01621459.1979.10481038>
- Cortellessa, D., Ferro, N., Perotto, S., y Micheletti, S. (2023). Enhancing level set-based topology optimization with anisotropic graded meshes. *Applied Mathematics and Computation*, 447, 127903. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2023.127903>
- Cui, M., Chen, H., y Zhou, J. (2016). A level-set based multi-material topology optimization method using a reaction diffusion equation. *Computer-Aided Design*, 73, 41-52. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2015.12.002>
- Cui, Y., Takahashi, T., y Matsumoto, T. (2023). An exact volume constraint method for topology optimization via reaction-diffusion equation. *Computers & Structures*, 280, 106986. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2023.106986>
- Cui, Y., Yang, W., Takahashi, T., y Matsumoto, T. (2024). Topology optimization of anisotropic structure for arbitrary objective functionals with exact free boundary representation. *Computers & Structures*, 300, 107405. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2024.107405>
- Dangel, U. (2019). *Turning Point in Timber Construction: A New Economy* (1.^a ed.). Berlin, Boston: Birkhäuser. <https://doi.org/10.1515/9783035608632>
- De, S., Maute, K., y Doostan, A. (2023). Topology optimization under microscale uncertainty using stochastic gradients. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 66, 17. <https://doi.org/10.1007/s00158-022-03417-4>

- de Souza Neto, E. A., Perić, D., y Owen, D. R. J. (2008). *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications* (1.^a ed.). John Wiley & Sons, Ltd. <https://doi.org/10.1002/9780470694626>
- Delfour, M. C., y Sabidussi, G. (1992). *Shape Optimization and Free Boundaries* (1.^a ed.). Springer Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-2710-3>
- Delfour, M. C. (2018). Control, shape, and topological derivatives via minimax differentiability of lagrangians. En M. Falcone, R. Ferretti, L. Grüne y W. M. McEneaney (Eds.), *Numerical Methods for Optimal Control Problems* (pp. 137-164). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-01959-4_7
- Delgado, S., y Canelas, A. (2023). Optimización estructural usando la derivada topológica y el método de los elementos finitos extendido (XFEM). *Mecánica Computacional*, 40, 709-718. <https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/6608>
- Desai, A., Mogra, M., Sridhara, S., Kumar, K., Sesha, G., y Ananthasuresh, G. K. (2021). Topological-derivative-based design of stiff fiber-reinforced structures with optimally oriented continuous fibers. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 63, 703-720. <https://doi.org/10.1007/s00158-020-02721-1>
- Dolbow, J., Moës, N., y Belytschko, T. (2001). An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(51-52), 6825-6846. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00260-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00260-2)
- dos Santos, R. B., Lopes, C. G., y Novotny, A. A. (2017). Structural weight minimization under stress constraints and multiple loading. *Mechanics Research Communications*, 81, 44-50. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2017.02.005>
- dos Santos, R. B., Torii, A. J., y Novotny, A. A. (2018). Reliability-based topology optimization of structures under stress constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 114(6), 660-674. <https://doi.org/10.1002/nme.5760>
- Dréau, K., Chevaugnon, N., y Moës, N. (2010). Studied X-FEM enrichment to handle material interfaces with higher order finite element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(29-32), 1922-1936. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.01.021>

- Dunavant, D. A. (1985). High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(6), 1129-1148. <https://doi.org/10.1002/nme.1620210612>
- Düster, A., Parvizian, J., Yang, Z., y Rank, E. (2008). The finite cell method for three-dimensional problems of solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(45-48), 3768-3782. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.02.036>
- Duysinx, P., Van Miegroet, L., Jacobs, T., y Fleury, C. (2006). Generalized shape optimization using X-FEM and level set methods. *IUTAM Symposium on Topological Design Optimization of Structures, Machines and Materials*, 23-32. https://doi.org/10.1007/1-4020-4752-5_3
- Eschenauer, H. A., Kobelev, V. V., y Schumacher, A. (1994). Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization*, 8, 42-51. <https://doi.org/10.1007/BF01742933>
- Eschenauer, H. A., Olhoff, N., y Schnell, W. (1997). Fundamentals of structural optimization. En *Applied Structural Mechanics: Fundamentals of Elasticity, Load-Bearing Structures, Structural Optimization* (pp. 301-310). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-59205-8_15
- Eshelby, J. D. (1975). The elastic energy-momentum tensor. *Journal of Elasticity*, 5, 321-335. <https://doi.org/10.1007/bf00126994>
- Feng, Y., Noda, M., Noguchi, Y., Matsushima, K., y Yamada, T. (2023). Multi-material topology optimization for additive manufacturing considering dimensional constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 410, 116027. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116027>
- Feng, Y., y Yamada, T. (2024). Multi-material topology optimization for additive manufacturing considering maximum build volume and assembly process. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 163, 616-640. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2024.04.007>
- Ferrer, A. (2019). SIMP-ALL: A generalized SIMP method based on the topological derivative concept. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 120(3), 361-381. <https://doi.org/10.1002/nme.6140>
- Ferrer, A., Cante, J. C., Hernández, J. A., y Oliver, J. (2018). Two-scale topology optimization in computational material design: An integrated ap-

- proach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 114(3), 232-254. <https://doi.org/10.1002/nme.5742>
- Fries, T.-P. (2008). A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(5), 503-532. <https://doi.org/10.1002/nme.2259>
- Ganghoffer, J. F., Goda, I., Novotny, A. A., Rahouadj, R., y Sokołowski, J. (2018). Homogenized couple stress model of optimal auxetic microstructures computed by topology optimization. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 98(5), 696-717. <https://doi.org/10.1002/zamm.201700154>
- Gangl, P. (2020). A multi-material topology optimization algorithm based on the topological derivative. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 366, 113090. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113090>
- Gangl, P., Amstutz, S., y Langer, U. (2016). Topology optimization of electric motor using topological derivative for nonlinear magnetostatics. *IEEE Transactions on Magnetics*, 52(3), 7201104. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2015.2496172>
- Gangl, P., y Sturm, K. (2020). A simplified derivation technique of topological derivatives for quasi-linear transmission problems. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 26, 106. <https://doi.org/10.1051/cocv/2020035>
- Gangl, P., y Sturm, K. (2022). Automated computation of topological derivatives with application to nonlinear elasticity and reaction-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 398, 115288. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115288>
- Garcia, D. (2010). Robust smoothing of gridded data in one and higher dimensions with missing values. *Computational Statistics & Data Analysis*, 54(4), 1167-1178. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2009.09.020>
- Garreau, S., Guillaume, P., y Masmoudi, M. (2001). The topological asymptotic for PDE systems: The elasticity case. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39(6), 1756-1778. <https://doi.org/10.1137/s0363012900369538>
- Geiss, M. J., Barrera, J. L., Boddetti, N., y Maute, K. (2019a). A regularization scheme for explicit level-set XFEM topology optimization. *Frontiers of*

- Mechanical Engineering*, 14, 153-170. <https://doi.org/10.1007/s11465-019-0533-2>
- Geiss, M. J., Boddeti, N., Weeger, O., Maute, K., y Dunn, M. L. (2019b). Combined level-set-XFEM-density topology optimization of four-dimensional printed structures undergoing large deformation. *Journal of Mechanical Design*, 141(5), 051405. <https://doi.org/10.1115/1.4041945>
- Giusti, S. M., Ferrer, A., y Oliver, J. (2016). Topological sensitivity analysis in heterogeneous anisotropic elasticity problem. Theoretical and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 311, 134-150. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.08.004>
- Giusti, S. M., Novotny, A. A., y Sokołowski, J. (2010). Topological derivative for steady-state orthotropic heat diffusion problem. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 40, 53-64. <https://doi.org/10.1007/s00158-009-0359-3>
- Giusti, S. M., Novotny, A. A., de Souza Neto, E. A., y Feijóo, R. A. (2009). Sensitivity of the macroscopic elasticity tensor to topological microstructural changes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(3), 555-570. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.11.008>
- Giusti, S. M., Novotny, A. A., y Padra, C. (2008). Topological sensitivity analysis of inclusion in two-dimensional linear elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32(11), 926-935. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.12.007>
- Golub, G. H., y Van Loan, C. F. (2013). *Matrix Computations* (4.^a ed.). The Johns Hopkins University Press.
- Gurtin, M. E. (1981). *An Introduction to Continuum Mechanics* (1.^a ed.). Academic Press. [https://doi.org/10.1016/S0076-5392\(08\)61780-4](https://doi.org/10.1016/S0076-5392(08)61780-4)
- Gurtin, M. E. (2000). *Configurational Forces as Basic Concepts of Continuum Physics* (1.^a ed.). Springer New York, NY. <https://doi.org/10.1007/b97847>
- Gustafson, K. (1998). Domain decomposition, operator trigonometry, Robin condition. *Contemporary Mathematics*, 218, 432-437. <https://doi.org/10.1090/conm/218/3039>
- Hansbo, A., y Hansbo, P. (2004). A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Computer Methods*

- in *Applied Mechanics and Engineering*, 193(33-35), 3523-3540. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.12.041>
- Hilchenbach, C. F., y Ramm, E. (2015). Optimization of multiphase structures considering damage. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 51, 1083-1096. <https://doi.org/10.1007/s00158-014-1198-4>
- Hintermüller, M. (2005). Fast level set based algorithms usign shape and topological sensitivity information. *Control and Cybernetics*, 34(1), 305-324.
- Hintermüller, M., Laurain, A., y Novotny, A. A. (2012). Second-order topological expansion for electrical impedance tomography. *Advances in Computational Mathematics*, 36, 235-265. <https://doi.org/10.1007/s10444-011-9205-4>
- Hughes, T. J. R. (2000). *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis* (1.^a ed.) [Originalmente publicado por Prentice-Hall, Inc. en 1987]. Dover Publications, Inc.
- Jansen, M., y Pierard, O. (2020). A hybrid density/level set formulation for topology optimization of functionally graded lattice structures. *Computers & Structures*, 231, 106205. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2020.106205>
- Jansen, M. (2019). Explicit level set and density methods for topology optimization with equivalent minimum length scale constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 59, 1775-1788. <https://doi.org/10.1007/s00158-018-2162-5>
- Jenkins, N., y Maute, K. (2015). Level set topology optimization of stationary fluid-structure interaction problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 52, 179-195. <https://doi.org/10.1007/s00158-015-1229-9>
- Jenkins, N., y Maute, K. (2016). An immersed boundary approach for shape and topology optimization of stationary fluid-structure interaction problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 54, 1191-1208. <https://doi.org/10.1007/s00158-016-1467-5>
- Kavati, D. R. (2005). *Airy Stress Function for Two Dimensional Inclusion Problems* [Master of Science in Mechanical Engineering]. University of Texas at Arlington.
- Khan, W., Siraj-ul-Islam y Ullah, B. (2019). Structural optimization based on meshless element free Galerkin and level set methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 344, 144-163. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.09.024>

- Kobayashi, M. H., Canfield, R. A., y Kolonay, R. M. (2021). On a cellular development method for layout optimization via the two-point topological derivative. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 64, 2343-2360. <https://doi.org/10.1007/s00158-021-02986-0>
- Kozlov, V., Maz'ya, V., y Movchan, A. (1999). *Asymptotic Analysis of Fields in Multi-Structures* (1.^a ed.). Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198514954.001.0001>
- Kuci, E., y Jansen, M. (2022). Level set topology optimization of elasto-plastic materials with local stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 65, 170. <https://doi.org/10.1007/s00158-022-03268-z>
- Kundu, P. K., Cohen, I. M., y Dowling, D. R. (2016). *Fluid Mechanics* (6.^a ed.). Academic Press. <https://doi.org/10.1016/C2012-0-00611-4>
- Lara, Y., y Delgado, S. (2023). Impresión tridimensional de estructuras de topología óptima. *Mecánica Computacional*, 40, 1385-1385. <https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/6706>
- Latifi Rostami, S. A., Kolahdooz, A., y Zhang, J. (2021). Robust topology optimization under material and loading uncertainties using an evolutionary structural extended finite element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 133, 61-70. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2021.08.023>
- Laurain, A., y Sturm, K. (2016). Distributed shape derivative via averaged adjoint method and applications. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 50, 1241-1267. <https://doi.org/10.1051/m2an/2015075>
- Lawry, M., y Maute, K. (2018). Level set shape and topology optimization of finite strain bilateral contact problems [Special issue: Advanced Topology Optimization]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 113(8), 1340-1369. <https://doi.org/10.1002/nme.5582>
- Lee, D., y Shin, S. (2015). Extended-finite element method as analysis model for Gauss point density topology optimization method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29, 1341-1348. <https://doi.org/10.1007/s12206-015-0302-z>
- Lewiński, T., Sokół, T., y Graczykowski, C. (2019). *Mitchell Structures* (1.^a ed.). Springer Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-95180-5>
- Li, H., Yamada, T., Jolivet, P., Furuta, K., Kondoh, T., Izui, K., y Nishiwaki, S. (2021). Full-scale 3D structural topology optimization using adapti-

- ve mesh refinement based on the level-set method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 194, 103561. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2021.103561>
- Lin, P., Zheng, C., Yang, Y., y Gu, J. (2004). Medical Image Segmentation by Level Set Method Incorporating Region and Boundary Statistical Information. *Progress in Pattern Recognition, Image Analysis and Applications*, 654-660. https://doi.org/10.1007/978-3-540-30463-0_82
- Liu, P., Luo, Y., y Kang, Z. (2016). Multi-material topology optimization considering interface behavior via XFEM and level set method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 308, 113-133. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.05.016>
- Lopes, C. G., y Novotny, A. A. (2016). Topology design of compliant mechanisms with stress constraints based on the topological derivative concept. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 54, 737-746. <https://doi.org/10.1007/s00158-016-1436-z>
- Lopes, C. G., dos Santos, R. B., y Novotny, A. A. (2015). Topological derivative-based topology optimization of structures subject to multiple load-cases. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12(5), 834-860. <https://doi.org/10.1590/1679-78251252>
- Lopes, C. G., dos Santos, R. B., Novotny, A. A., y Sokołowski, J. (2017). Asymptotic analysis of variational inequalities with applications to optimum design in elasticity. *Asymptotic Analysis*, 102(3-4), 227-242. <https://doi.org/10.3233/ASY-171416>
- Luenberger, D. G., y Ye, Y. (2008). *Linear and Nonlinear Programming* (3.^a ed.). Springer New York, NY. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-74503-9>
- Ma, J., Zhao, M., Wang, H., Liu, P., y Kang, Z. (2021). Integrated optimization of embedded components and structure considering mechanical properties of connecting interface [Escrito en Chino]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 53(6), 1758-1768. <https://doi.org/10.6052/0459-1879-21-010>
- Ma, Z.-D., Wang, H., Kikuchi, N., Pierre, C., y Raju, B. (2006). Experimental validation and prototyping of optimum designs obtained from topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 31, 333-343. <https://doi.org/10.1007/s00158-005-0530-4>

- Maas, S., Rawlins, D., Weiss, J., y Ateshian, G. (2019). *FEBio: Theory Manual*. Consultado el 25 de enero de 2024, desde https://help.febio.org/FEBio/FEBio_tm_2_9/FEBio_tm_2-9-Section-2.1.html
- Makhija, D., y Maute, K. (2014). Numerical instabilities in level set topology optimization with the extended finite element method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 49, 185-197. <https://doi.org/10.1007/s00158-013-0982-x>
- Malvern, L. E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium* (1.^a ed.). Prentice-Hall, Inc.
- Martínez-Frutos, J., Allaire, G., Dapogny, C., y Periago, F. (2019). Structural optimization under internal porosity constraints using topological derivatives. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 345, 1-25. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.10.036>
- Martínez-Frutos, J., y Herrero-Pérez, D. (2018). Evolutionary topology optimization of continuum structures under uncertainty using sensitivity analysis and smooth boundary representation. *Computers & Structures*, 205, 15-27. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.05.003>
- Martínez-Frutos, J., y Ortigosa, R. (2021). Risk-averse approach for topology optimization of fail-safe structures using the level-set method. *Computational Mechanics*, 68, 1039-1061. <https://doi.org/10.1007/s00466-021-02058-6>
- Marzok, A., y Waisman, H. (2024a). Topology optimization of extruded beams modeled with the XFEM for maximizing their natural frequencies. *Mechanics Research Communications*, 135, 104234. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2023.104234>
- Marzok, A., y Waisman, H. (2024b). XFEM\GFEM based approach for topology optimization of extruded beams with enhanced buckling resistance. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 418(A), 116541. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116541>
- Michell, A. G. M. (1904). The limits of economy of material in frame-structures. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 8(47), 589-597. <https://doi.org/10.1080/14786440409463229>
- Miki, T. (2023). Self-support topology optimization considering distortion for metal additive manufacturing. *Computer Methods in Applied Mechanics*

- and Engineering*, 404, 115821. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115821>
- Miki, T., y Yamada, T. (2021). Topology optimization considering the distortion in additive manufacturing. *Finite Elements in Analysis and Design*, 193, 103558. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2021.103558>
- Miyajima, K., Noguchi, Y., y Yamada, T. (2023). Optimal design of compliant displacement magnification mechanisms using stress-constrained topology optimization based on effective energy. *Finite Elements in Analysis and Design*, 216, 103892. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2022.103892>
- Moës, N., Cloirec, M., Cartraud, P., y Remacle, J.-F. (2003). A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30), 3163-3177. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(03\)00346-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(03)00346-3)
- Moës, N., Dolbow, J., y Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1), 131-150. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990910\)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J)
- Muskhelishvili, N. I. (1977). *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity: Fundamental Equations Plane Theory of Elasticity Torsion and Bending* (1.^a ed.). Springer Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-3034-1>
- Nanthakumar, S. S., Valizadeh, N., Park, H. S., y Rabczuk, T. (2015). Surface effects on shape and topology optimization of nanostructures. *Computational Mechanics*, 56, 97-112. <https://doi.org/10.1007/s00466-015-1159-9>
- Noda, M., Matsushima, K., y Yamada, T. (2024). Orientation optimization via topological derivatives in combination with multi-material topology optimization based on extended level set method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 418(B), 116585. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116585>
- Noda, M., Noguchi, Y., y Yamada, T. (2022). Extended level set method: A multiphase representation with perfect symmetric property, and its application to multi-material topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 393, 114742. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.114742>

- Noël, L., Duysinx, P., y Maute, K. (2017). Level set topology optimization considering damage. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 56, 737-753. <https://doi.org/10.1007/s00158-017-1724-2>
- Noël, L., Van Miegroet, L., y Duysinx, P. (2016). Analytical sensitivity analysis using the extended finite element method in shape optimization of bimaterial structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 107(8), 669-695. <https://doi.org/10.1002/nme.5181>
- Noh, W. F., y Woodward, P. (1976). SLIC (Simple Line Interface Calculations). *Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, 330-340. https://doi.org/10.1007/3-540-08004-X_336
- Novotny, A. A., Lopes, C. G., y dos Santos, R. B. (2021). Topological derivative-based topology optimization of structures subject to self-weight loading. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 63, 1853-1861. <https://doi.org/10.1007/s00158-020-02780-4>
- Novotny, A. A., y Sokołowski, J. (2013). *Topological Derivatives in Shape Optimization* (1.^a ed.). Springer Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-35245-4>
- NRC Canada. (2018). *BlueKenue: Hydrodynamic Modeling Software. Version: 3.3.4*. Ottawa, Canada, National Research Council. <https://nrc.canada.ca/en/research-development/products-services/software-applications/blue-kenue>
- Oka, T., Misawa, R., y Yamada, T. (2023). Nesterov's acceleration for level set-based topology optimization using reaction-diffusion equations. *Applied Mathematical Modelling*, 120, 57-78. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.03.024>
- Oliver, J., Ferrer, A., Cante, J. C., Giusti, S. M., y Lloberas-Valls, O. (2018). On multi-scale computational design of structural materials using the topological derivative. En E. Oñate, D. Perić, E. A. de Souza Neto y M. Chiumenti (Eds.), *Advances in Computational Plasticity: A Book in Honour of D. Roger J. Owen* (pp. 289-308). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-60885-3_14
- Oliver, J., Yago, D., Cante, J., y Lloberas-Valls, O. (2019). Variational approach to relaxed topological optimization: Closed form solutions for structural problems in a sequential pseudo-time framework. *Computer*

- Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 355, 779-819. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.06.038>
- Oñate, E. (2009). *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 1: Basis and Solids* (1.^a ed.). Springer Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8733-2>
- Osher, S., y Sethian, J. A. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1), 12-49. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(88\)90002-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(88)90002-2)
- Ren, X., y Zhang, X. (2021). A polynomial dimensional decomposition-based method for robust topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 64, 3527-3548. <https://doi.org/10.1007/s00158-021-03036-5>
- Riehl, S., y Steinmann, P. (2015). A staggered approach to shape and topology optimization using the traction method and an evolutionary-type advancing front algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 287, 1-30. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.01.007>
- Roberson, W. (2012). *How does warm-up overhead scale with data size or iteration count?* Consultado el 30 de abril de 2024, desde https://la.mathworks.com/matlabcentral/answers/39788-how-does-warm-up-overhead-scale-with-data-size-or-iteration-count#answer_52104
- Romero Onco, A. A., y Giusti, S. M. (2020). A robust topological derivative-based multi-material optimization approach: Optimality condition and computational algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 366, 113044. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113044>
- Rozvany, G. I. N. (1993). *Optimization of Large Structural Systems* (1.^a ed.). Springer Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-9577-8>
- Ruspini, L. C., Dari, E., Padra, C., Paissan, G. H., y Salva, N. N. (2019). Design of fluid components using the topological optimization method. *Engineering Computations*, 36(5), 1430-1448. <https://doi.org/10.1108/EC-11-2018-0527>
- Sadd, M. H. (2009). *Elasticity: Theory, Applications and Numerics* (2.^a ed.). Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-374446-3.X0001-6>
- Sakin, M., y Kiroglu, Y. C. (2017). 3D Printing of Buildings: Construction of the Sustainable Houses of the Future by BIM. *Energy Procedia*, 134, 702-711. <https://doi.org/10.1016/j.egypro.2017.09.562>

- Sharma, A., y Maute, K. (2018). Stress-based topology optimization using spatial gradient stabilized XFEM. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 57, 17-38. <https://doi.org/10.1007/s00158-017-1833-y>
- Sharma, A., Villanueva, H., y Maute, K. (2017). On shape sensitivities with heaviside-enriched XFEM. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 55, 385-408. <https://doi.org/10.1007/s00158-016-1640-x>
- Sharma, A. (2015). Level set method for computational multi-fluid dynamics: A review on developments, applications and analysis. *Sādhanā*, 40, 627-652. <https://doi.org/10.1007/s12046-014-0329-3>
- Silva, M., Geubelle, P. H., y Tortorelli, D. A. (2011). Energy release rate approximation for small surface-breaking cracks using the topological derivative. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(5), 925-939. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2011.03.005>
- Sokołowski, J., y Żochowski, A. (1999). On the topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37(4), 1251-1272. <https://doi.org/10.1137/s0363012997323230>
- Sokołowski, J., y Żochowski, A. (2001). Topological derivatives of shape functionals for elasticity systems. *Mechanics of Structures and Machines*, 29(3), 331-349. <https://doi.org/10.1081/sme-100105654>
- Sturm, K. (2020). Topological sensitivities via a Lagrangian approach for semilinear problems. *Nonlinearity*, 33(9), 4310-4337. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab86cb>
- Sukumar, N., Chopp, D. L., Moës, N., y Belytschko, T. (2001). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(46-47), 6183-6200. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00215-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00215-8)
- Svanberg, K. (1987). The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2), 359-373. <https://doi.org/10.1002/nme.1620240207>
- Takallozadeh, M., y Yoon, G. H. (2017). Implementation of topological derivative in the moving morphable components approach. *Finite Elements in Analysis and Design*, 134, 16-26. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2017.05.008>
- Tan, Y., y Zhu, S. (2023). A discontinuous Galerkin level set method using distributed shape gradient and topological derivatives for multi-material

- structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 66, 170. <https://doi.org/10.1007/s00158-023-03617-6>
- Tartar, L. (2007). *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces* (1.^a ed.). Springer Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-71483-5>
- The MathWorks Inc. (2018). *MATLAB version: 9.5.0 (R2018b)*. Natick, Massachusetts, United States. <https://www.mathworks.com>
- Timoshenko, S., y Goodier, J. N. (1951). *Theory of Elasticity* (2.^a ed.). McGraw-Hill Book Company, Inc.
- Torii, A. J., Novotny, A. A., y dos Santos, R. B. (2016). Robust compliance topology optimization based on the topological derivative concept. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 106(11), 889-903. <https://doi.org/10.1002/nme.5144>
- Ullah, B., y Trevelyan, J. (2016). A boundary element and level set based topology optimisation using sensitivity analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 70, 80-98. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.06.001>
- United Nations. (2022). *2022 Global Status Report for Buildings and Construction* (1.^a ed.).
- Uslu Uysal, M., y Kahveci, N. (2023). The Design of the Organic-Structured Unmanned Aerial Vehicle Body Produced by 3D Printing Process Using Topology Optimization. *7th International Congress on 3D Printing (Additive Manufacturing) Technologies and Digital Industry*.
- Van Miegroet, L., y Duysinx, P. (2007). Stress concentration minimization of 2D filets using X-FEM and level set description. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33, 425-438. <https://doi.org/10.1007/s00158-006-0091-1>
- Villanueva, C. H., y Maute, K. (2014). Density and level set-XFEM schemes for topology optimization of 3-D structures. *Computational Mechanics*, 54, 133-150. <https://doi.org/10.1007/s00466-014-1027-z>
- Wang, H., Liu, J., y Wen, G. (2020). An efficient evolutionary structural optimization method for multi-resolution designs. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 67, 787-803. <https://doi.org/10.1007/s00158-020-02536-0>
- Wang, H., Liu, J., y Wen, G. (2022). An efficient multi-resolution topology optimization scheme for stiffness maximization and stress minimization.

- Engineering Optimization*, 54(1), 40-60. <https://doi.org/10.1080/0305215X.2020.1853713>
- Wang, R., Zhang, X., y Zhu, B. (2021). A projective transformation-based topology optimization using moving morphable components. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 376, 113646. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113646>
- Wang, X., Mei, Y., y Wang, M. Y. (2004). Incorporating topological derivatives into level set methods for structural topology optimization. *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*. <https://doi.org/10.2514/6.2004-4564>
- Weerg. (2023). *Topology optimisation in 3D printing*. Consultado el 25 de enero de 2024, desde <https://www.weerg.com/insights/topology-optimisation>
- Wu, C., Fang, J., Zhou, S., Zhang, Z., Sun, G., Steven, G. P., y Li, Q. (2020). Level-set topology optimization for maximizing fracture resistance of brittle materials using phase-field fracture model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(13), 2929-2945. <https://doi.org/10.1002/nme.6340>
- Xavier, M., y Novotny, A. A. (2017). Topological derivative-based topology optimization of structures subject to design-dependent hydrostatic pressure loading. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 56, 47-57. <https://doi.org/10.1007/s00158-016-1646-4>
- Xu, Z., Zhang, W., Zhou, Y., y Zhu, J. (2020). Multiscale topology optimization using feature-driven method. *Chinese Journal of Aeronautics*, 33(2), 621-633. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2019.07.009>
- Yaghmaei, M., y Ghoddosian, A. (2019). A level set topology optimization method using a biharmonic equation based on plate theory. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 60, 2431-2459. <https://doi.org/10.1007/s00158-019-02332-5>
- Yaghmaei, M., Ghoddosian, A., y Khatibi, M. M. (2020). Optimal design of MR sandwich plates using a level set based topology optimization method. *Smart Materials and Structures*, 29(1), 015027. <https://doi.org/10.1088/1361-665X/ab57e3>
- Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., y Takezawa, A. (2010). A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(45-48), 2876-2891. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.05.013>

- Zabusky, N. J. (1988). Computational synergetics: visualization and vortex dynamics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 22(2-3), 285-295. [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(88\)90407-4](https://doi.org/10.1016/0377-0427(88)90407-4)
- Zhang, H., Yang, D., Shi, Z., y Cai, S. (2023). Topology optimization of thin shell structures based on adaptive bubble method [Escrito en Chino]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 55(5), 1165-1173. <https://doi.org/10.6052/0459-1879-22-562>
- Zhang, J., van Keulen, F., y Aragón, A. M. (2022). On tailoring fracture resistance of brittle structures: A level set interface-enriched topology optimization approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 388, 114189. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114189>
- Zhang, W., Liu, Y., Wei, P., Zhu, Y., y Guo, X. (2017). Explicit control of structural complexity in topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 324, 149-169. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.05.026>
- Zhang, W., Yuan, J., Zhang, J., y Guo, X. (2016). A new topology optimization approach based on Moving Morphable Components (MMC) and the ersatz material model. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 53, 1243-1260. <https://doi.org/10.1007/s00158-015-1372-3>
- Zhang, W., y Zhang, Y. (2016). Efficient local level set method without reinitialization and its appliance to topology optimization. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016, 6392901. <https://doi.org/10.1155/2016/6392901>
- Zhao, R., Zhao, J., y Wang, C. (2022). Stress-constrained multiscale topology optimization with connectable graded microstructures using the worst-case analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 123(8), 1882-1906. <https://doi.org/10.1002/nme.6920>
- Zienkiewicz, O. C., y Taylor, R. L. (2005). *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics* (6.^a ed.). Elsevier Ltd.

ANEXOS

Anexo A

Códigos implementados

En este anexo se presenta la estructura general de los códigos de MATLAB® desarrollados en esta tesis. Todos los códigos desarrollados son de público acceso y se encuentran publicados en el sitio web GitHub bajo el enlace <https://github.com/santiago-delgado-torres/Optimizacion-Estructural-Bidimensional-Derivada-Topologica-XFEM>.

En la Figura A.1 se presenta un esquema de la estructura de llamadas del código implementado. Para ejecutar el código se debe ejecutar cualquiera de los scripts cuyo nombre comienza con *Ejemplo*, en el cual se define el problema de optimización estructural y se llama a la función *Optimizacion.m*. La función de optimización ejecuta el método implementado llamando a tres grupos principales de códigos, los cuales se representan con rectángulos en la figura. En lo que sigue de este anexo se describe el funcionamiento de estos tres grupos.

En el script inicial se define la variable *ES*, la cual es la base de todos los códigos. En dicha variable se tienen varios campos, entre los que se destacan *Mnodo*, donde se tiene la matriz de posiciones de los nodos, *Melem*, donde se definen los elementos y la matriz de conectividad, *psi*, la cual es la función de nivel definida en los nodos, *CB*, donde se definen las condiciones de borde del problema cuya estructura interna se describe en los ejemplos, *NodAriX*, la cual es la matriz de relacionamiento entre nodos, aristas y grados de libertad extendidos y *U*, la cual es el vector de los grados de libertad tradicionales y extendidos. En particular, en el script inicial se define la geometría de la malla de elementos finitos, los EC, las condiciones de borde y los parámetros del método de optimización.

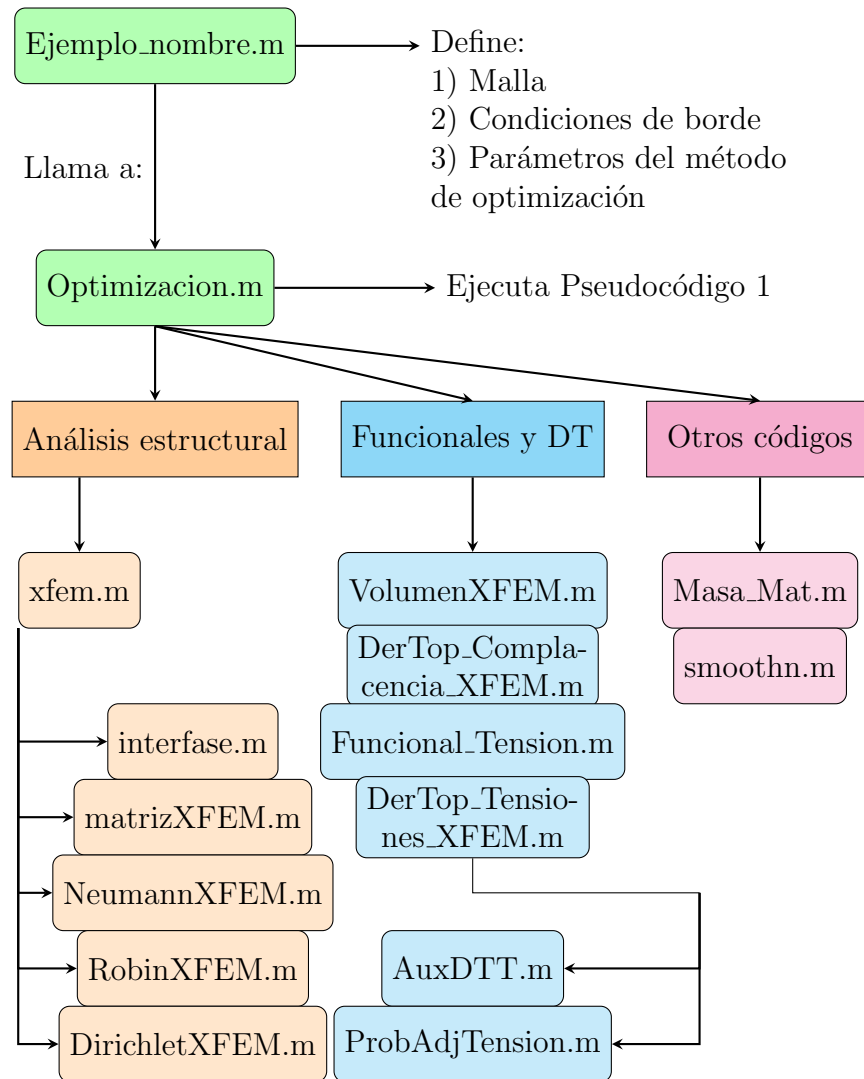


Figura A.1: Esquema de llamadas del código de optimización estructural

xfem.m

La componente del análisis estructural dentro del método de optimización se ejecuta mediante la función *xfem.m*. Dicha función recibe como parámetros la variable *ES* con cierto *EC* y función de nivel y devuelve el vector de grados de libertad resuelto, la distribución de *EX*, *EB* y *ER*, la matriz de relacionamiento entre nodos, aristas y grados de libertad extendidos y el vector **U** solución del problema plano de elasticidad lineal con el XFEM. La función hace lo anterior al llamar a varias funciones que se describen a continuación.

interfase.m

La primer función del análisis estructural es *interfase.m*. En primer lugar, esta función aplica el mínimo en valor absoluto a la función de nivel en los nodos, tal que se cumpla la Ecuación (4.5), para evitar que la interfase pase por ellos. Luego, la función *interfase.m* recorre todos los elementos y distingue en tres casos distintos: algún nodo del elemento tiene signo distinto en la función de nivel a los otros dos (EX), todos los nodos tienen función de nivel negativa (EB) o todos los nodos tienen función de nivel positiva (ER). Lo anterior genera un vector lógico que indica qué elementos son extendidos y otro vector lógico que indica qué elementos son vacíos.

A continuación se procede a definir los grados de libertad del problema, donde nuevamente los primeros $2\mathcal{N}_{no}$ son las componentes de los desplazamientos de los nodos de la malla. Resta ahora definir matrices para relacionar las aristas extendidas, los EX y sus nodos y los grados de libertad adicionales, según se describe en los siguientes párrafos. Estas matrices son: la matriz de identificación de aristas extendidas, la matriz de relación elementos-aristas extendidas y la matriz de relacionamiento entre nodos, aristas extendidas y grados de libertad adicionales.

Para crear las matrices que relacionan las aristas, elementos y nodos extendidos con los grados de libertad se recorren todos los EX y se identifican cuáles son los bordes cortados por la interfase. La generación de las tres matrices se hace en simultáneo, tal y como se presenta en el pseudocódigo asociado a este proceso, el cual se presenta a la brevedad. A pesar de lo anterior, para mayor claridad en la lectura, se presenta por separado su proceso de generación. En primer lugar, se construye una matriz de dos columnas que indica los nodos asociados a cada arista extendida. En dicha matriz los números de fila representan los números de arista extendida, las dos columnas son los dos nodos de la arista y los valores son los números de nodo. Para generar esta matriz se recorren los EX y se buscan los dos bordes cortados por la interfase. En cada uno de los bordes cortados se busca en la matriz si ya se incluyó este borde y en caso contrario se agrega al final de la matriz.

A continuación se crea una matriz de dos columnas y $\mathcal{N}_{el}$ filas, la cual presenta, para los EX, los números de las dos aristas extendidas asociadas. Esta matriz se inicializa nula y en cada EX se modifican las dos entradas de la fila correspondiente con los números de arista, los cuales se obtuvieron del

proceso de generación de la matriz del párrafo anterior. Se aclara que las filas de elementos no extendidos permanecen nulas y no se vuelven a utilizar. De todas formas, el generar la matriz entera sí es de utilidad para no confundir los números de elemento.

Finalmente, la tercer matriz que se crea es la matriz de relacionamiento entre nodos, aristas extendidas y grados de libertad adicionales. Esta matriz es una matriz de $\mathcal{N}_{no}$ filas y tantas columnas como aristas extendidas. La entrada de la fila m -ésima y columna n -ésima representa el número de grado de libertad de la componente según el eje x de la incógnita adicional asociada al nodo m -ésimo y arista extendida n -ésima. Como cada arista extendida tiene un máximo de cuatro nodos asociados, la matriz de relacionamiento se define como una matriz dispersa para reducir costos de memoria. Para generar la matriz, en primer lugar se define $NX = 2\mathcal{N}_{no}$, como la cantidad de grados de libertad ya numerados. Luego, en el proceso de crear la matriz de identificación de las aristas extendidas, si la arista no está incluida en la matriz, se agrega al vector de filas los números de los tres nodos del elemento, al vector de columnas se agrega tres veces el número de arista extendida que se está definiendo y al vector de valores los números $NX + 1$, $NX + 3$, $NX + 5$. Por otro lado, si la arista ya está incluida en la matriz, se agrega al vector de fila el número del nodo del elemento no perteneciente a la arista (los de la arista se agregaron al guardar la arista en el listado de aristas extendidas), al vector de columna se agrega el número de arista extendida y al vector de valores el número $NX + 1$. Luego, en cada caso se redefine $NX := NX + GLA$, siendo $GLA = 6$ si se incorporó la arista en la matriz y $GLA = 2$ en caso contrario. Tras recorrer todos los EX se utiliza la función `sparse` de MATLAB® para transformar los tres vectores en una estructura de matriz dispersa.

El procedimiento preciso para generar las anteriores tres matrices se presenta en el Pseudocódigo 2. Si bien en el pseudocódigo no se presenta, las matrices de identificación de aristas extendidas y los vectores de la matriz dispersa de relacionamiento entre nodos, aristas extendidas y grados de libertad adicionales son inicializados como vectores nulos, de longitud mayor a la necesaria, antes de proceder al procedimiento presentado. Una vez completados dichos vectores y matriz, se los recorta a la longitud exacta. El proceso de inicialización y recorte se decidió incluirlo para reducir tiempos de cómputo frente a la opción de ir aumentando progresivamente la longitud de los vectores. Vale la pena destacar que la variable auxiliar NX de dicho pseudocódigo

Pseudocódigo 2: Algoritmo para crear matrices de relacionamiento de variables en la nueva propuesta de XFEM

Entradas: Vector lógico de identificación de EX (**EX**), Ψ , Matriz de conectividad, $\mathcal{N}_{no}$, $\mathcal{N}_{el}$

Salidas : Matriz de identificación de aristas extendidas (**AriX**), Matriz de relación elementos-aristas extendidas (**EGLX**), Matriz de relacionamiento entre nodos, aristas extendidas y grados de libertad adicionales (**NodAriX**)

```

1  EGLX := matriz de 0s de  $\mathcal{N}_{el}$  filas y 2 columnas;
2  posMat := 1; NariX := 0; NX :=  $2\mathcal{N}_{no}$  ;
3  Con todos los  $n$  de 1 a  $\mathcal{N}_{el}$  que cumplan EX Hacer
4      Identificar nodos del elemento  $n$ -ésimo  $\rightarrow \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ ;
5      pos := 1;
6      Si  $\Psi(\mathbf{n}_1)\Psi(\mathbf{n}_2) < 0$  Entonces
7          Identificar nodos del borde:  $\mathbf{n}_I \leftarrow \mathbf{n}_1; \mathbf{n}_{II} \leftarrow \mathbf{n}_2$  y adicional:
             $\mathbf{n}_{Ad} \leftarrow \mathbf{n}_3$ ;
8          Buscar fila de AriX con  $\mathbf{n}_I$  y  $\mathbf{n}_{II} \rightarrow \mathbf{ind}_{Ar}$ ;
9          Si Existe fila de AriX con  $\mathbf{n}_I$  y  $\mathbf{n}_{II}$  Entonces
10             EGLX( $n, \mathbf{pos}$ ) :=  $\mathbf{ind}_{Ar}$ ;
11             Agregar a vector de filas: NF(posMat) :=  $\mathbf{n}_{Ad}$ ;
12             Agregar a vector de columnas: NC(posMat) :=  $\mathbf{ind}_{Ar}$ ;
13             Agregar a vector de valores: NV(posMat) :=  $\mathbf{NX} + 1$ ;
14             Actualizar NX :=  $\mathbf{NX} + 2$ ; posMat := posMat + 1;
15         Si no
16             Actualizar NariX := NariX + 1;
17             AriX(NariX, 1) =  $\mathbf{n}_I$  y AriX(NariX, 2) =  $\mathbf{n}_{II}$ ;
18             EGLX( $n, \mathbf{pos}$ ) := NariX;
19             NF(posMat : (posMat + 2)) :=  $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3]$ ;
20             NC(posMat : (posMat + 2)) :=  $[\mathbf{NariX}, \mathbf{NariX}, \mathbf{NariX}]$ ;
21             NV(posMat : (posMat + 2)) :=  $\mathbf{NX} + [1, 3, 5]$ ;
22             Actualizar NX :=  $\mathbf{NX} + 6$ ; posMat := posMat + 3;
23         Fin
24         Actualizar pos := pos + 1;
25     Fin
26     Si  $\Psi(\mathbf{n}_1)\Psi(\mathbf{n}_3) < 0$  Entonces
27          $\mathbf{n}_I \leftarrow \mathbf{n}_1; \mathbf{n}_{II} \leftarrow \mathbf{n}_3$  y  $\mathbf{n}_{Ad} \leftarrow \mathbf{n}_2$ ; Ejecutar Líneas 8 a 24;
28     Fin
29     Si  $\Psi(\mathbf{n}_2)\Psi(\mathbf{n}_3) < 0$  Entonces
30          $\mathbf{n}_I \leftarrow \mathbf{n}_2; \mathbf{n}_{II} \leftarrow \mathbf{n}_3$  y  $\mathbf{n}_{Ad} \leftarrow \mathbf{n}_1$ ; Ejecutar Líneas 8 a 24;
31     Fin
32 Fin
33 NodAriX := sparse(NF, NC, NV,  $\mathcal{N}_{no}$ , NariX);

```

permite calcular rápidamente el número de incógnitas adicionales del XFEM como $\mathcal{N}_{\mathbf{X}} = \mathbf{NX}/2 - \mathcal{N}_{no}$, donde se recuerda que en esta tesis se definió como incógnita adicional al par $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$.

matrizXFEM.m

Luego se ejecuta *matrizXFEM.m*, la cual genera la matriz de rigidez del sistema lineal de ecuaciones. En esta función se recorren todos los elementos para ensamblar la matriz distinguiendo entre los tres tipos de elementos, según clasificó *interfase.m*. En cada elemento se calcula la matriz de rigidez elemental como se describe a continuación.

Para los ER y EB se combinan las Ecuaciones (3.18) y (3.34) y se obtiene la matriz de rigidez elemental según la Ecuación (A.1), donde la matriz $\mathbf{C}$ se obtiene de acuerdo a la Ecuación (3.11), considerando los valores de λ y μ asociados al material rígido o blando según corresponda. Luego, para obtener la matriz $\mathbf{B}^{(e)}$ en coordenadas intrínsecas se requiere calcular las derivadas de las funciones de interpolación respecto a las coordenadas reales. Para lograr lo anterior se utiliza la regla de la cadena para obtener la Ecuación (A.2), utilizando la Ecuación (3.35). Posteriormente, en base a las Ecuaciones (3.9) y (A.2) se obtiene la matriz $\mathbf{B}^{(e)}$ sin utilizar las coordenadas reales para nada más que lo ya utilizado en el cálculo del determinante Jacobiano. Como el integrando de la Ecuación (A.1) es una matriz constante para el elemento lineal, se utiliza el método de cuadratura de Gauss con un único punto para calcularla.

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega_{\xi,\eta}^{(e)}} |\mathbf{J}| \mathbf{B}^{(e)\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{B}^{(e)} d\xi d\eta \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{pmatrix} \partial_x N_1 & \partial_x N_2 & \partial_x N_3 \\ \partial_y N_1 & \partial_y N_2 & \partial_y N_3 \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

En el caso de los EX, según se discutió en la Sección 3.1.3.4, se decidió realizar la integral en cuatro subregiones triangulares. Para el cálculo de los Jacobianos asociados a cada subregión se decidió calcular los valores que toman ξ_1^Ψ , ξ_2^Ψ y η_3^Ψ de la Figura 3.18. Por definición, la división de subregiones en los bordes del elemento se da en la interfase, en caso de existir, o en el punto medio, en caso contrario. Por lo anterior, ξ_1^Ψ , ξ_2^Ψ y η_3^Ψ toman las expresiones dadas por las Ecuaciones (A.3) a (A.5), las cuales surgen de una simple ecuación lineal.

$$\xi_1^\Psi = \begin{cases} \frac{\Psi_1}{\Psi_1 - \Psi_2} & \text{si } \Psi_1 \Psi_2 < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \Psi_1 \Psi_2 > 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$\xi_2^\Psi = \begin{cases} \frac{\Psi_3}{\Psi_3 - \Psi_2} & \text{si } \Psi_2 \Psi_3 < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \Psi_2 \Psi_3 > 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$$\eta_3^\Psi = \begin{cases} \frac{\Psi_1}{\Psi_1 - \Psi_3} & \text{si } \Psi_1 \Psi_3 < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \Psi_1 \Psi_3 > 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

A partir de las Ecuaciones (A.3) a (A.5), el Jacobiano del cambio de coordenadas de las intrínsecas del elemento a las de la subregión m -ésima se calcula según la Ecuación (A.6), donde $\xi_{\text{lím},n}^m$ y $\eta_{\text{lím},n}^m$ son las coordenadas intrínsecas (del elemento completo) límites para la subregión y están dadas por la Tabla A.1.

$$\mathbf{J}_m^{\text{SR}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\text{lím},1}^m & \eta_{\text{lím},1}^m \\ \xi_{\text{lím},2}^m & \eta_{\text{lím},2}^m \\ \xi_{\text{lím},3}^m & \eta_{\text{lím},3}^m \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Tabla A.1: Coordenadas intrínsecas límites de las subregiones

Subregión	1	2	3	4
$\xi_{\text{lím},1}$	0	1	0	ξ_1^Ψ
$\eta_{\text{lím},1}$	0	0	1	0
$\xi_{\text{lím},2}$	ξ_1^Ψ	ξ_2^Ψ	0	ξ_2^Ψ
$\eta_{\text{lím},2}$	0	$(1 - \xi_2^\Psi)$	η_3^Ψ	$(1 - \xi_2^\Psi)$
$\xi_{\text{lím},3}$	0	ξ_1^Ψ	ξ_2^Ψ	0
$\eta_{\text{lím},3}$	η_3^Ψ	0	$(1 - \xi_2^\Psi)$	η_3^Ψ

A continuación se presenta el cálculo de las componentes $\partial_\xi w_{i,n}$ y $\partial_\eta w_{i,n}$. Las derivadas respecto a las coordenadas reales, las cuales aparecen en las matrices $\mathbf{B}_{\mathbf{W}_i}^{(e)}$ de la Ecuación (4.7), se obtienen a partir de la Ecuación (A.7), la cual surge de un análisis equivalente al de la Ecuación (A.2).

$$\begin{pmatrix} \partial_x w_{i,1} & \partial_x w_{i,2} & \partial_x w_{i,3} \\ \partial_y w_{i,1} & \partial_y w_{i,2} & \partial_y w_{i,3} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_\xi w_{i,1} & \partial_\xi w_{i,2} & \partial_\xi w_{i,3} \\ \partial_\eta w_{i,1} & \partial_\eta w_{i,2} & \partial_\eta w_{i,3} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Por la definición de $w_{i,n}$, la derivada parcial respecto a ξ es como presenta la Ecuación (A.8). Las cuentas para la derivada respecto a η son análogas. $\partial_\xi N_n$ es conocida y la operativa para g_i y $\partial_\xi g_i$ se presenta a continuación.

$$\partial_\xi w_{i,n} = g_i \partial_\xi N_n + N_n \partial_\xi g_i \quad (\text{A.8})$$

En primer lugar se hace notar que la función g_i , al ser en el elemento idéntica a la función N^{ari} de la arista i -ésima, admite ser calculada, en la subregión m -ésima, dadas las coordenadas intrínsecas de la subregión. Lo anterior se expresa en la Ecuación (A.9). La Ecuación (A.9) rápidamente permite calcular g_i en los puntos de cuadratura de Gauss, los cuales se definen en las coordenadas intrínsecas de cada subregión. Simplemente resta conocer los valores de g_i en los vértices de la subregión.

$$g_i(\xi_m^{\text{SR}}, \eta_m^{\text{SR}}) = \sum_{n=1}^{n=3} (N_n(\xi_m^{\text{SR}}, \eta_m^{\text{SR}}) g_i(\xi_{\text{lim},n}^m, \eta_{\text{lim},n}^m)) \quad (\text{A.9})$$

Para definir el valor de $g_i(\xi_{\text{lim},n}^m, \eta_{\text{lim},n}^m)$ en primer lugar se recuerda que en los nodos del elemento el valor de g_i es nulo y por lo tanto solamente resta calcularla en los tres vértices de la cuarta subregión según la Figura 3.18. Para hacer el cálculo anterior se decidió incorporar al cálculo de ξ_1^Ψ , ξ_2^Ψ y η_3^Ψ un paso para calcular los valores de g_i . Si el borde que se considera no es cortado por la interfase, entonces $g_1(\xi_{\text{lim},n}^m, \eta_{\text{lim},n}^m) = g_2(\xi_{\text{lim},n}^m, \eta_{\text{lim},n}^m) = 0$. En cambio, si el borde sí es cortado por la interfase, se identifica cuál de las dos aristas extendidas corresponde y se indica que g_i de la arista correspondiente vale 1 y g_i de la otra vale 0. La forma de identificación de qué arista corresponde es a partir de la matriz de identificación de aristas extendidas.

Dada la expresión de g_i según la Ecuación (A.9), y bajo un análisis similar a las Ecuaciones (A.2) y (A.7), se tiene que las derivadas de las funciones g_i respecto a las coordenadas intrínsecas del elemento, son según se presenta en la Ecuación (A.10). Con los resultados de las Ecuaciones (A.8) a (A.10) se calculan las derivadas de las funciones de interpolación extendidas en función de las coordenadas intrínsecas del elemento.

$$\begin{pmatrix} \partial_\xi g_i \\ \partial_\eta g_i \end{pmatrix} = (\mathbf{J}_m^{\text{SR}})^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_i(\xi_{\text{lim},1}^m, \eta_{\text{lim},1}^m) \\ g_i(\xi_{\text{lim},2}^m, \eta_{\text{lim},2}^m) \\ g_i(\xi_{\text{lim},3}^m, \eta_{\text{lim},3}^m) \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Un detalle no menor en el cálculo de $\mathbf{B}_{\mathbf{w}_i}^{(e)}$ es que las expresiones de las funciones de interpolación tradicionales en la Ecuación (A.8) son en función de las coordenadas intrínsecas del elemento entero; pero en la integración por subregiones vía cuadratura de Gauss se consideran las coordenadas intrínsecas de cada subregión. Para el cálculo de la coordenada intrínseca del elemento en función de las coordenadas de la subregión m -ésima se hace uso de la Ecuación (A.11), la cual es equivalente a la Ecuación (3.33), y se utiliza la Tabla A.1.

$$\begin{pmatrix} \xi(\xi_m^{\text{SR}}, \eta_m^{\text{SR}}) \\ \eta(\xi_m^{\text{SR}}, \eta_m^{\text{SR}}) \end{pmatrix} = \mathbf{N}^{(e)}(\xi_m^{\text{SR}}, \eta_m^{\text{SR}}) \begin{pmatrix} \xi_{\text{lím},1}^m & \eta_{\text{lím},1}^m \\ \xi_{\text{lím},2}^m & \eta_{\text{lím},2}^m \\ \xi_{\text{lím},3}^m & \eta_{\text{lím},3}^m \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

De las Ecuaciones (A.8) y (A.10) se tiene que los términos de $\mathbf{B}_{\mathbf{w}_i}^{(e)}$ son polinomios de grado uno en cada subregión. Luego, el integrando de la Ecuación (3.55) es una función cuadrática en cada subregión y por lo tanto la integral se decidió calcular con tres puntos de Gauss por subregión. Se hace notar que la matriz de rigidez elemental en este caso es 18×18 y requiere sumar 12 puntos de integración, a diferencia de la matriz de rigidez de los ER y EB, en la cual basta considerar un único punto de cuadratura de Gauss para obtener el resultado exacto.

Dada la cantidad de entradas nulas de la matriz de rigidez global, lo que queda evidenciado por la cantidad de nodos no conectados por un elemento, se la ensambla como matriz dispersa (Golub y Van Loan, 2013). El método de ensamblado utilizado se presenta en el Pseudocódigo 3, y se basa en recorrer todos los elementos, calcular la matriz de rigidez elemental, identificar los grados de libertad asociados al elemento y sumar las componentes en los lugares correspondientes de la matriz de rigidez global. Nótese que en el pseudocódigo se almacenan los datos en vectores auxiliares KF, KC y KV, los cuales son utilizados para ensamblar la matriz dispersa utilizando la rutina `sparse` de MATLAB®. Para identificar los grados de libertad asociados al elemento se utilizan las tres matrices de relación entre nodos, aristas, elementos y grados de libertad creadas con *interfase.m*

Pseudocódigo 3: Algoritmo de ensamblado de la matriz de rigidez global

Entradas: Matriz de Conectividad, Geometría y Clasificación de elementos

Salidas : $\mathbf{K}$ (Matriz de rigidez global)

1 **Con** n de 1 a $\mathcal{N}_{el}$ **Hacer**

2 Calcular la matriz de rigidez elemental $\rightarrow \mathbf{K}^{(e)}$;

3 Identificar los grados de libertad $\rightarrow \text{DOF}$;

4 Agregar números de fila a vector de filas $\rightarrow \text{KF}$;

5 Agregar números de columna a vector de columnas $\rightarrow \text{KC}$;

6 Agregar valores de $\mathbf{K}^{(e)}$ al vector de valores $\rightarrow \text{KV}$;

7 **Fin**

8 $\mathbf{K} := \text{sparse}(\text{KF}, \text{KC}, \text{KV}, \# \text{ G.L.}, \# \text{ G.L.})$;

NeumannXFEM.m

Luego, la función *NuemannXFEM.m* se encarga de generar el vector de fuerzas del problema del XFEM. En primer lugar, el vector de fuerzas se inicializa como un vector nulo de longitud igual al número de grados de libertad del problema. Luego se recorren todos los distintos tipos de carga sumando su aporte al vector de fuerzas según se describió en la Sección 3.1.3.4. En primer lugar se recorren todas las cargas puntuales, donde la actualización del vector de fuerzas es según la Ecuación (A.12), donde P es la carga puntual, $:=$ da a entender que la entrada presentada del vector de fuerzas se redefine, tras incorporar la carga puntual, como la ecuación presenta, n es el número de nodo donde la carga está aplicada y e_x y e_y son vectores unitarios según los ejes x y y , respectivamente.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(2n-1) &:= \mathbf{F}(2n-1) + P \cdot e_x \\ \mathbf{F}(2n) &:= \mathbf{F}(2n) + P \cdot e_y \end{aligned} \tag{A.12}$$

Luego se recorren todas las cargas de superficie aplicadas en bordes de elemento donde los aportes se calculan según las Ecuaciones (3.58) y (3.59), donde se destaca que la segunda ecuación solamente incluye las incógnitas adicionales de la arista cargada. Para A_n se realiza la integral del segmento con un único punto de Gauss y para B_n con dos puntos de Gauss por subregión. Si se considera que $\xi = -1$ representa el nodo uno y $\xi = 1$ representa el nodo dos, el valor de ξ en la interfase es según presenta la Ecuación (A.13). Luego, los Jacobianos asociados a cada subregión son según se presenta en

la Ecuación (A.14). Finalmente, note que $\Psi_1\Psi_2 < 0$ si y solamente si existe interfase en el borde, por lo cual se utilizó dicha propiedad en el código para chequear la existencia de una interfase antes de calcular B_n .

$$\xi^\Psi = \frac{2\Psi_1}{\Psi_1 - \Psi_2} - 1 \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{J}_m^{\text{SR}} = \begin{cases} \frac{\xi^\Psi + 1}{2} & \text{si } m = 1 \text{ (Tramo entre nodo 1 e interfase)} \\ \frac{1 - \xi^\Psi}{2} & \text{si } m = 2 \text{ (Tramo entre nodo 2 e interfase)} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Finalmente, en caso de existir fuerza de volumen en el EC, se recorren todos los elementos para calcular el aporte de la fuerza de volumen en cada uno. Las integrales para los ER y EB se realizan con un único punto de Gauss en el elemento. Por otra parte, las integrales para los EX se realizan con tres puntos de Gauss por subregión, tanto el aporte a los grados de libertad tradicionales como a los extendidos.

En los códigos desarrollados, si bien no se discutió sobre esto en el cuerpo de la tesis, también se incluyó la posibilidad de agregar cargas proyectadas. Dichas cargas se consideraron concentradas pero aplicables sobre cierta línea de acción de fuerza. Para utilizar esta aplicación se define una lista de posibles nodos de aplicación de la carga y se define que el primer nodo cuya función de nivel sea positiva es el nodo donde se aplica la carga. En caso de que ningún nodo de la lista sea material, se aplica la carga en un nodo predefinido. Este método se utiliza en el *Ejemplo_Portico* depositado en el GitHub.

RobinXFEM.m

A continuación *RobinXFEM.m* incluye apoyos nodales elásticos. En términos generales, el efecto de los apoyos elásticos se los consideró incorporando su rigidez a la matriz de rigidez global.

DirichletXFEM.m

Finalmente, *DirichletXFEM.m* se encarga de aplicar los apoyos no elásticos al problema plano de elasticidad lineal. A continuación se presenta la implementación de apoyos puntuales o de bordes de elemento, fijos y deslizantes y

con desplazamientos prescritos no necesariamente nulos. Para incorporar los apoyos en el problema del XFEM en primer lugar se inicializan dos vectores: **GLR** y $\mathbf{U}_c$. **GLR** es un vector lógico que indica qué grados de libertad se encuentran restringidos (apoyados) y se inicializa como un vector falso de longitud igual a la cantidad de grados de libertad del problema. $\mathbf{U}_c$ es un vector de igual longitud que **GLR** e indica el valor prescrito de los grados de libertad restringidos. $\mathbf{U}_c$ se inicializa como un vector nulo y de él solamente se utilizan las entradas asociadas a los grados de libertad restringidos. De forma similar al vector de fuerzas, para incorporar los apoyos, se recorren todos los apoyos puntuales y posteriormente todos los apoyos de borde de elemento modificando (como se presenta a continuación) estos dos vectores.

Los apoyos puntuales, al igual que las fuerzas puntuales, se consideran que se aplican en algún nodo de la malla de elementos finitos. Por lo tanto, como el desplazamiento del nodo simplemente depende de su incógnita asociada, solamente se debe restringir dicho grado de libertad del XFEM. Si se asume que el nodo apoyado es el n -ésimo; el grado de libertad asociado al desplazamiento según x de dicho nodo es el $2n - 1$ y el asociado al desplazamiento según y es el $2n$. Si el apoyo es fijo, se vuelven ambas entradas de **GLR** como verdaderas y se agregan los valores correspondientes a dichas entradas de $\mathbf{U}_c$. Por otro lado, si el apoyo es deslizante, solamente se vuelve verdadera la entrada correspondiente de **GLR** y solamente se modifica una entrada de $\mathbf{U}_c$. Se destaca entonces que los apoyos puntuales no afectan a las incógnitas adicionales.

En lo referente a los apoyos en bordes de elemento, se asume, sin perder generalidad, que el borde apoyado es entre los nodos 1 y 2. En este código se asumió que el apoyo de borde prescribe el mismo desplazamiento en todo el borde. Por lo anterior, los desplazamientos de los nodos 1 y 2 quedan apoyados con el valor prescrito del borde y se tratan con el mismo método discutido para los apoyos puntuales. El resto del borde ve interpolado su desplazamiento a partir del de los nodos 1 y 2 y consecuentemente todo el borde presenta el valor prescrito si y solamente si no existe variable adicional que modifique dicho desplazamiento uniforme. Si el elemento no es extendido, efectivamente no existe modificación del desplazamiento y no se requiere más análisis. En el caso de los EX se analiza si existe interfase en el borde o no (condición $\Psi_1\Psi_2 < 0$). De no existir interfase, $g_i = 0$ en todo el borde y por lo tanto no existe modificación del desplazamiento y no se debe restringir ninguna de las seis variables adicionales. Por otro lado, si existe interfase, las incógnitas

adicionales de los nodos 1 y 2, asociados a la arista cargada, perturban el desplazamiento y por lo tanto deben prescribirse nulas. En este último caso se vuelven verdaderas las entradas de **GLR** correspondientes a la componente apoyada de ambas incógnitas adicionales. A pesar de restringir las dos variables adicionales anteriores, no se requiere tratamiento de $\mathbf{U}_c$ ya que se inicializó como nulo.

En el código desarrollado también se programaron apoyos inclinados deslizantes, puntuales y en bordes de elemento. El tratamiento de este tipo de apoyos es muy similar al de los anteriores dos pero se rotan las componentes de los grados de libertad tradicionales y extendidos de dichos nodos, rotando coherentemente las entradas de la matriz de rigidez y vector de fuerzas. En ninguno de los cuatro ejemplos habilitados en el GitHub se aplica este tipo de apoyo pero sí se dejó comentado sobre su aplicación en caso que un usuario desee hacer uso de dicha herramienta.

Resolución del sistema

Finalmente, una vez recorridas las cinco funciones que llama *xfem.m*, dicha función se encarga de reducir la matriz de rigidez y resolver el sistema de ecuaciones. Para plantear la solución del problema del XFEM, en primer lugar se tratan los valores prescritos de los grados de libertad. Para reducir el sistema de ecuaciones es conveniente que en el vector de incógnitas las variables restringidas tomen valores nulos, por lo cual se descompone el vector $\mathbf{U}$ como presenta la Ecuación (A.15). Se destaca que el vector $\mathbf{U}$ incorpora las variables adicionales del XFEM. Tras sustituir la Ecuación (A.15) en la Ecuación (3.28) se obtiene la Ecuación (A.16), en la cual el vector de incógnitas $\mathbf{U}$ toma valores nulos en los grados de libertad prescritos.

$$\mathbf{K} \begin{pmatrix} u_{x,1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_c \\ \vdots \\ a_{y,\mathcal{N}_\mathbf{X}} \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} u_{x,1} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ a_{y,\mathcal{N}_\mathbf{X}} \end{pmatrix} + \mathbf{K} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_c \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{U}_c = \mathbf{F}_{\text{mód}} \quad (\text{A.16})$$

Tras la modificación del vector de fuerzas por los grados de libertad pres-

critos resta reducir el sistema y resolverlo. Se considera la Ecuación (A.17), donde $\mathbf{GLR} = \mathbf{F}$ da a entender que solamente se consideran las entradas en las cuales $\mathbf{GLR}$ tome un valor falso. Para la resolución del sistema de ecuaciones, se utiliza la función $\mathbf{K} \setminus \mathbf{F}_{\text{mód}}$ de MATLAB[®], la cual utiliza métodos iterativos tipo gradiente conjugado para matrices dispersas. La anterior ecuación calcula los grados de libertad no restringidos del problema del XFEM. Finalmente, la Ecuación (A.18) recupera en $\mathbf{U}$ los valores de los grados de libertad prescritos. En la Ecuación (A.18), $\mathbf{GLR} = \mathbf{v}$ da a entender que solamente se consideran las entradas en las cuales $\mathbf{GLR}$ tome un valor verdadero. Finalmente, en caso de haber utilizado apoyos inclinados, *xfem.m* revierte la rotación de aquellos grados de libertad que fueron rotados. Tras este análisis, $\mathbf{U}$ presenta la solución discreta que mejor aproxima el campo de desplazamientos real para la formulación del XFEM.

$$\mathbf{U}(\mathbf{GLR} = \mathbf{F}) = (\mathbf{K}(\mathbf{GLR} = \mathbf{F}, \mathbf{GLR} = \mathbf{F}))^{-1} (\mathbf{F}_{\text{mód}}) (\mathbf{GLR} = \mathbf{F}) \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{GLR} = \mathbf{v}) = \mathbf{U}_c(\mathbf{GLR} = \mathbf{v}) \quad (\text{A.18})$$

Funcionales y DT

Para el cálculo de los funcionales del problema de optimización estructural con el LA y sus DT correspondientes, se desarrollaron varias funciones. A pesar de lo anterior, se destaca que algunos de los funcionales y DT se calculan, por su simpleza, en el mismo *Optimizacion.m*. Dichos funcionales y DT son la complacencia y la DT del área ocupada por la estructura. La DT del área ocupada se calcula directamente de la Ecuación (5.24). Por otra parte, la complacencia se calcula según se describe a continuación.

De la definición del vector de fuerzas $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_q)$ se obtiene que la complacencia está dada por la Ecuación (A.19), donde $\mathbf{U}_j$ es el vector global de grados de libertad, solución del XFEM para el EC j -ésimo.

$$W_j^e = \mathbf{U}_j^T \mathbf{F}_j \quad (\text{A.19})$$

En la implementación desarrollada, se decidió utilizar la fórmula de la Ecuación (A.20). Las Ecuaciones (A.19) y (A.20) son equivalentes gracias a la ecuación

ción fundamental del XFEM (Ver la Ecuación (3.28)). El motivo de utilizar la segunda opción es que permite generalizar el cálculo de la complacencia para el caso en el cual se prescriba algún desplazamiento no nulo.

$$W_j^e = \mathbf{U}_j^T \mathbf{K} \mathbf{U}_j \quad (\text{A.20})$$

VolumenXFEM.m

Una de las primeras funciones llamadas por *Optimizacion.m* es *VolumenXFEM.m*, la cual calcula el área ocupada por la estructura dada cierta función de nivel. Para lograr lo anterior se decidió utilizar la definición integral del área de la Ecuación (5.2). En base a la ecuación anterior se recorren todos los elementos calculando el aporte $|\Omega|^{(e)}$ de cada elemento al área ocupada. Luego el área ocupada por la estructura es la suma de todos los aportes de cada elemento.

Para calcular el aporte al área de los elementos, se decidió utilizar la transformación a coordenadas intrínsecas, puesto que, al ser elementos lineales, el determinante Jacobiano coincide con el doble del área del elemento. Por lo tanto, $|\Omega|^{(e)}$ es según se presenta en la Ecuación (A.21). En el caso de los EX se divide en las subregiones de integración de la Figura 3.18 para utilizar el determinante Jacobiano de la subregión. La definición de $\mathbb{1}_\Omega$ en el caso de los EX, necesaria para identificar qué subregiones suman a $|\Omega|^{(e)}$, se obtiene directamente de la función de nivel en los vértices de la subregión, las cuales se obtienen de interpolar los valores nodales con las funciones de interpolación tradicionales. Por construcción, los vértices de una misma subregión poseen valores de Ψ_n de idéntico signo, o nulos, por lo cual la definición de $\mathbb{1}_\Omega$ es trivial considerando, por ejemplo, la media de Ψ_n en la subregión.

$$|\Omega|^{(e)} = \begin{cases} \frac{|\mathbf{J}|}{2} & \text{si elemento es ER} \\ 0 & \text{si elemento es EB} \\ \frac{|\mathbf{J}|}{2} \sum_{m=1}^{m=4} |\mathbf{J}_m^{\text{SR}}| \mathbb{1}_\Omega & \text{si elemento es EX} \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

DerTop_Complacencia_XFEM.m

La función *DerTop_Complacencia_XFEM.m* se encarga de calcular el valor nodal de la DT de la complacencia para el EC j -ésimo. Para lo anterior se

crean dos vectores **SumVP** y **EleCounter** de igual longitud que la cantidad de nodos de la malla de elementos finitos. El vector **SumVP** acumula el numerador de la Ecuación (5.42) y el vector **EleCounter** acumula el denominador de dicha ecuación. Ambos vectores se inicializan como nulos, y luego se recorren todos los elementos, calculando e incorporando a ambos vectores el aporte de cada elemento. En el caso de **EleCounter**, en cada elemento simplemente se suman, en las entradas correspondientes a los nodos del elemento, el término $\frac{1}{6}\mathbf{J}$, donde $\frac{1}{6}$ surge de los valores de las tres funciones en el punto de cuadratura de Gauss de la combinación de un único punto ($N_n(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$) multiplicados por el peso de dicho punto ($\frac{1}{2}$). Para **SumVP** el tratamiento es algo más complejo y se discute a continuación.

Para el cálculo del aporte de un elemento a **SumVP** se calcula la integral del numerador de la Ecuación (5.42) para los tres nodos del elemento. Para calcular dicha integral nuevamente se utiliza el método de transformación a coordenadas intrínsecas e integración por cuadratura de Gauss y, en el caso de los EX, integración por subregiones. Vale la pena notar que en el caso de los ER y EB el integrando es cuadrático. Lo anterior se basa en que las tensiones y deformaciones son uniformes y los desplazamientos son lineales y por ende el término $\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{u}_j$ lo es. Luego $D_T W_j^e$ es lineal y al multiplicarla por N_n pasa a ser cuadrático el integrando. En base a un análisis similar, los EX poseen un integrando cúbico, pues tanto $\mathbb{P}_\gamma \boldsymbol{\sigma}_j : \boldsymbol{\varepsilon}_j$ como $\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{u}_j$ son cuadráticos. Dados los grados de los integrandos se emplean tres puntos de cuadratura de Gauss por elemento en el caso de los ER y EB y cuatro puntos de cuadratura de Gauss por subregión en el caso de los EX.

Para el cálculo del integrando en los puntos de cuadratura de Gauss, es en particular necesario calcular el vector desplazamiento y las componentes de los tensores de deformaciones y tensiones. El vector desplazamiento no requiere demasiado análisis ya que surge directamente de la interpolación del XFEM. Por otra parte, para el cálculo de las tensiones y deformaciones en los ER y EB se emplean las Ecuaciones (3.8) y (3.10), en las cuales $\mathbf{C}$ depende de qué tipo de elemento es y $\mathbf{B}^{(e)}$ se calcula según se discutió para la función *MatrizXFEM.m*. Por otra parte, en las subregiones de los EX se emplean las mismas ecuaciones, pero utilizando $\mathbf{B}_\mathbf{x}^{(e)}$ y $\mathbf{U}_\mathbf{x}^{(e)}$. El cálculo de $\mathbf{B}_\mathbf{x}^{(e)}$ nuevamente es según se discutió para la función *MatrizXFEM.m* y $\mathbf{C}$ se define según el signo de la media de Ψ_n de los vértices de la subregión. Finalmente, el cálculo de $N_n D_T W_j^e$ en los puntos de cuadratura de Gauss se hace directamente aplicando la Ecuación (5.26) con

los desplazamientos, deformaciones y tensiones anteriormente calculados.

Una vez recorridos todos los elementos y contruidos los vectores **SumVP** y **EleCounter**, el valor nodal de $D_T W_j^e$ se calcula como la división, entrada a entrada, de **SumVP** entre **EleCounter**.

Funcional_Tension.m

Para el cálculo del funcional de penalización de tensiones elevadas se desarrolló la función *Funcional_Tension.m*. Se hace notar que, en la implementación de esta tesis, se consideró que el dominio D_S es definido en los elementos de la malla de elementos finitos. Lo anterior implica que todo elemento se encuentra completamente incluido en D_S o tiene intersección nula con D_S , no existiendo elementos de transición. Luego, para el cálculo del funcional, se utiliza el mismo procedimiento del cálculo del área, recorriendo todos los elementos de la malla y calculando el aporte al funcional $\mathcal{S}_j^{(e)}$ de cada uno. Al recorrer todos los elementos, en primer lugar se chequea si el elemento está incluido en D_S y en caso contrario se considera que su aporte es nulo sin la necesidad de hacer más cuentas. Por otra parte, por definición, los EB también tienen aporte $\mathcal{S}_j^{(e)}$ nulo. De idéntica manera, en el cálculo del aporte de los EX, el aporte de las subregiones ocupadas por el material blando, las cuales se identifican de manera análoga a cómo se identifican las subregiones del material estructural en el cálculo del área, es también nulo.

Para el cálculo de $\mathcal{S}_j^{(e)}$, nuevamente se emplea el método de transformación a coordenadas intrínsecas e integración por cuadratura de Gauss presentados en la Sección 3.1.2. Además, en el caso de los EX se considera la integración por las cuatro subregiones triangulares. Para el cálculo del integrando en los puntos de cuadratura de Gauss se calcula en primer lugar las componentes del tensor de tensiones según se describió para la función *DerTop.Complacencia-XFEM.m*. Luego se calcula la tensión de von Mises según la Ecuación (5.9) y con ello el integrando del funcional de tensiones según la Ecuación (5.10). En el caso de los ER, para el cálculo de la integral se emplea la combinación de un único punto de Gauss presentada en la Tabla 3.1, puesto que las tensiones son uniformes en el elemento y por lo tanto también lo es Φ . Por otro lado, en el caso de las subregiones de los EX, se decidió utilizar la combinación de tres puntos de Gauss presentada en la Tabla 3.1. Lo anterior es una aproximación basada en que el integrando es aproximadamente cuadrático debido a que $\Phi(s)$ es

aproximadamente lineal por partes en s y σ_{VM}^2 es aproximadamente cuadrático en la subregión pues las componentes del tensor de tensiones son lineales. Si bien podría haberse empleado una técnica más exacta para el cálculo del aporte de los EX, por ejemplo buscando identificar qué partes de la subregión superan la tensión límite e integrar en ellas, la opción que se implementó ha demostrado ser lo suficientemente precisa y robusta y además bastante eficiente.

DerTop_Tensiones_XFEM.m

Finalmente, *DerTop_Tensiones_XFEM.m* se encarga de calcular el valor nodal de la DT del funcional de penalización de tensiones para el EC j -ésimo. De forma análoga a la función *DerTop_Complacencia_XFEM.m*, se crean los vectores **SumVP** y **EleCounter**. El tratamiento de ambos vectores, y el cálculo final de la DT nodal en función de ellos dos, es prácticamente idéntico al de *DerTop_Complacencia_XFEM.m*, salvo el cálculo del aporte por elemento a **SumVP**. Dicho aporte es el que se discute a continuación.

En primer lugar, antes de comenzar a recorrer todos los elementos, se resuelve el problema adjunto para el EC j -ésimo para obtener $\mathfrak{U}_j$. Dicha resolución se hace llamando a la función **ProbAdjTension.m**, la cual se describe más adelante. Luego se cargan las dos tablas solución de la integral sin solución analítica: la asociada a $x_0 \in \Omega$ y la asociada a $x_0 \notin \Omega$, para las propiedades materiales del problema en cuestión. Dichas tablas, las cuales se guardaron en los archivos ***.mat** dentro de la carpeta **Derivadas/IntegralInsol** del GitHub, son varias matrices 1001×501 con los valores numéricos de Ξ para estado plano de tensiones con coeficientes de Poisson entre 0 y 1 con paso de 0,01 y para $\gamma \in \{10^{-3}; 10^3\}$. Los números de fila de las anteriores matrices indican el valor de $\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{\sigma_{VM}}$ entre -5 y 5 con paso de 0,01 y los números de columna indican el valor de $\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{\sigma_{VM}}$ entre 0 y 5 con igual paso. El motivo de que los coeficientes de Poisson alcancen valores hasta de 1, surge para extender las matrices para estado plano de deformaciones, en los cuales se escoge un coeficiente de Poisson corregido $\bar{\nu}$ dado por la Ecuación (A.22). Si bien solamente se crearon matrices para $\gamma \in \{10^{-3}; 10^3\}$, y con los límites en tensiones principales anteriormente discutidos, nada impide que futuros usuarios del código puedan extenderlas.

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (\text{A.22})$$

Para definir la cantidad de puntos de cuadratura de Gauss por elemento o

subregión, se siguió un procedimiento similar a los considerados en las funciones *DerTop_Complacencia_XFEM.m* y *Funcional_Tension.m*. Se consideró que $\Phi(s)$ es aproximadamente lineal en s , $\Phi'(s)$ es aproximadamente constante en s , $\mathbf{v}$ posee igual regularidad que $\mathbf{u}$ por ser ambos resueltos con el XFEM y Ξ es aproximadamente cuadrático en σ . Con esas hipótesis en cuenta, $N_n D_T \mathcal{S}_j$ es aproximadamente lineal en los ER y EB, y por lo tanto se decidió utilizar un único punto de cuadratura, mientras que en los EX es aproximadamente cúbico, por lo que se decidió utilizar cuatro puntos de cuadratura.

Luego, en cada uno de los puntos de cuadratura de Gauss, la función calcula las deformaciones, tensiones y el valor de la solución del problema adjunto y su gradiente simétrico con el mismo método discutido para la DT de la complacencia, lo cual se basa en que la solución del problema adjunto fue resuelta con el XFEM. Luego, se calcula el signo de la función de nivel y con ella se seleccionan las propiedades materiales $(\lambda, \mu, \alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{b}_j$, γ , la tabla solución de Ξ correcta y $\mathbb{1}_\Omega$. Finalmente, con todos los datos anteriores y $\mathbb{1}_{D_S}$, se llama a la función *AuxDTT.m* para calcular $D_T \mathcal{S}_j$ del punto de cuadratura. Finalmente, se multiplica $D_T \mathcal{S}_j$ por N_n y se suma el aporte de dicho punto a SumVP.

AuxDTT.m

AuxDTT.m es la función desarrollada que se encarga de calcular la DT del funcional de tensiones. Esta función, la cual es llamada por *DerTop_Tensiones_XFEM.m*, recibe todo lo necesario de la función madre y simplemente ejecuta la Ecuación (5.30). En primer lugar, la función calcula expresiones matriciales para los tensores de las Ecuaciones (5.31) a (5.34) a partir de las expresiones matriciales de $\mathbb{I}$ y $\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ de las Ecuaciones (A.23) y (A.24). Luego la función calcula la suma y resta de las tensiones principales e interpola en la tabla solución de Ξ para obtener su valor. Finalmente, dadas las expresiones matriciales anteriormente calculadas, el valor de Φ y todo lo demás provisto por la función madre, la función calcula la DT del funcional de tensiones en el punto de cuadratura de Gauss.

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

ProbAdjTension.m

La última función desarrollada, asociada al cálculo de funcionales y sus DT, es *ProbAdjTension.m*. Esta función resuelve, en base al XFEM y la Ecuación (5.37), el problema adjunto de la DT del funcional de tensiones. La estructura de la función es muy similar a la estructura de *xfem.m* con los detalles que se discuten a continuación.

La función *ProbAdjTension.m* no requiere llamar a la función *interfase.m*, debido a que la clasificación de elementos y la definición de aristas extendidas y sus funciones de interpolación extendidas no variaron respecto a la resolución del problema plano de elasticidad lineal. La función tampoco requiere llamar a *matrizXFEM.m* ya que la matriz de rigidez de la Ecuación (5.37) tampoco varió.

Para generar el equivalente al vector de fuerzas, la función en primer lugar ensambla la matriz $\mathcal{K}_j$. El procedimiento para ensamblar dicha matriz es completamente análogo al discutido en la función *matrizXFEM.m* para ensamblar $\mathbf{K}$. Las únicas diferencias son la aparición del tensor $\mathbb{B}$ y la función k_j^σ . Dado que $\mathbb{B}$ es uniforme en cada elemento o subregión y k_j^σ es cuasi constante, se decidió mantener la misma cantidad de puntos de cuadratura utilizadas en el ensamblado de $\mathbf{K}$. Luego, en cada punto de cuadratura, se calculan las tensiones asociadas a la solución $\mathbf{u}_j$, y con ellas k_j^σ y finalmente la matriz $\mathcal{K}_j^{(e)}$. El ensamblado de la matriz global es nuevamente en base al Pseudocódigo 3.

Creada la matriz $\mathcal{K}_j$, el vector de fuerzas equivalente se calcula según la Ecuación (A.25). A continuación, dado que $\mathfrak{U}_j \in \mathcal{V}^h$, los apoyos se tratan igual que en *DirichletXFEM.m*, salvo que todas las entradas de $\mathbf{U}_c$ se mantienen nulas.

$$\mathbf{F} = -\mathcal{K}_j \mathbf{U}_j \quad (\text{A.25})$$

Finalmente, la resolución del sistema es análoga a la discutida para el problema de elasticidad lineal.

Otros códigos

Finalmente, otros códigos incluidos para el método de optimización estructural son *Masa_Mat.m*, donde se calcula la matriz de masa para los productos internos entre funciones de nivel, y *smoothn.m* para el suavizado de la función de nivel en mallas regulares. El código *smoothn.m* no es propio sino que acompaña el artículo de Garcia (2010). Por lo anterior, a continuación solamente se describe *Masa_Mat.m*.

Masa_Mat.m

Masa_Mat.m es la función desarrollada para la creación de la matriz de masa de la Ecuación (5.13), la cual se empleó para los productos internos entre funciones de nivel. De forma análoga a la matriz de rigidez, la matriz de masa es una matriz que tiene una gran proporción de entradas nulas. Por el anterior motivo, nuevamente se decidió implementarla como una matriz dispersa y el procedimiento de creación es análogo al del Pseudocódigo 3. Las únicas diferencias con dicho pseudocódigo es que el tamaño de la matriz en este caso es $\mathcal{N}_{no} \times \mathcal{N}_{no}$, la matriz elemental que se calcula es $\mathbb{M}^{(e)}$ y en vez de los números de grados de libertad, los números de fila y columna coinciden con los números de los nodos de los elementos de la malla de elementos finitos. Resta entonces presentar el cálculo de la matriz de masa elemental como se describe a continuación.

Como la matriz de masa solamente se construye con las funciones de interpolación tradicionales, no presenta ninguna diferencia entre los ER, EB o los EX. Luego, el método elegido para hacer la integral de la Ecuación (5.13) es el de transformación a coordenadas intrínsecas e integración por cuadratura de Gauss como se discutió en la Sección 3.1.2. Por lo tanto, el cálculo de la matriz de masa elemental queda dado por la Ecuación (A.26), válida para los tres tipos de elementos. Como en este caso el integrando es una función polinómica de segundo grado, se consideró la combinación de tres puntos de Gauss según se presentó en la Tabla 3.1.

$$\mathbb{M}^{(e)} = \int_{\Omega_{\xi,\eta}^{(e)}} |\mathbf{J}| \mathbf{N}^{(e)\text{T}} \mathbf{N}^{(e)} d\xi d\eta \quad (\text{A.26})$$

Consejos finales

Finalmente, el autor de esta tesis recomienda a usuarios del método de optimización estructural desarrollado que recuerden que es muy sensible a los parámetros. Cuando se plantea un nuevo problema de optimización estructural se aconseja comenzar con resultados sin chequeo de tensiones ni suavizado para lograr una primera estimación del coeficiente de penalidad cuadrática del LA. Luego, se recomienda hacer un estudio de tensiones sin suavizado y un estudio de la magnitud de suavizado requerido sin chequeo de tensiones. Finalmente, una vez definidos unos primeros parámetros del modelo de optimización se recomienda proceder a variar los parámetros dentro de un rango razonable para obtener el resultado buscado. En caso de ser posible, se recomienda realizar numerosos experimentos numéricos para calibrar en cada caso la combinación óptima de parámetros.

Anexo B

Fórmulas de la elasticidad en coordenadas polares

Las expresiones en coordenadas cartesianas para el problema de elasticidad plana, presentadas en el Capítulo 2, son las que se utilizaron para implementar el método de optimización estructural. Lo anterior es debido a su simpleza de implementación y operativa. La gran dificultad que presentan las expresiones en coordenadas cartesianas es que la capacidad de obtener de soluciones analíticas es en general reducida. Para el cálculo de soluciones analíticas en este documento se hizo uso de expresiones en coordenadas polares. En primer lugar, el campo de desplazamientos en coordenadas polares es según se muestra en la Ecuación (B.1), donde u_r es la componente según la coordenada radial, u_θ es la componente según la coordenada angular y $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ son vectores de norma unitaria en el sentido de las coordenadas radial y angular, respectivamente.

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (\text{B.1})$$

A continuación, se presenta la expresión del tensor de deformaciones en la base polar en la Ecuación (B.2), donde ε_{rr} es la deformación según la coordenada radial, $\varepsilon_{\theta\theta}$ es la deformación según la coordenada angular y $\varepsilon_{r\theta}$ es la mitad de distorsión angular para las coordenadas r y θ . El cálculo del tensor en función de los desplazamientos es la misma que en coordenadas cartesianas y dada por la Ecuación (2.2). Por otra parte, el tensor de tensiones en la base polar se presenta en la Ecuación (B.3), donde σ_{rr} es la componente normal de la tensión para planos normales a la coordenada radial, $\sigma_{\theta\theta}$ es la componen-

te normal de la tensión para planos normales a la coordenada angular y $\sigma_{r\theta}$ es la tensión rasante según la coordenada angular para planos normales a la coordenada radial.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Como se presenta en la sección 7.6 del libro de Sadd (2009), las componentes del tensor de tensiones en coordenadas polares también se pueden expresar en función de la función de tensiones de Airy (ϕ) como presenta la Ecuación (B.4).

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{1}{r} \partial_r \phi + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 \phi \\ \sigma_{\theta\theta} = \partial_{rr}^2 \phi \\ \sigma_{r\theta} = -\partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_{\theta} \phi \right) \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

El número complejo genérico z , considerado en la expresión de los potenciales complejos de Kolosov-Mushkelishvili, admite la expresión que se presenta en la Ecuación (B.5), denominada notación polar.

$$z = r (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = r e^{i\theta} \quad (\text{B.5})$$

Las notaciones aquí presentadas en coordenadas polares son las que se consideraron en los cálculos analíticos del Anexo D y del Anexo E.

Anexo C

Cálculo de las derivadas topológicas

En este anexo se presenta el cálculo de las expresiones presentadas en la Sección 5.3 para las DT de los distintos funcionales. En primer lugar se presenta la DT del área de Ω , luego la de la complacencia para un EC particular y finalmente la del funcional de tensiones, también para un EC particular. El propósito de este anexo es justificar las modificaciones realizadas en el cálculo de la DT del funcional de tensiones así como dar un marco con menor rigurosidad matemática para el cálculo de dichas derivadas para futuros investigadores de la ingeniería estructural.

Derivada topológica del área

Esta derivada es la más sencilla de las presentadas y se obtiene directamente de la definición de la DT presentada en la Ecuación (3.62) y la expresión para la función regularizadora presentada en la Ecuación (5.23). Por lo discutido en la Sección 5.3, x_0 es siempre interior o exterior a la estructura, es decir $x_0 \notin \partial\Omega$, entonces $\exists \epsilon$ suficientemente pequeño tal que se cumpla la Ecuación (C.1).

$$\begin{cases} B_{x_0, \epsilon} \subset \Omega & \text{si } x_0 \in \Omega \\ B_{x_0, \epsilon} \cap \Omega = \emptyset & \text{si } x_0 \notin \Omega \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

La modificación del área de la estructura asociada a la perturbación no es más que quitar (o agregar) el área de un círculo de radio ϵ como presenta la Ecuación (C.2). Finalmente, a partir de la definición de la DT, se obtiene la

Ecuación (C.3) para un punto interior a la estructura y la Ecuación (C.4) para un punto exterior a la estructura. Los anteriores resultados son exactamente los presentados en la Ecuación (5.24).

$$|\Omega_\epsilon| = \begin{cases} |\Omega| - \pi\epsilon^2 & \text{si } x_0 \in \Omega \\ |\Omega| + \pi\epsilon^2 & \text{si } x_0 \notin \Omega \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

$$D_T|\Omega| = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{|\Omega_\epsilon| - |\Omega|}{f(\epsilon)} = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{|\Omega| - \pi\epsilon^2 - |\Omega|}{\pi\epsilon^2} = -1 \quad (\text{C.3})$$

$$D_T|\Omega| = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{|\Omega_\epsilon| - |\Omega|}{f(\epsilon)} = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{|\Omega| + \pi\epsilon^2 - |\Omega|}{\pi\epsilon^2} = 1 \quad (\text{C.4})$$

Derivada topológica de la complacencia

Introducción e hipótesis básicas

Se presenta ahora el cálculo de la DT de la complacencia para cierto EC. El procedimiento realizado se basó en el artículo de Giusti et al. (2008) con la diferencia de que en esta tesis se calculó la derivada de la complacencia y en dicho artículo se calculó la derivada de la energía potencial total. La otra gran diferencia es que la referencia no incluyó fuerzas de volumen, como sí se hace aquí. Una última diferencia es que los cálculos se hicieron a partir de los parámetros de Lamé y en la referencia se utilizaron el módulo de Young y el coeficiente de Poisson.

Para el cálculo de la derivada se consideró el problema plano de elasticidad lineal de dos materiales, presentado en la Sección 2.2, y se estudió en simultáneo el estado plano de deformaciones y el estado plano de tensiones al utilizar los parámetros de Lamé. Las diferencias en las propiedades materiales de los dos materiales se consideraron de forma implícita, considerando que λ y μ son los asociados al material previo a la perturbación topológica y las propiedades del material de la perturbación surgen de multiplicar dichos parámetros por γ , según se discutió en la Ecuación (5.25).

No se consideraron los casos de apoyos elásticos y apoyos deslizantes ni los casos en que el desplazamiento impuesto es no nulo. El resultado que se hubiera obtenido de haber considerado este tipo de apoyos es potencialmente el mismo, puesto que, a nivel de elementos finitos, la energía potencial total

siempre coincide con $-1/2$ veces la complacencia y la deducción hecha por Lopes et al. (2015) considera apoyos con desplazamiento no nulo. De todas formas, ya que no se consideraron dichos casos particulares de apoyos en los ejemplos del Capítulo 6, no ameritó su estudio ni el asociado aumento en la complejidad de la operativa.

Para hacer el cálculo se utilizó el método de sensibilidad topológica basado en variación de forma explicado en la Sección 3.2. En este caso la DT se calcula según se muestra en la Ecuación (C.5), donde $W^e(\Omega_\tau)$ es la complacencia en el dominio perturbado topológicamente y posteriormente con variación de forma.

$$D_T W^e(x_0) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{d}{d\tau} W^e(\Omega_\tau) \Big|_{\tau=0} \quad (C.5)$$

Para simplificar el cálculo de la derivada topológica de la complacencia se hace uso de la definición del trabajo de las fuerzas internas dado por la Ecuación (C.6). Se destaca que el doble del trabajo de las fuerzas internas coincide con el trabajo de las fuerzas externas para una estructura en equilibrio como demuestra la Ecuación (C.7). La segunda igualdad de esta última ecuación se basa en la simetría de $\boldsymbol{\sigma}$, la tercera en propiedades del cálculo diferencial, la cuarta en la ecuación de equilibrio, la simetría del tensor de tensiones y el teorema de Gauss y la penúltima en las condiciones de borde del problema plano de elasticidad lineal.

$$W^i = \frac{1}{2} \int_D \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \quad (C.6)$$

$$\begin{aligned} 2W^i &= \int_D \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \mathbf{u} \, d\Omega = \int_D \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} \, d\Omega = \\ &= \int_D (\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u}) \, d\Omega = \int_D \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \\ &= \int_D \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma_N = W^e \end{aligned} \quad (C.7)$$

Se suma y resta la complacencia en el dominio perturbado topológicamente y con posterior variación de forma. Luego, empleando la Ecuación (C.7), se obtiene la Ecuación (C.8). El anterior resultado es de utilidad para cancelar algunos términos cuando se hace el cálculo de la derivada de forma que se

presenta más adelante. Se sustituye el resultado en la derivada de forma para obtener la Ecuación (C.9).

$$W^e(\Omega_\tau) = 2W^e(\Omega_\tau) - W^e(\Omega_\tau) = 2W^e(\Omega_\tau) - 2W^i(\Omega_\tau) \quad (\text{C.8})$$

$$\left. \frac{d}{d\tau} W^e(\Omega_\tau) \right|_{\tau=0} = \left. \frac{d}{d\tau} (2W^e(\Omega_\tau) - 2W^i(\Omega_\tau)) \right|_{\tau=0} \quad (\text{C.9})$$

Derivada de forma

El funcional para el cual se calcula la derivada de forma está dado por la Ecuación (C.10), donde $\mathbf{u}_\tau$ es el campo de desplazamientos solución del problema plano de elasticidad lineal para el problema con variación de forma, $\mathbf{b}_\gamma$ está dado por la Ecuación (C.11) y $\boldsymbol{\varepsilon}_\tau(\mathbf{u}_\tau)$ y $\boldsymbol{\sigma}_\tau(\mathbf{u}_\tau)$ están dados por las Ecuaciones (C.12) y (C.13), respectivamente. Además, las coordenadas y operadores diferenciales sin subíndice son en la configuración material y con subíndice τ son en la configuración espacial. $\mathbb{C}_\gamma$ está dado por la Ecuación (C.14), donde $\mathbb{C}$ fue presentado en la Ecuación (2.5).

$$\begin{aligned} 2W^e(\Omega_\tau) - 2W^i(\Omega_\tau) = & 2 \int_{\Gamma_N} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_\tau \, d\Gamma_N + 2 \int_D \mathbf{b}_\gamma \cdot \mathbf{u}_\tau \, d\Omega_\tau \\ & - \int_D \boldsymbol{\sigma}_\tau(\mathbf{u}_\tau) : \boldsymbol{\varepsilon}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \, d\Omega_\tau \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{b}_\gamma = \begin{cases} \mathbf{b} & \text{si } x \notin B_{x_0, \epsilon} \\ \gamma \mathbf{b} & \text{si } x \in B_{x_0, \epsilon} \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\tau = \nabla_\tau^s \mathbf{u}_\tau \quad (\text{C.12})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbb{C}_\gamma \nabla_\tau^s \mathbf{u}_\tau \quad (\text{C.13})$$

$$\mathbb{C}_\gamma = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } x \notin B_{x_0, \epsilon} \\ \gamma \mathbb{C} & \text{si } x \in B_{x_0, \epsilon} \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

Al aplicar el teorema de Reynolds presentado en la Ecuación (3.84) a las Ecuaciones (C.9) y (C.10), se obtiene la Ecuación (C.15), donde $\mathbf{u}_\epsilon$ es el campo de desplazamientos solución del problema plano de elasticidad lineal para el

problema con perturbación topológica y $\dot{\mathbf{u}}_\epsilon$ está dado por la Ecuación (C.16). Nótese que se utilizó el resultado de la Ecuación (C.17) y que Γ_N no depende de τ . El tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_\epsilon$ está dado por la Ecuación (C.18), lo que implica que son las tensiones en el problema con perturbación topológica.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\tau} W^e(\Omega_\tau) \right|_{\tau=0} = & 2 \int_{\Gamma_N} \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{u}}_\epsilon d\Gamma_N + 2 \int_D \mathbf{b}_\gamma \cdot (\dot{\mathbf{u}}_\epsilon + \mathbf{u}_\epsilon \nabla \cdot \mathbf{v}) d\Omega_\epsilon \\ & - \int_D \frac{d}{d\tau} (\boldsymbol{\sigma}_\tau(\mathbf{u}_\tau) : \boldsymbol{\varepsilon}_\tau(\mathbf{u}_\tau)) \Big|_{\tau=0} d\Omega_\epsilon \\ & - \int_D \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega_\epsilon \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

$$\dot{\mathbf{u}}_\epsilon = \left. \frac{d}{d\tau} \mathbf{u}_\tau \right|_{\tau=0} \quad (\text{C.16})$$

$$\int_{\Omega_\tau} \partial_\tau \phi d\Omega_\tau + \int_{\partial\Omega_\tau} \phi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\partial\Omega_\tau = \int_{\Omega_\tau} \frac{d}{d\tau} \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega_\tau \quad (\text{C.17})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) = \mathbb{C}_\gamma \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon = \mathbb{C}_\gamma \nabla^s \mathbf{u}_\epsilon \quad (\text{C.18})$$

A partir de las derivadas materiales de campos espaciales, según se describen en el libro de Gurtin (1981), se tiene el resultado de la Ecuación (C.19). Se sustituye dicho resultado en la Ecuación (C.15) y se obtiene la Ecuación (C.20). La expresión actual para la derivada de forma de la complacencia es algo compleja pero a continuación se realiza una observación sobre $\mathbf{u}_\epsilon$ que permite simplificar dicha expresión.

$$\left. \frac{d}{d\tau} (\boldsymbol{\sigma}_\tau(\mathbf{u}_\tau) : \boldsymbol{\varepsilon}_\tau(\mathbf{u}_\tau)) \right|_{\tau=0} = 2(\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\dot{\mathbf{u}}_\epsilon) - \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : (\nabla \mathbf{u}_\epsilon \nabla \mathbf{v})^s) \quad (\text{C.19})$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\tau} W^e(\Omega_\tau) \right|_{\tau=0} = & 2 \int_{\Gamma_N} \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{u}}_\epsilon d\Gamma_N + 2 \int_D \mathbf{b}_\gamma \cdot \dot{\mathbf{u}}_\epsilon d\Omega_\epsilon \\ & - 2 \int_D \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\dot{\mathbf{u}}_\epsilon) d\Omega_\epsilon \\ & + \int_D (2\mathbf{b}_\gamma \cdot \mathbf{u}_\epsilon - \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega_\epsilon \\ & + \int_D 2\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : (\nabla \mathbf{u}_\epsilon \nabla \mathbf{v})^s d\Omega_\epsilon \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Como $\mathbf{u}_\epsilon$ es solución del problema plano de elasticidad lineal, para el problema con perturbación topológica, verifica la Ecuación (C.21), según se discutió en la Sección 2.1. Como Γ_D no depende del parámetro τ se tiene además que $\dot{\mathbf{u}}_\epsilon \in \mathcal{V}(\Omega_\epsilon)$, lo que implica que la Ecuación (C.21) verifica particularmente para $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}_\epsilon$. El anterior resultado permite afirmar que las primeras tres integrales de la Ecuación (C.20) se anulan entre sí, lo que genera el resultado de la Ecuación (C.22).

$$\int_D \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\epsilon(\mathbf{v}) \, d\Omega_\epsilon = \int_{\Gamma_N} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_N + \int_D \mathbf{b}_\gamma \cdot \mathbf{v} \, d\Omega_\epsilon \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega_\epsilon) \quad (\text{C.21})$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\tau} W^e(\Omega_\tau) \right|_{\tau=0} &= \int_D (2\mathbf{b}_\gamma \cdot \mathbf{u}_\epsilon - \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega_\epsilon \\ &\quad + \int_D 2\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : (\nabla \mathbf{u}_\epsilon \nabla \mathbf{v})^s \, d\Omega_\epsilon \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Se utilizan los resultados de las Ecuaciones (C.23) y (C.24) para obtener el resultado presentado en la Ecuación (C.25). El tensor Σ_ϵ , dado en este caso por la Ecuación (C.26), se suele denominar en la bibliografía como el tensor de energía-momentum de Eshelby (Eshelby, 1975). Este tensor está asociado a las fuerzas de configuración que se deben generar para mudar de forma un cuerpo (Gurtin, 2000).

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{I} : \nabla \mathbf{v} \quad (\text{C.23})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : (\nabla \mathbf{u}_\epsilon \nabla \mathbf{v})^s = (\nabla \mathbf{u}_\epsilon)^T \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \nabla \mathbf{v} \quad (\text{C.24})$$

$$\left. \frac{d}{d\tau} W^e(\Omega_\tau) \right|_{\tau=0} = \int_D \Sigma_\epsilon : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega_\epsilon \quad (\text{C.25})$$

$$\Sigma_\epsilon = (2\mathbf{b}_\gamma \cdot \mathbf{u}_\epsilon - \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) \mathbf{I} + 2(\nabla \mathbf{u}_\epsilon)^T \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) \quad (\text{C.26})$$

Se hace uso de la Ecuación (C.27) y el teorema de la divergencia de Gauss para obtener la Ecuación (C.28), donde $\llbracket \cdot \rrbracket$ es la función de salto, según se definió en la Ecuación (2.20), y $\mathbf{n}$ es entrante a $B_{x_0, \epsilon}$. Luego, como $\mathbf{v} = 0$ en $\partial\Omega \cup \partial D$ por definición, se tiene la Ecuación (C.29).

$$\nabla \cdot (\Sigma_\epsilon^T \mathbf{v}) = \Sigma_\epsilon : \nabla \mathbf{v} + (\nabla \cdot \Sigma_\epsilon) \cdot \mathbf{v} \quad (\text{C.27})$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\tau} W^e(\Omega_\tau) \right|_{\tau=0} = & - \int_D (\nabla \cdot \Sigma_\epsilon) : \mathbf{v} \, d\Omega_\epsilon + \int_{\partial\Omega \cup \partial D} \Sigma_\epsilon \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega \\ & + \int_{\partial B_{x_0, \epsilon}} \llbracket \Sigma_\epsilon \mathbf{v} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \, d\partial B_{x_0, \epsilon} \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\tau} W^e(\Omega_\tau) \right|_{\tau=0} = & - \int_D (\nabla \cdot \Sigma_\epsilon) : \mathbf{v} \, d\Omega_\epsilon \\ & + \int_{\partial B_{x_0, \epsilon}} \llbracket \Sigma_\epsilon \mathbf{v} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \, d\partial B_{x_0, \epsilon} \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Divergencia del tensor de Eshelby

En primer lugar se analiza la divergencia del tensor de energía-momentum de Eshelby según presenta la Ecuación (C.30), donde se utilizó la simetría del tensor de tensiones. Se desarrolla la divergencia y se obtiene la Ecuación (C.31), donde el operador diferencial $\mathbb{D}(\mathbf{A}; \mathbf{B})$ se define en la Ecuación (C.32) con $\mathbf{B}_{:,j}$ la columna j -ésima del tensor $\mathbf{B}$ expresado en la base cartesiana.

$$\nabla \cdot \Sigma_\epsilon = \nabla \cdot ((2\mathbf{b}_\gamma \cdot \mathbf{u}_\epsilon - \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon))\mathbf{I} + 2(\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) \nabla \mathbf{u}_\epsilon)^T) \quad (\text{C.30})$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \Sigma_\epsilon = & (2\mathbf{b}_\gamma \cdot \mathbf{u}_\epsilon - \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon))(\nabla \cdot \mathbf{I}) + 2\mathbf{I} \nabla(\mathbf{b}_\gamma \cdot \mathbf{u}_\epsilon) \\ & - \mathbf{I} \nabla(\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) + 2\mathbb{D}(\nabla \mathbf{u}_\epsilon^T; \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) \\ & + 2(\nabla \mathbf{u}_\epsilon)^T \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

$$\mathbb{D}(\mathbf{A}; \mathbf{B}) := (\partial_x \mathbf{A}) \mathbf{B}_{:,1} + (\partial_y \mathbf{A}) \mathbf{B}_{:,2} \quad (\text{C.32})$$

A continuación, se utiliza el hecho que la divergencia del tensor identidad es nula y la Ecuación (2.9) y se obtiene la Ecuación (C.33). Se utiliza la hipótesis de que $\mathbf{b}_\gamma$ es uniforme en cada material ($\nabla \mathbf{b}_\gamma = 0$) y se obtiene la Ecuación (C.34).

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \Sigma_\epsilon = & 2\nabla(\mathbf{b}_\gamma)^T \mathbf{u}_\epsilon + 2\nabla(\mathbf{u}_\epsilon)^T \mathbf{b}_\gamma - \nabla(\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) \\ & + 2\mathbb{D}(\nabla \mathbf{u}_\epsilon^T; \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) - 2(\nabla \mathbf{u}_\epsilon)^T \mathbf{b}_\gamma\end{aligned}\quad (\text{C.33})$$

$$\nabla \cdot \Sigma_\epsilon = -\nabla(\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) + 2\mathbb{D}(\nabla \mathbf{u}_\epsilon^T; \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) \quad (\text{C.34})$$

Se desarrolla el primer término de la Ecuación (C.34) en coordenadas cartesianas y se obtiene la Ecuación (C.35). Luego se utiliza la Ecuación (2.4), la hipótesis que las propiedades materiales son uniformes en cada material, la simetría del tensor elástico y la reciprocidad del producto escalar para reales para obtener el resultado de la Ecuación (C.36). Con el resultado de la Ecuación (C.36), el cual es aplicable para las derivadas parciales según y , se obtiene la Ecuación (C.37).

$$\nabla(\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) = \begin{pmatrix} (\partial_x \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) + \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : (\partial_x \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) \\ (\partial_y \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) + \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : (\partial_y \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) \end{pmatrix} \quad (\text{C.35})$$

$$\begin{aligned}(\partial_x \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) &= (\partial_x \mathbb{C}_\gamma \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) = \mathbb{C}_\gamma(\partial_x \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) \\ &= (\partial_x \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) : \mathbb{C}_\gamma \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) = \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : (\partial_x \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon))\end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

$$\nabla(\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) = 2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : (\partial_x \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) \\ \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : (\partial_y \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) \end{pmatrix} \quad (\text{C.37})$$

Se procede a analizar el resultado de la Ecuación (C.37) desarrollando las operaciones y utilizando la Ecuación (2.2) y se obtiene la Ecuación (C.38). El resultado anterior se reordena según se presenta en la Ecuación (C.39), la cual es análoga a la Ecuación (C.40).

$$\nabla(\boldsymbol{\sigma}_\epsilon : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon) = 2 \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^\epsilon \partial_{xx}^2 u_x^\epsilon + \sigma_{xy}^\epsilon (\partial_{xx}^2 u_y^\epsilon + \partial_{xy}^2 u_x^\epsilon) + \sigma_{yy}^\epsilon \partial_{xy}^2 u_y^\epsilon \\ \sigma_{xx}^\epsilon \partial_{xy}^2 u_x^\epsilon + \sigma_{xy}^\epsilon (\partial_{xy}^2 u_y^\epsilon + \partial_{yy}^2 u_x^\epsilon) + \sigma_{yy}^\epsilon \partial_{yy}^2 u_y^\epsilon \end{pmatrix} \quad (\text{C.38})$$

$$\begin{aligned} \nabla(\boldsymbol{\sigma}_\epsilon : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon) = & 2\partial_x \begin{pmatrix} \partial_x u_x^\epsilon & \partial_x u_y^\epsilon \\ \partial_y u_x^\epsilon & \partial_y u_x^\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^\epsilon \\ \sigma_{xy}^\epsilon \end{pmatrix} \\ & + 2\partial_y \begin{pmatrix} \partial_x u_x^\epsilon & \partial_x u_y^\epsilon \\ \partial_y u_x^\epsilon & \partial_y u_x^\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xy}^\epsilon \\ \sigma_{yy}^\epsilon \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

$$\nabla(\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) = 2\mathbb{D}(\nabla \mathbf{u}_\epsilon^T; \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)) \quad (\text{C.40})$$

Al sustituir la Ecuación (C.40) en la Ecuación (C.34) se obtiene que la divergencia del tensor de energía-momentum de Eshelby es nula como presenta la Ecuación (C.41). Si bien las cuentas realizadas para obtener el resultado de la divergencia del tensor de Eshelby se hicieron con representaciones matriciales en la base cartesiana; el resultado, al no quedar dependiente de la base, es general. Consecuentemente, se sustituye este resultado en la Ecuación (C.29) y se utiliza la definición del campo de velocidades en $\partial B_{x_0, \epsilon}$ ($\mathbf{v} = -\mathbf{n}$) para obtener la Ecuación (C.42).

$$\nabla \cdot \Sigma_\epsilon = 0 \quad (\text{C.41})$$

$$\left. \frac{d}{d\tau} W^e(\Omega_\tau) \right|_{\tau=0} = - \int_{\partial B_{x_0, \epsilon}} \llbracket \Sigma_\epsilon \mathbf{n} \rrbracket \cdot \mathbf{n} d\partial B_{x_0, \epsilon} \quad (\text{C.42})$$

Análisis del salto del tensor de Eshelby

Para simplificar la operativa siguiente se descompone el tensor de energía-momentum de Eshelby en una componente asociada a la densidad de las fuerzas de volumen y otra asociada a los términos de las tensiones como presenta la Ecuación (C.43), donde Σ_ϵ^b está dado por la Ecuación (C.44) y Σ_ϵ^σ está dado por la Ecuación (C.45).

$$\Sigma_\epsilon = \Sigma_\epsilon^b + \Sigma_\epsilon^\sigma \quad (\text{C.43})$$

$$\Sigma_\epsilon^b = 2\mathbf{b}_\gamma \cdot \mathbf{u}_\epsilon \mathbf{I} \quad (\text{C.44})$$

$$\Sigma_\epsilon^\sigma = 2(\nabla \mathbf{u}_\epsilon^T) \boldsymbol{\sigma}_\epsilon - \boldsymbol{\sigma}_\epsilon : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon \mathbf{I} \quad (\text{C.45})$$

Se analiza el salto de Σ_ϵ^b como presenta la Ecuación (C.46). Se recuerda

que la función de salto, definida como se presentó en la Ecuación (2.20), se calcula como el valor fuera de la perturbación menos el valor dentro de ella.

$$\llbracket \Sigma_\epsilon^b \mathbf{n} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_\epsilon)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) - 2(\gamma \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_\epsilon)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 2(1 - \gamma) \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_\epsilon \quad (\text{C.46})$$

En la Ecuación (C.47) se desarrolla el término de $\llbracket \Sigma_\epsilon^\sigma \mathbf{n} \rrbracket \cdot \mathbf{n}$. En primer lugar se analiza el primer término de dicha ecuación como presenta la Ecuación (C.48), donde $\mathbf{t}$ es el vector de norma unitaria normal a $\mathbf{n}$ (y por lo tanto tangente a la curva) tal que forme una base directa de $\mathbb{R}^2$ con $\mathbf{n}$. Por las condiciones de compatibilidad del problema de dos materiales presentadas en la Ecuación (2.18) se tiene que el término de las tensiones posee salto nulo y se deduce la Ecuación (C.49), donde se uso además la linealidad del límite y la transpuesta.

$$\llbracket \Sigma_\epsilon^\sigma \mathbf{n} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 2\llbracket (\nabla \mathbf{u}_\epsilon)^T \boldsymbol{\sigma}_\epsilon \mathbf{n} \rrbracket \cdot \mathbf{n} - \llbracket \boldsymbol{\sigma}_\epsilon : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon \mathbf{n} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \quad (\text{C.47})$$

$$\llbracket (\nabla \mathbf{u}_\epsilon)^T \boldsymbol{\sigma}_\epsilon \mathbf{n} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = \llbracket (\nabla \mathbf{u}_\epsilon)^T (\sigma_{rr}^\epsilon \mathbf{n} + \sigma_{r\theta}^\epsilon \mathbf{t}) \rrbracket \cdot \mathbf{n} \quad (\text{C.48})$$

$$\llbracket (\nabla \mathbf{u}_\epsilon)^T \boldsymbol{\sigma}_\epsilon \mathbf{n} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = \llbracket (\nabla \mathbf{u}_\epsilon)^T \rrbracket (\sigma_{rr}^\epsilon \mathbf{n} + \sigma_{r\theta}^\epsilon \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n} = (\sigma_{rr}^\epsilon \mathbf{n} + \sigma_{r\theta}^\epsilon \mathbf{t}) \cdot \llbracket (\nabla \mathbf{u}_\epsilon) \rrbracket \mathbf{n} \quad (\text{C.49})$$

Se cumple la Ecuación (C.50) a partir de la cual se tiene que el término derecho del producto interno de la Ecuación (C.49) está dado por la Ecuación (C.51). Al sustituir este último resultado en la Ecuación (C.49) se obtiene la Ecuación (C.52).

$$\nabla(\mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{n} = \partial_{\mathbf{n}} u_r \mathbf{n} + \partial_{\mathbf{n}} u_\theta \mathbf{t} = \varepsilon_{rr}^\epsilon \mathbf{n} + \partial_{\mathbf{n}} u_\theta \mathbf{t} \quad (\text{C.50})$$

$$\llbracket (\nabla \mathbf{u}_\epsilon) \rrbracket \mathbf{n} = \left(\varepsilon_{rr}^\epsilon \Big|_{r \searrow \epsilon} - \varepsilon_{rr}^\epsilon \Big|_{r \nearrow \epsilon} \right) \mathbf{n} + \left(\partial_{\mathbf{n}} u_\theta \Big|_{r \searrow \epsilon} - \partial_{\mathbf{n}} u_\theta \Big|_{r \nearrow \epsilon} \right) \mathbf{t} \quad (\text{C.51})$$

$$\begin{aligned} \llbracket (\nabla \mathbf{u}_\epsilon)^T \boldsymbol{\sigma}_\epsilon \mathbf{n} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = & \sigma_{rr}^\epsilon \left(\varepsilon_{rr}^\epsilon \Big|_{r \searrow \epsilon} - \varepsilon_{rr}^\epsilon \Big|_{r \nearrow \epsilon} \right) \\ & + \sigma_{r\theta}^\epsilon \left(\partial_{\mathbf{n}} u_\theta \Big|_{r \searrow \epsilon} - \partial_{\mathbf{n}} u_\theta \Big|_{r \nearrow \epsilon} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.52})$$

Por otra parte, se analiza el segundo término de la Ecuación (C.47) como presenta la Ecuación (C.53). Con la linealidad del límite se obtiene la Ecuación (C.54) y luego, con las condiciones de compatibilidad del problema de dos materiales, se obtiene la Ecuación (C.56), donde se usó el resultado de la Ecuación (C.55). Las condiciones de compatibilidad usadas son $[\![\sigma_{rr}^\epsilon]\!] = 0$, $[\![\sigma_{r\theta}^\epsilon]\!] = 0$ y $[\![\mathbf{u}_\epsilon]\!] = 0$ y consecuentemente $[\![\partial_t \mathbf{u}_\epsilon]\!] = 0$.

$$[\![\boldsymbol{\sigma}_\epsilon : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon \mathbf{n}]\!] \cdot \mathbf{n} = [\![\boldsymbol{\sigma}_\epsilon : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon]\!] \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = [\![(\sigma_{rr}^\epsilon \varepsilon_{rr}^\epsilon + 2\sigma_{r\theta}^\epsilon \varepsilon_{r\theta}^\epsilon + \sigma_{\theta\theta}^\epsilon \varepsilon_{\theta\theta}^\epsilon)]\!] \quad (\text{C.53})$$

$$[\![(\sigma_{rr}^\epsilon \varepsilon_{rr}^\epsilon + 2\sigma_{r\theta}^\epsilon \varepsilon_{r\theta}^\epsilon + \sigma_{\theta\theta}^\epsilon \varepsilon_{\theta\theta}^\epsilon)]\!] = [\![\sigma_{rr}^\epsilon \varepsilon_{rr}^\epsilon]\!] + 2[\![\sigma_{r\theta}^\epsilon \varepsilon_{r\theta}^\epsilon]\!] + [\![\sigma_{\theta\theta}^\epsilon \varepsilon_{\theta\theta}^\epsilon]\!] \quad (\text{C.54})$$

$$2[\![\varepsilon_{r\theta}^\epsilon]\!] = [\![\partial_n u_\theta^\epsilon]\!] + [\![\partial_t u_r^\epsilon]\!] \quad (\text{C.55})$$

$$\begin{aligned} [\![\boldsymbol{\sigma}_\epsilon : \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon \mathbf{n}]\!] \cdot \mathbf{n} = & \sigma_{rr}^\epsilon \left(\varepsilon_{rr}^\epsilon|_{r \searrow \epsilon} - \varepsilon_{rr}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} \right) \\ & + \varepsilon_{\theta\theta}^\epsilon \left(\sigma_{\theta\theta}^\epsilon|_{r \searrow \epsilon} - \sigma_{\theta\theta}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} \right) \\ & + \sigma_{r\theta}^\epsilon \left(\partial_n u_\theta^\epsilon|_{r \searrow \epsilon} - \partial_n u_\theta^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

Se sustituyen los resultados de las Ecuaciones (C.52) y (C.56) en la Ecuación (C.47) y se obtiene la Ecuación (C.57). Dicho resultado es de gran interés ya que permite expresar el salto del flujo del tensor de Eshelby en función de campos calculables con un análisis asintótico. De todas formas conviene expresar la Ecuación (C.57) en función de los campos de una sola fase, la inclusión o el material exterior, objetivo que cumple la manipulación que prosigue.

$$\begin{aligned} [\![\Sigma_\epsilon^\sigma \mathbf{n}]\!] \cdot \mathbf{n} = & \sigma_{rr}^\epsilon \left(\varepsilon_{rr}^\epsilon|_{r \searrow \epsilon} - \varepsilon_{rr}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} \right) \\ & + \sigma_{r\theta}^\epsilon \left(\partial_n u_\theta^\epsilon|_{r \searrow \epsilon} - \partial_n u_\theta^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} \right) \\ & - \varepsilon_{\theta\theta}^\epsilon \left(\sigma_{\theta\theta}^\epsilon|_{r \searrow \epsilon} - \sigma_{\theta\theta}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

En primer lugar, a partir de las Ecuaciones (2.4) y (2.5) e invertir la expresión matricial del tensor elástico, se obtiene la Ecuación (C.58), la cual expresa las deformaciones en función de las tensiones en el interior de la inclusión. Se recuerda que γ aplica en esta ecuación por ser el interior de la perturbación topológica.

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{4\gamma(\mu^2 + \lambda\mu)} ((\lambda + 2\mu)\sigma_{rr} - \lambda\sigma_{\theta\theta}) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{4\gamma(\mu^2 + \lambda\mu)} (-\lambda\sigma_{rr} + (\lambda + 2\mu)\sigma_{\theta\theta}) \end{cases} \quad (C.58)$$

Para analizar el primer término de la Ecuación (C.57) se utiliza el resultado $[\![\sigma_{rr}^\epsilon]\!] = 0$ y se desarrolla como presenta la Ecuación (C.59). Luego, se aplica $[\![\varepsilon_{\theta\theta}^\epsilon]\!] = 0$ y se obtiene la Ecuación (C.60). Se resta $\varepsilon_{rr}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon}$ a ambos lados de la igualdad para obtener la Ecuación (C.61). Finalmente, se utiliza la Ecuación (C.58) para obtener el resultado de la Ecuación (C.62), donde se incluyó el término faltante del primer sumando de la Ecuación (C.57). Para simplificar la notación en la Ecuación (C.62) se retiró la notación que indica que el cálculo de las tensiones es en $r \nearrow \epsilon$ pues vale para todas.

$$0 = [\![\sigma_{rr}^\epsilon]\!] = ((\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr}^\epsilon + \lambda\varepsilon_{\theta\theta}^\epsilon)|_{r \searrow \epsilon} - \gamma((\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr}^\epsilon + \lambda\varepsilon_{\theta\theta}^\epsilon)|_{r \nearrow \epsilon} \quad (C.59)$$

$$\varepsilon_{rr}^\epsilon|_{r \searrow \epsilon} = \gamma\varepsilon_{rr}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} + \frac{\lambda(\gamma - 1)}{\lambda + 2\mu}\varepsilon_{\theta\theta}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} \quad (C.60)$$

$$\varepsilon_{rr}^\epsilon|_{r \searrow \epsilon} - \varepsilon_{rr}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} = (\gamma - 1) \left(\varepsilon_{rr}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\varepsilon_{\theta\theta}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} \right) \quad (C.61)$$

$$\sigma_{rr}^\epsilon[\![\varepsilon_{rr}^\epsilon]\!] = \frac{\sigma_{rr}^{\epsilon 2}(\gamma - 1)}{\gamma(\lambda + 2\mu)} \quad (C.62)$$

A continuación, para analizar el segundo término de la Ecuación (C.57), se le suma y resta $\partial_{\mathbf{t}}u_r^\epsilon|_{r \searrow \epsilon}$ y $\partial_{\mathbf{t}}u_r^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon}$ al salto presentado en dicho término, según presenta la Ecuación (C.63). Luego, se considera el resultado $[\![\partial_{\mathbf{t}}u_r^\epsilon]\!] = 0$ y la definición del tensor de deformaciones para obtener la Ecuación (C.64). Se utiliza la ecuación constitutiva para obtener la Ecuación (C.65) y finalmente, con la condición de compatibilidad $[\![\sigma_{r\theta}^\epsilon]\!] = 0$, se obtiene la Ecuación (C.66), en la cual nuevamente se retiró la notación que indica que el cálculo es en $r \nearrow \epsilon$.

$$\partial_{\mathbf{n}}u_\theta^\epsilon|_{r \searrow \epsilon} - \partial_{\mathbf{n}}u_\theta^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} = [\![\partial_{\mathbf{n}}u_\theta^\epsilon + \partial_{\mathbf{t}}u_r^\epsilon]\!] - [\![\partial_{\mathbf{t}}u_r^\epsilon]\!] \quad (C.63)$$

$$\partial_{\mathbf{n}}u_\theta^\epsilon|_{r \searrow \epsilon} - \partial_{\mathbf{n}}u_\theta^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} = [\![2\varepsilon_{r\theta}^\epsilon]\!] = 2\varepsilon_{r\theta}^\epsilon|_{r \searrow \epsilon} - 2\varepsilon_{r\theta}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} \quad (C.64)$$

$$2\varepsilon_{r\theta}^\epsilon|_{r \rightarrow \epsilon} - 2\varepsilon_{r\theta}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} = \frac{\sigma_{r\theta}^\epsilon}{\mu}|_{r \searrow \epsilon} - \frac{\sigma_{r\theta}^\epsilon}{\gamma\mu}|_{r \nearrow \epsilon} \quad (\text{C.65})$$

$$\sigma_{r\theta}^\epsilon \llbracket \partial_{\mathbf{n}} u^\epsilon \rrbracket = \frac{\gamma - 1}{\gamma\mu} \sigma_{r\theta}^{\epsilon^2} \quad (\text{C.66})$$

Finalmente, se analiza el tercer término de la Ecuación (C.57). En primer lugar, se utiliza la ecuación constitutiva y $\llbracket \varepsilon_{\theta\theta} \rrbracket = 0$ para obtener la Ecuación (C.67). Luego se usa el resultado de la Ecuación (C.60) para obtener la Ecuación (C.68). Finalmente se obtiene la Ecuación (C.69), donde una vez más se retiró la notación que indica que el cálculo es con $r \nearrow \epsilon$.

$$\sigma_{\theta\theta}^\epsilon|_{r \searrow \epsilon} - \sigma_{\theta\theta}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} = (1 - \gamma)(2\mu + \lambda)\varepsilon_{\theta\theta}^\epsilon|_{r \searrow \epsilon} + \lambda(\varepsilon_{rr}^\epsilon|_{r \searrow \epsilon} - \gamma\varepsilon_{rr}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon}) \quad (\text{C.67})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^\epsilon|_{r \searrow \epsilon} - \sigma_{\theta\theta}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} = (1 - \gamma)(2\mu + \lambda)\varepsilon_{\theta\theta}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} + \frac{\lambda^2(\gamma - 1)}{\lambda + 2\mu}\varepsilon_{\theta\theta}^\epsilon|_{r \nearrow \epsilon} \quad (\text{C.68})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^\epsilon \llbracket \sigma_{\theta\theta}^\epsilon \rrbracket = \frac{4\mu(\mu + \lambda)(1 - \gamma)}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{\theta\theta}^{\epsilon^2} = \frac{(1 - \gamma)(\lambda + 2\mu)}{4\gamma^2\mu(\lambda + \mu)} \left(\sigma_{\theta\theta}^\epsilon - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}^\epsilon \right)^2 \quad (\text{C.69})$$

Al sustituir los resultados de las Ecuaciones (C.62), (C.66) y (C.69) en la Ecuación (C.57) se obtiene la Ecuación (C.70). Con este resultado, tan solo resta calcular los campos de tensiones en la bola para el problema perturbado en función del problema imperturbado, lo cual se hace a continuación en el análisis asintótico.

$$\llbracket \Sigma_\epsilon^\sigma \mathbf{n} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = \frac{\gamma - 1}{\gamma^2} \left(\frac{2\mu + \lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \left(\sigma_{\theta\theta}^\epsilon - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}^\epsilon \right)^2 + \frac{\gamma \sigma_{rr}^{\epsilon^2}}{\lambda + 2\mu} + \frac{\gamma \sigma_{r\theta}^{\epsilon^2}}{\mu} \right) \quad (\text{C.70})$$

Análisis asintótico

Como la perturbación topológica consiste únicamente en modificar la rigidez del material en $B_{x_0, \epsilon}$, se admite considerar que, cuando el radio de la bola es muy chico ($\epsilon \searrow 0$), dicha bola no perturba significativamente el campo de desplazamientos a su alrededor. Lo anterior implica la Ecuación (C.71).

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \mathbf{u}_\epsilon(x_0) = \mathbf{u}(x_0) \quad (\text{C.71})$$

Por otra parte, para el cálculo de los campos de tensiones, se asume que las tensiones en la frontera de la bola se comportan como una placa infinita con inclusión, sometida en el infinito al campo tensional dado por $\boldsymbol{\sigma}(x_0)$. Si bien en esta aproximación se ignoran algunos términos del cálculo de $\boldsymbol{\sigma}_\epsilon$, ellos son residuales $e(\epsilon)$ tal que $e(\epsilon) \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \searrow 0$. Para más detalles sobre el cálculo de los residuales y mayor rugosidad en este análisis ver el artículo de Lopes et al. (2015).

Se considera el problema de la Figura C.1, donde σ_I y σ_{II} son las tensiones principales del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}(x_0)$, es decir sus valores propios. Además se considera, sin perder generalidad, que el ángulo θ se mide desde σ_I y $\sigma_I \geq \sigma_{II}$. A partir de los cálculos del Anexo E y el principio de superposición, se obtiene que las tensiones en el interior de la bola, con $r \nearrow \epsilon$, están dadas por las Ecuaciones (C.72) a (C.74).

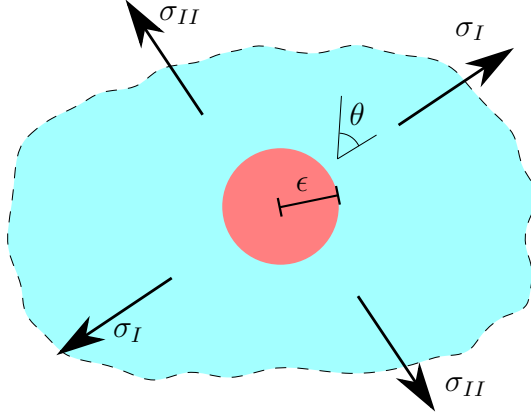


Figura C.1: Placa infinita con inclusión sometida a un estado tensional genérico

$$\sigma_{rr}^\epsilon = \frac{\gamma(\lambda + 2\mu)}{2(\mu + \gamma(\lambda + \mu))} (\sigma_I + \sigma_{II}) + \frac{\gamma(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu)} (\sigma_I - \sigma_{II}) \cos(2\theta) \quad (\text{C.72})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^\epsilon = \frac{\gamma(\lambda + 2\mu)}{2(\mu + \gamma(\lambda + \mu))} (\sigma_I + \sigma_{II}) - \frac{\gamma(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu)} (\sigma_I - \sigma_{II}) \cos(2\theta) \quad (\text{C.73})$$

$$\sigma_{r\theta}^\epsilon = \frac{\gamma(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu)} (\sigma_{II} - \sigma_I) \sin(2\theta) \quad (\text{C.74})$$

Cálculo final de la derivada topológica

Se combinan las Ecuaciones (C.72) a (C.74) con la Ecuación (C.70) para obtener la Ecuación (C.75), donde ya se realizó una manipulación matemática de algunos factores. Este resultado presenta gran relevancia pues es la primera vez que se presenta $[\Sigma_\epsilon^\sigma \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n}$ en función únicamente del problema imperturbado.

$$\begin{aligned}
 [\Sigma_\epsilon^\sigma \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n} &= \frac{(\gamma - 1)(\sigma_I + \sigma_{II})^2(\lambda + 2\mu)}{4(\mu + \gamma(\lambda + \mu))^2} \left(\gamma + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) \\
 &+ \left(\frac{(\sigma_I + \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{II})(\lambda + 2\mu)(\gamma - 1)^2}{(\mu + \gamma(\lambda + \mu))(\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu))} \right) \cos(2\theta) \\
 &+ \left(\frac{(\gamma - 1)(\sigma_I - \sigma_{II})^2(\lambda + 2\mu)((1 + \gamma)\mu + \lambda)}{\mu(\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu))^2} \right) \cos^2(2\theta) \\
 &+ \left(\frac{\gamma(\gamma - 1)(\sigma_I - \sigma_{II})^2(\lambda + 2\mu)^2}{\mu(\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu))^2} \right) \sin^2(2\theta)
 \end{aligned} \tag{C.75}$$

Se combinan las Ecuaciones (C.42), (C.43), (C.46), (C.71) y (C.75), notando que ya se asume $\epsilon \searrow 0$ y que $d\mathcal{B}_{x_0, \epsilon} = \epsilon d\theta$, y se obtiene la Ecuación (C.76). Al calcular las integrales de los distintos términos trigonométricos, fácilmente se obtiene la Ecuación (C.77). Finalmente, en base a manipulaciones matemáticas, se obtiene la Ecuación (C.78), la cual se transforma en la Ecuación (C.79) al definir la constante α_1 , según muestra la Ecuación (C.80). Esta constante α_1 es la misma que se definió originalmente en la Sección 5.3.

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial}{\partial \tau} W^e(\Omega_\tau) \right|_{\tau=0} &= -\epsilon \int_0^{2\pi} \left(\frac{(\gamma - 1)(\sigma_I + \sigma_{II})^2(\lambda + 2\mu)}{4(\mu + \gamma(\lambda + \mu))^2} \left(\gamma + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) \right. \\
 &+ \left(\frac{(\sigma_I + \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{II})(\lambda + 2\mu)(\gamma - 1)^2}{(\mu + \gamma(\lambda + \mu))(\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu))} \right) \cos(2\theta) \\
 &+ \left(\frac{(\gamma - 1)(\sigma_I - \sigma_{II})^2(\lambda + 2\mu)((1 + \gamma)\mu + \lambda)}{\mu(\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu))^2} \right) \cos^2(2\theta) \\
 &+ \left(\frac{\gamma(\gamma - 1)(\sigma_I - \sigma_{II})^2(\lambda + 2\mu)^2}{\mu(\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu))^2} \right) \sin^2(2\theta) \\
 &\left. + 2(1 - \gamma)\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \right) d\theta
 \end{aligned} \tag{C.76}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial \tau} W^e(\Omega_\tau) \right|_{\tau=0} &= \frac{\epsilon \pi (1 - \gamma) (\sigma_I + \sigma_{II})^2 (\lambda + 2\mu)}{2(\mu + \gamma(\lambda + \mu))^2} \left(\gamma + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) \\
&+ \left(\frac{\epsilon \pi (1 - \gamma) (\sigma_I - \sigma_{II})^2 (\lambda + 2\mu) ((1 + \gamma)\mu + \lambda)}{\mu(\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu))^2} \right) \\
&+ \left(\frac{\epsilon \pi \gamma (1 - \gamma) (\sigma_I - \sigma_{II})^2 (\lambda + 2\mu)^2}{\mu(\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu))^2} \right) \\
&+ 4\pi \epsilon (\gamma - 1) \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{C.77}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial \tau} W^e(\Omega_\tau) \right|_{\tau=0} &= \frac{\epsilon \pi (1 - \gamma) (\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)(\mu + \gamma(\lambda + \mu))} (\sigma_I + \sigma_{II})^2 \\
&+ \frac{\epsilon \pi (\lambda + 2\mu) (1 - \gamma)}{\mu(\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu))} (\sigma_I - \sigma_{II})^2 \\
&+ 4\pi \epsilon (\gamma - 1) \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{C.78}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial \tau} W^e(\Omega_\tau) \right|_{\tau=0} &= \frac{\epsilon \pi (1 - \gamma) (1 + \alpha_1)}{2\alpha_1(\mu + \gamma(\lambda + \mu))} (\sigma_I + \sigma_{II})^2 \\
&+ \frac{\epsilon \pi (1 + \alpha_1) (1 - \gamma)}{\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu)} (\sigma_I - \sigma_{II})^2 \\
&+ 4\pi \epsilon (\gamma - 1) \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{C.79}$$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \tag{C.80}$$

Se sustituye la Ecuación (C.79) en la Ecuación (C.5) para obtener la Ecuación (C.81). La ecuación anterior es la primera expresión calculada de la DT de la complacencia en función únicamente del problema imperturbado.

$$\begin{aligned}
D_T W^e &= \frac{(1 - \gamma) (1 + \alpha_1)}{4\alpha_1(\mu + \gamma(\lambda + \mu))} (\sigma_I + \sigma_{II})^2 \\
&+ \frac{(1 + \alpha_1) (1 - \gamma)}{2(\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu))} (\sigma_I - \sigma_{II})^2 \\
&+ 2(\gamma - 1) \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{C.81}$$

La anterior expresión de la derivada topológica de la complacencia está expresada en función de las tensiones principales del tensor de tensiones. Si bien dicha expresión es válida; para su uso con el XFEM resulta de interés expresarla en función de las componentes cartesianas del tensor de tensiones.

Para ello, a continuación se presenta el cálculo de las tensiones principales de dicho tensor. En primer lugar, en la Ecuación (C.82) se presenta el polinomio característico del tensor de tensiones expresado en la base cartesiana. Las raíces del polinomio característico son las tensiones principales del tensor de tensiones como presenta la Ecuación (C.83), de donde trivialmente se obtiene el resultado de la Ecuación (C.84). Luego, el cuadrado de la diferencia entre las tensiones principales es el valor absoluto del discriminante pero, como el tensor de tensiones es simétrico, por el teorema espectral se tiene que dicho discriminante es no negativo y se obtiene la Ecuación (C.85).

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \zeta \mathbf{I}) = \zeta^2 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\zeta + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2) \quad (\text{C.82})$$

$$\{\sigma_I; \sigma_{II}\} = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \pm \sqrt{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 - 4(\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2)}}{2} \quad (\text{C.83})$$

$$(\sigma_I + \sigma_{II})^2 = \sigma_{xx}^2 + 2\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 \quad (\text{C.84})$$

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 = \sigma_{xx}^2 - 2\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 4\sigma_{xy}^2 \quad (\text{C.85})$$

Se sustituyen las Ecuaciones (C.84) y (C.85) en la Ecuación (C.81) y se obtiene la Ecuación (C.86). Esta última ecuación expresa la derivada de la complacencia en función de las tensiones y el desplazamiento en el punto donde se calcula la DT.

$$\begin{aligned} D_T W^e = &= (1 + \alpha_1)(1 - \gamma) \left(\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2(\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu))} + \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{4\alpha_1(\mu + \gamma(\lambda + \mu))} \right) \sigma_{xx} \\ &+ (1 + \alpha_1)(1 - \gamma) \left(\frac{(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})}{2(\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu))} + \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{4\alpha_1(\mu + \gamma(\lambda + \mu))} \right) \sigma_{yy} \\ &+ \left(\frac{2(1 + \alpha_1)(1 - \gamma)\sigma_{xy}}{\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu)} \right) \sigma_{xy} \\ &+ 2(\gamma - 1)\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{C.86})$$

Finalmente, las tensiones que se dejaron separadas en la Ecuación (C.86) se sustituyen por las deformaciones según la ecuación constitutiva de la Ecuación (2.4) y se obtiene la expresión de la Ecuación (C.87), donde $A_{D_T W^e}$ y

$B_{D_TW^e}$ son constantes materiales dadas por las Ecuaciones (C.88) y (C.89), respectivamente.

$$\begin{aligned} D_TW^e = & (A_{D_TW^e}\sigma_{xx} + B_{D_TW^e}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}))\varepsilon_{xx} \\ & + (A_{D_TW^e}\sigma_{yy} + B_{D_TW^e}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}))\varepsilon_{yy} \\ & + (2A_{D_TW^e}\sigma_{xy})\varepsilon_{xy} \\ & + 2(\gamma - 1)\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{C.87})$$

$$A_{D_TW^e} = \frac{2(1 - \gamma)(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu)} \quad (\text{C.88})$$

$$B_{D_TW^e} = \frac{(1 - \gamma)^2(\lambda^2 + \lambda\mu - 2\mu^2)}{2(\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu))(\mu + \gamma(\lambda + \mu))} \quad (\text{C.89})$$

Se define la constante α_2 , como presenta la Ecuación (C.90), la cual es la misma que se definió originalmente en la Sección 5.3. Se opera en la constante $A_{D_TW^e}$ de la Ecuación (C.88) según presenta la Ecuación (C.91) para obtener la expresión final de $A_{D_TW^e}$. De manera análoga, se opera sobre $B_{D_TW^e}$ como muestra la Ecuación (C.92) para obtener la expresión final de $B_{D_TW^e}$.

$$\alpha_2 = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \quad (\text{C.90})$$

$$\begin{aligned} A_{D_TW^e} &= \frac{(1 - \gamma)(2\lambda + 4\mu)}{\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu)} = \frac{(1 - \gamma)((\lambda + \mu) + (\lambda + 3\mu))}{(\lambda + \mu)(1 + \gamma\alpha_2)} = \\ &= \frac{(1 - \gamma)(1 + \alpha_2)}{1 + \gamma\alpha_2} \end{aligned} \quad (\text{C.91})$$

$$\begin{aligned} B_{D_TW^e} &= \frac{(1 - \gamma)^2(\lambda^2 + \lambda\mu - 2\mu^2)}{2(\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu))(\mu + \gamma(\lambda + \mu))} = \\ &= \frac{(1 - \gamma)^2(\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 - \lambda\mu - 3\mu^2)}{2(\lambda + \mu)(1 + \gamma\alpha_2)\mu(1 + \gamma\alpha_1)} = \\ &= \frac{(1 - \gamma)^2}{2(1 + \gamma\alpha_2)(1 + \gamma\alpha_1)} \left(\frac{(\mu + \lambda)^2 - \mu(\lambda + 3\mu)}{\mu(\lambda + \mu)} \right) = \\ &= \frac{(1 - \gamma)^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{2(1 + \gamma\alpha_2)(1 + \gamma\alpha_1)} \end{aligned} \quad (\text{C.92})$$

De la Ecuación (C.87) se obtiene que la DT de la complacencia está dada por la expresión de la Ecuación (C.93), donde $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ es un tensor de segundo orden, derivado del tensor de tensiones, cuyas componentes en coordenadas

cartesianas se presentan en la Ecuación (C.94).

$$D_T W^e = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon} + 2(\gamma - 1)\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{C.93})$$

$$\begin{cases} \widetilde{\sigma_{xx}} &= A_{D_T W^e} \sigma_{xx} + B_{D_T W^e} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \widetilde{\sigma_{yy}} &= A_{D_T W^e} \sigma_{yy} + B_{D_T W^e} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \widetilde{\sigma_{xy}} &= A_{D_T W^e} \sigma_{xy} \end{cases} \quad (\text{C.94})$$

De la Ecuación (C.94) se tiene que el tensor $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ se obtiene de aplicar el tensor $\mathbb{P}_\gamma$, dado por la Ecuación (C.95), a $\boldsymbol{\sigma}$ como muestra la Ecuación (C.96). Al combinar las Ecuaciones (C.91) a (C.93), (C.95) y (C.96) se obtiene exactamente el resultado presentado en la Ecuación (5.26).

$$\mathbb{P}_\gamma = A_{D_T W^e} \mathbb{I} + B_{D_T W^e} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad (\text{C.95})$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{P}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{C.96})$$

Derivada topológica del funcional de tensiones

Introducción y método de cálculo

Se presenta ahora el cálculo de la DT del funcional de tensiones $\mathcal{S}$ para cierto EC específico. El procedimiento realizado se basó en el artículo de Amstutz y Novotny (2010) con algunas diferencias, tanto en el funcional como en el problema plano de elasticidad lineal. La diferencia en el funcional es que Amstutz y Novotny (2010) consideraron que el dominio de integración es D_S en vez de en $\Omega \cap D_S$ y al integrando se lo multiplica por E/E_M , donde E es el módulo de Young del material que se tenga en el punto en el que se evalúa el integrando.

Para el cálculo de la DT se consideró nuevamente el problema de elasticidad plano de dos materiales, presentado en la Sección 2.2, y se estudió en simultáneo el estado plano de deformaciones y el estado plano de tensiones al considerar los parámetros de Lamé. Al igual que en el cálculo de la DT de la complacencia, se consideró que μ y λ representan las propiedades materiales del material en x_0 previo a la perturbación topológica y las propiedades del material de la perturbación surgen de multiplicar dichos parámetros por γ . La

gran diferencia en el problema plano de elasticidad lineal que se consideró en esta tesis, respecto al considerado en el artículo de Amstutz y Novotny (2010), es que aquí se consideró una densidad de fuerzas de volumen no nula. La relación entre las fuerzas de volumen de Ω y $D \setminus \overline{\Omega}$ es la que se presentó en la Sección 5.1.

Para el cálculo de la DT del funcional de penalización de las tensiones se utilizó el método adjunto según se presentó en la Sección 3.2.2.2. Se asumen, dada la similitud con el artículo de Amstutz y Novotny (2010), que las hipótesis del teorema principal del método adjunto se cumplen y por lo tanto $D_T \mathcal{S}$ es según se presenta en la Ecuación (C.97). Las cuatro funciones son las que se presentaron en las Ecuaciones (3.76) a (3.79) cuando se presentó la metodología..

$$D_T \mathcal{S} = \delta \mathcal{A} - \delta \ell + \delta J_1 + \delta J_2 \quad (\text{C.97})$$

El cálculo de $D_T \mathcal{S}$ pasa a ser calcular las cuatro funciones de la Ecuación (C.97), lo que se realiza a continuación. Se destaca el hecho de que los cálculos realizados en este anexo no presentan gran rigurosidad matemática sino que buscan ilustrar sobre el cálculo de esta DT. La estimación de los residuales se considera análoga a la presentada por Amstutz y Novotny (2010) y por lo tanto se consideran válidos los resultados allí obtenidos para este caso.

Cálculo del problema adjunto perturbado

Para definir el problema adjunto se requiere, en primer lugar, calcular la derivada de Fréchet de $\mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{v})$. Se entiende por $\mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{v})$ a la expresión del funcional de tensiones para el dominio con perturbación topológica de radio ϵ evaluada para los desplazamientos $\mathbf{v}$. Admitiendo que el funcional de tensiones es diferenciable Fréchet, se tiene la equivalencia entre la derivada de Fréchet y Gâteaux como presenta la Ecuación (C.98), donde $\mathbf{u}$ es la solución del campo de desplazamientos para el problema plano de elasticidad lineal imperturbado y $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{V}$ es un desplazamiento virtual cualquiera.

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varphi} \right\rangle = \partial_\eta \mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{u} + \eta \boldsymbol{\varphi}) \Big|_{\eta=0} \quad (\text{C.98})$$

En base a la regla de Leibniz se tiene que el término de la derecha de la Ecuación (C.98) es como presenta la Ecuación (C.99), donde Ω_ϵ es el dominio

ocupado por la estructura tras la perturbación topológica de radio ϵ . Por la regla de la cadena, la ecuación anterior queda como muestra la Ecuación (C.100).

$$\partial_\eta \mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{u} + \eta\boldsymbol{\varphi}) = \int_{\Omega_\epsilon \cap D_S} \partial_\eta \Phi \left(\frac{\sigma_{VM}^2(\mathbf{u} + \eta\boldsymbol{\varphi})}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) d\Omega \quad (C.99)$$

$$\partial_\eta \mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{u} + \eta\boldsymbol{\varphi}) = \int_{\Omega_\epsilon \cap D_S} \Phi' \left(\frac{\sigma_{VM}^2(\mathbf{u} + \eta\boldsymbol{\varphi})}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) \frac{\partial_\eta(\sigma_{VM}^2(\mathbf{u} + \eta\boldsymbol{\varphi}))}{\bar{\sigma}_{VM}^2} d\Omega \quad (C.100)$$

Para facilitar la operativa, se observa que la tensión de von Mises, según se definió en la Ecuación (5.9), admite ser reescrita según presenta la Ecuación (C.101), donde $\mathbb{B}$ y $\tilde{\mathbb{B}}$ son según se presentaron en las Ecuaciones (5.32) y (5.33). Se hace notar que como la integral es en $D_S \cap \Omega_\epsilon$, no es necesario distinguir si la tensión que aparece en Φ es $\boldsymbol{\sigma}$ o $\boldsymbol{\sigma}_\epsilon$. Con la anterior reescritura se obtiene el resultado de la Ecuación (C.102). El anterior resultado se desarrolla como se presenta en la Ecuación (C.103), donde la primera igualdad se basa en las definiciones de $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ y la segunda igualdad en la linealidad de $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$, la regla de la derivada del producto y el Teorema de Schwarz.

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}(\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathbb{B}\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (C.101)$$

$$\partial_\eta(\sigma_{VM}^2(\mathbf{u} + \eta\boldsymbol{\varphi})) = \frac{1}{2}\partial_\eta(\mathbb{B}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} + \eta\boldsymbol{\varphi}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \eta\boldsymbol{\varphi})) \quad (C.102)$$

$$\begin{aligned} \partial_\eta(\mathbb{B}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} + \eta\boldsymbol{\varphi}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \eta\boldsymbol{\varphi})) &= \partial_\eta(\mathbb{B}\mathbb{C}\nabla^s(\mathbf{u} + \eta\boldsymbol{\varphi}) : \nabla^s(\mathbf{u} + \eta\boldsymbol{\varphi})) \\ &= \mathbb{B}\mathbb{C}\nabla^s(\boldsymbol{\varphi}) : \nabla^s(\mathbf{u} + \eta\boldsymbol{\varphi}) \\ &\quad + \mathbb{B}\mathbb{C}\nabla^s(\mathbf{u} + \eta\boldsymbol{\varphi}) : \nabla^s(\boldsymbol{\varphi}) \end{aligned} \quad (C.103)$$

Se utiliza la simetría de los tensores $\mathbb{C}$ y $\mathbb{B}$, la particular de que ellos conmutan ($\mathbb{C}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{C}$) y que para entradas reales el producto interno conmuta para obtener la Ecuación (C.104). Finalmente, al combinar las Ecuaciones (C.100) y (C.102) a (C.104) en la Ecuación (C.98) se obtiene que la derivada de Fréchet de $\mathcal{S}_\epsilon$ de dirección $\boldsymbol{\varphi}$ evaluada en $\mathbf{u}$ está dada por la Ecuación (C.105).

$$\mathbb{B}\mathbb{C}\nabla^s(\boldsymbol{\varphi}) : \nabla^s(\mathbf{u} + \eta\boldsymbol{\varphi}) = \mathbb{B}\mathbb{C}\nabla^s(\mathbf{u} + \eta\boldsymbol{\varphi}) : \nabla^s(\boldsymbol{\varphi}) \quad (C.104)$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varphi} \right\rangle = \int_{\Omega_\epsilon \cap D_S} \Phi' \left(\frac{\sigma_{VM}^2(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) \frac{\mathbb{B}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi})}{\bar{\sigma}_{VM}^2} d\Omega \quad (\text{C.105})$$

Se define k_ϵ^σ como presenta la Ecuación (C.106), donde $\mathbb{1}_{\Omega_\epsilon \cap D_S}$ es la función característica del dominio $\Omega_\epsilon \cap D_S$. De forma análoga se define k^σ como la misma función pero considerando la función característica de $\Omega \cap D_S$ (Ver la Ecuación (5.36)). En base a la anterior definición se tiene el resultado de la Ecuación (C.107).

$$k_\epsilon^\sigma = \frac{\mathbb{1}_{\Omega_\epsilon \cap D_S}}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \Phi' \left(\frac{\sigma_{VM}^2(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) \quad (\text{C.106})$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varphi} \right\rangle = \int_D k_\epsilon^\sigma \mathbb{B}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}) d\Omega \quad (\text{C.107})$$

En base a la definición del problema adjunto en el dominio perturbado, dada por la Ecuación (3.74) y en analogía con el problema plano de elasticidad lineal, se tiene que el problema adjunto en el dominio perturbado ($\mathbf{v}_\epsilon$) es una solución débil del problema fuerte dado por la Ecuación (C.108), donde $\boldsymbol{\sigma}_\epsilon$ tiene la misma definición utilizada en el cálculo de la DT de la complacencia (Ver la Ecuación (C.18)) y $\mathbf{n}$ en $\partial B_{x_0, \epsilon}$ es entrante a la bola. De forma análoga, el problema adjunto en el dominio sin perturbación ($\mathbf{v}$) es según se presenta en la Ecuación (C.109). Nuevamente, para el problema en el dominio sin perturbación la solución es débil.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{v}_\epsilon) &= -\nabla \cdot (k_\epsilon^\sigma \mathbb{B}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \quad \text{en } D \\ \mathbf{v}_\epsilon &= 0 \quad \text{en } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{v}_\epsilon)\mathbf{n} &= -k_\epsilon^\sigma \mathbb{B}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} \quad \text{en } \Gamma_N \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{v}_\epsilon) \rrbracket \mathbf{n} &= -\llbracket k_\epsilon^\sigma \rrbracket \mathbb{B}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} \quad \text{en } \partial B_{x_0, \epsilon} \cup \partial\Omega \cup \partial D_S \end{array} \right. \quad (\text{C.108})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) &= -\nabla \cdot (k^\sigma \mathbb{B}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \quad \text{en } D \\ \mathbf{v} &= 0 \quad \text{en } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})\mathbf{n} &= -k^\sigma \mathbb{B}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} \quad \text{en } \Gamma_N \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \rrbracket \mathbf{n} &= -\llbracket k^\sigma \rrbracket \mathbb{B}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} \quad \text{en } \partial\Omega \cup \partial D_S \end{array} \right. \quad (\text{C.109})$$

Variación del término bilineal

Para calcular $\delta\mathcal{A}$ se analiza la función de la Ecuación (C.110), la cual se explica porque los funcionales $\mathcal{A}_\epsilon$ y $\mathcal{A}$ son iguales en todo el dominio salvo en la perturbación, donde la rigidez del material se multiplica por γ . Ya que se busca solamente resolver el problema adjunto para el problema imperturbado se considera el ansatz de la Ecuación (C.111). Luego, en base a la anterior expresión, se tiene la Ecuación (C.112).

$$(\mathcal{A}_\epsilon - \mathcal{A})(\mathbf{u}, \mathbf{v}_\epsilon) = \int_{B_{x_0, \epsilon}} (\gamma - 1) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla^s(\mathbf{v}_\epsilon) d\Omega \quad (\text{C.110})$$

$$\mathbf{v}_\epsilon = \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}_\epsilon \quad (\text{C.111})$$

$$(\mathcal{A}_\epsilon - \mathcal{A})(\mathbf{u}, \mathbf{v}_\epsilon) = (\gamma - 1) \left(\int_{B_{x_0, \epsilon}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla^s(\mathbf{v}) d\Omega + \int_{B_{x_0, \epsilon}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla^s(\tilde{\mathbf{v}}_\epsilon) d\Omega \right) \quad (\text{C.112})$$

De las Ecuaciones (C.108), (C.109) y (C.111) se tiene que la formulación fuerte del problema de $\tilde{\mathbf{v}}_\epsilon$ es según se presenta en la Ecuación (C.113). Las primeras dos ecuaciones surgen de las primeras ecuaciones de las Ecuaciones (C.108) y (C.109). La distinción entre $D \setminus \overline{B_{x_0, \epsilon}}$ y $B_{x_0, \epsilon}$ surge de las diferencias entre $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\sigma}_\epsilon$ y entre k_ϵ^σ y k^σ . Luego, la tercera ecuación del sistema surge de que $\llbracket \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \mathbf{n} \rrbracket = 0$ y de las definiciones de $\boldsymbol{\sigma}_\epsilon$ y $\llbracket \cdot \rrbracket$. Finalmente las condiciones de borde son triviales de asumir que Γ_N está suficientemente alejado de $B_{x_0, \epsilon}$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\tilde{\mathbf{v}}_\epsilon)) &= 0 & \text{en } D \setminus \overline{B_{x_0, \epsilon}} \\ \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\tilde{\mathbf{v}}_\epsilon)) &= \nabla \cdot ((\gamma k^\sigma - k_\epsilon^\sigma) \mathbb{B} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) & \text{en } B_{x_0, \epsilon} \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\tilde{\mathbf{v}}_\epsilon) \mathbf{n} \rrbracket &= (\gamma - 1) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \mathbf{n} - \llbracket k_\epsilon^\sigma \rrbracket \mathbb{B} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} & \text{en } \partial B_{x_0, \epsilon} \\ \tilde{\mathbf{v}}_\epsilon &= 0 & \text{en } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\tilde{\mathbf{v}}_\epsilon) \mathbf{n} &= 0 & \text{en } \Gamma_N \end{array} \right. \quad (\text{C.113})$$

Previo a continuar la operativa se destaca que k_ϵ^σ depende significativamente de si x_0 pertenece a Ω o no. Si $x_0 \in \Omega$ entonces k_ϵ^σ es idéntico a k^σ fuera de la bola y nulo en la bola. En cambio, si $x_0 \notin \Omega$ entonces k_ϵ^σ es nulo fuera

de $B_{x_0, \epsilon}$ y depende de si el punto pertenece a D_S para definir su valor en la bola. En el esquema de esta tesis, el análisis anterior admite parametrizarse en función de Ψ como muestra la Ecuación (C.114). De dicha parametrización se obtiene el resultado de la Ecuación (C.115).

$$k_\epsilon^\sigma = \begin{cases} \frac{\mathbb{1}_{D_S}(1 - \text{sign}(\Psi(x_0)))}{2\bar{\sigma}_{VM}^2} \Phi' \left(\frac{\sigma_{VM}^2(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) & \text{en } B_{x_0, \epsilon} \\ \frac{\mathbb{1}_{D_S}(1 + \text{sign}(\Psi(x_0)))}{2\bar{\sigma}_{VM}^2} \Phi' \left(\frac{\sigma_{VM}^2(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) & \text{en } D \setminus \overline{B_{x_0, \epsilon}} \end{cases} \quad (\text{C.114})$$

$$\llbracket k_\epsilon^\sigma \rrbracket = \frac{\mathbb{1}_{D_S} \text{sign} \Psi}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \Phi' \left(\frac{\sigma_{VM}^2(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) \quad (\text{C.115})$$

De forma análoga a lo hecho en el artículo de Amstutz y Novotny (2010) se aproxima $\sigma_\epsilon(\tilde{\mathbf{v}}_\epsilon)$ por la solución $\sigma_\epsilon(\mathbf{w})$ solución del problema exterior de la Ecuación (C.116). La principal diferencia entre el problema de $\tilde{\mathbf{v}}_\epsilon$ de esta tesis y el resuelto en el artículo es la segunda ecuación del sistema de la Ecuación (C.113). Se utilizó una analogía con el problema plano de elasticidad lineal, donde la ecuación de la divergencia del tensor de tensiones se asocia a las fuerzas de volumen. Aquí, donde $B_{x_0, \epsilon}$ decrece a un punto en el límite $\epsilon \searrow 0$, se consideró que los efectos de no considerar el valor no nulo de la divergencia en $B_{x_0, \epsilon}$ son despreciables frente a los otros términos de la variación.

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma_\epsilon(\mathbf{w})) &= 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \\ \llbracket \sigma_\epsilon(\mathbf{w}) \mathbf{n} \rrbracket &= -((1 - \gamma)\sigma(\mathbf{v}) + \llbracket k_\epsilon^\sigma \rrbracket \mathbb{B}\sigma(\mathbf{u}))|_{x_0} \mathbf{n} & \text{en } \partial B_{x_0, \epsilon} \\ \sigma_\epsilon(\mathbf{w}) \mathbf{n} &\rightarrow 0 & \text{en } \infty \end{cases} \quad (\text{C.116})$$

Se definen S_1 y S_2 como presentan las Ecuaciones (C.117) y (C.118). Luego, notando que $\mathbf{n}$ es entrante a $B_{x_0, \epsilon}$, se tiene que el problema de la Ecuación (C.116) es equivalente al problema de la Figura C.2, donde se se recuerda que para esta aproximación se consideró una inclusión circular. Para claridad en la representación gráfica, en el esquema de la figura se asumió que S_1 y S_2 poseen todas sus tensiones principales positivas.

$$S_1 = (1 - \gamma)\sigma(\mathbf{v})(x_0) \quad (\text{C.117})$$

$$S_2 = \frac{\mathbb{1}_{D_S}(x_0) \text{sign } \Psi(x_0)}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \Phi' \left(\frac{\sigma_{VM}^2(\mathbf{u})(x_0)}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) \mathbb{B} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})(x_0) \quad (\text{C.118})$$

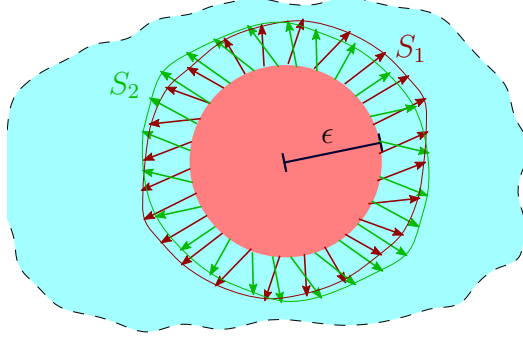


Figura C.2: Placa infinita con inclusión sometida a tensiones en su borde. Esquema del problema de la Ecuación (C.116)

Se definen β_i^+ y β_i^- como presentan las Ecuaciones (C.119) y (C.120), donde s_I^i y s_{II}^i son los valores propios de los tensores S_i . Bajo estas definiciones se tiene que $\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{w})$ admite, en coordenadas polares y en el interior de $B_{x_0, \epsilon}$, la solución dada por las Ecuaciones (C.121) a (C.123) (Amstutz y Novotny, 2010), donde α_1 y α_2 son los dados por las Ecuaciones (C.80) y (C.90), respectivamente, y $\Delta\theta$ es el ángulo entre los valores propios de los tensores S_1 y S_2 .

$$\beta_i^+ = \frac{1}{2}(s_I^i + s_{II}^i) \quad (\text{C.119})$$

$$\beta_i^- = \frac{1}{2}(s_I^i - s_{II}^i) \quad (\text{C.120})$$

$$\sigma_{rr}^\epsilon(r; \theta) = (\beta_1^+ + \beta_2^+) \frac{\alpha_1 \gamma}{1 + \alpha_1 \gamma} + \frac{\alpha_2 \gamma}{1 + \alpha_2 \gamma} (\beta_1^- \cos(2\theta) + \beta_2^- \cos(2\theta + 2\Delta\theta)) \quad (\text{C.121})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^\epsilon(r; \theta) = (\beta_1^+ + \beta_2^+) \frac{\alpha_1 \gamma}{1 + \alpha_1 \gamma} - \frac{\alpha_2 \gamma}{1 + \alpha_2 \gamma} (\beta_1^- \cos(2\theta) + \beta_2^- \cos(2\theta + 2\Delta\theta)) \quad (\text{C.122})$$

$$\sigma_{r\theta}^\epsilon(r; \theta) = \frac{-\gamma \alpha_2}{1 + \alpha_2 \gamma} (\beta_1^- \sin(2\theta) + \beta_2^- \sin(2\theta + 2\Delta\theta)) \quad (\text{C.123})$$

De forma similar a lo hecho por Amstutz y Novotny (2010), se utiliza

la simetría del tensor elástico para obtener la primera igualdad de la Ecuación (C.124) y se aproxima por la solución $\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{w})$. Luego se aproxima $\nabla^s(\mathbf{u})$ por su valor en x_0 , se sustituyen las Ecuaciones (C.121) a (C.123) y se calcula la integral. En base a una operativa muy similar a la presentada para el cálculo de la complacencia, se obtiene la Ecuación (C.125), donde $\mathbb{T}$ fue presentado en la Ecuación (5.31)

$$\begin{aligned} \int_{B_{x_0,\epsilon}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla^s(\tilde{\mathbf{v}}_\epsilon) \, d\Omega &= \int_{B_{x_0,\epsilon}} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{v}}_\epsilon) : \nabla^s(\mathbf{u}) \, d\Omega \\ &\approx \frac{1}{\gamma} \int_{B_{x_0,\epsilon}} \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{w}) : \nabla^s(\mathbf{u}) \, d\Omega \end{aligned} \quad (\text{C.124})$$

$$\begin{aligned} \int_{B_{x_0,\epsilon}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla^s(\tilde{\mathbf{v}}_\epsilon) \, d\Omega &\approx \pi\epsilon^2 \left(\mathbb{T}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right. \\ &\left. + \frac{\mathbb{1}_{D_S} \text{sign } \Psi}{(1-\gamma)\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \Phi' \left(\frac{\sigma_{\text{VM}}^2(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) \mathbb{T}\mathbb{B}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.125})$$

Se unen los resultados de las Ecuaciones (3.76), (C.112) y (C.125) y se aproximan los campos en la integral que resta calcular por sus valores en x_0 y se obtiene el resultado de la Ecuación (C.126). Se hace notar que en la ecuación anterior se utilizó la simetría y conmutatividad de los tensores $\mathbb{C}$ y $\mathbb{T}$.

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} = (\gamma - 1) \left(\right. & \left(\mathbb{I} + \mathbb{T} \right) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \\ & \left. + \frac{\mathbb{1}_{D_S} \text{sign } \Psi}{(1-\gamma)\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \Phi' \left(\frac{\sigma_{\text{VM}}^2(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) \mathbb{T}\mathbb{B}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.126})$$

Variación del término lineal

Para calcular $\delta\ell$ se analiza la función de la Ecuación (C.127). Dicha ecuación se explica pues $\mathbf{q}$ es independiente de la perturbación y el único cambio es $\mathbf{b}_\gamma$ en la bola. En base a la continuidad de $\mathbf{v}$ y el hecho que $\epsilon \searrow 0$, se tiene que $\mathbf{v}_\epsilon$ en $B_{x_0,\epsilon}$ se aproxima a $\mathbf{v}(x_0)$. Finalmente se tiene que $\delta\ell$ es según presenta la Ecuación (C.128).

$$(\ell_\epsilon - \ell)(\mathbf{v}_\epsilon) = \int_{B_{x_0,\epsilon}} (\gamma - 1) \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_\epsilon \, d\Omega \quad (\text{C.127})$$

$$\delta\ell = (\gamma - 1)\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{C.128})$$

Variación parcial del funcional respecto al estado

A continuación, en base a la definición de δJ_1 y la función regularizadora $f(\epsilon)$ se tiene la Ecuación (C.129). Luego se utiliza la definición de $\mathcal{S}_\epsilon$ y las Ecuaciones (C.101) y (C.105) para obtener la Ecuación (C.130).

$$\delta J_1 = \frac{1}{\pi\epsilon^2} \left(\mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) - \mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{u}) - \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{u}), \mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{u} \right\rangle \right) \quad (\text{C.129})$$

$$\begin{aligned} \delta J_1 = \frac{1}{\pi\epsilon^2} \int_D \mathbb{1}_{\Omega_\epsilon \cap D_S} & \left(\Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_\epsilon):\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_\epsilon)}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) - \Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}):\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}):\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \Phi' \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}):\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) \right) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{C.130})$$

De forma análoga a lo hecho por Amstutz y Novotny (2010), se define $\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon$, según se presenta en la Ecuación (C.131). Al sustituir la Ecuación (C.131) en la Ecuación (C.130) se obtiene la Ecuación (C.132).

$$\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon = \mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{u} \quad (\text{C.131})$$

$$\begin{aligned} \delta J_1 = \frac{1}{\pi\epsilon^2} \int_D \mathbb{1}_{\Omega_\epsilon \cap D_S} & \left(\Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}):\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} + \frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon):\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} + \frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon):\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon)}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) \right. \\ & \left. - \Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}):\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) - \frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}):\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon)}{\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \Phi' \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}):\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) \right) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{C.132})$$

Para definir el problema de $\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon$, se analiza el salto en las tensiones en la bola como muestra la Ecuación (C.133), donde el término de $\mathbf{u}_\epsilon$ se anula por compatibilidad del problema de elasticidad bimaterial. En base a la ecuación anterior, la formulación fuerte de $\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon$ es según se presenta en la Ecuación (C.134). En base a un argumento análogo al que se utilizó para $\tilde{\mathbf{v}}_\epsilon$, la solución en tensiones $\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon)$ se aproxima por la solución $\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{w}_2)$, solución del problema de la Ecuación (C.135), el cual es similar al de la Figura C.2.

$$\llbracket \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon) \mathbf{n} \rrbracket = \llbracket \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{n} \rrbracket - \llbracket \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{u}) \mathbf{n} \rrbracket = (\gamma - 1) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \quad (\text{C.133})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon)) &= 0 & \text{en } D \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon) \mathbf{n} \rrbracket &= -(1-\gamma) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} & \text{en } \partial B_{x_0, \epsilon} \\ \tilde{\mathbf{u}}_\epsilon &= 0 & \text{en } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon) \mathbf{n} &= 0 & \text{en } \Gamma_N \end{array} \right. \quad (\text{C.134})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{w}_2)) &= 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{w}_2) \mathbf{n} \rrbracket &= -(1-\gamma) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})(x_0) \mathbf{n} & \text{en } \partial B_{x_0, \epsilon} \\ \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{w}_2) \mathbf{n} &\rightarrow 0 & \text{en } \infty \end{array} \right. \quad (\text{C.135})$$

El argumento hecho por Amstutz y Novotny (2010) para puntos $x_0 \notin D_S$ es válido en este desarrollo por lo que δJ_1 queda según se presenta en la Ecuación (C.136). Dicho argumento no es válido para $x_0 \notin \Omega_\epsilon$ ni para $x_0 \in \Omega_\epsilon$ puesto que, como ocurre un cambio de material en la perturbación, en el primer caso si $x \notin B_{x_0, \epsilon}$, pero es suficientemente cercano a ella, entonces $x \in \Omega_\epsilon$ y en el segundo caso $\forall x \in B_{x_0, \epsilon} \Rightarrow x \in \Omega_\epsilon$.

$$\begin{aligned} \delta J_1 = \frac{1_{D_S}}{\pi \epsilon^2} \int_D 1_{\Omega_\epsilon} & \left(\Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} + \frac{\tilde{\mathbb{B}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} + \frac{\tilde{\mathbb{B}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2)}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) \right. \\ & \left. - \Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) - \frac{\tilde{\mathbb{B}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2)}{\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \Phi' \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) \right) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{C.136})$$

De forma análoga a lo hecho por Amstutz y Novotny (2010), se utilizan las formas de las soluciones de $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2)$ y de $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ para extender la integral de la Ecuación (C.136) a todo $\mathbb{R}^2$, considerando $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \approx \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})(x_0)$. Además, dicha integral se descompone en dos partes como presenta la Ecuación (C.137), donde δJ_1^a y δJ_1^b son dadas por las Ecuaciones (C.138) y (C.139), respectivamente, y $S = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})(x_0)$. A continuación se las analiza por separado.

$$\delta J_1 = \delta J_1^a + \delta J_1^b \quad (\text{C.137})$$

$$\begin{aligned} \delta J_1^a = \frac{1_{D_S}}{\pi \epsilon^2} \int_{B_{x_0, \epsilon}} 1_{\Omega_\epsilon} & \left(\Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}} S : S}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} + \frac{\tilde{\mathbb{B}} S : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2)}{\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} + \frac{\tilde{\mathbb{B}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2)}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) \right. \\ & \left. - \Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}} S : S}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) - \frac{\tilde{\mathbb{B}} S : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2)}{\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \Phi' \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}} S : S}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) \right) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{C.138})$$

$$\delta J_1^b = \frac{\mathbb{1}_{D_S}}{\pi \epsilon^2} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_{x_0, \epsilon}}} \mathbb{1}_{\Omega_\epsilon} \left(\Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}S:S}{2\bar{\sigma}_{VM}^2} + \frac{\tilde{\mathbb{B}}S:\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2)}{\bar{\sigma}_{VM}^2} + \frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2):\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2)}{2\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) - \Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}S:S}{2\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) - \frac{\tilde{\mathbb{B}}S:\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2)}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \Phi' \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}S:S}{2\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) \right) d\Omega \quad (\text{C.139})$$

En cuanto a δJ_1^a , se tiene que en $B_{x_0, \epsilon}$ el valor de la función característica del dominio perturbado cumple la Ecuación (C.140). Luego, la solución de $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2)$ en $B_{x_0, \epsilon}$ es según se presenta en la Ecuación (C.141) (Amstutz y Novotny, 2010). En base a la Ecuación (C.141) se notan los resultados de las Ecuaciones (C.142) y (C.143), donde $\mathbb{T}$ fue presentado en la Ecuación (5.31). Finalmente, se tiene que δJ_1^a es según se presenta en la Ecuación (C.144).

$$\mathbb{1}_{\Omega_\epsilon} \Big|_{x \in B_{x_0, \epsilon}} = 1 - \mathbb{1}_\Omega \quad (\text{C.140})$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r; \theta) &= (1 - \gamma) \left(\frac{\alpha_1(\sigma_I + \sigma_{II})}{2(1 + \alpha_1\gamma)} + \frac{\alpha_2(\sigma_I - \sigma_{II}) \cos(2\theta)}{2(1 + \alpha_2\gamma)} \right) \\ \sigma_{\theta\theta}(r; \theta) &= (1 - \gamma) \left(\frac{\alpha_1(\sigma_I + \sigma_{II})}{2(1 + \alpha_1\gamma)} - \frac{\alpha_2(\sigma_I - \sigma_{II}) \cos(2\theta)}{2(1 + \alpha_2\gamma)} \right) \\ \sigma_{r\theta}(r; \theta) &= -(1 - \gamma) \left(\frac{\alpha_2(\sigma_I - \sigma_{II}) \sin(2\theta)}{2(1 + \alpha_2\gamma)} \right) \end{cases} \quad (\text{C.141})$$

$$\tilde{\mathbb{B}}S : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2) \Big|_{x \in B_{x_0, \epsilon}} = \mathbb{T}\tilde{\mathbb{B}}S : S \quad (\text{C.142})$$

$$\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2) \Big|_{x \in B_{x_0, \epsilon}} = \mathbb{T}\tilde{\mathbb{B}}\mathbb{T}S : S \quad (\text{C.143})$$

$$\delta J_1^a = \mathbb{1}_{D_S} (1 - \mathbb{1}_\Omega) \left(\Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{2\bar{\sigma}_{VM}^2} + \frac{\mathbb{T}\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{VM}^2} + \frac{\mathbb{T}\tilde{\mathbb{B}}\mathbb{T}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{2\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) - \Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{2\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) - \frac{\mathbb{T}\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \Phi' \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{2\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) \right) \quad (\text{C.144})$$

En cuanto a δJ_1^b , como x_0 es un punto interior de Ω o de $D \setminus \overline{\Omega}$ se tiene que en un entorno suyo el material no cambia salvo en $B_{x_0, \epsilon}$. Por el anterior motivo, se asume que considerar la función característica del dominio perturbado como $\mathbb{1}_{\Omega_\epsilon} = \mathbb{1}_\Omega(x_0)$ es adecuado. Luego se considera el cambio de variable con-

siderado por Amstutz y Novotny (2010), dado por la Ecuación (C.145). Con la aproximación de la función característica y este cambio de variable, δJ_1^b queda según se presenta en la Ecuación (C.146).

$$\Sigma(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w})(\mathbf{x}\epsilon) \quad (\text{C.145})$$

$$\begin{aligned} \delta J_1^b = \frac{\mathbb{1}_{D_S} \mathbb{1}_\Omega}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_{x_0,1}}} & \Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}S:S}{2\sigma_{\text{VM}}^2} + \frac{\tilde{\mathbb{B}}S:\Sigma}{\sigma_{\text{VM}}^2} + \frac{\tilde{\mathbb{B}}\Sigma:\Sigma}{2\sigma_{\text{VM}}^2} \right) \\ & - \Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}S:S}{2\sigma_{\text{VM}}^2} \right) - \frac{\tilde{\mathbb{B}}S:\Sigma}{\sigma_{\text{VM}}^2} \Phi' \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}S:S}{2\sigma_{\text{VM}}^2} \right) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (\text{C.146})$$

La Ecuación (C.146) se reescribe como muestra la Ecuación (C.147), donde $\Xi(S)$ es según se presenta en la Ecuación (C.148). La transformación hecha en la anterior ecuación surgió de sumar y restar el término que quedó fuera de $\Xi(S)$.

$$\delta J_1^b = \frac{\mathbb{1}_{D_S} \mathbb{1}_\Omega}{\pi} \left(\Xi(S) + \frac{1}{2\sigma_{\text{VM}}^2} \Phi' \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}S:S}{2\sigma_{\text{VM}}^2} \right) \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_{x_0,1}}} \tilde{\mathbb{B}}\Sigma : \Sigma d\mathbf{x} \right) \quad (\text{C.147})$$

$$\begin{aligned} \Xi(S) = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_{x_0,1}}} & \Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}S:S}{2\sigma_{\text{VM}}^2} + \frac{\tilde{\mathbb{B}}S:\Sigma}{\sigma_{\text{VM}}^2} + \frac{\tilde{\mathbb{B}}\Sigma:\Sigma}{2\sigma_{\text{VM}}^2} \right) \\ & - \Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}S:S}{2\sigma_{\text{VM}}^2} \right) - \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}S:\Sigma}{\sigma_{\text{VM}}^2} + \frac{\tilde{\mathbb{B}}\Sigma:\Sigma}{2\sigma_{\text{VM}}^2} \right) \Phi' \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}S:S}{2\sigma_{\text{VM}}^2} \right) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (\text{C.148})$$

Del artículo de Amstutz y Novotny (2010) se obtuvo que la solución de $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2)$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_{x_0,\epsilon}}$ es según se presenta en la Ecuación (C.149), donde $r_\epsilon = \epsilon/r$. Para el cálculo de las integrales se utiliza el resultado de la Ecuación (C.150), donde φ es una función genérica y $t = 1/r$. En base a la anterior ecuación, la integral explícita de la Ecuación (C.147) queda según muestra la Ecuación (C.151), donde $\mathbb{S}$ fue presentado en la Ecuación (5.34). Por otra parte, en base a la Ecuación (C.149), se obtiene que $\Xi(S)$ es según se presentó en la Ecuación (5.39), en la cual se nota que $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ surge de la Ecuación (C.152) tras varias manipulaciones matemáticas. Las diferencias entre la integral de Ξ de esta tesis y la del artículo de Amstutz y Novotny (2010) se entiende que surgen de diferencias en los cambios de variable.

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r; \theta) &= (\gamma - 1) \left(\frac{(\sigma_I + \sigma_{II})r_\epsilon^2}{2(1+\alpha_1\gamma)} + \frac{(\sigma_I - \sigma_{II})\cos(2\theta)}{2(1+\alpha_2\gamma)} (4r_\epsilon^2 - 3r_\epsilon^4) \right) \\ \sigma_{\theta\theta}(r; \theta) &= (\gamma - 1) \left(-\frac{(\sigma_I + \sigma_{II})r_\epsilon^2}{2(1+\alpha_1\gamma)} + \frac{3r_\epsilon^4(\sigma_I - \sigma_{II})\cos(2\theta)}{2(1+\alpha_2\gamma)} \right) \\ \sigma_{r\theta}(r; \theta) &= \frac{(\gamma-1)(\sigma_I - \sigma_{II})(2r_\epsilon^2 - 3r_\epsilon^4)}{2(1+\alpha_2\gamma)} \sin(2\theta) \end{cases} \quad (C.149)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_{x_0,1}}} \varphi \, d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} \varphi r \, dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\varphi}{t^3} dt \quad (C.150)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_{x_0,1}}} \tilde{\mathbb{B}}\Sigma : \Sigma \, d\mathbf{x} = 2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2 \mathbb{S}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})(x_0) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})(x_0) \quad (C.151)$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}(t, \theta) = \frac{\tilde{\mathbb{B}}S : \Sigma(t, \theta)}{\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} + \frac{\tilde{\mathbb{B}}\Sigma(t, \theta) : \Sigma(t, \theta)}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \quad (C.152)$$

Se sustituye la Ecuación (C.151) en la Ecuación (C.147) y se obtiene la expresión para δJ_1^b de la Ecuación (C.153). Se combinan los resultados de las Ecuaciones (C.137), (C.144) y (C.153) para obtener finalmente el resultado de δJ_1 según presenta la Ecuación (C.154).

$$\delta J_1^b = \frac{1_{D_S} 1_\Omega}{\pi} \left(\Xi(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) + \Phi' \left(\frac{\sigma_{\text{VM}}^2}{\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) \mathbb{S}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \right) \quad (C.153)$$

$$\begin{aligned} \delta J_1 &= 1_{D_S} (1 - 1_\Omega) \left(\Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} + \frac{\mathbb{T}\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} + \frac{\mathbb{T}\tilde{\mathbb{B}}\mathbb{T}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \Phi \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) - \frac{\mathbb{T}\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \Phi' \left(\frac{\tilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{2\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) \right) \\ &\quad + \frac{1_{D_S} 1_\Omega}{\pi} \left(\Xi(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) + \Phi' \left(\frac{\sigma_{\text{VM}}^2(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{\text{VM}}^2} \right) \mathbb{S}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \right) \end{aligned} \quad (C.154)$$

Variación parcial del funcional respecto al dominio

Finalmente, en base a la definición de δJ_2 y la función regularizadora $f(\epsilon)$ se tiene la Ecuación (C.155). La diferencia entre ambas integrales es la integral en $B_{x_0, \epsilon} \cap D_S$ con cierto cuidado en la definición del signo, según se explica a continuación. Si $x_0 \in \Omega$, ($\Psi(x_0) > 0$) entonces la primera integral no se evalúa en un entorno de x_0 ; en cambio si $x_0 \notin \Omega$, ($\Psi(x_0) < 0$) entonces la segunda integral no se evalúa en un entorno de x_0 . En base al análisis anterior se obtiene la Ecuación (C.156). Finalmente se aproxima el integrando por su valor en x_0

y se obtiene el resultado final de δJ_2 como muestra la Ecuación (C.157).

$$\delta J_2 = \frac{1}{\pi \epsilon^2} \left(\int_{\Omega_\epsilon \cap D_S} \Phi \left(\frac{\sigma_{VM}^2(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) d\Omega - \int_{\Omega \cap D_S} \Phi \left(\frac{\sigma_{VM}^2(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) d\Omega \right) \quad (C.155)$$

$$\delta J_2 = \frac{-\text{sign}(\Psi)}{\pi \epsilon^2} \int_{B_{x_0, \epsilon} \cap D_S} \Phi \left(\frac{\sigma_{VM}^2(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) d\Omega \quad (C.156)$$

$$\delta J_2 = -\mathbb{1}_{D_S} \text{sign}(\Psi) \Phi \left(\frac{\sigma_{VM}^2(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_{VM}^2} \right) \quad (C.157)$$

Se combinan las Ecuaciones (C.97), (C.126), (C.128), (C.154) y (C.157) para obtener la derivada topológica del funcional de tensiones tal y como se presentó en la Ecuación (5.30). Se finaliza de esta forma el cálculo de la DT del funcional de tensiones para un EC particular.

Anexo D

Tracción uniaxial en una placa circular con inclusión

En este anexo se presenta el cálculo de los desplazamientos y tensiones para una placa circular con una inclusión circular sometida a tracción uniaxial. Este cálculo fue necesario para el modelo analítico con el cual se contrastó el XFEM en el Capítulo 4. En la Figura D.1 se presenta el esquema del problema, donde R_e es el radio de la placa exterior, R_i es el radio de la inclusión y S es la tensión de tracción aplicada máxima. Se definió este problema como de tracción uniaxial porque en el caso particular en que el material de la inclusión y la placa exterior son el mismo, el estado tensional coincide con el de una barra sometida a tracción uniaxial de tensión S . Esto último es demostrado al final de este apéndice.

Se considera que el material exterior tiene un módulo de Young $E^e = E$ y un coeficiente de Poisson $\nu^e = \nu$ y que el material de la inclusión tiene un módulo de Young $E^i = \gamma E$ y un coeficiente de Poisson $\nu^i = \nu$. A partir de las Ecuaciones (2.8) y (2.30), se obtiene que el segundo parámetro de Lamé de la inclusión vale $\mu^i = \gamma\mu$ y de la placa circular vale $\mu^e = \mu$ y la constante de Kolosov vale para ambos materiales $\kappa^e = \kappa^i = \kappa$.

Análisis de la placa circular exterior

Como la placa circular exterior es una región acotada no simplemente conexa, en la cual su único hueco tiene fuerza neta nula, los potenciales complejos descritos en la Sección 2.3 se asumen como presentan las Ecuaciones (D.1)

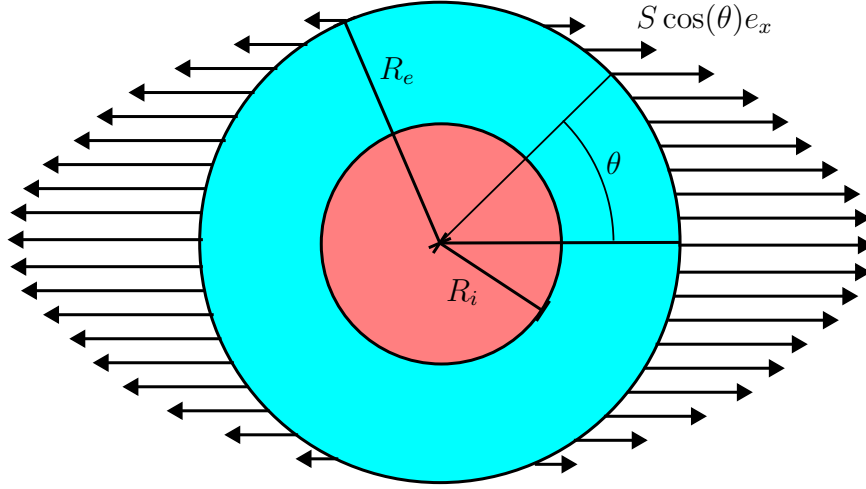


Figura D.1: Esquema del problema de tracción en una placa circular con inclusión

a (D.3), donde a_n y b_n son coeficientes complejos a determinar. La extensión de la serie hasta términos de orden tres es admisible pues, como se muestra al final del análisis, es suficiente para verificar todas las condiciones del problema. En las cuentas siguientes se utiliza la notación de superíndice r para la parte real de las constantes y superíndice i para la parte imaginaria.

$$\Upsilon(z)^e = \sum_{n=-3}^3 a_n z^n = a_{-3} z^{-3} + a_{-2} z^{-2} + a_{-1} z^{-1} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \quad (\text{D.1})$$

$$\psi(z)^e = \sum_{n=-3}^3 b_n z^n = b_{-3} z^{-3} + b_{-2} z^{-2} + b_{-1} z^{-1} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 \quad (\text{D.2})$$

$$\chi(z)^e = -\frac{b_{-3}}{2} z^{-2} - b_{-2} z^{-1} + b_{-1} \log(z) + b_0 z + \frac{b_1}{2} z^2 + \frac{b_2}{3} z^3 + \frac{b_3}{4} z^4 \quad (\text{D.3})$$

Se considera el número complejo z en notación polar ($z = r e^{i\theta}$) y la expresión de la Ecuación (2.28) y se obtiene que la función de tensiones de Airy se expresa como se presenta en la Ecuación (D.4), donde m es un número entero cualquiera. Luego, a partir de la Ecuación (B.4), se obtienen las componentes del tensor de tensiones en coordenadas polares para la placa exterior según se presenta en las Ecuaciones (D.5) a (D.7).

$$\begin{aligned}
\phi^e(r; \theta) = & a_{-3}^r \frac{\cos(4\theta)}{r^2} + a_{-3}^i \frac{\sin(4\theta)}{r^2} + a_{-2}^r \frac{\cos(3\theta)}{r} + a_{-2}^i \frac{\sin(3\theta)}{r} \\
& + a_{-1}^r \cos(2\theta) + a_{-1}^i \sin(2\theta) + a_0^r r \cos(\theta) + a_0^i r \sin(\theta) \\
& + a_1^r r^2 + a_2^r r^3 \cos(\theta) - a_2^i r^3 \sin(\theta) + a_3^r r^4 \cos(2\theta) \\
& - a_3^i r^4 \sin(2\theta) - b_{-3}^r \frac{\cos(2\theta)}{2r^2} - b_{-3}^i \frac{\sin(2\theta)}{2r^2} - b_{-2}^r \frac{\cos(\theta)}{r} \\
& - b_{-2}^i \frac{\sin(\theta)}{r} + b_{-1}^r \log(r) + b_{-1}^i (2\pi m - \theta) + b_0^r r \cos(\theta) \\
& - b_0^i r \sin(\theta) + \frac{b_1^r}{2} r^2 \cos(2\theta) - \frac{b_1^i}{2} r^2 \sin(2\theta) + \frac{b_2^r}{3} r^3 \cos(3\theta) \\
& - \frac{b_2^i}{3} r^3 \sin(3\theta) + \frac{b_3^r}{4} r^4 \cos(4\theta) - \frac{b_3^i}{4} r^4 \sin(4\theta)
\end{aligned} \tag{D.4}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^e(r; \theta) = & -18a_{-3}^r \frac{\cos(4\theta)}{r^4} - 18a_{-3}^i \frac{\sin(4\theta)}{r^4} \\
& -10a_{-2}^r \frac{\cos(3\theta)}{r^3} - 10a_{-2}^i \frac{\sin(3\theta)}{r^3} - 4a_{-1}^r \frac{\cos(2\theta)}{r^2} \\
& -4a_{-1}^i \frac{\sin(2\theta)}{r^2} + 2a_1^r + 2a_2^r r \cos(\theta) - 2a_2^i r \sin(\theta) \\
& + 3b_{-3}^r \frac{\cos(2\theta)}{r^4} + 3b_{-3}^i \frac{\sin(2\theta)}{r^4} + 2b_{-2}^r \frac{\cos(\theta)}{r^3} + 2b_{-2}^i \frac{\sin(\theta)}{r^3} \\
& + b_{-1}^r \frac{1}{r^2} - b_1^r \cos(2\theta) + b_1^i \sin(2\theta) - 2b_2^r r \cos(3\theta) \\
& + 2b_2^i r \sin(3\theta) - 3b_3^r r^2 \cos(4\theta) + 3b_3^i r^2 \sin(4\theta)
\end{aligned} \tag{D.5}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}^e(r; \theta) = & 6a_{-3}^r \frac{\cos(4\theta)}{r^4} + 6a_{-3}^i \frac{\sin(4\theta)}{r^4} + 2a_{-2}^r \frac{\cos(3\theta)}{r^3} + \\
& 2a_{-2}^i \frac{\sin(3\theta)}{r^3} + 2a_1^r + 6a_2^r r \cos(\theta) - 6a_2^i r \sin(\theta) \\
& + 12a_3^r r^2 \cos(2\theta) - 12a_3^i r^2 \sin(2\theta) - 3b_{-3}^r \frac{\cos(2\theta)}{r^4} \\
& - 3b_{-3}^i \frac{\sin(2\theta)}{r^4} - 2b_{-2}^r \frac{\cos(\theta)}{r^3} - 2b_{-2}^i \frac{\sin(\theta)}{r^3} - b_{-1}^r \frac{1}{r^2} \\
& + b_1^r \cos(2\theta) - b_1^i \sin(2\theta) + 2b_2^r r \cos(3\theta) - 2b_2^i r \sin(3\theta) \\
& + 3b_3^r r^2 \cos(4\theta) - 3b_3^i r^2 \sin(4\theta)
\end{aligned} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta}^e(r; \theta) = & -12a_{-3}^r \frac{\sin(4\theta)}{r^4} + 12a_{-3}^i \frac{\cos(4\theta)}{r^4} - 6a_{-2}^r \frac{\sin(3\theta)}{r^3} \\
& + 6a_{-2}^i \frac{\cos(3\theta)}{r^3} - 2a_{-1}^r \frac{\sin(2\theta)}{r^2} + 2a_{-1}^i \frac{\cos(2\theta)}{r^2} \\
& + 2a_2^r r \sin(\theta) + 2a_2^i r \cos(\theta) + 6a_3^r r^2 \sin(2\theta) \\
& + 6a_3^i r^2 \cos(2\theta) + 3b_{-3}^r \frac{\sin(2\theta)}{r^4} - 3b_{-3}^i \frac{\cos(2\theta)}{r^4} \\
& + 2b_{-2}^r \frac{\sin(\theta)}{r^3} - 2b_{-2}^i \frac{\cos(\theta)}{r^3} - b_{-1}^i \frac{1}{r^2} + b_1^r \sin(2\theta) \\
& + b_1^i \cos(2\theta) + 2b_2^r r \sin(3\theta) + 2b_2^i r \cos(3\theta) + 3b_3^r r^2 \sin(4\theta) \\
& + 3b_3^i r^2 \cos(4\theta)
\end{aligned} \tag{D.7}$$

A continuación, a partir de la Ecuación (2.29), se obtienen las componentes en coordenadas cartesianas de los desplazamientos en la placa circular exterior según se presenta en las Ecuaciones (D.8) y (D.9).

$$\begin{aligned}
u_x^e(r; \theta) = \frac{1}{2\mu r^3} \Bigg(& a_{-3}^r (3 \cos(5\theta) + \kappa \cos(3\theta)) \\
& + a_{-3}^i (3 \sin(5\theta) + \kappa \sin(3\theta)) \\
& + a_{-2}^r r (2 \cos(4\theta) + \kappa \cos(2\theta)) \\
& + a_{-2}^i r (2 \sin(4\theta) + \kappa \sin(2\theta)) \\
& + a_{-1}^r r^2 (\cos(3\theta) + \kappa \cos(\theta)) \\
& + a_{-1}^i r^2 (\sin(3\theta) + \kappa \sin(\theta)) + a_0^r \kappa r^3 \\
& + a_1^r (\kappa - 1) r^4 \cos(\theta) - a_1^i (\kappa + 1) r^4 \sin(\theta) \\
& + a_2^r r^5 (\kappa \cos(2\theta) - 2) - a_2^i \kappa r^5 \sin(2\theta) \\
& + a_3^r r^6 (\kappa \cos(3\theta) - 3 \cos(\theta)) \\
& + a_3^i r^6 (3 \sin(\theta) - \kappa \sin(3\theta)) - b_{-3}^r \cos(3\theta) \\
& - b_{-3}^i \sin(3\theta) - b_{-2}^r r \cos(2\theta) - b_{-2}^i r \sin(2\theta) \\
& - b_{-1}^r r^2 \cos(\theta) - b_{-1}^i r^2 \sin(\theta) - b_0^r r^3 - b_1^r r^4 \cos(\theta) \\
& + b_1^i r^4 \sin(\theta) - b_2^r r^5 \cos(2\theta) + b_2^i r^5 \sin(2\theta) \\
& - b_3^r r^6 \cos(3\theta) + b_3^i r^6 \sin(3\theta) \Bigg)
\end{aligned} \tag{D.8}$$

$$\begin{aligned}
u_y^e(r; \theta) = \frac{1}{2\mu r^3} \bigg(& a_{-3}^r (3 \sin(5\theta) - \kappa \sin(3\theta)) \\
& + a_{-3}^i (\kappa \cos(3\theta) - 3 \cos(5\theta)) \\
& + a_{-2}^r r (2 \sin(4\theta) - \kappa \sin(2\theta)) \\
& + a_{-2}^i r (-2 \cos(4\theta) + \kappa \cos(2\theta)) \\
& + a_{-1}^r r^2 (\sin(3\theta) - \kappa \sin(\theta)) \\
& + a_{-1}^i r^2 (\kappa \cos(\theta) - \cos(3\theta)) + a_0^i \kappa r^3 \\
& + a_1^r (\kappa - 1) r^4 \sin(\theta) + a_1^i (\kappa + 1) r^4 \cos(\theta) \\
& + a_2^r \kappa r^5 \sin(2\theta) + a_2^i r^5 (\kappa \cos(2\theta) + 2) \\
& + a_3^r r^6 (3 \sin(\theta) + \kappa \sin(3\theta)) \\
& + a_3^i r^6 (3 \cos(\theta) + \kappa \cos(3\theta)) - b_{-3}^r \sin(3\theta) \\
& + b_{-3}^i \cos(3\theta) - b_{-2}^r r \sin(2\theta) + b_{-2}^i r \cos(2\theta) \\
& - b_{-1}^r r^2 \sin(\theta) + b_{-1}^i r^2 \cos(\theta) + b_0^i r^3 + b_1^r r^4 \sin(\theta) \\
& + b_1^i r^4 \cos(\theta) + b_2^r r^5 \sin(2\theta) + b_2^i r^5 \cos(2\theta) \\
& + b_3^r r^6 \sin(3\theta) + b_3^i r^6 \cos(3\theta) \bigg) \tag{D.9}
\end{aligned}$$

Análisis de la inclusión

Como la inclusión es una región acotada simplemente conexa, los potenciales complejos descritos en la Sección 2.3 se asumen según se presentan en las Ecuaciones (D.10) a (D.12), donde c_n y d_n son coeficientes complejos a determinar. La extensión de la serie hasta términos de orden tres es admisible pues, como se muestra al final del análisis, es suficiente para verificar todas las condiciones del problema.

$$\Upsilon(z)^i = \sum_{n=0}^3 c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 \tag{D.10}$$

$$\psi(z)^i = \sum_{n=0}^3 d_n z^n = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 \tag{D.11}$$

$$\chi(z)^i = d_0 z + \frac{d_1}{2} z^2 + \frac{d_2}{3} z^3 + \frac{d_3}{4} z^4 \tag{D.12}$$

Nuevamente se considera el número complejo z en notación polar ($z = r e^{i\theta}$) y la expresión de la Ecuación (2.28), y se obtiene la función de tensiones de Airy

como se presenta en la Ecuación (D.13). Luego, a partir de la Ecuación (B.4), se obtienen las componentes del tensor de tensiones en coordenadas polares para la inclusión según se presenta en las Ecuaciones (D.14) a (D.16).

$$\begin{aligned}
\phi^i(r; \theta) = & c_0^r r \cos(\theta) + c_0^i r \sin(\theta) + c_1^r r^2 + c_2^r r^3 \cos(\theta) - c_2^i r^3 \sin(\theta) \\
& + c_3^r r^4 \cos(2\theta) - c_3^i r^4 \sin(2\theta) + d_0^r r \cos(\theta) - d_0^i r \sin(\theta) \\
& + \frac{d_1^r}{2} r^2 \cos(2\theta) - \frac{d_1^i}{2} r^2 \sin(2\theta) + \frac{d_2^r}{3} r^3 \cos(3\theta) \\
& - \frac{d_2^i}{3} r^3 \sin(3\theta) + \frac{d_3^r}{4} r^4 \cos(4\theta) - \frac{d_3^i}{4} r^4 \sin(4\theta)
\end{aligned} \tag{D.13}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^i(r; \theta) = & 2c_1^r + 2c_2^r r \cos(\theta) - 2c_2^i r \sin(\theta) - d_1^r \cos(2\theta) + d_1^i \sin(2\theta) \\
& - 2d_2^r r \cos(3\theta) + 2d_2^i r \sin(3\theta) - 3d_3^r r^2 \cos(4\theta) \\
& + 3d_3^i r^2 \sin(4\theta)
\end{aligned} \tag{D.14}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}^i(r; \theta) = & 2c_1^r + 6c_2^r r \cos(\theta) - 6c_2^i r \sin(\theta) + 12c_3^r r^2 \cos(2\theta) \\
& - 12c_3^i r^2 \sin(2\theta) + d_1^r \cos(2\theta) - d_1^i \sin(2\theta) + 2d_2^r r \cos(3\theta) \\
& - 2d_2^i r \sin(3\theta) + 3d_3^r r^2 \cos(4\theta) - 3d_3^i r^2 \sin(4\theta)
\end{aligned} \tag{D.15}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta}^i(r; \theta) = & 2c_2^r r \sin(\theta) + 2c_2^i r \cos(\theta) + 6c_3^r r^2 \sin(2\theta) + 6c_3^i r^2 \cos(2\theta) \\
& + d_1^r \sin(2\theta) + d_1^i \cos(2\theta) + 2d_2^r r \sin(3\theta) + 2d_2^i r \cos(3\theta) \\
& + 3d_3^r r^2 \sin(4\theta) + 3d_3^i r^2 \cos(4\theta)
\end{aligned} \tag{D.16}$$

A continuación, mediante la Ecuación (2.29), se obtienen las componentes en coordenadas cartesianas de los desplazamientos en la inclusión, según se presenta en las Ecuaciones (D.17) y (D.18).

$$\begin{aligned}
u_x^i(r; \theta) = \frac{1}{2\gamma\mu} \bigg(& c_0^r \kappa + c_1^r (\kappa - 1) r \cos(\theta) - c_1^i (\kappa + 1) r \sin(\theta) \\
& + c_2^r r^2 (\kappa \cos(2\theta) - 2) - c_2^i \kappa r^2 \sin(2\theta) \\
& + c_3^r r^3 (\kappa \cos(3\theta) - 3 \cos(\theta)) \\
& + c_3^i r^3 (3 \sin(\theta) - \kappa \sin(3\theta)) - d_0^r - d_1^r r \cos(\theta) \\
& + d_1^i r \sin(\theta) - d_2^r r^2 \cos(2\theta) + d_2^i r^2 \sin(2\theta) \\
& - d_3^r r^3 \cos(3\theta) + d_3^i r^3 \sin(3\theta) \bigg)
\end{aligned} \tag{D.17}$$

$$\begin{aligned}
u_y^i(r; \theta) = \frac{1}{2\gamma\mu} \bigg(& c_0^i \kappa + c_1^r (\kappa - 1) r \sin(\theta) + c_1^i (\kappa + 1) r \cos(\theta) \\
& + c_2^r \kappa r^2 \sin(2\theta) + c_2^i r^2 (\kappa \cos(2\theta) + 2) \\
& + c_3^r r^3 (\kappa \sin(3\theta) + 3 \sin(\theta)) \\
& + c_3^i r^3 (\kappa \cos(3\theta) + 3 \cos(\theta)) + d_0^i + d_1^r r \sin(\theta) \\
& + d_1^i r \cos(\theta) + d_2^r r^2 \sin(2\theta) + d_2^i r^2 \cos(2\theta) \\
& + d_3^r r^3 \sin(3\theta) + d_3^i r^3 \cos(3\theta) \bigg)
\end{aligned} \tag{D.18}$$

Condiciones de borde e interfase

Desarrollados los campos de tensiones, y desplazamientos en función de las constantes a determinar, se pasan a aplicar las condiciones de borde y de interfase para obtener dichas constantes. La primera condición está dada por la tensión aplicada en la cara exterior como se presenta en la Figura D.2. Esta condición se expresa en las Ecuaciones (D.19) y (D.20).

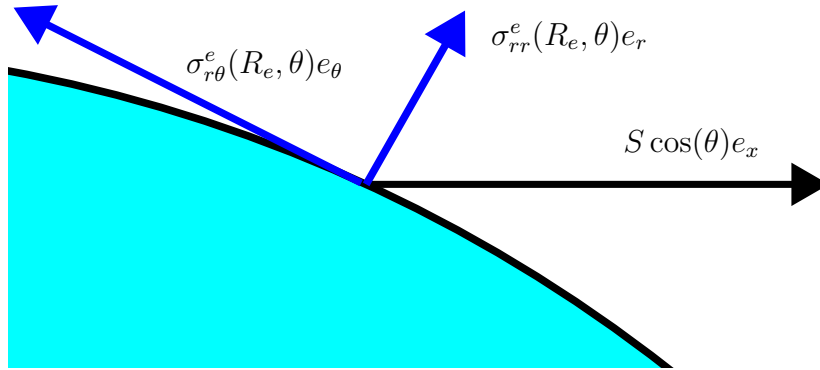


Figura D.2: Condición de borde en la cara exterior de la placa circular

$$\sigma_{rr}^e(R_e, \theta) = S \cos^2(\theta) = \frac{S}{2}(1 + \cos(2\theta)) \quad (\text{D.19})$$

$$\sigma_{r\theta}^e(R_e, \theta) = -S \cos(\theta) \sin(\theta) = -\frac{S}{2} \sin(2\theta) \quad (\text{D.20})$$

Al unir la Ecuación (D.19) con la Ecuación (D.5) se obtiene un conjunto de ecuaciones ya que, como la ecuación debe valer para todo θ , se deben igualar los distintos términos trigonométricos por separado. La Ecuación (D.21) surge de igualar los términos sin seno ni coseno. La Ecuación (D.22) surge de igualar los términos con $\cos(\theta)$. La Ecuación (D.23) surge de igualar los términos con $\cos(2\theta)$. La Ecuación (D.24) surge de igualar los términos con $\cos(3\theta)$. La Ecuación (D.25) surge de igualar los términos con $\cos(4\theta)$. La Ecuación (D.26) surge de igualar los términos con $\sin(\theta)$. La Ecuación (D.27) surge de igualar los términos con $\sin(2\theta)$. La Ecuación (D.28) surge de igualar los términos con $\sin(3\theta)$. Finalmente, la Ecuación (D.29) surge de igualar los términos con $\sin(4\theta)$.

$$\frac{S}{2} = 2a_1^r + \frac{b_{-1}^r}{R_e^2} \quad (\text{D.21})$$

$$0 = 2a_2^r R_e + \frac{2b_{-2}^r}{R_e^3} \quad (\text{D.22})$$

$$\frac{S}{2} = \frac{-4a_{-1}^r}{R_e^2} + \frac{3b_{-3}^r}{R_e^4} - b_1^r \quad (\text{D.23})$$

$$0 = \frac{-10a_{-2}^r}{R_e^3} - 2b_2^r R_e \quad (\text{D.24})$$

$$0 = \frac{-18a_{-3}^r}{R_e^4} - 3b_3^r R_e^2 \quad (\text{D.25})$$

$$0 = -2a_2^i R_e + \frac{2b_{-2}^i}{R_e^3} \quad (\text{D.26})$$

$$0 = \frac{-4a_{-1}^i}{R_e^2} + \frac{3b_{-3}^i}{R_e^4} + b_1^i \quad (\text{D.27})$$

$$0 = \frac{-10a_{-2}^i}{R_e^3} + 2b_2^i R_e \quad (\text{D.28})$$

$$0 = \frac{-18a_{-3}^i}{R_e^4} + 3b_3^i R_e^2 \quad (\text{D.29})$$

Luego, se unen la Ecuación (D.20) con la Ecuación (D.7) para obtener un nuevo conjunto de ecuaciones. La Ecuación (D.30) surge de igualar los términos sin seno ni coseno. La Ecuación (D.31) surge de igualar los términos con $\cos(\theta)$. La Ecuación (D.32) surge de igualar los términos con $\cos(2\theta)$. La Ecuación (D.33) surge de igualar los términos con $\cos(3\theta)$. La Ecuación (D.34) surge de igualar los términos con $\cos(4\theta)$. La Ecuación (D.35) surge de igualar los términos con $\sin(\theta)$. La Ecuación (D.36) surge de igualar los términos con $\sin(2\theta)$. La Ecuación (D.37) surge de igualar los términos con $\sin(3\theta)$. Finalmente, la Ecuación (D.38) surge de igualar los términos con $\sin(4\theta)$.

$$0 = -\frac{b_{-1}^i}{R_e^2} \quad (\text{D.30})$$

$$0 = 2a_2^i R_e + \frac{-2b_{-2}^i}{R_e^3} \quad (\text{D.31})$$

$$0 = \frac{2a_{-1}^i}{R_e^2} + 6a_3^i R_e^2 + \frac{-3b_{-3}^i}{R_e^4} + b_1^i \quad (\text{D.32})$$

$$0 = \frac{6a_{-2}^i}{R_e^3} + 2b_2^i R_e \quad (\text{D.33})$$

$$0 = \frac{12a_{-3}^i}{R_e^4} + 3b_3^i R_e^2 \quad (\text{D.34})$$

$$0 = 2a_2^r R_e + \frac{2b_{-2}^r}{R_e^3} \quad (\text{D.35})$$

$$\frac{-S}{2} = -\frac{2a_{-1}^r}{R_e^2} + 6a_3^r R_e^2 + \frac{3b_{-3}^r}{R_e^4} + b_1^r \quad (\text{D.36})$$

$$0 = \frac{-6a_{-2}^r}{R_e^3} + 2b_2^r R_e \quad (\text{D.37})$$

$$0 = \frac{-12a_{-3}^r}{R_e^4} + 3b_3^r R_e^2 \quad (\text{D.38})$$

La siguiente condición que aplica es la interfase entre los dos materiales. En esta condición aplican las ecuaciones presentadas en la Ecuación (2.18) que

se presentan, aplicadas a este caso, en las Ecuaciones (D.39) a (D.42).

$$\sigma_{rr}^e(R_i, \theta) = \sigma_{rr}^i(R_i, \theta) \quad (\text{D.39})$$

$$\sigma_{r\theta}^e(R_i, \theta) = \sigma_{r\theta}^i(R_i, \theta) \quad (\text{D.40})$$

$$u_x^e(R_i, \theta) = u_x^i(R_i, \theta) \quad (\text{D.41})$$

$$u_y^e(R_i, \theta) = u_y^i(R_i, \theta) \quad (\text{D.42})$$

Al aplicar la Ecuación (D.39) a las Ecuaciones (D.5) y (D.14) se obtiene un nuevo conjunto de ecuaciones. La Ecuación (D.43) surge de igualar los términos sin seno ni coseno. La Ecuación (D.44) surge de igualar los términos con $\cos(\theta)$. La Ecuación (D.45) surge de igualar los términos con $\cos(2\theta)$. La Ecuación (D.46) surge de igualar los términos con $\cos(3\theta)$. La Ecuación (D.47) surge de igualar los términos con $\cos(4\theta)$. La Ecuación (D.48) surge de igualar los términos con $\sin(\theta)$. La Ecuación (D.49) surge de igualar los términos con $\sin(2\theta)$. La Ecuación (D.50) surge de igualar los términos con $\sin(3\theta)$. Finalmente, la Ecuación (D.51) surge de igualar los términos con $\sin(4\theta)$.

$$2a_1^r + \frac{b_{-1}^r}{R_i^2} = 2c_1^r \quad (\text{D.43})$$

$$2a_2^r R_i + \frac{2b_{-2}^r}{R_i^3} = 2c_2^r R_i \quad (\text{D.44})$$

$$\frac{-4a_{-1}^r}{R_i^2} + \frac{3b_{-3}^r}{R_i^4} - b_1^r = -d_1^r \quad (\text{D.45})$$

$$\frac{-10a_{-2}^r}{R_i^3} - 2b_2^r R_i = -2d_2^r R_i \quad (\text{D.46})$$

$$\frac{-18a_{-3}^r}{R_i^4} - 3b_3^r R_i^2 = -3d_3^r R_i^2 \quad (\text{D.47})$$

$$-2a_2^i R_i + \frac{2b_{-2}^i}{R_i^3} = -2c_2^i R_i \quad (\text{D.48})$$

$$\frac{-4a_{-1}^i}{R_i^2} + \frac{3b_{-3}^i}{R_i^4} + b_1^i = d_1^i \quad (\text{D.49})$$

$$\frac{-10a_{-2}^i}{R_i^3} + 2b_2^i R_i = 2d_2^i R_i \quad (\text{D.50})$$

$$\frac{-18a_{-3}^i}{R_i^4} + 3b_3^i R_i^2 = 3d_3^i R_i^2 \quad (\text{D.51})$$

Se aplica la Ecuación (D.40) a las Ecuaciones (D.7) y (D.16) y se obtiene un nuevo conjunto de ecuaciones. La Ecuación (D.52) surge de igualar los términos sin seno ni coseno. La Ecuación (D.53) surge de igualar los términos con $\cos(\theta)$. La Ecuación (D.54) surge de igualar los términos con $\cos(2\theta)$. La Ecuación (D.55) surge de igualar los términos con $\cos(3\theta)$. La Ecuación (D.56) surge de igualar los términos con $\cos(4\theta)$. La Ecuación (D.57) surge de igualar los términos con $\sin(\theta)$. La Ecuación (D.58) surge de igualar los términos con $\sin(2\theta)$. La Ecuación (D.59) surge de igualar los términos con $\sin(3\theta)$. Finalmente, la Ecuación (D.60) surge de igualar los términos con $\sin(4\theta)$.

$$\frac{-b_{-1}^i}{R_i^2} = 0 \quad (\text{D.52})$$

$$2a_2^i R_i - \frac{2b_{-2}^i}{R_i^3} = 2c_2^i R_i \quad (\text{D.53})$$

$$\frac{2a_{-1}^i}{R_i^2} + 6a_3^i R_i^2 + \frac{-3b_{-3}^i}{R_i^4} + b_1^i = 6c_3^i R_i^2 + d_1^i \quad (\text{D.54})$$

$$\frac{6a_{-2}^i}{R_i^3} + 2b_2^i R_i = 2d_2^i R_i \quad (\text{D.55})$$

$$\frac{12a_{-3}^i}{R_i^4} + 3b_3^i R_i^2 = 3d_3^i R_i^2 \quad (\text{D.56})$$

$$2a_2^r R_i + \frac{2b_{-2}^r}{R_i^3} = 2c_2^r R_i \quad (\text{D.57})$$

$$\frac{-2a_{-1}^r}{R_i^2} + 6a_3^r R_i^2 + \frac{3b_{-3}^r}{R_i^4} + b_1^r = 6c_3^r R_i^2 + d_1^r \quad (\text{D.58})$$

$$\frac{-6a_{-2}^r}{R_i^3} + 2b_2^r R_i = 2d_2^r R_i \quad (\text{D.59})$$

$$\frac{-12a_{-3}^r}{R_i^4} + 3b_3^r R_i^2 = 3d_3^r R_i^2 \quad (\text{D.60})$$

Se aplica la Ecuación (D.41) a las Ecuaciones (D.8) y (D.17) y se obtiene un nuevo conjunto de ecuaciones. La Ecuación (D.61) surge de igualar los términos sin seno ni coseno. La Ecuación (D.62) surge de igualar los términos con $\cos(\theta)$. La Ecuación (D.63) surge de igualar los términos con $\cos(2\theta)$. La Ecuación (D.64) surge de igualar los términos con $\cos(3\theta)$. La Ecuación (D.65) surge de igualar los términos con $\cos(4\theta)$. La Ecuación (D.66) surge de igualar los términos con $\cos(5\theta)$. La Ecuación (D.67) surge de igualar los términos con $\sin(\theta)$. La Ecuación (D.68) surge de igualar los términos con $\sin(2\theta)$. La Ecuación (D.69) surge de igualar los términos con $\sin(3\theta)$. La Ecuación (D.70) surge de igualar los términos con $\sin(4\theta)$. Finalmente, la Ecuación (D.71) surge de igualar los términos con $\sin(5\theta)$.

$$\gamma(a_0^r \kappa R_i^3 - 2a_2^r R_i^5 - b_0^r R_i^3) = R_i^3(c_0^r \kappa - 2c_2^r R_i^2 - d_0^r) \quad (\text{D.61})$$

$$\gamma \left(\begin{array}{l} \kappa a_{-1}^r R_i^2 + a_1^r (\kappa - 1) R_i^4 \\ -3a_3^r R_i^6 - b_{-1}^r R_i^2 - b_1^r R_i^4 \end{array} \right) = R_i^3(c_1^r (\kappa - 1) R_i - 3c_3^r R_i^3 - d_1^r R_i) \quad (\text{D.62})$$

$$\gamma(a_{-2}^r \kappa R_i + a_2^r R_i^5 \kappa - b_{-2}^r R_i - b_2^r R_i^5) = R_i^3(c_2^r \kappa R_i^2 - d_2^r R_i^2) \quad (\text{D.63})$$

$$\gamma(\kappa a_{-3}^r + a_{-1}^r R_i^2 + a_3^r R_i^6 \kappa - b_{-3}^r - b_3^r R_i^6) = R_i^3(c_3^r R_i^3 \kappa - d_3^r R_i^3) \quad (\text{D.64})$$

$$\gamma(2a_{-2}^r R_i) = 0 \quad (\text{D.65})$$

$$\gamma(3a_{-3}^r) = 0 \quad (\text{D.66})$$

$$\gamma \left(\begin{array}{c} a_{-1}^i \kappa R_i^2 - a_1^i (\kappa + 1) R_i^4 \\ + 3a_3^i R_i^6 - b_{-1}^i R_i^2 + b_1^i R_i^4 \end{array} \right) = R_i^3 (-c_1^i (\kappa + 1) R_i + 3c_3^i R_i^3 + d_1^i R_i) \quad (D.67)$$

$$\gamma(a_{-2}^i \kappa R_i - a_2^i \kappa R_i^5 - b_{-2}^i R_i + b_2^i R_i^5) = R_i^3 (-c_2^i \kappa R_i^2 + d_2^i R_i^2) \quad (D.68)$$

$$\gamma(a_{-3}^i \kappa + a_{-1}^i R_i^2 - a_3^i \kappa R_i^6 - b_{-3}^i + b_3^i R_i^6) = R_i^3 (-c_3^i \kappa R_i^3 + d_3^i R_i^3) \quad (D.69)$$

$$\gamma(2a_{-2}^i R_i) = 0 \quad (D.70)$$

$$3\gamma a_{-3}^i = 0 \quad (D.71)$$

Se aplica la Ecuación (D.42) a las Ecuaciones (D.9) y (D.18) y se obtiene un nuevo conjunto de ecuaciones. La Ecuación (D.72) surge de igualar los términos sin seno ni coseno. La Ecuación (D.73) surge de igualar los términos con $\cos(\theta)$. La Ecuación (D.74) surge de igualar los términos con $\cos(2\theta)$. La Ecuación (D.75) surge de igualar los términos con $\cos(3\theta)$. La Ecuación (D.76) surge de igualar los términos con $\cos(4\theta)$. La Ecuación (D.77) surge de igualar los términos con $\cos(5\theta)$. La Ecuación (D.78) surge de igualar los términos con $\sin(\theta)$. La Ecuación (D.79) surge de igualar los términos con $\sin(2\theta)$. La Ecuación (D.80) surge de igualar los términos con $\sin(3\theta)$. La Ecuación (D.81) surge de igualar los términos con $\sin(4\theta)$. Finalmente, la Ecuación (D.82) surge de igualar los términos con $\sin(5\theta)$.

$$\gamma(a_0^i \kappa R_i^3 + 2a_2^i R_i^5 + b_0^i R_i^3) = R_i^3 (c_0^i \kappa + d_0^i) \quad (D.72)$$

$$\gamma \left(\begin{array}{c} a_{-1}^i \kappa R_i^2 + a_1^i (\kappa + 1) R_i^4 \\ + 3a_3^i R_i^6 + b_{-1}^i R_i^2 + b_1^i R_i^4 \end{array} \right) = R_i^3 (c_1^i (\kappa + 1) R_i + 3c_3^i R_i^3 + d_1^i R_i) \quad (D.73)$$

$$\gamma(a_{-2}^i \kappa R_i + a_2^i R_i^5 \kappa + b_{-2}^i R_i + b_2^i R_i^5) = R_i^3 (c_2^i \kappa R_i^2 + d_2^i R_i^2) \quad (\text{D.74})$$

$$\gamma(a_{-3}^i \kappa - a_{-1}^i R_i^2 + a_3^i \kappa R_i^6 + b_{-3}^i + b_3^i R_i^6) = R_i^3 (c_3^i \kappa R_i^3 + d_3^i R_i^3) \quad (\text{D.75})$$

$$\gamma(-2a_{-2}^i R_i) = 0 \quad (\text{D.76})$$

$$\gamma(-3a_{-3}^i) = 0 \quad (\text{D.77})$$

$$\gamma \left(\begin{array}{l} -a_{-1}^r \kappa R_i^2 + a_1^r (\kappa - 1) R_i^4 \\ + 3a_3^r R_i^6 - b_{-1}^r R_i^2 + b_1^r R_i^4 \end{array} \right) = R_i^3 (c_1^r (\kappa - 1) R_i + 3c_3^r R_i^3 + d_1^r R_i) \quad (\text{D.78})$$

$$\gamma(-\kappa a_{-2}^r R_i + a_2^r \kappa R_i^5 - b_{-2}^r R_i + b_2^r R_i^5) = R_i^3 (\kappa c_2^r R_i^2 + d_2^r R_i^2) \quad (\text{D.79})$$

$$\gamma(-\kappa a_{-3}^r + a_{-1}^r R_i^2 + \kappa a_3^r R_i^6 - b_{-3}^r + b_3^r R_i^6) = R_i^3 (\kappa c_3^r R_i^3 + d_3^r R_i^3) \quad (\text{D.80})$$

$$\gamma(2a_{-2}^r) = 0 \quad (\text{D.81})$$

$$3\gamma a_{-3}^r = 0 \quad (\text{D.82})$$

Solución del problema

El sistema de 58 ecuaciones dado por las condiciones de borde e interfase posee solución única a menos de ciertas constantes. a_0 , b_0 y c_0 son variables libres asociadas al desplazamiento del centro de la placa y a_{-1}^i es libre asociada al giro de las placas como un cuerpo rígido. Como el problema entonces queda definido a menos de un desplazamiento de cuerpo rígido, y este tipo de des-

plazamiento no genera tensiones, se admite considerar que todas las variables anteriores son nulas. Con la anterior consideración, la solución del problema está dada por las Ecuaciones (D.83) a (D.93), donde las constantes adicionales se presentan en las Ecuaciones (D.94) y (D.95).

$$a_{-3} = a_{-2} = a_0 = a_2 = b_{-2} = b_0 = b_2 = b_3 = 0 \quad (\text{D.83})$$

$$c_0 = c_2 = d_0 = d_2 = d_3 = 0 \quad (\text{D.84})$$

$$a_{-1} = \frac{R_e^2 R_i^2 S(1 - \gamma)(R_e^6(\gamma + \kappa) + R_i^6 \kappa(\gamma - 1))}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (\text{D.85})$$

$$a_1 = \frac{R_e^2 S(2\gamma + \kappa - 1)}{4(R_e^2(2\gamma + \kappa - 1) + R_i^2(1 - \kappa)(1 - \gamma))} \quad (\text{D.86})$$

$$a_3 = \frac{R_e^2 R_i^2 S(R_e^2 - R_i^2)(\gamma + \kappa)(1 - \gamma)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (\text{D.87})$$

$$b_{-3} = \frac{R_e^4 R_i^4 S(1 - \gamma)(R_e^4(\gamma + \kappa) + R_i^4 \kappa(\gamma - 1))}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (\text{D.88})$$

$$b_{-1} = \frac{R_e^2 R_i^2 S(\gamma - 1)(\kappa - 1)}{2(R_e^2(2\gamma + \kappa - 1) + R_i^2(1 - \kappa)(1 - \gamma))} \quad (\text{D.89})$$

$$b_1 = \frac{-S\alpha_1}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (\text{D.90})$$

$$c_1 = \frac{R_e^2 S\gamma(\kappa + 1)}{4(R_e^2(2\gamma + \kappa - 1) + R_i^2(1 - \kappa)(1 - \gamma))} \quad (\text{D.91})$$

$$c_3 = \frac{R_e^2 R_i^2 S\gamma(R_e^2 - R_i^2)(1 - \gamma)(\kappa + 1)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (\text{D.92})$$

$$d_1 = \frac{-S\gamma(\kappa + 1)(R_e^6(\gamma + \kappa) + 3R_e^2 R_i^4(1 - \gamma) + R_i^6(\gamma - 1)(3 + \kappa))}{2R_e^{-2}(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (\text{D.93})$$

$$\alpha_1 = R_e^4(\gamma + \kappa)(R_e^4(1 + \gamma\kappa) + 3R_i^4(1 - \gamma)) + R_e^2 R_i^6(\gamma - 1)(\gamma\kappa^2 + 3\gamma + 4\kappa) \quad (\text{D.94})$$

$$\alpha_2 = R_i^2(\gamma - 1)(\kappa R_i^6(\gamma - 1) + R_e^4(\gamma + \kappa)(4R_e^2 - 3R_i^2)) \quad (D.95)$$

Los anteriores resultados se sustituyen en las Ecuaciones (D.8), (D.9), (D.17) y (D.18) y se obtienen las expresiones que toman los campos de desplazamientos para la placa circular exterior y la inclusión. En el caso particular en que se tenga un estado plano de tensiones, $E = 1$, $\nu = 0,3$, $S = 1$, $R_e = 2$ y $R_i = 1$ (parámetros de la Sección 4.1) los campos de desplazamientos están dados por las Ecuaciones (D.96) y (D.97) para la placa exterior y por las Ecuaciones (D.98) y (D.99) para la inclusión.

$$u_x^e(r; \theta) = \frac{13}{10r^3} \left(\begin{aligned} &r^2 \cos(\theta) \frac{-4447448\gamma^3 - 5571736\gamma^2 + 7692216\gamma + 2326968}{7209269\gamma^3 + 17845713\gamma^2 + 7115967\gamma + 597051} \\ &+ r^4 \cos(\theta) \frac{55483610\gamma^3 + 156011130\gamma^2 + 99600510\gamma + 16584750}{93720497\gamma^3 + 231994269\gamma^2 + 92507571\gamma + 7761663} \\ &+ r^6 \cos(\theta) \frac{6084\gamma^2 + 6552\gamma - 12636}{244382\gamma^2 + 517956\gamma + 56862} \\ &+ \cos(3\theta) \frac{48880\gamma^2 + 35360\gamma - 84240}{244382\gamma^2 + 517956\gamma + 56862} \\ &+ r^2 \cos(3\theta) \frac{-44668\gamma^2 - 43784\gamma + 88452}{244382\gamma^2 + 517956\gamma + 56862} \\ &+ r^6 \cos(3\theta) \frac{-4212\gamma^2 - 4536\gamma + 8748}{244382\gamma^2 + 517956\gamma + 56862} \end{aligned} \right) \quad (D.96)$$

$$u_y^e(r; \theta) = \frac{13}{10r^3} \left(\begin{aligned} &r^2 \sin(\theta) \left(\frac{8208800\gamma^3 + 13933600\gamma^2 - 9895200\gamma - 12247200}{57674152\gamma^3 + 142765704\gamma^2 + 56927736\gamma + 4776408} \right. \\ &+ r^2 \frac{-176097376\gamma^3 - 604699232\gamma^2 - 615871008\gamma - 176196384}{1499527952\gamma^3 + 3711908304\gamma^2 + 1480121136\gamma + 124186608} \\ &+ r^6 \sin(\theta) \frac{-6084\gamma^2 - 6552\gamma + 12636}{244382\gamma^2 + 517956\gamma + 56862} \\ &+ \sin(3\theta) \frac{48880\gamma^2 + 35360\gamma - 84240}{244382\gamma^2 + 517956\gamma + 56862} \\ &+ r^2 \sin(3\theta) \frac{-44668\gamma^2 - 43784\gamma + 88452}{244382\gamma^2 + 517956\gamma + 56862} \\ &+ r^6 \sin(3\theta) \left. \frac{-4212\gamma^2 - 4536\gamma + 8748}{244382\gamma^2 + 517956\gamma + 56862} \right) \quad (D.97) \end{aligned}$$

$$u_x^i(r; \theta) = \frac{4r \cos(\theta)}{7209269\gamma^3 + 17845713\gamma^2 + 7115967\gamma + 597051} \left(\begin{aligned} &1191645 + 5006790\gamma \\ &+ 1993565\gamma^2 + r^2(-196560 - 355680\gamma + 552240\gamma^2) \\ &+ r^2 \cos^2(\theta)(176904 + 320112\gamma - 497016\gamma^2) \end{aligned} \right) \quad (D.98)$$

$$u_y^i(r; \theta) = \frac{-12r \sin(\theta)}{7209269\gamma^3 + 17845713\gamma^2 + 7115967\gamma + 597051} \left(264537 + 460366\gamma \right. \\ \left. + 94297\gamma^2 + r^2(-65520 - 118560\gamma + 184080\gamma^2) \right. \\ \left. + r^2 \sin^2(\theta)(58968 + 106704\gamma - 165672\gamma^2) \right) \quad (\text{D.99})$$

Los resultados de las Ecuaciones (D.83) a (D.93) se sustituyen en las Ecuaciones (D.5) a (D.7) y (D.14) a (D.16) y se obtienen las expresiones que toman las tensiones para la placa circular exterior y la inclusión. Si bien para imponer las condiciones de borde fue considerablemente más accesible hacer la operativa con las tensiones en coordenadas polares, las tensiones de interés para identificar los problemas con el XFEM son en coordenadas cartesianas. Por este motivo, se transforman las tensiones desde las coordenadas polares a cartesianas según la Ecuación (D.103) y se obtienen las expresiones que se presentan en las Ecuaciones (D.104) a (D.106) para la placa exterior y en las Ecuaciones (D.107) a (D.109) para la inclusión, ya con los parámetros de la Sección 4.1.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \mathbb{Q}^T \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \mathbb{Q} \quad (\text{D.100})$$

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{D.101})$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \sigma_{xx} \cos^2(\theta) + \sigma_{yy} \sin^2(\theta) + \sigma_{xy} \sin(2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx} \sin^2(\theta) + \sigma_{yy} \cos^2(\theta) - \sigma_{xy} \sin(2\theta) \\ \sigma_{r\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin(2\theta) + \sigma_{xy} \cos(2\theta) \end{cases} \quad (\text{D.102})$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{rr} \cos^2(\theta) + \sigma_{\theta\theta} \sin^2(\theta) - \sigma_{r\theta} \sin(2\theta) \\ \sigma_{yy} = \sigma_{rr} \sin^2(\theta) + \sigma_{\theta\theta} \cos^2(\theta) + \sigma_{r\theta} \sin(2\theta) \\ \sigma_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \sin(2\theta) + \sigma_{r\theta} \cos(2\theta) \end{cases} \quad (\text{D.103})$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^e(r; \theta) = & \frac{1}{r^4(7209269\gamma^3+17845713\gamma^2+7115967\gamma+597051)} \left(r^4(1459458 \right. \\
& +9676146\gamma + 15898134\gamma^2 + 5734262\gamma^3) \\
& +r^6(-265356 - 607932\gamma + 514332\gamma^2 + 358956\gamma^3) \\
& +r^2 \cos(2\theta)(-2255526 - 7526862\gamma + 5436302\gamma^2 \\
& +4346086\gamma^3) + r^6 \cos(2\theta)(265356 + 607932\gamma \\
& -514332\gamma^2 - 358956\gamma^3) + \cos(4\theta)(2653560 \\
& +6341400\gamma - 4669080\gamma^2 - 4325880\gamma^3) \\
& +r^2 \cos(4\theta)(-1857492 - 4299204\gamma + 3521284\gamma^2 \\
& \left. +2635412\gamma^3) \right) \quad (D.104)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}^e(r; \theta) = & \frac{2(\gamma-1)}{r^4(7209269\gamma^3+17845713\gamma^2+7115967\gamma+597051)} \left(r^4(331695 \right. \\
& +804870\gamma + 309835\gamma^2) - r^6(132678 + 436644\gamma \\
& +179478\gamma^2) + r^2 \cos(2\theta)(729729 + 1265502\gamma \\
& +462369\gamma^2) - r^6 \cos(2\theta)(132678 + 436644\gamma \\
& +179478\gamma^2) + \cos(4\theta)(1326780 + 4497480\gamma \\
& +2162940\gamma^2) - r^2 \cos(4\theta)(928746 + 3078348\gamma \\
& \left. +1317706\gamma^2) \right) \quad (D.105)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^e(r; \theta) = & \frac{2 \sin(2\theta)(\gamma-1)}{r^4(7209269\gamma^3+17845713\gamma^2+7115967\gamma+597051)} \left(r^2(199017 \right. \\
& +1812846\gamma + 855337\gamma^2) - \cos(2\theta)(2653560 \\
& +8994960\gamma + 4325880\gamma^2) + r^2 \cos(2\theta)(1857492 \\
& \left. +6156696\gamma + 2635412\gamma^2) \right) \quad (D.106)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^i(r; \theta) = & \frac{40\gamma}{7209269\gamma^3+17845713\gamma^2+7115967\gamma+597051} \left(104787 + 504666\gamma \right. \\
& \left. +209747\gamma^2 - (r \sin(\theta))^2(19656 + 35568\gamma - 55224\gamma^2) \right) \quad (D.107)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{yy}^i(r; \theta) = \frac{120\gamma(\gamma-1)}{7209269\gamma^3+17845713\gamma^2+7115967\gamma+597051} \left(15975 + 11545\gamma - (r \cos(\theta))^2(6552 + 18408\gamma) \right) \quad (D.108)$$

$$\sigma_{xy}^i(r; \theta) = 0 \quad (D.109)$$

Finalmente, se presentan a continuación mapas de deformada y de tensiones de tres casos particulares de γ que reflejan el caso en que la inclusión sea de un material bastante más blando que la placa exterior, el caso en que la inclusión y la placa sean del mismo material y el caso en que la inclusión sea apreciablemente más rígida que la placa exterior. En el primer caso, si se considera $\gamma = 10^{-6}$, los mapas de deformada y tensiones son según se presentan en la Figura D.3.

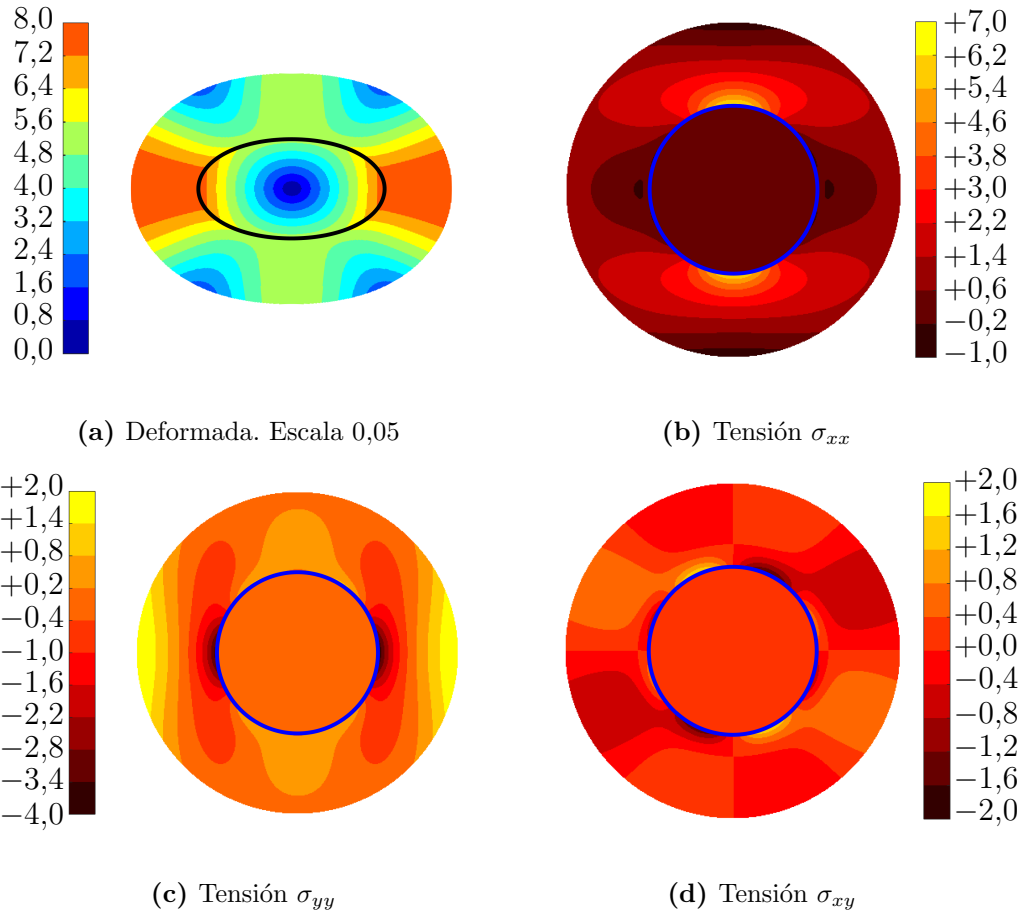


Figura D.3: Resultados de la tracción en placa circular con inclusión con $\gamma = 10^{-6}$

El siguiente caso que se presenta es en el que los materiales de ambos elementos son el mismo, lo que se obtiene de considerar $\gamma = 1$. En este caso los campos de desplazamientos y tensiones quedan como presenta la Ecuación (D.110), donde se muestra que coinciden con los esperados para una barra sometida a tracción uniaxial, tal y como se anunció al inicio del apéndice. Por otra parte, se presentan en la Figura D.4 los mapas de deformada y tensiones para este valor de γ .

$$\begin{cases} u_x = r \cos(\theta) = x \\ u_y = -0,3r \sin(\theta) = -0,3y \\ \sigma_{xx} = 1 \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{xy} = 0 \end{cases} \quad (\text{D.110})$$

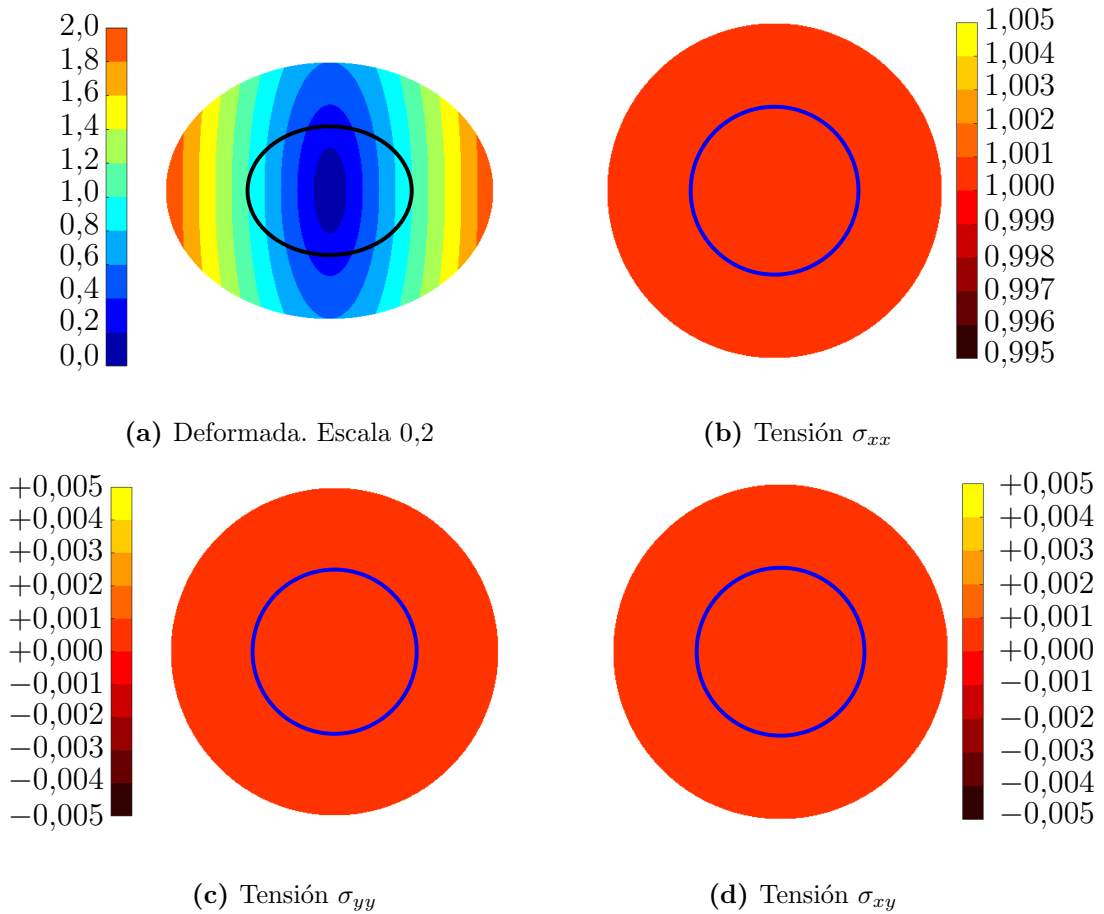


Figura D.4: Resultados de la tracción en placa circular con inclusión con $\gamma = 1$

Finalmente, se presentan en la Figura D.5, los mapas de deformada y ten-

siones en el caso que la inclusión sea de un material apreciablemente más rígido que la placa exterior. Los gráficos realizados son con $\gamma = 10^6$. Se destaca que a pesar de la simetría radial de la geometría, los resultados obtenidos no son axisimétricos lo que permitió su uso como resultado analítico para comparar con la propuesta de Moës et al. (2003).

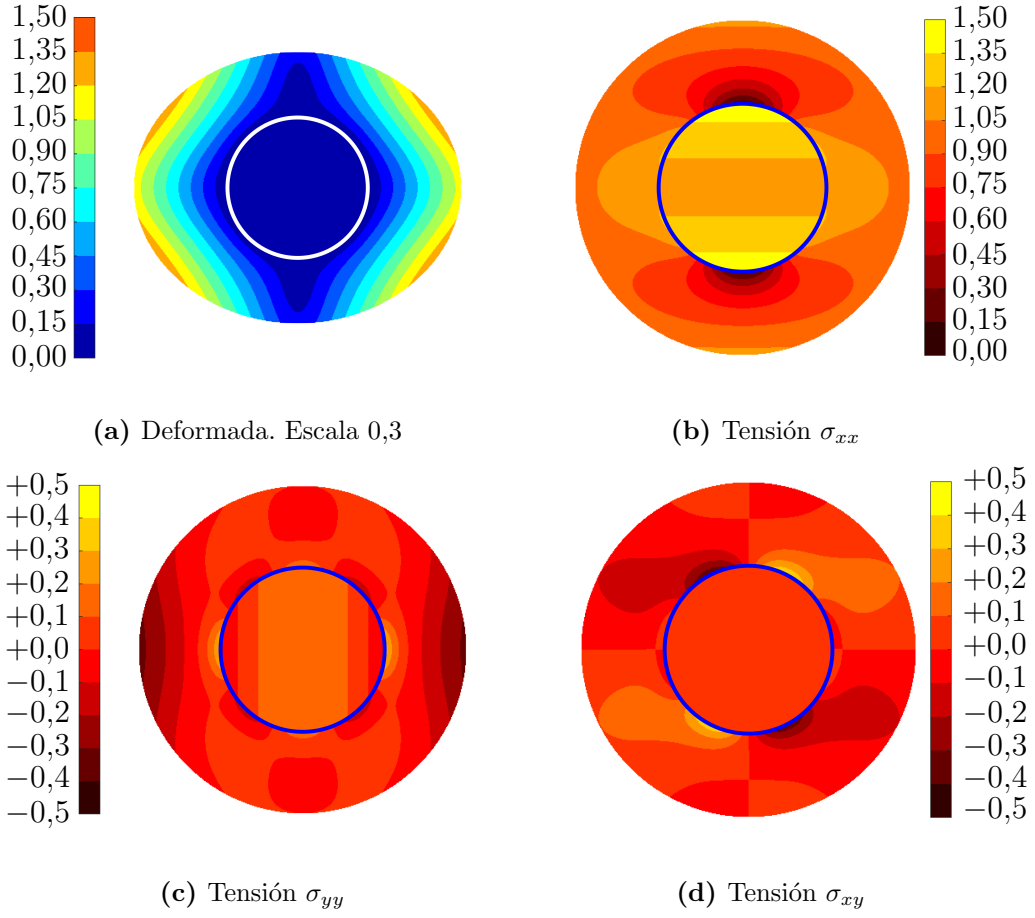


Figura D.5: Resultados de la tracción en placa circular con inclusión con $\gamma = 10^6$

Anexo E

Tensiones en una inclusión dentro de una placa infinita

En este anexo se presenta el cálculo del campo tensional en una inclusión circular de radio ϵ dentro de una placa infinita sometida a tracción uniaxial de magnitud σ_I ; siendo este resultado utilizado en el cálculo de las DT presentadas en el Anexo C. El procedimiento está basado en lo analizado por Kavati (2005), donde se utiliza la metodología de resolución del problema plano de elasticidad lineal en base a números complejos presentada en la Sección 2.3. En esta tesis se desarrollan en mayor detalle las cuentas y se simplifica la operativa al no considerar una diferencia entre los coeficientes de Poisson de los dos materiales. En la Figura E.1 se presenta un esquema de este problema.

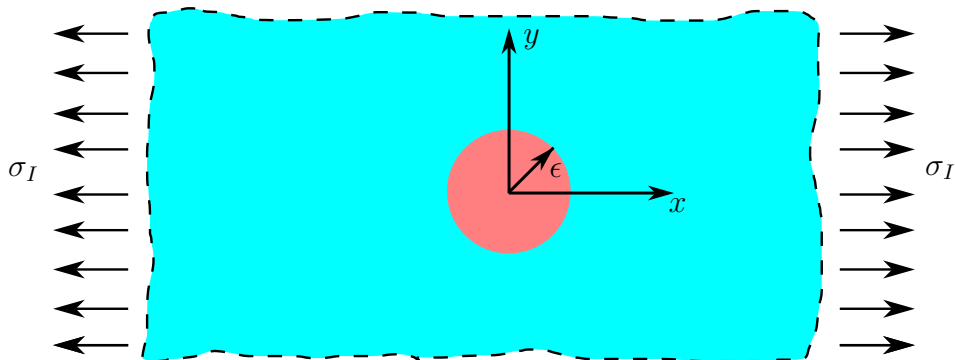


Figura E.1: Esquema del problema de una inclusión dentro de una placa infinita sometida a tracción uniaxial. Esquema basado en uno similar de Kavati (2005)

La inclusión está compuesta por un material de módulo de Young $E^i =$

γE y un coeficiente de Poisson $\nu^i = \nu$, mientras que la placa infinita está compuesta por un material de módulo de Young $E^e = E$ y un coeficiente de Poisson $\nu^e = \nu$. Mediante las Ecuaciones (2.8) y (2.30) se obtiene que el segundo parámetro de Lamé de la inclusión vale $\mu^i = \gamma\mu$ y para la placa infinita vale $\mu^e = \mu$ y la constante de Kolosov vale para ambos materiales $\kappa^e = \kappa^i = \kappa$.

Análisis de la inclusión

Como la inclusión es una región acotada simplemente conexa, los potenciales complejos descritos en la Sección 2.3 admiten representarse según se presenta en las Ecuaciones (E.1) a (E.3), donde c_n y d_n son coeficientes complejos a determinar. La extensión a segundo orden de las series es admisible pues, como se presenta al final del análisis, es suficiente para verificar todas las condiciones del problema. En lo que sigue se utiliza la notación de superíndice r para la parte real de las constantes y el superíndice i para la parte imaginaria.

$$\Upsilon(z)^i = \sum_{n=0}^2 c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 \quad (\text{E.1})$$

$$\psi(z)^i = \sum_{n=0}^2 d_n z^n = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 \quad (\text{E.2})$$

$$\chi(z)^i = d_0 z + \frac{d_1}{2} z^2 + \frac{d_2}{3} z^3 \quad (\text{E.3})$$

Se considera el número complejo z en notación polar ($z = re^{i\theta}$) y la expresión de la Ecuación (2.28) y se obtiene que la función de tensiones de Airy queda expresada como se presenta en la Ecuación (E.4). Luego, a partir de la Ecuación (B.4), se obtienen las componentes del tensor de tensiones en coordenadas polares para la inclusión según se presenta en las Ecuaciones (E.5) a (E.7).

$$\begin{aligned} \phi^i(r; \theta) = & c_0^r r \cos(\theta) + c_0^i r \sin(\theta) + c_1^r r^2 + c_2^r r^3 \cos(\theta) - c_2^i r^3 \sin(\theta) \\ & + d_0^r r \cos(\theta) - d_0^i r \sin(\theta) + \frac{d_1^r}{2} r^2 \cos(2\theta) - \frac{d_1^i}{2} r^2 \sin(2\theta) \\ & + \frac{d_2^r}{3} r^3 \cos(3\theta) - \frac{d_2^i}{3} r^3 \sin(3\theta) \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^i(r; \theta) = & 2c_1^r + 2c_2^r r \cos(\theta) - 2c_2^i r \sin(\theta) - d_1^r \cos(2\theta) \\ & + d_1^i \sin(2\theta) - 2d_2^r r \cos(3\theta) + 2d_2^i r \sin(3\theta)\end{aligned}\quad (\text{E.5})$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}^i(r; \theta) = & 2c_1^r + 6c_2^r r \cos(\theta) - 6c_2^i r \sin(\theta) + d_1^r \cos(2\theta) \\ & - d_1^i \sin(2\theta) + 2d_2^r r \cos(3\theta) - 2d_2^i r \sin(3\theta)\end{aligned}\quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta}^i(r; \theta) = & 2c_2^r r \sin(\theta) + 2c_2^i r \cos(\theta) + d_1^r \sin(2\theta) + d_1^i \cos(2\theta) \\ & + 2d_2^r r \sin(3\theta) + 2d_2^i r \cos(3\theta)\end{aligned}\quad (\text{E.7})$$

A continuación, mediante la Ecuación (2.29), se obtienen las componentes en coordenadas cartesianas de los desplazamientos en la inclusión según se presenta en las Ecuaciones (E.8) y (E.9). Kavati (2005) en su tesis calcula los desplazamientos en coordenadas polares pero en esta tesis no se lo hizo así por no considerarlo necesario.

$$\begin{aligned}u_x^i(r; \theta) = \frac{1}{2\gamma\mu} \bigg(& \kappa c_0^r + c_1^r(\kappa - 1)r \cos(\theta) - c_1^i(1 + \kappa)r \sin(\theta) \\ & + c_2^r r^2(\kappa \cos(2\theta) - 2) - c_2^i \kappa r^2 \sin(2\theta) - d_0^r \\ & - d_1^r r \cos(\theta) + d_1^i r \sin(\theta) - d_2^r r^2 \cos(2\theta) \\ & + d_2^i r^2 \sin(2\theta) \bigg)\end{aligned}\quad (\text{E.8})$$

$$\begin{aligned}u_y^i(r; \theta) = \frac{1}{2\gamma\mu} \bigg(& \kappa c_0^i + c_1^r(\kappa - 1)r \sin(\theta) + c_1^i(1 + \kappa)r \cos(\theta) \\ & + \kappa c_2^r r^2 \sin(2\theta) + c_2^i r^2(2 + \kappa \cos(2\theta)) + d_0^i \\ & + d_1^r r \sin(\theta) + d_1^i r \cos(\theta) + d_2^r r^2 \sin(2\theta) \\ & + d_2^i r^2 \cos(2\theta) \bigg)\end{aligned}\quad (\text{E.9})$$

Análisis de la placa exterior

La placa exterior es una región infinita no simplemente conexa, en la cual su único hueco tiene fuerza neta nula, por lo cual se deduce que los potenciales complejos descritos en la Sección 2.3 admiten expresarse como se presenta en las Ecuaciones (E.10) a (E.12), donde a_n y b_n son coeficientes complejos a

determinar. La extensión de la serie hasta términos de tercer orden es admisible pues, como se presenta al final del análisis, es suficiente para verificar todas las condiciones del problema.

$$\Upsilon(z)^e = \frac{\sigma_I}{4}z + \sum_{n=1}^3 a_n z^{-n} = \frac{\sigma_I}{4}z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} \quad (\text{E.10})$$

$$\psi(z)^e = \frac{-\sigma_I}{2}z + \sum_{n=1}^3 b_n z^{-n} = \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} - \frac{\sigma_I}{2}z \quad (\text{E.11})$$

$$\chi(z)^e = -\frac{\sigma_I z^2}{4} + b_1 \log(z) - \frac{b_2}{z} - \frac{b_3}{2z^2} \quad (\text{E.12})$$

Nuevamente se considera el número complejo z en notación polar ($z = re^{i\theta}$) y la expresión de la Ecuación (2.28) y se obtiene la función de tensiones de Airy como se presenta en la Ecuación (E.13), donde m es un entero cualquiera. Luego, a partir de la Ecuación (B.4), se obtienen las componentes del tensor de tensiones en coordenadas polares para la placa infinita exterior según se presenta en las Ecuaciones (E.14) a (E.16).

$$\begin{aligned} \phi^e(r; \theta) = \frac{1}{r^2} \Bigg(& \frac{\sigma_I r^4}{4} (1 - \cos(2\theta)) + a_1^r r^2 \cos(2\theta) + a_1^i r^2 \sin(2\theta) \\ & + a_2^r r \cos(3\theta) + a_2^i r \sin(3\theta) + a_3^r \cos(4\theta) \\ & + a_3^i \sin(4\theta) + b_1^r r^2 \log(r) - b_1^i r^2 (2\pi m - \theta) \\ & - b_2^r r \cos(\theta) - b_2^i r \sin(\theta) - \frac{b_3^r}{2} \cos(2\theta) - \frac{b_3^i}{2} \sin(2\theta) \Bigg) \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^e(r; \theta) = \frac{1}{2r^4} \Bigg(& \sigma_I r^4 (1 + \cos(2\theta)) - 8a_1^r r^2 \cos(2\theta) \\ & - 8a_1^i r^2 \sin(2\theta) - 20a_2^r r \cos(3\theta) - 20a_2^i r \sin(3\theta) \\ & - 36a_3^r \cos(4\theta) - 36a_3^i \sin(4\theta) + 2b_1^r r^2 \\ & + 4b_2^r r \cos(\theta) + 4b_2^i r \sin(\theta) + 6b_3^r \cos(2\theta) \\ & + 6b_3^i \sin(2\theta) \Bigg) \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^e(r; \theta) = \frac{1}{2r^4} \left(\begin{aligned} &\sigma_I r^4 (1 - \cos(2\theta)) + 4a_2^r r \cos(3\theta) + 4a_2^i r \sin(3\theta) \\ &+ 12a_3^r \cos(4\theta) + 12a_3^i \sin(4\theta) - 2b_1^r r^2 \\ &- 4b_2^r r \cos(\theta) - 4b_2^i r \sin(\theta) - 6b_3^r \cos(2\theta) \\ &- 6b_3^i \sin(2\theta) \end{aligned} \right) \quad (\text{E.15})$$

$$\sigma_{r\theta}^e(r; \theta) = \frac{1}{2r^4} \left(\begin{aligned} &-\sigma_I r^4 \sin(2\theta) - 4a_1^r r^2 \sin(2\theta) + 4a_1^i r^2 \cos(2\theta) \\ &- 12a_2^r r \sin(3\theta) + 12a_2^i r \cos(3\theta) - 24a_3^r \sin(4\theta) \\ &+ 24a_3^i \cos(4\theta) - 2b_1^i r^2 + 4b_2^r r \sin(\theta) - 4b_2^i r \cos(\theta) \\ &+ 6b_3^r \sin(2\theta) - 6b_3^i \cos(2\theta) \end{aligned} \right) \quad (\text{E.16})$$

A continuación, mediante la Ecuación (2.29), se obtienen las componentes en coordenadas cartesianas de los desplazamientos en la placa exterior según se presenta en las Ecuaciones (E.17) y (E.18).

$$u_x^e(r; \theta) = \frac{1}{8\mu r^3} \left(\begin{aligned} &\sigma_I (\kappa + 1) r^4 \cos(\theta) + 4a_1^r r^2 (\cos(3\theta) + \kappa \cos(\theta)) \\ &+ 4a_1^i r^2 (\sin(3\theta) + \kappa \sin(\theta)) \\ &+ 4a_2^r r (2 \cos(4\theta) + \kappa \cos(2\theta)) \\ &+ 4a_2^i r (2 \sin(4\theta) + \kappa \sin(2\theta)) \\ &+ 4a_3^r (3 \cos(5\theta) + \kappa \cos(3\theta)) \\ &+ 4a_3^i (3 \sin(5\theta) + \kappa \sin(3\theta)) - 4b_1^r r^2 \cos(\theta) \\ &- 4b_1^i r^2 \sin(\theta) - 4b_2^r r \cos(2\theta) - 4b_2^i r \sin(2\theta) \\ &- 4b_3^r \cos(3\theta) - 4b_3^i \sin(3\theta) \end{aligned} \right) \quad (\text{E.17})$$

$$\begin{aligned}
u_y^e(r; \theta) = \frac{1}{8\mu r^3} \bigg(& \sigma_I r^4 (\kappa - 3) \sin(\theta) + 4a_1^r r^2 (\sin(3\theta) - \kappa \sin(\theta)) \\
& + 4a_1^i r^2 (\kappa \cos(\theta) - \cos(3\theta)) \\
& + 4a_2^r r (2 \sin(4\theta) - \kappa \sin(2\theta)) \\
& + 4a_2^i r (\kappa \cos(2\theta) - 2 \cos(4\theta)) \\
& + 4a_3^r (3 \sin(5\theta) - \kappa \sin(3\theta)) \\
& + 4a_3^i (\kappa \cos(3\theta) - 3 \cos(5\theta)) - 4b_1^r r^2 \sin(\theta) \\
& + 4b_1^i r^2 \cos(\theta) - 4b_2^r r \sin(2\theta) + 4b_2^i r \cos(2\theta) \\
& - 4b_3^r \sin(3\theta) + 4b_3^i \cos(3\theta) \bigg)
\end{aligned} \tag{E.18}$$

Condiciones de interfase

Desarrollados los campos de desplazamientos y tensiones en los dos materiales en función de las constantes a determinar, se procede a aplicar las condiciones de interfase entre dichos materiales. Como se asume un contacto perfecto entre ambos materiales, aplican las ecuaciones presentadas en la Ecuación (2.18) que se presentan, aplicadas a este caso, en las Ecuaciones (E.19) a (E.22).

$$\sigma_{rr}^e(\epsilon, \theta) = \sigma_{rr}^i(\epsilon, \theta) \tag{E.19}$$

$$\sigma_{r\theta}^e(\epsilon, \theta) = \sigma_{r\theta}^i(\epsilon, \theta) \tag{E.20}$$

$$u_x^e(\epsilon, \theta) = u_x^i(\epsilon, \theta) \tag{E.21}$$

$$u_y^e(\epsilon, \theta) = u_y^i(\epsilon, \theta) \tag{E.22}$$

Al aplicar la Ecuación (E.19) a las Ecuaciones (E.5) y (E.14) se obtiene un primer conjunto de ecuaciones pues, como dicha ecuación debe valer para todo θ , se deben igualar los distintos términos trigonométricos por separado. La Ecuación (E.23) surge de igualar los términos sin seno ni coseno. La Ecuación (E.24) surge de igualar los términos con $\cos(\theta)$. La Ecuación (E.25) surge de igualar los términos con $\cos(2\theta)$. La Ecuación (E.26) surge de igualar los

términos con $\cos(3\theta)$. La Ecuación (E.27) surge de igualar los términos con $\cos(4\theta)$. La Ecuación (E.28) surge de igualar los términos con $\sin(\theta)$. La Ecuación (E.29) surge de igualar los términos con $\sin(2\theta)$. La Ecuación (E.30) surge de igualar los términos con $\sin(3\theta)$. Finalmente, la Ecuación (E.31) surge de igualar los términos con $\sin(4\theta)$.

$$4\epsilon^4 c_1^r = \sigma_I \epsilon^4 + 2b_1^r \epsilon^2 \quad (\text{E.23})$$

$$4\epsilon^5 c_2^r = 4b_2^r \epsilon \quad (\text{E.24})$$

$$-2\epsilon^4 d_1^r = \sigma_I \epsilon^4 - 8a_1^r \epsilon^2 + 6b_3^r \quad (\text{E.25})$$

$$-4\epsilon^5 d_2^r = -20a_2^r \epsilon \quad (\text{E.26})$$

$$0 = -36a_3^r \quad (\text{E.27})$$

$$-4\epsilon^5 c_2^i = 4b_2^i \epsilon \quad (\text{E.28})$$

$$2\epsilon^4 d_1^i = -8a_1^i \epsilon^2 + 6b_3^i \quad (\text{E.29})$$

$$4\epsilon^5 d_2^i = -20a_2^i \epsilon \quad (\text{E.30})$$

$$0 = -36a_3^i \quad (\text{E.31})$$

Luego, se unen la Ecuación (E.7) con la Ecuación (E.16) para obtener un nuevo conjunto de ecuaciones. La Ecuación (E.32) surge de igualar los términos sin seno ni coseno. La Ecuación (E.33) surge de igualar los términos con $\cos(\theta)$. La Ecuación (E.34) surge de igualar los términos con $\cos(2\theta)$. La Ecuación (E.35) surge de igualar los términos con $\cos(3\theta)$. La Ecuación (E.36) surge de igualar los términos con $\cos(4\theta)$. La Ecuación (E.37) surge de igualar los términos con $\sin(\theta)$. La Ecuación (E.38) surge de igualar los términos con $\sin(2\theta)$. La Ecuación (E.39) surge de igualar los términos con $\sin(3\theta)$. Finalmente, la Ecuación (E.40) surge de igualar los términos con $\sin(4\theta)$.

$$0 = -2b_1^i \epsilon^2 \quad (\text{E.32})$$

$$4c_2^i \epsilon^5 = -4b_2^i \epsilon \quad (\text{E.33})$$

$$2d_1^i \epsilon^4 = 4a_1^i \epsilon^2 - 6b_3^i \quad (\text{E.34})$$

$$4d_2^i \epsilon^5 = 12a_2^i \epsilon \quad (\text{E.35})$$

$$0 = 24a_3^i \quad (\text{E.36})$$

$$4c_2^r \epsilon^5 = 4b_2^r \epsilon \quad (\text{E.37})$$

$$2d_1^r \epsilon^4 = -\sigma_I \epsilon^4 - 4a_1^r \epsilon^2 + 6b_3^r \quad (\text{E.38})$$

$$4d_2^r \epsilon^5 = -12a_2^r \epsilon \quad (\text{E.39})$$

$$0 = -24a_3^r \quad (\text{E.40})$$

La siguiente condición que se aplica es la Ecuación (E.21), en la cual se sustituyen las Ecuaciones (E.8) y (E.17). La Ecuación (E.41) surge de igualar los términos sin seno ni coseno. La Ecuación (E.42) surge de igualar los términos con $\cos(\theta)$. La Ecuación (E.43) surge de igualar los términos con $\cos(2\theta)$. La Ecuación (E.44) surge de igualar los términos con $\cos(3\theta)$. La Ecuación (E.45) surge de igualar los términos con $\cos(4\theta)$. La Ecuación (E.46) surge de igualar los términos con $\cos(5\theta)$. La Ecuación (E.47) surge de igualar los términos con $\sin(\theta)$. La Ecuación (E.48) surge de igualar los términos con $\sin(2\theta)$. La Ecuación (E.49) surge de igualar los términos con $\sin(3\theta)$. La Ecuación (E.50) surge de igualar los términos con $\sin(4\theta)$. Finalmente, la Ecuación (E.51) surge de igualar los términos con $\sin(5\theta)$.

$$4\epsilon^3(\kappa c_0^r - 2c_2^r \epsilon^2 - d_0^r) = 0 \quad (\text{E.41})$$

$$4\epsilon^3(c_1^r(\kappa - 1)\epsilon - d_1^r\epsilon) = \gamma(\sigma_I(\kappa + 1)\epsilon^4 + 4a_1^r\kappa\epsilon^2 - 4b_1^r\epsilon^2) \quad (\text{E.42})$$

$$4\epsilon^3(c_2^r\epsilon^2\kappa - d_2^r\epsilon^2) = \gamma(4a_2^r\epsilon\kappa - 4b_2^r\epsilon) \quad (\text{E.43})$$

$$0 = \gamma(4a_1^r\epsilon^2 + 4\kappa a_3^r - 4b_3^r) \quad (\text{E.44})$$

$$0 = 8\gamma a_2^r\epsilon \quad (\text{E.45})$$

$$0 = 12\gamma a_3^r \quad (\text{E.46})$$

$$4\epsilon^3(d_1^i\epsilon - c_1^i(1 + \kappa)\epsilon) = \gamma(4\kappa a_1^i\epsilon^2 - 4b_1^i\epsilon^2) \quad (\text{E.47})$$

$$4\epsilon^3(d_2^i\epsilon^2 - \kappa c_2^i\epsilon^2) = \gamma(4a_2^i\epsilon\kappa - 4b_2^i\epsilon) \quad (\text{E.48})$$

$$0 = \gamma(4a_1^i\epsilon^2 + 4\kappa a_3^i - 4b_3^i) \quad (\text{E.49})$$

$$0 = 8\gamma\epsilon a_2^i \quad (\text{E.50})$$

$$0 = 12\gamma a_3^i \quad (\text{E.51})$$

Finalmente, se aplica la Ecuación (E.22), en la cual se sustituyen las Ecuaciones (E.9) y (E.18) y se obtiene el último conjunto de ecuaciones. La Ecuación (E.52) surge de igualar los términos sin seno ni coseno. La Ecuación (E.53) surge de igualar los términos con $\cos(\theta)$. La Ecuación (E.54) surge de igualar los términos con $\cos(2\theta)$. La Ecuación (E.55) surge de igualar los términos con $\cos(3\theta)$. La Ecuación (E.56) surge de igualar los términos con $\cos(4\theta)$. La Ecuación (E.57) surge de igualar los términos con $\cos(5\theta)$. La Ecuación (E.58) surge de igualar los términos con $\sin(\theta)$. La Ecuación (E.59) surge de igualar los términos con $\sin(2\theta)$. La Ecuación (E.60) surge de igualar los términos con $\sin(3\theta)$. La Ecuación (E.61) surge de igualar los términos con $\sin(4\theta)$. Finalmente, la Ecuación (E.62) surge de igualar los términos con $\sin(5\theta)$.

$$4\epsilon^3(\kappa c_0^i + d_0^i + 2c_2^i \epsilon^2) = 0 \quad (\text{E.52})$$

$$4\epsilon^3(c_1^i(1 + \kappa)\epsilon + d_1^i \epsilon) = \gamma(4a_1^i \kappa \epsilon^2 + 4b_1^i \epsilon^2) \quad (\text{E.53})$$

$$4\epsilon^3(c_2^i \epsilon^2 \kappa + d_2^i \epsilon^2) = \gamma(4a_2^i \epsilon \kappa + 4b_2^i \epsilon) \quad (\text{E.54})$$

$$0 = \gamma(4a_3^i \kappa - 4a_1^i \epsilon^2 + 4b_3^i) \quad (\text{E.55})$$

$$0 = -8\gamma \epsilon a_2^i \quad (\text{E.56})$$

$$0 = -12a_3^i \gamma \quad (\text{E.57})$$

$$4\epsilon^3(c_1^r(\kappa - 1)\epsilon + d_1^r \epsilon) = \gamma(\sigma_I \epsilon^4(\kappa - 3) - 4\kappa a_1^r \epsilon^2 - 4b_1^r \epsilon^2) \quad (\text{E.58})$$

$$4\epsilon^3(\kappa c_2^r \epsilon^2 + d_2^r \epsilon^2) = \gamma(-4\kappa a_2^r \epsilon - 4b_2^r \epsilon) \quad (\text{E.59})$$

$$0 = \gamma(4a_1^r \epsilon^2 - 4\kappa a_3^r - 4b_3^r) \quad (\text{E.60})$$

$$0 = \gamma(8a_2^r \epsilon) \quad (\text{E.61})$$

$$0 = \gamma(12a_3^r) \quad (\text{E.62})$$

Solución del problema

El sistema de 40 ecuaciones dado por las condiciones de interfase posee solución única a menos de la constante c_0 . Se tiene que, todas las constantes son independientes de c_0 , salvo d_0 que se modifica junto con c_0 de forma tal que los desplazamientos no dependan de c_0 . Por el anterior motivo se admite considerar $c_0 = d_0 = 0$. Con la anterior consideración, la solución del problema está dada por las Ecuaciones (E.63) a (E.68).

$$a_2 = a_3 = b_2 = c_0 = c_2 = d_0 = d_2 = 0 \quad (\text{E.63})$$

$$a_1 = \frac{\sigma_I \epsilon^2 (1 - \gamma)}{2(\gamma \kappa + 1)} \quad (\text{E.64})$$

$$b_1 = \frac{\sigma_I \epsilon^2 (1 - \gamma)(1 - \kappa)}{4\gamma + 2\kappa - 2} \quad (\text{E.65})$$

$$b_3 = \frac{\sigma_I \epsilon^4 (1 - \gamma)}{2(\gamma \kappa + 1)} \quad (\text{E.66})$$

$$c_1 = \frac{\sigma_I \gamma (\kappa + 1)}{8\gamma + 4\kappa - 4} \quad (\text{E.67})$$

$$d_1 = -\frac{\sigma_I \gamma (\kappa + 1)}{2(\gamma \kappa + 1)} \quad (\text{E.68})$$

Los resultados anteriores se sustituyen en las Ecuaciones (E.5) a (E.7) y se obtienen las expresiones que toman las componentes en coordenadas polares del tensor de tensiones en la inclusión, las cuales se presentan en las Ecuaciones (E.69) a (E.71). Estas expresiones son las que se utilizaron en el Anexo C.

$$\sigma_{rr}^i = \frac{\sigma_I \gamma (\lambda + 2\mu)}{2(\mu + \gamma(\mu + \lambda))} + \frac{\sigma_I \gamma (\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu)} \cos(2\theta) \quad (\text{E.69})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^i = \frac{\sigma_I \gamma (\lambda + 2\mu)}{2(\mu + \gamma(\mu + \lambda))} - \frac{\sigma_I \gamma (\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu)} \cos(2\theta) \quad (\text{E.70})$$

$$\sigma_{r\theta}^i = -\frac{\sigma_I \gamma (\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu + \gamma(\lambda + 3\mu)} \sin(2\theta) \quad (\text{E.71})$$

Para finalizar este anexo se presenta, para una mejor visualización, un conjunto de figuras asociadas a las componentes del tensor de tensiones de las Ecuaciones (E.69) a (E.71) tanto para $\gamma = 10^{-3}$ (equivalente a una inclusión de material blando en el rígido) como para $\gamma = 10^3$ (equivalente a una inclusión de material rígido en el blando). Para los gráficos se consideró un estado plano de tensiones con coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Los valores considerados para γ y ν están asociados a los utilizados en casi todo el Capítulo 6. La Figura E.2 presenta los gráficos para σ_{rr}^i , la Figura E.3 presenta los gráficos para $\sigma_{\theta\theta}^i$ y finalmente la Figura E.4 presenta los gráficos para $\sigma_{r\theta}^i$. Los valores mostrados

son, en todos los casos, el valor máximo y mínimo del diagrama.

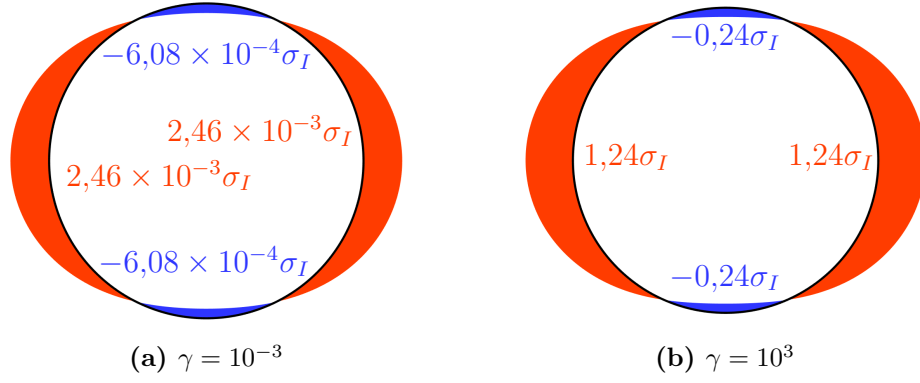


Figura E.2: Tensión σ_{rr} en la inclusión para la placa infinita con inclusión

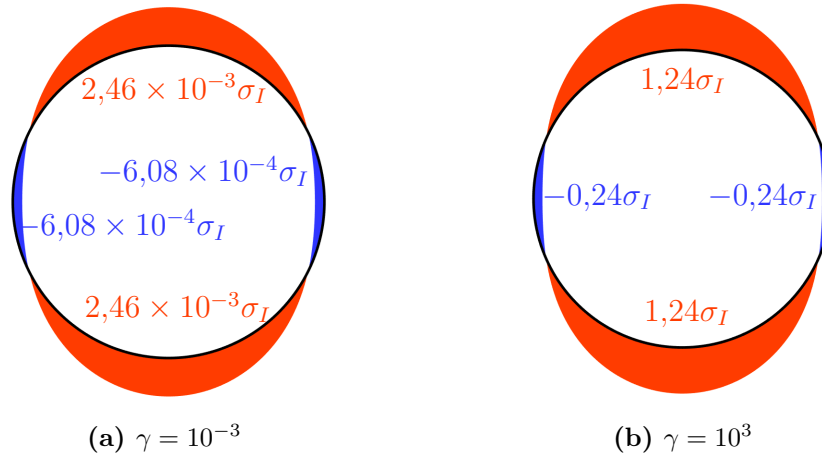


Figura E.3: Tensión $\sigma_{\theta\theta}$ en la inclusión para la placa infinita con inclusión

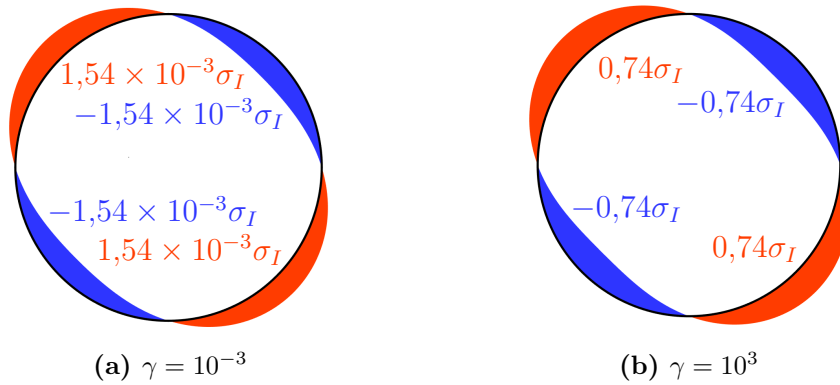


Figura E.4: Tensión $\sigma_{r\theta}$ en la inclusión para la placa infinita con inclusión