



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



FACULTAD DE
INGENIERÍA

Diseño de redes jerárquicas de transporte público

Informe de Proyecto de Grado presentado por

Karen Rasmussen
Francisco Cabrera

en cumplimiento parcial de los requerimientos para la graduación de la
carrera de Ingeniería en Computación de Facultad de Ingeniería de la
Universidad de la República

Supervisor

Antonio Mauttone

Montevideo, 6 de abril de 2025

Resumen

En el diseño de redes de transporte público existe el concepto de redes jerárquicas, las cuales son concebidas para ciudades medianas y grandes. Estas están formadas por una red troncal de alta capacidad y velocidad que conecta directamente a centros de alta demanda y una red secundaria alimentadora, que conecta el resto de las zonas con dichos centros. En este contexto, uno de los problemas clave a resolver es el diseño de la red alimentadora dada una red troncal fija. El problema conocido como *Extended Feeder Bus Network Design Problem* consiste en generar una red alimentadora considerando la demanda de viajes por transporte público entre diferentes zonas de la ciudad, contemplando los intereses de los usuarios y de los operadores. En este trabajo se propone un algoritmo heurístico para solucionar el problema de la creación de recorridos alimentadores que transportan usuarios del sistema entre sus orígenes y destinos hasta la red troncal. Para esto, se asigna el origen y el destino de los viajes demandados a una parada de la red troncal y se resuelve un problema en el cual múltiples nodos origen, en este caso los centroides, buscan un camino hacia un mismo nodo destino, en este caso la parada troncal. Este problema, denominado *many-to-one*, se modela también mediante un modelo matemático que calcula su solución óptima. La propuesta se aplica al caso de la ciudad de Montevideo. En una primera etapa y utilizando un modelo de red simplificado, se comparan los resultados exactos y aproximados con el fin de validar los resultados del algoritmo heurístico, basados en su proximidad a la solución óptima hallada por el modelo exacto. Estos experimentos buscan variar varios parámetros de decisión del problema para observar su influencia. También se experimenta con el algoritmo heurístico sobre un grafo que representa la red de calles real de Montevideo y se analizan los resultados. Este trabajo evalúa la efectividad de una solución heurística propuesta para el problema. Se comprueba una disminución de hasta un 13% en los costos promedios de usuarios al incrementar la velocidad relativa de una red troncal, si existiera. Se estudian los efectos de los distintos parámetros de decisión sobre los resultados, se presentan las ventajas y desventajas y el trabajo a futuro que sería necesario para avanzar con esta estrategia de solución.

Palabras clave: Transporte público bimodal, Feeder Bus Network Design Problem, optimización sobre redes

Tabla de contenidos

1. Introducción.....	7
1.1 Motivación y antecedentes.....	10
1.2 Objetivos y alcance del trabajo.....	12
1.3 Estructura del informe.....	13
2. Presentación del problema y enfoque de resolución.....	15
2.1 Definición del problema.....	15
2.2 Red.....	16
2.3 Supuestos de trabajo.....	20
2.4 Enfoque de resolución.....	22
2.5 Parámetros.....	25
2.6 Subproblemas: Many to one.....	25
3. FBND - Many to one, enfoque exacto y heurístico.....	29
3.1 Modelo matemático.....	29
3.2 Heurística.....	37
3.3 Implementación del algoritmo resolutivo.....	40
4. Experimentos numéricos, validación.....	41
4.1 Set de pruebas: análisis de sensibilidad para los parámetros.....	41
4.2 Set de pruebas: efectividad de la heurística.....	46
5. Experimentos numéricos, caso de estudio.....	57
5.1 Set de pruebas: caso real.....	58
5.2 Resultados.....	60
5.2.1 Línea base.....	60
5.2.2 Velocidad relativa de 2.....	64
5.2.3 Todas las troncales.....	67
5.2.4 Cantidad máxima de recorridos: Cantidad de nodos / 9.....	70
5.3 Análisis comparativo de resultados.....	74
5.3.1 Incidencia del factor velocidad relativa.....	74
5.3.2 Incidencia de la cantidad de troncales.....	78
5.3.3 Incidencia de la cantidad máxima de recorridos.....	80
6. Conclusiones.....	83
6.1 Resumen.....	83
6.2 Conclusiones.....	84
6.3 Trabajo a futuro.....	85
Referencias.....	87

1. Introducción

En el ámbito de la Investigación de Operaciones, los problemas relacionados con la optimización del transporte público han sido objeto de un amplio estudio y desarrollo [10]. No obstante, aún se continúan investigando y evaluando propuestas más eficientes.

Un **sistema** de transporte público es un conjunto de servicios coordinados que facilitan el traslado de personas dentro de una determinada área geográfica. Dentro de estos servicios se encuentran los vehículos como ómnibus, trenes y tranvías; la infraestructura, como vías, estaciones y paradas; las rutas y frecuencias de los recorridos; y la operación del sistema, gestionada por empresas públicas o privadas encargadas de su planificación y funcionamiento. En un servicio de transporte público se pueden clasificar las entidades involucradas en dos grupos. El primero de estos grupos son los **usuarios**. Estos harán uso del sistema de transporte público y por lo tanto se verán beneficiados por servicios que sean rápidos y directos. El segundo grupo son los **operadores**. Este grupo gestiona los recursos para implementar los servicios y se enfocará en optimizar los costos del transporte público, considerando diversos factores como la compra y mantenimiento de los vehículos, la contratación y capacitación del personal, así como los gastos en infraestructura, en caso de requerirse obras civiles como la instalación de vías, entre otros.

Una **red** de transporte público es un conjunto de conexiones físicas que vinculan diferentes puntos dentro de una zona geográfica específica. Esta red facilita el movimiento de personas entre esos puntos a través de las rutas que la conforman. La red está integrada por nodos, que son lugares como paradas, estaciones o terminales. Estos nodos permiten a los usuarios ingresar a la red, realizar transbordos entre rutas o egresar de esta. Además de los nodos, la red incluye enlaces o vías, que son los trayectos que conectan los nodos entre sí, como calles para autobuses, vías ferroviarias u otros tipos de caminos.

Existen diferentes maneras de estructurar una red de transporte público, dependiendo de las necesidades de movilidad de la población y la infraestructura disponible. Entre los esquemas está el modelo troncal-alimentador, que se encuentra en muchas redes de transporte interurbano o transporte urbano y está caracterizado por la presencia de una infraestructura principal con altos estándares de calidad y capacidad (como un ferrocarril o una carretera principal), que conecta directamente los centros principales. Desde esta infraestructura, se extienden rutas estándar (en la terminología de nuestro proyecto, rutas de segundo nivel) que enlazan centros más pequeños [18].

A este tipo de estructuración de la red de transporte público se le conoce como **estructura jerárquica**, en la cual los recorridos se organizan en distintos niveles, como rutas de primer y segundo nivel. Los recorridos de primer nivel, como los recorridos troncales, se caracterizan por ser más rápidos y suelen requerir una mayor inversión en infraestructura. Estos pueden incluir trenes, tranvías u ómnibuses que operan en vías más ágiles, en contraste con los recorridos de segundo nivel, que tienen una menor velocidad y menor demanda de infraestructura.

Los recorridos alimentadores pertenecen al segundo nivel; son más lentos y "alimentan" a los recorridos de primer nivel, es decir, se encargan de acercar a los usuarios a estos recorridos principales [19]. En la Figura 1.1, se puede ver una red troncal (en rojo y punteada) y varios recorridos alimentadores (en distintos colores). Sin embargo, no siempre es necesario que un usuario pase por un recorrido troncal; podría haber una línea que conecte

dos paradas sin necesidad de utilizar la red troncal (ver Figura 1.2). Estos últimos también son considerados recorridos secundarios, pero no son alimentadores.

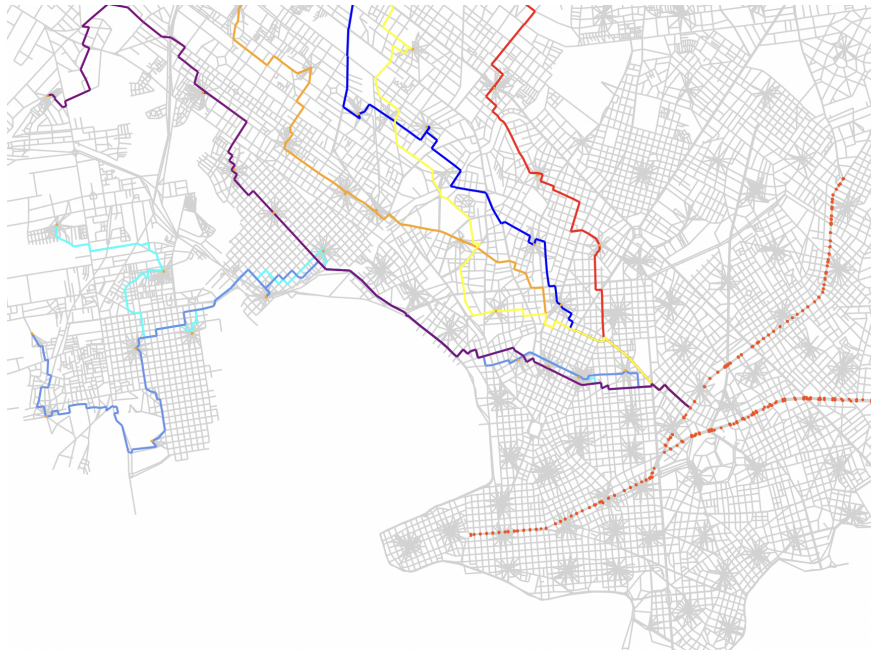


Figura 1.1: La red troncal se muestra con una línea roja discontinua, mientras que los recorridos alimentadores están representados con distintos colores.



Figura 1.2: Red troncal (en rojo y punteada) y recorrido de segundo nivel no alimentador (en naranja)

Este tipo de sistema, con una jerarquía en los recorridos de transporte público, surge como una solución alternativa a una red no jerárquica, donde todos los recorridos tienen las mismas características operacionales y es muy aplicable para ciudades medianas y grandes.

Existen numerosos estudios sobre optimización de la redes de transporte público [11, 20], pero son pocos los que se centran específicamente en redes jerárquicas.

Este trabajo se enfoca en encontrar una solución óptima (o cercana a la óptima), que beneficie tanto a los usuarios como a los operadores, de una red alimentadora en una ciudad con una red jerárquica. Por ello, es que este proyecto tiene como objetivo continuar con la investigación iniciada en el Proyecto de Grado *Generación de recorridos alimentadores para sistemas de transporte público* de Dornel y Erlichman [7], utilizando los datos y conocimientos obtenidos en su informe para desarrollar una solución al problema.

Para abordar las necesidades de los usuarios se tendrá en cuenta el tiempo de traslado, buscando minimizarlo. En cuanto a los operadores, su objetivo es satisfacer la demanda con el menor costo operativo posible, maximizando así sus ganancias. En este sentido, los operadores buscan satisfacer la demanda utilizando la menor cantidad de líneas y, en la medida de lo viable, asegurando que las rutas sean lo más cortas posibles. Así, el costo de los operadores se representará por el número de recorridos generados y la longitud total de estos recorridos.

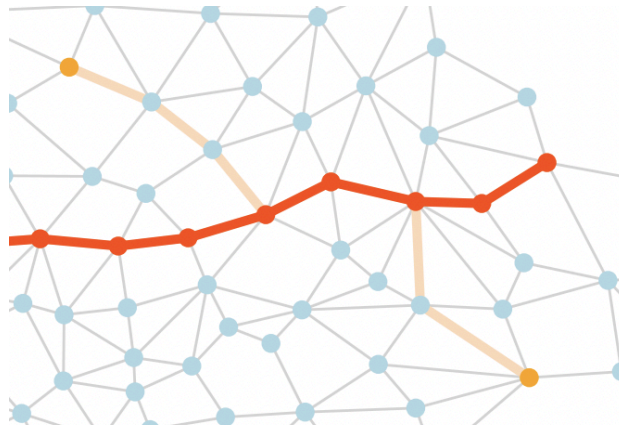
La metodología propuesta está concebida para ser aplicada por una entidad reguladora (como la Intendencia) que debe contemplar ambos objetivos, que son contrapuestos.

En la literatura actual no se han identificado enfoques de investigación centrados en el diseño de recorridos para una red secundaria que no sea exclusivamente alimentadora. Esto abre la posibilidad de investigar el diseño de una red secundaria que, además de alimentar a la red troncal, opere de forma autónoma estableciendo conexiones directas entre las paradas sin necesidad de pasar por la troncal. Una red de este tipo combinaría recorridos como los mostrados en las Figuras 1.1 y 1.2.

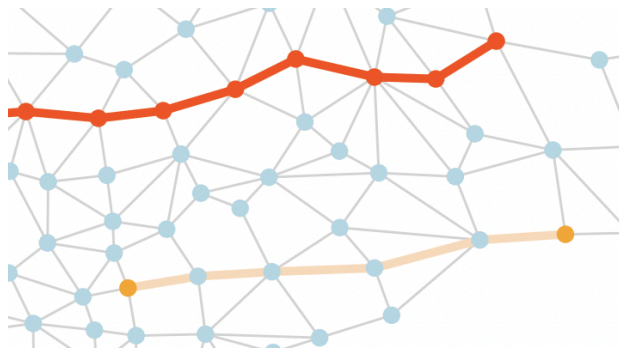
En este trabajo nos enfocaremos en la generación de una red secundaria con estas características dada una red troncal fija, implementando un método de resolución de dos etapas. Consideramos un origen y un destino representados por nodos en la red de calles, denominados par origen-destino, entre los cuales existe una demanda que indica la cantidad de personas que desean desplazarse desde ese origen hacia ese destino; y luego un conjunto de varios pares origen-destino, que representan la demanda en toda el área de estudio.

La primera etapa del método consiste en clasificar la demanda, diferenciando los pares que utilizan la red troncal de aquellos que no lo hacen. En la Figura 1.3(a) se muestra una red troncal (en rojo) junto un par origen-destino (en naranja), cuyo camino mínimo (en naranja claro) hace uso de la red troncal. En contraste, la Figura 1.3(b) muestra un caso en el que el camino mínimo entre los nodos naranjas solo requiere el uso de la red vial. La demanda que no interactúa con la red troncal se considera fuera del alcance de este estudio.

En la segunda etapa, después de clasificada la demanda, se diseñan los recorridos alimentadores de la red troncal que finalmente satisfagan a esos usuarios.



(a): Camino mínimo que transita la troncal.



(b): Camino mínimo que no transita la troncal.

Figura 1.3: Red troncal en rojo y recorrido mínimo (en naranja claro) entre los dos nodos naranjas.

El método de resolución presentado, a los efectos de este trabajo, es un algoritmo que a partir de ahora llamaremos “*algoritmo resolutorio*”. Este algoritmo emplea dos enfoques de resolución: el primero utiliza un modelo de programación matemática (denominado como “*modelo exacto*”) que obtiene una solución óptima, mientras que el segundo emplea una heurística (llamada heurística “*many-to-one*”) que genera soluciones aproximadas a la óptima. El primer enfoque permitirá obtener soluciones óptimas que puedan compararse con las generadas por la heurística. Debido a las limitaciones de tiempo de ejecución y memoria, el modelo exacto no puede manejar instancias del tamaño de una red de calles de una ciudad real. Por ello, para su validación, se empleará una red con un mayor nivel de agregación en comparación con una red urbana real.

Una vez validado el algoritmo heurístico (es decir, el algoritmo aplicando el enfoque aproximado), se implementará sobre el grafo real de calles.

1.1 Motivación y antecedentes

El transporte público es un sistema esencial en todo centro urbano, ya que afecta de manera crítica la facilidad de desplazamiento en ciudades de mediano y gran porte. Un buen

sistema de transporte público ofrece múltiples ventajas para los ciudadanos, como la reducción del tráfico y de la necesidad de poseer un vehículo privado, además de aumentar la disponibilidad de estacionamiento.

Además de sus beneficios para los usuarios y operadores de estos servicios, el transporte público representa una ventaja medioambiental al disminuir la contaminación mediante la reducción de vehículos en la vía pública. Este impacto positivo es aún mayor cuando el transporte público es parcial o totalmente eléctrico, como en el caso de tranvías, autobuses eléctricos, entre otros.

Dada la importancia del transporte público, su planificación y optimización han sido ampliamente estudiadas. En el caso de los ómnibus, el problema de optimizar los recorridos y las frecuencias de las diferentes líneas se conoce como Transit Network Design Problem (TNDP). Este problema busca diseñar las rutas y el itinerario de los ómnibus considerando la infraestructura de calles y la demanda de viajes entre distintos orígenes y destinos, con el objetivo de optimizar el tamaño de la flota, los tiempos de viaje y la frecuencia de los viajes [1].

En la mayoría de las ciudades más desarrolladas y de mayor tamaño, es común encontrar más de un sistema de transporte público, siendo el caso más habitual la combinación de un sistema de ómnibus con trenes subterráneos o tranvías. En estos sistemas, surge el concepto de jerarquía de redes, un enfoque de diseño en el que uno de los modos de transporte se considera primario. Este sistema primario generalmente ofrece mayor velocidad y rutas más directas. Por otro lado, el sistema secundario se diseña específicamente para facilitar el acceso de los usuarios a las paradas o estaciones de la red primaria. El problema del diseño de estas redes secundarias alimentadoras se conoce como Feeder-Bus Network Design Problem (FBNDP) [2]. Cuando estos problemas se aplican a casos reales mediante modelos matemáticos, suelen ser demasiado grandes y complejos para encontrar una solución óptima. Por ello, se han desarrollado diversas estrategias para obtener soluciones aproximadas. Estas incluyen la división del problema en subproblemas más manejables, que pueden resolverse de forma exacta, o el uso de métodos heurísticos diseñados para aproximarse a la solución óptima de manera eficiente. También existen estudios previos sobre la generación de corredores troncales, en los cuales se han empleado tanto soluciones heurísticas como modelos matemáticos exactos [8].

En este proyecto se busca la optimización de la red de transporte público, aplicada al caso de estudio de la ciudad de Montevideo, que actualmente cuenta con una red de ómnibus como su único servicio de transporte público, administrado por la Intendencia de Montevideo a través del Sistema de Transporte Metropolitano (STM) [3]. A pesar de no contar con múltiples formas de transporte público, la Intendencia de Montevideo ha desarrollado diversos planes para mejorar el sistema. Por un lado, se han identificado ciertos corredores donde la velocidad del transporte es superior a la velocidad promedio en el resto de las calles. El Plan de Movilidad de la intendencia define seis corredores troncales en los que se busca implementar medidas para aumentar la velocidad del transporte de ómnibus [4]. Por otro lado, también existen iniciativas privadas, como la de un consorcio que propuso la creación de un sistema de tranvía desde la Plaza Independencia en Montevideo hasta El Pinar, en Canelones. Este recorrido cubriría los corredores troncales de 18 de Julio y Avenida Italia y permitiría mejorar la velocidad en estos corredores en un 40% [5]. Además, el Centro de Investigaciones Económicas presentó un proyecto que propone la creación de líneas de alta frecuencia y mejoras en la infraestructura de los corredores de 18 de Julio, 8

de Octubre y Avenida Italia. Según este estudio, estas mejoras podrían aumentar la velocidad en un 50% y reducir los tiempos de viaje en un 35% [12].

Por estos motivos, se puede considerar que el sistema de transporte de Montevideo está migrando hacia una estructura jerárquica, la cual seguirá desarrollándose en el futuro. Por lo tanto, resulta interesante estudiarlo aplicando el problema de FBNDP, ya que se ha identificado una red principal que, en el futuro, podría ser considerada una red troncal. En ese caso, las líneas de ómnibus existentes deberán adaptarse para cumplir la función de red secundaria, complementando a la red troncal.

Sin embargo, es importante considerar que los corredores troncales en Montevideo no son tan centralizadores como en redes de ciudades más grandes con sistemas más consolidados. Por esta razón, en el proyecto de grado [7] se definió el Extended Feeder-Bus Network Design Problem (EFBNDP), en el cual se contempla que no todas las líneas de ómnibus funcionarán como alimentadoras de la red troncal. En su lugar, se adopta una metodología híbrida en la que la solución heurística del problema determinará si una línea operará como alimentadora de la troncal o como línea de soporte, conectando zonas de manera independiente a la red troncal. El alcance de ese proyecto incluyó el procesamiento de datos sobre la demanda zonal de usuarios en Montevideo [22], obtenidos de diversas fuentes, así como la creación de un grafo de zonas y otro más detallado que representa la red de calles de la ciudad. El proyecto también buscó desarrollar una solución heurística; sin embargo, debido a las limitaciones de tiempo y al esfuerzo requerido para la recolección de datos, no se profundizó en este aspecto. En su lugar, se implementó una solución preliminar, dejando como trabajo futuro la posibilidad de mejorarla. La principal desventaja de esta solución es que genera una gran cantidad de recorridos cortos, los cuales no resultan óptimos, ya que esto implica un uso innecesario de más líneas de ómnibus. En cambio, estas líneas podrían integrarse en recorridos más largos que cubran la demanda de manera más eficiente.

Por estos motivos, en este trabajo se desarrolló un diseño alternativo para la creación de una solución heurística, mediante un proceso de discusión y diseño iterativo, hasta alcanzar un algoritmo final que pueda verificarse mediante un modelo matemático. Este modelo se utilizará para encontrar la solución exacta al problema en una red con un mayor nivel de agregación en comparación con el grafo de calles, lo que permitirá comparar los resultados de la heurística con los del modelo exacto.

1.2 Objetivos y alcance del trabajo

Este trabajo se enmarca en el Departamento de Investigación Operativa del InCo y se centra en diseñar recorridos alimentadores de una red de segundo nivel para sistemas de transporte público, tomando como caso de estudio, a Montevideo.

Dicho esto, los objetivos del trabajo son:

1. Investigar y aprender sobre el diseño de redes alimentadoras para sistemas de transporte público, basándose principalmente en [7] y otros artículos científicos relevantes como [1] y [2].
2. Desarrollar un diseño conceptual y la implementación computacional de un método que optimice el diseño de redes alimentadoras, utilizando información de la demanda de viajes interzonales. Se buscará equilibrar los intereses de los

operadores y los usuarios.

3. Estudiar la viabilidad de resolver el problema de forma exacta. Si no es posible, proponer una heurística y validarla con un modelo exacto utilizando una red con mayor nivel de agregación en comparación con la red de calles de Montevideo.
4. Aplicar el algoritmo a la ciudad de Montevideo. Para ello, se utiliza la red troncal definida en el Plan de Movilidad [4]. Además, para los datos, se tomarán las instancias brindadas por el grupo de investigación. El objetivo de este punto es evaluar el comportamiento del algoritmo bajo diferentes condiciones; por ejemplo, nos interesa saber cómo la velocidad de la red troncal impacta en la generación de las redes alimentadoras. Las soluciones que se obtengan al cambiar algunos parámetros del algoritmo ayudarán a entender cómo influyen en la creación y el trazado de los recorridos alimentadores.

1.3 Estructura del informe

En el Capítulo 2 se define el problema de creación de recorridos alimentadores, se describen las redes con las que se trabajarán en el resto del informe, se plantean los supuestos del trabajo y se introduce el enfoque de resolución, junto con los subproblemas que surgen al aplicarlo.

En el Capítulo 3 se expone la formulación del modelo matemático para obtener la solución exacta a estos subproblemas, junto con el pseudocódigo de la heurística desarrollada.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados de un conjunto de casos de prueba diseñados para evaluar cómo responde el algoritmo a variaciones en sus parámetros, así como los resultados de otro conjunto de pruebas que comparan las soluciones de la heurística con las del modelo exacto.

En el Capítulo 5 se detalla la construcción del caso de estudio, se exponen los casos de prueba con variaciones en los diferentes parámetros y se analizan los resultados.

Finalmente, en el Capítulo 6 se ofrece un resumen del trabajo, se presentan las conclusiones de la investigación y se sugieren posibles ideas de trabajo a futuro.

2. Presentación del problema y enfoque de resolución

2.1 Definición del problema

El Feeder Bus Network Design Problem (FBNDP) es un problema ampliamente estudiado en la literatura internacional [25,24,21]. Se enfoca en diseñar un conjunto óptimo de recorridos alimentadores (ver Figura 2.1) y sus frecuencias dentro de una red jerárquica de transporte público, con el objetivo de minimizar los costos tanto para los usuarios como para los operadores. Debido a su complejidad en términos de modelado matemático y resolución computacional, generalmente se resuelve aplicando soluciones heurísticas. En la tesis de Dornel y Erlichman [7] se definió lo que se denominó Extended Feeder Bus Network Design Problem (EFBNDP), cuyo enfoque también considera recorridos secundarios que no son solamente alimentadores. La principal diferencia entre el Extended Feeder Bus Network Design Problem y el problema tratado en este trabajo, radica en que el último se enfoca exclusivamente en la generación de recorridos alimentadores de la red troncal.

Entonces, el presente trabajo aborda el diseño de recorridos alimentadores para sistemas de transporte público (ya que aquellos recorridos de segundo nivel que no son alimentadores quedan fuera del alcance de estudio), basado en información de demanda interzonal y utilizando un modelo de programación matemática.

Es importante considerar los intereses de los dos actores principales del problema: los usuarios y los operadores. Para que la heurística y el modelo puedan comparar las distintas opciones y seleccionar la mejor, es imprescindible contar con una función objetivo que evalúe los costos de usuarios y operadores y permita elegir el resultado que los minimice.

En cuanto a los intereses de los usuarios, se consideran los siguientes factores: tiempo de viaje a bordo de los vehículos, tiempo de espera en las paradas, mejor y mayor conectividad entre las diferentes zonas, confort, costo y seguridad. En resumen, los usuarios buscan un servicio de transporte que les permita moverse de su origen a su destino de manera fácil, rápida, cómoda, segura y con el menor costo posible. Sin embargo, en los problemas de diseño de redes de transporte, no se suelen considerar factores como la seguridad, el confort y el costo de las tarifas. El tiempo de viaje es la variable que más se tiene en cuenta a la hora de formular estos problemas. Los tiempos de transbordo y de espera en las paradas no se consideran en este proyecto, ya que están determinados por las frecuencias, las cuales no se consideran variables de decisión. Además, el costo de transbordo generalmente se considera muy bajo o despreciable en el diseño de redes jerárquicas. Dado esto, el único factor que se busca minimizar para el caso de los usuarios es el tiempo a bordo del vehículo entre el origen y el destino [7].

Por parte de los operadores, su objetivo es satisfacer la demanda al menor costo operativo posible, maximizando así sus ganancias. Dentro de los costos operativos se incluyen la cantidad de ómnibus utilizados y el costo del combustible. Existen otros factores, como los costos laborales de los choferes y el mantenimiento de los ómnibus. Estos no se consideran, porque como se mencionó anteriormente dependen de las frecuencias, las cuales no son una variable de decisión en este proyecto. Dicho esto, en este trabajo consideramos que los operadores buscan conectar todos los pares origen-destino utilizando la menor cantidad de líneas posible y garantizando que los recorridos sean lo más cortos posibles.

Por lo tanto, se asume que los costos que se calculan son directamente proporcionales al costo real teniendo en cuenta todos los factores mencionados.



Figura 2.1: Recorridos alimentadores (verde y naranja) en una red jerárquica (estaciones troncales en rojo y calles en gris).

2.2 Red

En este proyecto se emplearán dos tipos de redes: una red con un mayor nivel de agregación en comparación con la red de calles de Montevideo, que servirá para aproximar la red real; y otra que representará de manera exacta la red de calles de la ciudad.

Para el caso de la red exacta, la misma se modelará mediante un grafo $G=(N,A)$, donde N es un conjunto de nodos y A un conjunto de aristas no dirigidas. En este contexto, un nodo en N puede representar una intersección de calles o un centroide (ver Figura 2.2). Los centroides son puntos imaginarios que representan la concentración de demanda dentro de una zona y generalmente se ubican en el baricentro de dicha área [15]. Por su parte, una arista en A puede representar un tramo de calle en la red vial o troncal o un walking path (caminata de acceso) [7]. Los walking paths son líneas imaginarias que conectan los centroides con la red de calles. Deben verse como una distancia que puede ser recorrida a pie entre un centroide y una esquina, y es por esto que estos caminos representan los trayectos que los usuarios deben recorrer caminando. Se incluyen porque es necesario establecer una conexión entre estos nodos abstractos (los centroides) y los nodos y aristas que representan las esquinas y calles reales. Sin esta conexión, la solución no podría generar recorridos válidos.

Cada arista tiene un costo asociado, que corresponde al tiempo que tarda un vehículo (ómnibus) o una persona caminando, en recorrerla. Este costo se mide en tiempo. Los operadores sólo consideran los costos de viaje en ómnibus, mientras que los usuarios tienen en cuenta tanto esos costos como los relacionados con el tiempo de caminata.

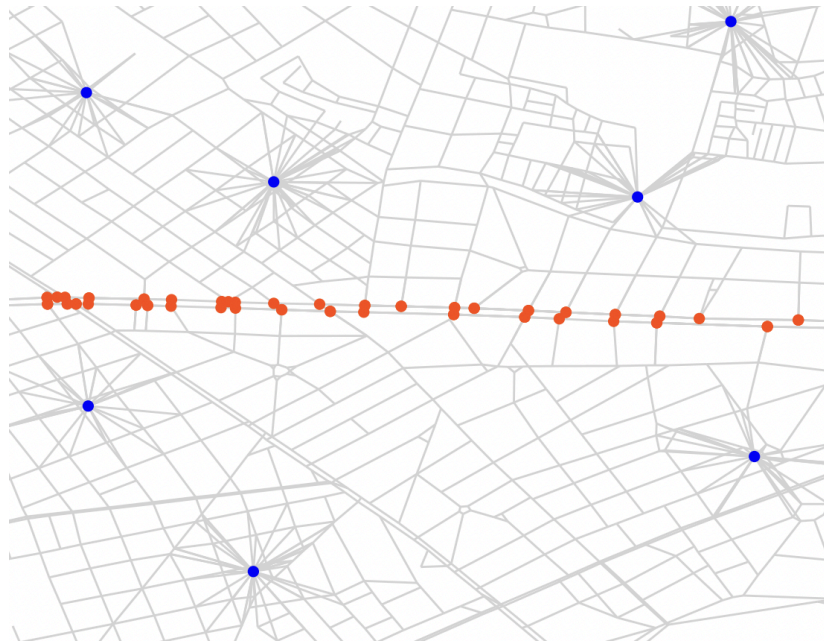


Figura 2.2: Nodos troncales (en rojo), nodos centroides (en azul) y nodos esquinas (intersección de líneas grises).

La red troncal es un subconjunto de G , formado por lo que denominados como nodos troncales y aristas troncales y se caracteriza por ofrecer un mejor desempeño en los tiempos de viaje en comparación con el resto de las aristas. Una arista que une dos nodos troncales se denomina arista troncal y las demás aristas representan conexiones comunes que pueden formar parte de un recorrido alimentador. Los costos de las aristas son los siguientes.

Costos de aristas no troncales:

- Cálculo: El costo de una arista no troncal se calcula como la distancia real de esa arista (en km) en la red de calles, dividida por una velocidad promedio en km/h.
- Fórmula: El tiempo de viaje para una arista no troncal es simplemente la distancia:

$$t = \frac{d}{v} = d \text{ (donde } v = 1 \text{ km/h)}$$

Se toma $v = 1 \text{ km/h}$, para simplificar, ya que solo nos importa la relación entre la velocidad promedio de una arista común y la velocidad promedio de una arista troncal.

Costos de aristas troncales:

- Cálculo: Las aristas troncales permiten un aumento en la velocidad. Para representar esto, se introduce un factor de velocidad relativa v_{rel} . Por ejemplo, si se considera que la velocidad promedio de las aristas no troncales es de 20 km/h [23] y se aplica una velocidad relativa de 1,5 [12] para las troncales, se obtendría una velocidad promedio de 30 km/h ($20 \text{ km/h} \cdot 1,5$) para las aristas troncales.
- Fórmula: El costo de una arista troncal se ajusta por este factor de velocidad:

$$t = \frac{d}{v \cdot v_{rel}} = \frac{d}{v_{rel}} \text{ (ya que } v = 1 \text{ km/h)}$$

Ejemplo: Si $v_{rel} = 1,5$ el costo sería:

$$t = \frac{d}{1,5}$$

Costos de los walking paths:

- Cálculo: Ya que un valor aceptado como promedio para una velocidad de caminata es de 5 km/h [13], se estableció una velocidad relativa de $v_{rel} = \frac{1}{4}$ (si se toma que la velocidad promedio de las aristas no troncales es de 20 km/h) para los walking paths. Lo que significa que estos caminos tienen un costo significativamente mayor que las aristas no troncales y aún más comparado con las troncales. Es importante recordar que este costo no forma parte de los costos operacionales, sino que solo se considera para el cálculo de los costos de los usuarios, ya que se refiere a los trayectos que se deben realizar a pie.
- Fórmula: El costo de los walking paths se calcula como:
$$t = d \cdot 4$$

Los walking paths son mucho más costosos en términos de tiempo que las aristas normales y troncales, reflejando el tiempo extra que los usuarios deben realizar caminando.

Es necesario explicar el por qué de los nodos troncales y centroides. Los nodos troncales (que también son nodos esquina) son los puntos de acceso a la red troncal y en el resto del informe, son denominados como estaciones troncales. En la Figura 2.3 se puede ver una delimitación zonal de una parte de Montevideo. Los centroides se encuentran pintados en amarillo.

Para cuantificar la demanda de viajes interzonales, el mapa se divide en zonas. Esta demanda se define mediante una matriz origen-destino $D = \{d_{ij}\}$, donde i y j representan zonas, cada una de las cuales tiene un nodo centroide asociado en el grafo G . Cada entrada de la matriz indica la demanda de viajes entre la zona i y la zona j por unidad de tiempo dentro de un período específico de análisis [7]. A lo largo de este informe, el término par origen-destino se emplea para referirse a la pareja de nodos centroides de zona cuya demanda de viajes está representada por la entrada d_{ij} en la matriz origen-destino D .

Entonces, las demandas de transporte se establecen entre pares de centroides (a esto se le llama demanda interzonal) y son invariables en el tiempo.

Esto quiere decir que la demanda no está definida en términos de un único nodo, sino que se genera entre un nodo origen (un centroide) y un nodo destino (otro centroide). La demanda puede variar entre los diferentes pares, con algunos teniendo mayor demanda que otros y algunos hasta nula.

La red con un mayor nivel de agregación (red simplificada) se estructura de la siguiente manera:

- Todos los nodos en esta red son centroides. Los centroides pueden ser troncales o no troncales (ver Figura 2.4). No existen los nodos esquina.
- Hay aristas troncales, que conectan dos nodos troncales; y aristas no troncales, que conectan un centroide no troncal con otro centroide no troncal o un centroide no troncal con un centroide troncal. Estas aristas no representan la red de calles de Montevideo, por lo que no tienen una representación en la realidad, sin embargo son una aproximación en lo que respecta a los tiempos de viaje. Se generan al hacer la conexión entre un centroide y otro, correspondientes a zonas adyacentes.

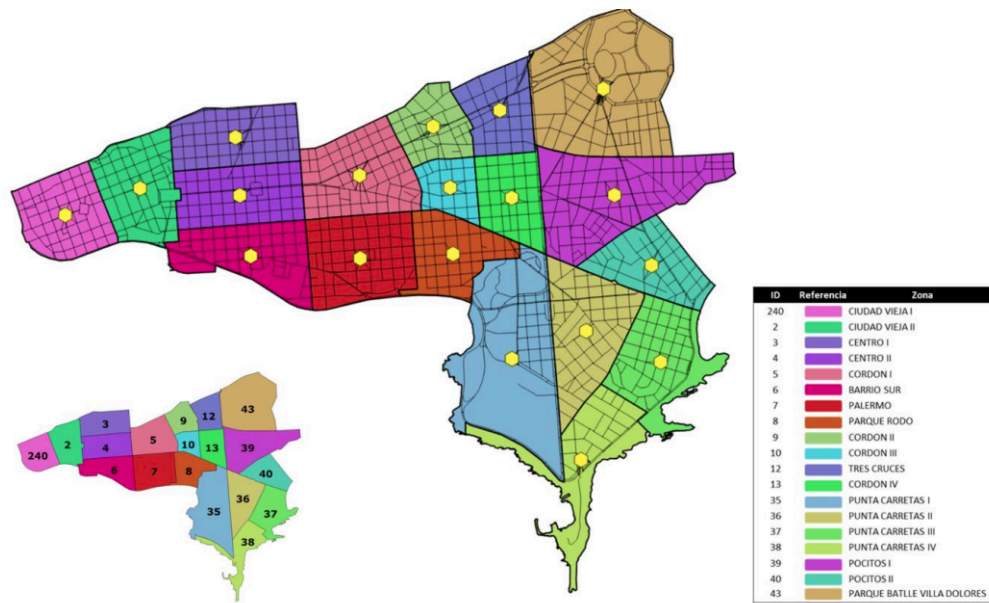


Figura 2.3: Delimitación por zonas de una parte de Montevideo, cada una con sus centroides en el baricentro, pintados de amarillo. Ilustración tomada de [7].

En esta red no hay walking paths y todos sus nodos son centroides, lo que implica que los nodos troncales también deben ser considerados como centroides.

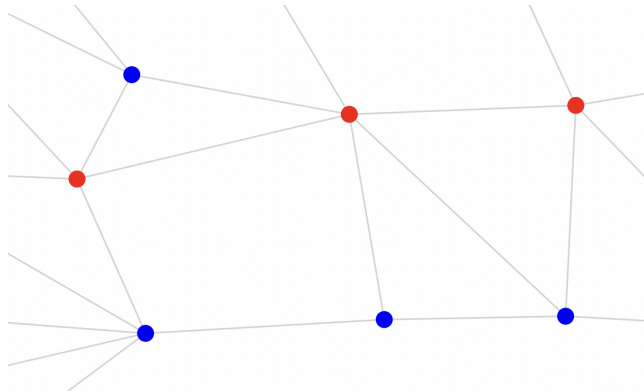


Figura 2.4: Nodos troncales (rojos) y no troncales (azules).

En la Figura 2.5 se puede apreciar una imagen del grafo que representa una versión simplificada de la red de calles de la ciudad de Montevideo, en donde los únicos nodos que existen en la red son los centroides.

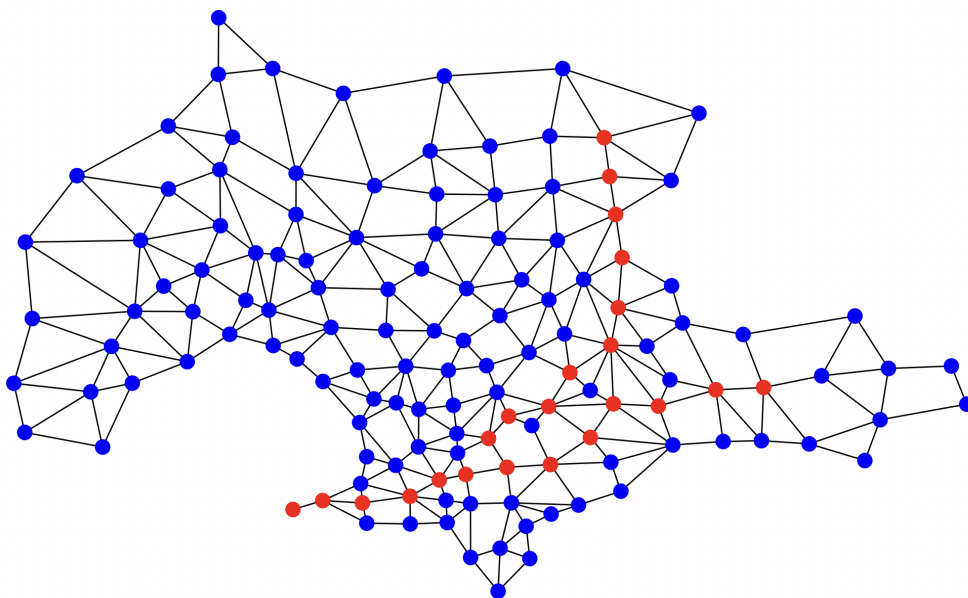


Figura 2.5: Representación de Montevideo con una red con mayor nivel de agregación. Los puntos azules son los centroides y los puntos rojos los centroides que además son nodos troncales.

2.3 Supuestos de trabajo

A continuación, se listan los supuestos del trabajo:

1. Capacidad de los ómnibus: La solución no toma en cuenta la capacidad de los ómnibus. Esto significa que, aunque un recorrido tenga que transportar una gran demanda no se tiene en cuenta cuántos vehículos se necesitan para llevar toda esa demanda, lo que da pie al siguiente punto.
2. Frecuencia de los ómnibus: Tampoco se considera la frecuencia de los ómnibus. No se incluye en la solución ninguna recomendación sobre cuál sería la frecuencia más adecuada para una línea en función de la demanda. Incluir la frecuencia en el cálculo de la mejor solución es muy complejo y excede los alcances del proyecto. Sin embargo, es razonable pensar que determinar la frecuencia de los recorridos obtenidos en este trabajo podría abordarse en una etapa posterior, ya que es algo factible y podría ser explorado en el futuro.
3. La demanda interzonal no varía a lo largo del tiempo y viene dada.
4. Las trayectorias generadas para los usuarios siempre siguen la estructura:
 - walking path - alimentador - troncal - alimentador - walking path
 - walking path - troncal - alimentador - walking path
 - walking path - alimentador - troncal - walking path.

En este esquema el usuario puede comenzar utilizando un servicio alimentador que lo conecte con la red troncal, continúa su trayecto a través de esta red troncal y finalmente, en el caso que sea necesario, termina por usar otro servicio alimentador para llegar a su destino final.

5. Se asume también que la red troncal es conexa y está definida, por lo que no se consideran los costos de construcción ni de operación. Si la troncal fuera desconexa algunos trayectos podrían quedar desconectados, ya que dependen de la troncal para completar su ruta. En la Figura 2.6 se muestra una troncal desconexa (recorridos rojos) y dos recorridos alimentadores (azul y celeste). Los extremos de los alimentadores representan pares origen-destino y a cada uno se le generó un recorrido alimentador para conectarlo a la troncal. Sin embargo, debido a que la red troncal es desconexa, el par de nodos queda incomunicado.

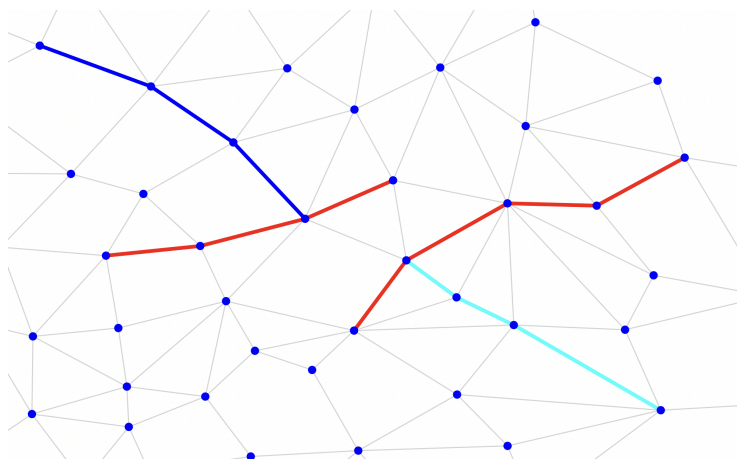


Figura 2.6: En azul y celeste, recorridos alimentadores. En rojo, una red troncal desconectada.

6. La velocidad promedio de los ómnibus es fija y es la misma para todas las aristas no troncales. De manera similar, las aristas troncales también tienen una velocidad promedio establecida. La velocidad promedio de un recorrido de ómnibus es una medida que indica qué tan rápido se realiza una ruta en promedio, considerando tanto el tiempo en movimiento como las paradas necesarias durante el viaje. Se calcula dividiendo la distancia total recorrida por el tiempo total que toma completarla, incluyendo las detenciones en paradas, semáforos y otros eventos que puedan ralentizar el viaje. Para ilustrar, se puede considerar que la velocidad promedio de las aristas no troncales es de 20 km/h, la de las aristas troncales de 30 km/h [26] y la de las aristas clasificadas como "walking path", de 5 km/h [13].
7. Para calcular el costo de los usuarios no se considera el tiempo de transbordo ni el tiempo de espera en la parada.
8. El sentido de la red de calles no se tiene en cuenta y los recorridos generados son bidireccionales. Es decir, un recorrido que satisface la demanda del par (origen, destino) también satisface la demanda del par (destino, origen). Esto significa que, para obtener la demanda de dos pares de nodos se toma en cuenta la suma de la demanda de los pares espejados. Esta simplificación ayuda a reducir el tamaño del problema. Si bien los recorridos no tienen por qué ser necesariamente bidireccionales en este estudio se asume así. Dado que en los datos utilizados se analizó el comportamiento de la demanda a lo largo del día, se considera que las personas que se desplazan en una dirección por la mañana, en general, regresan por la noche, por lo que dicha demanda puede asumirse como simétrica.

2.4 Enfoque de resolución

El enfoque adoptado para diseñar el algoritmo resolutivo se centró en minimizar el tiempo de traslado de los usuarios, considerando las limitaciones de recursos de los operadores, como la cantidad total de recorridos y su longitud. Desde esta perspectiva, se determinó que un procedimiento efectivo consistía en agrupar los nodos de cada par de demanda según la estación troncal más cercana en el camino más corto hacia su destino. A partir de ahora, estos nodos serán denominados nodos alimentadores.

Para ilustrar mejor la idea, se introduce el concepto de grupo. El nodo de origen de un par de nodos se asigna al grupo de la primera estación troncal que aparece en el recorrido del camino mínimo en dirección origen-destino, mientras que el nodo de destino se agrega al grupo de la primera estación troncal del camino mínimo en dirección destino-origen. Un nodo alimentador puede pertenecer a varios grupos y existe un grupo por cada estación de la red troncal.

La Figura 2.7 muestra ese camino mínimo pero dividido en tres partes: el primer tramo que va desde el nodo origen a la primera estación troncal del recorrido (recorrido naranja), el segundo tramo que solo forma parte de la troncal y el tercer tramo que va desde la estación troncal al nodo destino (recorrido azul).

Una vez que todos los nodos alimentadores, ya sean origen o destino de alguna demanda, han sido agrupados (o clasificados) dentro de un grupo, se procede a iterar sobre cada grupo para generar recorridos que cubran todos los nodos de ese conjunto y finalicen en la estación troncal correspondiente.

Esto maximiza el beneficio para los usuarios, ya que garantiza que los nodos se dirijan hacia la estación más cercana en el camino mínimo. Sin embargo, aunque sería ideal para los usuarios que cada nodo tuviera un recorrido mínimo hacia su estación correspondiente, esto no es viable para los operadores. Por ello, se ha establecido que los recorridos generados dentro de cada grupo deben cumplir con los límites impuestos por los operadores: existe un número máximo de recorridos que se pueden generar para ese grupo y cada uno debe ajustarse a la restricción de longitud.

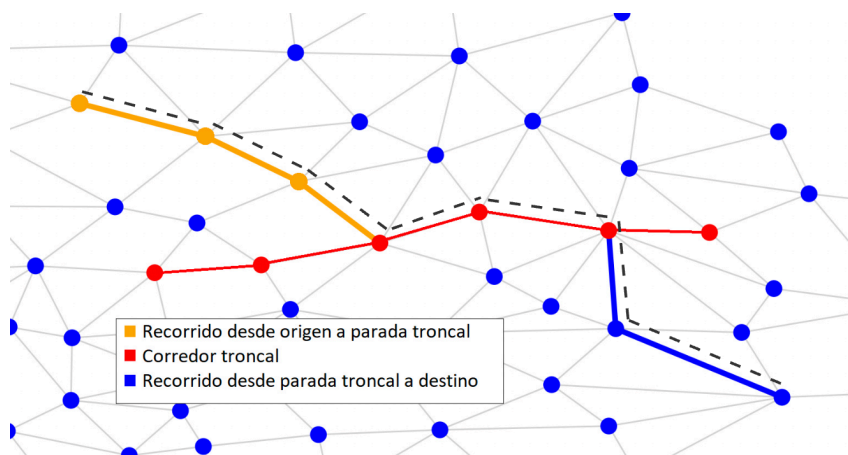


Figura 2.7: Trayectoria completa desde de un origen a un destino que hace uso de la red troncal (línea punteada).



Figura 2.8: Conjunto de nodos asignados a una estación troncal.

La Figura 2.8 muestra ocho nodos (en color rojo) asignados a la estación troncal (en color violeta). Los nodos grises no pertenecen al grupo. Además, en la Figura 2.9 se generaron tres recorridos para los nodos del grupo: el recorrido naranja, celeste y azul. Estos recorridos inician en la estación troncal y luego se bifurcan en tres direcciones para abarcar todos los nodos rosados de manera eficiente.

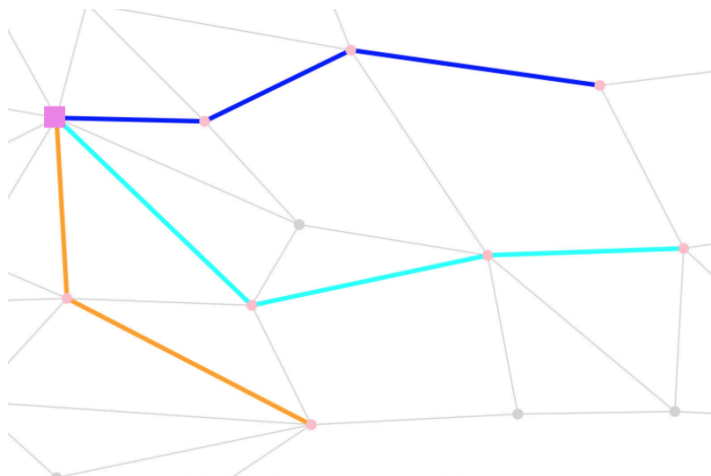


Figura 2.9: Recorridos generados para cubrir el conjunto de nodos asignados a la estación troncal.

Dicho esto, se presentarán los pasos detallados de la propuesta del algoritmo resolutivo que se acaba de presentar.

Este procede de la siguiente manera: se categorizan los pares de origen-destino según si el recorrido más corto entre los nodos incluye al menos una arista troncal. Si el recorrido incluye una arista troncal, se considera que ese par utiliza la red troncal y por lo tanto será relevante para el algoritmo resolutivo. Si no es así, el par se excluye del análisis, ya que queda fuera del alcance de este estudio.

Al final, los nodos que no se excluyen deben clasificarse según las estaciones troncales. Para ello, se clasifica el nodo de origen según el primer nodo troncal en el recorrido más corto desde el origen hasta el destino. De manera similar, el nodo de destino se clasifica según el primer nodo troncal en el recorrido entre el destino y el origen. Al final del proceso, se obtendrán como máximo tantos grupos como nodos troncales haya, siendo posible que los mismos nodos alimentadores pertenezcan a múltiples grupos. En este caso, por cada grupo al que ese nodo pertenezca, se le generará un recorrido alimentador.

Como resultado de este procesamiento, se logra dividir el problema en varios subproblemas, cada uno enfocado en conectar los grupos de nodos alimentadores a una única estación troncal. Estos grupos resultantes pueden considerarse como subproblemas que deben resolverse de manera individual.

Algorithm 1 Algoritmo resolutivo

```

1: procedure MAIN(in G, in red_troncal, in matriz_demanda, out R)
2:    $L \leftarrow$  Lista de pares origen-destino  $[i, j]$  cuyo camino más corto transita la red
      troncal y que tienen una demanda distinta de cero;
3:
4:    $R \leftarrow []$ ;
5:    $grupo \leftarrow []$ ;
6:
7:   for [origen, destino] in L do
8:      $estacion\_troncal\_origen \leftarrow$  Primer nodo de la red_troncal en el camino
      mínimo entre origen y destino;
9:     Agregar origen a  $grupo[estacion\_troncal\_origen]$ ;
10:
11:     $estacion\_troncal\_destino \leftarrow$  Primer nodo de la red_troncal en el camino
      mínimo entre destino y origen;
12:    Agregar destino a  $grupo[estacion\_troncal\_destino]$ ;
13:  endFor
14:
15:  for estacion in grupo do
16:     $recorridos \leftarrow many\_to\_one(G, grupo[estacion], estacion)$ ;
17:    Agregar recorridos a  $R$ ;
18:  endFor
19:
20:  return  $R$ ;

```

Figura 2.10: Pseudocódigo algoritmo resolutivo

La Figura 2.10 muestra todos los pasos del algoritmo resolutivo, el cual recibe como entrada un grafo G , una lista de nodos troncales *red_troncal*, una *matriz_demanda* y devuelve una lista de recorridos R . G debe ser un grafo no dirigido $G=(N,A)$, sobre el cual se define el trazado de los recorridos. El conjunto de nodos N debe incluir una propiedad que indique si un nodo es troncal o no. Las aristas deben tener un costo asociado que representa el tiempo de viaje para los usuarios y también especificar si son walking paths o no. El parámetro *matriz_demanda* representa la demanda entre los pares de nodos centroides del

grafo G , expresada en cantidad de viajes por unidad de tiempo. Por su parte, *red_troncal* debe ser una lista que contenga los identificadores de todos los nodos pertenecientes a la red troncal. La salida R es una lista de recorridos alimentadores. Es importante notar que R corresponde a una lista de recorridos de ómnibus, no de trayectos de usuarios. R devuelve únicamente los recorridos alimentadores. Para calcular el costo de un par origen-destino, es necesario construir el trayecto completo uniendo los recorridos alimentadores generados en R para dicho par, con el tramo correspondiente de la red troncal y sus walking paths. Esto permite obtener un trayecto completo desde el origen hasta el destino.

2.5 Parámetros

Los parámetros necesarios para poder resolver el problema en este trabajo son:

- Matriz de demanda: Representa la demanda entre cada par de nodos origen-destino.
- Velocidad relativa de la red troncal: Determina la velocidad promedio para las aristas troncales en comparación con la velocidad promedio de las aristas no troncales.
- Velocidad relativa de los walking paths: Determina la velocidad promedio de los walking paths en comparación con la velocidad promedio de las aristas no troncales.
- Longitud máxima de cada recorrido: Define la distancia máxima en kilómetros permitida para cada recorrido.
- Cantidad máxima de recorridos por estación troncal: Establece el número máximo de recorridos que se pueden generar por estación troncal.

2.6 Subproblemas: Many to one

El FBNDP puede ser considerado bajo dos patrones de demanda diferentes: many-to-one o many- to-many [2].

El término "many to one" se refiere a un escenario en el que múltiples nodos de origen se dirigen hacia un único nodo de destino, que podría ser una estación central o un punto de conexión importante. Por ejemplo, varios ómnibuses que operan en diferentes recorridos pueden llevar a los pasajeros hacia una misma estación troncal. En contraste, la relación "many to many" se aplica a situaciones en las que múltiples nodos de origen están conectados con múltiples nodos de destino. En un sistema de transporte público esto podría ocurrir cuando varios recorridos de ómnibus conectan diversas paradas (nodos de origen) con distintas estaciones o destinos (nodos de destino) [2].

El problema inicial de encontrar un conjunto de recorridos que satisfaga la demanda de los pares origen-destino puede considerarse como un problema "many-to-many", ya que diferentes orígenes deben llegar a distintos destinos. Sin embargo, al aplicar la primera parte del algoritmo resolutivo el problema se simplificó a la tarea de hallar un conjunto de recorridos que conecten los nodos de cada grupo con su estación troncal asignada. De este modo, se transformó en un problema de tipo "many-to-one", donde varios orígenes deben llegar a un mismo destino.

En las Figuras 2.11, 2.12 y 2.13 se representan los subproblemas de hallar la solución para tres estaciones troncales distintas. Se puede observar que la estación de la Figura 2.11 es la que tiene más nodos en su grupo, seguida por la Figura 2.12 que tiene una cantidad mediana de nodos, mientras que la estación de la Figura 2.13 tiene asignados solo unos pocos nodos.

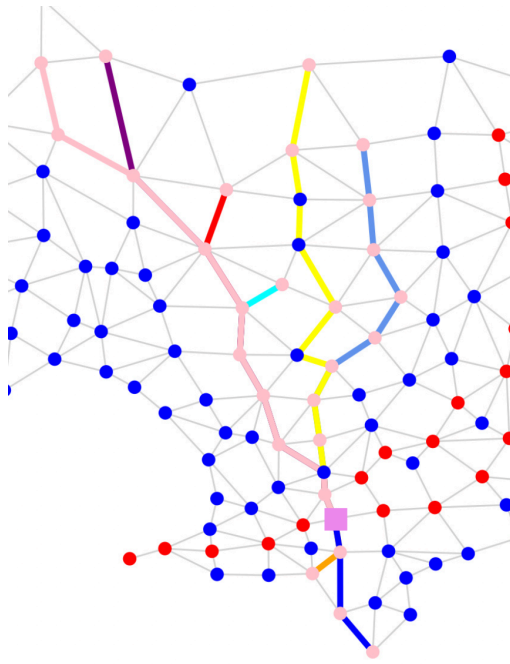


Figura 2.11: Estación troncal (en violeta) con una cantidad alta de nodos asignados.

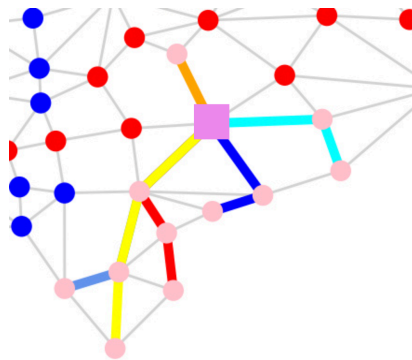


Figura 2.12: Estación troncal (en violeta) con una cantidad mediana de nodos asignados.

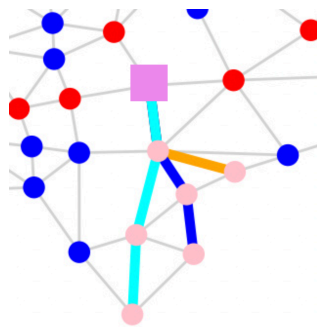


Figura 2.13: Estación troncal (en violeta) con una cantidad baja de nodos asignados.

Una vez que se tienen los grupos formados, se itera sobre ellos y se les aplica lo que en este trabajo denominamos como “many-to-one”. Para abordar esta etapa, se desarrollaron dos enfoques: una heurística, llamada heurística many-to-one y un modelo de programación matemática, denominado modelo exacto. Tanto la heurística como el modelo toman los grupos de nodos y se encargan de generar los recorridos alimentadores que se devuelven como solución del algoritmo resolutivo.

En las siguientes secciones detallaremos el funcionamiento tanto del modelo como de la heurística. Ambos enfoques persiguen minimizar el costo para los usuarios. Para contemplar el interés de los operadores el enfoque que se dio fue de limitar la cantidad total de recorridos a un máximo predeterminado. Por ejemplo, aunque sería ideal tener un recorrido directo para cada nodo, porque sería óptimo para los usuarios, esto requeriría tener tantos recorridos como nodos hay en el grupo, lo cual no es factible para los operadores. Por lo tanto, este parámetro establece un límite a la cantidad de recorridos generados con el fin de favorecer a los operadores que no pueden ofrecer tantos recorridos como nodos alimentadores existen. Además, limitar el número de recorridos es esencial para evitar una sobresaturación de ómnibuses en las calles, lo que podría generar congestión y reducir la eficiencia general del sistema de transporte. También existe otra restricción que limita la longitud máxima de cada recorrido, evitando que un recorrido supere una distancia establecida.

3. FBND - Many to one, enfoque exacto y heurístico

3.1 Modelo matemático

El modelo presentado en esta sección obtiene una solución exacta a los subproblemas del algoritmo resolutivo.

El objetivo del modelo es encontrar el conjunto óptimo de recorridos que conecten todos los nodos de la red secundaria, es decir los nodos alimentadores, con una estación troncal, minimizando el costo para los usuarios, representado en la función objetivo. Cada nodo tiene una demanda asociada. Además, se tienen restricciones operativas que limitan el número y la longitud de los recorridos.

Este modelo matemático se formula en base a arcos dirigidos dentro de una red G , utilizando un conjunto de parámetros que capturan la estructura del problema. Para ello se define un conjunto potencial de recorridos, un conjunto de nodos, un conjunto de arcos y un conjunto de demanda, donde cada demanda está asociada a un solo nodo, excepto el nodo troncal, que no tiene demanda asignada. Los arcos de este grafo G representan a las aristas de la red presentada en el capítulo 2. Por ejemplo, una arista no dirigida entre los nodos n_1 y n_2 se modela como dos arcos dirigidos: (n_1, n_2) y (n_2, n_1) .

Los parámetros incluyen el costo de cada arco que representa el tiempo de viaje, la cantidad de demanda asociada a cada nodo y la designación del nodo troncal.

Las variables más importantes del modelo son dos: una variable de flujo de demanda, que indica por dónde debe pasar la demanda para minimizar la función objetivo; y una variable de activación de arcos, que define a qué recorridos pertenece cada arco, basándose en las demanda que la atraviesa. Es importante destacar que un mismo arco puede pertenecer a varios recorridos al mismo tiempo, sin embargo, cada demanda sólo puede asignarse a un recorrido. Una vez que una demanda se asigna a un recorrido, todo ese flujo de demanda debe seguir por ese recorrido hasta llegar al nodo troncal. Quiere decir que el flujo de demanda debe iniciar en cada nodo al que pertenecen y terminar en el nodo troncal.

El modelo está basado en el Traveling Salesman Problem (TSP) o Problema del Viajante. El desafío principal del TSP es encontrar el camino más corto que, comenzando desde un nodo de origen visite todos los otros nodos exactamente una vez y regrese al punto de origen [16]. Si bien el modelo toma como base el TSP, se le han realizado diversas modificaciones para adaptarlo a las características y necesidades específicas de la realidad que queremos representar.

La función objetivo que se minimiza está relacionada con el costo de los usuarios, quienes buscan trayectos rápidos y eficientes.

Como ya se mencionó, fue necesario representar los elementos del grafo mediante conjuntos. La representación se organiza en cuatro conjuntos principales:

- el conjunto de recorridos potenciales (Ru)
- el conjunto de nodos (N)
- el conjunto de arcos (A)
- el conjunto de demanda (K)

El conjunto Ru representa los potenciales recorridos. Por ejemplo, si el conjunto es $Ru = \{1, 2, 3, 4\}$, esto significa que pueden existir los recorridos 1, 2, 3 y 4. Si alguno de estos recorridos no tiene arcos asignados, implica que dicho recorrido no existiría en la solución óptima.

El conjunto de N es simplemente una lista de nodos del grafo. Estos nodos son la estación troncal más aquellos nodos alimentadores que fueron clasificados dentro del grupo de la estación troncal y también se pueden incluir nodos cercanos que fueron añadidos a este conjunto para asegurar que el grupo de nodos N sea conexo.

El conjunto A incluye todos los arcos del grafo (una arista queda entonces representada por dos arcos paralelos). El costo de un arco es básicamente el costo de transitar esa arista en el grafo. Es decir, los dos arcos que representan a la misma arista tienen el mismo costo.

El conjunto de demanda K representa la demanda asociada a los nodos.

Esta demanda es la suma de la demanda de los pares origen-destino por los cuales el nodo i queda designado a ese grupo, más la demanda del nodo origen i hasta la estación troncal, si esa demanda no es nula. La explicación de por qué se le asigna esa demanda al nodo i es la siguiente: como el problema se divide en varios subproblemas, la demanda cambia. Una opción es utilizar la demanda del par origen-destino. Por ejemplo, si el nodo i del par origen-destino (i, j) queda asignado a la estación troncal t , entonces su demanda dentro del grupo debe ser, sin duda, la de ese par. Sin embargo, puede ocurrir que ese mismo nodo quede asignado al mismo grupo a través de otro par (i, k) . En ese caso, claramente esas demandas deben sumarse, ya que el nodo queda situado en ese grupo gracias a ambos pares. Además, ahora el nodo i tiene un nuevo destino dentro de ese grupo, que es la estación troncal t . Por ello, su demanda también debería sumar a la ecuación. Esta explicación puede entenderse mejor si se observa la Figura 3.1. En este ejemplo, la demanda total asignada al nodo i es la suma $D1$ (demanda del par (i, j)), $D2$ (demanda del par (i, k)) y $D3$ (demanda del par (i, t)).

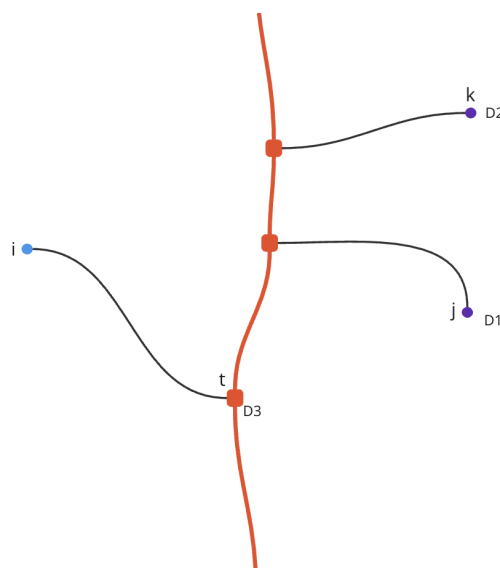


Figura 3.1: La red troncal está en rojo y el nodo t , también en rojo, es una estación de esa red. En celeste y violeta, los nodos i, j y k respectivamente. El nodo i queda asignado a la estación t mediante los pares (i, j) e (i, k) .

Además de los conjuntos ya nombrados, el modelo incluye cinco conjuntos secundarios necesarios para poder expresar todas las restricciones:

- $N_{sin_troncal}$: Conjunto de nodos no troncales, compuesto por todos los nodos excepto el nodo troncal, el cual viene dado como parámetro.
- $A_{sin_troncal}$: Conjunto de todos los arcos, excluyendo aquellos que tienen el nodo troncal en alguno de sus extremos.
- $A_{salientes_troncal_costo_cero}$: Conjunto de arcos salientes del nodo troncal con costo cero. Estos arcos son necesarios para que el recorrido sea visto como un ciclo a efectos del modelo. Esto será explicado en detalle más adelante.
- $salientes_n$: Conjunto de arcos salientes de un nodo n .
- $entrantes_n$: Conjunto de arcos entrantes a un nodo n .

Luego, los parámetros del modelo incluyen:

- $c_a \in R^+$: Costo del arco a . Representa el costo de tiempo de transitar el arco a .
- $O_k \in N$: Nodo de origen de la demanda k .
- $D_k \in N$: Nodo de destino de la demanda k .
- $R_k \in R^+$: Cantidad de la demanda k .
- $troncal \in N$: Representa la estación troncal.
- $longitud_maxima \in R^+$: Longitud máxima de cada recorrido.

Además, hay otros parámetros como:

- $\bar{a} \in N$: Primer nodo del arco a .
- $\hat{a} \in N$: Segundo nodo del arco a .

Por último hay que mencionar los parámetros que forman parte de la formulación de Miller-Tucker-Zemlin [9] para eliminar subtours que son:

- $q_n \in \{0, 1\}$: Carga del nodo n .
- $Q \in N$: Valor de capacidad.

Por último, se encuentran las variables del modelo:

- $x_{akr} \geq 0$: representa el flujo de demanda k sobre el arco a en el recorrido r .
- $y_{ar} \in \{0, 1\}$: es 1 si el arco a forma parte de el recorrido r y 0 si no lo hace.
- $p_{kr} \in \{0, 1\}$: es 1 si el flujo de demanda k pasa por el recorrido r .
- $u_{nr} \geq 0$: variable de la formulación de Miller-Tucker-Zemlin. Será explicado en detalle más adelante.

Como ya se mencionó, en el modelo hemos incluido la función de costo de los usuarios en la función objetivo y la hemos minimizado:

$$\sum_{r \in Ru, a \in A, k \in K} c_a x_{akr}$$

La función objetivo busca minimizar el costo de los usuarios, calculado como la sumatoria entre todos los recorridos, arcos y demanda, de $c_a x_{akr}$. Esto significa que para cada recorrido, se revisan todos sus arcos y toda la demanda. Si hay flujo de demanda " k " sobre el recorrido " r " a través del arco " a ", se multiplica el costo de ese arco por la cantidad de flujo de

demanda. El objetivo es minimizar esta función para obtener el costo más bajo posible para los usuarios en la solución de los recorridos.

La idea es la siguiente: las posibles variantes que se pueden formar de los recorridos están representadas por el conjunto de arcos; la variable y es la que indica si un arco pertenece a un recorrido. La cantidad total de recorridos está determinada por la cantidad de recorridos que tienen al menos un arco asignado a ellos.

Además, la variable x indica la cantidad de flujo de demanda que pasa por el arco de un recorrido y una demanda k solamente puede transitar por un recorrido r . La demanda está representada por el conjunto K . Los parámetros O_k indican el nodo origen de esa demanda y lo que se busca es que esa demanda llegue a un destino D_k . En nuestro caso el destino siempre va a ser el nodo troncal. Si la variable x determina que una demanda k que pertenece al recorrido r pasa por el arco a , entonces ese arco forma parte del recorrido r .

El modelo exacto queda formulado de la siguiente manera:

Minimizar:

$$\sum_{r \in Ru, a \in A, k \in K} c_a x_{akr} \quad (1)$$

Sujeto a:

$$\sum_{a \in \text{salientes}_n} x_{akr} - \sum_{a \in \text{entrantes}_n} x_{akr} = \begin{cases} R_k \cdot p_{kr} & \text{si } n = O_k, \\ -R_k \cdot p_{kr} & \text{si } n = D_k, \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (2)$$

$$\forall n \in N, k \in K, r \in Ru$$

$$x_{akr} \leq R_k y_{ar} \quad \forall r \in Ru, k \in K, a \in A \quad (3)$$

$$\sum_{k \in K} x_{akr} \geq y_{ar} \quad \forall r \in Ru, a \in (A \setminus A_{\text{salientes_troncal_costo_cero}}) \quad (4)$$

$$\sum_{a \in (A \setminus \text{salientes_troncal})} c_a y_{ar} \leq \text{longitud_maxima} \quad \forall r \in Ru \quad (5)$$

$$\sum_{r \in Ru} p_{kr} = 1 \quad \forall k \in K \quad (6)$$

$$\sum_{a \in \text{salientes_troncal}} y_{ar} = 1 \quad \forall r \in Ru \quad (7)$$

$$\sum_{a \in \text{entrantes_troncal}} y_{ar} = 1 \quad \forall r \in Ru \quad (8)$$

$$\sum_{a \in \text{salientes}_n} y_{ar} = \sum_{a \in \text{entrantes}_n} y_{ar} \quad \forall r \in Ru, n \in N \quad (9)$$

$$x_{akr} = 0 \quad \forall r \in Ru, k \in K, a \in A_{\text{salientes_troncal_costo_cero}} \quad (10)$$

$$u_{\hat{a}r} - u_{\bar{a}r} \geq q_{\hat{a}} - Q(1 - y_{ar}) \quad \forall r \in Ru, a \in A_{\text{sin_troncal}} \quad (11)$$

$$q_n \leq u_{nr} \leq Q \quad \forall r \in Ru, n \in N_{\text{sin_troncal}} \quad (12)$$

A continuación, se van a explicar las restricciones que van a permitir que se modele esta realidad.

La restricción (2) de "conservación de flujo" garantiza que cuando una cantidad específica de flujo de demanda entra en un nodo (a través de un arco entrante), esa misma cantidad debe salir de ese nodo (a través de un arco saliente). Esto se aplica a todos los nodos con excepción del nodo origen (O_k) y el nodo destino (D_k) de una demanda k . En esos casos el flujo de salida del nodo origen debe ser igual al total de la demanda y el flujo de entrada al nodo destino debe ser igual al total de la demanda. La restricción (6) llamada "unicidad de demanda en recorrido" define a qué recorridos es asignada cada demanda. La variable p_{kr} definida en esta restricción es esencial para usarla en la restricción (2) y evitar que todos los arcos salientes de los nodos O_k (o que todos los arcos entrantes al nodo troncal o D_k) tengan que cumplir con la condición de que salga flujo por ellos. Dado que la restricción (2) se aplica a todos los nodos, a la demanda y a los recorridos, si para cada nodo que forme parte de O_k se exige que entre flujo de demanda desde todos los recorridos hacia él, eso no sería factible. Solo es necesario que entre flujo de demanda de un solo recorrido (del recorrido que lleve el flujo de demanda de k).

La restricción (3) de "activación de arcos" establece qué arcos forman parte de los recorridos según el flujo que pasa por ellos.

La restricción (4) de "desactivación de arcos sin flujo de demanda" evita activar arcos (es decir, establecer la variable y en 1) que no tengan flujo. Dado que los arcos sin flujo de demanda no contribuyen al costo en la función objetivo, podrían activarse innecesariamente. Por ello, esta restricción es fundamental, ya que garantiza que dichos arcos permanezcan desactivados. Si existe flujo sobre el arco a en el recorrido r , entonces y_{ar} puede tomar un valor distinto de cero. Sin embargo, si no hay flujo en ese arco, y_{ar} está obligada a valer 0.

La restricción (5) de "longitud máxima" restringe que los recorridos no superen una longitud máxima predeterminada.

Las restricciones (7), (8) de "unicidad de arcos salientes y entrantes de la estación troncal" aseguran que solo un arco de cada recorrido entre en la estación (o nodo) troncal y salga de ella.

Las restricción (9) de "continuidad de los recorridos" asegura que suceda lo mismo con los demás nodos.

Para poder escribir las restricciones (7), (8) y (9) es necesario que el recorrido se trate como un ciclo. Esta formulación es una extensión del Travelling Salesman Problem (TSP). Los recorridos se construyen utilizando la variable binaria y , la cual determina si un arco está activo en un recorrido. Una de las restricciones clave en las variables y es que el número de arcos que entran a un nodo debe ser igual al número de arcos que salen. Esto se refleja en la restricción (9). Además las restricciones (7) y (8) aseguran que la cantidad de arcos que salen y entran por nodo en cada recorrido sea exactamente 1.

La incorporación de las restricciones (7), (8) y (9) es necesaria para evitar situaciones como las que se muestran en la Figura 3.2. Estas restricciones fuerzan que en todos los nodos, desde la estación troncal hasta el nodo origen, sus arcos entrantes y salientes estén equilibrados, asegurando que únicamente haya un arco que entre y uno que salga en cada nodo, tal como se ilustra en la Figura 3.3. En esta figura, el recorrido se compone del trayecto celeste, mientras que el arco rosado es un arco ficticio que sale de la estación troncal (nodo rojo) y finaliza en el nodo origen. Este arco tiene costo 0, ya que forma parte del recorrido resultante, pero no contribuye a la función objetivo como un costo adicional, ni es considerado al final cuando se reconstruyen los recorridos generados. Además, este arco ficticio tampoco se incluye en la restricción (5) al calcular la longitud máxima del recorrido.

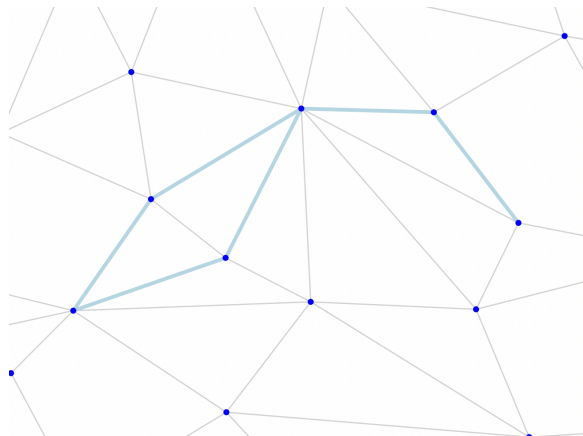


Figura 3.2: Un mismo recorrido que contiene un ciclo porque algunos de sus nodos no cumplen que solamente un arco del recorrido salga de y entre a ellos.

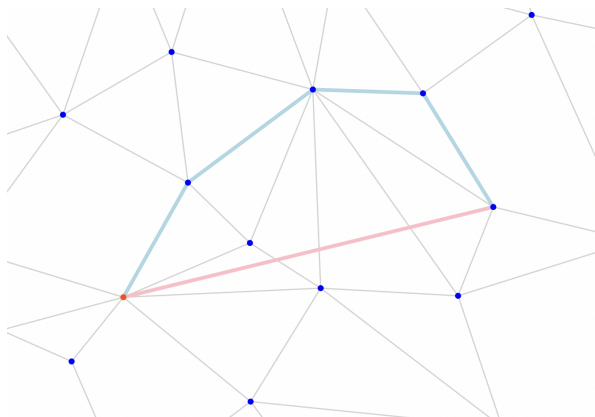


Figura 3.3: Ciclo que contiene un arco ficticio en rosado, mientras que los arcos reales se encuentran pintados de celeste.

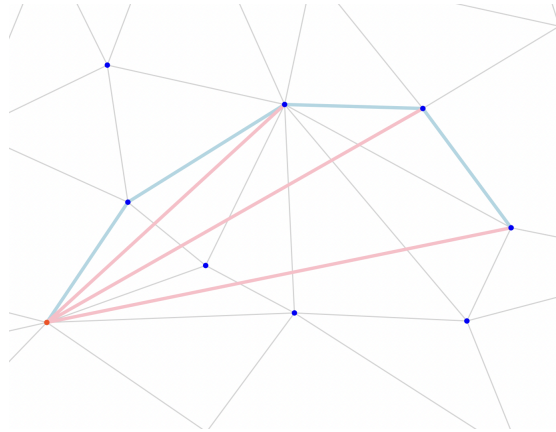


Figura 3.4: Todos los arcos ficticios de costo cero que van desde el nodo troncal (en rojo) hacia el resto de nodos que no tienen una conexión directa hacia él, están en rosado.

La restricción (10) de "forzar flujo cero" impone que los arcos salientes del nodo troncal tengan un flujo de cero. Esto se debe a que, dado que alguno de estos arcos tienen costo cero, podría ocurrir que se les asigne un flujo, ya que estos arcos no suman a la función objetivo. Fue necesario agregar arcos salientes de la troncal hacia todos los demás nodos (ver Figura 3.4) que no tuvieran una conexión directa con la troncal, ya que los recorridos formados deben ser ciclos y para ello, es indispensable agregar arcos desde la troncal hacia el resto de nodos.

La restricción (11), o de "eliminación de subtours", es la restricción que evita que un recorrido tenga "subtours", es decir, que esté formado por más de un ciclo (son las restricciones de formulación de Miller-Tucker-Zemlin [9]).

Las restricciones (12) son las cotas de la restricción (11).

Para explicar estas dos últimas restricciones, imaginemos cada recorrido como un ciclo que comienza en el nodo troncal pasando por todos los nodos intermedios hasta llegar al nodo de origen y regresando a la estación troncal, mientras que un vehículo imaginario (ver Figura 3.5) recoge carga cuando pasa por cada nodo. Este vehículo, que parte del nodo troncal (considerado como un depósito), recoge una carga de valor 1 en cada nodo. La variable q_n representa la carga que tiene cada nodo, esta tiene un valor de 1 ($q_n = 1$). El nodo troncal sin embargo tiene un valor de $q_{troncal}$ distinto, ya que vale 0 ($q_{troncal} = 0$).

La variable Q se refiere a la capacidad del vehículo que, dado que la carga en cada punto es 1, es igual a la cantidad total de nodos sin incluir al nodo troncal. Cabe aclarar que Q se refiere a una capacidad hipotética del vehículo al igual que el hecho de que existe un "vehículo que levanta carga en cada nodo". Esta es una abstracción añadida a partir de las restricciones de Miller-Tucker-Zemlin para poder ilustrar las restricciones que eliminan los subtours en los recorridos.

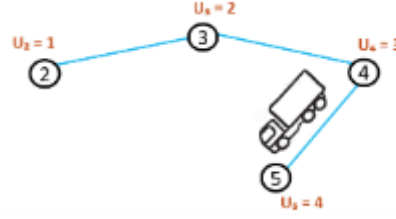


Figura 3.5: Tomado de [9].

Finalmente, la variable u_n asigna un valor a cada nodo, excluyendo el nodo troncal, lo cual es crucial para la formulación. Si el vehículo se mueve de $\bar{a}$ a $\hat{a}$ entonces el valor de $u_{ar}^{\hat{a}}$ debe ser mayor que u_{ar}^{-} . Esto implica que cada vez que se visita un punto, su valor incrementa. El nodo troncal se excluye porque, al intentar asignarle un valor, no se podría cumplir la restricción $u_{ar}^{\hat{a}} > u_{ar}^{-}$, ya que no se podría definir una cantidad para $u_{troncal}$. Dado que ningún otro ciclo puede excluir un punto, solo el ciclo que incluye el nodo troncal puede hacerlo, significa que la restricción no se cumple para ningún otro ciclo. Así, los únicos ciclos permitidos son aquellos que pasan por el nodo troncal, mientras que todos los demás ciclos se consideran subtours y se eliminan mediante la formulación (11) y (12).

Si $y_{a,r}$ está activado, entonces el flujo del recorrido r va de $\bar{a}$ a $\hat{a}$ y entonces la restricción (11) se puede reescribir como:

$$u_{ar}^{\hat{a}} - q_{ar}^{\hat{a}} \geq u_{ar}^{-}$$

Esto asegura que el valor de $u_{ar}^{\hat{a}}$ es al menos $q_{ar}^{\hat{a}}$ veces más que u_{ar}^{-} . De esta manera, $u_{ar}^{\hat{a}}$ es más grande que u_{ar}^{-} .

Si no hay flujo de $\bar{a}$ a $\hat{a}$ en el recorrido r , la restricción sigue siendo válida. Luego, la restricción (11) puede reescribirse como

$$u_{ar}^{\hat{a}} - q_{ar}^{\hat{a}} \geq u_{ar}^{-} - Q$$

La formulación (12) de las cotas establece que $q_a^{\hat{a}}$ es el valor más bajo posible de $u_{ar}^{\hat{a}}$ y Q es el valor máximo posible de u_{ar}^{-} , por lo que $u_{ar}^{\hat{a}} - q_a^{\hat{a}}$ va a ser al menos 0 y $u_{ar}^{-} - Q$ va a valer máximo 0. Así $u_{ar}^{\hat{a}} - q_a^{\hat{a}}$ va a ser mayor o igual a $u_{ar}^{-} - Q$.

El modelo presentado es un modelo de Programación Lineal Entera Mixta (MILP). Esto implica que las decisiones en el modelo se representan mediante variables binarias que indican la presencia o ausencia de ciertos elementos (por ejemplo, si un arco está seleccionada o no) y variables continuas que cuentan cantidades (como la cantidad de demanda asignada a un recorrido).

A medida que el tamaño del problema crece en términos de nodos, arcos y demanda, la viabilidad de resolverlo disminuye. Como el TSP es un problema NP-hard, este problema también lo es. Los problemas NP-hard son aquellos cuya dificultad es comparable a los

problemas más complejos que se conocen. A menudo son problemas de optimización, como buscar la mejor solución [6].

Aunque el modelo es capaz de encontrar la mejor solución posible dentro de las restricciones, su resolución puede volverse inviable si el problema es demasiado grande, lo que hace que se necesiten de estrategias de aproximación o reducción del tamaño del modelo para obtener soluciones en un tiempo razonable.

3.2 Heurística

La heurística many-to-one resuelve el mismo problema que el modelo de programación matemática, buscando hallar la mejor solución para los usuarios sujetos a restricciones operacionales. La diferencia es que no garantiza encontrar la solución óptima, como sí lo hace el modelo y tampoco garantiza encontrar una solución factible.

La heurística está inspirada en el Pair Insertion Algorithm (PIA) [14]. El algoritmo PIA funciona de la siguiente manera: se inicia con un conjunto vacío de recorridos y se itera a través de una lista de pares origen-destino, cada par con una demanda asociada. Se comienza con los pares de mayor demanda y se avanza hacia los de menor. En cada iteración, el algoritmo evalúa si es más beneficioso agregar un nuevo recorrido, que es el camino más corto entre el nodo de origen y el nodo de destino, o si es mejor incluir el par de nodos en alguno de los recorridos ya existentes insertándolos en alguna posición. En el segundo caso, por el hecho de incorporar un nuevo par en el recorrido, el costo de ese recorrido aumenta en comparación con su versión anterior.

Nuestro caso es algo diferente al escenario del PIA, ya que contamos con una estación troncal y nodos que queremos dirigir hacia dicha estación. Además, el PIA busca insertar los nodos en alguna posición del recorrido, mientras que la heurística siempre va a insertar el nodo al final del mismo. Aún así, el PIA sirvió como fuente de inspiración.

Dicho esto, la heurística many-to-one funciona de la siguiente manera: los nodos se ordenan de menor a mayor según la distancia que tienen hacia la estación troncal. El orden de la lista se determina por el hecho de que, como los nodos se van agregando en los extremos de los recorridos, es más fácil insertar un nodo cuando se encuentra más alejado de la estación troncal. Para ilustrar esta idea, se presentarán un par de ejemplos. En la Figura 3.6 se muestra un recorrido solución en color naranja y un nodo en color violeta, que es el nodo que debe insertarse en el recorrido naranja. Para insertarlo, se genera el recorrido mínimo desde ese nodo hasta el último nodo del recorrido. En la Figura 3.7. se puede ver cómo el nodo violeta fue insertado en la solución y solo fue necesario agregar una arista. Esto se debe a que el último nodo insertado, el violeta, es el que se encuentra más alejado de la estación troncal (en rojo). Esta situación es muy diferente a la ilustrada en la Figura 3.8, donde el nodo violeta (el nodo a insertar) no es el que se encuentra más lejos del nodo troncal. En este caso, se requiere un recorrido mucho más largo para sumarlo al recorrido (Figura 3.9). Si este nodo se hubiera insertado antes en la solución el recorrido final habría sido mucho más corto. Esto habría beneficiado tanto a los operadores como a los usuarios que conforman la demanda de ese nodo.



Figura 3.6: El nodo troncal está en rojo, los nodos del recorrido en naranja y el nodo que debe insertarse en el recorrido está en violeta.



Figura 3.7: El nodo troncal está en rojo, los nodos del recorrido en naranja y el nodo violeta ya fue insertado en la solución.



Figura 3.8: El nodo troncal está en rojo, los nodos del recorrido en naranja y el nodo que debe insertarse en el recorrido está en violeta.



Figura 3.9: El nodo troncal está en rojo, los nodos del recorrido en naranja y el nodo violeta ya fue insertado en la solución.

Luego, en cada iteración sobre los nodos de la lista, se determina el camino más corto entre el nodo y la estación troncal (primera opción) y se compara la longitud de ese recorrido con la distancia obtenida al integrar el nodo en alguno de los recorridos existentes de la solución (segunda opción). La solución está formada por todos los recorridos que se van agregando a ella a medida que avanza la heurística. El recorrido que se elige de entre todos los recorridos que forman parte de la solución, debe ser aquel recorrido que al agregar el nodo en su extremo, forme el camino más corto de entre todos ellos. Recordar que el nodo siempre se inserta en el extremo opuesto a la estación troncal.

Luego, si las distancias entre ambas opciones son idénticas, se opta por elegir la segunda opción (integrar el nodo a un recorrido existente); de lo contrario, se elige generar un nuevo recorrido que sea el camino mínimo entre el nodo y la estación troncal.

Sin embargo, si ya se ha alcanzado el número máximo permitido de recorridos (MAX_CANT_RECORRIDOS) los nodos restantes deben ser agregados a recorridos que ya forman parte de la solución.

Algorithm 1 Heurística "Many to one"

```

1: procedure MANY_TO_ONE(in G, in nodos, in estacion_troncal, out recorridos)
2:   nodos  $\leftarrow$  Se ordena la lista de nodos según la distancia mínima entre cada
      nodo y la estacion_troncal;
3:
4:   recorridos  $\leftarrow$  [];
5:
6:   for nodo in nodos do
7:     r  $\leftarrow$  Construir un recorrido con el camino más corto entre el nodo y la
      estacion_troncal;
8:
9:     r'  $\leftarrow$  El recorrido más corto que se obtiene al combinar el camino más corto
      desde nodo hasta el primer nodo del recorrido r'' en recorridos;
10:
11:     if longitud(r) < longitud(r') and
12:       longitud(r)  $\leq$  MAX_LONGITUD and
13:       cantidad de recorridos < MAX_CANT_RECORRIDOS then
14:
15:         recorridos  $\leftarrow$  recorridos  $\cup$  {r};
16:
17:       else if longitud(r')  $\leq$  MAX_LONGITUD then
18:
19:         recorridos  $\leftarrow$  recorridos  $\cup$  {r'} - {r''};
20:       else
21:         No se encontró un recorrido para el nodo;
22:     endFor
23:
24:   return recorridos;

```

Figura 3.10: Pseudocódigo de la heurística

Además, para que una opción sea válida y pueda añadirse a la solución, debe respetar un filtro que verifica que la longitud del recorrido no exceda un valor máximo predefinido (MAX_LONGITUD). Si ninguna de las opciones cumple con los criterios, la heurística no puede encontrar una solución para el nodo actual, pero continúa su ejecución evaluando el siguiente nodo del grupo.

La Figura 3.10 muestra el pseudocódigo de forma más estructurada. Esta heurística es simple, ya que no requiere mucha potencia de cómputo ni es difícil de programar. Su objetivo es sencillo: agregar los nodos de la forma que tiene más sentido para la estructura del recorrido. A diferencia del PIA que requiere mayor potencia de cómputo debido a las múltiples opciones que tiene que manejar. La idea detrás de este enfoque es que los recorridos formen una estructura similar a un árbol: al principio se generan las primeras ramas, las cuales pueden estar limitadas por la cantidad máxima de recorridos para ese grupo y luego los nodos restantes se van insertando en las hojas del árbol.

3.3 Implementación del algoritmo resolutivo

Para el desarrollo del algoritmo resolutivo se utilizó el lenguaje de programación Python¹, ya que el trabajo previo estaba desarrollado en este lenguaje y se conocían las bibliotecas empleadas para el diseño y manejo de grafos.

También se utilizó el lenguaje AMPL² para el modelado del problema matemático.

A continuación se listan las principales bibliotecas utilizadas y su propósito:

- NetworkX: Creación y manipulación del grafo.
- Pandas: Lectura y escritura de datos en formato de data frames compatibles con Excel.
- Matplotlib: Visualización de los resultados.

Para la ejecución del modelo de programación matemática se utilizó el solver CPLEX 22.1.1.0 instalado en una computadora del Departamento de Investigación Operativa de la Facultad de Ingeniería. Las especificaciones de la máquina son las siguientes:

- Sistema operativo Rocky Linux 8.4 (Green Obsidian)
- Procesador Intel Core i9-9900K @3.60GHz
- 64 GB de memoria RAM

A continuación en la Tabla 3.1 se presenta el tiempo de ejecución de una prueba de una estación troncal con 86 nodos asignados, considerando el tiempo que tardaron el modelo y la heurística en procesar la solución. El modelo exacto alcanzó la solución óptima, mientras que la heurística obtuvo una solución factible. Los resultados son los siguientes.

Prueba	Tiempo de ejecución utilizando el modelo	Tiempo de ejecución utilizando la heurística
Caso 4	1869 segundos (31 minutos)	0,5167 segundos

Tabla 3.1: Tiempos de ejecución para una estación con 86 nodos asignados.

¹ <https://www.python.org/>

² <https://ampl.com/>

4. Experimentos numéricos, validación

Antes de aplicar el algoritmo resolutorio al grafo detallado de Montevideo y analizar los resultados finales, es necesario validarlo. Para esto se crearon casos de prueba de validación, los cuales se dividieron en dos grupos: uno para analizar cómo responde el algoritmo resolutorio, utilizando el modelo, ante variaciones en sus parámetros; y otro para comparar los resultados obtenidos de la heurística many-to-one contra los resultados obtenidos del modelo exacto. Estas pruebas se van a realizar utilizando un grafo de mayor nivel de agregación en comparación con el grafo real (ver Figura 4.1) ya que facilita la ejecución de las pruebas.

Esta etapa de validación es muy necesaria, ya que el modelo no puede procesar casos de gran tamaño, es decir, aquellos con numerosos nodos y aristas, como es el caso del grafo detallado. De esta manera, se busca evaluar la precisión de la heurística many-to-one, ya que va a ser la que se va a aplicar al grafo detallado.

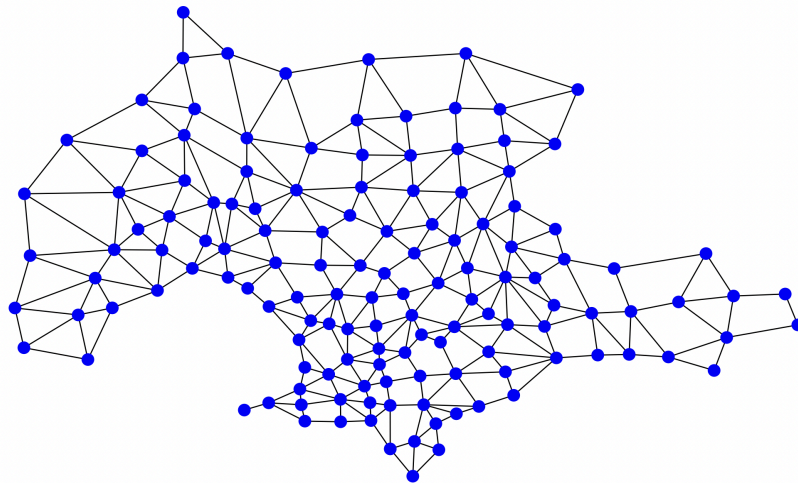


Figura 4.1: Grafo simplificado de Montevideo.

Para construir el grafo no detallado se utilizaron los datos proporcionados por el grupo de investigación [27], los cuales incluían 136 centroides, sus coordenadas, las aristas, la distancia de estas y su demanda (tomadas de [22]).

Para obtener la demanda interzonal se utilizaron los datos de [22] procesados por [7], obteniendo un total de 6.184 pares de nodos origen-destino. A estos pares se les realizó un posprocesamiento en el que se sumó la demanda de los pares espejados, dado que los recorridos son bidireccionales, considerando cada par como una única unidad. Como resultado, el total se redujo a 4.249 pares de nodos.

4.1 Set de pruebas: análisis de sensibilidad para los parámetros

El objetivo de este conjunto de pruebas es validar el modelo y el algoritmo resolutorio. Se variarán los parámetros para verificar que el modelo reacciona de la forma esperada.

Tanto el modelo como la heurística están sujetos a ciertas restricciones para que los recorridos generados se alineen con los intereses de los operadores (los intereses de los usuarios están representados en la función objetivo). Estas restricciones incluyen:

- Limitar la cantidad de recorridos de una estación troncal.
- Definir el largo máximo que pueden tener estos recorridos.

Estos parámetros son variables. Por lo tanto, existen diversas opciones que pueden producir diferentes resultados. Por ejemplo, se podría pensar que al permitir una mayor flexibilidad en la cantidad de recorridos que se pueden generar en cada estación troncal, el algoritmo resolutivo podría devolver una mayor cantidad de recorridos.

Además de estas dos restricciones, existen dos parámetros de entrada adicionales:

- La velocidad relativa de la red troncal.
- La red troncal.

En este conjunto de pruebas, sin embargo, solo se variarán el parámetro de velocidad relativa y la cantidad máxima de recorridos. Esto se debe a dos razones principales: limitar la cantidad de recorridos permite observar cómo una restricción más estricta en este parámetro resulta en una cantidad menor de recorridos totales generados. Además, ajustar la velocidad relativa de la troncal permite verificar si la cantidad total de pares que pasan por la troncal aumenta, esto validaría la hipótesis de que una red troncal más rápida es más atractiva para los usuarios.

Los parámetros que se mantienen fijos son las calles que conforman la red troncal y la longitud máxima de los recorridos.

Dado que el grafo simplificado solo cuenta con 136 nodos (ver Figura 4.1), el uso de muchas calles troncales implicaría abarcar un porcentaje muy alto de la red total. Por esta razón, se ha decidido mantener este parámetro fijo.

La longitud máxima de los recorridos se mantiene fija por el simple hecho de que no se puede restringir demasiado, ya que podría hacer que las soluciones se vuelvan inviables. Si los recorridos son demasiado cortos y los nodos están muy alejados de la troncal, es probable que no se encuentre una solución factible.

Entonces, los valores seleccionados para estos parámetros que se mantienen fijos son los siguientes: la red troncal abarca las calles Av. Italia, 18 de Julio y 8 de Octubre y la longitud máxima establecida para un recorrido es de 20 km, en un solo sentido. Se eligieron estas calles para integrar la red troncal porque la Intendencia de Montevideo las considera para la construcción de corredores que mejorarían la velocidad de circulación del transporte público. El límite de 20 km se definió tras realizar varias pruebas preliminares con el algoritmo, donde se observó que las longitudes de los recorridos raramente excedían este valor. Debido a que el grafo no refleja con precisión las calles ni las distancias reales, no es posible basarse en datos reales, pero es posible hacer una aproximación razonable.

Para los parámetros relacionados con la cantidad máxima de recorridos, se eligieron las variantes: cantidad de nodos alimentadores dentro del grupo dividido dos y dividido tres. Tras realizar diversas pruebas, se observó que estos valores eran los más adecuados para obtener resultados representativos, ya que, por ejemplo, un valor de cuatro resultaba demasiado restrictivo y generaba recorridos excesivamente largos, poco directos y con

muchos giros. Por ello, se decidió optar por los valores dos y tres que, además de ser números enteros, ofrecen un equilibrio adecuado entre flexibilidad y representatividad.

Al estudiar el efecto de variar la velocidad relativa de la troncal en relación con la velocidad de la red, se tienen en cuenta tres posibles escenarios:

- Valor de 1: Representa el caso en el que no hay mejora en la troncal respecto a la red de calles. Esto permite comparar los resultados con los casos en los que la troncal presenta una diferencia significativa en la velocidad relativa y destacar las ventajas de su mejora.
- Valor de 1,5: Corresponde a un aumento de un 50% en velocidad con respecto a un recorrido no troncal. Esto se puede lograr con la creación de corredores de movilidad rápida o vías de circulación exclusiva [12].
- Valor de 2: Representa una mejora del 100% de la red troncal, que podría lograrse mediante cambios en el sistema de transporte, como la incorporación de vehículos más rápidos tales como tranvías o trenes subterráneos.

Se definieron los siguientes parámetros de salida para utilizar como métricas de evaluación:

- Cantidad de pares origen-destino que pasan por la troncal: Este parámetro indica cuántos de los pares origen-destino tienen un recorrido mínimo entre ellos que incluye la red troncal definida (Av. Italia, 18 de Julio y 8 de Octubre).
- Cantidad de pares origen-destino que no pasan por la troncal: Indica cuántos pares origen-destino tienen recorridos mínimos que no atraviesan la red troncal. Estos pares no son procesados por la heurística o el modelo y por ende no son considerados a la hora de calcular el costo de los operadores y el de usuarios. Aunque estos pares se excluyan del alcance de este trabajo, es necesario mostrar su cantidad. Este valor también puede ser calculado como la diferencia entre el número total de pares origen-destino y la cantidad de pares origen-destino que sí pasan por la troncal.
- Cantidad de recorridos generados: Representa el número total de recorridos alimentadores generados por el algoritmo resolutivo.
- Costo de operaciones: El costo de operación de un sistema de transporte en términos monetarios incluye factores como el combustible, los sueldos de operadores y conductores, entre otros. Estos costos son proporcionales a la longitud total de los recorridos. Por lo tanto, en este proyecto, el costo de operación se calcula como la suma de los costos de las aristas que conforman el conjunto solución. Dado que este trabajo se centra exclusivamente en la generación de la red secundaria, se asume que la red troncal no genera costos operativos, por lo que sus costos no se incluyen en el cálculo. El costo de los operadores se expresa en tiempo (h), pero es un valor relativo, ya que se asume una velocidad de 1 km/h. Para mayor claridad, la unidad de tiempo se omitirá en el resto del informe.

$$\sum_{r \in R} \sum_{a \in r} c_a$$

R es el conjunto solución de recorridos alimentadores y c_a es el costo de la arista a .

- Costo de usuarios: Este costo representa el tiempo total de viaje acumulado para los usuarios, ya que estos priorizan recorridos cortos y directos hacia su destino. Se calcula como la suma del costo c_a de todas las aristas a que componen la trayectoria t de un par origen-destino, para todo par origen-destino, multiplicado por la demanda

k de ese par. Al igual que en el caso de los operadores, el costo se expresa en tiempo.

$$\sum_{k \in K} d_k t_k$$

t_k es la trayectoria obtenida para el par origen-destino con demanda k luego de aplicar el algoritmo resolutivo y d_k es la demanda de ese par.

- Largo medio (en km): Calcula la longitud promedio en kilómetros de los recorridos generados.
- Largo máximo (en km): Indica la longitud en kilómetros del recorrido más largo generado.
- Largo mínimo (en km): Indica la longitud en kilómetros del recorrido más corto generado.
- Cantidad mínima de nodos alimentadores asignados a una estación troncal: Indica la cantidad de nodos que tiene la estación troncal con menor cantidad de nodos asignados.
- Cantidad máxima de nodos alimentadores asignados a una estación troncal: Indica la cantidad de nodos que tiene la estación troncal con mayor cantidad de nodos asignados.
- Cantidad promedio de nodos alimentadores asignados a una estación troncal: Indica la cantidad promedio de nodos asignados a cada estación troncal.
- Cantidad mínima de recorridos por estación troncal: Indica la cantidad de recorridos alimentadores que tiene la estación troncal con menor cantidad de recorridos generados.
- Cantidad máxima de recorridos por estación troncal: Indica la cantidad de recorridos alimentadores que tiene la estación troncal con mayor cantidad de recorridos generados.
- Cantidad promedio de recorridos por estación troncal: Indica la cantidad promedio de recorridos alimentadores que se generaron por estación troncal.

Estas métricas son fundamentales para evaluar las diferentes combinaciones de valores de los parámetros. Algunos de estos parámetros de salida también se utilizan en el capítulo 5.

A continuación se presentan los resultados de aplicar el algoritmo resolutivo utilizando para ello el modelo. Es importante destacar que, incluso al utilizar el grafo no detallado, el modelo no logra encontrar una solución en un tiempo acotado para ciertas instancias en las que los grupos de nodos de las estaciones troncales son demasiado grandes. Por esta razón, en los casos en que el modelo no obtuvo un resultado dentro del límite de 2 minutos establecido, se aplicó la heurística many-to-one. Esto quiere decir que si el modelo encuentra una solución dentro de ese tiempo, se utilizan los resultados del modelo exacto. En cambio, si el modelo no encuentra una solución óptima en menos de 2 minutos, se utilizan los valores obtenidos mediante la heurística many-to-one.

Cada ejecución (por estación troncal) tiene un límite de dos minutos y dado el número total de estaciones, el tiempo estimado por prueba es de aproximadamente 40 minutos, sumando un total de cuatro horas. Además, a medida que se realizaban pequeñas correcciones en el código, era necesario volver a ejecutarlas, lo que representaba una carga de tiempo considerable. Dado que el objetivo principal de estas pruebas es verificar la efectividad del algoritmo, ya sea mediante el modelo o la heurística, no se consideró necesario asignar un tiempo de ejecución mayor.

A continuación, la Tabla 4.1 muestra los resultados obtenidos para estos casos:

	Velocidad relativa	Cantidad máxima de recorridos	Cantidad de pares o-d que pasan por la troncal	Cantidad de pares o-d que no pasan por la troncal	Cantidad de recorridos generados	Costo de operaciones	Costo de usuarios	Costo promedio por usuario
Caso 1	1,0	Cant nodos/3	2.638	1.611	187	1.315	22.600.146	5,410
Caso 2	1,0	Cant nodos/2	2.638	1.611	207	1.388	22.555.394	5,399
Caso 3	1,5	Cant nodos/3	2.654	1.595	155	1.056	19.930.969	4,760
Caso 4	1,5	Cant nodos/2	2.654	1.595	178	1.201	19.808.595	4,731
Caso 5	2,0	Cant nodos/3	2.703	1.546	123	858	18.567.787	4,385
Caso 6	2,0	Cant nodos/2	2.703	1.546	141	926	18.285.212	4,318

(a): Parámetros de entrada y resultados de los primeros 6 parámetros de salida.

	Largo medio (en km)	Largo máximo (en km)	Largo mínimo (en km)	Cantidad mínima de nodos asignados a una estación troncal	Cantidad máxima de nodos asignados a una estación troncal	Cantidad promedio de nodos asignados a una estación troncal	Cantidad mínima de recorridos por estación troncal	Cantidad máxima de recorridos por estación troncal	Cantidad promedio de recorridos por estación troncal
Caso 1	7,033	13,866	0,573	6	87	36	2	26	11
Caso 2	6,811	13,866	0,573	6	87	36	2	26	12
Caso 3	6,814	14,915	0,547	3	74	24	1	22	7
Caso 4	6,750	13,866	0,547	3	74	24	2	22	8
Caso 5	6,976	13,984	0,547	1	63	19	1	19	6
Caso 6	6,587	13,866	0,547	1	63	19	1	19	7

(b): Resultados de los últimos 9 parámetros de salida.

Tabla 4.1: Resultados obtenidos luego de ejecutar los seis casos de prueba.

En la Tabla 4.2 se presentan los resultados de cada estación troncal para el caso de prueba número 4, incluyendo el valor de la función objetivo y una indicación de si se alcanzó la optimalidad o si los resultados se obtuvieron por timeout (es decir, no se alcanzó la solución óptima dentro del tiempo establecido). Es importante recordar que estos valores corresponden al costo de usuario por estación troncal. En la Tabla 4.1 se muestran los resultados globales del costo de usuario, considerando la demanda completa y todos los recorridos generados para todas las estaciones troncales. Esto significa que el resultado global es naturalmente más alto que los casos particulares por estación troncal, como se puede observar en la Tabla 4.2.

Caso 4	Función objetivo (costo de usuarios)	Condición de finalización
Estación troncal: 2	-	Sin solución factible dentro del tiempo límite
Estación troncal: 4	-	Sin solución factible dentro del tiempo límite
Estación troncal: 5	-	Sin solución factible dentro del tiempo límite
Estación troncal: 9	-	Sin solución factible dentro del tiempo límite
Estación troncal: 12	159.914	Óptimo
Estación troncal: 43	82.007,8	Óptimo
Estación troncal: 68	243.334	Óptimo
Estación troncal: 44	72.194	Óptimo
Estación troncal: 69	-	Sin solución factible dentro del tiempo límite
Estación troncal: 45	34.750,2	Óptimo
Estación troncal: 71	-	Sin solución factible dentro del tiempo límite
Estación troncal: 72	-	Sin solución factible dentro del tiempo límite
Estación troncal: 76	25.600,6	Óptimo
Estación troncal: 63	31.784,3	Óptimo
Estación troncal: 61	36.642,9	Óptimo
Estación troncal: 58	46.588,8	Óptimo
Estación troncal: 75	28.681,7	Solución factible (no óptima, timeout)
Estación troncal: 98	29.412	Solución factible (no óptima, timeout)
Estación troncal: 100	29.744,6	Óptimo
Estación troncal: 74	8.904,98	Óptimo
Estación troncal: 89	17.633,2	Óptimo
Estación troncal: 88	60.422,7	Óptimo

Tabla 4.2: Resultados por estación troncal del caso de prueba 4 (valor de la función objetivo y condición de finalización de la solución).

A partir de los resultados de la Tabla 4.1 se pueden extraer las siguientes conclusiones.

La cantidad de pares origen-destino que pasan por la troncal al trazar el camino mínimo aumenta si la velocidad relativa de la troncal aumenta. En los casos donde la velocidad relativa es 1, la cantidad de pares es 2.638. Esta cifra aumenta a 2.703 cuando la velocidad relativa sube a 2. Esto se debe a que un mayor número de pares origen-destino optan por

utilizar la troncal al calcular su camino mínimo, ya que esta se vuelve más atractiva al ofrecer un desplazamiento más rápido.

La cantidad total de recorridos generados, la cantidad promedio de nodos asignados a una estación troncal y la cantidad promedio de recorridos por estación troncal disminuyen a medida que aumenta la velocidad de la troncal. Esto se debe a que, con un incremento en la velocidad, un mismo nodo de diferentes pares origen-destino tiende a estar asociado con un menor número de estaciones troncales. Este comportamiento es lógico, ya que al aumentar la velocidad los pares buscan acceder a la troncal lo más rápidamente posible, seleccionando generalmente la estación o estaciones más cercanas. La reducción en el número de recorridos totales y por estación troncal se explica porque, al asignar menos nodos a cada estación troncal es posible cubrir esos nodos con un menor número de recorridos. Con una velocidad relativa de 1 se generan 187 recorridos, mientras que con una velocidad de 2 la cantidad total disminuye a 123, a pesar de que la cantidad total de pares que pasan por la troncal es mayor. Como resultado, el costo total para los operadores disminuye, porque se tienen menos recorridos. Por ejemplo, el costo total es 1.315 con una velocidad relativa de 1 y disminuye a 858 cuando la velocidad es 2 (observando la Tabla 4.1, se deben ver los casos 1 y 5).

El costo para los usuarios también disminuye, ya que al aumentar la velocidad de la troncal que es parte de su recorrido, llegan más rápido a su destino.

En conclusión, el costo de los operadores y el costo de los usuarios es inversamente proporcional al aumento de la velocidad relativa. Por lo que se puede decir que un aumento de la velocidad de las troncales es tan bueno para las operadores como para los usuarios.

En cuanto a los largos medios, máximos y mínimos de los recorridos no se observa una diferencia significativa al variar la velocidad relativa, ya que los resultados de los seis casos se parecen mucho. Esto indica que no hay un patrón claro que relacione la velocidad relativa de la troncal con la longitud promedio de los recorridos. A pesar de que un aumento en la velocidad relativa tiende a hacer que los pares origen-destino pasen más directamente por la troncal, esto no resulta en cambios significativos en la distancia de los recorridos que permanecen similares sin importar si la velocidad relativa sea mayor o menor.

Donde sí se observa un patrón es entre el largo medio y la cantidad máxima de recorridos por estación troncal. Por ejemplo, en los casos 2, 4 y 6, donde la restricción es más flexible, la longitud promedio disminuye en comparación con los casos 1, 3 y 5. Esto se debe a que, al permitir más recorridos se generan más recorridos directos en lugar de recorridos largos que atraviesan muchos nodos. Como resultado, la longitud promedio disminuye.

Un análisis similar se puede realizar al comparar los recorridos totales entre los casos 1 y 2, 3 y 4, y 5 y 6. Se observa que los casos 2, 4 y 6 tienen una mayor cantidad total de recorridos. Esto se debe a que, con restricciones más flexibles, se generan más recorridos directos, lo que incrementa el número total de recorridos.

Estos resultados permiten concluir que el algoritmo genera soluciones coherentes.

4.2 Set de pruebas: efectividad de la heurística

El objetivo de este conjunto de pruebas es validar que la heurística many-to-one genera soluciones que son cercanas a la solución exacta del problema y para asegurar la viabilidad de la aplicación práctica de la metodología.

Esta prueba es crucial para los resultados del trabajo, ya que verifica que las soluciones de la heurística estén suficientemente cercanas a la solución óptima, pues el modelo no es aplicable en los casos con grandes volúmenes de datos como es el caso de la red detallada.

Al confirmar que la heurística many-to-one proporciona resultados cercanos en un caso pequeño, podemos asumir que, en situaciones donde el modelo exacto no pueda procesar los datos debido a su tamaño, la heurística ofrecerá resultados cercanos a los de la solución óptima.

Velocidad relativa	1,5
Troncales	Av. Italia 18 de julio 8 de octubre
Cantidad máxima de recorridos	Cantidad de nodos por estación troncal / 2
Longitud máxima	20 km

Tabla 4.3: Parámetros del caso de prueba Línea Base

Para estas pruebas se utilizaron los parámetros iniciales de una velocidad troncal de 1,5 y se utilizó la red troncal correspondiente a las calles Avenida Italia, 18 de Julio y 8 de Octubre. Las restricciones establecidas para los recorridos fueron: una cantidad máxima de recorridos igual a la mitad del total de nodos alimentadores y una longitud máxima de 20 km para cada recorrido. En la Tabla 4.3 se pueden ver más detalladamente los valores utilizados. Estos parámetros se eligieron tras analizar los resultados de pruebas anteriores, donde se observó que una división por tres de la cantidad de nodos alimentadores para la cantidad máxima de recorridos era un valor demasiado restrictivo en algunos casos, lo que hacía que se generaran recorridos demasiado largos. Además, se notó que los recorridos generalmente no superaban los 15 km, por lo que se consideró aceptable usar un valor de 20 km. Cabe recordar que este grafo no representa realmente el entramado de calles de Montevideo, por lo que sus longitudes no son directamente comparables con los recorridos reales.

Para evaluar el rendimiento con respecto al costo de los usuarios de la heurística, se empleó un valor porcentual calculado mediante la siguiente fórmula:

$$\text{valor porcentual costo usuarios} = \frac{\text{costo de usuarios del modelo} - \text{costo de usuarios de la heurística}}{\text{costo de usuarios del modelo}}$$

Y para evaluar el rendimiento operativo, se empleó esta fórmula:

$$\text{valor porcentual costo operación} = \frac{\text{costo de operaciones del modelo} - \text{costo de operaciones de la heurística}}{\text{costo de operaciones del modelo}}$$

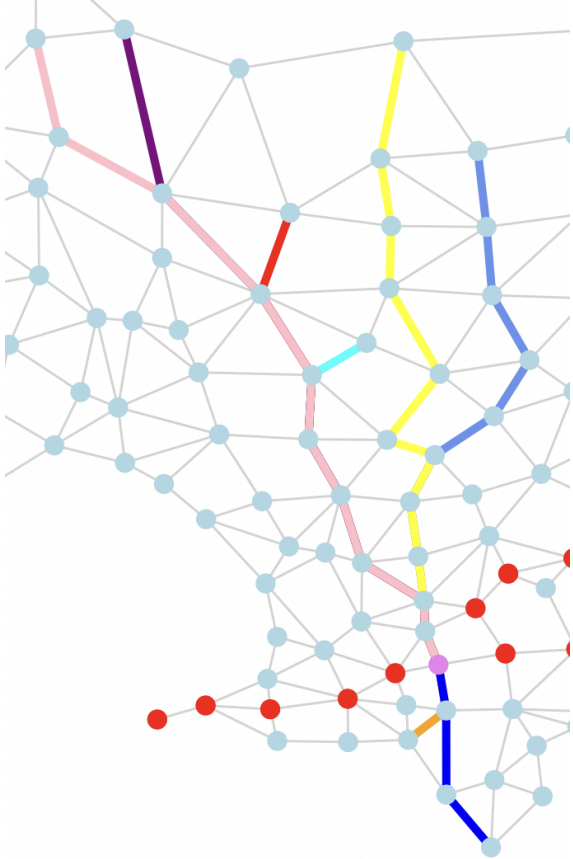
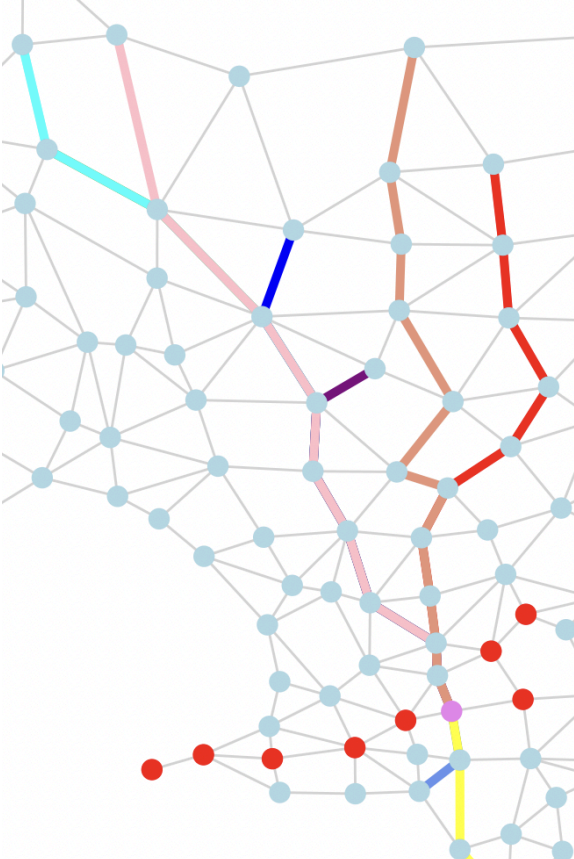
Heurística	Modelo
Centroide 12	
Cantidad de nodos: 27 (media-alta)	
	
Costo de operación para la estación troncal 12: 65	Costo de operación para la estación troncal 12: 76
Costo de usuarios para la estación troncal 12: 159.914	Costo de usuarios para la estación troncal 12: 159.914
Valor porcentual costo operación: $(76 - 67) / 76 = 11,84\%$	
Valor porcentual costo usuarios: $(159.914 - 159.914) / 159.914 = 0\%$	

Tabla 4.4: Resultados del modelo y la heurística para el nodo centroide 12.

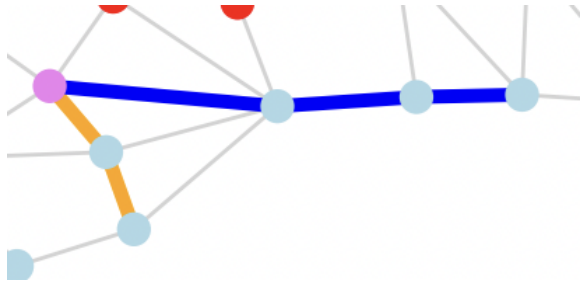
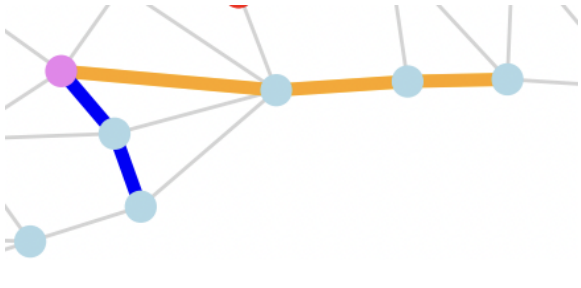
Heurística	Modelo
Centroide 45	
Cantidad de nodos: 5 (baja)	
	
Costo de operación para la estación troncal 45: 5	Costo de operación para la estación troncal 45: 5
Costo de usuarios para la estación troncal 45: 34.750	Costo de usuarios para la estación troncal 45: 34.750
Valor porcentual costo operación: $(5 - 5) / 5 = 0\%$	
Valor porcentual costo usuarios: $(34.750 - 34.750) / 34.750 = 0\%$	

Tabla 4.5: Resultados del modelo y la heurística para el nodo centroide 45.

En las Tablas 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 y 4.8 se muestran cinco resultados interesantes. Los nodos rojos corresponden a nodos de la red troncal, los nodos celestes representan los nodos alimentadores y el nodo violeta es la estación troncal. Las aristas gruesas indican los diferentes recorridos, cada uno con un color distinto. Es importante destacar que algunos recorridos parecen finalizar en un nodo de otro recorrido, en lugar de en la estación troncal. Esto ocurre porque ciertos recorridos comparten tramos y por lo tanto, se superponen. Se debe asumir que los recorridos que no parecen llegar a la estación troncal siguen el mismo trayecto que el recorrido con el que se cruzan.

Para evaluar el rendimiento, se analizaron las estaciones 12, 45, 58, 61 y 68 comparando los costos de usuarios y de operación de la solución heurística con la solución óptima y se calculó la diferencia porcentual. En dos de los cinco casos la diferencia porcentual en el costo de usuarios entre la solución óptima y la solución heurística es del 0%, lo que indica que la heurística proporciona la mejor solución posible para los usuarios en esas dos estaciones.

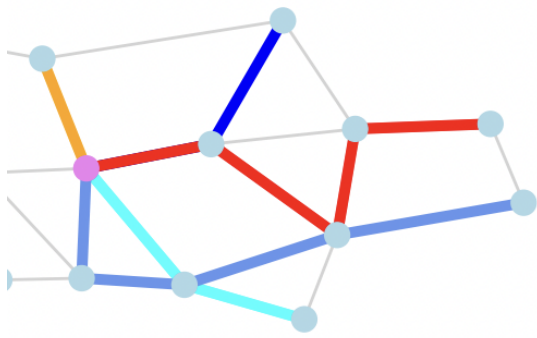
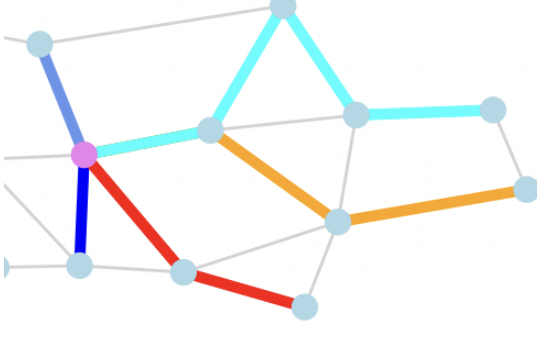
Heurística	Modelo
Centroide 58	
Cantidad de nodos: 9 (baja)	
	
Costo de operación para la estación troncal 58: 19	Costo de operación para la estación troncal 58: 17
Costo de usuarios para la estación troncal 58: 47.002	Costo de usuarios para la estación troncal 58: 46.588
Valor porcentual costo operación: $(17 - 19) / 17 = - 11.76\%$	
Valor porcentual costo usuarios: $(46.588 - 47.002) / 46.588 = - 0.889\%$	

Tabla 4.6: Resultados del modelo y la heurística para el nodo centroide 58

En la estación número 61 la diferencia porcentual es del -20,87%. En la Tabla 4.7 se presentan los resultados de la heurística (a) y los del modelo (b). Se puede observar que, para los nodos celestes situados más arriba, el modelo ofrece un recorrido mucho más directo hacia la estación troncal. Lo positivo es que, bajo estos parámetros, esta estación troncal fue la que presentó la mayor diferencia porcentual en el costo de usuarios y fueron muy pocas las estaciones que mostraron una diferencia tan significativa. En la mayoría de los casos la diferencia fue nula o muy pequeña.

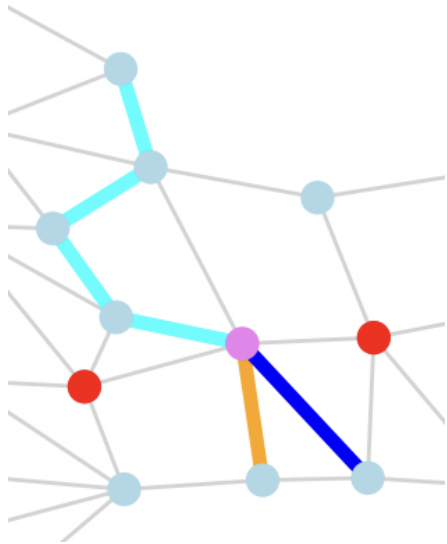
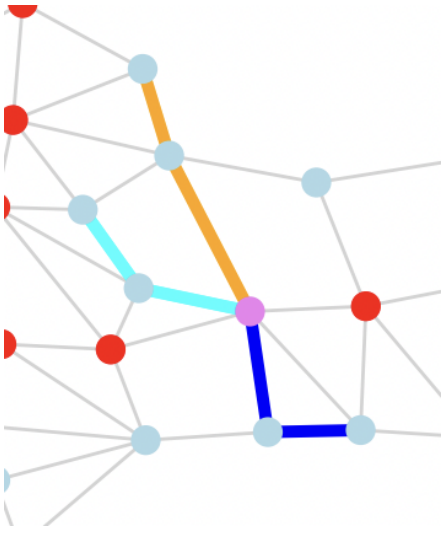
Heurística	Modelo
Centroide 61	
Cantidad de nodos: 6 (baja)	
	
Costo de operación para la estación troncal 61: 7	Costo de operación para la estación troncal 61: 6
Costo de usuarios para la estación troncal 61: 44.288	Costo de usuarios para la estación troncal 61: 36.642
Valor porcentual costo operación: $(6 - 7) / 6 = - 16,67\%$	
Valor porcentual costo usuarios: $(36.642 - 44.288) / 36.642 = - 20,87\%$	

Tabla 4.7: Resultados del modelo y la heurística para el nodo centroide 61.

En la Tabla 4.8 se pueden ver los resultados para un caso en donde el modelo no pudo obtener una solución factible, ya que se cambió el parámetro de longitud máxima para que fuera 10 km lo que hizo que algunas estaciones presentaran resultados imposibles. Algunos nodos, como los naranjas, están demasiado alejados de la estación como para que un camino mínimo pueda cumplir la restricción de ser menor a 10 km. En la Tabla 4.8 se puede ver como la heurística halló un resultado incompleto con algunos nodos que no pudieron obtener un recorrido que los satisficiera (observar los nodos anaranjados). El modelo directamente no pudo devolver ninguna solución.

Una observación importante es que las imágenes de las soluciones obtenidas por la heurística son muy similares a las de las soluciones exactas, siendo idénticas en el caso de la parada 45.

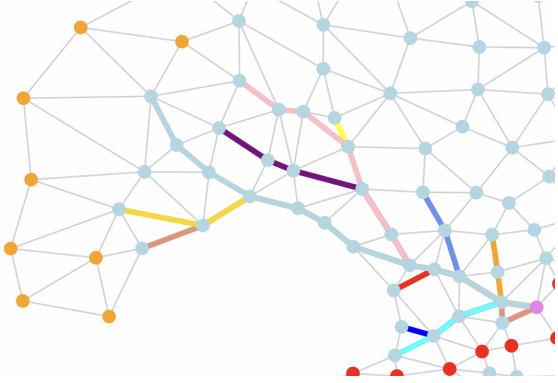
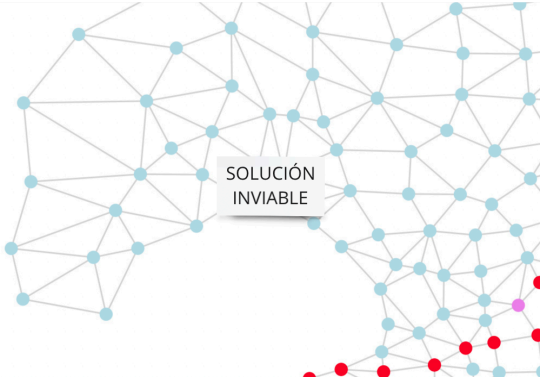
Heurística	Modelo
Centroide 68	
Cantidad de nodos: 42 (alta)	
Longitud máxima: 10 km	
	
Costo de operación para la estación troncal 58: 69	Costo de operación para la estación troncal 58: N/A
Costo de usuarios para la estación troncal 58: 160.453	Costo de usuarios para la estación troncal 58: N/A

Tabla 4.8: Resultados del modelo y la heurística para el nodo centroide 68.

También hay que destacar que en el caso de la parada 12, la heurística hasta resulta ser más beneficiosa para los operadores, donde se observa una mejora porcentual del 11,84%. Esto se debe a que tanto el modelo como la heurística se centran en minimizar el costo para los usuarios sin optimizar necesariamente el costo para los operadores. En conclusión, para estos casos de prueba específicos, la heurística no solo ofrece una solución igual de buena para los usuarios sino que también proporciona resultados favorables para los operadores en comparación con el modelo.

Esto sucede porque la heurística tiene un enfoque que contempla tanto a los usuarios como a los operadores a la hora de seleccionar el camino, mientras que el modelo exacto solo contempla a los usuarios y no importa si un recorrido tiene un mayor costo de operación siempre y cuando respete las restricciones operativas. El modelo puede generar múltiples soluciones óptimas para los usuarios y seleccionar cualquiera de ellas sin tener en cuenta el costo de los operadores. En otras palabras, si el modelo tiene que elegir entre dos opciones con el mismo costo mínimo para los usuarios, podría no seleccionar el que optimiza el costo para los operadores.

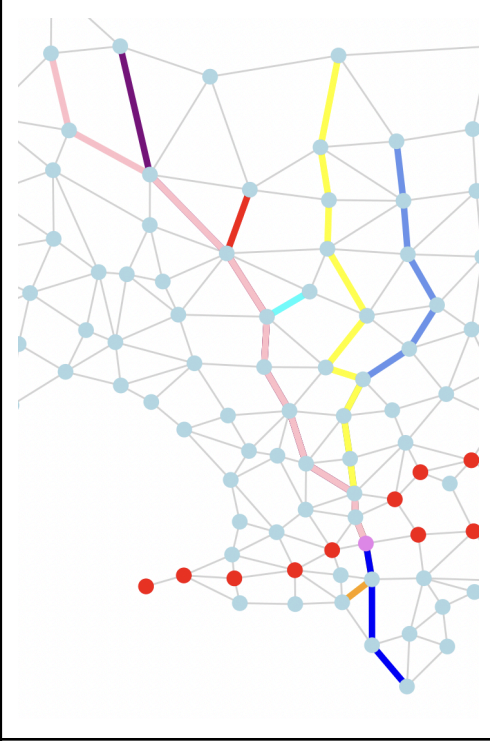
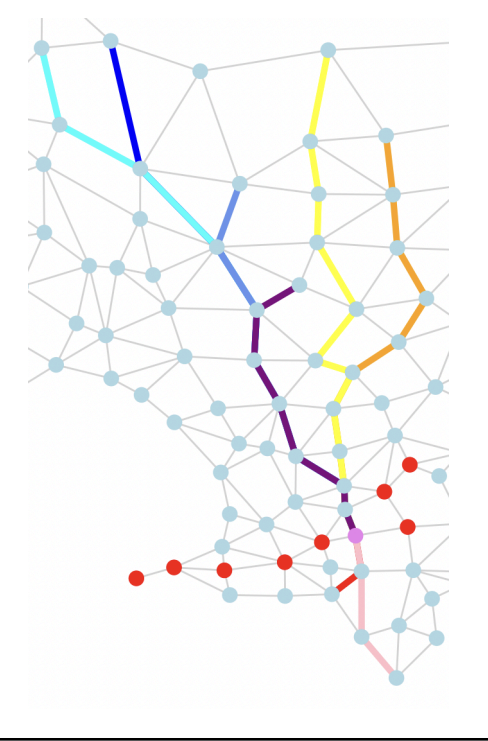
Heurística	Modelo
Centroide 12	
	
Costo de operación para la estación troncal 12 : 65	Costo de operación para la estación troncal 12 : 65
Valor porcentual costo operación: $(65 - 65) / 65 = 0 \%$	
Costo de usuarios para la estación troncal 12: 159.914	Costo de usuarios para la estación troncal 12: 159.914
Valor porcentual costo usuarios: $(159.914 - 159.914) / 159.914 = 0\%$	

Tabla 4.9: Resultados del modelo y la heurística para el nodo centroide 12 al multiplicar la función de los operadores por un peso pequeño y sumarla a la función objetivo.

Una manera de ajustar el modelo para contemplar a los operadores es incluir el costo en la función objetivo multiplicándolo por un peso muy pequeño. Así, este costo no afectará significativamente la decisión, pero cuando haya varias opciones disponibles el modelo preferirá aquella que más beneficie a los operadores.

La función objetivo del modelo podría quedar así:

$$\sum_{r \in Ru, a \in A, k \in K} c_a x_{akr} + 0.01 * \sum_{r \in Ru, a \in A} c_a y_{ar}$$

Al agregar este pequeño peso, determinado luego de varias pruebas preliminares, se hizo un ajuste que puede generar un cambio considerable en los resultados. Al correr nuevamente el algoritmo resolutivo con esta modificación obtenemos los resultados para el caso de la estación 12 que se encuentran representados en la Tabla 4.9.

Tanto la heurística como el modelo devuelven resultados idénticos, ya que el costo para los usuarios y el costo para los operadores son los mismos.

Por lo tanto, se puede concluir que la heurística es muy efectiva para aproximarse a la solución óptima desde la perspectiva de los usuarios (en dos de los cinco casos mostrados es incluso exacta). Además, las soluciones obtenidas son adecuadas para los operadores, lo que sugiere que la heurística puede ser utilizada para problemas de mayor tamaño donde se espera obtener soluciones cercanas a las óptimas.

5. Experimentos numéricos, caso de estudio

El objetivo de este capítulo es validar el algoritmo resolutivo en un caso real y por lo tanto solo vamos a usar la heurística al correr el conjunto de pruebas de este capítulo. En pruebas anteriores la heurística many-to-one fue validada mediante su comparación con un modelo exacto de programación matemática y mediante experimentos con un grafo reducido.

Ahora, el siguiente paso es aplicarlo a un grafo detallado que represente las calles reales de Montevideo en lugar de una versión simplificada. Los resultados obtenidos podrán compararse con los datos del sistema de transporte de Montevideo, considerando métricas como la cantidad de recorridos generados y la longitud máxima de estos, entre otros factores.

La elección de Montevideo como caso de estudio se debe, en primer lugar, a que es la ciudad en la que residimos actualmente y con la que estamos familiarizados, tanto a nivel urbano como en términos de su sistema de transporte. Además, gracias al equipo de investigación y a [7] se dispone de información relevante sobre su infraestructura vial y su demanda de transporte. Montevideo es una ciudad de tamaño mediano con un sistema de transporte público complejo, pero con potencial de mejora. Si bien actualmente no cuenta con una red troncal completa, como la planteada en el Plan de Movilidad, existen proyectos que proponen la incorporación de una red troncal en la ciudad [5,12]. Esto refuerza la relevancia de este estudio.

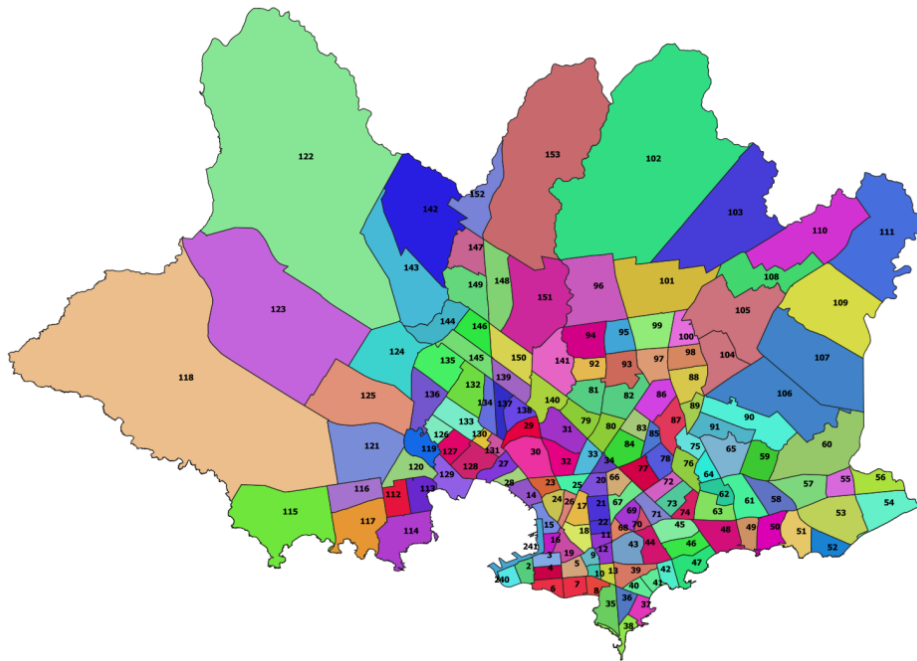


Figura 5.1: Delimitación zonal de Montevideo, imagen tomada de [7].

En este trabajo se utilizaron los datos obtenidos en [7] y [22] para poder construir el grafo detallado de Montevideo y la demanda interzonal (ver Figura 5.1). Estos datos también proporcionan un listado de las calles troncales de la ciudad y sus nodos correspondientes

en el grafo detallado. Sin embargo, la red troncal generada a partir de estos datos resultó ser desconexa, lo que hizo necesario un posprocesamiento para obtener una troncal conexa de acuerdo con los requisitos y los supuestos de este trabajo.

En la Figura 5.2 se muestra una representación del grafo real de Montevideo, donde la red troncal, pintada de celeste, corresponde a las calles de Av. Italia, 18 de julio y 8 de octubre. Como se mencionó, se eligieron estas calles porque la Intendencia de Montevideo las considera para la construcción de corredores que optimicen la velocidad del transporte público.

Al mismo tiempo, en la Figura 5.2 también se puede observar la red troncal representada en rojo y celeste, correspondiente a las calles de 18 de Julio, Avenida Italia, 8 de octubre, Avenida Agraciada/Garzón, Avenida General Flores, Avenida Rivera, Bulevar Batlle y Ordóñez y Bulevar Artigas. Estas vías incluyen tanto las mencionadas anteriormente como aquellas consideradas para la implementación de corredores exclusivos según [4].



Figura 5.2: Grafo detallado de Montevideo con la red troncal correspondiente a las calles de Av. Italia, 18 de julio, 8 de octubre (en celeste), Avenida Agraciada/Garzón, Avenida General Flores, Avenida Rivera, Bulevar Batlle y Ordóñez y Bulevar Artigas (en rojo).

5.1 Set de pruebas: caso real

En este conjunto de pruebas se definirán varios escenarios en los que se variarán los parámetros con el objetivo de evaluar el algoritmo en diferentes condiciones y analizar los resultados obtenidos. El análisis de los resultados permitirá, en primer lugar, determinar si el algoritmo es aplicable a un caso real, es decir, si genera soluciones razonables. Por ejemplo, en el caso de Montevideo, donde actualmente existen 140 líneas de transporte público [7], el algoritmo no debería generar una solución con una cantidad significativamente mayor de recorridos. En segundo lugar, si el algoritmo demuestra ser aplicable, podrá utilizarse como una herramienta para analizar distintos escenarios. Por ejemplo, se podría simular la incorporación de una troncal con una velocidad relativa de 2 o de 1,5 y analizar si la opción

con velocidad 2 es significativamente más beneficiosa que la de 1,5. A futuro, esto permitiría generar escenarios realistas en caso de que se estudiara la posibilidad de agregar una red troncal con mayores beneficios en Montevideo.

Para este conjunto de pruebas se utilizará una prueba que servirá como base para las demás. Se seleccionarán los parámetros de esta prueba base y posteriormente se generarán variaciones modificando el valor de alguno de esos parámetros. Los parámetros de la prueba base son los siguientes:

- Velocidad troncal relativa: Se toma una velocidad troncal relativa de 1,5.
- Máxima cantidad de recorridos por estación troncal: La cantidad de recorridos se determina dividiendo el número de nodos asociados a esa parada troncal entre seis. Esto garantiza que no se generen excesivos recorridos. Este número se eligió después de realizar varias pruebas y observar que era el que producía los resultados visuales más razonables. En la mayoría de los casos no resultaba ser demasiado restrictivo (generando recorridos bastante directos sin muchos desvíos) pero tampoco demasiado flexible (como para permitir que se generen demasiados recorridos, lo cual sería perjudicial para los operadores). En trabajos futuros el enfoque más adecuado sería elegir un número personalizado para cada grupo, en lugar de asignar un factor de división arbitrario generalizado para todos los grupos.
- Largo máximo de recorridos: Se eligen 40 kilómetros basándose en la longitud máxima real de recorridos en Montevideo, que es de 39,6 km [8]. Este es el único valor que no varía entre las pruebas.
- Calles troncales: Av. Italia, 18 de julio y 8 de octubre

El conjunto de pruebas completo es el siguiente:

Línea base:

- Velocidad relativa: 1,5
- Troncales: Av. Italia, 18 de julio, 8 de octubre
- Cantidad máxima de recorridos por estación troncal: Cantidad de nodos / 6

Velocidad relativa de 2:

- Velocidad relativa: 2
- Troncales: Av. Italia, 18 de julio, 8 de octubre
- Cantidad máxima de recorridos por estación troncal: Cantidad de nodos / 6

Todas las troncales:

- Velocidad relativa: 1,5
- Troncales: Avenida Agraciada/Garzón, Avenida General Flores, Avenida Rivera, Bulevar Batlle y Ordóñez, y Bulevar Artigas
- Cantidad máxima de recorridos por estación troncal: Cantidad de nodos / 6

Cantidad máxima de recorridos: Cantidad de nodos / 9:

- Velocidad relativa: 1,5
- Troncales: Av. Italia, 18 de julio, 8 de octubre
- Cantidad máxima de recorridos por estación troncal: Cantidad de nodos / 9

A continuación, se presentan los resultados de las pruebas.

5.2 Resultados

5.2.1 Línea base

Parámetros:

Velocidad relativa	1,5
Troncales	Av. Italia, 18 de julio, 8 de octubre
Cantidad de recorridos modelo	Cant nodos / 6
Longitud máxima	40 km

Tabla 5.1: Parámetros de la prueba “Línea base”

Resultados:

Cantidad de pares origen destino que pasan por la troncal	2.306
Cantidad de pares origen destino que NO pasan por la troncal	1.943
Cantidad de recorridos generados	222
Costo de operación	2.014
Costo de usuarios	27.550.271
Costo promedio por usuario	7,825
Largo medio	9,241 km
Largo máximo	27,5 km
Largo mínimo	0,099 km

Tabla 5.2: Resultados de la prueba “Línea base”

La Tabla 5.1 muestra los parámetros correspondientes al caso de prueba “Línea Base”. Viendo la Tabla 5.2 que contiene los resultados de la prueba, lo primero a considerar es la cantidad de pares origen-destino cuyo camino más corto pasa por la troncal. De un total de 4.249 pares, 2.306 pasan por la troncal y 1.943 no.

La cantidad total de recorridos generados es de 222, lo que es bastante alto comparado al hecho de que hoy en día existen 140 líneas de ómnibus en Montevideo. Si se quisiera

reducir este número es necesario reducir la cantidad máxima de recorridos que puede generar el algoritmo. Esto favorecería a los operadores pero perjudicaría a los usuarios, ya que una menor cantidad de recorridos implica trayectos menos directos lo que incrementa el tiempo de viaje de los usuarios.

El costo de operación es de 2.014. Con 222 recorridos generados, esto da una longitud media de aproximadamente 9,241 km por recorrido, lo cual es un buen resultado en comparación con la media actual de 16,7 km en líneas de ómnibus [8].

El costo para los usuarios es de 27.550.271 y el promedio por usuario es de 7,825.

Según la Encuesta de Movilidad [17] realizada en Montevideo, se concluyó que el tiempo promedio de los viajes en el transporte público, considerando los tiempos de espera en parada, es de 46 minutos. Dado que esta prueba arrojó un promedio de costo de usuarios de 7,298 (h) y asumiendo una velocidad media de 20 km/h, se calcula que la duración promedio por viaje es de aproximadamente 22 minutos (0,3649 h), sin incluir los tiempos de espera en la parada. Además, la cantidad de recorridos es de 222, una cifra considerablemente mayor que la actual que tiene 140 líneas. Este aumento en la cantidad de recorridos podría verse como una mejora en beneficios para los usuarios, y por ende, una mejora en el costo promedio. Esto se debe a que una mayor cantidad de recorridos permitiría ofrecer trayectos más directos, disminuyendo así el costo para ellos.

El hecho de que la solución propuesta en este trabajo genere, para esta prueba en particular, un tiempo significativamente menor al actual sugiere resultados muy positivos. Cabe recordar que la misma se basó en una troncal con una mejora del 50%, manteniendo una velocidad promedio del resto de calles no troncales de 20 km/h y considerando únicamente los pares origen-destino que transitan por la red troncal. La encuesta mencionada no especifica la velocidad promedio de los viajes. Este ejemplo se presenta como una ilustración o comparación entre los resultados obtenidos y la realidad actual de la ciudad.

El recorrido más largo es de 27,5 km (lo cual es coherente, dado que el máximo actual es de 39,6 km [8]), mientras que el recorrido más corto es de 0,099 km, lo que equivale a aproximadamente dos cuadras. Estos resultados sugieren que podría ser necesario un posprocesamiento de los datos, ya que incluir recorridos demasiado cortos en la solución no tiene sentido, dado que pueden realizarse a pie. Es probable que esto ocurra debido a la proximidad de algunos centroides a la red troncal, lo que genera trayectos demasiado cortos.

Observando las Figuras 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6 se nota que los recorridos generados son razonables, ya que son bastante directos en términos generales, evitan desviaciones innecesarias y se complementan entre sí. Esta complementariedad se evidencia al observar la cobertura de la demanda en las distintas zonas, sin que se produzcan cruces excesivos entre los recorridos.

Tanto en las imágenes como en los resultados numéricos, se puede apreciar que el algoritmo proporciona resultados razonables. Esto sugiere que podría aplicarse en ciudades con una red troncal bien definida, generando recorridos alimentadoras que beneficiarían el sistema de transporte urbano.



Figura 5.3: Recorridos resultantes de ejecutar el algoritmo con los parámetros de la línea base en una de las estaciones troncales. Esta solución corresponde a una estación troncal con dos recorridos.

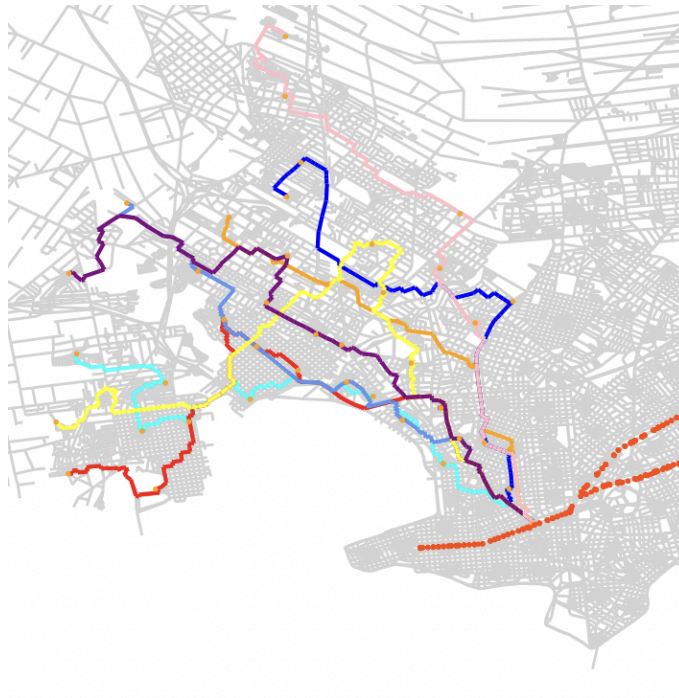


Figura 5.4: Recorridos resultantes de ejecutar el algoritmo con los parámetros de la línea base en una de las estaciones troncales. Esta solución corresponde a una estación troncal con 8 recorridos.

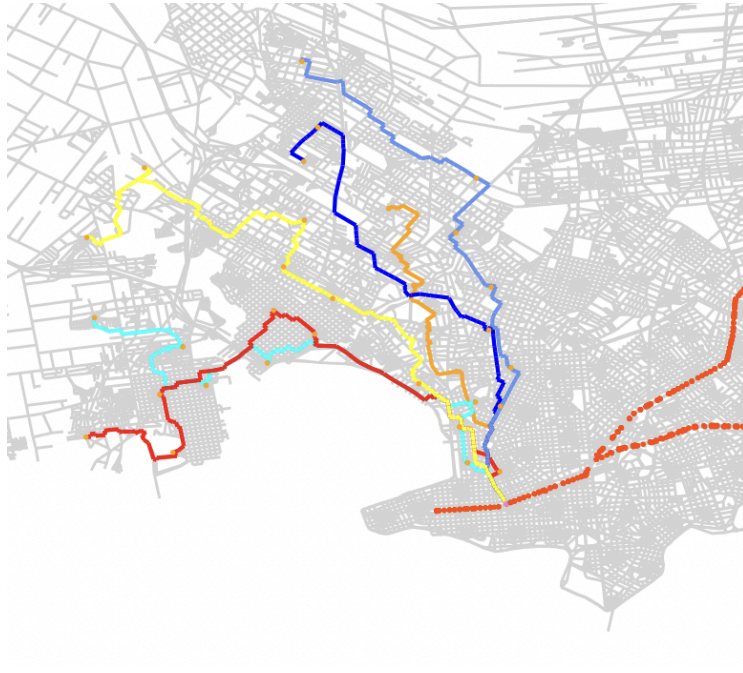


Figura 5.5: Recorridos resultantes de ejecutar el algoritmo con los parámetros de la línea base en una de las estaciones troncales. Esta solución corresponde a una estación troncal con 6 recorridos.

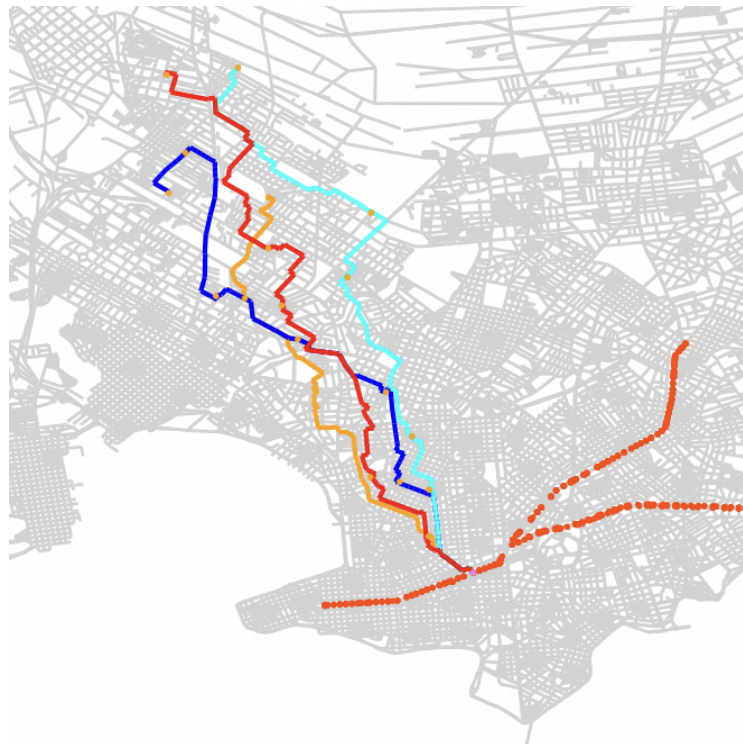


Figura 5.6: Recorridos resultantes de ejecutar el algoritmo con los parámetros de la línea base en una de las estaciones troncales. Esta solución corresponde a una estación troncal con 4 recorridos.

5.2.2 Velocidad relativa de 2

Parámetros:

Velocidad relativa	2
Troncales	Av. Italia, 18 de julio, 8 de octubre
Cantidad de recorridos modelo	Cant nodos / 6
Longitud máxima	40 km

Tabla 5.3: Parámetros de la prueba "Velocidad relativa de 2"

Resultados:

Cantidad de pares origen destino que pasan por la troncal	2.406
Cantidad de pares origen destino que NO pasan por la troncal	1.843
Cantidad de recorridos generados	191
Costo de operación	1.606
Costo de usuarios	25.875.173
Costo promedio por usuario	7,047
Largo medio	8,637 km
Largo máximo	28,733 km
Largo mínimo	0.099 km

Tabla 5.4: Resultados de la prueba "Velocidad relativa de 2"

La Tabla 5.3 muestra los parámetros correspondientes al caso de prueba "Velocidad relativa de 2". Los resultados (ver Tabla 5.4) indican que el número de pares que utilizan la troncal con una velocidad relativa de 2 (2.406) ha aumentado en comparación con el caso base, donde la velocidad relativa era de 1,5 (2.306). Este incremento era predecible, ya que se esperaba que, al aumentar la velocidad en la troncal, más pares optarían por utilizarla.

El número de recorridos generados disminuyó ligeramente, pasando de 222 a 191, al igual que el costo de operación, que se redujo de 2.014 a 1.606. Este último descenso es lógico, ya que se generaron menos recorridos.

Por otro lado, el costo promedio para los usuarios se redujo de 7,825 a 7,047. Esto sugiere que mejorar la velocidad de la red troncal en un 50% genera un mayor beneficio para los usuarios, ya que al aumentar la rapidez en este tramo, pueden llegar más rápido a su destino.

Los resultados de la longitud media, máxima y mínima son muy parecidos y no es relevante mencionarlos.

En la Figura 5.7 se observa que el resultado de la heurística tal vez podría ser mejor (o al menos a simple vista no parece ser la mejor opción). Por ejemplo, el recorrido azul muestra un desvío significativo. Esto podría deberse a la restricción en el número de recorridos, ya que para esta estación en particular no se permitió generar más de cuatro recorridos. Como resultado, se obtuvo una trayectoria menos directa y con un mayor desvío.

En las Figuras 5.7, 5.8, 5.9 y 5.10 se pueden apreciar más de estos recorridos generados.



Figura 5.7: Recorridos resultantes de ejecutar el algoritmo con los parámetros del caso de prueba "Velocidad relativa de 2" en una de las estaciones troncales. Esta solución corresponde a una estación troncal con 4 recorridos.



Figura 5.8: Recorridos resultantes de ejecutar el algoritmo con los parámetros del caso de prueba "Velocidad relativa de 2" en una de las estaciones troncales. Esta solución corresponde a una estación troncal con 6 recorridos.

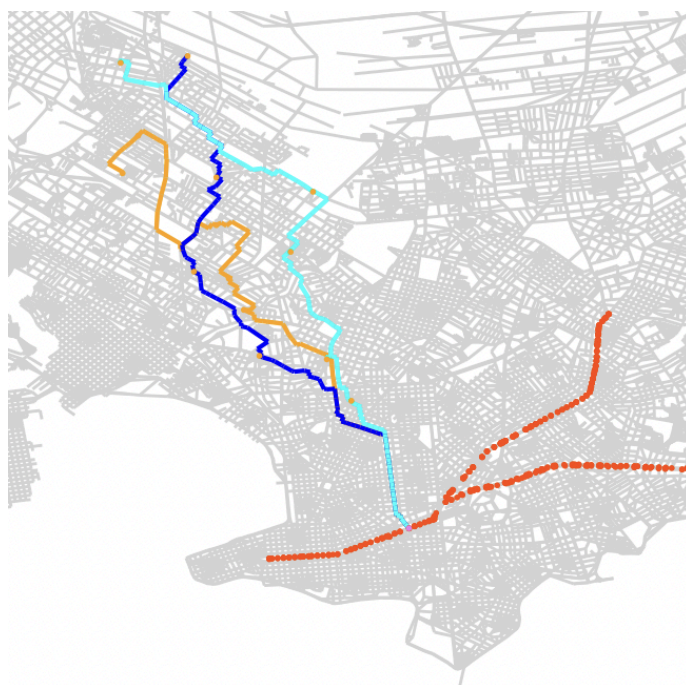


Figura 5.9: Recorridos resultantes de ejecutar el algoritmo con los parámetros del caso de prueba "Velocidad relativa de 2" en una de las estaciones troncales. Esta solución corresponde a una estación troncal con 3 recorridos.

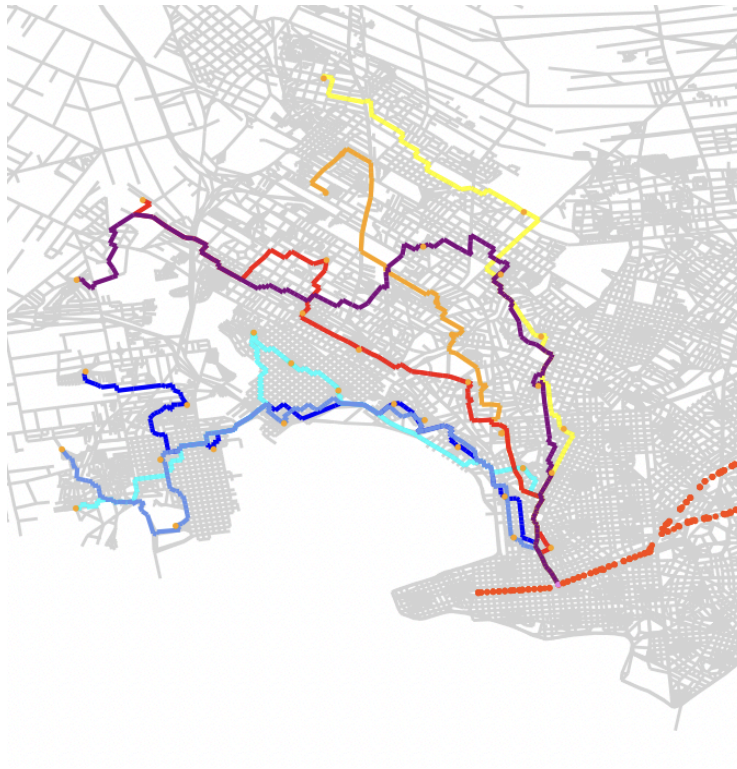


Figura 5.10: Recorridos resultantes de ejecutar el algoritmo con los parámetros del caso de prueba "Velocidad relativa de 2" en una de las estaciones troncales. Esta solución corresponde a una estación troncal con 7 recorridos.

5.2.3 Todas las troncales

Velocidad relativa	1,5
Troncales	18 de Julio Avenida Italia 8 de octubre Avenida Agraciada/Garzón Avenida General Flores Avenida Rivera Bulevar Batlle y Ordóñez Bulevar Artigas
Cantidad de recorridos modelo	Cant nodos / 6
Longitud máxima	40 km

Tabla 5.5: Parámetros de la prueba "Todas las troncales"

Resultados:

Cantidad de pares origen destino que pasan por la troncal	3.876
Cantidad de pares origen destino que NO pasan por la troncal	373
Cantidad de recorridos generados	388
Costo de operación	741
Costo de usuarios	64.029.053
Costo promedio por usuario	11,326
Largo medio	1,983 km
Largo máximo	27,267 km
Largo mínimo	0,030 km

Tabla 5.6: Resultados de la prueba “Todas las troncales”

La Tabla 5.5 muestra los parámetros correspondientes al caso de prueba “Todas las troncales”. Los resultados (ver Tabla 5.6) de la cantidad de pares que pasan por la troncal muestran diferencias significativas con respecto a la prueba base. Ahora, 3.876 pares utilizan la troncal, mientras que solo 373 pares no la incluyen. Este cambio es esperado dado que la troncal fue ampliada, abarcando más zonas de la ciudad. Anteriormente, la troncal sólo cubría el sur-este de Montevideo y ahora recorre toda la ciudad. Este cambio ha llevado a un aumento en el número total de recorridos, que ahora asciende a 388. Este incremento tiene sentido, ya que con mayor cantidad de nodos y un mayor número de estaciones troncales, es lógico que aumente la cantidad de recorridos generados.

A pesar del aumento en el número de recorridos, el costo de operación ha disminuido, pasando de 2.024 a 741. Esta reducción se debe a que los recorridos generados son significativamente más cortos. La longitud media ha bajado a 1,983 km, frente a los 9,241 km de la prueba base.

La longitud máxima se mantuvo muy parecida. La longitud mínima también disminuyó a 0,030 km, que es casi insignificante y esos recorridos no deberían ser considerados en la solución final.

El costo promedio de los usuarios es de 11,326, en comparación con los 7,825 de la línea base. Esto se debe a la manera en que se calcula el costo de los usuarios. En el caso en el que el camino mínimo entre dos pares es: alimentador - troncal - alimentador - troncal - alimentador, la solución del algoritmo únicamente genera el primer y el último trayecto alimentador del recorrido, por lo que el tramo entre ambas troncales no se incluye. Al calcular el costo de los usuarios, se construye una solución de la forma alimentador - troncal - alimentador, lo que probablemente es más costoso que agregar un recorrido alimentador

intermedio que funcione como un “atajo”. Como resultado, el algoritmo genera una solución que no sería la ideal para los usuarios, aumentando considerablemente el costo promedio.

Esta es una particularidad de la metodología que sería conveniente revisar en un trabajo a futuro, ya que hay pares de nodos a los que se les asigna un recorrido que resulta perjudicial al ‘obligar’ a la demanda a transitar la red troncal, cuando una opción más eficiente es tomar un atajo entre un tramo y otro de la misma. Para este tipo de casos, un buen enfoque podría ser que el algoritmo también genere recorridos intermedios que permitan trasladar la demanda de una troncal a otra. Esto no se consideró inicialmente debido a que la troncal es conexas. Luego de estas pruebas queda claro que aunque es posible trasladar la demanda de un origen a otro, esto no garantiza que sea la solución más conveniente para los usuarios.

En las Figuras 5.11, 5.12 y 5.13 se pueden apreciar algunos de los recorridos generados para ciertas estaciones troncales.

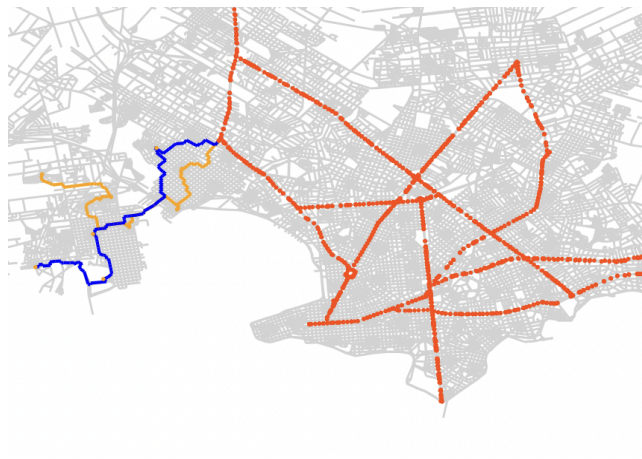


Figura 5.11: Recorridos resultantes de ejecutar el algoritmo con los parámetros del caso de prueba “Todas las troncales” en una de las estaciones troncales. Esta solución corresponde a una estación troncal con 2 recorridos.

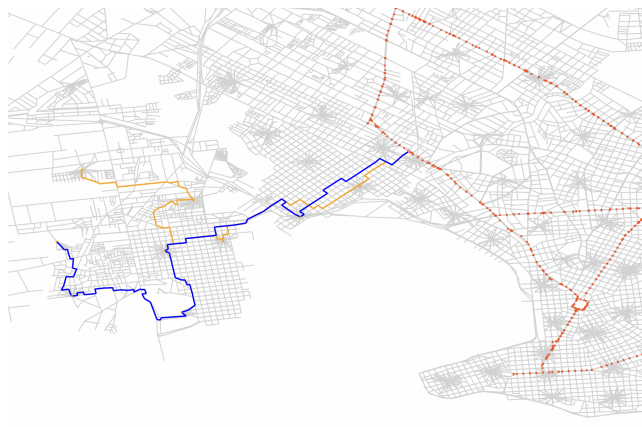


Figura 5.12: Recorridos resultantes de ejecutar el algoritmo con los parámetros del caso de prueba “Todas las troncales” en una de las estaciones troncales. Esta solución corresponde a una estación troncal con 2 recorridos.



Figura 5.13: Recorridos resultantes de ejecutar el algoritmo con los parámetros del caso de prueba “Todas las troncales” en una de las estaciones troncales. Esta solución corresponde a una estación troncal con 1 recorrido.

5.2.4 Cantidad máxima de recorridos: Cantidad de nodos / 9

Velocidad relativa	1,5
Troncales	Av. Italia, 18 de julio, 8 de octubre
Cantidad de recorridos modelo	Cant nodos / 9
Longitud máxima	40 km

Tabla 5.7: Parámetros de la prueba “Cantidad máxima de recorridos: Cant de nodos / 9”

La Tabla 5.7 muestra los parámetros correspondientes al caso de prueba “Cantidad máxima de recorridos: Cantidad de nodos / 9”. Los resultados (ver Tabla 5.8) para la cantidad de pares que utilizan la troncal se mantienen igual que en la línea base, dado que las únicas variables que influyen en este aspecto es la velocidad relativa o las troncales utilizadas y ninguno de estos factores han cambiado en esta prueba.

En cuanto al número total de recorridos generados, se observa una disminución, con 189 recorridos en comparación con los 222 de la línea base. Esto demuestra que, al disminuir la cantidad máxima de recorridos, la cantidad de recorridos disminuye.

Resultados:

Cantidad de pares origen destino que pasan por la troncal	2.306
Cantidad de pares origen destino que NO pasan por la troncal	1.943
Cantidad de recorridos generados	189
Costo de operación	1.841
Costo de usuarios	29.921.736
Costo promedio por usuario	8,498
Largo medio	9,952 km
Largo máximo	36,554 km
Largo mínimo	0,099 km

Tabla 5.8: Resultados de la prueba "Cantidad máxima de recorridos: Cant de nodos / 9"

Sin embargo, se debe tener precaución con esto, ya que un número muy bajo podría resultar en recorridos excesivamente largos, lo cual está limitado por la longitud máxima permitida. Los recorridos largos o con muchos desvíos no son beneficiosos para los usuarios, ya que incrementan el tiempo de viaje en el ómnibus. El costo de operación muestra una caída en comparación con la línea base: de 2.014 a 1.841. Esta reducción es esperada, ya que una menor cantidad de recorridos tiende a beneficiar a los operadores al generar menos líneas.

El costo promedio de usuarios es de 8,498 frente a los 7,825 de la línea base. El costo para los usuarios aumenta. Esto se debe a que los recorridos son menos directos, lo que los perjudica. Dado que los recorridos son menos directos es evidente que la longitud promedio aumenta, alcanzando los 9,952 km en comparación con los 9,241 km de la línea base. Además, la longitud máxima incrementa significativamente llegando a 36,554 km en contraste con los 27,5 km de la línea base.

En las Figuras 5.14, 5.15, 5.16 y 5.17 se muestran las rutas de algunos de los recorridos alimentadores generados para esta prueba.

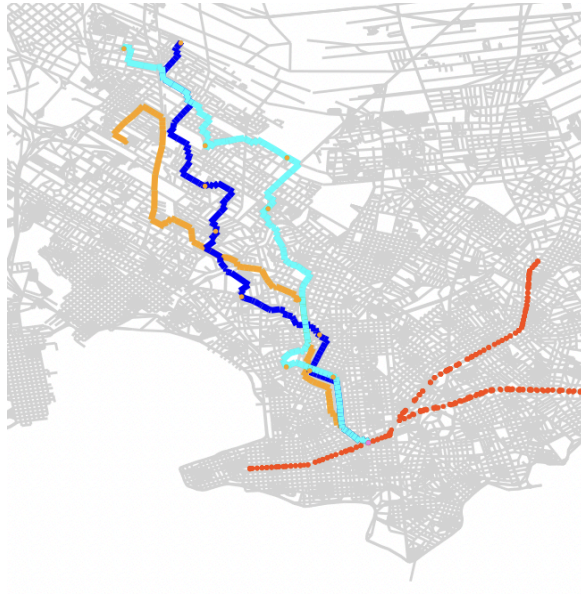


Figura 5.14: Recorridos resultantes de ejecutar el algoritmo con los parámetros del caso de prueba "Cantidad máxima de recorridos: Cantidad de nodos / 9" en una de las estaciones troncales. Esta solución corresponde a una estación troncal con 3 recorridos.



Figura 5.15: Recorridos resultantes de ejecutar el algoritmo con los parámetros del caso de prueba "Cantidad máxima de recorridos: Cantidad de nodos / 9" en una de las estaciones troncales. Esta solución corresponde a una estación troncal con 2 recorridos.



Figura 5.16: Recorridos resultantes de ejecutar el algoritmo con los parámetros del caso de prueba "Cantidad máxima de recorridos: Cantidad de nodos / 9" en una de las estaciones troncales. Esta solución corresponde a una estación troncal con 2 recorridos.

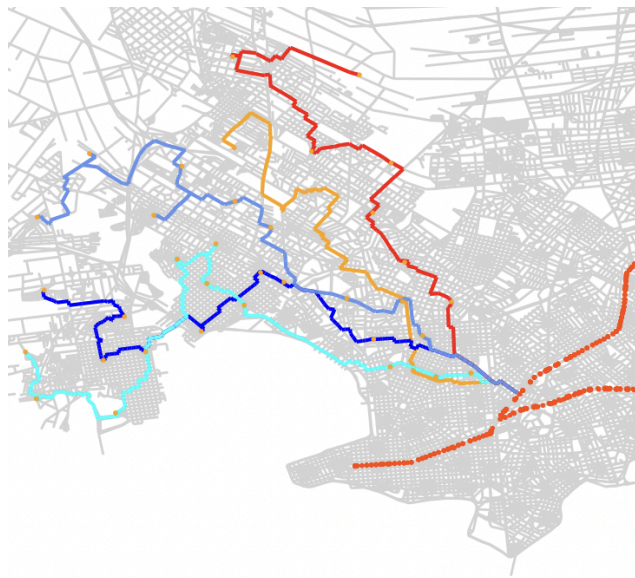


Figura 5.17: Recorridos resultantes de ejecutar el algoritmo con los parámetros del caso de prueba "Cantidad máxima de recorridos: Cantidad de nodos / 9" en una de las estaciones troncales. Esta solución corresponde a una estación troncal con 5 recorridos.

5.3 Análisis comparativo de resultados

En esta sección se presenta un resumen de los análisis realizados en la sección anterior, fomentando también la discusión de los resultados. La Tabla 5.9 muestra nuevamente los datos obtenidos pero de manera más resumida y clara. Algunas de las preguntas que surgen del análisis son: ¿cuánto influye el factor de velocidad relativa de la red troncal en la generación de los recorridos? ¿Cuál es el efecto de aumentar o disminuir la cantidad máxima de recorridos permitidos por estación troncal?

Para responder estas preguntas, nos enfocamos en parámetros específicos y analizamos su impacto en los resultados. Esto se hace considerando criterios como el costo promedio por usuario, la cantidad total de recorridos generados, el número de pares origen-destino que atraviesan la red troncal y en algunos casos, el costo de los operadores.

5.3.1 Incidencia del factor velocidad relativa

En la Tabla 5.9 se muestran los resultados de las pruebas “Velocidad relativa” 1 (1), “Línea base” (2) y “Velocidad relativa 2” (3). Para la prueba (1) el costo promedio por usuarios es de 9,048, para la prueba (2) de 7,825 y para la (3) de 7,047. La prueba (3) mejoró en un 9,94% en comparación a la prueba (2). La prueba (2) mejoró en un 13,52% con respecto a (1). Esto significa que, al incrementar la velocidad de la troncal (es decir, al aumentar el factor de velocidad relativa) el costo promedio por usuario se reduce, ya que una mayor velocidad permite a los usuarios llegar más rápido a su destino (ver Figura 5.18).

Estos datos que relacionan el factor de la velocidad relativa con el costo promedio por usuario son de gran utilidad para la toma de decisiones estratégicas. Permiten responder preguntas clave cómo cuánto debería aumentar la velocidad de la red troncal para lograr una reducción específica en el costo por usuario.

Incidencia del factor velocidad relativa - Costo promedio por usuario

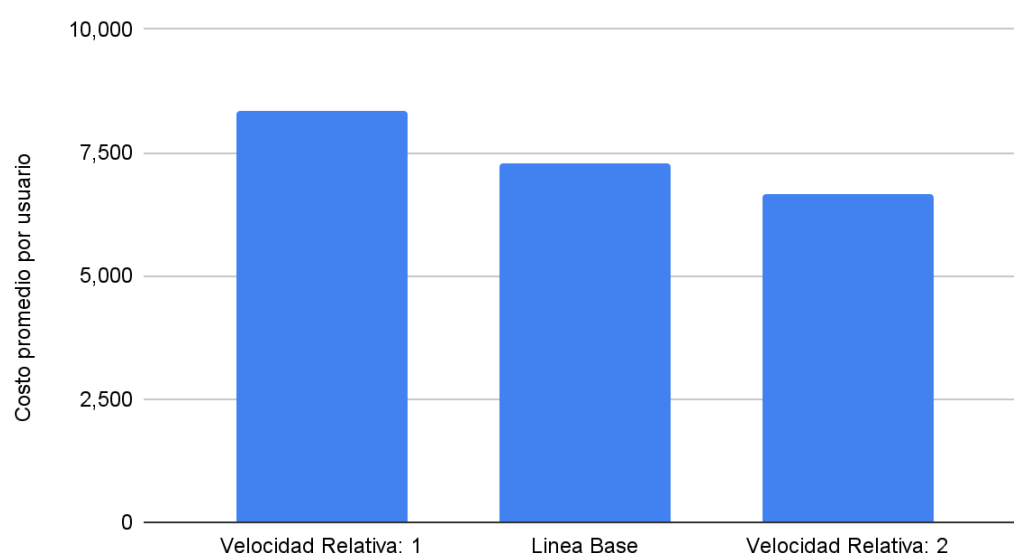


Figura 5.18: Gráfica que muestra la incidencia del factor de velocidad relativa en el costo promedio por usuario.

Prueba	Velocidad relativa	Troncales	Cantidad de recorridos	Longitud máxima	Pares que pasan por la troncal	Pares que no pasan por la troncal	Recorridos	Costo de operación	Costo de usuarios	Costo promedio por usuario	Largo medio	Largo máximo	Largo mínimo
Velocidad relativa: 1	1	Av. Italia 18 de Julio 8 de Octubre	Cant nodos / 6	40km	2.095	2.154	276	2.867	28.120.657	9,048	10,544 km	36,653 km	0,099 km
Línea base	1,5	Av. Italia 18 de Julio 8 de Octubre	Cant nodos / 6	40 km	2.306	1.943	222	2.014	27.550.271	7,825	9,241 km	27,5 km	0,099 km
Velocidad relativa: 2	2	Av. Italia 18 de Julio 8 de Octubre	Cant nodos / 6	40 km	2.406	1.843	191	1.606	25.875.173	7,047	8,637 km	28,733 km	0,099 km
Todas las troncales	1,5	Av. Italia 18 de Julio 8 de Octubre Av. Agraciada Av. Gral. Flores Av. Rivera Bv. Batlle y Ordoñez Bv. Artigas	Cant nodos / 6	40 km	3.876	373	388	741	64.029.053	11,326	1,983 km	27,267 km	0,030 km
Cantidad máxima de recorridos: cantidad de nodos/4	1,5	Av. Italia 18 de Julio 8 de Octubre	Cant nodos / 4	40 km	2.306	1.943	273	2.296	25.359.474	7,202	8,536 km	23,415 km	0,099 km
Cantidad máxima de recorridos: cantidad de nodos/9	1,5	Av. Italia 18 de Julio 8 de Octubre	Cant nodos / 9	40 km	2.306	1.943	189	1.841	29.921.736	8,498	9,952 km	36,554 km	0,099 km

Tabla 5.9: Resultados de todas las pruebas anteriores. Además se agregaron dos pruebas: “Velocidad relativa de 1” y “Cantidad máxima de recorridos: cantidad de nodos/4”

Estos resultados parecen confirmar que una mayor velocidad en la red troncal se traduce en un beneficio para los usuarios en términos de tiempo de viaje a bordo. Un aumento en la velocidad relativa impacta positivamente en el costo promedio por usuario, lo que es lógico, ya que una mejora en la red troncal permite a los usuarios llegar más rápido a su destino.

Al aumentar el factor de velocidad relativa de la troncal también incrementa la cantidad de pares origen-destino que utilizan esta red (ver Figura 5.19). Esto ocurre porque, al trazarse el camino mínimo entre los pares origen-destino, la elección de pasar por la troncal depende directamente de su velocidad. Cuando la velocidad de la troncal es menor algunos caminos mínimos podrían evitarla, pero a medida que su velocidad aumenta se convierte en una opción más favorable.

Incidencia del factor velocidad relativa - Cantidad de pares que pasan por la troncal

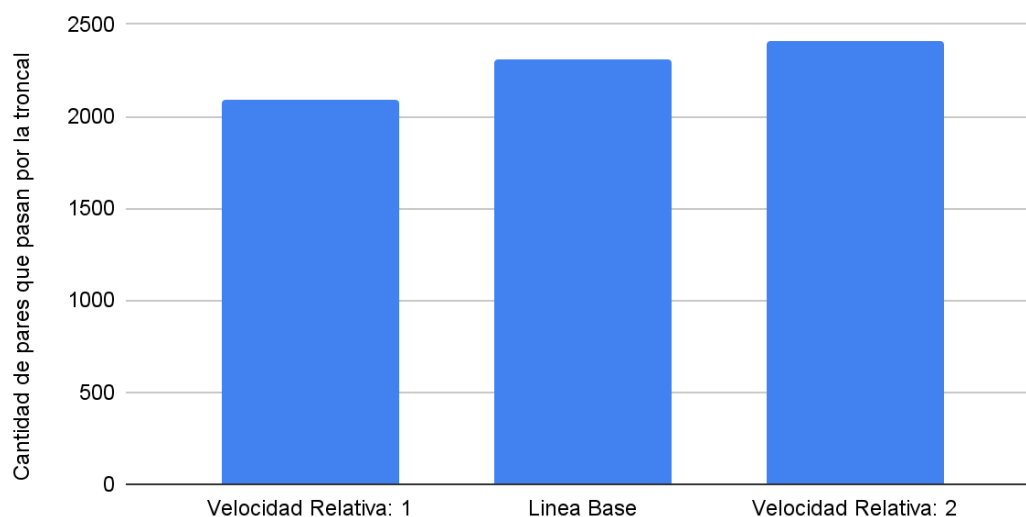


Figura 5.19: Gráfica que muestra la incidencia del factor de velocidad relativa en la cantidad de pares que pasan por la troncal.

Además, la cantidad total de recorridos generados disminuye a medida que aumenta la velocidad relativa. Esto puede parecer extraño, ya que, como se mencionó anteriormente, la cantidad de pares que pasan por la troncal aumenta. Por lo tanto, sería lógico pensar que al haber más pares a los que se deben generar recorridos también se genere un mayor número de recorridos totales. Sin embargo, el hecho de que la cantidad de recorridos no aumente sino que disminuya se debe a que un mismo nodo, perteneciente a diferentes pares origen-destino, tiende a asociarse con un menor número de estaciones troncales. Al priorizar acceder rápidamente a la troncal los pares eligen generalmente la estación o estaciones más cercanas. Con menos nodos asignados a cada estación troncal, se requiere un menor número de recorridos para cubrirlos (ver Figura 5.20). Esto significa que la demanda de la red alimentadora queda más concentrada en menor cantidad de recorridos.

Al analizar las Figuras 5.18, 5.19 y 5.20, es evidente que el factor de la velocidad relativa influye significativamente en la eficiencia de la red jerárquica. Para los usuarios, una mayor velocidad les permite llegar más rápido a su destino. Para los operadores, implica una reducción en la cantidad de recorridos debido a que la demanda se concentra en un menor

número de estaciones troncales, lo que genera menos recorridos alimentadores necesarios para cubrir esa demanda.

Incidencia del factor velocidad relativa - Cantidad de recorridos generados

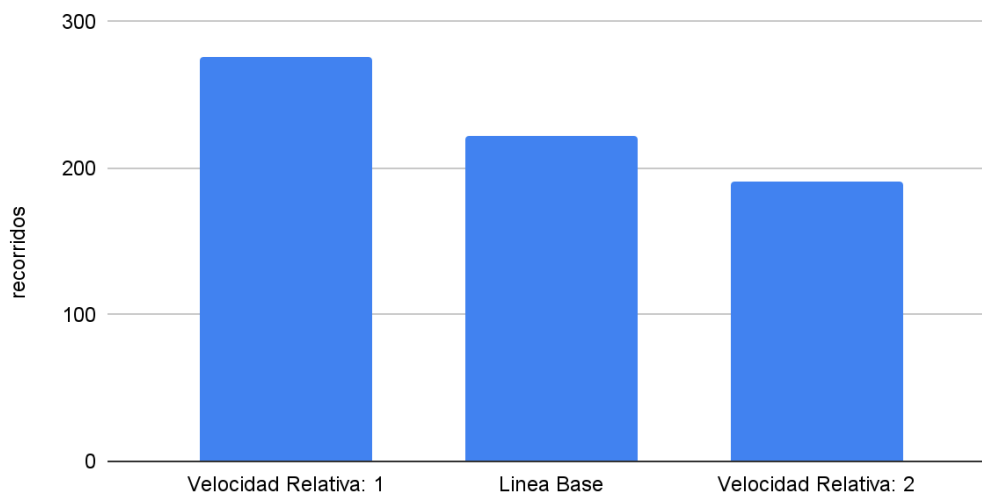


Figura 5.20: Gráfica que muestra la incidencia del factor de velocidad relativa en la cantidad de recorridos totales generados.

Igualmente hay que tener en cuenta que al aumentar la velocidad de la red troncal también aumenta la demanda con la que se trabaja. Por eso, al evaluar el impacto de la velocidad relativa en los operadores es importante tener precaución. Si bien la cantidad de recorridos disminuye, también aumenta la demanda que atraviesa la troncal. No se puede afirmar con certeza que un aumento en la velocidad de la troncal sea siempre beneficioso para los operadores, ya que podría ocurrir que, aunque haya menos recorridos, su longitud se incremente significativamente, lo que resultaría perjudicial.

Dado que en este caso no es posible comparar directamente el costo para los operadores entre las distintas pruebas (porque los pares que pasan por la troncal en las diferentes pruebas varían), este aspecto debe considerarse al analizar la situación. No obstante, un aspecto innegable es que a mayor velocidad, menor cantidad de recorridos, lo que puede verse de manera positiva, ya que implica la necesidad de crear menos líneas de ómnibus para atender la demanda.

Una mayor velocidad incentiva a más pares origen-destino a preferir la troncal, lo cual es beneficioso si el objetivo es desarrollar un sistema de transporte fuertemente apoyado en la red troncal. Además, se logra satisfacer a una mayor cantidad de usuarios sin que esto conlleve a un aumento en la cantidad de recorridos. Los costos operativos, al menos en términos de cantidad de líneas que deben incorporarse, disminuyen mientras se brinda servicio a una mayor cantidad de demanda. Sin embargo, pueden surgir otros costos, por ejemplo, si los recorridos se vuelven demasiado largos y se generan incrementos en otros aspectos, como en el consumo de combustible.

5.3.2 Incidencia de la cantidad de troncales

En la Tabla 5.9 se muestran los resultados de las pruebas “Línea base” (2) y “Todas las troncales” (4). Para la prueba (2) el costo promedio por usuarios es de 7,825, para la prueba (4) de 11,326.

La extensión de la red troncal también influye en la cantidad de pares origen-destino que pasan por la troncal (ver Figura 5.21). Si un nodo tiene una troncal más cercana es más probable que se desvíe hacia ella. Pero si la troncal está demasiado lejos y es más rápido evitarla, es posible que no la utilice para llegar a su destino. Tener una red troncal que abarca más zonas permite a los pares origen-destino que antes, con una red troncal más reducida no tenían la oportunidad de utilizarla, ahora tengan una estación troncal más cercana.

Incidencia de la cantidad de troncales - Cantidad de pares que pasan por la troncal

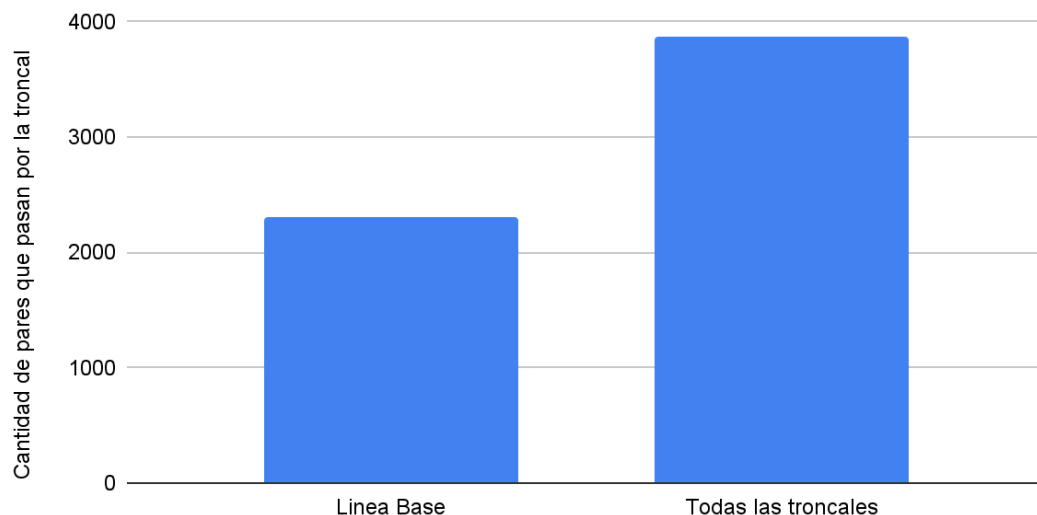


Figura 5.21: Gráfica que muestra la incidencia de la cantidad de troncales en la cantidad de pares que pasan por la troncal.

El incremento de pares que pasan por la troncal genera también un aumento en los recorridos finales (ver Figura 5.22), ya que hay más nodos que conectar con la troncal y más estaciones troncales disponibles. Para los usuarios sin embargo, el costo promedio aumenta considerablemente (ver Figura 5.23). Esto, como ya se explicó, se debe al supuesto que asume que no existen tramos alimentadores entre dos tramos de la troncal. Esto hace que el cálculo del costo de los usuarios considere el recorrido de un par como si fuera alimentador-troncal-alimentador, incluso en casos en los que la mejor solución podría ser de la forma alimentador-troncal-alimentador-troncal-alimentador. Esto termina provocando un aumento en el costo total. En algunos casos, es menos costoso tomar un “atajo” utilizando un recorrido alimentador entre dos tramos de la red troncal en lugar de recorrer toda la troncal hasta el último tramo alimentador. Esto genera una solución que no sería la mejor para los usuarios, aumentando considerablemente el costo promedio.

Incidencia de la cantidad de troncales - Cantidad de recorridos generados

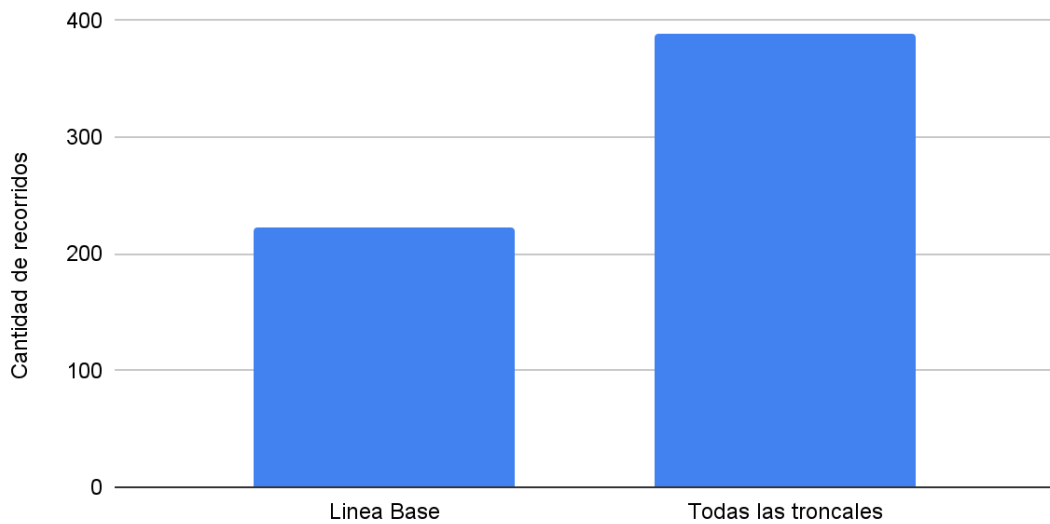


Figura 5.22: Gráfica que muestra la incidencia de la cantidad de troncales en la cantidad de recorridos generados.

Incidencia de la cantidad de troncales - Costo promedio por usuario

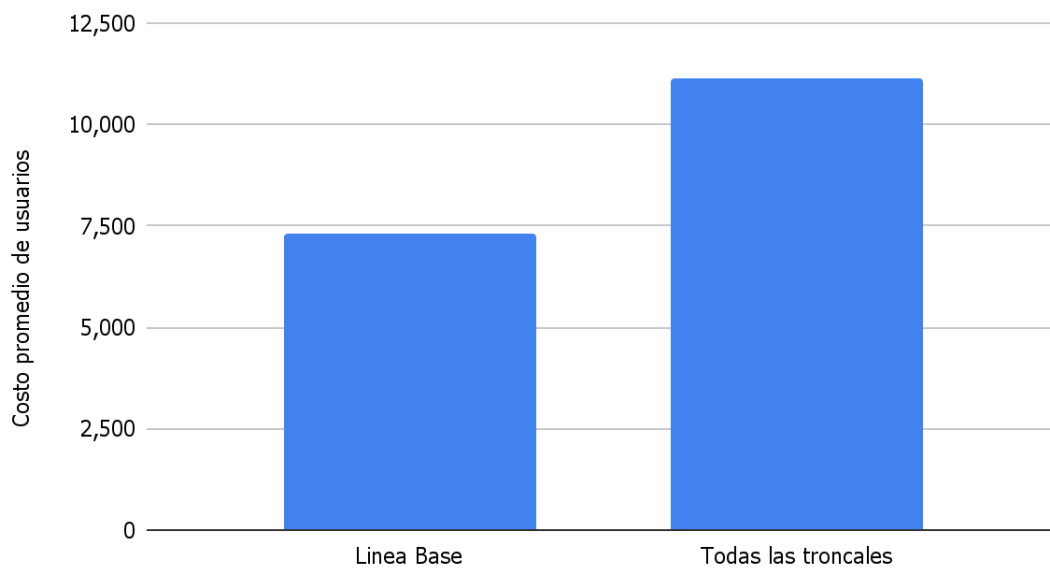


Figura 5.23: Gráfica que muestra la incidencia de la cantidad de troncales en el costo promedio por usuario.

5.3.3 Incidencia de la cantidad máxima de recorridos

En la Tabla 5.9 se muestran los resultados de las pruebas "Línea base" (2), "Cantidad máxima de recorridos: cantidad de nodos/4" (5) y "Cantidad máxima de recorridos: cantidad de nodos/9" (6). Para la prueba (2) la cantidad de recorridos totales es de 222, para la prueba (5) de 273 y para la prueba (6) de 189.

Este parámetro sin duda reduce la cantidad total de recorridos (ver Figura 5.24), ya que restringe la cantidad máxima de recorridos por estación troncal obligando a que el algoritmo genere menos recorridos por estación. Esto perjudica a los usuarios porque se generan recorridos menos directos y más largos, lo que provoca un aumento en el costo promedio. Esto se ve claramente en la Figura 5.25, donde se aprecia que el costo por usuario incrementa. Sin embargo, para los operadores no resulta tan desfavorable, ya que, a pesar del aumento en la longitud promedio, la reducción en la cantidad de recorridos generados disminuye su costo total en comparación con el costo operacional de la línea base (ver Figura 5.26).

Incidencia de la cantidad máxima de recorridos - Cantidad de recorridos generados

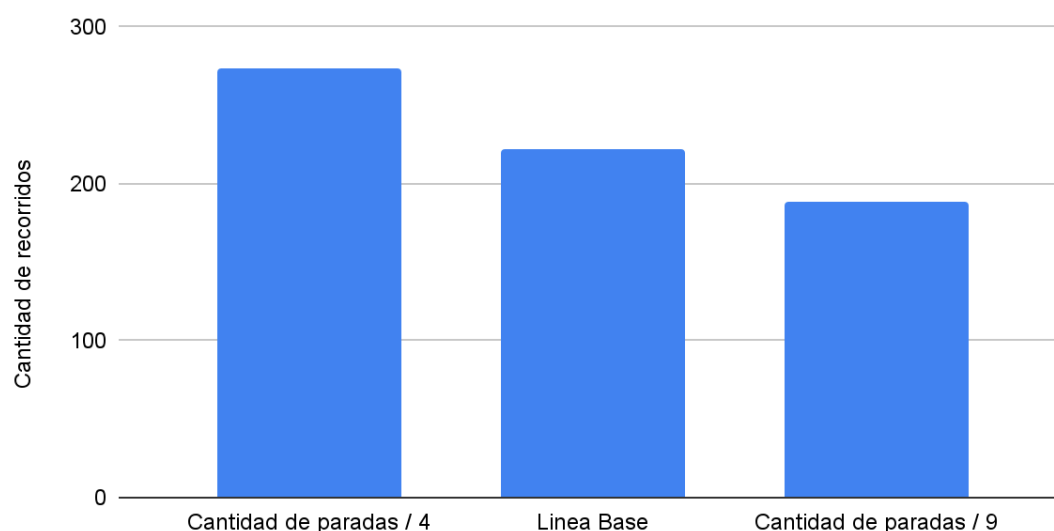


Figura 5.24: Gráfica que muestra la incidencia de la cantidad máxima de recorridos en la cantidad de recorridos generados.

Esto indica que la cantidad máxima de recorridos que se permite por estación troncal influye directamente en la cantidad de recorridos generados. Si se busca reducir los costos de los operadores el factor de división debe ser mayor.

Sin embargo, es importante tener en cuenta que también afecta directamente el costo de los usuarios. Mientras más restrictiva sea la limitante mayor será el costo para ellos, ya que se generan recorridos menos directos. Es importante tener en cuenta que el diseño de recorridos es un problema multi-objetivo [14] y encontrar un equilibrio entre los objetivos está fuera del alcance de este proyecto.

Además, una mejor opción sería ajustar esta restricción para cada caso particular. Por ejemplo, en una estación troncal con muchos nodos asignados, un factor de división grande

podría no impactar demasiado a los usuarios. En cambio, en situaciones donde los nodos asignados son pocos, un factor de división excesivamente grande podría restringir en exceso los recorridos generando trayectorias innecesariamente largas y poco eficientes.

Incidencia de la cantidad máxima de recorridos - Costo promedio por usuario

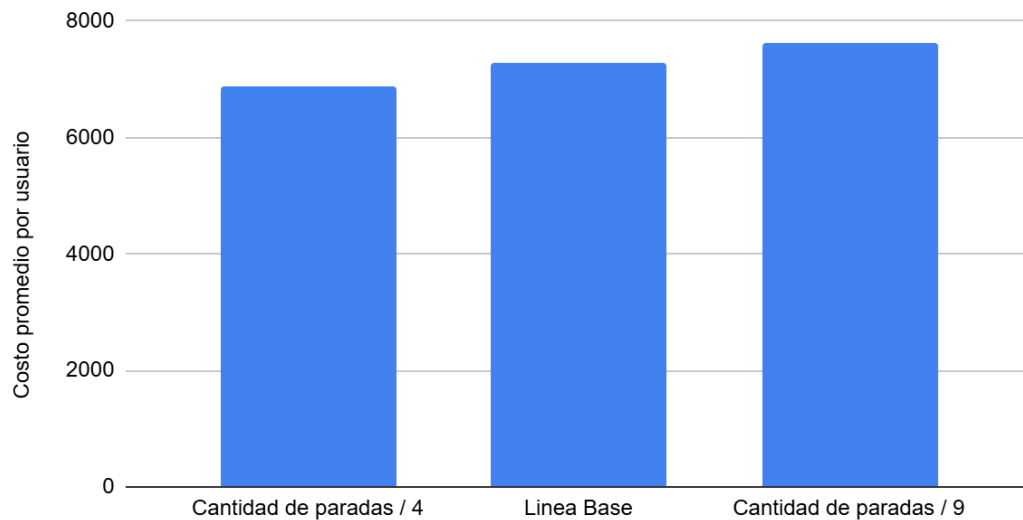


Figura 5.25: Gráfica que muestra la incidencia de la cantidad máxima de recorridos en el costo promedio por usuario.

Incidencia de la cantidad máxima de recorridos - Costo de operadores

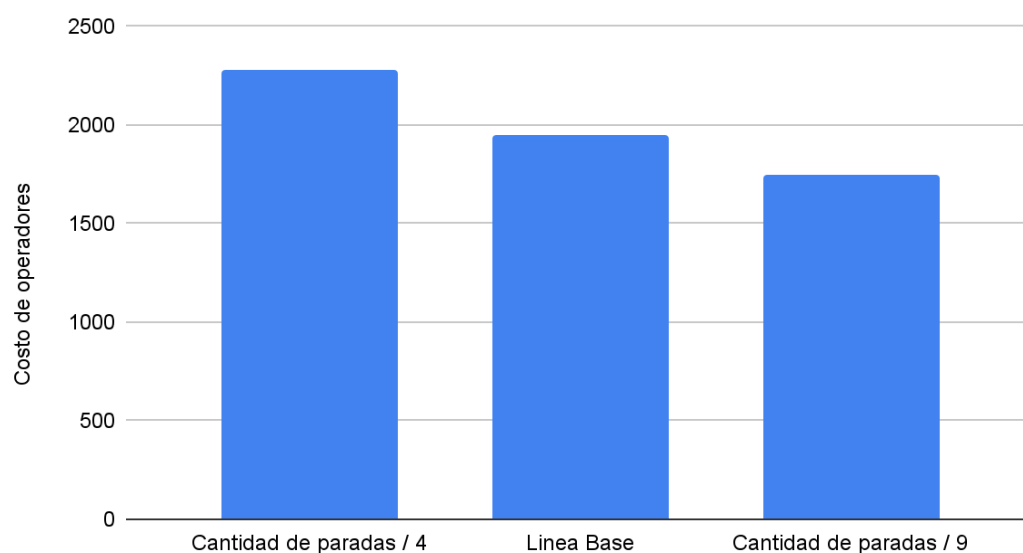


Figura 5.26: Gráfica que muestra la incidencia de la cantidad máxima de recorridos en el costo de los operadores.

6. Conclusiones

6.1 Resumen

En este trabajo se abordó una solución reducida del Extended Feeder Bus Network Design Problem (EFBNPD). La investigación se basó en estudios previos, con especial énfasis en [7], ya que uno de los principales objetivos era mejorar la solución propuesta en dicho estudio.

El trabajo estuvo motivado por el caso del sistema de transporte público de Montevideo que, aunque actualmente no cuenta con una red de transporte público jerárquica, tiene la posibilidad de evolucionar hacia una. Esto se debe a que existen ciertos corredores en la ciudad identificados como los de mayor velocidad e importancia, los cuales podrían formar parte de una red troncal. Dado el tamaño de la ciudad, se consideró que la mejor solución sería tener una red secundaria híbrida en la que coexistan recorridos alimentadores de la troncal y recorridos no alimentadores. Este tipo de redes ha sido menos estudiado en el área de investigación.

Luego de definido el problema se diseñó una solución mediante un enfoque heurístico, utilizando como estrategia principal la obtención de recorridos más cortos en un grafo mediante el algoritmo de Dijkstra, la clasificación de los nodos por estaciones troncales y la posterior generación de recorridos utilizando la técnica de inserción de nodos o la generación de nuevos recorridos de camino mínimo entre el nodo origen o el nodo destino y la estación troncal, con el propósito final de optimizar los costos para los usuarios. También se diseñó un modelo matemático exacto que buscó encontrar la solución óptima de los recorridos, mediante la minimización de una función objetivo basado en el Traveling Salesman Problem.

Finalmente se realizaron tres conjuntos de pruebas utilizando el algoritmo resolutivo implementado. Estos conjuntos de pruebas se llevaron a cabo con dos versiones de la red de calles de Montevideo distintas: una con un nivel de detalle a nivel de calles y otra con un mayor nivel de agregación.

El primer conjunto de pruebas se centró en la variación de los parámetros de entrada del algoritmo, como la velocidad de la red troncal y la cantidad máxima de caminos permitidos por estación. El objetivo fue analizar cómo los resultados variaban en función de estos parámetros, evaluar la relevancia de estos parámetros y confirmar hipótesis sobre su impacto en el algoritmo. Para estas pruebas se utilizó la red con un mayor nivel de agregación.

El segundo conjunto consistió en pruebas de validación, en las que se compararon los resultados de aplicar el algoritmo utilizando el modelo exacto con los resultados obtenidos mediante la solución heurística. Estas pruebas se realizaron sobre la red reducida, con el objetivo de comprobar que la heurística proporcionaba resultados cercanos a la solución óptima calculada por el modelo exacto. Este tipo de pruebas se llevó a cabo debido a que aplicar el modelo de programación matemática sobre un grafo detallado (como el de la red de calles) resultaría muy costoso en términos de tiempo de ejecución o podría no ser viable.

Para el tercer conjunto de pruebas se empleó el grafo detallado de la red de calles de Montevideo. Se realizaron varias pruebas modificando algunos parámetros de entrada con el propósito de analizar cómo respondía el algoritmo y qué resultados generaba al aplicarse a un caso real.

6.2 Conclusiones

El desarrollo del algoritmo resolutorio fue un proceso que requirió tiempo. A lo largo del trabajo el diseño del algoritmo o, en otras palabras, el pseudocódigo, evolucionó significativamente. Finalmente, después de varias iteraciones, se logró una versión final que es la misma presentada en este trabajo. Como aspecto positivo también se pudo crear un modelo exacto que permitió comparar y validar la efectividad de esta heurística.

Esta investigación se centró en una parte del Extended Feeder Bus Network Design Problem (EFBNDP) o en otras palabras, en el diseño de recorridos que acercan a los usuarios a una estación troncal sin considerar la frecuencia y utilizando la demanda interzonal.

Para abordar este problema se estableció una metodología eficaz basada en una heurística, que, validada mediante un modelo exacto en instancias pequeñas, pudo luego aplicarse a redes más grandes donde el uso de un modelo exacto es computacionalmente inviable. Esta estrategia que ha demostrado ser efectiva en este caso particular, podría también ser aplicable a otros problemas de redes de transporte público.

Las pruebas realizadas en el capítulo 5 sirvieron como evidencia para demostrar que el algoritmo puede aplicarse a casos reales, al menos en redes similares a las de Montevideo. Sin embargo, todavía no se puede afirmar que el algoritmo devolverá resultados en tiempos razonables para redes de calles demasiado grandes.

Después de realizar las pruebas sobre el caso de estudio se concluyó que el algoritmo resolutorio también podría ser útil para cualquier entidad reguladora como herramienta de evaluación. Se podrían modificar parámetros como la red troncal o el factor de velocidad relativa, analizar los resultados que el algoritmo genera y evaluar posibles escenarios. Esto permitiría extraer conclusiones sobre qué opción resulta más conveniente en términos de costos y aplicaciones.

El algoritmo resolutorio, aunque sencillo, proporciona resultados satisfactorios. Además, el modelo exacto desarrollado tiene aplicaciones más allá de este estudio, siendo adecuado para resolver diversas instancias del problema many-to-one. Un ejemplo de esto se encuentra en [8], donde se propone un escenario similar al de este trabajo, centrado en identificar los nodos que conformarán una red troncal y los nodos de paradas asignados a esos nodos específicos.

Al comparar las soluciones heurísticas con las obtenidas mediante el modelo exacto en casos reducidos, se comprobó que los resultados eran cercanos a los óptimos. Esto refuerza la validez de utilizar esta heurística en redes más complejas y de mayor tamaño, ya que se puede esperar que el método siga siendo efectivo en dichos escenarios. Esto es posible de afirmar porque el algoritmo propuesto tiene un tiempo de ejecución de orden polinomial, mientras que el modelo exacto tiene un orden exponencial. Por lo tanto, es esperable que el algoritmo sea capaz de resolver casos de gran tamaño antes de alcanzar tiempos de ejecución equivalentes a los del modelo exacto.

En resumen, este trabajo concluye que la combinación de enfoques heurísticos y exactos es una estrategia sólida para abordar tanto el problema del EFBNDP como otros problemas similares. Esta metodología garantiza soluciones eficientes y prácticas para la planificación urbana a diferentes escalas.

6.3 Trabajo a futuro

Este trabajo partió del problema completo del EFBNDP [7], enfocándose específicamente en el subproblema de la generación de recorridos alimentadores de la red troncal. Dado el esfuerzo necesario para desarrollar la heurística y el modelo matemático, se excluyeron los recorridos no alimentadores del alcance de este estudio. En investigaciones futuras podría ampliarse el algoritmo para realizar un análisis más robusto de toda la red, teniendo en cuenta no solo los recorridos alimentadores, sino además los recorridos secundarios que no hacen uso de la troncal. Se podría entonces buscar una solución heurística que cubra ambos casos, o incluso una solución heurística solo para los recorridos no cubiertos en esta investigación y correr ambos algoritmos para hallar una solución total a todo el sistema de recorridos secundarios.

Considerando las ventajas presentadas en este trabajo sobre la generación en paralelo de la heurística y el modelo matemático exacto como herramienta de validación, también sería interesante aplicar esta metodología a un algoritmo que proporcione una solución completa al problema, en lugar de limitarse solo a la red alimentadora.

En las distintas pruebas realizadas se observó una tendencia a generar más recorridos que los actualmente existentes en Montevideo, incluyendo recorridos muy cortos, de dos cuadras o menos, que no son relevantes y no deberían incluirse en la solución final. Este fenómeno puede deberse a la restricción fija en la cantidad de recorridos que pueden generarse por estación troncal. Si bien esta cantidad puede ser adecuada para algunas estaciones, en ciertos casos puede resultar insuficiente, lo que lleva a recorridos con muchos desvíos, o, por el contrario, también puede ser excesiva, lo que lleva a recorridos demasiado cortos y a la generación de muchos recorridos finales. Una posible solución sería ajustar el algoritmo de modo que el parámetro de cantidad de recorridos por parada no sea global, sino específico para cada estación. Esto permitiría encontrar valores óptimos para cada subproblema, eliminando recorridos innecesariamente cortos o mejorando la eficiencia de los recorridos generados.

En [7] también se concluyó que se generaron recorridos demasiado cortos y que era necesario un postprocesamiento. Dado que este también fue nuestro caso, se puede concluir que encontrar una solución que no requiera ningún tipo de posprocesamiento es bastante difícil de lograr.

Algo importante a considerar a la hora de realizar pruebas con datos geográficos reales, como es el caso de las pruebas con la red real de calles, es la calidad de los datos. Es fundamental contar con un conjunto de datos de buena calidad. En este trabajo se contaba con archivos shapefiles que contenían las coordenadas de los nodos y las aristas de la red. Un inconveniente que se encontró a la hora de trabajar con estos archivos fue que algunos nodos se repetían y estaban desconectados entre sí. Esto hacía que uno de los nodos se conectara a un conjunto de nodos, mientras que el nodo repetido se conectaba a otro conjunto. Como ambos estaban desconectados entre sí, el subgrafo quedaba desconexo. Este detalle ocasionó problemas al generar los recorridos y al momento de crear los

trayectos finales, ya que, al estar desconectada la troncal, estos no podían completarse correctamente.

Otra consideración importante, que podría ser parte de un trabajo a futuro, es que este estudio no tuvo en cuenta la frecuencia de los ómnibus, un factor relevante en la práctica. Para futuros estudios podría ser útil incorporar las frecuencias, lo cual podría abordarse como una segunda etapa asignando una frecuencia a los recorridos generados por el algoritmo.

Referencias

- [1] Cancela, H, Mauttone, A y Urquhart, M (2015). Mathematical programming formulations for transit network design. *Transportation Research Part B: Methodological*, 77. Páginas 17-37.
- [2] Kuah, G y Perl, J (1989). The Feeder-bus Network-design Problem. *The Journal of the Operational Research Society*, Volumen 40, No. 8. Páginas 751-767
- [3] Intendencia de Montevideo, *Sistema de Transporte Metropolitano*, <https://montevideo.gub.uy/areas-tematicas/sistema-de-transporte-metropolitano>
- [4] Intendencia de Montevideo (2010). *Plan de Movilidad*, https://montevideo.gub.uy/sites/default/files/concurso/materiales/anexo_1_-_libro_plan_de_movilidad.pdf
- [5] Proyecto Tren-Tram, <https://www.trentram.uy/#up>
- [6] Garey, M y Johnson, D (1983). Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. *The Journal of Symbolic Logic*. 48. Páginas 498-500.
- [7] Dornel, M y Erlichman, N. (2020.). *Generación de recorridos alimentadores para sistemas de transporte público*. Tesis de grado. Universidad de la República (Uruguay). Facultad de Ingeniería..
- [8] Risso, C., Nesmachnow, S., & Faller, G. (2023). Optimized Design of a Backbone Network for Public Transportation in Montevideo, Uruguay. *Sustainability*, 15(23), 16402.
- [9] Miller-Tucker-Zemlin formulation, <https://how-to.aimms.com/Articles/332/332-Miller-Tucker-Zemlin-formulation.html>
- [10] Ibarra-Rojas, O.J, Delgado, F, Geisen, R y Muñoz, J.C (2015). Planning, operation, and control of bus transport systems: A literature review. *Transportation Research Part B: Methodological*, 77, Páginas 38-75.
- [11] Ceder, A y Wilson, N (1986). Bus network design. *Transportation Research Part B: Methodological*, 20(4), Páginas 331-344.
- [12] Centro de Investigaciones Económicas (2024). *Movilidad Metropolitana más rápida planificada y sostenible*, <https://cinve.org.uy/wp-content/uploads/2023/12/La-Transformaci%C3%B3n-del-Sistema-de-Transporte-P%C3%BAblico-en-el-%C3%81rea-Metropolitana-de-Montevideo-GeTM-dic-2023.pdf>
- [13] Rasmussen, L.J.H, Caspi, A, Ambler, A, et al. (2019) Association of Neurocognitive and Physical Function With Gait Speed in Midlife. *JAMA Netw Open*. 2019;2(10):e1913123.
- [14] Mauttone, A, Urquhart, M (2008). A route set construction algorithm for the transit network design problem. *Computers & Operations Research*, 36(8), Páginas 2440-2449.
- [15] Ortúzar, J. y Willumsem, L. (2024). *Modelling Transport*. Ed. Wiley
- [16] Hoos, H, Stützle, T (2005). *Stochastic Local Search*. Ed. Morgan Kaufmann.
- [17] Mauttone, A., & Hernández, D. (2017). Encuesta de movilidad del área metropolitana de Montevideo. Principales resultados e indicadores (report). Montevideo: CAF, Intendencia de Montevideo, Intendencia de Canelones, Intendencia de San José, Ministerio de Transporte y Obras Públicas, Universidad de la República, PNUD Uruguay. <https://scioteca.caf.com/handle/123456789/1078>
- [18] Petruccelli, U y Racina, A (2021). Feeder-trunk and direct-link schemes for public transit: a model to evaluate the produced accessibility. *Public Transport Planning and Operations*, 13. Páginas 301-323.
- [19] Salazar Ferro, P y Behrens, R (2015). From direct to trunk-and-feeder public transport services in the Urban South: Territorial implications. *The Journal of Transport and Land Use*, 8. Páginas 123-136.

- [20] Mauttone, A, Cancela, H y Urquhart, M (2020). Public Transportation. *Network Design with Applications to Transportation and Logistics*, 1. Páginas 539-565.
- [21] Salazar Ferro, P, Muñoz J y Behrens R (2015). Trunk and feeder services regulation: Lessons from South America case studies. *Case Studies on Transport Policy*, 3. Páginas 264-270.
- [22] Massobrio, R. (2018). *Urban mobility data analysis in Montevideo, Uruguay*. Tesis de maestría. Universidad de la República (Uruguay). Facultad de Ingeniería.
- [23] Vuchic, V (2007). *Urban Transit Systems and Technology*. John Wiley & Sons, Inc.
- [24] Ciaffi, F, Cipriani, E y Petrelli, M (2012). Feeder Bus Network Design Problem: A New Metaheuristic Procedure and Real Size Applications. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 54. Páginas 798-807.
- [25] Mohaymany, A. S. y Ali, G. (2010). Multimodal Feeder Network Design Problem: Ant Colony Optimization Approach. *Journal of Transportation Engineering*, vol. 136, no 4, Páginas 323–331.
- [26] Intendencia de Montevideo (2025), *Transporte Público - Velocidad Operacional del Sistema*, <https://montevideo.gub.uy/observatorio-de-movilidad/transporte-publico#performance>
- [27] Correa, J, Mauttone, A y Robledo, F (2023). Maximizing modal shift in bicycle network design. *Procedia Computer Science*, 220. Páginas 226-234.