Pasantía de investigación
Sistemas binarios estocásticos uniformemente más confiables

Felipe Miranda

13 de junio de 2025

Resumen

El objetivo de este trabajo es extender conceptos y resultados bien conocidos de la teoría de confiabilidad en redes al marco más general de los Sistemas Binarios Estocásticos (SBE), principalmente en sistemas que cumplen con la propiedad de ser separables. Los SBE modelan sistemas compuestos por múltiples componentes, donde cada uno de estos tiene un estado binario (operativo o fallido) sujeto a fallas aleatorias e independientes.

Frank Boesch introdujo el concepto de grafos uniformemente más confiables y propuso varias conjeturas que dieron forma al estudio del análisis de confiabilidad uniforme. Una de sus conjeturas, conocida como la conjetura de 0-elemento, establece que cada grafo uniformemente más confiable tiene la mínima cantidad de conjuntos separadores de aristas de tamaño k para cualquier elección factible de k.

En este documento definiremos primeramente algunos conceptos clave relacionados con los sistemas binarios estocásticos tales como subsistemas, coherencia, separabilidad y confiabilidad uniforme. A continuación, demostraremos que cualquier subsistema de un sistema binario estocástico separable también es separable. Luego, reformularemos la conjetura de 0-elemento en el contexto de los sistemas binarios estocásticos y probaremos que esta es válida para la familia de los SBE coherentes y separables. Finalmente, se extiende el concepto de confiabilidad local para SBE.

1. Introducción

El estudio de la confiabilidad de sistemas busca analizar la probabilidad de que un sistema compuesto por múltiples componentes funcione correctamente ante fallas aleatorias de algunos de sus componentes. Un problema real que motiva el interés práctico de este estudio es diseñar un sistema con máxima confiabilidad que cumpla con restricciones presupuestales. [2]. Inicialmente, el análisis de confiabilidad en redes fue aplicado a sistemas, generalmente representados mediante grafos, donde los vértices representan elementos perfectamente confiables, mientras que las aristas tienen una probabilidad de falla independiente de valor $1 - r$, pudiendo, por tanto, estar cada una de estas en estado operativo o fallido. Un modelo con las características antes descriptas es conocido como un modelo $all - terminal$ con caída de aristas. En este contexto, la confiabilidad se define como la probabilidad de que el subgrafo resultante de considerar únicamente las aristas en estado operativo permanezca conexo.

Para cada par de enteros positivos n y m tales que $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$, denotamos mediante $\mathcal{C}_{n,m}$ a la clase de todos los grafos simples y conexos con n vértices y m aristas. Sea G un grafo en $\mathcal{C}_{n,m}$ y sea r la probabilidad de que cada una de las aristas de G esté operativa. Llamemos $N_i(G)$ a la cantidad de subgrafos conexos recubridores de G que tienen exactamente i aristas. El polinomio de confiabilidad de G, denotado como $R_G(r)$, se define de la siguiente forma:

$$R_G(r) = \sum_{i=0}^{m} N_i(G) r^i (1 - r)^{m-i}.$$

Uno de los problemas centrales sobre los que se ha trabajado en el estudio de confiabilidad en el modelo $all - terminal$ es determinar si cada clase no vacía $\mathcal{C}_{n,m}$ tiene algún grafo G tal que para cada grafo H en $\mathcal{C}_{n,m}$ y todo r en $[0, 1]$ se cumple que $R_G(r) \geq R_H(r)$. En caso de que dicho grafo G exista, este se denomina grafo uniformemente más confiable, según fue introducido por Boesch en la revista *Journal of Graph Theory* en 1986 [3]. Dicha conjetura fue refutada por Myrvold [10], Brown y Cox [5] y Romero y Safe [11]. Hasta el día de hoy hay infinitas clases en las que no se ha logrado probar la existencia o inexistencia de grafos uniformemente más confiables.

Decimos que un grafo G en $\mathcal{C}_{n,m}$ es un 0-elemento si para cara i en $\{0, 1, \ldots, m\}$ y cada H en $\mathcal{C}_{n,m}$ se cumple que $N_i(G) \geq N_i(H)$. A partir de esta definición y observando la definición del polinomio de confiabilidad, podemos notar que si un grafo G es un 0-elemento entonces G también es un grafo uniformemente más confiable. Boesch et al. [4] obtuvieron infinitos grafos uniformemente más confiables, y notaron que cada uno de ellos verifica la conjetura de 0-elemento, lo que motivó a formular la siguiente conjetura.

Conjetura 1 (Boesch [3])**.** *Todo grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,m}$ es un 0-elemento.*

A medida que el interés por la confiabilidad en redes avanzó, surgió la necesidad de estudiar modelos más generales y abstractos. Así aparecieron los Sistemas Binarios Estocásticos (SBE), modelos matemáticos más generales que representan sistemas compuestos por múltiples componentes donde cada uno de estos componentes tiene un estado binario, el cual puede ser operativo o fallido. Estos sistemas se definen mediante una función estructural que determina si el sistema como un todo está en estado operativo o fallido en base a la combinación de estados de sus componentes. Una configuración es una combinación de estados de los componentes de un SBE. Una configuración es operativa cuando el sistema está en estado operativo para dicha configuración.

La confiabilidad de un sistema binario estocástico se define como la probabilidad de que el subsistema, obtenido tras remover cada uno de los componentes en estado de falla, resulte en un subsistema operativo.

Recientemente se han reconocido diversas familias de sistemas binarios estocásticos. En 2018, Cancela et al. [6] introdujeron el concepto de SBE separable. Básicamente, a cada configuración de un SBE con n componentes se le asocia un punto en el espacio Euclídeo n-dimensional, y un SBS es separable cuando existe algún hiperplano en dicho espacio que deja de un lado las configuraciones operativas y de otro lado las configuraciones fallidas. Estos SBE se caracterizan por la eficiencia de su representación matemática, aunque la evaluación de su confiabilidad aún plantea desafíos computacionales importantes [7]. En este trabajo estudiaremos SBE separables.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera. En la Sección 2 definiremos formalmente los conceptos fundamentales utilizados en este trabajo, dentro de los que encontramos la definición de sistemas binarios estocásticos homogéneos, separables y coherentes, así como la definición de q-subsistemas y otros conceptos asociados a confiabilidad uniforme. La Sección 3 incluye los resultados centrales del proyecto. En dicha sección se prueba que cualquier q-subsistema de un SBE separable es también un SBE separable, y que cada uno de los coeficientes de un hiperplano separador de un SBE coherente y separable es no negativo. Luego, se reformula la conjetura de 0-elemento en el contexto de los sistemas binarios estocásticos, y se prueba su validez dentro de las clases de SBE separables y coherentes. La Sección 4 introduce conceptos y propiedades de optimalidad local en el contexto más general de los SBE, enunciando resultados que permiten demostrar la inexistencia de q-subsistemas uniformemente más confiables. Finalmente, en la Sección 5 presentaremos nuestras conclusiones, destacando las contribuciones principales y señalando posibles líneas futuras de investigación derivadas de este estudio.

2. Conceptos básicos

La siguiente terminología es adaptada de [1].

Definición 2 (Sistema Binario Estocástico (SBE))**.** *Sea S un conjunto finito de componentes dado por $\{s_1, \ldots, s_N\}$, r un vector de probabilidades de operación independientes para cada componente de S dado por $(r_1, r_2, \ldots, r_N)$, y una función de estructura $\phi : \{0, 1\}^N \to \{0, 1\}$ que determina si el sistema está en estado operativo (1) o fallido (0) en función de los estados de sus componentes. Definimos al sistema binario estocástico (SBE) $\mathcal{S}$ como la terna (S, r, ϕ).*

Se observa que esta definición de SBE asume fallas independientes para cada componente del sistema, donde la probabilidad de falla del i-ésimo componente del sistema es $1 - r_i$.

Sea $\mathcal{S}$ un SBE dado por la terna (S, r, ϕ) donde S tiene n componentes. Una *configuración de* $\mathcal{S}$ es una instancia del sistema x perteneciente a $\{0,1\}^N$.

Definición 3 (Sistema Binario Estocástico homogéneo (SBEH))**.** *Sea $\mathcal{S}$ un SBE dado por la terna (S, r, ϕ). Decimos que $\mathcal{S}$ es un* sistema binario estocástico homogéneo *(SBEH) si la probabilidad de que cada una de sus componentes esté en estado operativo es independiente y tiene un mismo valor r perteneciente a* $[0,1]$.

Se observa que, como en un SBEH todas las componentes tienen el mismo nivel de confiabilidad, se simplifica el análisis matemático del sistema y la evaluación de su confiabilidad global. Este tipo de sistema es común en aplicaciones donde todas las componentes tienen características parecidas o son iguales.

Definición 4 (Cutset)**.** *Sea $\mathcal{S}$ un SBE dado por la terna (S, r, ϕ). Un* cutset *es una configuración x de $\mathcal{S}$ para la cual $\phi(x) = 0$.*

Definición 5 (Pathset)**.** *Sea $\mathcal{S}$ un SBE dado por la terna (S, r, ϕ). Un* pathset *es una configuración x de $\mathcal{S}$ para la cual $\phi(x) = 1$.*

Definición 6 (Orden canónico)**.** *Dadas dos configuraciones $x = (x_1, \ldots, x_N)$ y $y = (y_1, \ldots, y_N)$ pertenecientes a $\{0,1\}^N$, denotamos $x \leq y$ si y solo si $x_i \leq y_i$ para cada i en $\{1, 2, \ldots, N\}$.*

Dados dos conjuntos A y B con una relación de orden parcial, la función $f : A \to B$ es monótona si para cada par de elementos a_1 y a_2 en A se cumple que $f(a_1) \leq f(a_2)$. Como es usual, denotamos $x < y$ si $x \leq y$ y $x \neq y$.

Denotemos $\tilde{0}_N$ (respectivamente, $\tilde{1}_N$) a la configuración que consta de exactamente n bits iguales a 0 (respectivamente, iguales a 1).

Definición 7 (Sistema Binario Estocástico Monótono (SBEM))**.** *Sea $\mathcal{S}$ un SBE con exactamente N componentes dado por la terna (S, r, ϕ). Decimos que $\mathcal{S}$ es un* sistema binario estocástico monótono *(SBEM) si la función estructura $\phi : \{0,1\}^N \to \{0,1\}$ es monótona, $\phi(\tilde{0}_N) = 0$ y $\phi(\tilde{1}_N) = 1$.*

Se observa que un SBEM tiene un comportamiento predecible en el que, dada una configuración fallida del sistema, no es posible llevar dicho sistema a una configuración operativa modificando componentes de estado operativo a estado fallido.

Definición 8 (Minpath)**.** *Sea $\mathcal{S}$ un SBE dado por la terna (S, r, ϕ). Un pathset x de $\mathcal{S}$ es un* minpath *si para cada configuración y de $\mathcal{S}$ tal que $y < x$ se cumple que $\phi(y) = 0$.*

Para cada configuración x definimos $x|_{x_i=0}$ (respectivamente, $x|_{x_i=1}$) como la configuración que se obtiene a partir de x tras reemplazar su coordenada i-ésima por 0 (respectivamente, 1).

Definición 9 (Componente irrelevante)**.** *Sea $\mathcal{S}$ un SBE con exactamente N componentes dado por la terna (S, r, ϕ) cuyo conjunto de componentes S está dado por $\{s_1, \ldots, s_N\}$. Sea i en $\{1, \ldots, N\}$. La componente s_i de $\mathcal{S}$ es* irrelevante *si para cualquier configuración x perteneciente a $\{0,1\}^N$ se cumple que $\phi(x|_{x_i=0}) = \phi(x|_{x_i=1})$.*

Una componente irrelevante de un SBE no afecta el estado del sistema. Dichas componentes pueden ser ignoradas en el análisis de confiabilidad de un sistema sin afectar sus propiedades globales.

Definición 10 (Sistema Binario Estocástico coherente (SBEC))**.** *Un sistema binario estocástico coherente (SBEC) es un SBEM en el cual ninguna de sus componentes es irrelevante.*

Definición 11 (Sistema Binario Estocástico Separable (SBES))**.** *Sea $\mathcal{S}$ un SBE con exactamente N componentes dado por la terna (S, r, ϕ). Decimos que $\mathcal{S}$ es un* sistema binario estocástico separable *(SBES) si existen números reales $n_1, \ldots, n_N$ y α_0 tales que la función de estructura ϕ cumple que:*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \sum_{i=1}^{N} n_i x_i \geq \alpha_0, \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

En tal caso, decimos que $\sum_{i=1}^{N} n_i x_i = \alpha_0$ es un hiperplano separador *de $\mathcal{S}$.*

Definición 12 (Cantidad de pathsets)**.** *Sea $\mathcal{S}$ un SBE dado por la terna (S,r,ϕ). Denotamos mediante $N_i(\mathcal{S})$ a la cantidad de pathsets en $\mathcal{S}$ con exactamente i componentes operativos:*

$$N_i(\mathcal{S}) = |\{x : x \in \{0,1\}^N, \sum_{j=1}^{N} x_j = i \text{ y } \phi(x) = 1\}|$$

Definición 13 (Polinomio de Confiabilidad ($R_{\mathcal{S}}(r)$))**.** *Sea $\mathcal{S}$ un SBEH con exactamente N componentes dado por la terna (S,r,ϕ). Su polinomio de confiabilidad, denotado como $R_{\mathcal{S}}(r)$, se define de la siguiente forma:*

$$R_{\mathcal{S}}(r) = \sum_{i=0}^{N} N_i(\mathcal{S}) r^i (1-r)^{N-i}.$$

Sea S un conjunto de tamaño N dado por $\{s_1,\dots,s_N\}$, q perteneciente a $\{1,\dots,N\}$, y A un subconjunto de S de tamaño q dado por $\{s_{A_1},\dots,s_{A_q}\}$, donde $1 \leq A_1 < \dots < A_q \leq N$. Dada una configuración $x = (x_1,\dots,x_q)$ perteneciente a $\{0,1\}^q$, denotamos $x_S = (x_{S_1},\dots,x_{S_N})$ a la única configuración de $\{0,1\}^N$ tal que para todo i perteneciente al conjunto $\{1,\dots,q\}$ se cumple que $x_{S_{A_i}} = x_{A_i}$ y $x_{S_j} = 0$ en las componentes restantes.

Definición 14 (q-subsistema)**.** *Sea $\mathcal{S}$ un SBE con exactamente N componentes dado por la terna (S,r,ϕ), y q perteneciente a $\{1,\dots,N\}$. El SBE $\mathcal{A}$ dado por la terna (A,r,ϕ_A) es un q-subsistema de $\mathcal{S}$ si cumple que:*

(I) $A \subseteq S$ y $|A| = q$.

(II) $\phi_A : \{0,1\}^q \to \{0,1\}$ cumple que $\phi_A(x) = \phi(x_S)$.

Definición 15 (q-Subsistema uniformemente más confiable)**.** *Sea $\mathcal{S}$ un SBEH con exactamente N componentes dado por la terna (S,r,ϕ), y q perteneciente a $\{1,\dots,N\}$. El q-subsistema $\mathcal{A}$ de $\mathcal{S}$ dado por la terna (A,r_A,ϕ_A) es un q-subsistema uniformemente más confiable de $\mathcal{S}$ si satisface que para todo r en $[0,1]$ y todo q-subsistema $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}$ se cumple que $R_{\mathcal{A}}(r) \geq R_{\mathcal{B}}(r)$.*

Definición 16 (0-elemento)**.** *Sea $\mathcal{S}$ un SBE dado por la terna (S,r,ϕ) y $\mathcal{A}$ un q-subsistema de $\mathcal{S}$. Decimos que $\mathcal{A}$ es un 0-elemento de $\mathcal{S}$ si para cada i en $\{1,\dots,q\}$ y cada q-subsistema $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}$ se cumple que $N_i(\mathcal{A}) \geq N_i(\mathcal{B})$.*

Propiedad 1. *Sea $\mathcal{S}$ un SBEH dado por la terna (S,r,ϕ). Todo q-subsistema de $\mathcal{S}$ que sea un 0-elemento es un q-subsistema uniformemente más confiable de $\mathcal{S}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ un q-subsistema cualquiera de $\mathcal{S}$ dado por la terna (B,r,ϕ_B). Como $\mathcal{A}$ es un 0-elemento de $\mathcal{S}$ tenemos que $N_i(\mathcal{A}) \geq N_i(\mathcal{B})$ para cada i en $\{1,\dots,q\}$. Luego, para cada r en $[0,1]$, se cumple que $N_i(\mathcal{A})r^i(1-r)^{q-i} \geq N_i(\mathcal{B})r^i(1-r)^{q-i}$, y por tanto

$$R_{\mathcal{A}}(r) = \sum_{i=0}^{q} N_i(\mathcal{A}) r^i (1-r)^{q-i} \geq \sum_{i=0}^{q} N_i(\mathcal{B}) r^i (1-r)^{q-i} = R_{\mathcal{B}}(r). \qquad \square$$

3. Conjetura de 0-elemento en SBE separables

El objetivo principal de esta sección es reformular la Conjetura 1 en el contexto de los sistemas binarios estocásticos y demostrar que dicha conjetura se cumple para aquellas clases de SBE que son separables y coherentes. Para esto, veremos previamente algunas propiedades sobre SBE separables.

3.1. Herencia de la separabilidad en subsistemas

Propiedad 2. *Si $\mathcal{S}$ es un SBE separable y $\mathcal{A}$ es un q-subsistema de $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{A}$ es separable.*

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ un SBE separable cualquiera con exactamente N componentes dado por la terna (S,r,ϕ) con hiperplano separador $\sum_{i=1}^{N} n_i x_i = \alpha_0$. Sea $\mathcal{A}$ un q-subsistema cualquiera de $\mathcal{S}$ dado por (A,r,ϕ_A).

Asumimos sin pérdida de generalidad que los componentes de $\mathcal{S}$ están ordenados de modo que los q componentes de $\mathcal{A}$ son los q primeros componentes de $\mathcal{S}$. Se observa que si esto no fuera de esta forma, bastaría únicamente con renombrar los componentes de $\mathcal{S}$ para que lo sea.

Probemos que $\sum_{i=1}^{q} n_i x_i = \alpha_0$ es un hiperplano separador para el q-subsistema $\mathcal{A}$, lo que por definición de separabilidad es equivalente a probar que cada pathset (respectivamente, cutset) $(x_1, \ldots, x_q)$ de $\mathcal{A}$ cumple que $\sum_{i=1}^{q} n_i x_i \geq \alpha_0$ (respectivamente, $\sum_{i=1}^{q} n_i x_i < \alpha_0$).

Realizaremos la prueba del enunciado para pathsets; el enunciado para cutsets puede probarse de forma análoga.

Sea $x = (x_1, ..., x_q)$ un pathset cualquiera de $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es un q-subsistema de $\mathcal{S}$, por definición de q-subsistema sabemos que $\phi_A(x) = \phi(x_S)$, y como $\phi_A(x) = 1$ tenemos que $\phi(x_S) = 1$. Se observa que, como los componentes de $\mathcal{A}$ son los primeros q componentes de $\mathcal{S}$, por cómo fue definido x_S para la definición de q-subsistema, se tiene que $x_S = (x_1, \ldots, x_q, 0, \ldots, 0)$.

Como el SBEH $\mathcal{S}$ es separable con hiperplano separador $\sum_{i=1}^{N} n_i x_i = \alpha_0$ y $\phi(x_s) = 1$, se cumple la siguiente desigualdad.

$$\sum_{i=1}^{N} n_i x_{S_i} \geq \alpha_0. \tag{1}$$

Ahora, usando la observación de que $x_S = (x_1, \ldots, x_q, 0, \ldots, 0)$, notamos que $\sum_{i=1}^{N} n_i x_{S_i} = \sum_{i=1}^{q} n_i x_i + \sum_{i=q+1}^{N} n_i 0$, por lo que se cumple la siguiente igualdad.

$$\sum_{i=1}^{N} n_i x_{S_i} = \sum_{i=1}^{q} n_i x_i. \tag{2}$$

Entonces, por ecuaciones (1) y (2) se concluye que para todo pathset x de $\mathcal{A}$, $\sum_{i=1}^{q} n_i x_i \geq \alpha_0$.

Luego, el SBEH $\mathcal{A}$ es separable y $\sum_{i=1}^{q} n_i x_i = \alpha_0$ es un hiperplano separador de $\mathcal{A}$. $\square$

3.2. Hiperplano separador con coeficientes no negativos

En esta sección probaremos que todos los coeficientes de un hiperplano separador de un SBEH separable y coherente deben ser positivos.

Lema 17. *Sea $\mathcal{S}$ un SBE. Para cada pathset x de $\mathcal{S}$ existe un minpath y de $\mathcal{S}$ tal que $y \leq x$.*

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ un SBE con exactamente N componentes dado por la terna (S, r, φ). Sea x un pathset arbitrario de $\mathcal{S}$. Definimos el conjunto P_x incluido en $\{0,1\}^N$ como el conjunto de todas las configuraciones z tales que $z \leq x$ y además $\varphi(z) = 1$, es decir:

$$P_x = \{z \in \{0,1\}^N : z \leq x \text{ y } \varphi(z) = 1\}.$$

Observamos que $x \in P_x$, pues $x \leq x$ y $\varphi(x) = 1$. Por lo tanto, el conjunto P_x es no vacío. Además, como $\{0,1\}^N$ es finito y $P_x \subseteq \{0,1\}^N$, P_x también es un conjunto finito.

Como $\leq$ es una relación de orden parcial, y P_x es un conjunto finito no vacío parcialmente ordenado, por el teorema de existencia de elementos minimales en conjuntos finitos con orden parcial [8], existe un elemento minimal y en P_x. Por construcción, y es una configuración tal que $\varphi(y) = 1$ y $y \leq x$. Además, por minimalidad de y en P_x, se cumple que para toda configuración $z < y$ se tiene $\varphi(z) = 0$, ya que en caso contrario $z \in P_x$ y contradice la minimalidad de y. Por tanto, y es un pathset tal que ninguna configuración menor a y es operativa, lo que implica, por Definición 8, que y es un *minpath.*

Así, queda demostrado que para todo pathset x de $\mathcal{S}$, existe un minpath y tal que $y \leq x$. $\square$

Lema 18. *Sea $\mathcal{S}$ un SBE separable y coherente con exactamente N componentes dado por la terna (S, r, ϕ). Para cada i en $\{1, \ldots, N\}$ existe algún minpath $(y_1, \ldots, y_N)$ de $\mathcal{S}$ tal que $y_i = 1$.*

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ un SBE separable y coherente con exactamente N componentes dado por la terna (S, r, ϕ). Supongamos por absurdo que existe i en $\{1, \ldots, N\}$ tal que todo minpath $(y_1, \ldots, y_N)$ cumple que $y_i = 0$. Probaremos en estas condiciones que la componente i-ésima sería irrelevante en contradicción con la hipótesis del enunciado.

En efecto, sea $x = (x_1, \ldots, x_N)$ un pathset cualquiera de $\mathcal{S}$. Es claro que $x \leq x|_{x_i=1}$. Como $\mathcal{S}$ es monótono y $\phi(x) = 1$ se sigue que $\phi(x|_{x_i=1}) = 1$. Por el lema 17, existe un minpath $y = (y_1, \ldots, y_N)$ de $\mathcal{S}$ tal que $y \leq x$. Por nuestra suposición sabemos que $y_i = 0$. Como $y \leq x$ y $y_i = 0$, se cumple que $y \leq x|_{x_i=0}$. Nuevamente por la monotonía de $\mathcal{S}$ tenemos que $\phi(x|_{x_i=0}) = 1$. Hemos probado entonces que cada pathset x cumple que $\phi(x|_{x_i=1}) = \phi(x|_{x_i=0}) = 1$.

De forma análoga se demuestra que cada cutset x de $\mathcal{S}$ cumple que $\phi(x|_{x_i=1}) = \phi(x|_{x_i=0}) = 0$. Pero entonces tendríamos que toda configuración x de $\mathcal{S}$ cumple que $\phi(x|_{x_i=1}) = \phi(x|_{x_i=0})$ y por lo tanto la i-ésima componente de $\mathcal{S}$ es irrelevante. Esto contradice que $\mathcal{S}$ es coherente. Por lo tanto, para cada i en $\{1, \ldots, N\}$ existe algún minpath $(y_1, \ldots, \ldots, y_N)$ de $\mathcal{S}$ tal que $y_k = 1$, como queríamos demostrar. □

Propiedad 3. *Cada SBE $\mathcal{S}$ separable y coherente con exactamente N componentes con hiperplano separador $\sum_{i=1}^{N} n_i x_i = \alpha_0$ cumple que $n_i > 0$ para cada i en $\{1, \ldots, N\}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ un SBE separable y coherente con exactamente N componentes con hiperplano separador $\sum_{i=1}^{N} n_i x_i = \alpha_0$. Supongamos por absurdo que existe k en $\{1, \ldots, N\}$ tal que $n_k \leq 0$. Por el lema 18, existe un minpath $y = (y_1, \ldots, y_N)$ de $\mathcal{S}$ tal que $y_k = 1$. Sea z la configuración definida por $y|_{y_k=0}$. Como y es un minpath, tenemos que z es un cutset. Sin embargo,

$$\sum_{i=1}^{N} n_i z_i = \sum_{i=1}^{N} n_i y_i - n_k y_k \geq \alpha_0 - n_k y_k \geq \alpha_0,$$

donde en se utiliza en el penúltimo paso que y es un pathset y en el último paso que $n_k y_k = n_k \leq 0$. Pero en este caso tendríamos que z es un pathset, lo que es absurdo. Por lo tanto, para cada i en $\{1, \ldots, N\}$ se tiene que $n_i > 0$, como queríamos demostrar.

□

3.3. Existencia de 0-elemento en SBE coherentes y separables

Teorema 19. *Sea $\mathcal{S}$ un SBE separable y coherente dado por la terna (S, r, ϕ). Para todo q perteneciente a $\{1, \ldots, N\}$ existe un q-subsistema de $\mathcal{S}$ que es un 0-elemento.*

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ un SBE separable y coherente dado por la terna (S, r, ϕ) donde su conjunto de componentes S es $\{s_1, \ldots, s_N\}$, con hiperplano separador $\sum_{i=1}^{N} n_i x_i = \alpha_0$. Sea q perteneciente a $\{1, \ldots, N\}$. Construiremos un q-subsistema de $\mathcal{S}$ que sea un 0-elemento de $\mathcal{S}$.

Asumimos sin pérdida de generalidad que los coeficientes del hiperplano separador de $\mathcal{S}$ están ordenados de mayor a menor, es decir, que $n_1 \geq \ldots \geq n_N$. Se observa que si no lo estuvieran, bastaría con renombrar los componentes de $\mathcal{S}$. Como $\mathcal{S}$ un SBE separable y coherente, por la Propiedad 3 sabemos que para todo i en el conjunto $\{1, \ldots, N\}$ se cumple que $n_i > 0$.

Sea $\mathcal{A}$ el q-subsistema de $\mathcal{S}$ dado por la terna (A, r, ϕ_A) tal que su conjunto de componentes A consiste en los primeros q componentes de $\mathcal{S}$, es decir, $A = \{s_1, \ldots, s_q\}$. Como $\mathcal{S}$ es un q-subsistema de un sistema separable, por la Propiedad 2 sabemos que $\mathcal{A}$ es separable y además $\sum_{i=1}^{q} n_i x_i = \alpha_0$ es un hiperplano separador de $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{B}$ otro q-subsistema cualquiera de $\mathcal{S}$ dado por la terna (B, r, ϕ_B). El conjunto B de componentes del SBE $\mathcal{B}$ es $\{s_{b_1}, \ldots, s_{b_q}\}$, donde $1 \leq b_1 < \ldots < b_q \leq N$. Nuevamente, por ser $\mathcal{B}$ un q-subsistema de $\mathcal{S}$, $\mathcal{B}$ es separable y $\sum_{i=1}^{q} n_{b_i} x_i = \alpha_0$ es un hiperplano separador. Es suficiente probar que para cada i en $\{1, \ldots, q\}$ se cumple que $N_i(\mathcal{A}) \geq N_i(\mathcal{B})$.

Para cada i en $\{1, \ldots, q\}$, definimos al conjunto A_{N_i} (respectivamente, B_{N_i}) como el conjunto de todas las configuraciones que son pathsets de $\mathcal{A}$ (respectivamente, $\mathcal{B}$) que tienen exactamente i componentes en estado operativo. Se observa que $|A_{N_i}| = N_i(\mathcal{A})$ y $|B_{N_i}| = N_i(\mathcal{B})$. Consideremos la función identidad $Id : B_{N_i} \to A_{N_i}$, donde para cada x en B_{N_i} se tiene que $Id(x) = x$. Demostremos que Id está bien definida; para esto, tenemos que probar que la configuración asignada por Id pertenece al codominio, es decir que para cada pathset x de $\mathcal{B}$ se tiene que $Id(x)$ es un pathset de $\mathcal{A}$.

Sea $x = (x_1, \ldots, x_q)$ un pathset de $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ es separable y $\sum_{i=1}^{q} n_{b_i} x_i = \alpha_0$ es un hiperplano separador, se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{q} n_{b_i} x_i \geq \alpha_0. \tag{3}$$

Observamos que, por el orden asumido $1 \leq b_1 < \ldots < b_q \leq N$, para cada i en $\{1, \ldots, q\}$ se tiene que $b_i \geq i$ y como los coeficientes de hiperplano separador de $\mathcal{S}$ están ordenados de mayor a menor resulta que $n_i \geq n_{b_i}$. Por lo tanto, $n_i x_i \geq n_{b_i} x_i$. Por la desigualdad (3), se cumple además que:

$$\sum_{i=1}^{q} n_i x_i \geq \sum_{i=1}^{q} n_{b_i} x_i \geq \alpha_0, \tag{4}$$

y x es un pathset de $\mathcal{A}$. Por tanto, la función $Id : B_{N_i} \to A_{N_i}$ está bien definida. Como la identidad es una función inyectiva tenemos que $|A_{N_i}| \geq |B_{N_i}|$, o equivalentemente, $N_i(\mathcal{A}) \geq N_i(\mathcal{B})$, como queríamos demostrar. □

Corolario 20. *Sea $\mathcal{S}$ un SBE separable y coherente dado por la terna (S, r, ϕ). Entonces, para todo q perteneciente a $\{1, \ldots, N\}$ existe un q-subsistema uniformemente más confiable para $\mathcal{S}$.*

Demostración. Por el teorema 19, cada SBE separable y coherente tiene un q-subsistema que es un 0-elemento. Por la propiedad 1, dicho q-subsistema es uniformemente más confiable de $\mathcal{S}$. □

3.4. Conjetura de 0-elemento en SBE coherentes y separables

En esta sección se enuncia y demuestra la validez de la conjetura de 0-elemento en el contexto de sistemas binarios estocásticos coherentes y separables. Con este propósito, primero definiremos los polinomios de Bernstein, los cuales forman una base del espacio vectorial de polinomios reales.

Definición 21 (Polinomios de Bernstein [9])**.** *Sea q un entero no negativo. Los polinomios de Bernstein de grado q como las $q+1$ funciones polinomiales dadas por $b_{i,q}(x) = \binom{q}{i} x^i (1-x)^{q-i}$ para $i \in \{0, \ldots, q\}$.*

Lema 22 ([9])**.** *La familia $\{b_{i,q}(x)\}_{i=0}^{q}$ es una base del espacio vectorial de polinomios reales de grado a lo sumo q.*

Lema 23. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos SBEH con N componentes tales que $R_A(r) = R_B(r)$ para todo $r \in [0, 1]$. Entonces, para cada $i \in \{0, \ldots, N\}$ se tiene que $N_i(A) = N_i(B)$.*

Demostración. Por hipótesis, $R_A(r) - R_B(r) = \sum_{i=0}^{N} (N_i(A) - N_i(B)) r^i (1-r)^{N-i} = 0$. Por el lema 22 se deduce en particular que la colección de polinomios $\{r^i (1-r)^{N-i}\}_{i=0}^{N}$ es independiente, por lo que $N_i(A) = N_i(B)$ para cada $i \in \{0, \ldots, N\}$, como queríamos demostrar. □

Propiedad 4. *Sea $\mathcal{S}$ un SBE separable y coherente y sea $q \in \{1, \ldots, N\}$. Cada q-subsistema uniformemente más confiable en $\mathcal{S}$ es un 0-elemento de $\mathcal{S}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ un SBE coherente y separable y sea $q \in \{1, \ldots, n\}$. Por el teorema 19 sabemos que existe un q-subsistema $\mathcal{A}$ que es 0-elemento de $\mathcal{S}$. Por la propiedad 1, $\mathcal{A}$ es también un q-subsistema uniformemente más confiable de $\mathcal{S}$.

Sea $\mathcal{B}$ un q-subsistema uniformemente más confiable cualquiera de $\mathcal{S}$. Como $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ambos q-subsistemas uniformemente más confiables de $\mathcal{S}$ tenemos que $R_A(r) = R_B(r)$ para todo r en $[0, 1]$. Por el lema 23, para cada $i \in \{0, \ldots, q\}$ se cumple que $N_i(\mathcal{A}) = N_i(\mathcal{B})$. Como $\mathcal{A}$ es un 0-elemento se deduce que $\mathcal{B}$ también lo es, como queríamos demostrar. □

4. SBE localmente más confiables

Determinar si existe un subsistema de tamaño fijo q que sea uniformemente más confiable, es decir, más confiable que cualquier otro para todos los valores de probabilidad $r \in [0,1]$) es, en general, un problema complejo. Esta dificultad ha motivado a diversos autores a estudiar nociones de optimalidad local, analizando la confiabilidad del sistema únicamente en entornos extremos (r cercano a 0 o r cercano a 1) en lugar de considerar el intervalo $[0,1]$ completo. Este enfoque es ampliamente utilizado en la literatura de confiabilidad de redes, donde se caracterizan subsistemas localmente más confiables cerca de $r = 0$ o de $r = 1$ y se aprovecha esta información para inferir la inexistencia de un diseño uniformemente más confiable.

A continuación, formalizamos estas nociones de confiabilidad local para Sistemas Binarios Estocásticos (SBE) y establecemos resultados que relacionan la optimalidad local con la uniforme.

Definición 24 (q-subsistemas localmente más confiables)**.** *Sea $\mathcal{S}$ un SBEH. Decimos que $\mathcal{A}$ es un q-subsistema localmente más confiable de $\mathcal{S}$ en un entorno de 0 (respectivamente, de 1) si para cada q-subsistema $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}$ existe $\epsilon > 0$ tal que para todo r en $[0,\epsilon)$ (respectivamente, en $(1-\epsilon, 1)$) se cumple que $R_{\mathcal{A}}(r) \geq R_{\mathcal{B}}(r)$.*

Propiedad 5. *Sea $\mathcal{S}$ un SBEH con N componentes y sea q un entero en $\{0, \dots, N\}$. Para cada par de q-subsistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}$ se cumplen las siguientes afirmaciones.*

(I) *Si $N_i(\mathcal{A}) = N_i(\mathcal{B})$ para cada $i \in \{0, \dots, j-1\}$ y $N_j(\mathcal{A}) > N_j(\mathcal{B})$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $r \in (0,\delta)$ se tiene que $R_A(r) > R_B(r)$.*

(II) *Si $N_i(\mathcal{A}) = N_i(\mathcal{B})$ para cada $i \in \{k+1, \dots, N\}$ y $N_k(\mathcal{A}) > N_k(\mathcal{B})$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $r \in (1-\delta, 1)$ se tiene que $R_A(r) > R_B(r)$.*

Demostración. Demostraremos la afirmación (I); la prueba de la afirmación (II) es análoga.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos q-subsistemas del SBEH $\mathcal{S}$ en las hipótesis de (I). Entonces,

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{A}}(r) - R_{\mathcal{B}}(r) &= \sum_{i=j}^{q} \left(N_i(A) - N_i(B)\right) r^i (1-r)^{q-i} \\ &= r^j \left[(N_j(A) - N_j(B))(1-r)^{q-j} + \sum_{i=j+1}^{q} \left(N_i(A) - N_i(B)\right) r^{i-j} (1-r)^{q-i} \right]. \end{aligned}$$

Por hipótesis, $N_j(A) - N_j(B) > 0$. Entonces:

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{R_{\mathcal{A}}(r) - R_{\mathcal{B}}(r)}{r^j} = N_j(A) - N_j(B) > 0.$$

Sea ϵ un número real positivo cualquiera. Por la definición de límite, existe $\delta > 0$ tal que si $r \in (0,\delta)$ entonces $R_A(r) - R_B(r) \in \big((M-\epsilon)r^j, (M+\epsilon)r^j\big)$. Tomando $\epsilon = M/2$ se deduce que existe $\delta > 0$ tal que si $r \in (0,\delta)$ se tiene $R_A(r) > R_B(r)$, lo que prueba la Afirmación (I). □

Ahora vamos a caracterizar a los subsistemas localmente más confiables en 0 y 1. Para esto, definiremos los siguientes conjuntos.

Definición 25 (conjunto de q-subsistemas localmente más confiables en un entorno 0)**.** *Sea $\mathcal{S}$ un SBEH con exactamente N componentes y q perteneciente a $\{1, \dots, N\}$. Para todo i perteneciente a $\{0, \dots, q\}$, la secuencia de conjuntos C_q^i se define de la siguiente forma:*

1. *C_q^0 es el conjunto de todos los q-subsistemas de $\mathcal{S}$.*
2. *Para cada i en $\{1, \dots, q\}$, definimos recursivamente $C_q^i = \Big\{\mathcal{A} \in C_q^{i-1} : N_i(\mathcal{A}) = \max_{\mathcal{B} \in C_q^{i-1}} N_i(\mathcal{B})\Big\}$.*

El conjunto C_q^q contiene precisamente aquellos q-subsistemas cuyas tuplas $(N_1, \dots, N_q)$ son lexicográficamente máximas. Se observa que C_q^q es exactamente el conjunto de q-subsistemas localmente más confiables en un entorno 0. Esto surgirá como consecuencia de la Propiedad 5.

Observación 1. *Sea $\mathcal{S}$ un SBEH, un q-subsistema $\mathcal{A}$ de $\mathcal{S}$ es localmente más confiable en un entorno de 0 si y solo si pertenece a C_q^q.*

Definición 26 (Conjunto de q-subsistemas localmente más confiables en entorno 1)**.** *Sea $\mathcal{S}$ un SBEH con exactamente N componentes y q perteneciente a $\{1, \dots, N\}$, para todo i perteneciente a $\{1, \dots, q+1\}$, la secuencia de conjuntos D_q^i se define de la siguiente forma:*

1. *D_q^{q+1} es el conjunto de todos los q-subsistemas de $\mathcal{S}$.*
2. *Para cada i en $\{1, \dots, q\}$, definimos recursivamente*
   $D_q^i = \left\{\mathcal{A} \in D_q^{i+1} : N_i(\mathcal{A}) = \max_{\mathcal{B} \in D_q^{i+1}} N_i(B)\right\}.$

Análogamente, un q-subsistema $\mathcal{A}$ de $\mathcal{S}$ es localmente más confiable en un entorno de 1 si maximiza lexicográficamente la tupla $(N_q(\mathcal{A}), \dots, N_0(\mathcal{A}))$.

Observación 2. *Sea $\mathcal{S}$ un SBEH. Un q-subsistema $\mathcal{A}$ de $\mathcal{S}$ es localmente más confiable en un entorno de 1 si y solo si pertenece a D_q^1.*

Por último, observemos que si un subsistema es uniformemente más confiable, en particular debe ser también localmente más confiable tanto en un entorno de 0 como de 1. Esta observación presenta en sí misma una estrategia para demostrar la inexistencia de subsistemas uniformemente más confiables, al probar que la intersección entre el conjunto de los subsistemas localmente más confiables en 1 y el conjunto de los subsistemas localmente más confiables en 0 es vacía. Esta observación puede formalizarse en la siguiente propiedad.

Propiedad 6. *Sea $\mathcal{S}$ un SBEH con N componentes y sea $q \in \{1, \dots, N\}$. Si $C_q^q \cap D_q^1 = \varnothing$, entonces no existe ningún q-subsistema uniformemente más confiable en $\mathcal{S}$.*

5. Conclusiones

En este trabajo se abordó la extensión de conceptos clásicos de la teoría de confiabilidad en redes en el marco más general de los Sistemas Binarios Estocásticos, con especial foco en aquellos sistemas que cumplen con las propiedades de coherencia y separabilidad.

Una de las principales contribuciones de este trabajo es la herencia de la separabilidad para q-subsistemas. Esta propiedad puede resultar importante para estudiar casos particulares, puesto que, como también se demostró, los sistemas separables que además son coherentes tienen q-subsistemas que son 0-elemento y, por lo tanto, son subsistemas uniformemente más confiables.

También se adaptó la conjetura de 0-elemento originalmente planteada por Boesch para grafos al ámbito de los SBE. En este nuevo contexto, se demostró su validez para la clase de SBE coherentes y separables. Esta reformulación preserva la intuición original de la conjetura, abriendo nuevas posibilidades para su análisis en sistemas más complejos de los que pueden ser modelados con grafos.

Otra contribución importante fue la adaptación al contexto de los SBE de una propiedad observada en el estudio de grafos, que en nuestro contexto se tradujo a la existencia de q-subsistemas localmente más confiables en un entorno cercano a 0 y a 1, cosa que puede ser utilizada para demostrar la inexistencia de subsistemas uniformemente más confiables.

Este trabajo plantea varias líneas posibles de desarrollo futuro:

(i) En esta investigación asumimos la hipótesis de independencia en las fallas de los componentes del sistema. Sin embargo, para alcanzar un mayor realismo y ampliar las aplicaciones práctica de los resultados obtenidos, una posible linea de investigacion a futuro podria consistir en esutidar modelos en los que las fallas entre componentes sean dependientes o correlacionadas.

(ii) Clasificar SBE como separables y construir hiperplanos separadores. Sería de interés estudiar la posibilidad de diseñar algoritmos que, dado un conjunto de configuraciones operativas y fallidas de un SBE, permitan predecir si este es separable o no, y en caso de serlo construyan explícitamente un hiperplano separador. Aunque se conocen condiciones de existencia, diseñar algoritmos para construir hiperplanos en sistemas complejos podría facilitar la clasificación y análisis de grandes familias de SBE. Además de que, como vimos en este trabajo, es a partir de los hiperplanos separadores que podemos construir subsistemas uniformemente mas confiables que son también 0-elementos.

(iii) Aplicaciones prácticas. Explorar sistemas con intereses prácticos que puedan ser modelados a través de SBE separables, y aplicar en este contexto las propiedades presentadas en este trabajo, para la determinación de subsistemas de máxima confiabilidad y 0-elementos.

(iv) Estudiar la validez de la conjetura de 0-elemento para SBE no separables. En esta investigación se estudió la conjetura de 0-elemento y la existencia de subsistemas de máxima confiablidad en sistemas separables, por lo que sería interesante estudiar si es posible demostrar existencia o inexistencia de subsistemas de máxima confiabilidad en subfamilias de SBE no separables.

En conclusión, los resultados de este trabajo amplían el entendimiento de la confiabilidad en sistemas complejos y ayudan a sentar una base para futuras investigaciones en el área de la teoría de sistemas binarios estocásticos y diseño de redes.

Agradecimientos

Agradezco a mis tutores Pablo Romero y Héctor Cancela por haberme introducido en un campo de investigación tan interesante y por haberme guiado en el desarrollo de esta pasantía y en la elaboración del presente informe.

Referencias

[1] Michael O. Ball. Computational complexity of network reliability analysis: An overview. *IEEE Transactions on Reliability*, 35(3):230–239, 1986.

[2] Javiera Barrera, Héctor Cancela, and Eduardo Moreno. Topological optimization of reliable networks under dependent failures. *Operations Research Letters*, 43, 01 2015.

[3] Frank T. Boesch. On unreliability polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis. *J. Graph Theory*, 10(3):339–352, 1986.

[4] Frank T. Boesch, Xiaoming Li, and Charles Suffel. On the existence of uniformly optimally reliable networks. *Networks*, 21(2):181–194, 1991.

[5] Jason I. Brown, Charles J. Colbourn, Danielle Cox, Christina Graves, and Lucas Mol. Network reliability: Heading out on the highway. *Networks*, 77(1):146–160, 2021.

[6] Héctor Cancela, Graciela Ferreira, Gustavo Guerberoff, Franco Robledo, and Pablo Romero. Building reliability bounds in stochastic binary systems. In *2018 10th International Workshop on Resilient Networks Design and Modeling (RNDM)*, pages 1–7, 2018.

[7] Héctor Cancela, Gustavo Guerberoff, Franco Robledo, and Pablo Romero. Analysis and reliability of separable systems. *Operations Research Perspectives*, 8:100199, 09 2021.

[8] Bernard Kolman, Robert C. Busby, and Sharon Cutler Ross. *Discrete Mathematical Structures*. Pearson Prentice Hall, 6th edition, 2009.

[9] George G. Lorentz. *Bernstein Polynomials*. Chelsea Publishing Co., New York, 2nd edition, 1986.

[10] Wendy Myrvold, Kim H. Cheung, Lavon B. Page, and Jo Ellen Perry. Uniformly-most reliable networks do not always exist. *Networks*, 21(4):417–419, 1991.

[11] Pablo Romero and Martín D. Safe. Least corank for the nonexistence of uniformly most reliable graphs. *Procedia Computer Science*, 223:88–95, 2023.