Condiciones de cofinitud sobre módulos y anillos

Johan Sebastián Cortés Villamizar

Universidad de la República - PEDECIBA
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
Montevideo

2025

Condiciones de cofinitud sobre módulos y anillos

Johan Sebastián Cortés Villamizar

Trabajo de grado presentado como requisito para obtener el título de Magíster en Matemática

Dr. Marco Antonio Pérez Bullones
Director

Universidad de la República - PEDECIBA
Facultad de Ciencias
Montevideo

2025

Aceptado

Dr. Marco Antonio Pérez Bullones
Director

Dr. Daniel Bravo Vivallo
Jurado evaluador

Dr. Marcelo Lanzilotta
Jurado evaluador

Dr. Rafael Parra
Jurado evaluador

Montevideo, Abril de 2025

Para todas aquellas personas que apoyaron el desarrollo y ejecución de este trabajo.

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi director de tesis, Marco A. Pérez, por su guía y apoyo durante todo el proceso de desarrollo de este trabajo. Mi agradecimiento también al jurado calificador por sus observaciones y sugerencias, que han sido fundamentales para mejorar tanto la presentación como la calidad de esta tesis. Asimismo, deseo expresar mi gratitud a Valente Santiago por su ayuda en la demostración de uno de los resultados de este trabajo. Finalmente, agradezco al PEDECIBA por su apoyo económico, el cual ha sido crucial para llevar a cabo esta investigación.

Contenido

Resumen

Motivados por las propiedades de cerradura en sucesiones exactas cortas que satisfacen los módulos finitamente n-presentados y su relación con los anillos n-coherentes, estudiamos los conceptos duales, los módulos finitamente n-copresentados (siendo la generalización de los módulos finitamente inmersos, introducidos en 1968 por P. Vamos en el artículo [16]) y anillos n-cocoherentes (que a su vez son la generalización de los anillos conoetherianos, introducidos en 1969 por J. P. Jans en el artículo [12]). Exploramos las propiedades homológicas de estas clases de módulos para encontrar caracterizaciones de estos anillos. Además, basándonos en el artículo [19] de Z. Zhu, estudiamos los complementos ortogonales de los módulos finitamente n-copresentados, llamados (n, d)-proyectivos. Estudiaremos la relación entre estos módulos proyectivos relativos, los anillos n-cocoherentes y anillos n-cohereditarios, siendo estos últimos la versión dual de los anillos n-hereditarios.

Palabras Claves: Módulos finitamente n-copresentados, anillos n-cocoherentes, módulos (n, d)-proyectivos, anillos n-cohereditarios.

Abstract

Motivated by closure properties in short exact sequences satisfied by finitely n-presented modules and their relation with n-coherent rings, we study the dual concepts, namely, finitely n-copresented modules (which generalize the notion of finitely embedded modules, introduced in 1968 by P. Vamos in his article [16]) and n-cocoherent rings (which in turn generalize the concept of conoetherian rings, introduced in 1969 by J. P. Jans in his article [12]). We explore the homological properties of these module classes to find characterizations of these rings. Based on the article [19] of Z. Zhu, we study the left orthogonal complements of the class of finitely n-copresented modules, called (n, d)-projective modules. We also study the relation between these relative projective modules, n-cocoherent rings and n-cohereditary rings, where the latter is the dual version of n-hereditary rings.

Keywords: Finitely n-copresented modules, n-cocoherent rings, (n, d)-projective modules, n-cohereditary rings.

Introducción

Esta tesis tiene el fin de estudiar propiedades de cofinitud de los módulos (a saber, aquellas que tienen que ver con determinar cuándo un módulo es finitamente cogenerado, y cuándo un anillo es conoetheriano, cocoherente o alguna versión más general de estos). Tal estudio da lugar a una semblanza bastante fiel y lo suficientemente amplia del estado actual del área, alcanzado en gran parte por Zhu [19], Xue [18], Couchot [6], Hiremath [10], Driss Bennis, Habib Bouzraa and Abdul-Qawe Kaed [2], y con algunos aportes propios en la generalización o mejora de algunos resultados de las referencias previamente mencionadas.

Dentro del álgebra homológica, las condiciones de finitud de módulos y anillos, y el estudio de la categoría de módulos finitamente generados y subcategorías de esta destacan en diversas disciplinas del álgebra, como la teoría de representaciones. Por ejemplo, la subcategoría de los módulos finitamente presentados son una generalización de los módulos finitamente generados. Esta definición permite manejar módulos finitamente generados con una cantidad finita de relaciones.

Así como fue avanzando el álgebra homológica, surgió la necesidad de considerar versiones más generales de finitud en términos de resoluciones por módulos libres de rango finito de mayor longitud. Se han obtenido resultados muy útiles para describir módulos de tipo finito, anillos noetherianos, coherentes y generalizaciones de éstos. Un primer ejemplo de lo anterior es el poder caracterizar los anillos noetherianos por medio de este tipo de módulos. Un anillo R es noetheriano si y solo si todo módulo finitamente generado, es finitamente presentado. Los módulos finitamente n-presentados generalizan a estos dos tipos de módulos, y se han utilizado para caracterizar los llamados anillos n-coherentes (que a su vez generalizan los anillos noetherianos y coherentes). Un resultado probado en [5] afirma que un anillo R es n-coherente si la clase $\mathcal{FP}_n$ de R-módulos finitamente n-presentados es gruesa, o equivalentemente, si el par de cotorsión cogenerado por dicha clase es hereditario.

En este trabajo planteamos el estudio de los conceptos duales al área de condiciones de finitud, a saber, los módulos finitamente n-copresentados, módulos $\mathcal{FCP}_n$-proyectivos, anillos

n-cocoherentes y anillos n-cohereditarios. Nos interesa conocer si es posible obtener versiones duales a varios de los resultados de [5] y de otros autores, como también dar una semblanza actualizada de los que se conoce hasta el momento sobre estos conceptos duales.

El presente trabajo está escrito de la manera más autocontenida posible, con un enfoque en la teoría de módulos inyectivos. Esto con el objetivo parcial de que el documento sirva como un medio de estudio introductorio a las condiciones de cofinitud. Entonces para el primer capítulo recordaremos las propiedades que tiene la categoría de R-módulos, sus construcciones universales y propiedades que se relacionan con las sucesiones exactas. Por otro lado, como los módulos proyectivos son parte fundamental en el estudio de los módulos finitamente n-presentados, los módulos que cumplen ese papel fundamental en la noción dual son los módulos inyectivos. Por lo tanto, recordaremos su definición y propiedades, y veremos cómo por medio de estos podemos construir el funtor derivado Ext. Este es de gran importancia en el desarrollo de este trabajo, dado que hay conceptos en álgebra homológica que se definen por medio de este funtor. Por último estudiaremos las envolturas inyectivas y los módulos simples, ya que estos serán la base para estudiar la noción dual de los módulos libres, los módulos colibres, que a su vez servirán como los bloques de construcción de los módulos finitamente n-copresentados. Las referencias principales para esta teoría son los libros [1], [7], [8] y [14].

Los módulos finitamente n-presentados se definen por medio de resoluciones libres de rango finito (o equivalentemente, resoluciones por medio de módulos proyectivos finitamente generados), esto es, tomar resoluciones donde los elementos son sumas directas finitas de copias del anillo sobre el cual estamos trabajando. Para la noción dual, que abordaremos en el segundo capítulo, necesitaremos estudiar corresoluciones por módulos colibres de rango finito, los cuales son productos finitos de envolturas inyectivas de módulos simples. Usaremos la clase de módulos simples para estudiar propiedades de los módulos finitamente n-copresentados, los cuales denotaremos por $\mathcal{FCP}_n$, y los anillos n-cocoherentes.

Finalmente en el tercer capítulo, basándonos en el artículo [19] de Zhu, estudiaremos los proyectivos relativos a los módulos finitamente n-copresentados. Estos son aquellos que tienen una propiedad de anulación con respecto a $\mathcal{FCP}_n$ bajo el funtor $\operatorname{Ext}_R^{d+1}(-,-)$. A tales módulos los llamaremos módulos (n,d)-proyectivos. Veremos cómo se relacionan estos módulos con las sucesiones exactas n-copuras y los anillos n-cohereditarios. Se busca además dualizar algunos resultados que aparecen en [5] de D. Bravo y M. Pérez, y [4] de D. Bravo y C. Parra.

Capítulo 1

Módulos inyectivos

Los grupos abelianos, las álgebras asociativas y los espacios vectoriales pueden ser considerados como estructuras particulares de la teoría general de módulos. Aunque históricamente las tres estructuras mencionadas precedieron a la teoría de módulos sobre anillos, esta última las generaliza y les sirve de soporte teórico. Se puede aprender una cantidad sustancial de información sobre un anillo a partir del estudio de la clase de módulos que admite. En este capítulo daremos los preliminares necesarios de la categoría de módulos sobre un anillo, enfocándonos en los resultados que tienen que ver con el concepto de módulo inyectivo y sus propiedades

1.1. La categoría de R-módulos

Fijemos la notación a usar en este trabajo. Empezando por el conjunto de los números naturales, este va a incluir el cero, es decir, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Tomaremos R es un anillo asociativo y con unidad. Trabajaremos sobre la categoría de R-módulos a derecha, denotada por **Mod**-R, donde los objetos son los R-módulos a derecha y los morfismos son R-homomorfismos. A partir de ahora, la palabra "R-módulo" significará "R-módulo a derecha", a no ser que se especifique lo contrario.

Si N es un submódulo de M lo denotaremos por $N \subseteq M$. Al objeto cero de **Mod**-R, también llamado R-módulo nulo, lo denotaremos por 0. Los monomorfismos y epimorfismos en **Mod**-R los denotaremos por $f : A \rightarrowtail B$ y $g : C \twoheadrightarrow D$, respectivamente. Si para el R-homomorfismo $f : A \to B$ existe otro R-homomorfismo $g : B \to A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$ y $g \circ f = \mathrm{id}_A$, diremos que f es un isomorfismo. En **Mod**-R, lo anterior es equivalente a que f sea simultáneamente un monomorfismo y un epimorfismo. Además, en el caso anterior diremos que A es isomorfo a B, denotado por $A \simeq B$. Finalmente, si $f : A \to B$ está definido por $f(a) = 0$ para todo $a \in A$, diremos que f es el R-homomorfismo nulo y también lo denotaremos por 0.

Recordaremos algunos resultados básicos sobre **Mod**-R como categoría de Grothendieck, en particular repasaremos algunas construcciones universales.

Los resultados que se recopilan en esta sección serán presentados sin demostración, pero provienen de las referencias [7] y [14].

Cuando hablamos de un diagrama conmutativo nos referimos a un diagrama de R-módulos y R-homomorfismos donde la posible composición de R-homomorfismos desde un R-módulo de inicio a uno final nos da el mismo resultado. Por ejemplo, si consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "n"'] & D \end{tikzcd}$$

este es conmutativo si $g \circ f = n \circ m$.

Pasemos a recordar las construcciones universales sobre la categoría **Mod**-R.

Definición 1.1.1. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos. El **producto directo** de esta familia es el R-módulo dado por

$$\prod_{i\in I} M_i := \left\{ (m_i)_{i\in I} : m_i \in M_i \right\},$$

donde las operaciones entre los elementos de $\prod_{i\in I} M_i$ están definidas componente a componente, esto es, para $(m_i)_{i\in I}, (n_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$, tenemos

$$(m_i)_{i\in I} + (n_i)_{i\in I} := (m_i + n_i)_{i\in I},$$

y para todo $r \in R$ se cumple que

$$(m_i)_{i\in I}\, r := (m_i r)_{i\in I}.$$

Esta construcción está equipada con una familia de R-homomorfismos, que llamamos **proyecciones**,

$$\left\{ \pi_j : \textstyle\prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j \right\}_{j\in I},$$

donde $\pi_j\left((m_i)_{i\in I}\right) := m_j$.

Propiedad universal: Si existe otro R-módulo X junto con $\{f_j : X \to M_j\}_{j\in I}$ una familia de R-homomorfismos, entonces existe un único R-homomorfismo $h : X \to \prod_{i\in I} M_i$, denotado por $h := (f_i)_{i\in I}$, que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ \prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "\pi_j"'] & M_j \end{tikzcd} \qquad (\pi_j \circ h = f_j, \text{ para todo } j \in I)\,.$$

Definición 1.1.2. La **suma directa** (o **coproducto**) de la familia de R-módulos $\{M_i\}_{i\in I}$ es el R-módulo dado por

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \left\{ m \in \prod_{i\in I} M_i : \pi_j\,(m) \neq 0 \text{ para un número finito de } j \in I \right\},$$

las operaciones de suma y multiplicación por elementos de R se definen componente a componente, como en el producto directo. Este R-módulo también viene equipado con una familia de R-homomorfismos, que llamaremos **inclusiones**,

$$\left\{ \iota_j : M_j \longrightarrow \bigoplus\nolimits_{i\in I} M_i \right\}_{j\in I},$$

definida por $\iota_j\,(m_j) := m$, donde $m = (m_i)_{i\in I}$ es tal que

$$m_i = \begin{cases} m_j, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

Propiedad universal: Si se tiene otro R-módulo Y junto con $\{g_j : M_j \to Y\}_{j\in I}$ una familia de R-homomorfismos, entonces existe un único R-homomorfismo $k : \bigoplus_{i\in I} M_i \to Y$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M_j \arrow[r, "\iota_j"] \arrow[dr, "g_j"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[d, dashed, "k"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad (k \circ \iota_j = g_j, \text{ para todo } j \in I)\,.$$

Observación 1.1.3. De estas dos construcciones presentadas anteriormente, podemos observar lo siguiente:

1. Dada una familia de R-módulos $\{M_i\}_{i\in I}$, tenemos que la suma directa es un submódulo del producto directo. Si I es un conjunto finito, entonces la suma directa y el producto directo coinciden, es decir,
$$\prod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i.$$

2. Sean $M_1, M_2 \subseteq M$. Definimos la **suma** finita de R-módulos como el R-módulo

$$M_1 + M_2 = \{m_1 + m_2 \in M : m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}.$$

   Si $M_1 \cap M_2 = 0$, entonces $M_1 + M_2 = M_1 \oplus M_2$. Tal suma directa se conoce como **suma directa interna**.

3. Si la familia de R-módulos es constante, es decir, existe un $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ tal que $M_i = M$ para todo $i \in I$, usaremos la siguiente notación

$$\prod_{i\in I} M = M^I \quad \text{y} \quad \bigoplus_{i\in I} M = M^{(I)}.$$

Definición 1.1.4. Dado un R-homomorfismo $f : A \to B$, el **kernel** (o **núcleo**) de f es el submódulo de A definido por

$$\mathrm{Ker}\,(f) := \{x \in A : f\,(x) = 0\},$$

con el R-homomorfismo de inclusión

$$i : \mathrm{Ker}\,(f) \rightarrowtail A.$$

Propiedad universal: Si hay otro R-módulo K con un R-homomorfismo $k : K \to A$ tal que $f \circ k = 0$, entonces existe un único R-homomorfismo $h : K \to \mathrm{Ker}\,(f)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "k"] & & \\ \mathrm{Ker}\,(f) \arrow[r, tail, "i"'] & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad (i \circ h = k).$$

Definición 1.1.5. Si N es un submódulo de M, el R-módulo **cociente** M/N se define mediante la siguiente relación entre elementos de M:

$$x \sim x' \text{ si } x - x' \in N.$$

Se puede verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Sus elementos (clases de equivalencia) serán denotados por $x + N$. Las operaciones del R-módulo M/N están definidas como

$$(x + N) + \big(x' + N\big) := \big(x + x'\big) + N$$

y

$$(x + N)\,r := (xr) + N.$$

La función $\pi : M \to M/N$ definida por $x \mapsto x + N$ es un R-homomorfismo, denominado **proyección canónica**.

Definición 1.1.6. El **cokernel** (o **conúcleo**) de un R-homomorfismo $f : A \to B$ se define como el R-módulo cociente

$$\operatorname{Coker}(f) := B/\operatorname{Im}(f) = \{b + \operatorname{Im}(f) : b \in B\}.$$

donde la relación de equivalencia está dada por $b \sim b'$ en B si existe $a \in A$ tal que $f(a) = b - b'$. Este objeto viene junto con un R-homomorfismo de proyección

$$\begin{aligned} \pi : B &\twoheadrightarrow \operatorname{Coker}(f), \\ b &\longmapsto b + \operatorname{Im}(f). \end{aligned}$$

Propiedad universal: Si hay otro R-módulo C junto con un R-homomorfismo $c : B \to C$, tal que $c \circ f = 0$, entonces existe un único R-homomorfismo $n : \operatorname{Coker}(f) \to C$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, "c"'] & \operatorname{Coker}(f) \arrow[d, dashed, "n"] \\ & & C \end{tikzcd} \qquad (n \circ \pi = c).$$

Definición 1.1.7. Dados dos R-homomorfismos $f : M \to L$, $g : N \to L$, definimos el **pullback** (o **producto fibrado**) de f y g como el R-módulo dado por

$$M \underset{L}{\times} N := \{(a, b) \in M \times N : f(a) = g(b)\},$$

junto con dos R-homomorfismos

$$\pi_M : M \underset{L}{\times} N \longrightarrow M, \quad \pi_N : M \underset{L}{\times} N \longrightarrow N,$$

siendo las proyecciones usuales del producto directo restringidas a $M \underset{L}{\times} N$, haciendo que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} M \underset{L}{\times} N \arrow[r, "\pi_N"] \arrow[d, "\pi_M"'] & N \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "f"'] & L \end{tikzcd} \qquad (f \circ \pi_M = g \circ \pi_N).$$

Propiedad universal: Si tenemos otro R-módulo K y $m : K \to M, n : K \to N$ dos R-homomorfismos tales que $g \circ n = f \circ m$, entonces existe un único R-homomorfismo $h : K \to$

$M \underset{L}{\times} N$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "n"] \arrow[ddr, bend right, "m"'] & & \\
& M \underset{L}{\times} N \arrow[r, "\pi_N"] \arrow[d, "\pi_M"'] & N \arrow[d, "g"] \\
& M \arrow[r, "f"'] & L
\end{tikzcd}
\qquad (\pi_M \circ h = m, \; \pi_N \circ h = n) .$$

Definición 1.1.8. Dado dos R-homomorfismos $f : L \to M$, $g : L \to N$, definimos el **pushout** (o **suma amalgamada**) de f y g como el R-módulo dado por

$$M \coprod_L N := (M \oplus N) / \{(f(l), -g(l)) : l \in L\} ,$$

junto con dos R-homomorfismos

$$u_1 : M \longrightarrow M \textstyle\coprod_L N, \quad u_2 : N \longrightarrow M \textstyle\coprod_L N.$$

Denotemos por $P = \{(f(l), -g(l)) : l \in L\}$. Así, los R-homomorfismos está definidos como $u_1(m) = (m, 0) + P$ y $u_2(n) = (0, n) + P$, donde $(m, n) + P$ denota la clase de $(m, n) \in M \oplus N$ en $M \coprod_L N$. Note que u_1 y u_2 hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[d, "u_2"] \\
M \arrow[r, "u_1"'] & M \coprod_L N
\end{tikzcd}
\qquad (u_1 \circ f = u_2 \circ g) .$$

Propiedad universal: Si tenemos otro R-módulo K y dos R-homomorfismos $a : M \to K$, $b : N \to K$ tales que $b \circ g = a \circ f$, entonces existe un único R-homomorfismo $h : M \coprod_L N \to K$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[d, "u_2"] \arrow[ddr, bend left, "b"] & \\
M \arrow[r, "u_1"'] \arrow[drr, bend right, "a"'] & M \coprod_L N \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & K
\end{tikzcd}
\qquad (h \circ u_1 = a \text{ y } h \circ u_2 = b) .$$

Observación 1.1.9. Por medio de la propiedad universal de pullback y pushout podemos deducir lo siguiente:

1. Bajo la notación de la definición de pullback, si f es un monomorfismo, entonces el R-homomorfismo paralelo π_N también es un monomorfismo.

2. Bajo la notación de la definición de pushout, si g es un epimorfismo, entonces el R-homomorfismo paralelo u_1 también es un epimorfismo.

Veremos ahora dos construcciones universales más generales que las presentadas anteriormente. Estos son el *límite inverso*, una construcción que generaliza los productos, pullbacks, kerneles e intersecciones, y el *límite directo* como concepto dual, por lo cual esta generaliza los coproductos, pushouts, cokerneles y uniones.

Definición 1.1.10. Un **conjunto parcialmente ordenado** es un conjunto I con una relación "$\leq$" tal que, para todo $i, j, k \in I$ se cumple que

1. $i \leq i$.
2. $i \leq k$ y $k \leq j$, entonces $i \leq j$.
3. $i \leq k$ y $k \leq i$ implica que $i = k$.

Definición 1.1.11. Un conjunto parcialmente ordenado I es un **reticulado** si para cada par de elementos $i, j \in I$ tienen un ínfimo (o meet) y un supremo (o join), denotados por $i \wedge j$ y $i \vee j$ respectivamente.

Un látice I se dice que es **modular** si, para todo $i, j, k \in I$ tal que $i \geq j$, implica $i \wedge (j \vee k) = j \vee (i \wedge k)$.

Proposición 1.1.12. Si M es un R-módulo, el conjunto de todos los submódulos de M es un látice modular con respecto a la inclusión. Para $H, K \subseteq M$ el ínfimo es la intersección $H \wedge K = H \cap K$ y el supremo es la suma $H \vee K = H + K$. En particular, si tomamos $N \subseteq M$, por ser un látice modular tenemos que $K \subseteq H$ implica $H \cap (K + N) = K + (H \cap N)$.

Demostración. Ver la Proposición 2.5 de [1]. □

Definición 1.1.13. Dado un conjunto parcialmente ordenado $(I, \leq)$, un **sistema inverso** de R-módulos es un par ordenado $\left\{M_i, \psi_i^j\right\}$, donde $(M_i)_{i \in I}$ es una familia de R-módulos y $\left(\psi_i^j : M_j \to M_i\right)_{j \geq i}$ es una familia de R-homomorfismos tales que:

1. $\psi_i^i = \mathrm{id}_{M_i}$ para todo $i \in I$.
2. Siempre que $k \geq j \geq i$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M_k \arrow[rr, "\psi_i^k"] \arrow[dr, "\psi_j^k"'] & & M_i \\ & M_j \arrow[ur, "\psi_i^j"'] & \end{tikzcd} \qquad \left(\psi_i^k = \psi_i^j \circ \psi_j^k\right).$$

Definición 1.1.14. Sea $(I, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $\left\{M_i, \psi_i^j\right\}$ un sistema inverso de R-módulos. El **límite inverso** (también llamado **límite proyectivo**) de esta familia es un R-módulo $\varprojlim_I M_i$ junto con una familia de R-homomorfismos $\left\{\alpha_i : \varprojlim_I M_i \to M_i\right\}_{i\in I}$ llamados **proyecciones** tales que:

1. $\psi_i^j \circ \alpha_j = \alpha_i$ siempre que $i \leq j$.

2. Dado otro R-módulo X y R-homomorfismos $f_i : X \to M_i$ tales que $\psi_i^j \circ f_j = f_i$ siempre que $i \leq j$, entonces existe un único R-homomorfismo $\theta : X \to \varprojlim_I M_i$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim_I M_i \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_j"'] & & X \arrow[ll, dashed, "\theta"'] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, bend left, "f_j"] \\
& M_i & \\
& M_j \arrow[u, "\psi_i^j"] &
\end{tikzcd} \qquad (\alpha_i \circ \theta = f_i).$$

Definición 1.1.15. Dado un conjunto parcialmente ordenado $(I, \leq)$, un **sistema directo** de R-módulos es un par ordenado $\left\{M_i, \varphi_j^i\right\}$, donde $(M_i)_{i\in I}$ es una familia de R-módulos y $\left(\varphi_j^i : M_i \to M_j\right)_{i\leq j}$ es una familia de R-homomorfismos tales que:

1. $\varphi_i^i = \mathrm{id}_{M_i}$ para todo $i \in I$.

2. Siempre que $i \leq j \leq k$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[rr, "\varphi_k^i"] \arrow[dr, "\varphi_j^i"'] & & M_k \\
& M_j \arrow[ur, "\varphi_k^j"'] &
\end{tikzcd} \qquad \left(\varphi_k^i = \varphi_j^i \circ \varphi_k^j\right).$$

Definición 1.1.16. Sea $(I, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $\left\{M_i, \varphi_i^j\right\}$ un sistema directo de R-módulos. El **límite directo** (también llamado **límite inductivo**) de esta familia es un R-módulo $\varinjlim_I M_i$ junto con una familia R-homomorfismos $\left\{\alpha_i : M_i \to \varinjlim_I M\right\}_{i\in I}$ llamados **inclusiones** tales que:

1. $\alpha_j \circ \varphi_j^i = \alpha_i$ siempre que $i \leq j$.

2. Dado otro R-módulo X y R-homomorfismos $f_i : M_i \to X$ tales que $f_j \circ \varphi_j^i = f_i$ siempre que $i \leq j$, entonces existe un único R-homomorfismo $\theta : \varinjlim_{I} M_i \to X$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \varinjlim_{I} M_i \arrow[rr, dashed, "\theta"] & & X \\ & M_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_j^i"'] & \\ & M_j \arrow[uul, bend left, "\alpha_j"] \arrow[uur, bend right, "f_j"'] & \end{tikzcd} \qquad (\theta \circ \alpha_i = f_i)\,.$$

Observación 1.1.17. En la definición de límite inverso y límite directo, podemos observar que estas construcciones son únicas. No detallaremos cómo se construyen estos R-módulos, pero los detalles pueden ser encontrados en las demostraciones de los Teoremas 1.5.3 y 1.5.10 de [7].

Ejemplo 1.1.18. Las construcciones universales son casos específicos del límite inverso y límite directo, veamos algunos ejemplos de estas construcciones.

1. Si I es el conjunto parcialmente ordenado $\{1, 2, 3\}$ con $1 \geq 3$ y $2 \geq 3$, entonces el sistema inverso es un diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

y el límite inverso es el pullback entre f y g. Si además tenemos que $A = 0$, entonces el $\operatorname{Ker}(f) = B \underset{C}{\times} 0$.

2. Si I es un conjunto discreto de índices, es decir, $I \subseteq \mathbb{N}$, entonces el sistema inverso $\{M_i : i \in I\}$ tiene al producto directo $\prod_{i \in I} M_i$ como su límite inverso.

3. Tome $I = \{1, 2, 3\}$ conjunto parcialmente ordenado con $1 \leq 2$ y $1 \leq 3$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

es un sistema directo, donde su límite directo es el pushout entre f y g. De igual manera, si $C = 0$, entonces el $\operatorname{Coker}(f) = 0 \coprod_A B$.

4. Si I es un conjunto discreto de índices, entonces el sistema directo $\{M_i : i \in I\}$ tiene a la suma directa $\bigoplus_{i\in I} M_i$ como su límite directo.

5. Si tenemos la familia constante, es decir, la familia $\{M_i\}_{i\in I}$ cumple que $M_i = M$ para todo $i \in I$, se cumple que $\varprojlim_I M = M$ y $\varinjlim_I M = M$.

6. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de un R-módulo M que esté ordenada por contención reversa, es decir, $i \leq j$ implica $M_j \subseteq M_i$. Entonces $\left\{M_i, \psi_i^j\right\}$, donde $\psi_i^j : M_j \to M_i$ es la inclusión, forma un sistema inverso y $\varprojlim_I M_i = \bigcap_{i\in I} M_i$.

7. Sea $(I, \leq)$ un **conjunto dirigido**, esto es, "$\leq$" es un orden parcial tal que, para todo $i, j \in I$ existe un $k \in I$ con $i, j \leq k$. Sea $(I, \leq)$ un conjunto dirigido, $M \in$ **Mod**-R y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de M tal que, para cada $i, j \in I$, existe un $k \in I$ con $M_i + M_j \subseteq M_k$. Si $i \leq j$ entonces $M_i \subseteq M_j$ y $\varphi_j^i : M_i \to M_j$ es la inclusión. Entonces $\left\{M_i, \varphi_j^i\right\}$ es un sistema directo y $\varinjlim_I M_i = \bigcup_{i\in I} M_i$.

De ahora en adelante, lo conjuntos de índices considerados en este tipo de construcciones serán conjuntos dirigidos.

Después de haber revisado las principales construcciones universales consideradas en este trabajo, pasaremos a resaltar algunas de sus propiedades funtoriales. Tales resultados se aceptarán sin demostración, ya que no son el foco de este trabajo y además forman parte de muchos cursos estándar de álgebra homológica.

Proposición 1.1.19. Si $\left\{M_i, \psi_i^j\right\}$ es un sistema inverso de R-módulos, entonces existe un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_R\left(N, \varprojlim_I M_i\right) \cong \varprojlim_I \mathrm{Hom}_R\left(N, M_i\right)$$

para todo $N \in$ **Mod**-R.

Demostración. Ver la Proposición 5.21 de [14]. □

Proposición 1.1.20. Si $\left\{M_i, \varphi_j^i\right\}$ es un sistema directo de R-módulos, entonces existe un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_R\left(\varinjlim_I M_i, A\right) \cong \varprojlim_I \mathrm{Hom}_R\left(M_i, A\right)$$

para todo $A \in$ **Mod**-R.

Demostración. Ver la Proposición 5.26 de [14]. □

Como vimos en (2) y (4) del Ejemplo 1.1.18, el producto y la suma directa son casos particulares de límites. Entonces, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.1.21. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos, entonces para todo $N \in$ **Mod**-R existen isomorfismos naturales

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_R\left(N, \prod_{i\in I} M_i\right) &\cong \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(N, M_i), \\ \operatorname{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right) &\cong \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(M_i, N). \end{aligned}$$

Demostración. Ver el Teorema 2.30 y 2.31 de [14]. □

Recordemos que un R-módulo M es **finitamente generado** si tenemos una familia finita de elementos $\{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq M$ tal que para todo $m \in M$ existen $r_i \in R$ con $i = 1, \ldots, n$ tales que $m = \sum_{i=1}^n m_i r_i$. Esto es equivalente a decir que existe un epimorfismo $R^{(I)} \twoheadrightarrow M$, donde I es un conjunto finito.

Proposición 1.1.22. Sea $M \in$ **Mod**-R y considere el sistema directo $\left\{M_i, \varphi_j^i\right\}$ como en (7) del Ejemplo 1.1.18. Entonces

$$\varinjlim_I M_i = \bigcup_{i\in I} M_i \text{ y } \varinjlim_I M/M_i = M/\bigcup_{i\in I} M_i.$$

Además, si $\{M_i\}_{i\in I}$ son todos los submódulos finitamente generados de M, se tiene que $\bigcup_{i\in I} M_i = M$.

Demostración. Ver el Corolario 5.38 de [14] y el Ejemplo 1.5.5 de [7]. □

1.2. Sucesiones exactas

Cuando hablamos de propiedades homológicas de una clase de R-módulos, normalmente nos referimos a propiedades de cerradura y de preservación que ocurren a nivel de sucesiones exactas. Estas sucesiones son el concepto base para definir diferentes teorías de homología y cohomología, como por ejemplo el funtor derivado Ext que definiremos más adelante.

En esta sección demostraremos algunos resultados que aparecen en [14] (Proposición 5.33 y 6.9; Teorema 2.38, 2.40 y 6.10).

Definición 1.2.1. Una **sucesión** (o **complejo**) de R-módulos, es un arreglo de la forma

$$C_\bullet : \cdots \longrightarrow C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

donde para todo $i \in \mathbb{Z}$ tenemos que $C_i \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ y $d_i : C_i \to C_{i-1}$ son R-homomorfismos tales que $d_i \circ d_{i+1} = 0$, es decir, $\mathrm{Im}\,(d_{i+1}) \subseteq \mathrm{Ker}\,(d_i)$.

El complejo $C_\bullet$ es **exacto** en C_i si $\mathrm{Im}\,(d_{i+1}) = \mathrm{Ker}\,(d_i)$. Y $C_\bullet$ es un **complejo exacto**, si es exacto en cada C_i.

Diremos que una sucesión **exacta corta** es un complejo exacto de la forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Observación 1.2.2. Un complejo de R-módulos

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

es una sucesión exacta corta si y solamente si f es un monomorfismo, g es un epimorfismo, y $\mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f)$. Además tenemos que $A \simeq \mathrm{Ker}\,(g)$ y $C \simeq \mathrm{Coker}\,(f)$. Si en la sucesión se cumple que $B \simeq A \oplus C$, diremos que la sucesión se **escinde**.

Una sucesión exacta corta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, bend left, dashed, "f'"] \arrow[r, bend left, "g"] & C \arrow[l, bend left, dashed, "g'"] \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

se escinde si y solo si existe $f' : B \to A$ tal que $f' \circ f = \mathrm{id}_A$, y si y solo si existe $g' : C \to B$ tal que $g \circ g' = \mathrm{id}_C$.

Proposición 1.2.3. Sean $\left\{A_i, \alpha_j^i\right\}$, $\left\{B_i, \beta_j^i\right\}$ y $\left\{C_i, \gamma_j^i\right\}$ sistemas directos de R-módulos, indexados por el mismo conjunto dirigido. Si para todo $i \in I$ tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{r_i} B_i \xrightarrow{s_i} C_i \longrightarrow 0,$$

entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \varinjlim_I A_i \xrightarrow{r} \varinjlim_I B_i \xrightarrow{s} \varinjlim_I C_i \longrightarrow 0,$$

donde los R-homomorfismos r y s son obtenidos por medio de la propiedad universal del límite directo.

Demostración. Ver la Proposición 5.33 [14]. $\square$

Vimos en las Proposiciones 1.1.19, 1.1.20 y en el Corolario 1.1.21 que el funtor Hom_R tiene algunas propiedades de conmutatividad con respecto a las construcciones universales. Dado que ya presentamos la sucesiones exactas cortas, es natural preguntarse qué propiedades tiene este funtor con respecto a estas construcciones. Para esto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.2.4. Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en **Mod**-R. Si $X \in$ **Mod**-R, entonces existen dos sucesiones exactas en **Mod**-R

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X, A) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_R(X, B) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_R(X, C)$$

donde i_* está definido por $i_*(h) = i \circ h$, p_* se define de forma análoga. Y

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}_R(B, X) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_R(A, X)$$

donde i^* está definido por $i^*(h) = h \circ i$, p^* se define de forma análoga.

En otras palabras, el funtor covariante $\mathrm{Hom}_R(X, -)$ es exacto a izquierda, y el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_R(-, X)$ es exacto a izquierda.

Demostración. Ver el Teorema 2.38 y 2.40 de [14]. $\square$

El pullback y pushout tienen la propiedad de preservar sucesiones exactas cortas en el sentido de la siguiente observación.

Observación 1.2.5. Supongamos que tenemos la siguiente sucesión exacta corta de R-módulos

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

1. Si tenemos un epimorfismo $h : K \twoheadrightarrow C$ en **Mod**-R y calculamos el pullback entre g y h, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathrm{Ker}(\pi_B) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(h) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\pi_K) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & B \times_C K \arrow[r, "\pi_K"] \arrow[d, "\pi_B"'] & K \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

2. Si tenemos un monomorfismo $h : A \rightarrowtail K$ en **Mod**-R y calculamos el pushout entre h y f, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u_1"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "u_2"'] \arrow[d] & K \coprod_A B \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}\,(u_2) \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{Coker}\,(h) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}\,(u_1) \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

(1) y (2) son consecuencia de la propiedad universal del pullback y del pushout, respectivamente.

Los complejos de cadena forman a su vez una categoría, conectada con la categoría de R-módulos vía funtores de homología.

Definición 1.2.6. La categoría de **complejos de cadenas de R-módulos**, denotada por $\mathcal{C}_\bullet\,(\mathbf{Mod}\text{-}R)$, tiene como objetos los complejos de R-módulos

$$C_\bullet : \cdots \xrightarrow{d_{i+1}} C_{i+1} \xrightarrow{d_i} C_n \xrightarrow{d_{i-1}} C_{i-1} \xrightarrow{d_{i-2}} \cdots$$

y un morfismo de complejos $f_\bullet : C_\bullet \to C'_\bullet$ es una familia de R-homomorfismos $f_\bullet = \{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_\bullet : \cdots \arrow[r, "d_{i+1}"] & C_{i+1} \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & C_i \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d, "f_i"] & C_{i-1} \arrow[r, "d_{i-2}"] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \cdots \\
C'_\bullet : \cdots \arrow[r, "d'_{i+1}"'] & C'_{i+1} \arrow[r, "d'_i"'] & C'_i \arrow[r, "d'_{i-1}"'] & C'_{i-1} \arrow[r, "d'_{i-2}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Es decir, $f_i \circ d_i = d'_i \circ f_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Por otro lado tenemos los **complejos de cocadenas de R-módulos**, denotada por $\mathcal{C}^\bullet\,(\mathbf{Mod}\text{-}R)$, donde los objetos son complejos de R-módulos indexados de forma ascendente

$$C^\bullet : \cdots \xrightarrow{d_{i-2}} C_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \cdots$$

y un morfismo de cocadenas $f^\bullet : C^\bullet \to C^{\bullet\prime}$ es una familia de R-homomorfismos $f^\bullet = \{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet : \cdots \arrow[r, "d_{i-2}"] & C_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d, "f_{i-1}"] & C_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"] & C_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & \cdots \\
C^{\bullet\prime} : \cdots \arrow[r, "d'_{i-2}"'] & C'_{i-1} \arrow[r, "d'_{i-1}"'] & C'_i \arrow[r, "d'_i"'] & C'_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Es decir, $f_i \circ d_{i-1} = d'_{i-1} \circ f_{i-1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.2.7. Dos morfismos de complejos $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \to C'_\bullet$ son **homotópicos**, denotado por $f \sim g$, si existe una colección de R-homomorfismos, tales que $s_\bullet = (s_i) : C_\bullet \to C'_\bullet$, con $s_i : C_i \to C_{i+1}$

$$f_i - g_i = d'_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i,\ \forall i \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, shift right, "f_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i+1}"] & C_n \arrow[r, "d_i"] \arrow[dl, "s_i"'] \arrow[d, shift right, "f_i"'] \arrow[d, shift left, "g_i"] & C_{i-1} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{i-1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{i-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"'] & C'_i \arrow[r, "d'_i"'] & C'_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Definición 1.2.8. Dado $n \in \mathbb{Z}$, denotamos por $H_n : \mathcal{C}_\bullet(\mathbf{Mod}\text{-}R) \to \mathbf{Mod}\text{-}R$ al n-ésimo **funtor de homología** y está definido por:

1. A nivel de objetos, si $C_\bullet \in \mathcal{C}_\bullet(\mathbf{Mod}\text{-}R)$, entonces $H_n(C_\bullet) := \operatorname{Ker}(d_n) / \operatorname{Im}(d_{n+1})$.

2. Si $f_\bullet : C_\bullet \to C'_\bullet$ es un morfismo de complejos, entonces

$$H_n(f_\bullet) : H_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(C'_\bullet),$$

viene dado por $c_n + \operatorname{Im}(d_{n+1}) \mapsto f_n(c_n) + \operatorname{Im}\left(d'_{n+1}\right)$.

$H_n(C_\bullet)$ es llamado el n**-ésimo grupo de homología** de $C_\bullet$.

Por otro lado, dado $n \in \mathbb{Z}$, se denota por $H^n : \mathcal{C}^\bullet(\mathbf{Mod}\text{-}R) \to \mathbf{Mod}\text{-}R$ al n-ésimo **funtor de cohomología** y está definido por:

1. A nivel de objetos, si $C^\bullet \in \mathcal{C}^\bullet(\mathbf{Mod}\text{-}R)$, entonces $H^n(C^\bullet) := \operatorname{Ker}(d_n) / \operatorname{Im}(d_{n-1})$.

2. Si $f^\bullet : C^\bullet \to C^{\bullet\prime}$ es un morfismo de complejos, entonces

$$H^n(f^\bullet) : H^n(C^\bullet) \longrightarrow H^n(C^{\bullet\prime}),$$

donde $c_n + \operatorname{Im}(d_{n-1}) \mapsto f_n(c_n) + \operatorname{Im}\left(d'_{n-1}\right)$.

$H^n(C^\bullet)$ es llamado el n**-ésimo grupo de cohomología** de $C^\bullet$.

Observación 1.2.9. Dado $C_\bullet \in \mathcal{C}_\bullet(\textbf{Mod-}R)$ tenemos dos sucesiones exactas fundamentales, para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im}(d_{n+1}) \longrightarrow \operatorname{Ker}(d_n) \longrightarrow H_n(C_\bullet) \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(d_n) \longrightarrow C_n \longrightarrow \operatorname{Im}(d_n) \longrightarrow 0.$$

Proposición 1.2.10. Si $C'_\bullet \overset{i_\bullet}{\rightarrowtail} C_\bullet \overset{p_\bullet}{\twoheadrightarrow} C''_\bullet$ es una sucesión exacta en $\mathcal{C}_\bullet(\textbf{Mod-}R)$(es decir, cada $C'_n \overset{i_n}{\rightarrowtail} C_n \overset{p_n}{\twoheadrightarrow} C''_n$ es una sucesión exacta en $\textbf{Mod-}R$), entonces existe una sucesión exacta en $\textbf{Mod-}R$

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(C''_\bullet) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(C'_\bullet) \xrightarrow{H_n(i_\bullet)} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{H_n(p_\bullet)} H_n(C''_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(C'_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

donde δ_n son los llamados morfismos de conexión.

Demostración. La demostración la enfocaremos solamente en la construcción del R-homomorfismo δ_n, para más detalles de la prueba ver la Proposición 6.9 y 6.10 de [14].

Considere el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "i_{n+1}"] \arrow[d, "d'_{n+1}"] & C_{n+1} \arrow[r, "p_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"] & C''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "d'_n"] & C_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "d_n"] \arrow[d, bend right] & C''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"] \arrow[l, bend left] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] & C_{n-1} \arrow[r, "p_{n-1}"] \arrow[l, bend left] & C''_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sea $c''_n \in \operatorname{Ker}(d''_n)$. Como p_n es un epimorfismo, existe $c_n \in C_n$ tal que $p_n(c_n) = c''_n$. Ahora lo mandamos a C_{n-1}, esto es $d_n(c_n) \in C_{n-1}$. Como los cuadrados son conmutativos, tenemos que $p_{n-1} \circ d_n(c_n) = d''_n \circ p_n(c_n) = 0$, es decir, $d_n(c_n) \in \operatorname{Ker}(p_{n-1}) = \operatorname{Im}(i_{n-1})$. Por lo tanto, existe un único $c'_{n-1} \in C'_{n-1}$ con $i_{n-1}\left(c'_{n-1}\right) = d_n(c_n)$, ya que i_{n-1} es un monomorfismo. Así podemos definir δ_n como $\delta_n\left(c''_n + \operatorname{Im}\left(d''_{n+1}\right)\right) = c'_{n-1} + \operatorname{Im}(d'_n)$. $\square$

El resultado anterior también se cumple tomando los grupos de cohomología.

Teorema 1.2.11. Si $C^{\bullet\prime} \overset{i^\bullet}{\rightarrowtail} C^\bullet \overset{p^\bullet}{\twoheadrightarrow} C^{\bullet\prime\prime}$ es una sucesión exacta en $\mathcal{C}^\bullet(\textbf{Mod-}R)$, entonces existe una sucesión exacta en $\textbf{Mod-}R$

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(C^{\bullet\prime\prime}) \xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n(C^{\bullet\prime}) \xrightarrow{i^\bullet_*} H^n(C^\bullet) \xrightarrow{p^\bullet_*} H^n(C^{\bullet\prime\prime}) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(C'_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

1.3. Módulos inyectivos

En esta sección recordaremos el concepto de R-módulo inyectivo, varias de sus descripciones en términos de sucesiones exactas, y propiedades relativas a construcciones universales. A partir del concepto de cohomología, usaremos los R-módulos inyectivos para construir funtores derivados del funtor Hom.

Los R-módulos inyectivos son un concepto fundamental en la tesis, ya que los módulos colibres de rango finito, que veremos más adelante y que son los bloques de construcción de los módulos finitamente n-cogenerados, son un tipo particular de R-módulo inyectivo. Por esta razón, en esta sección de preliminares se demostrarán gran parte de los resultados, concretamente, caracterizaciones y propiedades de los módulos inyectivos que aparecen en [14] (Proposición 3.28, 3.40, 3.12, 7.24, 7.21, 7.22 y 8.11; Teorema 6.16; Corolario 3.29, 6.42, 6.46 y 7.25), [7] (Teorema 3.1.2 y 3.1.7; Lema 8.2.1) y [1] (Proposición 1.2.14).

Definición 1.3.1. Dado $E \in \mathbf{Mod}\text{-}R$, diremos que E es **inyectivo** si dado un monomorfismo $f : M \rightarrowtail N$ y un R-homomorfismo $g : M \to E$, existe un R-homomorfismo $h : N \to E$ tal que $h \circ f = g$, teniendo el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

La clase de todos los R-módulos inyectivos la denotaremos por **Inj**. Al concepto dual se le conoce como R-módulo **proyectivo** y la clase de todos los R-módulos proyectivos la denotaremos por **Proj**.

El siguiente resultado es el primer paso para poder definir los módulos finitamente cogenerados, que a su vez, son la base para definir la clase $\mathcal{FCP}_n$. Este resultado es consecuencia directa del Teorema 3.1.3 de [7], conocido como el criterio de Baer. Omitiremos su demostración debido a su extensión, pues conllevaría a presentar notación y terminología adicional y otros resultados preliminares.

Teorema 1.3.2. Todo R-módulo puede ser inmerso en un R-módulo inyectivo, es decir, dado $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ existe un monomorfismo $M \rightarrowtail E$ con $E \in \mathbf{Inj}$.

Demostración. Ver el Teorema 3.1.7 de [7]. $\square$

Proposición 1.3.3. En $\mathbf{Mod}\text{-}R$ las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. Si $\{E_i\}_{i\in I}$ es una familia de R-módulos inyectivos, entonces $\prod_{i\in I} E_i$ es inyectivo.

2. Si $\{E_i\}_{i\in I}$ es una familia finita de R-módulos inyectivos, entonces $\bigoplus_{i\in I} E_i$ es inyectivo.

3. Si E es un R-módulo inyectivo, entonces los sumandos directos de E también lo son.

Demostración.

1. Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos con E_i inyectivo para todo $i \in I$. Considere así el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[ddl, dashed, "h_i"] \\
& \prod_{i\in I} E_i \arrow[d, "\pi_i"'] & \\
& E_i &
\end{tikzcd}$$

donde el R-homomorfismo h_i se obtiene por definición de R-módulo inyectivo, el cual hace conmutar el diagrama para todo $i \in I$, es decir, $h_i \circ f = \pi_i \circ g$. Ahora defina $\theta : N \to \prod_{i\in I} E_i$ por $n \mapsto (h_i(n))$. Entonces el R-homomorfismo θ cumple

$$\theta(f(a)) = (h_i(f(a))) = (\pi_i(g(a))) = g(a),$$

dado que $x = (\pi_i(x))$ para todo $x \in \prod_{i\in I} E_i$. Por lo tanto $\prod_{i\in I} E_i$ es un R-módulo inyectivo.

2. Por (1) de la Observación 1.1.3, tenemos que para I finito la suma directa coincide con el producto, entonces es un caso particular de la prueba anterior.

3. Sea $A \oplus B = E$ un R-módulo inyectivo, considere el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[ddl, dashed, bend left, "h"] \\
& A \arrow[d, bend left, "\iota_A"] & \\
& A \oplus B \arrow[u, bend left, "\pi_A"] &
\end{tikzcd}$$

donde el R-homomorfismo h lo obtenemos ya que $A \oplus B$ es inyectivo y cumple que $\iota_A \circ g = h \circ f$. Por otro lado tenemos la inclusión ι_A y la proyección π_A, estos cumplen que $\pi_A \circ \iota_A = \mathrm{id}_A$. Entonces se cumple que

$$\begin{aligned} h \circ f &= \iota_A \circ g, \\ \pi_A \circ h \circ f &= \pi_A \circ \iota_A \circ g, \\ \pi_A \circ h \circ f &= g. \end{aligned}$$

Por lo tanto A es inyectivo.

$\square$

Proposición 1.3.4. Para $E \in \mathbf{Mod}\text{-}R$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. E es inyectivo.

2. Para cada monomorfismo $f : K \rightarrowtail M$,

$$f^* : \mathrm{Hom}_R(M, E) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_R(K, E),$$

es un epimorfismo.

3. Para cada sucesión exacta corta de R-módulos

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, E) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B, E) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A, E) \longrightarrow 0$$

también es exacta corta.

4. Toda sucesión exacta corta de R-módulos de la forma

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

se escinde.

Demostración. La equivalencia entre las afirmaciones (1), (2) y (3) son inmediatas a partir de la definición de módulo inyectivo, y del hecho que el funtor $\mathrm{Hom}_R(-, E)$ siempre es exacto a izquierda por el Teorema 1.2.4.

- $(1 \Rightarrow 4)$ Tenemos el siguiente diagrama conmutativo con fila exacta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_E"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, "h"] & C \arrow[r] & 0, \\ & E & & & \end{tikzcd}$$

donde el R-homomorfismo h lo tenemos dado que E es un R-módulo inyectivo. Se cumple que $h \circ f = \mathrm{id}_E$, es decir, por la Observación 1.2.2 la sucesión se escinde.

- $(4 \Rightarrow 1)$ Por el Teorema 1.3.2 tenemos una inmersión $f : E \rightarrowtail M$ con M inyectivo. Tenemos así la sucesión canónica

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} M \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(f) \longrightarrow 0.$$

Por hipótesis esta sucesión se escinde, por la Observación 1.2.2 tenemos que $E \oplus \mathrm{Coker}\,(f) \simeq M$. Luego por (3) de la Proposición 1.3.3, los inyectivos son cerrados por sumandos directos. Así, E es un R-módulo inyectivo.

$\square$

Lema 1.3.5 (de Schanuel)**.** Sean $n \in \mathbb{N}$ y considere las siguientes sucesiones exactas en **Mod**-R

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_0} E_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{f_n} E_n,$$

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_0'} E_0' \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{n-1}' \xrightarrow{f_n'} E_n',$$

donde E_i, E_i' son inyectivos para todo $i = 0, 1, \ldots, n$. Denotemos por $C = \mathrm{Coker}\,(f_n)$ y $C' = \mathrm{Coker}\,(f_n')$. Tenemos los siguientes isomorfismos:

- Si n es par, entonces

$$C \oplus E_n' \oplus E_{n-1} \oplus \cdots \oplus E_1 \oplus E_0' \simeq C' \oplus E_n \oplus E_{n-1}' \oplus \cdots \oplus E_1' \oplus E_0.$$

- Si n es impar, entonces

$$C \oplus E_n' \oplus E_{n-1} \oplus \cdots \oplus E_1' \oplus E_0 \simeq C' \oplus E_n \oplus E_{n-1}' \oplus \cdots \oplus E_1 \oplus E_0'.$$

Demostración. Razonando por inducción completa.

Para $n = 0$, tenemos las siguientes sucesiones exactas:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_0} E_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_0'} E_0' \longrightarrow C' \longrightarrow 0.$$

Calculamos el pushout entre f_0 y f_0'. Por (2) en la Observación 1.2.5 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "f_0'"'] & E_0 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_0' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
 & C' \arrow[r, equal] \arrow[d] & C' \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Como E_0 y E_0' son R-módulos inyectivos, por (4) de la Proposición 1.3.4 tenemos que la fila y columna central se escinden, así

$$E_0 \oplus C' \simeq X \simeq E_0' \oplus C.$$

Supongamos que el resultado se cumple para $n-1$, y veamos que para n también es verdadero. Considere las siguientes sucesiones exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f_0"] & E_0 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, two heads] & & E_1 \arrow[r, "f_2"] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[r, "f_n"] & E_n \\
 & & & \operatorname{Coker}(f_0) \arrow[ur, tail] & & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f_0'"] & E_0' \arrow[rr, "f_1'"] \arrow[dr, two heads] & & E_1' \arrow[r, "f_2'"] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1}' \arrow[r, "f_n'"] & E_n' \\
 & & & \operatorname{Coker}(f_0') \arrow[ur, tail] & & & &
\end{tikzcd}$$

Del caso $n = 0$, podemos concluir que $\operatorname{Coker}(f_0) \oplus E_0' \simeq \operatorname{Coker}(f_0') \oplus E_0$. Por otro lado, la suma directa finita de sucesiones exactas es exacta, entonces al hacer la suma directa de las siguientes sucesiones

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker}(f_0) \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{f_n} E_n,$$

$$0 \longrightarrow E_0' = E_0' \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0,$$

obtenemos

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker}(f_0) \oplus E_0' \longrightarrow E_1 \oplus E_0' \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{f_n} E_n.$$

De forma análoga obtenemos

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker}(f_0') \oplus E_0 \longrightarrow E_1' \oplus E_0 \longrightarrow E_2' \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{n-1}' \xrightarrow{f_n'} E_n'.$$

Usando el isomorfismo mencionado anteriormente podemos reescribir estas sucesiones obteniendo

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker}(f_0) \oplus E_0' \longrightarrow E_1 \oplus E_0' \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{f_n} E_n,$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker}(f_0) \oplus E_0' \longrightarrow E_1' \oplus E_0 \longrightarrow E_2' \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{n-1}' \xrightarrow{f_n'} E_n'.$$

Vimos en (2) de la Proposición 1.3.3 que los R-módulos inyectivos son cerrados por sumas directas finitas, teniendo así todas las hipótesis del caso $n-1$, permitiendo concluir los isomorfismos que queríamos. □

El siguiente resultado nos permite estudiar los kérneles y cokérneles de un diagrama conmutativo con filas exactas por medio de una sucesión exacta.

Lema 1.3.6 (de la serpiente)**.** Considere el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas en **Mod**-R

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma'"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\sigma"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\sigma''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f'"'] & N \arrow[r, "g'"'] & N'' &
\end{tikzcd}$$

Entonces existe una sucesión exacta de R-módulos de la forma

$$\operatorname{Ker}(\sigma') \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Ker}(\sigma) \longrightarrow \operatorname{Ker}(\sigma'') \xrightarrow{d} \operatorname{Coker}(\sigma') \longrightarrow \operatorname{Coker}(\sigma) \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{Coker}(\sigma''),$$

donde $d : \operatorname{Ker}(\sigma'') \to \operatorname{Coker}(\sigma')$ lo llamamos **R-homomorfismo de conexión**.

Además, si f es monomorfismo, entonces $\bar{f}$ también lo es; y si g' es epimorfismo, entonces $\bar{g}$ también. Estos R-homomorfismos $\bar{f}$ y $\bar{g}$ son inducidos por la propiedad universal del kernel y cokernel respectivamente.

Demostración. Ver la Proposición 1.2.13 de [7]. □

Si se nos da una sucesión exacta $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ junto con corresoluciones inyectivas de M' y M'', bajo estas hipótesis, el siguiente resultado nos muestra como construir una corresolución inyectiva para M.

Lema 1.3.7 (de la herradura)**.** Suponga que se tiene el siguiente diagrama de R-módulos con columnas y fila exactas, y que E_i' y E_i'' son inyectivos para todo $i = 0, \ldots, n$.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_0'"'] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0''"] & 0 \\
 & E_0' \arrow[d, "\alpha_1'"'] & & E_0'' \arrow[d, "\alpha_1''"] & \\
 & \vdots \arrow[d, "\alpha_n'"'] & & \vdots \arrow[d, "\alpha_n''"] & \\
 & E_n' & & E_n'' &
\end{tikzcd}$$

Entonces existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha_0} E_0' \oplus E_0'' \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} E_n' \oplus E_n''$$

que completa el diagrama anterior en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_0'"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha_0"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_0' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1'"'] & E_0' \oplus E_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & E_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1''"] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d, "\alpha_n'"'] & \vdots \arrow[d, "\alpha_n"] & \vdots \arrow[d, "\alpha_n''"] & \\
0 \arrow[r] & E_n' \arrow[r] & E_n' \oplus E_n'' \arrow[r] & E_n'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demostración. Haciendo inducción completa, para el caso base $n = 0$. Necesitamos definir un monomorfismo $\alpha_0 : M \to E_0' \oplus E_0''$, el cual será el único R-homomorfismo inducido por la propiedad universal del producto. Por lo tanto, encontraremos un par de R-homomorfismos $h : M \to E_0'$ y $k : M \to E_0''$ para poder construir α_0.

Usando que E_0' es inyectivo y f es un monomorfismo, obtenemos un R-homomorfismo h

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_0'"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & E_0' & \end{tikzcd} \qquad \left(h \circ f = \alpha_0'\right).$$

El R-homomorfismo k lo obtenemos mediante la composición $k := \alpha_0'' \circ g$. Entonces por la propiedad universal del producto tenemos un único R-homomorfismo α_0 que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, dashed, "\alpha_0"] \arrow[dr, "k"] & \\ E_0' & E_0' \oplus E_0'' \arrow[l, "\pi_{E_0'}"] \arrow[r, "\pi_{E_0''}"'] & E_0'' \end{tikzcd} \qquad \left(\pi_{E_0'} \circ \alpha_0 = h \text{ y } \pi_{E_0''} \circ \alpha_0 = k\right).$$

Por lo tanto α_0 está definido por $\alpha_0 := \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$. Este R-homomorfismo cumple

$$\pi_{E_0''} \circ \alpha_0 = \pi_{E_0''} \circ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = k = \alpha_0'' \circ g,$$

y

$$\alpha_0 \circ f = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \circ f = \begin{pmatrix} h \circ f \\ k \circ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0' \\ \alpha_0'' \circ g \circ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0' \\ 0 \end{pmatrix} = \iota_{E_0'} \circ \alpha_0'.$$

Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "\alpha_0'"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha_0"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, tail, "\alpha_0''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E_0' \arrow[r, "\iota_{E_0'}"'] & E_0' \oplus E_0'' \arrow[r, "\pi_{E_0''}"'] & E_0'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, tenemos todas las condiciones para usar el Lema de la Serpiente 1.3.6 en el diagrama, del cual se obtiene que α_0 es un monomorfismo. En efecto, por el Lema de la Serpiente 1.3.6 obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\operatorname{Ker}(\alpha_0') \longrightarrow \operatorname{Ker}(\alpha_0) \longrightarrow \operatorname{Ker}(\alpha_0''),$$

donde $\operatorname{Ker}(\alpha_0') = 0$ y $\operatorname{Ker}(\alpha_0'') = 0$. Así, por la exactitud de la sucesión $\operatorname{Ker}(\alpha_0) = 0$ y por lo tanto α_0 es un monomorfismo. Vamos a denotar por $E_i := E_i' \oplus E_i''$ para todo i. Ahora estamos en la siguiente situación

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_0'"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha_0"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_0' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1'"'] & E_0 \arrow[r] & E_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1''"] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d, "\alpha_n'"'] & & \vdots \arrow[d, "\alpha_n''"] & \\
 & E_n' & & E_n'' &
\end{tikzcd}$$

Para construir el R-homomorfismo α_1, vamos a considerar los cokérneles de $\alpha_0', \alpha_0, \alpha_0''$, y por ser exactas las columnas del diagrama anterior, podemos definir los R-homomorfismos α_1', α_1'' mediante las factorizaciones a través de los cokerneles de α_0' y α_0''

$$\begin{tikzcd}
E_0' \arrow[rr, "\alpha_1'"] \arrow[dr, two heads, "\pi_1'"'] & & E_i' \\
 & C_0' \arrow[ur, tail, "\iota_1'"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E_0'' \arrow[rr, "\alpha_1''"] \arrow[dr, two heads, "\pi_1''"'] & & E_i'' \\
 & C_0'' \arrow[ur, tail, "\iota_1''"'] &
\end{tikzcd}$$

con $\alpha_1' = \iota_1' \circ \pi_1'$, $\alpha_1'' = \iota_1'' \circ \pi_1''$ y $C_0' = \operatorname{Coker}(\alpha_0')$, $C_0'' = \operatorname{Coker}(\alpha_0'')$, completando así el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\alpha_0'"'] & & M \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "\alpha_0"] & & M'' \arrow[rr] \arrow[d, "\alpha_0''"] & & 0 \\
0 \arrow[r] & E_0' \arrow[rr] \arrow[dr, two heads, "\pi_1'"] \arrow[dd, "\alpha_1'"'] & & E_0 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads, "\pi_1"] & & E_0'' \arrow[rr] \arrow[dr, two heads, "\pi_1''"] \arrow[dd, "\alpha_1''"'] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & C_0' \arrow[rr] \arrow[dl, tail, "\iota_1'"] & & C_0 \arrow[rr] & & C_0'' \arrow[r] \arrow[dl, tail, "\iota_1''"] & 0 \\
 & E_1' \arrow[d, "\alpha_2'"'] & & & & E_1'' \arrow[d, "\alpha_2''"] & & \\
 & \vdots \arrow[d, "\alpha_n'"'] & & & & \vdots \arrow[d, "\alpha_n''"] & & \\
 & E_n' & & & & E_n'' & &
\end{tikzcd}$$

donde la existencia de la sucesión exacta $C'_0 \rightarrowtail C_0 \twoheadrightarrow C''_0$ es consecuencia del Lema de la Serpiente 1.3.6, así $C_0 = \operatorname{Coker}(\alpha_0)$. De forma análoga al paso anterior, podemos construir un R-módulo inyectivo E_1 y un monomorfismo de C_0 en E_1, que denotaremos por ι_1, así mediante la composición definimos $\alpha_1 : \iota_1 \circ \pi_1$, completando el diagrama y haciendo que sea exacta la segunda columna

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\alpha'_0"'] & & M \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "\alpha_0"] & & M'' \arrow[rr] \arrow[d, "\alpha''_0"] & & 0 \\
0 \arrow[r] & E'_0 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads, "\pi'_1"] \arrow[dd, "\alpha'_1"] & & E_0 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads, "\pi_1"] \arrow[dd, "\alpha_1"] & & E''_0 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads, "\pi''_1"] \arrow[dd, "\alpha''_1"] & & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & C'_0 \arrow[rr] \arrow[dl, tail, "\iota'_1"] & & C_0 \arrow[rr] \arrow[dl, tail, "\iota_1"] & & C''_0 \arrow[r] \arrow[dl, tail, "\iota''_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E'_1 \arrow[rr] \arrow[d, "\alpha'_2"'] & & E_1 \arrow[rr] & & E''_1 \arrow[rr] \arrow[d, "\alpha''_2"] & & 0 \\
 & \vdots \arrow[d, "\alpha'_n"'] & & & & \vdots \arrow[d, "\alpha''_n"] & & \\
 & E'_n & & & & E''_n & &
\end{tikzcd}
$$

Procediendo de esta manera, se obtiene el diagrama conmutativo con filas y columnas exactas mostrado en el enunciado. □

Definición 1.3.8. Si tenemos un complejo de cocadenas de la forma

$$E^\bullet : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_0} E_0 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_n} E_n \longrightarrow \cdots$$

donde E_i es un R-módulo inyectivo para todo $i \in \mathbb{N}$, diremos que $E^\bullet$ es un **corresolución inyectiva** de M. El concepto dual es conocido como **resolución proyectiva**.

Usando el Teorema 1.3.2 podemos construir corresoluciones inyectivas para todo R-módulo de la siguiente manera. Tomemos $M \in$ **Mod**-R, entonces existe un E_0 inyectivo y monomorfismo $f_0 : M \rightarrowtail E_0$. Si tomamos el $\operatorname{Coker}(f_0)$ y realizamos el mismo proceso con este nuevo R-módulo

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f_0"] & E_0 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, two heads, "\pi_0"'] & & E_1 \\
 & & & \operatorname{Coker}(f_0) \arrow[ur, tail, "\iota_0"'] &
\end{tikzcd}
$$

definimos $f_1 := \iota_0 \circ \pi_0$, y procediendo de manera inductiva podemos construir una corresolución inyectiva de M. De manera dual podemos construir resoluciones proyectivas para todo R-módulo, a partir del hecho de que todo R-módulo es imagen epimórfica de una suma directa de copias de R.

Definición 1.3.9. Sea $f : M \to M'$ un R-homomorfismo y $E^\bullet, E^{\bullet\prime}$ corresoluciones inyectivas de M y M' respectivamente. Diremos que $f^\bullet : E^\bullet \to E^{\bullet\prime}$ es un **levantamiento** de f si es un morfismo en $\mathcal{C}^\bullet(\mathbf{Mod}\text{-}R)$ es decir, un diagrama conmutativo de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
E^\bullet : 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "f"] & E_0 \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "f_0"] & E_1 \arrow[r, "e_2"] \arrow[d, "f_1"] & \cdots \\
E^{\bullet\prime} : 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "e'_0"'] & E'_0 \arrow[r, "e'_1"'] & E'_1 \arrow[r, "e'_2"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

También se pueden considerar resoluciones proyectivas para M y M'.

Dado un R-homomorfismo de módulos $f : M \to M'$ y corresoluciones inyectivas de M y M', nos interesa saber si siempre es posible encontrar un levantamiento de f a las corresoluciones. Esto viene garantizado por el siguiente resultado.

Lema 1.3.10. Dados $M, M' \in \mathbf{Mod}\text{-}R$, $f : M \to M'$ un R-homomorfismo y $E^\bullet, E^{\bullet\prime}$ corresoluciones inyectivas de M y M' respectivamente, existe un levantamiento $f^\bullet : E^\bullet \to E^{\bullet\prime}$. Además, dos levantamientos cualesquiera de f son homotópicos.

Demostración. Razonando por inducción. Para el caso base $n = 0$, empezamos construyendo $f_0 : E_0 \to E'_0$. Bajo la hipótesis, estamos en esta situación

$$\begin{tikzcd}
E^\bullet : 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "f"] & E_0 \arrow[r, "e_1"] & E_1 \arrow[r, "e_2"] & \cdots \\
E^{\bullet\prime} : 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "e'_0"'] & E'_0 \arrow[r, "e'_1"'] & E'_1 \arrow[r, "e'_2"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Así, por ser E'_0 inyectivo, tenemos que existe un R-homomorfismo $f_0 : E_0 \to E'_0$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "e'_0 \circ f"'] & E_0 \arrow[dl, dashed, "f_0"] \\
 & E'_0 &
\end{tikzcd} \qquad \left(f_0 \circ e_0 = e'_0 \circ f\right).$$

Ahora veamos cómo se obtiene f_1. Considere el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
E^{\bullet} : 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "f"] & E_0 \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "f_0"] & E_1 \arrow[r, "e_2"] & \cdots \\
E^{\bullet\prime} : 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "e_0'"'] & E_0' \arrow[r, "e_1'"'] & E_1' \arrow[r, "e_2'"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Veamos que $\operatorname{Ker}(e_1) \subseteq \operatorname{Ker}(e_1' \circ f_0)$. Como $\operatorname{Ker}(e_1) = \operatorname{Im}(e_0) \simeq M$, es suficiente mostrar que $e_1' \circ f_0 \circ e_0 = 0$. Como el primer cuadrado conmuta, tenemos que $e_1' \circ f_0 \circ e_0 = e_1' \circ e_0' \circ f = 0$, donde la última igualdad se obtiene por la exactitud de $E^{\bullet\prime}$. Por la propiedad universal del cokernel, existe un morfismo $\hat{f}_0 : E_0/M \to E_0'/M'$ tal que haga conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[r, two heads, "\pi_0"] \arrow[d, "f_0"'] & E_0/M \arrow[d, "\hat{f}_0"] \\
E_0' \arrow[r, two heads, "\pi_0'"] & E_0'/M'
\end{tikzcd} \qquad \left(\hat{f}_0 \circ \pi_0 = \pi_0' \circ f_0\right).$$

Donde π_0 y π_0' son las proyecciones sobre los cokérneles. Tenemos así el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_0/M \arrow[r, tail, "\iota_0"] \arrow[d, "\iota_0' \circ \hat{f}_0"'] & E_1 \arrow[dl, dashed, "f_1"] \\
E_1' &
\end{tikzcd} \qquad \left(f_1 \circ \iota_0 = \iota_0' \circ \hat{f}_0\right),$$

con $e_1 = \iota_0 \circ \pi_0$ y $e_1' = \iota_0' \circ \pi_0'$, donde f_1 se obtiene por ser E_1' inyectivo. Veamos que f_1 hace conmutar en el diagrama de arriba, esto es

$$\begin{aligned}
f_1 \circ \iota_0 &= \iota_0' \circ \hat{f}_0, \\
f_1 \circ \iota_0 \circ \pi_0 &= \iota_0' \circ \hat{f}_0 \circ \pi_0, \\
f_1 \circ e_1 &= \iota_0' \circ \pi_0' \circ f_0, \\
f_1 \circ e_1 &= e_1' \circ f_0.
\end{aligned}$$

Procediendo de esta manera se obtiene $f^{\bullet}$.

Sea $g_{\bullet} : E^{\bullet} \to E^{\bullet\prime}$ otro levantamiento de f. Construiremos los R-homomorfismos $s_n : E_n \to E_{n-1}$ de la homotopía $s_{\bullet}$ por inducción para $n \geq -1$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "s_{-1}"'] & E_0 \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, shift right, "f_0"'] \arrow[d, shift left, "g_0"] \arrow[dl, "s_0"'] & E_1 \arrow[r, "e_2"] \arrow[d, shift right, "f_1"'] \arrow[d, shift left, "g_1"] \arrow[dl, "s_1"'] & E_2 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_2"'] \arrow[d, shift left, "g_2"] \arrow[dl, "s_2"'] & \cdots \\
0 \arrow[r, "0"] & M' \arrow[r, "e_0'"'] & E_0' \arrow[r, "e_1'"'] & E_1' \arrow[r, "e_2'"'] & E_2' \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Definimos $s_{-1} : M \to 0$ y $s_0 : E_0 \to M'$ como los R-homomorfismos nulos. Supongamos que se tiene construida la cadena de morfismos de la homotopía hasta $s_n : E_n \to E'_{n-1}$, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
E_{n-1} \arrow[r, "e_n"] \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] & E_n \arrow[r, "e_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] \arrow[dl, "s_n"'] & E_{n+1} \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] \\
E'_{n-1} \arrow[r, "e'_n"'] & E'_n \arrow[r, "e'_{n+1}"'] & E'_{n+1}
\end{tikzcd}$$

Queremos construir un R-homomorfismo $s_{n+1} : E_{n+1} \to E'_n$ que además cumpla con $s_{n+1} \circ e_{n+1} + e'_n \circ s_n = f_n - g_n$. Para esto necesitamos que $\operatorname{Ker}(e_{n+1}) \subseteq \operatorname{Ker}(f_n - g_n - e'_n \circ s_n)$. Tenemos que $\operatorname{Ker}(e_{n+1}) = \operatorname{Im}(e_n)$ por ser exacta la sucesión de arriba. Así que probar la contención anterior es equivalente a probar que $(f_n - g_n - e'_n \circ s_n)(e_n) = 0$. Esto es

$$\begin{aligned}
\left(f_n - g_n - e'_n \circ s_n\right)(e_n) &= (f_n - g_n)(e_n) - \left(e'_n \circ s_n \circ e_n\right), \\
&= (f_n - g_n)(e_n) - \left(e'_n\right)\left(f_{n-1} - g_{n-1} - e'_{n-1} \circ s_{n-1}\right), \\
&= (f_n - g_n)(e_n) - \left(e'_n\right)(f_{n-1} - g_{n-1}) = 0.
\end{aligned}$$

Donde $s_n \circ e_n = f_{n-1} - g_{n-1} - e'_{n-1} \circ s_{n-1}$ se tiene por hipótesis inductiva, la tercera por ser la sucesión de abajo exacta, y la última igualdad se tiene porque el diagrama es conmutativo. Tenemos el R-homomorfismo $f_n - g_n - e'_n \circ s_n : E_n \to E'_n$, y así el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_{n-1} \arrow[r, "e_n"] & E_n \arrow[r, two heads, "\pi_n"] \arrow[dr, "f_n - g_n - e'_n \circ s_n"'] & \operatorname{Coker}(e_n) \arrow[d, dashed, "\hat{s}_n"] \\
 & & E'_n
\end{tikzcd} \qquad \left(\hat{s}_n \circ \pi_n = f_n - g_n - e'_n \circ s_n\right).$$

Donde $\hat{s}_n$ se obtiene por la propiedad universal del cokernel. Usando que E'_{n+1} es inyectivo, podemos completar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Coker}(e_n) \arrow[r, tail, "\iota_n"] \arrow[d, "\hat{s}_n"'] & E_{n+1} \arrow[dl, dashed, "s_{n+1}"] \\
E'_n &
\end{tikzcd} \qquad \left(s_{n+1} \circ \iota_n = \hat{s}_n\right).$$

Veamos que $f_n - g_n = s_{n+1} \circ e_{n+1} + e'_n \circ s_n$. Como $f_n - g_n = \hat{s}_n \circ \pi_n + e'_n \circ s_n$, basta con ver que $\hat{s}_n \circ \pi_n = s_{n+1} \circ e_{n+1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\hat{s}_n \circ \pi_n &= s_{n+1} \circ \iota_n \circ \pi_n, \\
\hat{s}_n \circ \pi_n &= s_{n+1} \circ e_{n+1}.
\end{aligned}$$

Finalizando la prueba. $\square$

De forma dual, podemos mostrar el resultado para resoluciones proyectivas.

Dada una sucesión exacta corta $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$, vimos en el Teorema 1.2.4 que el funtor $\mathrm{Hom}_R(-, E)$ no siempre es exacto a derecha, pero por la Proposición 1.3.4 recuperamos esta falta de exactitud si E es un R-módulo inyectivo. Así, los funtores derivados son los que nos ayudarán a medir esta falta de exactitud.

Tomemos una corresolución inyectiva de $N \in \mathbf{Mod}\text{-}R$

$$E^\bullet : 0 \longrightarrow N \longrightarrow E_0 \xrightarrow{e_0} E_1 \xrightarrow{e_1} \cdots$$

y sea $E^\bullet_N$ la corresolución inyectiva truncada de N, es decir,

$$E^\bullet_N : E_0 \xrightarrow{e_0} E_1 \xrightarrow{e_1} E_2 \xrightarrow{e_2} E_3 \xrightarrow{e_3} \cdots$$

aplicamos $T := \mathrm{Hom}_R(M, -)$ a $E^\bullet_N$, obteniendo el siguiente complejo

$$\mathrm{Hom}_R(M, E^\bullet_N) : \mathrm{Hom}_R(M, E_0) \xrightarrow{e_0^*} \mathrm{Hom}_R(M, E_1) \xrightarrow{e_1^*} \mathrm{Hom}_R(M, E_2) \xrightarrow{e_2^*} \cdots$$

El n-grupo de cohomología de este complejo viene dado por el siguiente grupo abeliano.

Definición 1.3.11. Sea $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$\mathrm{Ext}^n_R(M, N) = H^n(\mathrm{Hom}_R(M, E^\bullet_N)) = \mathrm{Ker}\left(e^*_{n+1}\right) / \mathrm{Im}\left(e^*_n\right).$$

Si $n = 0$, el $\mathrm{Ext}^0_R(M, N)$ corresponde a $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

Observación 1.3.12. La construcción del funtor $\mathrm{Ext}^n_R(-, -)$ no depende de la corresolución que tomemos para N. Considere $E^\bullet$ y $E^{\bullet\prime}$ dos corresoluciones inyectivas para N, por el Teorema 1.3.10 en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
E^\bullet : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_N"] & E_0 \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "h_0"] & E_1 \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "h_1"] & \cdots \\
E^{\bullet\prime} : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "g"'] & E'_0 \arrow[r, "e'_0"'] & E'_1 \arrow[r, "e'_1"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

podemos construir $h_\bullet : E^\bullet \to E^{\bullet\prime}$ un levantamiento de id_N. Además podemos construir otro levantamiento $h'_\bullet$ con $h'_i : E'_i \to E_i$. De esta manera tenemos dos morfismos de cocadena $\mathrm{id}_{E^\bullet}$ y $h'_\bullet \circ h_\bullet$ que van de $E^\bullet$ en sí mismo. Note que $h_\bullet$ y $h'_\bullet$ inducen morfismos de cocadenas $\mathrm{Hom}_R(M, h_\bullet)$ y $\mathrm{Hom}_R(M, h'_\bullet)$. La homotopía entre $h_\bullet \circ h'_\bullet$ e $\mathrm{id}_{E^\bullet}$ induce una homotopía entre $\mathrm{Hom}_R(M, h_\bullet) \circ \mathrm{Hom}_R(M, h'_\bullet)$ e $\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(M, E^\bullet)}$. Entonces a los morfismos inducidos le aplicamos el funtor de cohomología y podemos concluir que $H^n(\mathrm{Hom}_R(M, h))$ y $H^n(\mathrm{Hom}_R(M, h'))$ son inversos entre sí. Como referencia ver Proposición 6.20 y 6.40 de [14].

Proposición 1.3.13. Si $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ una sucesión exacta corta en **Mod**-R, entonces para todo $N \in$ **Mod**-R existe una sucesión exacta en **Mod**-R

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M') \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M'') \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(N, M')$$

$$\longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(N, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(N, M'') \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_R(N, M') \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_R(N, M)$$

$$\longrightarrow \operatorname{Ext}^2_R(N, M'') \longrightarrow \cdots$$

Si consideramos el funtor contravariante $\operatorname{Hom}_R(-, N)$, también tendremos una sucesión exacta de la siguiente forma

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M'', N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M', N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M'', N)$$

$$\longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M', N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_R(M'', N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_R(M, N)$$

$$\longrightarrow \operatorname{Ext}^2_R(M', N) \longrightarrow \cdots$$

Demostración. Tomemos $E^{\bullet\prime}$ y $E^{\bullet\prime\prime}$ corresoluciones inyectivas para M' y M'' respectivamente, por el Lema 1.3.7 podemos construir una corresolución por inyectivos $E^{\bullet}$ para M. Tenemos así una sucesión exacta corta de complejos $E^{\bullet\prime}_{M'} \rightarrowtail E^{\bullet}_{M} \twoheadrightarrow E^{\bullet\prime\prime}_{M''}$, si le aplicamos el funtor $\operatorname{Hom}_R(N, -)$ obtenemos $\operatorname{Hom}_R\left(N, E^{\bullet\prime}_{M'}\right) \rightarrowtail \operatorname{Hom}_R(N, E^{\bullet}_{M}) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}_R\left(N, E^{\bullet\prime\prime}_{M''}\right)$. La exactitud de esta sucesión se obtiene dado que la sucesión exacta corta $E'_n \rightarrowtail E_n \twoheadrightarrow E''_n$ se escinde para todo $n \in \mathbb{N}$ y el funtor $\operatorname{Hom}_R(N, -)$ preserva sucesiones exactas cortas escindidas. La construcción del morfismo de conexión $\operatorname{Hom}_R(N, M'') \to \operatorname{Ext}^1_R(N, M)$ es análoga a la realizada en la Proposición 1.2.10. Así por el Teorema 1.2.11 obtenemos la sucesión exacta larga que se indica en el enunciado. □

Proposición 1.3.14. Sea $E \in$ **Mod**-R, entonces E es inyectivo si y solo si, $\operatorname{Ext}^n_R(M, E) = 0$ para todo $M \in$ **Mod**-R y $n \geq 1$.

Demostración.

- ($\Rightarrow$) Tome una resolución proyectiva de M

$$P_{\bullet} : \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

  Tome el complejo truncado

$$P_{M\bullet} : \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0.$$

Aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_R(-,E)$. Al ser exacto, se tiene el complejo exacto

$$\mathrm{Hom}_R(P_{M\bullet},E) : \mathrm{Hom}_R(P_0,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_1,E) \longrightarrow \cdots$$

Por lo tanto, cualquier n-ésimo grupo de cohomología con $n \geq 1$ va a ser nulo, es decir, $\mathrm{Ext}^n_R(M,E) = 0$.

- ($\Leftarrow$) Tome una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0.$$

Si le aplicamos $\mathrm{Hom}_R(-,E)$, por la Proposición 1.3.13 obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,E) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}_R(B,E) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_R(A,E) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_R(C,E).$$

Por hipótesis $\mathrm{Ext}^1_R(C,E) = 0$. Entonces por la exactitud de la sucesión i^* es un epimorfismo, y por la Proposición 1.3.4 tenemos que E es un R-módulo inyectivo.

□

Definición 1.3.15. Dados $C, A \in \mathbf{Mod}\text{-}R$, diremos que una extensión $\varepsilon : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ es **equivalente** a $\varepsilon' : A \rightarrowtail B' \twoheadrightarrow C$ si existe un R-homomorfismo $\varphi : B \to B'$ tal que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
\varepsilon : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\varepsilon' : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "p'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

esto es, $\varphi \circ i = i'$ y $p' \circ \varphi = p$.

Usando la Proposición 2.72 de [14], también llamado Lema de los Cinco, podemos ver que φ debe ser un isomorfismo. Así, la equivalencia entre ε y ε' define una relación de equivalencia. Denotamos por $e(C,A)$ el conjunto de todas las clases de equivalencia de las extensiones de C por A, y la clase de ε la denotamos por $\bar{\varepsilon}$.

Usando la propiedad universal del producto, o la propiedad universal de la suma directa, podemos ver que una sucesión exacta $0 \to A \to B \to C \to 0$ se escinde si y solo si es equivalente a $0 \to A \to A \oplus C \to C \to 0$.

Podemos construir $\psi : e(C,A) \to \mathrm{Ext}^1_R(C,A)$ tal que sea una biyección. Veamos cómo se define ψ.

Tome la sucesión $\varepsilon : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$ y una corresolución por inyectivos $E^\bullet$ de A, entonces por la definición de módulo inyectivo tenemos $\alpha^\bullet = (\alpha_n)$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\varepsilon : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\alpha_0"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & \cdots \\
E^\bullet : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "e_0"'] & E_0 \arrow[r, "e_1"'] & E_1 \arrow[r, "e_2"'] & E_2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

En particular tenemos que $e_2 \circ \alpha_1 = 0$, esto es, $e_{2*}(\alpha_1) = 0$, por lo tanto $\alpha_1 \in \operatorname{Ker}(e_{2*})$. Entonces definimos $\psi : e(C, A) \to \operatorname{Ext}^1_R(C, A) = \operatorname{Ker}(e_{2*}) / \operatorname{Im}(e_{1*})$ por $\bar{\varepsilon} \mapsto \alpha_1 + \operatorname{Im}(e_{1*})$.

Se puede ver que ψ está bien definido por el Lema de los Cinco, y además este lema nos dice que es independiente la elección del representante de $\bar{\varepsilon}$. Para ver la demostración de que ψ es una biyección, consulte el Teorema 7.30 de [14].

Veamos que, si ε se escinde, entonces $\psi(\bar{\varepsilon}) = 0$. Tenemos que existe $j : B \to A$ tal que $j \circ i = \mathrm{id}_A$. Tenemos así el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\varepsilon : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "e_0 \circ j"] \arrow[l, bend left, dashed, "j"] & C \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \cdots \\
E^\bullet : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "e_0"'] & E_0 \arrow[r, "e_1"'] & E_1 \arrow[r, "e_2"'] & E_2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

con $\alpha_1 = 0$.

Teorema 1.3.16. Toda sucesión exacta corta de R-módulos $A \rightarrowtail K \twoheadrightarrow C$ se escinde si y solo si, $\operatorname{Ext}^1_R(C, A) = 0$.

Demostración.

- ($\Rightarrow$) Por hipótesis toda extensión de C por A se escinde y como vimos anteriormente todas estas sucesiones son equivalentes a la sucesión $A \rightarrowtail A \oplus C \twoheadrightarrow C$. Por lo tanto $|e(C, A)| = 1$. Así, $\operatorname{Ext}^1_R(C, A) = 0$.

- ($\Leftarrow$) Considere $\varepsilon : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$ y le aplicamos $\operatorname{Hom}_R(C, -)$. Por el Teorema 1.3.13 tenemos la siguiente sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, A) \xrightarrow{i_*} \operatorname{Hom}_R(C, B) \xrightarrow{p_*} \operatorname{Hom}_R(C, C) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(C, A) = 0,$$

  por lo tanto p_* es un epimorfismo. Así, para id_C existe $h \in \operatorname{Hom}_R(C, B)$ tal que $p_*(h) = p \circ h = \mathrm{id}_C$, es decir, ε se escinde.

$\square$

Proposición 1.3.17. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos. Para todo $F, N \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ y $n \geq 0$ existen isomorfismos naturales

$$\operatorname{Ext}_R^n\left(F, \prod_{i\in I} M_i\right) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Ext}_R^n(F, M_i),$$
$$\operatorname{Ext}_R^n\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Ext}_R^n(M_i, N).$$

Demostración. Razonando por inducción sobre n. El caso base $n = 0$ es inmediato del Corolario 1.1.21 ya que $\operatorname{Hom}_R(F, -) \cong \operatorname{Ext}_R^0(F, -)$. Sea $n = 1$, por el Teorema 1.3.2 para todo $i \in I$ tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M_i \longrightarrow E_i \longrightarrow C_i \longrightarrow 0$$

con E_i inyectivo. Tenemos así la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \textstyle\prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} E_i \longrightarrow \prod_{i\in I} C_i \longrightarrow 0.$$

Por (1) de la Proposición 1.3.3 tenemos que $\prod_{i\in I} E_i$ es inyectivo, al aplicar $\operatorname{Hom}_R(F, -)$ por la Proposición 1.3.13 tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_R\left(F, \prod_{i\in I} E_i\right) \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & \operatorname{Hom}_R\left(F, \prod_{i\in I} C_i\right) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\sigma"] & \operatorname{Ext}_R^1\left(F, \prod_{i\in I} M_i\right) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & 0 \\
\prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(F, E_i) \arrow[r] & \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(F, C_i) \arrow[r, "\delta'"] & \prod_{i\in I} \operatorname{Ext}_R^1(F, M_i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde τ, σ son isomorfismos naturales, δ, δ' son epimorfismos por la exactitud de la sucesión y porque $\operatorname{Ext}_R^1\left(F, \prod_{i\in I} E_i\right) = 0 = \prod_{i\in I} \operatorname{Ext}_R^1(F, E_i)$ por la Proposición 1.3.14. Donde h se obtiene por la propiedad universal del cokernel, además como τ y σ son isomorfismos, entonces h también lo es por el Lema de los Cinco. De forma análoga obtenemos el resultado para todo $n \geq 0$.

El isomorfismo natural $\operatorname{Ext}_R^n\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Ext}_R^n(M_i, N)$ lo obtenemos de forma dual. $\square$

Definición 1.3.18. Dada una corresolución inyectiva de $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$

$$E^\bullet : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_0} E_0 \xrightarrow{d_1} E_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_n \xrightarrow{d_{n+1}} E_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

para cada $n \geq 1$, la n-**cosizigia** de M en $E^\bullet$ es $\Omega_{E^\bullet}^{-n}(M) := \operatorname{Coker}(d_{n-1})$.

De manera dual, si consideramos una resolución proyectiva $P_\bullet$ de M

$$P_\bullet : \cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

podemos definir la **n-sizigia** de M en $P_\bullet$ como $\Omega^n_{P_\bullet}(M) := \operatorname{Ker}(d_{n-1})$.

Es claro que $\Omega^{-n}_{E^\bullet}(M)$ depende de la corresolución inyectiva de M que tomemos. Sin embargo, si consideramos $E^\bullet$ y $E^{\bullet\prime}$ dos corresoluciones inyectivas de M, usando el Lema de Schanuel 1.3.5 podemos ver que $\Omega^{-n}_{E^\bullet}(M), \Omega^{-n}_{E^{\bullet\prime}}(M)$ son **inyectivamente equivalentes**, es decir, existen inyectivos E_1, E_2 tales que $\Omega^{-n}_{E^\bullet}(M) \oplus E_1 \simeq \Omega^{-n}_{E^{\bullet\prime}}(M) \oplus E_2$. Esto es útil para demostrar que $\operatorname{Ext}^1_R\left(-, \Omega^{-n}_{E^\bullet}(M)\right)$ y $\operatorname{Ext}^1_R\left(-, \Omega^{-n}_{E^{\bullet\prime}}(M)\right)$ definen el mismo funtor.

Proposición 1.3.19. Sea $M \in \textbf{Mod-}R$ y $E^\bullet, E^{\bullet\prime}$ dos corresoluciones inyectivas de M.

1. Para todo $n \geq 1$ y $N \in \textbf{Mod-}R$ tenemos un isomorfismo natural

$$\operatorname{Ext}^1_R\left(N, \Omega^{-n}_{E^\bullet}(M)\right) \cong \operatorname{Ext}^1_R\left(N, \Omega^{-n}_{E^{\bullet\prime}}(M)\right).$$

2. Para todo $N \in \textbf{Mod-}R$ y $n > i \geq 0$ tenemos un isomorfismo natural

$$\operatorname{Ext}^n_R(N, M) \cong \operatorname{Ext}^{n-i}_R\left(N, \Omega^{-i}_{E^\bullet}(M)\right).$$

Demostración.

1. Como $\Omega^{-n}_{E^\bullet}(M)$ y $\Omega^{-n}_{E^{\bullet\prime}}(M)$ son inyectivamente equivalentes, tenemos dos R-módulos inyectivos E_1, E_2 tales que $\Omega^{-n}_{E^\bullet}(M) \oplus E_1 \simeq \Omega^{-n}_{E^{\bullet\prime}}(M) \oplus E_2$. Luego tenemos

$$\operatorname{Ext}^1_R\left(N, \Omega^{-n}_{E^\bullet}(M) \oplus E_1\right) \cong \operatorname{Ext}^1_R\left(N, \Omega^{-n}_{E^\bullet}(M)\right) \oplus \operatorname{Ext}^1_R(N, E_1) \cong \operatorname{Ext}^1_R\left(N, \Omega^{-n}_{E^\bullet}(M)\right),$$

donde el segundo isomorfismo natural se obtiene por la Proposición 1.3.17 y el último isomorfismo es consecuencia de la Proposición 1.3.14.

Realizando el mismo cálculo con $\Omega^{-n}_{E^{\bullet\prime}}(M) \oplus E_2$ y obtenemos que

$$\operatorname{Ext}^1_R\left(N, \Omega^{-n}_{E^\bullet}(M)\right) \cong \operatorname{Ext}^1_R\left(N, \Omega^{-n}_{E^{\bullet\prime}}(M)\right).$$

Por lo tanto, cuando hablamos de cosizigias inyectivas de M no hay necesidad de hacer referencia a la corresolución inyectiva considerada, y lo denotaremos simplemente por $\Omega^{-n}(M)$.

2. Veremos el isomorfismo natural para la primera cosizigia. Tome $E^{\bullet}$ una corresolución por inyectivos para N. Entonces tenemos una sucesión exacta corta $N \rightarrowtail E_0 \twoheadrightarrow \Omega^{-1}(N)$. Por la Proposición 1.3.13 para todo $n \geq 1$ obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Ext}_R^n(M, E_0) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^n\left(M, \Omega^{-1}(N)\right) \xrightarrow{f} \operatorname{Ext}_R^{n+1}(M, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{n+1}(M, E_0) = 0$$

donde las igualdades de las puntas se obtienen por la Proposición 1.3.14. Así, por la exactitud de la sucesión obtenemos que f es un isomorfismo.

□

Observación 1.3.20. Si consideramos $\Omega^n(M)$, es decir, la n-sizigia de M en la primer componente del funtor, el resultado anterior tiene su versión dual también válida.

Definición 1.3.21. La **dimensión inyectiva** de un R-módulo M es el menor entero no negativo n, tal que existe una corresolución inyectiva finita de longitud n

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_n \longrightarrow 0.$$

La denotamos por $\operatorname{id}(M) = n$. En caso no existir tal n, se dice que M tiene dimensión inyectiva infinita.

Si consideramos resoluciones por proyectivos, tendremos la noción dual, la **dimensión proyectiva** de M, denotada por $\operatorname{pd}(M)$.

Tenemos la siguiente proposición, que nos da una caracterización de la dimensión inyectiva en términos del funtor Ext_R^i.

Proposición 1.3.22. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ y $n \geq 0$.

1. $\operatorname{id}(M) \leq n$.

2. $\operatorname{Ext}_R^k(A, M) = 0$ para todo $A \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ y $k \geq n+1$.

3. $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(A, M) = 0$ para todo $A \in \mathbf{Mod}\text{-}R$.

4. Existe una corresolución inyectiva de M tal que su n-cosizigia es inyectiva.

5. Para toda corresolución inyectiva de M, su n-cosizigia es inyectiva.

Demostración.

- $(1 \Rightarrow 2)$ Tenemos una corresolución por inyectivos para M de longitud n

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_0} E_0 \xrightarrow{d_1} E_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_n \longrightarrow 0,$$

  con $E_k = 0$ para todo $k \geq n+1$. Por lo tanto los morfismos inducidos $d_k^* : \mathrm{Hom}_R(A, E_{k-1}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, E_k)$ son los morfismos 0 para todo $k \geq n+1$. Así, $\mathrm{Ext}_R^{k+1}(A, M) = 0$ para todo $k \geq n+1$.

- $(2 \Rightarrow 3)$ Se obtiene de (2) de forma inmediata.

- $(3 \Rightarrow 4)$ Para todo $A \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ por (2) de la Proposición 1.3.19 tenemos el siguiente isomorfismo natural

$$0 = \mathrm{Ext}_R^{n+1}(A, M) \cong \mathrm{Ext}_R^1\left(A, \Omega^{-n}(M)\right).$$

  Así por la Proposición 1.3.14 tenemos que $\Omega^{-n}(M)$ es un R-módulo inyectivo.

- $(4 \Rightarrow 5)$ Tome dos n-cosizigias de distintas corresoluciones inyectivas $\Omega_{E^\bullet}^{-n}(M)$ y $\Omega_{E^{\bullet\prime}}^{-n}(M)$ donde el primero es inyectivo. Vimos anteriormente que por el Lema 1.3.5 estos son inyectivamente equivalentes, entonces existen E, E' R-módulos inyectivos tales que

$$\Omega_{E^\bullet}^{-n}(M) \oplus E \simeq \Omega_{E^{\bullet\prime}}^{-n}(M) \oplus E'.$$

  Por la Proposición 1.3.3 tenemos que los inyectivos son cerrados por sumas directas finitas y por sumandos directos. Por lo tanto, $\Omega_{E^{\bullet\prime}}^{-n}(M)$ también es inyectivo.

- $(5 \Rightarrow 1)$ Tome una corresolución inyectiva para M

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_0} E_0 \xrightarrow{d_1} E_1 \longrightarrow \cdots$$

  Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow \Omega^{-n}(M) \longrightarrow 0.$$

  Por hipótesis $\Omega^{-n}(M)$ es un R-módulo inyectivo, tenemos así una sucesión exacta de inyectivos con longitud n, es decir, $\mathrm{id}(M) \leq n$.

$\square$

1.4. Pares de cotorsión y aproximaciones

Estos pares los introduce por primera vez Luigi Salce en el 79 en su artículo "Cotorsion theories for abelian groups". Entre finales de los 90 y principios de los 2000, Enochs redefine el concepto en la categoría de módulos. La utilidad de los pares de cotorsión es poder construir aproximaciones a izquierda y a derecha (también conocidas como precubiertas y preenvolturas) a partir de las clases que forman el par. Esto a su vez permite definir dimensiones homológicas relativas de manera parecida a las dimensiones proyectivas e inyectivas definidas en la sección anterior.

En esta sección demostraremos algunos resultados que aparecen [7] (Proposición 7.17; Teorema 7.4.1; Ejercicio 1 de la sección 7.1), [8] (Teorema 4.1.4).

Cuando se hable de una clase $\mathcal{X}$ de R-módulos vamos a asumir que es cerrada por isomorfismos, es decir, si $C \in \mathcal{X}$ y $D \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ es tal que $C \simeq D$, entonces $D \in \mathcal{X}$.

Definición 1.4.1. Dada una clase $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{Mod}\text{-}R$, definimos sus complementos ortogonal a izquierda y derecha por

$$\begin{aligned} {}^{\perp_1}\mathcal{X} &:= \left\{ F \in \mathbf{Mod}\text{-}R : \operatorname{Ext}^1_R(F, X) = 0, \text{ para todo } X \in \mathcal{X} \right\}, \\ \mathcal{X}^{\perp_1} &:= \left\{ F \in \mathbf{Mod}\text{-}R : \operatorname{Ext}^1_R(X, F) = 0, \text{ para todo } X \in \mathcal{X} \right\}, \end{aligned}$$

respectivamente.

Observación 1.4.2. Podemos ver que para toda clase $\mathcal{X}$, se cumple que

$$\mathcal{X} \subseteq {}^{\perp_1}\left(\mathcal{X}^{\perp_1}\right), \ \mathcal{X} \subseteq \left({}^{\perp_1}\mathcal{X}\right)^{\perp_1}.$$

Si $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2$, entonces ${}^{\perp_1}\mathcal{X}_2 \subseteq {}^{\perp_1}\mathcal{X}_1$ y $\mathcal{X}_2^{\perp_1} \subseteq \mathcal{X}_1^{\perp_1}$. De estas propiedades podemos concluir que

$$\left({}^{\perp_1}\left(\mathcal{X}^{\perp_1}\right)\right)^{\perp_1} = \mathcal{X}^{\perp_1}, {}^{\perp_1}\left(\left({}^{\perp_1}\mathcal{X}\right)^{\perp_1}\right) = {}^{\perp_1}\mathcal{X}.$$

Definición 1.4.3. Dada una clase $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{Mod}\text{-}R$ y $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$, una **$\mathcal{X}$-preenvoltura** de M es un R-homomorfismo $\varphi : M \to X$, con $X \in \mathcal{X}$ tal que para todo R-homomorfismo $\varphi' : M \to X'$ con $X' \in \mathcal{X}$, existe un R-homomorfismo $h : X \to X'$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"'] & X \arrow[dl, dashed, "h"] \\ X' & \end{tikzcd} \qquad \left(h \circ \varphi = \varphi'\right).$$

Si $X' = X$, $\varphi' = \varphi$ y los únicos R-homomorfismos h que hacen conmutar el diagrama anterior son los automorfismos de X, diremos que $\varphi : M \to X$ es una $\mathcal{X}$-**envoltura**.

Si todo R-módulo tiene una $\mathcal{X}$-preenvoltura, diremos que $\mathcal{X}$ es una clase **preenvolvente**. De forma análoga se definen las clases **envolventes**.

Definición 1.4.4. Diremos que una $\mathcal{X}$-preenvoltura de M, $\varphi : M \to X$ es **especial** si φ es un monomorfismo y $\operatorname{Coker}(\varphi) \in {}^{\perp_1}\mathcal{X}$.

De forma dual definimos $\mathcal{X}$**-(pre)cubiertas** (**especiales**) y clases **(pre)cubrientes**.

Observación 1.4.5. Dada una clase $\mathcal{X}$ de R-módulos, todo monomorfismo $\varphi : M \to X$ con $X \in \mathcal{X}$ y $\operatorname{Coker}(\varphi) \in {}^{\perp_1}\mathcal{X}$ es una $\mathcal{X}$-preenvoltura.

Tenemos así la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} X \longrightarrow \operatorname{Coker}(\varphi) \longrightarrow 0.$$

Tome $X' \in \mathcal{X}$ y veamos la sucesión exacta larga al aplicar $\operatorname{Hom}_R(-, X')$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Coker}(\varphi), X') \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(X, X') \xrightarrow{\varphi_*} \operatorname{Hom}_R(M, X') \longrightarrow 0.$$

Donde φ_* es un epimorfismo, ya que $\operatorname{Coker}(\varphi) \in {}^{\perp_1}\mathcal{X}$ y por lo tanto $\operatorname{Ext}^1_R(\operatorname{Coker}(\varphi), X') = 0$. Si tomamos otro R-homomorfismo $\varphi' : M \to X'$, existe $h : X \to X'$ tal que $\varphi' = \varphi_*(h) = h \circ \varphi$. Tenemos así, que φ es una $\mathcal{X}$-preenvoltura.

De forma dual podemos ver que toda $\mathcal{X}$-precubierta especial es una $\mathcal{X}$-precubierta.

Observación 1.4.6. Si la clase $\mathcal{X}$ contiene los R-módulos inyectivos, entonces toda $\mathcal{X}$-preenvoltura es un monomorfismo.

Ejemplo 1.4.7. Por el momento sabemos que la clase **Inj** es preenvolvente especial, pero en realidad esta clase es envolvente. Esta afirmación se demostrará en la siguiente sección.

Definición 1.4.8. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{C}$ dos clases en **Mod**-R. Diremos que $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ es un **par de cotorsión** si $\mathcal{F} = {}^{\perp_1}\mathcal{C}$ y $\mathcal{C} = \mathcal{F}^{\perp_1}$.

Para el par de cotorsión $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ tenemos lo siguiente:

1. Diremos que una clase $\mathcal{D}$ **genera** el par de cotorsión si ${}^{\perp_1}\mathcal{D} = \mathcal{F}$. Por otro lado diremos que la clase $\mathcal{G}$ **cogenera** el par de cotorsión $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ si $\mathcal{G}^{\perp_1} = \mathcal{C}$.

2. Diremos que un par de cotorsión $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ es **completo** si $\mathcal{F}$ es precubriente especial y $\mathcal{C}$ es preenvolvente especial.

3. Un par de cotorsión $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ es llamado **hereditario** si $\mathrm{Ext}^i_R(F, C) = 0$ para todo $F \in \mathcal{F}$, $C \in \mathcal{C}$ e $i > 0$.

Observación 1.4.9. Si $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ es un par de cotorsión, entonces:

1. **Proj** $\subseteq \mathcal{F}$ e **Inj** $\subseteq \mathcal{C}$.
2. $\mathcal{F}, \mathcal{C}$ son cerradas por extensiones, sumandos directos y sumas directas finitas.
3. $\mathcal{F}$ es cerrada por sumas directas arbitrarias y $\mathcal{C}$ es cerrada por productos directos arbitrarios.

El siguiente resultado tiene una aplicación del hecho de que **Mod**-R tenga suficientes inyectivos y proyectivos, la cual es simplificar la definición de par de cotorsión completo.

Proposición 1.4.10 (Argumento de Salce)**.** Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ un par de cotorsión. Entonces $\mathcal{F}$ es precubriente especial si y solo si $\mathcal{C}$ es preenvolvente especial.

Demostración.

- $(\Rightarrow)$ Por el Teorema 1.3.2 para todo R-módulo M hay una inmersión en un E inyectivo, por lo tanto tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{\pi} \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow 0$$

Por hipótesis tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow F \xrightarrow{g} \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow 0$$

con $C \in \mathcal{C}$ y $F \in \mathcal{F}$. Considere el pullback entre π y g, así por la Observación 1.2.5 tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & C \arrow[r, equal] \arrow[d] & C \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Tenemos $C, E \in \mathcal{C}$. Vimos en (2) de la Observación 1.4.9 que la clase $\mathcal{C}$ es cerrada por extensiones, tenemos así que $Q \in \mathcal{C}$. Además $F \in \mathcal{F} = {}^{\perp_1}\mathcal{C}$ y finalmente, por la Observación 1.4.5, se tiene que $M \rightarrowtail Q$ es una $\mathcal{C}$-preenvoltura especial.

- ($\Leftarrow$) Se obtiene de forma dual.

$\square$

El siguiente teorema es una herramienta frecuentemente utilizada para demostrar la completitud de varios pares de cotorsión importantes. No se demostrará debido a que no lo utilizaremos más adelante en la tesis y dada la complejidad técnica de la prueba.

Teorema 1.4.11 (de Eklof y Trlifaj)**.** Si un par de cotorsión $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ en $\mathbf{Mod}$-R es cogenerado por un conjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{Mod}$-$R$, entonces es completo.

Demostración. Ver el Teorema 7.4.1 de [7]. $\square$

Si un par de cotorsión $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ es generado por un conjunto, no es necesariamente un par completo. Un contraejemplo fue presentado por Positselski en el 2020 en el seminario de álgebra en la Universidad Carolina, Praga, y lo podemos encontrar en página 8 de la presentación *A construction of complete cotorsion pairs in the relative context* [13]. Una observación al leer esta presentación es que el significado de par de cotorsión generado y cogenerado están intercambiados al presentado anteriormente.

Proposición 1.4.12. Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ un par de cotorsión. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ es hereditario.
2. $\mathcal{F}$ es cerrada por kérneles de epimorfismos, es decir, si $f : F' \twoheadrightarrow F$ con $F, F' \in \mathcal{F}$, entonces $\operatorname{Ker}(f) \in \mathcal{F}$.
3. $\mathcal{C}$ es cerrada por cokérneles de monomorfismos, es decir, si $g : C \rightarrowtail C'$ con $C, C' \in \mathcal{C}$, entonces $\operatorname{Coker}(g) \in \mathcal{C}$.

Demostración.

- ($1 \Rightarrow 3$) Sea $0 \to C \to C' \to K \to 0$ con $C, C' \in \mathcal{C}$. La sucesión exacta larga al aplicarle $\operatorname{Hom}_R(F, -)$ con $F \in \mathcal{F}$ es la siguiente

$$\operatorname{Ext}^1_R(F, C') \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(F, K) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_R(F, C).$$

Donde $\operatorname{Ext}_R^1(F, C') = 0$ y $\operatorname{Ext}_R^2(F, C) = 0$ por hipótesis, entonces por la exactitud de la sucesión $\operatorname{Ext}_R^1(F, K) = 0$. Esto se cumple para todo $F \in \mathcal{F}$, es decir, $K \in \mathcal{F}^{\perp_1} = \mathcal{C}$.

- $(3 \Rightarrow 1)$ Razonando por inducción. El caso base, $n = 1$ es inmediato de la definición de par de cotorsión. Para $n = 2$, dado $C \in \mathcal{C}$ tome una corresolución por inyectivos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r] & E_0 \arrow[r] \arrow[dr, two heads] & E_1 \arrow[r] & \cdots \\ & & & \Omega^{-1}(C) & \end{tikzcd}$$

Por (2) de la Proposición 1.3.19 tenemos que $\operatorname{Ext}_R^2(F, C) \cong \operatorname{Ext}_R^1\left(F, \Omega^{-1}(C)\right)$. En (1) de la Observación 1.4.9 vimos que $\mathbf{Inj} \subseteq \mathcal{C}$, y por hipótesis $\Omega^{-1}(C) \in \mathcal{C}$. Entonces

$$0 = \operatorname{Ext}_R^1\left(F, \Omega^{-1}(C)\right) \cong \operatorname{Ext}_R^2(F, C).$$

Así, de forma inductiva obtenemos el resultado para todo $n \geq 1$.

- El camino $(1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1)$ es dual.

$\square$

Ejemplo 1.4.13. Los siguientes pares de cotorsión son completos.

1. $(\mathbf{Proj}, \mathbf{Mod}\text{-}R)$ es cogenerado por el conjunto $\mathcal{S} = \{R\}$. Esto es consecuencia de un resultado que nos dice que todo R-módulo es proyectivo si y solamente si, es sumando directo de un libre. Un R-módulo F es **libre** si es isomorfo a una suma directa de copias de R, es decir, $F \simeq R^{(I)}$.

2. $(\mathbf{Mod}\text{-}R, \mathbf{Inj})$ es cogenerado por el conjunto $\mathcal{S} = \{R/I : I \text{ ideal a derecha de } R\}$. Este resultado es consecuencia del *Criterio de Baer*, ver Teorema 3.30 de [14].

3. Sea **Flat** la clase de todos los R-módulos planos, es decir, $F \in R\text{-}\mathbf{Mod}$ es plano si $- \otimes_R F$ es un funtor exacto. Entonces el par de cotorsión $\left(\mathbf{Flat}, \mathbf{Flat}^{\perp_1}\right)$ es cogenerado por el conjunto $\mathcal{S} = \{F \in \mathbf{Flat} : |F| < \kappa\}$, donde $\kappa > |R|$ es cierto cardinal infinito. Este conjunto existe porque la clase **Flat** es esqueléticamente pequeña. Para mayor detalle de la prueba ver la Proposición 7.4.3 de [7].

   Una clase de R-módulos $\mathcal{X}$ es **esqueléticamente pequeña** si existe un conjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$ tal que, para todo $X \in \mathcal{X}$ existe $S \in \mathcal{S}$ tal que $X \simeq S$.

4. Tome la clase $\mathcal{FP}_n$, la clase de los R-módulos finitamente n-presentados y tome su complemento ortogonal a derecha, es decir,

$$\mathcal{FP}_n\text{-}\mathbf{Inj} := \mathcal{FP}_n^{\perp_1} = \left\{C \in \mathbf{Mod}\text{-}R : \operatorname{Ext}_R^1(F, C)\,, \text{ para todo } F \in \mathcal{FP}_n\right\}.$$

   La clase $\mathcal{FP}_n$ es esqueléticamente pequeña dado que $\mathcal{FP}_n$ está contenida en los R-módulos finitamente generados, que a su vez forman una clase esqueléticamente pequeña. Entonces el par de cotorsión $\left({}^{\perp_1}\mathcal{FP}_n\text{-}\mathbf{Inj}, \mathcal{FP}_n\text{-}\mathbf{Inj}\right)$ es cogenerado por un conjunto de representantes de $\mathcal{FP}_n$. Además si el anillo R es n-coherente, entonces este par de cotorsión es hereditario. Ver el Corolario 4.2 de [5]. Más adelante vamos a considerar el par de cotorsión generado por los R-módulos finitamente n-copresentados, el objeto principal de estudio en la tesis.

1.5. Envoltura inyectiva

Para demostrar la existencia de la envoltura inyectiva de un R-módulo M, es decir, demostrar el Ejemplo 1.4.7, necesitaremos el concepto de submódulo esencial. Del Teorema 1.3.2 sabemos que para todo R-módulo se puede construir una inmersión en un R-módulo inyectivo. En esta sección veremos que se puede demostrar la existencia de una inmersión que satisface la condición de minimalidad descrita en la siguiente definición.

En esta sección demostraremos algunos resultados que aparecen en [1] (Proposición 5.12, 5.16, 5.20 y 5.21; Corolario 5.13; Lema 5.19), [7] (Teorema 3.1.14).

Definición 1.5.1. Dado $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$, un submódulo K de M es **esencial**, denotado por $K \trianglelefteq M$, si para todo $L \subseteq M$ tal que $K \cap L = 0$, se tiene que $L = 0$.

Si $K \trianglelefteq M$, también se dice que M es una **extensión esencial** de K.

Veremos que la envoltura inyectiva de un R-módulo es una extensión esencial de este.

Si tenemos un monomorfismo $f : K \rightarrowtail M$, podemos notar que $K \simeq \operatorname{Im}(f) \subseteq M$. Luego, es posible extender el concepto anterior a monomorfismos.

Definición 1.5.2. Un monomorfismo $f : K \rightarrowtail M$ es **esencial** si $\operatorname{Im}(f) \trianglelefteq M$.

Teniendo así el siguiente resultado que relaciona estos dos conceptos.

Proposición 1.5.3. Dado $K \subseteq M$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $K \trianglelefteq M$.

2. El monomorfismo de inclusión $i : K \rightarrowtail M$ es esencial.

3. Para todo $N \in$ **Mod**-R y $h \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ tal que $\mathrm{Ker}(h) \cap K = 0$, se tiene que $\mathrm{Ker}(h) = 0$.

4. Para cada $x \in M$ no nulo, existe un $r \in R$, tal que $0 \neq xr \in K$.

Demostración.

- Por definición de submódulo esencial y por la igualdad $\mathrm{Im}(i) = K$, son inmediatas las implicaciones $(1 \Leftrightarrow 2)$ y $(1 \Rightarrow 3)$.

- $(3 \Rightarrow 1)$ Sea $L \subseteq M$ tal que $K \cap L = 0$, y considere $i : L \rightarrowtail M$ el monomorfismo de inclusión. Si tomamos su cokernel resulta ser la proyección canónica $\pi_L : M \twoheadrightarrow M/L$. Entonces $\mathrm{Ker}(\pi_L) \cap K = L \cap K = 0$, y por hipótesis podemos concluir que $L = \mathrm{Ker}(\pi_L) = 0$.

- $(1 \Rightarrow 4)$ Sea $K \trianglelefteq M$ y $x \in M \setminus \{0\}$. Considere xR el submódulo de M generado por x y supongamos que no existe $r \in R$ tal que $xr \in K \setminus \{0\}$, es decir, $xR \cap K = 0$. Como $K \trianglelefteq M$, entonces $xR = 0$ lo cual es falso ya que $x \neq 0$. Por lo tanto, existe un $r \in R$ tal que $xr \in K \setminus \{0\}$.

- $(4 \Rightarrow 1)$ Recíprocamente, supongamos que para todo $x \in M \setminus \{0\}$ existe un $r \in R$ tal que $xr \in K \setminus \{0\}$, y tome $L \subseteq M$ que cumple $K \cap L = 0$. Como $L \subseteq M$, para todo $l \in L \setminus \{0\}$ existe un $r \in R$ tal que $lr \in K \setminus \{0\}$, y así deducimos que $L \cap K = 0$ si y solo si $L = 0$, es decir, $K \trianglelefteq M$.

$\square$

Corolario 1.5.4. Un monomorfismo $f : L \rightarrowtail M$ es esencial si y solo si, para todo $N \in$ **Mod**-R y $h \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ tal que $h \circ f$ es un monomorfismo, se tiene que h también es un monomorfismo.

Demostración. Podemos considerar que L es un submódulo de M, es decir, suponer sin pérdida de generalidad que f es el monomorfismo de inclusión $L \rightarrowtail M$, ya que $L \simeq \mathrm{Im}(f)$. Note que $h \circ f$ es un monomorfismo si y solo si, $\mathrm{Ker}(h) \cap L = 0$. Luego, por la equivalencia entre (1) y (3) de la Proposición 1.5.3, tenemos que h es monomorfismo si y solo si, $\mathrm{Ker}(h) = 0$ si y solamente si $L \trianglelefteq M$. $\square$

Una vez caracterizado el concepto de submódulo esencial, pasemos a demostrar algunas de sus propiedades.

Proposición 1.5.5. Sea N es un sumando directo de M. Entonces $N \trianglelefteq M$ si y solo si $N = M$.

Demostración.

- ($\Rightarrow$) Como N es sumando directo de M, existe un R-módulo K tal que $M \simeq N \oplus K$. Tenemos así la sucesión exacta corta canónica

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota_N} M \xrightarrow{\pi_K} K \longrightarrow 0$$

donde ι_N es un monomorfismo esencial. Como esta sucesión se escinde, tenemos un R-homomorfismo $h : M \to N$, tal que $h \circ \iota_N = \mathrm{id}_N$. Así, por el Corolario 1.5.4 tenemos que h es un monomorfismo, es decir $M \subseteq N$, por lo tanto $K = 0$ y $M = N$.

- ($\Leftarrow$) Se obtiene de forma inmediata.

$\square$

Proposición 1.5.6. Sea $M \in \textbf{Mod-}R$ con submódulos $K \subseteq N \subseteq M$ y $H \subseteq M$, entonces

1. $K \trianglelefteq M$ si y solo si, $K \trianglelefteq N$ y $N \trianglelefteq M$.
2. $H \cap K \trianglelefteq M$ si y solo si, $H \trianglelefteq M$ y $K \trianglelefteq M$.

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Tome $L \subseteq N$ tal que $K \cap L = 0$. Como $L \subseteq N \subseteq M$, y por hipótesis tenemos que K es submódulo esencial de M, se tiene que $L = 0$, es decir $K \trianglelefteq N$. Ahora considere $D \subseteq M$ tal que $D \cap N = 0$. Como $K \subseteq N$, entonces $D \cap K \subseteq D \cap N = 0$, y dado que $K \trianglelefteq M$, entonces $D = 0$ y así $N \trianglelefteq M$.

   ($\Leftarrow$) Recíprocamente, tomemos $L \subseteq M$ tal que $L \cap K = 0$. Podemos reescribir K como $K \cap N$, y entonces $0 = L \cap K = L \cap (N \cap K) = (L \cap N) \cap K$. Como $N \cap L \subseteq N$ y por hipótesis tenemos que K es esencial en N, entonces $N \cap L = 0$. Nuevamente usando que N es esencial en M obtenemos que $L = 0$, y por lo tanto $K \trianglelefteq M$.

2. ($\Rightarrow$) Como $H \cap K \subseteq H$, $H \cap K \subseteq K$ y $H \cap K \trianglelefteq M$, tenemos todas las hipótesis de (1). Por lo tanto $H \trianglelefteq M$ y $K \trianglelefteq M$.

   ($\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos que $H \trianglelefteq M$ y $K \trianglelefteq M$, tomemos $L \subseteq M$ tal que $L \cap (H \cap K) = 0$. Como K es esencial en M, entonces $L \cap H = 0$. Nuevamente usando que $H \trianglelefteq M$ obtenemos que $L = 0$. Por lo tanto $H \cap K \trianglelefteq M$.

$\square$

Proposición 1.5.7. Sean $M_1, M_2 \in$ **Mod**-R tales que $M_1 \cap M_2 = 0$ junto con submódulos $K_1 \subseteq M_1$, $K_2 \subseteq M_2$. Entonces $K_1 \oplus K_2 \trianglelefteq M_1 \oplus M_2$ si y solo si $K_1 \trianglelefteq M_1$ y $K_2 \trianglelefteq M_2$.

Demostración.

- ($\Rightarrow$) Supongamos que K_1 no es submódulo esencial de M_1. Entonces existe $0 \neq L \subseteq M_1$ tal que $L \cap K_1 = 0$. Recordemos por (2) de la Observación 1.1.3 que $K_1 \oplus K_2 = K_1 + K_2$, necesitamos entonces

$$(K_1 + K_2) \cap L = 0.$$

  Supongamos que esto no pasa, entonces existen $k_1 \in K_1$, $k_2 \in K_2$ y $l \in L$, cumpliendo que $k_1 + k_2 = l \neq 0$. Primero veamos que $k_2 \neq 0$. Supongamos lo contrario, tenemos así que $l = k_1 + k_2 = k_1$, es decir, $l \in K_1 \cap L = 0$ lo cual es una contradicción, ya que $l \neq 0$. Ahora, si reordenamos $l = k_1 + k_2$, tenemos que $k_2 = l - k_1$, pero $l - k_1 \in M_1$ y $k_2 \in M_2$, entonces $k_2 \in M_1 \cap M_2$ lo cual es una contradicción ya que $M_1 \cap M_2 = 0$. Por lo tanto $K_1 \trianglelefteq M_1$ y de la misma manera se puede probar que $K_2 \trianglelefteq M_2$.

- ($\Leftarrow$) Supongamos que $K_1 \trianglelefteq M_1$ y $K_2 \trianglelefteq M_2$ y tome $x_1 \in M_1$ y $x_2 \in M_2$ no nulos. Por (4) de la Proposición 1.5.3 tenemos que existe $r_1 \in R$ tal que $x_1 r_1 \in K_1 \setminus \{0\}$.

  Si $x_2 r_1 \in K_2 \setminus \{0\}$ tenemos que $(x_1 + x_2) r_1 \in K_1 \oplus K_2$, y usando (4) de la Proposición 1.5.3 terminamos, ya que $(x_1 + x_2) r_1 \neq 0$. Si no, podemos aplicar de nuevo (4) de la Proposición 1.5.3 a $x_2 r_1$, teniendo un $r_2 \in R$ tal que $x_2 r_1 r_2 \in K_2 \setminus \{0\}$ y por lo tanto

$$0 \neq (x_1 + x_2) r_1 r_2 \in K_1 \oplus K_2.$$

  Por (4) de la Proposición 1.5.3 podemos concluir que $K_1 \oplus K_2 \trianglelefteq M_1 \oplus M_2$.

$\square$

Definición 1.5.8. Un conjunto parcialmente ordenado I está **totalmente ordenado** si para todo $i, j \in I$ se cumple $i \leq j$ o $j \leq i$.

Definición 1.5.9. Si I es un conjunto parcialmente ordenado, un elemento $i \in I$ es una **cota superior** de un subconjunto $J \subseteq I$ si $j \leq i$ para todo $j \in J$. Un elemento $i \in I$ es **maximal** en I si $i \leq j$ para $j \in I$ implica $i = j$. El conjunto parcialmente ordenado I se dice que está **ordenado inductivamente** si todo subconjunto $J \subseteq I$ totalmente ordenado (o cadena) por el orden inducido de I tiene una cota superior en I.

Lema 1.5.10 (de Zorn)**.** Todo conjunto ordenado inductivamente tiene un elemento maximal.

La última propiedad a demostrar de los submódulos esenciales tiene que ver con una noción de complementos relativos a un R-módulo.

Considere un R-módulo M y fije $N \subseteq M$. Si tomamos el conjunto de todos los submódulos $L \subseteq M$ tales que $L \cap N = 0$, este conjunto está parcialmente ordenado por contención y toda cadena en ese conjunto de submódulos tiene una cota superior. Así usando el Lema de Zorn 1.5.10 podemos concluir que este conjunto de los L definido anteriormente tiene un elemento maximal, lo cual nos permite introducir la siguiente noción.

Definición 1.5.11. Sea N un submódulo de M. Si N' es el submódulo de M maximal en el sentido de $N \cap N' = 0$, entonces diremos que N' es un M**-complemento** de N.

Proposición 1.5.12. Sea $M \in$ **Mod**-R y $N \subseteq M$. Si N' es un M-complemento de N, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. $N \oplus N' \trianglelefteq M$.
2. $(N \oplus N')/N' \trianglelefteq M/N'$

Demostración.

1. Sea $L \subseteq M$ tal que $L \cap (N \oplus N') = 0$. Por (2) de la Observación 1.1.3 tenemos que

$$0 = L \cap \left(N \oplus N'\right) = L \cap \left(N + N'\right).$$

Veamos que $N \cap (L + N') = 0$. Supongamos que esto no pasa, entonces existen $0 \neq n \in N$, $n' \in N'$ y $l \in L$ tales que $n = l + n'$. Podemos reescribir como $l = n + (-n')$, esto es, $l \in L \cap (N + N')$. Por lo tanto, $l = 0$ y $n = n'$. Por definición de M-complemento, tenemos que $N \cap N' = 0$, entonces $n' = n = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $N \cap (L + N') = 0$. Ahora, por la maximalidad del M-complemento de N tenemos que $L \subseteq N'$, como $L \cap (N + N') = 0$, en particular $L \cap N' = 0$. Por lo tanto $L = 0$ y $N \oplus N' \trianglelefteq M$.

2. Notamos que tomar un submódulo del cociente M/N' y probar que es nulo, es equivalente a tomar un submódulo de M y probar que está contenido en N'. Suponga que $N' \subseteq L \subseteq M$ con $L \cap (N \oplus N') = L \cap (N + N') \subseteq N'$, donde la primer igualdad se tiene por (2) de la Observación 1.1.3. Entonces

$$(L \cap N) \oplus N' \subseteq L \cap \big(N + N'\big) \subseteq N'.$$

Por lo tanto, $N \cap L = 0$, y por la definición de M-complemento concluimos que $L = N'$.

$\square$

Ya estamos en condiciones para demostrar la existencia de envolturas inyectivas. Recordemos, dado $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$, por el Teorema 1.3.2 tenemos un monomorfismo $f : M \rightarrowtail E$ con E inyectivo. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $M \subseteq E$.

Definición 1.5.13. Dado $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$, una **envoltura inyectiva** de M es un R-módulo E inyectivo junto con un monomorfismo esencial $f : M \rightarrowtail E$.

Veamos que las envolturas inyectivas son **Inj**-envolturas.

Lema 1.5.14. Sea $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ y $e : M \rightarrowtail E$ una envoltura inyectiva. Entonces es una **Inj**-envoltura de M.

Demostración. Por propiedades de la clase **Inj**, es claro que e es una **Inj**-preenvoltura de M. Para probar que es una **Inj**-envoltura, supongamos que tenemos un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "e"] \arrow[dr, tail, "e"'] & E \arrow[d, "h"] \\ & E \end{tikzcd}$$

y veamos que h es un automorfismo de E. En primer lugar, como e es un monomorfismo esencial y $h \circ e = e$ es un monomorfismo, por el Corolario 1.5.4 se tiene que h es un monomorfismo. Por otro lado, por el Lema de la Serpiente 1.3.6 aplicado a la composición $e = h \circ e$, se tiene que existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(e) \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(h \circ e) \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(h) \longrightarrow 0$$

donde $\mathrm{Coker}\,(e) \to \mathrm{Coker}\,(h \circ e)$ es el R-homomorfismo identidad. Esto, junto con la exactitud de la sucesión anterior, implica que $\mathrm{Coker}\,(h) = 0$, es decir, h es un epimorfismo. Por lo tanto, h es un isomorfismo, en particular un automorfismo sobre E, y así e es una **Inj**-envoltura de M. $\square$

Este último lema nos ayudará a mostrar el siguiente teorema.

Teorema 1.5.15. Todo R-módulo M tiene una envoltura inyectiva, la cual es única salvo isomorfismos, y será denotada por $E(M)$.

Demostración. Usando el Teorema 1.3.2 tenemos que existe una inmersión de M en $E \in \mathbf{Inj}$, es decir un monomorfismo $b : M \rightarrowtail E$. Tome $\mathcal{C}$ el conjunto de todos submódulos L de E tal que $M \trianglelefteq L$. Lo primero es observar que $\mathcal{C} \neq \emptyset$ ya que $M \in \mathcal{C}$. Este conjunto está parcialmente ordenado por la inclusión. Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ una cadena dentro de $\mathcal{C}$, esto es, para todo $C, C' \in \mathcal{D}$, $C \subseteq C'$ o $C' \subseteq C$. Considere $\bigcup \{C : C \in \mathcal{D}\} = K$. Es inmediato que $K \subseteq E$. Veamos que $M \trianglelefteq K$. Tomemos $0 \neq k \in K$. Por como está definido K, existe un $C \in \mathcal{D}$, tal que $k \in C$. Pero $M \trianglelefteq C$, entonces por la equivalencia entre (1) y (4) de la Proposición 1.5.3, tenemos que existe $r \in R$ tal que $0 \neq kr \in M$. Esto es válido para todo $k \in K$. Nuevamente, por la equivalencia entre (1) y (4) de la Proposición 1.5.3 tenemos que $M \trianglelefteq K$.

Usando el lema de Zorn 1.5.10 podemos concluir que $\mathcal{C}$ tiene un elemento maximal, que denotaremos por L'.

Dado que la prueba es extensa, para facilitar su lectura la dividiremos en partes.

<ins>Propiedades de $\mathcal{C}$</ins>: Tomemos otro R-módulo L'' tal que $M \trianglelefteq L''$ y $L' \subseteq L''$. Veamos que este debe estar en $\mathcal{C}$, es decir, $L'' \subseteq E$. Dado que E es un R-módulo inyectivo podemos completar el siguiente diagrama conmutativo, donde a es la inclusión de L' en L''

$$\begin{tikzcd} L' \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, tail, "j"'] & L'' \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ E & \end{tikzcd} \qquad (\varphi \circ a = j).$$

Tenemos $M \trianglelefteq L'$, $M \trianglelefteq L''$ y $L' \subseteq L''$, entonces por (1) de la Proposición 1.5.6 tenemos que $L' \trianglelefteq L''$ y $a : L' \to L''$ es un monomorfismo esencial. Como $\varphi \circ a$ es un monomorfismo, por el Corolario 1.5.4 tenemos que φ es un monomorfismo.

Además $L'' \simeq \varphi(L'') \subseteq E$ y por lo tanto $L'' \in \mathcal{C}$. Pero teníamos que L' era un elemento maximal en esta clase, entonces $L' \simeq L''$.

<ins>Inyectividad de L'</ins>: Por (3) de la Proposición 1.3.3 basta con ver que L' es un sumando directo de E.

Sea $S \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ el E-complemento de L'. Entonces por (2) de la Proposición 1.5.12 tenemos que $(L' \oplus S)/S \trianglelefteq E/S$. Como $L' \cap S = 0$ y por el segundo teorema de isomorfismos (ver (3) del Corolario 3.7 de [1]) tenemos un isomorfismo $g' : (L' \oplus S)/S \to L'$. Por otro lado, como

$L' \subseteq E$, podemos extender g' a E componiendo con el morfismo inclusión j de L' en E, obteniendo el monomorfismo $j \circ g' = g : (L' + S)/S \to E$ junto con un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (L' \oplus S)/S \arrow[r, "i"] \arrow[d, tail, "g"'] & E/S \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

donde i es un monomorfismo inclusión que a su vez por (2) de la Proposición 1.5.12 es un monomorfismo esencial, y h se obtiene ya que E es un R-módulo inyectivo. Por el Corolario 1.5.4 tenemos que h es un monomorfismo, así

$$M \trianglelefteq L' \simeq \mathrm{Im}(g) \simeq h\left(\left(L' + S\right)/S\right) \trianglelefteq h(E/S).$$

Por (1) de la Proposición 1.5.6 tenemos que $M \trianglelefteq h(E/S)$, pero por la maximalidad de L' (ver propiedads de $\mathcal{C}$) podemos concluir que $h(E/S) \simeq L' \simeq h((L'+S)/S)$. Como h es un monomorfismo, se tiene que $E/S \simeq (L'+S)/S$, esto significa que $E \simeq L' + S$. Como $L' \cap S = 0$ tenemos que L' es un sumando directo de E y por lo tanto inyectivo. Teniendo así, una envoltura inyectiva $e' : M \rightarrowtail L'$.

<u>Unicidad de la envoltura:</u> Supongamos que tenemos dos envolturas inyectivas $e_1 : M \rightarrowtail E_1$ y $e_2 : M \rightarrowtail E_2$ de M. Tenemos así el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "e_1"] \arrow[d, tail, "e_1"'] \arrow[dr, tail, "e_2"] & E_1 \arrow[d, "h"] \\ E_1 & E_2 \arrow[l, "g"] \end{tikzcd} \qquad (h \circ e_1 = e_2 \text{ y } g \circ e_2 = e_1).$$

Luego, $(g \circ h) \circ e_1 = e_1$. Por el Lema 1.5.14 $g \circ h$ es un automorfismo de E_1. Así, tenemos que existe un R-homomorfismo $t : E_1 \to E_1$ tal que

$$t \circ (g \circ h) = \mathrm{id}_{E_1}$$

y

$$(g \circ h) \circ t = \mathrm{id}_{E_1}.$$

Veamos que h tiene inverso a ambos lados. A izquierda ya lo tenemos, que es $t \circ g$. Ahora veamos que $h \circ (t \circ g) = \mathrm{id}_{E_2}$. Considere

$$g \circ (h \circ t \circ g) = (g \circ h \circ t) \circ g = \mathrm{id}_{E_1} \circ g = g \circ \mathrm{id}_{E_2}.$$

Como e_1 y e_2 son monomorfismos esenciales, por el Corolario 1.5.4, tanto h como g son monomorfismos, de donde podemos concluir que $h \circ (t \circ g) = \mathrm{id}_{E_2}$, es decir, h es un isomorfismo con inverso $t \circ g$. $\square$

Proposición 1.5.16. Sea $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ y $N \trianglelefteq M$, entonces $E(M) \simeq E(N)$.

Demostración. Sabemos que $N \trianglelefteq M$ y $M \trianglelefteq E(M)$. Por (1) de la Proposición 1.5.6 tenemos que $N \trianglelefteq E(M)$. Por otro lado, vimos en el Teorema 1.5.15 que la envoltura inyectiva era única salvo isomorfismos, por lo tanto $E(M) \simeq E(N)$. $\square$

1.6. Módulos Simples

Recordaremos algunas propiedades de los R-módulos simples, esto se debe a que las envolturas inyectivas de los R-módulos simples serán los bloques de construcción del concepto de módulo finitamente n-copresentados.

En esta sección demostraremos algunos resultados que aparecen en [1] (Proposición 9.7 y 9.8), [7] (Proposición 3.1.20; Corolario 3.1.21; Ejercicio 11b,11c de la sección 3.1).

Definición 1.6.1. Un R-módulo S no nulo, es llamado **simple** si es isomorfo a $R/\mathfrak{m}$ para algún ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R, o equivalentemente, si sus únicos submódulos son 0 y S.

La clase de todos los R-módulos simples la denotaremos por $\mathfrak{Simp}$.

Diremos que $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ es **semisimple** si existe un conjunto I tal que M es isomorfo a $\bigoplus_{i \in I} S_i$ con $S_i \in \mathfrak{Simp}$ para todo $i \in I$.

Observación 1.6.2. Sea M un R-módulo semisimple. Entonces $N \subseteq M$ si y solo si N es sumando directo de M, además N también es semisimple. Para esto, ver la Proposición 9.4 y 9.6 de [1].

Definición 1.6.3. Si un anillo R tiene finitos ideales maximales, o equivalentemente, si la cantidad de R-módulos simples es finita, diremos que R es **semilocal**. Si solo hay un R-módulo simple, diremos que R es un anillo **local**.

Definición 1.6.4. Dado $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$, definimos el **zócalo** de M, denotado por $\mathrm{Soc}(M)$, como

$$\mathrm{Soc}(M) := \sum \{S \in \mathbf{Mod}\text{-}R : S \subseteq M \text{ y } S \in \mathfrak{Simp}\}.$$

Observación 1.6.5. El $\mathrm{Soc}(M)$ es el mayor submódulo semisimple de M. Además $\mathrm{Soc}(M) = M$ si y solo si M es semisimple.

Proposición 1.6.6. Para todo $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$, se tiene que $\mathrm{Soc}(M) = \bigcap \{L : L \trianglelefteq M\}$.

Demostración. ($\subseteq$) Sea S un submódulo simple de M (en particular $S \neq 0$). Si $L \trianglelefteq M$, entonces $S \neq 0$ implica $L \cap S \neq 0$. Al ser S simple, se tiene que $S \subseteq L$, para todo $L \trianglelefteq M$. Luego

$$S \subseteq \bigcap \{L \in \mathbf{Mod}\text{-}R : L \trianglelefteq M\} \text{ para todo } S \subseteq M \text{ simple.}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Soc}\,(M) = \sum \{S \in \mathbf{Mod}\text{-}R : S \subseteq M \text{ simple}\} \subseteq \bigcap \{L \in \mathbf{Mod}\text{-}R : L \trianglelefteq M\}$$

($\supseteq$) Veamos que $H = \bigcap \{L \in \mathbf{Mod}\text{-}R : L \trianglelefteq M\}$ es semisimple. Sea $N \subseteq H$ y N' el M-complemento de N. Por (1) de la Proposición 1.5.12 tenemos que $N + N' = N \oplus N' \trianglelefteq M$. Por lo tanto $N \subseteq H \subseteq N \oplus N'$. Como por la Proposición 1.1.12, $\mathbf{Mod}\text{-}R$ es un reticulado modular, tenemos la siguiente igualdad

$$H = H \cap \left(N \oplus N'\right) = N \oplus \left(H \cap N'\right).$$

Por lo tanto, N es sumando directo de H, y por la Observación 1.6.2 tenemos que H es semisimple y $H \subseteq \mathrm{Soc}\,(M)$. □

Proposición 1.6.7. Sea $\bigoplus_{i\in I} S_i$ con I finito y $S_i \in \mathfrak{Simp}$ para todo $i \in I$. Entonces

$$E\left(\bigoplus_{i\in I} S_i\right) \simeq \bigoplus_{i\in I} E\,(S_i)\,.$$

Demostración. Para todo $i \in I$ tenemos que $S_i \trianglelefteq E\,(S_i)$. Como I es finito y por la Proposición 1.5.7 tenemos que $\bigoplus_{i\in I} S_i \trianglelefteq \bigoplus_{i\in I} E\,(S_i)$ donde el término de la derecha sigue siendo inyectivo por (2) de la Proposición 1.3.3. Así, por la unicidad de la envoltura inyectiva tenemos que $E\left(\bigoplus_{i\in I} S_i\right) \simeq \bigoplus_{i\in I} E\,(S_i)$. □

Proposición 1.6.8. Sean $N \subseteq M$ en $\mathbf{Mod}\text{-}R$. Entonces $\mathrm{Soc}\,(N) \subseteq \mathrm{Soc}\,(M)$. Si $N \trianglelefteq M$ tenemos la igualdad, es decir, $\mathrm{Soc}\,(N) = \mathrm{Soc}\,(M)$.

Demostración. Como el zócalo de un módulo es la suma de todos los submódulos simples de dicho módulo, la primer contención se obtiene directo de la definición. Para el caso cuando $N \trianglelefteq M$ basta con ver que todos los submódulos simples de M también son submódulos simples de N. Tomemos S un submódulo simple de M. Entonces $S \cap N \neq 0$ por ser N un submódulo esencial de M. Así $S \cap N = S$ y por lo tanto S también es submódulo simple de N. □

Corolario 1.6.9. Para $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ se cumple que $\operatorname{Soc}(M) = \operatorname{Soc}(E(M))$.

Demostración. La envoltura inyectiva cumple que $M \trianglelefteq E(M)$ y por la Proposición 1.6.8 tenemos la igualdad. □

Proposición 1.6.10. Sea $f : M \to N$ un R-homomorfismo, entonces

$$f(\operatorname{Soc}(M)) \subseteq \operatorname{Soc}(N).$$

Demostración. Basta con ver que para todo S submódulo simple de M se cumple que $f(S)$ es un submódulo simple de N.

Tomemos $S \subseteq M$ simple y veamos que $f(S) \subseteq N$ es simple. Para $K \subseteq f(S)$, queremos que $K = 0$ o $K = f(S)$. Dado que $K \subseteq f(S)$, entonces $f^{-1}(K) \subseteq S$ y por ser S simple tenemos que $f^{-1}(K) = 0$ o $f^{-1}(K) = S$, es decir, se cumple que $K = f(0) = 0$ o en el otro caso $K = f(S)$. □

Proposición 1.6.11. Sea M_1 y M_2 R-módulos tales que $M_1 \cap M_2 = 0$, entonces

$$\operatorname{Soc}(M_1 \oplus M_2) \simeq \operatorname{Soc}(M_1) \oplus \operatorname{Soc}(M_2).$$

Demostración. La primer contención, $\operatorname{Soc}(M_1) \oplus \operatorname{Soc}(M_2) \subseteq \operatorname{Soc}(M_1 \oplus M_2)$, se obtiene de manera inmediata, ya que $M_1, M_2 \subseteq M_1 \oplus M_2$ implica que $\operatorname{Soc}(M_1), \operatorname{Soc}(M_2) \subseteq \operatorname{Soc}(M_1 \oplus M_2)$ por la Proposición 1.6.8.

Veamos la otra contención. Por la propiedad universal de producto directo y de la suma directa tenemos las proyecciones e inclusiones $\pi_i : M_1 \oplus M_2 \twoheadrightarrow M_i$ y $\iota_i : M_i \rightarrowtail M_1 \oplus M_2$. Estos cumplen que $\mathrm{id}_{M_1 \oplus M_2} = \iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2$. Entonces por la Proposición 1.6.10 tenemos que $\pi_i(\operatorname{Soc}(M_1 \oplus M_2)) \subseteq \operatorname{Soc}(M_i)$. Luego

$$\operatorname{Soc}(M_1 \oplus M_2) \subseteq \iota_1(\operatorname{Soc}(M_1)) + \iota_2(\operatorname{Soc}(M_2)) = \operatorname{Soc}(M_1) \oplus \operatorname{Soc}(M_2).$$

El resultado también vale para sumas directas finitas de más de dos módulos. □

Capítulo 2

Módulos finitamente n-copresentados

En este capítulo estudiaremos los módulos finitamente cogenerados, finitamente copresentados y sus generalizaciones conocidas como módulos finitamente n-copresentados. El primero de estos data del artículo de P. Vamos *The dual notion of "finitely generated"* [16], donde introduce los módulos finitamente inmersos como la noción dual de los módulos finitamente generados, para luego ser renombrados como "módulos finitamente cogenerados" en 1969 por J. P. Jans en el artículo *On co-Noetherian rings* [12]. En este último trabajo, además se introduce la noción de anillos conoetherianos como la versión dual de los anillos noetherianos. Luego en 1982 V. A. Hiremath en *Cofinitely generated and cofinitely related modules* [10] muestra que lo estudiado por P. Vamos es un caso particular de una noción categórica más general.

Los módulos finitamente n-copresentados se obtienen de la generalización de los módulos finitamente cogenerados y finitamente copresentados, de manera análoga y dual a los módulos finitamente n-presentados.

Recordemos que un R-módulo M es finitamente n-presentado si existe una n-presentación, es decir, una sucesión exacta

$$F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

donde cada F_i es libre de rango finito (es decir, isomorfo a una suma directa finita de copias de R). Por un argumento conocido como "truco de Eilenberg", se puede cambiar esta condición por, F_i es proyectivo finitamente generado.

Para obtener la noción dual, a saber los R-módulos finitamente n-copresentados, necesitamos dualizar las nociones comentadas, es decir, saber qué se entiende por R-módulo colibre de rango finito y qué es un R-módulo inyectivo finitamente cogenerado.

2.1. Módulos colibres

Un R-módulo F es libre si $F \simeq R^{(I)}$ para algún conjunto de índices I. Para saber qué es un R-módulo colibre necesitamos un sustituto para R, el cual se sabe que cumple el papel de ser un generador en la categoría **Mod**-R. Para esto vamos entonces a recordar la noción de familia de cogeneradores. Esta es considerada por Hiremath en [10] con el fin de dar un contexto categórico al trabajo realizado por P. Vamos y Jans con respecto a los módulos finitamente cogenerados y sus propiedades.

Definición 2.1.1. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto de R-módulos no nulos. Diremos que $\mathcal{C}$ es un **conjunto de cogeneradores** para **Mod**-R, si para cada R-homomorfismo no nulo $f : A \to B$, existe un R-homomorfismo $h : B \to C$ con $C \in \mathcal{C}$, tal que $h \circ f \neq 0$.

Si el conjunto $\mathcal{C} = \{C\}$, diremos que C es un cogenerador de **Mod**-R.

Definición 2.1.2. Un R-módulo M es llamado **colibre** con respecto a un conjunto de cogeneradores $\mathcal{C}$, si existe un subconjunto $\{C_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{C}$ y un isomorfismo entre M y $\prod_{i\in I} C_i$.

Introducimos el siguiente conjunto de R-módulos:

$$E\left(\mathfrak{Simp}\right) := \left\{E\left(S\right) : S \in \mathfrak{Simp}\right\},$$

es decir, este es el conjunto de las envolturas inyectivas de todos los R-módulos simples. En la Proposición 2 de [10] Hiremath muestra que este conjunto tiene la propiedad que estamos buscando mediante el siguiente resultado.

Proposición 2.1.3. $E\left(\mathfrak{Simp}\right)$ es un conjunto de cogeneradores de **Mod**-R.

Demostración. Tomemos $f : A \to B$ un R-homomorfismo no nulo, por lo tanto tenemos $a \in A$ tal que $f\left(a\right) = b \neq 0$. Sea

$$\mathrm{Ann}\left(b\right) := \left\{r \in R : br = 0\right\}$$

el anulador de b y $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de R tal que $Ann\left(b\right) \subseteq \mathfrak{m}$, donde tal $\mathfrak{m}$ existe por el Lema de Zorn 1.5.10. Viendo $bR, R/\mathfrak{m}$ como R-módulos, tenemos el R-homomorfismo $g : bR \to R/\mathfrak{m}$ definido por $br \mapsto r + \mathfrak{m}$. Note que $g\left(b\right) = 1 + \mathfrak{m} \neq 0$. Componiendo con la envoltura inyectiva de $R/\mathfrak{m}$, $e : R/\mathfrak{m} \rightarrowtail E(R/\mathfrak{m})$ tenemos $e \circ g : bR \to E(R/\mathfrak{m})$. Así, como $E(R/\mathfrak{m})$ es inyectivo podemos completar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & bR \arrow[r, "i"] \arrow[d, "e\circ g"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & E(R/\mathfrak{m}) & \end{tikzcd} \qquad (e \circ g = h \circ i).$$

Lo que nos permite extender $e \circ g$ a B. Ahora, este R-homomorfismo $h : B \to E(R/\mathfrak{m})$ cumple que

$$(h \circ f)(a) = h(b) = e(g(b)) = e(1 + \mathfrak{m}) \neq 0$$

ya que e es un monomorfismo. Así, $E(\mathfrak{Simp})$ es una familia de cogeneradores de **Mod**-R. $\square$

Fijando el conjunto $E(\mathfrak{Simp})$, la Definición 2.1.2 podemos reescribirla de la siguiente manera.

Definición 2.1.4. Diremos que $M \in$ **Mod**-R es **colibre** si es isomorfo a $\prod_{S \in \mathcal{S}} E(S)$, para algún $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{Simp}$. Si $\mathcal{S}$ es finito, diremos que M es **colibre de rango finito**.

Queremos saber cuáles propiedades de los módulos libres al dualizarlas para módulos colibres se siguen cumpliendo. Entre estas tenemos que todo módulo libre es proyectivo. El dual sería que todo R-módulo colibre es inyectivo, y esto lo obtenemos de forma inmediata de la definición y de (1) de la Proposición 1.3.3.

Otras propiedades duales las demuestra Hiremath en la Proposición 7 de [10]. Estas son las siguientes.

Proposición 2.1.5. Para $M \in$ **Mod**-R se cumple que:

1. Hay una inmersión de M en un R-módulo colibre.
2. M es inyectivo si y solo si es un sumando directo de un R-módulo colibre.

Demostración.

1. Tome el siguiente R-módulo colibre $Q := \prod_{S \in \mathfrak{Simp}} E(S)^{\mathrm{Hom}_R(M, E(S))}$. Considere el siguiente R-homomorfismo

$$\varphi : M \longrightarrow Q, \text{ definido por } \varphi(m) = (f(m))_{S \in \mathfrak{Simp}, f \in \mathrm{Hom}_R(M, E(S))},$$

con $m \in M$, φ es inducido por la propiedad universal del producto sobre los $E(S)$ con $S \in \mathfrak{Simp}$, y sobre los $f \in \mathrm{Hom}_R(M, E(S))$. Veamos que φ es un monomorfismo. Por demostración de la Proposición 2.1.3 tenemos que existe un R-homomorfismo $f : M \to E(S)$ para algún $S \in \mathfrak{Simp}$, tal que $f(m) \neq 0$ para $m \neq 0$. Por lo tanto φ es un monomorfismo.

2. ($\Rightarrow$) Supongamos que M es un R-módulo inyectivo. Vimos por la parte (1) que hay una inmersión de M en un R-módulo colibre C, obteniendo así la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} C \longrightarrow \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow 0.$$

Como M es inyectivo, por (4) de la Proposición 1.3.4 esta sucesión se escinde, es decir, M es sumando directo de C.

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que existe $K \in$ **Mod**-R, tal que $M \oplus K$ es colibre, y por lo tanto es inyectivo. En (3) de la Proposición 1.3.3 vimos que los sumandos directos de inyectivos también son inyectivos, por lo tanto M es inyectivo.

$\square$

2.2. Módulos finitamente cogenerados

Recordemos que un R-módulo M es finitamente generado si existe un epimorfismo $F \twoheadrightarrow M$ con F un R-módulo libre de rango finito. Es natural pensar que para definir el concepto dual de R-módulo finitamente cogenerado necesitamos un monomorfismo a un R-módulo colibre de rango finito. Esta fue la definición original propuesta por Vamos en [16]. Jans en [12] nos da la siguiente definición de R-módulo finitamente cogenerado, comentando que esta definición la propone Pareigis, donde además afirma que es equivalente a la propuesta por Vamos.

Definición 2.2.1. Diremos que $M \in$ **Mod**-R es **finitamente cogenerado** si para toda familia $\{N_i\}_{i\in I}$ de submódulos de M tal que $\bigcap_{i\in I} N_i = 0$, existe $J \subseteq I$ finito, tal que $\bigcap_{j\in J} N_j = 0$.

Veamos algunos R-módulos finitamente cogenerados.

Ejemplo 2.2.2. Todo R-módulo simple S es finitamente cogenerado.

En efecto, sea $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de S para la cual $\bigcap_{i\in I} N_i = 0$. Como S es simple, existe un $j \in I$ tal que $N_j = 0$. Así tenemos la familia finita cuya intersección es cero.

Podemos generalizar un poco más este ejemplo. Toda suma directa finita de R-módulos simples es finitamente cogenerado. Esto lo probaremos solamente para el caso en el cual se tienen dos R-módulos simples, dado que para un número mayor se obtiene de forma análoga.

Sean S_1 y S_2 dos R-módulos simples y $\{N_i\}_{i\in I}$ un conjunto de submódulos de $S_1 \oplus S_2$ tal que $\bigcap_{i\in I} N_i = 0$. Por la Observación 1.6.2 y sobre todo la Proposición 9.4 de [1] tenemos que $\{N_i\}_{i\in I} \subseteq \{0, S_1, S_2, S_1 \oplus S_2\}$. Veamos los posibles casos.

- Si algún $N_i = 0$, termina la prueba.
- Si $\{S_1, S_2\} \subseteq \{N_i\}_{i_I}$, obtenemos el resultado, ya que podemos tomar $S_1 \cap S_2 = 0$, lo que finaliza la prueba.
- En cualquier otro caso, vamos a contradecir que $\bigcap_{i\in I} N_i = 0$.

Pasemos ahora a demostrar algunas propiedades de los R-módulos finitamente cogenerados. La primera de estas propiedades que se enuncia a continuación es consecuencia directa de la definición y está propuesta como un ejercicio en la sección 10 de [1].

Proposición 2.2.3. Si M es un R-módulo finitamente cogenerado, todo submódulo de M también lo es. En particular, cualquier sumando directo de M es finitamente cogenerado.

Tenemos así que la clase de R-módulos finitamente cogenerados es cerrada por submódulos y por sumandos directos.

P. Vamos en el Lema 1 de [16] da la siguiente caracterización de los R-módulos finitamente cogenerados en términos de su zócalo.

Teorema 2.2.4. Un R-módulo M es finitamente cogenerado si y solo si, $\operatorname{Soc}(M)$ es finitamente cogenerado y $\operatorname{Soc}(M) \trianglelefteq M$.

Demostración.

- ($\Rightarrow$) Sea $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ finitamente cogenerado. Como $\operatorname{Soc}(M) \subseteq M$, por la Proposición 2.2.3 $\operatorname{Soc}(M)$ es finitamente cogenerado. Veamos ahora que $\operatorname{Soc}(M) \trianglelefteq M$. Supongamos que $\operatorname{Soc}(M) \cap K = 0$ para $K \subseteq M$ arbitrario. Sea $\mathcal{L} := \{L \in \mathbf{Mod}\text{-}R : L \trianglelefteq M\}$, por la Proposición 1.6.6 podemos reescribir la igualdad $\operatorname{Soc}(M) \cap K$ de la siguiente manera

$$0 = \operatorname{Soc}(M) \cap K = \bigcap \{L : L \in \mathcal{L}\} \cap K = \bigcap \{L \cap K : L \in \mathcal{L}\}.$$

Como M es finitamente cogenerado podemos tomar una familia $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ finita, tal que

$$0 = \bigcap_{L \in \mathcal{L}'} (L \cap K) = \left(\bigcap_{L \in \mathcal{L}'} L \right) \cap K.$$

Por (2) de la Proposición 1.5.6 tenemos que la intersección finita de submódulos esenciales también es esencial. Por lo tanto $K = 0$ y así $\operatorname{Soc}(M) \trianglelefteq M$.

- ($\Leftarrow$) Supongamos que $\operatorname{Soc}(M)$ es finitamente cogenerado y esencial en M, y sea $\{N_i\}_{i \in I}$ una familia de submódulos de M tal que $\bigcap_{i \in I} N_i = 0$. Entonces para todo i, $N_i \cap \operatorname{Soc}(M) \subseteq \operatorname{Soc}(M)$. Luego,

$$0 = \left(\bigcap_{i \in I} N_i \right) \cap \operatorname{Soc}(M) = \bigcap_{i \in I} (N_i \cap \operatorname{Soc}(M)).$$

Como $\operatorname{Soc}(M)$ es finitamente cogenerado, existe $J \subseteq I$ finito tal que

$$0 = \bigcap_{j \in J} (N_j \cap \operatorname{Soc}(M)) = \left(\bigcap_{j \in J} N_j \right) \cap \operatorname{Soc}(M).$$

Finalmente, como $\operatorname{Soc}(M) \trianglelefteq M$, se tiene que $\bigcap_{j \in J} N_j = 0$. Por lo tanto, M es finitamente cogenerado.

$\square$

El siguiente corolario es consecuencia directa del teorema anterior y de la Proposición 1.5.16.

Corolario 2.2.5. Si $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ finitamente cogenerado, entonces $E(M) = E(\operatorname{Soc}(M))$.

Continuemos con más caracterizaciones del concepto de R-módulo finitamente cogenerado. La siguiente es presentada por Driss Bennis, Habib Bouzraa and Abdul-Qawe Kaed en el Teorema 1.1 de [2].

Teorema 2.2.6. Las siguientes condiciones son equivalentes para $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$:

1. M es finitamente cogenerado.

2. Para todo conjunto de R-homomorfismos $\{f_i : M \to M_i\}_{i \in I}$ tal que $\bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker}(f_i) = 0$, existe $J \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_{j \in J} \operatorname{Ker}(f_j) = 0$.

3. Para todo conjunto de R-módulos $\{M_i\}_{i \in I}$ y un monomorfismo $f : M \rightarrowtail \prod_{i \in I} M_i$ existe un conjunto finito $J \subseteq I$ finito y un monomorfismo $f' : M \rightarrowtail \prod_{j \in J} M_j$, donde f' es tal que $f = \iota \circ f'$, e ι es la inclusión del producto finito en el producto original.

Demostración.

- $(1 \Rightarrow 2)$ Esta implicación es consecuencia directa de la definición de finitamente cogenerado.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Sea $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de M tal que $\bigcap_{i\in I} N_i = 0$. Entonces para todo $i \in I$ tenemos los R-homomorfismos de proyección $f_i : M \to M/N_i$ con $\mathrm{Ker}\,(f_i) = N_i$. Luego $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\,(f_i) = 0$, y por hipótesis existe $J \subseteq I$ finito tal que $0 = \bigcap_{j\in J} \mathrm{Ker}\,(f_j) = \bigcap_{j\in J} N_j$, es decir, M es finitamente cogenerado.

- $(2 \Rightarrow 3)$ Sean $f_i := \pi_i \circ f$ donde $\pi_i : \prod_{i\in I} M_i \twoheadrightarrow M_i$ es el R-homomorfismo de proyección para todo $i \in I$. Entonces $f(x) = 0$ si y solo si $f_i(x) = 0$ para todo $i \in I$, es decir, $0 = \mathrm{Ker}\,(f) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\,(f_i)$. Por hipótesis existe $J \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_{j\in J} \mathrm{Ker}\,(f_j) = 0$, y así usando los R-homomorfismos f_j con $j \in J$ podemos construir el monomorfismo $f' : M \rightarrowtail \prod_{j\in J} M_j$.

- $(3 \Rightarrow 2)$ Tomemos una familia de R-homomorfismos $\{f_i : M \to M_i\}_{i\in I}$ tales que $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\,(f_i) = 0$. Usando la propiedad universal del producto directo, tenemos que existe un único R-homomorfismo f que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, dashed, "f"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "\pi_i"'] & M_i \end{tikzcd} \qquad (\pi_i \circ f = f_i, \text{ para todo } i \in I).$$

Veamos que f es un monomorfismo. Como tenemos que $\mathrm{Ker}\,(f) \subseteq \mathrm{Ker}\,(f_i)$ para todo $i \in I$, se sigue $\mathrm{Ker}\,(f) \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\,(f_i) = 0$, es decir, f es un monomorfismo. Así, por hipótesis tenemos que existe $J \subseteq I$ finito y un monomorfismo $f' : M \rightarrowtail \prod_{j\in J} M_j$. Este R-homomorfismo es una restricción de f en J ya que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "f"] \arrow[dr, tail, "f'"'] & \prod_{i\in I} M_i \arrow[r, two heads, "\pi_j"] & M_j \\ & \prod_{j\in J} M_j \arrow[u, tail, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

donde ι es el R-homomorfismo inclusión. Así tenemos que $\iota \circ f' = f$ y por lo tanto $\pi_j \circ f' = \pi_j \circ f = f_j$ para todo $j \in J$. Sea $m \in M$ tal que $f_j(m) = 0$ para todo $j \in J$. Como $f = \iota \circ f'$, se tiene que $0 = f'(m) = (f_j(m))_{j\in J}$. Entonces $m \in \mathrm{Ker}\,(f') = 0$, y como f' es un monomorfismo, $m = 0$ y así concluimos que $\bigcap_{j\in J} \mathrm{Ker}\,(f_j) = 0$.

$\square$

Para los R-módulos semisimples, se pueden dar más caracterizaciones y propiedades del concepto de finitamente cogenerado. Esto será de utilidad, ya que por la Proposición 2.1.3 es de interés estudiar las envolturas inyectivas de los R-módulos simples. Para esto, presentamos la Proposición 10.6 de [1].

Proposición 2.2.7. Sea M un R-módulo semisimple. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. M es finitamente cogenerado.

2. $M \simeq \bigoplus_{i=0}^{n} S_i$ con $S_i \in \mathfrak{Simp}$ para todo $i = 0, \ldots, n$.

3. M es finitamente generado.

Demostración.

- $(1 \Rightarrow 2)$ Como M es semisimple, $M \simeq \bigoplus_{i\in I} S_i$ con $S_i \in \mathfrak{Simp}$. Por otro lado $\bigoplus_{i\in I} S_i \subseteq \prod_{i\in I} S_i$. Entonces canónicamente se tiene un monomorfismo de M en un producto de R-módulos simples. Por (3) del Teorema 2.2.6 podemos tomar una familia finita de simples y un monomorfismo de $f : M \rightarrowtail \bigoplus_{j\in J} S_j$ con J finito. Por la Proposición 1.6.10 y la Observación 1.6.5 tenemos que

$$f\,(M) = f\,(\mathrm{Soc}\,(M)) \subseteq \mathrm{Soc}\left(\bigoplus_{j\in J} S_j\right) = \bigoplus_{j\in J} S_j.$$

  Por lo tanto $M \simeq \bigoplus_{k\in K} S_k$ con K finito y $S_k \in \mathfrak{Simp}$ para todo $k \in K$.

- $(2 \Rightarrow 3)$ Tenemos que $M \simeq \bigoplus_{i=0}^{n} S_i$ con $S_i \in \mathfrak{Simp}$ para todo i, entonces $S_i \simeq R/\mathfrak{m}_i$ con $\mathfrak{m}_i$ ideal maximal de R. Tomando la proyección canónica $R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}_i \simeq S_i$ se tiene que S_i es finitamente generado para todo i. Por lo tanto M también lo es ya que la suma directa finita de R-módulos finitamente generados es finitamente generada.

- $(3 \Rightarrow 1)$ Sea $M = \bigoplus_{i\in I} S_i$ un R-módulo semisimple. Por la Proposición 10.1 de [1] (en cierta forma es el dual del Teorema 2.2.6), si suponemos que M es finitamente generado, existe un conjunto finito $J \subseteq I$ tal que $M \simeq \bigoplus_{i\in J} S_i$. Por lo tanto, por el Ejemplo 2.2.2, se tiene que M es finitamente cogenerado.

$\square$

Corolario 2.2.8. Si M es un R-módulo semisimple finitamente cogenerado, entonces la envoltura inyectiva $E(M)$ también es finitamente cogenerada.

Demostración. Por el Corolario 1.6.9 y la Observación 1.6.5 tenemos que $\operatorname{Soc}(E(M)) = \operatorname{Soc}(M) = M$, donde la última igualdad se tiene por ser M semisimple. Así, $\operatorname{Soc}(E(M))$ es finitamente cogenerado. Por definición de envoltura inyectiva, $M \trianglelefteq E(M)$. Por el Teorema 2.2.4 podemos concluir que $E(M)$ es finitamente cogenerado. □

Sigamos a continuación con más propiedades y caracterizaciones de R-módulos finitamente cogenerados. La siguiente propiedad es la Proposición 10.8 de [1].

Proposición 2.2.9. Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia finita de R-módulos. Entonces, cada M_i es finitamente cogenerado si y solo si $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es finitamente cogenerado.

Demostración.

- ($\Rightarrow$) Basta con ver que para $n = 2$ se cumple. Considere $M_1, M_2 \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ finitamente cogenerados. Entonces por el Teorema 2.2.4 $\operatorname{Soc}(M_1)$ y $\operatorname{Soc}(M_2)$ son finitamente cogenerados y esenciales en M_1 y M_2, respectivamente. Como $\operatorname{Soc}(M_1)$ y $\operatorname{Soc}(M_2)$ son semisimples finitamente cogenerados, por la Proposición 2.2.7 son sumas directas finitas de simples. Luego, es claro que $\operatorname{Soc}(M_1) \oplus \operatorname{Soc}(M_2)$ es una suma directa finita de simples, y de nuevo por la Proposición 2.2.7 se tiene que $\operatorname{Soc}(M_1) \oplus \operatorname{Soc}(M_2)$ es finitamente cogenerado.

  Por la Proposición 1.5.7 tenemos que $\operatorname{Soc}(M_1) \oplus \operatorname{Soc}(M_2) \trianglelefteq M_1 \oplus M_2$, y de la Proposición 1.6.11 tenemos que $\operatorname{Soc}(M_1) \oplus \operatorname{Soc}(M_2) \simeq \operatorname{Soc}(M_1 \oplus M_2)$. Entonces $\operatorname{Soc}(M_1 \oplus M_2)$ es un submódulo finitamente cogenerado y esencial de $M_1 \oplus M_1$. De nuevo por el Teorema 2.2.4 podemos concluir que $M_1 \oplus M_2$ es finitamente cogenerado.

- ($\Leftarrow$) Se obtiene de manera inmediata por la Proposición 2.2.3.

□

Así tenemos que la clase de los R-módulos finitamente cogenerados es cerrada por sumas directas finitas.

Vamos en [16] define los R-módulos finitamente inmersos como la noción dual de finitamente generado. Esta es la siguiente.

Definición 2.2.10. Un R-módulo M es llamado **finitamente inmerso** si

$$E(M) \simeq E(S_1) \oplus E(S_2) \oplus \cdots \oplus E(S_n),$$

donde $S_i \in \mathfrak{Simp}$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

La Proposición 18.8 de [1], es un resultado que nos muestra la equivalencia entre los R-módulos finitamente cogenerados y finitamente inmersos.

Proposición 2.2.11. Dado $M \in \mathbf{Mod}$-R. Entonces M es finitamente cogenerado si y solo si, $E(M) \simeq \bigoplus_{i \in I} E(S_i)$ con I finito y $S_i \in \mathfrak{Simp}$ para todo $i \in I$.

Demostración.

- ($\Rightarrow$) Como M es finitamente cogenerado, por la Proposición 2.2.3 tenemos que $\mathrm{Soc}(M)$ es finitamente cogenerado y esencial en M. Entonces por el Corolario 2.2.5 tenemos que $E(M) \simeq E(\mathrm{Soc}(M))$, y como $\mathrm{Soc}(M)$ es semisimple y finitamente cogenerado, por la Proposición 2.2.7 tenemos que $\mathrm{Soc}(M) \simeq \bigoplus_{i \in I} S_i$ con I finito y $S_i \in \mathfrak{Simp}$ para todo $i \in I$. Por la Proposición 1.6.7 tenemos que $\bigoplus_{i \in I} E(S_i) \simeq E\left(\bigoplus_{i \in I} S_i\right) \simeq E(M)$.

- ($\Leftarrow$) Tenemos que $E(M) \simeq \bigoplus_{i \in I} E(S_i)$ con I finito y $S_i \in \mathfrak{Simp}$ para todo $i \in I$, es decir, $E(M)$ es colibre de rango finito. Por el Corolario 2.2.8 y la Proposición 2.2.9 tenemos que $E(M)$ es finitamente cogenerado. Finalmente, como M es submódulo de $E(M)$ podemos concluir por la Proposición 2.2.3 que M también es finitamente cogenerado.

$\square$

Corolario 2.2.12. Dado $M \in \mathbf{Mod}$-R, se cumple que M es finitamente cogenerado si y solo si existe un monomorfismo de M en un R-módulo colibre de rango finito.

Demostración.

- ($\Rightarrow$) Basta con considerar el monomorfismo esencial $M \rightarrowtail E(M)$ de la envoltura inyectiva de M, donde por la Proposición 2.2.11 tenemos que $E(M)$ es colibre de rango finito.

- ($\Leftarrow$) Si hay un monomorfismo de M en un colibre de rango finito, podemos pensar en M como un submódulo de un R-módulo colibre de rango finito. Luego, M es un submódulo de un R-módulo finitamente cogenerado, por la Proposición 2.2.3 tenemos que M es finitamente cogenerado.

$\square$

El siguiente resultado da una caracterización de los R-módulos inyectivos que son finitamente cogenerados.

Proposición 2.2.13. Sea $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$. Entonces M es inyectivo y finitamente cogenerado si y solo si, M es colibre de rango finito.

Demostración.

- ($\Rightarrow$) Usando que M es inyectivo, junto con la Proposición 2.2.11 tenemos que $M \simeq E(M) \simeq \bigoplus_{i\in I} E(S_i)$ con I finito y $S_i \in \mathfrak{Simp}$ para todo $i \in I$, por lo tanto M es colibre de rango finito.

- ($\Leftarrow$) Tenemos que $M = \bigoplus_{i\in I} E(S_i)$ con I finito y $S_i \in \mathfrak{Simp}$ para todo $i \in I$. Al ser M una suma directa finita de inyectivos, por (2) de la Proposición 1.3.3 se tiene que M es inyectivo. Como cada $E(S_i)$ es finitamente cogenerado para todo $i \in I$, por la Proposición 2.2.9 tenemos que $\bigoplus_{i\in I} E(S_i) = M$ también es finitamente cogenerado.

$\square$

El siguiente resultado fue demostrado por Couchot en la Proposición 1 de [6]. Este resultado nos da otra propiedad de cerradura para los módulos finitamente cogenerados.

Corolario 2.2.14. Sean $M, N \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ finitamente cogenerados, y considere una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Entonces K es finitamente cogenerado. En otras palabras, las clase de R-módulos finitamente cogenerados es cerrada por extensiones.

Demostración. Como M, N son finitamente cogenerados, por el Corolario 2.2.12 tenemos monomorfismos

$$M \rightarrowtail \bigoplus_{S\in\mathcal{S}_1} E(S), \qquad N \rightarrowtail \bigoplus_{S\in\mathcal{S}_2} E(S),$$

con $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \mathfrak{Simp}$ finitos. Queremos un monomorfismo de K en un colibre de rango finito. Para esto usaremos el Lema de la Herradura 1.3.7 para completar el diagrama de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & K & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{S\in\mathcal{S}_1} E(S) & \longrightarrow & \bigoplus_{S\in\mathcal{S}_1} E(S) \oplus \bigoplus_{S\in\mathcal{S}_2} E(S) & \longrightarrow & \bigoplus_{S\in\mathcal{S}_2} E(S) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

así obtenemos el monomorfismo de K en un R-módulo colibre de rango finito. □

2.3. Módulos finitamente n-copresentados

Se comentó que Jans en [12] introduce la noción dual de los anillos noetherianos. Una de las definiciones de este concepto es que todo R-módulo finitamente generado es finitamente presentado. Jans en [12] define los anillos conoetherianos como todo aquel en el que los cocientes de módulos finitamente cogenerados, son también finitamente cogenerados. Es natural pensar en una definición de anillo conoetheriano dual a la definición recordada de anillo noetheriano, es decir, "un anillo R es conoetheriano si todo R-módulo finitamente cogenerado es finitamente copresentado". Esta última noción es introducida en 1982 por Hiremath en [10] bajo el nombre de *cofinitely related modules*. En 1999, Weimin Xue en [18] introduce los R-módulos finitamente n-copresentados como una generalización de forma inductiva de los finitamente copresentados. Para esta generalización se usan las envolturas inyectivas de simples, dado que son los bloques de construcción de los colibres de rango finito, y por ende de los finitamente cogenerados.

Definición 2.3.1. Un R-módulo M es **finitamente n-copresentado** si tiene una n-copresentación, es decir, existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_n,$$

donde C_i es un R-módulo colibre de rango finito (o inyectivo finitamente cogenerado) para todo $i = 0, \ldots, n$. Si $M \in \textbf{Mod-}R$ tiene una corresolución por colibres de rango finito, diremos que M es **finitamente ∞-copresentado**.

Para $0 \leq n \leq \infty$, las clases de módulos finitamente n-copresentados y finitamente ∞-copresentados en $\textbf{Mod-}R$ serán denotadas por $\mathcal{FCP}_n$ y $\mathcal{FCP}_\infty$ respectivamente, en caso de ambigüedad con respecto al anillo usaremos la notación $\mathcal{FCP}_n(R)$. Podemos observar que los R-módulos finitamente cogenerados, bajo esta notación, coinciden con $\mathcal{FCP}_0$. La clase $\mathcal{FCP}_{-1}$ se va a entender como toda la categoría de R-módulos.

Observación 2.3.2. Para las clases $\mathcal{FCP}_n$ vamos a tener una cadena de inclusiones similar a la conocida en los módulos finitamente n-presentados. Esta es:

$$\mathcal{FCP}_0 \supseteq \mathcal{FCP}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{FCP}_n \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{FCP}_\infty.$$

La clase $\mathcal{FCP}_\infty \neq 0$. Para ver esto basta con notar que $E(S)$, con S simple, es finitamente ∞-copresentado. Podemos construir la siguiente corresolución por colibres de rango finito para $E(S)$

$$0 \longrightarrow E(S) \xrightarrow{\text{id}} E(S) \xrightarrow{0} E(S) \xrightarrow{\text{id}} \cdots$$

Pasamos a continuación a introducir una medida del nivel de cofinitud de un R-módulo.

Definición 2.3.3. Sea $M \in$ **Mod**-R. Se define la **μ-dimensión** (o **dimensión de cofinitud**) de M como el valor:

$$\mu(M) := \sup\{n \geq 0 : \text{existe una } n\text{-copresentación de } M\}.$$

Si no existe una n-copresentación de M para ningún $n \in \mathbb{N}$, diremos que $\mu(M) := -1$. En caso de ambigüedad con respecto al anillo en el que estamos trabajando, usaremos la notación $\mu_R(-)$.

Esta dimensión describe la clase $\mathcal{FCP}_n$ de la siguiente manera.

Observación 2.3.4. Sea $M \in$ **Mod**-R. Se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $M \in \mathcal{FCP}_n$ si y solo si $\mu(M) \geq n$.
2. $M \in \mathcal{FCP}_n \setminus \mathcal{FCP}_{n+1}$ si y solo si $\mu(M) = n$.
3. $M \in \mathcal{FCP}_\infty$ si y solo si $\mu(M) = \infty$.

En el Teorema 3 de [18], Xue nos muestra en otros términos, propiedades de la μ-dimensión para sucesiones exactas cortas. Estas nos permitirán demostrar más adelante propiedades de cerradura de la clase $\mathcal{FCP}_n$.

Teorema 2.3.5. Sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de R-módulos. Entonces, las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. $\mu(B) \geq \text{mín}\{\mu(A), \mu(C)\}$.

2. $\mu(A) \geq \text{mín}\{\mu(B), \mu(C)+1\}$.

3. $\mu(C) \geq \text{mín}\{\mu(A)-1, \mu(B)\}$.

4. Si $B \simeq A \oplus C$, entonces $\mu(B) = \text{mín}\{\mu(A), \mu(C)\}$.

Demostración. Fijemos la siguiente notación para la prueba. Dado un R-módulo M en $\mathcal{FCP}_n$, vamos a denotar por C_i^M al i-ésimo R-módulo de la n-copresentación considerada para M, y sus R-homomorfismos por $c_i^M : C_{i-1}^M \to C_i^M$ con $i \geq 0$, donde C_{-1}^M se entiende como M.

1. Veamos el caso en que $\mu(A) = -1$ o $\mu(C) = -1$. Tendremos que $\text{mín}\{\mu(A), \mu(C)\} = -1$, y para B se tiene que $\mu(B) \geq -1$ por definición de la μ-dimensión. Entonces se obtiene de forma inmediata la desigualdad.

   Ahora supongamos que $\text{mín}\{\mu(A), \mu(C)\} = n \geq 0$. Entonces $A, C \in \mathcal{FCP}_n$ por la Observación 2.3.4. Si aplicamos el Lema de la Herradura 1.3.7 a n-copresentaciones de A y C obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_0^A \arrow[r] \arrow[d] & C_0^A \oplus C_0^C \arrow[r] \arrow[d] & C_0^C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_n^A \arrow[r] & C_n^A \oplus C_n^C \arrow[r] & C_n^C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

   Como la suma directa finita de R-módulos colibres de rango finito es colibre de rango finito, obtenemos una n-copresentación para B, y así $\mu(B) \geq n$.

2. Si $\mu(B) = -1$, entonces $\text{mín}\{\mu(B), \mu(C)+1\} = -1$ y se obtiene la desigualdad de forma inmediata.

   Supongamos que $\mu(B) \geq 0$. Entonces $\text{mín}\{\mu(B), \mu(C)+1\} = n \geq 0$, y por la Observación 2.3.4 tenemos que $B \in \mathcal{FCP}_n$ y $C \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Por lo tanto si tomamos una n-copresentación de B

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{c_0^B} C_0^B \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_n^B,$$

podemos construir las siguientes sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{c_0^B} C_0^B \longrightarrow \operatorname{Coker}\left(c_0^B\right) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker}\left(c_0^B\right) \longrightarrow C_1^B \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_n^B.$$

Tenemos así, una $(n-1)$-copresentación para $\operatorname{Coker}\left(c_0^B\right)$. Tomando el pushout entre c_0^B y g, y aplicando el Lema de la Serpiente 1.3.6, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "c_0^B"'] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & C_0^B \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \operatorname{Coker}\left(c_0^B\right) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\left(c_0^B\right) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Usando (1) en la columna derecha tenemos

$$\mu(X) \geq \text{mín}\left\{\mu(C), \mu\left(\operatorname{Coker}\left(c_0^B\right)\right)\right\} \geq n-1,$$

es decir, $X \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Entonces tome una $(n-1)$-copresentación de X

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow C_0^X \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_{n-1}^X.$$

Podemos así construir la siguiente sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & C_0^B \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & C_0^X \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_{n-1}^X. \\
 & & & X \arrow[ur, tail] & & &
\end{tikzcd}$$

Esta sucesión exacta es una n-copresentación para A, obteniendo la desigualdad.

3. Si $\mu(A) = -1, 0$ o $\mu(B) = -1$, entonces $\mu(C) \geq -1 \geq \text{mín}\{\mu(B), \mu(A) - 1\}$, y por lo tanto la desigualdad se cumple de forma inmediata.

Supongamos que $\text{mín}\left\{\mu(A)-1, \mu(B)\right\} = n \geq 0$. Entonces $A \in \mathcal{FCP}_{n+1}$ y $B \in \mathcal{FCP}_n$. Por (2) de la Observación 1.2.5, al calcular el pushout entre f y c_0^A obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c_0^A"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_0^A \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Coker}\left(c_0^A\right) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\left(c_0^A\right) \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

En la columna izquierda de forma análoga a la realizada en la demostración de (2) con $\operatorname{Coker}\left(c_0^B\right)$, podemos ver que $\operatorname{Coker}\left(c_0^A\right) \in \mathcal{FCP}_n$, y usando la parte (1) en la segunda columna tenemos que $\mu(X) \geq n$, es decir, $X \in \mathcal{FCP}_n$. En la fila central el R-módulo C_0^A es inyectivo, por (4) de la Proposición 1.3.4 la fila central se escinde, es decir, $X \simeq C_0^A \oplus C$. Tenemos así, la sucesión exacta canónica

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\iota} C_0^A \oplus C \xrightarrow{\pi} C_0^A \longrightarrow 0,$$

en la cual usaremos (2), obteniendo que $\mu(C) \geq \text{mín}\left\{\mu\left(C \oplus C_0^A\right), \mu\left(C_0^A\right)+1\right\} \geq n$.

4. Consideremos la sucesión exacta canónica

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \oplus C \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Por (1) tenemos que $\text{mín}\left\{\mu(A), \mu(C)\right\} \leq \mu(A \oplus C)$.

Veamos ahora que $\mu(A \oplus C) \leq \text{mín}\left\{\mu(A), \mu(C)\right\}$, esto es equivalente a ver que $\mathcal{FCP}_n$ es cerrada por sumandos directos.

Razonemos por inducción sobre $n = \mu(A \oplus C)$. Para $n = 1$ tenemos $A \oplus C \in \mathcal{FCP}_1 \subseteq \mathcal{FCP}_0$, por la Proposición 2.2.3 tenemos que A y $C \in \mathcal{FCP}_0$. Por el Corolario 2.2.12 tenemos las siguientes sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow F_0 \longrightarrow A' \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow G_0 \longrightarrow C' \longrightarrow 0.$$

Donde F_0 y G_0 son R-módulos colibres de rango finito. Si hacemos la suma directa de estas dos sucesiones tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \oplus C \longrightarrow F_0 \oplus G_0 \longrightarrow A' \oplus C' \longrightarrow 0.$$

Por (3) tenemos que $A' \oplus C' \in \mathcal{FCP}_0$, y por la Proposición 2.2.3 tenemos que A' y $C' \in \mathcal{FCP}_0$. Usando (2) en las sucesiones originales, obtenemos que A y $C \in \mathcal{FCP}_1$.

Supongamos que el resultado es verdadero para $n-1$ y veamos que también se cumple para n. Sea $A \oplus C \in \mathcal{FCP}_n$. De igual manera al caso $n = 1$, podemos construir la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \oplus C \longrightarrow F_0 \oplus G_0 \longrightarrow A' \oplus C' \longrightarrow 0,$$

donde F_0 y G_0 son R-módulos colibres de rango finito. Usando (3) obtenemos que $A' \oplus C' \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Por hipótesis inductiva tenemos que A' y $C' \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Usando (2) en las sucesiones originales obtenemos que A y $C \in \mathcal{FCP}_n$.

□

Usando este último teorema, podemos dar otra descripción de la clase $\mathcal{FCP}_\infty$, esta es la siguiente.

Observación 2.3.6. Es inmediato de la Definición 2.3.1 que $\mathcal{FCP}_\infty \subseteq \bigcap_{n\geq 0} \mathcal{FCP}_n$. De hecho es una igualdad. Veamos que $\bigcap_{n\geq 0} \mathcal{FCP}_n \subseteq \mathcal{FCP}_\infty$.

Tomemos $M \in \bigcap_{n\geq 0} \mathcal{FCP}_n$. En particular, $M \in \mathcal{FCP}_0$, construyamos una corresolución por libres de rango finito para M. Podemos construir la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_0} C_0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(f_0) \longrightarrow 0$$

donde el monomorfismo f_0 se obtiene por el Corolario 2.2.12, y C_0 es colibre de rango finito. Como M también está en $\mathcal{FCP}_1$, por (3) del Teorema 2.3.5 tenemos que $\mathrm{Coker}\,(f_0) \in \mathcal{FCP}_0$, entonces podemos volver a aplicar el Corolario 2.2.12 y construir la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f_0"] & C_0 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, two heads] & & C_1 \\ & & & \mathrm{Coker}\,(f_0) \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

con C_1 colibre de rango finito. Tomemos ahora la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(f_0) \longrightarrow C_1 \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(f_1) \longrightarrow 0.$$

Como $M \in \mathcal{FCP}_2$, entonces Coker $(f_0) \in \mathcal{FCP}_1$, nuevamente por (3) del Teorema 2.3.5, tenemos que Coker $(f_1) \in \mathcal{FCP}_0$, entonces podemos construir la sucesión exacta con C_2 colibre de rango finito

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f_0"] & C_0 \arrow[r, "f_1"] & C_1 \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dr, two heads] & & C_2 \\ & & & & \operatorname{Coker}(f_1) \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

Repitiendo este proceso podemos construir una corresolución por colibres de rango finito, obteniendo la igualdad $\bigcap_{n\geq 0} \mathcal{FCP}_n = \mathcal{FCP}_\infty$.

Note a partir del Teorema 2.3.5 que si $A, B \in \mathcal{FCP}_n$, entonces $C \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Esto significa que la clase $\mathcal{FCP}_n$ no necesariamente es cerrada por cokérneles de monomorfismos. Tenemos así las siguientes propiedades de cerradura.

Corolario 2.3.7 (Propiedades de cerradura de $\mathcal{FCP}_n$)**.** Sea $0 \leq n \leq \infty$. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. $\mathcal{FCP}_n$ es cerrada por extensiones.
2. $\mathcal{FCP}_n$ es cerrada por kérneles de epimorfismos.
3. $\mathcal{FCP}_n$ es cerrada por sumandos directos.

Demostración. Las propiedades son consecuencia del Teorema 2.3.5 y de la Observación 2.3.4 □

A partir del Teorema 2.3.5 y otras propiedades vistas podemos dar la siguiente caracterización de los módulos finitamente n-copresentados. Este resultado también lo presentan Driss Bennis, Habib Bouzraa and Abdul-Qawe Kaed en la Proposición 1.2 de [2].

Proposición 2.3.8. Las siguientes condiciones son equivalentes para todo $M \in$ **Mod**-R y $n \geq 1$.

1. $M \in \mathcal{FCP}_n$.
2. Existe una sucesión exacta de la forma
$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$
donde C_i es colibre de rango finito para todo $i = 0, \ldots, n-1$, y L es finitamente cogenerado.

3. $M \in \mathcal{FCP}_{n-1}$, y si se tiene una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

donde cada C_i es colibre de rango finito para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$, entonces L es finitamente cogenerado.

4. Existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

con C colibre de rango finito y $L \in \mathcal{FCP}_{n-1}$.

5. M es finitamente cogenerado, y para toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

con C colibre de rango finito, se tiene que $L \in \mathcal{FCP}_{n-1}$.

Demostración.

- $(1 \Rightarrow 2)$ Dado que M es finitamente n-copresentado, tenemos que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C_0 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{f_n} C_n$$

donde los C_i son R-módulos colibres de rango finito para todo $i = 0, \ldots, n$. Por ser la sucesión exacta, f_n se puede factorizar a través de $\operatorname{Coker}(f_{n-1})$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & C_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "f_{n-1}"] & C_{n-1} \arrow[rr, "f_n"] \arrow[dr, two heads, "\pi"'] & & C_n \\ & & & & & \operatorname{Coker}(f_{n-1}) \arrow[ur, tail, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Llamamos $L = \operatorname{Coker}(f_{n-1})$. Entonces L es finitamente cogenerado por el Corolario 2.2.12.

- $(2 \Rightarrow 3)$ Por (2), tenemos que existe una sucesión de la forma

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

con C_i R-módulos colibres de rango finito para todo $i = 0, \ldots, n-1$ y L es finitamente cogenerado. Tenemos que $M \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Supongamos que tenemos otra sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow K_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

donde cada K_i es colibre de rango finito, para el cual queremos ver que N es finitamente cogenerado. Por el Lema de Schanuel 1.3.5 tenemos que

$$N \oplus C_{n-1} \oplus K_{n-2} \oplus \cdots \simeq L \oplus K_{n-1} \oplus C_{n-2} \oplus \cdots$$

Como por la Proposición 2.2.9 los R-módulos finitamente cogenerados son cerrados por sumas directas finitas, el lado derecho de la igualdad anterior es finitamente cogenerado. Por otro lado, por la Proposición 2.2.3 tenemos que son cerrados por sumandos directos, entonces N es finitamente cogenerado.

- $(3 \Rightarrow 1)$ Como $M \in \mathcal{FCP}_{n-1}$, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C_0 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f} C_{n-1},$$

con C_i colibre de rango finito para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Sea $L = \operatorname{Coker}(f)$. Por (3), se tiene que L es finitamente cogenerado, por la Proposición 2.2.12 tenemos un monomorfismo de $\iota : L \rightarrowtail C$ con C colibre de rango finito. Realizamos la composición de este último monomorfismo de la sucesión y el epimorfismo del cokernel, obteniendo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & C_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "f"] & C_{n-1} \arrow[rr, "\iota\circ\pi"] \arrow[dr, two heads, "\pi"'] & & C \\ & & & & & L \arrow[ur, tail, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, construimos una n-copresentación para M, es decir, $M \in \mathcal{FCP}_n$.

- $(1 \Rightarrow 4)$ Como $M \in \mathcal{FCP}_n$ tenemos la siguiente n-copresentación

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & C_0 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & C_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_n \\ & & & \operatorname{Coker}(f) \arrow[ur, tail] & & & \end{tikzcd}$$

Teniendo así que $\operatorname{Coker}(f) \in \mathcal{FCP}_{n-1}$, y además obtenemos las sucesión exacta corta que queríamos

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C_0 \longrightarrow \operatorname{Coker}(f) \longrightarrow 0.$$

- $(4 \Rightarrow 5)$ Por hipótesis tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

con M finitamente cogenerado, C colibre de rango finito y $L \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Tomemos otra sucesión exacta corta de la forma

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

con K colibre de rango finito, y veamos que $N \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Por el Lema de Schanuel 1.3.5 tenemos $N \oplus C \simeq L \oplus K$, y por (1) del Corolario 2.3.7 está en $\mathcal{FCP}_{n-1}$. Por el (3) del Corolario 2.3.7 tenemos además que $\mathcal{FCP}_{n-1}$ es cerrado por sumandos directos, entonces $N \in \mathcal{FCP}_{n-1}$.

- ($5 \Rightarrow 1$) Tenemos que M es finitamente cogenerado, entonces podemos considerar una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} C \longrightarrow \operatorname{Coker}(f) \longrightarrow 0,$$

con C colibre de rango finito. Por (5), se tiene que $\operatorname{Coker}(f) \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Considere entonces una $(n-1)$-copresentación de $\operatorname{Coker}(f)$ y realice la composición

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & C \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & C_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_n \\ & & & \operatorname{Coker}(f) \arrow[ur, tail] & & & \end{tikzcd}$$

obteniendo así una n-copresentación para M, es decir, $M \in \mathcal{FCP}_n$.

$\square$

Vimos en el Teorema 2.2.4 que podíamos caracterizar los R-módulos finitamente cogenerados a través de su zócalo, nos preguntamos si esto es posible para los $\mathcal{FCP}_n$.

Pregunta 2.3.9. ¿$M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ es finitamente n-copresentado si y solo si $\operatorname{Soc}(M) \trianglelefteq M$ y $\operatorname{Soc}(M)$ es finitamente n-copresentado?

2.4. Anillos n-cocoherentes

Vimos en el Corolario 2.3.7 que la clase $\mathcal{FCP}_n$ no necesariamente es cerrada por cokérneles de monomorfismos. Los anillos n-cocoherentes caracterizarán esta propiedad. Además estudiaremos propiedades que conectan los anillos n-cocoherentes con los anillos n-coherentes, para el caso de anillos semilocales.

Para entender algunas de estas caracterizaciones, es importante introducir el concepto de clase gruesa.

Definición 2.4.1. Una clase $\mathcal{W}$ en **Mod**-R es gruesa, si es cerrada por sumandos directos, y si para toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

donde dos de los elementos A, B o C están en $\mathcal{W}$, se tiene que el tercero también lo está.

Proposición 2.4.2. Para todo anillo R, la clase $\mathcal{FCP}_\infty$ es gruesa.

Demostración. Por el Corolario 2.3.7, falta ver que $\mathcal{FCP}_\infty$ es cerrada por cokérneles de monomorfismos. Dados $A, B \in \mathcal{FCP}_\infty$ y un monomorfismo $f : A \rightarrowtail B$ entre ellos, se tiene la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ f\ } B \longrightarrow \operatorname{Coker}(f) \longrightarrow 0.$$

Por (3) del Teorema 2.3.5, $\mu(\operatorname{Coker}(f)) \geq \text{mín}\{\mu(A) - 1, \mu(B)\} = \infty$. Por lo tanto $\operatorname{Coker}(f) \in \mathcal{FCP}_\infty$. □

El siguiente ejemplo es presentado por Hiremath en [10]. En este construye un anillo R donde $\mathcal{FCP}_0$ no es una clase gruesa.

Ejemplo 2.4.3. Para p un número primo fijo, $R = \hat{\mathbb{Z}}_p \oplus \mathbb{Z}(p^\infty)$ la suma directa de los enteros p-ádicos $\hat{\mathbb{Z}}_p$ (ver definición en la página 234 de [14]) y el grupo de Prüfer $\mathbb{Z}(p^\infty)$, es decir,

$$\mathbb{Z}(p^\infty) := \left\{ e^{2\pi i m/p^n} : m, n \geq 1 \right\}.$$

La operación de suma está definida de la siguiente manera

$$(\lambda, x) + (\mu, y) := (\lambda + \mu, x \cdot y),$$

y la multiplicación está dada por

$$(\lambda, x) \cdot (\mu, y) := (\lambda\mu, \lambda y + \mu x).$$

Bajo estas operaciones R es un anillo conmutativo que además tiene las siguientes propiedades:

1. Si I es un ideal no nulo de R, entonces $I \subseteq \mathbb{Z}(p^\infty)$ o $\mathbb{Z}(p^\infty) \subseteq I$.

2. $\mathbb{Z}(p)$, el subgrupo cíclico de $\mathbb{Z}(p^\infty)$ de orden p, es el único submódulo simple de R como R-módulo.

3. R es inyectivo como R-módulo.

El zócalo de R es $\mathbb{Z}(p)$ y es un submódulo esencial en R. Así, por el Teorema 2.2.4, R es finitamente cogenerado como R-módulo. En R tenemos las siguiente cadena de ideales estrictamente decreciente

$$((p,0)) \supset \left(\left(p^2,0\right)\right) \supset \left(\left(p^3,0\right)\right) \supset \dots$$

Defina $U := \bigcap_{n\geq 1}((p^n,0))$. Si miramos el cociente R/U como R-módulo, tenemos la siguiente cadena decreciente de submódulos

$$((p,0))/U \supset \left(\left(p^2,0\right)\right)/U \supset \left(\left(p^3,0\right)\right)/U \supset \dots$$

para la cual se cumple que $\bigcap_{n\geq 1}((p^n,0))/U = 0$. Por lo tanto, R/U no es finitamente cogenerado. Considere la sucesión exacta canónica de estos R-módulos

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow R \longrightarrow R/U \longrightarrow 0.$$

Tenemos así, un R-módulo finitamente cogenerado U, tal que no es finitamente 1-copresentado, es decir, la clase $\mathcal{FCP}_0$ no es gruesa.

Recordemos que un anillo R es **noetheriano** (a derecha) si toda cadena ascendente de ideales de R

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \dots$$

se estabiliza, es decir, existe un m tal que $I_m = I_{m+1} = \dots$. Esto es equivalente a tener que todo R-módulo finitamente generado es finitamente presentado.

Tenemos también que un anillo R es coherente si todo ideal finitamente generado es finitamente presentado. Esto es equivalente a tener que todo R-módulo finitamente presentado es 2-presentado.

Así de manera inductiva se presenta la noción anillo n-coherente (a derecha), esto es, R es n-coherente si todo R-módulo n-presentado es $(n+1)$-presentado, es decir, $\mathcal{FP}_n \subseteq \mathcal{FP}_{n+1}$. Los anillos 0-coherentes son los anillos noetherianos y los 1-coherentes son los anillos coherentes.

Vamos en [16] estudia los anillos conoetherianos, pero es Jans en [12] quien les da este nombre. Luego, Xue en [18] generaliza este concepto, presentado los anillos n-cocoherentes. Más adelante estos anillos son estudiados por Driss Bennis, Habib Bouzraa and Abdul-Qawe Kaed en [2].

Definición 2.4.4. Un anillo R es **n-cocoherente** si todo R-módulo finitamente n-copresentado, es finitamente $(n+1)$-copresentado; esto es, $\mathcal{FCP}_n \subseteq \mathcal{FCP}_{n+1}$.

Marco Pérez y Daniel Bravo en [5] presentan el Teorema 2.4, el cual nos permite caracterizar los anillos n-coherentes por medio de la clase $\mathcal{FP}_n$. Dualizando los argumentos presentados deducimos el siguiente resultado, siendo completado con el Teorema 2.1 que presenta Zhu en [19].

Proposición 2.4.5. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. R es n-cocoherente.
2. $\mathcal{FCP}_n = \mathcal{FCP}_{n+1}$.
3. $\mathcal{FCP}_n = \mathcal{FCP}_\infty$.
4. $\mathcal{FCP}_n$ es gruesa.
5. $\mathcal{FCP}_n$ es cerrada por cokérneles de monomorfismos.
6. Todo cociente $(n-1)$-copresentado de un R-módulo colibre de rango finito es n-copresentado.

Demostración.

- ($1 \Leftrightarrow 2$) Como $\mathcal{FCP}_{n+1} \subseteq \mathcal{FCP}_n$ siempre se cumple, se tiene que R es n-cocoherente si y solo si $\mathcal{FCP}_n = \mathcal{FCP}_{n+1}$ a partir de la Definición 2.4.4.

- ($2 \Rightarrow 3$) Basta con probar que $\mathcal{FCP}_{n+k} = \mathcal{FCP}_{n+k+1}$ para todo $k \geq 0$. Razonando por inducción sobre k. El caso base $k = 0$ se cumple por ser justamente la condición (2). Supongamos que se cumple la igualdad para k, es decir, $\mathcal{FCP}_{n+k} = \mathcal{FCP}_{n+k+1}$, y veamos que $\mathcal{FCP}_{n+k+1} = \mathcal{FCP}_{n+k+2}$ es verdadero.

  Sea $M \in \mathcal{FCP}_{n+k+1}$, entonces por la Proposición 2.3.8 hay una sucesión exacta corta

  $$0 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

  con C colibre de rango finito y $L \in \mathcal{FCP}_{n+k}$. Por la hipótesis inductiva, $L \in \mathcal{FCP}_{n+k+1}$. Así, nuevamente por la Proposición 2.3.8, $M \in \mathcal{FCP}_{n+k+2}$. Por lo tanto, $\mathcal{FCP}_{n+k+1} = \mathcal{FCP}_{n+k+2}$. Como $\mathcal{FCP}_{n+k} = \mathcal{FCP}_{n+k+1}$ para todo k, vamos a tener que $\mathcal{FCP}_n = \mathcal{FCP}_m$ para todo $m \geq n$, y así $\mathcal{FCP}_n \subseteq \bigcap_{m\geq n} \mathcal{FCP}_m = \bigcap_{m\geq 0} \mathcal{FCP}_m = \mathcal{FCP}_\infty$, donde la última igualdad la tenemos por la Observación 2.3.6.

- ($3 \Rightarrow 4$) Es consecuencia directa de la Proposición 2.4.2.

- ($4 \Leftrightarrow 5$) Se obtiene de manera inmediata a partir del Corolario 2.3.7.

- ($4 \Rightarrow 2$) Sea $M \in \mathcal{FCP}_n$. Por la Proposición 2.3.8 existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

  con C colibre de rango finito y $L \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Como $\mathcal{FCP}_n$ es gruesa, $L \in \mathcal{FCP}_n$. Nuevamente, por la Proposición 2.3.8 tenemos que $M \in \mathcal{FCP}_{n+1}$.

- ($2 \Rightarrow 6$) Por hipótesis tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

  donde C es un R-módulo colibre de rango finito y $L \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Por (2) del Teorema 2.3.5 tenemos que $M \in \mathcal{FCP}_n = \mathcal{FCP}_{n+1}$, donde la última igualdad la tenemos por (2). Ahora, por (3) del Teorema 2.3.5 tenemos que $L \in \mathcal{FCP}_n$.

- ($6 \Rightarrow 2$) Tome $M \in \mathcal{FCP}_n$. Por la Proposición 2.3.8 tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

  donde C es un R-módulo colibre de rango finito y $L \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Por (6) tenemos que $L \in \mathcal{FCP}_n$. Entonces, por (2) del Teorema 2.3.5, tenemos que $M \in \mathcal{FCP}_{n+1}$.

$\square$

Observación 2.4.6. Así como en **Mod**-R tenemos una cadena de inclusiones en las clases $\mathcal{FCP}_n$, si denotamos por n-*cocoh* la clase de todos los anillos n-cocoherentes (a derecha), tenemos la siguiente cadena de inclusiones que se deduce de la Proposición 2.4.5.

$$0\text{-}cocoh \subseteq 1\text{-}cocoh \subseteq \cdots \subseteq n\text{-}cocoh \subseteq \cdots \subseteq \infty\text{-}cocoh.$$

Donde ∞-*cocoh* es la clase de todos los anillos, o equivalentemente, todo anillo es ∞-cocoherente.

Confinitud en anillos semilocales

Vimos en la Proposición 2.2.7 que para los R-módulos semisimples hay una forma de conectar la finitud con la cofinitud, es de interés algo más general. Por otro lado, Couchot muestra en la Proposición 2 de [6] una forma de construir un R-módulo finitamente cogenerado (copresentado) a partir de un R-módulo finitamente generado (presentado), para el caso donde R es un anillo conmutativo semilocal. De forma inductiva generalizamos esta generalización.

En esta parte vamos a considerar R un anillo conmutativo semilocal. Sea $\{S_i\}_{i=0}^{n}$ el conjunto de todos los R-módulos simples y denotemos el cogenerador inyectivo (ver la Proposición 2.1.3) de **Mod**-R como $E = \bigoplus_{i=0}^{n} E(S_i)$.

Teorema 2.4.7. Sea R un anillo conmutativo semilocal. Entonces, $M \in \mathcal{FP}_n$ si y solo si $\operatorname{Hom}_R(M, E) \in \mathcal{FCP}_n$.

Demostración.

- ($\Rightarrow$) Sea $M \in \mathcal{FP}_n$. Entonces tenemos una n-presentación

  $$F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

  donde cada F_i es un R-módulo libre de rango finito, es decir, $F_i \simeq R^{(I_i)}$ con I_i finito, para todo i. A la sucesión exacta le podemos aplicar $\operatorname{Hom}_R(-, E)$ (que es un funtor exacto por ser E inyectivo), obteniendo la siguiente sucesión exacta

  $$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, E) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(F_0, E) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(F_n, E).$$

  Por otro lado,

  $$\operatorname{Hom}_R\left(R^{(I_i)}, E\right) \simeq \operatorname{Hom}_R(R, E)^{(I_i)} \simeq E^{(I_i)},$$

  donde el primer isomorfismo se obtiene por el Corolario 1.1.21 y por ser I_i finito. Por lo tanto podemos reescribir la sucesión exacta anterior como

  $$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, E) \longrightarrow E^{(I_0)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{(I_n)},$$

  así conseguimos una n-copresentación de $\operatorname{Hom}_R(M, E)$, por ser cada $E^{(I_i)}$ colibre de rango finito.

- ($\Leftarrow$) Razonando por inducción completa. Veamos el caso $n = 0$. Supongamos que $\operatorname{Hom}_R(M, E)$ es finitamente cogenerado y veamos que M es finitamente generado. Por la Proposición 1.1.22 tenemos que

  $$M \simeq \varinjlim_{I} M_i \simeq \bigcup_{i \in I} M_i,$$

donde $\{M_i\}_{i\in I}$ es un sistema directo ordenado parcialmente por inclusión, con I conjunto dirigido y $M_i \subseteq M$ es finitamente generado para todo $i \in I$. Usando esta forma de reescribir M y la Proposición 1.1.20, tenemos el siguiente isomorfismo

$$\operatorname{Hom}_R(M,E) \cong \operatorname{Hom}_R\left(\varinjlim_I M_i, E\right) \cong \varprojlim_I \operatorname{Hom}_R(M_i,E).$$

Por otro lado, para todo M_i tenemos la sucesión exacta corta canónica

$$\varepsilon_i : 0 \longrightarrow M_i \longrightarrow M \longrightarrow M/M_i \longrightarrow 0,$$

y por la Proposición 1.2.3 podemos tomar $\varinjlim_I$ sobre el sistema formado por todas las sucesiones anteriores, obteniendo la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \varinjlim_I M_i \longrightarrow \varinjlim_I M \longrightarrow \varinjlim_I M/M_i \longrightarrow 0.$$

Por la Proposición 1.1.22 tenemos el siguiente isomorfismo $\varinjlim_I M/M_i \cong M/\bigcup M_i = 0$. Por otro lado, podemos aplicarle $\operatorname{Hom}_R(-,E)$ a cada sucesión ε_i, obteniendo la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M/M_i,E) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M,E) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_i,E) \longrightarrow 0.$$

Si denotamos por $N_i = \operatorname{Hom}_R(M/M_i,E)$, tenemos que $\{N_i\}_{i\in I}$ puede pensarse como una familia de submódulos de $\operatorname{Hom}_R(M,E)$. En efecto, observemos que si $i \leq j$, entonces $M_i \subseteq M_j$, por lo tanto podemos construir el epimorfismo $\varphi : M/M_i \twoheadrightarrow M/M_j$ definido por $x + M_i \mapsto x + M_j$. Entonces $\varphi_* : \operatorname{Hom}_R(M/M_j,E) \rightarrowtail \operatorname{Hom}_R(M/M_j,E)$ es un monomorfismo, así podemos concluir que si $i \leq j$, entonces $N_j \subseteq N_i \subseteq \operatorname{Hom}_R(M,E)$, y $\{N_i\}_{i\in I}$ es un sistema inverso que está parcialmente ordenado por contención reversa.

En (6) del Ejemplo 1.1.18 vimos que $\varprojlim_I N_i = \bigcap_I N_i$, entonces tenemos los siguientes isomorfismos e igualdades

$$\bigcap_I N_i = \varprojlim_I N_i = \varprojlim_I \operatorname{Hom}_R(M/M_i,E) \cong \operatorname{Hom}_R\left(\varinjlim_I M/M_i, E\right) \cong 0.$$

Por hipótesis, tenemos que $\operatorname{Hom}_R(M,E)$ es finitamente cogenerado. Luego, existe $J \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_J N_j = 0$. Tenemos así que $J = \{j_1,\ldots,j_m\} \subseteq I$, y como I es un conjunto dirigido, existe $j_0 \in I$ tal que $j_k \leq j_0$ para todo $k = 1,\ldots,m$. Por el orden parcial en $\{N_i\}_{i\in I}$, tenemos que $N_{j_0} \subseteq \bigcap_{j\in J} N_j = 0$. Por lo tanto $\operatorname{Hom}_R(M/M_{j_0},E) = N_{j_0} = 0$.

Como E es un cogenerador inyectivo, entonces $M/M_{j_0} = 0$, es decir, $M = M_{j_0}$ que es finitamente generado.

Ahora supongamos que el resultado se cumple para n, es decir, si $\mathrm{Hom}_R(M, E) \in \mathcal{FCP}_n$, entonces $M \in \mathcal{FP}_n$. Veamos que para $n+1$ también se cumple. Tomemos $\mathrm{Hom}_R(M, E) \in \mathcal{FCP}_{n+1}$. En particular, también está en $\mathcal{FCP}_n$, y por hipótesis inductiva $M \in \mathcal{FP}_n$. Entonces por el Teorema 1.6 de [5] existe una sucesión exacta corta de la forma

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

con $K \in \mathcal{FP}_{n-1}$ y L libre de rango finito, es decir, $L \simeq R^{(I)}$ con I finito. Aplicamos $\mathrm{Hom}_R(-, E)$ a la sucesión, y obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, E) \longrightarrow E^{(I)} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(K, E) \longrightarrow 0.$$

Como $\mathrm{Hom}_R(M, E) \in \mathcal{FCP}_{n+1}$ y $E^{(I)}$ es colibre finitamente cogenerado, por la Proposición 2.3.8 se tiene que $\mathrm{Hom}_R(K, E) \in \mathcal{FCP}_n$. Así, $K \in \mathcal{FP}_n$ por hipótesis inductiva, y por lo tanto $M \in \mathcal{FP}_{n+1}$.

□

El siguiente resultado lo presentaron Driss Bennis, Habib Bouzraa and Abdul-Qawe Kaed, este es el Teorema 3.6 en [2], que además podemos verlo como una consecuencia del teorema anterior.

Corolario 2.4.8. Sea R un anillo conmutativo semilocal. Si R es n-cocoherente, entonces R es n-coherente.

Demostración. Sea E el cogenerador inyectivo de **Mod**-R, y sea $M \in \mathcal{FP}_n$. Por el Teorema 2.4.7 tenemos que $\mathrm{Hom}_R(M, E) \in \mathcal{FCP}_n$. Al ser R n-cocoherente, por la Proposición 2.4.5 tenemos que $\mathrm{Hom}_R(M, E) \in \mathcal{FCP}_{n+1}$, y de nuevo por el Teorema 2.4.7 tenemos que $M \in \mathcal{FP}_{n+1}$. Por lo tanto, R es n-coherente. □

Confinitud en localizaciones

Vemos que los anillos conmutativos semilocales son una buena fuente para inducir anillos n-cocoherentes. Entonces es de interés saber cómo podemos construir anillos semilocales a partir de un anillo dado.

Definición 2.4.9. Sea R un anillo conmutativo. Diremos que $S \subseteq R$ es un **subconjunto multiplicativo** de R si:

1. $0 \notin S$.
2. $1 \in S$.
3. Si $a, b \in S$, entonces $ab \in S$.

Definición 2.4.10. La **localización** de un anillo conmutativo R por S, denotada por $S^{-1}R$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia $(a,s) \in R \times S$, donde la relación está dada por

$$(a,s) \sim (b,t) \text{ si existe } s' \in S, \text{ tal que } (at - bs)\, s' = 0.$$

La clase de (a,s) la denotaremos por $\frac{a}{s}$, y $S^{-1}R$ es de nuevo un anillo, donde las operaciones están definidas de la siguiente manera

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at+bs}{st},$$

y

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st}.$$

Para cada localización $S^{-1}R$ de un anillo R tenemos el siguiente morfismo de anillos

$$\varphi : R \longrightarrow S^{-1}R,$$

definido por $\varphi(a) = \frac{a}{1}$.

Definición 2.4.11. Sea S un subconjunto multiplicativo de un anillo conmutativo R y M un R-módulo. Entonces la **localización** de M con respecto a S, denotada por $S^{-1}M$, es definida de forma análoga a la localización de $S^{-1}R$. Así, $S^{-1}M$ es un grupo abeliano bajo la adición, definida por

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} := \frac{mt+ns}{st},$$

para $\frac{m}{s}, \frac{n}{t} \in S^{-1}M$, y es un $S^{-1}R$-módulo vía

$$\frac{m}{s} \cdot \frac{r}{t} = \frac{mr}{st},$$

donde $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$ y $\frac{r}{t} \in S^{-1}R$.

Proposición 2.4.12. Sea S un subconjunto multiplicativo de un anillo conmutativo R. Las siguientes afirmaciones se cumplen.

1. Si $f : M \to N$ es un R-homomorfismo, entonces la función $S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}N$ definida por
$$\left(S^{-1}f\right)\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{f(x)}{s}$$
es un $S^{-1}R$-homomorfismo.

2. Si $M' \to M \to M''$ es una sucesión exacta en M, entonces $S^{-1}M' \to S^{-1}M \to S^{-1}M''$ es exacta en $S^{-1}M$.

3. Si $N \subseteq M$ son R-módulos, entonces $S^{-1}(M/N) \simeq S^{-1}(M)/S^{-1}(N)$.

4. Si $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$, entonces $M \otimes_R S^{-1}R \simeq S^{-1}M$ como $S^{-1}R$-módulos.

5. $S^{-1}R$ es un R-módulo plano.

Demostración. Ver la Proposición 2.2.4 de [7]. □

Observación 2.4.13. Así, para el morfismo de anillos $\varphi : R \to S^{-1}R$ tenemos los siguientes funtores

$$\begin{aligned} - \otimes_R S^{-1}R : \mathbf{Mod}\text{-}R &\to \mathbf{Mod}\text{-}S^{-1}R \\ M &\mapsto M \otimes_R S^{-1}R \simeq S^{-1}M, \\ f &\mapsto f \otimes_R S^{-1}R \simeq S^{-1}f. \end{aligned}$$

Este funtor se le conoce comúnmente como **extensión de escalares**.

Por otro lado todo, $S^{-1}R$-módulo adquiere la estructura de R-módulo vía la fórmula

$$mr = m\varphi(r), \text{ para } r \in R \text{ y } m \in M_{S^{-1}R}.$$

Así mismo, todo $S^{-1}R$-homomorfismo $f_{S^{-1}R} : M_{S^{-1}R} \to N_{S^{-1}R}$ puede ser visto como R-homomorfismo

$$f_R(mr) := f_{S^{-1}R}(m\varphi(r)) = f_{S^{-1}R}(m)\varphi(r) = f_R(m)r.$$

Es decir, tenemos un funtor $U_\varphi : \mathbf{Mod}\text{-}S^1R \to \mathbf{Mod}\text{-}R$ llamado **restricción de escalares**. Este funtor es aditivo, esto es, conmuta con sumas directas finitas. Si φ es un epimorfismo de anillos, entonces U_φ es un funtor exacto, fiel y pleno.

Además $- \otimes_R S^{-1}R$ es un funtor adjunto a izquierda de U_φ. Ver Capítulo IV, Sección 9, Ejemplo 4 de [15].

Definición 2.4.14. Un ideal $\mathfrak{p}$ de R es llamado **primo** si para todo $a, b \in R$ tal que $ab \in \mathfrak{p}$, entonces $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$.

Definición 2.4.15. Dado un ideal primo $\mathfrak{p}$ de R, para el conjunto multiplicativamente cerrado $S = R - \mathfrak{p}$, se define la **localización de** R **en** $\mathfrak{p}$ como $R_{\mathfrak{p}} := S^{-1}R$.

La siguiente proposición explica por qué $R_{\mathfrak{p}}$ es llamado localización de R en $\mathfrak{p}$.

Proposición 2.4.16. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de un anillo conmutativo R, entonces $R_{\mathfrak{p}}$ tiene un único ideal maximal dado por

$$\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a}{s} : a \in \mathfrak{p} \text{ y } s \notin \mathfrak{p} \right\}.$$

Demostración. Denotamos $S = R - \mathfrak{p}$. Es claro que $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ es un ideal de $R_{\mathfrak{p}}$. Veamos que es maximal. Sea $x \in R_{\mathfrak{p}}$, entonces $x = \frac{r}{s}$ con $r \in R$ y $s \in S$. Como $\frac{r}{s} \in R_{\mathfrak{p}}$ es una unidad si y solo si $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ con $r' \in S$, tenemos que todas las no unidades están en $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. Por lo tanto, si I es un ideal de $R_{\mathfrak{p}}$ que contiene a un elemento $\frac{r}{s}$ con $r \in S$, entonces $I = R_{\mathfrak{p}}$. Se sigue que todo ideal propio de $R_{\mathfrak{p}}$ está contenido en $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. Por lo tanto, $R_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local con $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ como su único ideal maximal. $\square$

Con esto, tenemos que el anillo $R_{\mathfrak{p}}$ es local. Lo que nos permite usar el Teorema 2.4.7 y el Corolario 2.4.8.

Proposición 2.4.17. Sea R un anillo conmutativo y $R_{\mathfrak{p}}$ la localización por un ideal primo $\mathfrak{p}$. Entonces el morfismo inducido por la localización $\varphi : R \twoheadrightarrow R_{\mathfrak{p}}$ es un epimorfismo de anillos.

Demostración. Supongamos que tenemos el siguiente diagrama

$$R \xrightarrow{\varphi} R_{\mathfrak{p}} \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} A,$$

donde f, g son morfismos de anillos tales que $f \circ \varphi = g \circ \varphi$. Sea $\frac{a}{s} \in R_{\mathfrak{p}}$. Lo podemos reescribir como $\frac{a}{s} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s}$ y $\frac{1}{s} = \left(\frac{s}{1}\right)^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{s}\right) &= f\left(\frac{a}{1}\right) f\left(\frac{1}{s}\right), \\ &= f\left(\frac{a}{1}\right) f\left(\frac{s}{1}\right)^{-1}, \\ &= f\left(\varphi\left(a\right)\right) f\left(\varphi\left(s\right)\right)^{-1}, \\ &= g\left(\varphi\left(a\right)\right) g\left(\varphi\left(s\right)\right)^{-1}, \\ &= g\left(\frac{a}{s}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto $f = g$, es decir, φ es un epimorfismo de anillos. $\square$

Nos interesa ver qué propiedades se mantienen al realizar un cambio de anillos. El siguiente resultado estudia esto cuando tenemos el funtor restricción de escalares.

Proposición 2.4.18. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de un anillo conmutativo R y $\varphi : R \to R_{\mathfrak{p}}$ el morfismo de anillos inducido por la localización de R en $\mathfrak{p}$. Si $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R_{\mathfrak{p}}$, entonces

$$U_\varphi(E(M)) \simeq E(U_\varphi(M)).$$

Demostración. Dividimos la prueba en varias partes:

$\underline{U_\varphi(E(M)) \text{ es un } R\text{-módulo inyectivo:}}$ Consideremos el siguiente diagrama en $\mathbf{Mod}\text{-}R$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L_R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & N_R \\ & U_\varphi(E(M)) & \end{tikzcd}$$

Veamos que existe $g : N_R \to U_\varphi(E(M))$ que hace conmutar al diagrama anterior. Aplicamos el funtor de extensión de escalares S^{-1}. Por (5) de la Proposición 2.4.12 tenemos que $S^{-1}R$ es plano como R-módulo, por lo tanto $S^{-1}f$ también es un monomorfismo. Tenemos así el siguiente diagrama en $\mathbf{Mod}\text{-}S^{-1}R$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S^{-1}L_R \arrow[r, "S^{-1}f"] \arrow[d, "S^{-1}h"'] & S^{-1}N_R \\ & S^{-1}(U_\varphi(E(M))) \arrow[d, "\varepsilon_{E(M)}"'] & \\ & E(M) & \end{tikzcd}$$

donde $\varepsilon_{E(M)}$ es la counidad de la adjunción $\left(S^{-1}, U_\varphi\right)$ evaluada en $E(M)$. Como $E(M)$ es inyectivo, existe $t : S^{-1}N_R \to E(M)$ que hace conmutar al diagrama anterior, es decir,

$$t \circ S^{-1}f = \varepsilon_{E(M)} \circ S^{-1}h.$$

Definimos $g := U_\varphi(t) \circ \eta_{N_R}$, donde η_{N_R} es la unidad de la adjunción $\left(S^{-1}, U_\varphi\right)$ evaluada en N_R. Veamos que $g \circ f = h$ para concluir la inyectividad de $U_\varphi(E(M))$. Para tal fin, se debe tener en cuenta que al ser η una transformación natural, se tienen los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} L_R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_{L_R}"'] & N_R \arrow[d, "\eta_{N_R}"] \\ U_\varphi\left(S^{-1}L_R\right) \arrow[r, "U_\varphi\left(S^{-1}f\right)"'] & U_\varphi\left(S^{-1}N_R\right) \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} L_R \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\eta_{L_R}"'] & U_\varphi\left(E\left(M\right)\right) \arrow[d, "\eta_{U_\varphi(E(M))}"] \\ U_\varphi\left(S^{-1}L_R\right) \arrow[r, "U_\varphi\left(S^{-1}h\right)"'] & U_\varphi\left(S^{-1}\left(U_\varphi\left(E\left(M\right)\right)\right)\right) \end{tikzcd}$$

Luego,

$$\begin{aligned} g\circ f &= \left(U_\varphi\left(t\right)\circ\eta_{N_R}\right)\circ f = U_\varphi\left(t\right)\circ\left(\eta_{N_R}\circ f\right) \\ &= U_\varphi\left(t\right)\circ\left(U_\varphi\left(S^{-1}f\right)\circ\eta_{L_R}\right) = \left(U_\varphi\left(t\right)\circ U_\varphi(S^{-1}f)\right)\circ\eta_{L_R} \\ &= U_\varphi\left(t\circ S^{-1}f\right)\circ\eta_{L_R} = U_\varphi\left(\varepsilon_{E(M)}\circ S^{-1}h\right)\circ\eta_{L_R} \\ &= \left(U_\varphi\left(\varepsilon_{E(M)}\right)\circ U_\varphi(S^{-1}h)\right)\circ\eta_{L_R} = U_\varphi\left(\varepsilon_{E(M)}\right)\circ\left(U_\varphi\left(S^{-1}h\right)\circ\eta_{L_R}\right) \\ &= U_\varphi\left(\varepsilon_{E(M)}\right)\circ\left(\eta_{U_\varphi(E(M))}\circ h\right) = \left(U_\varphi\left(\varepsilon_{E(M)}\right)\circ\eta_{U_\varphi(E(M))}\right)\circ h = h, \end{aligned}$$

donde $U_\varphi\left(\varepsilon_{E(M)}\right)\circ\eta_{U_\varphi(E(M))} = \mathrm{id}_{E(M)}$ por propiedades de la unidad en las adjunciones.

<u>Isomorfismo entre $U_\varphi\left(E\left(M\right)\right)$ y $E\left(U_\varphi\left(M\right)\right)$:</u> Dado $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R_\mathfrak{p}$, tomemos su envoltura inyectiva $i : M \rightarrowtail E\left(M\right)$. Consideremos el funtor restricción de escalares inducido por φ

$$U_\varphi : \mathbf{Mod}\text{-}R_\mathfrak{p} \longrightarrow \mathbf{Mod}\text{-}R.$$

Por la Proposición 2.4.17 tenemos que φ es un epimorfismo, por lo cual U_φ es pleno y fiel.

En la primer parte vimos que $U_\varphi\left(E\left(M\right)\right)$ es un R-módulo inyectivo. Además $U_\varphi\left(i\right)$ es un monomorfismo pues U_φ es exacto. Quedando por ver que $U_\varphi\left(i\right)$ es minimal. Sea $h : U_\varphi\left(E\left(M\right)\right) \to U_\varphi\left(E\left(M\right)\right)$ tal que el siguiente diagrama conmuta en $\mathbf{Mod}\text{-}R$

$$\begin{tikzcd} U_\varphi\left(M\right) \arrow[r, "U_\varphi(i)"] \arrow[dr, "U_\varphi(i)"'] & U_\varphi\left(E\left(M\right)\right) \arrow[d, "h"] \\ & U_\varphi\left(E\left(M\right)\right) \end{tikzcd} \qquad \left(h\circ U_\varphi\left(i\right) = U_\varphi\left(i\right)\right).$$

Como U_φ es pleno y fiel, existe un único $g : E\left(M\right) \to E\left(M\right)$ tal que $h = U_\varphi\left(g\right)$. Así tenemos que

$$U_\varphi\left(i\right) = h\circ U_\varphi\left(i\right) = U_\varphi\left(g\right)\circ U_\varphi\left(i\right) = U_\varphi\left(g\circ i\right).$$

Al ser U_φ fiel, la igualdad anterior implica que $i = g\circ i$. Como i es minimal, tenemos que g es un $R_\mathfrak{p}$-isomorfismo, entonces h es un R-isomorfismo. Por lo tanto $U_\varphi\left(i\right)$ es la envoltura inyectiva de $U_\varphi\left(M\right)$ en $\mathbf{Mod}\text{-}R$. El Teorema 1.5.15 nos dice que la envoltura inyectiva es única salvo isomorfismos, tenemos así $U_\varphi\left(E\left(M\right)\right) \simeq E\left(U_\varphi\left(M\right)\right)$. $\square$

En el Teorema 2 de [6] Couchot nos muestra cómo podemos relacionar la cocoherencia de un anillo con la coherencia de la localización de tal anillo por un ideal primo. Lo siguiente, que es consecuencia de la proposición anterior y de las propiedades de la adjunción $(- \otimes_R R_\mathfrak{p}, U_\varphi)$.

Proposición 2.4.19. Sea R un anillo conmutativo y $\varphi : R \twoheadrightarrow R_\mathfrak{p}$ el morfismo de anillos inducido por la localización de R por un ideal primo $\mathfrak{p}$. El funtor restricción de escalares $U_\varphi : \mathbf{Mod}\text{-}R_\mathfrak{p} \to \mathbf{Mod}\text{-}R$ preserva y refleja $R_\mathfrak{p}$-módulos simples. Esto es, $S \in \mathbf{Mod}\text{-}R_\mathfrak{p}$ es simple si y solo si $U_\varphi(S) \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ es simple.

Esta proposición nos permite concluir algo más fuerte, esto es, el funtor restricción de escalares preserva y refleja módulos colibres de rango finito.

Corolario 2.4.20. Sea R un anillo conmutativo y $\varphi : R \twoheadrightarrow R_\mathfrak{p}$ el morfismo de anillos inducido por la localización de R por un ideal primo $\mathfrak{p}$. El funtor restricción de escalares $U_\varphi : \mathbf{Mod}\text{-}R_\mathfrak{p} \to \mathbf{Mod}\text{-}R$ preserva y refleja $R_\mathfrak{p}$-módulos colibres de rango finito. Esto es, $C \in \mathbf{Mod}\text{-}R_\mathfrak{p}$ es colibre de rango finito si y solo si $U_\varphi(C) \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ es colibre de rango finito.

Demostración. Como U_φ es aditivo, conmuta con sumas directas finitas. Entonces basta con ver que la afirmación es verdadera cuando $C = E(S)$ con $S \in \mathbf{Mod}\text{-}R_\mathfrak{p}$ simple. Por la Proposición 2.4.18 tenemos el isomorfismo $U_\varphi(E(S)) \simeq E(U_\varphi(S))$. Entonces el resultado es inmediato de la Proposición 2.4.19. $\square$

Para generalizar el resultado de Couchot, vamos a necesitar que el funtor restricción de escalares preserve y refleje módulos finitamente n-copresentados.

Proposición 2.4.21. Sea R un anillo conmutativo y $\varphi : R \twoheadrightarrow R_\mathfrak{p}$ el morfismo de anillos inducido por la localización de R por un ideal primo $\mathfrak{p}$. El funtor restricción de escalares $U_\varphi : \mathbf{Mod}\text{-}R_\mathfrak{p} \to \mathbf{Mod}\text{-}R$ preserva y refleja $R_\mathfrak{p}$-módulos finitamente n-copresentados. Esto es, $M \in \mathcal{FCP}_n(R_\mathfrak{p})$ si y solo si $U_\varphi(M) \in \mathcal{FCP}_n(R)$.

Demostración.

- $(\Rightarrow)$ Sea $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R_\mathfrak{p}$ finitamente n-copresentado. Tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_n$$

  donde C_i es colibre de rango finito para todo $i = 0, \ldots, n$. Aplicamos U_φ a la n-copresentación y obtenemos

$$0 \longrightarrow U_\varphi(M) \longrightarrow U_\varphi(C_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow U_\varphi(C_n).$$

Por el Corolario 2.4.20 tenemos que $U_\varphi(C_i)$ es colibre de rango finito para todo $i = 0, \ldots, n$. Tenemos así una n-copresentación para $U_\varphi(M)$, es decir, $U_\varphi(M) \in \mathcal{FCP}_n$.

- ($\Leftarrow$) Razonando por inducción. Para $n = 0$, sea $U_\varphi(M)$ finitamente cogenerado y veamos que M también lo es. Por (1) de la Proposición 2.1.5 tenemos $M \rightarrowtail \prod_{i\in I} E(S_i)$ con S_i simple para todo $i \in I$. U_φ conmuta con límites por ser un adjunto a derecha, entonces

$$U_\varphi(M) \rightarrowtail U_\varphi\left(\prod_{i\in I} E(S_i)\right) \simeq \prod_{i\in I} U_\varphi(E(S_i)) \simeq \prod_{i\in I} E(U_\varphi(S_i)).$$

Por la equivalencia entre (1) y (3) del Teorema 2.2.6 existe $J \subseteq I$ finito y un monomorfismo $U_\varphi(M) \rightarrowtail \bigoplus_{j\in J} E(U(S_j)) = U\left(\bigoplus_{j\in J} E(S_j)\right)$. Aplicamos $- \otimes_R R_\mathfrak{p}$ y obtenemos el monomorfismo

$$M \simeq U_\varphi(M) \otimes_R R_\mathfrak{p} \rightarrowtail U_\varphi\left(\bigoplus_{j\in J} E(S_j)\right) \otimes_R R_\mathfrak{p} \simeq \bigoplus_{j\in J} E(S_j).$$

Donde los isomorfismos anteriores son consecuencia de la Proposición 3.4.1 de [3]. Así, por el Corolario 2.2.12 M es finitamente cogenerado.

Supongamos que se cumple para n, esto es, si $U_\varphi(M) \in \mathcal{FCP}_n$, entonces $M \in \mathcal{FCP}_n$. Veamos que se cumple para $n+1$. Tomemos $U_\varphi(M) \in \mathcal{FCP}_{n+1}$, en particular $U_\varphi(M) \in \mathcal{FCP}_n$. Por hipótesis inductiva $M \in \mathcal{FCP}_n$, tenemos así una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

con C colibre de rango finito y $L \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Aplicamos U_φ a la sucesión y obtenemos

$$0 \longrightarrow U_\varphi(M) \longrightarrow U_\varphi(C) \longrightarrow U_\varphi(L) \longrightarrow 0.$$

Con $U_\varphi(C)$ colibre de rango finito por el Corolario 2.4.20. Como $U_\varphi(M) \in \mathcal{FCP}_{n+1}$ entonces por (3) del Teorema 2.3.5 tenemos que $U_\varphi(L) \in \mathcal{FCP}_n$. Por hipótesis inductiva $L \in \mathcal{FCP}_n$. Así, usando (1) del Teorema 2.3.5 $M \in \mathcal{FCP}_{n+1}$.

$\square$

De la proposición anterior podemos concluir el siguiente corolario.

Corolario 2.4.22. Si R un anillo conmutativo y n-cocoherente, entonces para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R, la localización $R_\mathfrak{p}$ es n-cocoherente.

Demostración. Tome $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R_{\mathfrak{p}}$ en $\mathcal{FCP}_n$ y veamos que está en $\mathcal{FCP}_{n+1}$. Por la Proposición 2.4.21 $U_{\varphi}(M) \in \mathcal{FCP}_n$. Por hipótesis R es n-cocoherente, entonces $U_{\varphi}(M) \in \mathcal{FCP}_{n+1}$. Nuevamente por la Proposición 2.4.21 tenemos que $M \in \mathcal{FCP}_{n+1}$. Por lo tanto $R_{\mathfrak{p}}$ es n-cocoherente. □

Por la Proposición 2.4.16 tenemos que $R_{\mathfrak{p}}$ tiene un único ideal maximal, o equivalentemente, es un anillo local. Así por el resultado anterior y el Corolario 2.4.8 tenemos el siguiente corolario. Este es presentado por Couchot pero para $n = 1$, podemos ver que también es verdadero para $n \geq 0$.

Corolario 2.4.23. Si R un anillo conmutativo y n-cocoherente, entonces para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R, la localización $R_{\mathfrak{p}}$ es n-coherente.

Demostración. Es inmediato del Corolario 2.4.8 debido a que $R_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local. □

La siguiente observación nos muestra que no todos los resultados al ser dualizados son verdaderos.

Observación 2.4.24. Vimos en la Proposición 1.1.22 que para todo $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ se cumple que $M = \varinjlim_{I} M_i$ donde los M_i son submódulos de M finitamente generados. El resultado dual no siempre se cumple, esto es, no todo R-módulo M es el límite inverso de cocientes de M finitamente cogenerados. El contraejemplo de esta afirmación es mostrado por Hiremath en [10].

Capítulo 3

Proyectivos relativos a $\mathcal{FCP}_n$

En este último capítulo estudiaremos parte del álgebra homológica relativa a la clase $\mathcal{FCP}_n$, es decir, vamos a a estudiar nociones de proyectividad relativa a módulos de tipo cofinito. Para esto tomamos como base el artículo de Zhu [19]. En este artículo se presentan propiedades de los módulos proyectivos relativos a la clase $\mathcal{FCP}_n$. También se estudian las sucesiones exactas n-copuras como generalización de las sucesiones exactas copuras, las cuales tienen una propiedad de exactitud con respecto al funtor $\mathrm{Hom}_R(-, F)$ con $F \in \mathcal{FCP}_n$. Por último tenemos los anillos n-cohereditarios, definidos a partir de cocientes en la clase $\mathcal{FCP}_{n-1}$. Presentamos caracterizaciones de este tipo de anillos por medio de la dimensión inyectiva de la clase $\mathcal{FCP}_n$ y estudiamos cómo se relacionan con los anillos n-cocoherentes.

3.1. Módulos (n, d)-proyectivos

Empezaremos hablando de los módulos (n, d)-proyectivos. Estos son los que tienen una propiedad de anulación con el funtor $\mathrm{Ext}_R^{d+1}(-, F)$ cuando $F \in \mathcal{FCP}_n$. Cuando tomamos $d = 0$ obtendremos una clase de R-módulos a la que llamaremos $\mathcal{FCP}_n$-proyectivos, que representan el concepto dual de los $\mathcal{FP}_n$-inyectivos (ver Definición 3.1 de [5]). Vimos en (4) del Ejemplo 1.4.13 que la clase los R-módulos $\mathcal{FP}_n$-inyectivos son la mitad derecha de una par de cotorsión completo, el cual es además hereditario si y solo si el anillo R es n-coherente. Es de interés saber si la clase de los módulos $\mathcal{FCP}_n$-proyectivos es la mitad izquierda de un par de cotorsión completo y bajo cuáles condiciones tenemos un par de cotorsión hereditario. Para tratar de responder a estas cuestiones estudiaremos algunas propiedades de esta clase de R-módulos.

Definición 3.1.1. Sean $n, d \in \mathbb{N}$. Diremos que $M \in$ **Mod**-R es (n, d)**-proyectivo** si $\operatorname{Ext}_R^{d+1}(M, F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{FCP}_n$. Esta clase de R-módulos la denotamos por (n, d)-**Proj**. Si $d = 0$, vamos a referirnos por módulos $\mathcal{FCP}_n$**-proyectivos** a los $(n, 0)$-proyectivos y denotamos la clase por

$$(n, 0)\text{-}\mathbf{Proj} = \mathcal{FCP}_n\text{-}\mathbf{Proj},$$

siguiendo una notación parecida a la usada en para el concepto dual, los R-módulos $\mathcal{FP}_n$-inyectivos, estudiados en [5].

Observación 3.1.2. De la definición podemos notar lo siguiente.

1. En la Observación 2.3.2 vimos que $\mathcal{FCP}_n \subseteq \mathcal{FCP}_m$ siempre que $m \leq n$. Entonces si fijamos d se cumple que (m, d)-**Proj** $\subseteq (n, d)$-**Proj**. En particular, para todo d tenemos que **Proj** $\subseteq (n, d)$-**Proj**.

2. La clase $\mathcal{FCP}_n$-**Proj** es el complemento ortogonal a izquierda de $\mathcal{FCP}_n$, es decir, $\mathcal{FCP}_n$-**Proj** $= {}^{\perp_1}(\mathcal{FCP}_n)$ (Ver Definición 1.4.1). Entonces, por la Observación 1.4.2 y por (1) de la Definición 1.4.8 vamos a tener que la clase $\mathcal{FCP}_n$ genera el par de cotorsión
$$\left(\mathcal{FCP}_n\text{-}\mathbf{Proj}, (\mathcal{FCP}_n\text{-}\mathbf{Proj})^{\perp_1}\right).$$

Vimos que el dual del Teorema de Eklof y Trlifaj 1.4.11 no es verdadero. Tenemos así el siguiente problema abierto.

Pregunta 3.1.3. ¿Es el par de cotorsión generado por la clase $\mathcal{FCP}_n$

$$\left(\mathcal{FCP}_n\text{-}\mathbf{Proj}, (\mathcal{FCP}_n\text{-}\mathbf{Proj})^{\perp_1}\right)$$

un par completo?

Zhu en la Proposición 2.3 de [19] nos muestra que la clase (n, d)-**Proj** es cerrada por sumas directas y sumandos directos. A este resultado se le puede agregar la cerradura por extensiones, obteniendo así la siguiente proposición.

Proposición 3.1.4 (Propiedades de (n, d)-**Proj**)**.** Sean $n, d \in \mathbb{N}$. Entonces, la clase (n, d)-**Proj** satisface las siguientes propiedades:

1. (n, d)-**Proj** es cerrada por sumas directas.

2. (n, d)-**Proj** es cerrada por sumandos directos.

3. (n, d)-**Proj** es cerrada por extensiones.

Demostración.

1. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia en (n, d)-**Proj**. Por la Proposición 1.3.17 tenemos el siguiente isomorfismo natural

$$\operatorname{Ext}_R^{d+1}\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, F\right) \cong \prod_{i \in I} \operatorname{Ext}_R^{d+1}(M_i, F).$$

Si $F \in \mathcal{FCP}_n$, entonces $\operatorname{Ext}_R^1(M_i, F) = 0$ para todo $i \in I$. Luego,

$$\operatorname{Ext}_R^{d+1}\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, F\right) \cong \prod_{i \in I} 0 = 0.$$

Por lo tanto, al ser $F \in \mathcal{FCP}_n$ arbitrario, $\bigoplus_{i \in I} M_i \in (n, d)$-**Proj**.

2. Sean $A, B \in$ **Mod**-R, tales que $A \oplus B \in (n, d)$-**Proj**. Nuevamente por la Proposición 1.3.17, para todo $F \in \mathcal{FCP}_n$ tenemos el siguiente isomorfismo natural

$$0 = \operatorname{Ext}_R^{d+1}(A \oplus B, F) \cong \operatorname{Ext}_R^{d+1}(A, F) \oplus \operatorname{Ext}_R^{d+1}(B, F).$$

Por lo tanto, $\operatorname{Ext}_R^{d+1}(A, F) = \operatorname{Ext}_R^{d+1}(B, F) = 0$, y al ser $F \in \mathcal{FCP}_n$ arbitrario, se tiene que A y $B \in (n, d)$-**Proj**.

3. Sean $A, B \in (n, d)$-**Proj** y $M \in$ **Mod**-R una extensión de B por A, es decir, tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

Considere $F \in \mathcal{FCP}_n$. Aplicamos $\operatorname{Hom}_R(-, F)$, y por la Proposición 1.3.13 se obtiene la sucesión exacta

$$\operatorname{Ext}_R^{d+1}(B, F) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{d+1}(M, F) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{d+1}(A, F).$$

Como $\operatorname{Ext}_R^{d+1}(A, F) = \operatorname{Ext}_R^{d+1}(B, F) = 0$ ya que $A, B \in (n, d)$-**Proj**, por la exactitud de la sucesión se tiene que $\operatorname{Ext}_R^{d+1}(M, F) = 0$. Al ser $F \in \mathcal{FCP}_n$ arbitrario, entonces $M \in (n, d)$-**Proj**.

$\square$

El Teorema 5.5 de [5] da una equivalencia entre los anillos n-coherentes y cuando la clase $\mathcal{FP}_n$-**Inj** es la mitad derecha de un par de cotorsión hereditario. En busca de dualizar ese resultado obtuvimos el siguiente.

Proposición 3.1.5. Sea $n \geq 1$. Considere las siguientes afirmaciones:

1. R es un anillo n-cocoherente.
2. $\mathcal{FCP}_n$-$\mathbf{Proj} = \mathcal{FCP}_\infty$-$\mathbf{Proj}$.
3. $\mathcal{FCP}_n$-$\mathbf{Proj} = \mathcal{FCP}_{n+1}$-$\mathbf{Proj}$.
4. La clase $\mathcal{FCP}_n$-**Proj** es cerrada por kérneles de epimorfismos.
5. $\left(\mathcal{FCP}_n\text{-}\mathbf{Proj}, (\mathcal{FCP}_n\text{-}\mathbf{Proj})^{\perp_1}\right)$ es un par de cotorsión hereditario.

Se tienen las implicaciones $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5$.

Demostración.

- $(1 \Rightarrow 2)$ Como R es n-cocoherente tenemos por la Proposición 2.4.5 que $\mathcal{FCP}_n = \mathcal{FCP}_\infty$, entonces
$$\mathcal{FCP}_n\text{-}\mathbf{Proj} = {}^{\perp_1}(\mathcal{FCP}_n) = {}^{\perp_1}(\mathcal{FCP}_\infty) = \mathcal{FCP}_\infty\text{-}\mathbf{Proj}.$$

- $(2 \Rightarrow 3)$ A partir de (1) de la Observación 3.1.2 se tiene la siguiente cadena de inclusiones para $d = 0$,
$$\mathcal{FCP}_0\text{-}\mathbf{Proj} \subseteq \ldots \mathcal{FCP}_n\text{-}\mathbf{Proj} \subseteq \mathcal{FCP}_{n+1}\text{-}\mathbf{Proj} \subseteq \ldots \mathcal{FCP}_\infty\text{-}\mathbf{Proj},$$
pero por hipótesis tenemos que esta cadena colapsa en n. Por lo tanto $\mathcal{FCP}_n$-$\mathbf{Proj} = \mathcal{FCP}_{n+1}$-$\mathbf{Proj}$.

- $(3 \Rightarrow 4)$Veamos que la clase $\mathcal{FCP}_n$-**Proj** es cerrada por kérneles de epimorfismos. Tome una sucesión exacta corta
$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$
con $B, C \in \mathcal{FCP}_n$-**Proj** y sea $F \in \mathcal{FCP}_{n+1}$. Veamos que $A \in \mathcal{FCP}_n$-$\mathbf{Proj} = \mathcal{FCP}_{n+1}$-$\mathbf{Proj}$. Si miramos la sucesión exacta resultante de aplicar $\mathrm{Hom}_R(-, F)$ tenemos
$$\mathrm{Ext}^1_R(B, F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(A, F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_R(C, F).$$

Es inmediato por (3) que $\operatorname{Ext}_R^1(B,F)=0$. Por otro lado, como $F\in\mathcal{FCP}_{n+1}$ por la Proposición 2.3.8 tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

con K colibre de rango finito y $L\in\mathcal{FCP}_n$. Luego, por (2) de la Proposición 1.3.19 tenemos el siguiente isomorfismo natural $\operatorname{Ext}_R^2(C,F)\cong\operatorname{Ext}_R^1(C,L)$. Dado que $C\in\mathcal{FCP}_{n+1}$-**Proj** $=\mathcal{FCP}_n$-**Proj** y $L\in\mathcal{FCP}_n$, entonces $\operatorname{Ext}_R^2(C,F)=0$. Así, por la exactitud de la sucesión anterior tenemos que $\operatorname{Ext}_R^1(A,F)=0$, es decir, $A\in\mathcal{FCP}_{n+1}$-**Proj**.

- ($4\Rightarrow 5$) Es consecuencia directa de la Proposición 1.4.12 y por (2) de la Observación 3.1.2.

□

Para tener una caracterización más completa de anillos n-cocoherentes en términos de $\mathcal{FCP}_n$-**Proj** nos falta la implicación $5\Rightarrow 1$. Una limitación que tenemos si planteamos dualizar los argumentos de [5] en la demostración de que R es n-coherente si y solo si $\mathcal{FP}_n$-**Inj** es cerrada por cokérneles de epimorfismos, es no saber si el dual del Teorema 2.1.10 de [9] es verdadero.

Si bien no sabemos si en general la clase $\mathcal{FCP}_n$-**Proj** es cerrada por kérneles de epimorfismos o que esta propiedad de cerradura implique la n-cocoherencia de R, tenemos una propiedad un poco más particular cuando tomamos el kernel de un epimorfismo $P\twoheadrightarrow C$ donde $P\in$ **Proj** y $C\in(n,d)$-**Proj**. Esta es la siguiente, y podemos encontrarla en el artículo de Zhu [19] como la Proposición 2.4.

Proposición 3.1.6. Sea $P\in$ **Mod**-R proyectivo y K un submódulo de P. Si $P/K\in(n,d)$-**Proj**, entonces $K\in(n+1,d)$-**Proj**.

Demostración. Considere la sucesión exacta canónica

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow P/K \longrightarrow 0.$$

Al aplicar $\operatorname{Hom}_R(-,F)$, con $F\in\mathcal{FCP}_{n+1}$, obtenemos la sucesión exacta

$$\operatorname{Ext}_R^{d+1}(P,F) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{d+1}(K,F) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{d+2}(P/K,F) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{d+2}(P,F).$$

Como P es proyectivo, $\operatorname{Ext}_R^{d+1}(P,F) = 0 = \operatorname{Ext}_R^{d+2}(P,F)$. Por lo tanto, tenemos que $\operatorname{Ext}_R^{d+1}(K,F) \cong \operatorname{Ext}_R^{d+2}(P/K,F)$. Por otro lado, por un argumento similar al usado en la prueba de la implicación $3 \Rightarrow 4$ de la Proposición 3.1.5, y de la hipótesis que $P/K \in (n,d)$-**Proj**, se tiene que $\operatorname{Ext}_R^{d+2}(P/K,F) = 0$. Por lo tanto, $\operatorname{Ext}_R^{d+1}(K,F) = 0$, es decir $K \in (n+1,d)$-**Proj**. □

3.2. Sucesiones exactas cortas n-copuras

El concepto de copureza puede rastrearse a los trabajos de C. P. Walker en 1963, B. Stenström en 1966 y D. P. Choudhury y K. Tewari en 1979. La noción que estudiaremos la presenta Hiremath en 1984 en [11]. En este artículo demuestra propiedades que relacionan la copureza con los V-anillos, y además muestra propiedades que relacionan las sucesiones exactas cortas puras con las copuras. Acá nos centraremos en usar este concepto para dar descripciones y propiedades de la clase (n,d)-**Proj** y de $\mathcal{FCP}_n$-**Proj** a partir de este tipo de sucesiones y de su generalización, las sucesiones n-copuras.

Definición 3.2.1. Una sucesión exacta corta en **Mod**-R

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

es llamada **copura** si para todo $F \in \mathcal{FCP}_1$ se cumple que

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C,F) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(B,F) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(A,F) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

Sea $A \subseteq B$ y considere la sucesión canónica

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B/A \longrightarrow 0.$$

Si la sucesión es copura, diremos que A es **submódulo copuro** de B y que B/A es **cociente copuro** de B.

Por medio de las sucesiones exactas copuras, podemos dar la siguiente propiedad de cerradura para los R-módulos (n,d)-proyectivos, esta la muestra Zhu en la Proposición 2.5 de [19].

Proposición 3.2.2. Si $n \geq d+1$, la clase (n,d)-**Proj** es cerrada por cocientes copuros.

Demostración. Sea $B \in (n,d)$-**Proj** y tome $A \subseteq B$ tal que la sucesión canónica

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} B \longrightarrow B/A \longrightarrow 0$$

es copura. Queremos que $\operatorname{Ext}_R^{d+1}(B/A,F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{FCP}_n$. Tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "f_0"] & C_0 \arrow[r, "f_1"] & \cdots \arrow[r, "f_{d-1}"] & C_{d-1} \arrow[rr, "f_d"] \arrow[dr, two heads] & & C_d \arrow[r, "f_{d+1}"] & \cdots \arrow[r, "f_n"] & C_n \\
& & & & & \Omega^{-d}(F) \arrow[ur, tail] & & &
\end{tikzcd}$$

con C_i colibre de rango finito para todo $i = 0,1,\ldots,n$.

Definamos $L := \Omega^{-d}(F)$. Por (2) de la Proposición 1.3.19 tenemos que

$$\operatorname{Ext}_R^{d+1}(B/A,F) \cong \operatorname{Ext}_R^{1}(B/A,L)$$

ya que $n - d \geq 1$. Entonces, basta con ver que $\operatorname{Ext}_R^1(B/A,L) = 0$. De la sucesión podemos deducir que $L \in \mathcal{FCP}_{n-d}$, en particular tenemos que $L \in \mathcal{FCP}_1$. Por hipótesis $B \in (n,d)$-**Proj**, es decir $0 = \operatorname{Ext}_R^{d+1}(B,F) \cong \operatorname{Ext}_R^1(B,L)$. Al aplicar $\operatorname{Hom}_R(-,L)$ a la sucesión inicial obtenemos que

$$\varepsilon : 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(B/A,L) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(B,L) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}_R(A,L) \xrightarrow{h} \operatorname{Ext}_R^1(B/A,L) \longrightarrow 0$$

donde g^* es un epimorfismo dado que la sucesión de partida es copura y $L \in \mathcal{FCP}_1$. Por la exactitud de la sucesión tenemos que $\operatorname{Ker}(h) = \operatorname{Im}(g^*) = \operatorname{Hom}_R(A,L)$. Por lo tanto $0 = \operatorname{Im}(h) = \operatorname{Ext}_R^1(B/A,L)$, ya que h es un epimorfismo. $\square$

La copureza de las sucesiones exactas cortas viene determinada la exactitud de $\operatorname{Hom}_R(-,F)$ cuando $F \in \mathcal{FCP}_1$. Podemos generalizar de forma inductiva este concepto al considerar F un R-módulo finitamente n-copresentado.

Definición 3.2.3. Una sucesión exacta corta en **Mod**-R

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

es llamada n-**copura** si para todo $F \in \mathcal{FCP}_n$ se cumple que

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C,F) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(B,F) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(A,F) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

Sea $A \subseteq B$ y considere la sucesión canónica

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B/A \longrightarrow 0.$$

Si la sucesión es n-copura, diremos que A es **submódulo n-copuro** de B y que B/A es **cociente n-copuro** de B.

Podemos dar otras descripciones de los módulos $\mathcal{FCP}_n$-proyectivos mediante las sucesiones n-copuras, como lo muestra Zhu en el Teorema 2.7 de [19].

Teorema 3.2.4. Sea $n \geq 1$ y $M \in$ **Mod**-R. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $M \in \mathcal{FCP}_n$-**Proj**.
2. M es proyectivo con respecto a cualquier sucesión exacta de R-módulos

$$\varepsilon : 0 \longrightarrow F \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

   con $F \in \mathcal{FCP}_n$, es decir, la sucesión $\mathrm{Hom}_R(M, \varepsilon)$ es exacta.
3. Si $E/C \in \mathcal{FCP}_{n-1}$ donde E es un R-módulo colibre de rango finito y C es un submódulo de E, entonces cada R-homomorfismo $f : M \to E/C$ se factoriza a través de un R-homomorfismo de M a E, esto es, existe un R-homomorfismo $h : M \to E$ tal que $\pi \circ h = f$ donde $\pi : E \to E/C$ es la proyección canónica.
4. Cada sucesión exacta corta de R-módulos

$$0 \longrightarrow M'' \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

   es n-copura.
5. Existe una sucesión exacta corta de R-módulos n-copura

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

   con P proyectivo.
6. Existe una sucesión exacta corta de R-módulos n-copura

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

   con $P \in \mathcal{FCP}_n$-**Proj**.

Demostración.

- $(1 \Rightarrow 2)$ Tome $M \in \mathcal{FCP}_n$-**Proj** y considere una sucesión exacta de R-módulos

$$\varepsilon : 0 \longrightarrow F \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

  con $F \in \mathcal{FCP}_n$. Si le aplicamos $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ a la sucesión, por la Proposición 1.3.13 obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M, F).$$

  Pero por definición de $\mathcal{FCP}_n$-**Proj**, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_R(M, F) = 0$. De donde $\mathrm{Hom}_R(M, \varepsilon)$ es exacta.

- $(2 \Rightarrow 3)$ Supongamos $E/C \in \mathcal{FCP}_{n-1}$, donde E es colibre de rango finito y C es un submódulo de E. En particular, $E \in \mathcal{FCP}_\infty$. A partir de la sucesión exacta canónica

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\ i\ } E \xrightarrow{\ \pi\ } E/C \longrightarrow 0$$

  por (3) del Teorema 2.3.5 sabemos que $\mu(C) \geq \text{mín}\{\infty, n\} = n$. Entonces, $C \in \mathcal{FCP}_n$. Al ser M proyectivo respecto a esta sucesión, se obtiene que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, C) \xrightarrow{\ i_*\ } \mathrm{Hom}_R(M, E) \xrightarrow{\ \pi_*\ } \mathrm{Hom}_R(M, E/C) \longrightarrow 0$$

  es exacta. Tomamos $f \in \mathrm{Hom}_R(M, E/C)$. Al ser π_* un epimorfismo, existe $h \in \mathrm{Hom}_R(M, E)$ tal que $f = \pi_*(h) := \pi \circ h$.

- $(3 \Rightarrow 1)$ Queremos ver que $\mathrm{Ext}^1_R(M, C) = 0$ para todo $C \in \mathcal{FCP}_n$. Por la Proposición 2.3.8 tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\ i\ } E \xrightarrow{\ \pi\ } E/C \longrightarrow 0$$

  con E colibre de rango finito y $E/C \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Al aplicarle $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, C) \xrightarrow{\ i_*\ } \mathrm{Hom}_R(M, E) \xrightarrow{\ \pi_*\ } \mathrm{Hom}_R(M, E/C) \xrightarrow{\ d\ } \mathrm{Ext}^1_R(M, C) \longrightarrow 0.$$

  Por (3), tenemos que π_* es un epimorfismo, y $\mathrm{Ext}^1_R(M, E) = 0$ por ser E inyectivo. Por ser exacta la sucesión, tenemos que $\mathrm{Ker}(d) = \mathrm{Im}(\pi_*) = \mathrm{Hom}_R(M, E/C)$, entonces $0 = \mathrm{Im}(d) = \mathrm{Ext}^1_R(M, C)$ por ser d un epimorfismo.

- $(1 \Rightarrow 4)$ Considere la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M'' \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con $M \in \mathcal{FCP}_n$-**Proj**. Queremos ver que esta sucesión es n-copura. Tome entonces $C \in \mathcal{FCP}_n$. Al aplicar $\mathrm{Hom}_R(-, C)$ se obtiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M', C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', C) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M, C).$$

Como $M \in \mathcal{FCP}_n$-**Proj**, tenemos que $\mathrm{Ext}_R^1(M, C) = 0$, por lo cual la sucesión inicial permanece exacta después de aplicar $\mathrm{Hom}_R(-, C)$.

- $(4 \Rightarrow 5)$ Por (1) del Ejemplo 1.4.13, tenemos que **Mod**-R tiene suficientes proyectivos, por lo que existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con P proyectivo, y por hipótesis esta sucesión es n-copura.

- $(5 \Rightarrow 6)$ Es inmediata por (1) de la Observación 3.1.2, esto es, **Proj** $\subseteq \mathcal{FCP}_n$-**Proj**.

- $(6 \Rightarrow 1)$ Tenemos una sucesión n-copura

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\ i\ } P \xrightarrow{\ p\ } M \longrightarrow 0$$

con $P \in \mathcal{FCP}_n$-**Proj**. Por definición de n-copureza sabemos que al aplicarle $\mathrm{Hom}_R(-, C)$ con $C \in \mathcal{FCP}_n$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, C) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_R(P, C) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_R(K, C) \xrightarrow{d} \mathrm{Ext}_R^1(M, C) \longrightarrow 0$$

tenemos que i_* es un epimorfismo y $\mathrm{Ext}_R^1(P, C) = 0$ ya que $P \in \mathcal{FCP}_n$-**Proj**. Por la exactitud de la sucesión tenemos $\mathrm{Ker}(d) = \mathrm{Im}(i_*) = \mathrm{Hom}_R(K, C)$, entonces $0 = \mathrm{Im}(d) = \mathrm{Ext}_R^1(M, C)$ por ser d un epimorfismo. Así, $M \in \mathcal{FCP}_n$-**Proj**.

□

3.3. Dimensión proyectiva relativa a módulos de tipo cofinito

Teniendo las clases (n, d)-**Proj** podemos definir la siguiente dimensión homológica para R-módulos.

Definición 3.3.1. Dado $M \in$ **Mod**-R, la **dimensión** (n,d)**-proyectiva** de M está definida por

$$(n,d)\text{-}\operatorname{pd}_R(M) := \text{ínf}\left\{k \in \mathbb{N} : \operatorname{Ext}_R^{k+d+1}(M,C) = 0 \text{ para todo } C \in \mathcal{FCP}_n\right\}.$$

Si $d = 0$, la llamaremos **dimensión** $\mathcal{FCP}_n$**-proyectiva** de M y la denotamos por $\mathcal{FCP}_n\text{-}\operatorname{pd}(M)$.

Lema 3.3.2. Sea R un anillo n-cocoherente y M un R-módulo. Entonces $(n,d)\text{-}\operatorname{pd}(M) \leq k$ si y solo si $\operatorname{Ext}_R^{k+d+1}(M,C) = 0$ para todo $C \in \mathcal{FCP}_n$.

Demostración.

- $(\Rightarrow)$ Razonando por inducción sobre k.

  Veamos que la implicación se cumple para $k = 0$. Supongamos que $(n,d) - \operatorname{pd}(M) = 0$, es decir, tenemos que $\operatorname{Ext}_R^{d+1}(M,C) = 0$ para todo $C \in \mathcal{FCP}_n$.

  Ahora supongamos que la afirmación se cumple para $k-1$ y que $(n,d)\text{-}\operatorname{pd}(M) \leq k$. Queremos probar que $\operatorname{Ext}_R^{k+d+1}(M,C) = 0$ para todo $C \in \mathcal{FCP}_n$. Tenemos dos casos, el primero es $(n,d)\text{-}\operatorname{pd}(M) = k$. Si esto pasa, entonces

  $$k = \text{ínf}\left\{m \in \mathbb{N} : \operatorname{Ext}_R^{m+d+1}(M,C) = 0, \text{ para todo } C \in \mathcal{FCP}_n\right\}.$$

  En particular, $\operatorname{Ext}_R^{k+d+1}(M,C) = 0$ para todo $C \in \mathcal{FCP}_n$, es decir, tenemos (2).

  El otro caso es tener que $(n,d)\text{-}\operatorname{pd}(M) \leq k-1$. Si tomamos $C \in \mathcal{FCP}_n$, por ser R un anillo n-cocoherente y por la Proposición 2.4.5, tenemos que $C \in \mathcal{FCP}_{n+1}$. Entonces por la Proposición 2.3.8 tenemos una sucesión exacta corta

  $$0 \longrightarrow C \longrightarrow E \longrightarrow C' \longrightarrow 0,$$

  con E colibre de rango finito y $C' \in \mathcal{FCP}_n$. Mirando la sucesión exacta larga al aplicarle $\operatorname{Hom}_R(M,\text{-})$, tenemos

  $$\operatorname{Ext}_R^{k+d}(M,C') \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{k+d+1}(M,C) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{k+d+1}(M,E),$$

  donde $\operatorname{Ext}_R^{k+d}(M,C') = 0$ por la hipótesis inductiva y $\operatorname{Ext}_R^{k+d+1}(M,E) = 0$ por ser E inyectivo. Así, por la exactitud de la sucesión tenemos que $\operatorname{Ext}_R^{k+d+1}(M,C) = 0$ para todo $C \in \mathcal{FCP}_n$.

- $(\Leftarrow)$ Esta implicación es inmediata por la definición de $(n,d)\text{-}\operatorname{pd}(M)$.

$\square$

Obtenemos el siguiente corolario de forma inmediata por la demostración de la proposición anterior.

Corolario 3.3.3. Sea R un anillo n-cocoherente y $M \in (n,d)$**-Proj**. Entonces $\operatorname{Ext}_R^{d+k+1}(M,C) = 0$ para todo $C \in \mathcal{FCP}_n$ y $k \geq 0$. En otras palabras, si $M \in (n,d)$**-Proj**, entonces $M \in (n,d+k)$**-Proj** para todo $k \geq 0$

Podemos usar este corolario para dar otra cadena de inclusiones para las clases (n,d)**-Proj**.

Observación 3.3.4. Así como en (1) de la Observación 3.1.2 teníamos una cadena de contenciones al fijar d, cuando el anillo R es n-cocoherente por el Corolario 3.3.3 al fijar n vamos a tener que

$$(n,d)\text{-}\mathbf{Proj} \subseteq (n,d+k)\text{-}\mathbf{Proj}$$

para todo $k \geq 0$. De hecho vamos a tener que $(n,d)\text{-}\mathbf{Proj} = \bigcap_{k\geq 0}(n,d+k)\text{-}\mathbf{Proj}$, teniendo así que la clase (n,d)**-Proj** es resolvente.

En la Proposición 3.10 de [5] nos muestran que la clase $\mathcal{FP}_n$-**Inj** es cerrada por submódulos y cocientes puros. Vimos en la Proposición 3.2.2 la clase $(n,d)-\mathbf{Proj}$ es cerrada por cocientes copuros si $n \geq d+1$. Es natural preguntarse si esta clase también cerrada por submódulos copuros. Usando la Observación 3.3.4 podemos ver que esto es verdadero cuando el anillo es n-cocoherente.

Proposición 3.3.5. Sea $d \geq 0$. Si R es un anillo n-cocoherente, entonces la clase (n,d)**-Proj** es cerrada por submódulos copuros.

Demostración. Sea $B \in (n,d)$**-Proj** y $A \subseteq B$ tal que la sucesión canónica

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B/A \longrightarrow 0$$

es copura. Como R es n-cocoherente, por la Proposición 2.4.5 tenemos que $\mathcal{FCP}_n = \mathcal{FCP}_\infty$, en particular, $(n,d)\text{-}\mathbf{Proj} = (\infty,d)\text{-}\mathbf{Proj}$. Por la Proposición 3.2.2 tenemos que (∞,d)**-Proj** es cerrado por cocientes copuros, es decir, tenemos que $B/A \in (\infty,d)$**-Proj**. Veamos que $\operatorname{Ext}_R^{d+1}(A,F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{FCP}_\infty$. Definamos $L := \Omega^{-d}(F) \in \mathcal{FCP}_\infty \subseteq \mathcal{FCP}_1$. Por (2) de la Proposición 1.3.19 tenemos que

$$\operatorname{Ext}_R^{d+1}(A,F) \cong \operatorname{Ext}_R^{1}(A,L) \ \text{ y } \operatorname{Ext}_R^{d+2}(B/A,F) \cong \operatorname{Ext}_R^{2}(B/A,L).$$

Si estudiamos la sucesión larga al aplicar $\mathrm{Hom}_R(-, L)$ a la sucesión inicial tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^1_R(B, L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(A, L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_R(B/A, L).$$

Por un lado tenemos $0 = \mathrm{Ext}^{d+1}_R(B, F) \cong \mathrm{Ext}^1_R(B, L)$. Ahora, por la Observación 3.3.4 tenemos que (∞, d)-**Proj** $\subseteq (\infty, d+1)$-**Proj**, entonces $B/A \in (\infty, d+1)$-**Proj**. Por lo tanto $0 = \mathrm{Ext}^{d+2}_R(B/A, F) \cong \mathrm{Ext}^2_R(B/A, L)$. Así, por la exactitud de la sucesión tenemos que $0 = \mathrm{Ext}^1_R(A, L) \cong \mathrm{Ext}^{d+1}_R(A, F)$. □

Comentamos que (2) de la Proposición 1.3.19 también es valida su versión dual, es decir tomar una resolución por proyectivos. Nuevamente, usando el Corolario 3.3.3 podemos cambiar la resolución por proyectivos por una resolución formada por elementos de la clase (n, d)-**Proj**.

Corolario 3.3.6. Sea R un anillo n-cocoherente y M un R-módulo. Si la sucesión

$$0 \longrightarrow P_k \xrightarrow{f_k} P_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

es exacta con $P_0, \ldots, P_{k-1} \in (n, d)$-**Proj**, entonces $\mathrm{Ext}^{d+k+1}_R(M, C) \cong \mathrm{Ext}^{d+1}_R(P_k, C)$ para todo $C \in \mathcal{FCP}_n$.

Demostración. Tomemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f_0) \longrightarrow P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

y veamos la sucesión exacta larga resultante al aplicarle $\mathrm{Hom}_R(-, C)$ con $C \in \mathcal{FCP}_n$. Tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^{d+k}_R(P_0, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{d+k}_R(\mathrm{Ker}(f_0), C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{d+k+1}_R(M, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{d+k+1}_R(P_0, C).$$

Así, por el Corolario 3.3.3 tenemos que $\mathrm{Ext}^{d+k}_R(P_0, C) = \mathrm{Ext}^{d+k+1}_R(P_0, C) = 0$. Como la sucesión es exacta, tenemos que $\mathrm{Ext}^{d+k}_R(\mathrm{Ker}(f_0), C) \cong \mathrm{Ext}^{d+k+1}_R(M, C)$. Podemos realizar este proceso para cada sucesión exacta corta $0 \to \mathrm{Ker}(f_i) \to P_i \to \mathrm{Ker}(f_{i-1}) \to 0$ con $i = 1, \ldots, k$. Por lo tanto $\mathrm{Ext}^{d+1}_R(P_k, C) \cong \mathrm{Ext}^{d+k+1}_R(M, C)$. □

Zhu en el Teorema 2.12 de [19] nos muestra cómo tomando anillos n-cocoherentes, se puede dar una caracterización de la dimensión (n, d)-proyectiva en términos de resoluciones por R-módulos en la clase (n, d)-**Proj**.

Teorema 3.3.7. Sea R un anillo n-cocoherente, $M \in$ **Mod**-R y $k \in \mathbb{N}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $(n,d)\text{-}\operatorname{pd}(M) \leq k$.

2. $\operatorname{Ext}_R^{k+d+1}(M,C) = 0$ para todo $C \in \mathcal{FCP}_n$.

3. $\operatorname{Ext}_R^{k+d+l}(M,C) = 0$ para todo $C \in \mathcal{FCP}_n$ y $l \in \mathbb{Z}^+$.

4. Si existe una sucesión exacta de R-módulos
$$0 \longrightarrow P_k \xrightarrow{f_k} P_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$
con $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1} \in (n,d)\text{-}\mathbf{Proj}$, entonces P_k también es (n,d)-proyectivo.

5. Existe una sucesión exacta de R-módulos
$$0 \longrightarrow P_k \xrightarrow{f_k} P_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$
con $P_0, P_1, \ldots, P_k \in (n,d)\text{-}\mathbf{Proj}$.

Demostración.

- $(1 \Leftrightarrow 2)$ Se obtiene por el Lema 3.3.2.

- $(2 \Rightarrow 3)$ Sea $C \in \mathcal{FCP}_n$. Como R es n-cocoherente, por la Proposición 2.4.5 se tiene que $C \in \mathcal{FCP}_\infty$, es decir, tenemos una sucesión exacta
$$0 \longrightarrow C \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots$$
con E_i colibre de rango finito para todo $i \in \mathbb{N}$, Observamos que $\Omega^{-k}(C) \in \mathcal{FCP}_\infty = \mathcal{FCP}_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por (2) de la Proposición 1.3.19 y para todo $l \geq 1$ tenemos por los siguientes isomorfismos naturales
$$\operatorname{Ext}_R^{k+d+l}(M,C) \cong \operatorname{Ext}_R^{k+d+1}\left(M, \Omega^{l-1}(C)\right) = 0,$$
donde la última igualdad la tenemos por hipótesis.

- $(3 \Rightarrow 2)$ se obtienen de forma inmediata.

- $(2 \Rightarrow 4)$ Supongamos que tenemos una sucesión exacta de R-módulos
$$0 \longrightarrow P_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$
con $P_{k-1}, \ldots, P_0 \in (n,d)\text{-}\mathbf{Proj}$. Queremos ver que P_k también está en $(n,d)\text{-}\mathbf{Proj}$. Sabemos por hipótesis que $\operatorname{Ext}_R^{k+d+1}(M,C) = 0$ para todo $C \in \mathcal{FCP}_n$, pero por el Corolario 3.3.6 tenemos los siguientes isomorfismos naturales
$$0 = \operatorname{Ext}_R^{k+d+1}(M,C) \cong \operatorname{Ext}_R^{d+1}(P_k,C),$$
por lo tanto tenemos que $P_k \in (n,d)\text{-}\mathbf{Proj}$.

- $(4 \Rightarrow 5)$ Como **Mod**-R tiene suficientes proyectivos, existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow P_k \xrightarrow{f_k} P_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

donde $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$ son proyectivos. Como $\mathbf{Proj} \subseteq (n,d)\text{-}\mathbf{Proj}$, se tiene que $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$ son (n,d)-proyectivos. Luego, por (4), se tiene que $P_k \in (n,d)\text{-}\mathbf{Proj}$.

- $(5 \Rightarrow 2)$ Por hipótesis tenemos que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow P_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

con $P_i \in (n,d)\text{-}\mathbf{Proj}$ para todo $i = 0, \dots, k$. Nuevamente usando el Corolario 3.3.6 tenemos

$$\operatorname{Ext}_R^{k+d+1}(M,C) \cong \operatorname{Ext}_R^{d+1}(P_k,C) = 0,$$

donde la última igualdad la tenemos porque $P_k \in (n,d)\text{-}\mathbf{Proj}$.

$\square$

Observación 3.3.8. Dada una clase $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{Mod}\text{-}R$ y $k \geq 0$, definimos la clase

$$\mathcal{X}_k^{\wedge} := \left\{ \begin{array}{c} M \in \mathbf{Mod}\text{-}R : \text{ existe una sucesión exacta} \\ 0 \longrightarrow X_k \longrightarrow X_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \text{ con } X_i \in \mathcal{X},\ \forall i = 0, \dots, k \end{array} \right\}$$

Bajo esta notación y por el resultado anterior, se puede observar que si R es n-cocoherente a derecha, entonces $(n, d+k)\text{-}\mathbf{Proj} = ((n,d)\text{-}\mathbf{Proj})_k^{\wedge}$.

3.4. Anillos n-cohereditarios

En 1956, la publicación "Homological Algebra" de Henri Cartan y Samuel Eilenberg consolidó la terminología y las herramientas que se utilizan en la teoría moderna de módulos. En este contexto, la dualización de resultados sobre módulos proyectivos llevó naturalmente al estudio de módulos inyectivos y, con ello, a la noción de anillos hereditarios y cohereditarios.

Definición 3.4.1. Diremos que un anillo R es n-**cohereditario** (a derecha) si todo cociente $(n-1)$-copresentado de un R-módulo colibre de rango finito es también inyectivo.

Es decir, si tenemos un epimorfismo $f : M \twoheadrightarrow N$ con $M \in \mathcal{FCP}_0 \cap \mathbf{Inj}$ y $N \in \mathcal{FCP}_{n-1}$, entonces $N \in \mathbf{Inj}$.

Zhu presenta este concepto en [19], con el nombre de "anillo n-cosemihereditario", dado que viene de la generalización de los anillos cosemihereditarios. Como una de las motivaciones de esta tesis es estudiar los conceptos duales a R-módulos finitamente n-presentados, R-módulos $\mathcal{FP}_n$-inyectivos, anillos n-coherentes y anillos n-hereditarios, pensamos que lo mejor es usar el término de "anillos n-cohereditarios" para el dual de este último.

El siguiente ejemplo lo presenta Xue en [17], donde con ayuda de un resultado de Miller, construye un anillo 1-cohereditario.

Ejemplo 3.4.2. Tomamos F un cuerpo finito y A un anillo intermedio entre el anillo de polinomios sobre F, $F[x]$ y el anillo de series formales sobre F, $F[[x]]$, que consiste de los elementos de la forma

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\, g_i(x)^{-1},$$

donde $f_i(x), g_i(x) \in F[x]$ y $g_i(x)$ tiene un inverso en $F[[x]]$ (es decir, el termino constante de $g_i(x)$ es no nulo). Tomemos Q el cuerpo de fracciones de A. Xue nos muestra que el anillo

$$R := \begin{pmatrix} A & Q \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

es 1-cohereditario.

Empezamos viendo una forma de saber si un anillo es n-cohereditario por medio de la dimensión inyectiva de los elementos de $\mathcal{FCP}_n$. Este resultado lo obtuvimos dualizando el Lema 8 de [4].

Proposición 3.4.3. Para $n \geq 2$, un anillo R es n-cohereditario si y solo si, $\mathrm{id}(M) \leq 1$ para todo $M \in \mathcal{FCP}_n$.

Demostración.

- ($\Rightarrow$) Supongamos que R es n-cosemihereditario. Tomemos $M \in \mathcal{FCP}_n$. Entonces por la Proposición 2.3.8 tenemos una sucesión exacta corta

  $$0 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

  con C colibre de rango finito y $L \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Sabemos que C es inyectivo y finitamente cogenerado por la Proposición 2.2.13, y como R es n-cohereditario se tiene que $L \in \mathbf{Inj}$. Así tenemos una corresolución por inyectivos para M de longitud 1, es decir, $\mathrm{id}(M) \leq 1$.

- ($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\mathrm{id}\,(M) \leq 1$ para todo $M \in \mathcal{FCP}_n$. Considere un epimorfismo $f : E \twoheadrightarrow N$ con $M \in \mathcal{FCP}_0 \cap \mathbf{Inj}$ y $N \in \mathcal{FCP}_{n-1}$, y considere la sucesión exacta corta
$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(f) \longrightarrow E \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0.$$
Por la Proposición 2.3.8 tenemos que $\mathrm{Ker}\,(f) \in \mathcal{FCP}_n$, y por hipótesis tenemos además que $\mathrm{id}\,(\mathrm{Ker}\,(f)) \leq 1$. Entonces $N \in \mathbf{Inj}$, y por lo tanto R es n-cohereditario.

$\square$

Como corolario del Lema 8 de [4], tenemos que si R es n-hereditario, entonces es n-coherente. El dual de este resultado también es verdadero y es el siguiente.

Corolario 3.4.4. Sea $n \geq 1$. Si R es n-cohereditario, entonces también es n-cocoherente.

Demostración. Sea $M \in \mathcal{FCP}_n$ y considere una sucesión exacta corta
$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$
con $C \in \mathcal{FCP}_0 \cap \mathbf{Inj}$ y $L \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Como R es n-cohereditario, entonces $L \in \mathbf{Inj}$. Como $\mathcal{FCP}_{n-1} \subseteq \mathcal{FCP}_0$, se tiene que $L \in \mathcal{FCP}_0 \cap \mathbf{Inj}$, o equivalentemente, L es colibre de rango finito. En particular, $L \in \mathcal{FCP}_\infty$, y así por el Teorema 2.3.5, tenemos que $\mu\,(M) = \infty$, es decir, $M \in \mathcal{FCP}_\infty$, por lo cual $\mathcal{FCP}_n = \mathcal{FCP}_\infty$. Por la Proposición 2.4.5 tenemos que R es n-cocoherente. $\square$

Vimos en el Corolario 2.4.8 que un anillo semilocal y n-cocoherente es n-coherente. Entonces nos preguntamos si hay una relación de este tipo para los anillos n-cohereditarios y n-hereditarios.

Pregunta 3.4.5. ¿Sea R un anillo semilocal y n-cohereditario, entonces es n-hereditario?

Con el siguiente lema vamos a tener una igualdad entre la clases de los R-módulos inyectivos y n-copresentados con los R-módulos n-copresentados y el complemento ortogonal a derecha de $\mathcal{FCP}_{n-1}$. Este resultado lo presenta Zhu en el Lema 3.4 de [19].

Lema 3.4.6. Sea $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ finitamente n-copresentado. Entonces M es inyectivo si y solo si, $\mathrm{Ext}^1_R\,(C, M) = 0$ para todo $C \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ tal que $C \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Escrito de otra forma, tenemos que
$$\mathcal{FCP}_n \cap \mathbf{Inj} = \mathcal{FCP}_n \cap \mathcal{FCP}_{n-1}^{\perp_1}.$$

Demostración.

- ($\Rightarrow$) Si M es inyectivo, entonces por la Proposición 1.3.14 tenemos que $\operatorname{Ext}^1_R(C, M) = 0$, para todo $C \in \mathbf{Mod}\text{-}R$, en particular para $C \in \mathcal{FCP}_{n-1}$.

- ($\Leftarrow$) Por la Proposición 2.3.8 tenemos una sucesión exacta corta

  $$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

  con E inyectivo finitamente cogenerado y $N \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Por hipótesis tenemos que $\operatorname{Ext}^1_R(N, M) = 0$. Por la Proposición 1.3.16, tenemos que la sucesión se escinde, es decir, M es sumando directo de E, y por (3) de la Proposición 1.3.3 tenemos que M es inyectivo.

$\square$

Zhu en el Teorema 3.7 de [19] nos muestra el siguiente resultado, el cual nos da equivalencias entre varios conceptos que presentamos anteriormente, como los son, anillos n-cohereditarios, dimensión $\mathcal{FCP}_n$-proyectiva, propiedades de cerradura para las clases **Proj** y $\mathcal{FCP}_n$-**Proj**.

Proposición 3.4.7. Para $n \geq 2$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones.

1. R es un anillo n-cohereditario.
2. $\mathcal{FCP}_n$-**Proj** es cerrada por submódulos.
3. Si $N \subseteq M$ con $M \in$ **Proj**, entonces $N \in \mathcal{FCP}_n$-**Proj**.
4. $\operatorname{Ext}^2_R(M, N) = 0$ para todo $M, N \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ tales que $N \in \mathcal{FCP}_n$ y $M \in \mathcal{FCP}_{n-2}$.

En particular, si cualquiera de la cuatro condiciones anteriores se cumple, se tiene que $\mathcal{FCP}_n\text{-}\operatorname{pd}(M) \leq 1$ para todo $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$.

Demostración.

- ($1 \Rightarrow 2$) Sea $N \subseteq M$ con $M \in \mathcal{FCP}_n$-**Proj**. Tenemos entonces una sucesión exacta corta

  $$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0.$$

  Vemos la sucesión exacta resultante al aplicarle $\operatorname{Hom}_R(-, C)$ con $C \in \mathcal{FCP}_n$, obteniendo

  $$\operatorname{Ext}^1_R(M, C) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(N, C) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_R(L, C).$$

Como $M \in \mathcal{FCP}_n$-**Proj**, entonces $\operatorname{Ext}_R^1(M,C)=0$. Por la Proposición 3.4.3 y (3) de la Proposición 1.3.22 tenemos que $\operatorname{Ext}_R^2(L,C)=0$. Así por la exactitud de la sucesión tenemos que $\operatorname{Ext}_R^1(N,C)=0$ para todo $C \in \mathcal{FCP}_n$, es decir, $N \in \mathcal{FCP}_n$-**Proj**.

- $(2 \Rightarrow 3)$ Se obtiene de forma inmediata dado que **Proj** $\subseteq \mathcal{FCP}_n$-**Proj**.

- $(3 \Rightarrow 1)$. Tome $M \in$ **Mod**-R. Sabemos que M es imagen epimórfica de un R-módulo P proyectivo, es decir, tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(f) \longrightarrow P \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0.$$

Por hipótesis tenemos que $\operatorname{Ker}(f) \in \mathcal{FCP}_n$-**Proj**. Tomemos $C \in \mathcal{FCP}_n$ y estudiemos la sucesión exacta al aplicarle $\operatorname{Hom}_R(-,C)$. Obtenemos

$$\operatorname{Ext}_R^1(\operatorname{Ker}(f),C) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^2(M,C) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^2(P,C),$$

donde $\operatorname{Ext}_R^1(\operatorname{Ker}(f),C)=\operatorname{Ext}_R^2(P,C)=0$ ya que $P \in$ **Proj** y $\operatorname{Ker}(f) \in \mathcal{FCP}_n$-**Proj**. Por lo tanto $\operatorname{Ext}_R^2(M,C)=0$ para todo $C \in \mathcal{FCP}_n$, es decir, $\mathcal{FCP}_n\text{-}\operatorname{pd}(M) \leq 1$.

Sea $C \in \mathcal{FCP}_n$. Tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow E \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

con E colibre de rango finito y $C' \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Para $M \in$ **Mod**-R, tenemos la sucesión exacta

$$\operatorname{Ext}_R^1(M,E) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(M,C') \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^2(M,C),$$

donde $\operatorname{Ext}_R^1(M,E)=0$ por ser E inyectivo y $\operatorname{Ext}_R^2(M,C)=0$ por la parte anterior. Entonces, $\operatorname{Ext}_R^1(M,C')=0$, por la Proposición 1.3.14 tenemos que C' es inyectivo y así $\operatorname{id}(C) \leq 1$. Por la Proposición 3.4.3 tenemos que R es un anillo n-cohereditario.

- $(1 \Rightarrow 4)$ Sea $N \in \mathcal{FCP}_n$. Tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow N' \longrightarrow 0$$

con E colibre de rango finito y $N' \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Por hipótesis R es n-cohereditario, por la Proposición 3.4.3 tenemos que $\operatorname{id}(N) \leq 1$, entonces $N' \in$ **Inj**. Para $M \in \mathcal{FCP}_{n-2}$, tenemos la sucesión exacta

$$\operatorname{Ext}_R^1(M,N') \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^2(M,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^2(M,E),$$

donde $\operatorname{Ext}_R^1(M,N')=\operatorname{Ext}_R^2(M,E)=0$ por N' y E ser inyectivos. Por lo tanto $\operatorname{Ext}_R^2(M,N)=0$ para $M \in \mathcal{FCP}_{n-2}$ y $N \in \mathcal{FCP}_n$.

- (4 $\Rightarrow$ 1) Usaremos la Proposición 3.4.3, es decir, para M finitamente n-copresentado veremos que $\mathrm{id}\,(M) \leq 1$. Por la Proposición 2.3.8 tenemos la siguiente sucesión exacta corta
$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$
con E colibre de rango finito y $N \in \mathcal{FCP}_{n-1}$. Por hipótesis tenemos que $0 = \mathrm{Ext}^2_R\,(C, M)$ con $C \in \mathcal{FCP}_{n-2}$. Pero $0 = \mathrm{Ext}^2_R\,(C, M) \cong \mathrm{Ext}^1_R\,(C, N)$. Por el Lema 3.4.6 se tiene que $N \in \mathbf{Inj}$, es decir, $\mathrm{id}\,(M) \leq 1$.

$\square$

Conclusiones y trabajos futuros

El objetivo principal de este trabajo era estudiar las propiedades de la clase $\mathcal{FCP}_n$ y el álgebra homológica relativa asociada a ésta. Una forma de guiarnos consistió en tomar propiedades de los módulos finitamente n-presentados y $\mathcal{FP}_n$-inyectivos, y estudiar las versiones duales, a saber, los módulos finitamente n-copresentados y $\mathcal{FCP}_n$-proyectivos. Entre los resultados que se pudieron dualizar está la Proposición 2.4.5, la cual nos dice que basta con saber si la clase $\mathcal{FCP}_n$ en **Mod**-R es gruesa para decir si el anillo R es n-cocoherente. Se mencionó anteriormente que Couchot en [6] nos muestra que si el anillo es semilocal, entonces podemos relacionar la clase $\mathcal{FP}_i$ con la clase $\mathcal{FCP}_i$ para $i = 0, 1$. Se pudo demostrar que esto es verdadero en general para todo $n \in \mathbb{N}$. Couchot omite algunos detalles en sus resultados, entonces parte importante del trabajo realizado consistió en rehacer varias de sus demostraciones. Tratando de generalizar el Teorema 2 de Couchot en [6], vimos que el funtor restricción de escalares tiene propiedades de reflexión sobre los módulos simples, colibres de rango finito, y finitamente n-copresentados. Estas propiedades son de gran utilidad para realizar dicha generalización.

Agregamos dos propiedades de cerradura para la clase (n, d)-**Proj**, la cerradura por extensiones y por submódulos copuros cuando el anillos es n-cocoherente. Concluimos en la Proposición 3.1.5 una cadena de implicaciones que relacionan los anillos n-cocoherentes con los pares de cotorsión hereditarios. Otra propiedad que obtuvimos por medio de dualizar un resultado conocido es la Proposición 3.4.3. Ésta nos dice que basta con conocer la dimensión inyectiva de todos los R-módulos en $\mathcal{FCP}_n$ para saber si R es un anillo n-cohereditario. De esta proposición se obtiene el Corolario 3.4.4, el cual nos dice que todo anillo R n-cohereditario, es n-coherente.

Consideramos que estos resultados son las principales contribuciones de mi trabajo de investigación.

Por otro lado, vimos en el desarrollo del trabajo que iban quedando afirmaciones que al dualizar, no sabemos si son verdaderas y se plantean como preguntas abiertas. Éstas son las siguientes:

- En la Proposición 2.2.4 vimos que un R-módulo es finitamente cogenerado si y solo si el zócalo es un submódulo esencial y finitamente cogenerado. ¿Esta caracterización se cumple si cambiamos finitamente cogenerado por finitamente n-copresentado?

- T. Zhao y M. Pérez en la Proposición 4.3.6 de [20] muestran que al tener un morfismo de anillos $\varphi : R \to S$ tal que φ hace que S sea fielmente plano, entonces, $M \in \mathcal{FP}_n(R)$ si y solo si $S \otimes_R M \in \mathcal{FP}_n(S)$. ¿Nos preguntamos si esto también es verdadero para $M \in \mathcal{FCP}_n(R)$?

- Vimos en (2) de la Observación 3.1.2 que la clase $\mathcal{FCP}_n$ genera un par de cotorsión. ¿Este par de cotorsión es completo?

- Tenemos en el Corolario 2.4.8 una forma de conectar los anillos n-cocoherentes con los n-coherentes, bajo la hipótesis de que R sea un anillo semilocal. ¿Esta hipótesis será suficiente para que un anillo n-cohereditario también sea n-hereditario?

- En la Proposición 3.3.5 se demostró que si R es n-cocoherente, entonces la clase (n, d)-**Proj** es cerrada bajo submódulos copuros para todo $d \geq 0$. Nos preguntamos si R es n-cocoherente en el caso donde se tiene al menos una clase (n, d)-**Proj** que sea cerrada por submódulos copuros, o si estas clases tienen siempre esa propiedad de cerradura para cualquier d. En particular, ¿un anillo R es n-cocoherente si y solo si $\mathcal{FCP}_n$-**Proj** es cerrada bajo submódulos copuros?

Bibliografía

[1] Frank Anderson and Kent Fuller. Rings and categories of modules. *Graduate Texts in Mathematics/Springer-Verlag*, 13, 1992.

[2] Driss Bennis, Habib Bouzraa, and Abdul-Qawe Kaed. On n-copresented modules and n-co-coherent rings. *International Electronic Journal of Algebra*, 12(12):162–174, 2012.

[3] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra: Basic category theory*, volume 1. Cambridge University Press, 1994.

[4] Daniel Bravo and Carlos E Parra. Torsion pairs over n-hereditary rings. *Communications in Algebra*, 47(5):1892–1907, 2019.

[5] Daniel Bravo and Marco A Pérez. Finiteness conditions and cotorsion pairs. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 221(6):1249–1267, 2017.

[6] François Couchot. Sur le dual de la notion de présentation finie. *CR Acad. Sci*, 281, 1975.

[7] Edgar E Enochs and Overtoun MG Jenda. *Relative homological algebra: Volume 1*, volume 30. Walter de Gruyter, 2011.

[8] Edgar E Enochs and Overtoun MG Jenda. *Volume 2 Relative Homological Algebra*. De Gruyter, 2011.

[9] Sarah Glaz. *Commutative coherent rings*, volume 1371. Springer, 2006.

[10] Veerabhadraiah Hiremath. Cofinitely generated and cofinitely related modules. *Acta Mathematica Hungarica*, 39(1-3):1–9, 1982.

[11] Veerabhadraiah Hiremath. Copure submodules. *Acta Mathematica Hungarica*, 44(1):3–12, 1984.

[12] John Jans. On co-noetherian rings. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(1):588–590, 1969.

[13] Leonid Positselski. A construction of complete cotorsion pairs in the relative context. In *Algebra seminar, Charles University, Prague*, 2020.

[14] Joseph J Rotman and Joseph J Rotman. *An introduction to homological algebra*, volume 2. Springer, 2009.

[15] Bo Stenström. *Rings and modules of quotients*. Springer, 1975.

[16] Peter Vámos. The dual of the notion of “finitely generated”. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(1):643–646, 1968.

[17] Weimin Xue. On co-semihereditary rings. *Science in China Series A: Mathematics*, 40:673–679, 1997.

[18] Weimin Xue. On n-presented modules and almost excellent extensions. *Communications in Algebra*, 27(3):1091–1102, 1999.

[19] Zhu Zhanmin. n-cocoherent rings, n-cosemihereditary rings and n-v-rings. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 40:809–822, 08 2014.

[20] Tiwei Zhao and Marco A Pérez. Relative fp-injective and fp-flat complexes and their model structures. *Communications in Algebra*, 47(4):1708–1730, 2019.