



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



FACULTAD DE
INGENIERÍA
UDELAR

Análisis de la nueva Red Geodésica Departamental de Montevideo

Ernesto dos Santos
Paula Michelena

Proyecto de grado presentado en Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República

En cumplimiento parcial de los requerimientos para la obtención del Título de Ingeniero
Agrimensor

Tutor Ing. Agrim. Jorge Faure Valbi.

Montevideo, Uruguay
2025

Página de aprobación

FACULTAD DE INGENIERÍA

El tribunal docente integrado por los abajo firmantes aprueba la Tesis de Investigación:

Título

.....

Autor/s

.....

Tutor

.....

Carrera

.....

Puntaje

.....

Tribunal

Profesor.....(Nombre y firma)

Profesor.....(Nombre y firma)

Profesor.....(Nombre y firma)

Fecha

Sumario

Agradecimientos.....	7
Resumen.....	8
Palabras Claves.....	9
1. Introducción.....	10
2. Objetivos.....	11
3. Marco Teórico.....	11
3.1. Sistemas de Referencia y Marcos de Referencia, Geodésicos.....	11
3.1.1. SIRGAS (Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas).....	12
3.1.2. Sistema de Referencia SIRGAS-ROU98.....	13
3.1.3. Marco de Referencia Geodésico REGNA-ROU y REGNAP-ROU.....	13
3.1.4. Marco de Referencia Geodésico de Montevideo: MRGMVD 2004.....	16
3.2. Posicionamiento Satelital.....	16
3.2.1. Principio del Posicionamiento Satelital.....	17
3.2.2. Posicionamiento Puntual o Absoluto.....	18
3.2.3. Método Diferencial.....	19
3.2.4. Post Proceso.....	20
3.2.5. Tiempo Real.....	20
3.2.6. Tipos de Efemérides.....	21
3.3. Datos Geodésicos.....	22
3.3.1. Datum vertical.....	22
3.3.2. Red Altimétrica Nacional.....	23
3.4. Alturas.....	25
3.4.3. Altura Nivelada.....	25
3.4.4. Alturas elipsoidales.....	26
3.4.5. Número Geopotencial.....	26
3.4.6. Alturas ortométricas.....	27
3.4.7. Alturas dinámicas.....	28
3.4.8. Alturas normales.....	28
3.5. Modelos Geoidales.....	29
3.5.1. Modelo Geoidal EGM2008.....	29
3.5.2. Modelo geoidal para Uruguay GEOUR06.....	30
3.5.3. Modelo geoidal para Uruguay UruGeoide 2023.....	30
3.6. Método de Ajuste de Mínimos Cuadrados.....	31
3.6.1. Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Magnitudes.....	32
3.6.2. Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones.....	33
3.6.3. Ley General de Propagación de Varianzas y Covarianzas.....	35
3.6.4. Propagación de Cofactores para AMC+M.....	36
3.6.5. Propagación de Cofactores para AMC+C.....	36
4. Metodología.....	38

4.1. Análisis de las observaciones realizadas por el Instituto Geográfico Militar.....	38
4.2. Procesamiento de observaciones satelitales a partir de estaciones permanentes.....	41
4.2.1. Post Proceso de vértices ocupados el día 21 de octubre de 2022.....	45
4.2.1. Post Proceso de vértices ocupados el día 19 de octubre de 2022.....	51
4.2.3. Post Proceso de vértices ocupados el día 13 de noviembre de 2023.....	58
4.2.4. Post Proceso de vértices ocupados el día 15 de noviembre de 2023.....	62
4.2.5. Post Proceso de vértices ocupados el día 17 de noviembre de 2023.....	70
4.4. Comparación del módulo del vector y la diferencia de altura elipsoidal entre coordenadas post procesadas con distintas bases permanentes.....	74
4.5. Determinación de las coordenadas para vértice IGM-034.....	77
4.3.1 Ajuste por Mínimos Cuadrados.....	86
4.3.2 Transformación de Helmert.....	92
4.4. Ajuste y posterior compensación de la Red de Nivelación.....	102
4.4.1 Cierres primarios.....	106
4.4.2 Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Magnitudes.....	107
4.4.3. Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones.....	113
4.4.3. Densificación de la Red de Nivelación luego del primer ajuste.....	117
4.4.4. Propagación de cofactores para las alturas ajustadas a partir de la densificación.....	152
4.5. Monografía del vértice IGM-034.....	156
5. Conclusiones.....	157
6. Bibliografía.....	159
7. Anexos.....	161

Índice de figuras

Figura 3.1. Estaciones de Referencia de Observación Continua. (Elaboración propia).....	15
Figura 3.2. Esquema Método Diferencial. (Neves, 2015).....	19
Figura 3.3. Relación entre los ceros históricos. (Elaboración propia).....	23
Figura 3.4. Líneas de Nivelación de Primer, Segundo y Tercer Orden (Rovera, 2012).....	24
Figura 3.5. Nivelación (Hofmann – Wellenhof y Moritz, 2005)	25
Figura 3.6. Altura elipsoidal (h). (SIRGAS: Boletín Informativo N°6. 2022).....	26
Figura 3.7. Esquema de alturas. (Survey Rental Sales, 2021).....	27
Figura 3.8. Altura normal (Hnorm) y ondulación del cuasi-geoide (ζ). (SIRGAS: Boletín Informativo N°6. 2022).....	28
Figura 4.1. Intervalo de tiempo aproximado de las observaciones realizadas en el año 2022.	39
Figura 4.2. Intervalo de tiempo aproximado de las observaciones realizadas en el año 2023.	39
Figura 4.3. Descarga de los archivos RINEX desde el software FileZilla.....	43
Figura 4.4. Descarga de efemérides precisas en software CGO.....	44
Figura 4.5. Vectores desde la base UYMO a los vértices ocupados el día 21 de octubre de 2022 en el software CGO.....	45

Figura 4.6. Vectores desde la base UYIF a los vértices ocupados el día 21 de octubre de 2022 en el software CGO.....	45
Figura 4.7. Diferencia en SIRGAS ROU 98.....	47
Figura 4.8. Diferencia en IGS 20 (Solución SIRGAS de la semana 2232)	48
Figura 4.9. Ubicación de los vértices IGM-011, IGM-012, IGM-013 y las estaciones permanentes (Figura realizada en Google Earth Pro).....	49
Figura 4.10. Ubicación del vértice IGM-012 (Monografía de estación, Instituto Geográfico Militar).....	51
Figura 4.11. Vectores desde la base UYMO a los vértices ocupados el 19 de octubre del 2022 en el software CGO.....	51
Figura 4.12. Vectores desde la base UYIF a los vértices ocupados el 19 de octubre de 2022 en el software CGO.....	52
Figura 4.13. Diferencias en SIRGAS ROU 98.....	54
Figura 4.14. Diferencias en IGS 20 (Solución SIRGAS de la semana 2232).....	55
Figura 4.15. Ubicación de los vértices y estaciones permanente (Figura realizada en Google Earth Pro).....	57
Figura 4.16. Registro fotográfico de la ubicación del vértice IGM-029.....	58
Figura 4.17. Imagen del vértice (Monografía, IGM).....	58
Figura 4.18. Apartado observaciones en la Monografía del vértice IGM-029 (IGM).....	58
Figura 4.19. Vectores desde la base UYMO a los vértices ocupados el 13 de noviembre del 2023 en software CGO.....	59
Figura 4.20. Vectores desde la base UYIF a los vértices ocupados el 13 de noviembre del 2023 en software CGO.....	59
Figura 4.21. Diferencia en SIRGAS ROU 98.....	61
Figura 4.22. Diferencia en IGS 20 (Solución SIRGAS de la semana 2288).....	61
Figura 4.23. Ubicación de los vértices y estaciones permanentes.....	62
Figura 4.24. Vectores desde la base UYMO a los vértices ocupados el 15 de noviembre del 2023 en software CGO.....	63
Figura 4.25. Vectores desde la base UYMO a los vértices ocupados el 15 de noviembre del 2023 en software CGO.....	64
Figura 4.26. Diferencia en SIRGAS ROU 98.....	67
Figura 4.27. Diferencia en IGS 20 (Solución SIRGAS de la semana 2288).....	67
Figura 4.28. Ubicación de los vértices IGM-03, IGM-02, IGM-06, IGM-018 y de las bases permanentes.....	69
Figura 4.29. Ubicación del vértice IGM-02 (Archivo fotográfico del IGM).....	71
Figura 4.30. Vectores desde las bases permanentes a los vértices ocupados el 17 de noviembre de 2023 en software CGO.....	72
Figura 4.31. Vectores desde las bases permanentes a los vértices ocupados el 17 de noviembre de 2023 en software CGO.....	72
Figura 4.32. Diferencia en SIRGAS ROU 98.....	73
Figura 4.33. Diferencia en IGS 20 (Solución SIRGAS de la semana 2288).....	74
Figura 4.34. Ubicación de los vértices y de las bases permanentes.....	76
Figura 4.35. Módulo del vector y diferencia de las alturas elipsoidales en el sistema de referencia IGS 20.....	77

Figura 4.36. Módulo del vector y diferencia de las alturas elipsoidales en el sistema de referencia SIRGAS ROU 98.....	77
Figura 4.37. Ocupación del vértice IGM-034.....	80
Figura 4.38. Ajuste de la antena sobre el mojón.....	81
Figura 4.39. Vectores de las estaciones permanentes al vértice IGM-034.....	82
Figura 4.40. Discrepancias en las coordenadas obtenidas desde las bases permanentes: UYMO y MTV1, en cada software.....	86
Figura 4.41. Red de Nivelación.....	105
Figura 4.42. Primera etapa del ajuste de la Red de Nivelación.....	106
Figura 4.43. Representación del tramo 13-11.....	118
Figura 4.44. Representación del tramo 13-11.....	120
Figura 4.45. Representación del tramo 10608A-m1f.....	124
Figura 4.46. Representación del tramo 10608A-1.18.031.....	127
Figura 4.47. Representación del tramo 1.18.031-1.18.033.....	130

Índice de tablas

Tabla 3.1: Descripción de Líneas de Altimetría Nacional (Rovera et al., 2008).....	24
Tabla 4.1. Análisis de las observaciones GNSS realizadas por el Instituto Geográfico Militar..	39
Tabla 4.2. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYMO.....	46
Tabla 4.3. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYIF.....	46
Tabla 4.4. Diferencias entre los resultados obtenidos desde UYMO y UYIF.....	47
Tabla 4.5. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYMO.....	53
Tabla 4.6. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYIF.....	53
Tabla 4.7. Diferencias entre los resultados obtenidos desde UYMO y UYIF.....	54
Tabla 4.8. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYMO.....	60
Tabla 4.9. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYIF.....	60
Tabla 4.10. Diferencias entre los resultados obtenidos desde UYMO y UYIF.....	60
Tabla 4.11. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYMO.....	65
Tabla 4.12. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYIF.....	66
Tabla 4.13. Diferencias entre los resultados obtenidos desde UYMO y UYIF.....	66
Tabla 4.14. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYMO.....	73
Tabla 4.15. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYIF.....	73
Tabla 4.16. Diferencias entre los resultados obtenidos desde UYMO y UYIF.....	73
Tabla 4.17. Porcentaje que representa la diferencia de las alturas elipsoidales respecto al módulo del vector en el sistema de referencia IGS 20.....	77
Tabla 4.18. Porcentaje que representa la diferencia de las alturas elipsoidales respecto al módulo del vector en el sistema de referencia SIRGAS ROU 98.....	77
Tabla 4.19. Coordenadas y discrepancias obtenidas en el software CGO.....	85
Tabla 4.20. Coordenadas y discrepancias obtenidas en el software Leica Infinity.....	85
Tabla 4.21. Coordenadas y discrepancias obtenidas en el software RTKLIB.....	85

Tabla 4.22. Coordenadas y desviaciones estándar generadas por los distintos softwares.....	88
Tabla 4.23. Coordenadas y desviaciones estándar obtenidas para el vértice IGM-034 en el sistema IGS 20.....	93
Tabla 4.24. Coordenadas utilizadas para la transformación de Helmert.....	95
Tabla 4.25. Desviaciones estándar de las estaciones permanentes.....	100
Tabla 4.26. Coordenadas y desviaciones estándar obtenidas para el vértice IGM-034 en el sistema SIRGAS ROU 98	103
Tabla 4.27. Líneas calculadas para la primera etapa del ajuste.....	107
Tabla 4.29. Alturas ajustadas y desviaciones estándar para los vértices luego del primer ajuste utilizando el método de las Magnitudes	113
Tabla 4.30. Alturas ajustadas para los vértices luego del primer ajuste utilizando el método de las Correcciones.....	117
Tabla 4.31. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 13-11.....	118
Tabla 4.32. Altura ajustada del vértice perteneciente al tramo 13-11.....	119
Tabla 4.33. Líneas utilizadas para la densificación del tramo m1f-13.....	121
Tabla 4.34. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo 13-11.....	123
Tabla 4.35. Líneas utilizadas para la densificación del tramo m1f-10608A.....	124
Tabla 4.36. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo m1f-10608A.....	127
Tabla 4.37. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 10608A-1.18.031.....	128
Tabla 4.38. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo 10608A-1.18.031.....	130
Tabla 4.39. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 1.18.031-1.18.033.....	131
Tabla 4.40. Altura ajustada del vértice perteneciente al tramo 1.18.031-1.18.033.....	132
Tabla 4.41. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 1.18.033-M1f.....	133
Tabla 4.42. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo 1.18.033-M1f.....	135
Tabla 4.43. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 1.18.033-M1f.....	135
Tabla 4.44. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo 19- Cabildo.....	137
Tabla 4.45. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 1.18.033-M1f.....	138
Tabla 4.46. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo 19- 11.....	139
Tabla 4.47. Líneas utilizadas para la densificación del tramo m1f-11.....	140
Tabla 4.48. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo m1f-11.....	141
Tabla 4.49. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 10608A-19.....	142
Tabla 4.50. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo 10608A-19.....	144
Tabla 4.51. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 1.18.031-1.18.033.....	145
Tabla 4.52. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo 10608A-19.....	147
Tabla 4.53. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 21-M1f.....	148
Tabla 4.54. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo 21-M1f.....	150
Tabla 4.55. Alturas ajustadas de todos los vértices obtenidas a partir de la densificación y la diferencia con las obtenidas por el IGM.....	152
Tabla 4.56. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo 21-M1f con sus respectivas desviaciones estándar.....	155

Agradecimientos

Queremos expresar nuestro más sincero y profundo agradecimiento a todas las personas que, de una u otra manera, han sido parte fundamental en el desarrollo y culminación de esta tesis.

En primer lugar, deseamos agradecer enormemente al Profesor y Tutor Jorge Faure Valbi, quien ha sido una guía indispensable durante todo el proceso. Su amplia experiencia y conocimiento no solo fueron claves para la correcta elaboración de este trabajo, sino que su disposición y paciencia nos impulsó a seguir adelante. Agradecemos sinceramente su dedicación y el compromiso con el cual nos orientó, brindándonos las herramientas necesarias para desarrollar esta investigación de la mejor manera posible.

Asimismo, extendemos nuestro agradecimiento a todos los docentes que a lo largo de nuestra formación académica nos han brindado su enseñanza y apoyo. Su compromiso con la formación profesional y la transmisión de sus conocimientos nos han dejado enseñanzas valiosas que, sin duda, nos acompañarán a lo largo de nuestras vidas. De igual manera, a nuestros compañeros, quienes fueron parte de este recorrido, agradecemos por los momentos compartidos en cada paso de este camino, contribuyendo a crear recuerdos inolvidables.

Finalmente, pero no por ello menos importante, queremos expresar nuestra más profunda gratitud a nuestros familiares y amigos, quienes siempre estuvieron a nuestro lado desde el primer día que ingresamos a la facultad. Sin su apoyo incondicional, su confianza y su amor, este logro no hubiera sido posible. Ellos han sido nuestro motor en los momentos de dificultad y nuestras bases en cada etapa de este proceso.

A todos ustedes, nuestro más sincero agradecimiento.

Resumen

El presente trabajo se centra en el análisis de la red geodésica desarrollada en el departamento de Montevideo, materializada y relevada por el Instituto Geográfico Militar (IGM). En función de la metodología empleada para la obtención de las observaciones, no es posible realizar una compensación en formato de red. Por lo tanto, el proyecto fue redirigido y se definieron tres nuevos objetivos: estudiar la componente de geodesia satelital, para lo cual se realizó el postprocesamiento de los datos desde distintas bases permanentes; ajustar la parte altimétrica con sus respectivas precisiones y determinar las coordenadas más precisas posibles para el vértice N° 34 en el sistema de referencia SIRGAS ROU 98, ubicado cerca de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República (UdelaR). Para ello, inicialmente se ocupó el vértice utilizando instrumentos proporcionados por el Instituto de Agrimensura (UdelaR), para luego realizar el postprocesamiento de las observaciones con tres softwares distintos: RTKlib, Leica Infinity y CHCNAV Geomatics Office Software (CGO). Utilizando el método de Mínimos Cuadrados y la posterior Propagación de Cofactores, se obtuvo un resultado único para las coordenadas en el sistema de referencia IGS 20 con sus respectivas desviaciones estándar. Posteriormente, mediante la determinación de parámetros para la transformación de coordenadas (Helmert) al sistema de referencia oficial del Uruguay, SIRGAS ROU 98 y mediante la Ley General de Varianzas y Covarianzas se obtuvo las desviaciones estándar en dicho sistema. Para determinar la altura del vértice referida al Datum Vertical Cabildo, se llevó a cabo un ajuste por Mínimos Cuadrados de toda la red proporcionada por el IGM, y luego se calculó la desviación estándar de dicha altura mediante la propagación de cofactores para la línea de nivelación que incluye el vértice IGM-034. Se espera que los resultados de esta investigación contribuyan de manera significativa a mejorar la precisión de las tareas realizadas por futuras generaciones de estudiantes de la carrera de Ingeniería Agrimensura.

Palabras Claves

GNSS, Post Proceso, SIRGAS semanal, SIRGAS ROU 98, REGNA-ROU, vértice geodésico, Red Geodésica.

1. Introducción

El presente proyecto se orienta a la integración de conocimientos en Topografía, Geodesia y Cartografía Matemática, disciplinas que, aunque se abordan de manera independiente durante el transcurso de la carrera de Ingeniería en Agrimensura, en la práctica profesional requieren una coordinación constante para enfrentar los desafíos que se presentan en el campo.

La motivación principal de este trabajo radica en la necesidad de analizar y procesar la información geodésica relevada por el Instituto Geográfico Militar (IGM) y proporcionada por la Intendencia Departamental de Montevideo a través de un convenio suscrito con la Facultad de Ingeniería (UdelaR). En particular, el procesamiento de datos GNSS (Sistema Global de Navegación por Satélite) representa un desafío significativo debido a su alta complejidad y a la necesidad de un tiempo considerable para familiarizarse con las técnicas y herramientas involucradas. Es un área que, a pesar de su relevancia creciente en la actualidad, aún presenta barreras de entrada para quienes no están especializados en el área.

Asimismo, la compensación de una red de nivelación utilizando datos reales, es un proceso fundamental en la Ingeniería Geodésica y Topográfica. Este proceso asegura la precisión y validez de las mediciones de elevación, un aspecto crítico para el éxito de cualquier proyecto que dependa de datos geospaciales confiables.

La estructura del proyecto se organiza en varias etapas. En primer lugar, se desarrollan y explican conceptos relevantes en el Marco Teórico, proporcionando una base sólida para la comprensión y el análisis posterior. A continuación, se lleva a cabo el procesamiento de los datos GNSS, donde se aplican las técnicas y metodologías necesarias para extraer información precisa. Posteriormente, se realiza la compensación de los datos de nivelación, asegurando que las mediciones de elevación sean confiables. Finalmente, se presentan las

conclusiones, donde se exponen los resultados alcanzados a lo largo de la investigación, destacando los logros y las implicancias del trabajo realizado.

2. Objetivos

El objetivo de este proyecto es analizar la red geodésica de Montevideo, que se compone de dos componentes fundamentales, la geodesia satelital y la altimetría. Se busca realizar la compensación de esta red con el fin de determinar las coordenadas de los vértices y las alturas correspondientes, así como también evaluar la precisión de dichos valores.

3. Marco Teórico

3.1. Sistemas de Referencia y Marcos de Referencia, Geodésicos.

Se considera al Sistema de Referencia Geodésico como la definición de modelos, parámetros, constantes, etc. que sirven como base para la descripción de los procesos físicos de la Tierra o de la superficie terrestre. Los sistemas de referencia no se pueden determinar por mediciones sino que se definen convencionalmente

Los Marcos de Referencia Geodésicos son las materializaciones de los Sistemas de Referencia Geodésicos sobre la superficie terrestre. Están constituidos por la instalación en el terreno de monumentos (mojones o vértices) cuya posición (coordenadas) se ha determinado con precisión en relación al Sistema de Referencia Geodésico definido. Estos son los que conforman las llamadas y conocidas Redes Geodésicas.

3.1.1. SIRGAS (Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas).

La definición de SIRGAS es idéntica a la del Sistema Internacional de Referencia Terrestre (ITRS: International Terrestrial Reference System) y su realización es una densificación regional del Marco Internacional de Referencia Terrestre (ITRF: International Terrestrial Reference Frame) en América Latina.

Además del sistema de referencia geométrico, SIRGAS se ocupa de la definición y realización de un sistema vertical de referencia basado en alturas elipsoidales como componente geométrica y en números geopotenciales (referidos a un valor W_0 global convencional) como componente física.

El Sistema de Referencia SIRGAS tiene su origen en el centro de masa de la Tierra y utiliza el Elipsoide GRS80 para la determinación de las coordenadas geográficas.

Las coordenadas SIRGAS están asociadas a una época específica de referencia y su variación con el tiempo es tomada en cuenta ya sea por, las velocidades individuales de las estaciones SIRGAS, o mediante un modelo continuo de velocidades que cubre todo el continente.

Las soluciones SIRGAS, según el intervalo temporal, se dividen en tres tipos principales. Las soluciones **semanales** se obtienen cada semana y son útiles para realizar análisis de corto plazo y monitoreo frecuente. Las soluciones **anuales** consisten en el promedio de las coordenadas calculadas durante todo un año, lo que permite ajustar los modelos geodésicos y reducir las variaciones estacionales. Por último, las soluciones **interanuales** abarcan períodos de 2 a 5 años, siendo esenciales para estudiar las tendencias de deformación y el movimiento tectónico global.

3.1.2. Sistema de Referencia SIRGAS-ROU98.

El Sistema de Referencia SIRGAS-ROU98 se define en base a SIRGAS, época 1995.4 (SIRGAS95), y su desarrollo calculado por el Instituto Geográfico Militar (IGM). En base a este sistema, se obtienen resultados de ajuste y compensación de la Red Geodésica Nacional, así como los parámetros de transformación del Sistema de Referencia Local ROU-USAMS a SIRGAS95. Al ser estos cálculos y presentaciones realizados en el año 1998, se decide llamarlo SIRGAS-ROU98, con cuyo nombre se conoce actualmente.

3.1.3. Marco de Referencia Geodésico REGNA-ROU y REGNAP-ROU.

La Red Geodésica Nacional Activa (REGNA-ROU) constituye el marco de referencia, es decir, la materialización del Sistema de Referencia Geocéntrico SIRGAS-ROU98. Las redes geodésicas tradicionales eran determinadas mediante redes de triangulación (mediciones de ángulos y distancias) de diferentes órdenes de precisión (materializadas en mojones capaces de soportar el paso del tiempo). En la actualidad, en la concepción de la Geodesia Espacial o Geodesia Satelital, estas infraestructuras están siendo sustituidas por Estaciones de Referencia de Observación Continua (CORS). Estas CORS llamadas corrientemente estaciones permanentes o estaciones fijas, son equipos que utilizan los Sistemas Globales de Navegación por Satélite (GNSS), dichos instrumentos son capaces de determinar con gran exactitud la posición del lugar, observando satélites de las constelaciones puestas en órbita de los sistemas diseñados para tal fin, tales como GPS o GLONNAS.

La REGNA-ROU ha logrado establecer una cobertura nacional completa mediante la implementación de 29 estaciones de referencia CORS (Estaciones de Referencia de Sistema

Global de Navegación por Satélite), garantizando que cualquier usuario ubicado en cualquier punto del territorio nacional tenga acceso a una estación CORS a una distancia máxima de 80 kilómetros. Además, la REGNA-ROU tiene proyectado un ambicioso plan de expansión para los próximos años, que consiste en la incorporación de 9 nuevas estaciones CORS multi constelación. Con esta ampliación, la cobertura se optimizará aún más, reduciendo la distancia entre las estaciones permanentes a un radio de 70 kilómetros, lo que permitirá mejorar significativamente la calidad del servicio diferencial en tiempo real. Esta densificación de la red fortalecerá su capacidad para ofrecer soluciones geodésicas más precisas y rápidas, favoreciendo aún más a los usuarios que dependan de este tipo de datos en tiempo real.

Todas las estaciones CORS de la REGNA-ROU forman parte integral de la Red SIRGAS-CON (SIRGAS-Continuo), un sistema regional que facilita el cálculo de soluciones de coordenadas precisas a nivel continental. Estas soluciones se generan semanalmente y se calculan de manera conjunta con las demás estaciones CORS del continente, lo que permite mantener una alta coherencia en las mediciones geodésicas y garantizar la sincronización de los datos en toda América Latina. De este modo, la REGNA-ROU contribuye a la construcción y mantenimiento de un sistema geodésico global continuo.

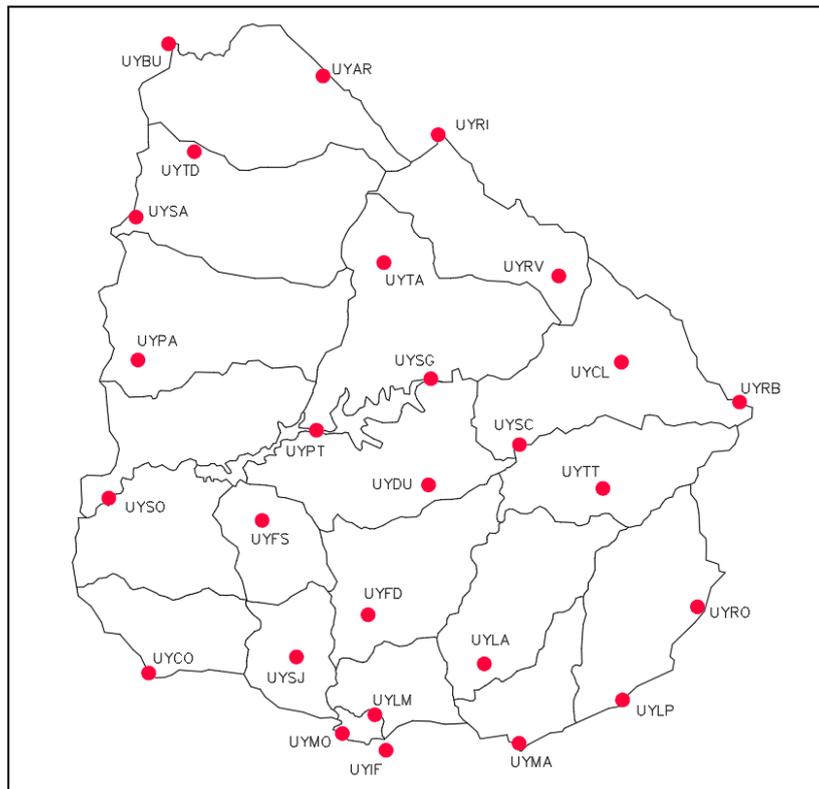


Figura 3.1. Estaciones de Referencia de Observación Continua. (Elaboración propia)

Uruguay cuenta además con una Red Geodésica Nacional Pasiva (REGNAP-ROU), la cual, al igual que la Red Geodésica Nacional Activa (REGNA-ROU), tiene como propósito materializar el sistema de referencia geodésico oficial del país, conocido como SIRGAS ROU 98.

La REGNAP-ROU se compone de aproximadamente setenta puntos geodésicos distribuidos en todo el territorio nacional, los cuales están materializados mediante monumentos físicos, como mojones o marcas específicas. Las coordenadas de estos puntos se determinan con alta precisión. Este conjunto de puntos constituye una base sólida para el desarrollo de trabajos cartográficos, topográficos y científicos.

La gestión y el mantenimiento de la REGNAP-ROU son responsabilidad del Instituto Geográfico Militar (IGM), entidad encargada de verificar, actualizar y conservar la integridad

de la red. El IGM asegura que la información relacionada con la red sea accesible al público a través de plataformas oficiales.

3.1.4. Marco de Referencia Geodésico de Montevideo: MRGMVD 2004.

El Marco de Referencia Geodésico de Montevideo (MRGMVD) es un marco de referencia desarrollado de acuerdo a los estándares modernos. Calculado en el Sistema de Referencia "SIRGAS 2000 ITRF 2000" y, adoptado internacionalmente en la región.

Está compuesto por 30 vértices, ubicados convenientemente en todo el Departamento. Se encuentran en sitios de fácil acceso y han sido monumentados de manera tal de asegurar su perdurabilidad en el tiempo. Esto permite al usuario disponer de un punto de referencia, con coordenadas conocidas en un radio inferior a los 5 kilómetros, en todo el Departamento de Montevideo.

3.2. Posicionamiento Satelital.

El sistema Global de Navegación por Satélite (GNSS) es el nombre colectivo de los diferentes tipos de sistemas de navegación por satélite utilizados en todo el mundo, incluyendo GPS, GLONASS, Galileo, BeiDou, etcétera. Los sistemas basados en el GNSS pueden acceder a varios sistemas de satélites en cualquier momento para aumentar la precisión, la redundancia y la disponibilidad. Cualquier constelación de las indicadas anteriormente está formada por una red entre 21 y 30 satélites a una altura de la superficie terrestre entre 21000 y 25000 kilómetros.

Teniendo en cuenta la estructura de los sistemas GNSS, se distinguen tres segmentos o sectores claramente diferenciados: el segmento espacial, el segmento de control y el segmento usuario.

Segmento espacial: compuesto por los satélites emisores de señales.

Segmento de control: compuesto por estaciones centrales de seguimiento que controlan los satélites y calculan las efemérides y las correcciones de los relojes de los satélites. Se tienen tres tipos de instalaciones del segmento de control: las estaciones monitoras que reciben la información, las estaciones maestras que realizan los cálculos y las antenas que funcionan de interfaz entre el segmento espacial y el segmento de control.

Segmento de usuarios: Constituido por todos los equipos utilizados para la recepción de las señales emitidas por los satélites y empleados para el posicionamiento.

3.2.1. Principio del Posicionamiento Satelital.

El Sistema Global de Navegación por satélite (GNSS) es un sistema de posicionamiento basado en la medición de la distancia a un mínimo de cuatro satélites en simultáneo, que además, transmiten sus posiciones estimadas.

Las distancias son medidas comparando la señal recibida desde el satélite con una réplica generada por el receptor. La diferencia de fase entre la señal recibida y la generada es proporcional al tiempo de propagación (distancia satélite-receptor).

Como los receptores generan la señal usando relojes de cuarzo, la diferencia de fase absorbe también sus inestabilidades. Observando un mínimo de cuatro satélites bien distribuidos en el cielo, el receptor puede calcular cuatro incógnitas: tres para la posición del receptor y una para la corrección al reloj local.

El principio del posicionamiento satelital se basa en relacionar tres componentes:

- Una componente conocida, que es la posición del satélite (X_s, Y_s, Z_s).

- Una cantidad mensurable, que es la distancia satélite-receptor (ρ).
- Una cantidad desconocida, que es la posición del receptor (X_R, Y_R, Z_R).

$$\rho = \sqrt{(X_S - X_R)^2 + (Y_S - Y_R)^2 + (Z_S - Z_R)^2}$$

El objetivo de la medición es obtener la posición de nuestro receptor en el mismo sistema de referencia en el que se dan las coordenadas de los satélites.

3.2.2. Posicionamiento Puntual o Absoluto.

Este método consiste en determinar la posición de un punto próximo a la superficie terrestre utilizando un receptor y la medición de la pseudodistancia utilizando el código que contienen las ondas portadoras de la señal GPS.

Para determinar la posición del receptor basta con determinar las pseudodistancias a 4 satélites en el mismo instante t de tiempo. El receptor mide la distancia satélite-receptor a partir del tiempo de propagación de la señal emitida desde el satélite. Los satélites y los receptores cuentan con relojes que controlan el tiempo de emisión y recepción de la señal respectivamente.

$$t_R - t^S = \Delta t \Rightarrow c * \Delta t = \text{distancia}$$

Donde:

t_R = Instante de recepción de la señal R

t^S = Instante de emisión de la señal S

Δt = Tiempo de propagación de la señal

c = Velocidad de la luz

Debido a que los relojes de los satélites y de los receptores no están sincronizados entre ellos - ni con el tiempo patrón GPS - es que la distancia determinada satélite-receptor se denomina pseudodistancia. Los errores en los relojes de los satélites se pueden corregir a partir de los datos enviados en el mensaje para tal fin.

3.2.3. Método Diferencial.

Este método implica el procesamiento de diferencias de observaciones simultáneas realizadas por al menos dos estaciones que se comunican con los mismos satélites. Se basa en el uso de dos equipos GNSS funcionando al mismo tiempo desde distintas ubicaciones: una de ellas, cuya posición es conocida, se denomina estación de referencia, y la otra es denominada estación móvil o rover.

En este caso, la exactitud de las coordenadas calculadas estará dada por la exactitud de las coordenadas de la estación de referencia.

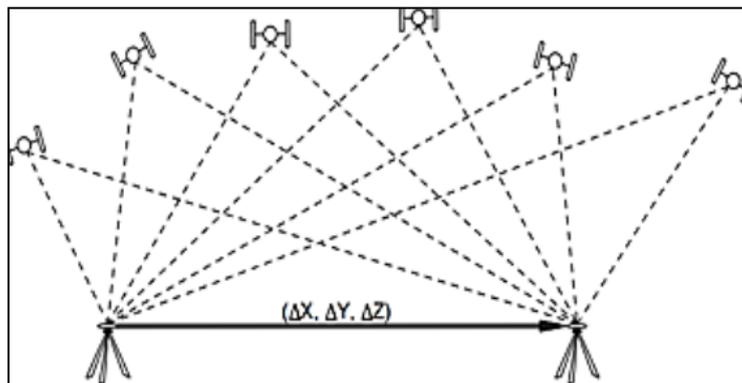


Figura 3.2. Esquema Método Diferencial. (Neves, 2015)

Con este método es posible cifrar y cuantificar algunos errores propios del sistema GNSS que afectan al modo absoluto. Se puede implementar de varias maneras, pero existen dos que son las más importantes: Post Proceso y Tiempo Real.

3.2.4. Post Proceso

La obtención de coordenadas y líneas base se efectúa después de la observación, es por esto, es necesario guardar datos crudos (observables y mensaje de navegación) en base y móvil, y la utilización de un software específico para realizar el post proceso.

3.2.5. Tiempo Real

Las correcciones diferenciales que realiza el móvil son en tiempo real, esto permite que la obtención de coordenadas y líneas base se efectúen en el mismo momento de la observación. De esta forma, el tiempo de cálculo es tan reducido que se puede considerar casi instantáneo o en tiempo real.

La corrección en tiempo real puede hacerse a partir de observable de código u observable de fase. Habitualmente a la corrección de código se la denomina GPS Diferencial DGPS, DGNSS y se reserva el término de corrección cinemático en tiempo real RTK (Real Time Kinematic) a la corrección en fase.

El posicionamiento en tiempo real implica que debe haber comunicación entre base y móvil. Esta comunicación puede ser a través de radio enlace (RADIO-RTK), a través de internet (NTRIP-RTK), entre otros.

Radio RTK

El receptor base tiene un radio-módem el cual transmite los datos recibidos de la unidad de control. El alcance de la transmisión depende de la potencia, cuanto mayor sea ésta, más alcance tiene. El receptor móvil también tiene un radio-módem que recibe los datos que transmite la base y calcula los datos por cada época que recibe. El alcance o distancia

entre base y móvil varía de 3 a 15 kilómetros dependiendo del tipo de radio y potencia de la misma.

NTRIP RTK

NTRIP (Network Transport of RTCM via Internet Protocol) es un sistema diseñado específicamente para la distribución correcciones diferenciales a través de Internet, estas se generan mediante estaciones base ubicadas en tierra, que calculan las mismas, y las envían a través de Internet para ser utilizadas por los receptores GNSS en tiempo real.

Para utilizar NTRIP, los receptores GNSS están equipados con un software que incluye un cliente NTRIP. Este cliente permite a los receptores conectarse a los servidores NTRIP para recibir las correcciones diferenciales.

3.2.6. Tipos de Efemérides.

Las efemérides utilizadas en el posicionamiento con GNSS son conjuntos de datos que describen las posiciones orbitales de los satélites en un momento dado. Estas efemérides son esenciales para que los receptores GNSS calculen con precisión su posición en la Tierra. Se dividen en dos tipos principales:

- Transmitidas: Se transmiten con la señal y tienen un intervalo de 2 horas, es decir, información de la órbita cada 2 horas y luego se interpola para una determinada época. Contienen elementos keplerianos, perturbaciones y parámetros del tiempo (toe, toc, a0 a1 y a2).

- Precisas: No se emplean para el posicionamiento en tiempo real, se calculan a posteriori. Las estaciones maestras (segmento de control) van haciendo un rastreo de los satélites, a partir de este se hace un cálculo hacia atrás y se conoce con mucha precisión la

posición del satélite para un tiempo dado. El encargado de calcular estas órbitas es el IGS (servicio internacional GNSS).

Hay distintos tipos, ultra rápidas las cuales tienen seis horas de demora y predicen veinticuatro horas, las rápidas las cuales tienen una demora entre diecisiete y cuarenta y ocho horas y por último las finales las cuales tienen una demora entre doce y dieciocho días, estas últimas son las más precisas.

3.3. Datos Geodésicos.

3.3.1. Datum vertical.

El Datum Vertical (Cero Oficial) fue establecido por un decreto del Poder Ejecutivo el 20 de mayo de 1949. En su artículo 2º, se determinó que, hasta que se dispusiera de suficientes observaciones para calcular el nivel medio del mar, el Nivel Medio de las Aguas del Puerto de Montevideo se utilizará como referencia para los acotamientos del territorio nacional. Este nivel se fijó a 22,97 metros por debajo del repere ubicado en el edificio del Cabildo descrito en el artículo 1º y a 0,91 metros por encima de un plano horizontal de referencia indicado en el mismo artículo.

Los estudios para determinar este valor fueron realizados por el Observatorio Nacional entre 1906 y 1924, y concluyeron que el Nivel Medio de las Aguas del Puerto de Montevideo estaba 0,91 metros por encima del Cero Wharton, que fue establecido por la Dirección de Hidrografía.

Antes de este decreto, existían otros datums verticales, como el Cero Wharton (usado en cartas náuticas y relevamientos hidrográficos), el Cero Zanetti (empleado en la construcción de vías férreas) entre otros.

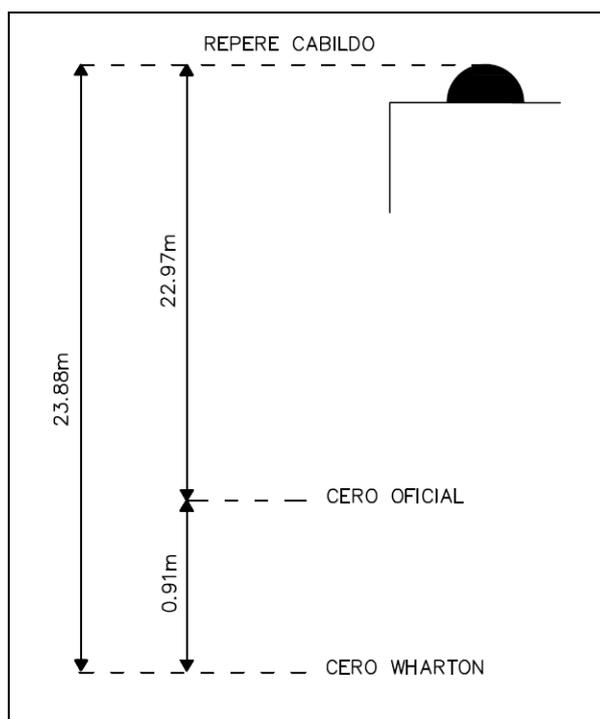


Figura 3.3. Relación entre los ceros históricos. (Elaboración propia)

3.3.2. Red Altimétrica Nacional.

Las líneas de la Red Altimétrica Nacional se clasifican en Líneas de Nivelación de Primer, Segundo y Tercer Orden. La Red Altimétrica Nacional de Primer Orden está compuesta por 25 Líneas de Nivelación de Primer Orden y 18 puntos Nodales. El comienzo de las tareas de medición de las Líneas de Nivelación de Primer Orden fue en el año 1930, realizando su primer ajuste general en el año 1968 (Acuña, 1984). Se aplicaron correcciones ortométricas a partir de valores teóricos de gravedad calculados para cada punto.

La Tabla 3.1 presenta las principales características de las Líneas de Nivelación en los tres órdenes, y se indica en cada caso la cantidad de puntos, y la cantidad de líneas que conforman el orden, así como la longitud total en cada uno. Finalmente, se concluye con la cantidad de puntos destruidos, dato correspondiente al año 2008 (Rovera et al., 2008).

Orden	Puntos	Líneas	Longitud (km)	Destruídos
Primer	1347	25	3883	500
Segundo	937	66	2992	150
Tercer	462		5795	

Tabla 3.1: Descripción de Líneas de Altimetría Nacional (Rovera et al., 2008)

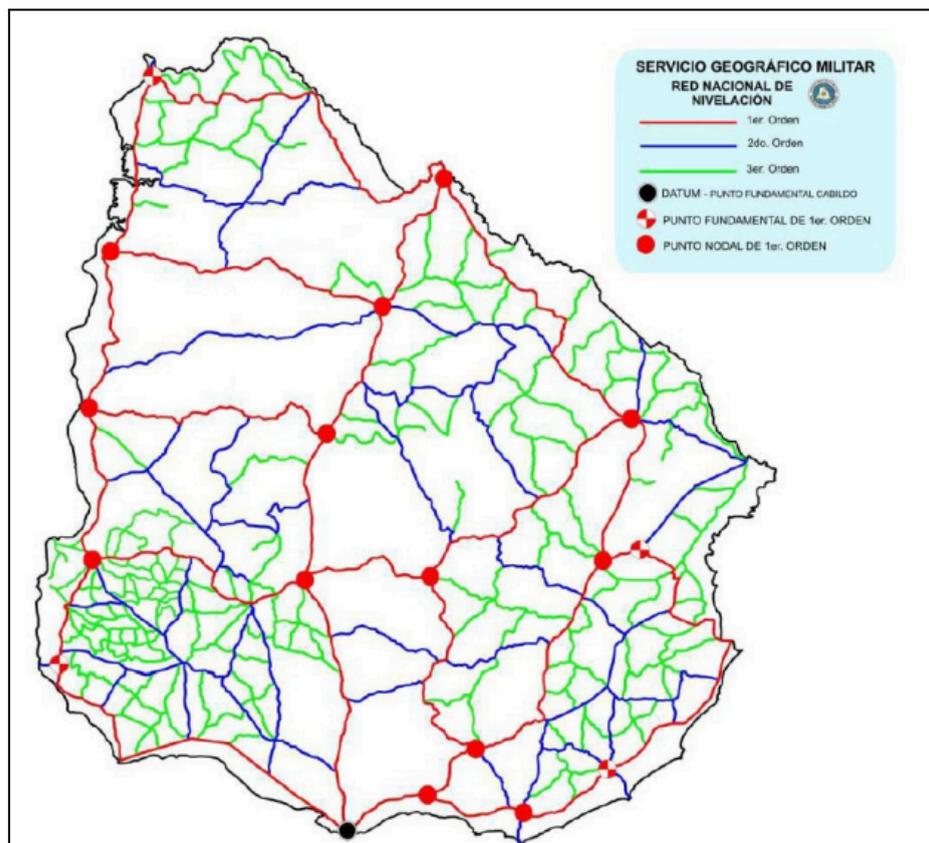


Figura 3.4. Líneas de Nivelación de Primer, Segundo y Tercer Orden (Rovera, 2012).

3.4. Alturas.

3.4.3. Altura Nivelada

Se otorga la cota a un Punto de Control a través de la nivelación geométrica (caminamiento), tomando un punto como de partida (datum vertical).

La nivelación geométrica se basa en la determinación de la diferencia de alturas (δH_{AB}) entre dos puntos A y B, a partir de la medición de las distancias sobre una regla vertical desde cada uno de los puntos hasta un plano horizontal.

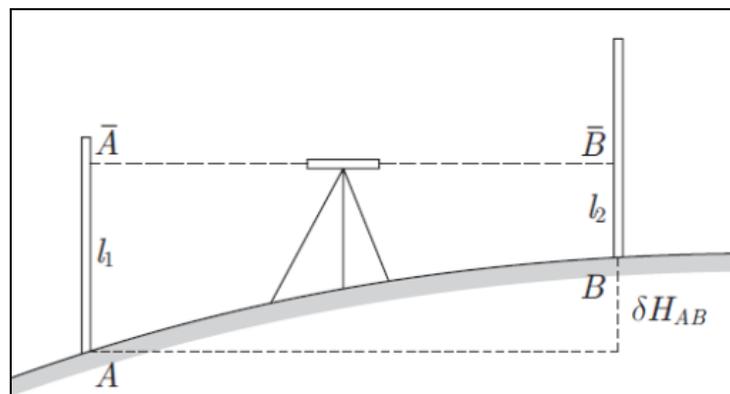


Figura 3.5. Nivelación (Hofmann – Wellenhof y Moritz, 2005) .

Teniendo en cuenta que la línea \overline{AB} es horizontal, la diferencia en las lecturas de las miras se corresponde con la diferencia de altura.

$$\delta H_{AB} = l_1 - l_2$$

Si ahora los puntos A y B se encuentran suficientemente distantes, el procedimiento descrito en la Figura 3.5 deberá aplicarse repetidamente, a esto se le denomina Nivelación Compuesta.

En la nivelación geométrica, el eje colimador del instrumento es tangente a la superficie equipotencial de la gravedad que pasa por el punto de observación. Las diferencias de nivel se corresponden con la sección de la línea de la plomada, que coincide con el eje

vertical de las miras entre la superficie terrestre y la tangente a la equipotencial realizada por el instrumento.

Las superficies equipotenciales no son paralelas y en consecuencia, la determinación de alturas mediante la nivelación geométrica se ve afectada por la gravedad.

Por este motivo las diferencias de nivel dependen del recorrido de la nivelación, y para que un circuito cerrado sea teóricamente cero debemos de corregir el efecto de la gravedad.

3.4.4. Alturas elipsoidales

La altura elipsoidal o también llamada altura geométrica, es la distancia medida a lo largo de la normal al Elipsoide entre la superficie topográfica y el mismo. Esta altura es de tipo matemático, ya que no responde a ningún principio físico.

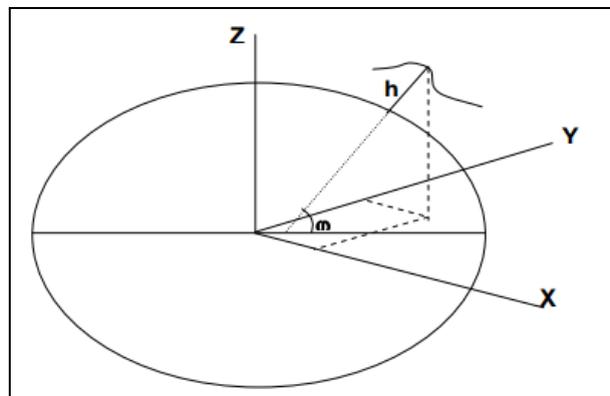


Figura 3.6. Altura elipsoidal (h). (SIRGAS: Boletín Informativo N°6. 2022)

3.4.5. Número Geopotencial.

Considerando el punto O sobre el Geoide, y otro punto A unido a O por medio de una línea de nivelación, A la diferencia de potencial entre el geoide (W_o) y otro punto A (W_A) se le llamará número geopotencial (C), de A y responderá a la expresión:

$$\int_0^A g dn = W_A - W_o = C$$

El inconveniente que presentan estas alturas se basa en que no es posible conocer el valor del valor medio de la gravedad verdadera (g') entre el punto evaluado y el geoide. Normalmente, la gravedad real es medida sobre la superficie topográfica y continuarla hacia abajo, a lo largo de la línea de la plomada, requiere de la formulación de modelos sobre la distribución de densidad de las masas terrestres. De esta manera, los valores de altura ortométrica calculados dependen de las hipótesis utilizadas en el modelamiento de la densidad.

3.4.6. Alturas ortométricas.

Utiliza como superficie de referencia al geoide. Es por lo tanto, la distancia medida sobre la vertical entre la superficie física de la Tierra y el Geoide.

El cálculo de las alturas ortométricas (H) se realiza a partir de la división de los números geopotenciales sobre el valor medio de la gravedad verdadera (g') entre el punto evaluado y el geoide.

$$H = \frac{\text{Número Geopotencial } (C)}{g'}$$

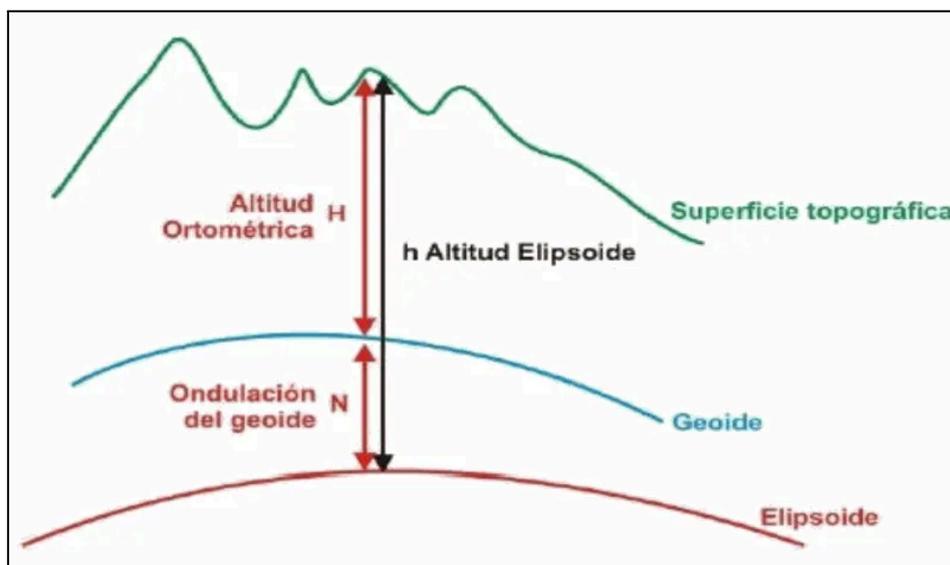


Figura 3.7. Esquema de alturas. (Survey Rental Sales, 2021)

3.4.7. Alturas dinámicas

Se refieren a un valor fijo de la gravedad normal. Las alturas dinámicas se calculan al dividir los números geopotenciales por un valor constante de gravedad (γ cte).

$$H_{(din)} = \frac{C}{\gamma_{(cte)}} \quad (3.5)$$

La ventaja de las alturas dinámicas radica en que, valores iguales de éstas representan una superficie equipotencial del campo de gravedad, es decir; una superficie de agua en calma en cualquier elevación sobre el geode tiene siempre la misma altura dinámica.

3.4.8. Alturas normales

Se refieren al campo de la gravedad normal. En las alturas normales los números geopotenciales no son divididos por un valor constante de gravedad, sino, por el valor medio de la gravedad normal entre la superficie de referencia denominada cuasi-geoide y el punto en consideración.

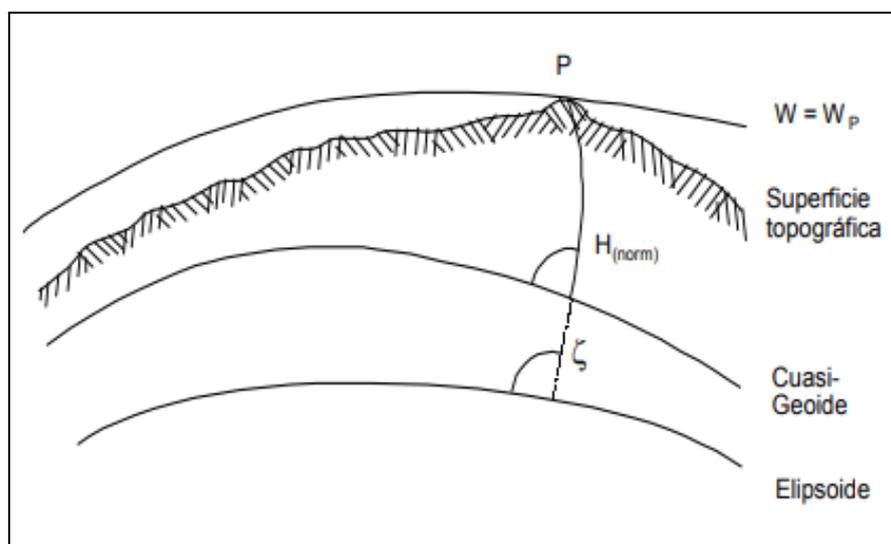


Figura 3.8. Altura normal (H_{norm}) y ondulación del cuasi-geoide (ζ). (SIRGAS: Boletín Informativo N°6. 2022)

3.5. Modelos Geoidales.

Los modelos geoidales permiten calcular a partir de la posición del vértice (Latitud, Longitud, Altura Elipsoidal) los valores de la ondulación geoidal (N) que vinculan la altura elipsoidal (h) con la ortométrica (H), y tienen asociado un conjunto de constantes: constante de gravitación universal (GM), semieje mayor y aplastamiento del elipsoide terrestre, velocidad de rotación de la tierra y los coeficientes del desarrollo armónico.

Para el desarrollo de un modelo geopotencial de alto grado se utilizan tres tipos de información:

- Información obtenida a partir del estudio de las perturbaciones de órbitas de satélites.
- Información gravimétrica terrestre y aérea.
- Información altimétrica de satélites sobre los océanos.

3.5.1. Modelo Geoidal EGM2008.

Es un modelo geoidal global que ha sido publicado por la Agencia Nacional de Inteligencia Geoespacial (NGA). Los cálculos del geoide se basan en la filosofía Helmert de condensación: la topografía se condensa en una capa delgada sobre el geoide, mientras que el efecto directo de la anomalía de la gravedad tiende hacia abajo del geoide. Numéricamente, esto se hace mediante la sustitución de la anomalía de la gravedad por la anomalía de Faye.

Este modelo ofrece una buena resolución y precisión. El logro de mejores resultados en los cálculos, utilizando el geoide EGM08, dependerá de la forma en que las reducciones topográficas y de gravedad se lleven a cabo.

3.5.2. Modelo geoidal para Uruguay GEOUR06

En 2006 se crea un nuevo modelo geoidal el cual fue determinado para Uruguay por A. Benavidez usando tres técnicas diferentes: RINT (RingINTEgration), LSC (Least Square Collocation) y FFT (Fast Fourier Transform), a partir de los siguientes datos:

- Levantamientos gravimétricos realizados por ANCAP en la zona de la cuenca del noroeste del territorio uruguayo.
- Red Gravimétrica Fundamental del Uruguay (2376 datos)
- Datos proporcionados por el Bureau Gravimetric International (BGI).
- Relevamientos gravimétricos realizados por ANCAP en la cuenca del Río Santa Lucía.
- Archivos altimétricos para la zona, extraídos de la NOAA Satellite and Information Service.
- Datos del proyecto SRTM 90m – DTED (Shuttle Radar Topographic Mission – Digital Terrain Elevation Data) de la USGS (United States Geological Service).

El análisis y comparación de los resultados entre los tres modelos realizados por el autor reveló diferencias medias muy cercanas, de solo 0.01 a 0.02 m, lo que valida tanto las técnicas empleadas como los resultados obtenidos. Además, los datos de la ondulación del geoide para el modelo GEOUR06 se generan a través de un programa de cálculo que se incluye en el libro “GEOUR06 – Modelo Geoidal Gravimétrico para Uruguay” del autor Alberto Benavidez Sosa.

3.5.3. Modelo geoidal para Uruguay UruGeoide 2023

Se destaca que este modelo no solo representa un modelo geoidal, sino que también incluye un modelo cuasigeoidal y un modelo de transformación de alturas, permitiendo una

descripción más completa y precisa del campo gravitacional y la relación entre diferentes sistemas de alturas. Para un procesamiento eficiente, se optó por trabajar los datos de terreno y gravimetría en bloques, integrando los resultados al final.

El cálculo de un geoide centimétrico requiere obtener las frecuencias más bajas del geoide, lo que solo es posible con un Modelo Digital del Terreno (MDT) de alta resolución o una gravimetría densa. Para el modelo UruGeoide110 (2023), se adoptó una estrategia distinta a la de modelos previos, que usaban un área más amplia pero con resolución reducida de los MDT debido a limitaciones computacionales.

En este caso, se utilizó el nuevo modelo de terreno de Uruguay obtenido con tecnología Lidar (resolución de 2,5 m), y tras un primer cálculo con mayor resolución, se decidió que la resolución base sería de 90 m, considerando la extensión del proyecto, las capacidades de los programas y equipos disponibles, y la posibilidad de integrar los datos del modelo SRTM90.

3.6. Método de Ajuste de Mínimos Cuadrados.

Este método realiza un ajuste de las observaciones de forma tal que la suma cuadrática de los residuales debe ser mínima, modificando mínimamente las observaciones realizadas y realizando un ajuste con independencia del observador. El método de Mínimos Cuadrados se puede aplicar mediante dos algoritmos de resolución:

AMC – M → Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Magnitudes

AMC – C → Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones

3.6.1. Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Magnitudes.

Esta técnica mediante su proceso de resolución permite el cálculo directo de las magnitudes. Este tipo de ajuste tiene como características principales que las ecuaciones de condición incluyan observaciones y parámetros incógnita; que el número de ecuaciones de condición es el mismo que el de observaciones; y que cada ecuación de condición contiene una sola observación con un coeficiente igual a 1.

La forma en que se escriben las ecuaciones es la siguiente: $\bar{l} + B\Delta = d$.

Donde:

\bar{l} - Es la magnitud ajustada.

B - Son los coeficientes de los parámetros.

Δ - Contiene a los parámetros.

d - Son las constantes del método.

A su vez $\bar{l} = l + v$, siendo l la magnitud observada y v los errores residuales.

Entonces:

$$(l + v) + B\Delta = d$$
$$v + B\Delta = d - l, \text{ siendo } d - l = f$$

Por lo tanto la forma en la que se expresan las ecuaciones de condición es la siguiente:

$$v + B\Delta = f$$

$$v_1 + b_{11}\tau_1 + b_{12}\tau_2 + \dots + b_{1u}\tau_u = f_1$$

$$v_2 + b_{21}\tau_1 + b_{22}\tau_2 + \dots + b_{2u}\tau_u = f_2$$

.

.

$$v_n + b_{n1}\tau_1 + b_{n2}\tau_2 + \dots + b_{nu}\tau_u = f_n$$

Donde:

$b \rightarrow$ Coeficientes numéricos de los parámetros

$\tau \rightarrow$ Parámetros incógnitas

$f \rightarrow$ Constantes numéricas

n = Número de observaciones
 n_0 = Número mínimo de observaciones
 r = Ecuaciones redundantes
 u = números de parámetros

Si lo expresamos en notación matricial, nos queda:

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix} \\ (nx1) \end{matrix} + \begin{matrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & \cdot & b_{1u} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & \cdot & b_{2u} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdot & \cdot & b_{nu} \end{bmatrix} \\ (nxu) \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_u \end{bmatrix} \\ (ux1) \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix} \\ (nx1) \end{matrix}$$

Algoritmo de resolución:

$$\begin{aligned}
 N &= B^T * W * B \\
 t &= B^T * W * f \\
 \Delta &= N^{-1} * t \\
 v &= f - B * \Delta \\
 \bar{l} &= l + v
 \end{aligned}$$

3.6.2. Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones.

Esta técnica mediante su proceso de resolución permite el cálculo directo de las correcciones. Este tipo de ajuste tiene como características que en las ecuaciones de condición no se incluya los parámetros incógnitas y que el número de ecuaciones de condición es igual al de mediciones redundantes.

La forma que se escriben las ecuaciones de condición es la siguiente $A\bar{l} = d$, a su vez $\bar{l} = l + v$. Entonces:

$$A(l + v) = d \rightarrow Al + Av = d \rightarrow Av = d - Al = f$$

Por lo que la ecuación de condición se expresa de la siguiente forma: $Av = f$.

$$\begin{aligned}
a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n &= f_1 \\
a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2n}v_n &= f_2 \\
&\vdots \\
a_{u1}v_1 + a_{u2}v_2 + \dots + a_{un}v_n &= f_u
\end{aligned}$$

Donde:

a → Coeficientes numéricos.

v → Errores residuales.

f → Constantes numéricas.

n = Número de observaciones

n_0 = Número mínimo de observaciones

r = Ecuaciones redundantes

u = Números de parámetros

c = Número de ecuaciones.

En este algoritmo $u=0$ y $c=r$.

Si se expresa en notación matricial, queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{u1} & a_{u2} & \cdot & \cdot & a_{un}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
v_1 \\
v_2 \\
\cdot \\
\cdot \\
v_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
f_1 \\
f_2 \\
\cdot \\
\cdot \\
f_n
\end{bmatrix}$$

(rxn)
(nx1)
(rx1)

Algoritmo de resolución:

$$Q_e = A * Q * A^T$$

$$W_e = Q_e^{-1}$$

$$k = W_e * f$$

$$v = Q * A^T * k$$

$$\bar{l} = l + v$$

3.6.3. Ley General de Propagación de Varianzas y Covarianzas.

$$\begin{array}{cc} \text{Matriz Covarianza} & \text{Matriz Varianza} \\ \Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdot & \cdot & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{1n} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_n^2 \end{bmatrix} & \Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Q_{XX} = W^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2} & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{\omega_2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\omega_n} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $\Sigma_{XX} = \sigma_0^2 \cdot Q_{XX}$

Siendo σ_0^2 la varianza referencial a posteriori

Para las funciones lineales $y = ax + b \rightarrow \Sigma_{YY} = A \cdot \Sigma_{XX} \cdot A^T$

Para las funciones linealizadas $y = f(x) \rightarrow \Sigma_{YY} = J_{YX} \cdot \Sigma_{XX} \cdot J_{YX}^T$

Se sabe que:

Para variables X $\Sigma_{XX} = \sigma_0^2 \cdot Q_{XX}$

Para variables Y $\Sigma_{YY} = \sigma_0^2 \cdot Q_{YY}$

Sustituyendo, se llega a la Ley de Propagación de Cofactores:

$$\Sigma_{YY} = A \cdot \sigma_0^2 \cdot Q_{XX} \cdot A^T \div \sigma_0^2 \rightarrow Q_{YY} = A \cdot Q_{XX} \cdot A^T$$

$$\Sigma_{YY} = J_{YX} \cdot \sigma_0^2 \cdot Q_{XX} \cdot J_{YX}^T \div \sigma_0^2 \rightarrow Q_{YY} = A \cdot Q_{XX} \cdot A^T$$

3.6.4. Propagación de Cofactores para AMC+M.

$$f = (-I) * l + d \rightarrow Q_{ff} = (-I) \cdot Q_{ll} \cdot (-I)^T = Q \rightarrow Q_{ff} = Q$$

$$\rightarrow Q_{ll} = N$$

$$\rightarrow Q_{\Delta\Delta} = N^{-1} \rightarrow \Sigma_{\Delta\Delta} = \sigma_0^2 \cdot Q_{\Delta\Delta} \rightarrow Q_{\Delta\Delta} = Q - B \cdot N^{-1} \cdot B^T$$

Donde:

$$\sigma_0^2 = \frac{v^t \cdot W \cdot v}{r}$$

$$\rightarrow \Sigma_{vv} = \sigma_0^2 \cdot Q_{vv}$$

$$\begin{aligned} \text{Si se trabaja con } \bar{l} \text{ ajustado} &\rightarrow B \cdot \Delta = d - \bar{l} \rightarrow \bar{l} = d - B \cdot \Delta \\ &\rightarrow Q_{\bar{l}} = B \cdot N^{-1} \cdot B^T \end{aligned}$$

$$\rightarrow \Sigma_{\bar{l}} = \sigma_0^2 \cdot Q_{\bar{l}}$$

$$\rightarrow Q_{\bar{l}} = Q - Q_{vv}$$

Con la propagación de cofactores del AMC de las Magnitudes, se puede calcular las

varianzas (σ^2) o desviaciones estándar (σ) de las magnitudes ajustadas, de las observaciones ajustadas y de los residuales de cada observación.

3.6.5. Propagación de Cofactores para AMC+C.

$$f = -Al + d \text{ (propagación lineal)} \rightarrow Q_{ff} = (-A)Q_{ll}(-A)^T = AQA^T$$

$$\rightarrow Q_{ff} = AQA^T = Q_e$$

$$\rightarrow Q_{kk} = W_e$$

$$\rightarrow Q_{vv} = QA^T W_e A Q$$

Siendo:

$$\sigma_0^2 = \frac{v^t \cdot W \cdot v}{r}$$

$$\Sigma_{vv} = \sigma_0^2 \cdot Q_{vv}$$

Ahora se tratará $\bar{l} = l + v = l + QA^T k$

$$\bar{l} = (I - QA^T W_e A)l + QA^T W_e d \text{ (forma lineal)}$$

$$Q_{\bar{u}} = (I - QA^T W_e A)Q_u(I - QA^T W_e A)^T$$

$$\rightarrow Q_{\bar{u}} = Q - Q_{vv}$$

$$\rightarrow \Sigma_{\bar{u}} = \sigma_0^2 Q_{\bar{u}}$$

4. Metodología

4.1. Análisis de las observaciones realizadas por el Instituto Geográfico Militar.

En primera instancia, se lleva a cabo un estudio exhaustivo de las observaciones GNSS realizadas por el Instituto Geográfico Militar en los años 2022 y 2023. Este análisis es crucial para evaluar la viabilidad de implementar una compensación en forma de red geodésica. A través de esta investigación, se busca identificar la calidad y la consistencia de los datos recopilados, lo cual es fundamental para el éxito de este proyecto.

Para facilitar el análisis, se genera una tabla que incluye todos los vértices ocupados. De esta forma, se organizan los datos de manera cronológica, ordenados por fecha. A su vez, se crean varias columnas que contienen información relevante, como la hora de inicio y la hora de finalización de cada observación, siendo esta temporalidad esencial para entender el contexto de cada medición. Se incluye la altura de la antena que se registra en el archivo RINEX y se añade la altura documentada en la monografía de cada vértice, esto último permite realizar comparaciones y verificar la consistencia de los datos. Adicionalmente, se especifica el tipo de antena utilizada en cada observación. Esta información se obtuvo de la monografía de cada vértice y es crucial para realizar posteriormente el post proceso de manera adecuada.

Todo este proceso proporciona una base sólida para analizar si es factible llevar a cabo la compensación en red geográfica y contribuir así, al avance del proyecto.

Vértice	Fecha	Hora inicio	Hora fin	Altura RINEX (m)	Altura monografía (m)	Tipo de antena
IGM-011	21-oct-22	10 : 41 : 22	13 : 43 : 27	0	2.003	TPSGR5 NONE
IGM-012	21-oct-22	14 : 5 : 26	15 : 40 : 36	0	2.003	TPSGR5 NONE
IGM-013	21-oct-22	11 : 27 : 28	13 : 30 : 24	0	2.000	TPSGR5 NONE
IGM-014	21-oct-22	10 : 00 : 54	14 : 59 : 59	0	2.003	LEIAR20 LEIM

IGM-020	21-oct-22	11 : 31 : 26	13 : 56 : 24	2.000	2.000	LEIGS08 PLUS
IGM-021	21-oct-22	11 : 57 : 35	13 : 30 : 8	2.000	2.000	LEIGS08 PLUS
IGM-022	19-oct-22	15 : 1 : 16	17 : 21 : 39	2.000	2.000	LEIGS08 PLUS
IGM-023	19-oct-22	11 : 27 : 10	14 : 21 : 29	2.000	2.000	LEIGS08 PLUS
IGM-024	19-oct-22	10 : 26 : 1	17 : 54 : 54	0	2.001	LEIAR20 LEIM
IGM-025	19-oct-22	11 : 27 : 55	13 : 57 : 26	0	2.000	TPSGR5 NONE
IGM-026	19-oct-22	11 : 0 : 39	14 21 24	0	2.003	TPSGR5 NONE
IGM-027	19-oct-22	15 : 9 : 52	17 : 5 : 41	0	2.000	TPSGR5 NONE
IGM-028	19-oct-22	15 : 33 : 55	17 : 6 : 1	2.000	2.000	LEIGS08PLUS
IGM-029	19-oct-22	12 : 24 : 47	13 : 56 : 28	2.000	2.000	LEIGS08 PLUS
IGM-030	19-oct-22	14 : 45 : 20	17 : 23 : 30	0	2.003	TPSGR5 NONE
IGM-01	15-nov-23	10 : 32 : 24	12 : 2 : 59	2.000	2.000	TPSGR5 NONE
IGM-02	15-nov-23	09 : 56 : 38	12 : 18 : 25	2.000	2.000	TPSGR5 NONE
IGM-03	15-nov-23	13 : 00 : 35	14 : 35 : 59	2.000	2.000	TPSGR5 NONE
IGM-04	15-nov-23	15 : 11 : 04	18 : 55 : 26	2.000	2.000	TPSGR5 NONE
IGM-05	15-nov-23	09 : 20 : 49	21 : 20 : 36	2.000	2.000	CHCI73+
IGM-06	15-nov-23	15 : 31 : 35	18 : 35 : 45	2.000	2.000	TPSGR5 NONE
IGM-07	15-nov-23	12 : 39 : 35	14 : 48 : 22	2.000	2.000	TPSGR5 NONE
IGM-08	15-nov-23	13 : 02 : 10	14 : 36 : 05	2.000	2.000	LEIGS08PLUS NONE
IGM-09	15-nov-23	17 : 26 : 33	18 : 38 : 28	2.000	2.000	LEIGS08PLUS NONE
IGM-10	15-nov-23	12 : 39 : 33	14 : 47 : 30	2.000	-	LEIGS08PLUS NONE
IGM-15	15-nov-23	10 : 03 : 00	12 : 20 : 52	2.000	2.000	LEIGS08PLUS NONE
IGM-16	15-nov-23	09 : 20 : 49	21 : 20 : 39	2.000	2.000	CHCI73+
IGM-17	15-nov-23	15 : 08 : 01	19 : 12 : 34	2.000	2.000	LEIGS08PLUS NONE
IGM-18	15-nov-23	15 : 21 : 36	17 : 03 : 45	2.000	2.000	LEIGS08PLUS NONE
IGM-19	15-nov-23	10 : 31 : 15	12 : 03 : 17	2.000	2.000	LEIGS08PLUS NONE
IGM-31	17-nov-23	11 : 39 : 40	13 : 16 : 16	0.0147	0.0147	LEIGS08PLUS NONE
IGM-33	17-nov-23	10 : 43 : 31	13 : 54 : 15	-	2.000	TPSGR5 NONE
IGM-32	13-nov-23	12 : 15 : 35	14 : 01 : 08	0.0147	0.0147	TPSGR5 NONE
IGM-34	13-nov-23	11 : 31 : 42	14 : 36 : 26	0.015	0.0147	LEIGS08PLUS

						NONE
IGM-35	13-nov-23	11 : 50 : 35	14 : 25 : 09	0.015	0.0147	LEIGS08PLUS NONE

Tabla 4.1. Análisis de las observaciones GNSS realizadas por el Instituto Geográfico Militar.

Se realizan representaciones gráficas de los intervalos de tiempo para observar las superposiciones de horarios en las ocupaciones de los vértices, organizados por fecha. (Ver figuras 4.1 y 4.2.)

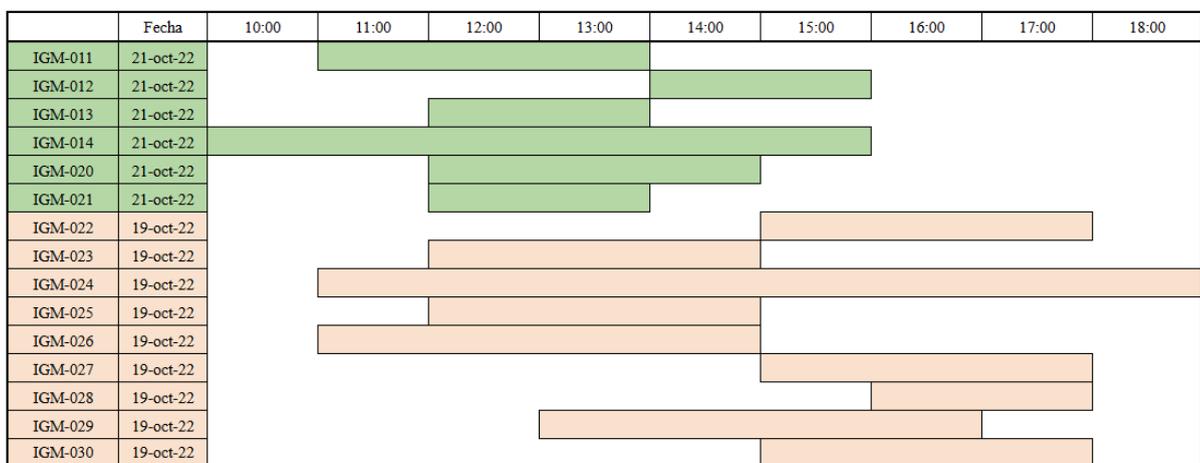


Figura 4.1. Intervalo de tiempo aproximado de las observaciones realizadas en el año 2022.

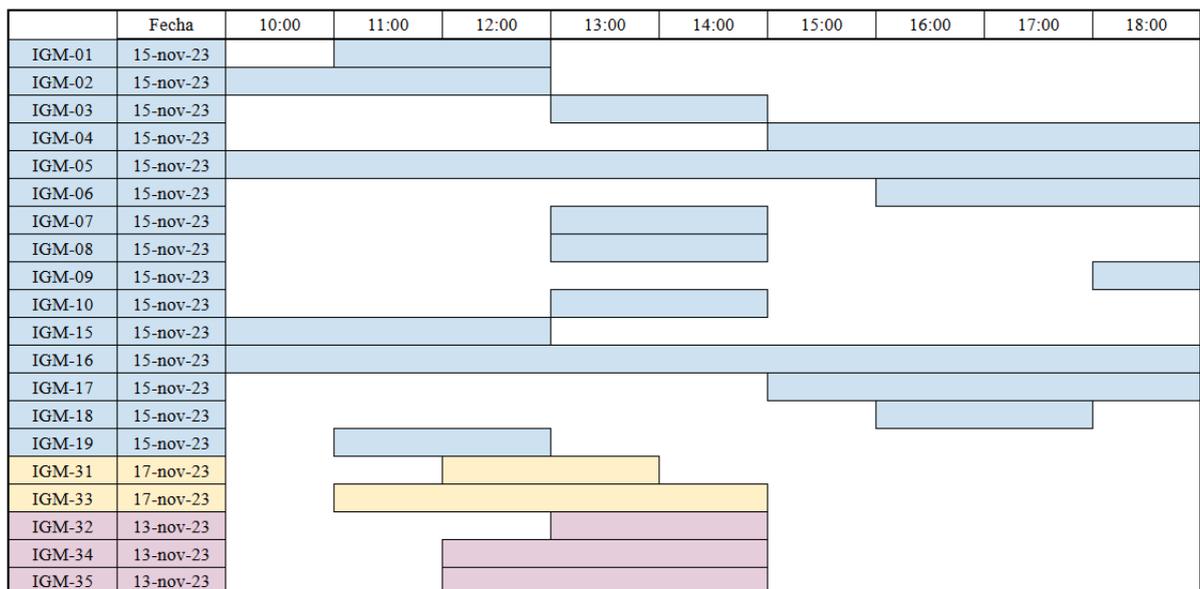


Figura 4.2. Intervalo de tiempo aproximado de las observaciones realizadas en el año 2023.

Al analizar las fechas en las que se llevan a cabo las ocupaciones de cada vértice, se observa que estas se realizan diariamente y en horarios que se superponen. Sin embargo, al realizar ocupaciones en días diferentes, lo cual es lógico dado la extensión y la cantidad de vértices, debería haberse ocupado vértices de días anteriores, ya que esto permitiría generar una red completa. Al no llevarse a cabo, esta situación limita la posibilidad de formar una red integral, resultando en pequeñas redes que corresponden a cada día específico y que solo incluyen los vértices observados simultáneamente en ese periodo, lo que permite realizar un ajuste en modo de red dentro de cada día.

Como consecuencia, se torna imposible realizar un estudio de red que abarque todos los vértices. Por lo tanto, se procede a procesar cada vértice de manera independiente. Este enfoque facilita futuros análisis, a pesar de las limitaciones mencionadas.

Se debe destacar que, al observar las fotografías tomadas por el IGM durante la ocupación de los vértices, se puede apreciar que la metodología empleada no es correcta dado que en la mayoría de los casos se realizó utilizando un bípode y la propia burbuja nivelante del bastón para verticalizar el instrumento. Este método no es adecuado para un trabajo que requiere la máxima precisión, ya que el bípode no proporciona la estabilidad necesaria para este tipo de tareas y el instrumento más apropiado para garantizar la verticalidad es la base nivelante sobre trípode de madera.

4.2. Procesamiento de observaciones satelitales a partir de estaciones permanentes.

Luego de comprobar que no es posible realizar un ajuste en forma de red debido a la metodología empleada para ocupar los vértices, se procede al procesamiento de las observaciones satelitales a partir de las estaciones de referencia de observación continua (CORS) que componen la red REGNA ROU. En este caso, se utilizan las estaciones más

cercanas, específicamente la estación UYMO ubicada en la Fortaleza del Cerro de Montevideo y la estación UYIF ubicada en una pequeña isla del Río de la Plata llamada Isla de Flores. Es importante destacar que se consideró la posibilidad de emplear una tercera base, UYLM, situada en la Montañesa Departamento de Canelones; sin embargo, dado que en el año 2022 dicha base no estaba activa, se opta por descartarla.

La intención de procesar datos desde dos bases diferentes es verificar la existencia de diferencias y representar numéricamente las variaciones que surgen al realizar el postproceso a partir de distintas bases permanentes. Para este procesamiento, se utiliza el software CHCNAV Geomatics Office, diseñado específicamente para el postprocesamiento de observaciones satelitales.

Este procesamiento se divide en dos partes. La primera parte se enfoca en una aplicación práctica para el Agrimensor en su día a día, quien necesariamente debe utilizar las efemérides transmitidas, que están disponibles al momento en que se realizan las ocupaciones. En este caso, se emplea el sistema de referencia SIRGAS ROU 98. La segunda parte utiliza efemérides precisas finales, las cuales tienen una demora aproximada de doce a dieciocho días. Dado que el presente proyecto de grado se desarrolla un año después de la realización de las observaciones, es posible utilizar dichas efemérides. Para el procesamiento con las mismas, se consideran las estaciones permanentes con la solución SIRGAS semanal correspondientes a la semana que se realizó la ocupación de los vértices a estudiar en cada caso. Este aspecto es importante resaltar que cuando se utilizan las coordenadas de las bases con la solución semanal SIRGAS, estas están referidas al sistema de referencia IGS 20¹. Es correcto utilizar efemérides precisas, ya que también están referidas a el mismo sistema de referencia, por lo tanto, ambas se encuentran en concordancia.

¹ El sistema de referencia IGS20 fue lanzado en abril de 2022.

En primera instancia, se procede a buscar la solución semanal SIRGAS para cada una de las semanas en las que se realizaron las observaciones. Este procedimiento se lleva a cabo en la página web de GNSS Calendar and Utility², la cual facilita la búsqueda de la semana GNSS correspondiente al día del año en que se realizaron las observaciones. De esta búsqueda, se determina que se utilizarán las semanas 2232 y 2288, en estas dos semanas se encuentran todos los días que se realizaron ocupaciones. Una vez definidas las semanas a utilizar, se procede a descargar desde la página web de SIRGAS³ las coordenadas semanales de las estaciones permanentes que se emplearán en el presente proyecto.

Para descargar los archivos RINEX de las estaciones permanentes, es necesario contar con un software que permita la descarga de datos mediante el protocolo FTP. En este caso, se elige utilizar el software libre FileZilla. A partir de los datos proporcionados por la página web del Instituto Geográfico Militar⁴, se obtiene la dirección FTP, el puerto, el usuario y la contraseña necesarios para descargar los datos RINEX que se utilizarán en el proyecto.

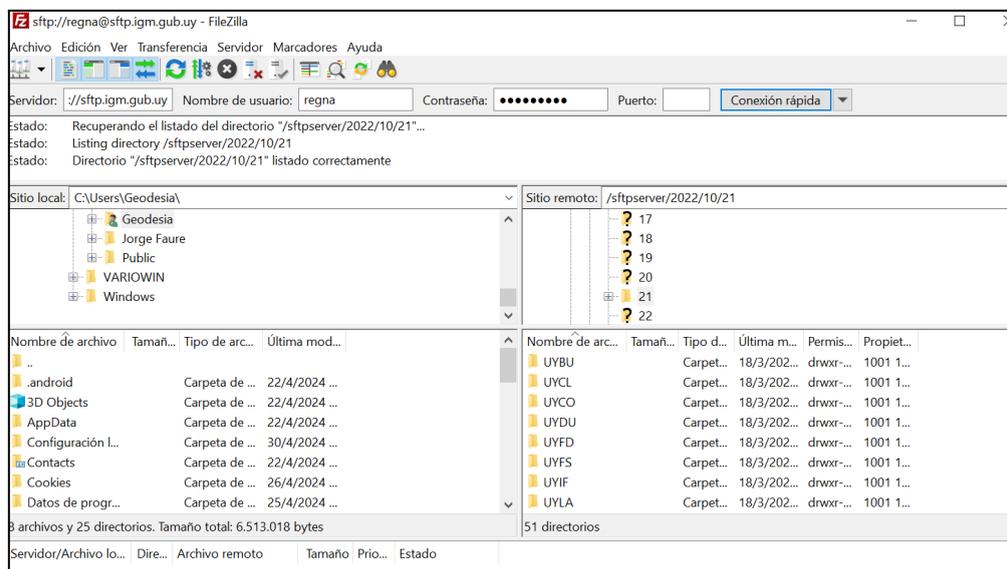


Figura 4.3. Descarga de los archivos RINEX desde el software FileZilla.

² GNSS Calendar and utility, <https://www.gnsscalendar.com/>.

³ Soluciones semanales SIRGAS Analysis at DGFI_TUM, <https://www.sirgas.org/es/weekly-solutions/>.

⁴ IGM Servicios Regna ROU, <https://igmgub.uy/2016/05/20/servicios-regna-rou/>

Para llevar a cabo el proceso de manera ordenada, se ingresan al software CGO⁵ los archivos de observación (.yyo) correspondientes a cada vértice ocupado por el Instituto Geográfico Militar (IGM) en un mismo día, los cuales han sido proporcionados por la Facultad de Ingeniería (UdelaR) a partir de un convenio con la Intendencia Municipal de Montevideo (IMM). Asimismo, se incluyen los archivos de observación de cada base permanente que fueron descargados previamente para el día correspondiente.

En primer lugar, se realiza el postproceso utilizando las efemérides transmitidas, sin modificar las coordenadas de los archivos de observación de las bases, de manera que se mantenga el sistema de referencia SIRGAS ROU 98. Posteriormente, mediante la herramienta GNSS File Downloader del software CGO, se descargan las efemérides precisas finales para cada día y se lleva a cabo el postproceso correspondiente. En esta etapa, se actualizan las coordenadas de las estaciones permanentes utilizando las coordenadas de la solución semanal SIRGAS previamente descargadas, permitiendo así trabajar en el sistema de referencia IGS 20.

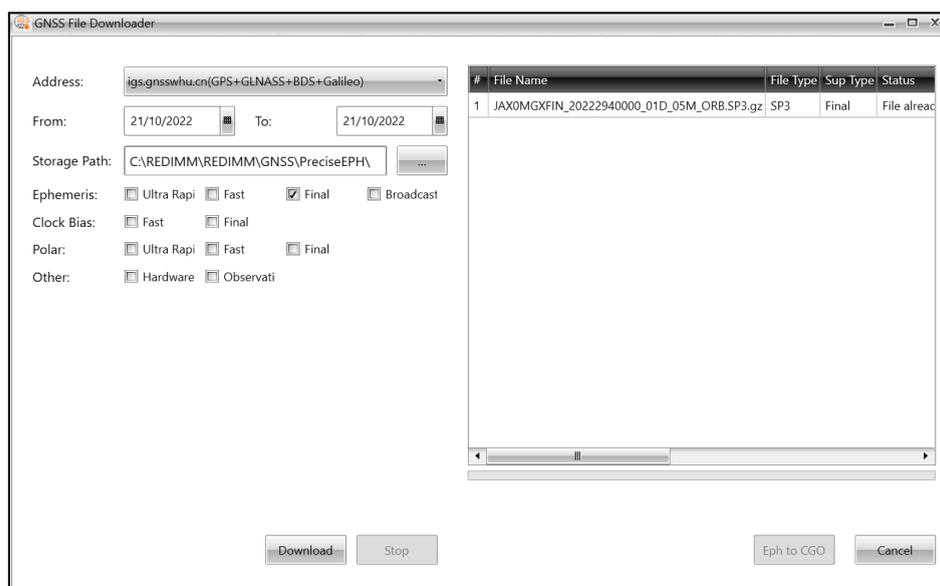


Figura 4.4. Descarga de efemérides precisas en software CGO.

⁵ CHCNAV Geomatics Office Software (CGO).

4.2.1. Post Proceso de vértices ocupados el día 21 de octubre de 2022.

Se inicia el postproceso de los vértices ocupados el 21 de octubre de 2022, que se corresponden con los llamados IGM-011, IGM-012, IGM-013, IGM-014, IGM-020 e IGM-021. Este post proceso se realiza en primera instancia con respecto a la base permanente UYMO y, posteriormente, con respecto a la base UYIF.

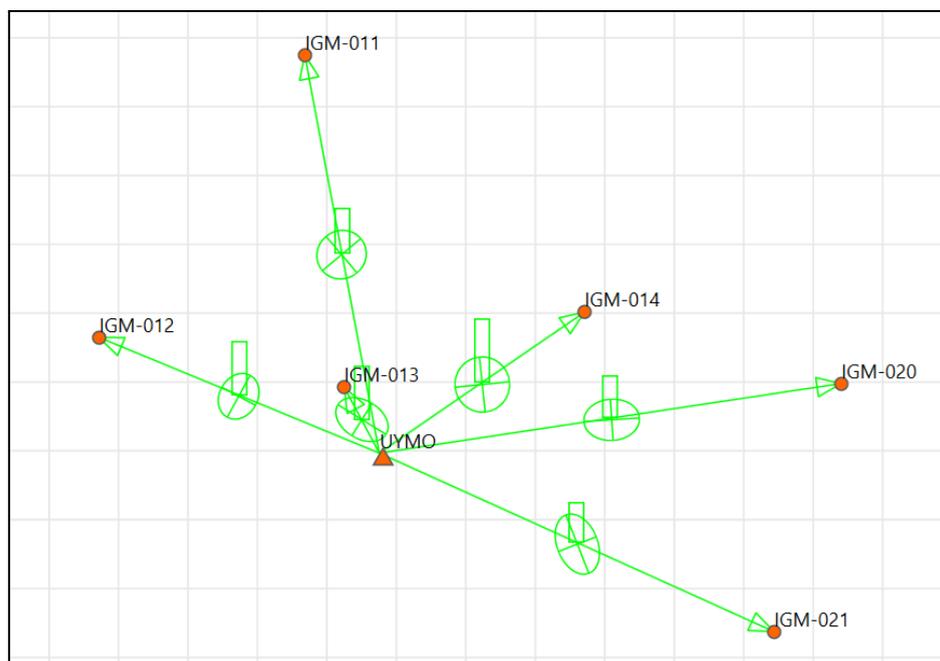


Figura 4.5. Vectores desde la base UYMO a los vértices ocupados el día 21 de octubre de 2022 en el software CGO.

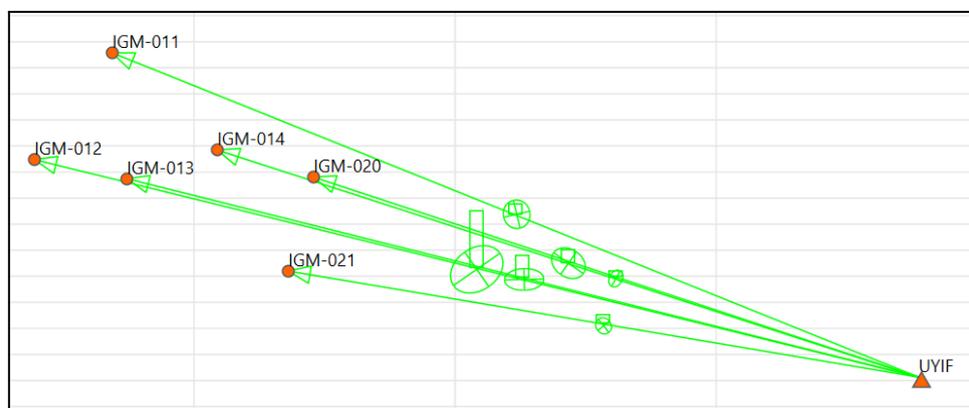


Figura 4.6. Vectores desde la base UYIF a los vértices ocupados el día 21 de octubre de 2022 en el software CGO.

A continuación, se presentan en formato de tablas los resultados de las coordenadas cartesianas tridimensionales de los vértices correspondientes al 21 de octubre de 2022. Estos resultados se distinguen en columnas según el sistema de referencia SIRGAS ROU 98 como el sistema de referencia IGS 20. En primer lugar se presenta la tabla correspondiente al post proceso realizado con la base permanente UYMO (Ver Tabla 4.2) y una segunda tabla que detalla los resultados obtenidos a partir del post proceso realizado desde la estación permanente UYIF (Ver Tabla 4.3), permitiendo así un análisis comparativo y detallado entre ambas.

	SIRGAS ROU 98			IGS 20 (Semana 2232)		
	X (m)	Y (m)	Z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
IGM-011	2909983.225	-4358735.514	-3622989.658	2909983.259	-4358735.731	-3622989.388
IGM-012	2906242.886	-4358421.184	-3626388.567	2906242.920	-4358421.401	-3626388.298
IGM-013	2908962.660	-4356116.043	-3626963.512	2908962.694	-4356116.260	-3626963.242
IGM-020	2914936.194	-4352178.218	-3626857.548	2914936.228	-4352178.435	-3626857.277
IGM-021	2913003.846	-4350978.997	-3629817.375	2913003.880	-4350979.214	-3629817.105
IGM-014	2912174.614	-4354707.290	-3626020.832	2912174.649	-4354707.507	-3626020.562

Tabla 4.2.Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYMO.

	SIRGAS ROU 98			IGS 20 (Semana 2232)		
	X (m)	Y (m)	Z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
IGM-011	2909983.159	-4358735.566	-3622989.700	2909983.175	-4358735.732	-3622989.361
IGM-012	2906242.973	-4358420.890	-3626388.665	2906242.978	-4358421.031	-3626388.311
IGM-013	2908962.564	-4356116.129	-3626963.530	2908962.580	-4356116.292	-3626963.189
IGM-020	2914936.209	-4352178.271	-3626857.608	2914936.226	-4352178.437	-3626857.270
IGM-021	2913003.861	-4350979.037	-3629817.451	2913003.878	-4350979.201	-3629817.113
IGM-014	2912174.622	-4354707.357	-3626020.893	2912174.640	-4354707.522	-3626020.555

Tabla 4.3.Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYIF.

A partir de los resultados presentados anteriormente, se genera una tabla donde se busca ilustrar las variaciones en las coordenadas cartesianas tridimensionales de los vértices, al realizar el postproceso desde dos bases distintas: UYMO y UYIF. En esta tabla, se distinguen en columnas los dos sistemas de referencia utilizados.

	SIRGAS ROU 98				IGS 20 (Semana 2232)			
	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)	Módulo (m)	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)	Módulo (m)
IGM-11	0.066	0.052	0.041	0.093	0.083	0.000	0.027	0.088
IGM-12	0.088	0.294	0.098	0.322	0.059	0.371	0.013	0.375
IGM-13	0.095	0.086	0.019	0.130	0.114	0.032	0.053	0.129
IGM-20	0.015	0.053	0.061	0.082	0.002	0.002	0.007	0.008
IGM-21	0.015	0.039	0.076	0.087	0.002	0.013	0.008	0.015
IGM-14	0.008	0.067	0.061	0.091	0.009	0.015	0.007	0.019

Tabla 4.4. Diferencias entre los resultados obtenidos desde UYMO y UYIF.

En las Figuras 4.7 y 4.8 se muestran las diferencias en valor absoluto entre las coordenadas post procesadas con la base UYMO y aquellas post procesadas con la base UYIF, para los sistemas SIRGAS ROU 98 e IGS 20.

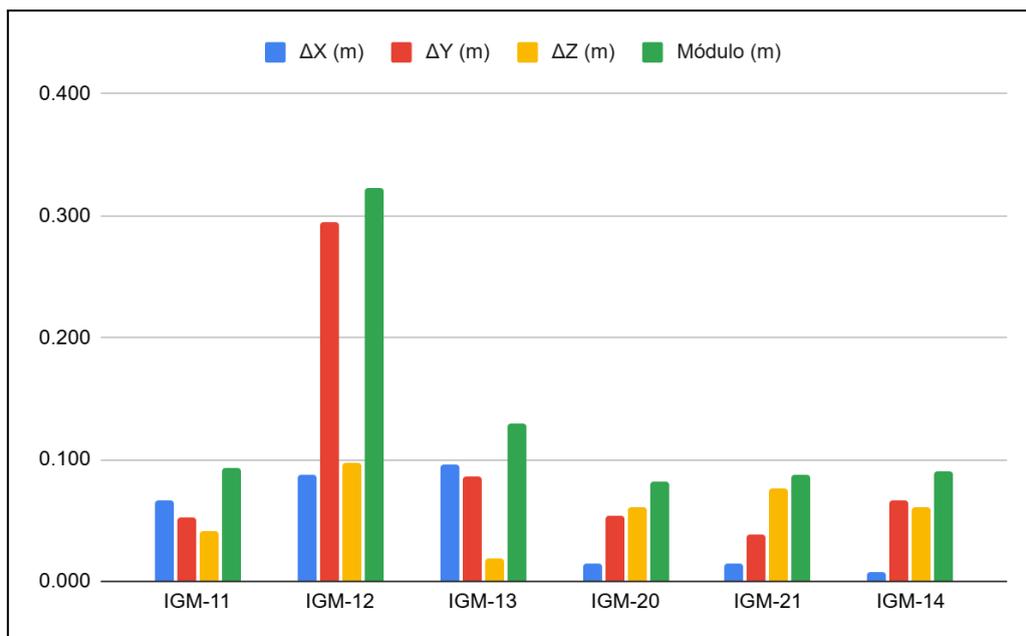


Figura 4.7. Diferencia en SIRGAS ROU 98

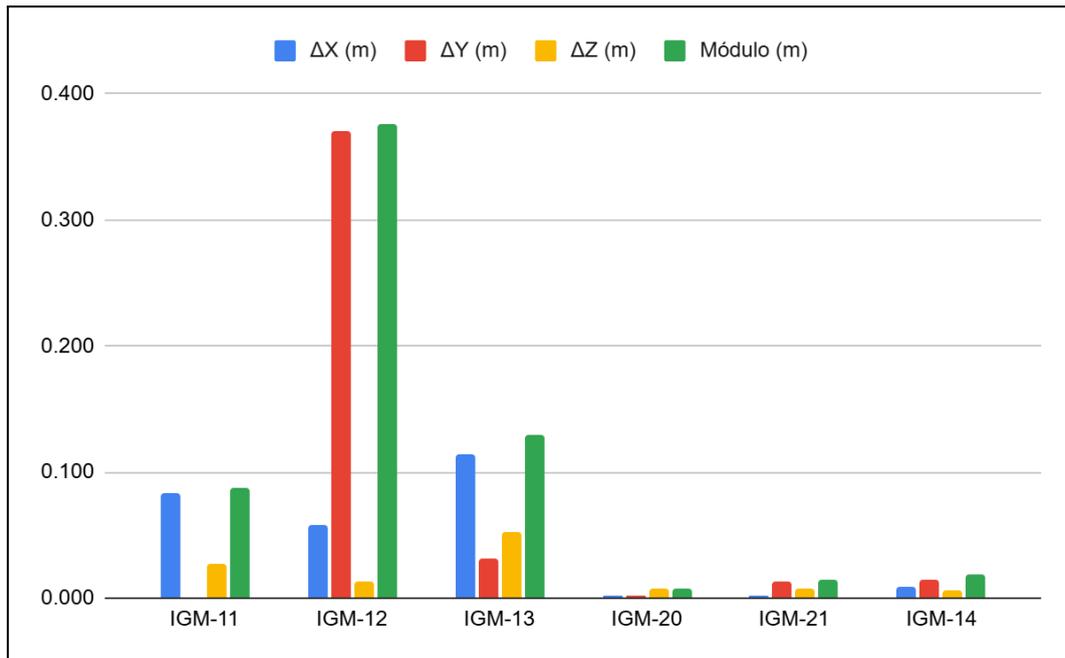


Figura 4.8. Diferencia en IGS 20 (Solución SIRGAS de la semana 2232) .

En un primer análisis se observa que las diferencias entre las coordenadas post procesadas a partir de diferentes bases son menores en el sistema de referencia IGS 20, el cual utiliza efemérides precisas y soluciones semanales para las coordenadas de las estaciones permanentes. Se destaca que los vértices IGM-20, IGM-21 e IGM-14 presentan las menores diferencias en ambos sistemas de referencia, alcanzando en el caso del sistema IGS 20 diferencias inferiores a 0.015 metros en las tres coordenadas cartesianas tridimensionales. Sin embargo, en los vértices IGM-11, IGM-12 e IGM-13, las diferencias son mayores, siendo más notable la diferencia en la coordenada Y del vértice IGM-012, donde se registran diferencias de 0.294 metros en SIRGAS ROU 98 y 0.371 metros en IGS 20.

Se opta por poner énfasis en los vértices que presentan mayores discrepancias con el fin de comprender las causas de estas diferencias. Como primer paso, se analiza la duración de la ocupación de los vértices, información que se puede consultar en la Tabla 4.1 en las columnas correspondientes a "hora de inicio" y "hora de fin". En dichas columnas, se observa que los vértices IGM-011, IGM-012 e IGM-013,- que presentan las mayores diferencias en el

día 21 de octubre de 2022-, en particular, el vértice IGM-011 fue ocupado durante aproximadamente tres horas, siendo el que arroja mejores resultados entre ellos. En cambio, el vértice IGM-012, que muestra la mayor diferencia, fue ocupado por alrededor de treinta y cinco minutos, lo cual se considera un tiempo insuficiente.



Figura 4.9. Ubicación de los vértices IGM-011, IGM-012, IGM-013 y las estaciones permanentes (Figura realizada en Google Earth Pro).

Con el fin de avanzar en el análisis de las discrepancias, se examinan las distancias a las bases empleadas. Tal como se observa en la Figura 4.9, la distancia entre el vértice más alejado de la base permanente UYMO es de 6 km, mientras que la distancia entre el vértice más cercano de la base permanente UYIF es de 31 km. Esta diferencia de distancia explica las variaciones que pueden surgir al utilizar estas bases para el post proceso, ya que los vectores en el caso de UYIF son más de cinco veces mayores. Por lo tanto, es crucial confiar en las coordenadas derivadas del post proceso realizado con la base más cercana.

Es importante resaltar que, cuando se trata de vectores cuya longitud supera los 20 kilómetros, los errores asociados a las condiciones atmosféricas y troposféricas dejan de ser uniformes en los extremos que conforman el vector formado entre el móvil y la base en el método diferencial. Debido a esta desigualdad, al calcular el vector mediante la operación de

diferenciación, estos errores no se eliminan completamente. En este contexto específico, donde los vectores que conectan los vértices con la estación permanente UYIF superan los 20 kilómetros de longitud, este aspecto se considera un factor significativo que afecta las diferencias obtenidas en los cálculos.

Debido a que el vértice IGM-012 muestra la mayor discrepancia, se realiza un análisis detallado de su entorno. En la figura 4.10 se observa que la ubicación no es ideal, ya que está situada debajo de un cable eléctrico, lo cual puede causar interferencias electromagnéticas. Además, hay muros, columnas y árboles cercanos que pueden provocar la reflexión de las señales satelitales, lo que produce el error conocido como multicaminos.



Figura 4.10. Ubicación del vértice IGM-012 (Monografía de estación, Instituto Geográfico Militar)

4.2.1. Post Proceso de vértices ocupados el día 19 de octubre de 2022.

Se continua el postproceso de los vértices ocupados el 19 de octubre de 2022, que se corresponden con IGM-022, IGM-023, IGM-024, IGM-025, IGM-026, IGM-027, IGM-028, IGM-029 e IGM-030. Este post proceso nuevamente se realiza en primera instancia con respecto a la base permanente UYMO y, posteriormente, con respecto a la base UYIF.

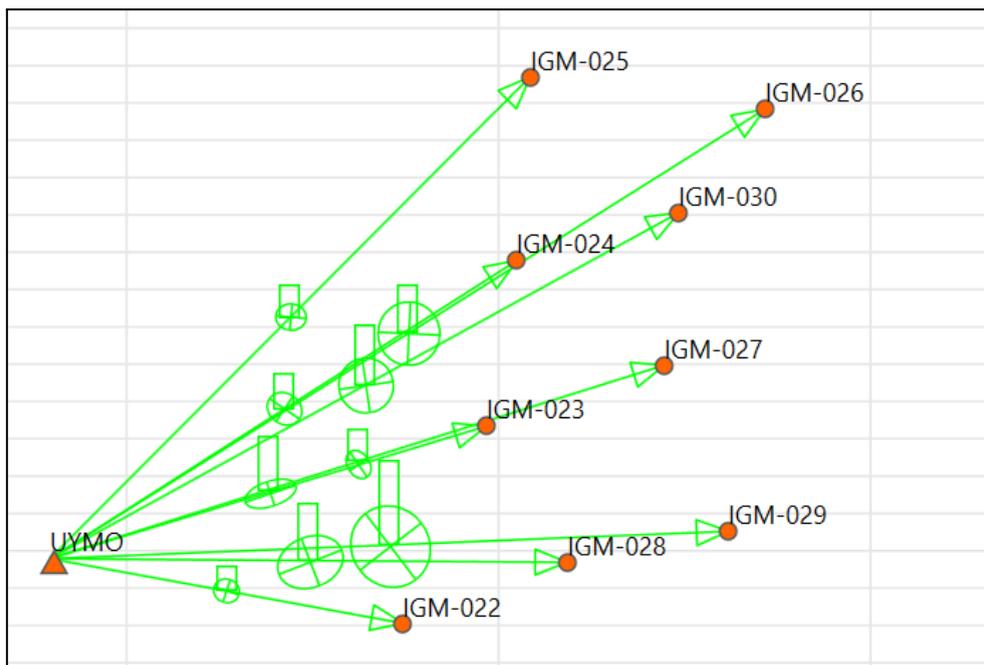


Figura 4.11. Vectores desde la base UYMO a los vértices ocupados el 19 de octubre del 2022 en el software CGO.

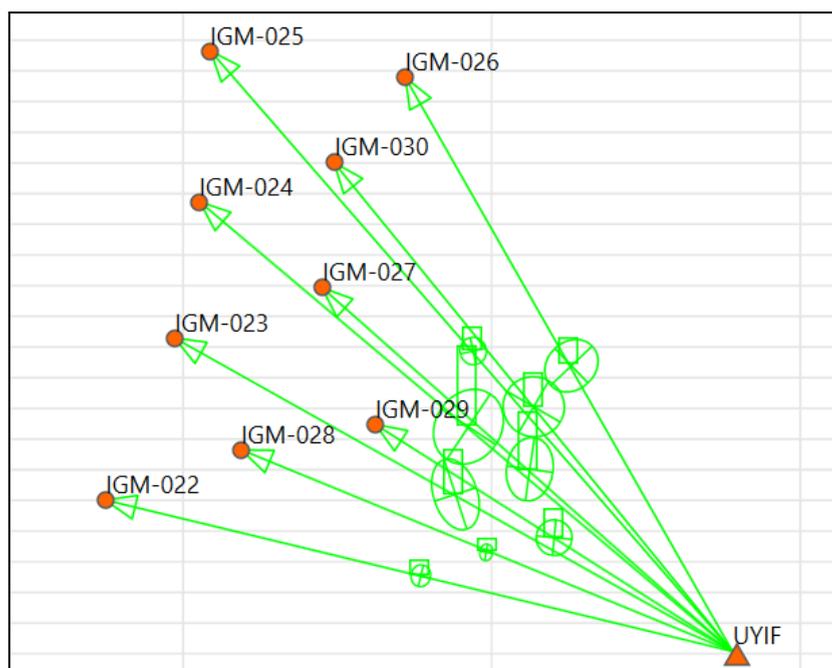


Figura 4.12. Vectores desde la base UYIF a los vértices ocupados el 19 de octubre de 2022 en el software CGO.

Luego, se presentan en formato de tablas los resultados de las coordenadas cartesianas tridimensionales de los vértices correspondientes al 19 de octubre de 2022, de la misma manera que se realiza para el caso anterior, en primera instancia el post proceso desde la base UYMO y luego desde UYIF.

	SIRGAS ROU 98			IGS 20 (Semana 2232)		
	X (m)	Y (m)	Z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
IGM-022	2916462.504	-4349295.641	-3629093.750	2916462.539	-4349295.858	-3629093.480
IGM-023	2919989.493	-4350610.430	-3624757.259	2919989.527	-4350610.647	-3624756.989
IGM-024	2922045.761	-4352274.672	-3621100.439	2922045.789	-4352274.884	-3621100.145
IGM-025	2923862.697	-4354426.532	-3617052.636	2923862.732	-4354426.750	-3617052.367
IGM-026	2928852.395	-4350516.088	-3617718.249	2928852.430	-4350516.305	-3617717.979
IGM-027	2924471.005	-4348724.713	-3623363.370	2924471.040	-4348724.930	-3623363.101
IGM-028	2920640.035	-4347628.355	-3627712.585	2920640.070	-4347628.572	-3627712.316
IGM-029	2924509.880	-4345618.645	-3626993.613	2924509.915	-4345618.864	-3626993.344
IGM-030	2926060.781	-4350467.387	-3620008.561	2926060.816	-4350467.605	-3620008.293

Tabla 4.5. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYMO.

	SIRGAS ROU 98			IGS 20 (Semana 2232)		
	X (m)	Y (m)	Z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
IGM-022	2916462.501	-4349295.669	-3629093.806	2916462.517	-4349295.833	-3629093.466
IGM-023	2919989.534	-4350610.368	-3624757.295	2919989.554	-4350610.534	-3624756.957
IGM-024	2922045.684	-4352274.755	-3621100.463	2922045.706	-4352274.924	-3621100.130
IGM-025	2923862.701	-4354426.575	-3617052.691	2923862.721	-4354426.74	-3617052.352
IGM-026	2928852.512	-4350516.029	-3617718.319	2928852.531	-4350516.195	-3617717.982
IGM-027	2924470.979	-4348724.739	-3623363.435	2924470.997	-4348724.903	-3623363.096
IGM-028	2920640.024	-4347628.443	-3627712.656	2920640.056	-4347628.624	-3627712.324
IGM-029	2924511.147	-4345617.409	-3626993.541	2924511.855	-4345616.940	-3626993.126
IGM-030	2926060.801	-4350467.384	-3620008.636	2926060.818	-4350467.548	-3620008.297

Tabla 4.6. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYIF.

Con base en los resultados anteriores, se elabora una tabla que muestra las diferencias en las coordenadas cartesianas tridimensionales de cada vértice, al realizar el postproceso desde dos bases permanentes diferentes: UYMO y UYIF. Los resultados se representan para los dos sistemas de referencia.

	SIRGAS ROU 98				IGS 20 (Semana 2232)			
	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)	Módulo (m)	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)	Módulo (m)
IGM-022	0.002	0.029	0.056	0.063	0.022	0.026	0.015	0.037
IGM-023	0.042	0.062	0.036	0.083	0.027	0.113	0.033	0.121
IGM-024	0.077	0.083	0.024	0.116	0.083	0.040	0.015	0.094
IGM-025	0.004	0.043	0.055	0.070	0.011	0.010	0.015	0.021
IGM-026	0.117	0.058	0.071	0.149	0.101	0.111	0.003	0.150
IGM-027	0.026	0.026	0.064	0.074	0.043	0.027	0.005	0.051
IGM-028	0.011	0.088	0.071	0.113	0.014	0.053	0.008	0.055
IGM-029	1.268	1.236	0.072	1.772	1.940	1.924	0.218	2.741
IGM-030	0.020	0.003	0.075	0.078	0.002	0.058	0.004	0.058

Tabla 4.7. Diferencias entre los resultados obtenidos desde UYMO y UYIF.

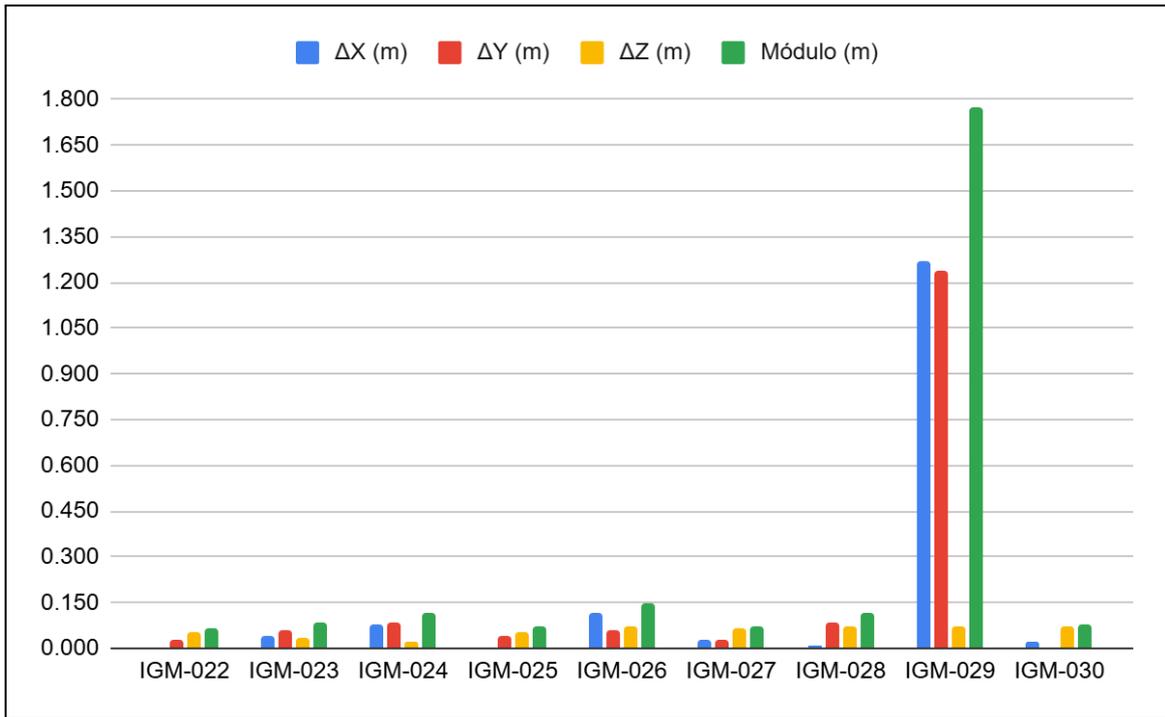


Figura 4.13. Diferencias en SIRGAS ROU 98

}

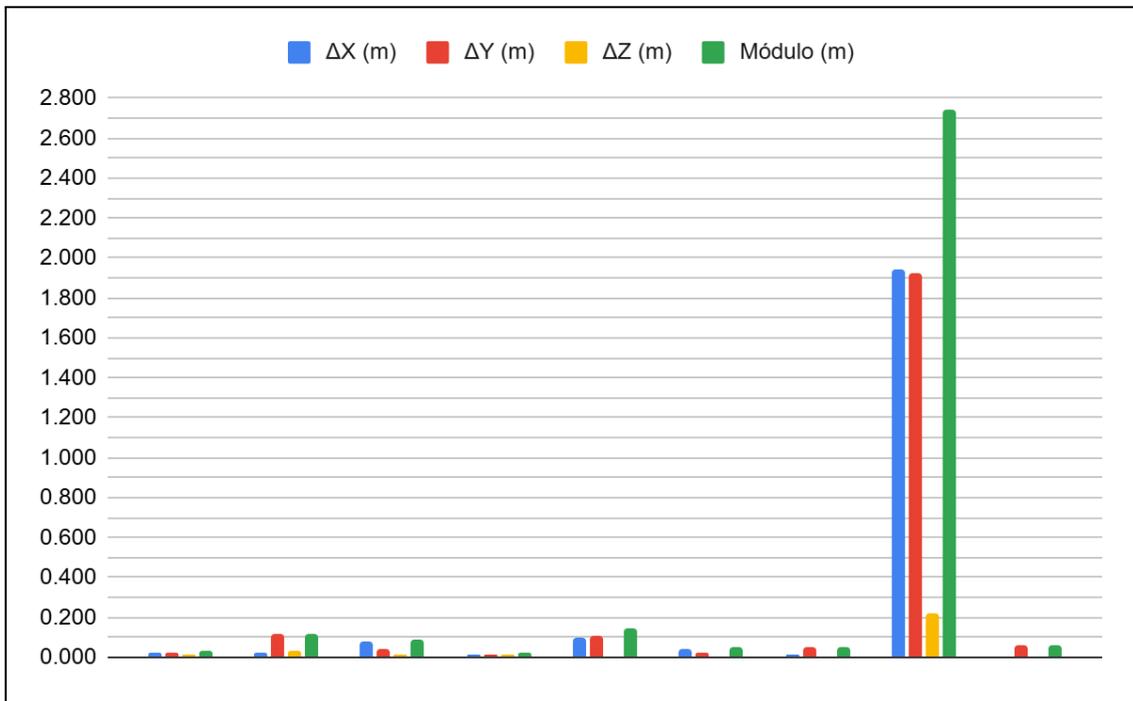


Figura 4.14. Diferencias en IGS 20 (Solución SIRGAS de la semana 2232).

Como se observa en las figuras 4.13 y 4.14 las discrepancias en el procesamiento desde las bases UYMO y UYIF, en coordenadas cartesianas y para ambos sistemas, son menores a diez centímetros en todos los vértices, salvo en el IGM-29, el cual será analizado más adelante. Este resultado satisfactorio se atribuye a que los vértices están ubicados a distancias similares de ambas bases - aproximadamente 20 km - lo que genera vectores de post procesamiento de longitudes similares en ambos casos (Ver Figura 4.15)

Los resultados obtenidos en los vértices IGM-022, IGM-025 e IGM-027 son satisfactorios, ya que las discrepancias en todas las coordenadas son menores a tres centímetros, cumpliendo con lo esperado en un posicionamiento diferencial en postproceso, como se observa en la tabla 4.7.

En el caso del vértice IGM-29, las imágenes que representan gráficamente las discrepancias muestran diferencias de más de un metro en las coordenadas X e Y para ambos sistemas de referencia.

Al realizar un análisis detallado de este vértice, se observa que el tiempo de ocupación en el lugar es de aproximadamente una hora y media, lo cual no parece ser un factor determinante para el resultado obtenido. A su vez, se procede a analizar la ubicación del vértice, y se constata que se encuentra a una distancia similar y relativamente cercana - 17 kilómetros- de ambas bases, por lo tanto, esto tampoco sería una causal de las discrepancias resultantes.

Se observa en detalle la imagen de la ubicación del vértice, que se presenta en la monografía proporcionada por el Instituto Geográfico Militar (IGM), revela la presencia de diversos elementos en el entorno que pueden interferir con la señal satelital y generar el fenómeno de multicaminos. Este fenómeno ocurre cuando la señal se refleja en diferentes

objetos, como árboles y columnas, y llega al receptor por múltiples trayectorias, lo que afecta la precisión de los datos obtenidos.

Además, se identifican infraestructuras cercanas, como las líneas eléctricas, que pueden causar interferencias electromagnéticas, distorsionando aún más la señal y generando errores en los cálculos de ubicación. Debido a estos factores, se decide acudir al sitio - vértice NE de la esquina Costa Rica y Mones Roses - para realizar un registro fotográfico de la ubicación del vértice, con el fin de documentar las condiciones del entorno. En las fotografías capturadas, se puede observar que el vértice se encuentra en una zona de la ciudad de Montevideo caracterizada por una notable presencia de arbolado (Ver Figura 16).

Se constata que en la monografía del vértice, en el apartado de observaciones, se menciona que “Por no fijar ambigüedades las coordenadas de este punto no se consideran de alta precisión”, lo que rectifica los resultados obtenidos en el presente proyecto.

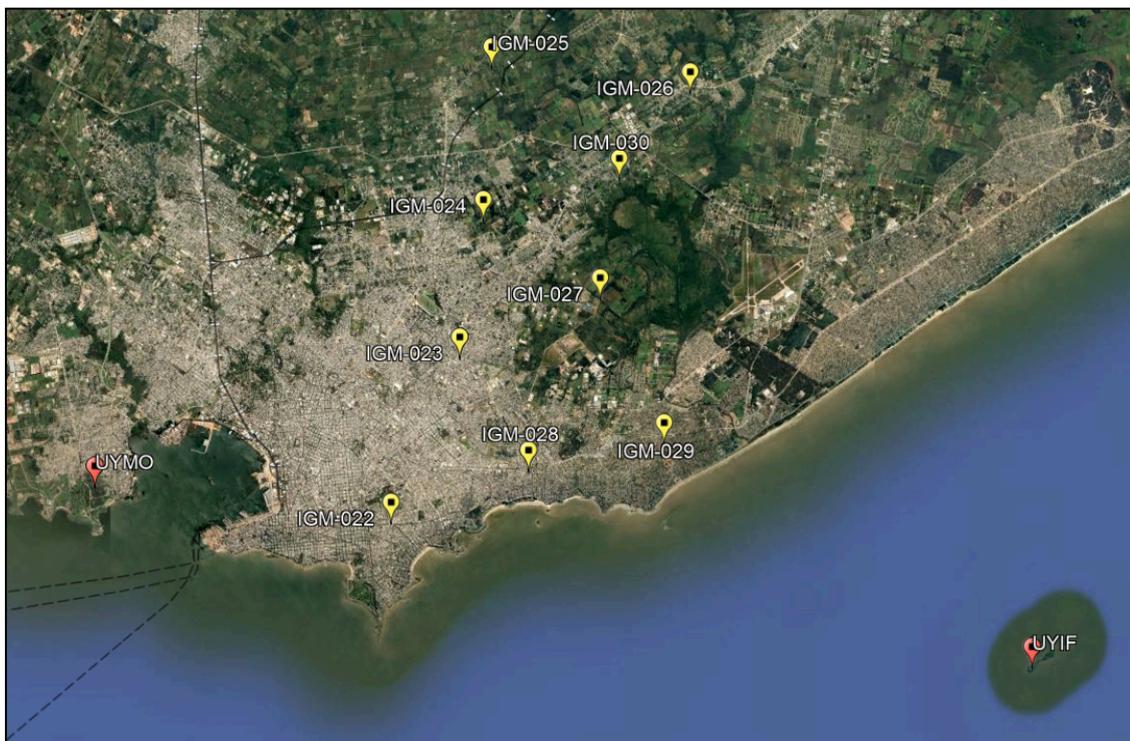


Figura 4.15. Ubicación de los vértices y estaciones permanente (Figura realizada en Google Earth Pro).



Figura 4.16. Registro fotográfico de la ubicación del vértice IGM-029.

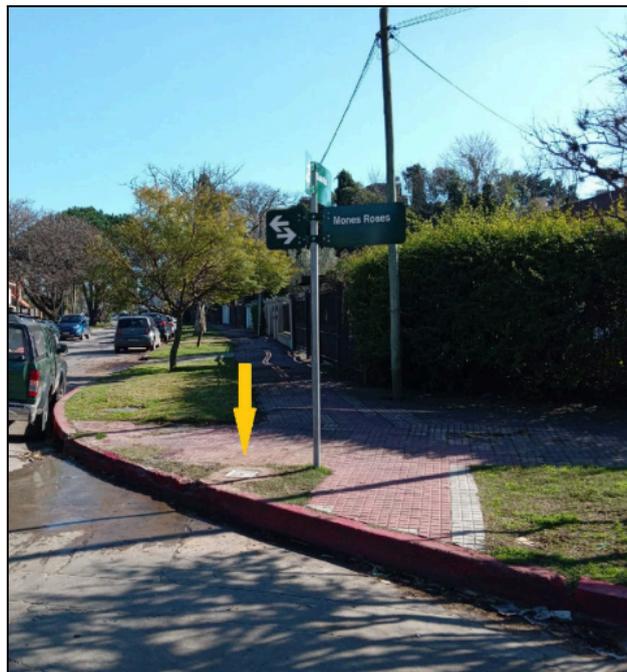


Figura 4.17. Imagen del vértice (Monografía, IGM).

OBSERVACIONES
<p>Nivelado desde IM-IGM 028. Por no fijar ambigüedades, las coordenadas de este punto no se consideran de alta precisión.</p>

Figura 4.18. Apartado observaciones en la Monografía del vértice IGM-029 (IGM).

4.2.3. Post Proceso de vértices ocupados el día 13 de noviembre de 2023.

El siguiente día que se realiza el postproceso se corresponde a los vértices ocupados el 13 de noviembre de 2023, correspondientes a los vértices IGM-032, IGM-034 y IGM-035. El IGM-034, como vértice principal de este proyecto orientado a obtener coordenadas cartesianas tridimensionales de buena precisión, se deja para un análisis y estudio más exhaustivo en una fase posterior, a su vez el post proceso de los vértices IGM-032 y IGM-035 nuevamente se realiza en primera instancia con respecto a la base permanente UYMO y, posteriormente, con respecto a la base UYIF.

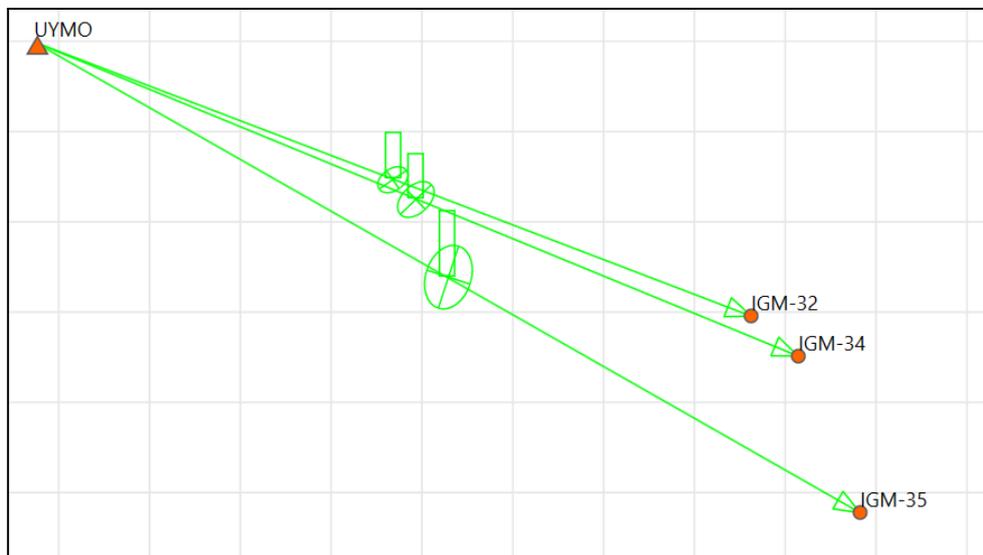


Figura 4.19. Vectores desde la base UYMO a los vértices ocupados el 13 de noviembre del 2023 en software CGO.

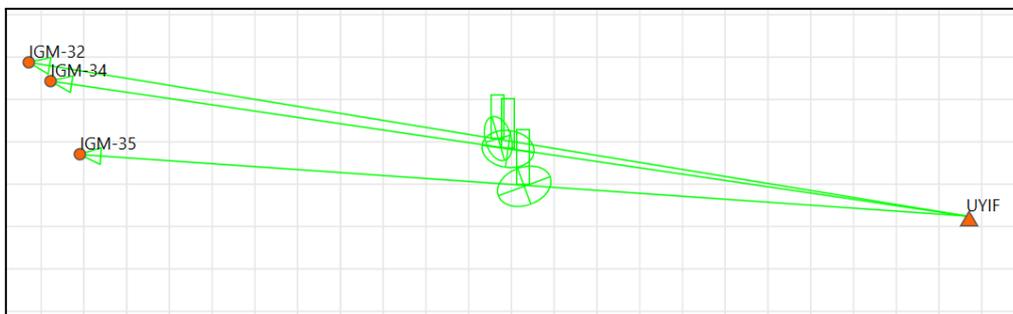


Figura 4.20. Vectores desde la base UYIF a los vértices ocupados el 13 de noviembre del 2023 en software CGO.

Luego, se presentan en formato de tablas los resultados de las coordenadas cartesianas tridimensionales de los vértices correspondientes al 13 de noviembre de 2023, en primera instancia el post proceso desde la base UYMO y luego desde UYIF.

	SIRGAS ROU 98			IGS 20 (Semana 2288)		
	X (m)	Y (m)	Z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
IGM-32	2914709.062	-4349534.815	-3630164.657	2914709.099	-4349535.043	-3630164.385
IGM-34	2915007.677	-4349047.656	-3630532.483	2915007.714	-4349047.884	-3630532.210
IGM-35	2915027.070	-4347830.775	-3631943.239	2915027.108	-4347831.003	-3631942.967

Tabla 4.8. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYMO.

	SIRGAS ROU 98			IGS 20 (Semana 2288)		
	X (m)	Y (m)	Z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
IGM-32	2914709.073	-4349534.866	-3630164.744	2914709.103	-4349535.049	-3630164.406
IGM-34	2915007.690	-4349047.694	-3630532.547	2915007.720	-4349047.878	-3630532.210
IGM-35	2915027.086	-4347830.818	-3631943.293	2915027.116	-4347831.002	-3631942.955

Tabla 4.9. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYIF.

Con base en los resultados anteriores, se elabora una tabla que muestra las diferencias en valor absoluto en las coordenadas cartesianas tridimensionales de buen cada vértice, al realizar el postproceso desde dos bases diferentes: UYMO y UYIF.

	SIRGAS ROU 98				IGS 20 (Semana 2288)			
	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)	Módulo (m)	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)	Módulo (m)
IGM-32	0.011	0.051	0.087	0.101	0.003	0.007	0.021	0.023
IGM-34	0.013	0.038	0.065	0.076	0.005	0.007	0.001	0.008
IGM-35	0.016	0.043	0.054	0.071	0.008	0.002	0.012	0.014

Tabla 4.10. Diferencias entre los resultados obtenidos desde UYMO y UYIF.

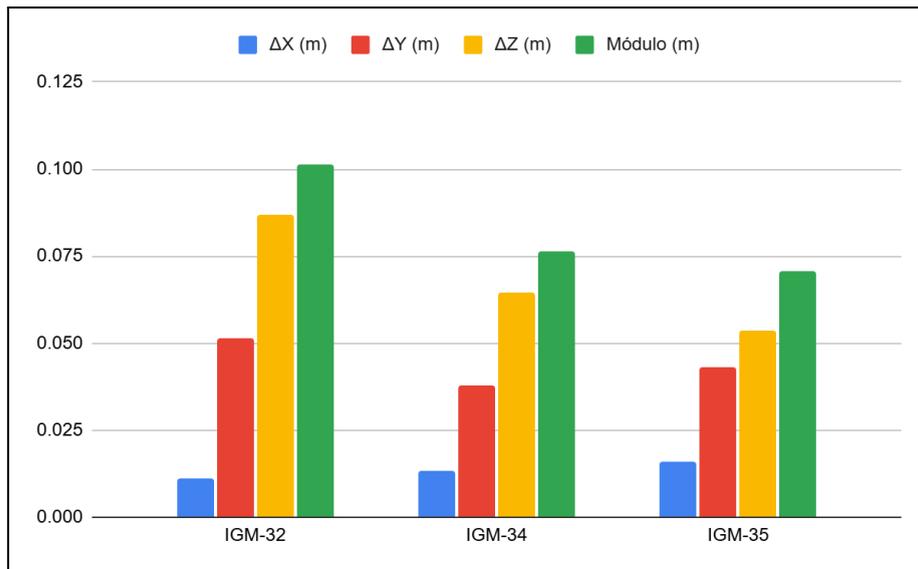


Figura 4.21. Diferencia en SIRGAS ROU 98

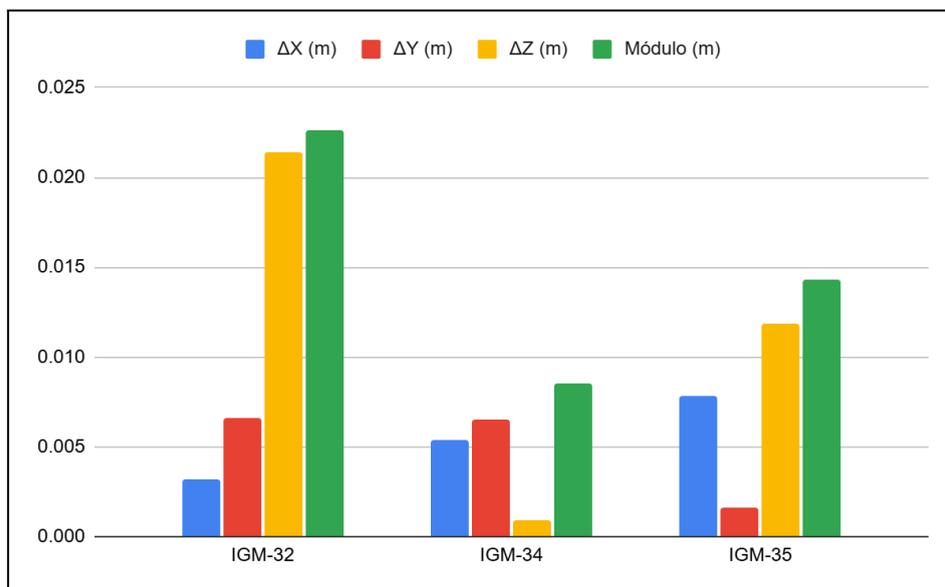


Figura 4.22. Diferencia en IGS 20 (Solución SIRGAS de la semana 2288).

Las figuras 4.21 y 4.22 muestran que las variaciones en el procesamiento de los vértices, a partir de las bases UYMO y UYIF, presentan diferencias menores a tres centímetros en el sistema IGS 20, lo cual es más favorable que en el sistema SIRGAS ROU 98, como era de esperarse, debido a la utilización de efemérides precisas finales además de la utilización de las coordenadas de las estaciones de referencia en SIRGAS semanal.

La imagen 4.19 muestra que los tres vértices se encuentran a una distancia adecuada de ambas bases, ubicándose aproximadamente a 10 km de UYMO y a 15 km de UYIF. Estos vértices fueron ocupados durante un período de aproximadamente dos horas, lo cual se considera adecuado según lo mencionado anteriormente. Sin embargo, es importante tener en cuenta que el período de ocupación depende de la precisión que se busque; en algunos casos, los resultados obtenidos podrían no ser los esperados. En tales situaciones, con el objetivo de mejorar la calidad de las coordenadas, sería necesario aumentar el tiempo de ocupación.

Cabe agregar que los vértices están situados en áreas despejadas, dos sobre la rambla y uno en la explanada de la Facultad de Ingeniería de la UDELAR, lo que permite una recepción clara de la señal de los satélites.

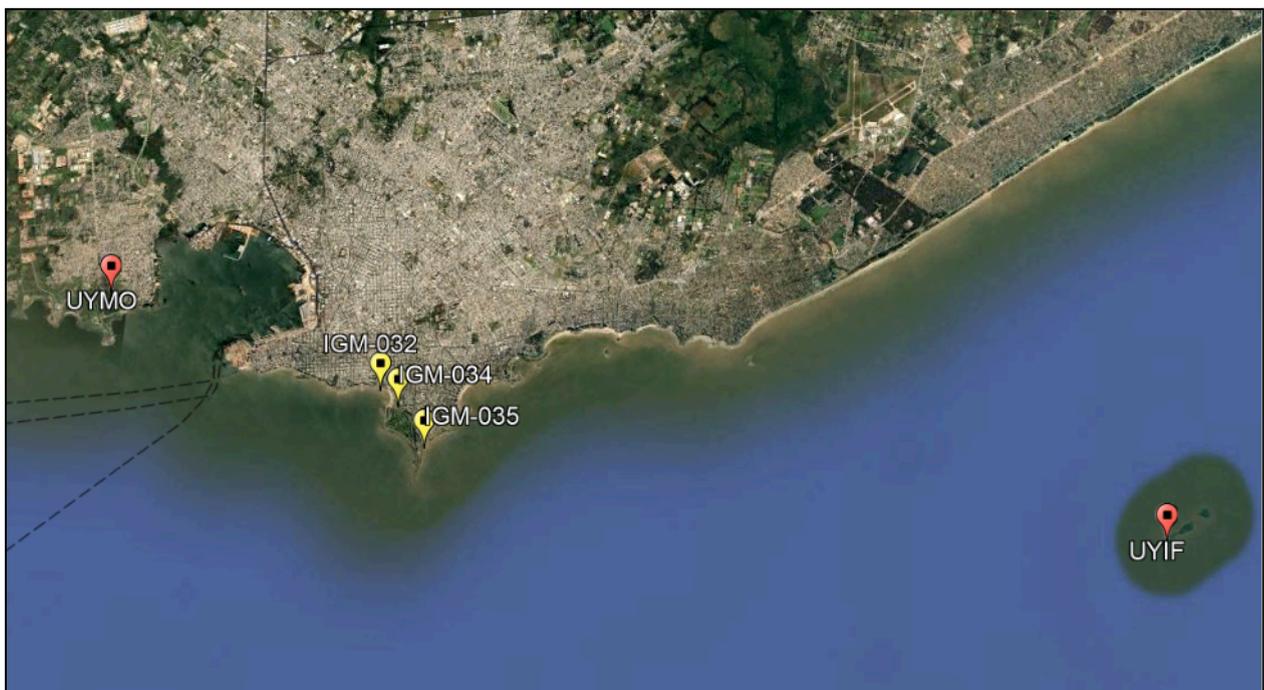


Figura 4.23. Ubicación de los vértices y estaciones permanentes.

4.2.4. Post Proceso de vértices ocupados el día 15 de noviembre de 2023.

Se lleva a cabo el postproceso de los vértices ocupados el 15 de noviembre de 2023, correspondientes a los vértices IGM-01, IGM-02, IGM-03, IGM-04, IGM-05, IGM-06, IGM-07, IGM-08, IGM-09, IGM-10, IGM-15, IGM-16, IGM-17, IGM-18 e IGM-19. Este post proceso se realiza inicialmente en relación con la base permanente UYMO y, posteriormente, con la base UYIF.

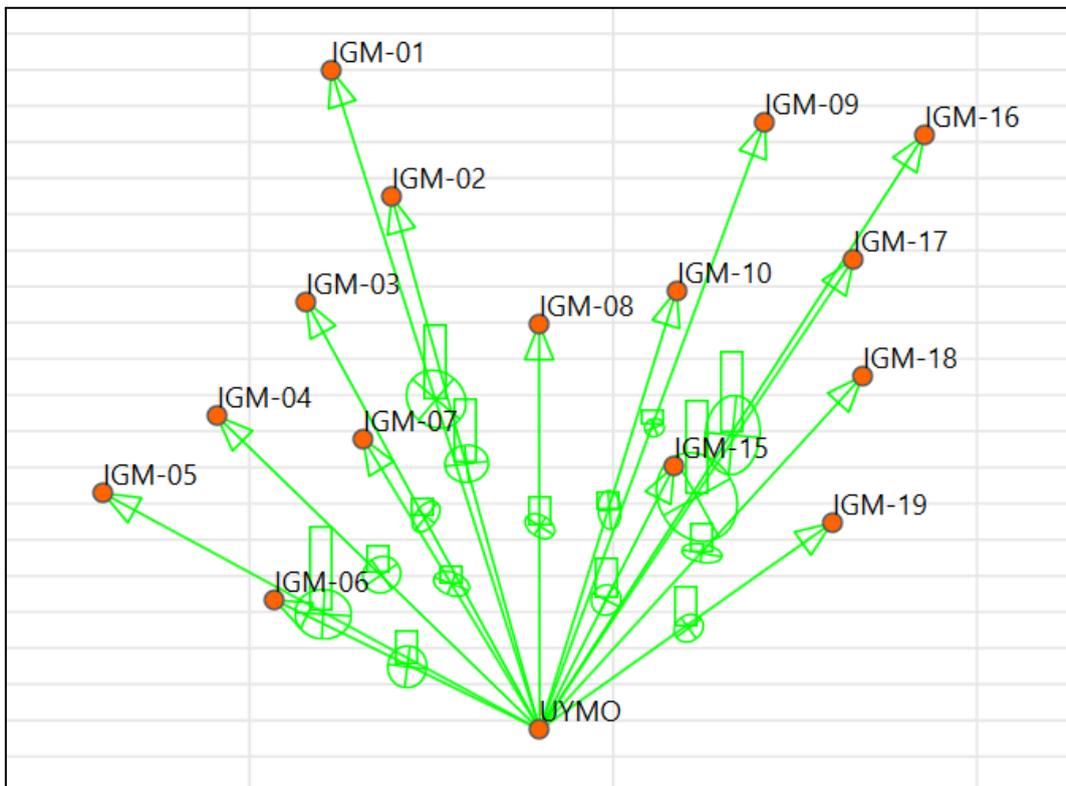


Figura 4.24. Vectores desde la base UYMO a los vértices ocupados el 15 de noviembre del 2023 en software CGO.

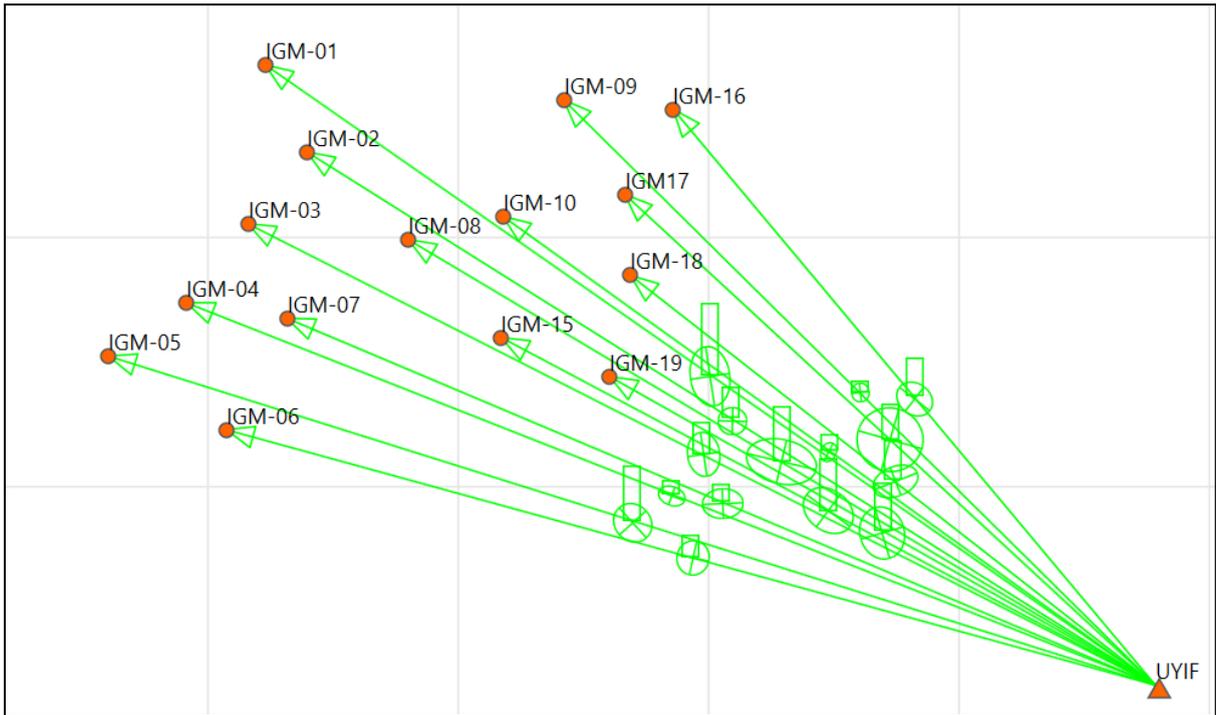


Figura 4.25. Vectores desde la base UYMO a los vértices ocupados el 15 de noviembre del 2023 en software CGO.

Posteriormente, se organizan y exponen en formato de tabla los resultados obtenidos para las coordenadas cartesianas tridimensionales de los vértices ocupados el 15 de noviembre de 2023. Este procedimiento sigue el mismo esquema empleado para los casos presentados con anterioridad. En primer lugar, se elabora y presenta la tabla correspondiente al post proceso realizado desde la base permanente UYMO, una vez completada esta etapa, se genera y expone una segunda tabla que detalla los resultados obtenidos a partir del post proceso realizado desde la estación permanente UYIF.

	SIRGAS ROU 98			IGS 20 (Semana 2288)		
	X (m)	Y (m)	Z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
IGM-01	2909965.437	-4367252.759	-3612787.140	2909965.475	-4367253.087	-3612786.868
IGM-02	2910273.471	-4364677.485	-3615659.026	2910273.486	-4364677.759	-3615658.739
IGM-03	2907397.212	-4364580.304	-3618025.158	2907397.229	-4364580.532	-3618024.887
IGM-04	2904367.199	-4364416.476	-3620650.178	2904367.237	-4364416.704	-3620649.906

IGM-05	2901105.854	-4365128.179	-3622435.558	2901105.892	-4365128.408	-3622435.549
IGM-06	2904125.791	-4361122.144	-3624841.974	2904125.768	-4361122.371	-3624841.701
IGM-07	2907527.681	-4361911.321	-3621142.924	2907527.719	-4361911.549	-3621142.652
IGM-08	2912566.235	-4360775.206	-3618537.197	2912566.303	-4360775.434	-3618536.924
IGM-09	2919494.357	-4360035.175	-3613906.585	2919494.395	-4360035.403	-3613906.213
IGM-10	2916006.607	-4359132.910	-3617743.392	2916006.645	-4359133.139	-3617743.120
IGM-15	2914436.033	-4356834.101	-3621737.714	2914436.070	-4356834.329	-3621737.441
IGM-16	2923023.196	-4357438.118	-3614182.895	2923023.228	-4357438.347	-3614182.617
IGM-17	2920343.219	-4356863.343	-3616994.064	2920343.257	-4356863.571	-3616993.791
IGM-18	2919515.677	-4355161.997	-3619652.127	2919515.741	-4355162.225	-3619651.855
IGM-19	2917555.906	-4353680.175	-3622989.741	2917555.944	-4353680.294	-3622989.468

Tabla 4.11. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYMO.

	SIRGAS ROU 98			IGS 20 (Semana 2288)		
	X (m)	Y (m)	Z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
IGM-01	2909965.391	-4367252.736	-3612787.171	2909965.429	-4367253.124	-3612786.879
IGM-02	2910273.371	-4364677.543	-3615659.119	2910273.399	-4364677.725	-3615658.783
IGM-03	2907397.105	-4364580.353	-3618025.217	2907397.135	-4364580.536	-3618024.877
IGM-04	2904367.210	-4364416.457	-3620650.216	2904367.241	-4364416.742	-3620649.933
IGM-05	2901105.846	-4365128.159	-3622435.579	2901105.885	-4365128.381	-3622435.579
IGM-06	2904125.722	-4361122.204	-3624842.016	2904125.690	-4361122.430	-3624841.654
IGM-07	2907527.662	-4361911.339	-3621142.958	2907527.693	-4361911.523	-3621142.620
IGM-08	2912566.255	-4360775.246	-3618537.212	2912566.285	-4360775.430	-3618536.880
IGM-09	2919494.356	-4360035.229	-3613906.563	2919494.386	-4360035.412	-3613906.191
IGM-10	2916006.596	-4359132.927	-3617743.434	2916006.627	-4359133.110	-3617743.162
IGM-15	2914436.044	-4356834.134	-3621737.755	2914436.065	-4356834.290	-3621737.484
IGM-16	2923023.165	-4357438.122	-3614182.920	2923023.196	-4357438.299	-3614182.578
IGM-17	2920343.188	-4356863.368	-3616994.117	2920343.252	-4356863.574	-3616993.756
IGM-18	2919515.782	-4355162.023	-3619652.205	2919515.812	-4355162.206	-3619651.833
IGM-19	2917555.905	-4353680.140	-3622989.762	2917555.935	-4353680.323	-3622989.492

Tabla 4.12. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYIF.

En base a los resultados previamente expuestos, se elabora una tabla diseñada específicamente para representar las diferencias observadas en las coordenadas cartesianas tridimensionales de los vértices, derivadas del post proceso realizado desde dos bases de referencia distintas: UYMO y UYIF.

	SIRGAS ROU 98				IGS 20 (Semana 2288)			
	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)	Módulo (m)	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)	Módulo (m)
IGM-01	0.046	0.022	0.031	0.060	0.046	0.037	0.011	0.060
IGM-02	0.100	0.058	0.093	0.148	0.087	0.033	0.044	0.102
IGM-03	0.107	0.050	0.058	0.132	0.094	0.004	0.010	0.095
IGM-04	0.011	0.019	0.038	0.044	0.004	0.038	0.027	0.047
IGM-05	0.008	0.020	0.021	0.030	0.007	0.026	0.030	0.040
IGM-06	0.068	0.060	0.042	0.100	0.078	0.058	0.047	0.108
IGM-07	0.019	0.019	0.034	0.043	0.025	0.026	0.032	0.048
IGM-08	0.019	0.040	0.016	0.047	0.018	0.003	0.045	0.048
IGM-09	0.001	0.054	0.022	0.059	0.009	0.010	0.021	0.025
IGM-10	0.011	0.017	0.042	0.047	0.018	0.028	0.042	0.054
IGM-15	0.011	0.033	0.040	0.053	0.006	0.039	0.042	0.058
IGM-16	0.031	0.003	0.025	0.040	0.032	0.048	0.038	0.069
IGM-17	0.031	0.025	0.053	0.066	0.005	0.003	0.036	0.036
IGM-18	0.105	0.026	0.078	0.133	0.071	0.019	0.022	0.077
IGM-19	0.001	0.036	0.021	0.041	0.009	0.030	0.024	0.039

Tabla 4.13. Diferencias entre los resultados obtenidos desde UYMO y UYIF.

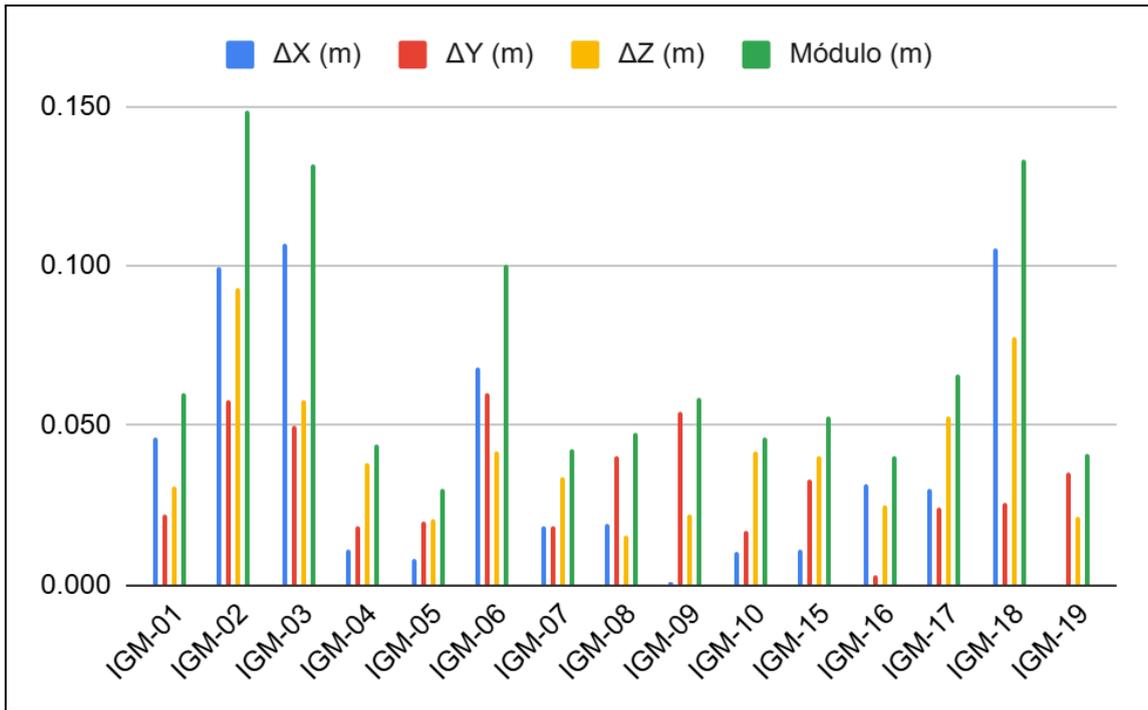


Figura 4.26. Diferencia en SIRGAS ROU 98

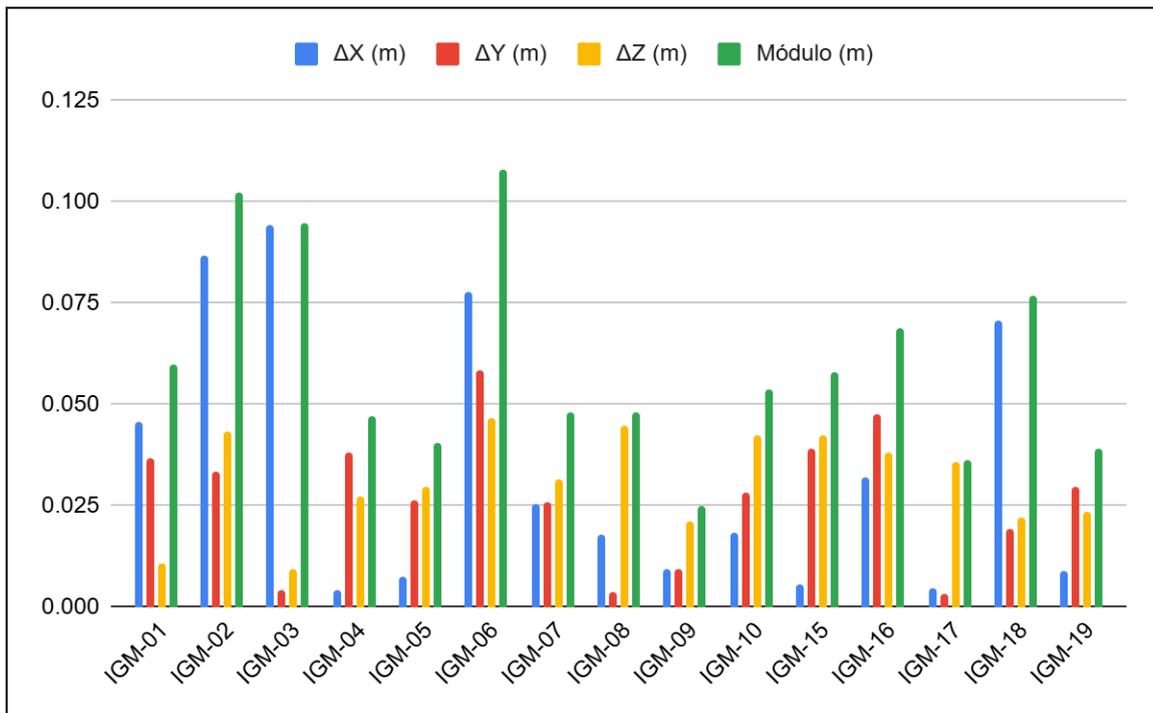


Figura 4.27. Diferencia en IGS 20 (Solución SIRGAS de la semana 2288).

Como se observa en las Figuras 4.26 y 4.27, las diferencias en las coordenadas cartesianas tridimensionales de los vértices post procesados, con excepción de los vértices IGM-02, IGM-03, IGM-06 e IGM-018, son inferiores a cinco centímetros en los sistemas SIRGAS ROU 98 e IGS 20. Este resultado refleja una consistencia general en ambos sistemas, con una precisión ligeramente superior en el sistema IGS 20, como era de esperarse, debido al uso de efemérides precisas en su procesamiento y coordenadas de las estaciones de referencia en SIRGAS semanal.

En el caso de los vértices cuyas diferencias superan los cinco centímetros, estos se mantienen por debajo del umbral de los diez centímetros en ambos sistemas. Para estos casos específicos, se prevé un análisis detallado con el fin de identificar las posibles causas de estas discrepancias. Este análisis incluirá una revisión exhaustiva de la ubicación geográfica de los vértices, considerando factores como la distancia de cada uno a las bases permanentes y las características del entorno en el que se encuentran, ya que estos aspectos podrían influir en los resultados obtenidos.

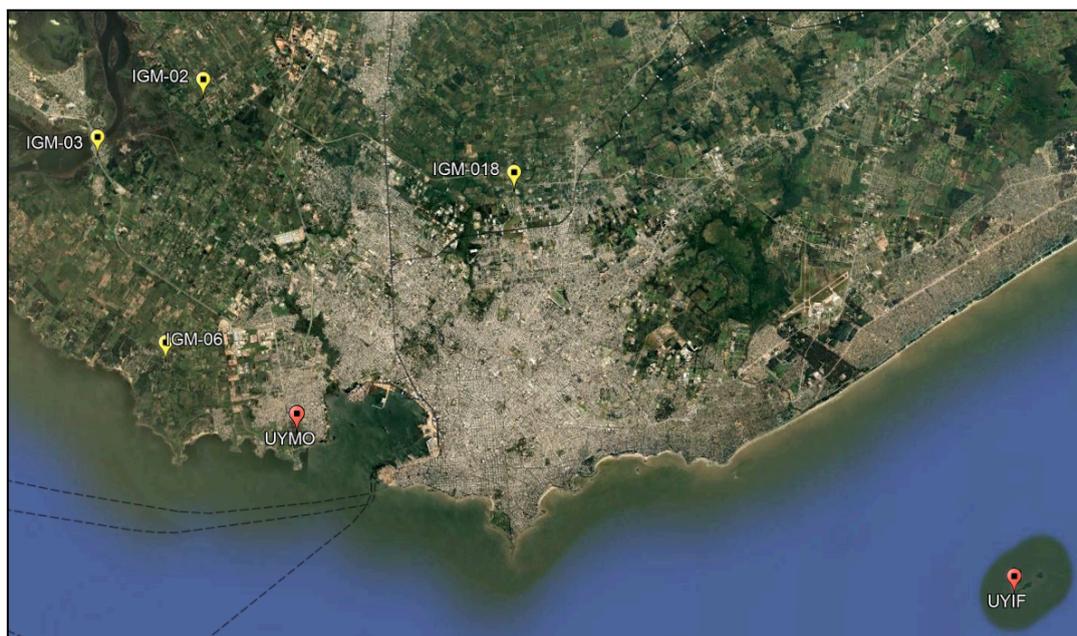


Figura 4.28. Ubicación de los vértices IGM-03, IGM-02, IGM-06, IGM-018 y de las bases permanentes.

A partir del análisis de las fotografías proporcionadas por el Instituto Geográfico Militar (IGM), las cuales fueron capturadas durante la ocupación de los vértices, se puede observar que el vértice IGM-02 se encuentra en un entorno que no favorece una buena recepción de la señal GNSS. Esto se debe a que se encuentra cercano a árboles de gran altura y líneas de cableado eléctrico (Ver Figura 4.29). Por el contrario, los demás vértices analizados están ubicados en entornos despejados, lo que indica que estos factores no afectan la calidad de la señal GNSS en dichos puntos.

Adicionalmente, se lleva a cabo un análisis de las distancias a las bases permanentes, las cuales se ubican a través de la plataforma Google Earth, como se muestra en la Figura 4.28. En este sentido, se observa que los vértices IGM-02, IGM-03 e IGM-018 se encuentran a una distancia considerable de ambas bases permanentes. Específicamente, los vértices IGM-02 e IGM-03 se sitúan a aproximadamente 15 kilómetros de la base UYMO y a alrededor de 40 kilómetros de la base UYIF. Por su parte, el vértice IGM-018 está a una distancia de unos 13 kilómetros de la base UYMO y unos 30 kilómetros de la base UYIF.

Este análisis revela una diferencia significativa en las distancias entre las bases, lo cual ayuda a explicar los resultados obtenidos. En particular, cuando una distancia a una base es más del doble que la distancia a la otra, esto incide directamente en los resultados obtenidos. Un caso similar ocurre con el vértice IGM-06, el cual se encuentra a una distancia óptima de la base permanente UYMO - aproximadamente 6 kilómetros - , pero está a unos 35 kilómetros de la base UYIF, lo que genera un vector cuya magnitud es más de cinco veces mayor en comparación con la distancia a la base UYMO. Asimismo, tal como se mencionó anteriormente, cuando los vectores superan los 20 kilómetros de longitud, los errores asociados a las condiciones atmosféricas y troposféricas dejan de ser uniformes. Este

fenómeno se convierte en un factor significativo que influye directamente en las diferencias obtenidas durante los cálculos.



Figura 4.29. Ubicación del vértice IGM-02 (Archivo fotográfico del IGM).

4.2.5. Post Proceso de vértices ocupados el día 17 de noviembre de 2023.

El último día en el que se lleva a cabo el proceso de post proceso se relaciona con los vértices que estuvieron ocupados el 17 de noviembre de 2023. Estos vértices corresponden específicamente a IGM-031 y IGM-033. Este procedimiento se ejecuta inicialmente en relación con la base permanente UYMO y, posteriormente, se realiza un ajuste en función de la base UYIF.

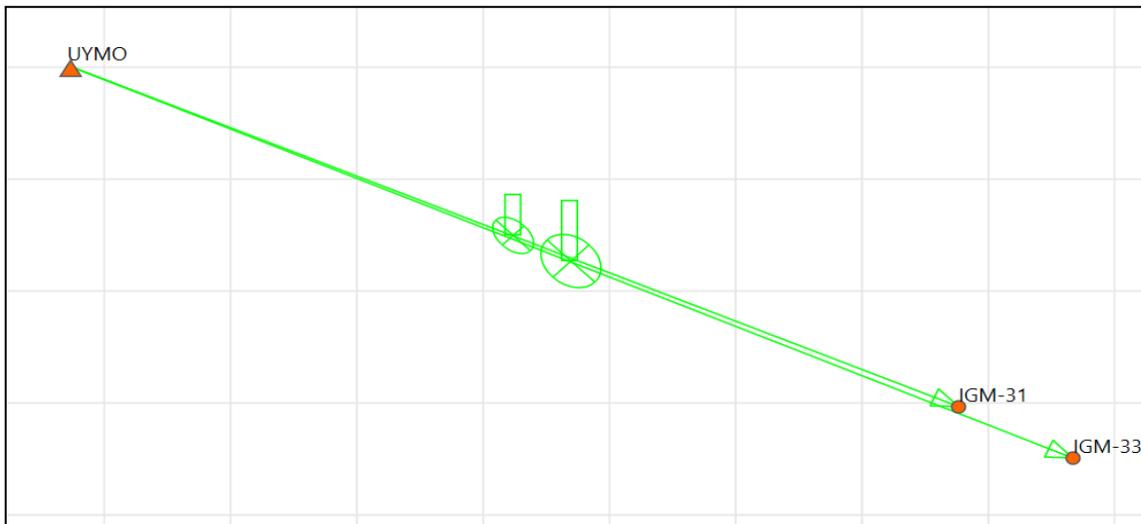


Figura 4.30. Vectores desde las bases permanentes a los vértices ocupados el 17 de noviembre de 2023 en software CGO.

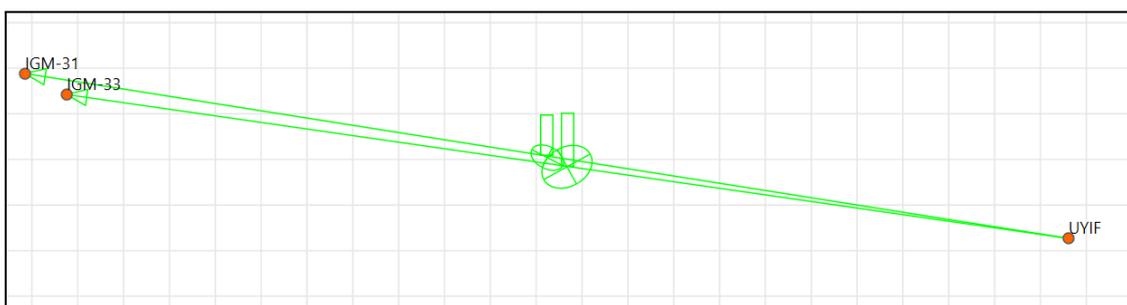


Figura 4.31. Vectores desde las bases permanentes a los vértices ocupados el 17 de noviembre de 2023 en software CGO.

Se organizan y presentan en una tabla los resultados de las coordenadas cartesianas tridimensionales de los vértices ocupados el 17 de noviembre de 2023, siguiendo el mismo esquema utilizado previamente. Primero se muestra la tabla con los resultados del post

proceso desde la base permanente UYMO, y luego la de los resultados obtenidos desde la estación UYIF.

	SIRGAS ROU 98			IGS 20 (Semana 2288)		
	X (m)	Y (m)	Z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
IGM-31	2914007.004	-4349993.437	-3630179.203	2914007.042	-4349993.664	-3630178.932
IGM-33	2914616.455	-4349269.212	-3630548.448	2914616.494	-4349269.440	-3630548.176

Tabla 4.14. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYMO.

	SIRGAS ROU 98			IGS 20 (Semana 2288)		
	X (m)	Y (m)	Z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
IGM-31	2914007.005	-4349993.444	-3630179.232	2914007.035	-4349993.651	-3630178.914
IGM-33	2914616.458	-4349269.220	-3630548.483	2914616.487	-4349269.429	-3630548.157

Tabla 4.15. Coordenadas cartesianas tridimensionales procesadas desde UYIF.

A partir de los resultados obtenidos en los análisis previos, se procede a la elaboración de una tabla que presenta de manera detallada las diferencias en valor absoluto en las coordenadas cartesianas tridimensionales de cada uno de los vértices. Esta comparación se realiza después de llevar a cabo el proceso de post proceso utilizando dos bases de referencia distintas: la base permanente UYMO y la base UYIF.

	SIRGAS ROU 98				IGS 20 (Semana 2288)			
	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)	Módulo (m)	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)	Módulo (m)
IGM-31	0.001	0.007	0.029	0.030	0.008	0.013	0.018	0.024
IGM-33	0.002	0.008	0.035	0.036	0.007	0.011	0.019	0.023

Tabla 4.16. Diferencias entre los resultados obtenidos desde UYMO y UYIF.

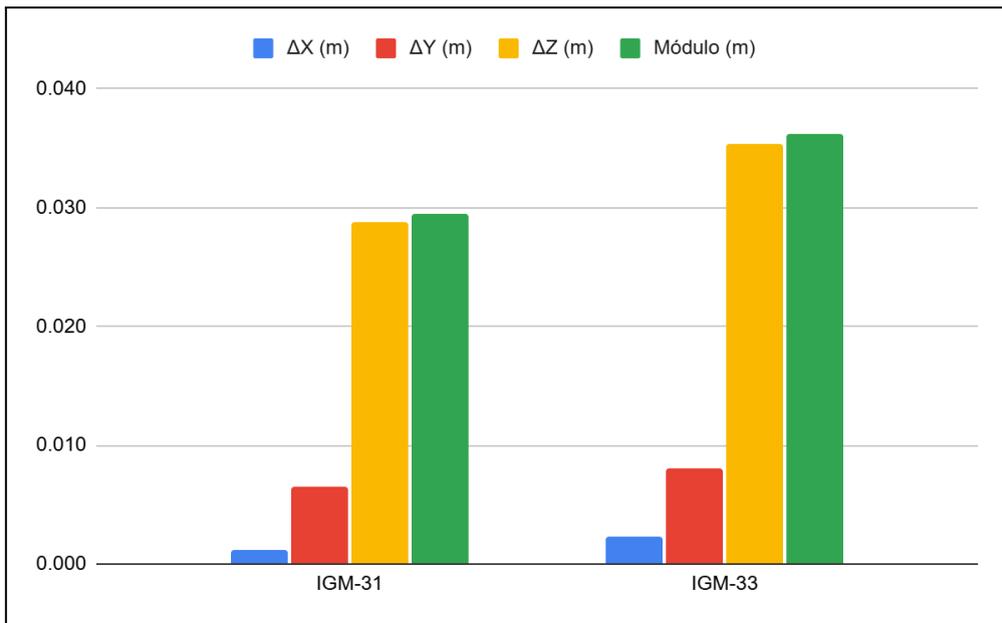


Figura 4.32. Diferencia en SIRGAS ROU 98

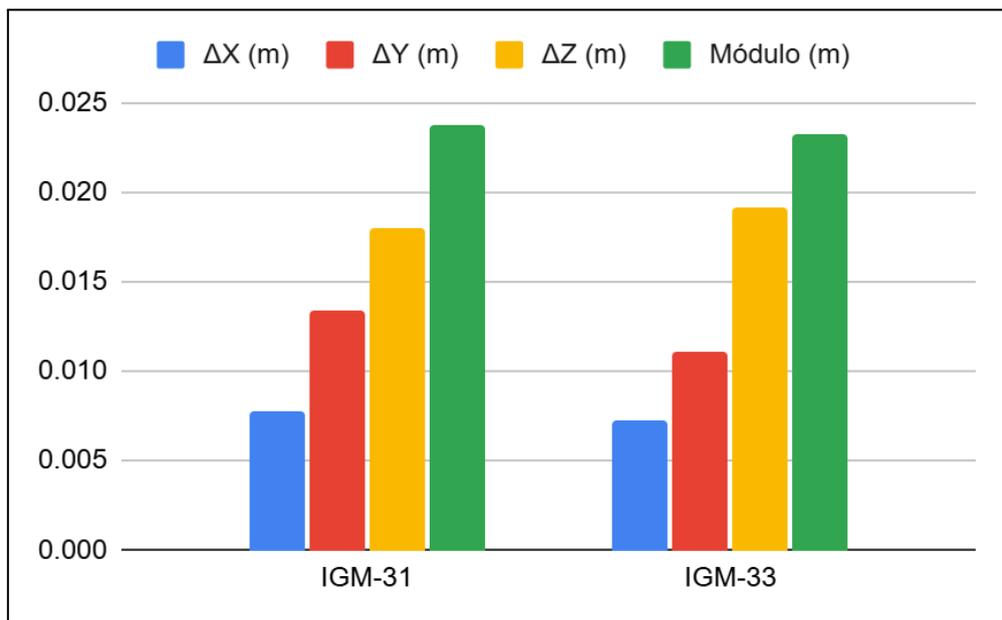


Figura 4.33. Diferencia en IGS 20 (Solución SIRGAS de la semana 2288).

En esta jornada, se obtienen resultados satisfactorios en relación con las discrepancias de las coordenadas generadas en post procesos realizados con anterioridad. Las discrepancias son menores a tres centímetros y medio para el sistema de referencia SIRGAS ROU 98, y menores a dos centímetros para el sistema IGS 20. Estos resultados son coherentes con una

mejora notable en el segundo sistema mencionado, ya que se utilizan efemérides precisas finales y coordenadas de las estaciones de referencia en SIRGAS semanal.

Para corroborar la causa de estos buenos resultados, se verifica nuevamente el tiempo de ocupación, constatando que se realizaron ocupaciones de aproximadamente una hora y cuarenta minutos para el vértice IGM-031, y de aproximadamente tres horas para el vértice IGM-033. Este hallazgo reafirma la idea de que, con ocupaciones superiores a una hora y media, se obtienen resultados más precisos. No obstante, además del tiempo de ocupación, también es fundamental considerar la longitud de la línea base, especialmente asegurándose de que esta sea inferior a 20 kilómetros.

Además, se comprueba la ubicación de ambos vértices, los cuales se encuentran situados sobre la rambla de la ciudad de Montevideo(Ver Figura 4.34). Estas áreas se caracterizan por ser comúnmente conocidas como espacios con cielo despejado, lo que favorece la recepción adecuada de señales satelitales, un aspecto fundamental para lograr resultados óptimos en el posicionamiento satelital.

Asimismo, al constatar las diferencias en los resultados de las coordenadas post procesadas con respecto a las dos bases permanentes diferentes, es crucial tener en cuenta la distancia a las mismas. Como se ha observado en casos anteriores, cuando se obtienen resultados satisfactorios, la distancia a las bases permanentes es cercana y similar, generando vectores de longitud similares. En contraste, en situaciones previas donde los vectores presentaban longitudes desiguales, es decir, donde los vectores generados desde una base eran significativamente más pequeños en comparación con los de otra base, las discrepancias en las coordenadas no resultaban satisfactorias.

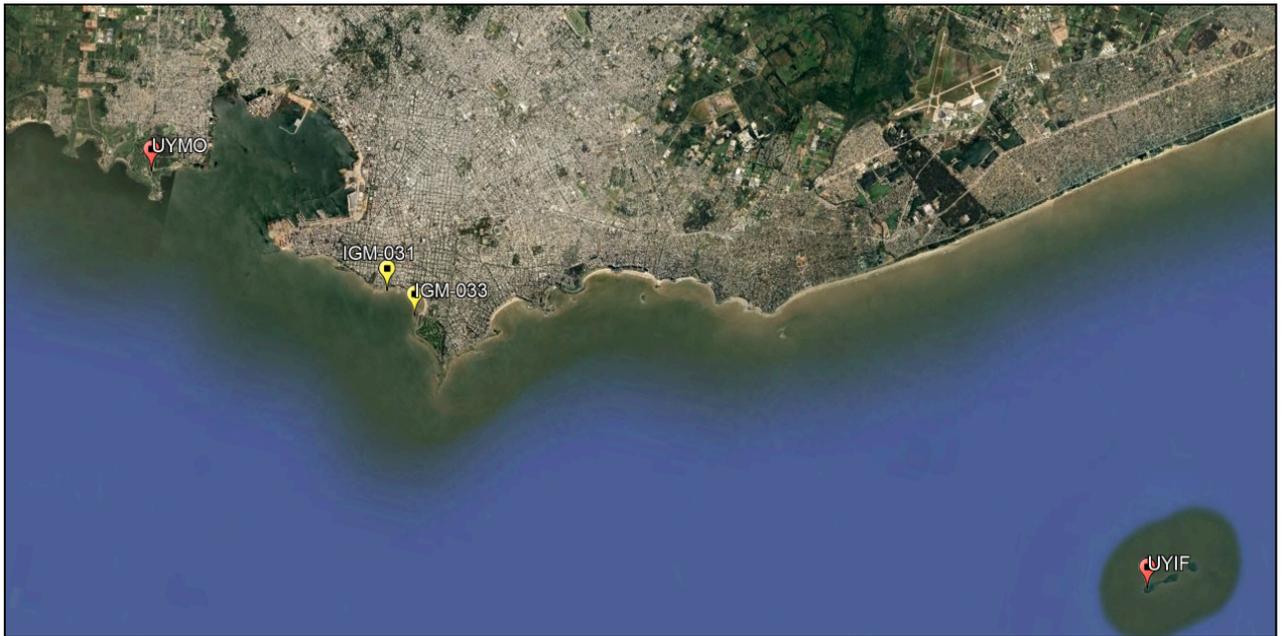


Figura 4.34. Ubicación de los vértices y de las bases permanentes.

4.4. Comparación del módulo del vector y la diferencia de altura elipsoidal entre coordenadas post procesadas con distintas bases permanentes.

Tras obtener las coordenadas cartesianas tridimensionales de cada vértice mediante el post proceso en el software CGO, utilizando diferentes bases permanentes (UYMO y UYIF), se procede a utilizar los módulos de los vectores calculados con anterioridad. Este módulo se corresponde con la distancia euclidiana. Este valor se compara con la diferencia absoluta de las alturas elipsoidales derivadas del post proceso para cada base permanente.

A partir de esta comparación, se calcula el porcentaje que representa la diferencia de las alturas elipsoidales respecto al módulo del vector. Estos resultados se presentan en la Tabla 4.17 y 4.18 para el día 17 de noviembre del 2023 y, se incluye una representación gráfica en formato de barras, para de este modo poder visualizar la importancia de la altura en dicha diferencia.

	Módulo (m)	Δh (m)	Porcentaje
IGM-31	0.024	0.017	71.56%
IGM-33	0.023	0.020	85.22%

Tabla 4.17. Porcentaje que representa la diferencia de las alturas elipsoidales respecto al módulo del vector en el sistema de referencia IGS 20.

	Módulo (m)	Δh (m)	Porcentaje
IGM-31	0.030	0.0272	92.05%
IGM-33	0.036	0.0331	91.26%

Tabla 4.18. Porcentaje que representa la diferencia de las alturas elipsoidales respecto al módulo del vector en el sistema de referencia SIRGAS ROU 98.

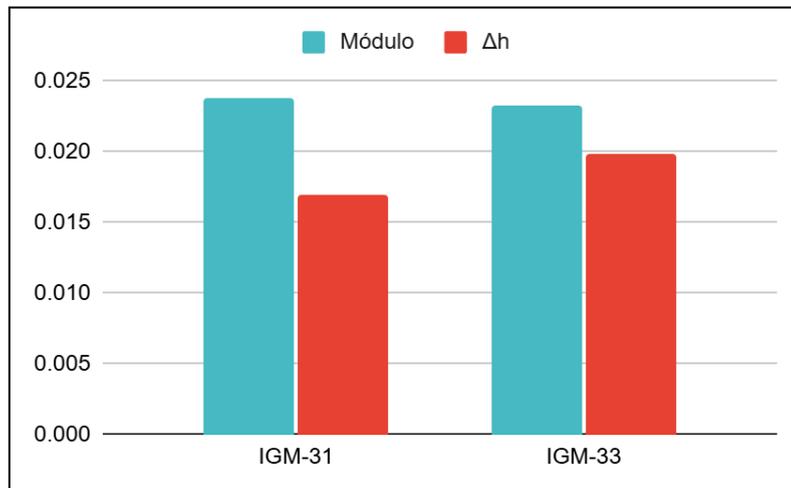


Figura 4.35. Módulo del vector y diferencia de las alturas elipsoidales en el sistema de referencia IGS 20.

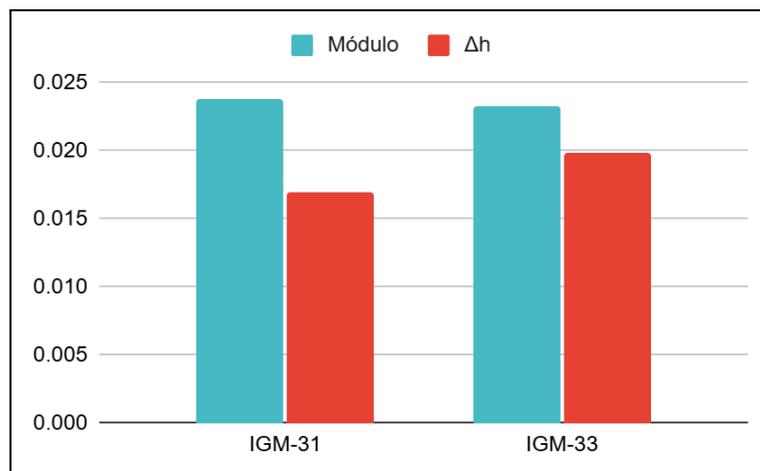


Figura 4.36. Módulo del vector y diferencia de las alturas elipsoidales en el sistema de referencia SIRGAS ROU 98.

La diferencia entre las alturas elipsoidales, en relación con el módulo del vector en ambos sistemas de referencia para los vértices ocupados el día 17 de noviembre de 2023, representa un porcentaje significativamente superior al 50% del módulo del vector, lo que implica que dicha diferencia abarca más de la mitad del valor total.

Es importante destacar que, en el sistema de referencia IGS20, los resultados obtenidos son notablemente mejores en comparación con el sistema SIRGAS ROU 98. Esto se debe a que, como se indicó en apartados anteriores, el módulo del vector diferencia es menor en el sistema IGS20. Además, según se observa en la Tablas 4.18, la diferencia de las alturas elipsoidales representa un porcentaje menor en el sistema IGS20 que en el SIRGAS ROU 98, en este último, los porcentajes superan el 90%.

Por otro lado, los resultados correspondientes a los demás días se presentan en formato de tabla en el **Anexo I**, mostrando que los porcentajes obtenidos mantienen una tendencia similar.

4.5. Determinación de las coordenadas para vértice IGM-034.

En primer lugar, dado que la obtención de las coordenadas del vértice IGM-034 se convierte en uno de los objetivos principales de este proyecto de grado, se decide realizar la ocupación del mismo el 4 de julio de 2024. Para ello, se utiliza una antena modelo CHCI73+, la cual es proporcionada por el Instituto de Agrimensura de la Facultad de Ingeniería (UdelaR). Esta antena se coloca sobre el mojón previamente construido por el Instituto Geográfico Militar en la explanada de dicha facultad (ver Figura 4.37).

El montaje de la antena se realiza mediante el uso de un tornillo adaptador (macho-macho), la cual se enrosca en uno de sus extremos a la antena y en el otro al mojón. Entre la antena y el mojón se insertan dos tuercas que permiten ajustar la altura de la antena a 0.027 metros (Ver Figura 4.38). Posteriormente, se configura la antena en modo estático para la recepción de datos satelitales, estableciendo una duración de registro de 60 minutos.



Figura 4.37. Ocupación del vértice IGM-034.



Figura 4.38. Ajuste de la antena sobre el mojón.

Para obtener las coordenadas del vértice IGM-034, se opta por utilizar la estación de referencia conocida como MTV1, que forma parte de la red SIRGAS-CON. Esta estación se encuentra ubicada en Montevideo, específicamente en la embajada de Estados Unidos, lo que la convierte en un punto de referencia cercano al vértice de interés. Con esta elección, se busca una base que facilite la precisión en los cálculos y que esté lo suficientemente próxima al área de trabajo. Es importante destacar la corta distancia entre el vértice y la base permanente seleccionada, lo cual resulta clave para garantizar la calidad de los resultados obtenidos.

Simultáneamente, se realiza un primer análisis mediante el postproceso utilizando la estación permanente UYMO, la cual es la estación más cercana -aproximadamente 8

kilómetros - perteneciente a la red REGNA-ROU. Esta estación se selecciona por su proximidad y confiabilidad para el proceso de obtención de coordenadas. A diferencia de lo realizado en el apartado 4.2, en este caso no se considera la estación permanente UYIF, ya que su distancia -aproximadamente 23 kilómetros- la hace menos adecuada para este tipo de mediciones, en comparación con las dos estaciones previamente mencionadas.

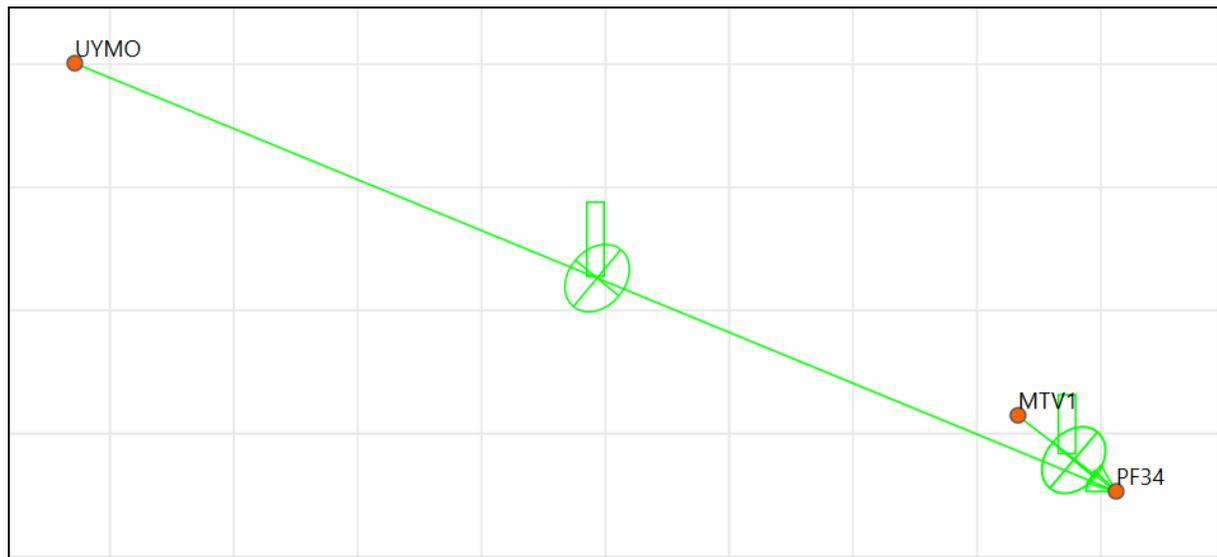


Figura 4.39. Vectores de las estaciones permanentes al vértice IGM-034.

Para realizar la descarga del archivo RINEX de observación correspondiente a la estación permanente MTV1, se inicia accediendo a la página del Crustal Dynamics Data Information System (CDDIS)⁶. En el sitio, se debe dirigir a la sección "Data and Products" y seleccionar la opción de datos de GNSS. Desde esta sección, se obtiene el enlace⁷ que dirige al repositorio de archivos RINEX para el cual se requiere que el usuario se registre previamente.

Una vez realizado el registro y con la cuenta activa, se obtienen los archivos RINEX organizados por año para cada una de las estaciones que conforman la red SIRGAS-CON. En

⁶ Crustal Dynamics Data Information System (CDDIS), <https://cddis.nasa.gov/>.

⁷ <https://cddis.nasa.gov/archive/gnss/data/daily/>

este caso, se debe localizar el archivo correspondiente al año 2024, así como seleccionar la estación de referencia utilizada, que en este análisis corresponde a MTV1.

El postproceso de los datos se lleva a cabo utilizando el sistema de referencia IGS20, en el cual se emplean efemérides precisas y coordenadas de las estaciones obtenidas a partir de la solución semanal SIRGAS. La elección de este sistema de referencia se fundamenta en el hecho de que la estación permanente MTV1, utilizada para la obtención de los datos, sólo dispone de las coordenadas en el sistema SIRGAS de forma semanal.

Dado que la ocupación del vértice tuvo lugar el 4 de julio de 2024, se emplean las soluciones SIRGAS más recientes disponibles para esa fecha, correspondientes a la semana GNSS 2318. Estas soluciones se obtienen directamente desde el sitio web de SIRGAS⁸, donde se publican las actualizaciones semanales de las coordenadas para cada estación de la red SIRGAS-CON. De esta manera, el post-procesamiento se basa en posiciones de referencia precisas y actualizadas, válidas para el momento de la ocupación.

En esta etapa del análisis, se procede a realizar el postproceso de los datos utilizando diversos programas de software, tanto de uso libre como comerciales. El software RTKLIB es una herramienta de código abierto, lo que permite su acceso y uso gratuito, mientras que los programas CHCNAV Geomatics Office (CGO) y Leica Infinity son soluciones comerciales, las cuales requieren licencias específicas para su utilización. Para poder utilizar los software comerciales, el Instituto de Agrimensura pone a disposición una computadora equipada con los programas necesarios y las licencias correspondientes.

Con el objetivo de realizar un análisis comparativo entre los resultados obtenidos de cada software, se establece una metodología consistente en la que se utilizan los mismos

⁸ Soluciones semanales SIRGAS Analysis at DGFI_TUM, <https://www.sirgas.org/es/weekly-solutions/>.

parámetros de entrada en los tres programas. Esto asegura que las diferencias en los resultados no sean producto de variaciones en los parámetros de configuración, sino que se deben exclusivamente a las características y algoritmos propios de cada software.

El post proceso se realiza a partir de los datos de las estaciones permanentes UYMO y MTV1, que se emplean como base para obtener las coordenadas del vértice en cuestión. El análisis inicial se centra en comparar las coordenadas obtenidas de cada uno de los programas, lo que permitirá identificar y observar cualquier discrepancia en los resultados obtenidos, brindando una primera aproximación a las posibles variaciones entre los diferentes métodos de procesamiento utilizados.

Se presenta una tabla que detalla las coordenadas cartesianas tridimensionales del vértice IGM-034, calculadas a partir de las observaciones de las estaciones permanentes UYMO y MTV1. La tabla incluye las coordenadas en los ejes cartesianos X, Y y Z correspondientes a cada estación, y además contiene una columna denominada "delta" (Δ), en la cual se muestran las diferencias en valor absoluto de las coordenadas de ambas estaciones. Esto permite observar las variaciones en cada uno de los ejes y evaluar la consistencia de los resultados.

Este formato de presentación se elabora para cada uno de los programas de post procesamiento utilizados en el estudio, facilitando un análisis comparativo. Dado que cada software genera resultados con distintos márgenes de error, se pone especial atención en las discrepancias en procesamiento de los datos geodésicos.

Software CGO			
	Desde UYMO	Desde MTV1	Δ (m)
X (m)	2915007.729	2915007.721	0.007
Y (m)	-4349047.900	-4349047.908	0.009
Z (m)	-3630532.224	-3630532.216	0.008

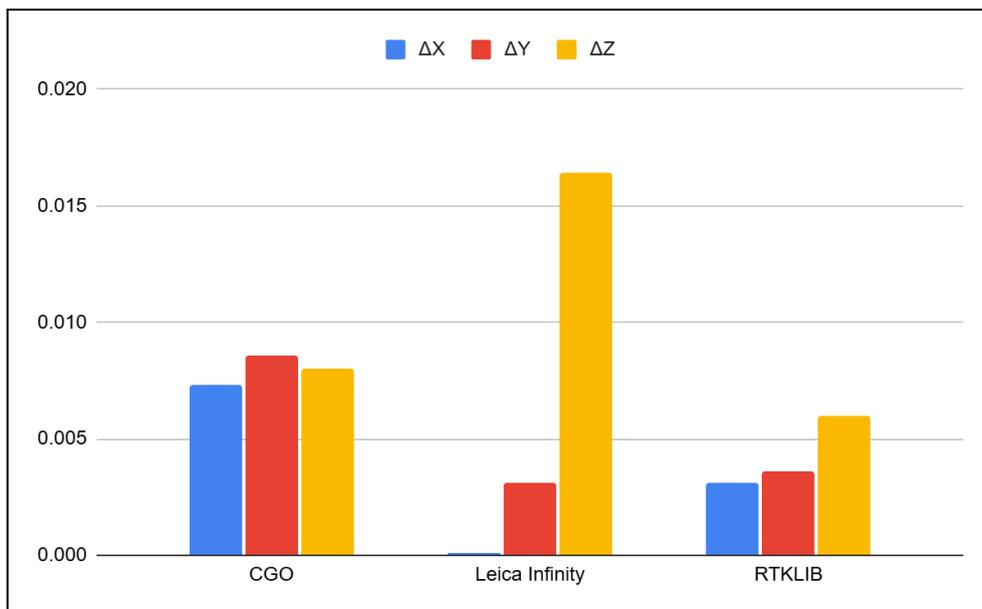
Tabla 4.19. Coordenadas y discrepancias obtenidas en el software CGO.

Software Leica Infinity			
	Desde UYMO	Desde MTV1	Δ (m)
X (m)	2915007.719	2915007.719	0.000
Y (m)	-4349047.881	-4349047.885	0.003
Z (m)	-3630532.216	-3630532.200	0.016

Tabla 4.20. Coordenadas y discrepancias obtenidas en el software Leica Infinity.

Software RTKLIB			
	Desde UYMO	Desde MTV1	Δ (m)
X (m)	2915007.711	2915007.714	0.003
Y (m)	-4349047.903	-4349047.899	0.004
Z (m)	-3630532.217	-3630532.211	0.006

Tabla 4.21. Coordenadas y discrepancias obtenidas en el software RTKLIB.



Figura

4.40. Discrepancias en las coordenadas obtenidas desde las bases permanentes: UYMO y MTV1, en cada software.

Como se observa en la Figura 4.40, las discrepancias entre las coordenadas en todos los ejes son menores a un centímetro, excepto en la coordenada Z, donde se presenta una discrepancia de 1.6 centímetros. Este resultado proviene del post-proceso realizado con el software Leica Infinity. A pesar de la discrepancia en la coordenada Z, los resultados obtenidos se consideran correctos y están dentro de los márgenes esperados, ya que ambas bases de referencia están ubicadas cerca del vértice de medición. La base UYMO se encuentra a aproximadamente ocho kilómetros de distancia, mientras que la base MTV1 está a solo un kilómetro. Estos resultados validan la hipótesis de que, a menor distancia de las bases permanentes, se obtienen mejores resultados de precisión en las mediciones.

Por otro lado, y contrariamente a la intuición inicial que indicaba que el uso de software comercial podría generar resultados más satisfactorios, se observó que el software libre RTKLIB, utilizado en este proceso, produjo resultados significativamente mejores. Las discrepancias en las tres coordenadas obtenidas con RTKLIB fueron inferiores a seis milímetros, lo que representa una mejora en comparación con los resultados obtenidos con el software CGO y Leica Infinity. Esta mejora puede explicarse por el hecho de que cada software puede aplicar modelos de corrección ligeramente diferentes, lo que, a su vez, afecta la precisión final de las coordenadas obtenidas.

Dado que se disponen de tres software diferentes, los cuales generan resultados variados para las coordenadas del vértice IGM-034, se procede a realizar un ajuste por mínimos cuadrados con el objetivo de obtener una solución única que permita conciliar las discrepancias entre los resultados obtenidos por cada uno de los programas. Para llevar a cabo este ajuste, se opta por utilizar las coordenadas generadas a partir del post-proceso realizado con respecto a la base permanente MTV1, ya que, como se mencionó previamente,

esta base se encuentra a solo un kilómetro de distancia del vértice IGM-034, lo que la convierte en una referencia confiable y cercana para el proceso de ajuste.

A su vez, de los reportes generados por cada uno de los software, se extraen las desviaciones estándar correspondientes a cada una de las coordenadas obtenidas en los tres ejes (X, Y, Z). Las desviaciones estándar son un indicador de la precisión de las coordenadas calculadas, y serán de suma importancia para la construcción de la matriz de pesos. Esta matriz de pesos tiene como propósito asignar un valor de ponderación a cada una de las coordenadas obtenidas, de acuerdo con su precisión. De esta manera, las coordenadas que presenten una menor desviación estándar, es decir, aquellas que sean más precisas, recibirán un mayor peso en el ajuste final, lo que les otorgará una mayor influencia en la solución global. En contraposición, las coordenadas con desviaciones estándar mayores tendrán un menor peso, reduciendo su impacto en la solución final del ajuste.

Este procedimiento de ajuste por mínimos cuadrados, en combinación con el uso de las desviaciones estándar y la matriz de pesos, busca generar una solución más precisa y coherente que la obtenida de cualquiera de los software de manera independiente, logrando una mayor fiabilidad en las coordenadas finales del vértice IGM-034.

4.3.1 Ajuste por Mínimos Cuadrados.

Para realizar el Ajuste por Mínimos Cuadrados se parte de los siguientes datos, los cuales se corresponden con las coordenadas obtenidas a partir del postproceso respecto a la base permanente MYV1 del vértice IGM-034, realizado con tres softwares de postproceso diferentes y sus respectivas varianzas:

CGO	x_1 (m)	2915007.721	σ_{x1} (m)	0.0003
	y_1 (m)	-4349047.908	σ_{y1} (m)	0.0004
	z_1 (m)	-3630532.216	σ_{z1} (m)	0.0006
RTKLIB	x_2 (m)	2915007.714	σ_{x2} (m)	0.0006
	y_2 (m)	-4349047.899	σ_{y2} (m)	0.0009
	z_2 (m)	-3630532.211	σ_{z2} (m)	0.0008
INFINITY	x_3 (m)	2915007.719	σ_{x3} (m)	0.0009
	y_3 (m)	-4349047.885	σ_{y3} (m)	0.0011
	z_3 (m)	-3630532.200	σ_{z3} (m)	0.0012

Tabla 4.22. Coordenadas y desviaciones estándar generadas por los distintos softwares.

Se decide por realizar el ajuste de mínimos cuadrados de las magnitudes, en el cual se escribe las ecuaciones es la siguiente: $\bar{l} + B\Delta = d$.

Donde:

\bar{l} - Es la magnitud ajustada.

B - Son los coeficientes de los parámetros.

Δ - Contiene a los parámetros.

d - Son las constantes del método.

A su vez $\bar{l} = l + v$, siendo l la magnitud observada y v los errores residuales. Por lo tanto la forma en la que se expresan las ecuaciones de condición es la siguiente: $v + B\Delta = f$

Se parten de las siguientes ecuaciones de condición:

$$\begin{aligned}
 x &= x_1 + v_{x1} &\Rightarrow & v_{x1} - x = -x_1 \\
 x &= x_2 + v_{x2} &\Rightarrow & v_{x2} - x = -x_2 \\
 x &= x_3 + v_{x3} &\Rightarrow & v_{x3} - x = -x_3 \\
 y &= y_1 + v_{y1} &\Rightarrow & v_{y1} - y = -y_1 \\
 y &= y_2 + v_{y2} &\Rightarrow & v_{y2} - y = -y_2 \\
 y &= y_3 + v_{y3} &\Rightarrow & v_{y3} - y = -y_3 \\
 z &= z_1 + v_{z1} &\Rightarrow & v_{z1} - z = -z_1 \\
 z &= z_2 + v_{z2} &\Rightarrow & v_{z2} - z = -z_2 \\
 z &= z_3 + v_{z3} &\Rightarrow & v_{z3} - z = -z_3
 \end{aligned}$$

Si se escribe en notación matricial, se obtienen las siguientes matrices

$$v = \left(\begin{array}{c} v_{x1} \\ v_{x2} \\ v_{x3} \\ v_{y1} \\ v_{y2} \\ v_{y3} \\ v_{z1} \\ v_{z2} \\ v_{z3} \end{array} \right)_{9 \times 1}$$

Para realizar la matriz de pesos (W), se parte de las desviaciones estándar de cada coordenada, con el propósito de que aquellas que sean menores tengan mayor influencia en el resultado final, y, en contraposición, las desviaciones mayores tengan menor influencia. Para esto, se toma como la varianza referencial a priori (σ_0^2) la máxima desviación, y luego se forma la matriz W a partir de la siguiente ecuación:

$$w_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

$$W = \begin{vmatrix} 12.79 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.93 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{9 \times 9}$$

$$N = \begin{vmatrix} 19.070 & 0 & 0 \\ 0 & 15.526 & 0 \\ 0 & 0 & 7.795 \end{vmatrix}_{3 \times 3}$$

$$t = \begin{vmatrix} 55589834.365 \\ -67521701.263 \\ -28300150.712 \end{vmatrix}_{3 \times 1}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2915007.719 \\ -4349047.905 \\ -3630532.212 \end{vmatrix}_{15 \times 1}$$

$$v = \begin{pmatrix} -0.0018 \\ 0.0052 \\ 0.0002 \\ 0.0029 \\ -0.0061 \\ -0.0201 \\ 0.0037 \\ -0.0013 \\ -0.0127 \end{pmatrix}_{9 \times 1}$$

$$\bar{l} = \begin{pmatrix} 2915007.719 \\ 2915007.719 \\ 2915007.719 \\ -4349047.905 \\ -4349047.905 \\ -4349047.905 \\ -3630532.212 \\ -3630532.212 \\ -3630532.212 \end{pmatrix}_{9 \times 1}$$

A continuación, se procede con la propagación de los cofactores, lo que permite calcular las varianzas (σ^2) o desviaciones estándar (σ) de las magnitudes ajustadas, las observaciones ajustadas y los residuos de cada observación.

$$Q_{\Delta\Delta} = N^{-1} \rightarrow \Sigma_{\Delta\Delta} = \sigma_0^2 \cdot Q_{\Delta\Delta}, \text{ donde: } \sigma_0^2 = \frac{v^t \cdot W \cdot v}{r}.$$

$$N^{-1} = \begin{vmatrix} 0.052 & 0 & 0 \\ 0 & 0.064 & 0 \\ 0 & 0 & 0.128 \end{vmatrix}_{3 \times 3}$$

Varianza referencial a posteriori (σ_0^2) = 0.00018

$$\Sigma\Delta\Delta = \begin{vmatrix} 0.000009 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00002 \end{vmatrix}_{3 \times 3}$$

La matriz Δ se corresponde a las coordenadas cartesianas tridimensionales obtenidas tras realizar un ajuste por mínimos cuadrados. Por otro lado, la matriz $\Sigma\Delta\Delta$ representa la matriz de varianzas y covarianzas, la cual se calcula mediante la propagación de cofactores.

A partir de estos dos elementos, la matriz Δ y la matriz $\Sigma\Delta\Delta$, se obtiene el resultado final para el vértice IGM-034, el cual incluye las coordenadas cartesianas correspondientes y las desviaciones estándar asociadas a cada una de las tres coordenadas. Estas desviaciones estándar reflejan la precisión con la que se ha determinado la posición de este vértice en el espacio tridimensional. Los resultados se presentan en la Tabla 4.23.

X (m)	2915007.719	σ_x (m)	0.003	ϕ (g m s)	-34° 55' 08.78345"
Y (m)	-4349047.905	σ_y (m)	0.003	λ (g m s)	-56° 10' 02.99754"
Z (m)	-3630532.212	σ_z (m)	0.005	h (m)	35.391

Tabla 4.23. Coordenadas y desviaciones estándar obtenidas para el vértice IGM-034 en el sistema IGS 20.

4.3.2 Transformación de Helmert.

Los resultados obtenidos previamente están expresados en el sistema de referencia IGS 20, que es un sistema global utilizado para determinar las posiciones geográficas de manera precisa a nivel mundial. Sin embargo, dado que la monografía del vértice que se desea generar debe estar basada en el sistema de referencia SIRGAS ROU 98, ya que es el sistema de referencia oficial del Uruguay, por lo tanto, es necesario realizar una transformación de coordenadas entre estos dos sistemas de referencia. Esta transformación se lleva a cabo utilizando el método de transformación de Helmert, el cual es un proceso matemático que permite transformar las coordenadas de un sistema de referencia a otro, teniendo en cuenta tanto las diferencias en la posición como las posibles rotaciones y escalas entre ambos sistemas.

Para realizar esta transformación de manera adecuada, se utiliza información precisa sobre las coordenadas de varias estaciones permanentes en ambos sistemas de referencia. En este caso, se emplean las coordenadas de las estaciones permanentes UYLM, UYMO y UYIF, las cuales se encuentran localizadas en el territorio y tienen coordenadas conocidas tanto en el sistema IGS 20 como en el sistema SIRGAS ROU 98. Al disponer de las coordenadas de estas estaciones en ambos sistemas, es posible aplicar el modelo de Helmert para obtener la relación matemática necesaria que permita transformar las coordenadas del vértice desde el sistema IGS 20 al sistema SIRGAS ROU 98.

VÉRTICE	IGS 20 (Semana 2310)			SIRGAS ROU 98		
	X (m)	Y (m)	Z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
UYMO	2909133.017	-4355451.438	-3627801.023	2909132.981	-4355451.209	-3627801.305
UYLM	2943772.736	-4344521.699	-3612849.810	2943772.710	-4344521.491	-3612850.106
UYIF	2931854.744	-4335667.573	-3632988.893	2931854.709	-4335667.388	-3632989.236

Tabla 4.24. Coordenadas utilizadas para la transformación de Helmert.

La relación entre las coordenadas de los puntos del sistema origen, que vamos a denotar (X_1, Y_1, Z_1) y las coordenadas en el sistema final (X_2, Y_2, Z_2) , viene dada por:

$$\begin{vmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{vmatrix} + (1 + u) * \begin{vmatrix} 1 & R_Z & R_Y \\ -R_Z & 1 & R_X \\ -R_Y & -R_X & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{Y}_1 \\ \overline{Z}_1 \end{vmatrix}$$

Siendo $\overline{X}_1 = X_1 + v_{X_1}$; $\overline{Y}_1 = Y_1 + v_{Y_1}$; $\overline{Z}_1 = Z_1 + v_{Z_1}$ y se considera las coordenadas X_2, Y_2 y Z_2 libres de error.

Así, al disponer de las coordenadas en el sistema de referencia inicial y conocer los parámetros de la transformación, es decir, las rotaciones, traslaciones y el factor de escala, es posible determinar las coordenadas del punto en el sistema final. Si desarrollamos la notación matricial se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$X_2 = \Delta X + (1 + u) * (X_1 + v_{X_1} + R_Z Y_1 - R_Y Z_1) = \Delta X + X_1 + v_{X_1} + R_Z Y_1 - R_Y Z_1 + u X_1$$

$$Y_2 = \Delta Y + (1 + u) * (Y_1 + v_{Y_1} - R_Z X_1 + R_X Z_1) = \Delta Y + Y_1 + v_{Y_1} - R_Z X_1 + R_X Z_1 + u Y_1$$

$$Z_2 = \Delta Z + (1 + u) * (Z_1 + v_{Z_1} - R_X Y_1 + R_Y X_1) = \Delta Z + Z_1 + v_{Z_1} - R_X Y_1 + R_Y X_1 + u Z_1$$

Si lo ordenamos las ecuaciones de la forma $v + B\Delta = f$.

$$v_{X_2} + \Delta X - R_Y Z_1 + R_Z Y_1 + uX_1 = X_2 - X_1$$

$$v_{Y_2} + \Delta Y + R_X Z_1 - R_Z X_1 + uY_1 = Y_2 - Y_1$$

$$v_{Z_2} + \Delta Z - R_X Y_1 + R_Y X_1 + uZ_1 = Z_2 - Z_1$$

Estas ecuaciones se deben evaluar en las coordenadas cartesianas tridimensionales de ambos sistemas para cada una de las estaciones permanentes UYMO (1) , UYLM (2) y UYIF

(3). Obtendremos las siguientes nueve ecuaciones:

$$v_{X_2}^{(1)} + \Delta X - R_Y Z_1^{(1)} + R_Z Y_1^{(1)} + uX_1^{(1)} = X_2^{(1)} - X_1^{(1)}$$

$$v_{Y_2}^{(1)} + \Delta Y + R_X Z_1^{(1)} - R_Z X_1^{(1)} + uY_1^{(1)} = Y_2^{(1)} - Y_1^{(1)}$$

$$v_{Z_2}^{(1)} + \Delta Z - R_X Y_1^{(1)} + R_Y X_1^{(1)} + uZ_1^{(1)} = Z_2^{(1)} - Z_1^{(1)}$$

$$v_{X_2}^{(2)} + \Delta X - R_Y Z_1^{(2)} + R_Z Y_1^{(2)} + uX_1^{(2)} = X_2^{(2)} - X_1^{(2)}$$

$$v_{Y_2}^{(2)} + \Delta Y + R_X Z_1^{(2)} - R_Z X_1^{(2)} + uY_1^{(2)} = Y_2^{(2)} - Y_1^{(2)}$$

$$v_{Z_2}^{(2)} + \Delta Z - R_X Y_1^{(2)} + R_Y X_1^{(2)} + uZ_1^{(2)} = Z_2^{(2)} - Z_1^{(2)}$$

$$v_{X_2}^{(3)} + \Delta - R_Y Z_1^{(3)} + R_Z Y_1^{(3)} + uX_1^{(3)} = X_2^{(3)} - X_1^{(3)}$$

$$v_{Y_2}^{(3)} + \Delta Y + R_X Z_1^{(3)} - R_Z X_1^{(3)} + uY_1^{(3)} = Y_2^{(3)} - Y_1^{(3)}$$

$$v_{Z_2}^{(3)} + \Delta Z - R_X Y_1^{(3)} + R_Y X_1^{(3)} + uZ_1^{(3)} = Z_2^{(3)} - Z_1^{(3)}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_{X_2}^{(1)} \\ v_{Y_2}^{(1)} \\ v_{Z_2}^{(1)} \\ v_{X_2}^{(2)} \\ v_{Y_2}^{(2)} \\ v_{Z_2}^{(2)} \\ v_{X_2}^{(3)} \\ v_{Y_2}^{(3)} \\ v_{Z_2}^{(3)} \end{pmatrix}_{9 \times 1}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3627801.023 & -4355451.438 & 2909133.017 \\ 0 & 1 & 0 & -3627801.023 & 0 & -2909133.017 & -4355451.438 \\ 0 & 0 & 1 & 4355451.438 & 2909133.017 & 0 & -3627801.023 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3612849.810 & -4344521.699 & 2943772.736 \\ 0 & 1 & 0 & -3612849.810 & 0 & -2943772.736 & -4344521.699 \\ 0 & 0 & 1 & 4344521.699 & 2943772.736 & 0 & -3612849.810 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3632988.893 & -4335667.573 & 2931854.744 \\ 0 & 1 & 0 & -3632988.893 & 0 & -2931854.744 & -4335667.573 \\ 0 & 0 & 1 & 4335667.573 & 2931854.744 & 0 & -3632988.893 \end{pmatrix}_{9 \times 7}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ R_X \\ R_Y \\ R_Z \\ u \end{pmatrix}_{7 \times 1}$$

$$f = \begin{pmatrix} -0.036 \\ 0.228 \\ -0.282 \\ -0.026 \\ 0.208 \\ -0.296 \\ -0.035 \\ 0.185 \\ -0.343 \end{pmatrix}_{9 \times 1}$$

Algoritmo de resolución:

$$N = B^T * W * B$$

$$t = B^T * W * f$$

$$\Delta = N^{-1} * t$$

$$v = f - B * \Delta$$

$$\bar{l} = l + v$$

Se elabora la matriz de pesos (W) a partir de las desviaciones estándar de cada coordenada de las estaciones UYMO, UYIF y UYLM de la solución semanal (ver Tabla 4.25). Estas desviaciones se encuentran calculadas en el archivo de la solución semanal

descargado desde la página web de SIRGAS. El objetivo es otorgar mayor influencia en el resultado final a las coordenadas con menor desviación y, en contraste, reducir la influencia de aquellas con desviaciones mayores. Para ello, se define como varianza referencial a priori (σ_0^2) la desviación máxima, y la matriz W se construye según la siguiente ecuación:

$$w_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

	UYMO	UYLM	UYIF
σ_x (m)	0.000086	0.000089	0.000105
σ_y (m)	0.000116	0.000119	0.000141
σ_z (m)	0.000094	0.000097	0.000115

Tabla 4.25. Desviaciones estándar de las estaciones permanentes.

$$t = \begin{pmatrix} -0.201 \\ 0.771 \\ -1.583 \\ -9672263.480 \\ -5360621.613 \\ -1380257.386 \\ 1797854.473 \end{pmatrix}_{7 \times 1}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 4.871 \\ 11.740 \\ -10.446 \\ 0.0000023 \\ -0.000000035 \\ 0.0000011 \\ -0.000000025 \end{pmatrix}_{7 \times 1}$$

A partir de la matriz delta (Δ) se obtienen los valores de los coeficientes las traslaciones en las direcciones de los ejes (ΔX , ΔY , ΔZ), los ángulos de rotación en torno a

los ejes (R_X, R_Y, R_Z) y el factor de escala o factor de dilatación (u). Una vez que se han determinado estos coeficientes, se utilizan las siguientes ecuaciones matemáticas para calcular las coordenadas del vértice IGM-034 en el sistema de referencia final, que es el SIRGAS ROU 98.

$$X_2 = \Delta X + R_Z Y_1 - R_Y Z_1 + u X_1 + X_1$$

$$Y_2 = \Delta Y - R_Z X_1 + R_X Z_1 + u Y_1 + Y_1$$

$$Z_2 = \Delta Z + R_Y X_1 - R_X Y_1 + u Z_1 + Z_1$$

Si se expresa en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_1 & Y_1 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & Z_1 & 0 & -X_1 & Y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -Y_1 & X_1 & 0 & Z_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ R_X \\ R_Y \\ R_Z \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$$

Resultando ser de la forma $Y = aX + b$. Por lo tanto, para obtener las desviaciones estándar en el sistema SIRGAS ROU 98 se aplica la Ley General de Propagación de Varianzas y Covarianzas, incluyendo la matriz varianzas y covarianzas de las coordenadas en el sistema origen.

$$\Sigma_{YY} = a * \Sigma_{XX} * a^t + \Sigma_{bb}$$

$$\Sigma_{XX} = \Sigma_{\Delta\Delta} \rightarrow \Sigma_{\Delta\Delta} = \sigma_0^2 * Q_{\Delta\Delta}$$

donde: $Q_{\Delta\Delta} = N^{-1}$

$$\sigma_0^2 = \frac{v^t \cdot W \cdot v}{r}$$

$$\Sigma_{bb} = \begin{vmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1Y_1} & \sigma_{X_1Z_1} \\ \sigma_{X_1Y_1} & \sigma_{Y_1}^2 & \sigma_{Y_1Z_1} \\ \sigma_{X_1Z_1} & \sigma_{Y_1Z_1} & \sigma_{Z_1}^2 \end{vmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\Sigma_{YY} = \begin{vmatrix} \sigma_{X_2}^2 & \sigma_{X_2Y_2} & \sigma_{X_2Z_2} \\ \sigma_{X_2Y_2} & \sigma_{Y_2}^2 & \sigma_{Y_2Z_2} \\ \sigma_{X_2Z_2} & \sigma_{Y_2Z_2} & \sigma_{Z_2}^2 \end{vmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\sigma_0^2 = 0.0006$$

$$\Sigma_{\Delta\Delta} = \begin{vmatrix} 19.947 & 0.743 & 0.868 & -0.0000002 & -0.0000016 & 0.0000024 & -0.0000013 \\ 0.743 & 34.778 & -29.300 & 0.0000063 & 0.0000020 & 0.0000025 & 0.0000011 \\ 0.868 & -29.300 & 51.852 & -0.0000082 & -0.0000037 & -0.0000019 & 0.0000014 \\ -0.0000002 & 0.0000006 & -0.0000008 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0000016 & 0.0000002 & -0.0000004 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0000024 & 0.0000003 & -0.0000002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0000013 & 0.0000001 & 0.0000001 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad 7 \times 7$$

$$\Sigma_{YY} = \begin{vmatrix} 0.000154 & -0.000007 & -0.000006 \\ -0.000007 & 0.000269 & 0.000015 \\ -0.000006 & 0.000015 & 0.000193 \end{vmatrix} \quad 3 \times 3$$

Mediante la aplicación del modelo de transformación de Helmert y el posterior uso de la Ley de Varianzas y Covarianzas, se obtienen las coordenadas cartesianas tridimensionales del vértice IGM-034 en el sistema de referencia geodésico SIRGAS ROU 98.

X (m)	2915007.684	σ_x (m)	0.012	φ (g m s)	-34° 55' 08.79495"
Y (m)	-4349047.697	σ_y (m)	0.016	λ (g m s)	-56° 10' 02.99412"
Z (m)	-3630532.510	σ_z (m)	0.014	h (m)	35.404

Tabla 4.26. Coordenadas y desviaciones estándar obtenidas para el vértice IGM-034 en el sistema SIRGAS ROU 98 .

4.4. Ajuste y posterior compensación de la Red de Nivelación.

En esta etapa del proyecto de grado, se lleva a cabo el ajuste de la Red de Nivelación proporcionada por la Intendencia Municipal de Montevideo (IMM). Dicha red, previamente medida en campo por el Instituto Geográfico Militar (IGM) e incluye aproximadamente 50 vértices distribuidos estratégicamente. Entre estos se encuentran vértices que forman parte de la Red Geodésica de Primer Orden, la Red Altimétrica del Consejo Departamental de Montevideo (CDM) y la Red Altimétrica implementada por la Administración Nacional de Puertos (ver Figura 4.41). Para optimizar el proceso de ajuste, se seleccionan diez vértices de la red, con los cuales se conforman seis mallas organizadas de manera que abarcan toda la estructura inicial de la red.

En la primera etapa del ajuste, se lleva a cabo un procedimiento enfocado en realizar los cierres primarios de las seis mallas que conforman la red diseñada específicamente para optimizar el proceso de nivelación (ver Figura 4.42). Este análisis inicial resulta fundamental, ya que permite evaluar de manera detallada la calidad general de la red. A través de este procedimiento, se determina el error por kilómetro correspondiente a cada una de las mallas, lo cual proporciona una medida cuantitativa de su precisión.

Con esta información, se obtiene una base sólida para analizar la viabilidad de avanzar hacia un ajuste posterior en formato de red de nivelación. Este enfoque asegura que la red cuente con la calidad suficiente para garantizar resultados confiables y consistentes en etapas posteriores del proceso.

En la segunda etapa del ajuste, se emplean dos métodos: el método de las correcciones y el método de las magnitudes. Estos procedimientos se utilizan para calcular las alturas niveladas de los diez nodos principales, permitiendo determinar valores confiables y precisos. Adicionalmente, se aplica la propagación de cofactores para generar la matriz de

varianzas y covarianzas asociada a las alturas obtenidas. Esta matriz es esencial para evaluar la precisión y consistencia de los valores ajustados.

En una tercera etapa, se procede a densificar la red a partir de las líneas de nivelación formadas por las seis mallas iniciales. En esta fase, el ajuste se realiza exclusivamente mediante el método de las correcciones, con el objetivo de determinar las alturas niveladas del resto de los nodos en la red. Una vez calculadas estas alturas, se aplica nuevamente la propagación de cofactores para obtener las desviaciones estándar correspondientes.

Es relevante destacar que, en el caso de las líneas densificadas, los extremos ya incorporan las varianzas calculadas en el ajuste inicial. Estas varianzas son arrastradas y consideradas en los cálculos posteriores, asegurando coherencia en el análisis y confiabilidad en los resultados obtenidos para la totalidad de la red de nivelación.

A su vez, es importante destacar que, durante todo el proceso, se asume como dato libre de error el nodal "Cabildo". Este nodal se encuentra ubicado a una altura de 22,97 metros por debajo del repère (marca de referencia) situado en el edificio del Cabildo. Esta consideración permite establecer un punto de referencia confiable que asegura la coherencia y precisión en los ajustes realizados.

Para la primera etapa, que consta de seis mallas se cuenta con los siguientes parámetros:

- Número total de Observaciones (n) = 15
- Número de Observaciones mínimas (n_0) = 9
- Observaciones redundantes ($r = n - n_0$) = 6
- Números de parámetros (u) = 9

Se calculan las quince líneas que conforman el primer ajuste. Estas se obtienen mediante la suma de los desniveles existentes entre los nodos que las componen. De manera similar, las distancias se determinan sumando las longitudes entre los nodos correspondientes. Los resultados de estos cálculos se presentan de forma detallada en la Tabla 4.27.

	ΔH (m)	Dist (km)
l_1	18.6751	5.001
l_2	-20.8656	25.403
l_3	52.6101	22.900
l_4	-30.7704	20.149
l_5	-18.8899	4.930
l_6	40.2481	6.446
l_7	6.9367	2.168
l_8	-10.3938	0.788
l_9	-4.9548	10.428
l_{10}	-6.6743	11.817
l_{11}	2.1993	5.209
l_{12}	-43.7013	11.367
l_{13}	18.9103	15.729
l_{14}	-6.9418	6.888
l_{15}	16.9737	18.350

Tabla 4.27. Líneas calculadas para la primera etapa del ajuste.

4.4.1 Cierres primarios.

El proceso inicia con la realización de los cierres primarios correspondientes a cada una de las mallas que componen la red. Para ello, se utilizan los desniveles de cada línea, los cuales están detallados en la Tabla 4.27, junto con el perímetro total de cada malla, obtenido a partir de la suma de las longitudes totales de las líneas que también se encuentran presentadas en dicha tabla. Una vez determinados estos valores, se procede a calcular el error por kilómetro para cada malla. (ver Tabla 4.28)

	Línea	Δh (m)	distancia (km)	Error (mm/km)
Malla I	I1	18.6751	5.001	
	I10	-6.6743	11.817	
	I9	-4.9548	10.428	
	I15	16.9737	18.350	
	Cierre	0.0181	45.596	0.3969
Malla II	I1	18.6751	5.001	
	I2	-20.8656	25.403	
	I11	2.19925	5.209	
	Cierre	0.0088	35.613	0.2471
Malla III	I3	52.6101	22.900	
	I12	-43.7013	11.367	
	I10	-6.6743	11.817	
	I11	2.19925	5.209	
	Cierre	0.0353	51.293	0.6882
Malla IV	I4	-30.7704	20.149	
	I5	-18.8899	4.930	
	I6	40.2481	6.446	
	I7	6.9367	2.168	
	I8	-10.3938	0.788	
	I9	-4.9548	10.428	
	I12	-43.7013	11.367	
	Cierre	-0.0154	56.276	-0.2737
Malla V	I13	18.9103	15.729	
	I5	-18.8899	4.930	
	Cierre	0.02040	20.659	0.9875

Malla VI	l14	-6.94175	6.888	
	l7	6.9367	2.168	
	Cierre	-0.00505	9.056	-0.5576

Tabla 4.28. Cierre primario.

Dado que los valores del error por kilómetro en cada cierre resultan inferiores a un milímetro en todos los casos analizados, se concluye que la red posee una calidad adecuada. Este nivel de precisión respalda la viabilidad de continuar con el plan establecido y proceder con el ajuste en formato de red de nivelación, garantizando así la confiabilidad de los resultados obtenidos en las etapas siguientes del proceso.

4.4.2 Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Magnitudes.

Se lleva a cabo el ajuste utilizando ambos métodos con el objetivo de corroborar los cálculos realizados. En primera instancia, se realiza el Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Magnitudes, seguido del cálculo de la propagación de varianzas y covarianzas.

Posteriormente, se efectúa el Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones.

Las ecuaciones de condición se expresan de la siguiente manera:

1) $13 - 11 = l_{t1} = l_1 + v_1$	→	$v_1 - 13 + 11 = -l_1$
2) $m1f - 13 = l_{t2} = l_2 + v_2$	→	$v_2 - m1f + 13 = -l_2$
3) $10608A - m1f = l_{t3} = l_3 + v_3$	→	$v_3 - 10608A + m1f = -l_3$
4) $1.18.031 - 10608A = \bar{l}_4 = l_4 + v_4$	→	$v_4 - 1.18.031 + 10608A = -l_4$
5) $1.18.031 - 1.18.033 = \bar{l}_5 = l_5 + v_5$	→	$v_5 - 1.18.031 + 1.18.033 = -l_5$
6) $1.18.033 - M1f = \bar{l}_6 = l_6 + v_6$	→	$v_6 - 1.18.033 + M1f = -l_6$
7) $M1f - 21 = \bar{l}_7 = l_7 + v_7$	→	$v_7 - M1f + 21 = -l_7$
8) $21 - Cabildo = \bar{l}_8 = l_8 + v_8$	→	$v_8 - 21 = -l_8 - Cabildo$
9) $Cabildo - 19 = l_{t9} = l_9 + v_9$	→	$v_9 + 19 = -l_9 + Cabildo$
10) $11 - 19 = \bar{l}_{10} = l_{10} + v_{10}$	→	$v_{10} - 11 + 19 = -l_{10}$
11) $11 - m1f = l_{t11} = l_{11} + v_{11}$	→	$v_{11} - 11 + m1f = -l_{11}$
12) $19 - 10608A = \bar{l}_{12} = l_{12} + v_{12}$	→	$v_{12} - 19 + 10608A = -l_{12}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix}
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

15x9

$$\Delta = \begin{pmatrix}
 11 \\
 13 \\
 mlf \\
 10608A \\
 1.18.031 \\
 1.18.033 \\
 M1f \\
 21 \\
 19
 \end{pmatrix}$$

9x1

$$W = \begin{pmatrix} 5.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32.24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.88 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.62 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.69 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.38 \end{pmatrix}_{15 \times 15}$$

Algoritmo de resolución:

$$N = B^T * W * B$$

$$t = B^T * W * f$$

$$\Delta = N^{-1} * t$$

$$v = f - B * \Delta$$

$$\bar{l} = l + v$$

Luego de aplicar el algoritmo de resolución para el Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Magnitudes, se llega a los siguientes resultados:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 21.254 \\ 39.931 \\ 19.053 \\ 71.642 \\ 40.869 \\ 59.763 \\ 19.514 \\ 12.576 \\ 27.931 \end{pmatrix}_{9 \times 1}$$

$$\bar{l} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} 18.6763 \\ -20.8778 \\ 52.5888 \\ -30.7727 \\ -18.8943 \\ 40.2488 \\ 6.9381 \\ -10.3937 \\ -4.9611 \\ -6.6768 \\ 2.2016 \\ -43.7105 \\ 18.8943 \\ -6.9381 \\ 16.9605 \end{array} \\ \hline & 15 \times 1 \end{array}$$

Luego se realiza la propagación de cofactores, obteniendo la matriz de varianzas y covarianzas presentada a continuación.

$$\Sigma_{\Delta\Delta} = \begin{array}{c|cccccccccc} & \begin{array}{c} 1.14E-04 \\ 9.11E-05 \\ 1.02E-04 \\ 5.69E-05 \\ 2.19E-05 \\ 1.54E-05 \\ 4.23E-06 \\ 1.37E-06 \\ 5.45E-05 \end{array} & \begin{array}{c} 9.11E-05 \\ 1.14E-04 \\ 8.75E-05 \\ 4.76E-05 \\ 1.84E-05 \\ 1.29E-05 \\ 3.54E-06 \\ 1.14E-06 \\ 4.43E-05 \end{array} & \begin{array}{c} 1.02E-04 \\ 8.75E-05 \\ 1.37E-04 \\ 6.61E-05 \\ 2.55E-05 \\ 1.79E-05 \\ 4.91E-06 \\ 1.59E-06 \\ 5.37E-05 \end{array} & \begin{array}{c} 5.69E-05 \\ 4.76E-05 \\ 6.61E-05 \\ 1.23E-04 \\ 4.74E-05 \\ 3.33E-05 \\ 9.14E-06 \\ 2.96E-06 \\ 5.82E-05 \end{array} & \begin{array}{c} 2.19E-05 \\ 1.84E-05 \\ 2.55E-05 \\ 4.74E-05 \\ 1.11E-04 \\ 7.80E-05 \\ 2.14E-05 \\ 6.92E-06 \\ 2.25E-05 \end{array} & \begin{array}{c} 1.54E-05 \\ 1.29E-05 \\ 1.79E-05 \\ 3.33E-05 \\ 7.80E-05 \\ 8.63E-05 \\ 2.37E-05 \\ 7.65E-06 \\ 1.58E-05 \end{array} & \begin{array}{c} 4.23E-06 \\ 3.54E-06 \\ 4.91E-06 \\ 9.14E-06 \\ 2.14E-05 \\ 2.37E-05 \\ 2.76E-05 \\ 8.92E-06 \\ 4.33E-06 \end{array} & \begin{array}{c} 1.37E-06 \\ 1.14E-06 \\ 1.59E-06 \\ 2.96E-06 \\ 6.92E-06 \\ 7.65E-06 \\ 8.92E-06 \\ 9.25E-06 \\ 1.40E-06 \end{array} & \begin{array}{c} 5.45E-05 \\ 4.43E-05 \\ 5.37E-05 \\ 5.82E-05 \\ 2.25E-05 \\ 1.58E-05 \\ 4.33E-06 \\ 1.40E-06 \\ 8.07E-05 \end{array} \\ \hline & 15 \times 15 \end{array}$$

Por lo tanto se obtienen los valores de altura ajustada para cada uno de los vértices y su correspondiente desviación estándar (Ver Tabla 4.29).

Vértice	Altura (m)	Desviación estándar (m)
11	21.254	0.011
13	39.931	0.011
m1f	19.053	0.012
10608A	71.642	0.011
1.18.031	40.869	0.011
1.18.033	59.763	0.009
M1f	19.514	0.005
21	12.576	0.003
19	27.931	0.009

Tabla 4.29. Alturas ajustadas y desviaciones estándar para los vértices luego del primer ajuste utilizando el método de las Magnitudes .

4.4.3. Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones.

Las ecuaciones de condición se expresan de la siguiente manera

$$\bar{l}_{15} - \bar{l}_1 - l_{t_{10}} + \bar{l}_9 = 0 \quad \rightarrow \quad v_{15} - v_1 - v_{10} + v_9 = - (l_{15} - l_1 - l_{10} + l_9)$$

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_{11} = 0 \quad \rightarrow \quad v_1 + v_2 + v_{11} = - (l_1 + l_2 + l_{11})$$

$$\bar{l}_3 + \bar{l}_{12} + \bar{l}_{10} - \bar{l}_{11} = 0 \quad \rightarrow \quad v_3 + v_{12} + v_{10} - v_{11} = - (l_3 + l_{12} + l_{10} - l_{11})$$

$$\bar{l}_4 - \bar{l}_5 - \bar{l}_6 - \bar{l}_7 - \bar{l}_8 - \bar{l}_9 - \bar{l}_{12}$$

$$\rightarrow v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_8 - v_9 - v_{12} = - (l_4 - l_5 - l_6 - l_7 - l_8 - l_9 - l_{12})$$

$$\bar{l}_5 + \bar{l}_{13} = 0 \quad \rightarrow \quad v_5 + v_{13} = - (l_5 + l_{13})$$

$$\bar{l}_7 + \bar{l}_{14} = 0 \quad \rightarrow \quad v_7 + v_{14} = - (l_7 + l_{14})$$

Las ecuaciones generadas son de la forma $au_1 v_1 + au_2 v_2 + \dots + ar_n v_n = fr$, si lo expresamos en notación matricial de la forma $Av = f$, se obtienen las siguientes matrices:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{14} \\ v_{15} \end{pmatrix} \quad 15 \times 1$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 6 \times 15$$

$$\left| \begin{array}{c} - (l_{15} - l_1 - l_{10} + l_9) \end{array} \right|$$

$$f = \begin{pmatrix} -(l_1 + l_2 + l_{11}) \\ -(l_3 + l_{12} + l_{10} - l_{11}) \\ -(l_4 - l_5 - l_6 - l_7 - l_8 - l_9 - l_{12}) \\ -(l_5 + l_{13}) \\ -(l_7 + l_{14}) \end{pmatrix}_{6 \times 1}$$

Es importante señalar que la matriz de peso se genera de la misma manera que en el Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Magnitudes, considerando que los pesos son inversamente proporcionales a la distancia. Al utilizar las mismas líneas, la matriz de peso es idéntica a la que se obtiene en dicho ajuste.

Algoritmo de resolución:

$$Q_e = A * Q * A^T$$

$$W_e = Q_e^{-1}$$

$$k = W_e * f$$

$$v = Q * A^T * k$$

$$\bar{l} = l + v$$

Luego de aplicar el algoritmo de resolución para el Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones, se llega a los siguientes resultados:

$$\left| \quad 18.6763 \quad \right|$$

$$\bar{l} = \begin{array}{|l} -20.8778 \\ 52.5888 \\ -30.7727 \\ -18.8943 \\ 40.2488 \\ 6.9381 \\ -10.3937 \\ -4.9611 \\ -6.6768 \\ 2.2016 \\ -43.7105 \\ 18.8943 \\ -6.9381 \\ 16.9605 \end{array} \quad 15 \times 1$$

De este modo, se obtienen los valores de alturas ajustadas correspondientes a cada vértice (ver Tabla 4.30), lo que permite verificar la coherencia de estos resultados con los obtenidos previamente en el Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Magnitudes.

Vértice	Altura (m)
11	21.254
13	39.931
m1f	19.053
10608A	71.642
1.18.031	40.869
1.18.033	59.763
M1f	19.514
21	12.576
19	27.931

Tabla 4.30. Alturas ajustadas para los vértices luego del primer ajuste utilizando el método de las Correcciones.

4.4.3. Densificación de la Red de Nivelación luego del primer ajuste.

En la siguiente etapa del ajuste de la Red de Nivelación, se realiza el proceso de densificación con el objetivo de calcular las alturas ajustadas de los vértices intermedios ubicados en cada uno de los tramos que componen el ajuste inicial, este procedimiento es fundamental para ampliar y refinar la red. Para lograrlo, se aplica el método de Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones, el cual se implementa en todos los tramos analizados.

Tramo 13-11



Figura 4.43. Representación del tramo 13-11.

Llamando:

l_1 del M1d al 11

l_2 del M1d al 13

	ΔH (m)	Dist.(Km)
l_1	6.965	2.495
l_2	25.640	2.506

Tabla 4.31. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 13-11.

Las ecuaciones de condición se expresan de la forma $A * v = f$

$$1) \quad 13 - 11 = -\bar{l}_1 + \bar{l}_2 \quad ; \quad \text{siendo } \bar{l} = l + v$$

$$-v_1 + v_2 = 13 - 11 - (-l_1 + l_2)$$

Si se escribe en forma matricial:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$v = \begin{vmatrix} -v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$f = \begin{vmatrix} 13 - 11 - (l_1 - l_2) \end{vmatrix}$$

En el proceso de ajuste mediante el método de mínimos cuadrados de las correcciones, se establece una matriz de pesos (W) que es inversamente proporcional a las distancias de las líneas consideradas. Esto implica que las líneas de menor longitud reciben un peso mayor en el cálculo final, otorgando una mayor influencia a las mediciones más cercanas.

Para implementar esta relación, se define como referencia inicial la varianza a priori (σ_0^2) correspondiente a la mayor distancia. A partir de esta referencia, se construye la matriz de pesos (W) utilizando la siguiente ecuación, la cual establece la proporcionalidad inversa necesaria para reflejar el efecto deseado de las distancias en el ajuste.

$$w_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

$$W = \begin{vmatrix} 1.004 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$v = \begin{vmatrix} -9.98E-04 \\ 1.00E-03 \end{vmatrix}$$

$$\bar{l} = \begin{vmatrix} 6.964 \\ 25.641 \end{vmatrix}$$

Por lo tanto se llega a la altura ajustada del siguiente vértice:

Vértice	Altura (m)
M1d	14.290

Tabla 4.32. Altura ajustada del vértice perteneciente al tramo 13-11.

Tramo m1f-13

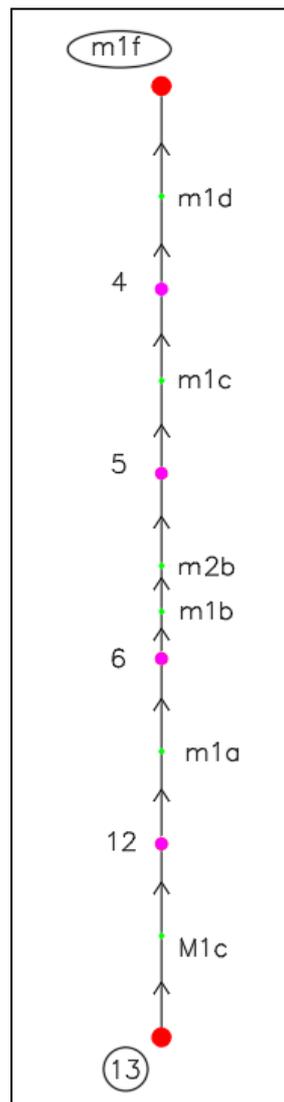


Figura 4.44. Representación del tramo 13-11.

Llamando:

l_1 del 13 al M1c

l_2 del M1c al 12

- l_3 del 12 al $m1a$
- l_4 del $m1a$ al 6
- l_5 del 6 al $m1b$
- l_6 del $m1b$ al $m2b$
- l_7 del $m2b$ al 5
- l_8 del 5 al $m1c$
- l_9 del $m1c$ al 4
- l_{10} del 4 al $m1d$
- l_{11} del $m1d$ al $m1f$

	ΔH (m)	Longitud (Km)
l_1	-9.0241	2.284
l_2	14.7426	2.576
l_3	-2.7923	2.584
l_4	-0.4192	2.537
l_5	-7.9899	2.697
l_6	-5.5073	1.851
l_7	3.1037	2.198
l_8	-5.9301	2.130
l_9	-17.3575	2.214
l_{10}	16.1068	2.571
l_{11}	-5.7984	1.762

Tabla 4.33. Líneas utilizadas para la densificación del tramo m1f-13.

La ecuación de condición se expresa de la forma $A * v = f$.

$$1) m1f - 13 = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_4 + \bar{l}_5 + \bar{l}_6 + \bar{l}_7 + \bar{l}_8 + \bar{l}_9 + \bar{l}_{10} + \bar{l}_{11}; \text{ siendo}$$

$$\bar{l} = l + v$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9 + v_{10} + v_{11} = m1f - 13 - (l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{10} + l_{11})$$

Si se escribe en forma matricial:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{1 \times 11}$$

$$v = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} \end{vmatrix}_{1 \times 11}$$

$$f = \begin{vmatrix} m1f - 13 - (l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{10} + l_{11}) \end{vmatrix}_{1 \times 1}$$

Al igual que el caso anterior se establece una matriz de pesos (W) que es inversamente proporcional a las longitudes de las líneas consideradas. Para implementar esta relación, se define como referencia inicial la varianza a priori (σ_0^2) correspondiente a la

mayor distancia (2.697 km), y se utiliza la ecuación $w_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$ para generar dicha matriz.

$$W = \begin{vmatrix} 1.18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.23 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.53 \end{vmatrix}_{11 \times 11}$$

Vértice	Altura (m)
M1c	30.906
12	45.647
m1a	42.854
6	42.433
m1b	34.442
m2b	28.934
5	32.036
m1c	26.105
4	8.747
m1d	24.852

Tabla 4.34. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo 13-11

Tramo m1f-10608A

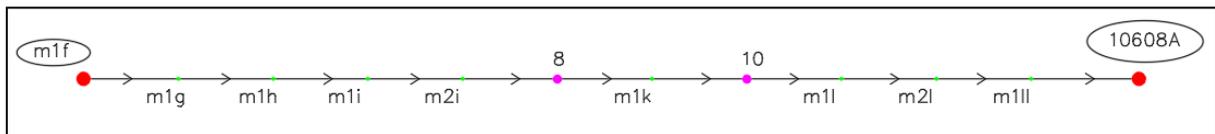


Figura 4.45. Representación del tramo 10608A-m1f.

Considerando:

l_1 del m1f al m1g

l_2 del m1g al m1h

l_3 del m1h al m1i

l_4 del m1i al m2i

l_5 del m2i al 8

l_6 del 8 al m1k

l_7 del m1k al 10

l_8 del 10 al m1l

l_9 del m1l al m2l

l_{10} del m2l al m1ll

l_{11} del m1ll al 10608A

	ΔH (m)	Dist (km)
l_1	-13.3306	2.269
l_2	21.7765	1.876
l_3	-7.8208	1.349
l_4	18.7011	2.687
l_5	11.3958	2.076
l_6	-5.0367	2.632
l_7	0.9998	2.428
l_8	13.8291	2.360
l_9	7.1484	1.965
l_{10}	17.6112	1.600
l_{11}	-12.6637	1.658

Tabla 4.35. Líneas utilizadas para la densificación del tramo m1f-10608A.

La ecuación de condición se expresa de la forma $A * v = f$.

$$1) \quad 10608A - m1f = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_4 + \bar{l}_5 + \bar{l}_6 + \bar{l}_7 + \bar{l}_8 + \bar{l}_9 + \bar{l}_{10} + \bar{l}_{11} ; \text{ siendo}$$

$$\bar{l} = l + v$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + \dots + v_9 + v_{10} + v_{11} = 10608A - m1f - (l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{10} + l_{11})$$

Si se escribe en forma matricial:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{1 \times 11}$$

$$v = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} \end{vmatrix}_{1 \times 11}$$

$$f = \begin{vmatrix} 10608A - m1f - (l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{10} + l_{11}) \end{vmatrix}_{1 \times 1}$$

Al igual que en los casos anteriores se establece la misma relación para generar la matriz de pesos (W). Se define como referencia inicial la varianza a priori (σ_0^2) como la mayor distancia en este tramo se corresponde con 2.687 km.

$$W = \begin{vmatrix} 1.18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.29 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.68 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.62 \end{vmatrix} 11 \times 11$$

Aplicando el algoritmo para la resolución del Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones se llega a los siguientes resultados:

$$v = \begin{vmatrix} -2.09E-03 \\ -1.73E-03 \\ -1.24E-03 \\ -2.48E-03 \\ -1.91E-03 \\ -2.42E-03 \\ -2.24E-03 \\ -2.17E-03 \\ -1.81E-03 \\ -1.47E-03 \\ -1.53E-03 \end{vmatrix} 11 \times 1$$

Tramo 10608A-1.18.031

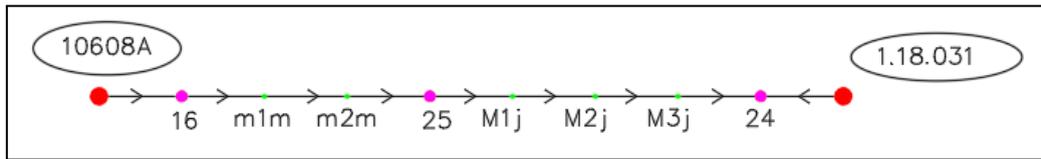


Figura 4.46. Representación del tramo 10608A-1.18.031.

Considerando:

- l_1 del 10608A al 16
- l_2 del 16 al m1m
- l_3 del m1m al m2m
- l_4 del m2m al 25
- l_5 del 25 al M1j
- l_6 del M1j al M2j
- l_7 del M2j al M3j
- l_8 del M3j al 24
- l_9 del 1.18.031 al 24

	ΔH (m)	Dist (km)
l_1	-4.3406	1.867
l_2	-8.1761	2.048
l_3	-6.1665	2.489
l_4	-19.6869	1.895
l_5	13.9627	2.339
l_6	1.7993	2.161
l_7	-2.4984	1.967
l_8	-2.4253	1.353
l_9	3.2388	4.030

Tabla 4.37. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 10608A-1.18.031.

La ecuación de condición se expresa de la forma $A * v = f$.

$$1) \quad 1.18.031 - 10608A = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_4 + \bar{l}_5 + \bar{l}_6 + \bar{l}_7 + \bar{l}_8 + \bar{l}_9 ; \text{ siendo}$$

$$\bar{l} = l + v$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9 = 1.18.031 - 10608A - (l_1 + l_2 + \dots + l_8 + l_9)$$

Si se escribe en forma matricial:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}_{1 \times 9}$$

$$v = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{vmatrix}_{1 \times 9}$$

$$f = \begin{vmatrix} 1.18.031 - 10608A - (l_1 + l_2 + \dots + l_8 + l_9) \end{vmatrix}_{1 \times 1}$$

Al igual que en los casos anteriores se establece la misma relación para generar la matriz de pesos (W). Se define como referencia inicial la varianza a priori (σ_0^2) como la mayor distancia en este tramo se corresponde con 4.030 km.

$$W = \begin{vmatrix} 2.159 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.968 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.619 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.127 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.723 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.865 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.049 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.979 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{9 \times 9}$$

Aplicando el algoritmo para la resolución del Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones se llega a los siguientes resultados:

$$v = \begin{array}{|l} -2.41E-04 \\ -2.64E-04 \\ -3.21E-04 \\ -2.45E-04 \\ -3.02E-04 \\ -2.79E-04 \\ -2.54E-04 \\ -1.75E-04 \\ 5.20E-04 \end{array} \begin{array}{|l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ 9 \times 1 \end{array}$$

$$\bar{l} = \begin{array}{|l} -4.3408 \\ -8.1764 \\ -6.1668 \\ -19.6871 \\ 13.9624 \\ 1.799 \\ -2.4987 \\ -2.4255 \\ 3.2393 \end{array} \begin{array}{|l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ 9 \times 9 \end{array}$$

A partir de las alturas ajustadas de los vértices que conforman los extremos de este tramo (10608A-1.18.031), las cuales fueron calculadas previamente, se llega a la altura ajustada del siguientes vértices:

Vértice	Altura (m)
16	67.301
m1m	59.125
m2m	52.958
25	33.271
M1j	47.233
M2j	49.032
M3j	46.534
24	44.108

Tabla 4.38. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo 10608A-1.18.031.

Tramo 1.18.031-1.18.033

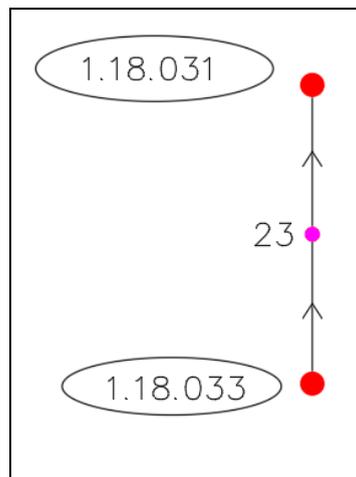


Figura 4.47. Representación del tramo 1.18.031-1.18.033

Considerando:

l_1 del 23 al 1.18.031

l_2 del 1.18.033 al 23

	ΔH (m)	Dist (km)
l_1	-17.316	2.451
l_2	-1.5739	2.479

Tabla 4.39. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 1.18.031-1.18.033

La ecuación de condición se expresa de la forma $A * v = f$.

$$1) \quad 1.18.031 - 1.18.033 = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 ; \text{ siendo } \bar{l} = l + v$$

$$v_1 + v_2 = 1.18.031 - 1.18.033 - (l_1 + l_2)$$

Si se expresa en forma matricial:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix}_{1 \times 2}$$

$$v = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \end{vmatrix}_{1 \times 2}$$

$$f = \begin{vmatrix} 1.18.031 - 1.18.033 - (l_1 + l_2) \end{vmatrix}_{1 \times 1}$$

Al igual que en los casos anteriores se establece la misma relación para generar la matriz de pesos (W). Se define como referencia inicial la varianza a priori (σ_0^2) como la mayor distancia en este tramo se corresponde con 2.479 km.

$$W = \begin{vmatrix} 1.011 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

Aplicando el algoritmo para la resolución del Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones se llega a los siguientes resultados:

$$v = \begin{vmatrix} -2.04E-03 \\ -2.06E-03 \end{vmatrix}_{2 \times 1}$$

$$\bar{l} = \begin{vmatrix} -17.318 \\ -1.576 \end{vmatrix}_{2 \times 1}$$

A partir de las alturas ajustadas de los vértices que conforman los extremos de este tramo (1.18.031-1.18.033), las cuales fueron calculadas previamente, se llega a la altura ajustada del siguiente vértice:

Vértice	Altura (m)
23	58.187

Tabla 4.40. Altura ajustada del vértice perteneciente al tramo 1.18.031-1.18.033.

Tramo 1.18.033-M1f

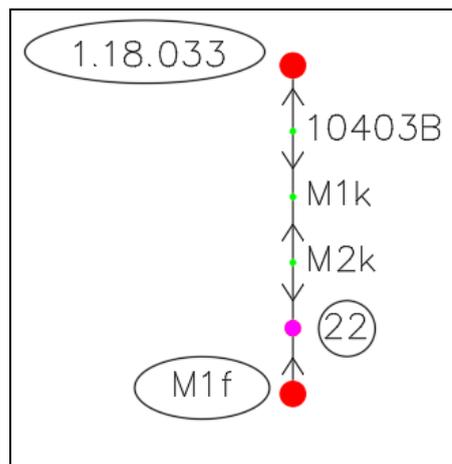


Figura 4.48. Representación del tramo 1.18.033-M1f

Considerando:

l_1 del 10403B al 1.18.033

l_2 del 10403B al M1k

l_3 del M2k al M1k

l_4 del M2k al 22

l_5 del M1f al 22

	ΔH (m)	Dist (km)
l_1	4.4136	1.310
l_2	-14.2707	0.864
l_3	11.2789	0.955
l_4	0.6476	1.070
l_5	10.9324	2.247

Tabla 4.41. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 1.18.033-M1f.

La ecuación de condición se expresa de la forma $A * v = f$.

$$1) \quad 1.18.033 - M1f = \bar{l}_1 - \bar{l}_2 + \bar{l}_3 - \bar{l}_4 + \bar{l}_5; \text{ siendo } \bar{l} = l + v$$

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + v_5 = 1.18.033 - M1f - (l_1 - l_2 + l_3 - l_4 + l_5)$$

Si se expresa en forma matricial:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}_{1 \times 5}$$

$$v = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{vmatrix}_{1 \times 5}$$

$$f = \begin{vmatrix} 1.18.033 - M1f - (l_1 - l_2 + l_3 - l_4 + l_5) \end{vmatrix}_{1 \times 1}$$

Al igual que en los casos anteriores se establece la misma relación para generar la matriz de pesos (W). Se define como referencia inicial la varianza a priori (σ_0^2) como la mayor distancia en este tramo se corresponde con 2.247 km.

$$W = \begin{vmatrix} 1.715 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.353 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{5 \times 5}$$

Aplicando el algoritmo para la resolución del Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones se llega a los siguientes resultados:

$$v = \begin{vmatrix} 1.93E-04 \\ -1.27E-04 \\ 1.41E-04 \\ -1.58E-04 \\ 3.31E-04 \end{vmatrix}_{1 \times 5}$$

$$\bar{l} = \begin{vmatrix} 4.4138 \\ -14.2708 \\ 11.279 \\ 0.6474 \\ 10.9327 \end{vmatrix}_{1 \times 5}$$

A partir de las alturas ajustadas de los vértices que conforman los extremos de este tramo (1.18.033-M1f), las cuales fueron calculadas previamente, se llega a la altura ajustada del siguiente vértice:

Vértice	Altura (m)
10403B	55.3492
M1k	41.078
M2k	29.799
22	30.447
M1f	19.514

Tabla 4.42. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo 1.18.033-M1f.

Tramo 19-Cabildo

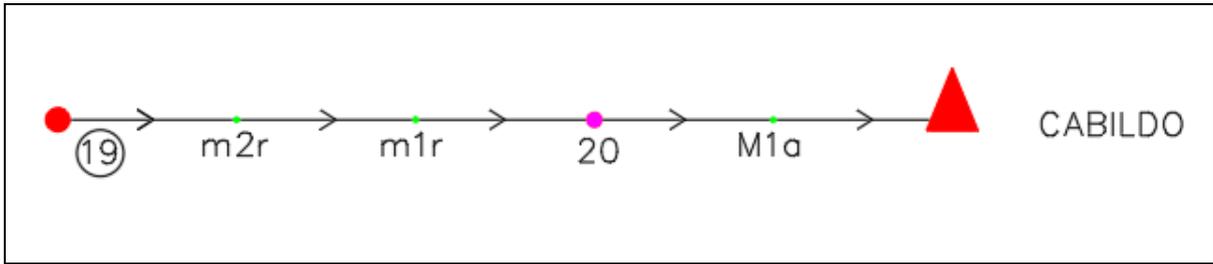


Figura 4.49. Representación del tramo 10608A-1.18.031.

Considerando:

- l_1 del 19 al m2r
- l_2 del m2r al m1r
- l_3 del m1r al 20
- l_4 del 20 al M1a
- l_5 del M1a al Cabildo

	ΔH (m)	Dist (km)
l_1	26.7312	1.842
l_2	-30.2925	1.885
l_3	-5.9649	2.151
l_4	-14.1683	2.168
l_5	18.7397	2.382

Tabla 4.43. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 1.18.033-M1f.

La ecuación de condición se expresa de la forma $A * v = f$.

$$1) \text{ Cabildo} - 19 = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_4 + \bar{l}_5; \text{ siendo } \bar{l} = l + v$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = \text{Cabildo} - 19 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5)$$

Si se expresa en forma matricial:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{1 \times 5}$$

$$v = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{vmatrix}_{1 \times 5}$$

$$f = \begin{vmatrix} \text{Cabildo} - 19 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5) \end{vmatrix}_{1 \times 1}$$

Al igual que en los casos anteriores se establece la misma relación para generar la matriz de pesos (W). Se define como referencia inicial la varianza a priori (σ_0^2) como la mayor distancia en este tramo se corresponde con 2.382 km.

$$W = \begin{vmatrix} 1.293 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.264 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.107 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.099 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{5 \times 5}$$

Aplicando el algoritmo para la resolución del Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones se llega a los siguientes resultados:

$$v = \begin{vmatrix} -1.10E-03 \\ -1.12E-03 \\ -1.28E-03 \\ -1.29E-03 \\ -1.42E-03 \end{vmatrix}_{1 \times 5}$$

$$\bar{l} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} 26.7301 \\ -30.2936 \\ -5.9662 \\ -14.1696 \\ 18.7383 \end{array} \\ \hline & \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ 1 \times 5 \end{array}$$

A partir de las alturas ajustadas de los vértices que conforman los extremos de este tramo (19- Cabildo), las cuales fueron calculadas previamente, se llega a la altura ajustada de los siguientes vértices:

Vértice	Altura (m)
m2r	54.661
m1r	24.368
20	18.401
M1a	4.232

Tabla 4.44. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo 19- Cabildo.

Tramo 19-11

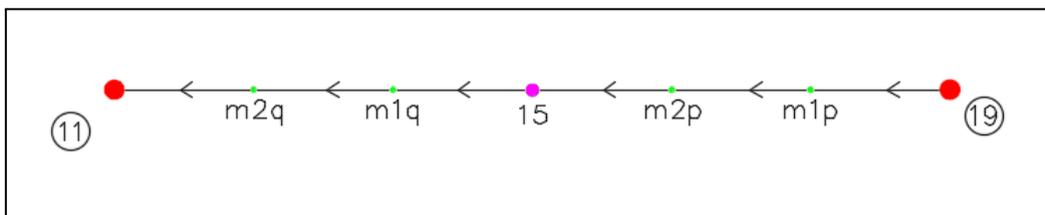


Figura 4.50. Representación del tramo 10608A-1.18.031.

Considerando:

- l_1 del 19 al m19
- l_2 del m1p al m2p
- l_3 del m2p al 15
- l_4 del 15 al m1q
- l_5 del m1q al m2q
- l_6 del m2q al m2q

	ΔH (m)	Dist (km)
l_1	-1.1087	1.878
l_2	10.087	1.93
l_3	2.4515	1.685
l_4	-18.0193	2.037
l_5	0.25395	2.021
l_6	-0.33875	2.266

Tabla 4.45. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 1.18.033-M1f.

La ecuación de condición se expresa de la forma $A * v = f$.

$$1) \quad 11 - 19 = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_4 + \bar{l}_5 + \bar{l}_6 ; \text{ siendo } \bar{l} = l + v$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 11 - 19 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6)$$

Si se expresa en forma matricial:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{1 \times 7}$$

$$v = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{vmatrix}_{1 \times 6}$$

$$f = \begin{vmatrix} 11 - 19 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6) \end{vmatrix}_{1 \times 1}$$

Al igual que en los casos anteriores se establece la misma relación para generar la matriz de pesos (W). Se define como referencia inicial la varianza a priori (σ_0^2) como la mayor distancia en este tramo se corresponde con 2.266 km.

$$W = \begin{vmatrix} 1.207 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.174 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.345 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.112 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.121 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{6 \times 6}$$

Tramo m1f-11

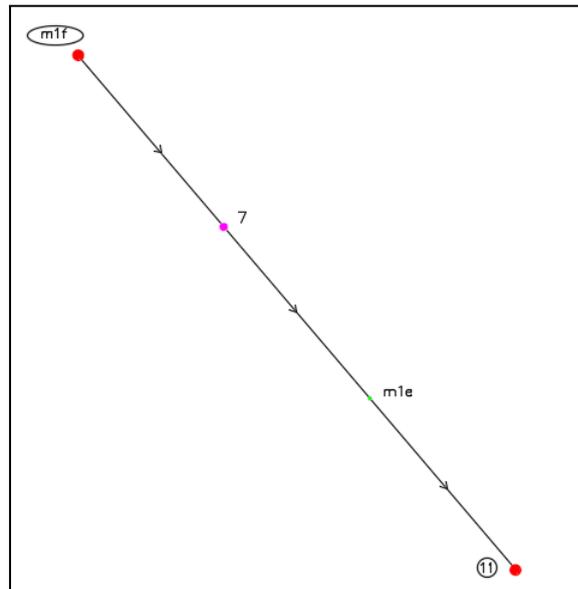


Figura 4.51. Representación del tramo m1f-11.

Considerando:

- l_1 del m1f al 7
- l_2 del 7 al m1e
- l_3 del m1e al 11

	ΔH (m)	Dist (km)
l_1	-2.39665	0.742
l_2	8.1733	2.111
l_3	-3.5774	2.356

Tabla 4.47. Líneas utilizadas para la densificación del tramo m1f-11.

La ecuación de condición se expresa de la forma $A * v = f$.

$$1) \quad 11 - m1f = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3; \text{ siendo } \bar{l} = l + v$$

$$v_1 + v_2 + v_3 = 11 - 19 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6)$$

Si se expresa en forma matricial:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{1 \times 3}$$

$$v = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}_{1 \times 3}$$

$$f = \left| \begin{array}{c} 11 - 19 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6) \end{array} \right|_{1 \times 1}$$

Al igual que en los casos anteriores se establece la misma relación para generar la matriz de pesos (W). Se define como referencia inicial la varianza a priori (σ_0^2) como la mayor distancia en este tramo se corresponde con 2.356 km.

$$W = \left| \begin{array}{ccc|c} 3.175 & 0 & 0 & \\ 0 & 1.116 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right|_{3 \times 3}$$

Aplicando el algoritmo para la resolución del Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones se llega a los siguientes resultados:

$$v = \left| \begin{array}{c|c} 2.49E-04 & \\ 7.09E-04 & \\ 7.91E-04 & \end{array} \right|_{3 \times 3}$$

$$\bar{l} = \left| \begin{array}{c|c} -2.3964 & \\ 8.174 & \\ -3.5766 & \end{array} \right|_{3 \times 3}$$

A partir de las alturas ajustadas de los vértices que conforman los extremos de este tramo (19- 11), las cuales fueron calculadas previamente, se llega a la altura ajustada de los siguientes vértices:

Vértice	Altura (m)
7	16.657
m1e	24.831

Tabla 4.48. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo m1f-11.

Tramo 10608A-19

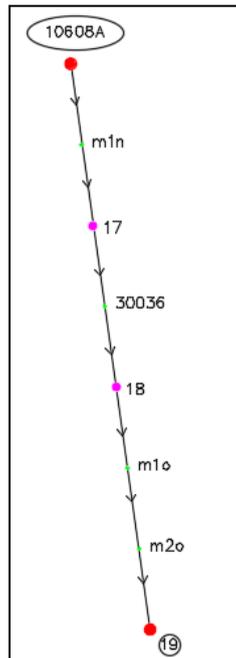


Figura 4.52. Representación del tramo 10608A-19.

Considerando:

l_1 del 10608A al m1n

l_2 del m1n al 17

l_3 del 17 al 30036

l_4 del 30036 al 18

l_5 del 18 al m1o

l_6 del m1o al m2o

l_7 del m2o al 19

	ΔH (m)	Dist (km)
l_1	-21.0605	1.473
l_2	0.76455	1.406
l_3	-9.9587	2.668
l_4	-12.6639	0.95
l_5	11.3310	2.007
l_6	-0.7558	1.694
l_7	-11.3579	1.169

Tabla 4.49. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 10608A-19.

La ecuación de condición se expresa de la forma $A * v = f$.

$$1) \quad 19 - 10608A = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_4 + \bar{l}_5 + \bar{l}_6 + \bar{l}_7; \text{ siendo } \bar{l} = l + v$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 = 19 - 10608A - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7)$$

Si se expresa en forma matricial:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{1 \times 7}$$

$$v = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{vmatrix}_{1 \times 7}$$

$$f = \begin{vmatrix} 19 - 10608A - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7) \end{vmatrix}_{1 \times 1}$$

Al igual que en los casos anteriores se establece la misma relación para generar la matriz de pesos (W). Se define como referencia inicial la varianza a priori (σ_0^2) como la mayor distancia en este tramo se corresponde con 2.668 km.

$$W = \begin{vmatrix} 1.811 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.898 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.808 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.329 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.575 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.282 \end{vmatrix}_{7 \times 7}$$

Aplicando el algoritmo para la resolución del Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones se llega a los siguientes resultados:

$$v = \begin{vmatrix} -1.26E-03 \\ -1.20E-03 \\ -2.28E-03 \\ -8.11E-04 \\ -1.71E-03 \\ -1.45E-03 \\ -9.98E-04 \end{vmatrix}_{7 \times 1}$$

$$\bar{l} = \begin{vmatrix} -21.0618 \\ 0.7634 \\ -9.961 \\ -12.6647 \\ 11.3293 \\ -0.7572 \end{vmatrix}_{7 \times 1}$$

A partir de las alturas ajustadas de los vértices que conforman los extremos de este tramo (10808A- 19), las cuales fueron calculadas previamente , se llega a la altura ajustada de los siguientes vértices:

Vértice	Altura (m)
m1n	50.580
17	51.344
30036	41.383
18	28.718
m1o	40.047
m2o	39.290

Tabla 4.50. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo 10608A-19.

Tramo 1.18.031-1.18.033

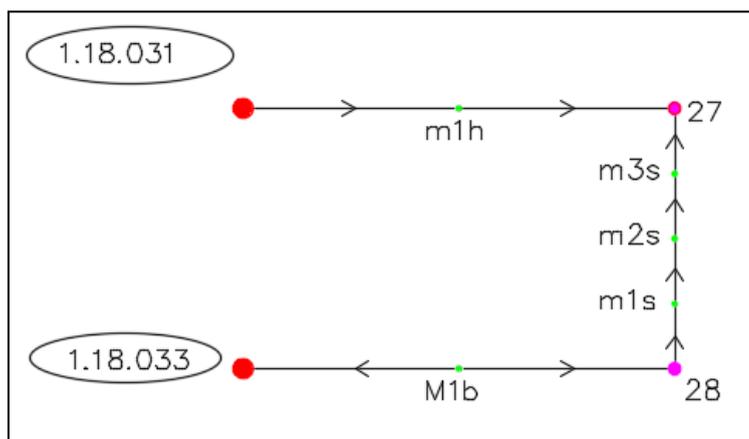


Figura 4.53. Representación del tramo 1.18.031-1.18.033

Considerando:

- l_1 del 1.18.031 al m1h
- l_2 del m1h al 27
- l_3 del 28 al m1s
- l_4 del m1s al m2s
- l_5 del m2s al m3s
- l_6 del m3s al 27
- l_7 del M1b al 28
- l_8 del M1b al 1.18.033

	ΔH (m)	Dist (km)
l_1	-9.0520	2.059
l_2	-3.5639	2.426
l_3	20.0915	1.759
l_4	-1.4635	2.015
l_5	-2.9039	1.796
l_6	-1.9753	1.932
l_7	-13.7559	1.723
l_8	31.5191	2.019

Tabla 4.51. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 1.18.031-1.18.033.

La ecuación de condición se expresa de la forma $A * v = f$.

$$2) \quad 1.18.033 - 1.18.031 = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_4 + \bar{l}_5 + \bar{l}_6 + \bar{l}_7 + \bar{l}_8; \text{ siendo}$$

$$\bar{l} = l + v$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 = 1.18.033 - 1.18.031 - (l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_7 + l_8)$$

Si se expresa en forma matricial:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}_{1 \times 8}$$

$$v = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \end{vmatrix}_{1 \times 8}$$

$$f = \begin{vmatrix} 19 - 10608A - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7) \end{vmatrix}_{1 \times 1}$$

Al igual que en los casos anteriores se establece la misma relación para generar la matriz de pesos (W). Se define como referencia inicial la varianza a priori (σ_0^2) como la mayor distancia en este tramo se corresponde con 2.426 km.

$$W = \begin{vmatrix} 1.178 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.379 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.204 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.351 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.256 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.408 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.202 \end{vmatrix}_{8 \times 8}$$

Aplicando el algoritmo para la resolución del Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones se llega a los siguientes resultados:

$$v = \begin{pmatrix} -2.13E-03 \\ -2.51E-03 \\ 1.82E-03 \\ 2.09E-03 \\ 1.86E-03 \\ 2.00E-03 \\ 1.79E-03 \\ -2.09E-03 \end{pmatrix}_{8 \times 1}$$

$$\bar{l} = \begin{pmatrix} -9.0541 \\ -3.5664 \\ 20.0933 \\ -1.4614 \\ -2.902 \\ -1.9733 \\ -13.7541 \\ 31.517 \end{pmatrix}_{8 \times 1}$$

A partir de las alturas ajustadas de los vértices que conforman los extremos de este tramo (1.18.031-1.18.033), las cuales fueron calculadas previamente, se llega a la altura ajustada de los siguientes vértices:

Vértice	Altura (m)
M1h	31.815
27	28.249
28	14.492
m1s	34.585
m2s	33.124
m3s	30.222
M1b	28.246

Tabla 4.52. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo 10608A-19.

Tramo 21-M1f

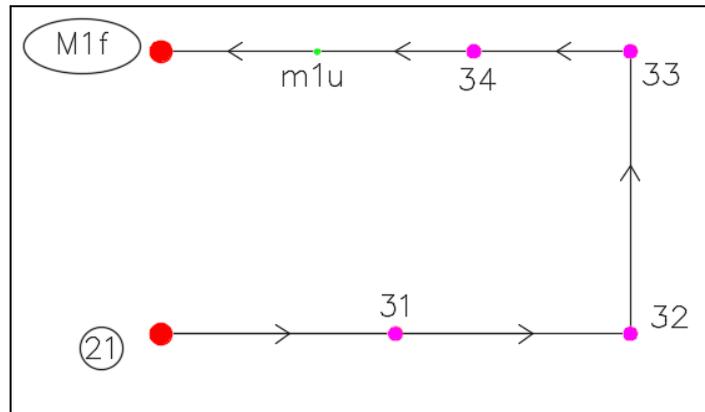


Figura 4.54. Representación del tramo 21-M1f

Considerando:

- l_1 del 33 al 34
- l_2 del 34 al m1u
- l_3 del m1u al M1f
- l_4 del 32 al 33
- l_5 del 21 al 31
- l_6 del 31 al 32

	ΔH (m)	Dist (km)
l_1	18.5561	0.637
l_2	5.8995	0.56
l_3	-7.09505	2.229
l_4	-3.5087	1.041
l_5	-6.612	1.536
l_6	-0.2981	0.885

Tabla 4.53. Líneas utilizadas para la densificación del tramo 21-M1f.

La ecuación de condición se expresa de la forma $A * v = f$.

$$3) \quad 21 - M1f = -\bar{l}_1 - \bar{l}_2 - \bar{l}_3 - \bar{l}_4 - \bar{l}_5 - \bar{l}_6; \text{ siendo } \bar{l} = l + v$$

$$-v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6 = 21 - M1f - (-l_1 - l_2 - l_3 - l_4 - l_5 - l_6)$$

Si se expresa en forma matricial:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{1 \times 6}$$

$$v = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{vmatrix}_{1 \times 6}$$

$$f = \begin{vmatrix} 21 - M1f - (-l_1 - l_2 - l_3 - l_4 - l_5 - l_6) \end{vmatrix}_{1 \times 1}$$

Al igual que en los casos anteriores se establece la misma relación para generar la matriz de pesos (W). Se define como referencia inicial la varianza a priori (σ_0^2) como la mayor distancia en este tramo se corresponde con 2.229 km.

$$W = \begin{vmatrix} 3.499 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.980 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.141 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.451 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.004 \end{vmatrix}_{6 \times 6}$$

Aplicando el algoritmo para la resolución del Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones se llega a los siguientes resultados:

$$v = \begin{vmatrix} -4.24E-06 \\ -3.73E-06 \\ -1.48E-05 \\ -6.93E-06 \\ -1.02E-05 \\ -3.71E-03 \end{vmatrix}_{6 \times 1}$$

4	8.747	8.771	0.024
m1d	24.852	24.878	0.026
m1g	5.720	5.749	0.029
m1h	27.495	27.525	0.030
m1i	19.673	19.705	0.032
m2i	38.372	38.406	0.034
8	49.766	49.801	0.035
m1k	44.727	44.765	0.038
10	45.724	45.764	0.040
m1l	59.551	59.594	0.043
m2l	66.698	66.742	0.044
m1ll	84.307	84.353	0.046
16	67.301	67.349	0.048
m1m	59.125	59.173	0.048
m2m	52.958	53.006	0.048
25	33.271	33.271	0.000
M1j	47.233	47.234	0.001
M2j	49.032	49.034	0.002
M3j	46.534	46.535	0.001
24	44.108	44.110	0.002
23	58.187	58.187	0.000
118033	59.763	59.74	0.023
10403B	55.3492	55.347	0.002
M1k	41.078	41.077	0.001
M2k	29.799	29.798	0.001
22	30.447	30.445	0.002
m2r	54.661	54.719	0.058
m1r	24.368	24.427	0.059
20	18.401	18.399	0.002
M1a	4.232	4.230	0.002
m1p	26.822	26.880	0.058
m2p	36.909	36.967	0.058
15	39.360	39.418	0.058
m1q	21.340	21.399	0.059
m2q	21.593	21.653	0.060

7	16.657	15.683	0.974
m1e	24.831	24.856	0.025
m1n	50.580	50.629	0.049
17	51.344	51.394	0.050
30036	41.383	41.361	0.022
18	28.718	28.771	0.053
m1o	40.047	40.102	0.055
m2o	39.290	39.346	0.056
M1h	31.815	31.819	0.004
27	28.249	28.255	0.006
28	14.492	14.486	0.006
m1s	34.585	34.578	0.007
m2s	33.124	33.114	0.010
m3s	30.222	30.21	0.012
M1b	28.246	28.242	0.004
33	2.154	2.157	0.003
34	20.710	20.714	0.004
m1u	26.609	26.613	0.004
31	5.964	5.964	0.000
32	5.662	5.666	0.004

Tabla 4.55. Alturas ajustadas de todos los vértices obtenidas a partir de la densificación y la diferencia con las obtenidas por el IGM.

4.4.4. Propagación de cofactores para las alturas ajustadas a partir de la densificación.

Con el fin de llevar a cabo la propagación de cofactores y obtener la matriz de varianzas y covarianzas, se toma la decisión de realizar este procedimiento exclusivamente para el tramo que incluye el vértice IGM-034, específicamente el tramo comprendido entre el punto 21 y el M1f. El propósito principal de este enfoque es ajustar la altimetría en dicho tramo, tarea que se desarrolló en la sección anterior del proyecto. A continuación, se procederá con el cálculo de la respectiva desviación estándar, esta decisión y metodología

responden a la reformulación del objetivo del presente proyecto de grado, el cual ha sido reorientado para centrarse de manera específica en dicho vértice.

Para llevar a cabo la propagación de cofactores y calcular las desviaciones de los vértices contenidos en el tramo 21-M1f, dentro del cual se encuentra el vértice de interés para este proyecto, es necesario considerar ciertos aspectos fundamentales. En primer lugar, se debe tener en cuenta que los extremos del tramo, es decir, los vértices 21 y M1f, cuentan con sus respectivas desviaciones estándar, las cuales han sido calculadas previamente (ver Tabla 4.29). Por lo tanto, dichas desviaciones estándar deben ser incluidas en los cálculos durante el proceso de propagación de cofactores.

El primer paso consiste en realizar la propagación de cofactores del Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones, este método fue empleado para determinar las alturas niveladas de los vértices que conforman el tramo en cuestión. Como resultado de esta propagación, se obtiene la matriz de varianzas y covarianzas correspondiente a las lecturas ajustadas.

Luego, considerando que para calcular las alturas niveladas de los vértices que componen el tramo se utilizan las siguientes ecuaciones, las cuales parten desde el vértice 21 como referencia:

$$31 = 21 + \bar{l}_5$$

$$32 = 21 + \bar{l}_5 + \bar{l}_6$$

$$33 = 21 + \bar{l}_5 + \bar{l}_6 + \bar{l}_4$$

$$34 = 21 + \bar{l}_5 + \bar{l}_6 + \bar{l}_4 + \bar{l}_1$$

$$m1u = 21 + \bar{l}_5 + \bar{l}_6 + \bar{l}_4 + \bar{l}_1 + \bar{l}_2$$

Estas ecuaciones pueden representarse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|c|cccccc|c|c}
 31 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 21 \\
 32 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \bar{l}_1 \\
 33 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \bar{l}_2 \\
 34 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \bar{l}_4 \\
 mlu & 5 \times 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \bar{l}_5 \\
 & & & & & & & & \bar{l}_6 \\
 & & & & & & & & 6 \times 1
 \end{array}$$

Dado que el sistema se modela de la forma $Y = a * X$, es posible aplicar la Ley General de Varianzas y Covarianzas, expresada como:

$$\Sigma_{YY} = a * \Sigma_{XX} * a^t$$

Para generar la matriz Σ_{XX} , es necesario considerar las varianzas y covarianzas asociadas a las líneas ajustadas ($\Sigma_{\bar{l}}$), es importante señalar que se excluye de las correspondientes a la línea \bar{l}_3 dado que no se utiliza en las ecuaciones de cálculo de las alturas niveladas para el tramo. Asimismo, en la matriz Σ_{XX} se debe integrar la varianza previamente obtenida para el vértice 21, según los resultados presentados en apartados anteriores.

Este procedimiento asegura que las desviaciones y correlaciones sean correctamente propagadas, lo que proporciona una base para la evaluación de la precisión de las alturas niveladas en el tramo 21-M1f, en particular, del vértice de interés para este proyecto.

$$\Sigma_{\bar{u}} = \begin{vmatrix} 1.59E-08 & -1.58E-11 & -6.29E-11 & -2.94E-11 & -4.34E-11 & -1.57E-08 \\ -1.58E-11 & 1.40E-08 & -5.53E-11 & -2.58E-11 & -3.81E-11 & -1.38E-08 \\ -6.29E-11 & -5.53E-11 & 5.54E-08 & -1.03E-10 & -1.52E-10 & -5.51E-08 \\ -2.94E-11 & -2.58E-11 & -1.03E-10 & 2.59E-08 & -7.09E-11 & -2.57E-08 \\ -4.34E-11 & -3.81E-11 & -1.52E-10 & -7.09E-11 & 3.82E-08 & -3.79E-08 \\ -1.57E-08 & -1.38E-08 & -5.51E-08 & -2.57E-08 & -3.79E-08 & 1.48E-07 \end{vmatrix}_{6 \times 6}$$

$$\Sigma_{xx} = \begin{vmatrix} 9.25E-06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.59E-08 & -1.58E-11 & -2.94E-11 & -4.34E-11 & -1.57E-08 \\ 0 & -1.58E-11 & 1.40E-08 & -2.58E-11 & -3.81E-11 & -1.38E-08 \\ 0 & -2.94E-11 & -2.58E-11 & 2.59E-08 & -7.09E-11 & -2.57E-08 \\ 0 & -4.34E-11 & -3.81E-11 & -7.09E-11 & 3.82E-08 & -3.79E-08 \\ 0 & -1.57E-08 & -1.38E-08 & -2.57E-08 & -3.79E-08 & 1.48E-07 \end{vmatrix}_{6 \times 6}$$

$$\Sigma_{yy} = \begin{vmatrix} 0.00000928 & 0.00000925 & 0.00000925 & 0.00000925 & 0.00000925 \\ 0.00000925 & 0.00000936 & 0.00000933 & 0.00000932 & 0.00000930 \\ 0.00000925 & 0.00000933 & 0.00000933 & 0.00000932 & 0.00000930 \\ 0.00000925 & 0.00000932 & 0.00000932 & 0.00000932 & 0.00000930 \\ 0.00000925 & 0.00000930 & 0.00000930 & 0.00000930 & 0.00000930 \end{vmatrix}_{5 \times 5}$$

Vértice	Altura (m)	Desv. estándar (m)
31	5.964	0.0030
32	5.662	0.0031
33	2.154	0.0031
34	20.710	0.0031
m1u	26.609	0.0030

Tabla 4.56. Alturas ajustadas de los vértices pertenecientes al tramo 21-M1f con sus respectivas desviaciones estándar.

4.5. Monografía del vértice IGM-034.

Con los datos obtenidos en las secciones previas, se procede a la elaboración de una monografía para el vértice IGM-034 (ver Anexo II), uno de los objetivos redefinidos al iniciar el proyecto de grado. Este vértice, como se ha señalado en diversas ocasiones, se localiza en la explanada de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República (UdelaR). El propósito de la monografía es proporcionar una herramienta útil para las futuras generaciones de estudiantes que cursen la carrera de Ingeniería Agrimensor, garantizando que los conocimientos y resultados obtenidos puedan ser aprovechados en los proyectos y estudios posteriores.

En la monografía se incluyen las coordenadas calculadas en dos sistemas de referencia. El primero corresponde al sistema IGS 20, basado en la semana SIRGAS 2318. Para este cálculo se llevó a cabo una "unión" aplicando el método de Mínimos Cuadrados del postproceso utilizando tres Softwares distintos (CGO, Infinity y RTK LIB). El segundo sistema de referencia utilizado es el SIRGAS ROU 98, para el cual se realizó una transformación de Helmert de siete parámetros, con el fin de convertir las coordenadas calculadas en el sistema IGS 20 al sistema SIRGAS ROU 98.

Además, se presenta la altitud ajustada, obtenida a partir de un ajuste en forma de red y la posterior densificación de la línea que incluye el vértice de interés. La monografía también incluye una fotografía del vértice, tomada durante la ocupación del punto, así como un croquis de ubicación realizado en el software QGIS, lo cual facilita la visualización y comprensión de la ubicación exacta del vértice en el terreno.

5. Conclusiones

A partir de las conclusiones derivadas de cada una de las prácticas realizadas, es posible establecer una comprensión más profunda y global de los conceptos abordados en el proyecto de grado. De este modo, se alcanza un entendimiento completo que da forma al cuerpo central del proyecto, consolidando los conocimientos adquiridos y su aplicabilidad dentro del marco de la investigación.

En consonancia con la metodología desarrollada en el presente proyecto de grado, las conclusiones se estructuran considerando los tres principales bloques temáticos que constituyen el eje central de este trabajo. En primer lugar, se aborda el post proceso aplicado a los distintos vértices a partir de las bases permanentes. Posteriormente, el procedimiento llevado a cabo para la obtención de las coordenadas más precisas posibles del vértice IGM-034, considerando los criterios y metodologías utilizadas, con el objetivo de alcanzar resultados confiables. Finalmente, se examina el ajuste de la red de nivelación.

Al momento de reorientar el proyecto, se tomó la decisión de realizar el post proceso de cada vértice de forma individual a partir de diferentes estaciones permanentes, aunque también hubiera sido posible realizar un ajuste en forma de red para cada uno de los días en los que se ocupan los vértices. Como una conclusión importante derivada del post procesamiento de los vértices a partir de distintas bases permanentes, se destaca la diferencia en las coordenadas que resulta de conectarse a dos estaciones permanentes diferentes. Estas diferencias fueron más notorias en los vértices ubicados cerca de una base y alejados de otra, lo que subraya la importancia de realizar los trabajos de campo conectándose siempre a la base más cercana para minimizar discrepancias. Asimismo, se observa que, en todos los resultados obtenidos, las diferencias en las coordenadas son menores al utilizar el sistema de

referencia IGS 20, es decir, empleando las coordenadas derivadas de la solución semanal de SIRGAS de las estaciones permanentes y efemérides precisas.

Con respecto al procedimiento empleado para obtener las coordenadas del vértice IGM-034, se considera acertado haber implementado un método de mínimos cuadrados que permitiera combinar en un único resultado las coordenadas post procesadas en tres softwares diferentes. Esta estrategia asegura que no se valide exclusivamente el resultado de un único software, incrementando así la confiabilidad del proceso. Además, se subraya la relevancia de contar con una base permanente en las proximidades del vértice, idealmente a una distancia de alrededor de quinientos metros, lo cual facilita la obtención de resultados más precisos. Por otro lado, aunque el tiempo de ocupación del vértice fue de una hora, se concluye que, para lograr una mayor precisión en futuros trabajos, dicho tiempo debe extenderse.

En el proceso de transformación de coordenadas utilizando el modelo de Helmert, se concluye que en este procedimiento se puede ajustar la cantidad de parámetros empleados, decisión que recae en la persona que lleva a cabo el análisis. Asimismo, la transformación puede realizarse seleccionando diferentes vértices que posean coordenadas en ambos sistemas de referencia, lo que ofrece flexibilidad y adaptabilidad al método en función de las condiciones del proyecto y las características de los datos disponibles.

En cuanto a la red de nivelación, se concluye que los resultados obtenidos luego de la densificación y posterior propagación de cofactores arrojan un buen resultado para el vértice IGM-034, el cual constituye el eje central de este proyecto. Para que este resultado sea correcto, se destaca la buena calidad de la red en general, la cual se traduce en una estructura sólida y coherente. Esto proporciona, a su vez, resultados confiables para las alturas obtenidas de todos los vértices incluidos en el ajuste realizado en forma de red de nivelación, asegurando la precisión y la consistencia de los datos procesados.

6. Bibliografía

Faure Valbi, J. (2022). Ajuste de la red altimétrica nacional de primer orden en términos de números geopotenciales y derivación de los diferentes tipos de alturas físicas en Uruguay [Tesis de Maestría]. Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de La Plata.

Barraza, B., Tarrío, J. A. (2020). Procesamiento de datos GNSS con software libre, a partir de estaciones SIRGAS. [Webinar]. Sistema de Referencia Geodésico para las Américas.

<https://www.youtube.com/watch?v=ZPR6pMXK-Yk>

SIRGAS. (2002). Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas: Boletín Informativo No. 6. Febrero de 2002.

Suárez, N. (2014). Geodesia: Revisión de conceptos. Universidad de la República (Udelar). Montevideo, 23 de septiembre de 2014.

Rovera, H. y Suárez, N. (2008). Hacia una infraestructura geodésica moderna en Uruguay. Servicio Geográfico Militar. Reunión SIRGAS 2008.

Hofmann-Wellenhof, B., & Moritz, H. (2006). Physical geodesy. Springer Science & Business Media.

Berné Valero, J. L., Anquela Julián, A. B., & Garrido Villén, N. (2014) GNSS.GPS: Fundamentos y aplicaciones en geomática. Universidad Politécnica de Valencia.

Fotopoulos, G. (2009). Fitting the gravimetric geoid to GPS on Benchmarks. Universidad de Toronto, Canadá

Instituto Geográfico Militar (IGM). (2023). Estrategia y cálculo del geoide UruGeoide110.

Instituto Geográfico Militar: IGM. Recuperada desde <https://igm.gub.uy/>

SIRGAS. Recuperada desde <https://sirgas.ipgh.org/>

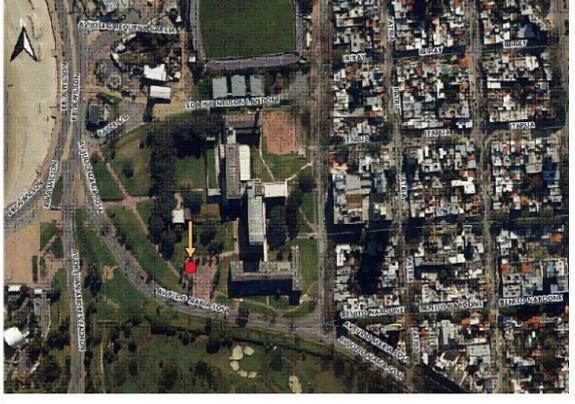
7. Anexos

Anexo I: Porcentaje que representa la diferencia de las alturas elipsoidales respecto al módulo del vector.

Dia	Vértice	SIRGAS ROU 98			IGS 20		
		Módulo (m)	Altura (m)	Porcentaje	Módulo (m)	Altura	Porcentaje
21/10/2022	IGM-11	0.093	0.029	30.70%	0.088	0.054	61.06%
	IGM-12	0.322	0.105	32.69%	0.375	0.219	58.22%
	IGM-13	0.130	0.026	19.81%	0.129	0.060	46.64%
	IGM-20	0.082	0.078	94.78%	0.008	0.004	44.81%
	IGM-21	0.087	0.077	88.76%	0.015	0.005	33.94%
	IGM-14	0.091	0.084	92.45%	0.019	0.002	11.11%
19/10/2022	IGM-22	0.063	0.051	80.01%	0.037	0.036	97.23%
	IGM-23	0.083	0.003	3.38%	0.121	0.084	69.14%
	IGM-24	0.116	0.035	30.70%	0.094	0.019	20.52%
	IGM-25	0.070	0.062	89.71%	0.021	0.020	96.50%
	IGM-26	0.149	0.054	36.49%	0.150	0.027	18.13%
	IGM-27	0.074	0.043	57.89%	0.051	0.041	80.83%
	IGM-28	0.113	0.095	83.88%	0.055	0.034	62.48%
	IGM-29	1.772	0.302	17.04%	2.741	0.545	19.90%
	IGM-30	0.078	0.049	63.79%	0.058	0.036	62.42%
13/11/2023	IGM-32	0.101	0.090	88.35%	0.023	0.018	80.45%
	IGM-34	0.076	0.069	90.44%	0.008	0.003	29.42%
	IGM-35	0.071	0.067	95.31%	0.014	0.004	30.03%
15/11/2023	IGM-01	0.060	0.042	70.10%	0.060	0.030	50.81%
	IGM-02	0.148	0.047	31.69%	0.102	0.041	40.30%
	IGM-03	0.132	0.028	21.63%	0.095	0.036	37.56%
	IGM-04	0.044	0.014	31.81%	0.047	0.035	74.13%
	IGM-05	0.030	0.012	38.71%	0.040	0.037	90.47%
	IGM-06	0.100	0.062	61.35%	0.108	0.045	41.63%
	IGM-07	0.043	0.023	54.87%	0.048	0.024	49.73%
	IGM-08	0.047	0.009	18.75%	0.048	0.024	50.15%
	IGM-09	0.059	0.041	69.77%	0.025	0.019	76.61%
	IGM-10	0.047	0.031	66.06%	0.054	0.029	54.10%
	IGM-15	0.053	0.050	95.01%	0.058	0.045	77.57%
	IGM-16	0.040	0.018	44.44%	0.069	0.039	57.12%
	IGM-17	0.066	0.033	49.94%	0.036	0.030	84.14%
	IGM-18	0.133	0.126	94.23%	0.077	0.034	44.36%
IGM-19	0.041	0.030	72.15%	0.039	0.024	60.14%	

17/11/2023	IGM-31	0.030	0.027	92.05%	0.024	0.017	71.56%
	IGM-33	0.036	0.033	91.26%	0.023	0.020	85.22%

Anexo II: Monografía del vértice

COORDENADAS			
SISTEMA DE REFERENCIA		SIRGAS ROU 98	
X	2915007.684 m	ϕ	$-34^{\circ} 55' 08.7949''$
Y	-4349047.697 m	λ	$-56^{\circ} 10' 02.9941''$
Z	-3630532.519 m	h	35.404 m
SISTEMA DE REFERENCIA		IGS-20	
X	2915007.719 m	ϕ	$-34^{\circ} 55' 08.7835''$
Y	-4349047.905 m	λ	$-56^{\circ} 10' 02.9975''$
Z	-3630532.212 m	h	35.391 m
DETERMINACIÓN		GNSS	
FECHA DE CONSTRUCCIÓN		AGOSTO, 2022	
FECHA DE MEDICIÓN		4 DE JULIO DEL 2024	
UBICACIÓN			
MUNICIPIO	B		
BARRIO	PARQUE RODÓ		
Ubicado en la plazuela Raúl Rodríguez Barrios, al sur oeste de la Facultad de Ingeniería (UdelaR)			
SEÑALIZACIÓN			
MOJÓN DE HORMIGÓN			
REFERENCIA GRÁFICA			
			

ALTITUD		
CERO OFICIAL	20.710	m
DETERMINACIÓN	AJUSTE DE RED DE NIVELACIÓN	
FOTOGRAFÍA		
		

FACULTAD DE INGENIERÍA (UDELAR)
PROYECTO DE GRADO 2025
ERNESTO DOS SANTOS – PAULA MICHELENA