Universidad de la República

Facultad de Ciencias

Teoría de juegos en biología. Modelado mediante redes neurales

Trabajo de final de carrera

Ernesto Acuña

Orientador:
Dr. Andrés Pomi

Diciembre 2024

Índice general

1. Teoría de juegos 4
   1.1. Definición 4
   1.2. La batalla del mar de Bismarck 4
      1.2.1. La batalla del mar de Bismarck 4
      1.2.2. Comentarios 6
      1.2.3. El concepto de jugador 8
   1.3. Conceptos de Equilibrio 8
   1.4. Breve Historia de la Teoría de Juegos 10

2. Teoría de juegos en biología 12
   2.1. El problema de las proporciones entre los sexos 12
      2.1.1. Düsing 13
      2.1.2. Fisher 15
      2.1.3. Hamilton 15
   2.2. Otros antecedentes 18
      2.2.1. Fisher 18
      2.2.2. Lewontin 19
   2.3. John Maynard Smith y las estrategias evolutivamente estables 21
      2.3.1. Conflicto interespecífico 22
      2.3.2. Halcones y palomas 23
   2.4. Temas generales de la teoría de juegos en biología 27
      2.4.1. El gambito fenotípico 27
      2.4.2. El concepto de fitness 28

3. El problema de la cooperación y el dilema del prisionero 31
   3.1. El problema de la cooperación 31
   3.2. Un modelo de cooperación: el dilema del prisionero 32
      3.2.1. El juego 32
      3.2.2. El dilema del prisionero y la biología 32
      3.2.3. Escapar del dilema: el dilema del prisionero iterado 33
      3.2.4. Los torneos de Axelrod 34
      3.2.5. El artículo de Axelrod y Hamilton 36
      3.2.6. Críticas al torneo de Axelrod y al DPI como modelo de cooperación . . 38

4. Memorias asociativas 41
   4.1. Modelos de Neuronas 41
   4.2. Memorias Asociativas 42
   4.3. Memorias Asociativas Dependientes de Contexto 44

5. Un modelo del DPI con estrategias basadas en funciones booleanas 46
5.1. Relevancia de las funciones booleanas como estrategias para jugar la DPI . 47
5.2. Implementación de las estrategias mediante memorias dependientes de contexto 49
5.3. Enfrentamientos expresados como grafos 50
5.4. Relación entre la matriz de adyacencia y las matrices de asociación 53
5.5. Simetrías en los enfrentamientos 54
5.6. Análisis combinatorio de los enfrentamientos 56
5.7. Reproducción 58

6. Resultados 60
6.1. Poblaciones estables y los valores de los enfrentamientos 60
6.2. Simulaciones 64
6.2.1. Suma de los valores de los enfrentamientos 64
6.2.2. Cambios en las frecuencias de las estrategias en una población constante 69
6.2.3. Capacidad de invasión 78
6.2.4. Variaciones de r y su relación con la cooperación 82
6.2.5. Migración como compensación de la caída de r 84

7. Conclusiones y perspectivas 88

A. Glosario de algunos conceptos de Teoría de Juegos 91

B. Matrices de asociación para cada estrategia 93
B.1. Grafos y matrices de adyacencia de los enfrentamientos 96
B.1.1. E_1 96
B.1.2. E_2 100
B.1.3. E_3 104
B.1.4. E_4 108
B.1.5. E_5 112
B.1.6. E_6 116
B.1.7. E_7 120
B.1.8. E_8 124
B.1.9. E_9 128
B.1.10 E_{10} 132
B.1.11 E_{11} 136
B.1.12 E_{12} 140
B.1.13 E_{13} 144
B.1.14 E_{14} 148
B.1.15 E_{15} 152
B.1.16 E_{16} 156

C. Tabla de enfrentamientos 160

D. Construcción de la superficie de estrategias vecinas 163

E. Scripts 165
E.1. Script para el cálculo de las matrices con los valores de los enfrentamientos 165
E.2. Script para el cálculo de la suma los valores de los enfrentamientos . . . 171
E.3. Script para la evolución de las poblaciones y los valores de r y el índice de cooperación 179

Resumen

En este documento presento los resultados del trabajo que realicé como finalización de la licenciatura en ciencias biológicas. El marco es la teoría de juegos, en particular su aplicación a problemas de biología teórica. A partir de los años 70 del siglo XX esta teoría se estableció como una herramienta de modelado matemático que era capaz de dar respuestas, o de abrir caminos que prometían encontrarlas, a aparentes paradojas que surgían cuando se consideraba ciertos comportamientos animales en la perspectiva de una teoría evolutiva cuya unidad de selección era el individuo.

Uno de estos comportamientos paradójicos era la cooperación. Este fenómeno ampliamente extendido en el mundo biológico parece contradecir los principios de la selección natural si consideramos que esta actúa principalmente a nivel individual. ¿Por qué cooperar si nuestros esfuerzos pueden ser explotados por otros? ¿Cómo organismos con tendencia a cooperar podrían sobrevivir en un mundo egoísta? Este problema es modelado elegantemente por el dilema del prisionero. Y, por lo tanto, este a sido estudiado extensivamente intentando determinar qué condiciones pueden favorecer el surgimiento y mantenimiento de la cooperación.

En este trabajo realizo una breve introducción a la teoría de juegos, su historia y sus primeras aplicaciones en biología. Posteriormente me centro en el problema de la cooperación y en el dilema del prisionero como modelo de este problema. El dilema del prisionero es un juego y su estudio consiste en comparar la efectividad de diversas estrategias para jugarlo. Ya que las estrategias deben ser ejecutadas por jugadores, los jugadores deben ser capaces de ejecutar estas estrategias, por lo tanto, para finalizar la primera parte, presento un modelo neural, biológicamente plausible, como soporte computacional de las estrategias.

La segunda parte contiene una descripción del modelo y las estrategias que voy a utilizar, un breve análisis general de sus características y finalmente, simulaciones computacionales de la interacción de organismos jugando al dilema del prisionero y el devenir de varias poblaciones en diferentes contextos evolutivos. El trabajo finaliza con reflexiones sobre los resultados obtenidos y sugerencias para profundizar en el tema.

Capítulo 1

Teoría de juegos

1.1. Definición

La teoría de juegos es una herramienta matemática para modelar interacciones entre agentes estratégicos. Estas interacciones pueden ser conflictos, es decir, cuando el interés de los agentes es total o parcialmente contrapuesto o pueden ser situaciones en las que, si bien los intereses de los agentes no son contrapuestos, la falta de información, confianza u otra característica impide la acción coordinada.

Los agentes estratégicos, o *jugadores*, tienen la capacidad de prever las acciones de los demás, en el sentido de que pueden ponerse en la piel de sus rivales, sopesar la información que ellos poseen e inferir el curso de sus acciones asumiendo que son racionales y que buscan obtener el máximo beneficio de la situación. Saben, además, que se enfrentan a otros jugadores que tienen estas mismas capacidades.

Los jugadores eligen un curso de acción y en base a esas elecciones su interacción, o *juego*, tiene un resultado, es decir, cuanto ganaron o perdieron. La teoría de juegos permite deducir el curso de acción de los jugadores, esto es, predecir su comportamiento dada una estructura de incentivos y competidores.

Buscaré ahora que esta definición abstracta cobre sentido con un ejemplo concreto. La teoría de juegos ha acumulado un gran conjunto de juegos clásicos que suelen ser utilizados para introducir la teoría a los que se acercan por primera vez a ella, uno de los más sencillos es La batalla del mar de Bismarck.

1.2. La batalla del mar de Bismarck

1.2.1. La batalla del mar de Bismarck

En Febrero de 1943 la lucha por Nueva Guinea había llegado a un punto crítico. El general Kenney, comandante de las Fuerzas Aéreas Aliadas en el Pacífico sur-occidental, tenía información de que Japón estaba agrupando tropas y suministros en Rabaul, en la isla de Nueva Bretaña, para abastecer sus tropas en Nueva Guinea. El punto de desembarco sería Lae. Las órdenes de Kenney eran interceptar y destruir el convoy.

El comandante Japonés, general Imamura, tenía dos rutas para enviar el convoy de Rabaul a Lae, por el norte de la isla de Nueva Bretaña, a través del mar de Bismarck, o por el sur.

Un ataque al convoy era predecible, por lo tanto la velocidad y el sigilo eran cruciales. Por cualquiera de las dos rutas el convoy tardaría tres días en llegar a destino. La ruta elegida debía ser entonces aquella que Kenney menos esperara.

Sobre el mar de Bismarck el reporte meteorológico preveía un cielo gris y lluvia. En cambio, al sur de la isla se esperaba tiempo despejado. La búsqueda del convoy dependía crucialmente de la visibilidad, cuanto antes se descubriera el convoy más tiempo tendrían para bombardearlo. Kenney debía decidir como dividir sus aviones de reconocimiento para que el tiempo de búsqueda fuera el mínimo posible.

Una de las opciones sería enviar la mayor parte de los aviones al norte, dejando unos pocos para patrullar el sur. De esta manera, si Imamura tomaba la ruta norte, la baja visibilidad sería contrarrestada por la cantidad de aviones, el convoy podría ser descubierto en un día. Esto otorgaría dos días para bombardearlo. Por otro lado, debido a la buena visibilidad esperada en la ruta sur, unos pocos aviones bastarían para descubrir el convoy también en un día. Por lo tanto, la estrategia de patrullar con más aviones el norte que el sur daría dos días de bombardeo esperado, más allá de la ruta elegida por Imamura.

En cambio, Kenney esperaba que un patrullaje más intenso de la ruta sur diera como resultado tres días de bombardeo, ya que la buena visibilidad permitiría encontrar el convoy prácticamente en cuanto zarpara. Pero, si Imamura decidiera tomar la ruta norte, el tiempo esperado para descubrir el convoy sería de dos días, dejando solo uno para bombardearlo.

Kenney e Imamura son los jugadores y están enfrentados en una situación susceptible de ser modelizada mediante teoría de juegos[1] [25].

Tabla 1.1: Matriz de pago de la Batalla del Mar de Bismarck

		Imamura	
		Norte	Sur
Kenney	Norte	2	2
	Sur	1	3

Cada jugador debe elegir una ruta, norte o sur. Imamura debe elegir la ruta de su Convoy, Kenney qué ruta vigila más intensamente. El resultado de cada combinación posible de sus estrategias está indicado en la Tabla 1.1 como cantidad de días esperados de bombardeo.

Kenney desea que el resultado de su elección lleve a la mayor cantidad posible de días de bombardeo, Imamura desea lo contrario. Ambos disponen de la misma información, el reporte

[1] El nombre del general Hitoshi Imamura no aparece en el articulo original del Haywood [25], se lo menciona en otras presentaciones del juego, por ejemplo [36] y [37]. Efectivamente, Imamura fue un general Japonés comandante del decimoctavo ejercito en la campaña de Nueva Guinea, no puedo afirmar como verdad histórica que él fuera responsable de la elección de la estrategia Japonesa. Por otro lado, en la presentación usual del juego, por ejemplo [36] [37], se cambia la condición de baja visibilidad en la ruta norte por una reducción a 2 días en el tiempo que se demora en recorrerla. El cambio solo sirve para hacer más clara la anécdota, el juego es exactamente el mismo. Vaya como ejemplo de situaciones diferentes capaces de ser modeladas por el mismo juego.

meteorológico y los objetivos estratégicos de su rival. ¿Se puede determinar la elección de los jugadores a partir del análisis de la Tabla 1.1?

Observemos que la cantidad mínima de días esperados de bombardeo en la ruta sur son los días máximos esperados para la ruta norte. Es decir, para Imamura elegir la ruta sur es asegurarse dos días de bombardeo, con la posibilidad de que sean tres. Así planteado la solución parece obvia, Imamura elegirá la ruta norte.

En base a esta análisis y a la doctrina de decisión de los Estados Unidos, que establece que un comandante debe basar su acción en lo que estima que su enemigo puede hacer para oponerse a él, Kenney eligió enviar más aviones a patrullar la ruta norte. Con esta decisión, más allá de la elección de Imamura, era esperable obtener dos días de bombardeos. Elegir la ruta sur implicaba dejar en manos de su enemigo la posibilidad de reducir los días de bombardeo a uno. Efectivamente, ambos eligieron la ruta norte y el convoy fue destruido tras dos días de bombardeo [25].

Detengámonos un momento en la fatalidad de este desenlace. En la definición dije que se asume que los jugadores son racionales y que buscan maximizar su utilidad. En este juego la utilidad para Kenney son los días esperados de bombardeo, para Imamura es el tiempo que su convoy pasa desapercibido. Como ambos saben que su rival posee su misma información, que es racional y que pretende maximizar su utilidad, sus elecciones están restringidas. Imamura no puede elegir la ruta sur ya que es estratégicamente inferior a la ruta norte y, por lo tanto, Kenney debe elegir la ruta norte para maximizar los días esperados de bombardeo. La solución del juego está determinada por la relación de los números en la matriz de pagos 1.1. Como dijimos, la teoría predice el comportamiento de los jugadores.

1.2.2. Comentarios

Este es un juego clásico de la teoría de juegos. Encarna de manera efectiva las abstracciones con las que definí la teoría al principio en busca de ser abarcativo. Pero, al tiempo que es un buen ejemplo inicial, es también un juego muy sencillo. La variedad y posibilidades de la teoría es mucho más amplia de lo que deja entrever. En lo que sigue intentaré dar una idea de esta diversidad señalando algunas de las dimensiones en las que los juegos pueden diferir.

En primer lugar, el juego presentado es un ejemplo de juego de suma cero, es decir, lo que un jugador gana el otro lo pierde. Cuando son juegos de dos jugadores podemos expresar los pagos como una matriz y por esto también se los llama juegos matriciales. La interpretación convenida es que el jugador cuyas estrategias son las filas de la matriz, en este caso Kenney, gana el valor correspondiente a las estrategias elegidas. Mientras que el jugador cuyas estrategias son las columnas, en este caso Imamura, paga ese valor. La teoría de juegos abarca tanto juegos de suma cero como juegos de suma no-cero, es decir, juegos en los que la suma de los pagos para un conjunto de estrategias no es cero. Por ejemplo, el dilema del prisionero es un juego de dos personas de suma no-cero, uno de los jugadores puede obtener cinco años de cárcel y el otro puede quedar libre. En el caso de juegos de suma no-cero de dos personas se requieren dos matrices para resumir los pagos y por lo tanto también se los conoce como juegos bimatriciales.

En segundo lugar, este es un juego de dos jugadores, pero se pueden modelar juegos para

cualquier cantidad finita de jugadores. Vale hacer aquí una aclaración, por la definición que dí más arriba, parece que los jugadores tienen que ser personas, pero esto no tiene porqué ser así. Cuando veamos las aplicaciones de la teoría de juegos a la biología aclararé cómo podemos ***pretender*** que un animal es racional y que maximiza su utilidad, incluso sin un sistema nervioso. Por otro lado, un jugador podría ser una empresa o una asociación de individuos en tanto actúen de manera coordinada.

Esta aclaración da paso a otra distinción, los juegos pueden ser cooperativos o no-cooperativos. La batalla del mar de Bismarck es no-cooperativo, ya que los jugadores no pueden asociarse, realizar acuerdos o formar coaliciones. En los juegos cooperativos esto sí puede pasar y típicamente son de, al menos, tres jugadores. Como dije antes, si los individuos actúan de manera coordinada pueden ser considerados como un solo jugador, este es el camino que se ha tomado para subsumir la teoría de juegos cooperativa en la teoría no-cooperativa.

Por otro lado, en este caso los jugadores disponen de dos estrategias, pero esto no tiene porqué ser así. La cantidad de estrategias puede ser incluso infinita. Pensemos, por ejemplo, que la elección de la ruta norte y sur se establece como una probabilidad, las estrategias serían entonces jugar $Norte$ con una cierta probabilidad y Sur con su complemento, esto se conoce como estrategias mixtas[2]. O imaginemos que repetimos el mismo juego una cantidad indefinida de veces, debiendo establecer una estrategia que responda a cada situación a lo largo del desarrollo de las partidas.

En el ejemplo también se asumió que los jugadores actúan simultáneamente, es decir que no tienen información acerca de las acciones de su oponente antes de ver el resultado de las mismas [3]. Se pueden definir juegos en los que las acciones se van eligiendo alternativamente y los jugadores poseen entonces información acerca de lo que hace su oponente antes de tener que elegir una acción. A estos juegos se les llama juegos de forma extendida, en contraposición a la forma normal que vimos.

Por último, la información de la que disponen los jugadores podría ser distinta. En el ejemplo ambos disponían de la misma información sobre el tiempo, una diferencia en el pronóstico podría haber convertido este juego en no simétrico. Imamura esperando, por ejemplo, diferente cantidad de días de bombardeo que Keney para una ruta determinada. En este sentido es importante remarcar que el modelo en este caso debe establecer lo que los jugadores piensan que va a pasar, ya que sobre esa información es que tomarán sus decisiones.

Entonces, sin pretender ser exhaustivo[4], estas son las dimensiones en las que un juego puede variar: suma cero o no, cantidad de jugadores, cooperativo o no, cantidad de estrategias, acción simultanea o secuencial, información.

[2]Si consideramos las estrategias mixtas el juego que presenté tiene otra solución en la que Kenney e Imamura juegan sus estrategias con probabilidad 0,5.

[3]Estrictamente, una acción es una de las opciones que el jugador puede elegir, una estrategia es una regla que asigna una acción a cada momento del juego. En un juego como el que presentamos, donde solo hay una acción disponible, estrategia y acción son intercambiables, pero si el juego fuera jugar la batalla del mar de Bismark varias veces una estrategia sería el conjunto de acciones a tomar en cada una de las iteraciones.

[4]De hecho no dije nada sobre juegos estocásticos o juegos contra la naturaleza, por ejemplo.

1.2.3. El concepto de jugador

Para terminar esta sección le dedicaré espacio a refinar lo que entendemos por jugador.

Como ya mencioné, los jugadores tienen tres características: buscan obtener el mayor provecho para si mismos, es decir que buscan que el pago al final del juego sea el mayor posible, son racionales, es decir que las acciones que toman estarán en concordancia con el objetivo de obtener el mayor pago posible y, tercero, asumirán que su rival o rivales también son agentes estratégicos, es decir que tienen las mismas características que ellos y ese conocimiento lo utilizan en su proceso de decisión.

Los jugadores se definen como racionales ya que la teoría de juegos nació como una teoría matemática para auxiliar a las ciencias económicas [49]. Gran parte de sus aplicaciones han sido en economía, sociología o psicología, por lo que, cuando se presenta de manera general, se asume que los jugadores son humanos. Sin embargo, puede ser aplicada a la biología tomando como jugadores a organismos sin necesidad de asumir que estos *individualmente* son racionales o buscan el máximo beneficio. Es la selección natural la que permite *suponer* que los organismos ‘‘eligen’’ sus estrategias de manera racional, su objetivo no es maximizar su beneficio, sino que aquellos que no obtengan el mayor éxito reproductivo eventualmente desaparecerán. Las estrategias irracionales llevarán a un peor desempeño reproductivo, los organismos que las implementen tenderán a disminuir su frecuencia en la población.

Cuando modelamos a los jugadores como seres humanos el pago de los juegos puede referirse a diversas cosas. En el caso de la batalla del mar de Bismarck dos generales se enfrentaban intentando maximizar o minimizar el tiempo de bombardeo sobre un convoy. En otros casos puede referirse a dinero, años de cárcel, confort, disfrute, etc. Cuando pensemos en organismos el pago se referirá únicamente a *fitness*, una medida de su éxito reproductivo. Veremos a los organismos como ‘‘maquinas de supervivencia’’ [14] programadas por sus genes, si no buscan obtener el mayor pago en fitness jugando contra otras maquinas de supervivencia entonces los genes que las programaron eventualmente desaparecerán.

1.3. Conceptos de Equilibrio

En el ejemplo, la solución del juego es que ambos jugadores eligen la ruta norte. El razonamiento se basó en las características de los jugadores como los definí previamente, es decir que elegirán racionalmente la estrategia que les permita maximizar su utilidad teniendo en cuenta que el rival hará lo mismo. Intuitivamente esto tiene sentido, pero ¿cómo se puede formalizar este razonamiento?[5]

En teoría de juegos se define *equilibrio* como el conjunto que contiene las mejores estrategias para cada jugador, siendo la mejor estrategia aquella que permite obtener el máximo beneficio. Ahora bien ¿cómo se determina cuál es la mejor estrategia? En el ejemplo mostré que el resultado del juego es $\{Norte, Norte\}$, es decir ambos jugadores eligen la ruta norte. Es esperable que este sea un equilibrio, pero ¿son estas estrategias las mejores? Sabemos que Kenney hubiera preferido tener tres días de bombardeos e Imamura solo

[5]En esta sección presento conceptos que tienen una definición matemática precisa, sin embargo decidí relegar la mayoría de estas definiciones a un anexo y presentar aquí de manera rigurosa solo los más importantes.

uno, pero, obviamente, no existe un conjunto de estrategias que les permita obtener ese resultado. Los tres días de bombardeo se alcanzan con el conjunto $\{Sur, Sur\}$, pero para Imamura la estrategia Sur no es la mejor posible si Kenney elige también Sur, por lo tanto esto no es un equilibrio. Un día de bombardeo se alcanza con la estrategia $\{Sur, Norte\}$, pero este conjunto tampoco es un equilibrio, ya que para Kenney la estrategia Sur no es la mejor posible frente a la estrategia $Norte$ de Imamura. $\{Norte, Norte\}$ sí es un equilibrio, ya que si Imamura elige $Norte$, la mejor estrategia para Kenney es $Norte$. Frente a la estrategia $Norte$ de Kenney, Imamura puede elegir cualquier ruta, pero si elige Sur, a Kenney le convendría elegir también Sur. Por lo tanto, de las cuatro posibles combinaciones de estrategias la única que constituye un equilibrio es $\{Norte, Norte\}$. La mejor estrategia de un jugador se define entonces en relación a las estrategias de sus rivales.

Ahora, la decisión de qué significa la mejor estrategia aún debe ser tomada y es una responsabilidad que le corresponde al modelador. Esto implica elegir un ***concepto de solución***, es decir una regla que define un equilibrio en base a las estrategias que pueden utilizar los jugadores y los pagos asociados. Por ejemplo, la estrategia $Norte$ de Imamura es mejor o igual a la estrategia Sur, más allá de lo que elija Kenney. Se dice entonces, que la estrategia $Norte$ de Imamura es ***dominante***[6]. Si elegimos como concepto de equilibrio el de estrategia dominante, entonces las estrategias que constituyen el equilibrio deben ser la estrategias dominantes de cada jugador. El problema de este concepto de solución se hace evidente en cuánto tratamos de aplicarlo a nuestro ejemplo: Kenney no tiene estrategia dominante. Por lo tanto, desde este concepto de equilibrio el juego no tiene solución.

La solución de este juego puede entenderse como un equilibrio de estrategia ***iteradamente*** dominante. Este concepto implica eliminar las estrategias dominadas, en el ejemplo la estrategia Sur de Imamura, hasta que todos los jugadores queden con una estrategia. Una vez que eliminamos la estrategia Sur de Imamura, $Norte$ se vuelve una estrategia dominante para Kenney. Este concepto de solución es más amplio que el de estrategia dominante, pero tampoco puede aplicarse en todos los casos.

El concepto de solución más usado en teoría de juegos es el ***equilibrio de Nash***. Este se define como un conjunto de estrategias que, una vez adoptado, ningún jugador tiene incentivos para cambiar su estrategia. Estrictamente:

$$\forall\ i \quad W(s*_i, s*_{-i}) \geq W(s'_i, s*_{-i}) \quad \forall\ s'_i$$

Siendo i un jugador, $s*_i$ la estrategia de equilibrio del jugador i, $W(x, y)$ el pago que se obtiene jugando la estrategia x contra la estrategia y, $s*_{-i}$ todas las estrategias de equilibrio de los rivales y s' las estrategias diferentes a la de equilibrio.

En el equilibrio, el pago que obtienen todos los jugadores es igual o mayor que el que obtendrían cambiando de estrategia. Esto es lo que quiere decir que no tienen incentivos para cambiar su estrategia. En el ejemplo, $\{Norte, Norte\}$ es claramente un equilibrio de Nash, si Keney cambiara de estrategia perdería un día de bombardeo, mientras que para Imamura cambiar de estrategia lo deja exactamente igual.

[6]Estrictamente es débilmente dominante. Ver el anexo para las definiciones precisas de estos términos

Todos los juegos que se pueden plantear de manera matricial tienen al menos un equilibrio de Nash. En general, el problema con este concepto de equilibrio es que puede existir más de uno[7] y que muchas veces no son fáciles de encontrar. Volveré a hablar del equilibrio de Nash como preludio a la introducción del concepto de solución que será más importante para este trabajo: la *Estrategia Evolutivamente Estable* (EEE). Ahora terminaré el capítulo con un breve repaso histórico.

1.4. Breve Historia de la Teoría de Juegos

El nacimiento de la Teoría de Juegos es usualmente fechado con la publicación del libro *The Theory of Games and Economic Behavior* en 1944 de John Von Neumann y Oskar Morgenstern. Pero debido a que las situaciones que permite modelar son tan comunes a la experiencia humana y que los matemáticos se han ocupado del análisis de juegos de mesa, cartas y azar extensivamente, sería raro no encontrar trabajos que anticiparan aspectos de la teoría, de hecho se han señalado antecedentes tan antiguos para la Teoría de Juegos como el Talmud de Babilonia [3]. De cualquier manera, la Teoría de Juegos como teoría matemática nace en la primera mitad del siglo XX.

En 1928 Von Neumann publica la primera prueba del teorema *minimax*, base del libro de 1944 que publicaría junto a Morgenstern. Este teorema dice que para juegos de dos personas de suma cero con estrategias puras finitas (como el que presenté en la sección anterior), hay un valor V, que se llama valor del juego, que representa la cantidad promedio que espera ganar el jugador 1 del jugador 2. El jugador 1 puede esperar ganar al menos V, mientras que el jugador 2 puede esperar tener que pagar V como máximo. El minimax es un criterio de equilibrio, si un jugador gana menos que V o debe pagar más que V, hubiera obtenido un mejor resultado con otra estrategia, es decir que *minimiza* la pérdida *máxima*[8].

El trabajo de Von Neumann y Morgenstern estableció las bases de la Teoría de Juegos: las formas normales y extendidas, el concepto de estrategia, técnicas para probar la existencia de soluciones a los juegos y el concepto de utilidad esperada como criterio de decisión [33].

Como ya vimos, la forma normal de un juego es la que presentamos con la matriz de pagos de la batalla del Mar de Bismarck. La forma extendida implica que los jugadores actúan secuencialmente y, por lo tanto, tienen algún conocimiento de las jugadas de su rival. Se analizan a partir de un diagrama de árbol con todas los posibles cursos de acción de los que disponen los jugadores. Para el ejemplo que mostré la forma extendida no aplica en principio [9], pero en muchas situaciones de interés económico o social puede ser una aproximación más precisa.

---

[7] Notemos de paso que los equilibrios de estrategia dominante e iteradamente dominante son también equilibrios de Nash, pero lo contrario no siempre es cierto.

[8] El criterio minimax es el utilizado en el análisis de la situación original que dio lugar al juego La batalla del Mar de Bismarck[25], ya que coincide con la doctrina de decisión del ejercito de los Estados Unidos, asumir que el enemigo va a descubrir su estrategia y que en represalia utilizará la estrategia más eficaz. Recordemos que la cantidad *mínima* de días de bombardeo de la estrategia Sur de Imamura es la *máxima* cantidad de días de las estrategia $Norte$.

[9] Aunque sí aparece un nuevo equilibrio $\{Norte, Sur\}$ en caso de que la primera acción la tome Kenney.

En 1950 dos empleados de la fundación RAND Melvin Dresher y Merril Flood crearon la matriz del famoso juego el *dilema del prisionero*. Poco después Albert Tucker, para presentar la teoría a un auditorio no especializado, inventaría la historia con la que generalmente se lo presenta y que le da nombre [48]. Este juego será de particular importancia para el presente trabajo, por lo que más adelante le dedicaré un capítulo.

Más allá de la importancia del trabajo de Von Neumann y Morgenstern, la aplicación general de su programa a la economía era difícil, el esfuerzo de formalización que realizaron implicó asumir restricciones importantes en sus supuestos, resultando en una teoría poco flexible para modelizar situaciones económicas complejas [33]. A principios de 1950 John Nash revoluciona el campo proponiendo un nuevo criterio de equilibrio (equilibrio de Nash) y probando su existencia para juegos de n-personas, este criterio, en el caso especial de juegos de dos personas de suma cero es equivalente al criterio minimax [34]. Este y otros resultados le permitió plantear un programa para subsumir la teoría de juegos cooperativos (en los que se pueden formar coaliciones y que habían desarrollado también Von Neumann y Morgenstern) en el estudio de equilibrios no-cooperativos [33]. Además permitió incluir en los modelos la información que los jugadores poseen [33].

Tomando el programa de Nash, desarrollos posteriores refinaron el concepto de equilibrio. El equilibrio de Nash en muchos juegos no es único, en casos puede haber muchos equilibrios de Nash en la forma normal del juego que analizados en la forma extendida se muestren como ‘‘irracionales’’ [33]. Fue necesario abandonar la idea de que todos los juegos pueden analizarse como formas normales, reformular la forma extensiva y desarrollar nuevos conceptos de equilibrio (equilibrio perfecto y equilibrio secuencial)[33]. También se desarrollaron juegos bayesianos, en los que los jugadores no tienen información completa acerca de las preferencias de otros jugadores.

De 1980 en adelante la Teoría de Juegos estaba lo suficientemente desarrollada como para que grandes partes de la teoría económica fueran reescritas y desarrolladas usando ideas, conceptos y el lenguaje formal de la Teoría de Juegos [36].

Este apretado resumen se complementará en el capitulo siguiente con la historia paralela del desarrollo de la teoría de juegos en biología. Doy entonces por concluida nuestra introducción general y paso a centrarme en el tema de este trabajo.

Capítulo 2

Teoría de juegos en biología

Después de una primera aproximación a la teoría de juegos clásica, en este capítulo comienzo un recorrido por las diversas formas en las que la teoría de juegos ha hecho su aparición en la investigación biológica.

2.1. El problema de las proporciones entre los sexos

Frecuentemente se encuentran en la naturaleza poblaciones de organismos con una cantidad aproximadamente igual de machos y de hembras. ¿Por qué es mayoritaria la proporción 1:1 entre los sexos? ¿Puede explicarse esta paridad por selección a nivel individual?

Los intentos de responder a estas preguntas comienzan en uno de los primeros ejemplos de un argumento matemático en biología y finalizan en uno de los campos más exitosos de la biología evolutiva: la teoría de *sex allocation* [50]. En el camino descubrieron la utilidad que la teoría de juegos puede tener para el pensamiento evolutivo[15][16].

Todo empieza con Darwin. En la primera edición de *El Origen del Hombre* en 1871 argumenta que efectivamente la selección natural podría equilibrar las proporciones de los sexos:

> Tomemos por caso una especie que, por las causas desconocidas recién aludidas, produjera un exceso de un sexo, digamos de machos, estos serían superfluos o inútiles, o casi inútiles. ¿Podrían los sexos ser igualados a través de la selección natural? Podemos estar seguros, siendo todos los caracteres variables, que ciertas parejas producirían menos exceso de machos sobre hembras que otras parejas. Estas, suponiendo que el número de hijos permanece constante, producirían necesariamente más cantidad de hembras y por lo tanto serían más productivas. Por la doctrina de las probabilidades un mayor número de descendientes de las parejas más productivas sobrevivirían; y estos heredarían la tendencia a procrear menos machos y más hembras. Por lo tanto, una tendencia hacia un equilibrio de los sexos sería la consecuencia[13].

El argumento asume dos de las tres condiciones para que pueda actuar la selección natural, en las poblaciones existe variedad en cuanto a las proporciones de machos y hembras que producen las parejas y esta característica es heredable. Es sobre la tercera condición que gira el argumento, ¿es la producción del sexo minoritario en la población ventajosa para el individuo? El argumento de Darwin dice que sí: la supervivencia diferencial se da ya que las parejas que tiendan a desplazar la proporción de machos y hembras en sus

descendientes lejos de la proporción presente en la población serán más productivas. Esta mayor productividad se alcanza ya que en una población con exceso de machos, muchos de ellos no serán capaces de aparearse, por lo tanto, en esas condiciones, un macho tendrá menos probabilidad de dejar descendientes que una hembra. Es decir, su valor reproductivo será menor.

Por otra parte, en una población con exceso de hembras, o bien cada macho tiene acceso a una hembra (si asumimos monogamia) y entonces hay una cierta cantidad de hembras que no logran aparearse, o bien los machos se aparean con todas las hembras (asumiendo poligamia), por lo que cada macho tiene más de un apareamiento en promedio, lo que finalmente los hace más valiosos desde el punto de vista reproductivo.

Este argumento verbal parece convincente. Asumiendo que existe variabilidad heredable, en una población con exceso de uno de los sexos, los organismos en cuya descendencia este sexo esté subrepresentado tendrán mayor éxito reproductivo. Por lo tanto, con el tiempo este exceso disminuirá. A medida que la proporción sexual de la población se acerca a 1:1 el valor reproductivo entre machos y hembras se iguala, por lo que las ventajas de tener determinadas proporciones de machos y hembras en la descendencia disminuyen.

Es curioso que Darwin eliminara esta cita de la segunda edición del libro, argumentando que el problema era muy intrincado y que era mejor dejarlo para las futuras generaciones [15]. Se ha argumentado que Darwin estaba asumiendo monogamia y esto implicaba que la igualdad de los sexos dependía de maximizar el número de parejas, lo que parece un argumento de selección de grupo [19]. Como vimos, el argumento de Darwin funciona tanto si asumimos monogamia como poligamia. Pero, más allá de especulaciones acerca de las razones de Darwin, los argumentos verbales se prestan a confusiones y pueden ocultar aspectos que un modelo matemático, incluso sencillo, es capaz de develar.

La relevancia de este tema para el presente trabajo es que muestra como ya en los comienzos del pensamiento evolutivo se encontraron situaciones en las que la selección era *dependiente de frecuencia*. Esto quiere decir que el fenotipo que maximiza el éxito reproductivo de un organismo depende de las frecuencias de diferentes fenotipos en la población. En la terminología de la teoría de juegos podríamos decir que la estrategia que obtiene el mayor pago, depende de las estrategias a las que se enfrenta y las diferentes frecuencias de estas en la población.

2.1.1. Düsing

El tratamiento de Düsing del problema bien puede haber sido uno de los primeros argumentos matemáticos en biología evolutiva [16]. Düsing comienza notando que si tomamos a los machos de una población estos tendrán en conjunto tantos hijos como las hembras[1]. Ahora, en una población con x número de hembras y nx número de machos, si la población produce en conjunto z cantidad de hijos, entonces cada hembra tendrá en promedio z/x hijos, mientras que los machos tendrán z/nx. Entonces, si hay más machos que hembras ($n > 1$) las hembras serán más productivas que los machos, mientras que en una población con más hembras que machos ($n < 1$) los machos serán más productivos.

[1] Por supuesto, esto es válido para especies diploides.

Tomemos dos hembras de esta población, la primera produce A cantidad de machos y a cantidad de hembras, la segunda a cantidad de machos y A cantidad de hembras. Si ahora calculamos la cantidad de nietos que tendrá cada una:

$$N_1 = A\left(\frac{z}{nx}\right) + a\left(\frac{z}{x}\right)$$

$$N_2 = a\left(\frac{z}{nx}\right) + A\left(\frac{z}{x}\right)$$

Si $A = ba$, entonces:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{1+bn}{b+n}$$

Vemos que cuando $n = 1$ no importa el valor de b ambas hembras serán igual de productivas. Esto significa que en una población con una proporción entre los sexos de 1:1, no hay ventajas ni desventajas para individuos que produzcan proporciones diversas.

Análogamente vemos que cuando $b = 1$, ambas hembras producen igual cantidad de machos y hembras, no importa la proporción entre los sexos en la población, la productividad será la misma para las dos.

Para el caso $n > 1$, cuando hay más machos que hembras en la población, la segunda hembra tendrá ventaja sobre la primera mientras $b > 1$, es decir mientras produzca más hembras que machos.

Para el caso $n < 1$, cuando hay más hembras que machos en la población, la segunda tendrá ventaja sobre la primera mientras $b < 1$, es decir mientras produzca más machos que hembras.

Hay un detalle del argumento al que debemos prestar más atención. Düsing toma la cantidad de nietos que en promedio produce una hembra como medida del éxito reproductivo de esa hembra. ¿Por qué es necesario hacer esto?

Si tomamos el número de hijos como medida del éxito reproductivo estamos pasando por alto las probabilidades de que estos hijos tengan a su vez descendencia. Supongamos que en una especie los machos tienen menos probabilidad de llegar a la madurez sexual que las hembras. Esperaríamos entonces que la selección tienda a favorecer a los individuos que producen mayor proporción de hembras. Ahora, en una población en la cual las hembras sean mayoría, las probabilidades de cada una de aparearse son menores con respecto a las probabilidades de los machos.

Lo que no se toma en cuenta al pensar en los hijos como medida del éxito reproductivo es el carácter *dependiente de frecuencia* de la selección sobre el sexo. Que la selección de una característica sea dependiente de la frecuencia implica que el éxito reproductivo depende de la frecuencia relativa de los diversos fenotipos en la población. En el caso del sexo necesitamos observar el éxito reproductivo de los hijos en una población con diferentes

frecuencias de machos y hembras, por esto tomamos el promedio de los nietos como un *proxy* del *fitness*.

2.1.2. Fisher

Durante gran parte del siglo XX el aporte de Düsing se pasó por alto y se asumió como pionero de la teoría de la proporción entre los sexos a R. A. Fisher, debido a su tratamiento del tema en el libro *The Genetical Theory of Natural Selection*. El trabajo de Düsing era ampliamente conocido a principios del siglo XX, por lo que Fisher no sintió necesidad de citarlo [15], oscureciendo, supongo sin intención, su papel pionero. Si bien los argumentos son muy similares, Fisher introduce la inversión de los padres en sus crías como nueva variable, haciendo que su mención no sea baladí.

Fisher comienza notando, como Düsing, que el aporte del conjunto de machos y hembras a una generación cualquiera es igual, ya que cada sexo aporta la mitad de los genes para cada generación (caso diploide)[2]. La novedad es pensar en los recursos invertidos en cada sexo por sus progenitores. Si, por ejemplo, hay un sexo que implica menos recursos en su crianza, como cada sexo aporta lo mismo a la siguiente generación, el sexo más ‘‘barato’’ será el más abundante. Ya que producir ese sexo implica más representación en las siguientes generaciones por unidad de recursos invertida. Este razonamiento lleva a la relación conocida como proporción de Fisher [24]:

$$\frac{s_f}{s_m} = \frac{c_m}{c_f}$$

Donde s_f es la proporción de hembras en la población, s_m la de machos, c_f la cantidad de recursos invertidos en la producción de una hembra y c_m la cantidad de recursos invertidos en la producción de un macho. Así, cuanto más costoso un sexo menos frecuente será. Esta es una importante predicción del modelo que puede ser testeada siempre que se pueda medir los recursos invertidos en la crianza de cada sexo.

2.1.3. Hamilton

Es momento de hacer explicita una de las suposiciones fundamentales del argumento expuesto: los apareamientos son aleatorios, de manera que encontrar un macho o una hembra cualquiera es igualmente probable. ¿Qué sucede si esto no es así?

Hamilton estudió las implicancias de relajar la asunción de apareamientos aleatorios [22]. Este trabajo no solo inaugura la investigación moderna en la adjudicación de recursos entre los sexos (*sex allocation*), área en la que derivó la investigación de las proporciones entre los sexos (*sex ratio*), si no que también es uno de los primeros ejemplos de aplicación explicita de la teoría de juegos en biología [50].

En resumen, el argumento de Hamilton imagina una especie cuyas hembras depositan sus huevos en un huésped. Un organismo que nazca en ese huésped tiene sus posibilidades de apareamiento limitadas a los otros individuos que nacieron en ese huésped. Establece que

[2]Se puede demostrar que el argumento también es válido para especies haplo-diploides, ver [24]

el *fitness* de un individuo es proporcional al número de apareamientos de sus hijos sumado al número de apareamientos de sus hijas[3] [22].

Digamos que n es el número de hembras que logran depositar huevos en un determinado huésped. Una hembra tipo a, representa un número r de estas hembras y produce una proporción x_a de machos en su descendencia. Entonces posee un *fitness* W_a:

$$W_a = \sum_{i=1}^{n} F_r \frac{x_a}{X_r}(1 - X_r) + (1 - x_a)$$

Donde X_r es la proporción de machos en un conjunto de huéspedes, F_r es la distribución de probabilidad de las hembras tipo a en ese conjunto.

El primer término indica los apareamientos esperados de los machos descendientes de una hembra tipo a y el segundo termino es simplemente la proporción de hembras en su descendencia, ya que se asume que todas las hembras logran aparearse.

Ahora, el *fitness* promedio en la población es:

$$W = 2(1 - X)$$

Donde X es:

$$X = px_a + (1 - p)x$$

Siendo p la frecuencia del cromosoma Y y x la proporción de machos descendientes de las hembras que no son tipo a.

$(1 - X)$ representa entonces los cromosomas Y que se encuentran en las hembras de la población, es decir los futuros machos. El factor 2 toma en cuenta también a las futuras hembras.

Entonces, la diferencia entre el *fitness* de las hembra tipo a y el *fitness* de la población es:

$$E_a = W_a - W = \sum_{i=1}^{n} F_r \frac{x_a}{X_r}(1 - X_r) + (1 - x_a) - 2(1 - (px_a + (1 - p)x))$$

$$E_a = \sum_{i=1}^{n} F_r \frac{x_a}{X_r} + 2(1 - p)(x - x_a) - 1$$

[3]Es interesante notar que a continuación de esto Hamilton remarca que este esquema no puede dar una representación adecuada de los aspectos genéticos del sistema [22]. Esto adelanta un aspecto de la aplicación de la Teoría de Juegos en Biología, el llamado *gambito fenotípico*, sacrificar los detalles genéticos del sistema en aras de la claridad del modelo.

La forma explicita para X_r es:

$$X_r = \frac{rx_a + (n-r)x}{n}$$

Por lo tanto, si diferenciamos con respecto a x_a:

$$\frac{dE_a}{dx_a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_r(n-r)\frac{x_b}{X_r^2} - 2(1-p)$$

Cuando $x_a = x$:

$$\frac{dE_a}{dx_a} = \frac{1}{nx}\sum_{i=1}^{n} F_r(n-r) - 2(1-p)$$

Esto es igual a 0 cuando:

$$x = \frac{n - \sum_{i=1}^{n} F_r r}{n(1-p)}$$

Ahora, si asumimos que la colonización de los huéspedes es aleatoria (el tipo de hembra no influye en su capacidad de encontrar huésped), podemos asumir una distribución binomial para F_r y por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} F_r r = (n-1)p + 1$$

Finalmente:

$$x = \frac{(n-1)}{2n}$$

A esta proporción Hamilton le llama ‘‘imbatible’’ [22]. Utilizando lenguaje reminicente al de la teoría de juegos.

Repasemos rápidamente el argumento, establece que el *fitness* de un organismo es proporcional al los apareamientos exitosos de su progenie, esto es lo mismo que tener en cuenta el número de nietos, como hacía Düsing.

Después, establece un tipo de hembra a cuya progenie tiene una determinada fracción de machos, a diferencia de la fracción de machos que tienen las hembras ‘‘comunes’’.

Establece el *fitness* de las hembras tipo a y el de la población general, obteniendo una expresión para su diferencia (a la que llama ventaja selectiva [22]). Cuando la derivada

de esta ventaja selectiva con respecto a la proporción de machos en la progenie de las hembras tipo a se hace 0, estaríamos en un máximo o en un mínimo, es decir uno de los dos tipos de hembra tiene la mayor distancia posible en *fitness* con respecto a la otra.

Si ahora suponemos que la fracción de machos en la descendencia de las hembras tipo a es igual a la del resto de las hembras, podemos encontrar la proporción ‘‘imbatible’’.

Volviendo a la fracción encontrada, vemos que a medida que el número de hembras que depositan huevos por huésped aumenta, la proporción imbatible tiende a $1/2$.

En el otro extremo, cuando a lo sumo hay una hembra por huésped, la proporción se ve completamente inclinada hacia las hembras. El mejor resultado será tener los mínimos machos suficientes como para aparearse con todas las hembras[4].

Es importante resaltar el aspecto *dependiente de frecuencia* de la selección basada en las proporciones de los sexos. Es allí donde las herramientas conceptuales de la teoría de juegos son útiles para esclarecer las fuerzas implicadas en el establecimiento de las características de una población.

Después de repasar los comienzos rudimentarios de la teoría de juegos en biología debemos pasar a su nacimiento oficial.

2.2. Otros antecedentes

2.2.1. Fisher

Parece ser también R.A. Fisher el primero en utilizar explícitamente la teoría de juegos para el análisis de un problema biológico en 1958 [18]. Su argumento se sustenta en un análisis que él mismo había hecho del juego de cartas *Le Her* [17].

Este es un juego de dos personas, cada uno en un rol diferente: el que reparte, o jugador 1 y el que recibe, o jugador 2. Se utiliza una baraja francesa y el objetivo es obtener la carta más alta, siendo el as la más baja y el rey la más alta. El jugador 1 reparte una carta a cada uno, el jugador 2 (después de verla) la puede cambiar por la carta del jugador 1, excepto si este tiene un rey. Posteriormente el jugador 1 puede cambiar su carta por una del mazo, siempre cuando la carta elegida no sea un rey. Si las cartas tienen el mismo valor gana el jugador 1.

En el entendido de que, cuando la carta del jugador 2 es menor a 7 este la debe cambiar. Y, si ocurre esto, el jugador 1 debería cambiar la suya si es menor a 8. La pregunta que intenta responder Fisher es ¿Qué debería hacer el jugador 2 cuando la carta es un 7? ¿Y el jugador 1 cuándo la carta es un 8? [5]

[4] Por supuesto, cuando hay una sola hembra por huésped la fracción es estrictamente 0, esto se suele interpretar como que la cantidad de machos es la mínima necesaria[50]

[5] Notemos de pasada que la estrategia recién descripta para cada jugador se basa en un análisis de probabilidades y es la estrategia *racional* para cualquier jugador que desee ganar. Por lo tanto, la respuesta a la pregunta planteada funciona cuando se asume racionalidad y maximización de la utilidad por parte de los jugadores, como lo hace la Teoría de Juegos.

Fisher logra determinar que, según las probabilidades de ganar cada mano a partir de las cartas repartidas inicialmente, la frecuencia con la que el jugador 2 debe cambiar su carta si esta es un 7 es de $3/8$. Siendo esta frecuencia la adecuada para maximizar la cantidad esperada de manos ganadas. Mientras que para el jugador 1, la estrategia es cambiar su 8 con una frecuencia de $5/8$, logrando de esta forma minimizar la cantidad esperada de manos ganadas por el jugador 2 [17].

Estas estrategias son conocidas en Teoría de Juegos como *estrategias mixtas*. Es decir, asumiendo como *estrategias puras* cambiar siempre la carta cuando esta sea un 7 (o un 8) o nunca cambiar la carta cuando esta sea un 7 (o un 8), una estrategia mixta es jugar cada estrategia pura con una cierta probabilidad.

Además el criterio de equilibrio que utiliza es el *minimax*, se minimiza la máxima cantidad de manos que se pueden perder. Por lo tanto, para las frecuencias encontradas en el artículo, el jugador 1 puede esperar perder como máximo, 2831,75 veces de los posibles 5525 juegos [17], este es el llamado *valor del juego* [6].

Un argumento similar utiliza Fisher en 1958 en el contexto de un debate sobre en qué medida se puede afirmar que una población está mejor adaptada que otra y el valor del polimorfismo a esos efectos [18].

Fisher toma como jugadores a dos especies que compiten entre sí, en el transcurso de su evolución estas desarrollan herramientas para mejorar sus probabilidades de tener éxito en su competencia. Una población que desarrolla sus herramientas de manera uniforme será ‘‘predecible’’ y su competidora podrá a su vez desarrollar herramientas adecuadas para contrarrestarlas. Una población polimórfica será entonces el equivalente a aleatorizar las jugadas en una partida de *Le Her*, haciendo que el ‘‘aprendizaje’’ de la estrategia contraria sea mucho más difícil[18] [7].

Este trabajo muestra ya características que serán típicas en la aplicación de la teoría de juegos a la biología: las especies como jugadores, las estrategias seleccionadas a través de mecanismos evolutivos y un criterio de equilibrio para determinar un punto final evolutivo.

2.2.2. Lewontin

La otra mención que debemos hacer en esta sección es un artículo de Richard Lewontin de 1961 [28]. Ambos trabajos, el artículo de Fisher y este de Lewontin, se enmarcan dentro de un mismo estadio del pensamiento evolutivo. La síntesis evolutiva moderna y la genética de poblaciones estaban firmemente establecidas, sin embargo esto no significa que los problemas evolutivos estuvieran completamente resueltos. Lewontin señala como un problema central que no había un marco teórico riguroso para comprender los fenómenos de especiación y extinción [28]. En definitiva los dos trabajos reflexionan sobre un mismo

[6] El criterio *minimax* solo es valido para juegos de suma cero

[7] El argumento de Fisher parece implicar selección de grupo. En el mismo artículo dice: ‘‘(...) regarding polymorphism as very often properly described as an adaptation to the conditions of life in which a species finds itself, but for reasons quite distinct from the direct action of Natural Selection, by which the polymorphism is maintained, or indeed from Natural Selection as it acts among the individuals of any one interbreeding population.’’[18]

problema: ¿Cuál es el criterio para establecer que una población está mejor adaptada que otra?

El trabajo de Fisher es mucho más puntual y, como vimos, plantea un argumento sobre si una población polimórfica está mejor adaptada que una monomórfica. Lewontin es mucho más ambicioso y su aplicación de la teoría de juegos tiene componentes distintos a los que seguirá el desarrollo de la teoría en biología, por lo tanto no carece de interés, al menos, histórico.

Lewontin modela a una población jugando contra la naturaleza [28]. Las estrategias de la naturaleza serían las diferentes condiciones abióticas en las que está inmersa la población. Como ejemplo de un juego de este tipo, Lewontin imagina una población de plantas que produce cierta cantidad de semillas en dos tipos de clima: seco y húmedo [28]. La cantidad de semillas que producen las plantas en los diferentes climas está determinada por un *locus* con dos *alelos*. Por lo tanto, el genotipo para ese *locus* determina la estrategia de la planta (por ejemplo, si produce más o menos semillas en clima seco o húmedo) [28].

Es curioso que se modele a la naturaleza como un jugador. Como vimos, los jugadores suelen ser agentes estratégicos, y la naturaleza no escoge sus estados en base a las estrategias de una determinada población. El juego propuesto tiene como objetivo lidiar con la imprevisibilidad de la naturaleza.

Volviendo al ejemplo, ya que no podemos establecer *a priori* una distribución de probabilidades para los estados seco y húmedo. ¿Cómo podemos discernir la mejor estrategia para las plantas?

La respuesta de Lewontin es utilizar el criterio *maximin*[8], es decir que las plantas evolucionarán hacia un genotipo que asegure obtener la mayor utilidad entre las utilidades mínimas. El argumento para utilizar este criterio está relacionado a la función de utilidad que propone.

Durante todo el artículo asume una cierta función de utilidad y posterga su discusión hasta el final. Lo que propone en un principio es que los diferentes genotipos producen diferentes cantidades de semillas en cada estado de la naturaleza. La utilidad que obtienen las poblaciones será una función de estas cantidades de semillas, pero esta función no es necesariamente lineal, puede que una planta que produzca más semillas tenga una menor utilidad que una que produzca mas [28]. Observemos que determinar una función de utilidad establece un criterio para comparar qué tan adaptadas están las diferentes poblaciones de plantas.

Lewontin discute dos medidas de éxito reproductivo generalmente utilizadas, el *fitness* promedio y la tasa de incremento r. El *fitness* promedio suele ser utilizado en la genética de poblaciones, el problema es que solo está definido al interior de las poblaciones, por lo que no permite una comparación entre poblaciones [28]. La tasa de incremento r puede ser definida como la tasa de natalidad menos la tasa de mortalidad en algún momento determinado, o como r_0, definido como la tasa de incremento de la población en su fase exponencial de crecimiento.

[8] distinto al *minimax*.

La primera definición tiene como problema ser sensible a la densidad poblacional y, para poblaciones estables, es insensible al tamaño [28]. La segunda definición es independiente del tamaño de la población, midiendo la intensidad del crecimiento en una población casi extinta o de una colonia recién fundada[28].

Como solución propone una medida de la probabilidad de supervivencia calculada a partir de un juego estocástico a lo largo del tiempo. Así, en cada jugada existiría una probabilidad de que en el próximo movimiento la población se extinguiera. Esta medida dependerá de las estrategias seguidas y de los estados de la naturaleza y sería una función tanto del *fitness* promedio como de r, por lo que incluye parámetros ecológicos y genéticos. La probabilidad de supervivencia sería entonces el complemento de esta probabilidad de extinción [28].

Ya que el ambiente es cambiante y la probabilidad de supervivencia varía con el ambiente, el criterio de elección será el *maximin*, ya que consiste en elegir la estrategia que resultará en el mejor de los peores casos posibles. Es decir, mantener la probabilidad local de supervivencia lo más alta posible frente a las peores condiciones naturales [28].

Maynard Smith argumenta que Lewontin utiliza tácitamente selección de grupo en este trabajo [43]. Y otros autores han sugerido que esta es parcialmente la razón por las ideas presentadas en este trabajo no se han desarrollado[9] [27].

El propio Lewontin posteriormente renegó de este trabajo, pero por distintas razones. Desechó la idea de construir modelos generales evolutivos y centró su atención las bases moleculares de la genética [41]. Criticó además la búsqueda de un criterio de optimización a partir de modelos evolutivos, como el que él mismo propuso, argumentando que no hay garantía de que los cambios en las frecuencias génicas puedan llevar a las poblaciones a la ‘‘solución’’ predicha por los modelos [41].

Este breve repaso de la ‘‘prehistoria’’ de la teoría de juegos en biología sugiere que el pensamiento formalizado en esta teoría surge naturalmente al enfrentarse a cierta clase de problemas evolutivos. Hablaré ahora del punto de partida de la actual teoría de juegos en biología.

2.3. John Maynard Smith y las estrategias evolutivamente estables

Los enfrentamientos entre animales de la misma especie suelen ser resueltos sin ocasionar heridas graves, incluso cuando estos animales poseen medios para hacerlo. Esta observación llevó a Maynard Smith y a Price a preguntarse si era plausible que se desarrollara este tipo de enfrentamientos cuando los organismos están sometidos a evolución por selección natural a nivel individual [44].

Hasta ese momento las explicaciones de este fenómeno invocaban algún tipo de selección de grupo, mecanismo que según Smith podía funcionar solo en situaciones particulares y, por lo tanto, no podía explicar las complejas adaptaciones requeridas para el conflicto

[9] Aunque una idea similar es tratada en [42]

limitado [44]. Entonces, ¿Cómo pueden haber evolucionado estas adaptaciones si suponemos que la unidad de selección es el organismo individual?

Del intento de responder esta pregunta surgirá el concepto más importante de la teoría de juegos en biología, un concepto de solución que refina el equilibrio de Nash para adaptarlo al pensamiento evolutivo, la *estrategia evolutivamente estable* (eee). Este concepto se puede formular de manera sencilla, supongamos que una población de organismos sigue mayoritariamente una misma estrategia[10], siendo una estrategia en este caso cualquiera de sus rasgos fenotípicos. Entonces esa estrategia será una EEE si ninguna estrategia mutante puede invadir a esa población y convertirse en mayoritaria.

2.3.1. Conflicto interespecífico

En 1973 Smith y Price publicaron el artículo *The Logic of Animal Conflict*, donde presentarion el concepto de eee y un modelo que mostraba la plausibilidad de la evolución por selección individual de conflictos limitados intraespecíficos [44]. El modelo considera cinco estrategias posibles, entendidas como pautas de comportamiento en un enfrentamiento con un miembro de la misma especie que disputa un recurso (parejas, territorio, derechos de dominio, etc.) valioso para el éxito reproductivo.

Las pautas del juego son muy similares a las que vimos para el caso de la batalla del mar de Bismarck. Los animales se encuentran y deben llevar a cabo una acción. Ninguno de los dos posee conocimientos sobre el otro, las acciones son simultaneas. Los animales pueden utilizar tácticas ‘‘peligrosas’’ (P) o ‘‘convencionales’’ (C), las primeras implican utilizar sus propias armas para potencialmente herir gravemente a su adversario, las segundas implican un combate prácticamente inofensivo. Alternativamente pueden ‘‘retroceder’’ (R), lo que implica perder el recurso. Un animal gravemente herido siempre retrocede [44].

Las estrategias consisten en reglas para jugar las diferentes acciones según las circunstancias. El detalle de las estrategias se puede encontrar en el artículo original, someramente, la estrategia *mouse* es defensiva, nunca agrede violentamente y se aleja de enfrentamientos peligrosos. El *hawk* ataca con violencia hasta ser herido. El *bully* es agresivo, pero retrocede frente a la agresividad. El *retaliator* no ataca con violencia, pero si es atacado devuelve el ataque. El *prober-retaliator*, es similar al anterior, pero frente a un enfrentamiento no violento, probará con baja probabilidad la reacción de su rival a un ataque violento[11] [44].

A partir de simulaciones de estas estrategias luchando entre si el artículo concluye que, bajo una amplia combinación de parámetros[12], las estrategias *hawk*, *mouse*, *bully* o *prober-retaliator* no son eee, pero *retaliator* si lo es, por lo tanto la simulación muestra que las estrategias de guerra limitada pueden evolucionar y mantenerse por mecanismos de selección individual [44]. En concreto, lo que muestra la simulación es el promedio de los pagos que recibe cada estrategia enfrentada a todas las demás. Cualquier estrategia enfrentada

[10] En realidad no tiene porqué ser estrictamente una estrategia, podría ser una población con diferentes proporciones de diferentes estrategias

[11] Preferí utilizar los nombres originales a una traducción incómoda.

[12] Los parámetros son los pagos concretos por vencer, por ser herido, las probabilidades de ser herido, etc.

a *retaliator* gana menos que *retaliator* enfrentada a si misma, por lo que en una población compuesta mayoritariamente de *retaliators*, ninguna estrategia podría invadir y, por lo tanto, es una eee [44]. Para todas las otras estrategias hay al menos una estrategia rival que es superior enfrentándose a ella que lo que ella es en un duelo con ella misma.

Este resultado no prueba que el carácter de guerra limitada del conflicto intraespecífico evolucionó mediante mecanismos de selección individual. No descarta tampoco que existan otros mecanismos como la selección de grupo o de parentesco. Pero sí prueba que es al menos plausible que la selección individual haya dado lugar a conflictos de guerra limitada, que la selección individual no implica necesariamente una guerra a muerte entre los organismos.

Hice mención a este artículo por su importancia histórica, donde por primera vez se formaliza la definición de una eee. Pero el juego que vamos a analizar para profundizar en estos conceptos y que se ha convertido en un clásico de la teoría de juegos en biología viene del libro Maynard Smith de 1982 *Evolution and the Theory of Games* [45] y es una simplificación del comentando anteriormente.

2.3.2. Halcones y palomas

En este caso tenemos dos estrategias puras posibles: ‘‘Halcón’’ (H) o ‘‘Paloma’’ (P). El primero es agresivo, lucha hasta ser herido o ganar el recurso, el segundo hace una demostración no peligrosa (puede involucrarse en una lucha sin posibilidad de resultar en heridas de gravedad) y si es atacado abandona el recurso.

Si suponemos que la obtención del recurso mejora el éxito reproductivo del animal una cantidad V y una herida lo perjudica una cantidad C, podemos establecer una matriz de pagos como la que vimos para la batalla del mar de Bismarck:

Tabla 2.1: matriz de pago del juego Halcones y Palomas

		Jugador 2	
		Halcón	Paloma
Jugador 1	Halcón	$\frac{1}{2}(V-C)$	V
	Paloma	0	$\frac{1}{2}V$

Esta matriz de pagos se establece considerando que un H enfrentado a otro H ganará el recurso la mitad de las veces y resultará herido la otra mitad. Un H frente a una P obtendrá el recurso sin disputa. De manera opuesta una P frente a un H no ganará ni perderá nada. Una P frente a una P repartirán el recurso o cada una lo ganará la mitad de las veces. Como vemos esto implica que no hay ninguna información que los animales puedan obtener del otro antes de la ejecución de la estrategia. Esta es una suposición muy poco realista.

Si decimos que p es la frecuencia de animales en una población cuya estrategia es H, $E(H,P)$ es lo que gana un H frente a un P y $W(H)$ y $W(P)$ es el *fitness* de un estratega H y de un P respectivamente. Entonces podemos escribir:

$$W(H) = pE(H,H) + (1-p)E(H,P)$$

$$W(P) = pE(P,H) + (1-p)E(P,P)$$[13]

Al escribir estas ecuaciones se hizo la suposición de población infinita y bien mezclada. Otra suposición del modelo es la reproducción es asexual, por lo que la cantidad de animales en una determinada generación es proporcional al *fitness* obtenido por sus padres en la generación anterior. Estos supuestos permiten formalizar el concepto de eee. Como vimos una eee es aquella estrategia que siendo mayoritaria en una población no puede ser invadida por otra estrategia.

Por la suposición de reproducción asexual la frecuencia de una estrategia es proporcional a su *fitness*, entonces una estrategia J no puede aumentar su frecuencia en una población I si $W(I) > W(J)$. Digamos que $p \approx 1$ es la frecuencia de la estrategia I. Entonces:

$$W(I) \approx E(I,I) \quad y \quad W(J) \approx E(J,I)$$

Por lo tanto, una población adoptando mayoritariamente la estrategia I no podrá ser invadida por la estrategia J, si:

$$E(I,I) > E(J,I) \tag{2.1}$$

Esto tiene sentido intuitivo, ya que la mayoría de los encuentros de los miembros de esa población serán contra organismos que utilicen la estrategia I. Por lo tanto, para poder aumentar su frecuencia, una estrategia invasora J debe obtener un mejor resultado contra la estrategia I que la estrategia I contra si misma. Esta condición es la que cumple la estrategia *retaliator* en el modelo que vimos en la sección anterior.

Si recordamos la definición de equilibrio de Nash, vemos que la condición 2.1 implica que utilizar la estrategia I es un equilibrio de Nash. El equilibrio de Nash también admite $E(I,I) = E(J,I)$, pero en nuestro análisis esto implica que la estrategia J podría aumentar su frecuencia por azar. A medida que J aumenta ya no es válido considerar solo 2.1 (ya que se rompe el supuesto $p \approx 1$),por lo tanto si I es una eee deberá cumplir además:

$$E(I,J) > E(J,J) \tag{2.2}$$

Nuevamente podemos ver el sentido intuitivo de esta expresión. Si pretendemos que los estrategas I no sean invadidos, a medida que los estrategas J aumentan, a los estrategas I les deberá ir mejor contra estos que a los J contra si mismos.

[13] En [45] se asume un *fitness* W_0 independiente de la competencia por el recurso, aquí lo omití por no ser significativo para el análisis que voy a hacer.

En resumen, para este modelo particular, con las suposiciones de población infinita y bien mezclada, enfrentamientos uno a uno entre organismos y reproducción asexual, las condiciones que debe cumplir una estrategia I para ser una eee son:

$$\begin{array}{ll} & E(I,I) > E(J,I) \\ o \quad & E(I,I) = E(J,I) \quad y \quad E(I,J) > E(J,J) \quad \forall \quad J \neq I \end{array} \tag{2.3}$$

Volviendo al modelo, podemos ver que $E(P,P) < E(H,P)$, por lo tanto P no puede ser una eee. Por otro lado, $E(H,H) > E(P,H)$ si $V > C$. Entonces H es una eee siempre que se cumpla esa condición.

¿Qué pasa en el caso de $V < C$? Podemos ver que no hay una eee para estrategias puras, ya que $E(H,H) < E(P,H)$ y $E(P,P) < E(H,P)$ pero ¿Qué pasa con las estrategias mixtas?[14]

Una estrategia mixta implica, como vimos, jugar las estrategias puras con una cierta probabilidad. Digamos entonces que hay una estrategia I cuya probabilidad de jugar H es q. Observemos que para que I sea una eee debe cumplirse:

$$E(H,I) = E(P,I) = E(I,I)$$

Esto se hace claro cuando pensamos que si estas igualdades no se cumplen, va a ser conveniente adoptar una de las estrategias puras más frecuentemente, lo que llevará a adoptarla siempre. Por ejemplo, si $E(H,I) > E(P,I)$ entonces a un estratega H siempre le va mejor que a un estratega P, jugar P con probabilidad no nula reduce las ganancias potenciales de jugar siempre H. Además, si $E(H,I) > E(I,I)$ entonces I no puede ser una eee [15].

En cambio, si existe un q para el cual $E(H,I) = E(P,I)$, la estrategia I será candidata a ser una eee (aún deberemos comprobar que se cumple $E(I,J) > E(J,J)$). Por lo tanto, hay que resolver:

$$qE(H,H) + (1-q)E(H,P) = qE(P,H) + (1-q)E(P,P)$$

Entonces:

$$q = \frac{V}{C}$$

[14] Observemos de pasada que para el caso $V > C$ no hay estrategia mixta que venza a H. Cualquier estrategia que juege con probabilidad no nula P, estará en desventaja frente a un estratega H.

[15] Esto se conoce como el teorema Bishop-Cannings. Se puede expresar como: Si I es una EEE mixta conteniendo con probabilidad no nula las estrategias puras $a, b, c...$, entonces $E(a,I) = E(b,I) = E(c,I) = ... = E(I,I)$ Se prueba de manera sencilla por el absurdo.

Vemos entonces que en el caso $V < C$ hay una estrategia mixta que, al menos, no es superada por las estrategias puras ni por todas las otras posibles estrategias mixtas al enfrentarse a si misma. Esta estrategia consiste en jugar H con una probabilidad $q = \frac{V}{C}$. Ahora debemos comprobar que $E(I,H) > E(H,H)$ y $E(I,P) > E(P,P)$.

$$E(I,H) = qE(H,H) + (1-q)E(P,H) = \frac{V}{C}(\frac{V-C}{2})$$

$$E(H,H) = \frac{V-C}{2}$$

Por lo tanto, recordando que estamos en el caso $V < C$ y que por lo tanto $V - C < 0$,

$$E(I,H) > E(H,H) \quad si \quad \frac{V}{C} > 0$$

Por otro lado,

$$E(I,P) = qE(H,P) + (1-q)E(P,P) = \frac{V}{2}(\frac{V}{C} + 1)$$

$$E(P,P) = \frac{V}{2}$$

Por lo tanto,

$$E(I,P) > E(P,P) \quad si \quad \frac{V}{C} > 0$$

Comprobamos entonces la segunda de las condiciones para que una estrategia sea una eee. Así, encontramos que la estrategia mixta I es una eee.

Resumiendo el análisis desde la perspectiva del conflicto animal, vemos que cuando $V > C$, estamos diciendo que el valor del recurso es mayor al costo de ser herido en la disputa. En ese caso la única estrategia razonable es H, atacar con la intención de herir de gravedad. En cambio, cuando $V < C$, es decir, cuando el recurso no es tan valioso en relación a lo que nos puede costar ser heridos, la estrategia H no es la más conveniente, si no que será mejor jugar como H con una probabilidad igual al cociente entre V y C, es decir, cuanto más parecido sea el valor del recurso al costo de ser herido, más frecuentemente hay que atacar con violencia.

Incluso a partir de este modelo simple surge un espacio para los enfrentamientos no letales. Además, sugiere una hipótesis que eventualmente puede ser contrastada empíricamente, la diferencia entre el valor del recurso y el costo de ser herido van a determinar qué tan violentos son los encuentros en una especie/población determinada.

Por supuesto, la estimación de los parámetros V y C puede ser muy difícil, por lo que un ajuste cuantitativo del modelo no parece posible. Pero hay ejemplos que pueden ser presentados como ajustes cualitativos del modelo.

Las avispas de los higos pasan su etapa larval dentro de los higos. En muchas especies los machos no tienen alas, por lo que al llegar la madurez sexual deben reproducirse con las hembras que se desarrollaron en el mismo higo. Si aplicamos el modelo Halcón-Paloma a esta situación vemos que el recurso en disputa son las hembras. Cuantas menos hembras se desarrollen en un determinado higo, más valioso será el poder copular con ellas, por lo tanto mayor V.

Comparando especies que difieren en la cantidad de hembras promedio que se desarrollan por higo, se halló una correlación negativa con un índice de heridas promedio en los machos [52]. Es decir, a mayor cantidad promedio de hembras por higo, menor índice de heridos promedio en los machos.

No pretendemos sugerir que este hallazgo sea una confirmación del modelo. Las suposiciones que hemos hecho son muy poco realistas, en particular asumir que no hay intercambio de información. Los conflictos intraespecíficos suelen ser procesos a lo largo de los cuales se obtiene y usa información sobre el propio estado y el del rival. Pero los modelos simples pueden servir como ayudas heurísticas, no pretenden ser contrastados empíricamente, si no servir como guías al pensamiento o una primera aproximación a un fenómeno. En este caso, además, ha servido para introducir los conceptos y métodos de la teoría de juegos.

2.4. Temas generales de la teoría de juegos en biología

2.4.1. El gambito fenotípico

Una de las suposiciones del modelo fue la de reproducción asexual, por lo tanto ¿Es válido el modelo para los casos en los que esto no se cumple?

Vimos que Lewontin ya había renegado de las aproximaciones teóricas de optimización argumentando que la estructura genética de las poblaciones plantea límites a los fenotipos que se pueden desarrollar, por lo tanto el fenotipo que constituya una eee puede no ser alcanzable en la realidad [41].

La suposición de reproducción asexual es muy práctica desde el punto de vista matemático ya que simplifica el análisis de los modelos, pero esta ventaja se obtiene al costo de perder el detalle de la genética, por eso se conoce como *gambito fenotípico*: el desprecio de la genética en favor de considerar exclusivamente el *fitness* de los fenótipos para determinar las dinámicas evolutivas [40].

Esto puede llevar a que las predicciones obtenidas con el gambito fenotípico no sea correctas. Por ejemplo, si consideramos un organismo diploide con un gen con dos alelos que determina su estrategia para el juego Halcón-Paloma, donde la estrategia H la juega uno de los homocigotos, la estrategia D el otro y el heterocigoto juega una estrategia novel, que actua como H frente a otro H, pero como D frente a un D. Utilizando el gambito fenotípico obtendremos una población que se comporta como el juego que vimos anteriormente, la nueva estrategia no influye en el resultado ya que su desempeño es intermedio entre

el de las otras dos. Pero si tomamos en cuenta el sustento genético de las estrategias veremos que terminamos con una población polimórfica con distintas proporciones de las tres estrategias [40].

Volvemos entonces a la dicotomía planteada por Maynard Smith, los modelos generales y simples como ayudas heurísticas, los modelos detallados y partículares para obtener predicciones fiables para una situación biológica determinada [45]. El utilizar el gambito fenotípico dependerá de la situación particular que estemos modelando y los objetivos que tengamos en mente.

2.4.2. El concepto de fitness

Hasta ahora he utilizado el termino fitness, o alternativamente la expresión éxito reproductivo, informalmente y sin una definición precisa. Este concepto ocupa un lugar central en la teoría de juegos, ya que es la utilidad que los organismos ‘‘desean’’ maximizar, y, además, es un concepto ampliamente discutido dentro de la propia teoría evolutiva e, incluso, por la filosofía [2] [39] [46], por lo que parece necesario profundizar brevemente en él.

La discusión sobre el concepto de fitness se entrelaza con el debate sobre la optimización evolutiva, es decir, si se pueden utilizar modelos de optimización para predecir los resultados evolutivos (de hecho la teoría de juegos es una aproximación de optimización). La conexión se da ya que, si podemos definir de manera correcta el fitness, entonces esta es la magnitud que la evolución debería optimizar [16]. Pero como veremos definir el fitness no es trivial.

Darwin utilizó el concepto para referirse a la adecuación de un organismo a su entorno, entendiendo que los organismos mejor adaptados aumentarán su representación en las poblaciones, reproduciendo a su vez las características que los hacen estar mejor adaptados. En este esquema el fitness tiene dos acepciones, por un lado, como medida de adecuación (fit) del organismo con su entorno. Por otro, como causa de una mayor representación en generaciones futuras [2]. Pero que un organismo esté adaptado a su ambiente en este sentido de adecuación no implica *necesariamente* que ese organismo tendrá una mayor representación en las generaciones futuras *a no ser* que definamos la adecuación al ambiente en términos de una mayor representación en las generaciones futuras. Por lo tanto, no podemos definir fitness de manera independiente de sus consecuencias reproductivas. Imaginemos, por ejemplo, que deseamos comparar el fitness entre dos aves con alas de diferente forma. Siendo todas las demás características iguales, determinamos que una de las aves tiene alas más eficientes desde el punto de vista aerodinámico, puede desplazarse con mayor velocidad y menor gasto energético, pero, si esta característica no redunda en una mayor representación en las generaciones futuras, no podemos decir que su fitness sea mayor que el de la otra ave.

La idea de que podemos evaluar la adecuación de un organismo a su entorno más allá de su éxito reproductivo, de que existe un ‘‘fitness ecológico’’ distinto a un ‘‘fitness

[16] Creo que es posible aceptar esto al mismo tiempo que se aceptan algunas de las críticas al programa adaptacionista [20], por ejemplo que no todos los rasgos fenotípicos de un organismo *tienen* que ser adaptativos y que las restricciones que plantea el desarrollo pueden hacer imposible alcanzar ciertos máximos.

reproductivo'' [2] parece surgir por un lado, del asombro que generan las intrincadas interrelaciones entre los organismos en los ecosistemas y, por otro, del hecho que no conocemos otro mecanismo evolutivo que la selección natural para generar adaptaciones. Esto puede hacer pensar que el puzle ecológico es una *causa* y no una *consecuencia* de la capacidad de los organismos para reproducirse exitosamente.

No me parece satisfactoria la propuesta en [39] de asumir el fitness como un concepto no definido de la teoría (primitivo) cuya consecuencia es el éxito reproductivo. En ese trabajo se plantea una analogía del fitness con la temperatura y el éxito reproductivo como un termómetro. La temperatura no se define como el fenómeno que hace que un líquido se expanda en un tubo estrecho, si no que esta expansión es una de las formas de medirla. Igualmente el fitness no es el éxito reproductivo, sino que el éxito reproductivo es una forma de medir el fitness. Me parece que esta analogía sería correcta si la expansión del líquido en el termómetro fuera necesario para el aumento de la temperatura. Sin éxito reproductivo no hay adaptación al medio.

A lo largo de la explicación anterior utilicé la incomoda expresión ''mayor representación en las generaciones futuras'' con el objetivo de ser lo más vago posible. De igual manera utilicé éxito reproductivo. Es que en definitiva la definición apropiada de fitness es, según creo, una definición precisa de esas expresiones. Las definiciones matemáticas de fitness generalmente han utilizado alguna medida del incremento de los organismos en una población, por ejemplo, la tasa reproductiva neta R_0, que mide la tasa aumento de una población en ausencia de limitaciones por densidad [38]. En genética de poblaciones se suele utilizar probabilidad de supervivencia o viabilidad como medida de fitness de los diferentes genotipos y, así, obtener la estructura genética final de la población. Esta aproximación lleva al atractivo resultado que en el equilibrio se maximiza el fitness promedio de la población. Es claro que estas definiciones se deben modificar según el contexto biológico que se pretende modelar y, por lo tanto, puede no haber una variable que podamos definir de forma general que sea maximizada por la selección natural. Esto no debería generar mayor problema en las discusiones sobre teoría de la evolución.

Por ejemplo, se puede discutir la escala temporal para la cual deberíamos definir el fitness, es decir ¿consideramos el incremento después de una generación, de dos o incluso más? Este problema surgió cuando analizamos las proporciones entre los sexos, en ese caso pareció claro que debíamos considerar la cantidad de nietos como medida del éxito reproductivo.

En teoría de juegos el concepto de fitness que se suele utilizar es el llamado fitness de invasión. Este se define en el contexto de una población en equilibrio demográfico, donde tanto el tamaño como las frecuencias de los individuos en determinados estados (edad, sexo, etc.) se mantiene constante. Si todos los miembros de esta población siguen una estrategia x, entonces el fitness de invasión de una estrategia mutante x' es el incremento *per capita* de los mutantes cuando estos son aún escasos [29].

En lo que sigue no me voy a preocupar por definir de manera precisa fitness, asumiré que un mayor pago en un juego implica un mayor éxito reproductivo de manera abstracta. El objetivo de este trabajo no es dar una descripción de un sistema biológico concreto, por lo que esta suposición alcanzará para mis objetivos.

Me pareció importante aludir a este debate aquí ya que creo que es una punta más de los debates teóricos en teoría evolutiva que incluyen confusiones sobre el carácter tautológico de la teorá de la evolución, selección de grupo vs individual, adaptacionismo y la sociobiología[17]. Es importante recordar el clima intelectual de la biología evolutiva que dio paso a la aplicación de la teoría de juegos. Después de un período durante el cual se había aceptado acríticamente la selección de grupo, esta visión se encontraba fuertemente cuestionada [46]. Una de las lineas de crítica fue explicar adaptaciones beneficiosas para el grupo como consecuencia de adaptaciones a nivel individual, por ejemplo, la agresión limitada en las luchas interespecíficas. En este contexto la teoría de juegos permitió hacer plausible el desarrollo de estas adaptaciones desde una perspectiva de selección individual.

[17]Para una visión histórica de estos debates se puede consultar [41]

Capítulo 3

El problema de la cooperación y el dilema del prisionero

3.1. El problema de la cooperación

Entiendo por cooperación el acto de incurrir en un costo para beneficiar a otro u otros, midiendo los costos y beneficios, en última instancia, en relación al éxito reproductivo[1]. La cooperación es ubicua en el mundo biológico [51]. La formación de manadas y las llamadas de alarma ponen en peligro a algunos miembros del grupo para proteger a la mayoría [12]. Las poblaciones de insectos que separan a los reproductores de los trabajadores o las suricatas, cuyos grupos cuentan con una división jerárquica donde una pareja genera la mayor parte de las crías y los demás adultos ayudan en la crianza, son ejemplos de este fenómeno [51]. Es también evidente que cada nivel organizativo de los sistemas biológicos requiere cooperación a un nivel inferior, por ejemplo, los genes cooperan en genomas[2], los cromosomas en las células, los organismos multicelulares requieren cooperación entre sus células y las sociedades entre sus miembros [35]. La complejidad implica cooperación. Además, si la cooperación existe a varios niveles de organización significa que debió haber evolucionado muchas veces de manera independiente.

Entonces, ¿cuál es el problema con la cooperación? En biología, el marco explicativo que unifica su inagotable variedad es la teoría de la evolución, cuyo principal mecanismo, la selección natural, implica una competencia entre los organismos. Las características de los organismos con mayor éxito reproductivo aumentan su frecuencia en las poblaciones, un organismo que ayude a los demás a reproducirse a costo de su propia reproducción verá declinar su linaje. Y, sin embargo, los ejemplos que mencioné antes se mantienen. La teoría parece predecir una cosa y la realidad mostrar otra.

Pero, ¿un grupo humano no tiene más probabilidades de sobrevivir, y por lo tanto de dejar descendencia, que individuos aislados? ¿Los genes no se replican de manera más efectiva protegidos dentro de una célula? Es claro que la cooperación tiene beneficios, el problema son las condiciones en las cuales puede surgir y mantenerse en competencia con organismos egoístas. Es decir, ¿cómo se llega a formar un grupo humano de cazadores si existen

[1] Diferentes autores entienden por cooperación cosas ligeramente diferentes, por ejemplo, la definición dada es clasificada como *altruista* en [51], que utiliza cooperación para los actos que brindan un beneficio sin ocasionar un costo al cooperador.

[2] La existencia de este tipo de cooperación no significa que no exista también conflicto, como demuestra la existencia de elementos genéticos egoístas [10].

individuos que pueden escapar a los peligros de la caza, pero obtener los beneficios de ella? El problema puede plantearse en términos temporales, el éxito reproductivo es inmediato e imprescindible, las ventajas de la cooperación se cosechan a largo plazo.

Este es un problema intrincado. Los argumentos verbales pueden oscurecer las posibles soluciones, la complejidad del mundo natural puede abrumar al pensamiento. Intentaré, por lo tanto, utilizar un modelo matemático sencillo, en el espíritu del juego halcones y palomas, como primera aproximación al problema.

3.2. Un modelo de cooperación: el dilema del prisionero

3.2.1. El juego

Dos personas son detenidas por la policía, acusadas de una serie de crímenes, llevadas a celdas distintas e interrogadas por separado. No pueden comunicarse. Se les presentan dos opciones: pueden quedarse callados durante todo el interrogatorio, esto no los salvará de la cárcel, pero solo pagarán por un crimen menor, les darán un año. Por otro lado, pueden elegir delatar a su cómplice aportando datos que sirvan para acusarlo de un crimen más grave, eso les asegurará salir libres mientras que su cómplice deberá cumplir 5 años. Ahora bien, si ambos se delatan mutuamente les corresponderán 3 años a cada uno. ¿Qué es lo que harán los sospechosos?

Esta es una de las tantas versiones de la historia que usualmente se utiliza para ilustrar el dilema del prisionero (DP). Fue creada a principios de la decada de 1950 por A. W. Tucker [48]. Desde entonces existe una amplia literatura de muy diversos campos científicos que analiza este problema.

Tabla 3.1: Matriz de pago del dilema del prisionero

		Jugador 2	
		No delatar	Delatar
Jugador 1	No delatar	$(-1,-1)$	$(-5,0)$
	Delatar	$(0,-5)$	$(-3,-3)$

Si analizamos el juego de la misma manera que la batalla del mar de Bismarck podremos ver que el equilibrio es $(Delatar, Delatar)$. La tabla 3.1 muestra dos pagos para cada par de estrategias, por convención el primero corresponde al jugador 1 y el segundo al jugador 2. Observemos que la estrategia $Delatar$ obtiene un mayor beneficio independientemente de la estrategia elegida por el otro jugador. Por lo tanto, jugadores racionales buscando maximizar su utilidad elegirán $Delatar$. El ‘‘dilema’’ surge debido a que, si ambos hubieran elegido $No\ delatar$ habrían logrado un mejor resultado.

3.2.2. El dilema del prisionero y la biología

Al presentar su análisis del dilema del prisionero en un contexto biológico Axelrod y Hamilton escriben:

> Muchos de los beneficios buscados por los seres vivos están desproporcionadamente disponibles para grupos cooperantes. (...) esta afirmación, mientras sea verdadera, plantea una base fundamental para toda la vida social. El problema es que, si bien un individuo puede beneficiarse de la cooperación mutua, puede beneficiarse aún más explotando los esfuerzos cooperativos de los demás [7].

Esta concisa forma de expresar el problema de la cooperación permite cruzar el puente entre la biología y el dilema del prisionero. Digamos que dos organismos interaccionan a la manera del juego halcones y palomas. En lugar de atacar o no atacar deben elegir si cooperan o no. Si ambos no cooperan obtendrán una ganancia P, si ambos cooperan obtendrán R. Como ‘‘Muchos de los beneficios buscados por los seres vivos están desproporcionadamente disponibles para grupos cooperantes.’’ $R > P$. Además, si alguno de los jugadores logra explotar los esfuerzos del otro obtendrá T, ya que este beneficio es mayor que el de la cooperación mutua $T > R$. El explotado obtendrá S, habiendo invertido esfuerzo, pero sin cosechar sus beneficios, entonces $P > S$. Es decir que $T > R > P > S$

Tabla 3.2: Matriz de pago del dilema del prisionero

		Jugador 2	
		Cooperar	No cooperar
Jugador 1	Cooperar	(R, R)	(S, T)
	No cooperar	(T, S)	(P, P)

Podemos ver que la tabla 3.1 es solo una instancia de los infinitos posibles dilemas del prisionero. El juego queda definido por la matriz de la tabla 3.2 y por las desigualdades establecidas. Debido a que $T > R$ y $P > S$ el equilibrio es $(No\ cooperar, No\ cooperar)$ y sin embargo la cooperación es evidente a todo nivel en el mundo biológico.

3.2.3. Escapar del dilema: el dilema del prisionero iterado

Si bien es concebible imaginar un encuentro entre organismos que nunca más se repite, es probable que en muchos casos las interacciones se mantengan en el tiempo. Podríamos entonces modelar la interacción entre estos organismos como una repetición sucesiva de dilemas del prisionero donde en cada encuentro deben decidir si cooperan o no. Este juego se conoce como el dilema del prisionero iterado (DPI) y el conjunto de las estrategias posibles son todas aquellas que determinan qué jugar en cada movimiento del juego. Por ejemplo, algunas estrategias posibles son nunca cooperar (NC), siempre cooperar (SC), cooperar en las jugadas impares, cooperar con probabilidad p, etc. El conjunto de estrategias posibles es infinito. ¿Cómo cambia el resultado del juego la repetición de los encuentros?

Podemos distinguir dos casos, en uno hay una cantidad de fija de encuentros que los jugadores conocen, en el otro cada encuentro puede ser el último con una cierta probabilidad. En el primer caso, cuando los jugadores llegan al último encuentro la mejor estrategia será no cooperar, ya que se repite la situación del DP. Pero, sabiendo esto, si se retrotraen sucesivamente desde este último encuentro al primero vemos que siempre deberán no cooperar. Ya que no cooperarán en el último, también les convendrá no cooperar en el

penúltimo. Esta lógica se repite hasta el primer encuentro y el único equilibrio de Nash es NC.

En el segundo caso, en general se asume que no hay descuento temporal, es decir que los beneficios obtenidos en el encuentro valen lo mismo ahora que en cualquier momento del futuro, pero se establece una probabilidad w de que el juego termine después de una determinada jugada[3]. Por lo tanto, si w es bajo, es decir, es muy probable que el encuentro se repita, se abre la puerta a la confianza y permite que la reputación, la amenaza de castigo y la reciprocidad jueguen un papel importante.

Imaginemos dos jugadores que llevan cooperando por un cierto número de movimientos. En el próximo movimiento el jugador 2 intenta aprovecharse de la cooperación del jugador 1 y no coopera. Pero la estrategia seguida por el jugador 1 indica que una vez que su rival deja de cooperar él dejará de cooperar. Así, la cooperación se interrumpe y ambos se condenan a una retribución magra. Cuanto mayor sea la probabilidad de volver a enfrentarse, menor será la ganancia promedio que obtienen de sus encuentros. La amenaza del castigo o el castigo por no cooperar pueden funcionar como estabilizadores de la cooperación y, de hecho, se pueden obtener muchos pares de estrategias que fomenten la cooperación y que sean equilibrios de Nash[4].

Esto no implica que existan eee. En primer lugar, una eee requiere definir el conjunto de estrategias posibles. En este caso las estrategias posibles son infinitas[5]. En un contexto biológico no podemos descartar el surgimiento de cualquier estrategia, por lo tanto, se puede imaginar una estrategia que se comporte como no cooperante frente a una nunca cooperante y como cooperante frente a si misma. Esta estrategia podría invadir a una población de nunca cooperantes. De hecho no hay estrategias eee en el DPI, una combinación de estrategias siempre podría invadir cualquier población que utilice una estrategia pura[9]. Esta afirmación no descarta la posibilidad de que una población con ciertas proporciones de estrategias cooperantes pueda ser estable.

Entonces, la reciprocidad puede permitirnos escapar del dilema cuando la probabilidad de repetir enfrentamientos con el mismo jugador es alta y el descuento temporal es bajo. Dejaré para más adelante la pregunta de cuánta sofisticación requiere un jugador para poder aplicar este mecanismo. Ahora pasaré a reseñar brevemente uno de los trabajos más citados en relación al DPI.

3.2.4. Los torneos de Axelrod

El dilema del prisionero como modelo para estudiar el surgimiento de la cooperación no fue sugerido por un biólogo, si no por un profesor de ciencia política con formación matemática llamado Robert Axelrod. La pregunta que llevó a su trabajo con Hamilton [7] fue: ¿bajo qué condiciones puede surgir la cooperación en un mundo de egoístas sin autoridad central?[4] Es fácil pensar que esta pregunta es más relevante para la biología evolutiva que para la ciencia política, después de todo los seres humanos tenemos un conjunto de facultades

[3]En textos generales de teoría de juegos se habla de juegos infinitos y se asume que tienen un descuento temporal entre 0 y 1 que pondera la ganancia según el momento en el tiempo en el que se esté. La idea es la misma, la importancia relativa del futuro para los jugadores.

[4]Esto es un caso particular de un importante resultado en teoría de juegos conocido como *folk theorem*.

[5]Aunque los posibles juegos de n iteraciones que puede realizar una estrategia son 2^n y los posibles juegos son 4^n, esto pondría un límite teórico a la variedad de estrategias.

cognitivas dispuestas a favorecer la cooperación que deben haber surgido, prosperado y desarrollado frente a cerebros ancestrales más egoístas.

Para estudiar esta pregunta Axelrod organizó un torneo de computadora entre estrategias para jugar al DPI [5]. Se invitó a científicos del área de teoría de juegos a que enviaran sus propuestas, el objetivo era diseñar la estrategia que mejor se desenvolviera en este torneo. Las propuestas serían enfrentadas todas contra todas en partidas de 200 movimientos utilizando la matriz 3.3 para otorgar el puntaje.

Tabla 3.3: Matriz de pago utilizada en los torneos de Axelrod

		Jugador 2	
		Cooperar	No cooperar
Jugador 1	Cooperar	$(3,3)$	$(0,5)$
	No cooperar	$(5,0)$	$(1,1)$

En una primera instancia se presentaron 14 estrategias[6]. Además de enfrentarse a todas las otras estrategias propuestas cada una debería enfrentarse a $random$, que elegía aleatoriamente cooperar o no en cada movimiento, y contra si misma. La sorpresa del torneo fue la victoria de $tit\ for\ tat$, esta estrategia coopera siempre en el primer movimiento y después hace lo que hizo su rival en la jugada anterior.

A partir del análisis de este primer torneo Axelrod extrajo algunas características importantes para el éxito de las estrategias: ser bondadosas, obtener buenos resultados con las estrategias que llamó ***kingmakers*** y perdonar.

Una estrategia bondadosa es aquella que no deja de cooperar primero. Esta característica separaba a los primeros ocho puesto de los demás, ya que estas estrategias lograban una puntuación alta entre ellas, en general manteniendo la cooperación hasta el final del enfrentamiento. Los puestos relativos entre las primeras ocho estrategias dependieron de lo bien que les fuera enfrentándose a dos estrategias en particular, que por si mismas no lograron un buen desempeño. A estas estrategias Axelrod les llamó ***kingmakers***. Finalmente, el perdón se reveló como una característica importante, es decir la capacidad de volver a cooperar una vez que el otro dejó de cooperar.

Estas conclusiones dependen de la estructura del torneo y de las estrategias presentadas. Por ejemplo, si la única estrategia bondadosa presentada hubiera sido $tit\ for\ tat$ habría terminado tercera. Además, al enfrentar a todas contra todas se asume que la probabilidad de ocurrencia de los diversos enfrentamientos es la misma. La cantidad de iteraciones también es relevante, ya que se requieren varios movimientos para que la cooperación mutua compense jugadas donde uno cooperó y el otro no y, además, las estrategias más complejas, que evalúan al rival con métodos estadísticos para tomar las decisiones que maximicen su puntaje, pueden requerir más observaciones para ser certeras y para compensar las pérdidas durante el aprendizaje.

[6]Las descripciones de las estrategias del primer torneo y quiénes las presentaron se encuentran en [5].

Nada de esto invalida al torneo, pero se debe ser cauto a la hora de interpretar sus resultados. Si bien es interesante y sugestivo, no se pueden extraer conclusiones generales a partir de sus resultados.

Axelrod realizó un segundo torneo [6]. Las reglas variaron solo en la longitud de los encuentros[7] y se presentaron 62 estrategias diseñadas teniendo en cuenta los resultados del primer torneo. Se argumenta que al tener esta experiencia la sofisticación del segundo torneo sería muy superior a la del primero [6]. A pesar de esto $tit\ for\ tat$ ganó nuevamente.

Las conclusiones no varían significativamente entre un torneo y otro, se destaca, además de las antes mencionadas características de bondad y capacidad de perdón, la ***provocability*** de las estrategias, es decir su capacidad de castigar el no cooperar [6]. Además, dado que los enfrentamientos de las 63 estrategias[8] son 3969 se hacen necesarios análisis estadísticos de los datos. Se realizó una regresión de pasos sucesivos (***stepwise***) obteniendo una ecuación que predecía el resultado del torneo para una estrategia considerando solo los resultados que esa estrategia había obtenido frente a otras 5 estrategias representativas. El $96\,\%$ de la varianza en los puntajes de las estrategias es explicado por el resultado de las estrategias frente a estas 5 [6].

Esto parece indicar que la variedad en las estrategias es aparente, sin importar su complejidad todas se expresan como una sucesión binaria. El énfasis de los torneos en el diseño de las estrategias oscurece la naturaleza fundamentalmente limitada de la transmisión de información que los encuentros establecen entre las estrategias. Es tal vez más productivo para el establecimiento de estrategias efectivas enfocarse en los posibles patrones de los enfrentamientos.

Axelrod afirma que no hay una estrategia que sea mejor en términos absolutos para jugar al DPI, ya que la efectividad de una estrategia se mide en relación a las estrategias con las que compite, a su ‘‘ambiente’’. Esto parece claro, $tit\ for\ tat$ no es la mejor estrategia en todos los posibles subtorneos como ejemplifiqué para el primer torneo. Pero el espacio de posibles subtorneos es probablemente menor de lo que uno esperaría incluso tomando en cuenta el espacio de todas las estrategias posibles. Por otro lado, esta observación reafirma la conexión de la teoría de juegos con la biología, esta característica es justamente una selección dependiente de frecuencia.

El último aspecto a destacar del segundo torneo de Axelrod es su enfoque ‘‘ecológico’’. Buscando reafirmar la robustez de $tit\ for\ tat$, realiza una serie de torneos donde la frecuencia de las estrategias en el siguiente varía proporcionalmente al resultado obtenido. Para el torneo (o la generación) 1000 $tit\ for\ tat$ era la estrategia con mayor frecuencia y seguía creciendo a mayor velocidad que las demás [6].

3.2.5. El artículo de Axelrod y Hamilton

En 1981 Axelrod y Hamilton presentan el artículo ***The evolution of cooperation*** [7]. Como mencioné anteriormente la biología evolutiva estaba dejando de lado las explicaciones

[7] Cada enfrentamiento se realizó 5 veces, la duración de cada uno se obtuvo sacando, una única vez y para todos, 5 muestras al azar de la distribución de duración de los enfrentamientos según una probabilidad de que el enfrentamiento terminara después de cada movimiento de 0,00346. Esto llevó a enfrentamientos de 63, 77, 151, 156 y 308 movimientos[6]. El objetivo era evitar los efectos debidos al final del juego.

[8] Incluyendo las 62 presentadas y $random$

basadas en la selección de grupo, por lo que los fenómenos de cooperación debían ser explicados en términos de selección individual. Las propuestas se dividían en ***kinship theory*** [21] [23] y ***reciprocation theory*** [47]. La primera puede explicar la cooperación como un fenómeno que, además de favorecer al propio organismo, favorece también a otro organismo genéticamente relacionado, por lo que desde el punto de vista del gen el encuentro entre dos organismos que lo pueden perpetuar no constituye un DP. La interacción entre organismos genéticamente relacionados podría deberse tanto a un reconocimiento explicito como a un producto de la estructura espacial del ambiente.

Por otro lado, el altruismo reciproco implica que, entre organismos no relacionados genéticamente, puede desarrollarse la cooperación debido al beneficio que pueden cosechar en el largo plazo [47]. Axelrod y Hamilton intentan desarrollar esta teoría utilizando el modelo del DPI. Su argumento es que en una interacción para la cual la ‘‘sombra del futuro’’ se proyecta oscura sobre el presente la cooperación por reciprocidad es posible ya que no hay una sola mejor estrategia, como se discutió más arriba.

En base a los torneos de Axelrod, defienden a la estrategia $tit\ for\ tat$ como robusta, estable e inicialmente viable. Definen robustez como la capacidad de ser exitosa en un conjunto amplio de ambientes. Para sostener que $tit\ for\ tat$ tiene esta característica presentan como argumento su éxito en los torneos. Creo que este argumento es bastante endeble, es una inferencia hecha básicamente sobre dos casos. Además, no hay argumento biológico respecto al porqué de la relevancia de esas estrategias en particular y la complejidad de algunas de ellas podría actuar más en contra que a favor de su desempeño en el contexto del torneo.

El análisis sobre la estabilidad pretende determinar si una población cuya única estrategia es $tit\ for\ tat$ puede ser invadida, en definitiva, si es evolutivamente estable. El argumento es el siguiente. Se nota que $tit\ for\ tat$ recuerda solo el estado anterior y que, como no sabemos cuándo será la última interacción y no hay descuento temporal, una estrategia que quiera hacer el mayor puntaje posible debe repetir lo mismo frente a los mismos estados de su rival [9]. Entonces, una estrategia rival puede, siempre cooperar (SC), nunca cooperar (NC) o alternar C y N. Como ninguna de estas estrategias le va mejor que a $tit\ for\ tat$ contra si misma, ninguna la puede invadir.

En el caso de la estrategia siempre cooperar es tan buena como $tit\ for\ tat$ (TFT), ya que siempre cooperan una con la otra. Pero notemos que $E(TFT, SC) = E(TFT, TFT) = E(SC, TFT) = E(SC, SC)$, por lo que SC podría invadir por azar una población de TFT.

En el caso de NC:

$$E(TFT, TFT) = R + Rw + Rw^2 + ... + Rw^n = \frac{R}{1-w}$$

$$E(NC, TFT) = T + Pw + Pw^2 + ... + Pw^n = T + \frac{wP}{1-w}$$

Siendo w la probabilidad de que un encuentro sea el último. Para que $E(TFT, TFT) \geq E(NC, TFT)$:

[9] Esta observación es interesante ya que implica que una estrategia probabilística será siempre peor que una determinista.

$$w \geq \frac{T-R}{T-P} \tag{3.1}$$

Por último, si la estrategia alternara C y NC (C/NC):

$$E(C/NC, TFT) = T + Sw + Tw^2 + ... + Sw^n - 1 + Tw^n = \frac{T+Sw}{1-w^2}$$

Entonces, para que $E(TFT, TFT) \geq E(C/NC, TFT)$:

$$w \geq \frac{T-R}{R-S} \tag{3.2}$$

Por lo tanto, para un w que cumpla 3.1 y 3.2, $tit\ for\ tat$ es al menos tan buena como cualquier otra estrategia. Por ejemplo, para la matriz de pagos 3.3, que fue la utilizada en los torneos, $w \geq \frac{2}{3}$.

Hay que enfatizar que esto no implica que no se la pueda invadir, al contrario de lo que afirman los autores. Mostré que las condiciones para ser una eee implican:

$$\begin{array}{ll} & E(I,I) > E(J,I) \\ o & E(I,I) = E(J,I) \quad y \quad E(I,J) > E(J,J) \quad \forall \quad J \neq I \end{array} \tag{3.3}$$

Como para la estrategia SC se cumple: $E(TFT, SC) = E(TFT, TFT) = E(SC, TFT) = E(SC, SC)$ esta podría aumentar su frecuencia por azar y abrir un flanco desde el cual la población podría ser invadida por estrategias no cooperantes.

Por último, para argumentar a favor de la viabilidad inicial proponen dos factores: organismos relacionados genéticamente y poblaciones estructuradas de manera que los organismos cooperantes interactúen preferentemente entre ellos. Ninguno de estos factores tiene porqué favorecer la estrategia $tit\ for\ tat$ frente a otras estrategias cooperantes. En el artículo se menciona el ejemplo de la lubina (*sea bass*), un pez hermafrodita cuyas parejas parecen turnarse para procrear poniendo los huevos (que implican una inversión alta) o el esperma (baja inversión), lo que remite a un DPI, al menos de manera cualitativa. Las parejas tienden a separarse si la distribución de roles no es pareja, por lo que parecerían estar jugando con la estrategia $tit\ for\ tat$. Se hipotetiza que en su evolución este pez pasó de poblaciones con baja densidad y alta endogamia, donde se habría desarrollado la cooperación debido al parentesco, a poblaciones menos endogámicas a dónde se trasladó este desarrollo resultando en el estado observado de cooperación sin necesidad de parentesco. A pesar de esto y el resultado de los torneos la fascinación con la estrategia $tit\ for\ tat$ no parece completamente justificada.

3.2.6. Críticas al torneo de Axelrod y al DPI como modelo de cooperación

> La falla central del diseño de investigación de Axelrod es que se sostiene en conclusiones impresionistas y generalizaciones inductivas a partir de lo que en realidad son resultados contingentes de los resultados de las simulaciones [30].

Ya he señalado esto y es tal vez el punto más débil en el análisis de Axelrod. La extrapolación que realiza desde los resultados de los torneos a la vida real [4] es particularmente audaz. La evidencia empírica que propone a favor de la aplicabilidad de su modelo parece no sostenerse y parece no haber casos concretos en los que se pueda aplicar [30].

Como ya mencioné muchas estrategias pueden mantener la reciprocidad en la cooperación en un DPI extenso y sin final definido [8], $tit\ for\ tat$ no es especial en este sentido. No parece entonces que haya suficientes razones para centrar tanta atención en ella.

Desde el punto de vista biológico, la reciprocidad parece cumplir un papel menor fuera de la especie humana [51]. Tal vez el ejemplo más citado sea el fenómeno de compartir sangre regurgitada entre murciélagos vampiros (***Desmodus rotundus***) [53], aunque su significado sea discutido, en particular si las interacciones entre individuos de esta especie puede modelarse mediante un DP [27]. Los estudios empíricos que dicen presentar evidencia de cooperación fuera del paradigma de la selección de parentesco (***kin selection***) sufren de dos problemas: no presentan evidencia de que las utilidades realmente constituyan un DP y no consideran explícitamente hipótesis alternativas [11]. Este mismo artículo afirma que no hay evidencia empírica de cooperación entre organismos no relacionados genéticamente, sea en una situación natural o artificial, donde las utilidades sean efectivamente las correspondientes a un DP [11]. Posteriormente se han realizado experimentos en ratas que muestran cooperación en un contexto de DPI [54], pero la identificación de estos comportamientos con las estrategias teóricas no ha sido demostrado, tampoco la relevancia de estos comportamientos fuera de protocolos experimentales [27]. Por último, se ha argumentado en una revisión reciente que no se han generados modelos que expliquen la evolución de la cooperación sin invocar la selección de parentesco, a pesar de la afirmaciones en ese sentido [26].

Si bien estas críticas me parecen pertinentes creo que pecan de cierta estrechez de miras. Los animales no son los únicos organismos susceptibles de cooperar. De hecho, la complejidad en el procesamiento de la información que poseen ratas o pájaros los hacen tal vez los peores sujetos experimentales para comprobar modelos tan simples como el DPI y estrategias como TFT. Diferentes mecanismos de cooperación deben guiar diferentes niveles de cooperación. A su vez, el mecanismo que hace surgir la cooperación a un nivel no tiene porqué ser el mismo que la mantiene. Siguiendo la clasificación de [12] de los mecanismos de cooperación, la reciprocidad directa pudo dar lugar a la reciprocidad indirecta y, posteriormente al surgimiento del castigo. Las formas de cooperación también evolucionan y modelos que sirven para una no tienen porqué servir para todas.

Según la teoría de Axelrod y Hamilton, la cooperación puede surgir cuando la probabilidad de repetir los encuentros entre organismos es alta. Formalmente esto es igual a asumir un juego infinito con descuento temporal cercano a 1. Por lo tanto, asumen implícitamente que el descuento temporal es 1, lo que no parece un supuesto realista. Segun Keynes ‘‘En el largo plazo estamos todos muertos’’, es difícil imaginar que un organismo no ‘‘prefiera’’ una recompensa inmediata a una mayor, pero posterior. Esto puede explicar la dificultad de encontrar evidencia empírica a favor de la reciprocidad o de estrategias similares a $tit\ for\ tat$ en implementaciones del DPI en situaciones experimentales o naturales.

El trabajo de Axelrod propició que una cantidad enorme de los esfuerzos teóricos se centraran en la evolución de la cooperación en sistemas biológicos y en el DPI en particular.

Pero como vimos, la teoría parece hipertrofiada mientras que su evaluación empírica permanece atrofiada [11] [30] [51]. Además, el DPI no parece el mejor modelo para estudiar la evolución de la cooperación cuando hay disponibles otras alternativas [51]. Como otros aspectos de la biología evolutiva, el estudio de la evolución de la cooperación parece cenagoso, con confusiones terminológicas y poco contacto entre teoría y comprobación empírica [51] [26].

Después de estas críticas parece difícil justificar otro análisis teórico del DPI. Definitivamente el modelo que voy a presentar no va a superar todas estas críticas. A mi favor comentaré que las estrategias a analizar son todas de la misma complejidad, por lo que comparar su desempeño en el mismo contexto tiene sentido. Que son sencillas, por lo que pueden aplicarse a varios niveles de complejidad. Además, presento un modelo de redes neurales biológicamente plausible capaz de implementarlas, por lo que si se desea desarrollar el modelo modificando o creando estrategias se puede hacer a partir de estas redes, sin saltos de complejidad injustificados. En una literatura tan amplia es difícil hacer un aporte novedoso, confío, sin embargo, en que este no carezca de todo interés.

Capítulo 4

Memorias asociativas

Una vez que conceptualizamos a los organismos de una población como jugadores podemos utilizar la teoría de juegos para establecer qué estrategias serán evolutivamente estables y responder preguntas acerca de su dinámica poblacional.

Por otro lado, nos podríamos preguntar qué sistemas propios de los organismos hacen posible la elección de estrategias y cómo estas elecciones cambian según las circunstancias en las cuales se encuentran.

Aquí nos alejamos del dominio de la teoría de juegos y nos adentramos en el estudio de la capacidad de procesamiento de la información de los sistemas biológicos. ¿Cómo se implementan en los organismos la elección y ejecución de las estrategias?

4.1. Modelos de Neuronas

El sistema nervioso es el procesador natural de información por excelencia. Su elemento constitutivo básico son las neuronas, células especializadas en integrar y transferir señales electroquímicas. Las neuronas se conectan unas con otras mediante uniones especializadas llamadas sinapsis. Forman así una red compleja que permite procesar información proveniente del ambiente para dar lugar a respuestas adecuadas por parte de los organismos. En la mayoría de los animales el sistema nervioso es lo suficientemente plástico como para aprender, es decir, modificar el comportamiento a partir de la experiencia. El aprendizaje a su vez depende de algún tipo de memoria.

Uno de los enfoques que se ha utilizado para el estudio del sistema nervioso es el modelado matemático. Partiendo de supuestos y simplificaciones sobre su funcionamiento, se crean estructuras matemáticas capaces de reproducir algunas de sus funciones.

Un trabajo pionero en esta área es la neurona McCulloch-Pitts, presentada en un articulo de 1943. Este modelo presenta a la neurona como un dispositivo binario: tiene dos estados posibles, activo (1) o inactivo (0). La neurona posee un umbral determinado y diversas entradas de otras neuronas. En un tiempo t dado cada una de estas entradas están activas o inactivas. La neurona que recibe estas entradas las integra sumándolas y comparándolas con su umbral, si el umbral es superado la neurona estará activa en el tiempo siguiente $t+1$, si no es superado la neurona estará inactiva.

Este modelo es atractivo por varios motivos, es simple, pero permite obtener comportamientos interesantes. Por ejemplo variando los parámetros del modelo, una red de neuronas McCulloch-Pitts es capaz de realizar cualquier operación lógica finita[1]. En cambio, a la luz del conocimiento actual de neurofisiolgía, resulta muy poco representativo del comportamiento real de las neuronas. La neurona McCulloch-Pitts ha sido enormemente influyente, no en neurociencia, sino a nivel teórico y por su impacto en el desarrollo de la computación[1].

A partir de este modelo han surgido otros. De particular importancia para este trabajo es la neurona genérica de las redes neurales. En este caso las neuronas no son dispositivos binarios, si no que su actividad está representada por un número real que refleja una frecuencia de disparo. Esta neurona recibe n entradas. Cada una de estas entradas posee un peso sináptico w_i. La neurona suma la actividad de las n neuronas, las pondera por su peso sináptico dando lugar respuesta g.

$$g = f_1 w_1 + f_2 w_2 + ... + f_n w_n$$

Donde f_i es la actividad de la neurona i-ésima. A partir de esta linea de investigación, en la década de 1970, comienzan a surgir modelos que pretenden reproducir algunos aspectos de la memoria. Una de las capacidades de la memoria que estos modelos exploran es la asociación entre un estímulo y su respuesta. Estos modelos son llamados memorias asociativas.

4.2. Memorias Asociativas

¿Cómo se establece la asociación entre un estímulo y su respuesta? La respuesta a esta pregunta involucra pensar cuál es el sustento físico de la memoria en los sistemas biológicos. La asunción entre los neurocientíficos es que los cambios en la fuerza de las sinapsis es la forma en la que se almacenan las memorias[1].

A continuación uno se podría preguntar cómo cambia la fuerza de las sinapsis. Es razonable pensar que este cambio es función de la actividad de las neuronas involucradas en la sinapsis. Podría ser de una u otra exclusivamente. Podría ser alguna función de ambas. La forma en que la fuerza de una sinapsis cambia se conoce como regla de aprendizaje.

Un ejemplo importante de regla de aprendizaje es la regla de Hebb, en ella el cambio en la fuerza de una sinapsis es función de la actividad de las neuronas pre y post-sinápticas. En particular nos va a interesar la regla de Hebb generalizada o regla del producto externo, en ella el cambio en la fuerza de la sinapsis es proporcional al producto de la actividad pre y post-sináptica[1].

Formalicemos la discusión, modelaremos los estímulos y respuestas como vectores, estos representan el patrón de activación de grupos de neuronas. Su asociación se consigue mediante matrices de correlación que representan la fuerza de conexión entre las neuronas de los grupos de salida y entrada.

Supongamos que representamos el patrón de activación que produce el estimulo en un primer grupo de neuronas como un vector f y el patrón de activación un segundo grupo como el vector g (respuesta). Supongamos la misma dimensión n para ambos.

Así, la actividad de la neurona f_j y la actividad de la neurona g_i cambian la fuerza de asociación entre ellas de la siguiente forma:

$$\Delta A(i,j) = \eta f_j g_i$$

Donde η es una constante de proporcionalidad.

Por otro lado, si asumimos que las neuronas suman linealmente sus entradas, la actividad de todas las neuronas en f ponderadas según la fuerza de su sinapsis j-ésima y sumadas, darán como resultado el patrón de activación $g(i)$ a la i-ésima neurona del segundo grupo:

$$g(i) = \sum A(i,j) f(j)$$

Con estas dos asunciones (regla del producto externo y suma lineal de las entradas), el vector f multiplicado por la matriz A resulta en el vector g. Así, la asociación entre f y g queda establecida.

$$g = Af$$

La construcción de la matriz A se logra mediante el producto externo de g y f^t.

$$A = gf^t$$

Asumiendo conjuntos de vectores de entrada y salida ortonormales, la matriz A permite almacenar arbitrariamente y de manera exacta n asociaciones entre vectores mediante la matriz:

$$A = \sum_{1}^{n} gf^t$$

Este modelo de memoria tiene algunas características que se encuentran también en las memorias biológicas. En primer lugar son memorias distribuidas, la asociación no se encuentra en ningún elemento del sistema sino que está repartida en ellos. Además, los mismos elementos sostienen varias asociaciones a la vez, es decir que la información de varias asociaciones está sobreimpuesta en las mismas unidades.

Estas dos características tienen sentido biológico. Si cada asociación estuviera almacenada en un elemento del sistema, la perdida de este elemento conllevaría la perdida de la asociación, lo que podría ser muy perjudicial para la supervivencia del organismo. Las

neuronas son muy sensibles a distorsiones mecánicas o bioquímicas, por lo que es esencial que la perdida de una neurona no conlleve la perdida de cantidades relevantes de información.

Por otro lado, si para cada asociación se requiriera nuevos elementos el sistema no sería eficiente energeticamente. Sobre todo en el caso en el que las unidades funcionales son neuronas, células que tienen una demanda enorme de energía.

Otra capacidad de estas memorias asociativas es la de crear conceptos. La capacidad de agrupar fenómenos dispares en categorías es fundamental para una adecuada respuesta al ambiente. El mundo es infinitamente variable, para actuar efectivamente él debemos ser capaces de ignorar detalles superficiales. El caso del mnemonista de Luria, incapaz de reconocer caras debido a que cada momento de una cara le parecía incompatible con otra[1]. O el personaje de Borges, Funes el memorioso, nos recuerdan lo fundamental de esta capacidad y como raramente somos consientes de ella.

La implementación de este fenómeno en el modelo de memorias matriciales asume que fenómenos similares provocarán patrones de disparo similares en la entrada de nuestro sistema. Así tendremos un conjunto de vectores $\{f1, f2, ..., fk\}$ correlacionados, asociados a una misma respuesta g. Podemos suponer, como ilustración, que los vectores f_i corresponden al mismo rostro realizando diferentes gestos y bajo diferentes condiciones lumínicas y que el vector g representa el nombre de esa persona.

La matriz de asociación estará representada por:

$$A = g \sum_{i=1}^{n} f^t$$

De esta forma la sumatoria de los vectores f_i, generarán un vector $f*$ tipo, construido a partir de las características acumuladas de los vectores f_i. Un nuevo estimulo f' provocará la respuesta g o similar en la medida que sea similar al vector tipo $f*$ construido.

A pesar de estas características interesantes estos modelos poseen poca flexibilidad en sus respuestas. Se puede mencionar, por ejemplo, que las asociaciones carecen de contexto. Establecida una asociación la misma entrada provocará la misma salida. Esto claramente se encuentra en contradicción con nuestra experiencia cotidiana, donde nuestras respuestas dependen significativamente del contexto.

4.3. Memorias Asociativas Dependientes de Contexto

El problema de las respuestas contextuales pueden plantearse de la siguiente manera: dada una asociación entre estimulo y respuesta, deseamos variar la respuesta a ese mismo estimulo según el contexto. Más precisamente, si f es el estímulo, que la respuesta sea g_1 o g_2 de acuerdo a si el contexto es p_1 o p_2[31]. Allí se presenta una modificación del modelo de memorias asociativas para permitir este tipo de comportamiento.

En el modelo los contextos se representan como vectores p, computándose con el estimulo f mediante el producto de Kronecker. El vector resultante pasa por la matriz asociativa

M, para dar la respuesta g_i[31]. Cuando los vectores contextuales y los de estímulo son ortonormales, la solución al problema es exacta:

$$M = \sum \sum g_{ij}(f_i \otimes p_{ij})^t$$

Dado un estimulo f_h y un contexto p_k la matriz seleccionará la respuesta adecuada por el doble filtro impuesto por los productos escalares:

$$M(f_h \otimes p_{hk}) = g_{hk} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} < f_1, f_h >< p_{ij}, p_{hk} >$$

Este formalismo permite además reproducir los resultados de la lógica proposicional con operadores matriciales, asignando los valores de verdad a vectores arbitrarios[32].

Por ejemplo, asignando los valores de verdad verdadero y falso a los vectores s y n respectivamente (para simplificar la notación asumimos que son ortonormales), podemos construir la función lógica negación como la matriz:

$$N = sn^t + ns^t$$

Vemos que:

$$Ns = sn^t s + ns^t s = n$$

$$Nn = sn^t n + ns^t n = s$$

Esta función lógica no requirió la utilización del modelo contexto dependiente, pero podemos construir el conectivo de Sheffer, que es falso solo cuando ambas proposiciones son verdaderas, de la siguiente manera:

$$S = n(s \otimes s) + s(s \otimes n) + s(n \otimes s) + s(n \otimes n)$$

Y por lo tanto,

$$S(s \otimes s) = n$$

$$S(s \otimes n) = S(n \otimes s) = S(n \otimes n) = s$$

Es sabido que en la lógica proposicional binaria el conectivo de Sheffer es capaz de construir todas las demás funciones lógicas[32].

Capítulo 5

Un modelo del DPI con estrategias basadas en funciones booleanas

En este trabajo me centraré en el análisis de estrategias deterministas para jugar al DPI que utilizan las jugadas del encuentro t para determinar lo que juegan en el momento $t+1$. El conjunto de estrategias posibles con estas condiciones se corresponden con las 16 funciones booleanas de dos variables. Si asignamos a la decisión de cooperar el número 1 y a no cooperar el número 0, podemos escribir las 16 estrategias en una tabla de verdad:

Tabla 5.1: Estrategias representadas en una tabla de verdad

J_1	J_2	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Aquí las columnas J_1 y J_2 representan las jugadas de los jugadores 1 y 2 respectivamente en el tiempo t y las columnas E_i representan la respuesta de la estrategia i en el tiempo $t+1$ a cada posible combinación de jugadas, asumiendo que la estrategia es la del jugador 1. Es decir, la fila dos corresponde a la respuesta de las estrategias cuando cooperaron en la jugada anterior y su rival no y la fila tres es la respuesta de las estrategias cuando ellas no cooperaron y su rival sí. Por ejemplo, la estrategia 11 (E_{11}), coopera cuando cooperó en la jugada anterior, pero su rival no y no coopera cuando su rival cooperó y ella no.

Estrictamente las funciones booleanas presentadas no constituyen estrategias bien definidas para el DPI ya que no prescriben qué debe jugarse en la primer jugada t_0. Por lo tanto, podríamos hablar de 32 estrategias posibles a partir de las 16 funciones booleanas de dos variables, asignando a cada una de ellas una estrategia donde cooperan en el primer movimiento y otra donde no cooperan en el primer movimiento. Por el momento no me preocuparé de este detalle y hablaré de 16 estrategias. Antes de continuar con la presentación del modelo es importante discutir la relevancia de estudiar estas estrategias en particular.

5.1. Relevancia de las funciones booleanas como estrategias para jugar la DPI

Ya he mencionado que la cooperación debió surgir varias veces a lo largo de la evolución a diferentes niveles de organización y mediante diversos mecanismos. La aplicación del modelo DPI y las estrategias consideradas deben poder aplicar al nivel de organización considerado o se deben explicitar las características de las estrategias consideradas para evaluar a qué nivel de organización se pueden aplicar.

Si nos detenemos a observar las características de las estrategias que presentamos podemos destacar su simplicidad definida por su *baja demanda computacional* e *inflexibilidad*. La baja demanda computacional refiere a la posibilidad de efectuar la relación entre las entradas y la salida de manera económica en términos informativos. Se requieren 4 bits para codificar la entrada y 2 para codificar la salida, aunque hay dos estrategias (E_1 y E_{16}) que solo requieren un bit para la salida ya que su estado no es modificado por la entrada, muchas otras estrategias solo requieren identificar una sola entrada y las más complejas requieren identificar dos. Por otro lado, la inflexibilidad se refiere a que la respuesta depende exclusivamente de la jugada anterior, incluso si su comportamiento las lleva a obtener malos resultados seguirán comportándose igual.

Es interesante preguntarse cuál sería el ente biológico más sencillo que puede expresar estas estrategias. Se puede pensar en receptores con dos sitios de unión a ligando (que deberían poseer una forma de identificar cada sitio para ejecutar algunas estrategias) o un sitio de unión a ligando y otro para un modulador. Estas moléculas deberían tener un comportamiento particular que reprodujera la forma de las estrategias. Por ejemplo, en ciertas condiciones de unión cambiar su conformación. Actualmente podemos encontrar una inmensa variedad de proteínas que cumplen condiciones mucho más complejas que estas, como enzimas o receptores. Por ejemplo, los receptores ionotrópicos NMDA tienen sitios de unión para el glutamato, glicina, zinc, fenciclidina (PCP) y magnesio. Cada uno de estos compuestos tiene un papel en la regulación de la apertura del canal iónico del receptor. Tanto el zinc como el PCP inhiben la apertura, mientras que el glutamato es necesario, pero no suficiente, para su apertura. Codificando la asociación con el receptor de estos compuestos con 1 y su ausencia con 0 y la apertura del canal como 1 y su cierre como 0, podemos escribir:

Tabla 5.2: Posible representación de la computación lógica del receptor NMDA

Glu	Mg^{2+}	PCP	Estado del receptor
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Nótese que incluimos solo tres de sus potenciales ligandos. Por supuesto, esta tabla no abarca la complejidad del receptor cuyo estado puede no ser capturado completamente con la lógica binaria. Por ejemplo, este receptor no solo permite el paso de Na^+ si no también de Ca^{2+}, lo que activa una serie de cascadas de señalización involucradas en la potenciación sináptica a largo plazo. Este es solo un ejemplo de sofisticación computacional a las que pueden llegar las moléculas y, más aún, cuando se las organiza en redes de interacción.

En términos más abstractos podemos pensar en moléculas que pueden unirse entre sí en dos lugares. Para tener una imagen concreta imaginemos una molécula lineal que puede unirse por sus extremos a otra igual a ella. De esta manera las configuraciones posibles serían las moléculas unidas por ambos lados, unidas por uno u otro o separadas. Coincidiendo estos estados con los cuatro posibles estados que las estrategias toman como entrada. El encuentro entre dos moléculas generaría un estado diferente según las estrategias que posean, podrían permanecer juntas por ambos o uno de los extremos, permanecer separadas o generar ciclos entre diferentes estados. Uno podría imaginar una población de estas moléculas cada una con una estrategia particular, a través del tiempo podría darse una evolución a moléculas de mayor tamaño por unión más o menos permanente de las diferentes moléculas primigenias.

Por supuesto, se debería argumentar si efectivamente esta situación constituiría un DPI, para lo que sería necesario pensar en un ambiente concreto que de ventajas y desventajas a las moléculas según los diferentes estados. Esto podría dar lugar a imaginar escenarios forzados innecesariamente. Pero estas estrategias también serían capaces de aplicarse en cualquier juego matricial de 2×2, por lo que su estudio no se cierra al DPI. Mi argumento es que puede haber entes biológicos muy simples capaces de implementar estas estrategias, que la evolución de los encuentros de estos entes en el tiempo puede llevar a situaciones de complejidad creciente y que, por lo tanto, estudiar estas estrategias puede ser relevante para un conjunto de situaciones biológicas amplio. Además, dado que un ente biológico tan sencillo como los que imaginamos podría implementar estas estrategias, también lo pueden hacer conjuntos de interacciones moleculares, organismos unicelulares o multicelulares. Es decir, niveles de organización mayores.

En particular, como se mostrará en explícitamente en la sección siguiente y como se puede intuir a partir de la presentación del modelos de memorias asociativas dependientes de contexto, estas estrategias pueden ser implementadas fácilmente en modelos neurobiológicos plausibles. No hay duda de la importancia teórica de la exploración de estrategias independientemente de cómo puedan ser ejecutadas por un sistema biológico, así como no puede haber dudas de la relevancia de plantear hipótesis sobre la implementación de ciertas estrategias en sistemas biológicos concretos. Claramente, no cualquier estrategia estará disponible a cualquier nivel de complejidad, el explicitar cómo una estrategia puede ser implementada también brinda una idea de las posibles variantes de estrategias con las que es relevante compararla.

Relacionado a esto, una ventaja de las estrategias presentadas, al ser deterministas y tomar en cuenta solo la última jugada, es que la dinámica de los encuentros llega a un estado final rápidamente, ya sea a un estado que ya no se modifica o a un ciclo de estados que se repite siempre igual. Estrategias más complejas, como algunas de las que participaron en el torneo de Axelrod, pueden demorar muchas más jugadas en estabilizarse o no hacerlo nunca, por lo que probablemente requieran mayor tiempo de interacción para rendir

mejor. Es probable que los tiempos de interacción a niveles inferiores de complejidad biológica sean bajos, por lo que estrategias complejas, más allá de la posibilidad de ser implementadas, podrían tener una desventaja comparativa.

En resumen, la cooperación debe haber evolucionado varias veces a lo largo de la historia de la vida y a varios niveles de organización, ya que la complejidad biológica a un nivel implica cooperación a niveles inferiores. Investigar las estrategias basadas en funciones booleanas de dos variables tiene relevancia ya que pueden ser implementadas a cualquier nivel de organización biológica debido a su simplicidad. Tomando en cuenta que, a medida que aumenta la complejidad, el conjunto de estrategias posibles también aumenta y, por lo tanto, es posible que la eficacia de estas estrategias disminuya.

5.2. Implementación de las estrategias mediante memorias dependientes de contexto

Como mostré, las memorias dependientes de contexto son un modelo de redes neuronales biológicamente plausible capaz de implementar funciones booleanas de dos entradas codificadas como vectores, en esta sección codificaré las estrategias bajo este modelo.

Asumiremos que la cooperación y la no cooperación se representan como vectores c y n tales que $c, n \in \Re^2$ siendo $c = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $n = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

De esta manera podemos representar cada una de las estrategias como una matriz asociativa dependiente de contexto, por ejemplo, la matriz de E_1 estaría dada por:

$$E_1 = c(c \otimes c)^T + c(c \otimes n)^T + c(n \otimes c)^T + c(n \otimes n)^T$$

Donde $\otimes$ representa al producto de Kronecker. Entonces:

$$E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Son suficientes dos neuronas para implementar cualquiera de las 16 estrategias, ya que es la mínima cantidad requerida para codificar un vector de dos entradas.

Como ejemplo, podemos ver que si multiplicamos cualquier entrada por la matriz E_1 obtendremos cooperación:

$$E_1(c \otimes c) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$E_1(c \otimes n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_1(n \otimes c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_1(n \otimes n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices para todas las estrategias se encuentran en el anexo B.

5.3. Enfrentamientos expresados como grafos

Podemos ilustrar la dinámica de los enfrentamientos entre estrategias como un grafo dirigido donde los nodos son los posibles estados que puede tomar una partida. Los estados posibles son:

El estado 11, que llamaremos estado 1, donde ambos jugadores cooperan. El estado 10, que llamaremos estado 2, donde el primer jugador coopera y el segundo no. El estado 01, que llamaremos estado 3, donde el primer jugador no coopera y el segundo sí. El estado 00, que llamaremos estado 4, donde ninguno de los jugadores coopera.

Podemos entonces formar un grafo con los nodos 11, 10, 01 y 00; unirlos con aristas dirigidas según las estrategias de los jugadores enfrentados. Las aristas dirigidas indican que si la partida se encuentra en el nodo desde el que parte, en el tiempo $t+1$ estará en el nodo al que la arista llega. Por ejemplo el enfrentamiento entre E_4 y E_1 tendrá el grafo 5.1. El grafo permite ver con facilidad que este enfrentamiento terminará en un estado de cooperación mutua o en una explotación de E_1 por E_4, dependiendo de en qué estado comience el enfrentamiento.

Además, cada grafo pude expresarse mediante su matriz de adyacencia. En ella se asigna una fila y una columna a cada nodo y se agregan unos en la entrada que corresponde a la fila del nodo de donde parte la arista y a la columna del nodo a donde llega. Por ejemplo, la matriz de adyacencia del grafo presentado arriba es:

$$E_4E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

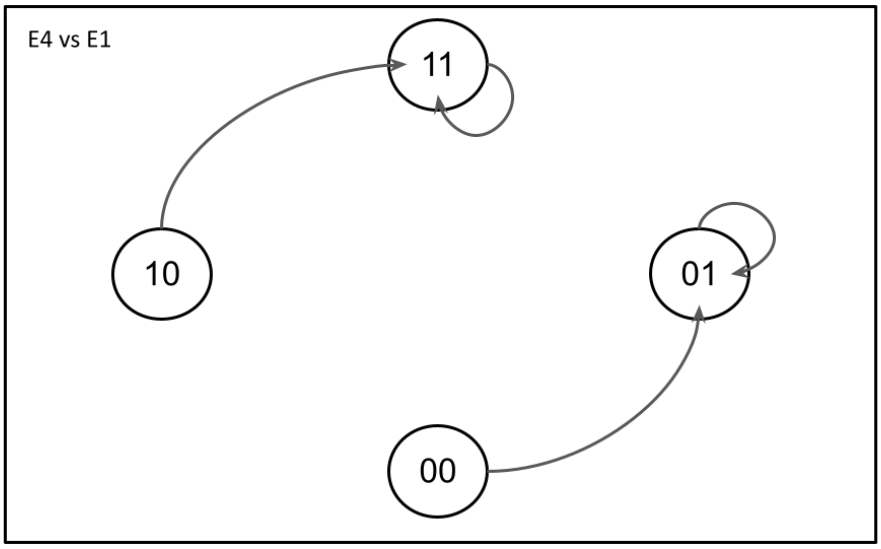


Figura 5.1: Grafo del enfrentamiento entre las estrategias E_4 y E_1

Los valores y vectores propios de la matriz de adyacencia nos permiten identificar enfrentamientos que se perpetúan en un mismo estado o la existencia de ciclos entre estados. Cuando uno de los valores propios es 1 se llega al menos a un estado final fijo, la multiplicidad geométrica de este valor propio indica cuántos estados finales se pueden alcanzar y sus vectores propios asociados cuáles son estos estados. Por ejemplo, la matriz E_4E_1 el valor propio 1 tiene multiplicidad geométrica 2 y vectores propios asociados:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Indicando que los estados finales pueden ser el 1 o el 3[1].

Cuando aparecen valores propios -1 y valores complejos, nos indican que existen ciclos entre los estados y sus vectores propios asociados nos indican entre qué estados. Por ejemplo, el enfrentamiento E_6E_{11} cicla entre todos los estados como se puede ver en su grafo 5.2. Correspondientemente los valores propios de su matriz de adyacencia son 1, -1, i, $-i$. El enfrentamiento $E_{15}E_6$ tiene un ciclo de tres estados, su matriz de adyacencia tiene valores propios 1, 0, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ y su conjugado.

Como último ejemplo podemos ver el enfrentamiento E_4E_{13} (imagen 5.4) que tiene dos ciclos de dos estados. Sus valores propios son 1, -1 y 0. Se pueden ver todos los grafos de los enfrentamientos, sus matrices de adyacencia y sus valores y vectores propios en el anexo B.1

[1]Estrictamente los vectores propios pueden ser cualesquiera que cumplan $\begin{pmatrix}a\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\0\\a\\0\end{pmatrix}$ con $a \in \Re$

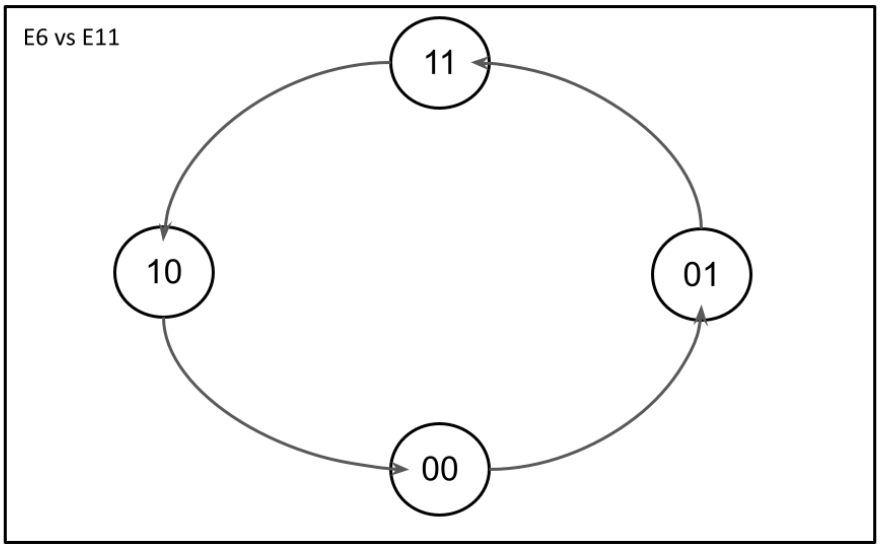


Figura 5.2: Grafo del enfrentamiento entre las estrategias E_6 y E_11

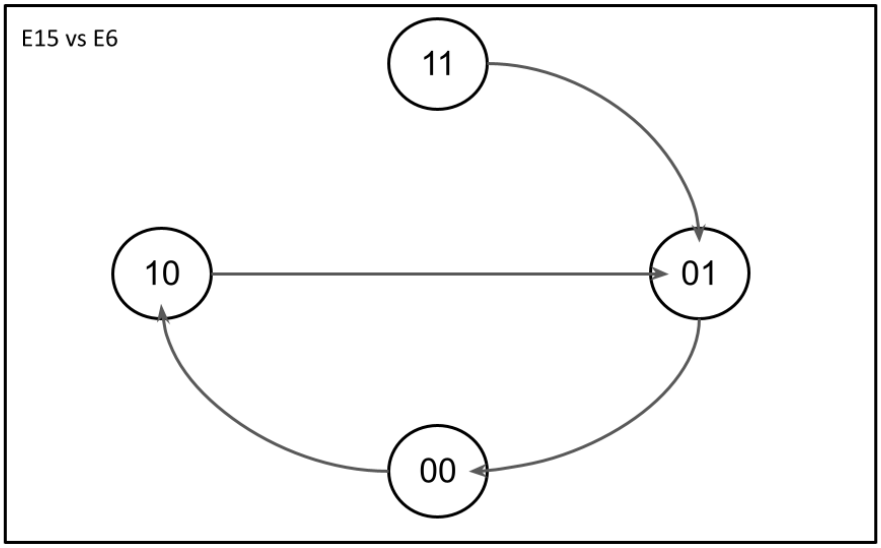


Figura 5.3: Grafo del enfrentamiento entre las estrategias E_{15} y E_6

Esta forma de analizar los enfrentamientos permite identificar algunas de sus características. El número total de enfrentamientos es de 256, ya que tenemos 16 estrategias que se enfrentan todas contra todas, incluso contra ellas mismas. Por otro lado, podemos observar que si tenemos un grafo con cuatro nodos y de cada nodo solo sale una flecha (como las estrategias son deterministas, dado un enfrentamiento, la secuencia de estados siempre se repite igual), por lo que la cantidad de grafos posibles son $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$. Ya que todas las estrategias difieren al menos en una respuesta, todos los enfrentamientos son distintos y por lo tanto todos los posibles grafos están representados en los enfrentamientos. Esto implica que todas las posibles matrices de adyacencia con exactamente un 1 en cada columna están representadas, una por cada grafo que representa un enfrentamiento.

Si consideramos el conjunto de todos los enfrentamientos, podemos ver que todos los estados están igualmente representados. Es decir, la misma cantidad de caminos llevan a cada uno de los estados, todos los ciclos se reparten equitativamente entre todos los estados, no hay un estado que ‘‘atraiga’’ particularmente más que otro. Por lo tanto, cualquier

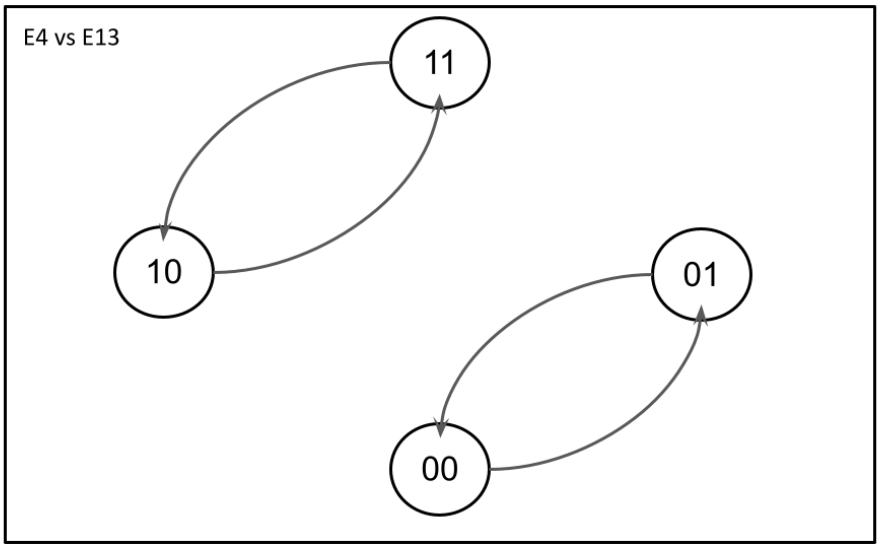


Figura 5.4: Grafo del enfrentamiento entre las estrategias E_4 y E_{13}

diferencia entre las preferencias por un estado u otro está dada por la matriz de pago del juego y no porque entre el conjunto de estrategias escogidas algunos estados se alcancen con mayor facilidad. Si pensamos en los torneos de Axelrod, no sabemos si el conjunto de estrategias participantes ‘‘preferían’’ algun estado ni como esto puede haber influido en el desarrollo de los torneos.

Para ver esto, pensemos un caso extremo. Imaginemos que utilizamos solo las estrategias E_1 y E_2, solo empezando en el estado 4 (00) en el enfrentamiento E_2E_2 tendremos otra cosa que cooperación mutua perpetua. Para un ejemplo menos extremo, imaginemos un conjunto de estrategias que tengan un sesgo hacia los estados 1 y 4, como el estado 1 es preferible al 4 desde el punto de vista del pago, se podría entonces favorecer la cooperación.

Por otro lado, el estado inicial influye en la dinámica del enfrentamiento, como puede observarse en los grafos 5.1 y 5.4. Por lo tanto, si se establece un estado inicial para los enfrentamientos estaremos sesgando el acceso a ciertos estados. Este será otro aspecto a tomar en cuenta cuando realicemos nuestros experimentos.

5.4. Relación entre la matriz de adyacencia y las matrices de asociación

Si E_i es la matriz asociativa de la estrategia i y E_j es la matriz asociativa de la estrategia j, podemos escribir:

$$E_i = (a_i\ b_i\ c_i\ d_i) \quad y \quad E_j = (a_j\ b_j\ c_j\ d_j)$$

donde

$$a_i,\ b_i,\ c_i,\ d_i,\ a_j,\ b_j,\ c_j,\ d_j \quad \in \quad \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$$

Podemos escribir la matriz de adyacencia del enfrentamiento E_iE_j como:

$$E_iE_j = ((a_i \otimes a_j)(b_i \otimes b_j)(c_i \otimes c_j)(d_i \otimes d_j))$$

Observemos que:

$$a_i = E_i(c \otimes c)$$
$$b_i = E_i(c \otimes n)$$
$$c_i = E_i(n \otimes c)$$
$$d_i = E_i(n \otimes n)$$

Entonces:

$$E_iE_j = (E_i(c \otimes c) \otimes E_j(c \otimes c) \mid E_i(c \otimes n) \otimes E_j(n \otimes c) \mid E_i(n \otimes c) \otimes E_j(c \otimes n) \mid E_i(n \otimes n) \otimes E_j(n \otimes n))$$

Que podemos escribirlo:

$$E_iE_j = (E_i \otimes E_j)_{4\times 16}\ T_{16\times 4}\ I_4$$

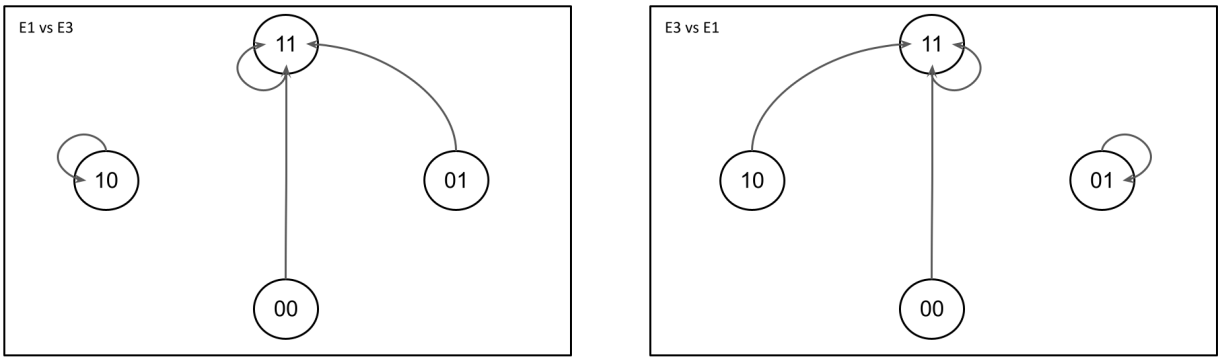
Donde I_4 es la matriz identidad 4×4 y:

$$T = ((c \otimes c) \otimes (c \otimes c) \mid (c \otimes n) \otimes (n \otimes c) \mid (n \otimes c) \otimes (c \otimes n) \mid (n \otimes n) \otimes (n \otimes n))_{16\times 4}$$

Por lo tanto, a partir de las matrices de las memorias asociativas de las estrategias podemos obtener las matrices de adyacencia de los enfrentamientos.

5.5. Simetrías en los enfrentamientos

Los 256 grafos representan todos los enfrentamientos posibles, incluso aquellos en que el orden de los jugadores se invierte, es decir E_1E_3 está considerado como un enfrentamiento distinto de E_3E_1 en ese conjunto. Obviamente, estos pares de grafos expresan la dinámica del mismo enfrentamiento desde la perspectiva de uno y otro de los jugadores. Como los únicos estados asimétricos son el 2 y el 3, el 2 representando el estado donde solo el jugador 1 coopera y el 3 representando el estado donde solo el jugador 2 coopera, estos grafos son simétricos como podemos ver en la figura 5.5. En definitiva, podemos reducir los enfrentamientos a $\frac{17!}{2!15!} = 136$ sin perder información, los restantes 120 son todos los enfrentamientos entre estrategias diferentes con el orden de los jugadores intercambiados.



(a) Grafo de E_1E_3 (b) Grafo de E_3E_1

Figura 5.5: Grafos del mismo enfrentamiento cambiando el orden de las estrategias donde se puede ver la simetría que presentan.

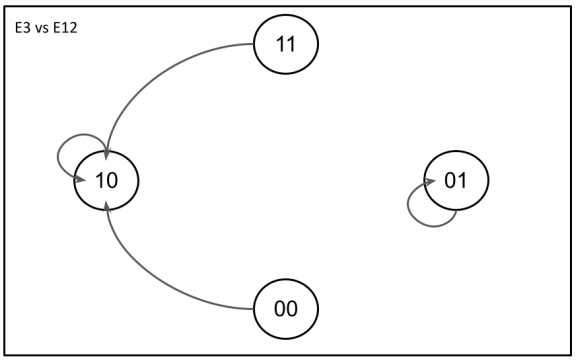
Defino la estrategia opuesta como aquella que toma la decisión contraria para cada estado del juego, por ejemplo, la estrategia E_3 es la opuesta de la estrategia E_{12}:

Tabla 5.3: E_3 y E_{12} ejemplo de estrategias opuestas

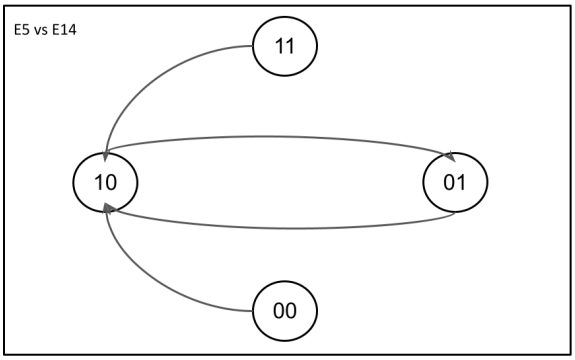
J_1	J_2	E_3	E_{12}
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0

Nótese que frente a un estado donde E_3 cooperó y E_{12} no, la respuesta de E_3 es cooperar nuevamente, mientras que E_{12} no coopera. Entonces, en los casos que se enfrentan estrategias opuestas tenemos grafos en los que los únicos estados alcanzables son el 2 y el 3. Por lo tanto, los únicos destinos posibles de estos enfrentamientos son ciclar entre estos estados o quedar en alguno de ellos. Este tipo de enfrentamientos abarcan a 16 del total de 256 o a 8 de los 136 una vez quitados los enfrentamientos redundantes.

Hay un conjunto de 16 enfrentamientos que presentan un comportamiento análogo al de los enfrentamientos entre estrategias opuestas, pero entre los estados 1 y 4. Es decir, como si fueran una rotación de $90°$ de los grafos de enfrentamientos entre estrategias opuestas. Como se puede adivinar, estos enfrentamientos son entre estrategias que responden igual frente al mismo estado del enfrentamiento. Algunos de estos enfrentamientos están presentes en los enfrentamientos de las estrategias consigo mismas, por ejemplo, E_2E_2 o E_9E_9. Otros entre estrategias diferentes, por ejemplo $E_{13}E_{11}$

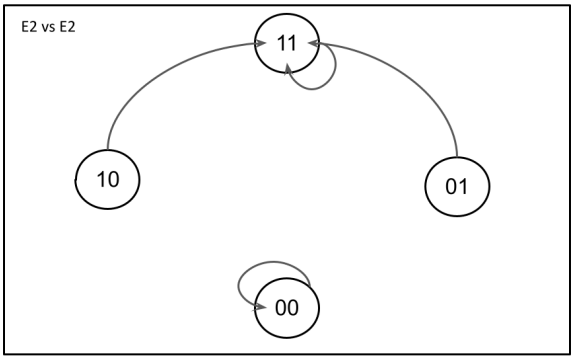


(a) Grafo de E_3E_{12}

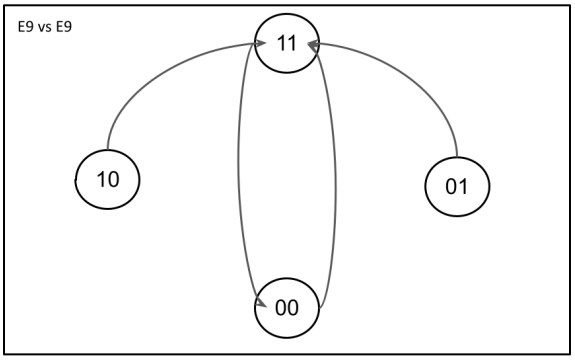


(b) Grafo de E_5E_{14}

Figura 5.6: Ejemplos de enfrentamientos entre estrategias opuestas



(a) Grafo de E_2E_2



(b) Grafo de E_9E_9

Figura 5.7: Ejemplos de enfrentamientos entre estrategias idénticas como rotaciones de $90°$ de los grafos entre estrategias opuestas

5.6. Análisis combinatorio de los enfrentamientos

Nos podemos preguntar cuántos enfrentamientos presentan ciclos, cuántos se perpetúan en un estado, cuántos juegan su destino en la elección del estado inicial. Todas estas preguntas las podemos responder mediante una análisis combinatorio de los enfrentamientos.

Primero, determinemos cuantos enfrentamientos ciclan entre los 4 estados. Podemos pensar que la matriz de adyacencia de estos grafos tienen solo un 1 por fila, ya que más de un 1 por fila implica que se llega a ese estado desde dos estados diferentes, lo que impide que se forme un ciclo entre todos los estados, y, además, ningún estado se dirige a si mismo, por lo tanto la diagonal principal está vedada. Entonces, en la primer columna podemos poner el 1 en tres filas (excluyendo la fila del propio estado elegido), lo que significa que del estado 1 podemos pasar al estado 2, 3 o 4. Una vez hecha esta elección en la segunda columna podemos colocar el 1 en dos filas. Una vez realizado esto, la fila de 1 en la tercera y cuarta columna queda determinada, ya que se debe volver al estado inicial. Por lo tanto, la cantidad de ciclos de cuatro estados son: $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$

En segundo lugar, podemos responder cuántos de los enfrentamientos presentan ciclos de tres estados. Repitiendo el razonamiento anterior podemos pensar que uno de los estados, puede ir a cualquier otro, incluso a si mismo, mientras los otros tres deben realizar un

ciclo que cumpla las condiciones de no tener unos en la diagonal, un único 1 por fila y que el ciclo cierre. Por lo tanto, hay 4 opciones para elegir un estado independiente del ciclo, y tenemos 2 opciones de ciclo para cada una de ellas y tenemos 4 opciones para dirigir el estado independiente, hacia alguno de los estados del ciclo o hacia si mismo. Por lo tanto, $4 \times 2 \times 4 = 32$ enfrentamientos con ciclos de tres estados.

Para determinar la cantidad de enfrentamientos que tienen ciclos de dos estados podemos pensar en cuántos grupos de dos estados se pueden formar a partir de los cuatro estados. La respuesta es $\frac{4!}{2!2!} = 6$. Los otros dos estados pueden dirigirse a cualquiera de los otros tres o a si mismos, por lo que para cada ciclo de dos estados hay $4 \times 4 = 16$ enfrentamientos distintos. Tendríamos entonces $16 \times 6 = 96$ enfrentamientos con ciclos de dos estados. Pero, al contar de esta manera estamos teniendo en cuenta dos veces a los enfrentamientos que presentan dos ciclos de dos estados, por lo tanto debemos restar a estos 3, ya que por el mismo razonamiento del principio, tenemos 6 enfrentamientos con dos ciclos de dos estados, pero como estos cuentan como un solo enfrentamiento estamos contando 3 en exceso. Por lo tanto, tenemos 93 enfrentamientos con al menos un ciclo de dos estados.

Por lo tanto, hay 6 enfrentamientos con ciclos de cuatro estados, 32 con ciclos de tres estados, 93 con ciclos de dos estados y, por diferencia con el total, 125 enfrentamientos que no presentan ciclos, es decir que independientemente del estado inicial permanecen en un mismo estado indefinidamente.

Estos ´´estados estacionarios'' de los enfrentamientos se alcanzan a lo sumo en la cuarta jugada, por lo tanto, si los enfrentamientos duran lo suficiente como para hacer despreciables los efectos de las jugadas iniciales, podemos utilizar los puntajes que se obtienen en estos ´´estados estacionarios'' para evaluar el éxito de las estrategias. Para hacer esto debemos determinar, además, qué enfrentamientos modifican su destino cuando se cambia el estado inicial.

Que un enfrentamiento modifique su destino según el estado inicial implica que hay al menos un estado desconectado del resto, por ejemplo, en los enfrentamientos con ciclos de tres estados hay una desconexión entre el ciclo y el otro estado por cada ciclo posible, por lo tanto: $4 \times 2 \times 1 = 8$ enfrentamientos con ciclos de tres estados dependen del estado inicial para determinar si se entra al ciclo o si permanecen en un estado indefinidamente.

En los enfrentamientos con al menos un ciclo de dos estados, tenemos dos estados ´´libres'' que fijando a uno que se dirige a si mismo, el otro puede ir a cualquiera de los cuatro estados, por lo tanto $1 \times 4 \times 2 = 8$ y como tenemos 6 posibles agrupaciones de dos estados, obtenemos 48. Pero nuevamente estamos contando dos veces a los enfrentamientos que tienen a los dos estados ‘‘libres'' dirigiéndose a si mismos. Por lo tanto, debemos restar 3, obteniendo 45 enfrentamientos que presentan al menos un ciclo de dos estados cuyo destino depende del estado inicial.

Finalmente, entre los enfrentamientos que no presentan ciclos, podemos observar que las formas en que los cuatro estados sean independientes es 1, la forma en que tres estados sean independientes es la cantidad de grupos de 3 estados que se puden formar (4) multiplicado por las formas en que el cuarto estado se pueda conectar con los demás $(3$, ya que no puede dirigirse hacia si mismo porque constituiría el caso de los cuatro estados independientes que ya contamos), es decir $4 \times 3 = 12$. Dos estados independientes pueden

formarse multiplicando la cantidad de grupos de dos estados que se pueden formar (6) por las formas en que los otros dos estados se pueden conectar. No pueden dirigirse uno al otro ya que constituirían un ciclo de dos que ya fue contado y no pueden dirigirse a si mismos porque sería el enfrentamiento con cuatro estados independientes o alguno de los de tres estados independientes. Por lo tanto pueden dirigirse a cualquiera de los dos estados independientes: $6 \times 2 \times 2 = 24$. Por último, los enfrentamientos con un estado independiente son $4 \times 3 \times 2 = 24$ ya que se pueden formar 4 grupos de un estado y los otros 3 se pueden relacionar sin formar un ciclo ni separarse en un grupo de dos y otro estado aislado. Entonces, $24 + 24 + 12 + 1 = 61$ enfrentamientos cuyo estado final depende de el estado inicial que no presentan ciclos.

En total tenemos 141 enfrentamientos que según el estado inicial cambiarán su estado final.

5.7. Reproducción

En el modelo la reproducción es asexual, los individuos dejarán descendencia que utiliza la misma estrategia que ellos utilizaron. Esta elección es para partir del modelo más simple posible, eventualmente presentaré algunas simulaciones que relajan esta suposición.

Por otro lado, la población se mantendrá estable en el tiempo. Asumiré que la capacidad de carga del medio en el que se desarrolla se ha alcanzado y que, por lo tanto, los cambios en la población implican únicamente variaciones en las frecuencias de las diferentes estrategias. Si una estrategia es más eficiente que otra para obtener recursos, entonces los individuos utilizando esa estrategia se reproducirán con mayor facilidad y en consecuencia la estrategia estará más representada en la siguiente generación. Por lo tanto, el modelo se centra en la competencia intraespecífica.

Las frecuencias de las estrategias se calcularán simplemente como la proporción de los puntos logrados por todos los individuos utilizando esa estrategia sobre el puntaje total que obtuvo la población.

$$f_i(t+1) = \frac{f_i(t) \sum_{j=1}^{16} e_{ij} f_j(t)}{\sum_{i=1}^{16} f_i(t) \sum_{j=1}^{16} e_{ij} f_j(t)} \tag{5.1}$$

Siendo $f_i(t)$ la frecuencia de la estrategia i en la población en el tiempo t y e_{ij} el valor del enfrentamiento de la estrategia i con la estrategia j.

Debo señalar un problema en esta forma de plantear la reproducción. Supongamos que la capacidad de carga del ambiente en el que vive esta población es k. Si observamos el denominador de la ecuación 5.1, vemos que representa los ‘‘puntos’’ o recursos obtenidos por el conjunto de la población. Este número, llamémosle r, debería cumplir siempre $r = ck$ donde c es el costo en recursos por individuo, para que la cantidad de organismos en la población se mantenga constante. Si $r < ck$ los recursos que obtiene el conjunto de la población no alcanzan para llegar a la capacidad de carga del ambiente y, por lo tanto, la población debería disminuir. Esta es una contradicción del modelo que, sin embargo, nos plantea una pregunta interesante: ¿hay alguna combinación de frecuencias de estrategias estables que permita mantener el r al máximo de su valor?

Es fácil ver que a medida que las frecuencias de las estrategias cambian también variará r. Si queremos obtener el máximo de r, entonces debemos sobrerepresentar a las estrategias cuyos enfrentamientos generan mayor puntaje. Pero, ¿cuáles son estos enfrentamientos? Dependerá de los valores concretos que utilicemos en la matriz de pagos. Los enfrentamientos en los que se perpetúa un estado de explotación, cuando un jugador coopera y el otro no, pueden obtener $m(T + S)$, siendo m la cantidad de jugadas. Por otro lado, los enfrentamientos en los que se perpetua la cooperación obtendrán $m(2R)$. El caso en que ambos jugadores no cooperan siempre será menor a la cooperación mutua ya que $P < R$. Por lo tanto, tendremos tres casos distintos según si $T + S$ es menor, igual o mayor que $2R$.

Los supuestos sobre los que está basado el modelo de cooperación del DP nos obliga a mantenernos en la situación $T + S < 2R$, ya que asumimos que ‘‘Muchos de los beneficios buscados por los seres vivos están desproporcionadamente disponibles para grupos cooperantes.’’[5]. Sería extraño entonces que dos organismos cooperando entre sí obtengan un beneficio total menor que un solo organismo cooperante emparejado con un no cooperante. Esta situación hace plausible en principio que se pueda alcanzar un r máximo y mantenerlo, ya que los enfrentamientos más valiosos reparten equitativamente las ganancias entre las estrategias. El problema es que las estrategias que participan en estos enfrentamientos pueden participar también en enfrentamientos de muy bajo valor, por lo que su ganancia total puede no ser tan alta.

Dado un conjunto de estrategias presentes en la población existe un r máximo. Entonces, ¿existe un subconjunto de estrategias que puedan alcanzarlo y mantenerse en él? Exploraremos con mayor detenimiento esta pregunta más adelante.

La contradicción que señalamos antes puede ser resuelta si suponemos que la diferencia entre ck y r es cubierta por organismos que migran a la población. Esta migración debería ser variada en su composición de estrategias y no tener relación con el éxito de las estrategias residentes en la población.

Capítulo 6

Resultados

6.1. Poblaciones estables y los valores de los enfrentamientos

El valor de los enfrentamientos es el núcleo del modelo, ya que es una función de las estrategias que se enfrentan, del estado inicial del enfrentamiento, la cantidad de jugadas que se toman en cuenta y la matriz de pagos. Por ejemplo, en la tabla 6.1 podemos ver los valores de los enfrentamientos si todos comienzan en el estado 1 (ambos cooperan) y tenemos en cuenta solo el estado final, esto es cuando llegan a un estado final o a un ciclo que se repite. Para calcular los valores de la tabla 6.1 utilicé la matriz de pagos 3.3[1]. Las filas representan al jugador 1 y las columnas al jugador 2 y el número representa la ganancia del jugador 1 en ese enfrentamiento.

Una primera observación que podemos hacer de esta tabla es que las estrategias E_1, E_2, E_3 y E_4 obtienen el mismo puntaje en todos los enfrentamientos, esto podría llevarnos a pensar que estas estrategias son equivalentes y por lo tanto podríamos agruparlas a todas como una sola estrategia. Sin embargo, si observamos las columnas vemos que diferentes estrategias obtienen diferentes ganancias frente a ellas. Es decir, si bien el puntaje que obtienen las estrategias E_1, E_2, E_3 y E_4 es el mismo, si utilizáramos una de ellas como representante de las demás cambiaría el puntaje obtenido por otras estrategias en la población. Las estrategias que sí son equivalentes son E_1 y E_2, ya que obtienen y otorgan el mismo puntaje en todos los enfrentamientos. Esto significa que, para las condiciones iniciales bajo las cuales creamos la tabla, E_1 y E_2 son indistinguibles e intercambiables. Por lo que esta tabla podría ser reducida en una columna y una fila, eligiendo a una de esas dos estrategias como representante de la otra, sin perder información. Este podría ser un camino para simplificar el análisis del modelo: aquellas estrategias que bajo un conjunto de parámetros son *equivalentes*, es decir obtienen y otorgan el mismo puntaje en todos sus enfrentamientos, pueden ser sustituidas una por otra sin pérdida de información para la dinámica de los enfrentamientos.

[1]Debido a que los posibles estados finales son un estado, ciclo entre dos, tres o cuatro, para calcular los valores de la tabla 6.1 consideré 12 jugadas una vez alcanzado el estado final. Esto es porque es el menor común múltiplo de 1, 2, 3 y 4, de esta manera se pueden abarcar varios ciclos completos. Se debe notar que estos valores no consideran los posibles estados transitorios al comienzo de los enfrentamientos. De esta manera asumo que los enfrentamientos tienen las suficientes jugadas como para poder despreciar el puntaje obtenido previamente a alcanzar el estado final. Los valores no están normalizados. El script para calcular los valores de esta tabla, y tablas similares variando los parámetros, se puede ver en E.1

Tabla 6.1: Valores de los enfrentamientos: Estado inicial 1 - Estado final

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
E_1	36	36	36	36	36	36	36	36	18	18	18	18	0	0	0	0
E_2	36	36	36	36	36	36	36	36	18	18	18	18	0	0	0	0
E_3	36	36	36	36	36	36	36	36	18	18	18	18	0	0	0	0
E_4	36	36	36	36	36	36	36	36	18	18	18	18	0	0	0	0
E_5	36	36	36	36	36	36	36	36	32	32	30	30	16	6	16	6
E_6	36	36	36	36	36	36	36	36	32	32	30	30	27	12	24	12
E_7	36	36	36	36	36	36	36	36	60	60	27	24	16	6	16	6
E_8	36	36	36	36	36	36	36	36	60	60	36	12	60	12	36	12
E_9	48	48	32	32	48	48	0	0	24	16	24	16	24	0	24	0
E_{10}	48	48	32	32	48	48	0	0	36	12	27	12	36	12	0	12
E_{11}	60	60	36	27	60	60	36	0	24	16	24	16	24	0	24	0
E_{12}	60	60	36	12	60	60	36	12	60	12	36	12	60	12	36	12
E_{13}	48	48	30	30	48	48	27	6	24	27	24	30	24	6	24	6
E_{14}	48	48	30	30	48	48	24	12	36	12	30	12	36	12	24	12
E_{15}	60	60	36	24	60	60	36	6	24	60	24	24	24	6	24	6
E_{16}	60	60	36	12	60	60	36	12	60	12	36	12	60	12	36	12

Por ejemplo, notemos el caso extremo de la tabla reducida a las estrategias que van de la E_1 a la E_8. Todos los enfrentamientos tienen el mismo valor. Esto es natural, ya que todas estas estrategias cooperan si ambos jugadores cooperaron en la jugada anterior. Como los valores de esta tabla fueron calculados partiendo del estado de cooperación mutua el estado final de los enfrentamientos entre todas estas estrategias es la cooperación perpetua. Por lo tanto, todas estas estrategias son equivalentes entre sí si tomamos en cuenta poblaciones que solo puedan estar compuestas por estas estrategias. Es decir, si restringiéramos el universo de estrategias a estas ocho, para las condiciones con las que fue calculada esta tabla, serían indistinguibles. Si comenzamos con una cierta frecuencia de estas estrategias o de un subconjunto de ellas estas frecuencias se mantendrán inalteradas a lo largo de las generaciones.

Esta observación da lugar a una pregunta interesante: ¿cómo se relacionan los valores de los enfrentamientos con la estabilidad de una mezcla de estrategias en una población? Para esta discusión será más cómodo hablar de matrices que contengan los valores de los enfrentamientos que de tablas. Definimos entonces una matriz de enfrentamientos como la matriz que contiene los valores de los enfrentamientos para un conjunto de estrategias dónde las filas representan la estrategia del jugador 1 y las columnas las del jugador 2. A cada estrategia se le asigna el mismo número de fila que de columna. Entonces:

$$E_{m\times m}(ei, cj, mp)$$

E es la matriz que contiene los valores de los enfrentamientos para m estrategias y sus valores dependen del estado inicial ei, cantidad de jugadas cj y matriz de pagos mp. En este trabajo solo utilizaré la matriz de pagos 3.3, por lo tanto la matriz E dependerá de

las estrategias participantes, del estado inicial de los enfrentamientos y de la cantidad de jugadas consideradas por enfrentamiento.

Como ejemplo, podemos ver a partir de la tabla:

$$E_{8\times 8}(1, ef, E_i \mid i \in [1,8]) = \begin{pmatrix} 36 & 36 & \dots & 36 \\ \vdots & 36 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 36 & 36 & \dots & 36 \end{pmatrix}$$

Es decir, que la matriz E, partiendo del estado inicial 1, tomando en cuenta el estado final (ef) de los enfrentamientos e incluyendo a las estrategias de E_1 a E_8, tiene todas sus entradas iguales a 36.

Si recordamos la forma en que se calculan las frecuencias de las estrategias a lo largo de las generaciones 5.1, vemos que podemos escribir la misma formula en forma matricial:

$$\vec{f}(t+1) = \frac{D(t)E\vec{f}(t)}{\vec{f}^t(t)E\vec{f}(t)}$$

Donde $\vec{f}(t)$ es un vector columna de las frecuencias de las estrategias en la población en el tiempo t y D es una matriz diagonal con las mismas frecuencias. Una población estable es entonces aquella para la cual:

$$\vec{f}(t+1) = \vec{f}(t) = \vec{f}_\infty$$

Definimos $r(t) = \vec{f}^t(t)E\vec{f}(t)$, entonces:

$$\vec{f}_\infty = \frac{D_\infty E\vec{f}_\infty}{r_\infty}$$

Como D es una matriz diagonal tiene inversa y por lo tanto:

$$D_\infty^{-1}\vec{f}_\infty = \frac{D_\infty^{-1}D_\infty E\vec{f}_\infty}{r_\infty}$$

Entonces:

$$\vec{u} = \frac{E\vec{f}_\infty}{r_\infty}$$

Donde $\vec{u}$ es un vector de unos. Por lo tanto, cada entrada del vector $E\vec{f}_\infty$ es igual a r_∞.

De esta manera podemos ver de manera rigurosa porqué si la matriz E tiene todas sus entradas iguales cualquier combinación de frecuencias de las estrategias presentes será estable. Si las entradas de la matriz E valen e entonces:

$$E\vec{f}_\infty = \begin{pmatrix} e(f_1 + f_2 + ... + f_m) \\ \vdots \\ e(f_1 + f_2 + ... + f_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ \vdots \\ e \end{pmatrix}$$

Y por lo tanto: $e = r_\infty$

La pregunta natural es ¿qué otras matrices E pueden sustentar una población estable? Según lo que hemos visto, para que esto ocurra $E\vec{f}_\infty = \vec{r}_\infty$, siendo $\vec{r}_\infty$ un vector cuyas entradas son iguales a r_∞. Esto significa que:

$$r_\infty = \vec{f}^t(t)E\vec{f}(t) = E_i\vec{f}_\infty \quad \forall\ i \in [1, 16]$$

Siendo E_i la fila i-ésima de E.

Entonces:

$$r_\infty = E_i\vec{f}_\infty = E_j\vec{f}_\infty \quad \forall\ i, j \in [1, 16]$$

Por lo tanto, si $E_i = E_j \quad \forall\ i, j \in [1, 16]$ esto se cumple para todo $\vec{f}$ y las matrices con todas sus entradas iguales es un caso particular de este.

Otro caso que permite que se cumpla esta condición es cuando las entradas de $\vec{f}$ son todas iguales y la suma de las entradas de todas las filas de E suman lo mismo. Es decir, si:

$$(e_{11} + e_{12} + ... + e_{116}) = ... = (e_{161} + e_{162} + ... + e_{1616})$$

Entonces:

$$E\vec{f}_\infty = \begin{pmatrix} f(e_{11} + e_{12} + ... + e_{116}) \\ \vdots \\ f(e_{161} + e_{162} + ... + e_{1616}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_\infty \\ \vdots \\ r_\infty \end{pmatrix}$$

Vuelvo ahora al problema del r máximo. Observemos que en una población estable el r_{max} no puede ser mayor al máximo valor de los enfrentamientos. Ya que:

$$r_\infty = E_i\vec{f}_\infty = f_1e_{i1} + f_2e_{i2} + ... + f_{16}e_{i16} \quad \forall\ i \in [1, 16]$$

Si existe un $e_{ij} > e_{hj} \ \forall \ h \neq i$ entonces para maximizar $r_\infty \ f_i = 1$ y $e_{ij} = r_{max}$.

Queda el problema de qué valor máximo puede alcanzar un enfrentamiento en una población estable. Por un lado, sabemos que el mayor valor en general que puede tener un enfrentamiento es 5 puntos por jugada, que equivale a mantenerse en el estado 3 por todo el desarrollo del enfrentamiento[2]. Pero, como advertimos antes, el valor global del enfrentamiento para la población es $5 + 0$, dado que la estrategia explotada no obtiene ningún punto. Es decir, si en la matriz E hay una entrada $e_{ij} = 5$ entonces la entrada $e_{ji} = 0$. Estos dos valores están ponderados por las mismas frecuencias de estrategias en la población. Pero sabemos que en una población estable:

$$e_{i1}f_1 + e_{i2}f_2 + ... + e_{ij}f_j + ... + e_{i16}f_{16} = e_{j1}f_1 + e_{j2}f_2 + ... + e_{ji}f_i + ... + e_{j16}f_{16} \quad \forall \ i, j \in [1, 16]$$

Entonces:

$$(e_{i1} - e_{j1})f_1 + (e_{i2} - e_{j2})f_2 + ... + (e_{ij} - e_{jj})f_j + ... + (e_{ii} - e_{ji})f_i + ... + (e_{i16} - e_{j16})f_{16} = 0 \quad \forall \ i, j \in [1, 16]$$

Por lo tanto, la diferencia entre los valores de los enfrentamientos de cada columna debe ser 0 o debe ser compensado por la diferencia entre los valores de otra columna, ponderados por la frecuencia de la estrategia correspondiente. Es decir, todos los enfrentamientos que resultan en una disrupción de la simetría de la matriz E, deben ser compensados por una disrupción similar en algún otro enfrentamiento. Y esto debe ocurrir para todas las filas. Por lo tanto, si para una fila i existe $e_{ih} > e_{ij} \ \forall \ h \neq j$ entonces debe existir un $e_{ik} < e_{ij} \ \forall \ k \neq j \ \forall i$.

Esto parece indicar que las poblaciones estables no pueden llevar a r a su máximo valor teórico posible de 5 por organismo por jugada. Si existe un enfrentamiento de 5 debe existir un enfrentamiento de 0, por lo tanto, aparentemente, el máximo teórico posible para una población estable es de $r_{max} = 3$ por organismo por jugada, ya que es el resultado de la cooperación mutua, el segundo mayor valor posible y con reparto equitativo de la ganancia.

Para finalizar esta sección vuelvo ahora al problema de la capacidad de carga del ambiente. Parece más adecuado definir la capacidad de carga del ambiente como $k = r_{max}/c$. Donde c es el costo de cada organismo por jugada Como imponemos $k = 1$, $c = 1/3$. De esta manera se puede compensar una caída del valor de r con inmigración. Este problema lo dejaremos para algunas simulaciones. Pero en principio no lo tendré en cuenta.

6.2. Simulaciones

6.2.1. Suma de los valores de los enfrentamientos

Una forma de resumir la información de los valores de los enfrentamientos es sumar los valores de todos los enfrentamientos para cada estrategia para diferentes condiciones

[2]Como siempre utilizando la matriz de pagos 3.3

iniciales. Esto nos permite ver el desempeño global de una estrategia sin introducir aún sus frecuencias en una población. El script que utilicé para realizar estos gráficos puede verse en el anexo E.2.

En la figura 6.1 podemos ver para cada estrategia la suma del puntaje de todos sus enfrentamientos, comenzando los encuentros en los cuatro estados posibles y el promedio entre ellos, cuando consideramos la jugada siguiente al estado inicial. Es decir, estamos teniendo en cuenta el estado que sigue al estado inicial determinado previamente por nosotros.

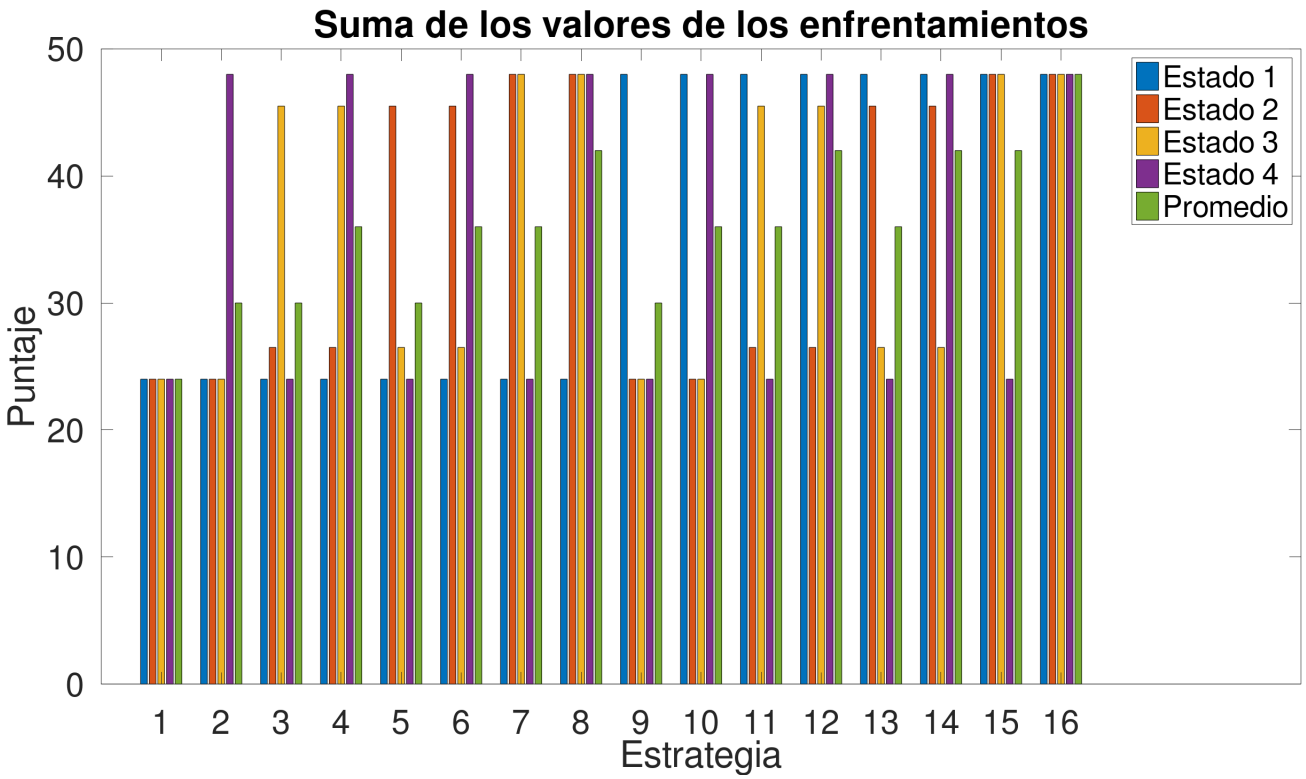


Figura 6.1

Por lo tanto, las diferencias entre las alturas de las barras del mismo color dependen únicamente del segundo estado del enfrentamiento, ya que el primero es el mismo para todas y su puntaje no es tenido en cuenta. Por ejemplo, la diferencia de alturas entre las barras azules corresponde a la diferencia del valor del estado que sigue en cada enfrentamiento al estado 1. Para estas columnas vemos claramente dos niveles diferentes que, además, presentan un patrón bien definido, las primeras ocho estrategias obtienen 24 puntos, las últimas ocho obtienen 48 puntos. Esto se explica por la tabla 5.1, como se puede observar la respuesta al estado 1 es cooperar para las primeras ocho estrategias y no cooperar para las últimas ocho. Por lo tanto las estrategias que cooperan entre sí obtienen 24 puntos debido a esa cooperación, pero después son explotadas por las estrategias que no cooperan, mientras que estas explotan a las estrategias cooperantes obteniendo 40 puntos, los otros 8 puntos los obtienen de no cooperar entre sí.

Como se puede ver en el gráfico, los valores para los demás estados iniciales también presentan patrones similares: para el estado 4 van variando una a una y la explicación es

la misma que para el estado 1. El patrón de los estados 2 y 3 es similar, pero los valores alcanzados son más variados, la explicación de esto es que partiendo de los estados 2 y 3 algunas estrategias se explotan a si mismas, en ese caso obtienen globalmente $2,5$ puntos, ya que una mitad de la población es explotada por la otra. Por lo tanto, al considerar la jugada siguiente al estado inicial estamos considerando la respuesta ‘‘espontanea’’ de cada estrategia a un estado determinado. La estrategia 16 es la que se desempeña mejor globalmente y la 1 la que se desempeña peor, ya que la primera se dirige siempre a los estados 3 y 4 y la segunda siempre se dirige a los estados 1 y 2. En definitiva estamos jugando al DP sin iteraciones.

En la figura 6.2 vemos la suma de los valores de los enfrentamientos asumiendo que estos duran tres jugadas. Hay mayor dispersión que en el caso anterior entre los valores obtenidos para los estados iniciales dos y tres, pero es menor para el caso de los estados uno y cuatro (ver tabla 6.2). El mejor desempeño es nuevamente de la estrategia 16, tanto en promedio como para cada estado inicial. Sin embargo, para algunos estados iniciales hay estrategias tan buenas como esta. Por ejemplo, la estrategia 8 solo logra menor puntaje que la estrategia 16 cuando se comienza en el estado uno, para todos los demás estados iniciales obtiene el mismo puntaje. De hecho, si observamos el promedio del puntaje de cada estrategia para caso anterior 6.1, vemos que la estrategia 8 compartía el segundo puesto con las estrategias 12, 14 y 15. Pero considerando una jugada más en cada encuentro estas estrategias ya bajaron de esa posición y la estrategia 8 es la única que secunda a la estrategia 16 (ver tabla 6.4).

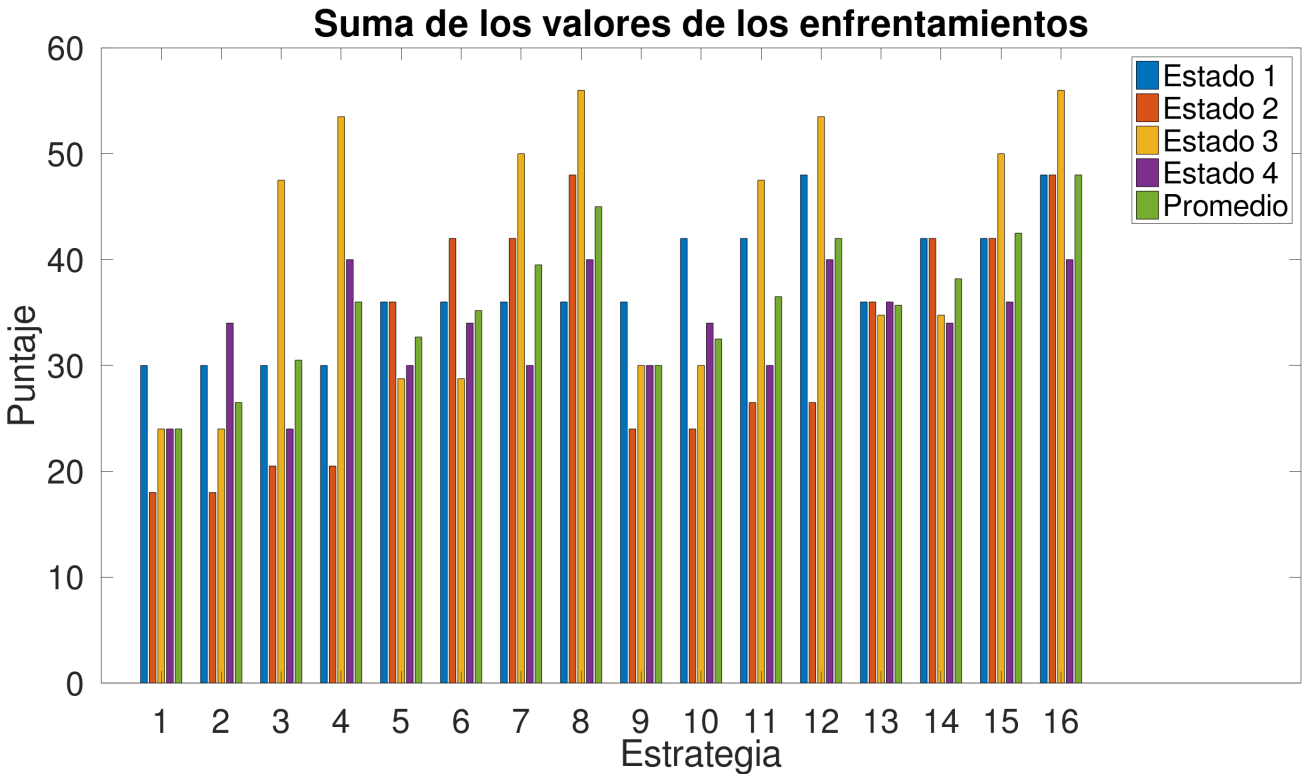


Figura 6.2

Tabla 6.2: Desvío estándar de la suma de los valores de los enfrentamientos para cada estado inicial

Estados iniciales	1	2	3	4
2 jugadas	$12,4$	$11,2$	$11,2$	$12,4$
3 jugadas	6	$11,9$	$12,1$	$5,2$
4 jugadas	$6,6$	$10,6$	$11,7$	$6,2$
Estado final	$6,7$	$10,7$	$11,8$	$6,8$

La figura 6.3 muestra la suma de los valores de los enfrentamientos considerando 4 jugadas en cada uno. Por lo tanto, abarca completamente el transitorio de los enfrentamientos antes de que estos lleguen a su estado final. Considerando el promedio del puntaje obtenido para todos los estados iniciales, la estrategia 8 se mantiene como la única que sigue a la estrategia 16 y pierde con esta solo cuando se comienza en el estado 1 (cooperación mutua). Las otras estrategias que cooperan solo a partir de un estado (12, 14 y 15), tienen un resultado peor que la 16 en más de un estado inicial.

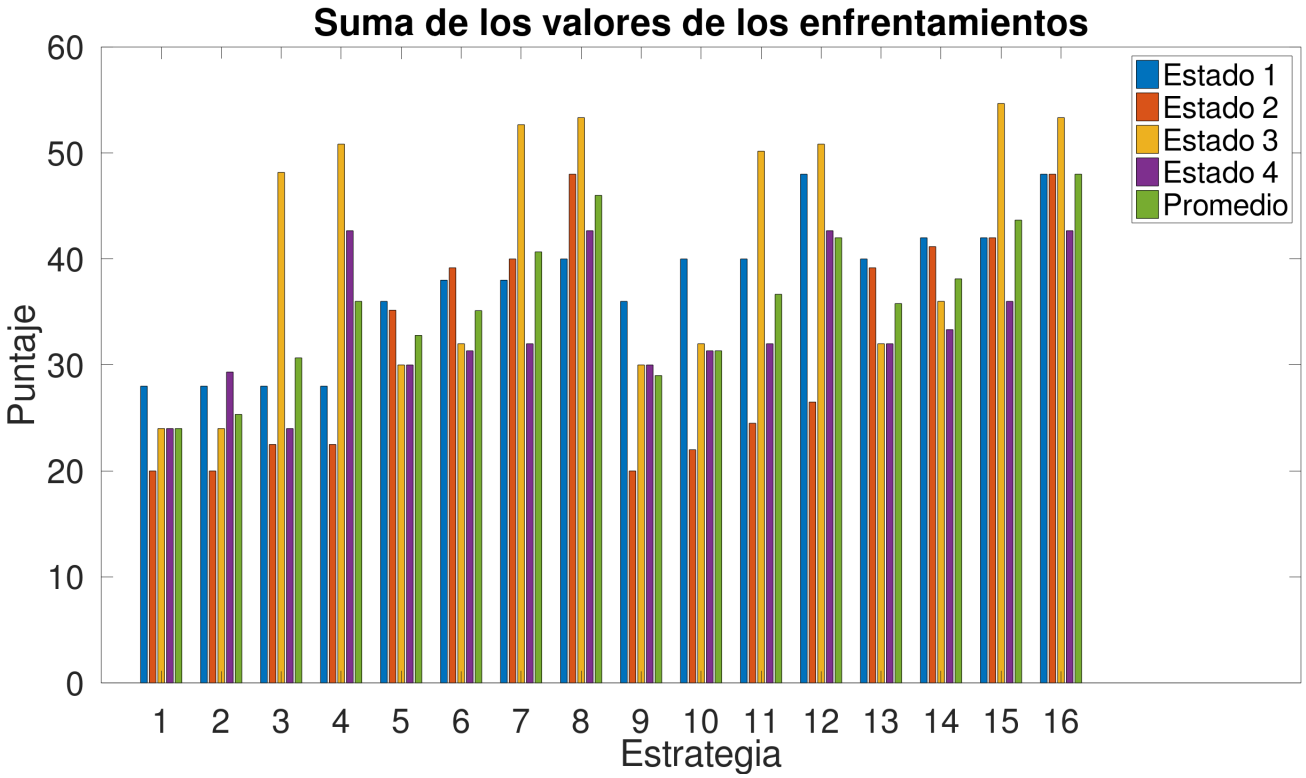


Figura 6.3

La estrategia 7 tiene un mejor promedio que la estrategia 14 y, además, la supera en el estado inicial 3. Por lo tanto, no necesariamente una estrategia que coopera menos, en el sentido que responde *cooperar* para menos estados previos, va a lograr un puntaje mejor a una que coopera más. En un momento veremos cómo cambia el orden de las estrategias según su puntaje a medida que vamos aumentando las jugadas que estamos considerando (tabla 6.4).

Por último, la figura 6.4 nos muestra la suma de los valores de los enfrentamientos considerando solo el estado final de los mismos[3]. Es decir, una vez que los enfrentamientos llegaron a un estado fijo o a un ciclo entre estados que ya no cambiará.

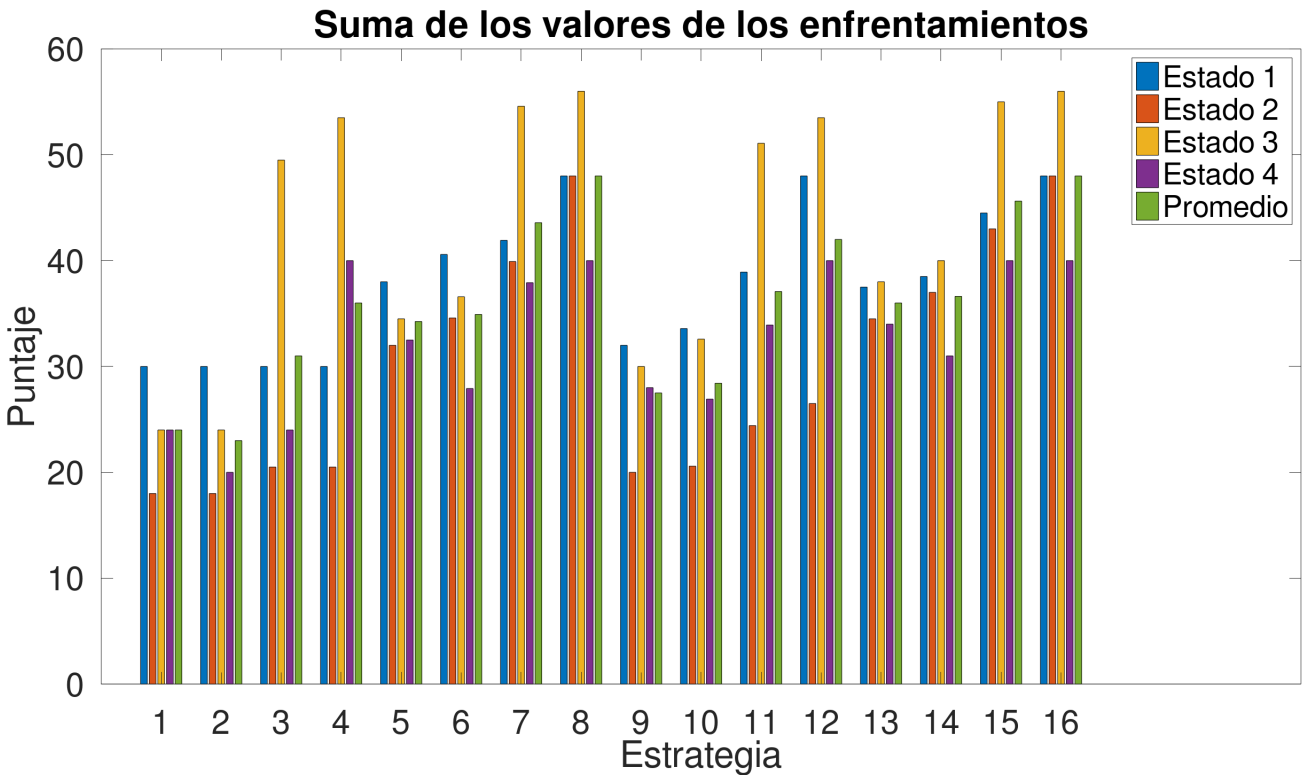


Figura 6.4

Notemos que la estrategia 8 y la 16 son en este caso indistinguibles. Esto significa que después de la cuarta jugada obtienen los mismos puntos jugando contra todas las demás estrategias. Si observamos la tabla 6.1 vemos que no son realmente equivalentes, ya que no obtienen el mismo puntaje en todos los enfrentamientos, sin embargo este hallazgo puede ser relevante, en tanto una estrategia que en una instancia coopera se desempeña igual a una que nunca coopera. Además, la estrategia 8 puede generar cooperación estable con todas las estrategias de la 1 a la 7 y consigo misma, lo que sugiere que podría funcionar como catalizador del surgimiento de la cooperación.

A continuación podemos ver dos tablas, la primera con el promedio de puntos entre todos los estados iniciales para cada estrategia según el estado inicial (la altura de las columnas verdes en las figuras). En la segunda, la posición de las estrategias según este promedio.

[3]Para este cálculo no considero el valor de las jugadas del transitorio, ya que asumo que la partida es lo suficientemente larga como para poder despreciar las cuatro primeras jugadas.

Tabla 6.3: Promedio de la suma de valores para cada estrategia según la cantidad de jugadas consideradas

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
2	24	30	30	36	30	36	36	42	30	36	36	42	36	42	42	48
3	24	26,5	30,5	36	32,7	35,2	39,5	45	30	32,5	36,5	42	35,7	38,2	42,5	48
4	24	25,3	30,7	36	32,8	35,1	40,7	46	29	31,3	36,7	42	35,8	38,1	43,7	48
EF	24	23	31	36	34,3	35	43,6	48	27,5	28,4	37	42	36	36,6	45,6	48

Tabla 6.4: Posición de cada estrategia según el puntaje obtenido ordenadas en forma creciente

2	E_1	E_2	E_3	E_5	E_9	E_4	E_6	E_7	E_{10}	E_{11}	E_{13}	E_8	E_{12}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
3	E_1	E_2	E_9	E_3	E_{10}	E_5	E_6	E_{13}	E_4	E_{11}	E_{14}	E_7	E_{12}	E_{15}	E_8	E_{16}
4	E_1	E_2	E_9	E_3	E_{10}	E_5	E_6	E_{13}	E_4	E_{11}	E_{14}	E_7	E_{12}	E_{15}	E_8	E_{16}
EF	E_2	E_1	E_9	E_{10}	E_3	E_5	E_6	E_4	E_{13}	E_{14}	E_{11}	E_{12}	E_7	E_{15}	E_8	E_{16}

Como podemos ver, a medida que consideramos más jugadas, primero hay una menor coincidencia entre los puntajes de las estrategias (aunque curiosamente las estrategias 4 y 13 ganan lo prácticamente lo mismo para cualquier estado inicial) y estrategias más cooperativas, es decir que responden *cooperar* a partir de más cantidad de estados, van subiendo en las posiciones.

Por ejemplo, la estrategia 7, si consideramos dos jugadas, está por detrás de las estrategias 12 y 14, pero cuando consideramos tres o cuatro ya pasa a la estrategia 14 y, en el estado final, supera a ambas[4] Otro ejemplo que ya mencioné es como la estrategia 8 iguala a la estrategia 16 para el estado final. También la estrategia 1 supera a la 2 en el estado final, la 5 supera a la 10 a partir de las tres jugadas y la 3 la supera en el estado final.

Esto está en linea con la idea del DPI como solución al dilema de la cooperación, a medida que los encuentros se prolongan en el tiempo la oportunidad para que la cooperación rinda frutos es mayor. Veamos ahora qué pasa cuando simulamos poblaciones donde las frecuencias de las estrategias varían según el puntaje obtenido.

6.2.2. Cambios en las frecuencias de las estrategias en una población constante

El objetivo de esta sección es explorar los cambios en las frecuencias de las diferentes estrategias a medida que pasa el tiempo. Es decir, como cambian las estrategias adoptadas por una población en base a la forma de reproducción descripta antes, utilizando la matriz del DP para asignar ganancias en *fitness*.

[4]Como se puede ver en la tabla 5.1 la estrategia 7 coopera a partir del estado 1 y del 4, mientras que las estrategias 12 y 14 solo cooperan a partir del estado 2 y 3 respectivamente.

El programa para realizar las simulaciones se puede encontrar en el anexo E.2. Brevemente, se computan los valores de todos los enfrentamientos posibles según el estado inicial que se elija, es decir que todos los enfrentamientos comienzan en el mismo estado, y se ponderan estos valores según la frecuencia de las estrategias participantes tal como se describe en la sección 5.7. El puntaje obtenido por cada estrategia determina su frecuencia en la siguiente generación. Las estrategias se enfrentan todas contra todas una vez, no hay ningún tipo de estructura espacial.

Otro parámetro que se puede modificar en estas simulaciones es la cantidad de jugadas que implica cada encuentro. Se pueden tomar en cuenta la suma de las primeras dos, tres o cuatro jugadas (que en muchos casos variarán según el estado inicial que se elija). También se puede elegir despreciar las primeras jugadas y contabilizar solo el valor de los enfrentamientos cuando llegan a su estado final (un estado único perpetuo o ciclos de dos, tres o cuatro estados). Otras opciones incluyen generar variación en las frecuencias de las estrategias aleatoriamente y cambiar el estado inicial de los enfrentamientos a lo largo del desarrollo de una población.

Variaciones según el estado inicial y la cantidad de jugadas

Comencemos con una población que tiene a todas las estrategias con la misma frecuencia. ¿Cómo varía la población final de acuerdo al estado inicial y a la cantidad de jugadas que tenemos en cuenta?

En las tablas que siguen podemos ver el resultado de dejar evolucionar una población que comenzó con todas las estrategias igualmente representadas hasta alcanzar un estado estable, donde las frecuencias de las estrategias ya no cambian. El número representa el porcentaje de la población que utiliza una estrategia determinada.

En la tabla 6.5 observamos como cambia la población estable si comenzamos todos los enfrentamientos en el estado 1 y se van aumentando las jugadas que se tienen en cuenta para cada enfrentamiento. A medida que pasa esto hay un desplazamiento de las estrategias 9 a 16 hacia las estrategias 1 a 8. Cuando se consideran dos jugadas vemos que las estrategias 9 a 16 se reparten de manera uniforme en la población. Cuando aumentamos a tres jugadas se ve una depuración de esas estrategias y solo quedan presentes cuatro de ellas, siendo las más prominentes la 12 y la 16. Cuando se pasa a considerar cuatro jugadas vemos un cambio significativo, la población estable en este caso contiene las estrategias 5 a 8, con especial preponderancia de esta última. Finalmente, cuando consideramos el estado final de los enfrentamientos vemos que las estrategias representadas en la población son de la 1 a la 8. En general este desplazamiento de las estrategias representadas en la población estable está en consonancia con la idea de que a medida que permitimos que los enfrentamientos se prolonguen las estrategias más cooperativas tienen una mejor oportunidad de mantenerse en la población.

Tabla 6.5: Porcentaje de cada estrategia en una población estable (estado inicial 1)

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
2	0	0	0	0	0	0	0	0	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6,7	0	43,3	0	6,7	0	43,3
4	0	0	0	0	0,5	24,8	1,5	73,2	0	0	0	0	0	0	0	0
EF	1,3	1,3	1,3	1,3	9,3	21,1	13,1	51,2	0	0	0	0	0	0	0	0

La tabla 6.6 nos muestra lo mismo que la primera, pero si todos los enfrentamientos comenzaran en el estado 2. Se comienza con dos grupos de cuatro estrategias representadas en la misma proporción, de la 5 a la 8 y de la 13 a la 16. Como se puede ya haber adivinado por la tabla anterior, y como se comprobará si se miran las tablas subsiguientes, esta distribución de estrategias corresponde a las estrategias que responden *no cooperar* al estado inicial que estamos considerando. Lo particular de este caso, y de los siguientes, en contraposición al que ya vimos es que esta respuesta no cooperativa parece establecer un filtro para las estrategias presentes en las poblaciones estables considerando más jugadas. Efectivamente, vemos que ninguna de las estrategias que no estaban presentes en esa primer población estable aparecen luego.

Tabla 6.6: Frecuencia de cada estrategia en una población estable (estado inicial 2)

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
2	0	0	0	0	0	0	25	25	0	0	0	0	0	0	25	25
3	0	0	0	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	50
4	0	0	0	0	25	25	0	0	0	0	0	0	25	25	0	0
EF	0	0	0	0	5,4	39,7	0	0	0	0	0	0	7,6	47,3	0	0

En la tabla 6.7 esto es aún más notable, de las ocho estrategias presentes se depuran a cuatro estrategias con igual frecuencia cuando consideramos tres jugadas y esta distribución ya no cambia. Se puede observar también que las estrategias que desaparecen son más cooperativas que las que quedan, la estrategia 3 coopera a partir de tres estados, mientras que la 4 solo a partir de dos, la estrategia 7 coopera a partir de dos estados mientras que la estrategia 8 lo hace a partir solo de uno, lo mismo pasa con la estrategia 11 y la 12, mientras que la estrategia 15 coopera a partir de un estado y la estrategia 16 nunca coopera.

Tabla 6.7: Frecuencia de cada estrategia en una población estable (estado inicial 3)

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
2	0	0	0	0	0	0	25	25	0	0	0	0	0	0	25	25
3	0	0	0	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	50
4	0	0	0	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	50
EF	0	0	0	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	50

Comenzando en el estado 4 aparece nuevamente el filtro de las estrategias presentes tomando en cuenta dos jugadas. Como se puede ver en la tabla 6.8 no es tan claro que se pierdan las estrategias más cooperativas, ya que si bien disminuye la frecuencia de la estrategia 2 también disminuye la frecuencia de la estrategia 14 y las estrategias 6 y 10 disminuyen su frecuencia, pero la 4 aumenta. De cualquier manera, el efecto que vimos en la primer tabla, dónde se beneficiaba a las estrategias más cooperativas a medida que considerábamos enfrentamientos más prolongados, no parece repetirse en los otros tres casos. Sin embargo, debemos profundizar en esto de otra manera, por ejemplo, generando un indicador de cooperación y viendo como este varía a medida que extendemos la duración de los enfrentamientos.

Tabla 6.8: Frecuencia de cada estrategia en una población estable (estado inicial 4)

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
2	0	12,5	0	12,5	0	12,5	0	12,5	0	12,5	0	12,5	0	12,5	0	12,5
3	0	3,8	0	21,2	0	3,8	0	21,2	0	3,8	0	21,2	0	3,8	0	21,2
4	0	2	0	22,1	0	3,2	0	22,1	0	2,5	0	22,1	0	4	0	22,1
EF	0	0	0	23,5	0	2,2	0	23,5	0	0,4	0	23,5	0	3,4	0	23,5

Índice de cooperación

Voy a utilizar la cantidad de veces que se pasa en el estado 1 sobre la cantidad de jugadas totales como indicador de cooperación. Es decir, utilizaré la cantidad de veces que ambos cooperan sobre las interacciones totales en la población. Como ya vimos, una población estable solo puede ocupar los estados 2 y 3 si a nivel global se pasa el mismo tiempo en cada uno de ellos, por lo tanto, es esperable que estos no representen una gran proporción de los estados totales de una población, además que uno de los jugadores coopere no parece justificación suficiente como para incluirlos en el índice de cooperación.

Considerando la cantidad de veces que las interacciones se encuentran en el estado 1 sobre la cantidad de interacciones totales una vez que la población alcanzó su estado final (tablas 6.5, 6.6,6.7 y 6.8), obtenemos los siguientes resultados:

Tabla 6.9: Indicador de cooperación según el estado inicial de los encuentros y la cantidad de jugadas

Estado inicial	2 jugadas	3 jugadas	4 jugadas	EF.
1	0	0	1	1
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

Como se puede ver en la tabla 6.9, solo a partir del estado inicial 1 y considerando interacciones prolongadas se logran mantener la cooperación mutua. Sin embargo, aún cuando la población se encuentre en un estado de no cooperación global, hay estrategias con la capacidad de cooperar (ver tablas 6.5, 6.6, 6.7 y 6.8). Dicho de otra forma, un índice de cooperación de 0 no implica una población compuesta únicamente de E_{16}. Esto puede ser interesante, ya que permite pensar que estas poblaciones estables que no cooperan tienen un componente de cooperación latente. Eventualmente una pequeña perturbación puede dar lugar a un ‘‘cambio de fase’’ en el que se pase a que la mayoría de las interacciones sean de cooperación mutua. Por ejemplo, ¿qué pasa si en una población estable que no coopera nunca, pero que tiene estrategias que pueden cooperar, se cambia el estado inicial de los enfrentamientos?

Tabla 6.10: Indicador de cooperación según el estado inicial de los encuentros y la cantidad de jugadas, llevando el estado inicial a 1 después de que la población se estabilizó

Estado inicial	2 jugadas	3 jugadas	4 jugadas	EF.
1	0	0	1	1
2	0	0	$0,14$	1
3	0	0	1	1
4	0	0	0	1

En la tabla 6.10 podemos ver el resultado de llevar el estado inicial a 1 después que la población se estabilizó a partir de los parámetros iniciales indicados. Como se puede ver esta perturbación permite un cambio de no cooperar nunca a cooperar siempre, cuando tenemos en cuenta el estado final de los encuentros o, en ocasiones cuando consideramos 4 jugadas.

Otro efecto del cambio en el estado inicial de los enfrentamientos es que cambia la composición de las poblaciones estables. Al observar las tablas que siguen y compararlas con las tablas 6.5, 6.6,6.7 y 6.8, podemos ver que, cuando el cambio en el estado inicial de los encuentros no fomenta la cooperación, actúa como filtro de las estrategias que cooperan a partir del estado 1. En cambio, cuando se fomenta la cooperación, las estrategias purgadas son las que no cooperan a partir del estado 1.

Tabla 6.11: Frecuencia de cada estrategia en una población estable después de la perturbación (estado inicial 2)

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	50	50
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	75	25	0	0
EF	0	0	0	0	12	88	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 6.12: Frecuencia de cada estrategia en una población estable después de la perturbación (estado inicial 3)

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	50	50
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
4	0	0	0	0	0	0	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0
EF	0	0	0	0	0	0	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 6.13: Frecuencia de cada estrategia en una población estable después de la perturbación (estado inicial 4)

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	25	0	25	0	25	0	25
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,5	0	46,5	0	3,5	0	46,5
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	47,9	0	3,6	0	47,9
EF	0	0	0	12,7	0	8,6	0	78,7	0	0	0	0	0	0	0	0

Los cambios en el estado inicial de los enfrentamientos pueden ser vistos como una predisposición a cooperar de la población en general. Podríamos imaginar que esta predisposición depende de parámetros ambientales que afectan por igual a todos los organismos generando un ‘‘clima social’’ diferente según el medio en el que se encuentren. Este es un concepto muy similar al *quorum sensing* en bacterias, aunque no es necesariamente la densidad de la población el factor ambiental que determina el estado inicial de los encuentros, ni tiene que ser mediado por sustancias producidas por los propios organismos. El punto es que las características del ambiente puede generar un cambio en el comportamiento global de la población.

Por supuesto, esto puede actuar en sentido inverso, llevando de una situación social de cooperación a una de no cooperación. Si comenzamos los enfrentamientos en el estado 1 con-

siderando el estado final y, una vez establecida la población estable en esas condiciones cambiamos el estado inicial al 4, vemos que la cooperación desaparece.

Como vimos, el cambio en el estado inicial hace a la población menos diversa en tanto el cambio sea lo suficientemente prolongado como para volver a una población estable[5]. Pero, cambios sucesivos en el estado inicial, dejando tiempo para que la población se estabilice, no generan un decaimiento mayor en la diversidad de la población. Una vez que la población pasa por las dos condiciones (estado inicial 1 y 4), la diversidad de estrategias no continúa decayendo. Es decir, si mantenemos la interpretación de que el estado inicial de los enfrentamientos es alterado por las condiciones ambientales, un cambio sucesivo de estas condiciones no extingue completamente la variedad de las estrategias y permite que la cooperación se restablezca una vez que las condiciones ambientales son propicias.

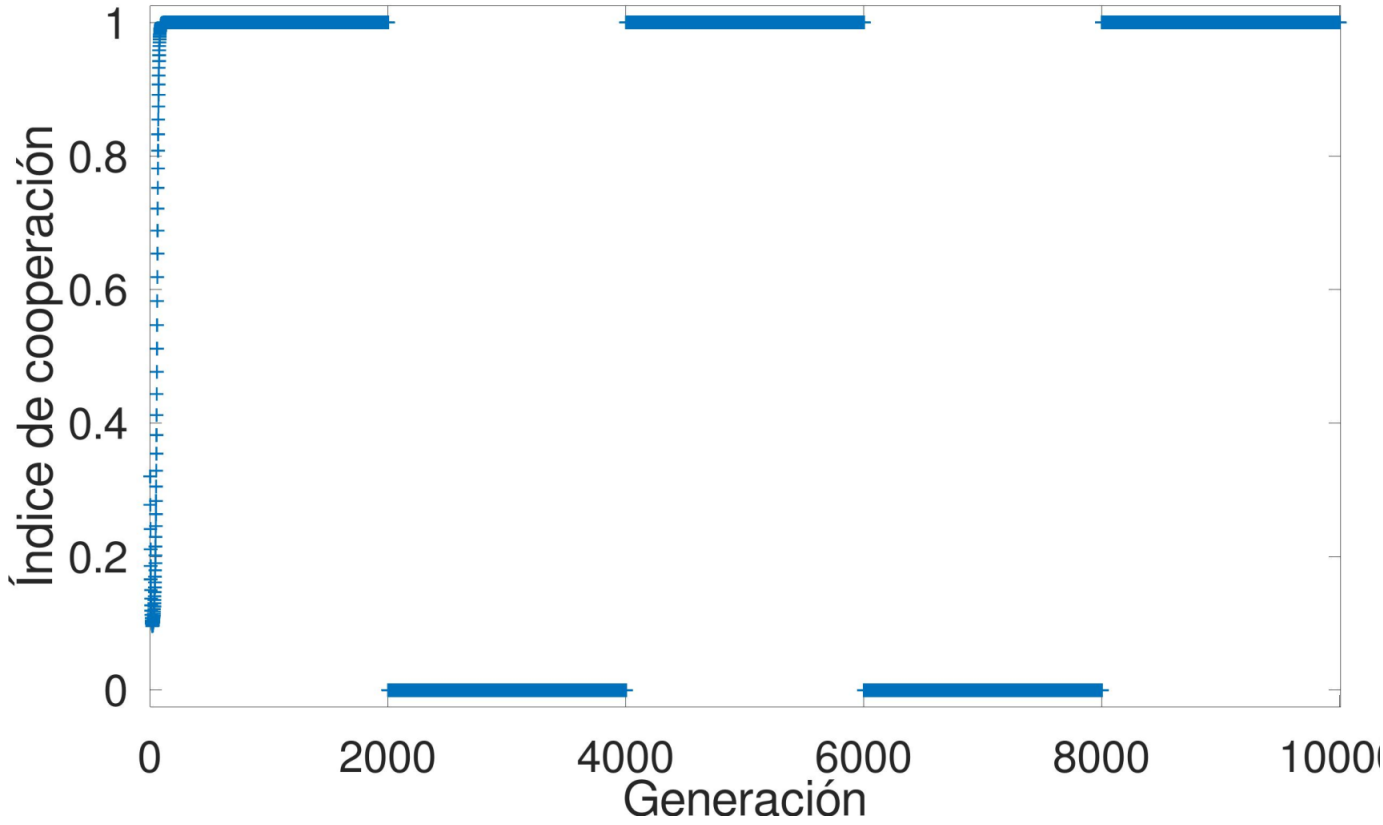


Figura 6.5: Cambios en el índice de cooperación al variar el estado inicial de los enfrentamientos (1 a 4). Estado inicial 1 Estado final

Esto es lo que vemos en la figura 6.5. La cooperación se restablece sucesivamente al cambiar del estado inicial 4 al 1. Se llegó a la población estable comenzando en el estado inicial 1 y tomando en cuenta el estado final de los enfrentamientos y después se cambió cada 500 generaciones el estado inicial. La población final consiste en un $90\,\%$ de la

[5]Si el cambio es muy rápido (una vez por generación) y al azar, se llega a poblaciones relativamente estables que pueden o no parecerse a las poblaciones estables obtenidas con las mismas condiciones iniciales.

estrategia E_8, $8\,\%$ la estrategia E_6 y $2\,\%$ la estrategia E_4 [6]. Observar también que una vez que la población está completamente purgada el cambio en el índice de cooperación es inmediato.

Las poblaciones biológicas raramente permanecen estables, no solo por cambios en el ambiente, si no que también reciben variación genética ya sea por inmigración o por mutación. En el modelo, podemos representar este efecto como un cambio aleatorio en las frecuencias de las estrategias.

Reposición de la diversidad

Para realizar la reposición de diversidad realizo, por generación, un sorteo entre las estrategias presentes para seleccionar aquella que perderá una parte de su representación en la población y otra que ganará esa misma proporción. El valor concreto puede variar y podemos repetir este proceso la cantidad de veces que queramos en cada generación. Por ejemplo, podemos observar que sucede con las frecuencias de las estrategias y con el índice de cooperación cuando sorteamos cinco veces por generación, descontando y añadiendo $0,01$ de la frecuencia de las estrategias sorteadas cada vez. Es decir, cambiamos aleatoriamente las estrategias que utiliza el $5\,\%$ de la población en cinco sorteos dónde se recambia el $1\,\%$ de la población.

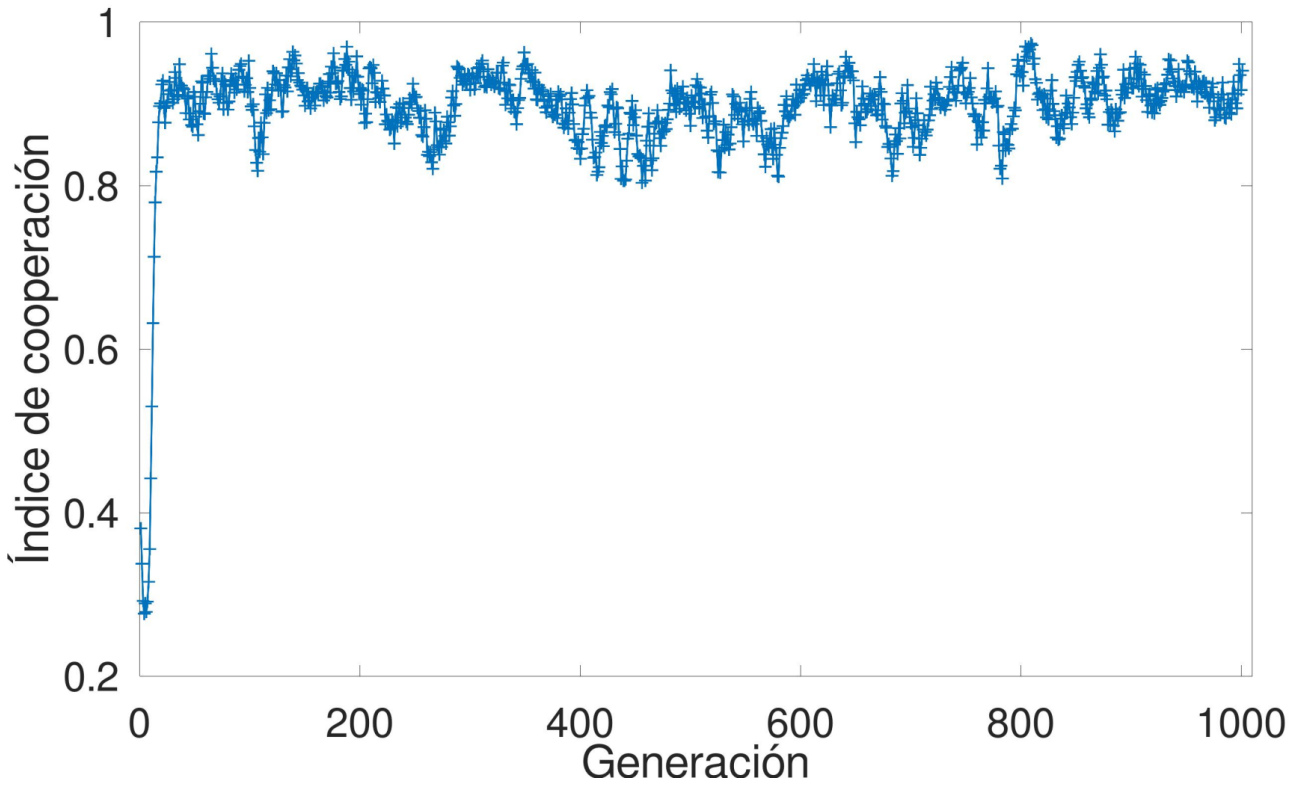


Figura 6.6: Variación en el índice de cooperación en una población con reposición aleatoria de variedad. $5\,\%$ de a $1\,\%$ del total de la población. Estado inicial 1. Estado final

[6] Comparar con la última columna de la tabla 6.5 para comprobar la perdida de diversidad por los cambios sucesivos en el estado inicial.

En la figura 6.6 vemos el desarrollo del índice de cooperación en una población con estado inicial 1 y considerando el estado final de los enfrentamientos. El índice se estabiliza en un valor cercano a uno, mientras que la composición de la población fluctúa con valores cercanos a la población estable obtenida bajo esas condiciones (fila 4 de la tabla 6.5). Para estas condiciones iniciales la evolución de la población siempre se acerca a la población estable y al índice de cooperación de su análoga sin reposición. Sin embargo, para otras condiciones, por ejemplo para el estado inicial 1 tomando en cuenta cuatro jugadas, hay veces en que esto no sucede. Como vimos, para estas condiciones se alcanza la cooperación total si no sometemos a la población a reposición de variedad, con reposición aleatoria esto ocurre solo en algunas ocasiones. La cooperación parece ser robusta solo tomando en cuenta muchas jugadas por enfrentamiento.

Por otro lado, los patrones de cooperación y no cooperación cuando cambiamos el estado inicial de los enfrentamientos se mantienen. Esto indica que incluso con un gran flujo génico el ambiente puede determinar el comportamiento de la población. Dicho de otro modo en términos más cercanos al modelo, el estado inicial de los enfrentamientos es un modulador importante del índice de cooperación, incluso frente a fluctuaciones importantes en las frecuencias de las estrategias.

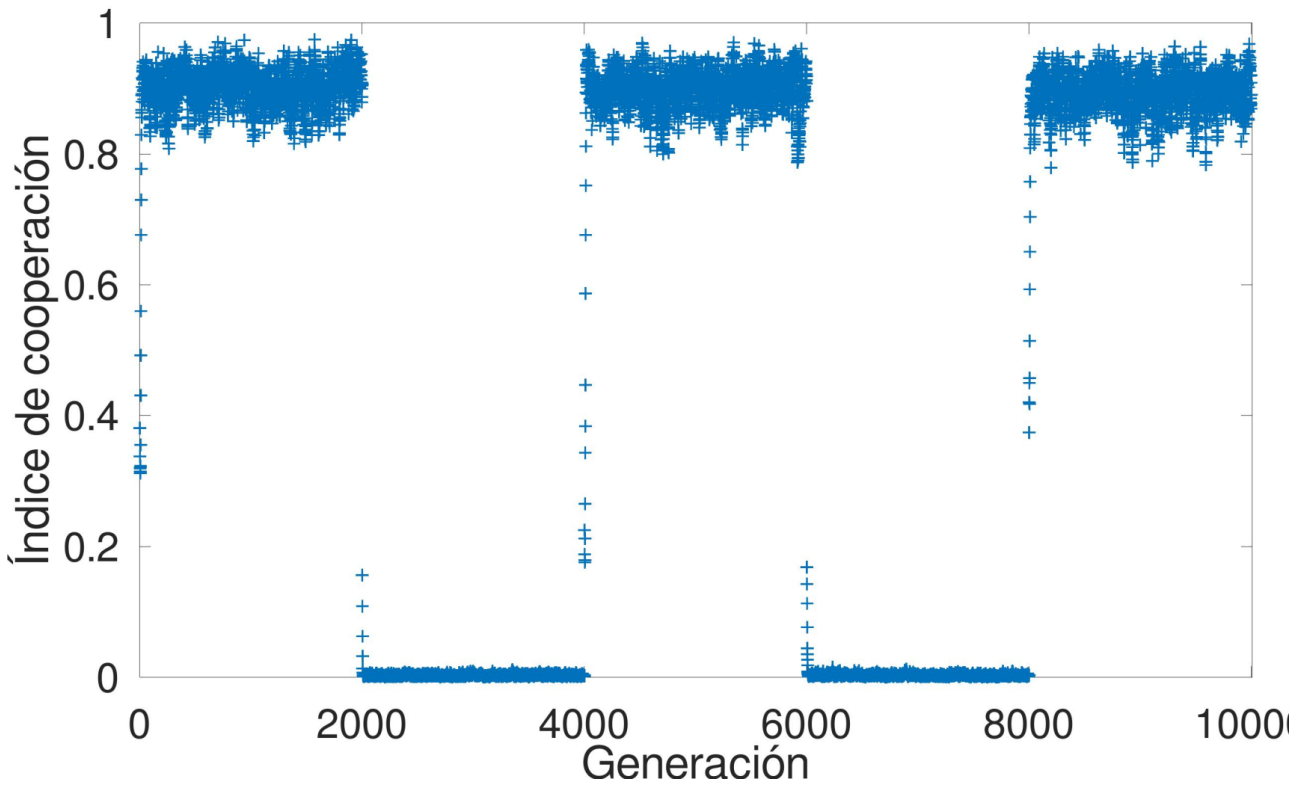


Figura 6.7: Variación en el índice de cooperación en una población con reposición aleatoria de variedad. $5\,\%$ de a $1\,\%$ del total de la población. Estado inicial 1. Estado final

La opción de coartar la libertad de las estrategias para elegir su primer movimiento, que se da naturalmente al considerar estrategias a partir de las funciones booleanas, revela que este es un parámetro importante para el comportamiento global del modelo. La capacidad de recuperar o derruir la cooperación según este parámetro parece relevante para muchas situaciones biológicas, sobre todo asumiendo la analogía con las condiciones ambientales.

6.2.3. Capacidad de invasión

Ahora bien, si partimos de una población compuesta enteramente de organismos que utilizan la estrategia E_{16}, es decir que nunca coopera. ¿Hay forma de alcanzar una población lo suficientemente variada como para sostener los cambios globales de cooperación a no cooperación que vimos antes?

Como guía para la búsqueda de estrategias que puedan competir con la estrategia E_{16} podemos utilizar los valores de los enfrentamientos calculados anteriormente. Vimos que para el estado final la estrategia E_8 es indistinguible de la E_{16}, por lo tanto podemos iniciar una población en la que el $99\,\%$ de los organismos utilicen la estrategia E_{16} y el $1\,\%$ utilicen la E_8 y observar su evolución. Si hacemos esto considerando el estado final de los enfrentamientos y variamos el estado inicial, la población se mantiene estable en los valores iniciales para los estados 2, 3 y 4. Para el estado 1 la población es invadida completamente por la estrategia E_8 en menos de 100 generaciones, esto conlleva un índice de cooperación de 1 (figura 6.8).

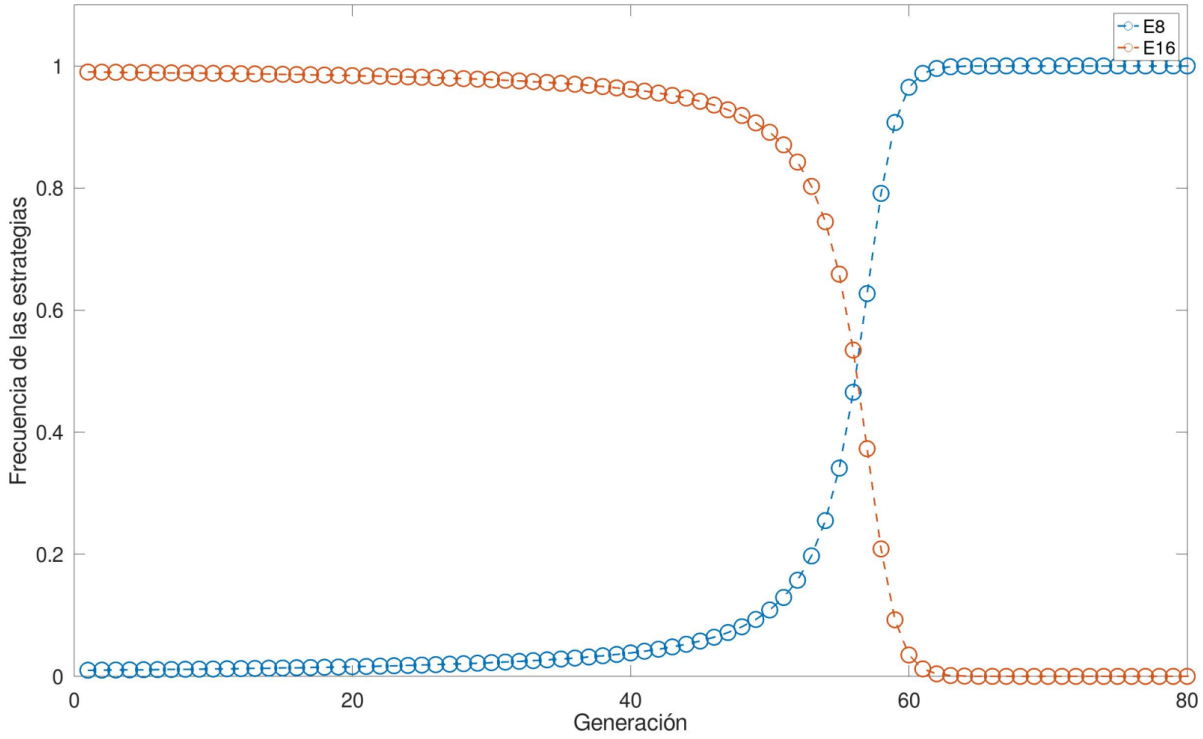


Figura 6.8: Invasión de una población de estrategas E_{16} por E_8 con estado inicial 1

Si variamos aleatoriamente el estado inicial de los enfrentamientos en cada generación la estrategia E_8 logra igualmente invadir, aunque tarda un poco más. La explicación es que esta estrategia coopera con si misma, mientras que nunca se deja explotar por la estrategia E_{16}. Por lo que cuando el estado inicial es el 1 logra cosechar las ventajas de la cooperación y cuando los enfrentamientos se inician en cualquier otro estado se comporta exactamente igual que la E_{16}. En la figura 6.9 se pueden observar lineas horizontales que indican que la frecuencia de las estrategias en la población se mantuvo constante y que corresponden a períodos donde el estado inicial era distinto a 1.

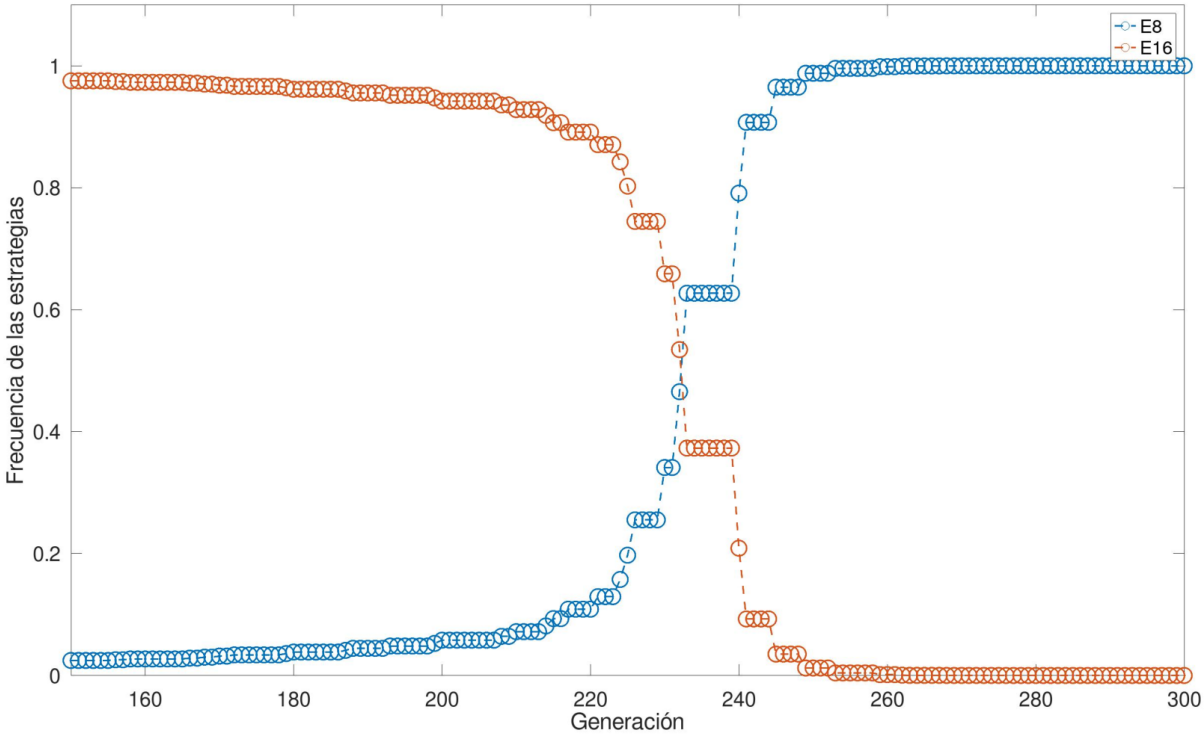


Figura 6.9: Invasión de una población de estrategas E_{16} por E_8 con estado inicial aleatorio

Por lo tanto, si asumimos que los encuentros entre organismos en la población son lo suficientemente prolongados como para poder despreciar las jugadas iniciales, la estrategia E_8 puede invadir fácilmente una población compuesta mayoritariamente de estrategas E_{16}. Entonces, podemos indagar, por un lado, si considerando encuentros más breves una población de no cooperantes puede ser invadida. Por otro, podemos observar qué sucede cuando en una población inicial de no cooperantes comienza a haber flujo génico.

Teniendo en cuenta las cuatro primeras jugadas la población inicial de estrategas E_8 debe ser mayor al tercio de la población para lograr invadir. Esto puede calcularse de la siguiente manera. Los pagos que reciben los estrategas E_8 y E_{16} en todas las interacciones posibles de una población compuestas exclusivamente por ellos son:

$$W_4^1(E_8, E_8) = 12$$

$$W_4^1(E_{16}, E_8) = 10$$

$$W_4^1(E_8, E_{16}) = 5$$

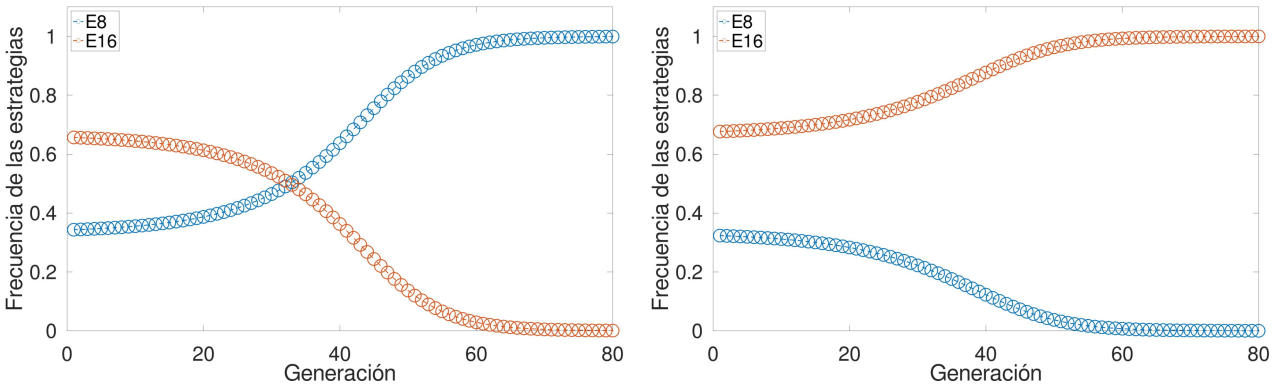
$$W_4^1(E_{16}, E_{16}) = 6$$

El superíndice indica el estado inicial y el subíndice indica la cantidad de jugadas que se toman en cuenta, por lo tanto, estos pagos son válidos para el estado inicial 1 y suman el puntaje de las cuatro primeras jugadas de cada enfrentamiento. Entonces, si la proporción

de organismos que utilizan la estrategia E_8 es p, para que la cantidad de estrategas E_8 crezca en la siguiente generación se debe cumplir:

$$\frac{p^2W_4^1(E_8,E_8) \ + \ p(1-p)W_4^1(E_8,E_{16})}{p^2W_4^1(E_8,E_8) \ + \ p(1-p)W_4^1(E_8,E_{16}) \ + \ (1-p)pW_4^1(E_{16},E_8) \ + \ (1-p)^2W_4^1(E_{16},E_{16})} > p$$

Obtenemos que para que los estrategas E_8 crezcan, $p \in (1/3, 1)$. Además vemos que si $p = 1/3$ o $p = 1$ la población es estable. En $p = 1/3$ conviven las dos estrategias, pero cualquier variación en sus frecuencias extinguirá a una.



(a) Invasión de una población con $1/3 + 0,01$ de estrategas E_8

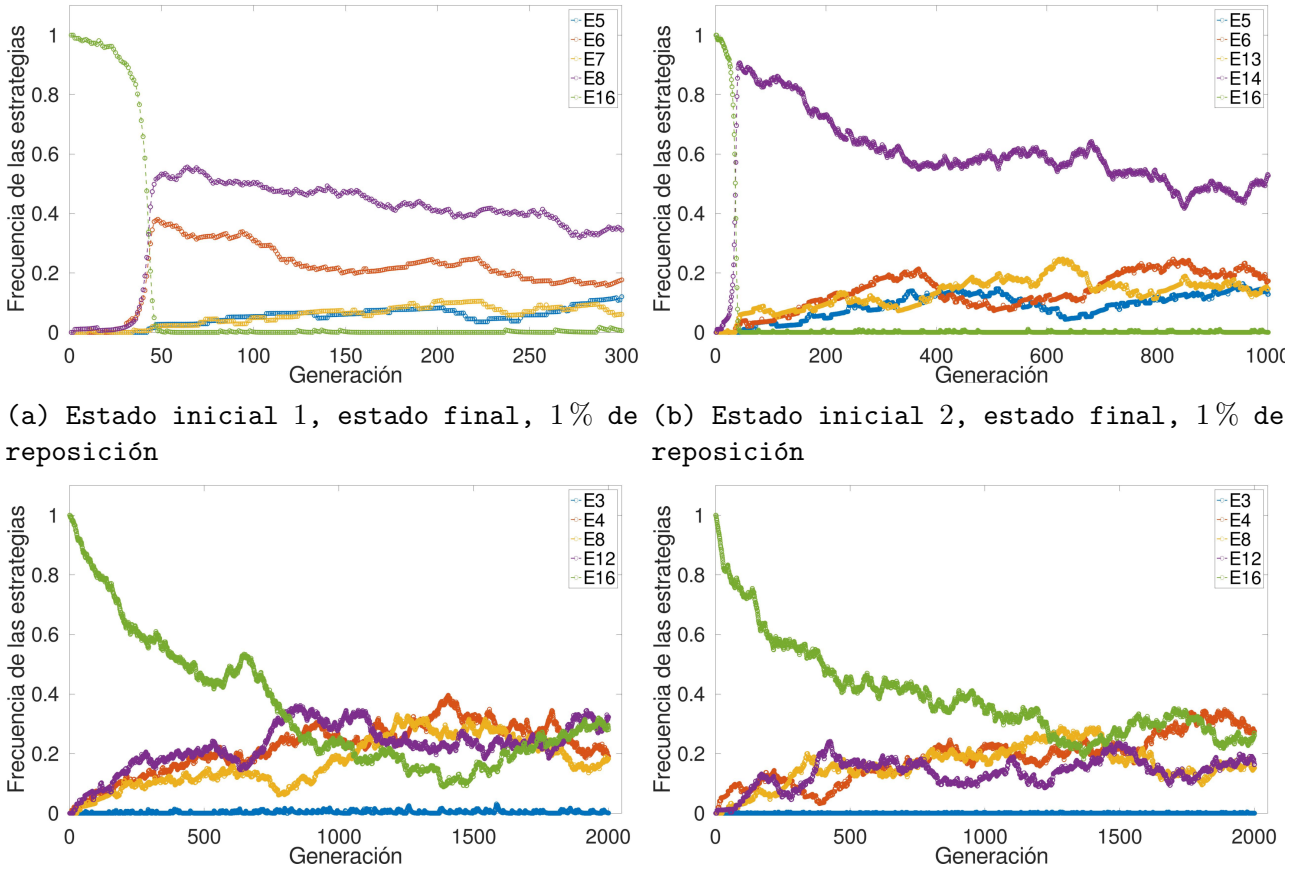
(b) Fallo en la invasión de una población con $1/3 - 0,01$ de estrategas E_8

Figura 6.10: Resultado de la invasión de estrategas E_8 en una población mayoritaria de estrategas E_{16}

Si tomamos en cuenta menos jugadas la estrategia E_8 ya no puede invadir, no importa cuál sea su frecuencia en la población. Además, si consideramos cuatro jugadas la frecuencia necesaria es muy alta como para considerar que realmente invade la población en el sentido de las EEE. Sin embargo, vimos que la estrategia E_8 es igual a la E_{16} para todos los estados iniciales excepto para el 1. Por lo tanto, podríamos pensar en un escenario en el que una población inicial muy pequeña de estrategas E_8, en un ambiente que favorece los estados iniciales 2, 3 y 4, aumenta por deriva génica hasta llegar a la frecuencia crítica. Posteriormente un cambio en el ambiente le permitiría invadir.

Ahora, ¿qué sucede si se introduce constantemente variación en las estrategias en la población? En principio estableceremos que un $1\,\%$ de la población cambia aleatoriamente su estrategia en cada generación. La población inicial estrá compuesta exclusivamente por estrategas E_{16}. Para todos los estados iniciales se llega a poblaciones con proporciones consistentes de diversas estrategias (figura 6.11).

Se puede observar la similitud entre las poblaciones estables encontradas previamente en las tablas 6.5, 6.6, 6.7 y 6.8 y las estrategias presentes consistentemente entre estas poblaciones. Por lo tanto, incluso con introducción constante de variedad las poblaciones se mantienen reconocibles con un perfil de estrategias determinado. Para los dos primeros estados vemos que la estrategia E_{16} desaparece y solo varía debido a su reintroducción



(a) Estado inicial 1, estado final, 1 % de reposición

(b) Estado inicial 2, estado final, 1 % de reposición

(c) Estado inicial 3, estado final, 1 % de reposición

(d) Estado inicial 4, estado final, 1 % de reposición

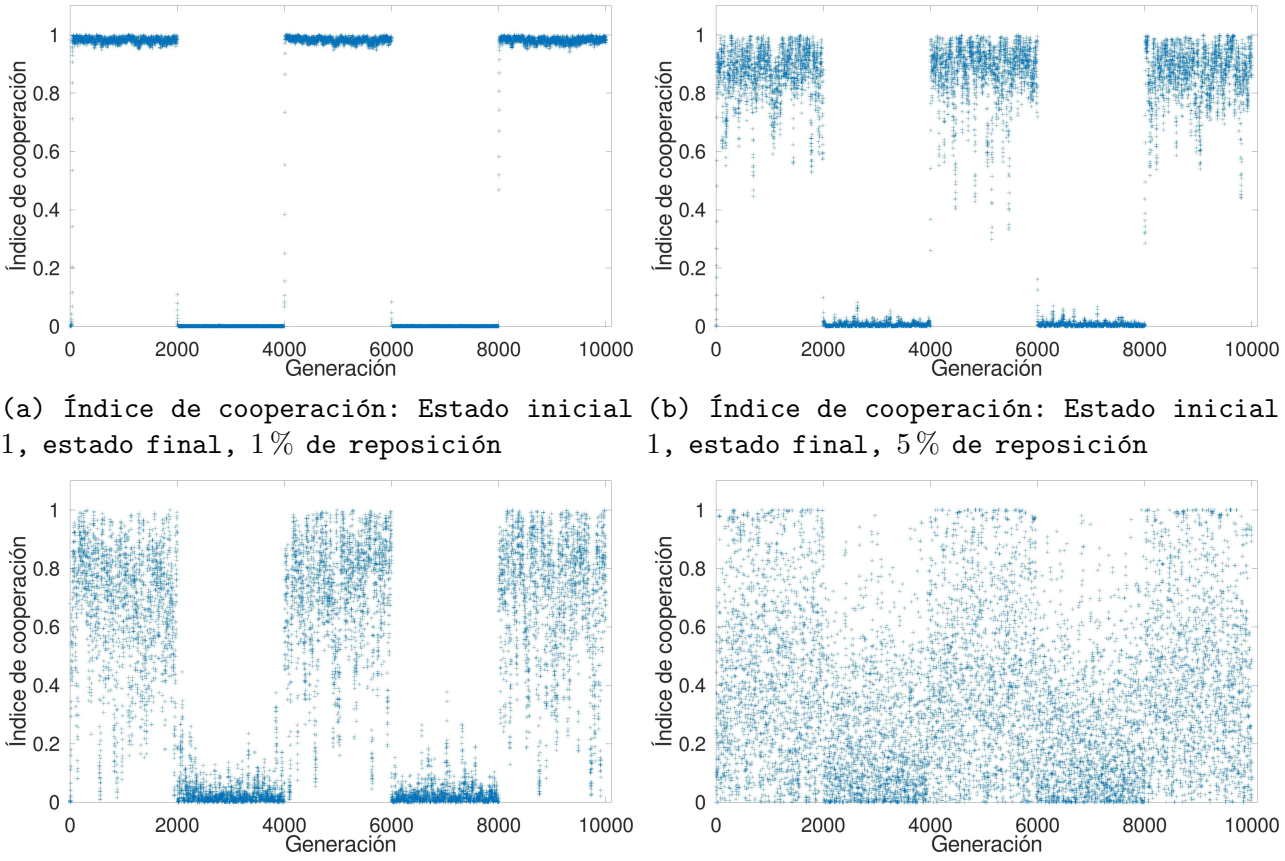
Figura 6.11: Evoluciones de poblaciones no cooperativas con introducción aleatoria de variedad de 1 % por generación

aleatoria. Todas estas poblaciones pueden sustentar los cambios en la cooperación de la población con los cambios en el estado inicial que vimos antes.

Nos podemos preguntar ahora qué tanto recambio se necesita para desdibujar este perfil y, por otro lado, cuál es la mínima tasa de recambio que logrará llevar la población a este perfil. Con un recambio de estrategias de un $0,01\,\%$ del tamaño de la población aún se llega al perfil de estrategias determinado por el estado inicial y la cantidad de jugadas tenidas en cuenta, solo que se demora más en alcanzar este estado. Incluso con valores menores de recambio se logra el mismo resultado, solo que toma mucho más tiempo. Por otro lado, para estimar cuando la población se homogeniza por una taza de recambio demasiado alta conviene observar cuando el patrón de cambio de cooperación a no cooperación que vimos antes se rompe (figura 6.12).

Como podemos ver incluso con recambios aleatorios tan altos como $40\,\%$ de la población aún hay rastros de la estructuración por cambios en el estado inicial. Mientras que para valores menores a $5\,\%$ la diferencia todavía es notable.

En conjunto vemos que una pequeña introducción de variabilidad en una población inicial homogéneamente no cooperante resulta en una población lo suficientemente heterogénea como



(a) Índice de cooperación: Estado inicial 1, estado final, $1\,\%$ de reposición

(b) Índice de cooperación: Estado inicial 1, estado final, $5\,\%$ de reposición

(c) Índice de cooperación: Estado inicial 1, estado final, $10\,\%$ de reposición

(d) Índice de cooperación: Estado inicial 1, estado final, $40\,\%$ de reposición

Figura 6.12: Cambios en el índice de cooperación de poblaciones con cambios aleatorios en las frecuencias de las estrategias

para sustentar períodos de cooperación prácticamente total con el estímulo del ambiente indicado. Esto funciona cuando estamos tomando en cuenta los estados finales de los enfrentamientos, si tomamos en cuenta cuatro jugadas el patrón de cooperación/no cooperación comienza a tener componentes estocásticos, pudiendo aparecer o no según la combinación precisa de estrategias en la que se encuentre la población en ese momento. Por lo tanto, la extensión de los encuentros parece ser, como es esperable, un factor clave en el desarrollo de la cooperación. Pero si aceptamos esta restricción, una variabilidad mínima en la población es capaz de sustentar períodos de cooperación globales altos.

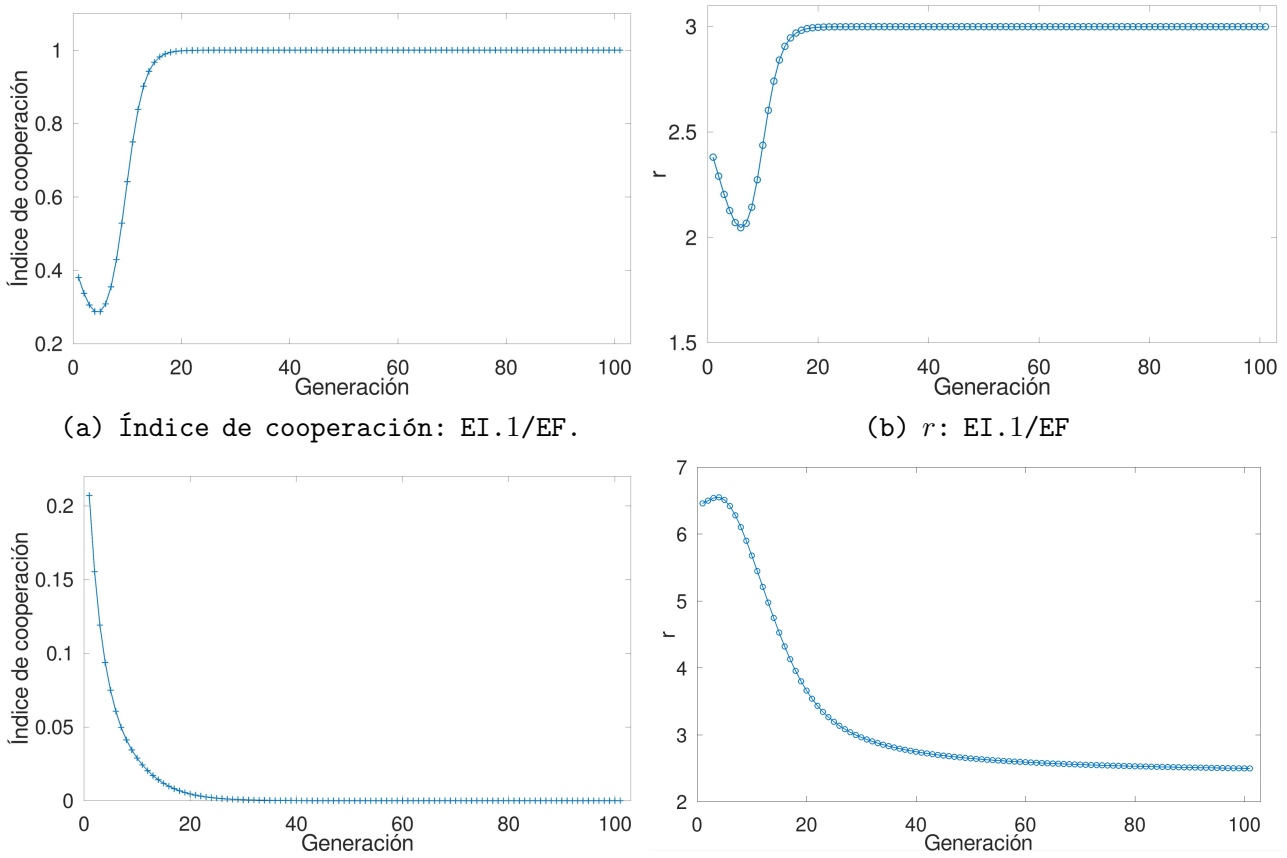
6.2.4. Variaciones de r y su relación con la cooperación

Como vimos, r representa los recursos que cosecha toda la población en cada generación. Esta interpretación genera dos observaciones: primero, considerar mayor cantidad de jugadas implica los recursos obtenidos son mayores y, por lo tanto, que el tiempo de cada generación es mayor, es decir que los organismos viven más tiempo. Debemos considerar entonces los recursos cosechados por jugada, para poder realizar comparaciones.

Por otro lado, si asumimos que la población se encuentra en el número máximo de organismos que permiten los recursos del ambiente entonces debe existir un r_{max} máximo que permite mantener a la población en ese número. Una cosecha de recursos menor a este r_{max} implicaría una disminución del número de organismos. Como nuestro modelo no permite esto, podemos

pensar que una población que no alcanza el r_{max} pierde una cierta proporción de sus organismos correspondiente a la diferencia entre el r obtenido y el r_{max} y estos organismos son repuestos con migrantes cuya composición de estrategias no es igual a la distribución de estrategias en la población.

Primero observemos como varía el r con la evolución de las poblaciones y su relación con el índice de cooperación.



(a) Índice de cooperación: EI.1/EF. (b) r: EI.1/EF

(c) Índice de cooperación: EI.3/EF (d) r: EI.3/EF.

Figura 6.13: Comparación de la evolución del índice de cooperación con r para dos estados iniciales distintos

En la figura 6.13 podemos ver como evolucionan el índice de cooperación y r en dos situaciones distintas, en 6.13a y 6.13b el estado inicial fue 1, en 6.13c y 6.13d el estado inicial fue 3. En primer lugar podemos observar que no necesariamente una mayor cooperación llevará a un r mayor. Esto parece obvio para situaciones transitorias en que existan estrategias que puedan ser explotadas, sin embargo, para poblaciones estables el r_{max} se alcanza para cuando el índice de cooperación es 1.

Si me apego a la interpretación que hice antes el $r_{max} = 3$, ya que es el valor máximo de r que puede ser obtenido en una población estable[7]. Pero entonces, cuando se alcancen valores

[7]Si comenzamos en el estado 3 y consideramos dos, tres o cuatro jugadas sí se pueden obtener poblaciones estables con un r mayor a 3. Pero esto sucede porque se suma el puntaje del primer estado aún cuando no haya sido producto de las ‘‘decisiones’’ de las estrategias. Ya que el valor del estado 3 es 5, cuando

de r superiores a r_{max} algunas estrategias deberían crecer en mayor proporción a otras. No me ocuparé de este problema en las simulaciones, pero lo que deberíamos esperar es una caída más rápida del r, ya que las estrategias que deberían crecer en mayor proporción son las no cooperativas que lograron explotar a otras estrategias para conseguir ese transitorio r mayor a r_{max}. Ahora veremos las consecuencias de reponer la caída de r con migración.

6.2.5. Migración como compensación de la caída de r

Nos podemos preguntar si las poblaciones estables que encontramos maximizan el r. Es decir, para unas determinadas condiciones, las poblaciones que comienzan con una distribución igual de todas las estrategias evolucionan a las poblaciones estables que vimos en las tablas 6.5, 6.6, 6.7 y 6.8. Estas poblaciones estables tienen un r determinado. Este r, ¿puede ser superado por otra distribución de estrategias estable?

Para responder esta pregunta seguiremos la siguiente estrategia, si en cada generación tomamos la diferencia entre un r_{max}, que definiré más abajo, y el r logrado en esa generación y sustituimos en proporción a esa diferencia las estrategias que hay en la población por otras con diferente distribución de estrategias, ¿podemos hacer que el r aumente?

Esta aproximación implica definir cómo se va a realizar la reposición de estrategias y cómo se va a definir el r_{max}. Después de probar diversas aproximaciones, me pareció que la mejor forma de bajar la frecuencia de las estrategias era asumir que todos los organismos tienen la misma probabilidad de morir debido a un r insuficiente. Por lo tanto, la disminución en la frecuencia de las estrategias es proporcional a su frecuencia. La proporción de organismos que hay que quitar es:

$$m(t) = \frac{r_{max} - r(t)}{r_{max}}$$

Donde $m(t)$ es la fracción de organismos que deben morir de acuerdo al r obtenido en el tiempo t. Así, después de calcular el éxito de una estrategia en el tiempo t se calcula cuánto deberá disminuir de acuerdo a las muertes:

$$f_i^m(t+1) = f_i(t+1) - f_i(t+1)m(t)$$

La reposición de estrategias se realiza al azar, sorteando una cantidad de estrategias proporcional a $m(t)$ a las cuales se les suma la misma frecuencia, calculada para que la suma de las frecuencias de todas las estrategias sea igual a 1.

La definición del r_{max} es más delicada. Si bien antes determiné que el r_{max} debía ser igual a 3 en una población estable, este puede no ser siempre alcanzable para unas condiciones de estado inicial y cantidad de jugadas dadas. Si se observa la definición de r:

$$r = \vec{f}^t E \vec{f}$$

consideramos dos jugadas $r_{max} = 4$, tres jugadas el $r_{max} = 3,67$ y cuando consideramos cuatro $r_{max} = 3,5$

Vemos que representa una forma cuadrática, el espacio definido por ella debe compartir puntos con el plano de los vectores $\vec{f}$ que representan poblaciones posibles, es decir aquellos cuyos componentes suman 1. El r_{max} será aquel alcanzable debido a los valores de E, pero restringido a que un $\vec{f}$ que cumpla con esta propiedad. Por lo tanto, la definición ''operativa'' de r_{max} será que primero definimos r_{max} como el alcanzado en la primera generación, es decir $r_{max} = r(1)$ y después le permitimos variar asumiendo el máximo valor que obtenga r en el desarrollo de esa población.

Si dejamos que una población evolucione desde una población con todas las estrategias igualmente representadas con reposición y sin reposición obtenemos los valores de r presentados en las tablas siguientes para todas las condiciones iniciales[8].

Tabla 6.14: r según el estado inicial de los encuentros y la cantidad de jugadas sin reposición

Estado inicial	2 jugadas	3 jugadas	4 jugadas	EF.
1	2	$1,67$	3	3
2	$0,5$	$0,67$	$2,34$	$2,5$
3	3	$2,33$	2	1
4	1	1	1	1

Tabla 6.15: r según el estado inicial de los encuentros y la cantidad de jugadas con reposición

Estado inicial	2 jugadas	3 jugadas	4 jugadas	EF.
1	$2,25^*$	$2,22^*$	3	3
2	$1,5$	$1,08^*$	$2,5$	$2,5$
3	4	$3,67$	$3,5$	3
4	$1,21^*$	$1,42^*$	$1,4^*$	$1,54^*$

Podemos ver que, cuando la población se estabiliza se logra alcanzar el mismo r con reposición y sin reposición. Esto en ocasiones sucede para distribuciones estables de estrategias distintas (tablas 6.17, 6.18 y 6.19[9]). Cuando las frecuencias de las estrategias no se estabilizan el r promedio alcanzado es superior al r bajo las mismas condiciones iniciales pero sin reposición. En estos casos la población no fluctúa aleatoriamente, si no que existen consistentemente ciertas estrategias con mayor representación. Estas estrategias son, por supuesto, aquellas que tenían mayor representación en las poblaciones

[8] El * indica un promedio, la población no se estabilizó, por lo tanto el r tampoco.

[9] No están los casos de frecuencias de estrategias no estabilizados.

estables sin reposición en condiciones iniciales iguales. [10]

En relación al índice de cooperación podemos ver en la tabla 6.16 comparada con la tabla 6.9 que aumenta ligeramente en las poblaciones no estables considerando el promedio. La magnitud del aumento no parece ser suficientemente importante y es mantenida por la introducción constante de estrategias cooperativas en la población. El recambio de las estrategias no funcionaría entonces como una forma importante de fomentar la cooperación, sino como una alternativa para mantener diversidad en la población a la espera de que un cambio en las condiciones ambientales fomente la cooperación.

Tabla 6.16: Índice de cooperación según el estado inicial de los encuentros y la cantidad de jugadas con reposición

Estado inicial	2 jugadas	3 jugadas	4 jugadas	EF.
1	$0,02^*$	$0,09^*$	1	1
2	0	$0,01^*$	0	0
3	0	0	0	0
4	$0,01^*$	$0,05^*$	$0,04^*$	$0,06^*$

En las siguientes tablas podemos ver la distribución de estrategias en las poblaciones estables con reposición. Para el estado inicial 1 las estrategias representadas no cambian, aunque si varían ligeramente las frecuencias de cada una de ellas. Esto probablemente se deba a que el peso de muchos de los enfrentamientos es el mismo y cambios en las frecuencias de algunas estrategias no representen ningún cambio a nivel global, de hecho considerando el estado final de los enfrentamientos todos tienen el mismo peso, ya que estamos en un estado de cooperación general, por lo tanto, pueden ser admisibles muchas poblaciones estables diferentes. Observando la tabla 6.1 vemos que considerando las estrategias de la E_1 a la E_8 la matriz E es uniforme, por lo que cualquier vector $\vec{f}$ sería estable.

Tabla 6.17: Porcentaje de cada estrategia en una población estable (estado inicial 1) con reposición

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
4	0	1,4	0	0	3,4	18,3	15,7	61,2	0	0	0	0	0	0	0	0
EF	0,3	0,3	9,1	0,6	7,6	14,8	13,2	54,1	0	0	0	0	0	0	0	0

En el caso del estado inicial 2 ocurre que cuando consideramos el estado final del encuentro, la población estable añade la estrategia E_7. Se podría pensar entonces que esta

[10] Métodos que introducían mayor aleatoriedad en el recambio de estrategias no lograban alcanzar poblaciones estables en general, más allá de ocasionales ‘‘accidentes estadísticos’’.

estrategia es equivalente a alguna otra para estas condiciones iniciales, pero cuando inicio una población sin reposición con las frecuencias obtenidas para la población estable con reposición (última fila de la tabla 6.18) la estrategia E_7 desaparece.

Tabla 6.18: Porcentaje de cada estrategia en una población estable (estado inicial 2) con reposición

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
2	0	0	0	0	12,5	12,5	12,5	12,5	0	0	0	0	12,5	12,5	12,5	12,5
4	0	0	0	0	10,7	33,4	0	0	0	0	0	0	18	37,9	0	0
EF	0	0	0	0	9,3	13,5	22,9	0	0	0	0	0	7,2	56,4	0	0

En el caso del estado inicial 3 no hay cambios entre las frecuencias estables con y sin reposición. Puede ser que no existan otras posibles distribuciones estables o que no sean alcanzables por este método a partir de poblaciones con igual representación de todas las estrategias.

Tabla 6.19: Frecuencia de cada estrategia en una población estable (estado inicial 3) con reposición

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
2	0	0	12,5	12,5	0	0	12,5	12,5	0	0	12,5	12,5	0	0	12,5	12,5
3	0	0	0	25	0	0	0	25	0	0	0	25	0	0	0	25
4	0	0	0	25	0	0	0	25	0	0	0	25	0	0	0	25
EF	0	0	0	25	0	0	0	25	0	0	0	25	0	0	0	25

De manera general, se reafirma que las poblaciones de las estrategias examinadas tienden en todos los casos a mantener su variedad, incluso cuando consideramos enfrentamientos de pocas jugadas y en estados iniciales adversos para las estrategias cooperantes. Una forma alternativa de ver esto es que la estrategia E_{16}, que nunca coopera, no tiene un lugar destacado en nuestras poblaciones aún cuando la suma de los valores de sus enfrentamientos es la mayor de todas (figuras 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4). Sin embargo, niveles de cooperación importantes se dan solo bajo condiciones iniciales restringidas, es decir con un estado inicial favorable y tomando en cuenta enfrentamientos prolongados. La generación de variedad *ad hoc* en las poblaciones, ya sea mediante introducción aleatoria o mediante reposición de acuerdo a un criterio de maximizar r, no logra sustentar niveles de cooperación significativos, sin las condiciones iniciales favorables.

Capítulo 7

Conclusiones y perspectivas

En una matriz de 2×2 el dilema del prisionero encierra un conflicto reconocible y prevalente, ¿cómo se contiene el impulso individual a la ganancia máxima en el corto plazo sin una autoridad o fuerza superior que lo regule? En el curso de este trabajo, con el modelo y las herramientas que he presentado, hemos visto que las dos claves principales son la longitud de los encuentros entre los organismos y el estado inicial de los mismos.

Una gran cantidad de jugadas permite que las estrategias no se vean afectadas por resultados adversos en sus primeras cuatro jugadas. Esto no significa que todas las estrategias obtengan un mayor puntaje considerando el estado final que las cuatro, tres o dos primeras jugadas (por ejemplo, el enfrentamiento en el que se pasa del estado 4 al 2 al 1 y después al 3 y se queda allí lleva a un mejor resultado para el jugador 2 si se consideran las dos, tres o cuatro primeras jugadas), pero sí permite que los enfrentamientos que implican cooperación mutua aumenten su representación. Esto es una consecuencia de la victoria del largo plazo sobre el corto plazo, no solo intrageneracionalmente si no también a través de las generaciones. En el modelo presentado la cooperación no puede surgir en poblaciones con tiempos generacionales cortos y sin tiempos evolutivos largos. Los términos ‘‘corto’’ y ‘‘largo’’ son relativos a la frecuencia entre las interacciones de los entes biológicos y la capacidad de variar las frecuencias de las estrategias de una generación a otra.

Para profundizar en el estudio del tiempo para el surgimiento de la cooperación se podría pensar en agregar al modelo un descuento temporal que permita evaluar hasta que punto los resultados presentados lo resisten. Se puede pensar en varias formas de implementarlo, no necesariamente tendría que ser una función decreciente del puntaje con el número de jugada. Podría ser, por ejemplo, una probabilidad de desaparición para los organismos de acuerdo al puntaje que van acumulando. Esto permitiría que la cantidad de jugadas sea determinada por la dinámica del modelo y no impuesta de manera arbitraria como he hecho.

Otra modificación interesante sería introducir alguna forma de sistema genético que permitiera el cambio en las frecuencias de las estrategias de manera más realista. Dado que presenté un modelo neural biológicamente plausible que puede implementar las estrategias estudiadas, es tal vez posible inferir un sistema genético que pueda dar lugar a las redes que sustentan el computo de las estrategias. De no ser esto posible, siempre se podría pensar en cuatro *loci* con dos alelos posibles en cada uno en organismos haploides o un *locus* con cuatro alelos en organismos diploides u otras posibilidades de este tipo.

Algo más sencillo aún, sin necesidad de cambiar el modelo, se podría dejar evolucionar una

población introduciendo variedad constantemente y hacer una estadística de cuánto tarda, si es que lo hace, en surgir la cooperación. Es decir, para ciertas condiciones iniciales ver cuántas generaciones tarda una población en generar cooperación por azar. Por supuesto, para la mayoría de las condiciones iniciales no esperaríamos que surja espontáneamente cooperación, pero en condiciones favorables, para una cantidad de simulaciones con una cantidad determinada de generaciones o para una sola simulación con muchas generaciones esperaríamos que en cierta proporción o en una determinada cantidad de generaciones surja la cooperación.

Tanto el introducir algún descuento temporal en los pagos como la implementación de algún sistema genético explicito podrían dar una idea más clara de lo que implica el tiempo para el surgimiento de la cooperación. Sin embargo, un aspecto aún más importante y que trataré de enfatizar en esta sección es el de un modelo empírico que permita observar de la manera más cercana posible las variables y parámetros de este modelo. El estudio de poblaciones bacterianas es probablemente lo más adecuado a estos efectos.

El otro parámetro necesario para el desarrollo de la cooperación en el modelo fue el estado inicial de los encuentros. Como dije previamente, al considerar a las funciones booleanas de dos variables como estrategias para jugar al DPI queda abierta la pregunta de cuál sería el movimiento inicial de cada una. Esto llevó a que en el modelo se eliminara la decisión individual de la primer jugada y se estableciera como una propiedad de la población o del ambiente. Esto permitió que se explorara la dinámica completa de cada enfrentamiento, ya que haber determinado para cada estrategia un movimiento inicial hubiera llevado a que ciertos estados no fueran alcanzables. Por supuesto, podría haber optado por una elección aleatoria para el estado inicial de cada enfrentamiento o alguna solución similar. Pero la interpretación del estado inicial como una propiedad de toda la población que depende del ambiente me parece biológicamente relevante, una variable como la temperatura afecta a cualquier ente biológico de una categoría dada de manera muy similar, por lo tanto no se requiere un esfuerzo demasiado grande para aceptar que alguna propiedad del ambiente pueda predisponer más o menos a la cooperación. Esta interpretación podría suscitar la pregunta: ¿cómo evolucionó un sistema que permite coordinar la cooperación entre organismos sin que antes haya evolucionado la cooperación? Planteado así puede parecer paradojal, pero la cooperación, más allá de todas las implicancias que puede tener para nosotros la palabra, es solo una respuesta frente a una situación dada, la situación en este caso está planteada por el ambiente y la respuesta dependerá del programa genético de cada organismo cuya variedad natural hace presente a las diversas estrategias.

La relevancia del estado inicial en el desarrollo de los enfrentamientos es advertida en la representación de estos mediante grafos y en su análisis combinatorio. 114 de los 256 enfrentamientos juegan su destino en la elección del estado inicial. Estos 114 enfrentamientos no se distribuyen uniformemente entre las estrategias, los extremos son las E_{13} y E_4, la primera tiene solo dos enfrentamientos que dependen del estado inicial, en contraste, todos los enfrentamientos de la segunda dependen del estado inicial. Para completar este análisis sería interesante realizar estadísticas indagando en el éxito de las estrategias y la dependencia del destino de sus enfrentamientos del estado inicial. Por ejemplo, vimos antes que el promedio de la suma de los valores de los enfrentamientos de las estrategias E_{13} y E_4 era igual a 36, sin importar la cantidad de jugadas consideradas. Además, se puede observar que en las poblaciones estables si una está presente la otra no lo está. Este tipo de patrones son sin duda abundantes, las simetrías entre

las estrategias y los grafos de los enfrentamientos tientan a buscar un orden subyacente que resuma toda su información. Durante este trabajo esta búsqueda a quedado truncada por varios caminos distintos, desde las diversas formas de expresar los enfrentamientos (por ejemplo C) al divertimento de construir una superficie de estrategias en que cada movimiento implique un cambio mínimo (D). La relación entre las matrices de asociación y las matrices de adyacencia de los grafos de los enfrentamientos hacen esta tentación aún más fuerte. Sin embargo, en este trabajo no he podido avanzar más allá de los trazos mostrados.

Un destino similar tuvo el análisis de las matrices de enfrentamientos que puedan sustentar poblaciones estables. El punto alcanzado no termina de ser satisfactorio, quedando por resolver una forma más concreta para las matrices E que pueden sustentar poblaciones estables y su relación con r y su forma cuadrática.

Ciertamente uno de los aspectos más atractivos del DPI son las posibilidades prácticamente ilimitadas de variaciones que se pueden realizar. Dotar a la población de una estructura espacial es probablemente el más común de ellos. En este sentido me interesaría explorar cómo poblaciones adyacentes con flujo génico podrían influir unas en las otras. Parece natural representar esta metapoblación mediante un grafo y establecer flujos entre las subpoblaciones. La maximización de r y la estabilidad de poblaciones cooperantes según el flujo génico desde poblaciones con diferentes frecuencias de estrategias puede ser temas relevantes para indagar.

Sin embargo, si tuviera que elegir una dirección para continuar investigaciones sobre el surgimiento de la cooperación me decantaría por un modelo empírico. La bibliografía sobre teoría de juegos enfatiza la necesidad de una mayor conexión entre la teoría y la experimentación [51] y es difícil no estar de acuerdo. La modelización es imprescindible para el entendimiento y la creatividad, como herramienta para clarificar y expresar ideas. Pero solo puede ser potenciada por la experimentación. Yendo a uno de los puntos de este trabajo, entiendo plausible utilizar el estado inicial de los enfrentamientos como parámetro del modelo y no una propiedad de las estrategias. Ahora bien, ¿cuáles son los ejemplos concretos? ¿son realmente análogos a lo que el modelo propone? Estas preguntas pueden no requerir experimentos o indagaciones nóveles, pero si una búsqueda de datos empíricos. Este trabajo flaquea en este aspecto, por ejemplo, las sugerencias que hago en relación a la utilidad de las funciones booleanas como estrategias del DPI deberían estar más profundamente sustentadas.

Por último, la revisión bibliográfica tiene una perspectiva más histórica que actual. Tal vez hubiera sido más provechoso contar brevemente la historia para centrarme en desarrollos más recientes. Sin embargo, no deja de tener interés observar la irrupción de la teoría de juegos en la biología y el estado intelectual que la hizo posible.

Apéndice A

Glosario de algunos conceptos de Teoría de Juegos

Acción: Elección que un jugador puede tomar en un juego.

Concepto de equilibrio o concepto de solución: Regla que define un equilibrio basado en los posibles perfiles de estrategias y en sus posibles pagos.

Equilibrio: Perfil de estrategias que consiste en la mejor estrategia para cada uno de los jugadores.

$$s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$$

Estrategia: Regla que indica que acción debe tomar el jugador en cada momento del juego.

Estrategia dominada: Estrategia que cuyo pago es menor (estrictamente dominada) o igual (débilmente dominada) al de cualquier otra estrategia que el jugador pueda elegir, más allá de la elección de estrategias de los rivales.

$$W(s_i^d, s_{-i}) \ \leq \ W(s_i', s_{-i}) \quad \forall \ s_{-i}$$

Estrategia dominante: Estrategia que cuyo pago es mayor (estrictamente dominante) o igual (débilmente dominante) al de cualquier otra estrategia que el jugador pueda elegir, más allá de la elección de estrategias de los rivales.

$$W(s_i^*, s_{-i}) \ \geq \ W(s_i', s_{-i}) \quad \forall \ s_{-i} \quad \forall \ s_i' \neq s_i^*$$

Jugadores: Agentes (individuos, organismos, instituciones) que toman las decisiones en los juegos.

Mejor respuesta: Es la estrategia que da el mayor pago dadas las estrategias de los otros jugadores.

$$W(s_i^*, s_{-i}) \ \geq \ W(s_i', s_{-i}) \ \ \forall \ s_i' \neq s_i^*$$

Siendo s_{-i} el perfil de estrategias de todos los jugadores salvo i.

Pago: Ganancia esperada según la estrategia elegida por él y sus rivales.

$$W_i(x, y)$$

Es el pago esperado para el jugador i cuando juega la estrategia x y sus rivales juegan la estrategia y.

Perfil de estrategias: Conjunto ordenado con una estrategia por jugador.

$$s = (s_1, s_2, ..., s_n)$$

Apéndice B

Matrices de asociación para cada estrategia

$$E_1 = c(c \otimes c)^T + c(c \otimes n)^T + c(n \otimes c)^T + c(n \otimes n)^T$$

$$E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$E_2 = c(c \otimes c)^T + c(c \otimes n)^T + c(n \otimes c)^T + n(n \otimes n)^T$$

$$E_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$E_3 = c(c \otimes c)^T + c(c \otimes n)^T + n(n \otimes c)^T + c(n \otimes n)^T$$

$$E_3 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$E_4 = c(c \otimes c)^T + c(c \otimes n)^T + n(n \otimes c)^T + n(n \otimes n)^T$$

$$E_4 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$E_5 = c(c \otimes c)^T + n(c \otimes n)^T + c(n \otimes c)^T + c(n \otimes n)^T$$

$$E_5 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$E_6 = c(c \otimes c)^T + n(c \otimes n)^T + c(n \otimes c)^T + n(n \otimes n)^T$$

$$E_6 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_7 = c(c \otimes c)^T + n(c \otimes n)^T + n(n \otimes c)^T + c(n \otimes n)^T$$

$$E_7 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$E_8 = c(c \otimes c)^T + n(c \otimes n)^T + n(n \otimes c)^T + n(n \otimes n)^T$$

$$E_8 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$E_9 = n(c \otimes c)^T + c(c \otimes n)^T + c(n \otimes c)^T + c(n \otimes n)^T$$

$$E_9 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$E_{10} = n(c \otimes c)^T + c(c \otimes n)^T + c(n \otimes c)^T + n(n \otimes n)^T$$

$$E_{10} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_{11} = n(c \otimes c)^T + c(c \otimes n)^T + n(n \otimes c)^T + c(n \otimes n)^T$$

$$E_{11} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$E_{12} = n(c \otimes c)^T + c(c \otimes n)^T + n(n \otimes c)^T + n(n \otimes n)^T$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$E_{13} = n(c \otimes c)^T + n(c \otimes n)^T + c(n \otimes c)^T + c(n \otimes n)^T$$

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{14} = n(c \otimes c)^T + n(c \otimes n)^T + c(n \otimes c)^T + n(n \otimes n)^T$$

$$E_{14} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{15} = n(c \otimes c)^T + n(c \otimes n)^T + n(n \otimes c)^T + c(n \otimes n)^T$$

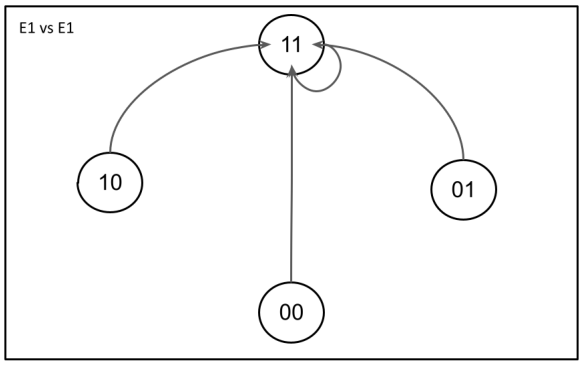
$$E_{15} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{16} = n(c \otimes c)^T + n(c \otimes n)^T + n(n \otimes c)^T + n(n \otimes n)^T$$

$$E_{16} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0\ 0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0\ 0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

B.1. Grafos y matrices de adyacencia de los enfrentamientos

B.1.1. E_1



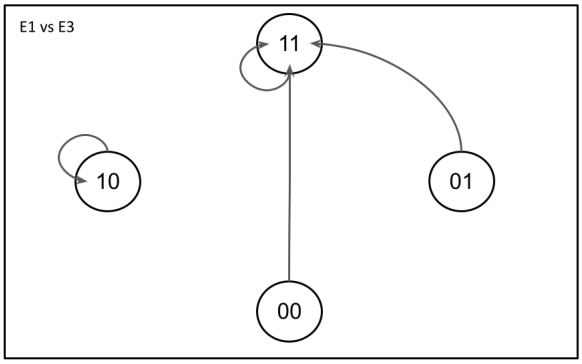
$$E_1E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



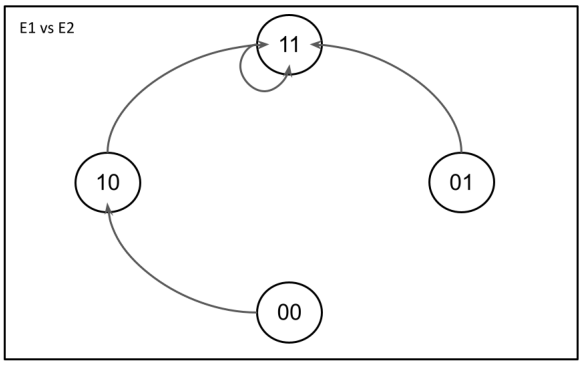
$$E_1E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



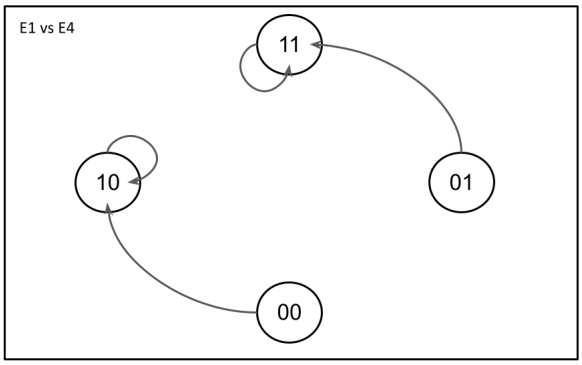
$$E_1E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



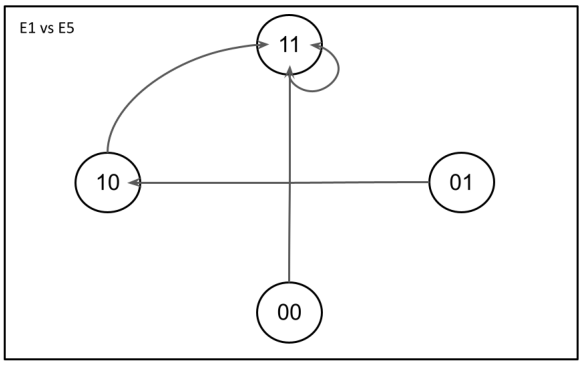
$$E_1E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



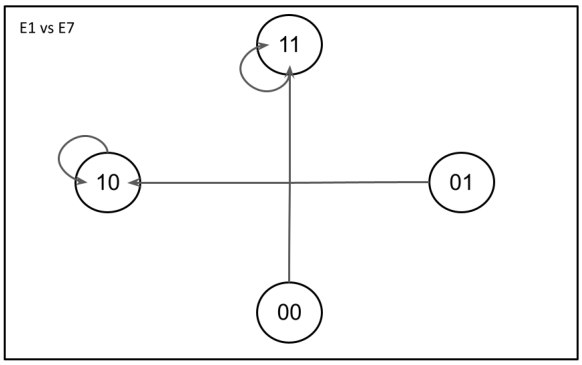
$$E_1E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



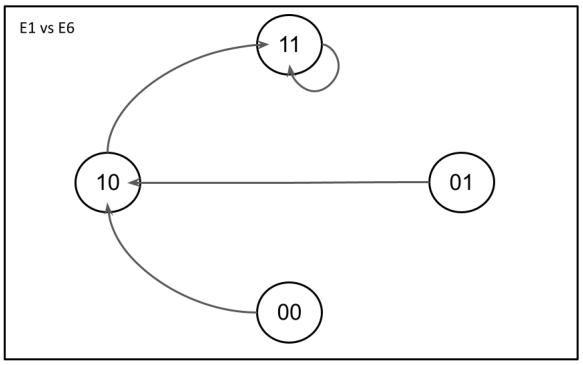
$$E_1E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



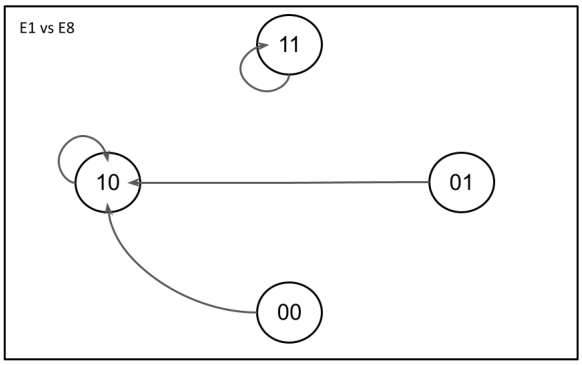
$$E_1E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



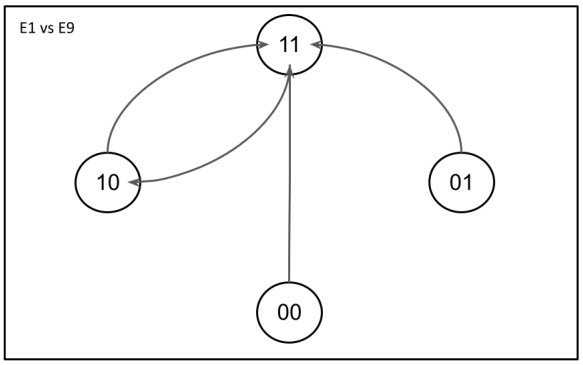
$$E_1E_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



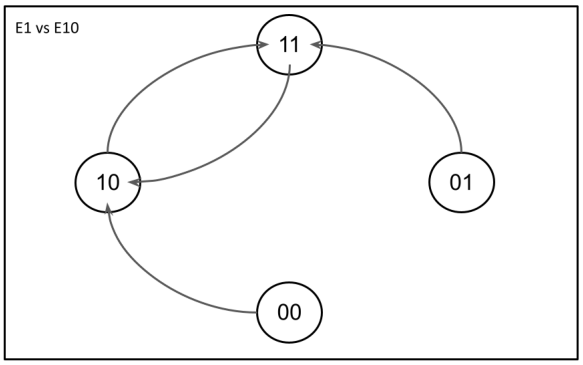
$$E_1E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



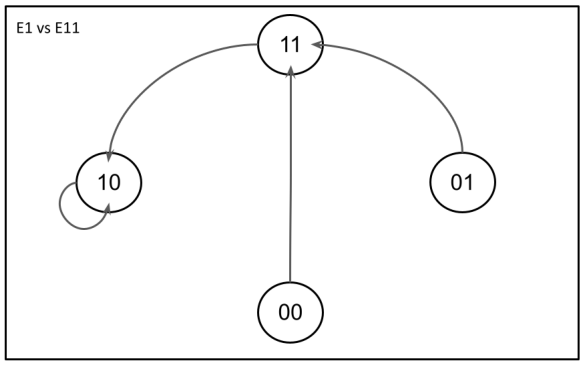
$$E_1E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



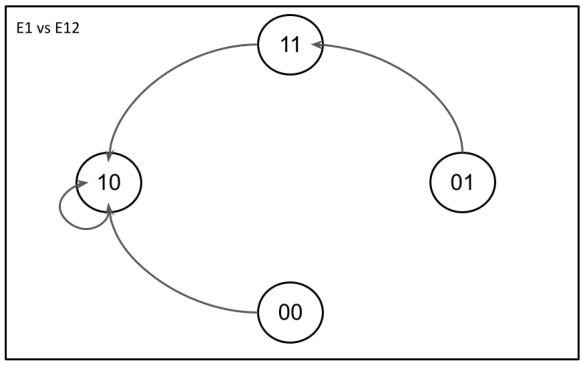
$$E_1E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



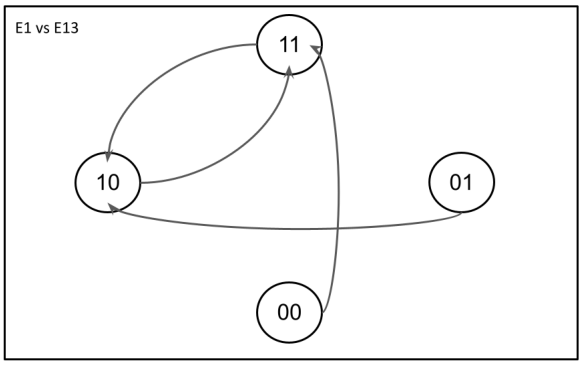
$$E_1E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



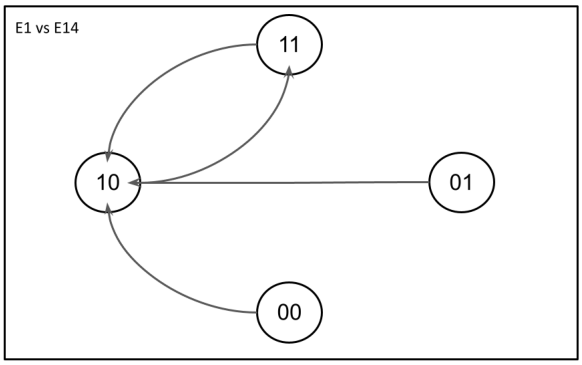
$$E_1E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



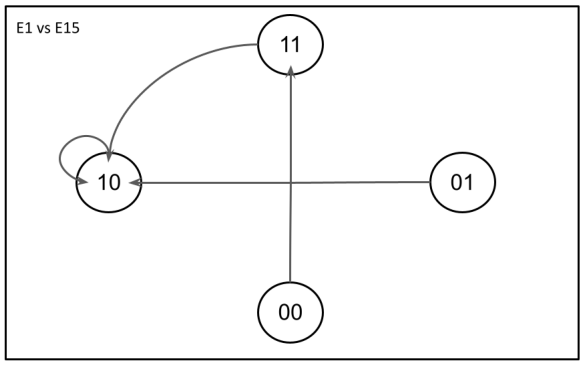
$$E_1E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



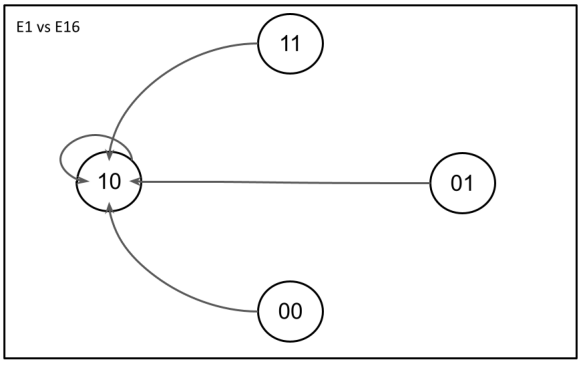
$$E_1E_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$E_1E_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

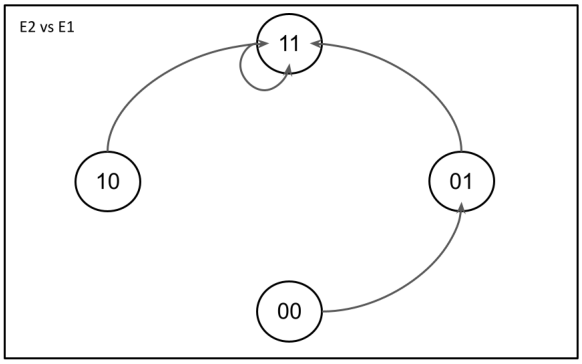
Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B.1.2. E_2



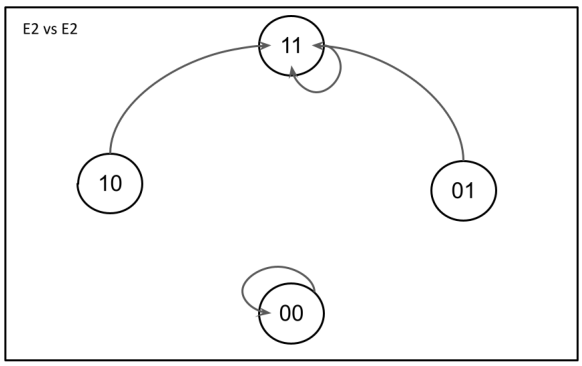
$$E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



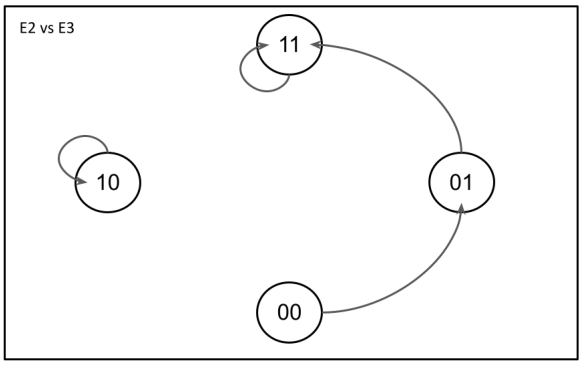
$$E_2E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



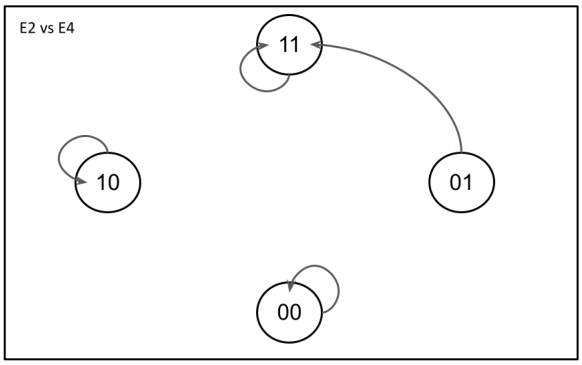
$$E_2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



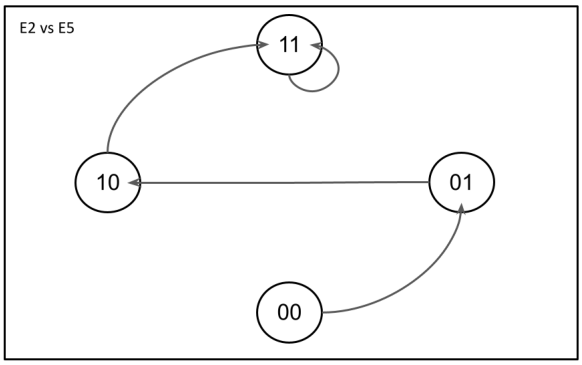
$$E_2E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



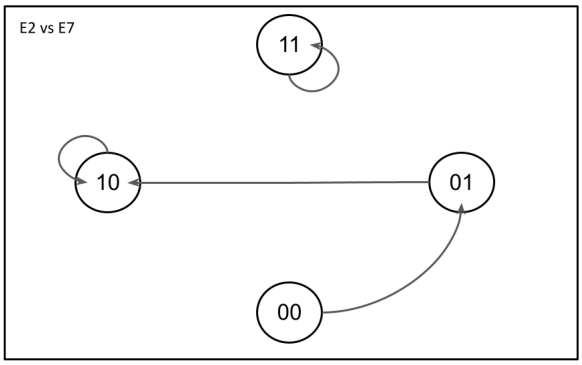
$$E_2E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



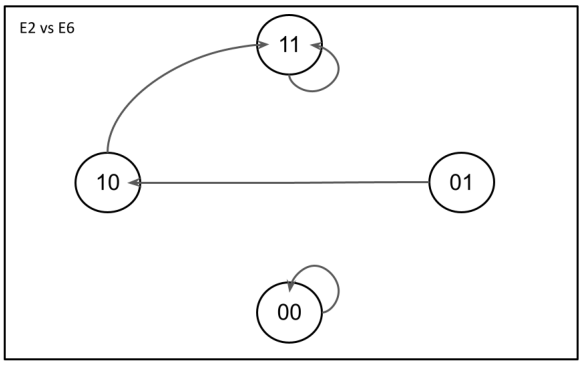
$$E_2E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



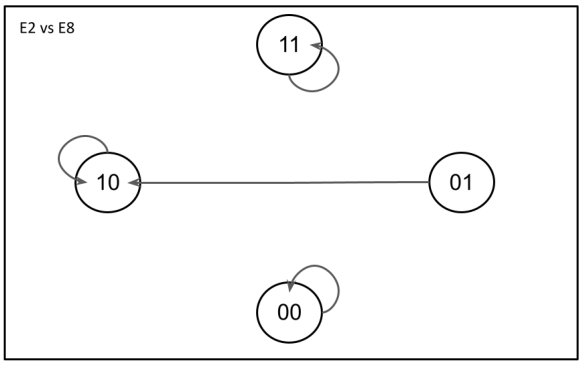
$$E_2E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



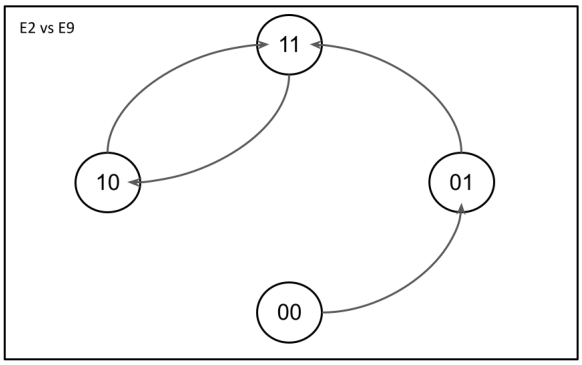
$$E_2E_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



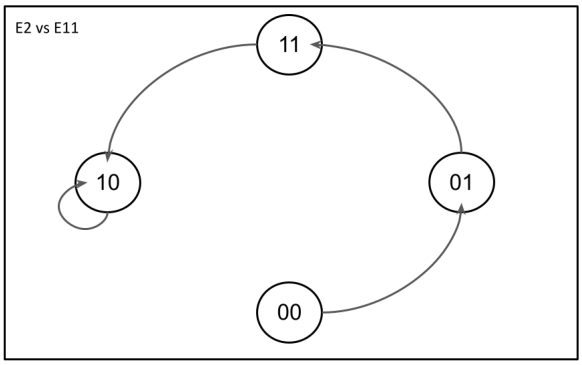
$$E_2E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



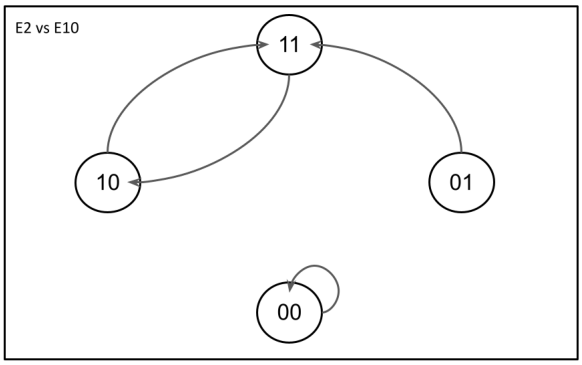
$$E_2E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



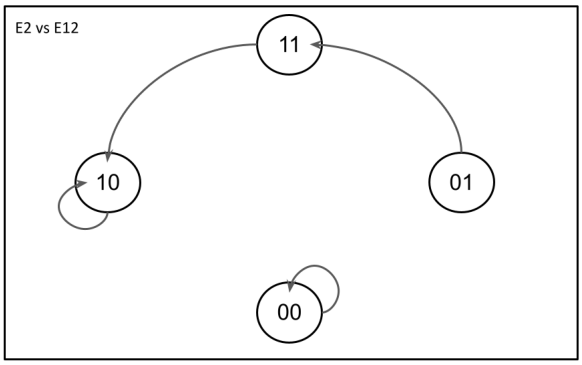
$$E_2E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



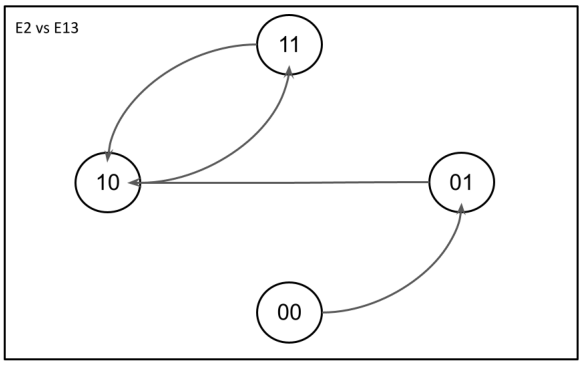
$$E_2E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



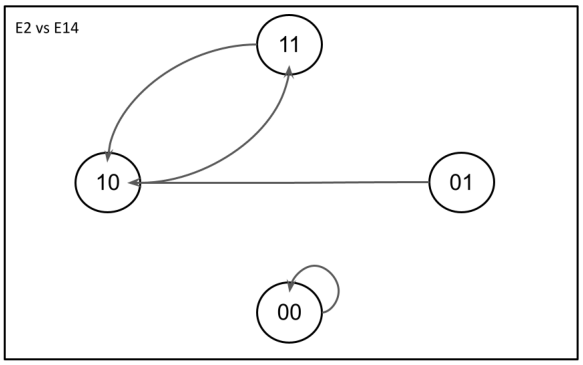
$$E_2E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



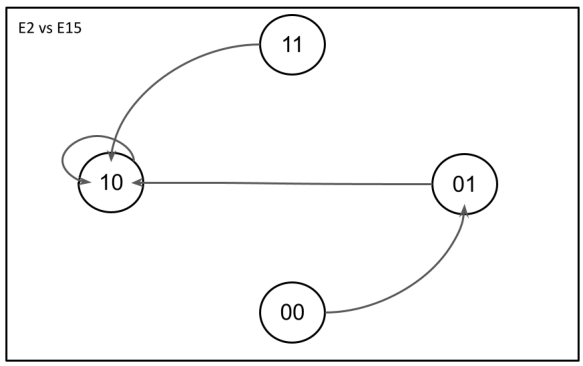
$$E_2E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



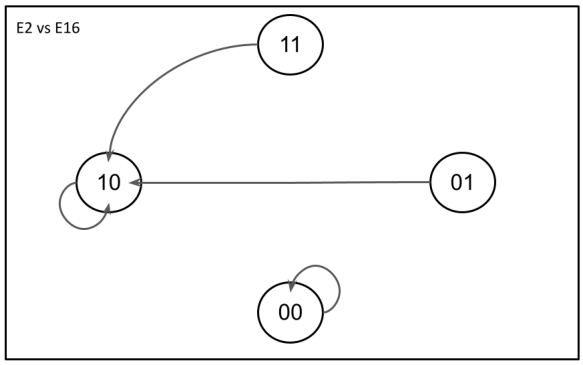
$$E_2E_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$E_2E_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

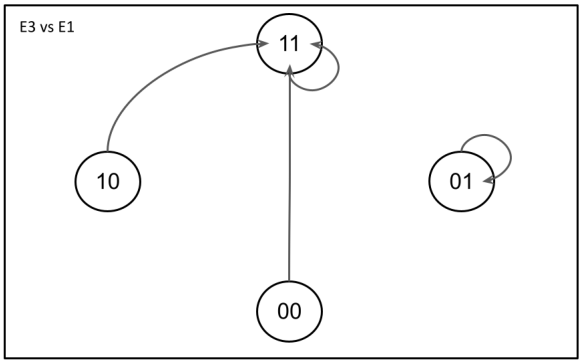
Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B.1.3. E_3



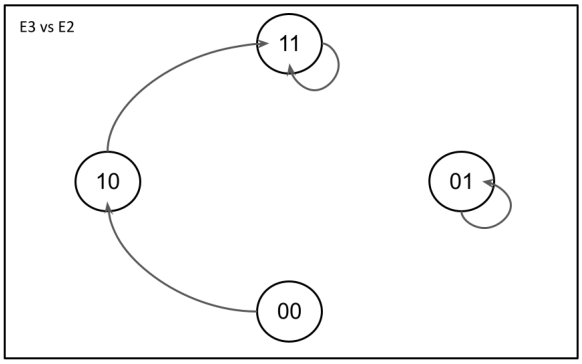
$$E_3E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



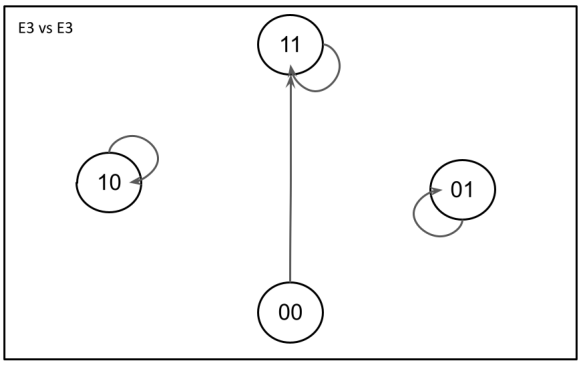
$$E_3E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



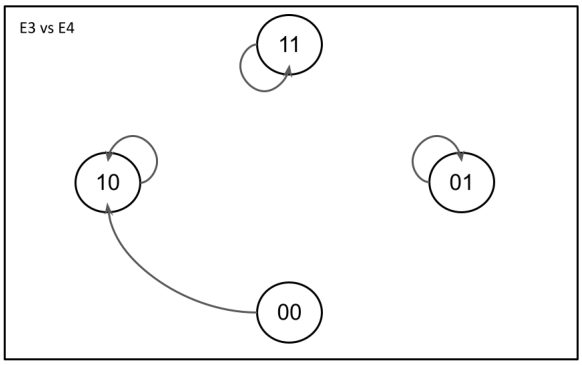
$$E_3E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



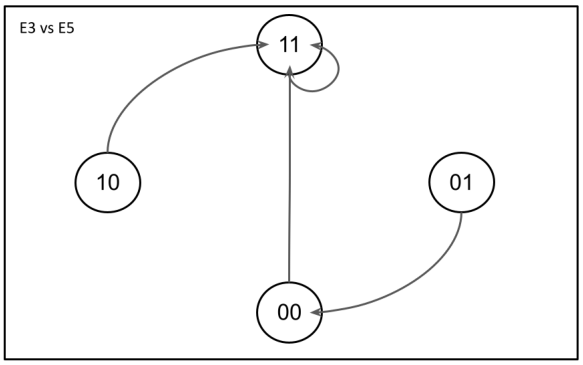
$$E_3E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



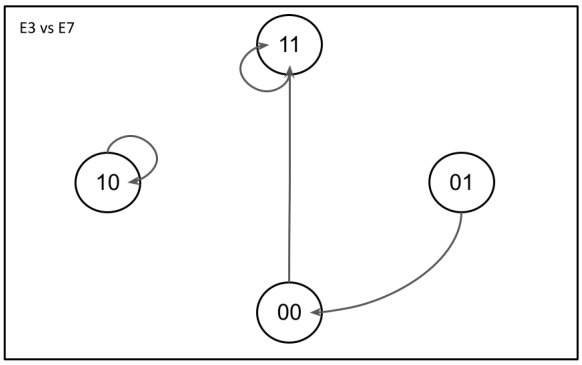
$$E_3E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



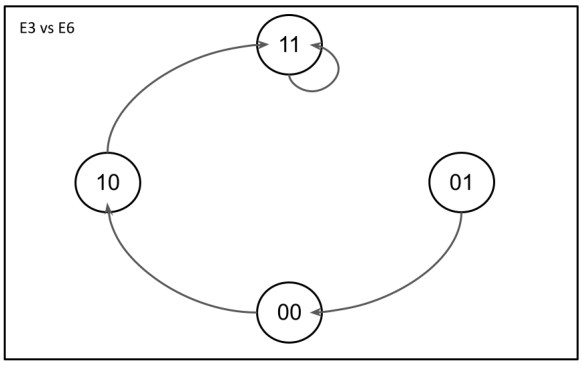
$$E_3E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



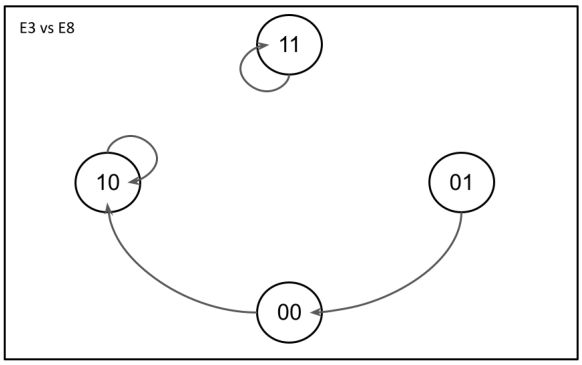
$$E_3E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



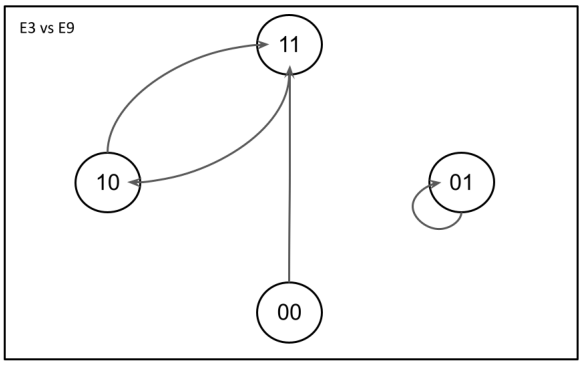
$$E_3E_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



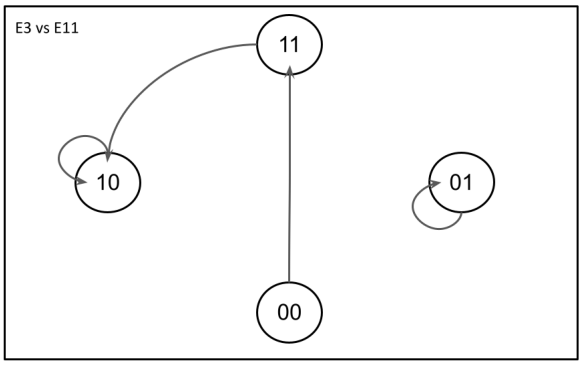
$$E_3E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



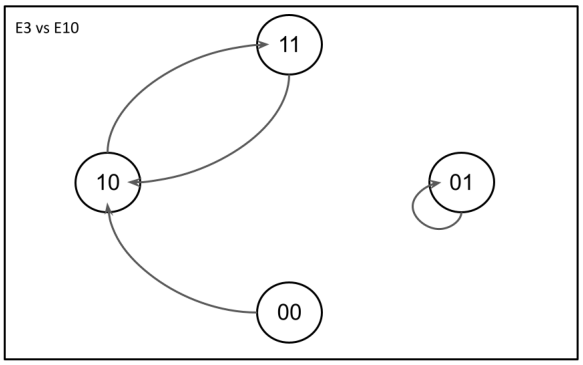
$$E_3E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



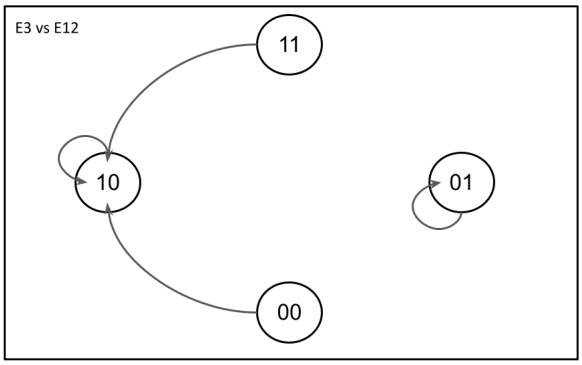
$$E_3E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



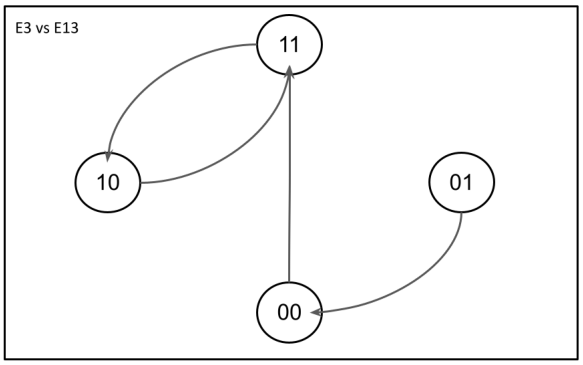
$$E_3E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



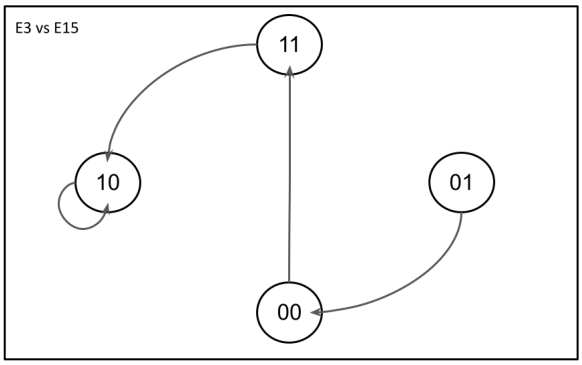
$$E_3E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



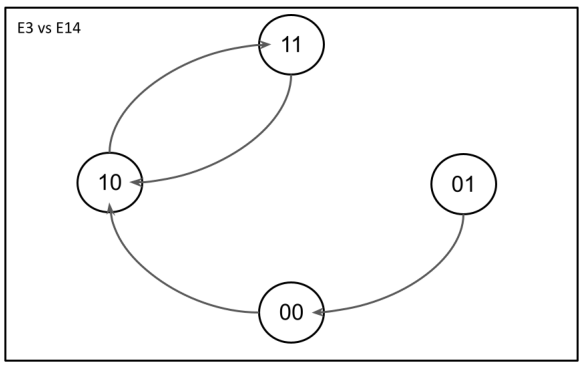
$$E_3E_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



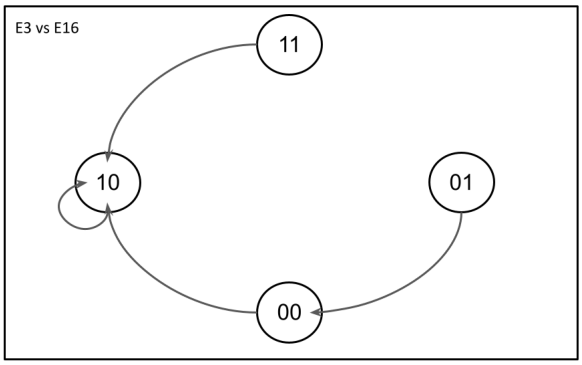
$$E_3E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$E_3E_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

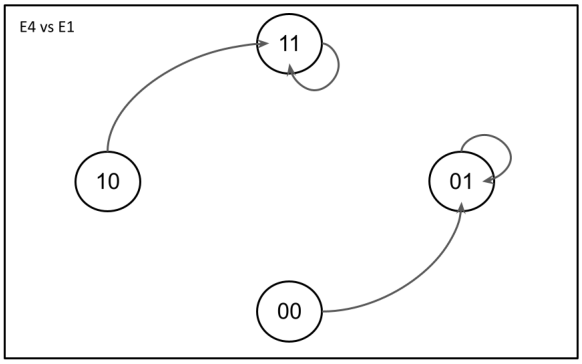
Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B.1.4. E_4



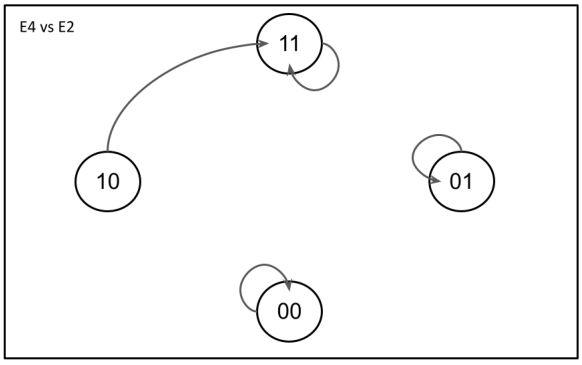
$$E_4E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



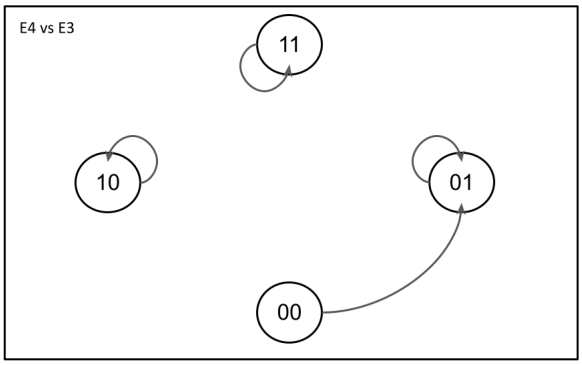
$$E_4E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



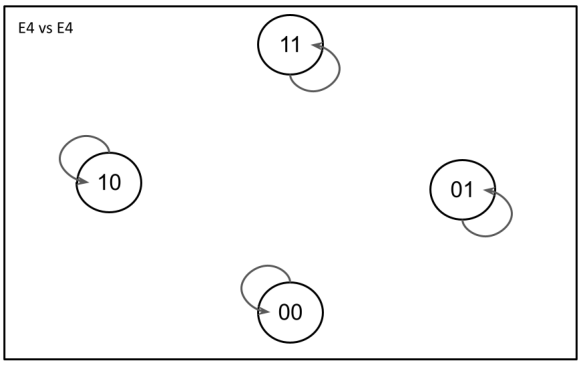
$$E_4E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



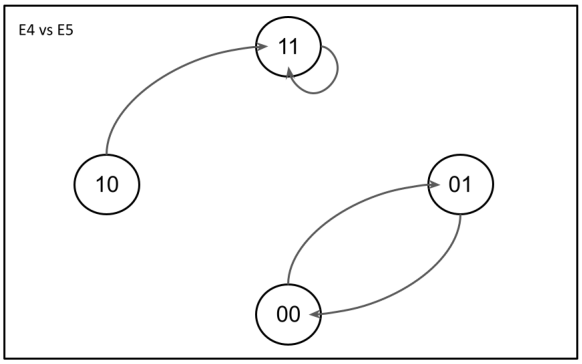
$$E_4E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



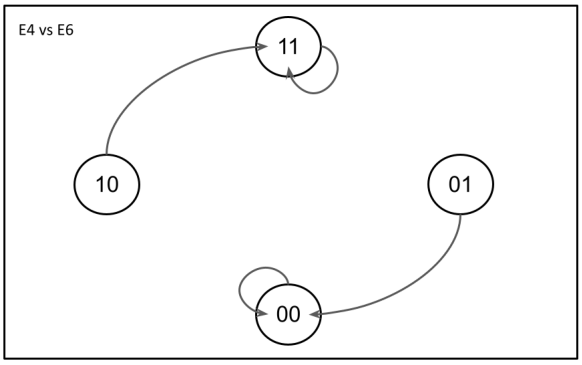
$$E_4E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



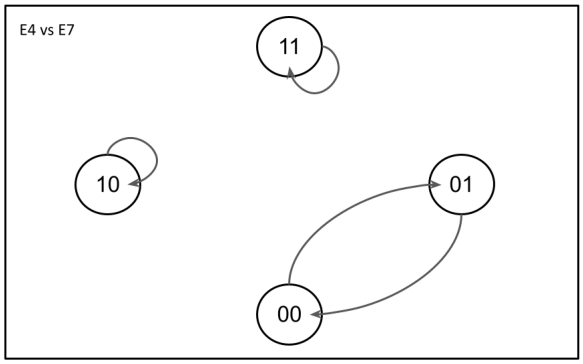
$$E_4E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



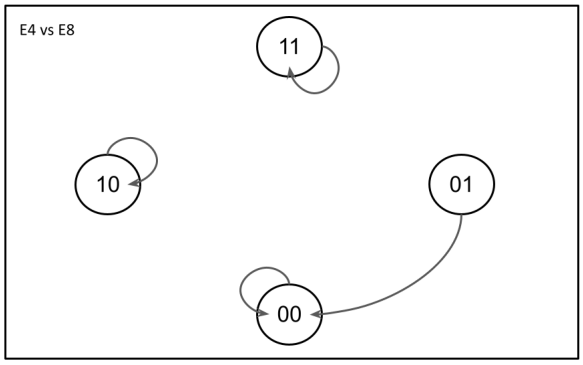
$$E_4E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



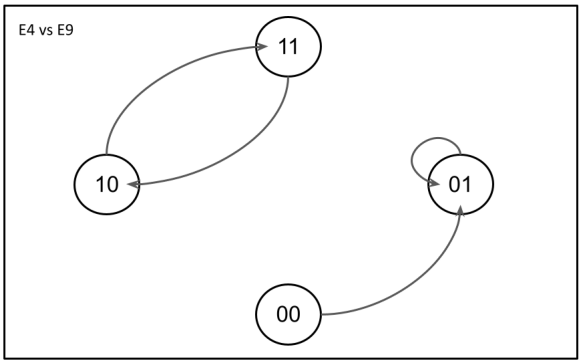
$$E_4E_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



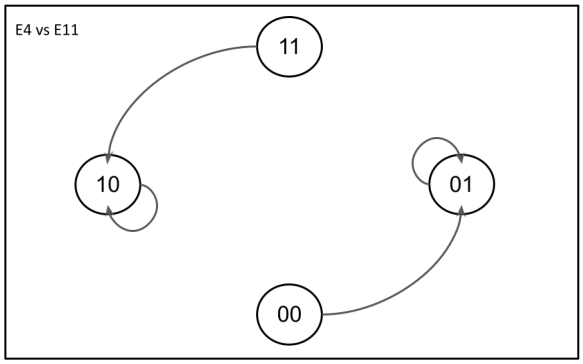
$$E_4E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



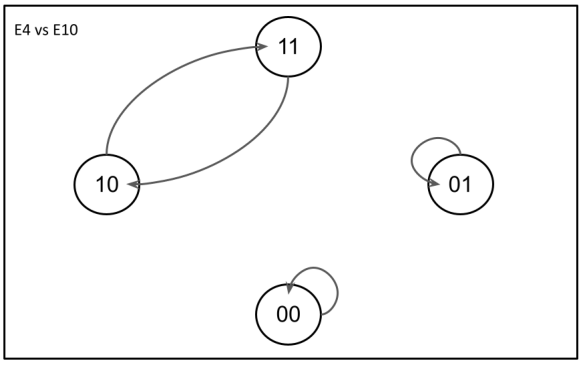
$$E_4E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



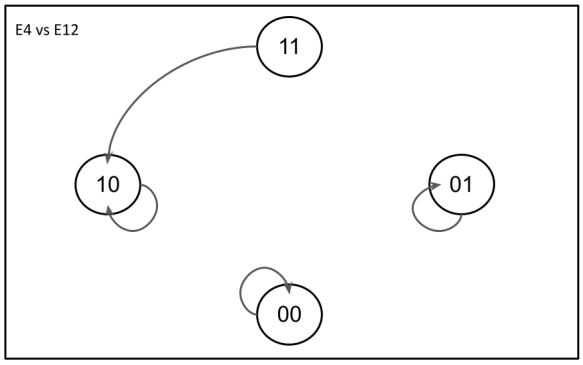
$$E_4E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



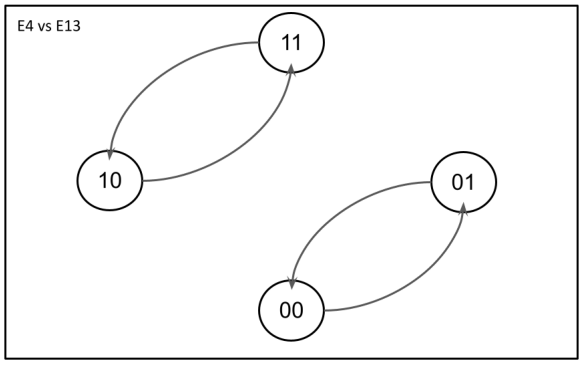
$$E_4E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



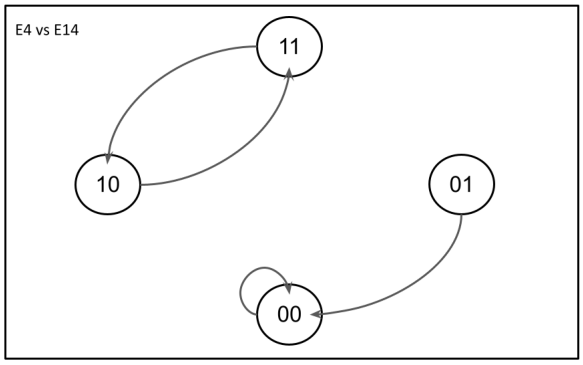
$$E_4E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



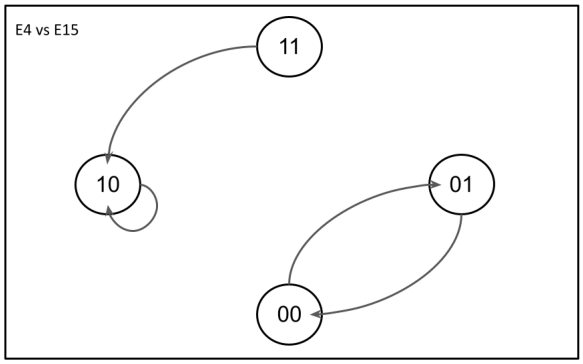
$$E_4E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



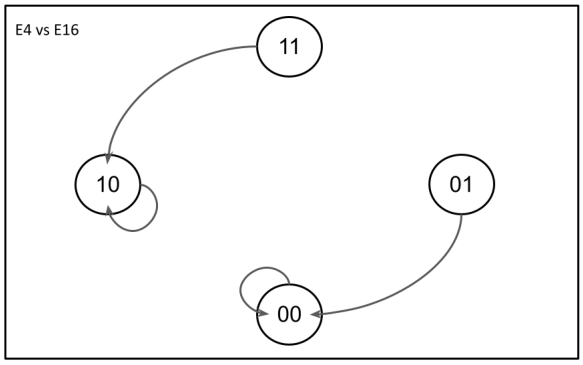
$$E_4E_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$E_4E_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

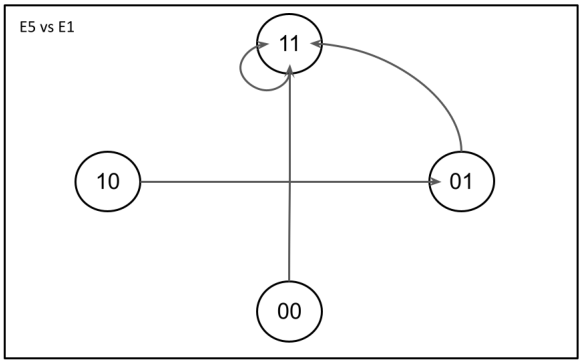
Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B.1.5. E_5



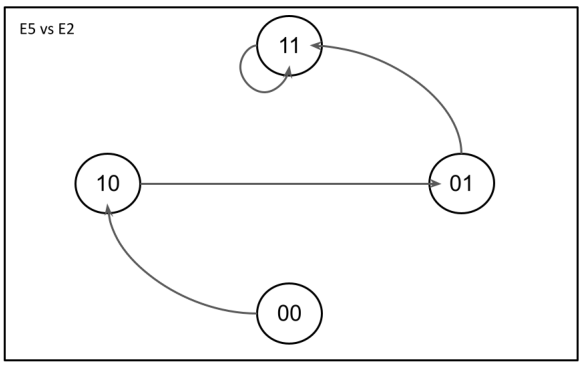
$$E_5E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



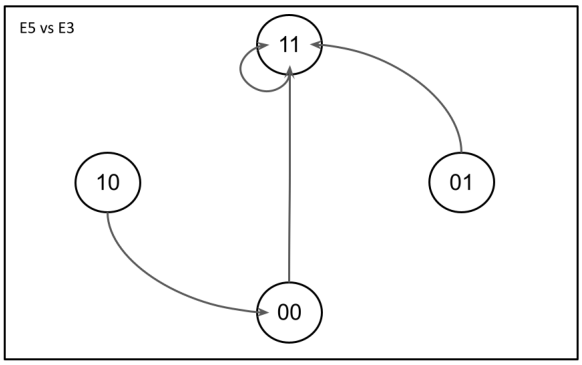
$$E_5E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



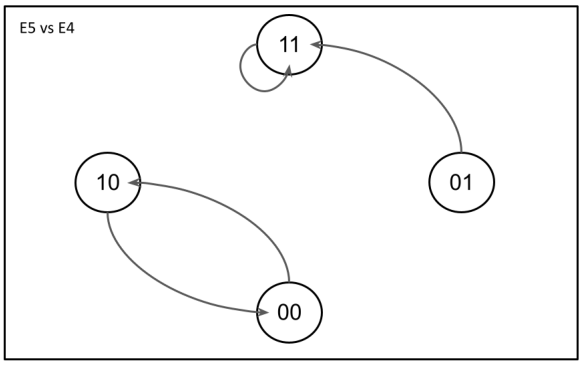
$$E_5E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



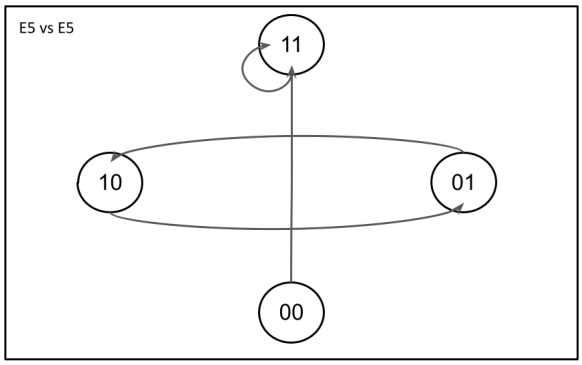
$$E_5E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



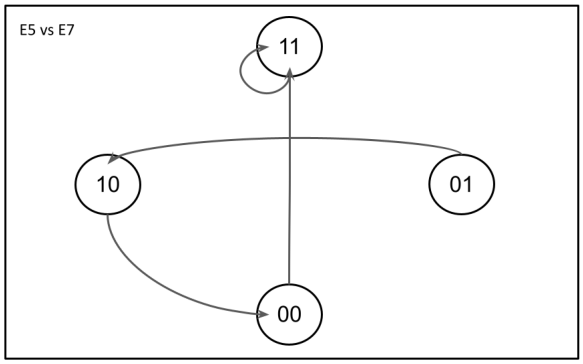
$$E_5E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



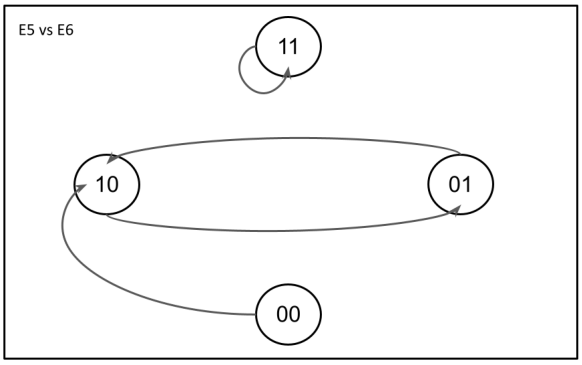
$$E_5E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



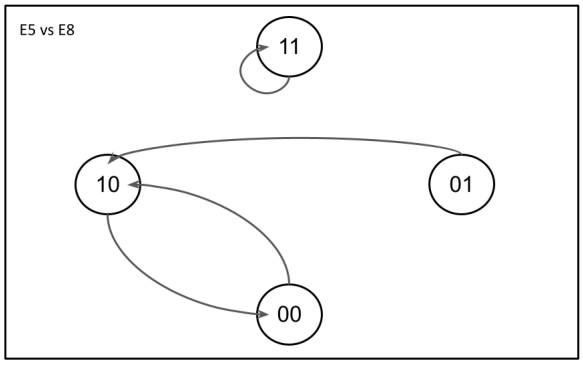
$$E_5E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



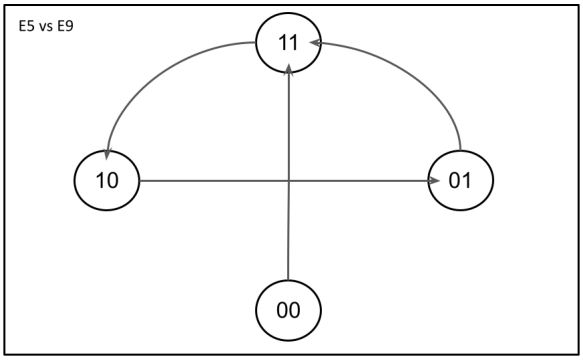
$$E_5E_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



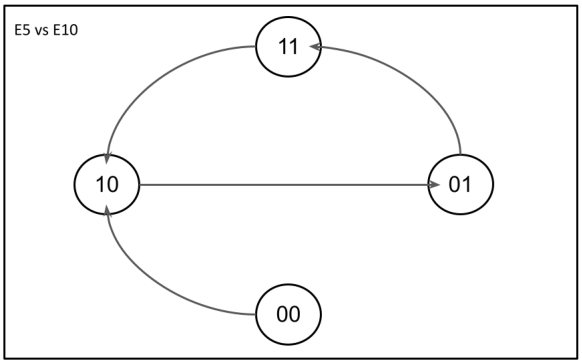
$$E_5E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



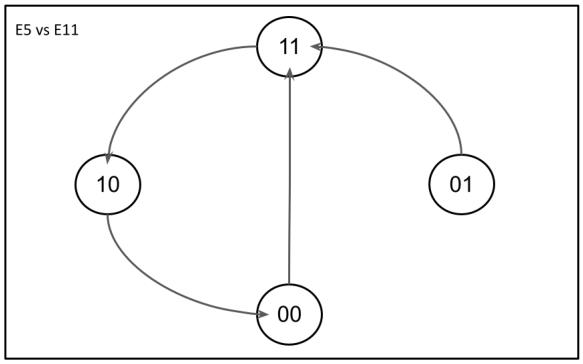
$$E_5E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



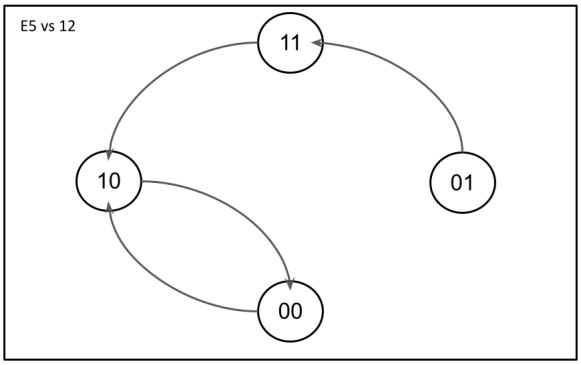
$$E_5E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



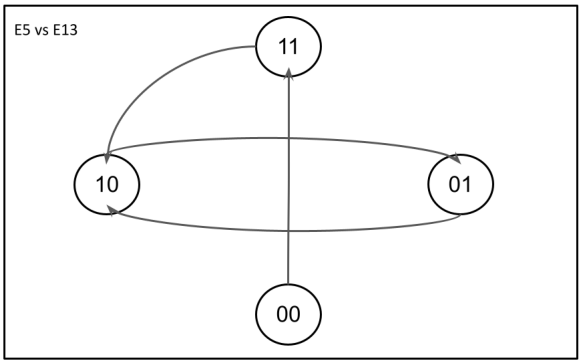
$$E_5E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



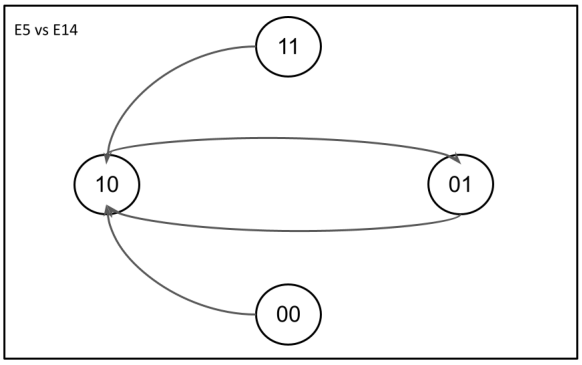
$$E_5E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



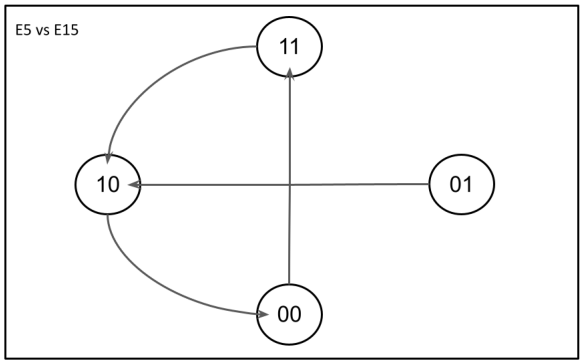
$$E_5E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



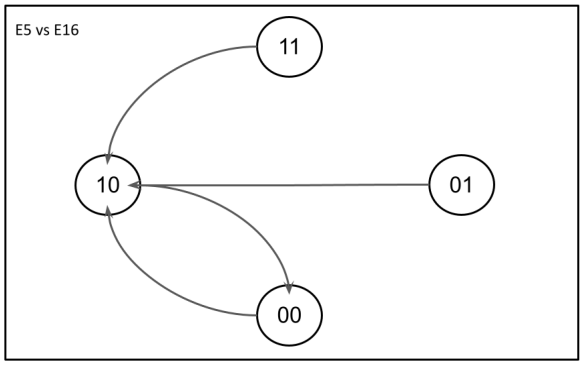
$$E_5E_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$E_5E_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

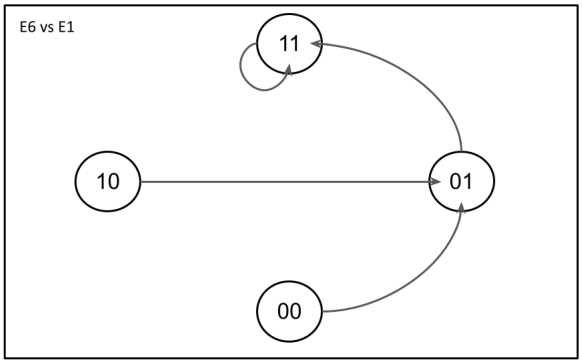
Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

B.1.6. E_6



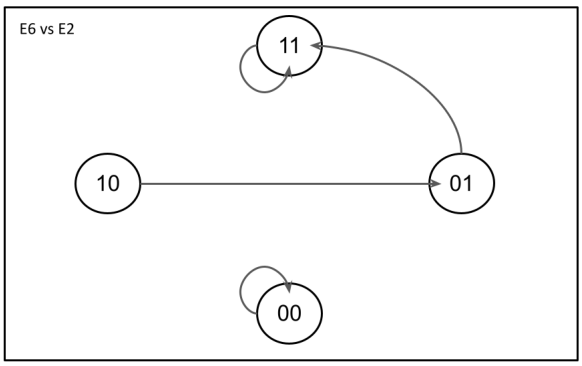
$$E_6E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



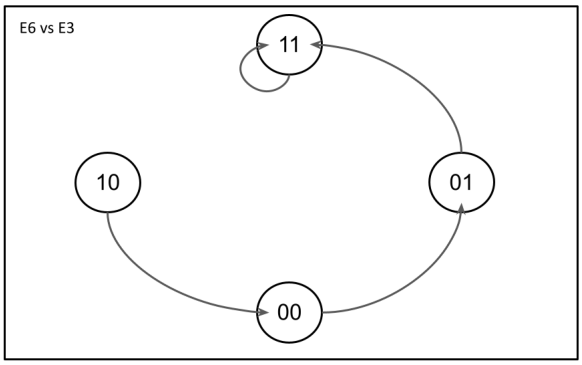
$$E_6E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



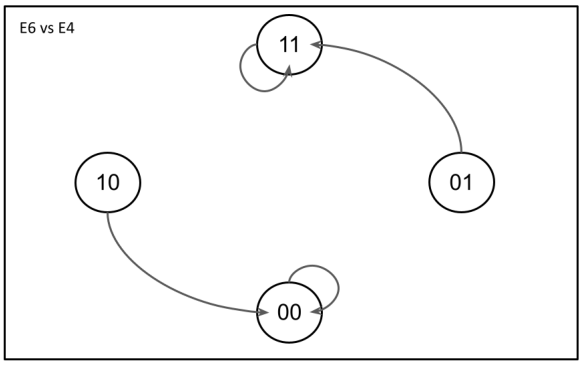
$$E_6E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



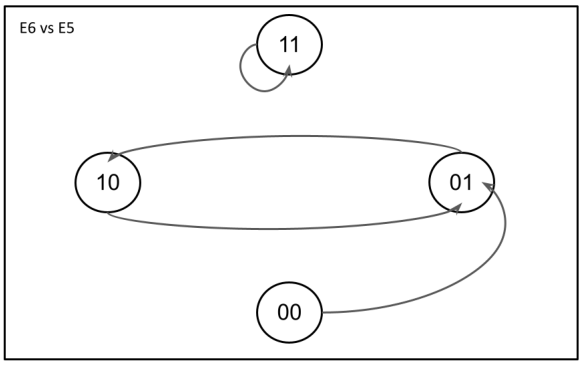
$$E_6E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



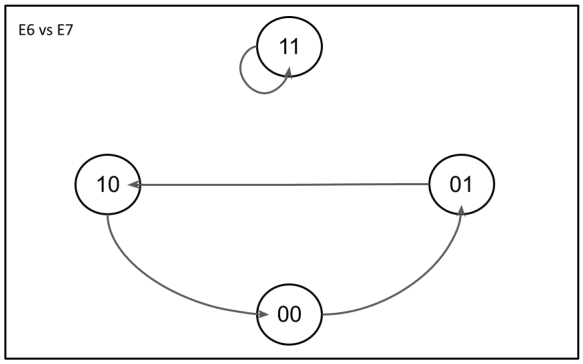
$$E_6E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



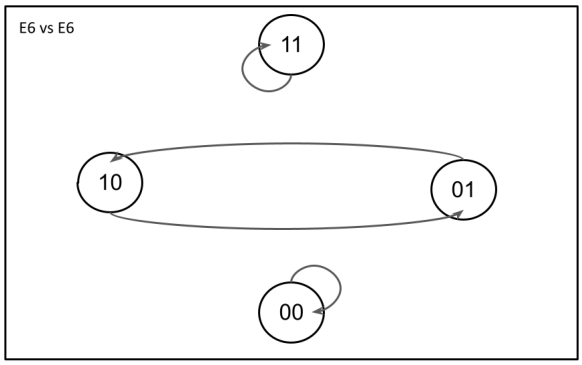
$$E_6E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



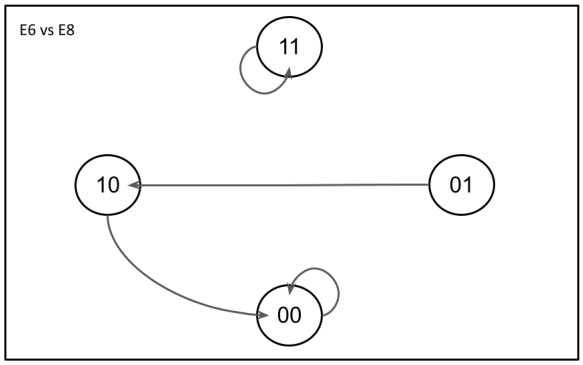
$$E_6E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



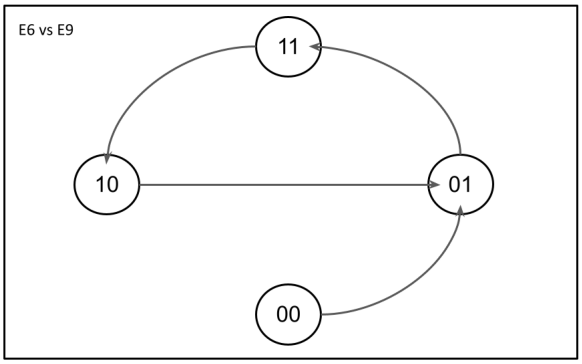
$$E_6E_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



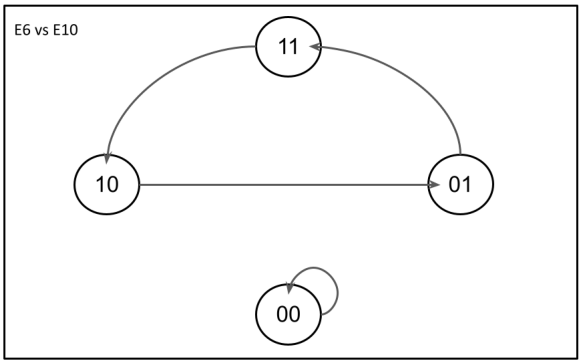
$$E_6E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



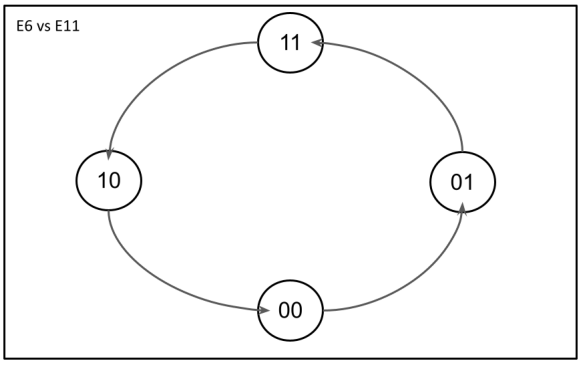
$$E_6E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



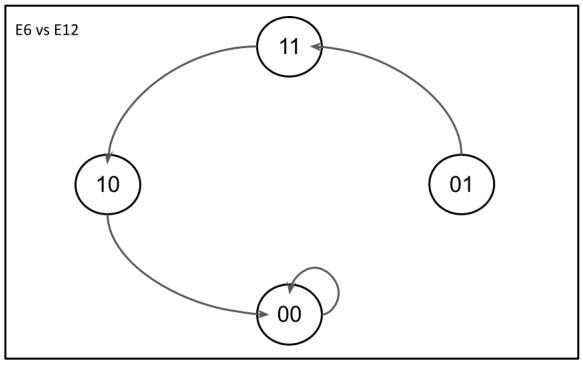
$$E_6E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ i,\ -i$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$



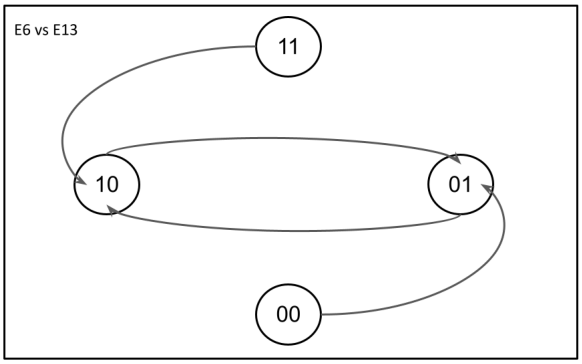
$$E_6E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



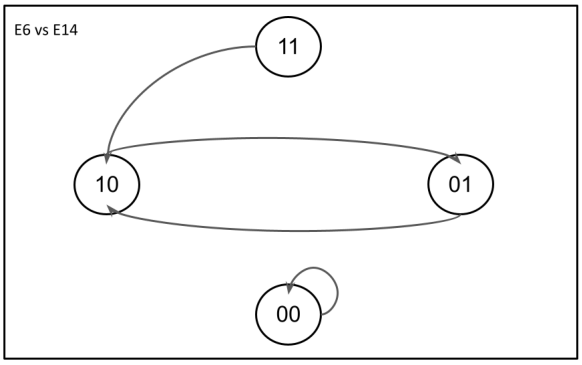
$$E_6E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



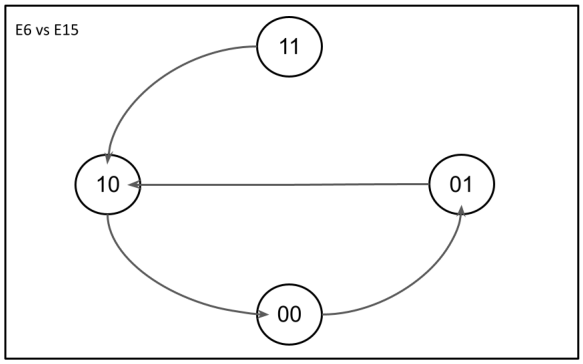
$$E_6E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



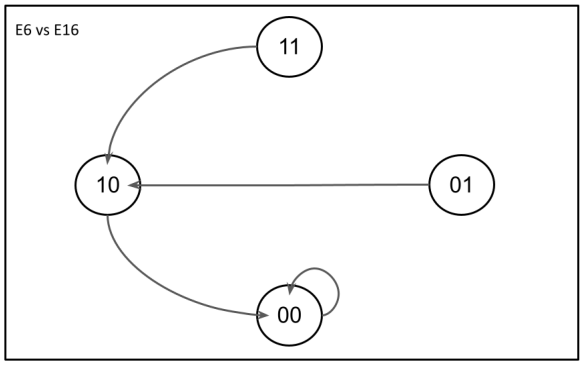
$$E_6E_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$E_6E_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

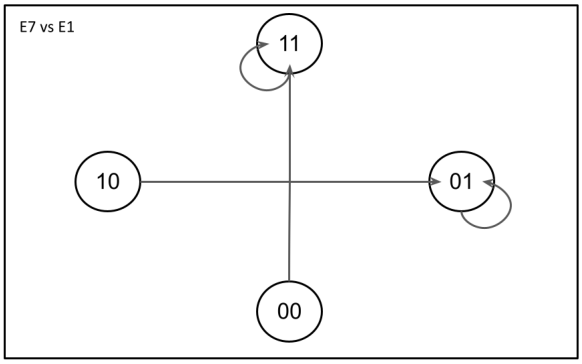
Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B.1.7. E_7



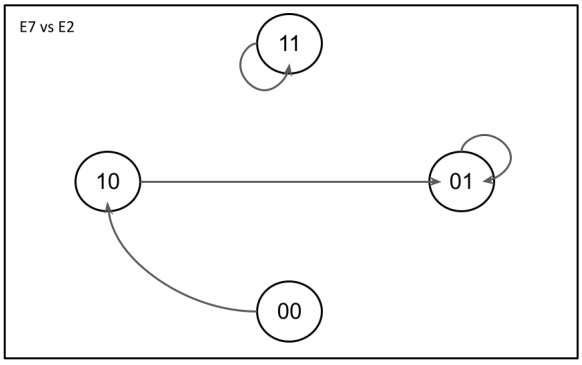
$$E_7E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



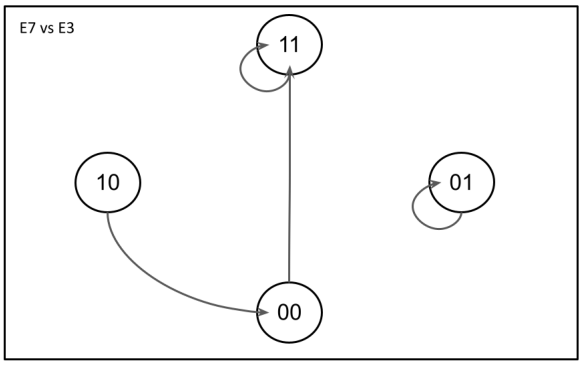
$$E_7E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



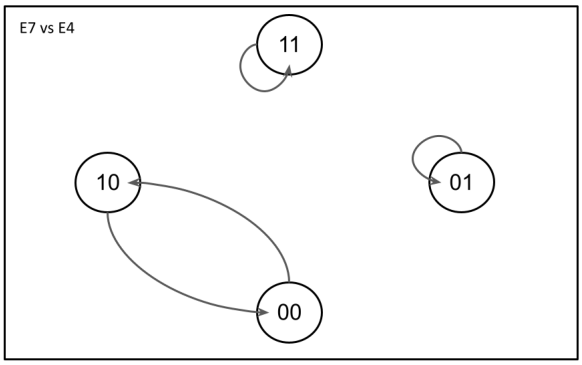
$$E_7E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



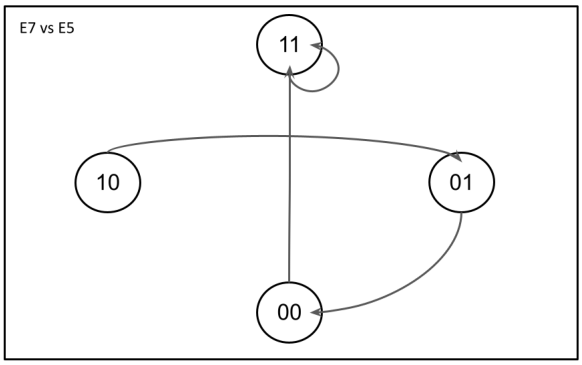
$$E_7E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



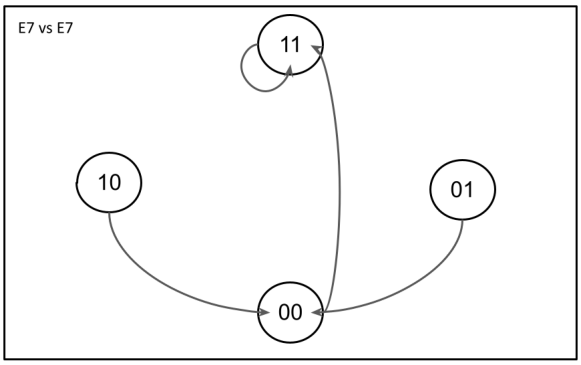
$$E_7E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



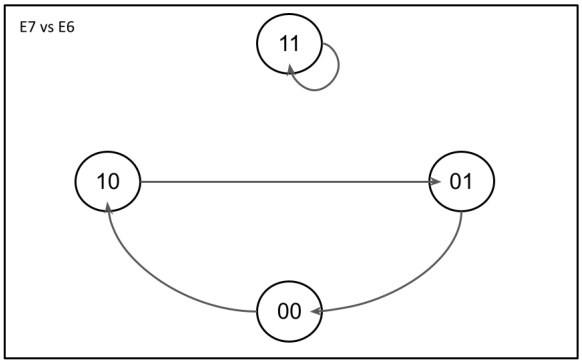
$$E_7E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



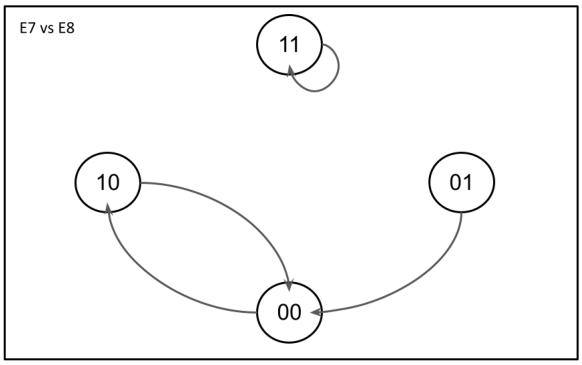
$$E_7E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



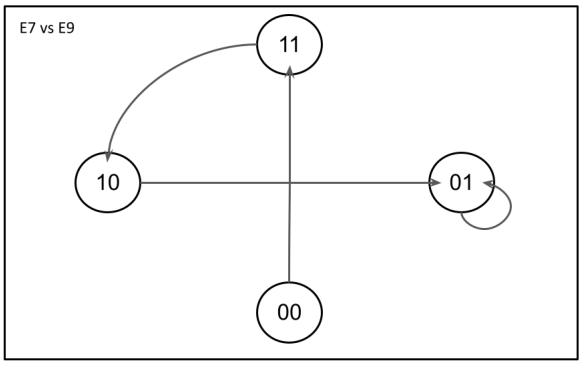
$$E_7E_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



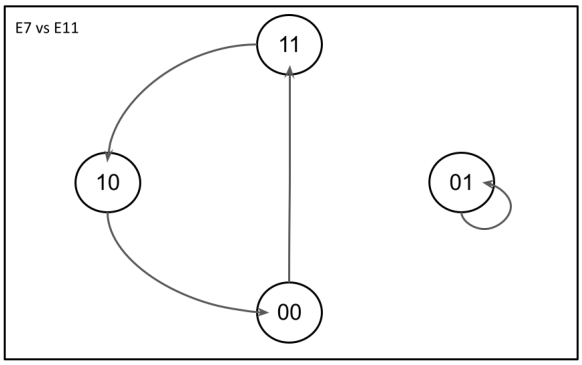
$$E_7E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



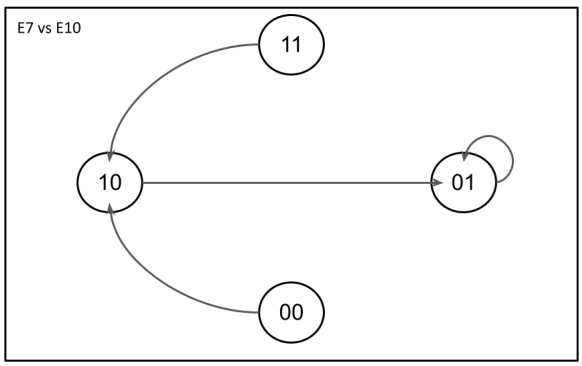
$$E_7E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



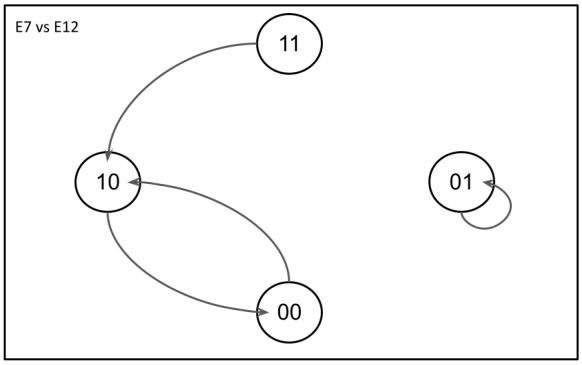
$$E_7E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



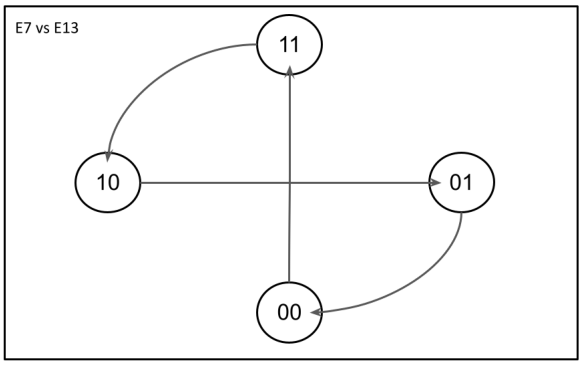
$$E_7E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



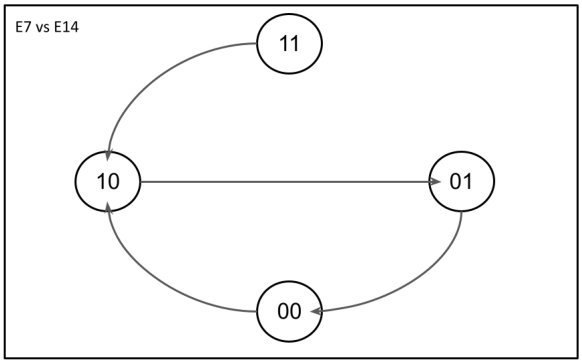
$$E_7E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ i,\ -i$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$



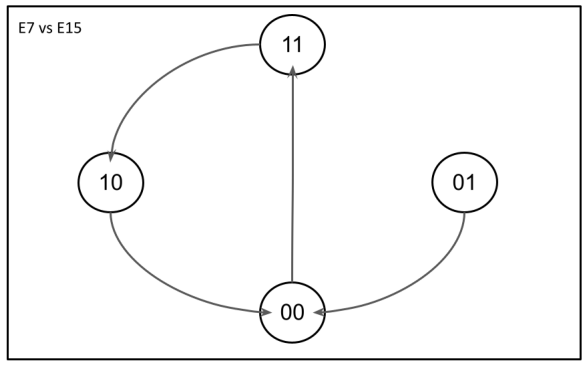
$$E_7E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



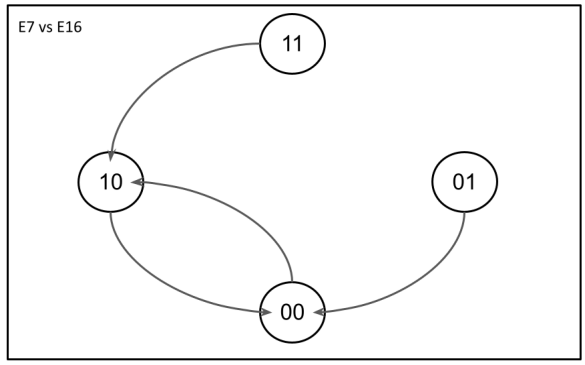
$$E_5E_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$E_7E_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

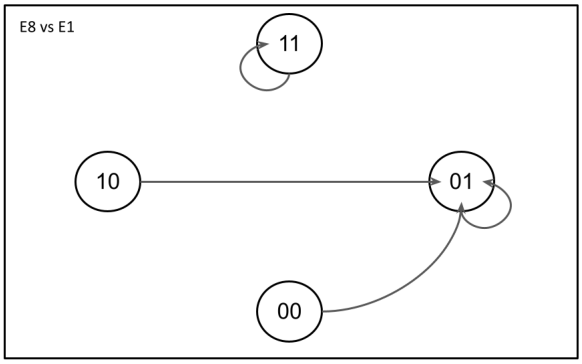
Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

B.1.8. E_8



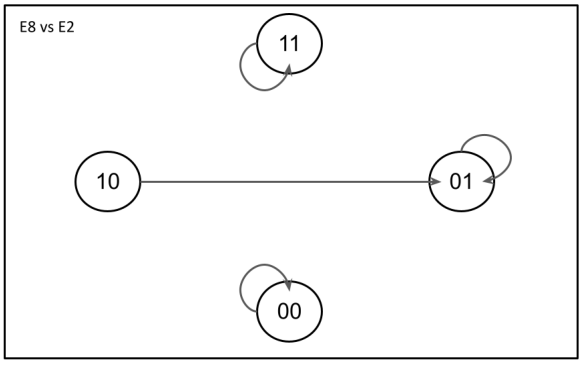
$$E_8E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



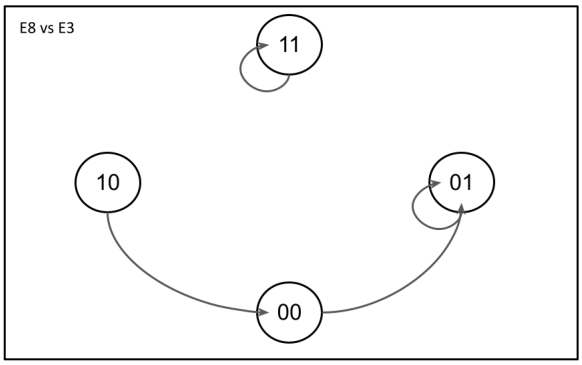
$$E_8E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



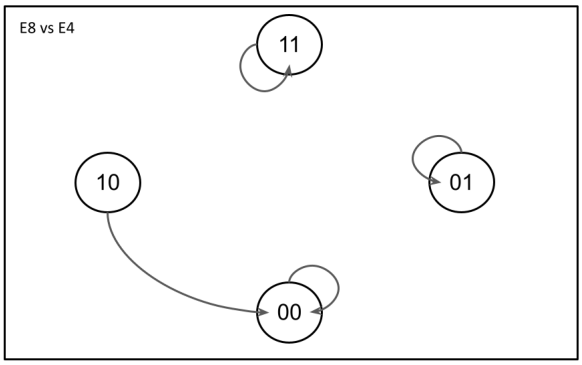
$$E_8E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



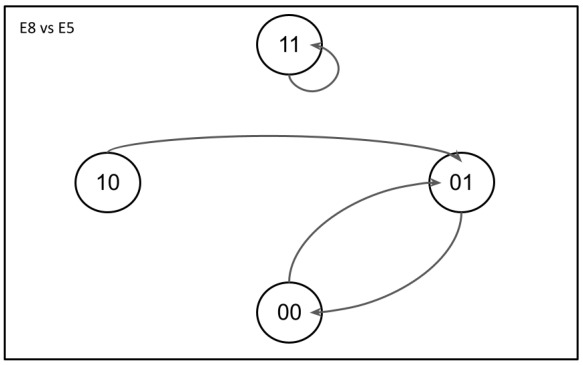
$$E_8E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



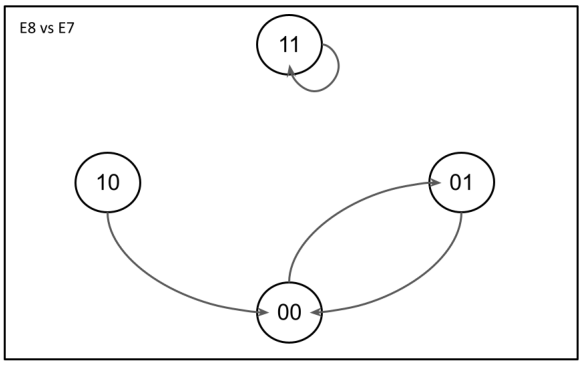
$$E_8E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



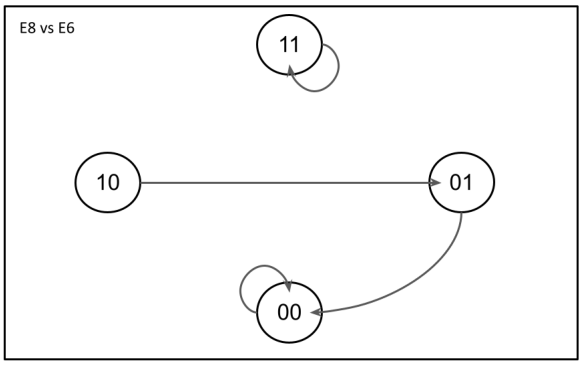
$$E_8E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



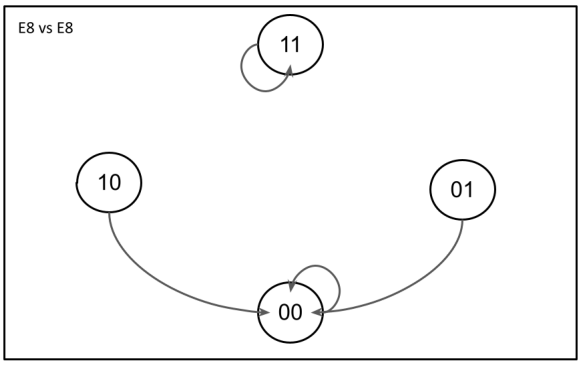
$$E_8E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



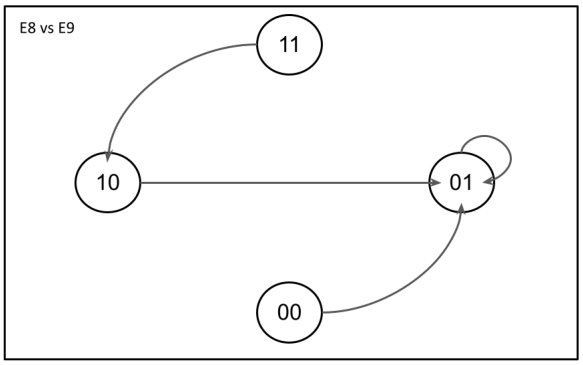
$$E_8E_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



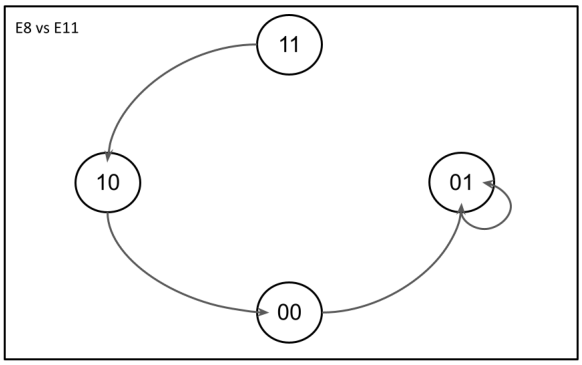
$$E_8E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



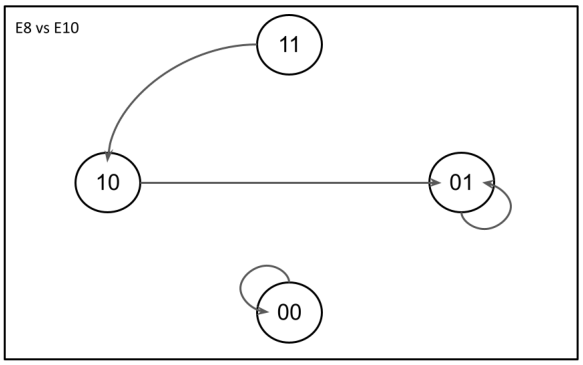
$$E_8E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



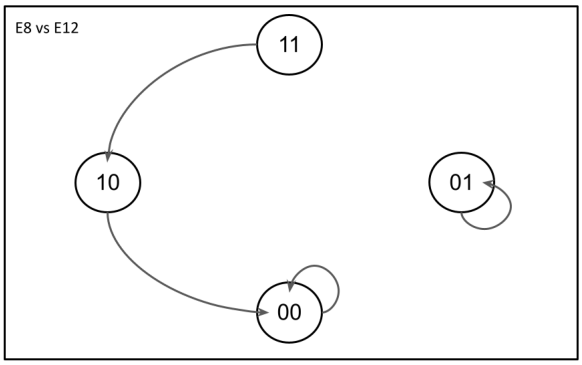
$$E_8E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



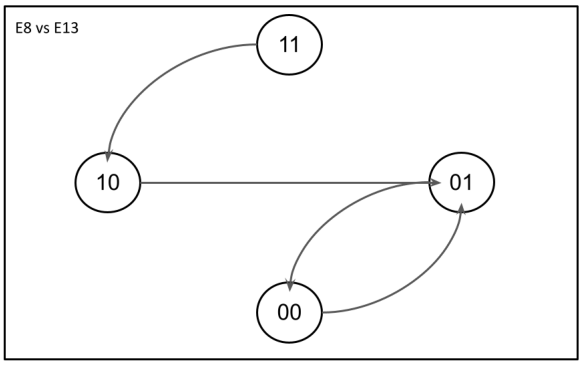
$$E_8E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



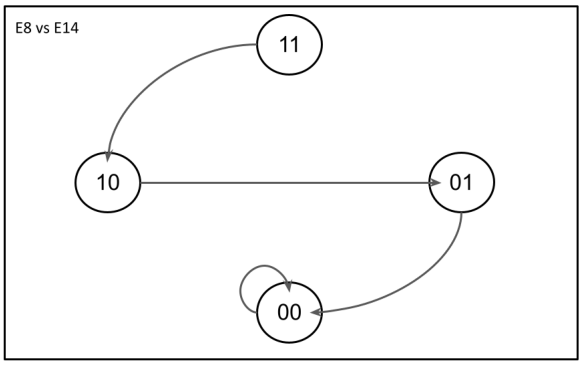
$$E_8E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



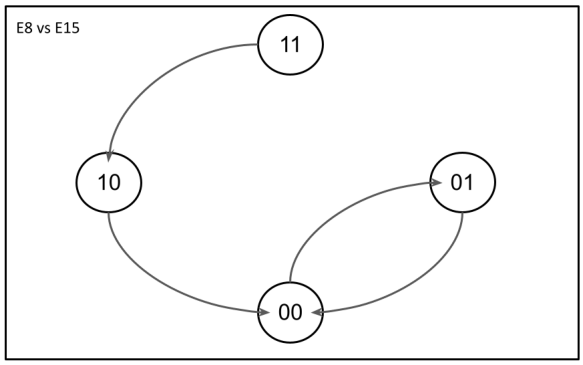
$$E_8E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



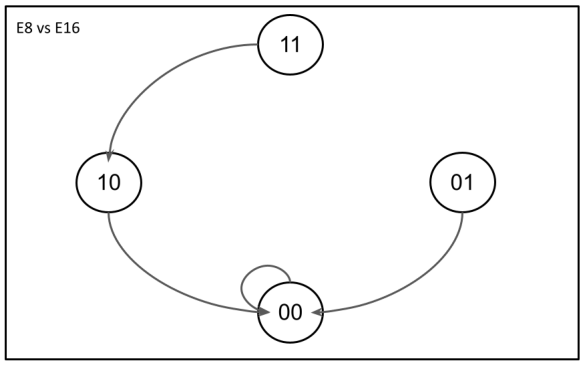
$$E_8E_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$E_7E_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

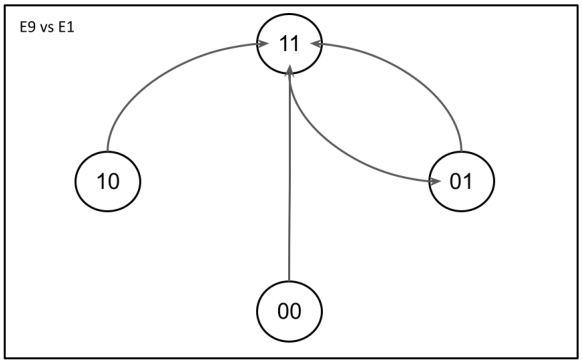
Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B.1.9. E_9



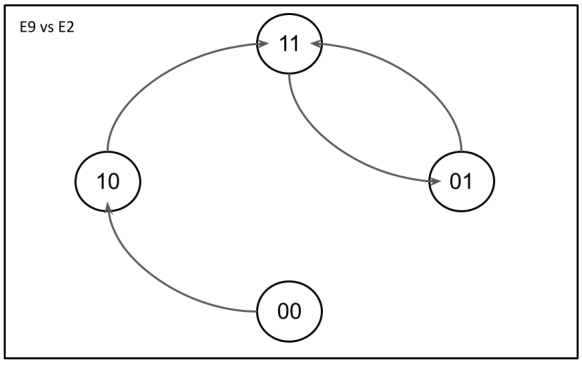
$$E_9E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



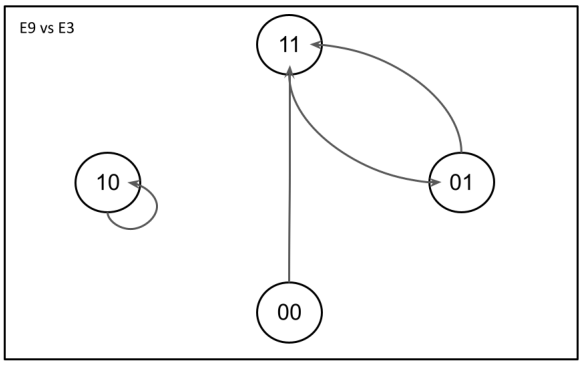
$$E_9E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



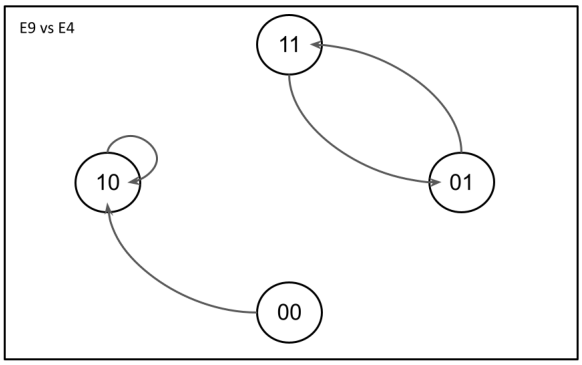
$$E_9E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



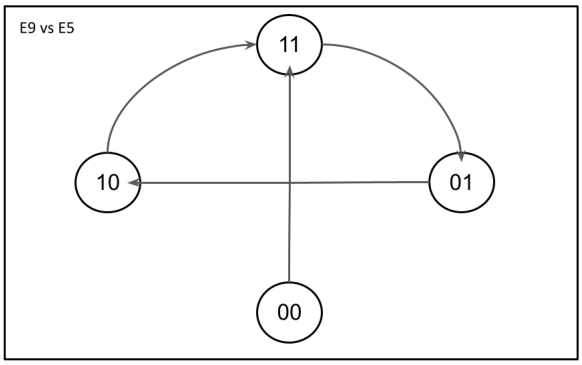
$$E_9E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



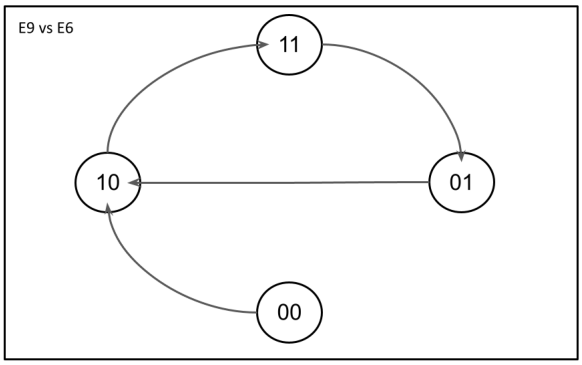
$$E_9E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



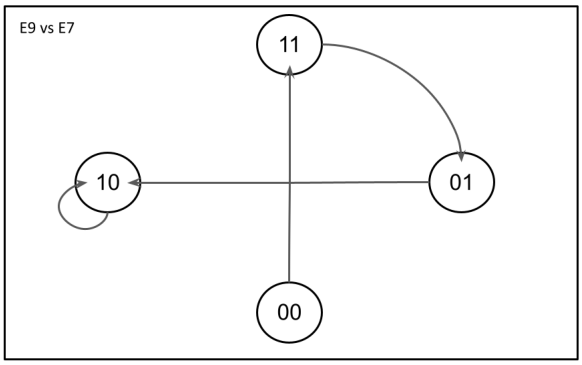
$$E_9E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



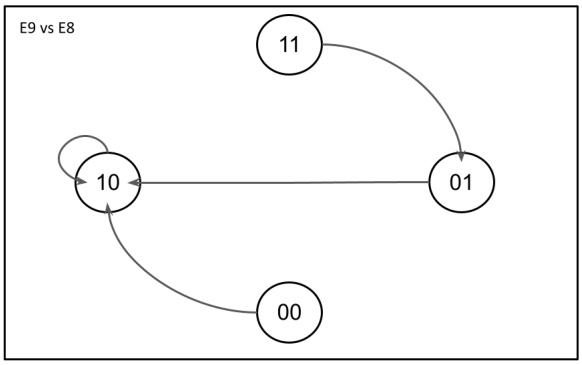
$$E_9E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



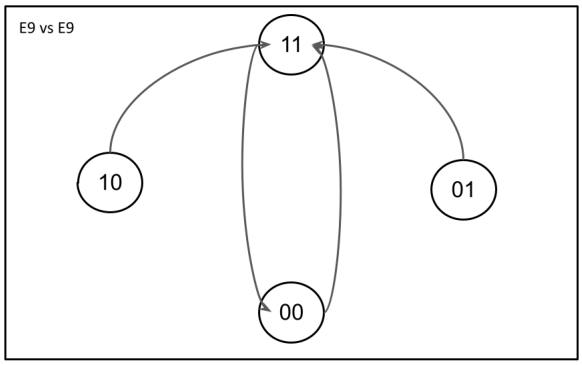
$$E_9E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



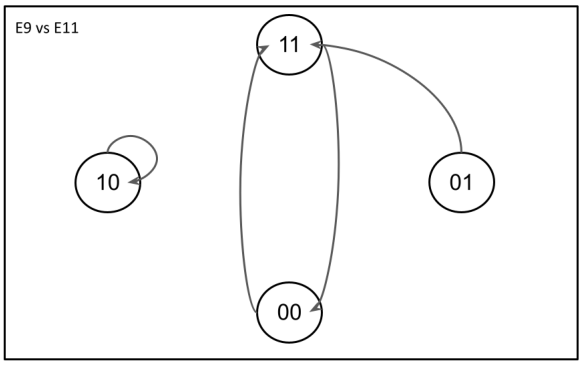
$$E_9E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



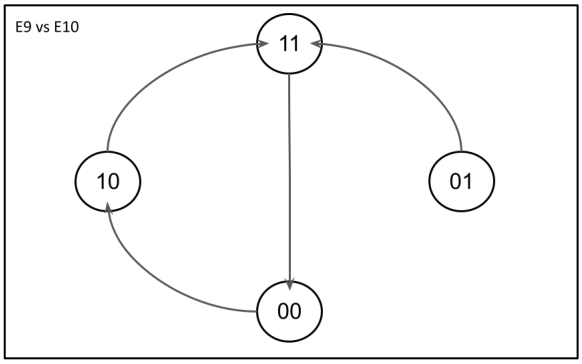
$$E_9E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



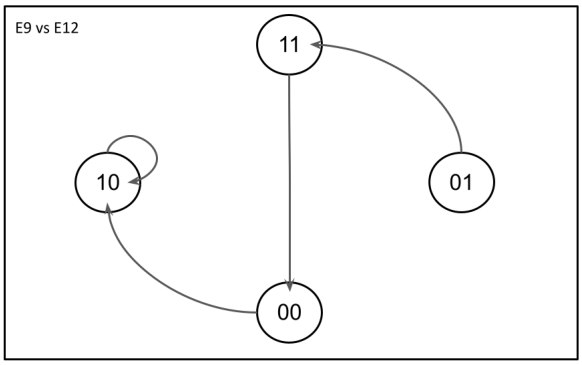
$$E_9E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



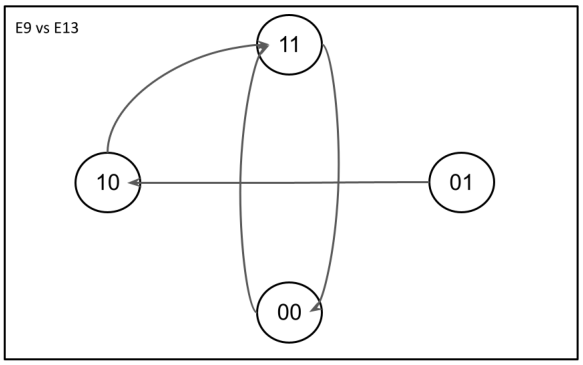
$$E_9E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



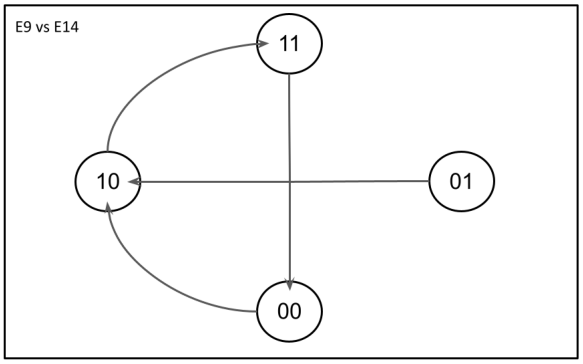
$$E_9E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



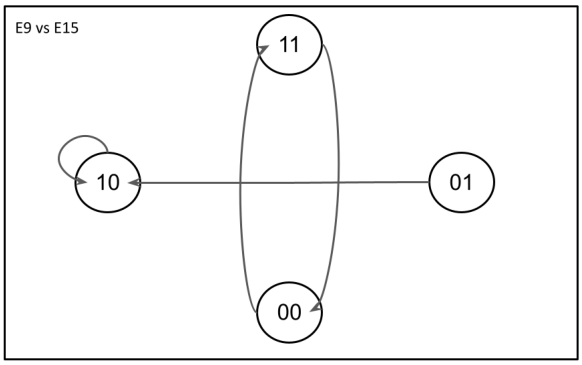
$$E_9E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



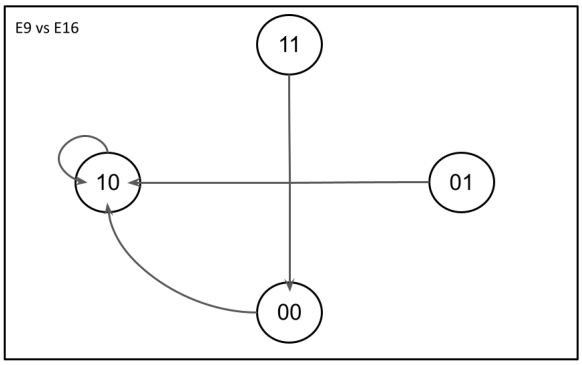
$$E_9E_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$E_9E_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

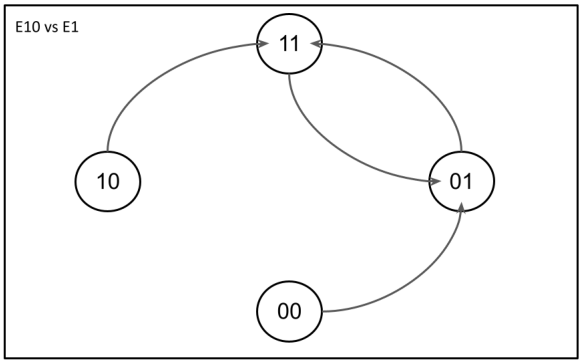
Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B.1.10. E_{10}



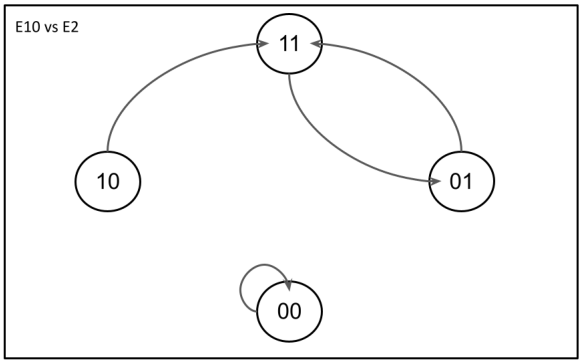
$$E_{10}E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



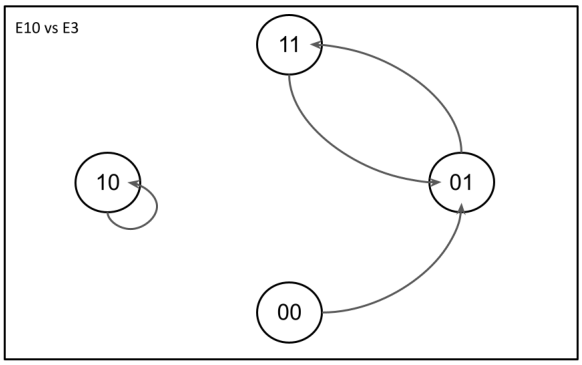
$$E_{10}E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



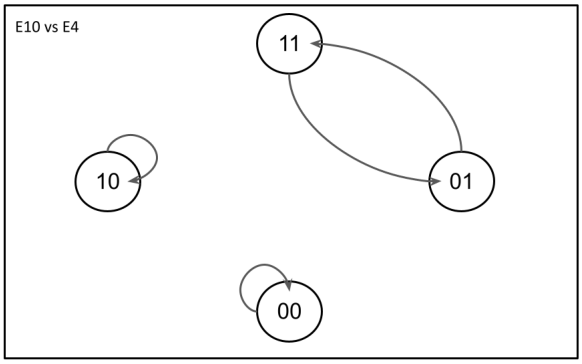
$$E_{10}E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



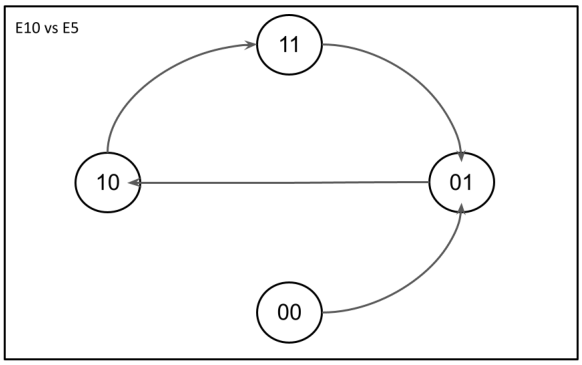
$$E_{10}E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



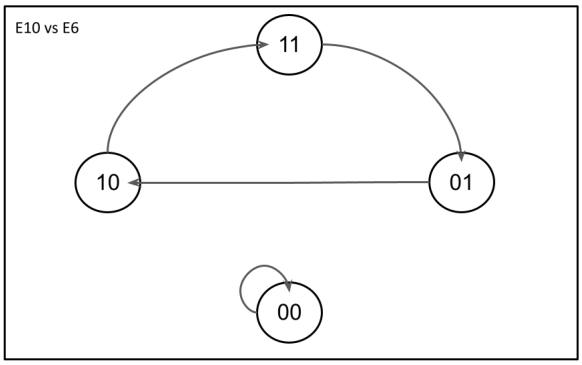
$$E_{10}E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



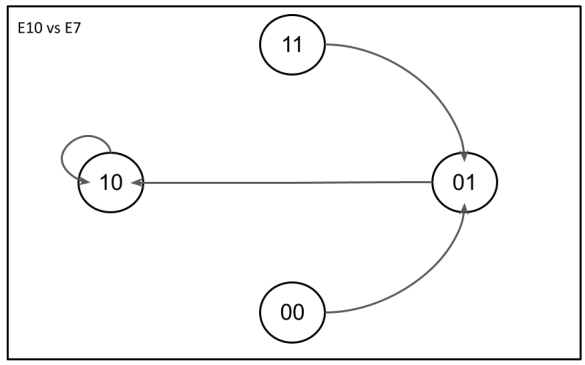
$$E_{10}E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



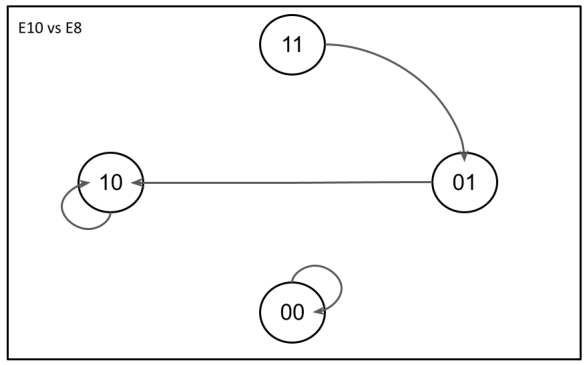
$$E_{10}E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



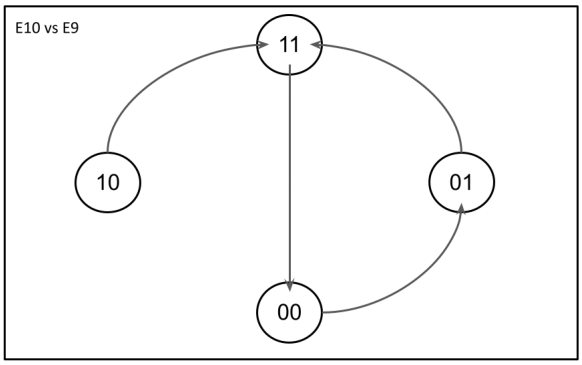
$$E_{10}E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



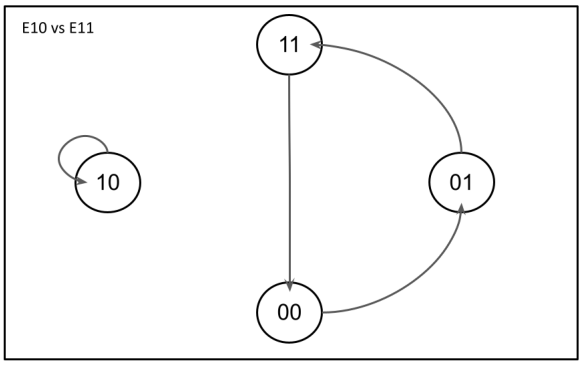
$$E_{10}E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



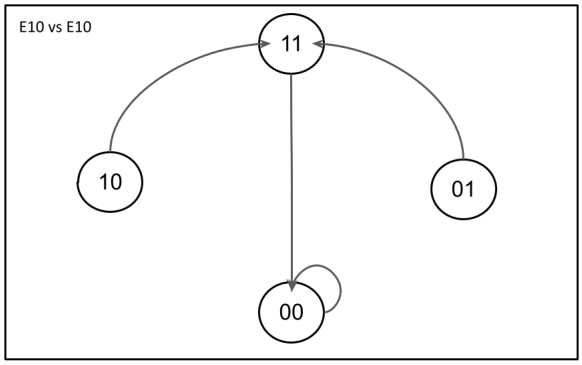
$$E_{10}E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



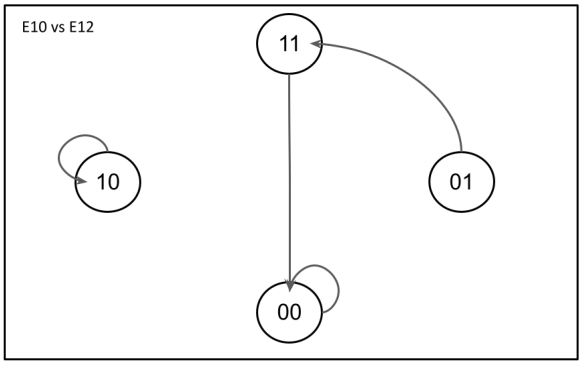
$$E_{10}E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



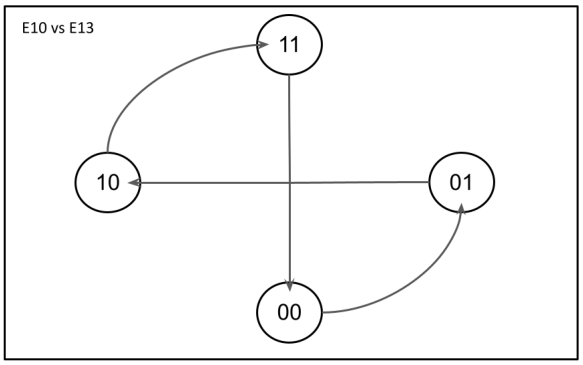
$$E_{10}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



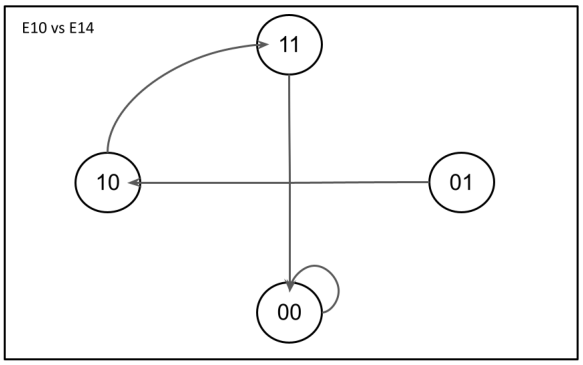
$$E_{10}E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ i,\ -i$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$



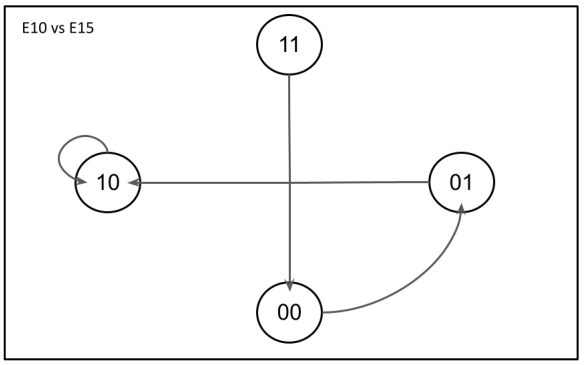
$$E_{10}E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



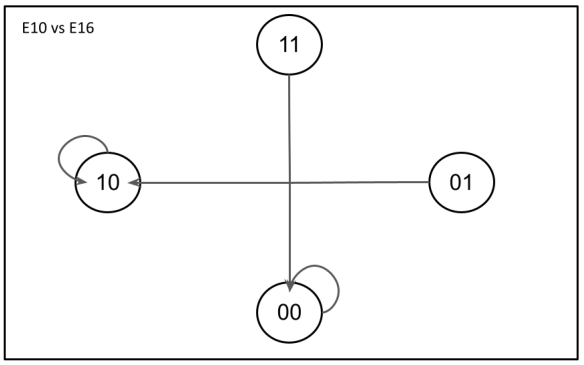
$$E_{10}E_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$E_{10}E_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

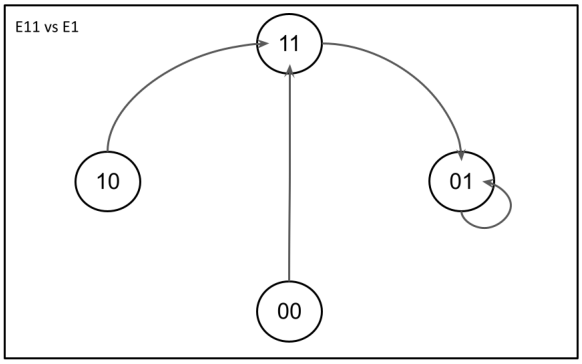
Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B.1.11. E_{11}



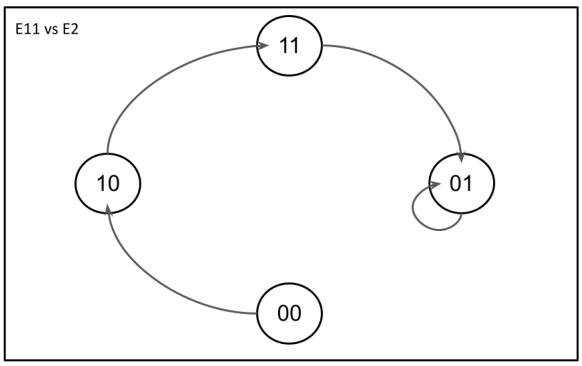
$$E_{11}E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



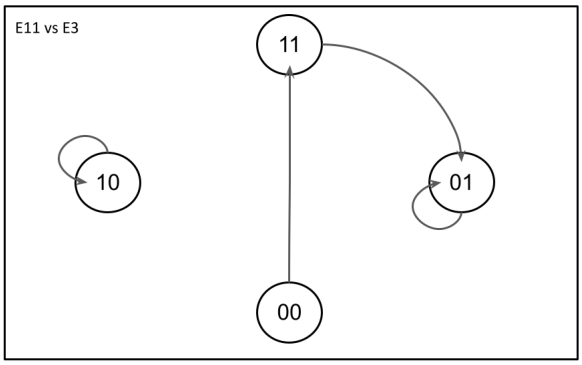
$$E_{11}E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



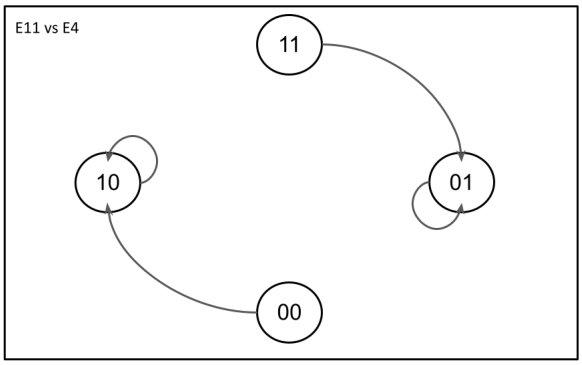
$$E_{11}E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



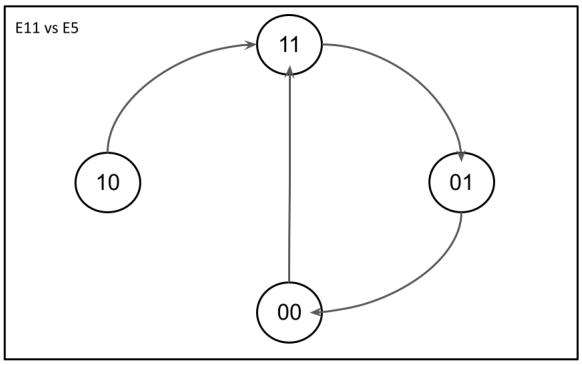
$$E_{11}E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



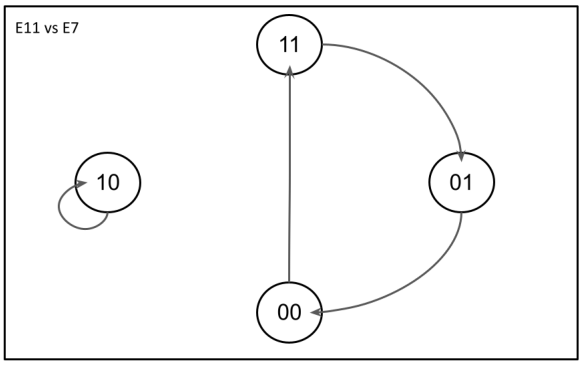
$$E_{11}E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



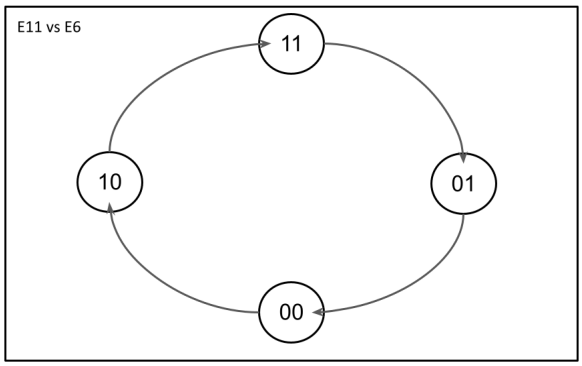
$$E_{11}E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



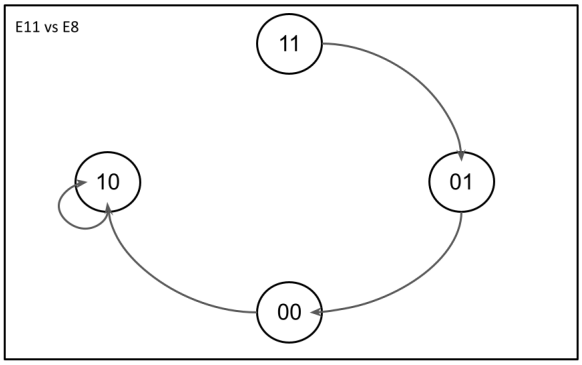
$$E_{11}E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ i,\ -i$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$



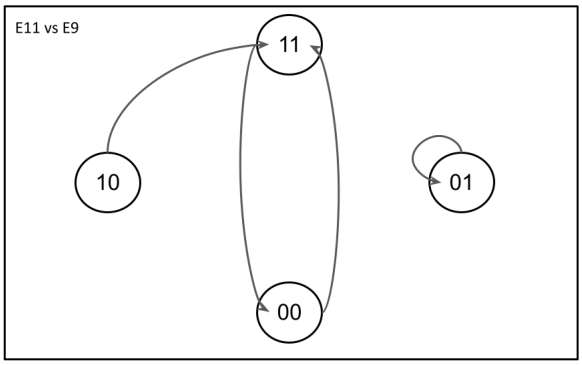
$$E_{11}E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



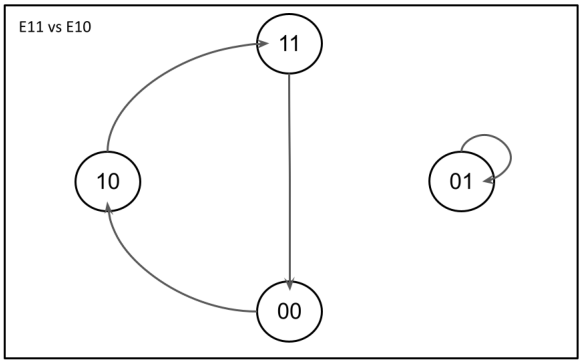
$$E_{11}E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



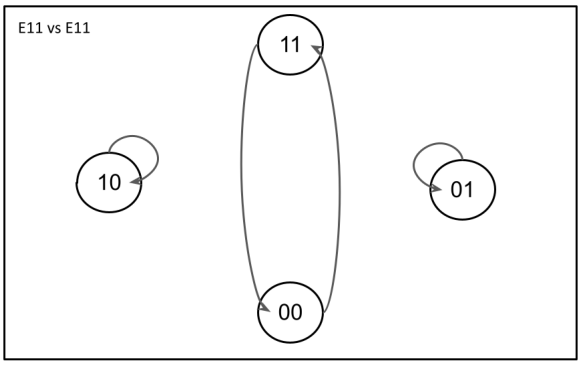
$$E_{11}E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



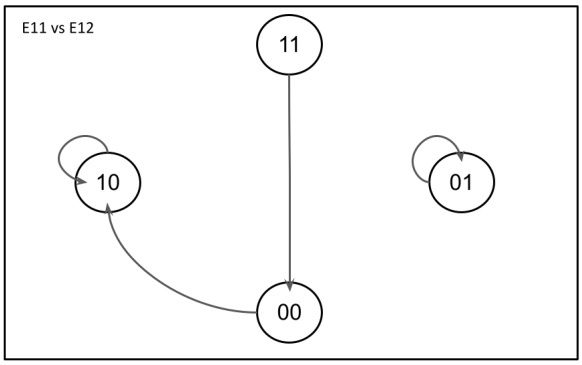
$$E_{11}E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



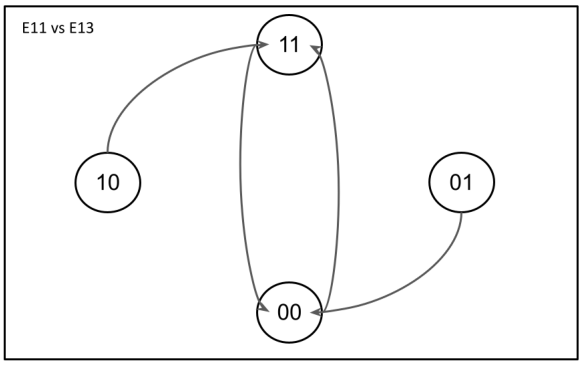
$$E_{11}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



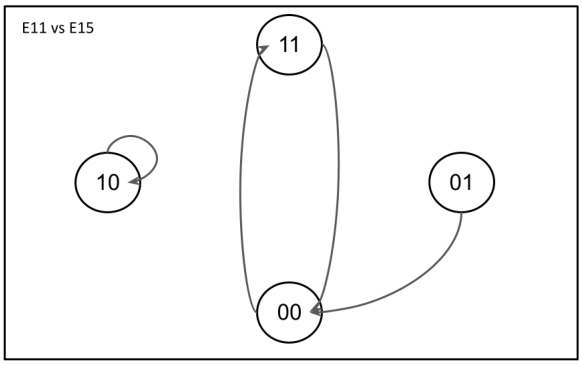
$$E_{11}E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



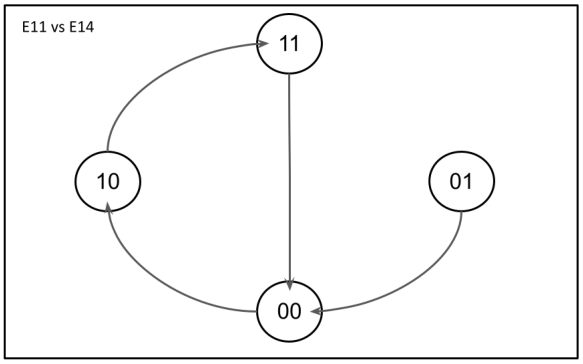
$$E_{11}E_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



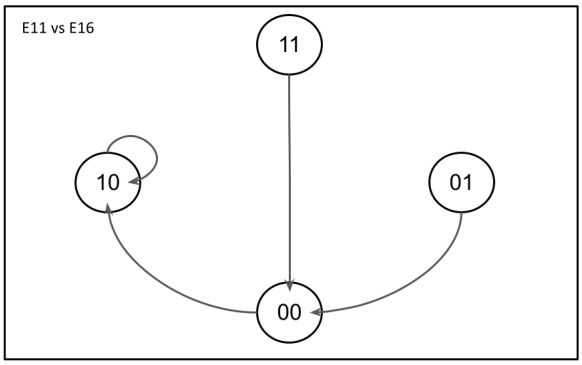
$$E_{11}E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$E_{11}E_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

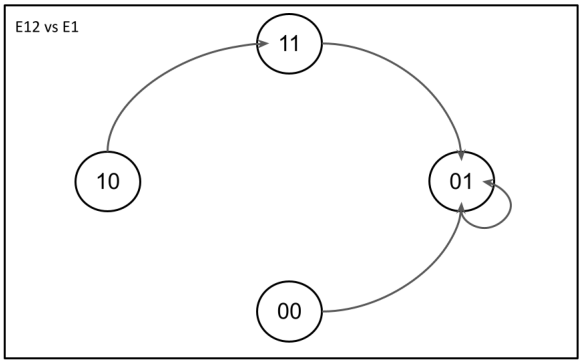
Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B.1.12. E_{12}



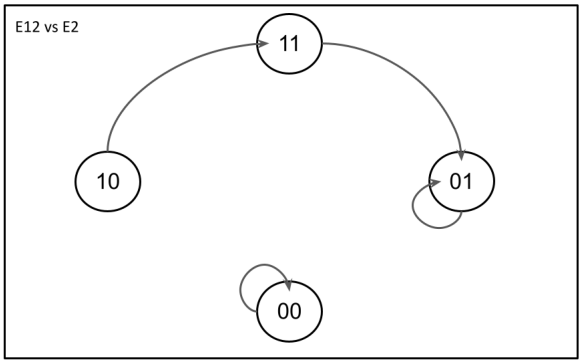
$$E_{12}E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



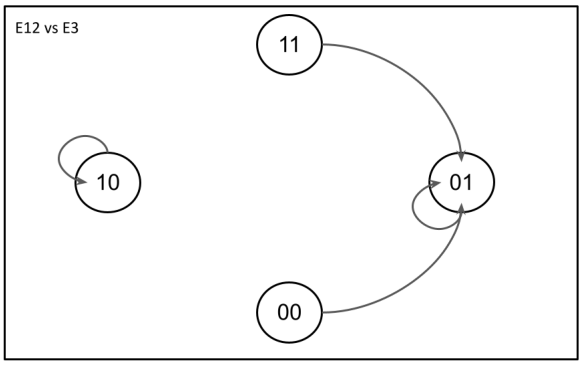
$$E_{12}E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



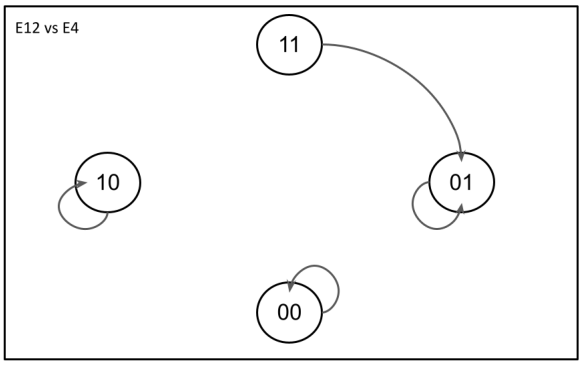
$$E_{12}E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



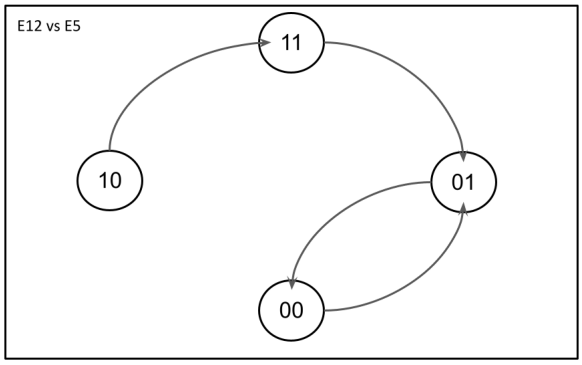
$$E_{12}E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



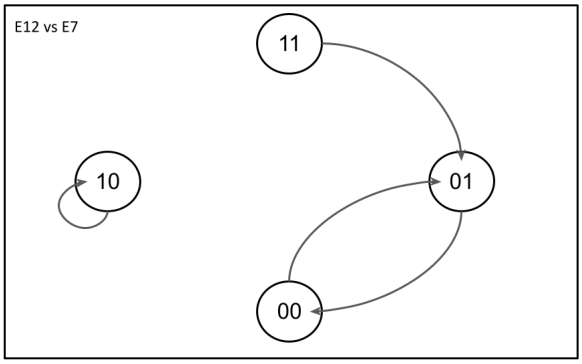
$$E_{12}E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



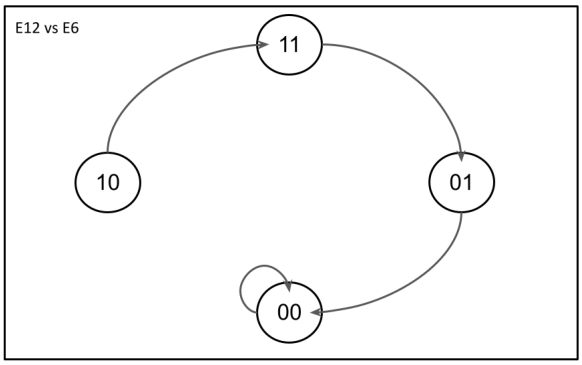
$$E_{12}E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



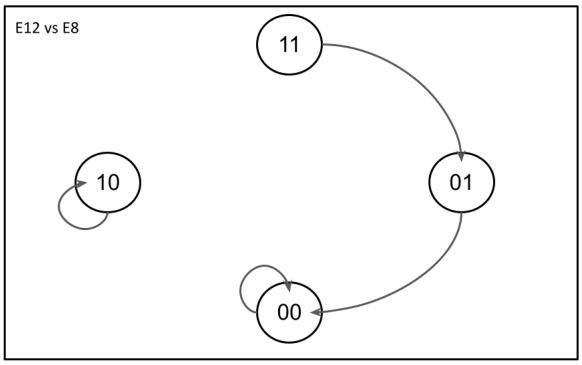
$$E_{12}E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



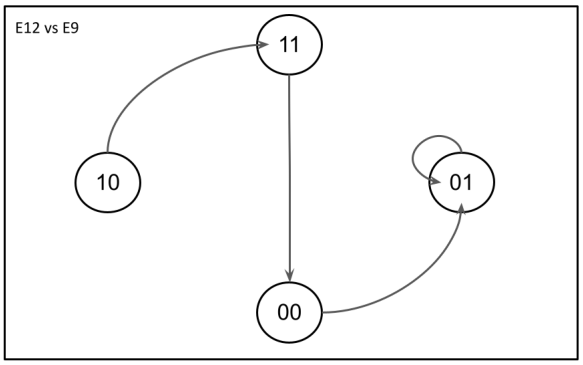
$$E_{12}E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



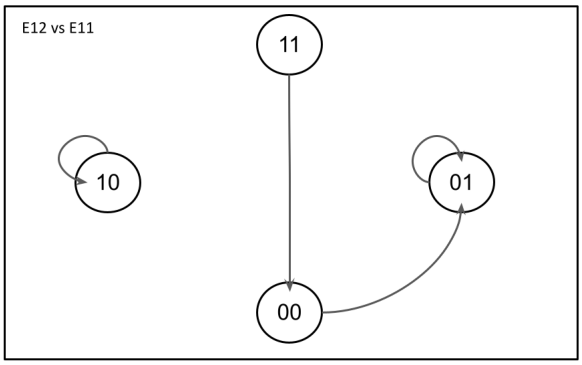
$$E_{12}E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



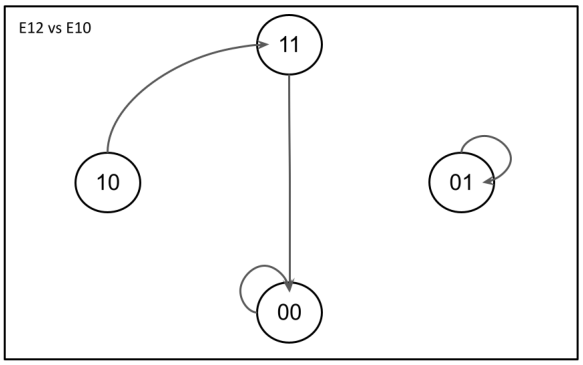
$$E_{12}E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



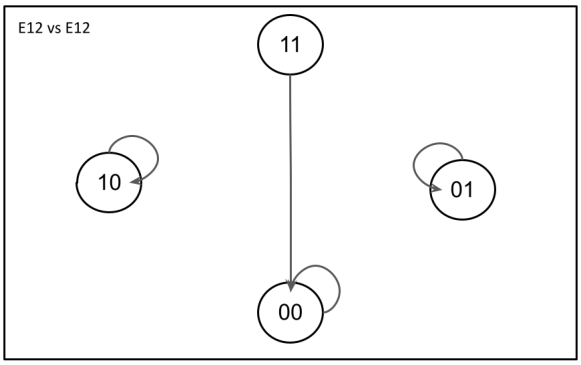
$$E_{12}E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



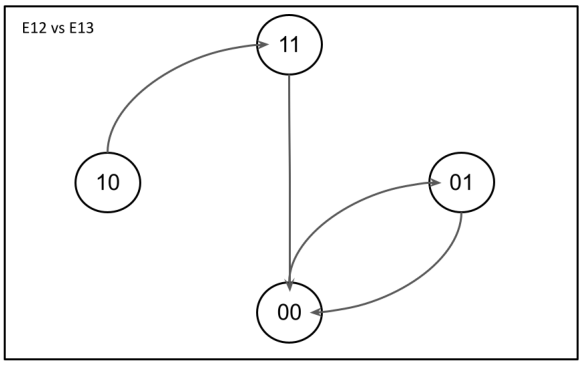
$$E_{12}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



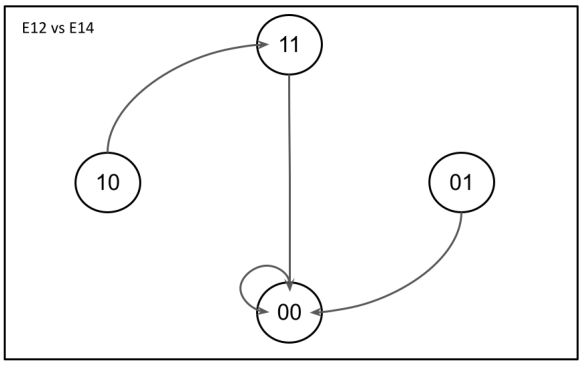
$$E_{12}E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



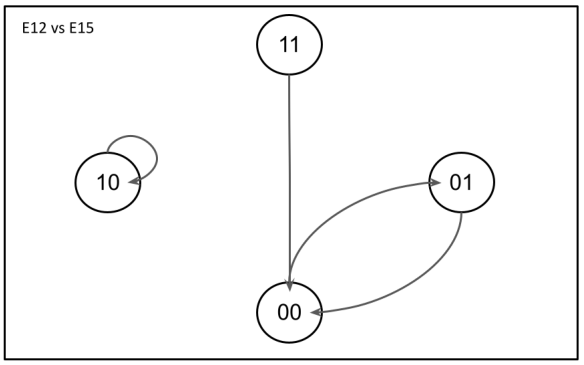
$$E_{12}E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



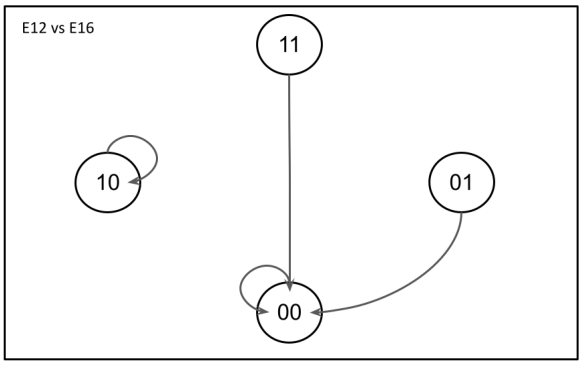
$$E_{12}E_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$E_{12}E_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

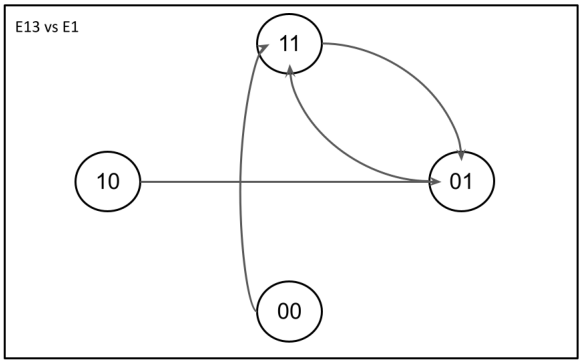
Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B.1.13. E_{13}



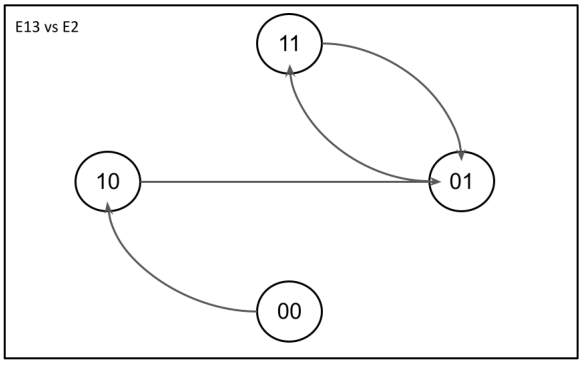
$$E_{13}E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



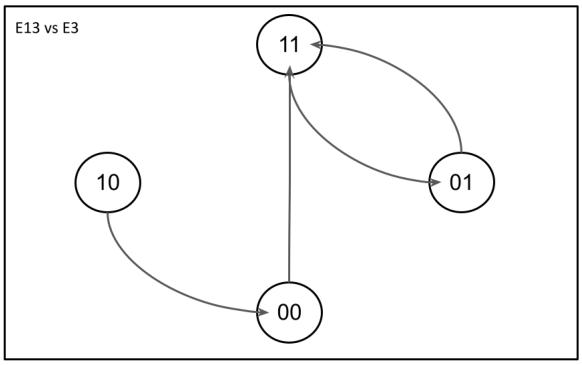
$$E_{13}E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



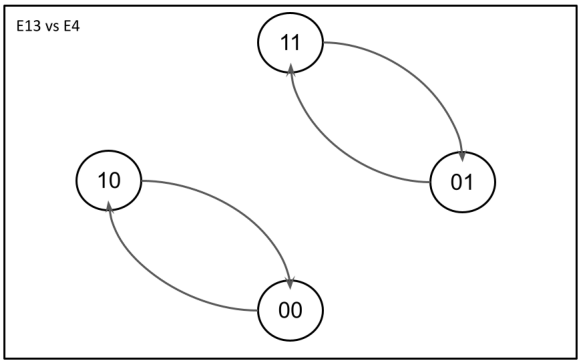
$$E_{13}E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



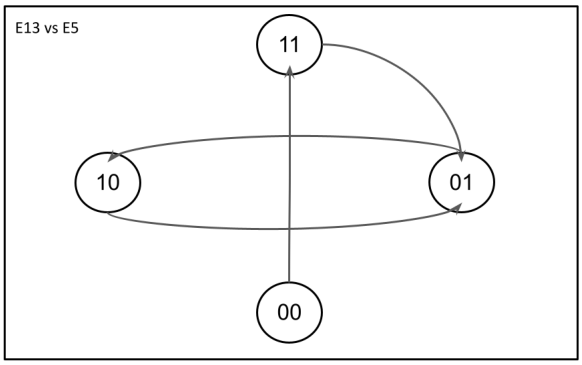
$$E_{13}E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



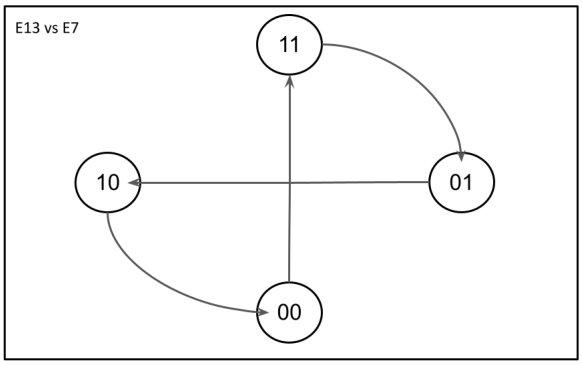
$$E_{13}E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



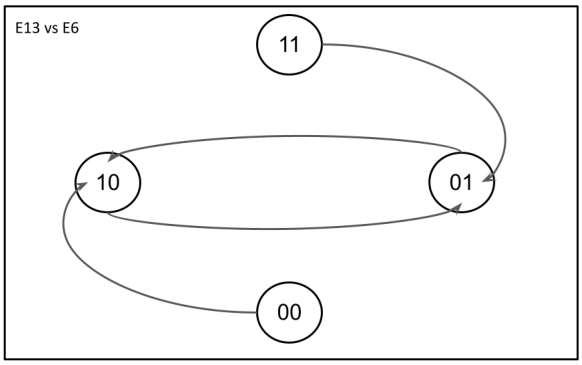
$$E_{13}E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ i,\ -i$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$



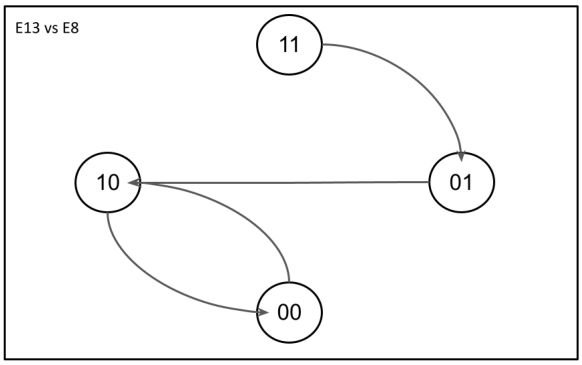
$$E_{13}E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



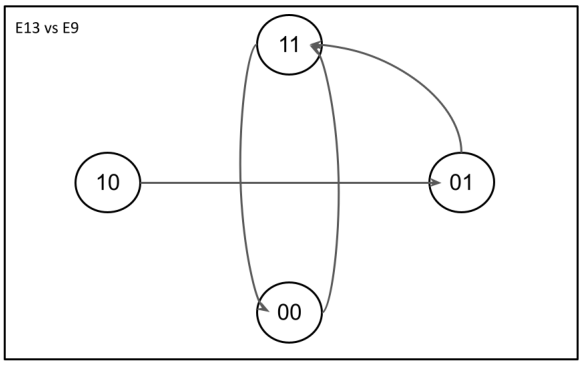
$$E_{13}E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



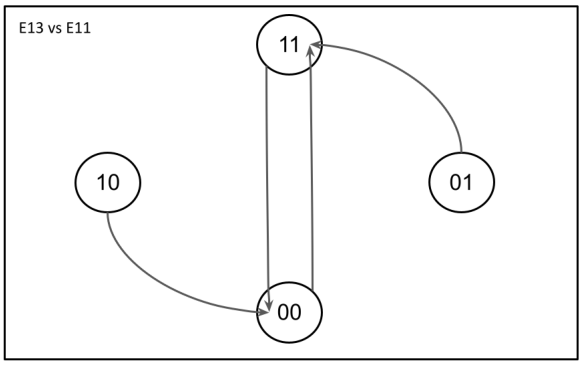
$$E_{13}E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



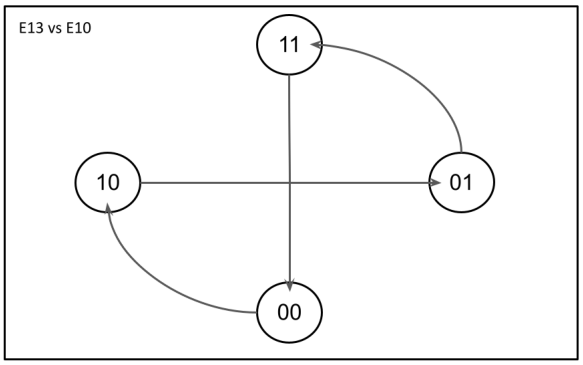
$$E_{13}E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



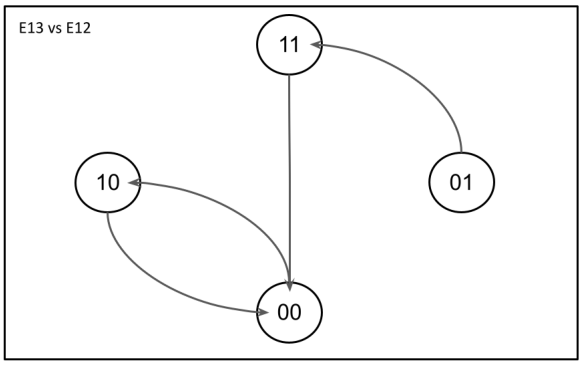
$$E_{13}E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ i,\ -i$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$



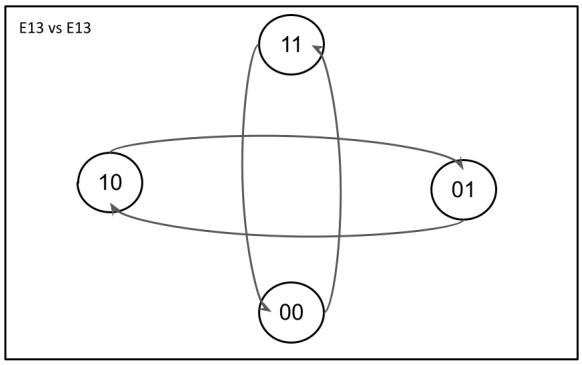
$$E_{13}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



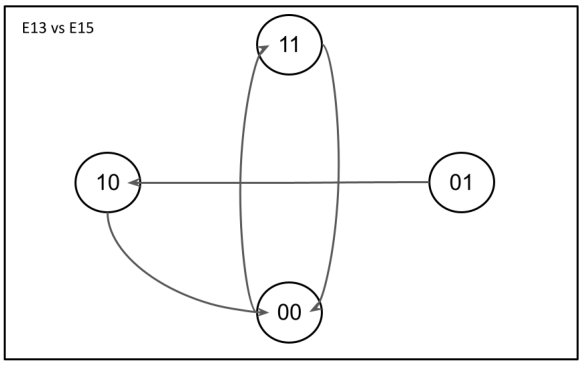
$$E_{13}E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



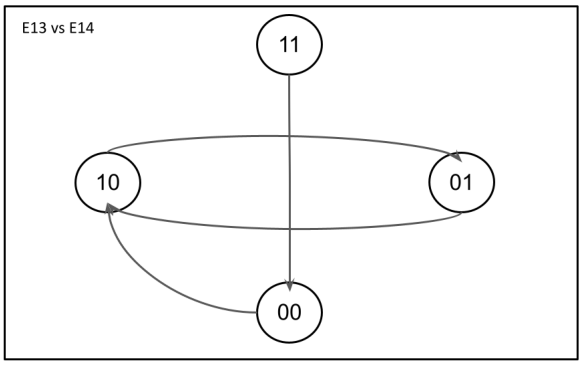
$$E_{13}E_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



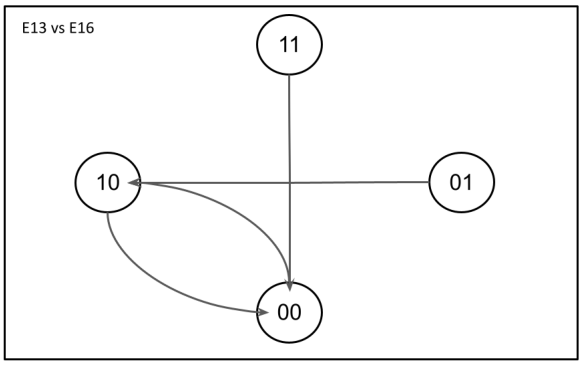
$$E_{13}E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$E_{13}E_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

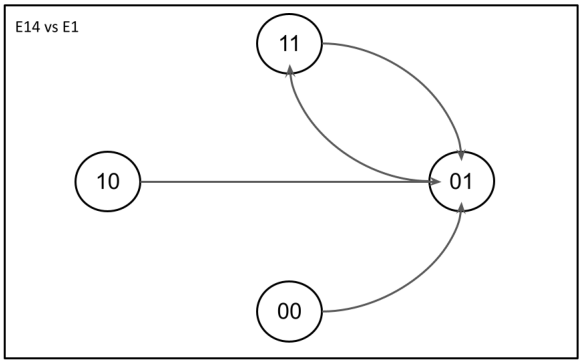
Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

B.1.14. E_{14}



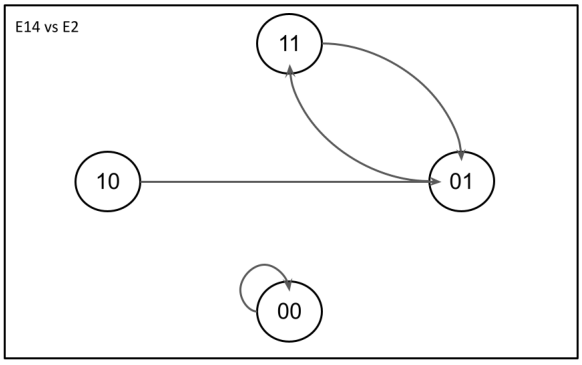
$$E_{14}E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



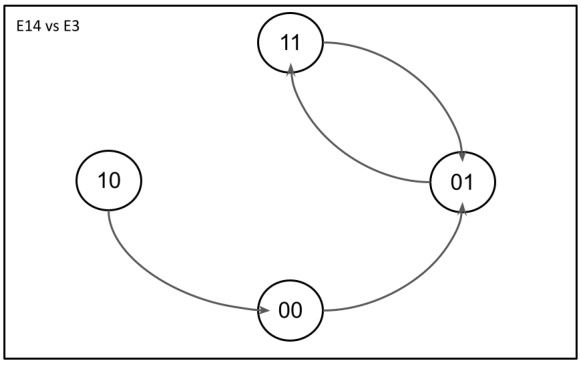
$$E_{14}E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



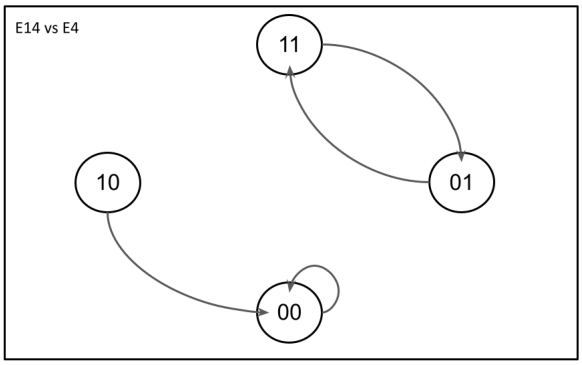
$$E_{14}E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



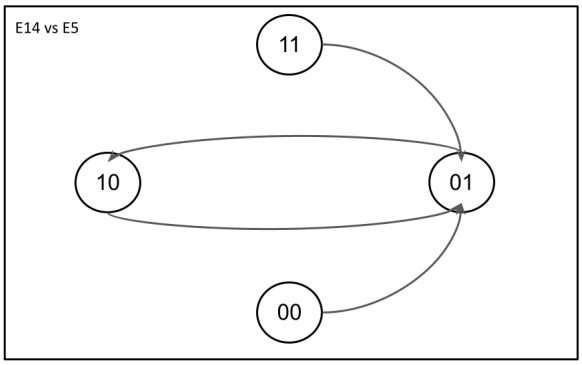
$$E_{14}E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



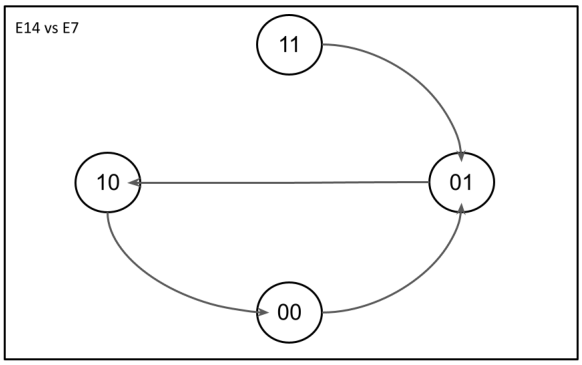
$$E_{14}E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



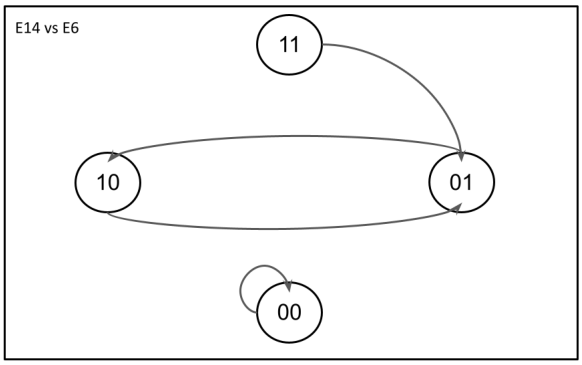
$$E_{14}E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



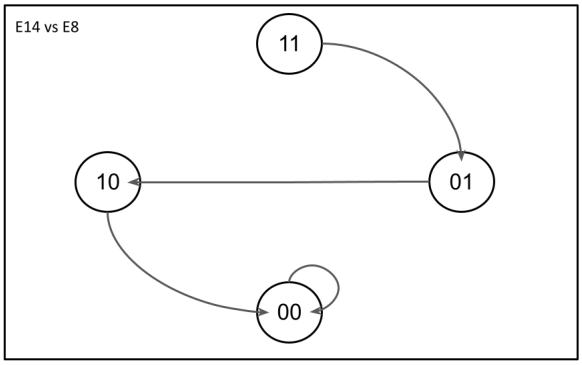
$$E_{14}E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



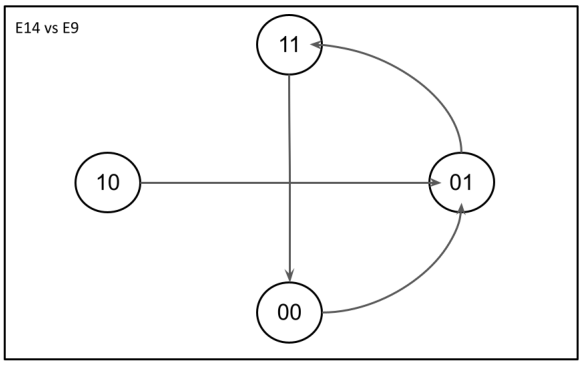
$$E_{14}E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



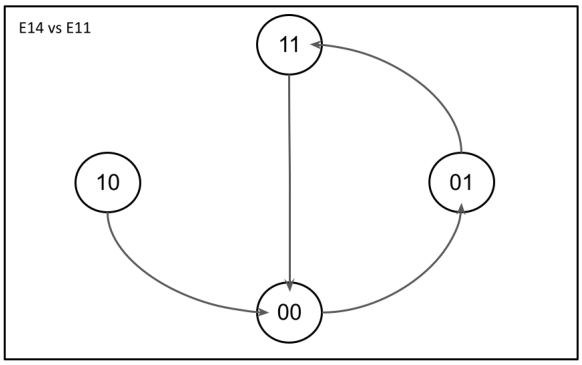
$$E_{14}E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



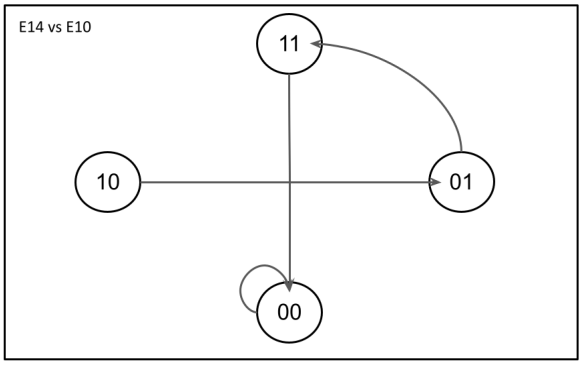
$$E_{14}E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



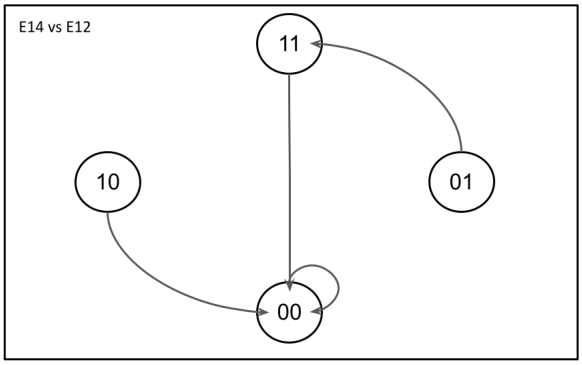
$$E_{14}E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



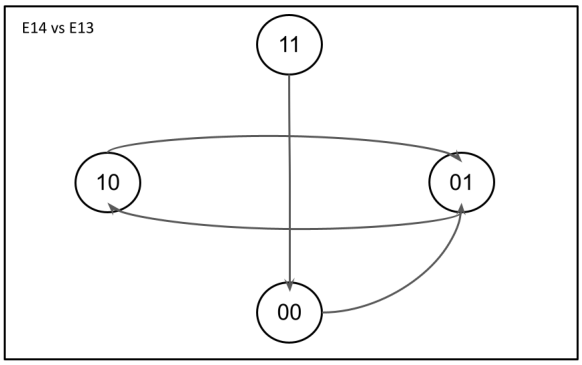
$$E_{14}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



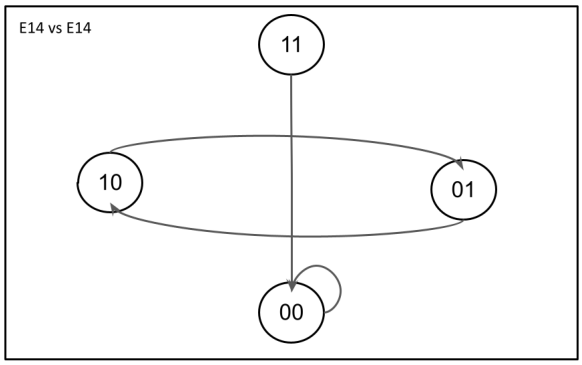
$$E_{14}E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



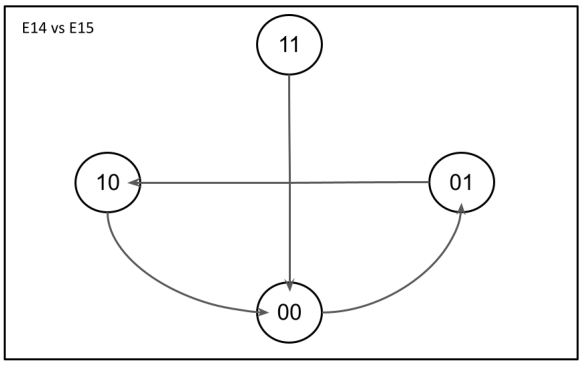
$$E_{14}E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



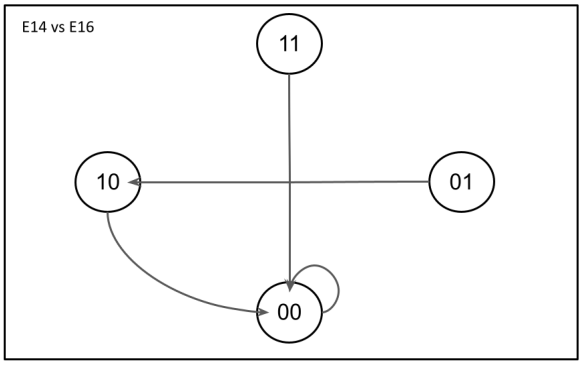
$$E_{14}E_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$E_{14}E_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

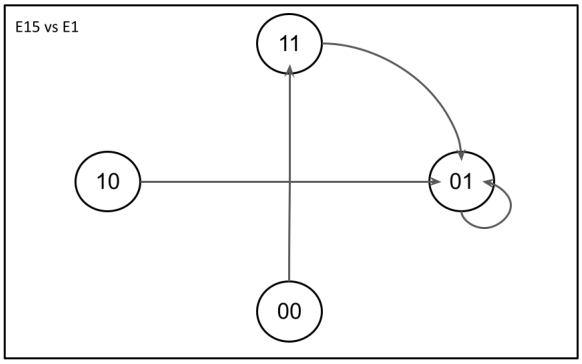
Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B.1.15. E_{15}



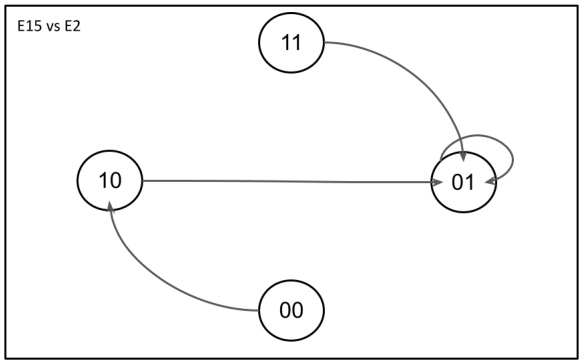
$$E_{15}E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



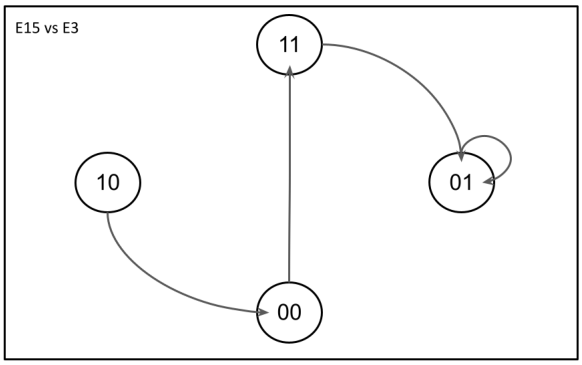
$$E_{15}E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



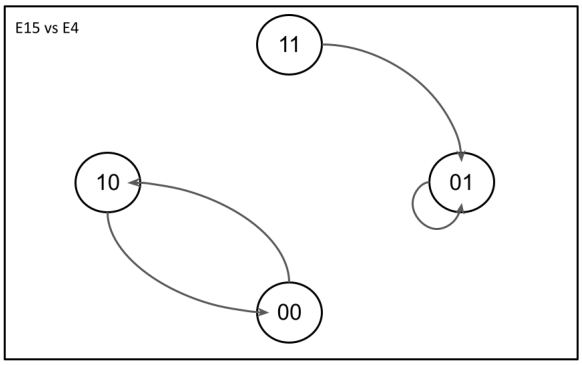
$$E_{15}E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



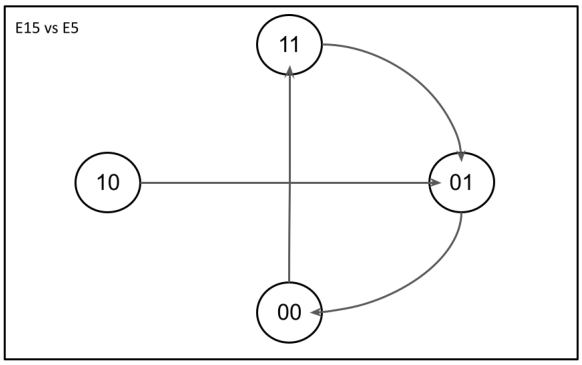
$$E_{15}E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



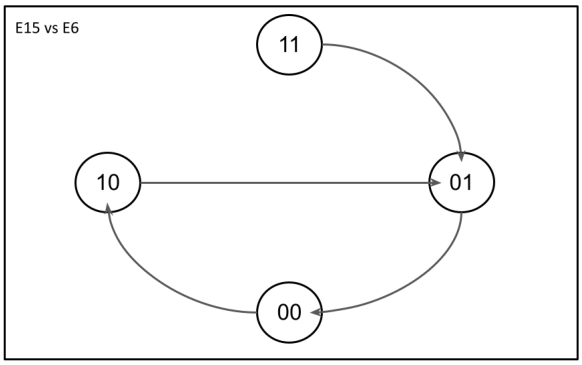
$$E_{15}E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



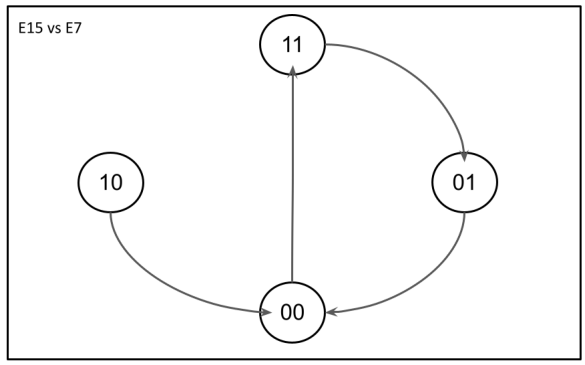
$$E_{15}E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



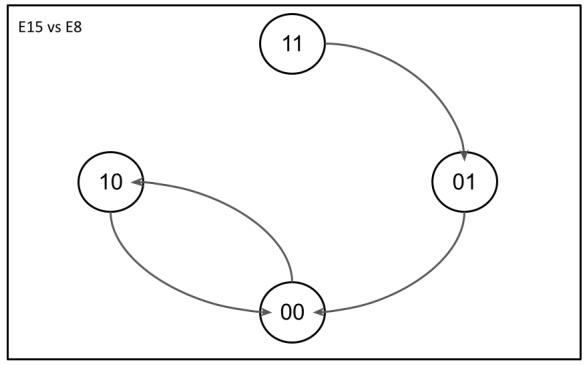
$$E_{15}E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



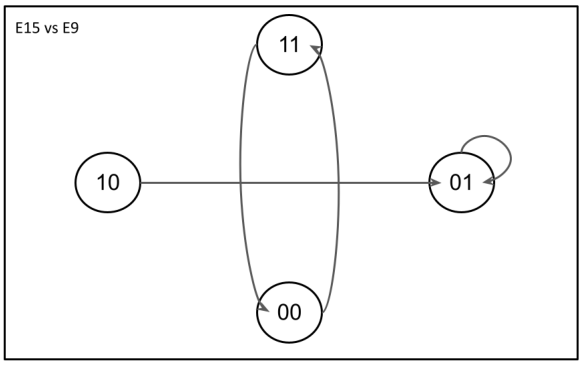
$$E_{15}E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



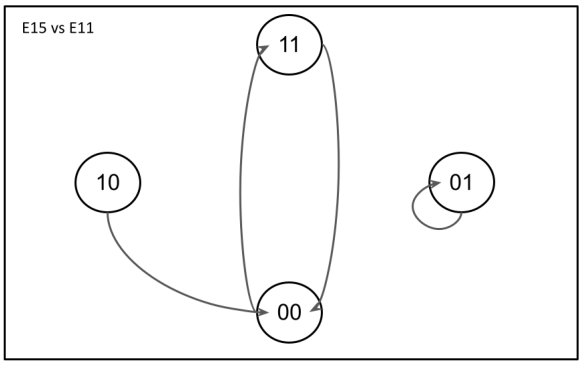
$$E_{15}E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



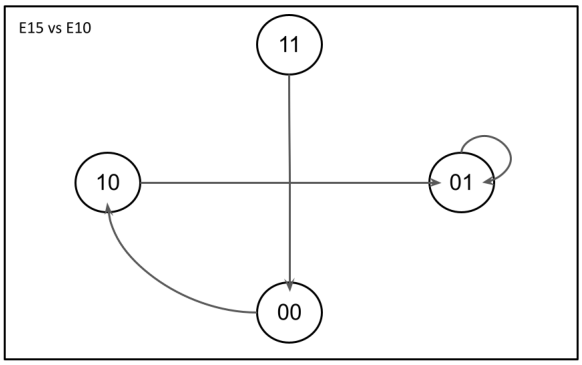
$$E_{15}E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



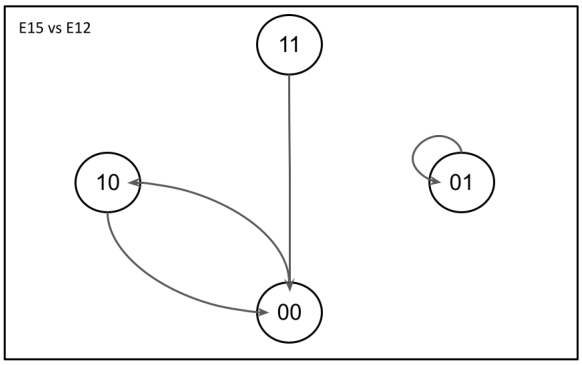
$$E_{15}E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



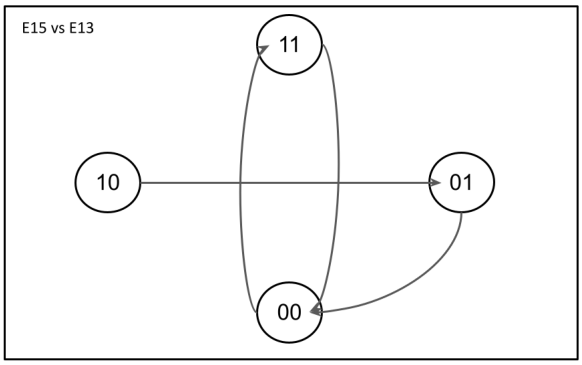
$$E_{15}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



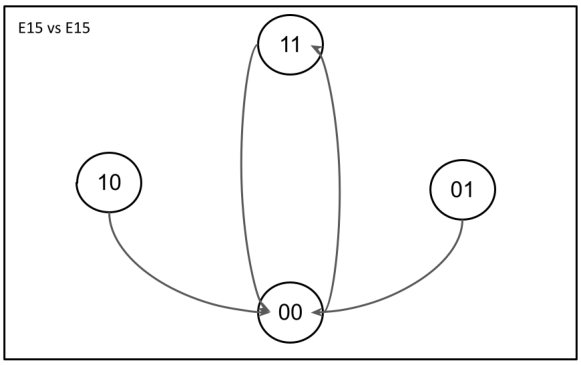
$$E_{15}E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



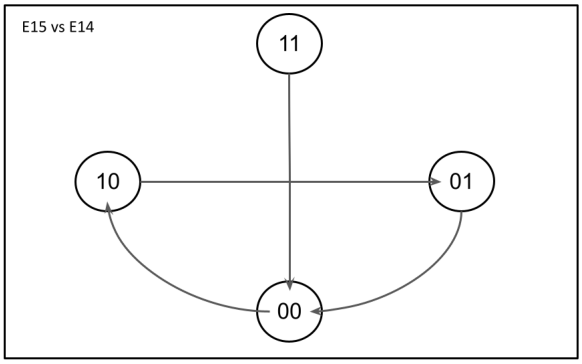
$$E_{15}E_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



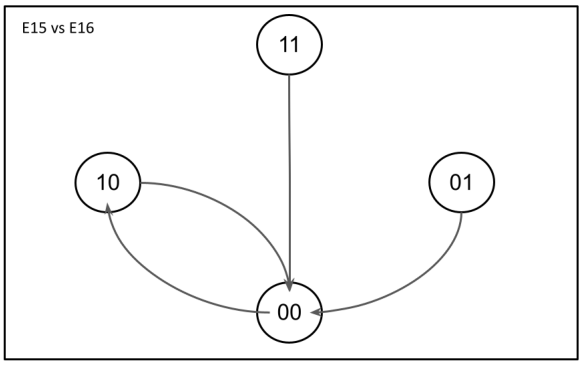
$$E_{15}E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$E_{15}E_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

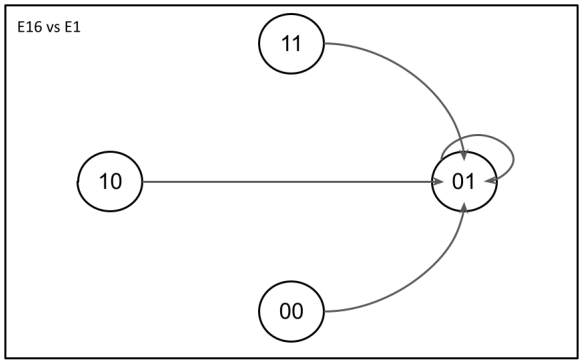
Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

B.1.16. E_{16}



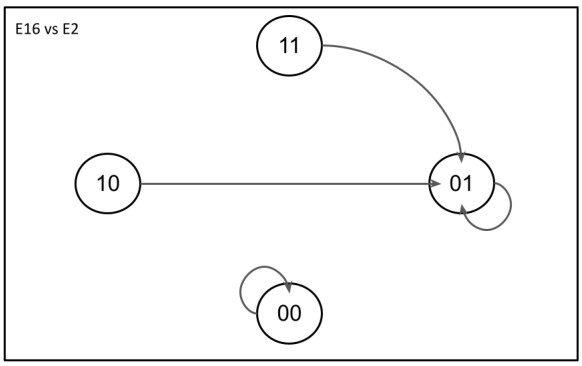
$$E_{16}E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



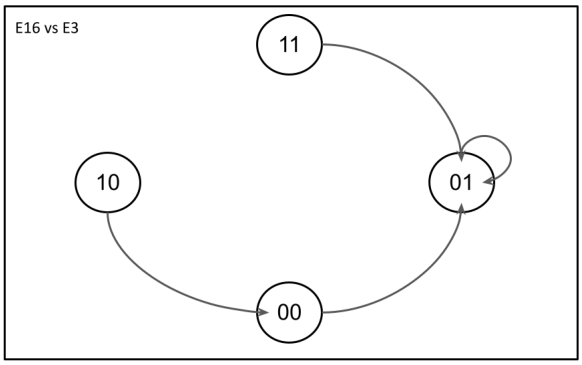
$$E_{16}E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



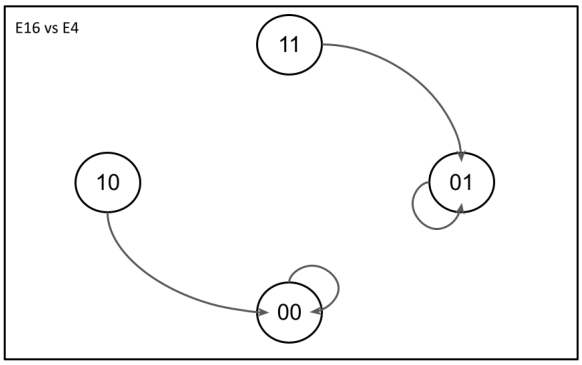
$$E_{16}E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



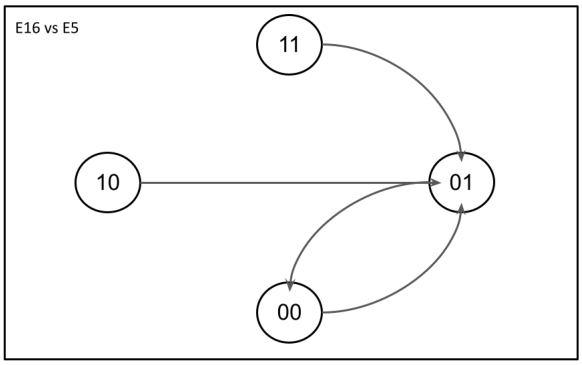
$$E_{16}E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



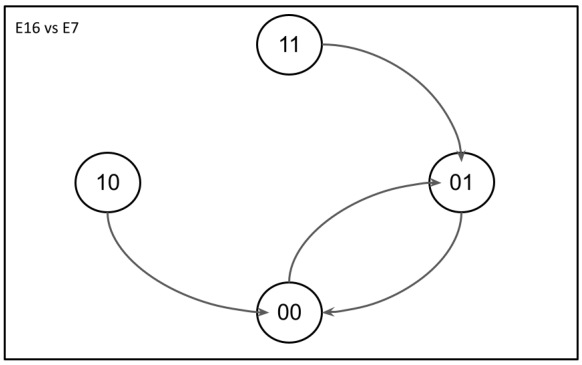
$$E_{16}E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



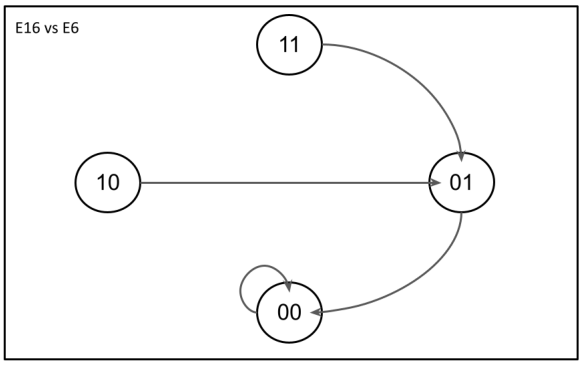
$$E_{16}E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



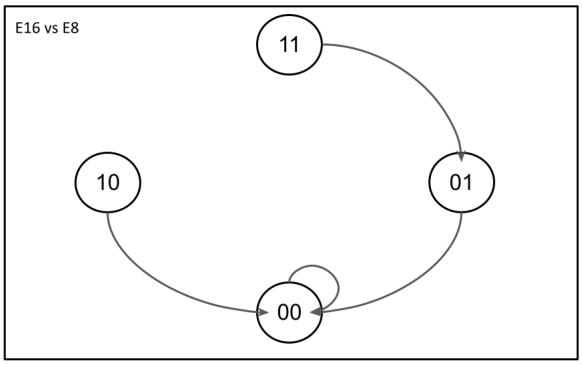
$$E_{16}E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



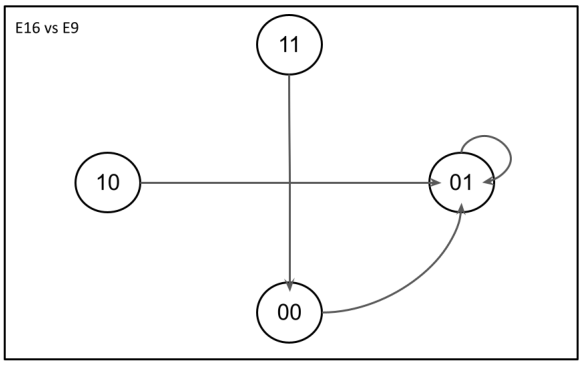
$$E_{16}E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



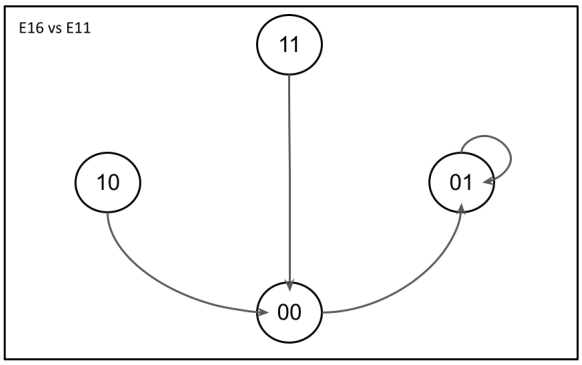
$$E_{16}E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



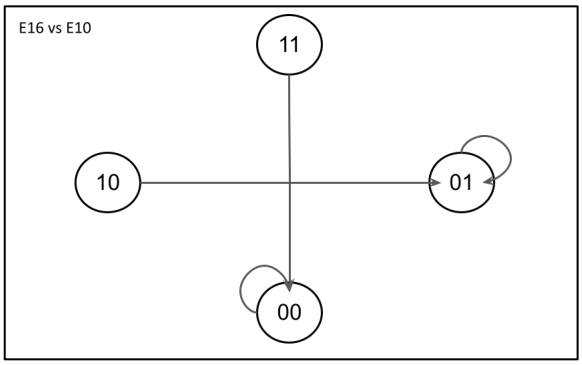
$$E_{16}E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



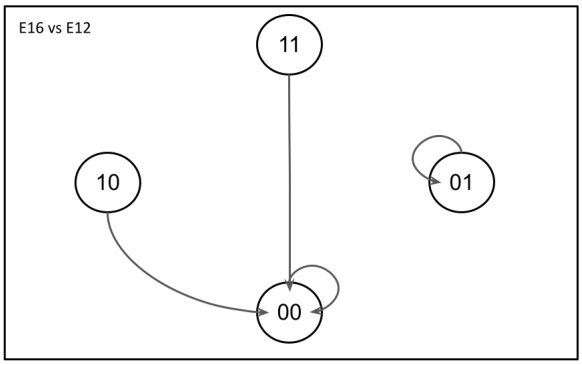
$$E_{16}E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



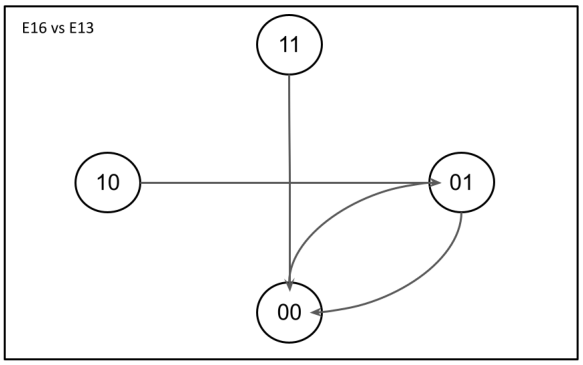
$$E_{16}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



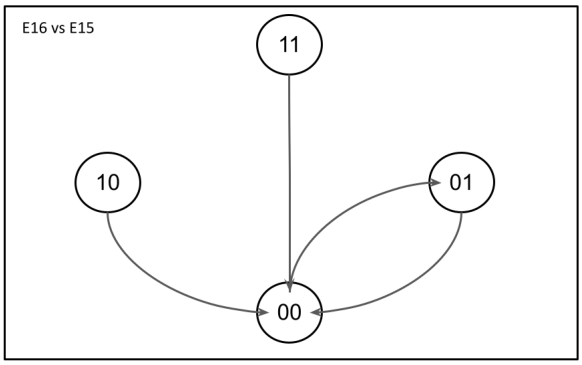
$$E_{16}E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



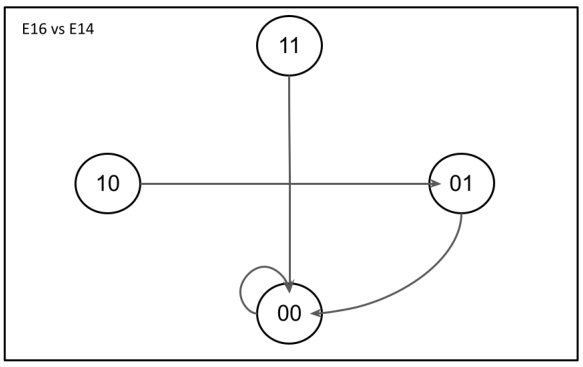
$$E_{16}E_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ -1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



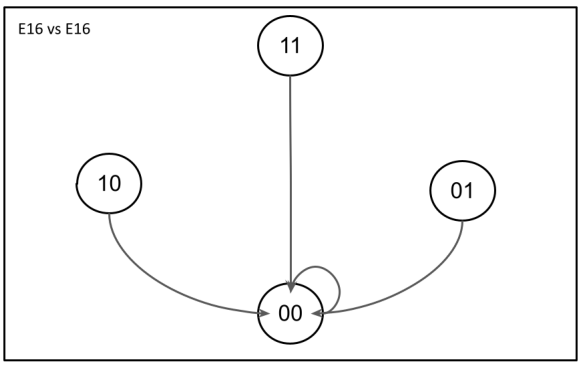
$$E_{16}E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$E_{16}E_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$1,\ 0$$

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Apéndice C

Tabla de enfrentamientos

Tabla C.1: Tabla de enfrentamientos

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
E_1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0
	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0
	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0
	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0
E_2	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0
	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0
	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0
	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0
E_3	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0
	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0
	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0
	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0
E_4	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0
	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0
	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0
	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0
E_5	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0
	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0
	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0
	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0
E_6	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0
	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0
	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0
	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0
E_7	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0
	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0
	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0
	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0
E_8	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0
	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0
	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0
	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0

Tabla C.2: Tabla de enfrentamientos

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}
E_9	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0
	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0
	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0
E_{10}	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0
	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0
	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0
E_{11}	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0
	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0
	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0
E_{12}	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 0	1 0	1 0	1 0
	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0
	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0
E_{13}	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0
	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0
	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0
E_{14}	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0
	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0
	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0
E_{15}	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0
	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0
	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0
E_{16}	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0
	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0
	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0	0 1	0 0

Apéndice D

Construcción de la superficie de estrategias vecinas

Definimos las estrategias vecinas como aquellas en las que solo cambia un 1 por un 0 o al revés con respecto a otra estrategia. Como cada estrategia tiene cuatro estrategias vecinas podemos construir un tablero en el que al pasar de una celda a otra pasemos a una estrategia vecina.

Tabla D.1: Superficie de estrategias vecinas

E_{14} 0 0 1 0	E_{10} 0 1 1 0	E_{12} 0 1 0 0	E_{16} 0 0 0 0
E_{13} 0 0 1 1	E_{9} 0 1 1 1	E_{11} 0 1 0 1	E_{15} 0 0 0 1
E_{5} 1 0 1 1	E_{1} 1 1 1 1	E_{3} 1 1 0 1	E_{7} 1 0 0 1
E_{6} 1 0 1 0	E_{2} 1 1 1 0	E_{4} 1 1 0 0	E_{8} 1 0 0 0

Nótese que los extremos de la derecha se unen con los de la izquierda y los de arriba con los de abajo, por lo tanto la superficie es un toro.

El método para construir esta superficie es comenzar por una estrategia cualquiera y colocar arriba de ella la estrategia que cambia su respuesta al primer estado, a la izquierda la estrategia que cambia su respuesta al segundo estado, a su derecha la que cambia su respuesta al tercer estado y abajo la estrategia que cambia su respuesta al cuarto estado. Se continúa de la misma manera con las estrategias que se van colocando, solo teniendo en cuenta que los lugares asignados para el cambio en un estado determinado

pueden ya estar ocupados, en cuyo caso se pueden colocar las estrategias en el lugar opuesto.

Apéndice E

Scripts

E.1. Script para el cálculo de las matrices con los valores de los enfrentamientos

```
clear all
close all
clc

T = 5; %Tentación
R = 3; %Recompensa
P = 1; %Castigo
S = 0; %Sucker's payoff
ei = 1; %Estado inicial
cant_jug = 6; % 2 para una, 3 para dos, 4 para tres, 5 para cuatro,
% 6 para estado estacionario

ENF = zeros(256,6); %Guarda las transiciones de los estados en las 4 primeras
%columnas y las estrategias que se enfrentan en las dos siguientes.

puntos = zeros(256,5); %Guarda los puntos de cada enfrentamiento después de
%la primer, segunda, tercera, cuarta jugada y en el estado estacionario.

ENF(:,1) = (ceil((1:256)/64))';
ENF(:,2) = (ceil((1:256)/16)-4*floor(((1:256)-1)/64))';
ENF(:,3) = (ceil((1:256)/4)-4*floor(((1:256)-1)/16))';
ENF(:,4) = ((1:256)-4*floor(((1:256)-1)/4))';

%Filas de ENF en las E1 que participa e1 como jugador 1
E1 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E1,5) = 1;

%Filas de ENF en las que E1 participa e1 como jugador 2
e1 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
```

```
ENF(e1,6) = 1;


%Filas de ENF en las E2 que participa e1 como jugador 1
E2 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E2,5) = 2;

%Filas de ENF en las E2 que participa e1 como jugador 2
e2 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e2,6) = 2;


%Filas de ENF en las E3 que participa e1 como jugador 1
E3 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E3,5) = 3;

%Filas de ENF en las E3 que participa e1 como jugador 2
e3 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e3,6) = 3;

%Filas de ENF en las E4 que participa e1 como jugador 1
E4 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E4,5) = 4;

%Filas de ENF en las E4 que participa e1 como jugador 2
e4 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e4,6) = 4;


%Filas de ENF en las E5 que participa e1 como jugador 1
E5 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E5,5) = 5;

%Filas de ENF en las E5 que participa e1 como jugador 2
e5 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
```

```
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e5,6) = 5;


%Filas de ENF en las E6 que participa e1 como jugador 1
E6 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E6,5) = 6;

%Filas de ENF en las E6 que participa e1 como jugador 2
e6 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e6,6) = 6;


%Filas de ENF en las E7 que participa e1 como jugador 1
E7 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E7,5) = 7;

%Filas de ENF en las E7 que participa e1 como jugador 2
e7 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e7,6) = 7;


%Filas de ENF en las E8 que participa e1 como jugador 1
E8 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E8,5) = 8;

%Filas de ENF en las E8 que participa e1 como jugador 2
e8 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e8,6) = 8;


%Filas de ENF en las E9 que participa e1 como jugador 1
E9 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E9,5) = 9;
```

```
%Filas de ENF en las que E9 participa e1 como jugador 2
e9 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e9,6) = 9;


%Filas de ENF en las E10 que participa e1 como jugador 1
E10 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E10,5) = 10;

%Filas de ENF en las que E10 participa e1 como jugador 2
e10 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e10,6) = 10;


%Filas de ENF en las E11 que participa e1 como jugador 1
E11 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E11,5) = 11;

%Filas de ENF en las que E11 participa e1 como jugador 2
e11 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e11,6) = 11;


%Filas de ENF en las E12 que participa e1 como jugador 1
E12 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E12,5) = 12;

%Filas de ENF en las que E12 participa e1 como jugador 2
e12 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e12,6) = 12;


%Filas de ENF en las E13 que participa e1 como jugador 1
E13 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
```

```
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E13,5) = 13;

%Filas de ENF en las que E13 participa e1 como jugador 2
e13 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e13,6) = 13;


%Filas de ENF en las E14 que participa e1 como jugador 1
E14 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E14,5) = 14;

%Filas de ENF en las que E14 participa e1 como jugador 2
e14 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e14,6) = 14;


%Filas de ENF en las E15 que participa e1 como jugador 1
E15 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E15,5) = 15;

%Filas de ENF en las que E15 participa e1 como jugador 2
e15 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e15,6) = 15;


%Filas de ENF en las E16 que participa e1 como jugador 1
E16 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E16,5) = 16;

%Filas de ENF en las que E16 participa e1 como jugador 2
e16 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e16,6) = 16;
```

```
if ei == 1
puntos(:,1) = R;
elseif ei == 2
puntos(:,1) = S;
elseif ei == 3
puntos(:,1) = T;
elseif ei == 4
puntos(:,1) = P;
endif

%Cálculo de puntos 2da jugada
puntos(((find(ENF(:,ei) == 1))), 2) = R;
puntos(((find(ENF(:,ei) == 2))), 2) = S;
puntos(((find(ENF(:,ei) == 3))), 2) = T;
puntos(((find(ENF(:,ei) == 4))), 2) = P;
puntos(:,2) = puntos(:,1) + puntos(:,2);

%Cálculo de puntos 3era jugada
puntos(find(diag(ENF(:,ENF(:,ei))) == 1), 3) = R;
puntos(find(diag(ENF(:,ENF(:,ei))) == 2), 3) = S;
puntos(find(diag(ENF(:,ENF(:,ei))) == 3), 3) = T;
puntos(find(diag(ENF(:,ENF(:,ei))) == 4), 3) = P;
puntos(:,3) = puntos(:,2) + puntos(:,3);

%Cálculo de puntos 4ta jugada
puntos(find(diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))) == 1), 4) = R;
puntos(find(diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))) == 2), 4) = S;
puntos(find(diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))) == 3), 4) = T;
puntos(find(diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))) == 4), 4) = P;
puntos(:,4) = puntos(:,3) + puntos(:,4);

%Cálculo de puntos estado estacionario
est4 = diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei)))));
est5 = diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei)))))));
est6 = diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))))));
est7 = ...
diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei)))))))))));
est8 = ...
diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(...
ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))))))))));
ESES = [est4 est5 est6 est7 est8];
esesR = find(ESES == 1);
esesS = find(ESES == 2);
esesT = find(ESES == 3);
esesP = find(ESES == 4);
ESES(esesR) = R;
ESES(esesS) = S;
ESES(esesT) = T;
ESES(esesP) = P;
```

```
xua = find(!((ESES(:,2) ~= ESES(:,5)) & (ESES(:,2) ~= ESES(:,4))));
puntos(xua,5) = 2*ESES(xua,2) + 4*ESES(xua,3) + 4*ESES(xua,4) + 2*ESES(xua,5);

puntos(find((ESES(:,2) ~= ESES(:,5)) & (ESES(:,2) ~= ESES(:,4))),5) =...
3*(R + S + T + P);


for i = 1:256

E(ENF(i,5),ENF(i,6)) = puntos(i,5);

endfor

Emin = E([6 12 13 16],[6 12 13 16])
```

E.2. Script para el cálculo de la suma los valores de los enfrentamientos

```
%Cálculo del valor de cada enfrentamiento

clear all
close all
clc

%Parámetros

T = 5; %Tentación
R = 3; %Recompensa
P = 1; %Castigo
S = 0; %Sucker's payoff

ENF = zeros(256,6); %Guarda las transiciones de los estados en las 4 primeras
%columnas y las estrategias que se enfrentan en las dos siguientes.

puntos = zeros(256,5); %Guarda los puntos de cada enfrentamiento después de
%la primer, segunda, tercera, cuarta jugada y en el estado estacionario.

resultados = zeros(5,16,4);

%Creación matriz de transición
ENF(:,1) = (ceil((1:256)/64))';
ENF(:,2) = (ceil((1:256)/16)-4*floor(((1:256)-1)/64))';
ENF(:,3) = (ceil((1:256)/4)-4*floor(((1:256)-1)/16))';
ENF(:,4) = ((1:256)-4*floor(((1:256)-1)/4))';

%Filas de ENF en las E1 que participa e1 como jugador 1
E1 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
```

```
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E1,5) = 1;

%Filas de ENF en las que E1 participa e1 como jugador 2
e1 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e1,6) = 1;


%Filas de ENF en las E2 que participa e1 como jugador 1
E2 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E2,5) = 2;

%Filas de ENF en las E2 que participa e1 como jugador 2
e2 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e2,6) = 2;


%Filas de ENF en las E3 que participa e1 como jugador 1
E3 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E3,5) = 3;

%Filas de ENF en las E3 que participa e1 como jugador 2
e3 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e3,6) = 3;

%Filas de ENF en las E4 que participa e1 como jugador 1
E4 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E4,5) = 4;

%Filas de ENF en las E4 que participa e1 como jugador 2
e4 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e4,6) = 4;
```

```
%Filas de ENF en las E5 que participa e1 como jugador 1
E5 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E5,5) = 5;

%Filas de ENF en las E5 que participa e1 como jugador 2
e5 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e5,6) = 5;


%Filas de ENF en las E6 que participa e1 como jugador 1
E6 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E6,5) = 6;

%Filas de ENF en las E6 que participa e1 como jugador 2
e6 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e6,6) = 6;


%Filas de ENF en las E7 que participa e1 como jugador 1
E7 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E7,5) = 7;

%Filas de ENF en las E7 que participa e1 como jugador 2
e7 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e7,6) = 7;


%Filas de ENF en las E8 que participa e1 como jugador 1
E8 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E8,5) = 8;

%Filas de ENF en las E8 que participa e1 como jugador 2
e8 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
```

```
ENF(e8,6) = 8;


%Filas de ENF en las E9 que participa e1 como jugador 1
E9 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E9,5) = 9;

%Filas de ENF en las que E9 participa e1 como jugador 2
e9 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e9,6) = 9;


%Filas de ENF en las E10 que participa e1 como jugador 1
E10 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E10,5) = 10;

%Filas de ENF en las que E10 participa e1 como jugador 2
e10 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e10,6) = 10;


%Filas de ENF en las E11 que participa e1 como jugador 1
E11 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E11,5) = 11;

%Filas de ENF en las que E11 participa e1 como jugador 2
e11 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e11,6) = 11;


%Filas de ENF en las E12 que participa e1 como jugador 1
E12 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E12,5) = 12;

%Filas de ENF en las que E12 participa e1 como jugador 2
```

```
e12 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 1) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e12,6) = 12;


%Filas de ENF en las E13 que participa e1 como jugador 1
E13 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E13,5) = 13;

%Filas de ENF en las que E13 participa e1 como jugador 2
e13 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e13,6) = 13;


%Filas de ENF en las E14 que participa e1 como jugador 1
E14 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E14,5) = 14;

%Filas de ENF en las que E14 participa e1 como jugador 2
e14 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 1)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e14,6) = 14;


%Filas de ENF en las E15 que participa e1 como jugador 1
E15 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E15,5) = 15;

%Filas de ENF en las que E15 participa e1 como jugador 2
e15 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e15,6) = 15;


%Filas de ENF en las E16 que participa e1 como jugador 1
E16 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
```

```
ENF(E16,5) = 16;

%Filas de ENF en las que E16 participa e1 como jugador 2
e16 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e16,6) = 16;

for i = 1:4

ei = i; %Estado inicial

%Cálculo de puntos 2da jugada
puntos(((find(ENF(:,ei) == 1))), 2) = R;
puntos(((find(ENF(:,ei) == 2))), 2) = S;
puntos(((find(ENF(:,ei) == 3))), 2) = T;
puntos(((find(ENF(:,ei) == 4))), 2) = P;
puntos(:,2) = (puntos(:,1) + puntos(:,2));

%Cálculo de puntos 3era jugada
puntos(find(diag(ENF(:,ENF(:,ei))) == 1), 3) = R;
puntos(find(diag(ENF(:,ENF(:,ei))) == 2), 3) = S;
puntos(find(diag(ENF(:,ENF(:,ei))) == 3), 3) = T;
puntos(find(diag(ENF(:,ENF(:,ei))) == 4), 3) = P;
puntos(:,3) = (puntos(:,2) + puntos(:,3));

%Cálculo de puntos 4ta jugada
puntos(find(diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))) == 1), 4) = R;
puntos(find(diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))) == 2), 4) = S;
puntos(find(diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))) == 3), 4) = T;
puntos(find(diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))) == 4), 4) = P;
puntos(:,4) = (puntos(:,3) + puntos(:,4));

%Cálculo de puntos estado estacionario
est4 = diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei)))));
est5 = diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei)))))));
est6 = diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))))));
est7 = diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei)))))))))));
est8 = diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))))))))));
ESES = [est4 est5 est6 est7 est8];
esesR = find(ESES == 1);
esesS = find(ESES == 2);
esesT = find(ESES == 3);
esesP = find(ESES == 4);
ESES(esesR) = R;
ESES(esesS) = S;
ESES(esesT) = T;
ESES(esesP) = P;
xua = find(!((ESES(:,2) ~= ESES(:,5)) & (ESES(:,2) ~= ESES(:,4))));
```

```
puntos(xua,5) = (2*ESES(xua,2) + 4*ESES(xua,3) + 4*ESES(xua,4) + 2*ESES(xua,5));

puntos(find((ESES(:,2) ~= ESES(:,5)) & (ESES(:,2) ~= ESES(:,4))),5) =...
(3*(R + S + T + P));

diferencia12 = diff(puntos(:,1:2)')' == 5;
diferencia23 = diff(puntos(:,2:3)')' == 5;
diferencia34 = diff(puntos(:,3:4)')' == 5;


if ~isempty(puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia12)))
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia12),2) = puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferenci
endif
if ~isempty(puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia23)))
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia23),3) = puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferenci
endif
if ~isempty(puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia34)))
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia34),4) = puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferenci
endif
if ~isempty(puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & (puntos(:,5)/12 == 5))))
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & (puntos(:,5)/12 == 5)),5) =...
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & (puntos(:,5)/12 == 5)),5)/2;
endif

diferencia12 = diff(puntos(:,1:2)')' == 0;
diferencia23 = diff(puntos(:,2:3)')' == 0;
diferencia34 = diff(puntos(:,3:4)')' == 0;

if ~isempty(puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia12)))
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia12),2) = puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferenci
endif
if ~isempty(puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia23)))
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia23),3) = puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferenci
endif
if ~isempty(puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia34)))
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia34),4) = puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferenci
endif
if ~isempty(puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & (puntos(:,5)/12 == 0))))
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & (puntos(:,5)/12 == 0)),5) = 2.5*12;
endif

resultados(i,1,1) = sum(puntos(E1,2));
resultados(i,2,1) = sum(puntos(E2,2));
resultados(i,3,1) = sum(puntos(E3,2));
resultados(i,4,1) = sum(puntos(E4,2));
resultados(i,5,1) = sum(puntos(E5,2));
resultados(i,6,1) = sum(puntos(E6,2));
resultados(i,7,1) = sum(puntos(E7,2));
resultados(i,8,1) = sum(puntos(E8,2));
```

```
resultados(i,9,1) = sum(puntos(E9,2));
resultados(i,10,1) = sum(puntos(E10,2));
resultados(i,11,1) = sum(puntos(E11,2));
resultados(i,12,1) = sum(puntos(E12,2));
resultados(i,13,1) = sum(puntos(E13,2));
resultados(i,14,1) = sum(puntos(E14,2));
resultados(i,15,1) = sum(puntos(E15,2));
resultados(i,16,1) = sum(puntos(E16,2));

resultados(i,1,2) = sum(puntos(E1,3)/2);
resultados(i,2,2) = sum(puntos(E2,3)/2);
resultados(i,3,2) = sum(puntos(E3,3)/2);
resultados(i,4,2) = sum(puntos(E4,3)/2);
resultados(i,5,2) = sum(puntos(E5,3)/2);
resultados(i,6,2) = sum(puntos(E6,3)/2);
resultados(i,7,2) = sum(puntos(E7,3)/2);
resultados(i,8,2) = sum(puntos(E8,3)/2);

resultados(i,9,2) = sum(puntos(E9,3)/2);
resultados(i,10,2) = sum(puntos(E10,3)/2);
resultados(i,11,2) = sum(puntos(E11,3)/2);
resultados(i,12,2) = sum(puntos(E12,3)/2);
resultados(i,13,2) = sum(puntos(E13,3)/2);
resultados(i,14,2) = sum(puntos(E14,3)/2);
resultados(i,15,2) = sum(puntos(E15,3)/2);
resultados(i,16,2) = sum(puntos(E16,3)/2);

resultados(i,1,3) = sum(puntos(E1,4)/3);
resultados(i,2,3) = sum(puntos(E2,4)/3);
resultados(i,3,3) = sum(puntos(E3,4)/3);
resultados(i,4,3) = sum(puntos(E4,4)/3);
resultados(i,5,3) = sum(puntos(E5,4)/3);
resultados(i,6,3) = sum(puntos(E6,4)/3);
resultados(i,7,3) = sum(puntos(E7,4)/3);
resultados(i,8,3) = sum(puntos(E8,4)/3);

resultados(i,9,3) = sum(puntos(E9,4)/3);
resultados(i,10,3) = sum(puntos(E10,4)/3);
resultados(i,11,3) = sum(puntos(E11,4)/3);
resultados(i,12,3) = sum(puntos(E12,4)/3);
resultados(i,13,3) = sum(puntos(E13,4)/3);
resultados(i,14,3) = sum(puntos(E14,4)/3);
resultados(i,15,3) = sum(puntos(E15,4)/3);
resultados(i,16,3) = sum(puntos(E16,4)/3);

resultados(i,1,4) = sum(puntos(E1,5)/12);
resultados(i,2,4) = sum(puntos(E2,5)/12);
resultados(i,3,4) = sum(puntos(E3,5)/12);
```

```
resultados(i,4,4) = sum(puntos(E4,5)/12);
resultados(i,5,4) = sum(puntos(E5,5)/12);
resultados(i,6,4) = sum(puntos(E6,5)/12);
resultados(i,7,4) = sum(puntos(E7,5)/12);
resultados(i,8,4) = sum(puntos(E8,5)/12);

resultados(i,9,4) = sum(puntos(E9,5)/12);
resultados(i,10,4) = sum(puntos(E10,5)/12);
resultados(i,11,4) = sum(puntos(E11,5)/12);
resultados(i,12,4) = sum(puntos(E12,5)/12);
resultados(i,13,4) = sum(puntos(E13,5)/12);
resultados(i,14,4) = sum(puntos(E14,5)/12);
resultados(i,15,4) = sum(puntos(E15,5)/12);
resultados(i,16,4) = sum(puntos(E16,5)/12);

endfor

resultados(5,:,:) = mean(resultados(1:4,:,:));

for i = 1:4
figure(i)
bar(resultados(:,:,i)')
legend('Estado 1','Estado 2','Estado 3','Estado 4', 'Promedio','fontsize', 26)
xticks(1:1:16)
title('Suma de los valores de los enfrentamientos')
xlabel('Estrategia')
ylabel('Puntaje')
set(gca, 'FontSize', 30)
endfor
resultados
```

E.3. Script para la evolución de las poblaciones y los valores de r y el índice de cooperación

```
clear all
close all
clc

T = 5; %Tentación
R = 3; %Recompensa
P = 1; %Castigo
S = 0; %Sucker's payoff
ei = 2; %Estado inicial
gen = 10000;
cant_jug = 2; % 1 para una, 2 para dos, 3 para tres, 4 para cuatro, 5 para estado estacionario
tas_mut = 0; % Mutaciones por generación
prop_mut = 0.01; % Proporción de la población que muta
fre_est_par = (ones(1,16)*1/16)'; %[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]' %(ones(1,16)*1/16)';% %(ones(
```

```
p = zeros(gen,1);
r = zeros(gen+1,1);
u = zeros(16,gen+1);
des_pob = zeros(gen+1, 16); %Guarda las frecuencias de las estrategias a lo largo de las generaci
des_pob(1,:) = fre_est_par';

ENF = zeros(256,6); %Guarda las transiciones de los estados en las 4 primeras
%columnas y las estrategias que se enfrentan en las dos siguientes.

puntos = zeros(256,5); %Guarda los puntos de cada enfrentamiento después de
%la primer, segunda, tercera, cuarta jugada y en el estado estacionario.


%Creación matriz de transición
ENF(:,1) = (ceil((1:256)/64))';
ENF(:,2) = (ceil((1:256)/16)-4*floor(((1:256)-1)/64))';
ENF(:,3) = (ceil((1:256)/4)-4*floor(((1:256)-1)/16))';
ENF(:,4) = ((1:256)-4*floor(((1:256)-1)/4))';

%Filas de ENF en las E1 que participa e1 como jugador 1
E1 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E1,5) = 1;

%Filas de ENF en las que E1 participa e1 como jugador 2
e1 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e1,6) = 1;


%Filas de ENF en las E2 que participa e1 como jugador 1
E2 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E2,5) = 2;

%Filas de ENF en las E2 que participa e1 como jugador 2
e2 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e2,6) = 2;


%Filas de ENF en las E3 que participa e1 como jugador 1
E3 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
```

```
%Asignación de identidad
ENF(E3,5) = 3;

%Filas de ENF en las E3 que participa e1 como jugador 2
e3 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e3,6) = 3;

%Filas de ENF en las E4 que participa e1 como jugador 1
E4 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E4,5) = 4;

%Filas de ENF en las E4 que participa e1 como jugador 2
e4 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e4,6) = 4;


%Filas de ENF en las E5 que participa e1 como jugador 1
E5 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E5,5) = 5;

%Filas de ENF en las E5 que participa e1 como jugador 2
e5 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e5,6) = 5;


%Filas de ENF en las E6 que participa e1 como jugador 1
E6 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E6,5) = 6;

%Filas de ENF en las E6 que participa e1 como jugador 2
e6 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e6,6) = 6;


%Filas de ENF en las E7 que participa e1 como jugador 1
```

```
E7 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E7,5) = 7;

%Filas de ENF en las E7 que participa e1 como jugador 2
e7 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e7,6) = 7;


%Filas de ENF en las E8 que participa e1 como jugador 1
E8 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 2) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E8,5) = 8;

%Filas de ENF en las E8 que participa e1 como jugador 2
e8 = find((ENF(:,1) == 1 | ENF(:,1) == 3) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e8,6) = 8;


%Filas de ENF en las E9 que participa e1 como jugador 1
E9 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E9,5) = 9;

%Filas de ENF en las que E9 participa e1 como jugador 2
e9 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e9,6) = 9;


%Filas de ENF en las E10 que participa e1 como jugador 1
E10 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E10,5) = 10;

%Filas de ENF en las que E10 participa e1 como jugador 2
e10 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e10,6) = 10;
```

```
%Filas de ENF en las E11 que participa e1 como jugador 1
E11 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E11,5) = 11;

%Filas de ENF en las que E11 participa e1 como jugador 2
e11 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 3) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e11,6) = 11;


%Filas de ENF en las E12 que participa e1 como jugador 1
E12 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 2)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E12,5) = 12;

%Filas de ENF en las que E12 participa e1 como jugador 2
e12 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 1) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e12,6) = 12;


%Filas de ENF en las E13 que participa e1 como jugador 1
E13 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E13,5) = 13;

%Filas de ENF en las que E13 participa e1 como jugador 2
e13 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 1 | ENF(:,2) == 3)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e13,6) = 13;


%Filas de ENF en las E14 que participa e1 como jugador 1
E14 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 1 | ENF(:,3) == 2) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E14,5) = 14;

%Filas de ENF en las que E14 participa e1 como jugador 2
e14 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 1)...
```

```
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e14,6) = 14;


%Filas de ENF en las E15 que participa e1 como jugador 1
E15 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 2));
%Asignación de identidad
ENF(E15,5) = 15;

%Filas de ENF en las que E15 participa e1 como jugador 2
e15 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 1 | ENF(:,4) == 3));
%Asignación de identidad
ENF(e15,6) = 15;


%Filas de ENF en las E16 que participa e1 como jugador 1
E16 = find((ENF(:,1) == 3 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 3 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 3 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 3 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(E16,5) = 16;

%Filas de ENF en las que E16 participa e1 como jugador 2
e16 = find((ENF(:,1) == 2 | ENF(:,1) == 4) & (ENF(:,2) == 2 | ENF(:,2) == 4)...
& (ENF(:,3) == 2 | ENF(:,3) == 4) & (ENF(:,4) == 2 | ENF(:,4) == 4));
%Asignación de identidad
ENF(e16,6) = 16;

%ENF(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & ENF(:,1:4)==3)) = -3;

for j = 1:gen

%Cambio del estado inicial

##if j >= 14000
##  ei = 1;
##endif

##ei = randi(4);
%cant_jug = randi(4)+1
##if j > 1000+gen/10 && j <= 1000+gen*(2/10) | j > 1000+gen*(5/10) && j <= 1000+gen*(6/10) | j > 10
##  ei = 4;
##elseif j > 1000+gen*(3/10) && j<= 1000+gen*(4/10) | j > 1000+gen*(7/10) && j<= 1000+gen*(8/10)
##  ei=1;
##endif

%Cálculo de puntos 1era jugada
```

```
estados = zeros(256,5);



if ei == 1
puntos(:,1) = R;
elseif ei == 2
puntos(:,1) = S;
elseif ei == 3
puntos(:,1) = T;
elseif ei == 4
puntos(:,1) = P;
endif
%Cálculo 1er estado 1era jugada
## if ei == 1
##   estados(:,1) = 1;
##  endif
%estados(find(ENF(:,ei) == 1),1) = 1;
%Cálculo de puntos 2da jugada
puntos(((find(ENF(:,ei) == 1))), 2) = R;
puntos(((find(ENF(:,ei) == 2))), 2) = S;
puntos(((find(ENF(:,ei) == 3))), 2) = T;
puntos(((find(ENF(:,ei) == 4))), 2) = P;
puntos(:,2) = puntos(:,1) + puntos(:,2);
%Cálculo 1er estado 2da jugada
estados(((find(ENF(:,ei) == 1))), 2) = 1;
estados(:,2) = (estados(:,1) + estados(:,2))/2;


%Cálculo de puntos 3era jugada
puntos(find(diag(ENF(:,ENF(:,ei))) == 1), 3) = R;
puntos(find(diag(ENF(:,ENF(:,ei))) == 2), 3) = S;
puntos(find(diag(ENF(:,ENF(:,ei))) == 3), 3) = T;
puntos(find(diag(ENF(:,ENF(:,ei))) == 4), 3) = P;
puntos(:,3) = puntos(:,2) + puntos(:,3);
%Cálculo 1er estado 3era jugada
estados(find(diag(ENF(:,ENF(:,ei))) == 1), 3) = 1;
estados(:,3) = (estados(:,2)*2 + estados(:,3))/3;

%Cálculo de puntos 4ta jugada
puntos(find(diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))) == 1), 4) = R;
puntos(find(diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))) == 2), 4) = S;
puntos(find(diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))) == 3), 4) = T;
puntos(find(diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))) == 4), 4) = P;
puntos(:,4) = puntos(:,3) + puntos(:,4);
%Cálculo 1era jugada 4ta jugada
estados(find(diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))) == 1), 4) = 1;
estados(:,4) = (estados(:,3)*3 + estados(:,4))/4;
```

```
%Cálculo de puntos estado estacionario
est4 = diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei)))));
est5 = diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei)))))));
est6 = diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))))));
est7 = diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei)))))))))));
est8 = diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,diag(ENF(:,ENF(:,ei))))))))))));
ESES = [est4 est5 est6 est7 est8];
eses1 = find(ESES == 1);
esesR = find(ESES == 1);
esesS = find(ESES == 2);
esesT = find(ESES == 3);
esesP = find(ESES == 4);
ESES1 = zeros(256,5);
ESES1(eses1) = 1;
ESES(esesR) = R;
ESES(esesS) = S;
ESES(esesT) = T;
ESES(esesP) = P;
xua = find(!((ESES(:,2) ~= ESES(:,5)) & (ESES(:,2) ~= ESES(:,4))));
puntos(xua,5) = 2*ESES(xua,2) + 4*ESES(xua,3) + 4*ESES(xua,4) + 2*ESES(xua,5);

puntos(find((ESES(:,2) ~= ESES(:,5)) & (ESES(:,2) ~= ESES(:,4))),5) =...
3*(R + S + T + P);

xua1 = find(!((ESES1(:,2) ~= ESES1(:,5)) & (ESES1(:,2) ~= ESES1(:,4))));
estados(xua1,5) = (2*ESES1(xua1,2) + 4*ESES1(xua1,3) + 4*ESES1(xua1,4) + 2*ESES1(xua1,5))/12;

estados(find((ESES1(:,2) ~= ESES1(:,5)) & (ESES1(:,2) ~= ESES1(:,4))),5) =...
(3*1)/12;

diferencia12 = diff(puntos(:,1:2)')' == 5;
diferencia23 = diff(puntos(:,2:3)')' == 5;
diferencia34 = diff(puntos(:,3:4)')' == 5;

if ~isempty(puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia12)))
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia12),2) = puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferenc
endif
if ~isempty(puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia23)))
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia23),3) = puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferenc
endif
if ~isempty(puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia34)))
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia34),4) = puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferenc
endif
if ~isempty(puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & (puntos(:,5)/12 == 5))))
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & (puntos(:,5)/12 == 5)),5) =...
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & (puntos(:,5)/12 == 5)),5)/2;
endif
```

```
diferencia12 = diff(puntos(:,1:2)')' == 0;
diferencia23 = diff(puntos(:,2:3)')' == 0;
diferencia34 = diff(puntos(:,3:4)')' == 0;

if ~isempty(puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia12)))
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia12),2) = puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferenc
endif
if ~isempty(puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia23)))
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia23),3) = puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferenc
endif
if ~isempty(puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia34)))
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferencia34),4) = puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & diferenc
endif
if ~isempty(puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & (puntos(:,5)/12 == 0))))
puntos(find(ENF(:,5)==ENF(:,6) & (puntos(:,5)/12 == 0)),5) = 2.5*12;
endif

for i = 1:256

E(ENF(i,5),ENF(i,6)) = puntos(i,cant_jug);
C(ENF(i,5),ENF(i,6)) = estados(i,cant_jug);

endfor

if j == 1
r(1,1) = ((E*fre_est_par)'*fre_est_par)/cant_jug;
c(1,1) = ((C*fre_est_par)'*fre_est_par);
u(:,1) = (diag(fre_est_par)*E*fre_est_par);
endif
%Cálculo de la siguiente generación.

rmax = r(1,1);
if r(j,1) < rmax
rdiff = (rmax-r(j,1))/rmax;
tas_mut = floor(rdiff/prop_mut);
else
rmax = r(j,1);
rdiff = 0;
endif

fre_est_par = (diag(fre_est_par)*E*fre_est_par)/((E*fre_est_par)'*fre_est_par);

des_pob(j+1,:) = fre_est_par';
r(j+1,1) = ((E*fre_est_par)'*fre_est_par)/cant_jug;
c(j+1,1) = ((C*fre_est_par)'*fre_est_par);
u(:,j+1) = (diag(fre_est_par)*E*fre_est_par);

if tas_mut >= 1
for h = 1:tas_mut
```

```
ran_1 = randi(16);
ran_2 = rand;
est_mut = find(ran_2 == sort([cumsum(fre_est_par') ran_2]));

if fre_est_par(est_mut) > prop_mut;
fre_est_par(est_mut) = fre_est_par(est_mut)-prop_mut;
else
fre_est_par(est_mut) = 0;
endif

fre_est_par(ran_1) = fre_est_par(ran_1)+prop_mut;


endfor
endif

##fre_est_par = fre_est_par - fre_est_par*rdiff;
##repos_rand = randi(16, ceil(rdiff*16), 1);
##fre_est_par(repos_rand) = fre_est_par(repos_rand) + rdiff/length(repos_rand);



##[men j2m] = sort(sum(E')+sum(E));
##
##
##for y = j2m
##  if rdiff > fre_est_par(j2m(y))
##  rdiff = rdiff - fre_est_par(j2m(y));
##  fre_est_par(j2m(y)) = 0;
##else
##  fre_est_par(j2m(y)) >= rdiff;
##  fre_est_par(j2m(y)) = fre_est_par(j2m(y))-rdiff;
##  rdiff = 0;
##endif
##endfor
##
##fre_est_par(j2m(13:16)) = fre_est_par(j2m(13:16))+(1-sum(fre_est_par))/4;


endfor


figure 1
plot(des_pob, '--o','markersize',8,'linewidth',1.75)
legend("E3","E4", "E8", "E12", "E16", "fontsize",40,"location","northeast")
####xlim([0 2050])
####ylim([0 1.1])
##ylabel("Frecuencia de las estrategias")
##xlabel("Generación")
```

```
##set(gca, 'FontSize', 40)
figure 2
plot(r, 'o-','markersize', 10,'linewidth',2)
ylabel("r")
xlabel("Generación")
xlim([0 103])
##ylim([2.7 3.1])
set(gca, 'FontSize', 50)
format bank
fre_est_par*100
figure 3
plot(c,'+-','markersize', 12,'linewidth',2)
sum(c(end-100:end))/100
ylabel("Índice de cooperación")
xlabel("Generación")
##xlim([0 103])
##ylim([0 0.22])
set(gca, 'FontSize', 40)
##figure 4
##plot(u')

r(end)
mean(r(9000:10000,:))
```

Bibliografía

[1] James A Anderson. *An introduction to neural networks*. MIT press, 1995.

[2] André Ariew y Richard C Lewontin. ‘‘The confusions of fitness’’. En: *The British Journal for the Philosophy of Science* 55.2 (2004), págs. 347-363.

[3] Robert J Aumann y Michael Maschler. ‘‘Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud’’. En: *Journal of economic theory* 36.2 (1985), págs. 195-213.

[4] R. Axelrod y R.M. Axelrod. *The Evolution of Cooperation*. Basic books. Basic Books, 1984. ISBN: 9780465021215. URL: https://books.google.com.uy/books?id=NJZBCGbNs98C.

[5] Robert Axelrod. ‘‘Effective choice in the prisoner’s dilemma’’. En: *Journal of conflict resolution* 24.1 (1980), págs. 3-25.

[6] Robert Axelrod. ‘‘More effective choice in the prisoner’s dilemma’’. En: *Journal of conflict resolution* 24.3 (1980), págs. 379-403.

[7] Robert Axelrod y William D Hamilton. ‘‘The evolution of cooperation’’. En: *science* 211.4489 (1981), págs. 1390-1396.

[8] Kenneth George Binmore. *Game theory and the social contract: just playing*. Vol. 2. MIT press, 1994.

[9] Robert Boyd y Jeffrey P Lorberbaum. ‘‘No pure strategy is evolutionarily stable in the repeated prisoner’s dilemma game’’. En: *Nature* 327.6117 (1987), págs. 58-59.

[10] Austin Burt y Robert Trivers. ‘‘Genes in conflict: the biology of selfish genetic elements’’. En: *Genes in Conflict*. Harvard University Press, 2008.

[11] Kevin C Clements y David W Stephens. ‘‘Testing models of non-kin cooperation: mutualism and the Prisoner’s Dilemma’’. En: *Animal Behaviour* 50.2 (1995), págs. 527-535.

[12] Jonas Cremer. ‘‘Evolutionary principles promoting cooperation: demographic fluctuations, population dynamics, and assortment’’. Tesis doct. München, Ludwig - Maximilians - Universität, Diss., 2011, 2011.

[13] Charles Darwin. *The descent of Man: 1*. J. Murray, 1871.

[14] Richard Dawkins, Juana Robles Suárez y Pedro Pacheco González. *El gen egoísta extendido*. Salvat, 2017.

[15] Anthony WF Edwards. ‘‘Natural selection and the sex ratio: Fisher’s sources’’. En: *The American Naturalist* 151.6 (1998), págs. 564-569.

[16] AWF Edwards. ‘‘Carl Düsing (1884) on the regulation of the sex-ratio’’. En: *Theoretical Population Biology* 58.3 (2000), págs. 255-257.

[17] RA Fisher. ‘‘Randomisation, and an old enigma of card play’’. En: *The Mathematical Gazette* 18.231 (1934), págs. 294-297.

[18] Ronald A Fisher. ‘‘Polymorphism and natural selection’’. En: *Journal of Ecology* 46.2 (1958), págs. 289-293.

[19] Steven A Frank. *A touchstone in the study of adaptation*. 2002.

[20] Stephen Jay Gould y Richard C Lewontin. ‘‘The spandrels of San Marco and the Panglossian paradigm: a critique of the adaptationist programme’’. En: *Shaping Entrepreneurship Research*. Routledge, 2020, págs. 204-221.

[21] W.D. Hamilton. ‘‘The genetical evolution of social behaviour. I’’. En: *Journal of Theoretical Biology* 7.1 (1964), págs. 1-16. ISSN: 0022-5193. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-5193(64)90038-4. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022519364900384.

[22] William D Hamilton. ‘‘Extraordinary Sex Ratios: A sex-ratio theory for sex linkage and inbreeding has new implications in cytogenetics and entomology.’’ En: *Science* 156.3774 (1967), págs. 477-488.

[23] William D Hamilton. ‘‘The genetical evolution of social behaviour. II’’. En: *Journal of theoretical biology* 7.1 (1964), págs. 17-52.

[24] Peter Hammerstein y Olof Leimar. ‘‘Evolutionary game theory in biology’’. En: *Handbook of game theory with economic applications* 4 (2015), págs. 575-617.

[25] Oliver Garfield Haywood Jr. ‘‘Military decision and game theory’’. En: *Journal of the Operations Research Society of America* 2.4 (1954), págs. 365-385.

[26] Tomas Kay, Laurent Keller y Laurent Lehmann. ‘‘The evolution of altruism and the serial rediscovery of the role of relatedness’’. En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 117.46 (2020), págs. 28894-28898.

[27] Olof Leimar y John M McNamara. ‘‘Game theory in biology: 50 years and onwards’’. En: *Philosophical Transactions of the Royal Society B* 378.1876 (2023), pág. 20210509.

[28] Richard C Lewontin. ‘‘Evolution and the theory of games’’. En: *Journal of theoretical biology* 1.3 (1961), págs. 382-403.

[29] John M McNamara y Olof Leimar. *Game theory in biology: concepts and frontiers*. Oxford University Press, USA, 2020.

[30] Catrin Misselhorn. ‘‘How Models Fail. A Critical Look at the History of Computer Simulations of the Evolution of Cooperation’’. En: (2015).

[31] Eduardo Mizraji. ‘‘Context-dependent associations in linear distributed memories’’. En: *Bulletin of mathematical biology* 51.2 (1989), págs. 195-205.

[32] Eduardo Mizraji. ‘‘Vector logics: the matrix-vector representation of logical calculus’’. En: *Fuzzy Sets and Systems* 50.2 (1992), págs. 179-185.

[33] Roger B Myerson. ‘‘Nash equilibrium and the history of economic theory’’. En: *Journal of Economic Literature* 37.3 (1999), págs. 1067-1082.

[34] John F Nash Jr. ‘‘Equilibrium points in n-person games’’. En: *Proceedings of the national academy of sciences* 36.1 (1950), págs. 48-49.

[35] Martin A Nowak. ‘‘Five rules for the evolution of cooperation’’. En: *science* 314.5805 (2006), págs. 1560-1563.

[36] Hans Peters. *Game theory: A Multi-leveled approach*. Springer, 2015.

[37] Eric Rasmusen. *Games and information*. Vol. 13. Basil Blackwell Oxford, 1989.

[38] Derek A Roff. ‘‘Defining fitness in evolutionary models’’. En: *Journal of genetics* 87 (2008), págs. 339-348.

[39] Alexander Rosenberg. ‘‘Fitness’’. En: *The Journal of Philosophy* 80.8 (1983), págs. 457-473.

[40] Hannah Rubin. ‘‘The phenotypic gambit: selective pressures and ESS methodology in evolutionary game theory’’. En: *Biology & Philosophy* 31 (2016), págs. 551-569.

[41] Ullica Segerstrale. ‘‘Defenders of the truth: The battle for science in the sociobiology debate and beyond’’. En: (2000).

[42] Lawrence B Slobodkin y Anatol Rapoport. ‘‘An optimal strategy of evolution’’. En: *The Quarterly Review of Biology* 49.3 (1974), págs. 181-200.

[43] J Maynard Smith. ‘‘The theory of games and the evolution of animal conflicts’’. En: *Journal of theoretical biology* 47.1 (1974), págs. 209-221.

[44] J Maynard Smith y George R Price. ‘‘The logic of animal conflict’’. En: *Nature* 246.5427 (1973), págs. 15-18.

[45] John Maynard Smith. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press, 1982. DOI: 10.1017/CBO9780511806292.

[46] Elliott Sober. *Conceptual issues in evolutionary biology*. Mit Press, 2006.

[47] Robert L Trivers. ‘‘The evolution of reciprocal altruism’’. En: *The Quarterly review of biology* 46.1 (1971), págs. 35-57.

[48] Albert W Tucker y Philip D Straffin Jr. ‘‘The mathematics of Tucker: A sampler’’. En: *The Two-Year College Mathematics Journal* 14.3 (1983), págs. 228-232.

[49] John Von Neumann y Oskar Morgenstern. *Theory of games and economic behavior (60th Anniversary Commemorative Edition)*. Princeton university press, 2007.

[50] Stuart West. *Sex allocation*. Princeton University Press, 2009.

[51] Stuart A West, Ashleigh S Griffin y Andy Gardner. ‘‘Evolutionary explanations for cooperation’’. En: *Current biology* 17.16 (2007), R661-R672.

[52] Stuart A West et al. ‘‘Testing Hamilton’s rule with competition between relatives’’. En: *Nature* 409.6819 (2001), págs. 510-513.

[53] Gerald S Wilkinson. ‘‘Reciprocal food sharing in the vampire bat’’. En: *Nature* 308.5955 (1984), págs. 181-184.

[54] Ruth I. Wood, Jessica Y. Kim y Grace R. Li. ‘‘Cooperation in rats playing the iterated Prisoner’s Dilemma game’’. En: *Animal Behaviour* 114 (2016), págs. 27-35. ISSN: 0003-3472. DOI: https://doi.org/10.1016/j.anbehav.2016.01.010. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003347216000130.