



**NOTAS PARA EL CURSO DE
FÍSICA DE LA ATMÓSFERA ,
para la LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA
ATMÓSFERA
de la UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA,
Autor, GABRIEL CAZES BOEZIO.**

Montevideo, IMFIA-Universidad de la República, 2024



SECCIÓN UNO.

TRANSFERENCIA DE CALOR POR RADIACIÓN EN LA ATMÓSFERA

TRANSFERENCIA DE CALOR EN LA ATMÓSFERA POR RADIACIÓN.

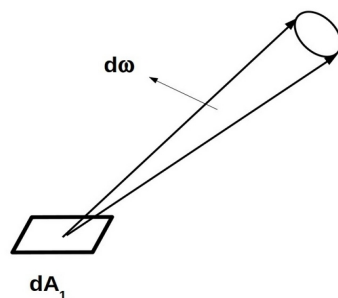
Un cuerpo a temperatura absoluta no nula emite radiación electromagnética, la cual transmite calor.

La radiación emitida tiene en general una distribución continua de longitudes de onda (o frecuencias), y se emite por lo general en varias direcciones espaciales.

La magnitud básica del cálculo de transferencia de calor por radiación es la **intensidad de radiación**, que definiremos a continuación. El otro concepto básico es el de **cuerpo negro**; el cual se define como un cuerpo ideal que absorbe toda radiación que incide sobre él. Si bien este es un concepto idealizado, es posible obtener aproximaciones razonables del mismo, lo que permitió el trabajo experimental en la materia. Esta experimentación y los desarrollos teóricos (Planck, Boltzman, Wein) permiten conocer completamente el comportamiento radiativo de estos sistemas. Y por otra parte, la transferencia por radiación que afecta a todas las sustancias reales puede calcularse considerando conceptos de cuerpo negro, ajustándolo las magnitudes con los parámetros llamados **absortividad** y **emitancia**. El conocimiento de estos parámetros, de la temperatura de un cuerpo y de la radiación incidente en el mismo, permite el cálculo de la transferencia por radiación.

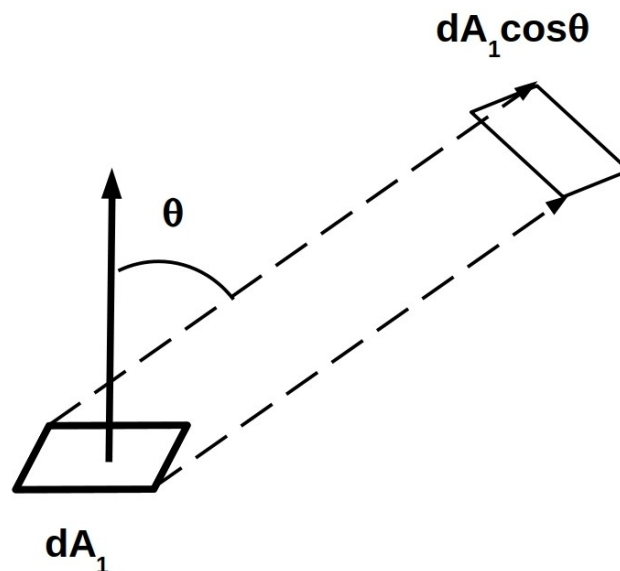
Intensidad de Radiación

Supongamos que la cantidad de calor por unidad de tiempo (potencia) emitida por un diferencial de área dA_1 de la superficie de cierto cuerpo o sustancia, dirigida hacia cierto haz de rayos que comprenden cierto ángulo sólido infinitesimal (haz cónico de semirrectas), de apertura $d\omega$.



Supondremos que nos hallamos a una distancia de dA_1 suficientemente grande como para que a los efectos de considerar el ángulo sólido, dA_1 puede considerarse como el punto vértice del mismo.

Supondremos además que consideraremos la radiación comprendida en un intervalo estrecho de longitudes de onda, comprendidas entre λ y $\lambda+d\lambda$. La cantidad de potencia será proporcional a la apertura del ángulo sólido, al ancho del intervalo de longitudes de onda considerado, $d\lambda$, y a la proyección del área dA_1 respecto al plano perpendicular a la dirección del ángulo sólido (es decir, proporcional a $dA_1 \cos\theta$).

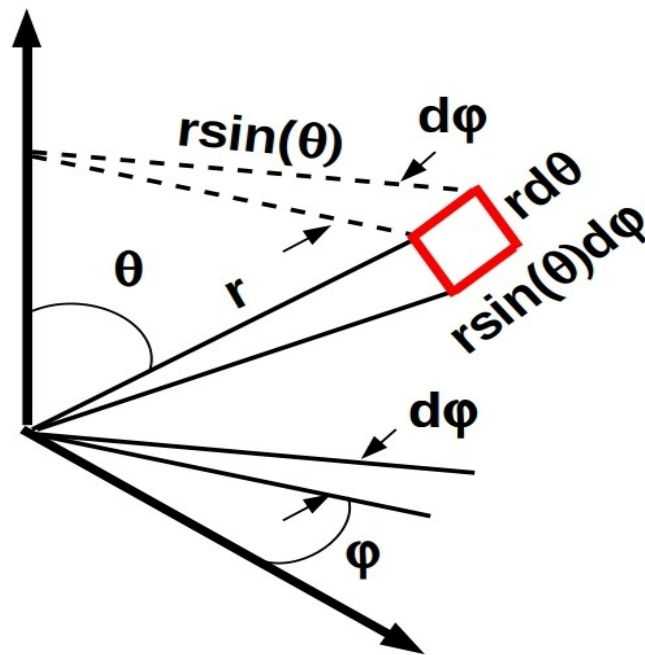


Definimos intensidad de radiación a la potencia por unidad de amplitud del ángulo sólido, por unidad de ancho de banda y por unidad de área emisora proyectada según el plano normal al ángulo sólido (cuya dirección la consideramos única por tratarse de un ángulo infinitesimal).

$$I \equiv \frac{dq}{dA_1 \cos \theta d\omega d\lambda} \quad (1.1)$$

Esta magnitud será en general función de la longitud de onda en torno a la cual consideramos el intervalo $d\lambda$, $I=I(\lambda)$. En nuestras aplicaciones, la intensidad de radiación será en general independiente de la dirección. Este será el caso de radiadores difusos. De manera más genérica, I también puede ser función de la dirección, la cual puede expresarse a través de dos ángulos θ y φ de un sistema de coordenadas esféricas según la figura. El origen de las coordenadas se encuentra en el diferencial de área emisor dA_1 , que consideramos puntual para puntos alejados del mismo. Además,

se puede notar que tomando variaciones de los ángulos θ y φ iguales a $d\theta$ y $d\varphi$ respectivamente, a una distancia r de dA_1 , el ángulo sólido de las direcciones comprendidas entre θ y $\theta+d\theta$, y entre φ y $\varphi+d\varphi$ es $d\Omega = r \sin \theta \cdot d\varphi \cdot r d\theta / r^2 = \sin \theta d\theta d\varphi$



La intensidad de radiación será utilizada para calcular la potencia emitida por una sustancia, llamada **emisión**, la recibida por la misma debido a la radiación emitida por otros objetos, llamada **irradiación**, y la energía saliente total, llamada **radiosidad**, que es tanto la emitida por el propio objeto como la fracción de la irradiación (recibida) que la sustancia llega a reflejar.

Dada una superficie con una intensidad de radiación emitida $I(\lambda)$, la emisión en el intervalo $\lambda, \lambda+d\lambda$ (potencia por unidad de área de la superficie emisora, y por unidad de longitud de onda) *en todas las direcciones* será

$$E_{\lambda}(\lambda) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(\lambda) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.2)$$

mientras que la emisión total será

$$E = \int_0^{\infty} E_{\lambda}(\lambda) d\lambda \quad (1.3)$$

Este término tenderá a enfriar la sustancia, y calentará aquellas sustancias que absorban algo de esta emisión.

Para la emisión y para la radiosidad se definen intensidades de radiación y fórmulas análogas (ver por ejemplo Incropera y DeWitt).

Radiación de cuerpo negro.

Se define superficie de un cuerpo negro como una superficie que absorbe la totalidad de la radiación que le incide. Se demuestra que a una temperatura dada, cualquier superficie emite una intensidad de radiación inferior o igual a la del cuerpo negro. Planck estableció la intensidad de emisión del cuerpo negro como función de la longitud de onda,

$$I(\lambda) = \frac{2 \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{h \cdot c}{k \cdot \lambda \cdot T}} \right)} \quad (1.4)$$

donde h y k son constantes, $h=6.6256 \times 10^{-34}$ J.s, constante de Planck, y $K=1.3805 \times 10^{-23}$. C es la velocidad de la luz en el vacío. Como podemos apreciar la distribución de intensidades en función de la longitud de onda depende de la temperatura absoluta de la superficie. Esta ley permite la

deducción de otras dos leyes asociadas: la ley de Wien, que da la longitud de onda a la cual la intensidad de radiación es máxima, y la ley de Stefan-Boltzman, que da la potencia emitida total por unidad de área hacia un hemisferio de un cuerpo negro. Estas leyes resultan respectivamente,

$$\lambda_{max} \cdot T = 2897.8 \mu \cdot K \quad (1.5)$$

$$E_b = \sigma \cdot T^4 \quad (1.6)$$

donde la constante $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ (constante de Stefan Boltzman). De esta ley se deduce

que $\int_0^{\infty} I_{\lambda}(\lambda) d\lambda = \frac{\sigma \cdot T^4}{\pi}$ (¿porqué?)

Emisividad y absorptividad superficial. Ley de Kirchoff.

La emisión de radiación contribuye al enfriamiento de un cuerpo. Por otra parte una fracción de la radiación incidente es absorbida por el cuerpo; esta fracción absorbida contribuye a su calentamiento. De la radiación incidente, una parte se refleja, y si el cuerpo no es opaco, otra parte se transmite a través del cuerpo. Definiremos emisividad como la fracción de la intensidad de radiación emitida por una superficie genérica respecto a la de un cuerpo negro. En general podría depender de la dirección (emisores no isótropos), sin embargo son bastante frecuentes los casos en que no (emisores isótropos). En general,

$$\varepsilon(\lambda, T, \theta, \phi) \equiv \frac{I(\lambda, T, \theta, \phi)}{I_b(\lambda, T)} \quad (1.7)$$

en el caso de un emisor isotrópico, su intensidad de radiación I y la emisividad ε no dependen de θ ni de ϕ . I_b es la intensidad de radiación dada por la fórmula de Plank.

Como vemos ε vincula la emisión con la de un cuerpo negro a la misma temperatura. La integración de $\varepsilon \cdot I_b$ en todas las longitudes de onda (entre 0 y ∞) y en todas las direcciones de un hemisferio da la radiación emitida total.

Dada una intensidad de radiación $I(\lambda, \phi, \theta)$ incidente en la superficie un cuerpo, la absorptividad es la fracción de la misma absorbida por el cuerpo. Esta radiación contribuye a calentar el cuerpo y ya no

será recibida por otra superficie. (El cuerpo en sí mismo radiará una intensidad igual a la de un cuerpo negro multiplicada por la emisividad.) La fracción de la intensidad de radiación incidente absorbida dividido la radiación absorbida es la es emisividad,

$$\alpha(\lambda, T, \theta, \phi) \equiv \frac{I_{\text{absorbida}}}{I_{\text{incidente}}(\lambda, \theta, \phi)} \quad (1.8)$$

Por lo común, en radiación atmosférica aproximaremos α y ε como dependientes únicamente de la longitud de onda, $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$, $\alpha = \alpha(\lambda)$

Definimos además la transmisividad como la fracción de intensidad de radiación incidente que atraviesa un cuerpo (por ejemplo una capa de aire elegida por nosotros) sin ser absorbida ni reflejada, pudiendo incidir sobre otro cuerpo,

$$\tau(\lambda, T, \theta, \phi) \equiv \frac{I_{\text{transmitida}}(\lambda, \theta, \phi)}{I_{\text{incidente}}(\lambda, \theta, \phi)} \quad (1.9)$$

La radiación transmitida tendrá las mismas características de longitud de onda y dirección que la incidente. La reflectividad ρ es la fracción de la intensidad de radiación que es reflejada. Esta reflexión puede ser de dirección bien definida, puede ser difusa, o una combinación de ambas. Ni la fracción transmitida ni la reflejada es absorbida por el cuerpo en cuestión. Por conservación de la energía, tenemos

$$\alpha + \tau + \rho = 1. \quad (1.10)$$

Como vemos la emisividad y la absorptividad son conceptos diferentes, la emisividad permite calcular la emisión de un cuerpo, la cual depende de las condiciones del propio cuerpo, mientras que la absorptividad calcula como reacciona el cuerpo frente a radiación recibida, la cual es producida en condiciones por lo general independientes del cuerpo en si. Sin embargo la emisividad y la absorptividad dependen ambas del cuerpo en cuestión, y en el caso isótropo, de la longitud de onda. La **Ley de Kirchhoff** establece que en situaciones de equilibrio (o cuasi equilibrio térmico) ambas son iguales,

$$\varepsilon(\lambda) = \alpha(\lambda) \quad (1.11)$$

Esta ley contribuye de manera importante a la simplificación de los cálculos radiativos.

Ley de Lambert.

La ley de Lambert (también llamada de Beer o de Bouger) permite calcular la transmisividad de una capa de atmósfera genérica. La misma permite calcular la absorptividad (y por ende la emisividad) si la reflectividad es nula, o si la reflectividad es conocida.

Consideremos una intensidad de radiación $I(\lambda)$, con una dirección dada por ángulos (ϕ, θ) (θ ángulo respecto a la vertical del lugar), que atraviesa una capa de atmósfera de espesor diferencial dz (según la vertical). El “espesor” de la capa en la dirección del rayo de radiación será

$ds = dz / \cos(\theta)$. La intensidad de radiación transmitida a través de la capa tiene una variación $dI(\lambda)$, la cual será:

$$dI(\lambda) = I(\lambda) \cdot (-k_a(\lambda) \cdot \rho \cdot ds) \quad (1.12)$$

$k_a(\lambda)$ es el coeficiente de absorción, ρ , la densidad del aire. $k_a(\lambda) \cdot \rho \cdot ds$ Se denomina **espesor óptico** de la capa en la dirección del rayo incidente, y es la absorptividad de la capa de atmósfera considerada. Esta absorptividad corresponde a la longitud de onda y a la dirección del rayo incidente que consideramos (nótese que como la longitud efectiva recorrida por el rayo depende de la dirección del mismo, esta absorptividad no es isotrópa). Integrando entre s_1 y s_2 (longitudes a través de la dirección del rayo de radiación), tendremos

$$I(s_2) = I(s_1) \cdot e^{-\int_{s_2}^{s_1} k_a(\lambda) \cdot \rho \cdot ds} \quad (1.13)$$

Esta relación se conoce como ley de Lambert, Beer o Bourger. La transmisividad (para este rayo de onda) será consecuentemente

$$\tau(\lambda) = e^{-\int_{s_2}^{s_1} k_a(\lambda) \cdot \rho \cdot ds} \quad (1.4)$$

Como veremos, k_a depende de manera fundamental de la composición de la atmósfera, lo que muestra el gran impacto de la misma sobre el funcionamiento del clima.

NO ES RAZONABLE CONTINUAR EL ESTUDIO A PARTIR DE ESTE PUNTO SI NO SE COMPRENDIÓ LA DEFINICIÓN DE IRRADIANCIA Y EL ROL DEL ÁREA NORMAL EN LA MISMA, EL ÁNGULO SÓLIDO DIFERENCIAL QUE VE UN DIFERENCIAL DE ÁREA, Y EN PARTICULAR EL DIFERENCIAL DE ÁNGULO SÓLIDO EN COORDENADAS ESFÉRICAS.

ECUACIÓN DE SCHWARZSCHILD

Muchos de los conceptos discutidos en esta sección son válidos para la radiación en general, pero aquí los aplicamos específicamente a la radiación terrestre.

Supongamos una intensidad de radiación I_λ ; o bien direccionada según la dirección de los rayos solares si se trata de radiación solar directa, o bien según una de las infinitas direcciones de la radiación difusa, sea esta originada por la emisión atmosférica o terrestre o por el scattering de la radiación solar.

Al atravesar una capa de espesor ds medido según la dirección del rayo, tendrá una variación dI_λ , dada por:

$$dI_\lambda = -I_\lambda \cdot k_\lambda \cdot \rho \cdot ds + B_\lambda(T) \cdot k_\lambda \cdot \rho \cdot ds \quad (2.1)$$

El primer sumando es la absorción, por eso es negativo, menoscaba la intensidad que emerge de la capa. El segundo sumando es la emisión de la capa, afectamos la emisión del cuerpo negro por la absorptividad. Note que la absorptividad y la emisividad son $k_\lambda \cdot \rho \cdot ds$, iguales por la ley de Kirchhoff. En caso de que hubiera además scattering, introduciríamos un sumando adicional igual al primero, pero con un coeficiente de scattering k'_λ en lugar del coeficiente de absorptividad (solo a los efectos de dicho sumando adicional).

Ahora consideraremos una atmósfera homogénea en la dirección horizontal, pero no en la vertical. Esto puede consistir en la columna vertical genérica de un modelo de atmósfera. Si la intensidad I_λ correspondiera a un rayo **ascendente**, podemos escribir la misma fórmula en función de la coordenada dz . Si $I_{\lambda 0}$ es la intensidad a una altura z_0 ; que intensidad se tiene, en la misma dirección, a la altura z_1 ? Lo determinamos integrando la ecuación de arriba entre z_0 y z_1 . Conviene definir la magnitud

$$\tau_\lambda(z, z_1) \equiv e^{-\int_z^{z_1} k_\lambda \rho dz} \quad (2.2)$$

(la transmisividad de la capa atmósfera comprendida entre una altura z intermedia y z_1).

La contribución a dI_λ de la emisión de un elemento de capa entre z y $z+dz$ será

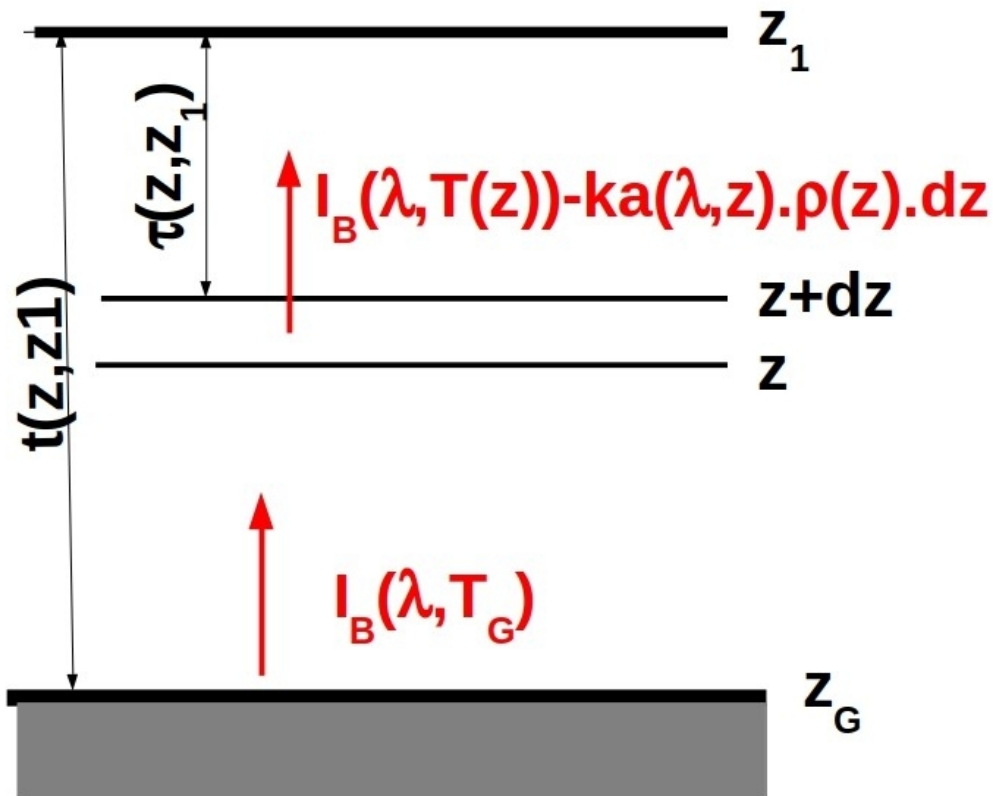
$$B_\lambda(T) \cdot k_\lambda \cdot \rho \cdot dz \cdot \tau_\lambda(z, z_1) \quad (2.3)$$

lo que es la emisión de la capa multiplicada por la transmisividad del espesor entre z y z_1 . I_1 resulta

$$I_1 = I_0 \tau(z_0, z_1) + \int_{z_0}^{z_1} B_\lambda(z) \tau_\lambda(z, z_1) k_\lambda \rho dz \quad (2.4)$$

Se suele realizar un cambio de variable considerando $\tau_\lambda(z, z_1) dz = d\tau_\lambda(z, z_1)$ (derívese respecto a z la definición de $\tau_\lambda(z, z_1)$ para comprender esta igualdad diferencial). El segundo sumando a la derecha de la ecuación para I_1 resulta

$$\int_{z_0}^{z_1} B_\lambda(z) \tau_\lambda(z, z_1) k_\lambda \rho dz = \int_{\tau(z_0, z_1)}^1 B_\lambda(z) d\tau_\lambda(z, z_1) \quad (2.5)$$



En el caso de un rayo ascendente que tiene una inclinación q respecto a la vertical del lugar, el espesor óptico para hallar la emisividad de la capa entre z y $z+dz$, así como los espesores ópticos para hallar las transmisividades entre z_G y z_1 y entre los niveles genéricos z y z_1 , deben calcularse dividiendo dz por $\cos q$, es decir,

la contribución a dI_λ de la emisión de un elemento de capa entre z y $z+dz$ será

$$B_\lambda(T) \cdot k_\lambda \cdot \rho \cdot \frac{dz}{\cos \theta} \cdot \tau_\lambda(z, z_1, \theta) ,$$

con $\tau_\lambda(z, z_1, \theta) \equiv e^{-\int_z^{z_1} k_\lambda \rho \frac{dz}{\cos \theta}}$, y la intensidad total en el nivel z_1 será

$$I(\lambda, z_1, \theta) = B_\lambda(T_G) \tau(z_0, z_1, \theta) + \int_{z_0}^{z_1} B_\lambda(z) \tau_\lambda(z, z_1, \theta) k_\lambda \rho \frac{dz}{\cos \theta}$$

Multiplicando $I(\lambda, z_1, \theta)$ por $\cos \theta$ y por el ángulo sólido diferencial alrededor de una dirección genérica (ϕ, θ) , integrando en todo el hemisferio se obtendrá el flujo radiativo ascendente en la superficie z_1 .

$$F(\lambda, z_1) \uparrow = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(\lambda, z_1, \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

Se encuentra que tomando un rayo ascendente medio elegido para un ángulo θ adecuado, se obtiene una aproximación razonable de la última integral. Mediante el uso de la fórmula de integración aproximada de Gauss, se concluye que un ángulo razonable a estos fines es $\cos \theta = 1/1.69$; y calculando τ_λ para $dz/\cos \theta = 1.69z$, se tiene un valor medio de $I(\lambda, \theta)$ apropiado. Designamos τ calculado de esta manera como τ^0 . La integración de $\cos \theta$ y del ángulo sólido en todo el hemisferio introduce un factor π . Se tendrá entonces

$$F(\lambda, z_1) \uparrow = \pi B(\lambda, T_G) \tau_\lambda^0(z_0, z_1) + \int_{\tau(z_0, z_1)}^1 \pi B_\lambda(z) d\tau_\lambda^0(z, z_1) \quad (2.6)$$

Generalmente consideramos la atmósfera dividida en capas. Las mismas emiten en su borde superior un flujo calculado mediante la fórmula de arriba, integrándola en todas las longitudes de onda. La capa inferior emite un flujo análogo, que se calcula de manera similar, pero considerando en nivel z_0 como el tope de la atmósfera, donde no se tiene radiación de onda larga. Entonces el flujo descendente será

$$F_{\lambda \downarrow}(z_1) = \int_{\tau(z_1, z_T)}^1 \pi B_\lambda(z) d\tau_\lambda^0(z_1, z_T) \quad (2.7),$$

donde z_T es el tope convencional de la atmósfera (un nivel suficientemente alto como para tener densidad de aire despreciable).

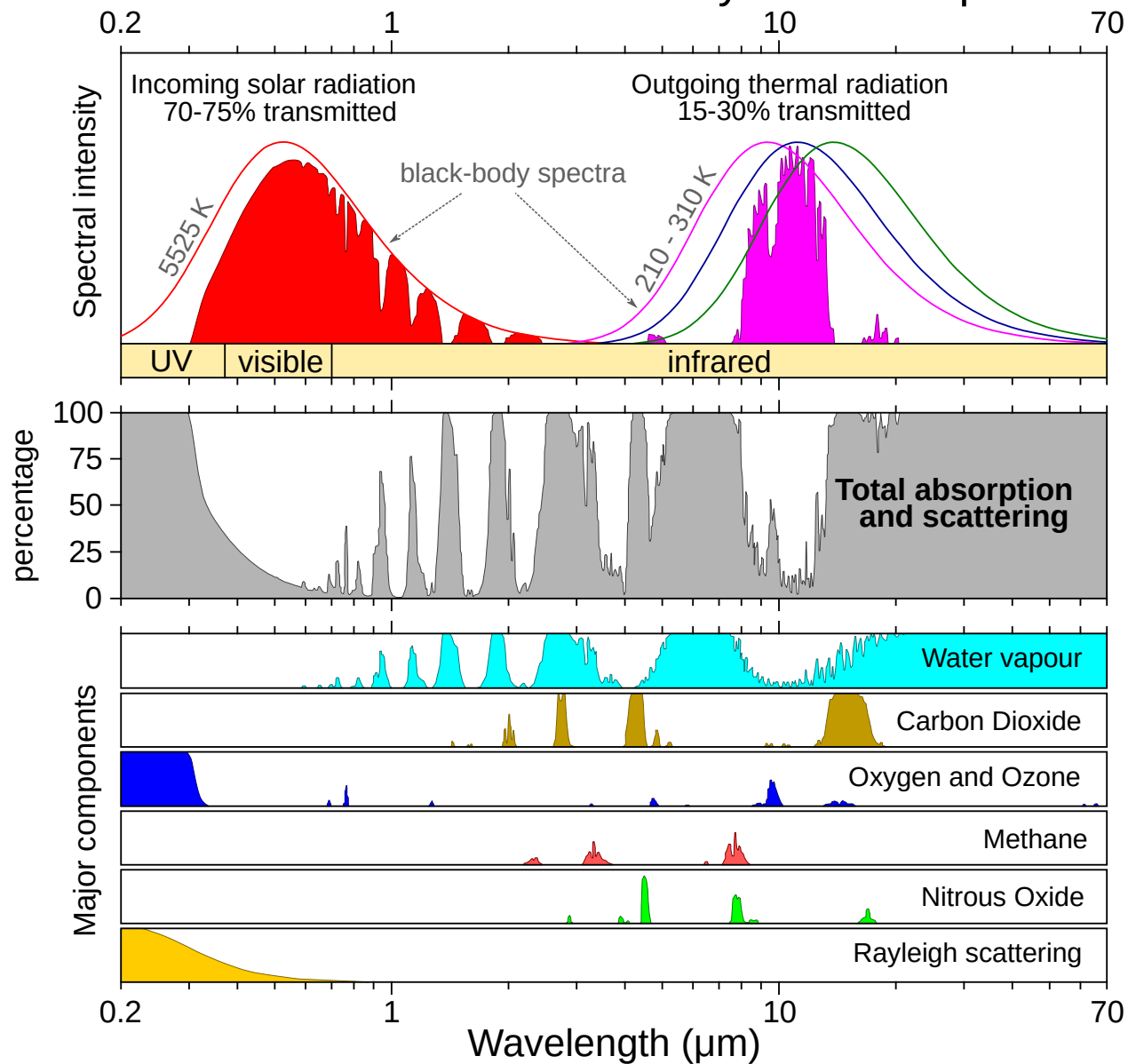
A su vez las ecuaciones (2.6) y (2.7) deben integrarse en todos los rangos de longitud de onda. En los modelos de computadora esto se realiza dividiendo el espectro de longitudes de onda en bandas en las cuales se presenta efectivamente la absorción y emisión de onda larga que intervienen en el cálculo de t . Si los anchos de estas bandas son $\Delta\lambda_i$, se tendrá

$$F_{\downarrow}(z_1) = \int_0^{\infty} F_{\lambda\downarrow}(z_1) d\lambda \approx \sum_i F_{\lambda i\downarrow}(z_1) \Delta\lambda_i \quad F_{\uparrow}(z_1) = \int_0^{\infty} F_{\lambda\uparrow}(z_1) d\lambda \approx \sum_i F_{\lambda i\uparrow}(z_1) \Delta\lambda_i \quad (2.8)$$

Se tiene mas detalles de este punto en Peixoto Oort. En la figura de mas abajo se muestran bandas de absorción.

El flujo de radiación de onda larga neto en cualquier nivel será la suma de los flujos dados por las ecuaciones 2.9.

Radiation Transmitted by the Atmosphere



NO ES RAZONABLE CONTINUAR EL ESTUDIO SI NO SE COMPRENDEN LAS DOS ÚLTIMAS ECUACIONES

RADIACIÓN DE ONDA CORTA

La radiación solar, o de onda corta, está sujeta al igual que la radiación de onda larga a la absorción por parte de la atmósfera. Presenta dos aspectos específicos: la radiación incidente del sol tiene una dirección bien definida, la de la recta que une la tierra y el sol. Debido a la gran distancia entre ambos astros respecto a la dimensión de los mismos estos pueden considerarse como puntuales a los efectos de definir dicha recta. Pero además, los rayos de onda de radiación solar están sujetos a dispersión parcial en todas las direcciones, fenómeno de scattering. Esto afecta a los rayos directamente provenientes del sol, así como a los rayos que a su vez también fueron el resultado del proceso de scattering.

Suponemos que el sol irradia como un cuerpo negro a una temperatura T_s , del orden de los 5800K. Definimos como densidad de flujo por las longitudes de onda comprendidas entre λ y $\lambda + d\lambda$, al flujo de potencia irradiada por unidad de área receptora, por unidad de amplitud del intervalo de longitud de onda $d\lambda$. Si los rayos solares inciden normalmente sobre el tope de la atmósfera, dicha densidad de flujo será, (ver ejercicio 3):

$$F_{directa\ tope}(\lambda) = I_B(\lambda, T_s) \cdot \pi \frac{r_{solar}^2}{d_{TS}^2}$$

Si los rayos solares forman un ángulo θ con la vertical del lugar, la densidad de flujo será:

$$F_{directa\ tope}(\lambda) = I_B(\lambda, T_s) \cdot \pi \frac{r_{solar}^2}{d_{TS}^2} \cdot \cos \theta$$

Integrando la densidad de flujo en todas las longitudes de onda, se obtiene el flujo total de irradiancia solar en el tope de la atmósfera,

$$F_{tope} \downarrow = S \left(\frac{d_{TSmedia}}{d_{TS}} \right)^2 \cos \theta \quad (3.1)$$

Siendo $S = 1360 \text{ Watts/m}^2$ la constante solar (la cual se calcula en el **ejercicio 3**), r la distancia de la tierra al sol, que tiene muy pequeñas variaciones respecto a la distancia media a lo largo del año (r_{media}), debido a que la órbita terrestre es una elipse con el sol en un foco y no exactamente una circunferencia. El ángulo θ se denomina **ángulo cenital**.

θ se calcula en función de tres ángulos: la **latitud** φ , el ángulo que forman los rayos solares con el plano del ecuador terrestre, δ , llamado **declinación solar**; cuando el sol pasa por el plano meridiano del lugar, y del ángulo de la proyección ortogonal de los rayos solares sobre el plano

ecuatorial con el plano meridiano, “**h**”. Este ángulo multiplicado por 15 da las horas que faltan para que el sol llegue al mediodía local, o las horas transcurridas desde el mediodía. La declinación solar es común a todo el mundo y depende de la fecha del año, es cero durante los equinoccios, 23.4° en el solsticio de verano del hemisferio norte, y -23.4° en el solsticio de verano del hemisferio sur.

En la figura siguiente se muestran estos ángulos. Al mediodía,

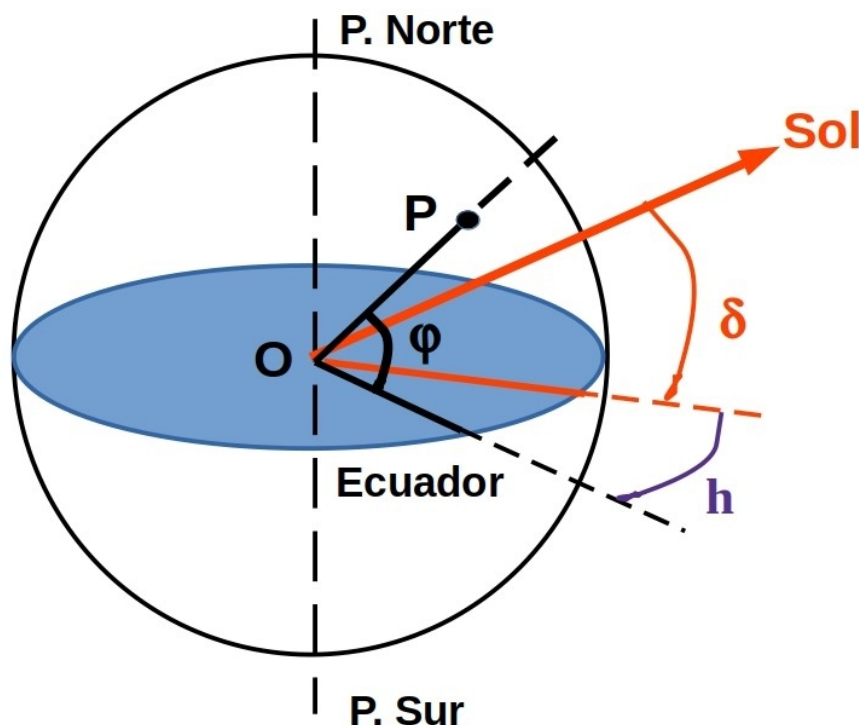
$$\theta = \varphi - \delta, \quad \cos \theta = \cos \varphi \cos \delta - \sin \varphi \sin \delta$$

Por definición de **h**, $h=0$ en este caso.

Para un caso general, no necesariamente al mediodía se tiene,

$$\cos \theta = \cos \varphi \cos \delta \cos h - \sin \varphi \sin \delta \quad (3.2)$$

(esto se demuestra en el **ejercicio 7**)



El flujo por unidad de longitud de onda

Scattering, caso general

Si un rayo de intensidad I_0 incide sobre una partícula P , la intensidad de radiación por unidad de ángulo sólido dispersada través de una semirrecta de origen en P , y que forma un ángulo θ con la

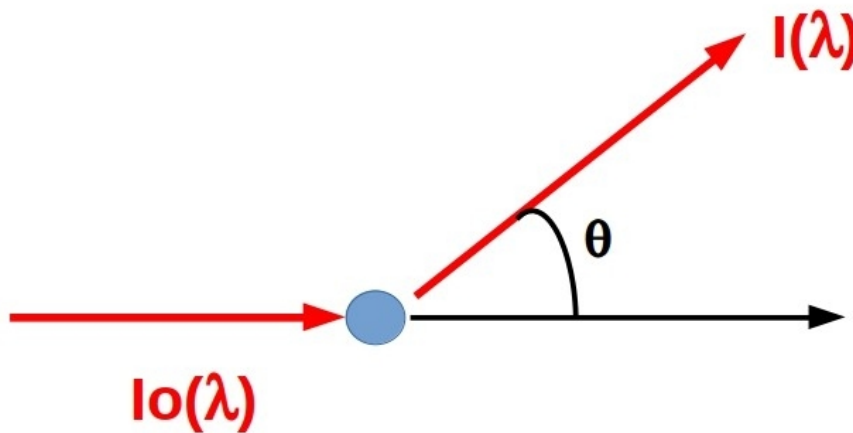
del rayo incidente, será:

$$I(\lambda) = I_0(\lambda) \cdot \frac{\sigma_s(\lambda)}{r^2} \cdot \frac{P(\phi)}{4\pi} \quad (3.3)$$

En la cual $\sigma_s(\lambda)$ es un coeficiente de scattering, propio del tipo de partícula en cuestión, y $P(\theta)$ es una función del ángulo θ . A esta función se le impone una restricción adicional de tipo integral:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{P(\phi)}{4\pi} \sin \phi d\phi = 1 \quad (3.4)$$

Note que exigir esto no nos hace perder generalidad en el razonamiento.

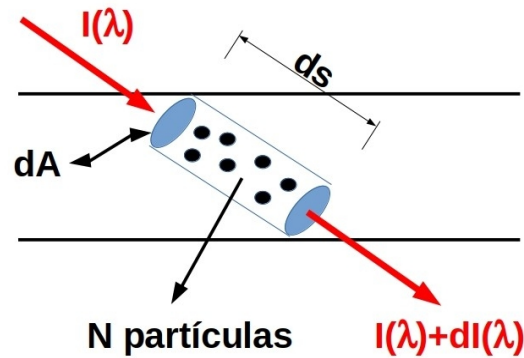


Supongamos ahora que un haz de rayos con la misma dirección e intensidad $I_0(\lambda)$ atraviesan una capa de aire, recorriendo una longitud ds . Tomemos un “bastón” de área transversal dA y longitud ds , recorrido longitudinalmente por los rayos. Al atravesar la capa, se produce un cambio en la intensidad de radiación debido a la absorción, igual a $dI(\lambda) = -I_0(\lambda) k_a(\lambda) \rho ds$

Ahora bien, los rayos interceptan en este “bastón” “N” partículas que producen dispersión de esta intensidad en otras direcciones. La potencia total dispersada que emite **una sola partícula** puede obtenerse integrando $I(\lambda) d\lambda dA$ en una esfera centrada en la propia partícula,

$$\Delta W_{individual} = \int_A I(\lambda) d\lambda dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_0(\lambda) \cdot \frac{\sigma_s(\lambda)}{r^2} \cdot \frac{P(\phi)}{4\pi} d\lambda r^2 \sin \theta d\phi d\theta = I_0(\lambda) \sigma_s(\lambda) d\lambda ;$$

$$\Delta W_{individual} = I_0(\lambda) \sigma_s(\lambda) d\lambda$$



La potencia ingresada al bastón por la tapa de entrada es $I_0(\lambda) dA d\lambda$, y la emergente, es $(I_0(\lambda) + dI_0(\lambda)) dA d\lambda$.

La variación de potencia, $dI_0(\lambda) dA d\lambda$ se deberá a la suma del efecto de la absorción mas el efecto de la dispersión de potencia de las N partículas. Este último será

$$-N \Delta W_{individual} = -N I_0(\lambda) \sigma_s(\lambda) d\lambda$$

notar que el signo de menos se debe a que se trata de potencia que ya no emergerá por la tapa de salida. Dividiendo entre dA y $d\lambda$, se tendrá el cambio de intensidad debido a la dispersión o scattering,,

$$dI(\lambda)_{scatter.} = -\frac{N I_0(\lambda) \sigma_s(\lambda)}{dA} = -I_0(\lambda) \sigma_s(\lambda) \frac{N}{Vol} ds$$

N/Vol es la densidad en términos de cantidad de partículas. Multiplicando y dividiendo por la masa de la partícula, se tiene

$$dI(\lambda)_{scattering} = -I_0(\lambda) \frac{\sigma(\lambda)}{m_{particula}} \frac{N \cdot m_{particula}}{Vol} \cdot ds = -I_0(\lambda) \frac{\sigma(\lambda)}{m_{particula}} \rho ds$$

Se tiene entonces un efecto análogo al de la absorción, que puede sumarse al mismo en la aplicación de la ley de Lambert. El coeficiente equivalente al de absorptividad será

$$k_s(\lambda) = -\frac{\sigma(\lambda)}{m_{particula}},$$

y el cambio total de intensidad de radiación por concepto de absorción y scattering será:

$$dI(\lambda) = -I_0(\lambda) k_a(\lambda) \rho ds - I_0(\lambda) k_s(\lambda) \rho ds = -I_0(\lambda) (k_a + k_s) \rho ds.$$

En caso de tener partículas de diferente clase, como es el caso, los coeficientes k_s y k_a serán los promedios de los respectivos coeficientes de cada clase de partículas, ponderados respecto a la densidad parcial de las respectivas clases de partículas.

Ecuación general de la radiación solar en la atmósfera.

La variación del rayo de la figura tiene, al atravesar la capa Δz , una variación ΔI_λ , dada por:

$$\Delta I_{diff}(\lambda, \varphi, \theta) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$S_1 = -(k_a(\lambda) + k_s(\lambda))\rho \cdot \frac{\Delta z}{\cos \theta} \cdot I_{diff}(\lambda, \varphi, \theta)$$

Este sumando representa el amortiguamiento de la intensidad difusa debida a la combinación entre la absortividad de la capa y el scattering.

$$S_2 = F_{solar\ tope}(\lambda) \downarrow \cdot e^{-\int_z^{z_r} (k_s + k_a)\rho dz / \cos \theta_0} \cdot k_s(\lambda)\rho \frac{\Delta z}{\cos \theta} \frac{P(\varphi, \theta; \varphi_0, \theta_0)}{4\pi}$$

Este sumando representa el refuerzo de la radiación difusa en la dirección que estudiamos, debido a la contribución del scattering de los rayos solares directos hacia la dirección (φ, θ) . El factor $k_s(\lambda)\rho \Delta z / \cos \theta$ es proporcional a la cantidad de partículas encontradas por los rayos solares en el recorrido del rayo (φ, θ) de interés, y el factor $P(\varphi, \theta; \varphi_0, \theta_0)/4\pi$ es el coeficiente de cambio de dirección; la expresión $(\varphi, \theta; \varphi_0, \theta_0)$ representa el ángulo entre la dirección de los rayos solares, (φ_0, θ_0) y la estudiada, (φ, θ) . $F_{solar\ tope}(\lambda) \downarrow$ es la densidad de flujo solar de la irradiancia solar directa en el tope de la atmósfera, la cual llega a la capa de altura z amortiguada

por un factor de transmisividad igual a $\exp\left(-\int_z^{z_r} (k_s + k_a)\rho dz / \cos \theta_0\right)$.

$$S_3 = k_s(\lambda)\rho \frac{\Delta z}{\cos \theta} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I(\lambda, \theta', \varphi') \frac{P(\varphi, \theta; \varphi', \theta')}{4\pi} \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

Este sumando representa la contribución a la radiación difusa en la dirección que estudiamos, debido a la contribución del scattering de la radiación difusa en otras direcciones (“scattering de scattering”).

$$S_4 = \beta_{a\lambda} B_{T(z)}(\lambda)$$

Este sumando es la emisividad de la propia capa en longitudes de onda λ .

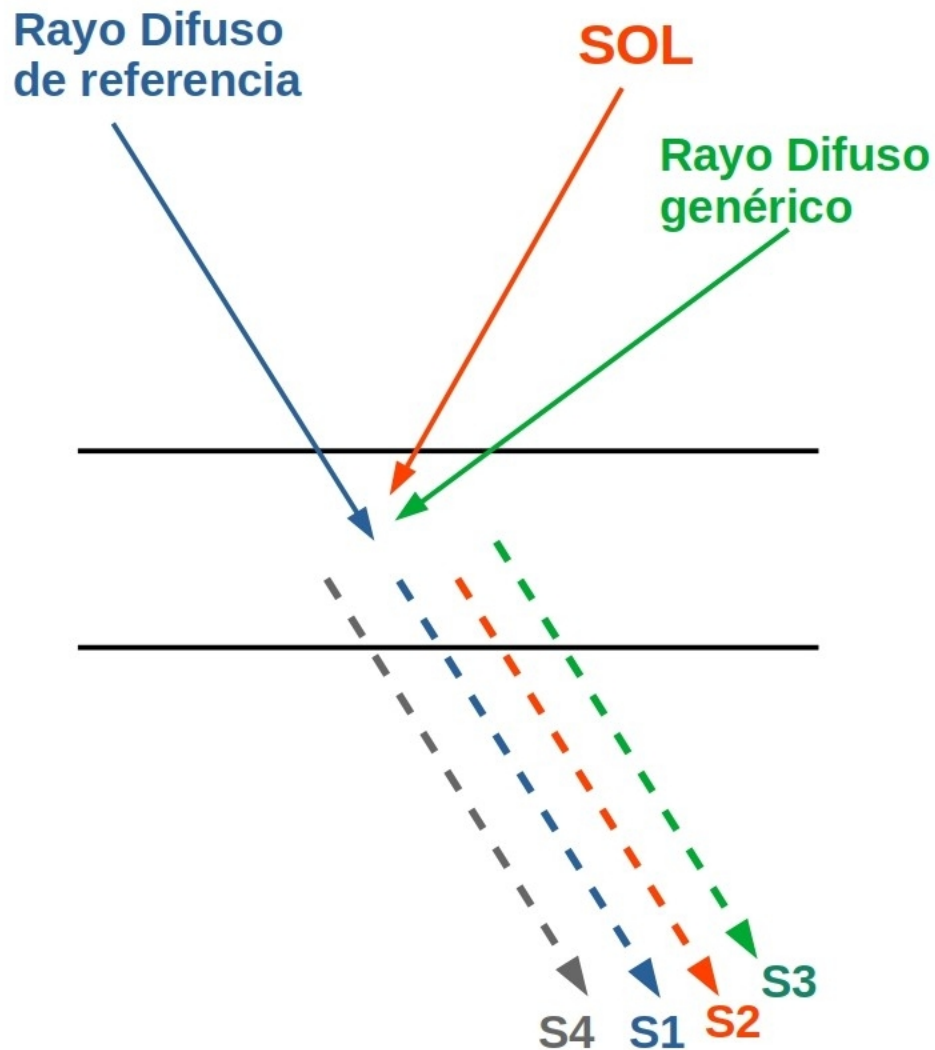


Figura: esquema de un rayo que atraviesa una capa de espesor vertical Δz .

Finalmente, en cualquier nivel de la atmósfera, definimos como antes un flujo ascendente y un flujo descendente de radiación difusa dados por

$$F_{dif\ total} \uparrow = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I(\varphi, \theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) d\theta \right] d\lambda$$

$$F_{dif\ total} \downarrow = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} I(\varphi, \theta) \cdot \cos(\pi - \theta) \cdot \sin(\pi - \theta) d\theta \right] d\lambda$$

Las **densidades de flujo** para una longitud de onda λ serán:

$$F_{dif} \uparrow = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I(\varphi, \theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) d\theta \quad (3.13a)$$

$$F_{dif} \downarrow = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} I(\varphi, \theta) \cdot \cos(\pi - \theta) \cdot \sin(\pi - \theta) d\theta \quad (3.13b)$$

Note que la definición de flujo descendente tiene un cálculo del coseno modificado de modo que los rayos descendentes, de ángulo con la vertical entre $\pi/2$ y π , den un flujo descendente positivo.

El cálculo por computadora de los flujos basados en la intensidad dada por la ecuación 3.11 (y particularmente la integral múltiple del tercer sumando de la misma), es perfectamente practicable en un instante y en un punto dado, y aun en toda una columna de la atmósfera (discretizada verticalmente) en un instante dado. Sin embargo notamos que, dado que debe hacerse par varias longitudes de onda (es decir, para una partición razonablemente fina del espectro de radiación solar), y a su vez, cada longitud de onda tiene contribuciones de todas las demás a través del segundo sumando, comprendemos que a los efectos de la simulación numérica de regiones de la atmósfera o de toda la atmósfera misma (con miles o decenas de miles de columnas verticales generadas por la discretización horizontal, y con la necesidad de realizar estos cálculos con frecuencias no inferiores a la horaria) se hace necesario introducir simplificaciones.

En primer lugar, el scattering producido por la radiación difusa proviene de direcciones tan variadas (debido a las múltiples etapas de scattering que se producen) que se pierde información respecto al ángulo φ , se tiene un scattering “independiente del ángulo azimutal”. En este caso, las densidades de flujo quedan:

$$F_{dif\lambda} \uparrow = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\pi/2} I(\theta) \cdot \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \quad F_{dif\lambda} \downarrow = 2 \cdot \pi \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} I(\theta) \cdot \cos(\pi - \theta) \cdot \sin(\pi - \theta) d\theta$$

Además de esto se aplican fórmulas de integración aproximada (integración numérica) a basadas en técnicas de interpolación, que permiten evaluar la integral del tercer sumando de la ecuación 3.12 o las integrales de 3.13b evaluando los integrandos en relativamente pocos puntos del intervalo de integración. Aplicando estas fórmulas se pueden considerar unas pocas direcciones de rayos (según θ y θ'), y se plantean funciones para interpolar los integrandos a partir del valor de los mismos en esos pocos puntos del dominio de θ' y de θ . Esto permite entonces calcular las integrales aproximadamente en función de esos pocos rayos “representativos”. La técnica de mayor eficiencia es la fórmula de integración aproximada de Gauss, que utiliza polinomios de Legendre como funciones interpoladoras. En cálculo de flujos de radiación de onda corta las técnicas mas usadas que se derivan de estos procedimientos son la aproximación de dos rayos y la aproximación de Eddington, discutidas en detalle en Liou (2002). En este curso nos basta con expresar el tipo de resultados que estas técnicas producen. Se llega, para las densidades de flujo de radiación difusa ascendente y para el flujo descendente, en cada columna de la atmósfera, a la siguientes relación:

$$\begin{aligned} \frac{dF_{dif\lambda} \uparrow}{dz} &= -\gamma_1 \cdot F_{dif\lambda} \uparrow + \gamma_2 \cdot F_{dif\lambda} \downarrow + \gamma_3 \cdot F_{solar\ tope} \cdot \tau(z, z_T, \theta_0) \\ \frac{dF_{dif\lambda} \downarrow}{dz} &= \gamma_1 \cdot F_{dif\lambda} \downarrow - \gamma_2 \cdot F_{dif\lambda} \uparrow - \gamma_4 \cdot F_{solar\ tope} \cdot \tau(z, z_T, \theta_0) \quad (3.14a,b) \\ \tau(z, z_T, \theta_0) &= e^{-\int_z^{z_T} (k_s + k_a) \rho dz / \cos \theta_0} \end{aligned}$$

Note que estas ecuaciones constituyen ecuaciones de primer grado ordinarias, con la nueva coordenada vertical como variable independiente. Si se tienen dos condiciones de frontera es posible la integración de $F_{dif\uparrow}$ y $F_{dif\downarrow}$. Las condiciones utilizadas son: radiación difusa descendente nula en el tope de la atmósfera ($F_{dif\downarrow} = 0$ en $z = z_{tope}$), y radiaciones $F_{dif\uparrow}$ y $F_{dif\downarrow}$ vinculadas en la superficie de la tierra a través de un albedo de radiación difusa que depende del tipo de superficie y que es un dato. La composición de la atmósfera, así como el impacto de la presencia y el tipo de nubes en el scattering, se manifiesta a través de los coeficientes de scattering y de absorción que a su vez contribuyen a determinar los coeficientes γ de las ecuaciones 3.14 (se discuten los detalles en Liou 2002).

Otro aspecto que se debe notar es que los coeficiente γ_1 y γ_2 participan en cada dirección con signos diferentes. El coeficiente γ_1 contribuye a degradar la intensidad de la radiación. Un decrecimiento del flujo ascendente en su propia dirección (hacia arriba) implica una derivada negativa respecto de

z , mientras que una degradación similar del flujo descendente en su propia dirección (hacia abajo) contribuye a que este sea mayor para mayores valores de z ; de allí su signo negativo.

El flujo de radiación solar es la suma del flujo difuso mas el directo. El flujo directo será el flujo solar descendente en el tope de la atmósfera (ecuación 3.1) afectado por la transmisividad de la radiación de onda corta calculada entre el tope de la atmósfera y el nivel genérico de interés. La transmisividad debe calcularse en términos del coeficiente de extinción, es decir, utilizando la suma del coeficiente de absorción mas el de scattering (como se utilizó en la ecuación 3.12). Este flujo se suma al flujo difuso descendente.

El flujo neto ascendente será

$$F = F \uparrow - F \downarrow \quad (3.14)$$

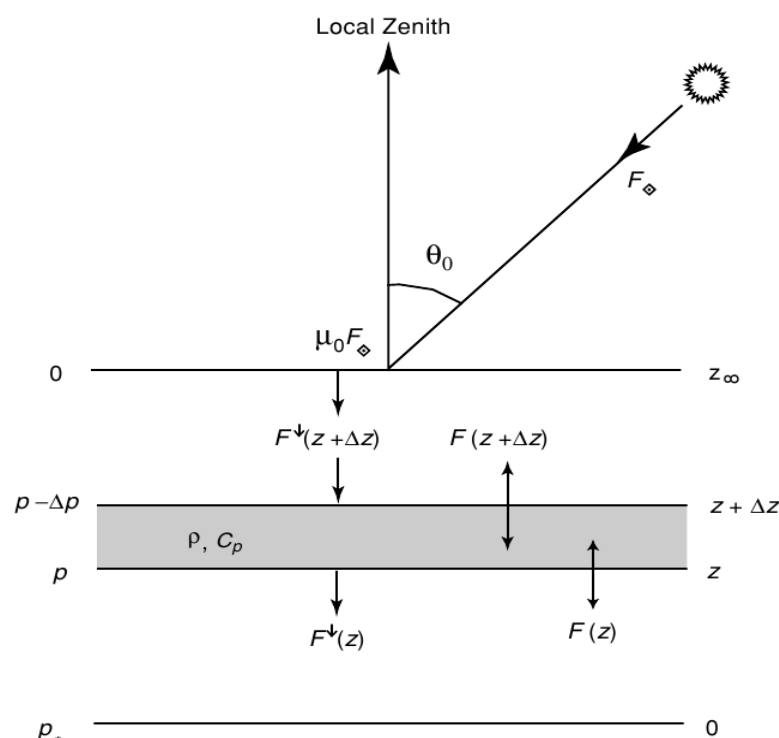
Para una capa de atmósfera que está entre z y $z+\Delta z$, su masa por unidad de área horizontal será $\rho\Delta z$, la capacidad calorífica total por unidad de área horizontal es $c_p\rho\Delta z$. El flujo neto descendente en z emerge de la capa y tiende a enfriarla, el flujo neto descendente en $z+\Delta z$ ingresa en la capa y tiende a calentarla. Se tiene entonces

$$\rho \cdot c_p \cdot \Delta z \frac{\partial T}{\partial t} = -F(z+\Delta z) + F(z)$$

de lo que se deduce que

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho \cdot c_p} \frac{\partial F}{\partial z} \quad (3.15)$$

Esta fórmula permite obtener la contribución del flujo de onda corta a la tendencia de temperatura de la atmósfera. La misma fórmula es aplicable al flujo de onda larga, utilizando los flujos correspondientes calculados con las metodologías descritas en el capítulo 2.



el preparado por
el Cazes Boezio.

Nota: para el Capítulo 4 Balance de Radiación Observado en la Atmósfera, seguimos las secciones 6.6 a la 6.8 de Peixoto Oort (1992).

Scattering de Raleigh.

Si una onda en el agua pasa por la posición de un flotador pequeño respecto a la longitud de onda incidente, el mismo oscilará y emitirá el mismo ondas. La energía de las mismas se derivará de la energía de la onda incidente y la disminuirá. El fenómeno de scattering se parece a esta situación. Una onda electromagnética incide en una partícula o en una molécula, induce vibraciones en la misma, la cual hace que esta emita ondas electromagnéticas con la misma frecuencia (y longitud de onda) de la onda incidente. Estas ondas emitidas por la partícula contienen energía que proviene de la energía de la onda incidente.

La teoría de scattering de Raleigh se basa en que, en moléculas o partículas mucho menores que la longitud de onda, la radiación solar, que es una oscilación del campo eléctrico que se propaga, induce un dipolo eléctrico en la molécula o la partícula. Si E_0 es la amplitud del campo eléctrico de la oscilación incidente, la amplitud del dipolo será tal que:

$$p_0 = \alpha \cdot E_0 \quad (3.3)$$

Si el vector E de la onda electromagnética está contenida en un plano la radiación se denomina **polarizada**. En este caso el dipolo eléctrico se encuentra en el plano de polarización. Si la onda no está polarizada, puede considerarse como la superposición de dos ondas polarizadas en planos ortogonales, que se intersectan en el rayo de propagación de la onda. Se formarán dipolos respectivos que emitirán sus propias ondas.

En una semirrecta que parte de la partícula y forma un ángulo γ con el dipolo, el campo eléctrico generado por el mismo será

$$E = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \sin \gamma \quad (3.4)$$

El flujo de potencia asociado a este campo eléctrico será proporcional al cuadrado de E (ver vector de Pointing en Halliday y Resnic),

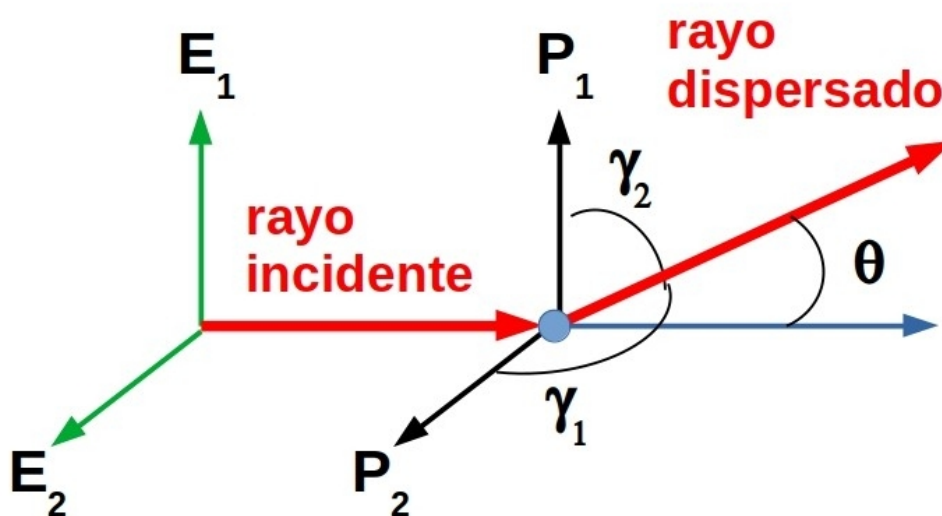
$$F \propto \left[\frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right]^2 \sin^2 \gamma$$

Por otra parte si la oscilación del campo eléctrico de la onda incidente será de la forma $E = E_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$, con $\omega/k = c$. Entonces se tiene, considerando que la derivada segunda de p respecto al tiempo. será proporcional a ω^2 , y a su vez la intensidad es proporcional al cuadrado de esta, que

$$F \propto \frac{1}{c^4} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \omega^4 \sin^2 \gamma = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\lambda^4} \sin^2 \gamma$$

En caso de tener una onda no polarizada, la intensidad será la suma de las intensidades de las componentes polarizadas, ambas proporcionales a los respectivos campos eléctricos. En el caso de la radiación directa del sol, las amplitudes obtenidas de descomponer la radiación respecto a dos planos normales son iguales, no hay un plano de polarización preferente, si γ_1 y γ_2 son los ángulos de una semirrecta que parte de una partícula generadora de scattering con los respectivos dipolos (ver figura), se tendrá que la intensidad de radiación a través de la semirrecta en cuestión es

$$F \propto \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\lambda^4} \sin^2 \gamma_1 + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\lambda^4} \sin^2 \gamma_2 \quad (3.5)$$



En una semirrecta paralela a los dipolos p_1 o p_2 , la luz resultará polarizada. Se puede ver que esto es así para cualquier semirrecta perpendicular al rayo de propagación del haz incidente (**ejercicio 9**).

Si ϕ es el ángulo de la semirrecta con la dirección del rayo original incidente, podemos notar que γ_1 , γ_2 y ϕ son los tres ángulos de una dirección dada con tres ejes ortogonales, por lo cual se

cumple que $\cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \phi = 1$. Esto permite probar que $\sin^2 \gamma_1 + \sin^2 \gamma_2 = 1 + \cos^2 \gamma_\phi$, y entonces

$$F \propto \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\lambda^4} (1 + \cos^2 \phi) \quad (3.6)$$

Esta es la ley de scattering de Raleigh. Si integramos este flujo en el área de una esfera de radio r centrado en la partícula obtendremos la potencia total que la misma dispersa,

$$W \propto \frac{1}{\lambda^4} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 + \cos^2 \phi) \sin \phi \, d\phi \, d\varphi \quad (3.7)$$

Por ejemplo, en el caso del scattering de Raleigh, se tiene según se vio $I_\lambda = \frac{I_{0\lambda}}{r^2} \frac{cte}{\lambda^4} (1 + \cos^2 \phi)$.

Definiendo $P(\theta) \equiv \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \phi)$, se cumple la condición integral de arriba (**¿porqué?**).

Redefiniendo la constante multiplicativa “cte” como $cte' \equiv cte \cdot \frac{4}{3} \cdot 4\pi$ se tiene una relación

equivalente a la vista antes, y que cumple con 1.1 y 1.2, $I_\lambda = \frac{I_{0\lambda}}{r^2} \frac{cte'}{\lambda^4} \frac{P(\phi)}{4\pi}$, y además el

coeficiente de scattering será $\sigma_{s\lambda} = \frac{cte'}{\lambda^4}$

REFERENCIAS

- Incropera F., D. P. DeWitt (1996): Fundamentos de Transferencia de Calor, *Prentice Hall*, 888 pp.
- Liou K. N. (2002): An Introduction to Atmospheric Radiation, *Academic Press*, 583 pp.
- Pieixoto J. P., A. N. Oort (1992): Physics of Climate, *American Institute of Physics*, 520 pp.

EJERCICIOS

Ejercicio 1): ejercicio 12.1 de Incropera De Witt.

Ejercicio 2), planeta idealizado (aplanado) sin y con atmósfera (igualmente idealizada).

Una placa plana, en el espacio exterior, recibe una radiación de 350 Watts/m^2 de dirección perpendicular a la placa, en longitudes de onda inferiores a $3 \mu\text{m}$. por una de sus caras. La otra cara esta perfectamente aislada. La placa tiene una absorptividad de 0.7 para las radiaciones en dicho rango de longitudes de onda.

a) La placa sólo puede enfriarse a través de su radiación por la cara no aislada. En las longitudes de onda que emite, su emisividad es 1 (se comporta como cuerpo negro). Cual es su temperatura de equilibrio?

b) Ahora la placa está cubierta por un vidrio transparente a la radiación de onda corta incidente, y con una absorptividad y una emisividad de 0.8 respecto a la radiación recibida de la placa y a la radiación emitida por ella misma.

¿Cuales son las temperaturas de equilibrio de ambas superficies?

¿Cual es la radiación emitida por el conjunto placa y vidrio?

Sugerencia: recordar que la placa emite en un solo hemisferio, pero el vidrio, con dos superficies exteriores, lo hace en dos; ambas lo enfrían. La radiación de la cara interna es vista por la placa.

Ejercicio 3), constante solar.

Se tiene un área A_1 de 1 m^2 . A una distancia “d” de dicha placa, se tiene una esfera de diámetro “a”, que se encuentra a una temperatura de 5800K y emite como un cuerpo negro. d es tan grande respecto a las dimensiones de A_1 y del propio radio a de la esfera, que todas las rectas que unen un punto cualquiera de la esfera con un punto cualquiera del área A son razonablemente paralelas entre si, y perpendiculares a A_1 .

Datos: $d=1.5 \times 10^{11} \text{ m}$, $a=1.39 \times 10^9 \text{ m}$

a) ¿Cual es la intensidad de radiación integrada en todas las longitudes de onda, emitida por un punto generico de la esfera?

b) Dado un diferencial de área dA del hemisferio de la esfera expuesto a A_1 , que (diferencial) de flujo radiativo (Watts/m^2) llega a A_1 ?

c) ¿Cual es el flujo radiativo total que llega a A_1 , de todo el hemisferio de la esfera expuesto a A_1 ?

Ejercicio 4)

Una esfera recibe un flujo de 1360 Watts/m^2 en direcciones paralelas a una única dirección. Cual es el promedio respecto al área de la energía normal incidente en toda la esfera?

Ejercicio 5)

La base de cierta nube es circular, de 1km de radio, y se encuentra a 1000 metros del suelo. Supondremos que en el rango de longitudes de onda en las que emite la aproximamos por un cuerpo negro.

¿Que potencia radiativa recibe de esta nube 1 metro cuadrado de superficie del suelo, el cual se encuentra bajo el centro de la nube? Supondremos que esta superficie es puntual respecto a la nube.

Sugerencia: Utilizar coordenadas polares para la base de la nube.

Ejercicio 6) Ángulo cenital.

Considerar un sistema de coordenadas esféricas centrado en el centro de la tierra, y con plano acimutal en el plano del ecuador (como el visto en clase). Dado un lugar del globo, considerar su respectivo plano meridiano como el origen de los ángulos acimutales (φ).

- a) Escribir el versor de la dirección vertical del lugar en la base cartesiana asociada a este sistema esférico, en función de la latitud del lugar.
- b) escribir el versor de la dirección de los rayos solares, en función de la declinación solar y del ángulo horario.
- c) a partir de estos versores, deducir la fórmula del coseno del ángulo cenital (ángulo entre los rayos solares y la dirección del lugar) mostrada en clase.

Ejercicio 7)

Si tenemos una atmósfera isotérmica, a 250K, de coeficiente de absorptividad k_a constante, sobre un suelo que se comporta como cuerpo negro y se encuentra a 280K, escribir la ecuación de Schwarzschild de los flujos radiativos (originados en el planeta) ascendente y descendente en función de la cota z . Explicitar y simplificar las expresiones en función de las suposiciones en la medida de lo posible.

Ejercicio 8)

(!) Aparte de la condición isotérmica, cual es la suposición mas idealista del problema anterior? Justificar con palabras, comparar con situaciones reales.

Ejercicio 9) Polarización asociada al scattering de Raleigh.

Demostrar que si un rayo de radiación incide sobre una partícula, produciéndose scattering de Raleigh, en los rayos perpendiculares al de la radiación incidente la radiación resultante es polarizada.

SECCIÓN DOS.

TERMODINÁMICA DE AIRE HÚMEDO E INESTABILIDAD VERTICAL

TERMODINÁMICA DEL AIRE HUMEDO

Material preparado por Gabriel Cazes Boezio

Calor de Cambio de Fase

Si un Kg de agua líquida pasa a vapor, sea por ebullición (situación en la que la combinación de presión y temperatura permiten que ambas fases estén en equilibrio) o por simple secado (ingreso de moléculas de vapor de agua desde el agua líquida a aire no saturado), el agua líquida debe tomar una cantidad “L” de calor, que aunque varía ligeramente con la temperatura, en primera aproximación se puede evaluar en $2.56 \times 10^6 \text{ J/kg.}$;

$$Q_{\text{evap}} = L \cdot 1 \text{ kg}$$

La evaporación permite el enfriamiento del océano tropical, y la condensación de vapor de agua, el calentamiento de la tropósfera tropical media y alta

Definiciones.

Humedad específica, $q \equiv \frac{\rho_{\text{vapor}}}{\rho_{\text{aire seco}} + \rho_{\text{vapor}}}$,

Relación de mezcla, $w \equiv \frac{\rho_{\text{vapor}}}{\rho_{\text{aire seco}}}$

Principio de Densidades y presiones parciales. Presión de vapor.

Además, aire seco y aire húmedo cumplen con el principio de las presiones y densidades parciales de Dalton, la presión total del aire es $p = p_{\text{aire seco}} + p_{\text{vapor}}$, la densidad, $\rho = \rho_{\text{aire seco}} + \rho_{\text{vapor}}$. y cada componente se encuentra a la misma temperatura, cumpliendo respectivamente la ecuación de estado de gases ideales (válida en los rangos de presión y temperatura propios de la atmósfera):

$$p_{\text{aire seco}} = \rho_{\text{aire seco}} \cdot R_{\text{aire}} \cdot T \quad ; \quad R_{\text{aire}} = 287 \text{ J/Kg/K}$$

$$p_{\text{vapor}} = \rho_{\text{vapor}} \cdot R_{\text{vapor}} \cdot T \quad ; \quad R_{\text{vapor}} = 461 \text{ J/Kg/K}$$

Se pueden sumar ambas expresiones, y calcular la presión total del aire húmedo en función de la densidad y la temperatura virtual, que permite utilizar la constante de gas ideal del aire seco:

$$p = \rho \cdot R_{\text{aire}} \cdot T_v \quad ; \quad \text{con} \quad T_v \equiv (1 + 0.61q)T \quad (q \text{ es la humedad específica}).$$

El término $0.61qT$, aunque vale algunas unidades de kelvin, puede ser no despreciable al comparar temperaturas de parcelas de aire con temperaturas similares pero diferentes humedades., con el propósito de comparar a su vez densidades. Esta comparación es característico de los estudios de estabilidad vertical.

Superficie p-v-T del agua.

Los estados de equilibrio del vapor de agua tiene bien definidas hasta tres variables termodinámicas independientes, en especial, la presión, el volumen específico (o la densidad) y la temperatura absoluta. Damos una imagen de la superficie $p-v-T$ que contiene todos los estados de equilibrio.

En particular, existen regiones en los que coexisten en equilibrio los estados de vapor y líquido, o bien líquido y sólido, o sólido y vapor. En estas condiciones se da el cambio de fase del agua, con varios valores posibles del volumen específico, para una presión y temperatura dada.

La Fig. 2 muestra la proyección de la superficie $p-v-T$ en el plano de los ejes p y T , indicando las combinaciones de presión y temperatura que corresponden a los cambios de fase.

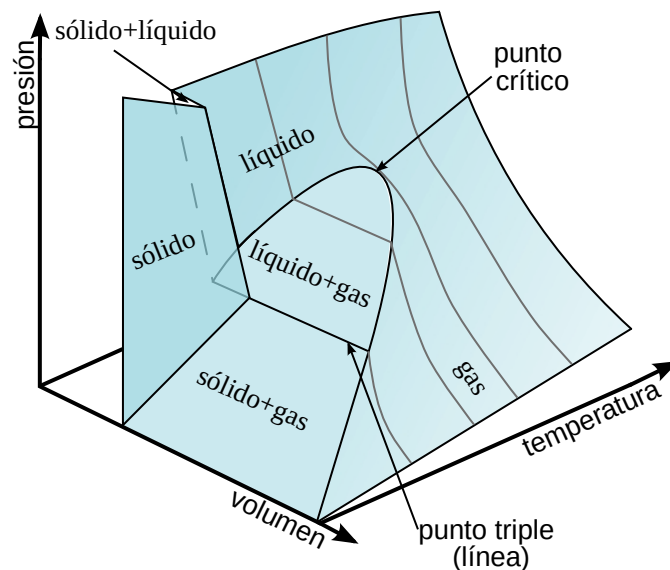


Figura 1) Superficie $p-v-T$ de estados de equilibrio del agua.

Diagrama de fases del agua

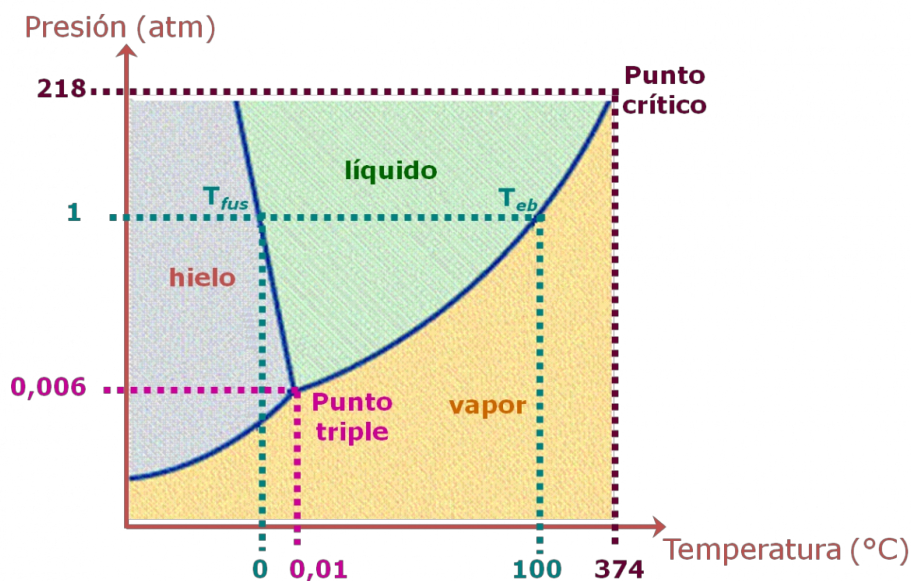


Figura 2: Diagrama de fases del agua en función de la presión y la temperatura

Aire saturado

Si a la temperatura de una mezcla de aire con vapor, la presión parcial de vapor del agua corresponde a una situación de equilibrio de vapor-agua líquida (ebullición a la combinación temperatura-presión parcial del vapor de agua), el aire está saturado, y no admite incrementos de humedad específica a esa temperatura. Si llamamos “e” a la presión parcial del vapor de agua, se tiene

$$e_{sat} = e_{sat}(T) \text{ , función conocida experimentalmente.}$$

Ejercicios.

Ejercicio 1:

probar que $w = \frac{R_{aire seco}}{R_{vapor}} \cdot \frac{e_{vapor}}{p_{aire seco}} = 0.622 \cdot \frac{e_{vapor}}{p - e_{vapor}}$ (p es la presión total de la mezcla).

Ejercicio 2:

probar sumando las ecuaciones de estado del aire y el vapor que:

$$p = \rho \cdot R_{aire seco} \left(1 + \frac{R_{vapor} - R_{aire seco}}{R_{aire seco}} \cdot \frac{\rho_{vapor}}{\rho_{aire seco}} \right) \cdot T \quad (p \text{ y } \rho \text{ presión y densidades totales.})$$

Mediante aproximaciones convenientes, deducir ecuación de estado en función de la temperatura virtual.

Ejercicio 3.

Demostrar que $q = \frac{w}{(1-w)}$, deducir que q_{sat} es función de T y p

Ejercicio 4.

¿Cuántos Watios por m² de enfriamiento tiene el océano en una región en la que la evaporación es 5mm/día?

INTRODUCCIÓN A LA ESTABILIDAD VERTICAL

La inestabilidad vertical debida a la flotación neta de una parcela de aire, se produce cuando al elevarse esta resulta menos densa que su entorno.

Inestabilidad local. Caso de aire seco

Suponiendo que una parcela se eleva de forma adiabática, y que no se mezcla con el ambiente a través del cual se eleva en el proceso. Además, adquiere la presión del medio al elevarse. En esta sub sección supondremos que la partícula tendrá una humedad específica inferior a la humedad de saturación que corresponda a las presiones y temperaturas que la parcela adquiera durante este proceso.

Combinando la ecuación del primer principio con la relación hidrostática, se tiene que la parcela conserva la magnitud $s \equiv c_p T + gz$.

En efecto, en caso de un proceso adiabático el primer principio permitiría plantear:

$$c_p \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho} \omega = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt},$$

o bien la relación diferencial $c_p dT = \frac{1}{\rho} dp$

considerando la relación hidrostática, $dp = -\rho g dz$, llegamos a

$$c_p dT + g dz = 0$$

Como se expresó en el ejercicio propuesto antes, esto es equivalente a expresar

$$d\theta = 0, \text{ con } \theta \equiv (p_0/p)^{R/c_p} T$$

Como la partícula no se mezcla con el ambiente y no satura, conserva la humedad específica de su origen. La temperatura y la humedad específica permiten calcular la temperatura virtual de la parcela.

Como la parcela se encuentra a la misma presión que el medio, si tiene una temperatura virtual superior a la del medio, se encontrará a menor densidad, y continuará elevándose. En caso contrario descenderá.

Si denotamos con barras superiores a los perfiles verticales de temperatura virtual, temperatura potencial virtual, y energía estática virtual, $\overline{T}_v(z)$, $\overline{\theta}_v(z)$, $\overline{s}_v(z)$, definiendo la temperatura potencial virtual y la energía estática virtual como

$$s_v \equiv c_p T_v + gz \text{ y } \theta_v \equiv (p_0/p)^{R/c_p} T_v$$

la condición de **inestabilidad vertical absoluta**, es decir, aún referida a desplazamientos infinitesimales, será

$$\frac{\partial s_v}{\partial z} < 0, \text{ o bien } \frac{\partial \theta_v}{\partial z} < 0$$

Por ejemplo, si $\bar{s}_v(z)$ decrece con la altura, la parcela que se eleva vendrá con un valor de s_v superior al del ambiente que la rodea. Como este está a la misma cota z , la parcela deberá tener mayor temperatura virtual que la del ambiente; y al tener también la misma presión, tendrá superior densidad y tenderá a seguir subiendo. En caso de que $\bar{s}_v(z)$ creciera con la altura, la parcela tendería a caer, y no continuaría subiendo.

Comentario respecto a la relevancia de la temperatura virtual en las discusiones de inestabilidad vertical.

El uso de la temperatura virtual, se debe a que para discutir diferencia de densidades en condiciones de igual presión, la ecuación de estado de un gas ideal permite discutir diferencia de temperaturas. En el caso del aire húmedo, es correcto mantener la constante de gas ideal del aire seco, pero sustituyendo la temperatura por la temperatura virtual.

Ahora bien: la diferencia entre la temperatura absoluta y la temperatura absoluta virtual, es $0.61 q T$. Si tenemos una temperatura absoluta del orden de 300K, y una humedad específica elevada, por ejemplo de 0.01, la contribución del sumando $0.61 q T$ será aproximadamente 1.8K, lo que en términos relativos, es pequeño respecto a los 300K de la temperatura. En algunos cálculos se podría aproximar T_v por T , especialmente si no calculamos diferencias o no realizamos comparaciones de parcelas con temperaturas T similares. Sin embargo, en las consideraciones de estabilidad vertical, precisamente comparamos temperaturas de parcelas que pueden tener diferentes de temperatura T pequeñas, por ejemplo, de algunos grados. Es decir, las diferencias de temperaturas podrían ser dos órdenes de magnitud inferiores a las propias temperaturas. En ese sentido, los gradientes verticales de humedad específica que pudiera haber en el ambiente podrían generar aportes relativamente significativos no en comparación con las temperaturas virtuales de cada parcela a comparar, pero si en comparación con la diferencia entre las temperaturas virtuales de las parcelas, que es lo que importa en esta discusión.

Por ejemplo, elevando 100 metros una parcela, su temperatura disminuirá un grado. Supongamos que la temperatura del ambiente disminuyó medio grado, La parcela estará medio grado mas caliente en términos de temperatura absoluta. Supongamos además que la humedad específica pasa de 0.01 a 0.009. La parcela tendrá el primer valor de humedad específica, y el ambiente el segundo. Las contribuciones de los sumandos $0.61 q T$ a las respectivas temperaturas virtuales diferirán en 0.18K, valor que tiene el mismo orden de magnitud, y no es despreciable, frente al valor de 0.5K de diferencia de temperaturas absolutas no virtuales.

Inestabilidad local. Caso ambiente saturado.

En caso de que el ambiente se encuentre saturada, si una parcela asciende sin mezcla con el aire exterior, y conservando el contenido total de agua, incluyendo vapor y líquido, conservará la energía estática húmeda,

$$h \equiv c_p T + gz + Lq$$

Ejercicio: demostrar la aseveración anterior. Se considerará como hipótesis simplificatoria, que el calor de cambio de fase es completamente absorbido por el aire, despreciando el calor absorbido por el vapor de agua y por el agua líquida presente en la parcela. Estas condición, que incluye un

grado de idealización, se denomina “cuasi adiabática saturada”.

En caso de subir un nivel Δz , si $dh/dz < 0$, la parcela tendrá un valor de h superior al del ambiente que la rodea, y supondremos también que se encuentra a la misma presión. Si tanto el ambiente como la parcela están en condiciones de saturación, y las presiones son iguales, la parcela, que tiene mayor valor de h , deberá tener tanto mayor temperatura como mayor humedad específica. (¿porqué?). La parcela estará por ende a mayor temperatura virtual y continuará ascendiendo.

En consecuencia, la condición de inestabilidad absoluta, aún a desplazamientos verticales pequeños, será

$$\frac{\partial h}{\partial z} < 0, \text{ inestable en condiciones de ambiente saturado.}$$

Inestabilidad condicional.

La condición adiabática puede ser razonable para pequeños ascensos de aire seco. En el caso de aire con vapor de agua, un ascenso de aire adiabático, con la consiguiente disminución de temperatura, podría implicar la condensación de vapor de agua, al llegar su presión parcial a condiciones de condensación (aire saturado). Se tendrá entonces una importante realización de calor de cambio de fase. Como se expresó, la propiedad que se conserva en ascensos que son adiabáticos excepto en lo referente al calor de cambio de fase que se libera al condensar vapor, será la energía estática húmeda, $h \equiv c_p T + gz + Lq$

La condensación disminuye q , pero aumenta $c_p T$ en una cantidad igual al calor de cambio de fase realizado.

Ahora bien, conviene definir, en cada nivel de una columna vertical de la atmósfera, la energía estática húmeda de saturación, definida como

$$h^* \equiv c_p T + gz + Lq_{sat},$$

donde q_{sat} es la humedad de saturación a la presión y temperatura a la que se encuentra el aire. Notar que esta no es la humedad que efectivamente podría tener el aire.

La condición de estabilidad o inestabilidad condicional es:

$$\frac{\partial h^*}{\partial z} < 0 \rightarrow \text{inestable} ; \quad \frac{\partial h^*}{\partial z} > 0 \rightarrow \text{estable}$$

Analicemos el caso $\partial h^*/\partial z < 0$. Supongamos que una parcela próxima al suelo, relativamente húmeda pero no saturada, asciende y se satura. Si no se mezcla con aire del entorno, y el proceso es adiabático excepto por la realización de calor latente, mantendrá el valor de h original, h_{orig} . Si $\partial h^*/\partial z < 0$, en determinado nivel la parcela tendrá una energía estática húmeda superior a la energía estática húmeda del ambiente al mismo nivel (ver figura). Se tendrá entonces

$$h_{orig} > h^*$$

$$c_p T_{parcela} + gz + Lq_{parcela} > c_p T_{ambiente} + gz + Lq_{sat}(T_{ambiente}, p),$$

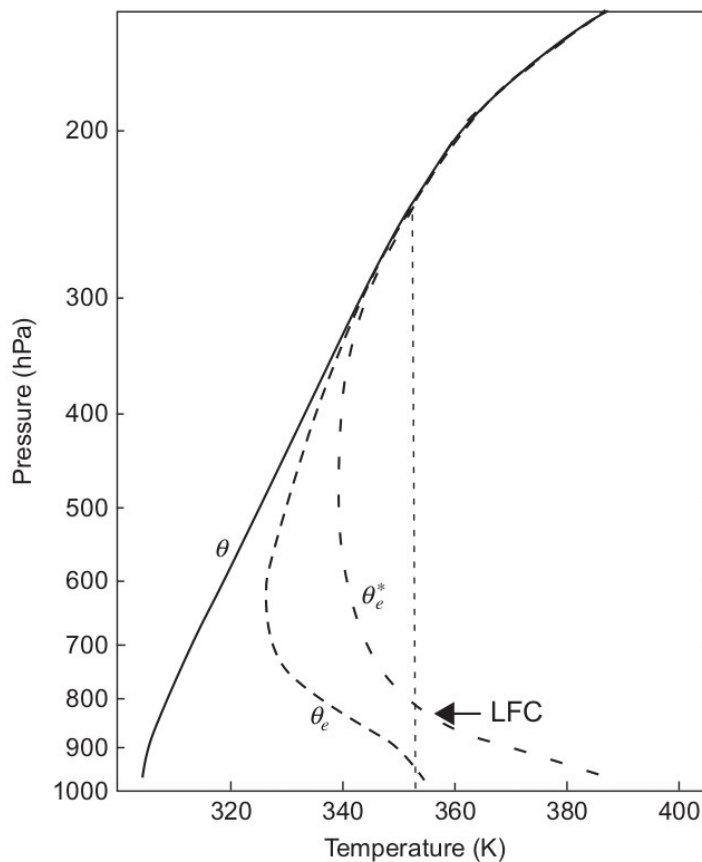
$$c_p T_{\text{parcela}} + L q_{\text{parcela}} > c_p T_{\text{ambiente}} + q_{\text{sat}}(T_{\text{ambiente}}, p)$$

Supongamos que además la parcela saturó. Se tendrá entonces que $T_{\text{parcela}} > T_{\text{ambiente}}$, pues a igualdad de presiones, la humedad de saturación es creciente con la temperatura. (de ser la temperatura de la parcela menor que la del ambiente, tanto q_{parcela} como T_{parcela} serían inferiores a las respectivas variables del ambiente; y sería absurda la suposición $h_{\text{orig}} > h^*$).

Si $T_{\text{parcela}} > T_{\text{ambiente}}$, y la presión de la parcela es la misma que la del medio ambiente, la parcela es mas liviana y deberá continuar subiendo.

De modo que el desplazamiento hacia arriba continúa por flotación neta (inestabilidad) a condición de que la parcela llegue a subir a un nivel en el que h_{orig} "cruce" la línea $h^*(z)$ ("nivel de convección libre", o "free convection level", FCL), y que la misma esté saturada (que halla subido su "lifting condensation level", (LCL), nivel en el que la expansión adiabática la lleva a una presión y temperatura y en la que la humedad original es la de saturación). Cuando al ascender vuelve a cruzar la línea $h^*(z)$, deja de darse la condición $h_{\text{orig}} > h^*$, este es el "nivel de no flotación", (NBL).

El razonamiento es algo simplificado en el sentido de que la parcela sí podría mezclar algo de aire en su ascenso.



Energía potencial convectiva disponible (CAPE)

La aceleración vertical de una parcela que flota, es:

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}$$

suponemos que la parcela adquiere la presión del ambiente. Su densidad es por otra parte la densidad del ambiente mas una perturbación,

$$\rho = \bar{\rho} + \rho'$$

Por otra parte, el ascenso de la partícula no es un movimiento de gran escala hidrostático, pero suponemos que el estado básico si es hidrostático;

$$-\bar{\rho} g - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0$$

Se tiene entonces

$$(\bar{\rho} + \rho') \frac{dw}{dt} = -\bar{\rho} g - \rho' g - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\rho' g ;$$

dividiendo entre

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) \frac{dw}{dt} = -\frac{\rho'}{\bar{\rho}} g$$

y considerando $1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx 1$

se llega a una relación para el calculo de la velocidad vertical,

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{\rho'}{\bar{\rho}} g$$

el segundo término es la diferencia entre el peso de la partícula y la presión hidrostática del ambiente; y se denomina “flotación neta” o “buoyancy”.

Asimismo que la parcela y el ambiente están a la misma presión, la ecuación del estado del gas ideal permite probar:

$$-\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\rho_{\text{parcela}} - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{T_{\text{vparcela}} - \bar{T}_v(z)}{\bar{T}_v(z)} ,$$

con lo cual la flotación neta se puede expresar como:

$$b \equiv \frac{T_{vparcela} - \bar{T}_v(z)}{\bar{T}_v(z)} g \quad ,$$

y la velocidad vertical obedece a la relación

$$\frac{dw}{dt} = \frac{T_{vparcela} - \bar{T}_v(z)}{\bar{T}_v(z)} g$$

Aproximando la derivada total de la velocidad vertical por su transporte vertical, es decir,

$$\frac{dw}{dt} \approx w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \quad ,$$

se tendrá

$$w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{T_{vparcela} - \bar{T}_v(z)}{\bar{T}_v(z)} g$$

La integración vertical de esta ecuación entre el nivel de convección libre y el de no flotación (los niveles de flotación neta positiva), permite demostrar:

$$\Delta \frac{w^2}{2} = \int_{FCL}^{NBL} \frac{T_{vparcela} - \bar{T}_v(z)}{\bar{T}_v(z)} g dz$$

la expresión a la derecha se denomina **energía potencial disponible debido a la convección (CAPE)**.

$$CAPE \equiv \int_{FCL}^{NBL} \frac{T_{vparcela} - \bar{T}_v(z)}{\bar{T}_v(z)} g dz$$

El valor de la velocidad máxima obtenido de esta relación se correlaciona con la real, si bien lo sobre estima debido a :

- en su ascenso la parcela toma masa del ambiente y sus propiedades se mezclan con las de este, disminuyendo la diferencia $T_{parcela} - \bar{T}(z)$ que resulta del valor correspondiente, en cada altura, a una expansión adiabática de la parcela desde su nivel original de la parcela hasta el nivel z.
- el agua líquida producto de la condensación contribuye con algo de flotación negativa.
- Se tiene fricción.

De todos modos la CAPE y la elevación del NBL son claros indicadores de probables tormentas de mesoescala convectivas. Las tormentas convectivas marinas tropicales tienen valores de CAPE l orden de 500m2/s2; en zonas continentales húmedas y de gran potencial convectivo, como el medio este norteamericano o la Cuenca del Río de la Plata, pueden llegar a valores mayores. Valores de CAPE de 4 cifras y elevaciones del NBL hasta cerca del tope de la tropósfera **deben poner en estado de alerta máxima a un servicio meteorológico.**

Ejercicio: demostrar, utilizando la ecuación de estado del gas ideal para el aire húmedo, la relación diferencial hidrostática, y la fórmula de cambio de variable de integrales,

$$CAPE = \int_{p(NBL)}^{p(FCL)} R_d (T_{vparcela} - \overline{\overline{T}}_v(z)) (\ln p)$$

Gradientes verticales de temperatura condiciones no saturadas y saturadas. Temperatura potencial equivalente en condiciones saturadas.

Como se expresó, el ascenso de una parcela en condiciones adiabáticas, sin mezcla con el ambiente, conserva las propiedades s y q .

Se demuestra entonces que

$$\frac{\partial T_{\text{parcela}}}{\partial z} = -\frac{g}{c_p} \quad ; \quad \text{el valor } g/c_p, \text{ opuesto a la derivada de la temperatura de la parcela respecto}$$

a z en el proceso de ascenso descrito, se denomina tasa de aumento adiabática no saturada (unsaturated adiabatic lapse rate). A veces se expresa “seca” por “no saturada” lo cual no es correcto.

En el caso de que la parcela se encuentre no saturada, conservará la magnitud q , en la cual q

En condiciones de ascenso pseudo adiabática saturada (ver ejercicio anterior) h se conserva, y se tiene

$$dh = c_p dT + g dz + L dq_{\text{sat}} = 0 \quad .$$

Usando la aproximación $q_{\text{sat}} \approx \frac{R_d}{R_v} \frac{p_{\text{vapor}}}{p} = 0.622 \frac{p_{\text{vapor}}}{p}$,

$$dh = 0 = c_p dT + g dz + 0.622 L d\left(\frac{p_{\text{vapor}}}{p}\right) = c_p dT + g dz + 0.622 L \left(\frac{dp_{\text{vapor}}}{p} - p_{\text{vapor}} \frac{dp}{p^2}\right) \quad .$$

como $p_{\text{vapor}} = p_{\text{vapor}}(T)$, y de la relación Clausius Clapeyron se tiene

$$dp_{\text{vapor}} = L \frac{p_{\text{vapor}}}{R_v T^2} dT \quad ; \quad 0.622 \frac{dp_{\text{vapor}}}{p} = 0.622 p_{\text{vapor}} \frac{1}{p} \frac{L}{R_v T^2} dT = L \frac{q_{\text{sat}}}{R_v T^2} dT \quad :$$

y considerando $0.622 p_{\text{vapor}} \frac{dp}{p^2} = q_{\text{sat}} \frac{dp}{p} = -q_{\text{sat}} \frac{\rho g dz}{\rho R_d T}$

se llega $dh = 0 = c_p dT + g dz + L \left(L \frac{q_{\text{sat}}}{R_v T^2} dT + \frac{1}{R_d T} g dz \right)$; de donde

$$\frac{\partial T_{\text{parcela}}}{\partial z} = -\frac{g}{c_p} \frac{\left(1 + \frac{L q_{\text{sat}}}{R_v T}\right)}{\left(1 + \frac{L^2 q_{\text{sat}}}{c_p R_v T^2}\right)}$$

el opuesto a esta magnitud se denomina tasa de aumento pseudo adiabática saturada (pseudo adiabatic saturated lapse rate, o saturated lapse rate por brevedad. .

Ejercicio: estimar el orden de magnitud de la expresión anterior

Temperatura potencial equivalente

Como se expresó, en condiciones de expansión adiabática, una parcela no saturada conserva s y la temperatura potencial q .

En condiciones pseudo adiabáticas saturadas, se tiene

$$dh = c_p dT + g dz + L dq_{sat} = 0$$

considerando, mediante la regla hidrostática,

$$g dz = - \frac{dp}{\rho} = - R_d T \frac{dp}{p} ;$$

$$c_p T \left(\frac{dT}{T} - \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} + \frac{d L q_{sat}}{c_p T} \right) = 0$$

operando con el último sumando,

$$\frac{d L q_{sat}}{c_p T} = d \left(\frac{L q_{sat}}{c_p T} \right) + L q_{sat} \frac{dT}{c_p T^2} ; \text{ se tiene}$$

$$\frac{dT}{T} \left(1 + \frac{L q_{sat}}{c_p T} \right) - \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} + d \frac{L q_{sat}}{c_p T} = 0$$

Considerando que $1 + \frac{L q_{sat}}{c_p T} \approx 1$, se tiene la igualdad aproximadamente

$$\frac{dT}{T} - \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} + d \frac{L q_{sat}}{c_p T} = 0 ; \text{ que conduce a la conservación de la magnitud}$$

$$\theta_{eqi} \equiv \theta e^{\frac{L q_{sat}}{c_p T}}$$

en condiciones SATURADAS y pseudoadiabáticas.

EMAGRAMA $T \log p$

Notar que θ , q_{sat} y θ_{eq} son funciones de p y T , al menos en estados de equilibrio termodinámico.

En consecuencia, los procesos de ascenso adiabático no saturado, sin mezcla, serán líneas de θ constante en un diagrama T, p , o bien en un diagrama $T, -\ln(p/p_0)$ (*¿porqué?*). Conociendo la humedad de una parcela, digamos $q_{parcela}$, Si la posición de esta parcela en el diagrama $T, -\ln(p/p_0)$ está a la izquierda de la línea $q_{sat} = q_{parcela}$, la parcela no estará saturada. Al ascender seguirá una línea θ cte, hasta que llegue a la línea q_{sat} correspondiente al valor $q_{parcela}$. En este punto se tendrá el nivel de condensación, **LCL**. Luego, la parcela ascenderá por una línea θ_{eq} constante.

Agregando el valor $0.608qT$; se tendrá la temperatura virtual de la parcela en su proceso de ascenso, con las idealizaciones de inmiscibilidad y de condiciones cuasi adiabáticas saturadas en niveles sobre el **LCL**. Si además dibujamos en el diagrama el perfil $T_v(z)$ del ambiente, obtenido de un radio sondeo o de una previsión numérica, se podrá determinar si existe un nivel de flotabilidad (**FCL**), o sea inestabilidad condicional. En este caso se determinará también el nivel de no flotabilidad (**NBL**) y mediante la integración de la diferencia $R_d(T_{v\text{parcela}} - \bar{T}_v(z))$ se puede obtener la **CAPE**.

